Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Introducción a los Cardinales Compactos

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO
P R E S E N T A:

OSVALDO GUZMÁN GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

México DF 2011

Mr Seki! I have discovered the purpose of mathematics...
To convey things that cannot be conveyed in words.

Noriko (The manga guide to calculus).

El hombre no puede ganar nada sin dar primero algo a cambio, para crear, algo de igual valor debe perderse. Esa es la primera ley de la alquimia de la equivalencia de intercambio. En ese entonces, realmente creíamos que esa era la única verdad del universo... Pero el mundo no es perfecto, y la ley esta incompleta. La equivalencia de intercambio no abarca todo lo que sucede aquí... pero aún así, escojo creer en su principio, que todas las cosas tienen un precio, que hay un porque y un flujo... y un cíclo, que el dolor que sufrimos tiene una recompensa, y que cualquiera que persevere con determinación, obtendrá algo de valor a cambio, incluso si no es lo que esperaba. Ya no pienso que la equivalencia de intercambio sea una ley del mundo, creo que es una promesa entre mi hermano y yo, una promesa de que algún día... ¡nos veremos otra vez!

Una lección sin dolor no tiene sentido. Eso es por que no se puede ganar algo sin sacrificar algo a cambio. Sin embargo, una vez que hayas soportado el dolor y lo hayas superado, ganarás un corazón que es más fuerte que todo lo demás. Así es... ¡un corazón de acero!

Alphonse y Edward Elric

Índice general

A la memoria de mi profesor José Alfredo Amor y Montaño, que el cariño que todos le tuvimos es mayor que cualquier cardinal grande.

Agradecimientos

Hay mucha gente a las que me gustaría agradecerle, pues he sido apoyado por un sin número de personas, que me han ayudado a llegar hasta este momento. En primer lugar, quiero darles un gran, gran agradecimiento a mi mamá y mi hermano, pues siempre han estado conmigo sin importar que suceda, juntos hemos pasado momentos muy difíciles pero se que siempre estaremos juntos. ¡Muchas gracias!.

También quiero darles un gran agradecimiento a Rafa y José Alfredo, pues ellos fueron quienes me llevaron por este bonito y tierno camino de la teoría de conjuntos. Ellos no solo me enseñaron desde los axiomas básicos de ZF^-, hasta la magia de forcing y los ultraproductos, pues también aprendí de ellos un gran cariño y amistad. Le agradezco enormemente a Rafa por los cursos que me dio, y después por haberme dado la oportunidad de ser su ayudante, en los que también aprendí muchísimo. Tristemente, José Alfredo ya no esta aquí, pero nunca dejaré de estar le agradecido por todo lo que me enseño y los grandes momentos que pase con él.

A mis amigos Luis, con quién compartí muchos seminarios çlandestinosz quién me ayudo a pasar esta tesis en latex (que no lo hubiera logrado sin él), a Manuel Lara con quién también estuve en muchos seminarios y con quién di muchas clases y ambos aprendimos mucho en el proceso. A Mao quién me ha enseñado mucho, no solo de lógica de segundo orden y teoría de tipos, si no también de amistad y compañerismo. A Manuel Zorrilla a quién le debo mucho, y siempre ha sido un gran ejemplo a seguir (a pesar de que se pasó al ”lado obscuro”del álgebra).

A mi más grande y cute amiga Claudy por su mega linda amistad y por todo lo divertido que pasamos. Espero, que aunque estemos separados, siempre seamos amigos.

El heróico valor de mis sinodales al revisar mi tesis, tampoco debe pasar sin ser agradecido.

Tengo que darle un agradecimiento muy especial a todos mis alumnos, pues ellos siempre me han exigido esforzarme más y creo que me han enseñado más ellos a mi que yo a ellos.

Introducción

Los cardinales inaccesibles son aquellos cardinales regulares no numerables cerrados bajo la exponenciación cardinal. Esto es equivalente a ser regular y punto fijo de la funcional Beth. Sin embargo, el primer punto fijo de $\beth$ no es inaccesible, tampoco lo es el segundo, ni el tercero, ni siquiera el ω_1-ésimo lo es. De hecho, si κ es inaccesible, entonces es el κ-ésimo punto fijo de $\beth$. El primer punto fijo de Beth ya es muy grande, de modo que el primer inaccesible ya debe ser inmenso.

Los inaccesibles resultan ser tan grandes que es imposible probar su existencia desde ZFC. Sabemos que la Hipótesis del Continuo tampoco puede probarse ni refutarse desde ZFC. Sin embargo, la situación con los inaccesibles es aún más impactante que la de la Hipótesis del Continuo, pues mientras que desde ZFC podemos probar la consistencia de ésta, no es posible demostrar la consistencia de la existencia de un inaccesible, en cambio es fácil mostrar que su no existencia es consistente. Quizá esto se deba simplemente a que no existen. En una ocasión uno de mis sinodales, Osvaldo Téllez (que en ese entonces daba un curso de teoría de conjuntos junto con Rafael Rojas, al que yo asistía), nos dejó de tarea probar que existía un inaccesible, yo lo intenté y fallé miserablemente.

Hausdorff una vez comentó ([Kanamori] página 16) que el primer débilmente inaccesible tendría un tamaño tan exorbitante que difícilmente tendría alguna utilidad en la teoría de conjuntos (como un pequeño comentario,es sencillo (usando forcing) probar que $2^{\aleph_0}$ puede ser débilmente inaccesible (esto asumiendo la existencia de un inaccesible) a pesar de esto creo que la observación de Hausdorff sigue siendo importante, o podríamos cambiar débilmente inaccesible por inaccesible).

Actualmente existe toda una jerarquía de *cardinales grandes* de los cuales los inaccesibles y los débilmente inaccesibles son los más pequeños. ¿Cuál es la razón de esto?¿Por qué preocuparse por algo de lo que ni siquiera podemos probar su consistencia?

Existe una cantidad no numerable de razones, una (pero no la única) que resalta es que la historia ha mostrado que la creencia de Hausdorff es falsa,pues varias ramas de las matemáticas llevan naturalmente al reino de los cardinales grandes. Por ejemplo, estudiando teoría de gráficas encontramos los cardinales débilmente compactos, conociendo sobre teoría de la medida, llegamos a los cardinales medibles, mediante la teoría de modelos no tardamos en encontrar los cardinales compactos, las álgebras universales nos conducen a los cardinales de Jónsson, la teoría de categorías nos guía al principio de Vopěnka...

Esta tesis trata principalmente sobre los cardinales compactos, los cuales ya están bastante arriba en la jerarquía de los cardinales grandes y es el primero de los çardinales monstruosamente grandes", según Rafael Rojas y José Alfredo Amor. La razón por la que escogí este tema está relacionada con el párrafo anterior. Cuando estaba buscando un tema para trabajar, Manuel Lara y yo impartimos un curso de lógica en el que vimos el teorema de compacidad y ultraproductos, y me enteré que una versión de compacidad para lenguajes infinitarios llevaba naturalmente a encontrarse con un nuevo (para mí) tipo de cardinal grande. Así traté de encontrar algunas propiedades de estos cardinales y me pareció un tema muy interesante. En principio quería tratar más cardinales grandes pero ya no fue posible.

El objetivo de la tesis es introducir de una manera natural los cardinales compactos, viéndolos como una consecuencia de querer extender compacidad a otros lenguajes. Habiendo realizado esto, paso a ver algunas equivalencias de los compactos que son análogas a equivalencias del teorema de compacidad. En parte, la tesis intenta investigar qué resultados "sobreviven.ªl pasar a lenguajes infinitarios, qué hay que cambiar y qué ya no es cierto.

Esta tesis está divida en 8 pequeños capítulos , el primero intenta mostrar que el trabajar con lenguajes con fórmulas infinitas puede ser interesante, pero es necesario tener cuidado. El segundo introduce formalmente estos lenguajes así como propiedades sencillas de ellos, este capítulo está basado principalmente en el [Dickmann]. El tercero pretende mostrar que estos lenguajes son mucho más expresivos que el de primer orden que conocemos, esperando así que el lector se dé una idea de lo fuerte que sería tener una versión de compacidad para ellos. La referencia principal para este capítulo son el [Dickmann] y [Bell].En el capítulo 4 se introducen los cardinales compactos y se prueba que son inaccesibles, a partir de aquí las referencias principales son [Rafa], [Jech], [Kanamori] y [Drake]. En el capítulo 5 se empieza a ver la relación que tienen los cardinales compactos con filtros y campos de conjuntos, también se introducen los cardinales medibles y se prueba que todo compacto es medible. Para terminar de ver una equivalencia de los compactos, se requiere obtener una versión del teorema de Łoš para lenguajes infinitarios, y esto se hace en el capítulo 6, así como una equivalencia de medible. En el capítulo 7 se termina la equivalencia empezada en el capítulo 5 y se definen los filtros buenos, los cuales aparecen mucho en la teoría de modelos y son fundamentales para quien quisiera estudiar los cardinales supercompactos. El teorema de compacidad es equivalente al teorema de Tychonoff para espacios Hausdorff de modo que pensé que los cardinales compactos debían tener una equivalencia topológica. Esto resultó ser cierto y sólo había que buscar una modificación de las nociones de compacto y producto para encontrarla, esto es el contenido del capítulo 8. Después se encuentra un epílogo en el que platico sobre otros cardinales grandes. Al final, se encuentra un apéndice donde explico la notación y definiciones básicas, y apéndices que describen lo básico de ultrafiltros, ultraproductos, convergencia de filtros y dos tablas con equivalencias de compacto y medible.

Los prerequisitos para leer este trabajo son los conocimientos sobre la teoría de conjuntos para comprender los conceptos de cofinalidad,cardinales regulares, singulares, inaccesibles... También se requieren conocimientos de teoría de modelos que incluya compacidad, ultraproductos e inmersiones elementales. También es necesario conocer de topología en particular espacios compactos y convergencia de filtros, así como un acercamiento a las de álgebras de Boole. Algunos ejemplos son de álgebra y teoría de gráficas, pero no son esenciales. Sin embargo (quizá con excepción de los temas de conjuntos), no es necesario tener un conocimiento tan profundo sobre estos temas.

Y así estamos por comenzar un increíble viaje destinado a hayar emoción interminable, encontraremos terribles enemigos así como fantásticos amigos y conoceremos conjuntos más allá de toda nuestra imaginación mientras descubrimos la magia y los misterios de un lugar maravilloso... ¡El reino de los cardinales grandes!

1 La prueba confusa que origina todo

Uno de los momentos más emocionantes para todo matemático es cuando prueba por primera vez el teorema de compacidad para la lógica de primer orden. Antes de ver aplicaciones interesantes de este teorema (como los naturales no estándar o los hiperreales), uno se pregunta por la relación que tiene éste con el Axioma de Elección. Elección se necesitó para probar compacidad, pero ¿serán equivalentes o compacidad es una versión débil del Axioma de Elección? Por el momento es fácil probar con compacidad una de las versiones débiles del Axioma de Elección:

AE(FIN) Axioma de Elección para conjuntos de conjuntos finitos

Todo conjunto de conjuntos finitos tiene una función de elección.

Como primer proposición de la tesis veamos que:

Proposición 1.1 ***El teorema de compacidad implica el Axioma de Elección para conjuntos de conjuntos finitos.***

Prueba:

Sea $a \neq \emptyset$ un conjunto **de conjuntos finitos** tal que $\emptyset \notin a$, veamos que tiene una función de elección. Es claro que podemos suponer que los elementos de a son ajenos. Ahora, sea $\rho = \{E\} \cup \{ c_x \mid x \in \bigcup a \}$,donde E es un símbolo de relación de aridad uno y los demás son símbolos de constante. Definamos el siguiente conjunto de fórmulas:

$$
\begin{array}{rcl}
\Sigma & = & \{ \; c_x \neq c_y \;\mid\; x, y \in \bigcup a \text{ y } x \neq y \; \} \\
& & \text{(que todas las constantes se interpreten distinto)} \\
& \bigcup & \{ \; \bigvee_{x \in b} E(c_x) \;\mid\; b \in a \; \} \\
& & \text{(escogemos un elemento)} \\
& \bigcup & \{ \; E(c_x) \longrightarrow \neg E(c_y) \;\mid\; b \in a,\, x, y \in b \text{ y } x \neq y \; \} \\
& & \text{(que sea sólo uno).}
\end{array}
$$

Notemos que si $b = \{x, y\}$, entonces $E(c_x) \vee E(c_y)$ y $E(c_y) \vee E(c_x)$ están en Σ. Bastaría con que sólo estuviera una, pero entonces tendríamos que *escoger* una. Si Σ fuera satisfacible, podríamos construir una función de elección, pues si $\mathfrak{A} \models \Sigma$ entonces definimos:

$$\begin{array}{rclll} f & : & a & \longrightarrow & \bigcup a \\ f(b) & = & x & & \text{donde } x \in b \text{ y es el único (en } b\text{)} \\ & & & & \text{tal que } \mathfrak{A} \models E(c_x). \end{array}$$

Así, es claro que f es una función de elección. De esta manera, si Σ fuera satisfacible, ya hubiéramos terminado, pero claramente es finitamente satisfacible, por lo que por el teorema de compacidad, Σ es satisfacible.

⋆

Y ahora... ¿dónde usamos que los elementos de a eran finitos? Esta hipótesis fue necesaria cuando definimos a Σ, ya que de otra forma la expresión $\bigvee_{x \in b} E(c_x)$ no sería una fórmula. En estos momentos la hipótesis de que los elementos de a sean finitos parece más un tecnicismo que otra cosa. ¿Y por qué no aceptar fórmulas de longitud infinita? En principio, podríamos; enunciar el siguiente "teorema".

STC) Súper "Teorema" de compacidad

Si Σ es un conjunto de enunciados en una lógica con fórmulas infinitas, entonces:

Σ es finitamente satisfacible si y solo si Σ es satisfacible.

Por lo pronto, podemos probar lo siguiente.

Proposición 1.2 ***Súper Compacidad implica el Axioma de Elección.***

Prueba:

La prueba es la misma que la de la proposición$_{1,1}$ (solo borrando las palabras que están en negritas).

⋆

Sin embargo,hay un problema y es que ¡el súper "teorema" de compacidad es falso! Por ejemplo, tomemos $\rho = \{d\} \cup \{ c_n \mid n \in \omega \}$, donde d y los c_n son símbolos de constante y sea:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \left\{\forall x(\bigvee_{n\in\omega} x = c_n)\right\} \\ &\bigcup \quad \{\quad d \neq c_n \quad | \quad n \in \omega \quad \} \ .\end{aligned}$$

Así, tenemos que Σ es finitamente satisfacible, pero no es satisfacible, por lo que la súper compacidad resultó ser falsa ¡aunque tal vez no esté todo perdido! En el próximo capítulo formalizaremos los lenguajes infinitarios y buscaremos si hay algún análogo de compacidad que sí sea verdadero.

Por cierto, el Teorema de Compacidad resulta no ser equivalente al Axioma de Elección, como puede verse en [Jechc] páginas 97-100.

2 Lenguajes Infinitarios

En el capítulo anterior vimos que los lenguajes con fórmulas infinitas podrían ser muy interesantes, y en éste vamos a dar una definición formal de ellos y veremos algunas de sus propiedades básicas. A partir de ahora, usaremos el Axioma de Elección casi a cada instante.

Aunque sería divertido admitir símbolos funcionales y relacionales de aridad infinita, esto no lo haremos aquí, así que la definición de tipo sigue siendo la misma, y también la de estructura. A partir de ahora ρ siempre denotará a un tipo.

Primero describamos informalmente nuestro lenguaje. Si κ y λ son cardinales infinitos, entonces $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ será como el lenguaje de primer orden de ρ que todos conocemos, pero podremos formar la conjunción y disyunción de menos de κ fórmulas, y si tenemos una fórmula y menos de λ variables, entonces podremos cuantificarla existencial y universalmente con esas variables.

En el lenguaje de primer orden teníamos una cantidad numerable de variables, antes esto era suficiente, ya que como nuestras fórmulas eran finitas no necesitábamos más. Toda fórmula de nuestro nuevo lenguaje tendrá una longitud menor o igual que $\kappa + \lambda$, así que basta con tener esta cantidad de variables. Definimos $VAR_{\kappa\lambda} = \{ \ v_\xi \ \mid \ \xi \in \kappa + \lambda \ \}$ y ahora sí pasemos a definir un lenguaje infinitario rigurosamente.

Definición 2.1 *El lenguaje $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ es un conjunto de símbolos de la forma:*

$$\begin{array}{rcl} L_{\kappa\lambda}(\rho) & = & VAR_{\kappa\lambda} \\ & \bigcup & \{ \bigvee, \bigwedge, \neg, \longrightarrow, \longleftrightarrow \} \\ & \bigcup & \{\exists, \forall\} \\ & \bigcup & \{), (, \ ,\} \\ & \bigcup & \{\approx\} \\ & \bigcup & \rho \end{array}$$

Cuando no sea necesario hacer referencia al tipo, sólo hablaremos de $L_{\kappa\lambda}$. Las definiciones de término y fórmula atómica son las mismas que antes, así que pasemos a definir las fórmulas. A diferencia de la lógica de primer orden, primero definiremos lo que es una fórmula primitiva.

Definición 2.2 *$PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$ es el menor conjunto con respecto a la contención tal que:*

a) *contiene al conjunto de las fórmulas atómicas;*

b) *si* $\sigma, \varphi \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$, *entonces*
$$(\neg\sigma), (\sigma \longrightarrow \varphi) \text{ y } (\sigma \longleftrightarrow \varphi) \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho);$$

c) *si* $\Sigma \subseteq PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$ *y* $|\Sigma| < \kappa$, *entonces*
$$\left(\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \sigma\right), \left(\bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \sigma\right) \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho);$$

d) *si* $X \subseteq VAR_{\kappa\lambda}$, $|X| < \lambda$ *y* $\sigma \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$, *entonces*
$$\left(\forall_{x\in X} x\sigma\right), \left(\exists_{x\in X} x\sigma\right) \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho).$$

A los elementos de $PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$ *los llamamos* fórmulas primitivas.

Es fácil ver que tal conjunto existe, pues basta tomar al conjunto de las fórmulas átomicas y cerrarlo bajo los conectivos y cuantificadores. Es sencillo ver que esta construcción termina a lo más en $(\kappa + \lambda)^+$ pasos.

De esta manera $L_{\omega\omega}(\rho)$ es la lógica que ya conocíamos. En $L_{\kappa\omega}(\rho)$ podemos hacer menos de κ conjunciones y disyunciones pero sólo cuantificar sobre una cantidad finita de variables, en cambio en $L_{\omega\kappa}(\rho)$ podemos cuantificar sobre menos de κ variables, pero sólo podemos hacer una cantidad finita de conjunciones y disyunciones.

Haremos los clásicos abusos de notación que hacemos siempre como no poner todos los paréntesis, usar $=$ en vez de $\approx$, (sin embargo, en ocasiones sigo usando el símbolo $\approx$, cuando creo que se ve mejor que $=$), etc. las definiciones de variable libre y acotada son las mismas que en la lógica de primer orden y si $\sigma \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$, denotaremos por $VL(\sigma)$ al conjunto de las variables libres de σ. Como en la lógica de primer orden, se puede probar que basta con que nos quedemos con los símbolos $\neg, \bigvee$ y $\exists$.

Como es de esperarse, hay un principio de inducción y recursión para términos y fórmulas primitivas los cuales son las obvias generalizaciones de la lógica de primer orden.

Proposición 2.3 Principio de Inducción para $PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$

Sea $S \subseteq PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$ ***tal que***

a) ***las fórmulas atómicas están en*** S;

b) ***si*** $\sigma, \varphi \in S$, ***entonces*** $(\neg\sigma), (\sigma \longrightarrow \varphi)$ ***y*** $(\sigma \longleftrightarrow \varphi) \in S$;

c) ***si*** $\Sigma \subseteq S$ ***y*** $|\Sigma| < \kappa$ ***entonces*** $\left(\bigvee_{\sigma\in\Sigma} \sigma\right)$, $\left(\bigwedge_{\sigma\in\Sigma} \sigma\right) \in S$.

d) ***si*** $X \subseteq VAR_{\kappa\lambda}$***,*** $|X| < \lambda$ ***y*** $\sigma \in S$ ***entonces*** $\left(\forall_{x\in X} x\sigma\right)$, $\left(\exists_{x\in X} x\sigma\right) \in S$.

Entonces se tiene que $S = PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$.

Antes de llegar a la definición de fórmula, veamos el siguiente ejemplo. Sea $\rho = \{ \ s_n \ | \ n \in \omega \ \}$,donde cada s_n es un símbolo de relación de aridad 1, la siguiente es una fórmula primitiva en $L_{\omega_1\omega}(\rho)$:

$$\sigma = \bigvee_{n\in\omega} s_n(v_n)$$

Notemos que esta fórmula primitiva no se puede volver enunciado en $L_{\omega_1\omega}$, pues tiene más variables libres de las que podemos cuantificar. Esto es justo lo que **no** queremos para una fórmula, así que definimos lo siguiente.

Definición 2.4

a) Sea $\sigma \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho)$. *Decimos que* σ *es una* fórmula de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ *si y solo si* σ *tiene menos de* λ *variables libres.*

Es decir, si y solo si $|VL(\sigma)| < \lambda$.

b) $FORM_{\kappa\lambda}(\rho) = \{ \ \sigma \in PFORM_{\kappa\lambda}(\rho) \ | \ \sigma$ *es fórmula* $\}$.

Afortunadamente, con esta definición las fórmulas atómicas sí son fórmulas. Es claro de la definición que si $\kappa \leq \kappa'$ y $\lambda \leq \lambda'$, entonces se tiene que $FORM_{\kappa\lambda}(\rho) \subseteq FORM_{\kappa'\lambda'}(\rho)$. Definiremos un enunciado como una fórmula sin variables libres y $ENUN_{k\lambda}(\rho)$ será el conjunto de éstos. Por inducción, se puede ver que una fórmula en $L_{\kappa\lambda}$ tiene a lo más κ variables libres y si éste es un cardinal regular, entonces tiene menos de κ.

Una fórmula en $L_{\omega\omega_1}(\rho)$ tiene sólo una cantidad finita de variables libres pero podemos cuantificar sobre una cantidad infinita de variables, lo que hace a la mayoría de los cuantificadores inútiles. Así, $L_{\omega\omega_1}(\rho)$ no tiene más expresividad que $L_{\omega\omega}(\rho)$. Esto sucede de manera más general y por eso es que frecuentemente se pide que $\lambda \leq \kappa$.

La definición de satisfacción se define de la manera esperada, pero puede consultarse en [Dickmann] páginas 66-68).

Ahora, daremos otros dos lenguajes más: en el que se puede tomar conjunciones y disyunciones de cualquier tamaño y en el que además se puede cuantificar sobre cualquier cantidad de variables:

Definición 2.5

a) *Definimos el lenguaje* $L_{OR\lambda}(\rho)$ *como el lenguaje cuyas fórmulas son*

$$FORM_{OR\lambda}(\rho) = \bigcup_{\kappa \in OR} FORM_{\kappa\lambda}(\rho).$$

b) *Definimos a* L_{OROR} *como el lenguaje cuyas fórmulas son*

$$FORM_{OROR}(\rho) = \bigcup_{\kappa,\lambda \in OR} FORM_{\kappa\lambda}(\rho).$$

Por el comentario de antes, no tiene caso definir $L_{\kappa OR}(\rho)$. Los conceptos de teoría de una estructura y de equivalencia elemental son los que se esperan.

Definición 2.6 *Si* $A, B \in V_\rho$ *entonces:*

a) *definimos la* $\kappa\lambda$ teoría de $\mathfrak{A}$ *como*

$$Th_{\kappa\lambda}(\mathfrak{A}) \quad = \quad \{ \quad \sigma \in ENUN_{\kappa\lambda}(\rho) \quad | \quad \mathfrak{A} \models \sigma \quad \} \ ,$$

b) *decimos que* $\mathfrak{A}$ *y* $\mathfrak{B}$ *son* $\kappa\lambda$ elementalmente equivalentes *si y solo si*

$Th_{\kappa\lambda}(\mathfrak{A}) = Th_{\kappa\lambda}(\mathfrak{B})$ *y esto lo denotamos como* $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$.

Las mismas definiciones aplican para $L_{OR\lambda}(\rho)$ y $L_{OROR}(\rho)$. Debe ser claro que el teorema del homomorfismo sigue siendo válido en cualquiera de estos lenguajes (hay que notar que la definición de homomorfismo no cambia), la prueba de [Amorc] páginas 22-25 se generaliza sin problemas a la lógica infinitaria.

Proposición 2.7 Teorema del Homomorfismo

Sean $h : A \longrightarrow B$ ***un homomorfismo,*** $\sigma \in FORM_{OROR}(\rho)$ ***y*** $a_0, a_1, ..., a_\xi, ...$ ***elementos de*** A.

a) ***Si*** σ ***no tiene*** $\approx$ ***ni cuantificadores, entonces:***

$\mathfrak{A} \models \sigma\,(a_0, a_1, ..a_\xi, ..)$ ***si y solo si*** $\mathfrak{B} \models \sigma\,(h\,(a_0)\,, h\,(a_1)\,, ..h\,(a_\xi)\,, ..)\,.$

b) ***Si*** σ ***no tiene cuantificadores y*** h ***es un monomorfismo, entonces:***

$\mathfrak{A} \models \sigma\left(a_0, a_1, ..a_\xi, ..\right)$ ***si y solo si*** $\mathfrak{B} \models \sigma\left(h\left(a_0\right), h\left(a_1\right), ..h\left(a_\xi\right), ..\right).$

$c)$ ***Si*** σ ***no tiene*** $\approx$ ***y*** h ***es un epimorfismo, entonces:***

$\mathfrak{A} \models \sigma\left(a_0, a_1, ..a_\xi, ..\right)$ ***si y solo si*** $\mathfrak{B} \models \sigma\left(h\left(a_0\right), h\left(a_1\right), ..h\left(a_\xi\right), ..\right).$

$d)$ ***Si*** h ***es un isomorfismo, entonces:***

$\mathfrak{A} \models \sigma\left(a_0, a_1, ..a_\xi, ..\right)$ ***si y solo si*** $\mathfrak{B} \models \sigma\left(h\left(a_0\right), h\left(a_1\right), ..h\left(a_\xi\right), ..\right).$

⋆

Como un caso particular del inciso $d)$ tenemos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ hacen verdaderos a los mismos enunciados y así se tiene lo siguiente.

Corolario 2.8 ***Si*** $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, ***entonces*** $\mathfrak{A} \equiv_{OROR} \mathfrak{B}$.

⋆

Hay muchas estructuras elementalmente equivalentes pero no isomorfas, ¿y que pasa con $\equiv_{OROR}$? ¿Ahora sí será cierto el recíproco del corolario anterior? Resulta que sí.

Proposición 2.9 ***Sean*** $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\rho$ ***tal que*** $|A| = \kappa$ ***y sea*** $\mu = \kappa + |\rho|$. ***Si*** $\mathfrak{A} \equiv_{\mu^+\kappa^+} \mathfrak{B}$, ***entonces*** $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Prueba:

Supongamos que $A = \{ a_\alpha \mid \alpha \in \kappa \}$ y recordemos el siguiente teorema cuya prueba puede verse en [Hodgesc] página 13.

Si $f : A \longrightarrow B$ entonces f es un monomorfismo si y solo si para cualquier fórmula literal (fórmula atómica o una negación de una atómica) y $a_1, ..., a_n \in A$ si $\mathfrak{A} \models \sigma\left(a_1, ..., a_n\right)$ entonces $\mathfrak{B} \models \sigma\left(f\left(a_1\right), ..., f\left(a_n\right)\right).$

Así, para crear un isomorfismo sólo debemos de preocuparnos en encontrar una función que resulte sobre y cumpla lo anterior con respecto a las fórmulas literales. Con esta motivación, definimos la fórmula:

$$\sigma = \underset{\alpha\in\kappa}{\exists x_\alpha}(\forall y(\bigvee_{\alpha\in\kappa} y = x_\alpha) \wedge \bigwedge_{\substack{\varphi\in LIT \\ \text{y } \mathfrak{A}\models\varphi(a_{\alpha_1}...a_{\alpha_n})}} \varphi(x_{\alpha_1}...x_{\alpha_n})),$$

donde LIT es el conjunto de literales. Sabemos que hay a lo más $|\rho| + \aleph_0$ literales, por lo que la conjunción tiene tamaño a lo más μ, y así $\sigma \in FORM_{\mu^+\kappa^+}(\rho)$. Claramente $\mathfrak{A} \models \sigma$ (pues si interpretamos a x_α como a_α entonces la fórmula es cierta) por lo que $\mathfrak{B} \models \sigma$. Para cada $\alpha \in \kappa$, sea b_α tal que .ªl sustituir x_α por b_α la fórmula es cierta". Ahora, es claro lo que tenemos que hacer:

$$\begin{array}{rcl} h & : & A \longrightarrow B \\ h(a_\alpha) & = & b_\alpha \end{array}$$

La fórmula σ fue construida justamente para que h resulte sobre y suceda lo buscado para las fórmulas literales, por lo que h es un isomorfismo.

⋆

Con esto podemos concluir lo siguiente:

Corolario 2.10 $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ ***si y solo si*** $\mathfrak{A} \equiv_{OROR} \mathfrak{B}$.

⋆

Sin embargo, como probaremos en el próximo capítulo, para cualesquiera κ y λ hay dos estructuras $\kappa\lambda$ elementalmente equivalentes pero no isomorfas. También tenemos las nociones de $\kappa\lambda$ inmersión, subestructura y extensión elemental que se obtienen al aceptar fórmulas de $L_{\kappa\lambda}$ en las definiciones de inmersión, subestructura y extensión elemental (véase el apéndice de notación).

3 ¡A estrenar la nueva lógica!

Ahora veremos algunas de las sorpresas que nos dan estas nuevas lógicas. En particular, compararemos su poder expresivo con el de la lógica clásica de primer orden. Aunque el objetivo de esta tesis no es profundizar en la lógica infinitaria, sí veremos algunas de las características que tiene. Este capítulo usa varios resultados de ultrafiltros y ultraproductos, los cuales pueden consultarse en los apéndices correspondientes.

Definición 3.1 *Sea $K \subseteq V_\rho$,*

a) Decimos que K es $EC_{\kappa\lambda}$ si y solo si hay $\sigma \in ENUN_{\kappa\lambda}(\rho)$

tal que $K = MOD(\sigma)$.

b) Decimos que K es $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$ si y solo si hay $\Sigma \subseteq ENUN_{\kappa\lambda}(\rho)$

tal que $K = MOD(\Sigma)$.

Lo que EC abrevia es clase elemental en inglés. Escribiremos EC y $EC(\Delta)$ en vez de $EC_{\omega\omega}$ y $EC_{\omega\omega}(\Delta)$. En el libro de [Bell] páginas 92-101 se prueba que las clases $EC(\Delta)$ son cerradas bajo ultraproducto (es decir, si K es $EC(\Delta)$, entonces el ultraproducto de elementos de K es un elemento de K) y equivalencia elemental (toda estructura elementalmente equivalente a un elemento de K pertenece a K) y más adelante probaremos que estas propiedades las caracteriza. Así, para probar que K no es $EC(\Delta)$ bastará verificar que no es cerrada bajo ultraproductos o bajo equivalencia elemental. Además, si K es EC entonces también lo es $V_\rho - K$ y si tanto K como $V_\rho - K$ son $EC(\Delta)$ entonces ambas son EC. De manera que una forma de probar que K es $EC(\Delta)$ pero no es EC es probar que $V_\rho - K$ no es $EC(\Delta)$ .En caso de que K sea $EC_{\kappa\lambda}$, denotaremos con σ_K a la fórmula de $L_{\kappa\lambda}$ tal que $K = MOD(\sigma_K)$.

Tomaremos el tipo $\rho = \{0, ^+, +, *\}$ el cual suele usarse para hablar de la aritmética. El matemático Dedekind inventó un conjunto de axiomas para los números naturales (que hoy en día se conocen como los axiomas de Peano). La formulación original de estos axiomas fue en la lógica de segundo y con ellos se puede caracterizar a los números naturales salvo isomorfismo. La formulación en primer orden sería:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & = & \{\neg\exists x\,(x^+ = 0)\} \\ & \bigcup & \{\forall x, y\,(x^+ = y^+ \longrightarrow x = y)\} \\ & \bigcup & \{(\varphi(0) \wedge \forall x\,(\varphi(x) \to \varphi(x^+))\,) \longrightarrow \forall y \varphi(y) \ \mid \varphi \in FORM_{\omega\omega}(\rho)\} \end{array}$$

Llamemos $\mathcal{N} = (\omega, +, *, ^+, 0)$. Obsérvese que $\mathcal{N} \models \mathcal{P}$ sin embargo, $\mathcal{P}$ no puede caracterizar a $\mathcal{N}$, pues existen modelos de $\mathcal{P}$ no isomorfos a $\mathcal{N}$. En realidad, por el teorema de Löwenheim Skolem, ningún conjunto de enunciados de $L_{\omega\omega}$ puede caracterizar a la estructura $\mathcal{N}$ (ni a cualquier estructura infinita). Un modelo de $\mathcal{P}$ no isomorfo a $\mathcal{N}$ se conoce como una interpretación no estándar de $\mathcal{P}$. Sin embargo, en $L_{\omega_1\omega}$ sí podemos caracterizar a esta estructura mediante un solo enunciado.

Proposición 3.2 ***Hay*** $\sigma \in FORM_{\omega_1\omega}(\rho)$ ***tal que para cualquier*** $\mathfrak{A} \in V_\rho$, $\mathfrak{A} \models \sigma$ ***si y solo si*** $\mathfrak{A} \cong \mathcal{N}$.

Prueba:

La idea de la prueba es encontrar σ de forma que dicte el comportamiento de las operaciones y del elemento distinguido y que suprima las posibilidades de que una interpretación no estándar la haga verdadera, así sea:

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma & = & \neg\exists x(x^+ = 0) \\
 & \wedge & \forall x, y(x^+ = y^+ \longrightarrow x = y) \\
 & \wedge & \forall x(x + 0 = x) \\
 & \wedge & \forall x, y(x + y^+ = (x + y)^+) \\
 & \wedge & \forall x(x0 = 0) \\
 & \wedge & \forall x, y(xy^+ = xy + x) \\
 & \wedge & \forall x(x = 0 \vee x = 0^+ \vee x = 0^{++} \vee ...)
\end{array}
$$

De esta manera, una estructura es modelo de σ si y solo si es isomorfa a $\mathcal{N}$, la prueba de esta afirmación puede consultarse en [Amor] páginas 50-55.

$\star$

Así, tenemos una teoría categórica en $L_{\omega_1\omega}$ con modelos infinitos, hecho que es imposible en $L_{\omega\omega}$. Esto último es consecuencia del teorema de Löweinheim Skolem, pues éste garantiza que si una teoría tiene un modelo infinito entonces, tiene modelos de cardinalidad arbitrariamente grande. De esta manera podemos concluir lo siguiente:

Corolario 3.3 ***Si*** $\kappa > \omega$, ***entonces el Teorema de Loweinheim Skolem es falso en*** $L_{\kappa\lambda}$ ***para toda*** λ.

Prueba:

Si $\kappa > \omega$ entonces toda fórmula de $L_{\omega_1\omega}$ es una fórmula de $L_{\kappa\lambda}$ por lo que se tiene el resultado.

$\star$

También nuestra capacidad de hablar sobre cardinalidad se incrementa, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 3.4 ***Si*** $\omega \leq \kappa$ ***y*** $\kappa > \mu$ ***donde*** μ ***es un cardinal finito o infinito entonces:***

a) ***La clase de las estructuras de tamaño a lo más*** μ ***es*** $EC_{\kappa\kappa}$.

b) ***La clase de las estructuras de tamaño al menos*** μ ***es*** $EC_{\kappa\kappa}$.

c) ***La clase de las estructuras de tamaño*** μ ***es*** $EC_{\kappa\kappa}$.

Prueba:

Para probar el inciso a), tomamos $\sigma_1 = \underset{\alpha\in\mu}{\exists} v_\alpha(\forall x(\bigvee_{\alpha\in\mu} (x = v_\alpha)))$. Para el inciso b), consideremos la fórmula $\sigma_2 = \underset{\alpha\in\mu}{\exists} v_\alpha(\bigwedge_{\alpha\neq\beta} v_\alpha \neq v_\beta)$.Para el inciso c), usamos $\sigma_1 \wedge \sigma_2$.

⋆

De ahora en adelante, U siempre será un ultrafiltro no principal sobre ω.

Proposición 3.5 ***La clase*** $FIN = \{ \mathfrak{A} \mid A$ ***es finito*** $\}$ ***no es*** $EC(\Delta)$.

Prueba:

Para ver que FIN no es $EC\,(\Delta)$ basta probar que no es cerrado bajo ultraproductos. Para cada $n > 0$, sea $\mathfrak{A}_n$ una estructura con n elementos y sea σ_n la fórmula que dice "Hay al menos n elementos"(la cual fue obtenida en la proposición$_{3,4}$ en el inciso b)) Así, tenemos que σ_n es verdadera en todas las $\mathfrak{A}_m$ menos en una cantidad finita de ellas. De esta forma, $\prod_{m\in\omega} \mathfrak{A}_m/\ U \models \sigma_n$, pero entonces $\prod_{m\in\omega} \mathfrak{A}_m/\ U$ es infinito de manera que FIN no es cerrado bajo ultraproductos.

⋆

Sin embargo, como veremos a continuación, sí es $EC_{\omega_1\omega}$.

Proposición 3.6 ***La clase*** FIN ***sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Sea σ_n la fórmula que dice "Hay exactamente n elementos"(la cual fue obtenida en la proposición$_{3,4}$ en el inciso c)) y definimos $\sigma_{FIN} = \bigvee_{n\in\omega} \sigma_n$.

⋆

Corolario 3.7

a) $INFI = \{ \mathfrak{A} \mid A$ ***es infinito*** $\}$ ***es*** $EC(\Delta)$, ***pero no*** EC.

b) $INFI$ ***sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Si hacemos $\Sigma = \{ \exists x_1 ... x_n (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j) \mid n \in \omega \}$,tenemos que $INFI = MOD(\Sigma)$, por lo que es $EC(\Delta)$. No puede ser EC pues FIN no lo es y FIN es el complemento de $INFI$. El inciso *b)* se prueba tomando la conjunción de las fórmulas de Σ.

$\star$

Ahora tomemos $\rho = \{<\}$. Para la siguiente proposición debemos recordar que una estructura está bien fundada si todo subconjunto no vacío tiene un minimal. Bajo el Axioma de Elección (o bajo el Axioma de Elecciones Dependientes), el ser bien fundado es equivalente a no tener una cadena descendente de tamaño ω (esta prueba es sencilla y puede revisarse en [Jech] página 50).

Proposición 3.8 $COBF = \{ (A, <) \mid (A, <)$ ***es bien fundada*** $\}$ ***no es*** $EC(\Delta)$.

Prueba:

Construiremos a los naturales no estándar, tomemos a $\omega^\omega / \ U$ (es decir la ultrapotencia de ω módulo U) y consideremos a los siguientes elementos:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\overline{a_0} & = & (& 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\
\overline{a_1} & = & (& 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\
\overline{a_2} & = & (& 0, & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \\
\overline{a_3} & = & (& 0, & 0, & 0, & 1, & 2, & \ldots \\
\overline{a_4} & = & (& 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots
\end{array}
$$

Aquí tenemos que todas las entradas de $\overline{a_{n^+}}$ son menores o iguales que las de $\overline{a_n}$, y solo coinciden en una cantidad finita de entradas, por lo que $\overline{a_{n^+}}/U < \overline{a_n}/U$. Entonces $\omega^\omega/U \notin COBF$. Así esta clase no es cerrada bajo ultraproductos.

$\star$

Proposición 3.9 ***La clase*** $COBF$ ***sí es*** $EC_{\omega_1\omega_1}$.

Prueba:

Usando la equivalencia de bien fundada antes mencionada, está claro que la fórmula

$$\sigma_{COBF} \quad = \quad \neg(\underset{n\in\omega}{\exists} v_n(\,(v_0 > v_1) \wedge (v_1 > v_2) \wedge (v_2 > v_3)\,...))$$

realizará el trabajo.

⋆

Por otro lado, tenemos lo siguiente.

Corolario 3.10

a) ***La clase*** $COBO \;=\; \{\;(A,<)\;\mid\;(A,<)$ ***es un buen orden*** $\}$ ***no es*** $EC(\Delta)$.

b) ***Pero sí es*** $EC_{\omega_1\omega_1}$.

Prueba:

El mismo ejemplo de los naturales no estándar muestra que $COBO$ no es cerrado bajo ultraproductos. Denotemos por $COTO$ a la clase de los órdenes totales. Obsérvece que $COTO$ es EC pues $\sigma_{COTO} = (\neg\exists x\,(x<x)) \wedge \forall x,y,z\,(x<y \wedge y<z \longrightarrow x<z)$. Ahora, una estructura $\mathfrak{A} = (A,<)$ es un buen orden si y solo si $\mathfrak{A} \models \sigma_{COTO} \wedge \sigma_{COBF}$ por lo que la clase $COBO$ sí es $EC_{\omega_1\omega_1}$.

⋆

Todavía podemos decir cosas interesantes sobre buenos órdenes, pero antes necesitaremos un sencillo lema.

Lema 3.11 ***Sea*** $\mathfrak{A} = (A,<)$ ***un órden total. Entonces, se tiene lo siguiente.***

a) ***Si todos sus segmentos iniciales son buenos órdenes, entonces*** A ***es un buen órden.***

b) ***Si hay*** $\alpha \in OR$ ***tal que*** A ***y*** α ***tiene los mismos segmentos iniciales (salvo isomorfismo)*** *entonces* $A \cong \alpha$.

Prueba:

Para la prueba véase el libro de [Hernández] en las páginas 77-87.

⋆

Ahora hablaremos de los buenos órdenes en $L_{\kappa\omega}(\rho)$.

Proposición 3.12 ***Sea $\mathfrak{A}$ un órden parcial tal que todos sus segmentos iniciales son órdenes totales y $\alpha \in \kappa$. Entonces hay una fórmula $\sigma_\alpha(x)$ de $L_{\kappa\omega}(\rho)$ tal que dada $a \in A$, $\mathfrak{A} \models \sigma_\alpha(a)$ si y solo si $(a_<, <) \cong \alpha$.***

Prueba:

Por hipótesis $(a_<, <)$ siempre es un orden total. Tomemos $\alpha \in \kappa$ y definamos $\sigma_\alpha(x)$ por recursión. Empezamos haciendo $\sigma_0(x) = \neg\exists y(y < x)$. Ahora supongamos que ya tenemos $\sigma_\xi(x)$ con $\xi \in \alpha$; de esta forma podemos expresar el hecho de "tener (salvo isomorfismo) los mismos segmentos iniciales que α":

$$\sigma_\alpha(x) \quad = \quad \bigwedge_{\xi \in \alpha} \exists y(y < x \wedge \sigma_\xi(y)) \wedge \forall y(y < x \longrightarrow \bigvee_{\xi \in \alpha} \sigma_\xi(y)).$$

Entonces usando inducción y la parte *b*) del lema anterior, obtenemos lo que queríamos.

⋆

Previamente vimos que *COBO* es $EC_{\kappa\omega_1}$, pero en $L_{\kappa\omega}(\rho)$ lo que podemos expresar es "ser *COBO* de tamaño menor que κ". Esto y más se afirma en el siguiente corolario.

Corolario 3.13 ***Sea $\mathfrak{A} \in V_\rho$ (seguimos con $\rho = \{<\}$)***

a) ***Si $|A| < \kappa$, entonces hay un conjunto Σ de fórmulas de $L_{\kappa\omega}(\rho)$ tal que $\mathfrak{A} \models \mathtt{t}$ si y solo si $\mathfrak{A} \in COBO$.***

b) ***Sea $\mathfrak{A} \in COBO$ y $\alpha \in \kappa$. Entonces hay una fórmula σ de $L_{\kappa\omega}(\rho)$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $\mathfrak{A} \cong \alpha$.***

c) ***Sean $\alpha, \beta \in OR$ tal que alguno de ellos es menor que κ, si $\alpha \equiv_{\kappa\omega} \beta$ entonces $\alpha = \beta$.***

Prueba:

Empecemos probando el inciso *a*). Un intento sería decir que $\mathfrak{A}$ sea *COTO* y que todo segmento inicial de $\mathfrak{A}$ sea isomorfo a un ordinal menor que κ. Sin embargo, no podemos hacer esto, pues tendríamos que usar una disyunción de tamaño κ. Afortunadamente podemos darle la vuelta a este problema. Sabemos que si $\mathfrak{A}$ fuera *COBO*, entonces para cada $\alpha \in \kappa$ pasaría una y solo una de las siguientes posibilidades:

$\star$) que $\mathfrak{A}$ sea isomorfo a un segmento inicial de α,
$\star\star$) que $\mathfrak{A}$ sea isomorfo a α,
$\star\star\star$) que α sea isomorfo a un segmento inicial de $\mathfrak{A}$.

Definiremos la fórmula φ_α de tal forma que exprese la posibilidad de que suceda $\star), \star\star)$ ó $\star\star\star)$ pero el que pase la situación $\star)$ o la $\star\star)$ es equivalente a que todo segmento inicial de $\mathfrak{A}$ sea isomorfo a un segmento inicial de α. Así, definimos: (donde σ_α son las que encontramos en la proposición previa).

$$\varphi_\alpha \quad = \quad \forall x(\bigvee_{\xi\in\alpha} \sigma_\xi(x)) \vee \exists y(\sigma_\alpha(y)).$$

De esta manera consideremos:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma & = & \{\sigma_{COTO}\} \\ & \bigcup & \{ \quad \varphi_\alpha \quad | \quad \alpha \in \kappa \quad \} \ . \end{array}$$

Es claro que si $\mathfrak{A} \in COBO$, entonces $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Ahora, supongamos que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Entonces para todo $\alpha \in \kappa$, sucede la posibilidad de $\star)$ de $\star\star)$ ó $\star\star\star)$. Sin embargo, dado que en un $COTO$ no es posible que los segmentos iniciales determinados por dos elementos distintos sean isomorfos a un mismo ordinal y dado que $|A| < \kappa$, tenemos forzosamente que para algún $\beta \in \kappa$ debe pasar $\star)$ o $\star\star)$ y de esta forma, $\mathfrak{A} \in COBO$.

Ahora probemos el inciso b). Sea $\sigma = \neg\exists x(\sigma_\alpha(x)) \wedge \bigwedge_{\xi\in\alpha} \exists y(\sigma_\alpha(y))$ entonces, σ expresa que $\mathfrak{A}$ y α tienen (salvo isomorfismo) los mismos segmentos iniciales, por lo que $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $\mathfrak{A} \cong \alpha$. Para probar el inciso c) supongamos que $\alpha < \kappa$. Sea σ la fórmula del inciso anterior.Tenemos que $\alpha \models \sigma$ y así $\beta \models \alpha$ (por la equivalencia elemental) de manera que $\alpha \cong \beta$ y entonces $\alpha = \beta$.

$\star$

Ahora definimos $TranBF$ como la clase de todas las estructuras que son isomorfas a un elemento de BF con la pertenencia (en el apéndice de notación se definió a la clase BF). Podemos demostrar lo siguiente respecto a esta nueva clase:

Proposición 3.14

a) $TranBF$ ***no es*** $EC\,(\mathbf{\Delta})$.

b) ***Pero sí*** $EC_{\omega_1\omega_1}$.

Prueba:

Para probar el inciso a), podemos volver a usar el ejemplo de los naturales no estándar, para probar el inciso b) sea $\sigma = \sigma_{COBF} \wedge (\forall x, y(\forall z(z < x \longleftrightarrow$

$z < y) \longrightarrow x = y))$ así por el teorema del colapso de Mostowski (ver el libro de [Kunen] páginas 94-102). $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y sólo $\mathfrak{A}$ pertenece a $TranBF$.

⋆

Ahora veamos unos ejemplos de teoría de gráficas, por lo que solo tendremos un símbolo de relación de aridad 2, el cual será $\sim$. Recordemos que una gráfica G es *conexa* si y solo si para todo $x, y \in G$ hay $w_0, w_1, ..., w_n \in G$ tal que $x = w_0 \sim w_1 \sim ... \sim w_n = y$ donde $\sim$ denota la relación de adyacencia en la gráfica.

Para cada $n > 0$, definimos la *trayectoria de n vértices* como la gráfica $\mathcal{P} = (\{v_1, ..., v_n\}, \sim)$ donde $v_i \sim v_{i+1}$ para cada $1 \leq i < n$. Llamaremos a $\mathcal{C} = (\{v_1, ..., v_n\}, \sim)$ el *ciclo de n vértices,* si $v_i \sim v_{i+1}$ para cada $1 \leq i < n$ y $v_1 \sim v_n$. Es fácil ver que cualquier ciclo o trayectoria es conexo.

Si $(G, \sim)$ es una gráfica y $a, b \in G$, decimos que la distancia de a y b es mayor que n si no hay $x_0, x_2, ...x_n \in G$ tales que $a = x_0, b = x_n$ y $x_0 \sim x_1 \sim ... \sim x_n$. Observemos que la distancia de a y b es mayor que n si y solo si $(G, \sim) \models \sigma_n(a, b)$, donde:

$$\sigma_n(y, z) = \neg\exists x_0, x_2, ...x_n (y = x_0 \wedge z = x_n \wedge x_0 \sim x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} \sim x_n).$$

Nótese que G es disconexa si y solo si hay $a, b \in G$ tal que $(G, \sim) \models \sigma_n(a, b)$ para toda $n > 0$.

Proposición 3.15 ***La clase de las gráficas conexas no es $EC(\Delta)$.***

Prueba:

Probaremos que esta no es cerrada bajo ultraproductos. Como se comentó antes, las trayectorias son conexas, pero veremos que $\mathcal{P} = \prod_{n>0} \mathcal{P}_n/U$ no lo es. Sean $a = (a_0, a_1, ...)$ y $b = (b_0, b_1, ...)$ donde a_m y b_m son el primer y último vértice de $\mathcal{P}_m$ respectivamente. Podemos notar que para cada $n > 0$ la fórmula $\sigma_n(a_i, b_i)$ es verdadera en casi todas las $\mathcal{P}_i$ por lo que también es verdadera en $\mathcal{P}$ y así el ultraproducto es disconexo.

⋆

Sin embargo veremos que sí es $EC_{\omega_1\omega}$.

Proposición 3.16 ***La clase de las gráficas conexas sí es $EC_{\omega_1\omega}$.***

Prueba:

Dada $n \in \omega$ sea $\varphi_n(x,y)$ la fórmula que dice "x y y pueden unirse por un camino de tamaño n", lo cual puede expresarse: $\varphi_n(x,y) = \exists z_0...z_n(x = z_0 \wedge y = z_n \wedge \bigwedge\limits_{m<n} z_m \sim z_{m^+})$. Entonces la fórmula $\varphi = \forall x, y(\bigvee\limits_{n\geq 1} \sigma_n(x,y))$ caracteriza a las gráficas conexas.

$\star$

Para progresar necesitaremos una definición de teoría de gráficas.

Definición 3.17 *Sea G una gráfica. Decimos que G es μ* vértice coloreable *si podemos colorear los vértices de G con μ colores de manera que no haya dos vértices adyacentes del mismo color. Esto lo abreviamos diciendo que G es μ* COLOR.

De momento, sólo usaremos 2 colores:

Proposición 3.18

a) ***La clase de las gráficas** 2 **vértice coloreables es** $EC\,(\Delta)$.*

b) ***Pero no es** EC.*

c) ***Y sí es** $EC_{\omega_1\omega}$.*

Prueba:

Sea G una gráfica. Sabemos que G es 2 vértice coloreable si y solo si G no tiene ciclos impares (el lector puede ver [Bondy] página 14 para esta prueba). Ahora, si consideramos σ_n la fórmula que diga "Hay un ciclo de longitud n", entonces tenemos que G es 2 coloreable si y solo si $G \models \neg\sigma_n$ para toda n impar. Con esto hemos probado los incisos *a*) y *c*).

Sólo nos falta el inciso *b*). Probaremos que la clase de las gráficas que no son 2 coloreables no es $EC\,(\Delta)$, y para esto veremos que no es cerrada bajo ultraproductos. Denotemos por C_n al ciclo de longitud n y sea $G = \prod\limits_{n\in\omega} C_{2n+1}/U$. Para cada n impar σ_n, es verdadera en sólo uno de los factores, por lo que $G \models \neg\sigma_n$ por el inciso *a*), concluimos que G es 2 coloreable. Así, el ultraproducto de gráficas que no son dos coloreables puede ser dos coloreable.

$\star$

A continuación veremos algunos ejemplos sobre grupos, por lo que ahora consideraremos el tipo $\rho = \{*, ^{-1}, e\}$. Decimos que G es *finitamente generado* si hay $S \subseteq G$ finito tal que el mínimo subgrupo de G que contiene a S es el mismo G.

Proposición 3.19 ***La clase de los grupos finitamente generados no es*** $EC(\Delta)$.

Prueba:

Recordemos que todo grupo finitamente generado es contable. Consideremos al grupo $\mathbb{Z}$ con la suma y por Löwenheim Skolem, hay $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \equiv \mathbb{Z}$ con $|A| = \aleph_1$. Como $\mathfrak{A}$ no puede ser finitamente generado,obtenemos el resultado.

⋆

Proposición 3.20 ***Pero la clase de los grupos finitamente generados sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Sea σ_n la fórmula en $L_{\omega_1\omega}(\rho)$ que expresa "ser generado por n elementos", es decir sea, $\sigma_n = \exists x_1, ..., x_n \forall y(\bigvee_{\tau \in TERM} y = \tau(x_1, ..., x_n))$. De esta manera $\sigma_{FG} = \sigma_{GRUPO} \wedge \bigvee_{1 \leq n} \sigma_n$, testifica que que los grupos finitamente generados son una clase $EC_{\omega_1\omega}$.

⋆

Demostraciones similares pueden hacerse para verificar que las retículas, los anillos, las álgebras de Heyting finitamente generadas no son $EC(\Delta)$ pero sí $EC_{\omega_1\omega}$.

Un grupo es cíclico si esta generado por un solo elemento y con una demostración parecida a la anterior podemos verificar lo siguiente.

Proposición 3.21

a) ***La clase de los grupos cíclicos no es*** $EC(\Delta)$.

b) ***Pero sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

⋆

Recordemos que un grupo G *es de torsión* si y solo si para todo $g \in G$ hay $n > 0$ tal que $g^n = e$. Un grupo G *es libre de torsión* si y solo si para cualquier $g \neq e$ y $n > 0$ tenemos que $g^n \neq e$.

Proposición 3.22 ***La clase de los grupos de torsión no es*** $EC(\Delta)$.

Prueba:

Veremos que ésta clase no es cerrada bajo ultraproductos. Sean $p_0, p_1, p_2, ...$ todos los primos y tomemos $\mathfrak{A} = \prod_{n\in\omega} \mathbb{Z}_{p_n} / \, U$. Entonces es un grupo, pero veamos que no es de torsión, incluso resultará libre de torsión. Denotaremos con e_m al neutro de $\mathbb{Z}_{p_m}$ y con e al neutro de $\mathfrak{A}$.

Sea $a = (a_0, a_1, ...)$ tal que $a/\, U \neq e$ (de esta forma podemos suponer $a_r \neq e_r$ para todo $r \in \omega$) y si n es mayor que 0, entonces $(a/U)^n = (a_0^n, a_1^n, ...)/U$. Si $a_m^n = e_m$, entonces el orden de a_m divide a n, por lo que $p_m \mid n$ y, como a n solo lo dividen una cantidad finita de primos, $(a/U)^n$ es el neutro solo en una cantidad finita de entradas. Así que, $(a/U)^n \neq e$.

⋆

Proposición 3.23 ***Pero la clase de los grupos de torsión sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$***.***

Prueba:

Sea $\sigma_n(x)$ la fórmula que dice "Si elevas x a la n, obtienes a e", es decir, $\sigma_n(x) = x^n \approx e$. Así, la fórmula buscada es $\sigma_{TOR} = \sigma_{GRUPO} \wedge \forall x(\bigvee_{n\in\omega} \sigma_n(x))$.

⋆

Corolario 3.24

a) ***La clase de los grupos libres de torsión es*** $EC(\Delta)$, ***pero no*** EC.

b) ***Pero sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Tomemos el siguiente conjunto de enunciados:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma & = & \sigma_{GRUPO} \\ & \bigcup & \{ \quad \forall x(x \neq e \longrightarrow x^n \neq e) \quad | \quad n > 0 \quad \} \ . \end{array}$$

Se puede ver que los modelos de Σ son los grupos libres de torsión, por lo que es $EC(\Delta)$ y al hacer la conjunción de las fórmulas de Σ obtenemos que es $EC_{\omega_1\omega}$. Sin embargo como el ultraproducto de no libres de torsión puede ser libre de torsión, esta clase no es EC.

⋆

Sea G un grupo y $H \leq G$, decimos que H es normal si es invariante bajo conjugación, es decir, para todo $g \in G$ y $a \in H$ se tiene que $gag^{-1} \in H$. G

siempre tiene subgrupos normales, a saber $\{e\}$ y el mismo G. Decimos que G es *simple* si estos son los únicos. En teoría de grupos, se suele decir que un grupo es simple si este no puede .ªplastarse”de manera no trivial.

Si G es un grupo abeliano (conmutativo), entonces todo subgrupo es normal, pues $gag^{-1} = a$. De esta manera, los grupos abelianos simples son aquéllos cuyos únicos subgrupos son el unitario del neutro y el total, por lo que deben ser isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ para algún p primo (esta última afirmación puede consultarse en el libro de [Rotman] en la página 39).

Definición 3.25 *Sea G un grupo y $S \subseteq G$. Definimos* la cerradura normal de S, $N(S)$, *como el mínimo subgrupo normal que extiende a S.*

Es claro que la cerradura normal de S siempre existe, pues basta cerrar a S bajo las operaciones del grupo y bajo la conjugación. Como es costumbre, si $a \in G$, entonces escribimos $N(a)$ en vez de $N(\{a\})$. Veamos un lema que nos dice cómo es $N(a)$ y qué caracteriza a los grupos simples (la prueba puede consultarse en el [Rotman] en las páginas 31 y 32).

Lema 3.26

a) ***Para toda** $a \in G$ **se tiene que***

$$N(a) = \left\{ g_1 a^{r_1} g_1^{-1} g_2 a^{r_2} g_2^{-1} ... g_m a^{r_m} g_m^{-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} m \in \omega,\ r_i \in \mathbb{Z}, \\ g_1, ..., g_m \in G \end{array} \right\}.$$

b) ***Si** a **es autoinverso, entonces***

$$N(a) = \left\{ g_1 a g_1^{-1} g_2 a g_2^{-1} ... g_m a g_m^{-1} \;\middle|\; m \in \omega,\ g_1, ..., g_m \in G \right\}.$$

c) G ***es simple si y solo si para toda** $a \in G$ **tal que** $a \neq e$ **sucede que*** $N(a) = G$.

⋆

Con esto podemos demostrar lo siguiente

Proposición 3.27 ***La clase de los grupos simples no es** $EC(\Delta)$.*

Prueba

Podríamos hacer el ultraproducto de todos los $\mathbb{Z}_p$ y así obtendríamos un grupo abeliano infinito y, por lo tanto, no simple. Pero demostraremos algo más fuerte, veamos que el ser grupo simple no abeliano no es $EC_{\omega\omega}(\Delta)$.

En esta prueba usaré libremente los resultados y la notación del primer capítulo del libro de [Rotman]. Veremos que el ultraproducto de grupos simples puede no ser simple. Sea $I = \{ n \in \omega \mid n > 4 \}$, D un ultrafiltro no principal en I y construyamos $G = \prod_{n \in I} A_n / D$ (recordemos que para $n > 4$ los A_n son simples). Ahora para cada $n \in I$, definimos:

$$a_n = (12)(34) \qquad b_n = \begin{cases} (1...n) & si \quad n \text{ es impar} \\ (1...n-2)\,(n-1\ n) & si \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

Para esto recordemos que un ciclo de longitud n es producto de $n+1$ transposiciones. Quizá la definición de b_n parezca un poco extraña, pero lo único que importa es que $b_n \in A_n$ y mueve a n elementos, llamemos $= (a_5, a_6, ...)$ y $b = (b_5, b_6, ...)$.

Supongamos que G es simple. El lema anterior nos dice que $b \in N(a)$, por lo que hay, por ejemplo, $x, y, z \in G$ tales que $b = xax^{-1}yay^{-1}zaz^{-1}$. De esta forma, para casi toda $n \in I$ tenemos que $b_n = x_n a_n x_n^{-1} y_n a_n y_n^{-1} z_n a_n z_n^{-1}$ ...pero la conjugación preserva la estructura cíclica, por lo que $x_n a_n x_n^{-1}$,$y_n a_n y_n^{-1}$ y $z_n a_n z_n^{-1}$ son producto de dos transposiciones. Así el producto de los 3 mueve a lo más a 12 elementos. Como b_n mueve a n elementos, si $n > 12$, no se puede dar la igualdad anterior, lo cual es una contradicción.

$\star$

De esta forma, un subgrupo elemental de un grupo simple no tiene por qué ser simple... Sin embargo, esto sí es cierto como puede verse en [Hodgesc] página 72.

Proposición 3.28 ***Pero la clase de los grupos simples sí es*** $EC_{\omega_1 \omega}$.

Prueba:

Definiremos la fórmula $\sigma(x, y)$ que dice "$x \in N(y)$", es decir, sea $\sigma(x, y) = \bigvee_{(r_1,...,r_m) \in \mathbb{Z}^{<\omega}} \exists g_1, ..., g_m (x = g_1 y^{r_1} g_1^{-1} ... g_m y^{r_m} g_m^{-1})$ y la fórmula que sirve para ver que la clase de los grupos simples sí es $EC_{\omega_1 \omega}$ es,

$$\varphi = \sigma_{GRUPO} \wedge \forall y (y \neq e \longrightarrow \forall x (\sigma(x, y)).$$

$\star$

Ahora veremos unos ejemplos sobre campos y anillos, de manera que tomamos $\rho = \{+, 0, 1, *\}$. Decimos que un campo K tiene característica $r > 0$ si r

es el primero tal que $\overbrace{1 + ... + 1}^{r} = 0$. Si no existe algún r con esa propiedad, decimos que K tiene característica 0. Se puede probar que si la característica no es cero, entonces es un primo, lo cual puede consultarse en [Jacobson] en la página 109.

Haciendo pruebas similares a las que hicimos con los grupos de torsión podemos verificar que:

Proposición 3.29

a) ***La clase de los campos de característica*** p ***es*** EC.

b) ***La clase de los campos de característica*** 0 ***es*** $EC(\Delta)$ ***y*** $EC_{\omega_1\omega}$ ***pero no es*** EC.

⋆

Para la siguiente proposición necesitaremos varias definiciones y resultados sobre dominios enteros, los cuales pueden consultarse en [Jacobson] páginas 140-155. Decimos que un anillo D es un *Dominio de Factorización Única* si es un dominio entero y todo elemento distinto de 0 que no es unidad puede descomponer de manera "únicaçomo producto de irreducibles, donde "única"significa salvo el orden y asociados. A la clase de estos anillos la llamamos DFU.

Proposición 3.30 ***La clase*** DFU ***no es*** $EC(\Delta)$, ***pero sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Se sabe que $\mathbb{Z}$ es un DFU, pero veremos que $\mathbb{Z}^{\omega}/U$ no lo es, con lo que tendremos que esta clase no es $EC(\Delta)$. Tomemos $\{ \quad c_r \quad | \quad r \in \mathbb{Z} \quad \}$ un conjunto de constantes y para cada $n \in \omega$ definamos $\mathfrak{D}_n$ como la expansión de $\mathbb{Z}$, donde $c_{-n}, c_{1-n}, ..., c_n$ se interpretan como enteros mayores que 1 tales que $c_{-n}^{\mathfrak{D}_n} \mid c_{1-n}^{\mathfrak{D}_n} ... c_0^{\mathfrak{D}_n} ... \mid c_n^{\mathfrak{D}_n}$ (es decir, forman una cadena ascendente con la divisibilidad) y las demás constantes se interpretan arbitrariamente. Ahora definamos $\mathfrak{D} = \prod \mathfrak{D}_n/U$ y por la construcción tenemos que:

$$...c_{-2}^{\mathfrak{D}} \mid c_{-1}^{\mathfrak{D}} \mid c_0^{\mathfrak{D}} \mid c_1^{\mathfrak{D}} \mid c_2^{\mathfrak{D}} ...$$

Lo cual implica que $\mathfrak{D}$ no es DFU (pues en un DFU no hay cadenas ascendentes de ideales, lo cual puede consultarse en [Jacobson]). Ahora veremos que la clase DFU es $EC_{\omega_1\omega}$. Primero definamos las fórmulas $\sigma_u(x), \sigma_i(x), \sigma_a(x, y)$ que expresen respectivamente "ser unidad","ser irreduciblez "ser asociados".

$\star)\quad \sigma_u(x) = \exists y\,(xy = 1)\,.$
$\star\star)\quad \sigma_i(x) = \neg\sigma_u(x) \wedge x \neq 0 \wedge \forall z, y\,(x = zy \longrightarrow \sigma_u(z) \vee \sigma_u(y))\,.$
$\star\star\star)\quad \sigma_a(x, y) = \exists z\,(x = zy)\,.$

Por comodidad, definamos la fórmula $\sigma_i^n(x_1, ..., x_n)$ que exprese "$x_1, ..., x_n$ son irreducibles.es decir, $\sigma_i^n(x_1, ..., x_n) = \sigma_i(x_1) \wedge ... \wedge \sigma_i(x_n)\,.$ Todas estas fórmulas son enunciados de $L_{\omega\omega}$. Llamemos S_n al grupo de las permutaciones de $\{1, ..., n\}\,.$ Con esto, podemos obtener una fórmula en$L_{\omega_1\omega}$ que exprese la unicidad de la descomposición en irreducibles .

$$\begin{aligned}
\sigma_1^! &= \bigwedge_{n\neq m} \forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \left(\sigma_i^{n+m}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \longrightarrow x_1...x_n \neq y_1...y_m\right).\\
\sigma_2^! &= \bigwedge_{n>0} \forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \left(\begin{array}{c} \sigma_i^{2n}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \wedge x_1...x_n = y_1...y_m \\ \longrightarrow \bigvee\limits_{g\in S_n} \left(x_1 = y_{g(1)} \wedge ... \wedge x_n = y_{g(n)}\right) \end{array}\right).\\
\sigma_! &= \sigma_1^! \wedge \sigma_2^!.
\end{aligned}$$

La existencia de la descomposición en primos queda expresada por la fórmula:

$$\sigma_\exists = \forall x \left(x \neq 0 \wedge \neg\sigma_u(x) \longrightarrow \bigvee_{n>0} y_1, ..., y_n\left(\sigma_i^n(y_1, ..., y_n) \wedge x = y_1, ..., y_n\right)\right).$$

De esta manera, tenemos que $\sigma_{DFU} = \sigma_{dominio\ entero} \wedge \sigma_! \wedge \sigma_\exists$.

$\star$

Como la clase de los dominios enteros sí es EC, entonces arriba hemos construido un dominio entero que no es DFU (este es el ejemplo más sencillo que conozco). Para los que han estudiado estas cuestiones del Álgebra, es interesante comentar que $\mathfrak{D}$ es un anillo que no es Noetheriano ni Artiniano pero, de una manera bonita, pues $\mathbb{Z}$ se encaja en su retícula de submódulos.

Recordemos que F es un *campo arquimediano* si y solo si para todo $a \in F$ hay n tal que $a < n$ (donde n es el resultado de sumar el 1 del campo n veces).

Proposición 3.31 ***La clase de los campos arquimedianos no es*** $EC_{\omega\omega}(\Delta)\,.$

Prueba:

Sea F un campo arquimediano: Veamos que una ultrapotencia de él no lo es. Consideremos $\mathfrak{A} = F^\omega/U$ y definamos $N = (0, 1, 2, 3, 4, ...)/\,U$. Es fácil ver que

N es mayor que todos los "naturales"(los elementos que se obtienen de sumar 1 una cantidad finita de veces) de $\mathfrak{A}$. Así, $\mathfrak{A}$ no es arquimediano.

$\star$

Proposición 3.32 ***Pero la clase de los campos arquimedianos sí es*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Tomemos la fórmula $\sigma = \forall x(x < 1 \vee x < 2 \vee x < 3 \vee ...)$ y sea φ la fórmula que dice "ser campo ordenado". Se puede verificar que los modelos de $\sigma \wedge \varphi$ son precisamente los campos arquimedianos.

$\star$

Decimos que F es *algebraicamente cerrado* si todo polinomio no constante de F tiene todas sus raíces en F. Naturalmente esto es equivalente a que todo polinomio tenga al menos una raíz en F.

Proposición 3.33 ***La clase de los campos algebraicamente cerrados es*** $EC(\Delta)$ ***y*** $EC_{\omega_1\omega}$.

Prueba:

Para cada $n > 0$ podemos formar el enunciado que dice "todo polinomio de grado n tiene una raíz"(lo cual se expresa como
$\sigma = \forall a_n, ..., a_0 \left(a_n \neq 0 \longrightarrow \exists x \left(a_n x^n + ...a_0 = 0\right)\right)$). De aquí se desprende que esta clase sea $EC(\Delta)$ y $EC_{\omega_1\omega}$.

$\star$

Ahora, probaremos que esta clase no es EC, pero antes necesitamos recordar un concepto importante. El *campo primo* de un campo F es la intersección de todos los subcampos contenidos en F. Si F tiene característica 0, entonces su campo primo es $\mathbb{Q}$ y si tiene característica p es $\mathbb{Z}_p$. Estos hechos pueden consultarse en [Jacobson] en la página 109.

El siguiente lema usa conceptos y resultados sobre teoría de Galois, los cuales pueden revisarse en el primer capítulo de [Morandi].

Lema 3.34 ***Sea*** $K = \mathbb{Q}$ ***o*** $K = \mathbb{Z}_p$ ***con*** p ***primo. Entonces para cada*** $n \geq 1$ ***hay un campo*** K_n ***cuyo campo primo es*** K ***que no es algebraicamente cerrado, pero todo polinomio no constante de grado a lo más*** n ***tiene una raíz.***

Prueba:

Llamemos $\overline{K}$ a la cerradura algebraica de K. Para cada $K \leq L \leq \overline{K}$ sea $Rz_n(L) = \{ a \in \overline{K} \mid \text{hay } p \in L[x] \text{ de grado a lo más } n \text{ y } p(a) = 0 \}$. Ahora definimos:

$$\begin{aligned} M_0 &= K \\ M_{m^+} &= M_m(Rz_n(M_m)) \\ K_n &= \bigcup_{m \in \omega} M_m \end{aligned}$$

Se puede verificar que $K \leq K_n \leq \overline{K}$ y que todo polinomio no constante de grado a lo más n tiene sus raíces en K_n. Sólo falta probar que K_n no es algebraicamente cerrado. Para esto, notemos que si $a \in K_n$, entonces por la construcción, su polinomio irreducible sobre K tiene grado $m_1 \cdots m_r$ donde $m_i \leq n$. Ahora tomemos un primo q tal que $q > n$. Como q no puede escribirse como producto de enteros menores o iguales que n, cualquier raíz de un polinomio irreducible de K de grado q no está en K_n.

$\star$

De esta manera, tenemos lo siguiente

Corolario 3.35

a) ***La clase de los campos algebraicamente cerrados no es*** *EC*.

b) ***La clase de los campos algebraicamente cerrados de característica*** 0 ***no es*** *EC*.

c) ***La clase de los campos algebraicamente cerrados de característica*** p ***no es*** *EC*.

Prueba:

Se puede ver que $\prod K_n/U$ es un campo algebraicamente cerrado, pero ningún K_n lo es, por lo que la clase de los campos que no son algebraicamente cerrados no es cerrada bajo ultraproductos.

$\star$

Como discutimos anteriormente, no es de gran utilidad tener $\lambda > \kappa$ en los lenguajes $L_{\kappa\lambda}$. Ahora veremos que también podríamos suponer siempre que κ es un cardinal regular. Probaremos que si κ es singular, entonces $L_{\kappa\lambda}$ y $L_{\kappa^+\lambda}$ tienen el mismo poder expresivo. Es claro que todo lo que podamos escribir en $L_{\kappa\lambda}$ lo podemos hacer en $L_{\kappa^+\lambda}$, lo sorprendente es que también es posible hacerlo al revés, siempre que κ sea singular:

Proposición 3.36 Teorema del poder expresivo de los lenguajes de cardinalidad singular

Sea κ ***un cardinal singular y sea*** $\lambda \leq \kappa$, ***entonces para toda*** $\sigma \in FORM_{\kappa^+\lambda}(\rho)$ ***tal que*** $VL(\sigma) \subseteq \{ \quad v_\xi \quad | \quad \xi \in \kappa \quad \}$ ***, hay*** $\widehat{\sigma} \in FORM_{\kappa\lambda}(\rho)$ ***con las mismas variables libres que es lógicamente equivalente a*** σ. ***Es decir, para cualquier*** $\mathfrak{A} \in V_\rho$, ***sucede que*** $\mathfrak{A} \models \sigma \longleftrightarrow \widehat{\sigma}$.

Prueba:

Observemos que toda fórmula en $L_{\kappa^+\lambda}(\rho)$ tiene a lo más κ variables libres, por lo que realmente no estamos perdiendo nada al pedir que las variables libres de σ estén en ese conjunto.

Se define $\widehat{\sigma}$ por recursión sobre las fórmulas, el único problema es en el paso de una conjunción o disyunción de κ elementos, y aquí usamos que un conjunto de tamaño κ se puede ver como la unión de $cof\,(\kappa)$ conjuntos cada unos de tamaño menor que κ, por lo que podemos hacer la conjunción (o disyunción) de cada pedazo y luego formar una conjunción (disyunción) de tamaño $cof\,(\kappa)$.

⋆

Esto podría llevarnos a sospechar que si λ es singular, entonces $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ y $L_{\kappa\lambda^+}(\rho)$ tienen el mismo poder expresivo pero esto no es cierto.

Si tuviéramos $X \subseteq VAR$ con $|X| = \lambda$ y σ una fórmula, entonces $\underset{x\in X}{\forall} x\sigma$ es una fórmula de $L_{\kappa\lambda^+}(\rho)$. Ahora, podemos tomar una partición $\{b_\alpha\}_{\alpha\in cof(\lambda)}$ de X con $|b_\alpha| < \lambda$ y podemos considerar $\forall b_0\sigma$, $\forall b_1\forall b_0\sigma$, $\forall b_2\forall b_1\forall b_0\sigma$...pero nunca llegaríamos a lo que queremos. Es como pensar que si tenemos $\sigma_0, \sigma_1, ...$ fórmulas en $L_{\omega\omega}(\rho)$ entonces podemos formar $\sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee ...$ sólo porque podemos formar $\sigma_0, \sigma_0 \vee \sigma_1, \sigma_0 \vee \sigma_1 \vee \sigma_2 ...$ y pronto veremos un teorema que aplasta todas nuestras expectativas de poder cambiar $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ por $L_{\kappa\lambda^+}(\rho)$.

Ahora examinaremos como se comporta la satisfacibilidad de enunciados bajo extensiones de forcing. El lector puede consultar los libros de [Jech] y [Kunen] para los principales resultados y la notación que ocuparé.

Definición 3.37 *Sea* P *un órden parcial y* σ *un enunciado de* $L_{\kappa\lambda}$. *Decimos que* P preserva a σ *si para todo* G *filtro genérico y* $\mathfrak{A} \in V$, *se tiene que*
$V \models (\mathfrak{A} \models \sigma)$ *si y solo si* $V[G] \models (\mathfrak{A} \models \sigma)$.

Ésta definición merece un poco de explicación. Si $\mathfrak{A}$ es una estructura en V, entonces sigue siendo una estructura en la extensión genérica. El que $V \models (\mathfrak{A} \models \sigma)$ significa que **en** V, σ es verdadera en $\mathfrak{A}$, (de esta manera, $V \models (\mathfrak{A} \models \sigma)$

es equivalente a $\mathfrak{A} \models \sigma$ pero en ocasiones el agregar "$V \models$ " evita alguna confusión que podría presentarse). Por otro lado, $V[G] \models (\mathfrak{A} \models \sigma)$ significa que en **en** $V[G]$, σ es verdadera en $\mathfrak{A}$. El que P preserve a σ significa que la verdad de σ en una estructura no cambia al tomar extensiónes genéricas. Por inducción, podemos probar que hay muchas fórmulas que siempre se preservan.

Proposición 3.38 ***Si*** P ***es un órden parcial y*** σ ***es un enunciado de*** $L_{\kappa\omega}$, ***entonces*** P ***preserva a*** σ.

$\star$

Ahora, veamos un ejemplo que muestra que no podemos cambiar a ω por ω_1 en la proposición previa. Si A, B son dos conjuntos, llamaré $Fun_\mu(A, B)$ al conjunto de las funciones cuyo dominio es un subconjunto de A de tamaño menor que μ, y su imagen esta contenida en B. Pensaremos a $Fun_\mu(A, B)$ con la contención al revés, es decir, $f \leq g$ si y solo si $f \subseteq g$. En lo que sigue, φ_μ será el enunciado en $L_{\mu^+\mu^+}$ que expresa "tener tamaño a lo más μ", este enunciado existe por la proposición$_{3,4}$.

Proposición 3.39 ***El órden*** $Fun_\omega(\omega, \omega_1)$ ***no preserva a*** φ_ω.

Prueba:

Es claro que $\omega_1 \models \neg\varphi_\omega$, pero en el nuevo mundo ω_1^V ha sido colapsado, de modo que ω_1^V es numerable en $V[G]$, por lo que $V[G] \models \left(\omega_1^V \models \sigma\right)$.

$\star$

Decimos que el órden P es λ *distributivo,* si para todo $A \in V$ con $|A| < \lambda$ y $f : A \longrightarrow V \in V[G]$ se tiene que $f \in V$. De esta manera, obtenemos que $\wp_\lambda(A)^V = \wp_\lambda(A)^{V[G]}$. Con esta observación es posible probar lo siguiente.

Proposición 3.40 ***Si*** λ ***es regular y*** P ***es*** λ ***distributivo, entonces*** P ***preserva a todos los enunciados de*** $L_{\kappa\lambda}$.

De nuevo, se prueba por inducción. La λ distributividad se usa en los cuantificadores.

$\star$

Ahora veremos una proposición muy bonita, y además, es un ejemplo de un teorema "del mundo real"(que no habla sobre consistencia) que puede probarse usando forcing.

Proposición 3.41 ***Si $\rho = \emptyset$ y λ es regular, entonces cualesquiera dos estructuras de tamaño al menos λ son $\kappa\lambda$ elementalmente equivalentes.***

Prueba:

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos estructuras con $\lambda \leq |A|, |B|$ veamos que $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. Sin perdida de la generalidad, podemos suponer que $|A| \leq |B|$. En [Kunen] se prueba que $Fun_\lambda(A, B)$ es λ distributivo, y además, A y B son biyectables en el nuevo mundo.

De esta manera, $V[G] \models \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ por lo que si σ es un enunciado de $L_{\kappa\lambda}$ entonces $V[G] \models (\mathfrak{A} \models \sigma)$ si y solo si $V[G] \models (\mathfrak{B} \models \sigma)$, y usando la proposición anterior, tenemos que $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \sigma$.

$\star$

El lector puede ver [Dickmann] en la página 139 para una prueba de la proposición previa sin utilizar forcing. Ahora, podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 3.42 ***Si κ es regular y $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ son dos estructuras con tipo vacío y de tamaño al menos κ, entonces $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa^+\kappa} \mathfrak{B}$.***

$\star$

Y de esta manera, podemos concluir que $L_{\kappa^+\kappa}$ y $L_{\kappa^+\kappa^+}$ no tienen el mismo poder expresivo.

Corolario 3.43 ***Si κ es regular entonces hay una fórmula en $L_{\kappa^+\kappa^+}$ que no es lógicamente equivalente a una de $L_{\kappa^+\kappa}$.***

Sea A de tamaño κ y B de tamaño κ^+. De esta manera, $\mathfrak{A} \cong_{\kappa^+\kappa} \mathfrak{B}$ pero $\mathfrak{A} \not\cong_{\kappa^+\kappa^+} \mathfrak{B}$ pues φ_κ es un enunciado de $L_{\kappa^+\kappa^+}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi_\kappa$, pero $\mathfrak{B} \models \neg\varphi_\kappa$. Como $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ cumplen los mismos enunciados de $L_{\kappa^+\kappa}$ entonces φ_κ no puede ser equivalente a un enunciado de $L_{\kappa^+\kappa}$.

$\star$

También podemos concluir que en general, la $\kappa\lambda$ equivalencia elemental no implica la isomorfia.

Corolario 3.44 ***El hecho de que $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$ no implica que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.***

⋆

Hemos visto muchos ejemplos de clases que no son $EC(\Delta)$, pero sí son $EC_{\kappa\lambda}$. Sin embargo, no hemos visto ningún ejemplo de una clase que no sea $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$ para ningún κ y λ. La siguiente proposición nos muestra un ejemplo.

Proposición 3.45 ***La clase*** $\{\ \mathfrak{A} \in V_\rho \mid cof(|A|) = \omega\ \}$ ***no es*** $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$ ***para ningún*** κ ***y*** λ.

Prueba:

Por lo visto antes, esta clase no es cerrada bajo equivalencia elemental para ningún κ, λ (puesto que hay cardinales de cofinalidad ω arbitrariamente grandes). De modo, que no puede ser $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$.

⋆

Sin embargo, encuentro el ejemplo anterior poco emocionante. Sería interesante encontrar un ejemplo que no apele a la incapacidad del lenguaje de caracterizar cardinalidades muy grandes. Estoy casi seguro que la clase de los órdenes totales densos y completos es un ejemplo de una clase que no es $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$ para ningún κ, λ. En lo que queda del capítulo expondré como creo que puede probarse y que es lo que no me ha salido de la prueba.

Lema 3.46 ***Si*** $\mathfrak{A} = (A, <)$ ***es un orden denso y completo, entonces hay un orden parcial*** P ***tal que, si*** G ***es un filtro genérico de*** P, ***entonces*** $V[G] \models \mathfrak{A}$ ***no es completo. Es decir, la completud de cualquier orden total puede "destruirse"mediante extensiones de forcing.***

Si $a, b \in A$ entonces definimos al conjunto (a, b), como los elementos de P que son mayores que a y menores que b. Sea $P = \{\ (a, b) \mid a < b\ \}$ y ordenemoslo con la contención. Notemos que si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son compatibles, entonces $a_1 < b_2$, pues de lo contrario su intersección sería vacía.

Ahora, sea $G = \{\ (a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha \in \kappa\ \}$ un filtro genérico. Definamos $S = \{\ a_\alpha \mid \alpha \in \kappa\ \}$ es claro que S es un subconjunto de A en $V[G]$. Además, por la observación anterior, S esta acotado, pues cada b_α es una cota superior. Probaremos, que S no tiene supremo.

Con este fin, para cada $x \in A$ sea $D_x = \{\ (a, b) \mid x < a \text{ o } b < x\ \}$ es fácil ver que D_x es denso, pues A es denso. Ya podemos ver que S no tiene supremo. Tomemos $x \in A$, entonces hay $(a, b) \in G \cap D_x$ y así $x < a$ o $b < x$. Si ocurre la primer posibilidad, x no es cota superior, y si ocurre la segunda, entonces no es la mínima.

⋆

Así, usaremos forcing como lo hicimos antes para probar que la clase de los ordenes totales completos y densos no es $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$. Sin embargo necesitamos un tipo especial de ordenes completos, que defino a continuación.

Definición 3.47 *Sea $\mathfrak{A}$ un orden total. Decimos que $\mathfrak{A}$ es κ hiperdenso, si para cualesquiera $S_1, S_2 \subseteq A$ tales que,*

a) $|S_1|, |S_2| < \kappa$;

b) S_1 *no tiene máximo y* S_2 *no tiene mínimo;*

c) Si $x \in S_1$ *y* $y \in S_2$ *entonces* $x < y$.

Existen $a, b \in A$ tales que $a < b$, a es mayor que todos los elementos de S_1 y b es menor que todos los elementos de S_2.

Ahora yo me imagino que:

Hipótesis ♡) Para todo κ, hay un orden κ hiperdenso y completo.

No creo que la conjetura sea díficil de probar, pero no he podido probarla por el momento.

Proposición 3.48 ***Si ♡) es cierta, entonces la clase de los ordenes completos y densos no es $EC_{\kappa\lambda}(\Delta)$ para ningún κ y λ.***

Basta que veamos que no es $EC_{\kappa\kappa}(\Delta)$ para ningún κ regular. Supongamos que si es es $EC_{\kappa\kappa}(\Delta)$, de manera que existe Σ conjunto de enunciados tal que $\mathfrak{B} \models \Sigma$ si y solo si $\mathfrak{B}$ es un orden completo y denso. Por ♡) sea $\mathfrak{A}$ un orden hiperdenso y completo. Sea P el conjunto de los intervalos abiertos de A. Como $\mathfrak{A}$ es hiperdenso, entonces P es κ distributivo (de hecho es κ cerrado, es decir, toda cadena descendente de tamaño menor que κ tiene una cota inferior). De esta manera, P preserva a los enunciados de $L_{\kappa\kappa}$ por lo que $V[G] \models (\mathfrak{A} \models \Sigma)$. Sin embargo, $\mathfrak{A}$ no es completo en $V[G]$, lo cual es una contradicción.

⋆

4 Los Cardinales Fuertemente Compactos

Hemos visto ya varias propiedades de los lenguajes $L_{\kappa\lambda}$, pero la que más nos interesa es su compacidad y es lo que estudiaremos a continuación. Diremos que un conjunto de fórmulas es SAT si es satisfacible y $FIN\ SAT$ si es finitamente satisfacible. En el primer capítulo nos encontramos un conjunto de fórmulas que era $FIN\ SAT$; pero no era SAT a saber:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma & = & \{ & \forall x(\bigvee_{n\in\omega} x = c_n) & \mid & n \in \omega & \} \\ & \bigcup & \{ & c \neq c_n & \mid & n \in \omega & \} . \end{array}$$

Podemos ver que Σ es un conjunto de enunciados de $L_{\omega_1\omega}$ que es el primer lenguaje infinitario interesante.

Proposición 4.1 ***Si*** $\kappa > \omega$ ***y*** $\lambda \leq \kappa$, ***entonces hay*** ρ ***tal que en*** $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ ***hay un conjunto de fórmulas*** $FIN\ SAT$ ***que no es*** SAT.

$\star$

De aquí que el único lenguaje que cumple compacidad es $L_{\omega\omega}$. ¿Podemos encontrar algún debilitamiento de compacidad que sea válido en $L_{\kappa\lambda}$? El que Σ sea finitamente satisfacible quiere decir que todo subconjunto **finito** de él sea satisfacible. Pero como finito es lo mismo que menor que ω, podríamos definir lo siguiente.

Definición 4.2 *Σ es κ* satisfacible *si y solo si todo subconjunto de Σ de tamaño menor que κ es satisfacible. Esto lo abreviamos como Σ es κ SAT.*

Y el teorema análogo al de compacidad sería el siguiente:

(MTC$_{\kappa\lambda}$) Meta Teorema de Compacidad para $L_{\kappa\lambda}$

Sea ρ un tipo y Σ un conjunto de enunciados de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$. Se tiene que Σ es κ SAT si y solo si Σ es SAT.

De esta manera $MTC_{\omega\omega}$ es el teorema de compacidad clásico. Como siempre la única prueba interesante es la implicación pues el recíproco es trivial. Notemos que en el ejemplo de arriba Σ no es ω_1 SAT. Sin embargo, $MTC_{\kappa\lambda}$ no siempre es verdadero.

Proposición 4.3 ***Si*** κ ***es singular, entonces*** $MTC_{\kappa\omega}$ ***es falso.***

Prueba:

El conjunto de enunciados que sirve para esta proposición es el lo mismo que el Σ del principio del capítulo. Tomemos el tipo $\rho = \{c_\alpha\}_{\alpha\in\kappa} \cup \{c\}$, donde todos son símbolos de constante. Sabemos que $\varphi = \bigvee\limits_{\alpha\in\kappa} c = c_\alpha$ es una fórmula en $L_{\kappa^+\omega}(\rho)$ por la proposición$_{3,36}$ por lo que hay $\sigma \in FORM_{\kappa\omega}(\rho)$ que es equivalente a φ. Ahora, sea:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma & = & \{\sigma\} \\ & \bigcup & \{ \quad c \neq c_\alpha \quad | \quad \alpha \in \kappa \quad \} \end{array}$$

Claramente Σ es κ SAT, pero no es SAT.

$\star$

De hecho veremos que $MTC_{\kappa\omega}$ también es falso para muchos regulares, aunque antes necesitaremos algunas definiciones de teoría de gráficas. Recordemos que si a es un conjunto, entonces K_a representa la gráfica cuyo conjunto de vértices es a y tiene todas las aristas posibles.

Definición 4.4 *G es (κ,μ)* vértice coloreable *si y solo si toda subgráfica de G de tamaño menor que κ es μ* vértice *coloreable. Esto lo abreviamos como que G es (κ,μ) COLOR.*

Ahora veremos la κ versión del famoso teorema de Erdös Brujin.

(TEB$_\kappa$) κ Teorema de Erdös Brujin

Sea $\mu < \kappa$ (incluso puede ser finito) y G una gráfica, entonces G es (κ,μ) $COLOR$ si y solo si G es μ $COLOR$.

De nuevo, el recíproco es trivial. En el libro de [Amorc] en las páginas 51-54 se prueba que $MTC_{\omega\omega}$ implica TEB_{ω} así que no es de sorprender que tengamos:

Proposición 4.5 $MTC_{\kappa\omega}$ ***implica*** TEB_{κ}.

Prueba:

Basta con copiar la prueba de que $MTC_{\omega\omega}$ implica TEB_{ω}.Sea G una gráfica (κ, μ) $COLOR$. Veamos que es κ $COLOR$. Tomemos $\{ \quad p_\alpha \quad | \quad \alpha \in \mu \quad \}$ un conjunto de colores y sea $\rho = \{v_x\}_{x \in G} \cup \{c_\alpha\}_{\alpha \in \mu}$, donde los v_x son constantes y los c_α son símbolos de relación de aridad 1. Intuitivamente $c_\alpha(v_x)$ significa que a x lo pintaremos con p_α. Ahora, definimos:

$$\begin{array}{lll} \Sigma & = & \{ \quad v_x \neq v_y \quad | \quad x, y \in G \text{ y } x \neq y \quad \} \\ & \bigcup & \{ \quad \bigvee_{\alpha \in \mu} c_\alpha(v_x) \quad | \quad x \in G \quad \} \\ & \bigcup & \{ \quad \neg(c_\alpha(v_x) \wedge c_\beta(v_x)) \quad | \quad x \in G \text{ y } \alpha \neq \beta \quad \} \\ & \bigcup & \{ \quad \neg(c_\alpha(v_x) \wedge c_\alpha(v_y)) \quad | \quad \alpha \in \mu \text{ y } x \text{ es adyacente a } y \quad \} \end{array}$$

Claramente si Σ es SAT, entonces G es μ $COLOR$. Ahora veamos que Σ es κ SAT. Sea $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que $|\Sigma'| < \kappa$ y definimos S como el conjunto de los $x \in G$ tal que v_x aparece en una fórmula de Σ'; así, tenemos que $|S| < \kappa$. Sea H la subestructura generada por S, por hipótesis tenemos que podemos colorear a H con los μ colores. Ahora, definimos la estructura $\mathfrak{A}$ con universo H, donde:

$$\begin{array}{ll} a) & v_x^{\mathfrak{A}} = x \\ b) & c_\alpha^{\mathfrak{A}}(x) \Longleftrightarrow x \in H \text{ y } x \text{ lo pintamos con } p_\alpha \end{array}$$

Así es claro que $\mathfrak{A} \models \Sigma'$ y, por $MTC_{\kappa\omega}$, concluimos que Σ es SAT. Por lo tanto G es μ vértice coloreable.

$\star$

Y ahora ya con esto tenemos:

Corolario 4.6 ***Para todo*** κ ***sucede que*** $MTC_{\kappa^+\omega}$ ***es falso.***

Prueba:

Supongamos que $MTC_{\kappa^+\omega}$ es verdadero. Ahora sea a de cardinal κ^+. Claramente K_a es (κ^+, κ) $COLOR$, por lo que K_a es κ $COLOR$. Sin embargo en K_a todos los vértices deben tener distinto color de manera que $\kappa^+ \leq \kappa$.

⋆

En el artículo de [Cowen] se prueba que TEB_ω implica que $MTC_{\omega\omega}$, por lo que estos dos son equivalentes. Sin embargo debo admitir que no se si $MTC_{\kappa\omega}$ es equivalente a TEB_κ (la prueba de Cowen no se puede generalizar tan fácilmente y yo creo que no son equivalentes, pero me gustaría investigarlo).

Y como si no hubiéramos fallado lo suficiente, también tenemos que si κ no es fuerte (cerrado bajo 2^-, es decir, si $\lambda < \kappa$ entonces $2^\lambda < \kappa$) entonces $MTC_{\kappa\omega}$ también es falso (sabiendo esto, la proposición anterior es inútil, pero la prueba estaba bonita).

Proposición 4.7 ***Si κ no es fuerte, entonces $MTC_{\kappa\omega}$ es falso.***

Prueba:

Sea κ tal que hay $\mu < \kappa$ con $\kappa \leq 2^\mu$ y supongamos que $MTC_{\kappa\omega}$ es verdadero. Tomemos $C = \{ c_\alpha \mid \alpha \in \mu \}$ un conjunto de constantes y definamos $\rho = \{g\} \cup C \cup \{a, b\}$, donde g es un símbolo funcional de aridad 1, a y b son constantes. Construiremos una función cuyo dominio es C e imagen en $\{a, b\}$ pero que es distinta a todas las funciones en ${}^C\{a, b\}$. Para cada $f \in {}^C\{a, b\}$, sea $\sigma_f = \bigvee_{\alpha\in\mu} g(c_\alpha) \neq f(c_\alpha)$. Ahora definamos al conjunto:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma &=& \{a \neq b\} \\ & \bigcup & \{ c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha, \beta \in \mu \text{ y } a \neq \beta \} \\ & \bigcup & \{\forall x(g(x) = a \vee g(x) = b)\} \\ & \bigcup & \{ \sigma_f \mid f \in {}^C\{a, b\} \} \end{array}$$

Veamos que Σ es $\kappa\, SAT$. Tomemos $\Sigma' \subseteq \Sigma$ con $|\Sigma'| < \kappa$. Así, tenemos que $|\Sigma'| < 2^\mu$, por lo que hay $f \in {}^C\{a, b\}$ tal que $\sigma_f \notin \Sigma'$. Sea $\mathfrak{A}$ con universo $C \cup \{a, b\}$, donde cada constante se interpreta como ella misma y $g^{\mathfrak{A}} = f \cup \{(a, a), (b, b)\}$. Claramente $\mathfrak{A} \models \Sigma'$.

Por $MTC_{\kappa\omega}$, tenemos que Σ es SAT. Ahora, tomemos $\mathfrak{B} \models \Sigma$ y definamos:

$$\begin{array}{rcl} h &:& C \longrightarrow \{a, b\} \\ h(c_\alpha) &=& x, \qquad \text{donde } g(c_\alpha)^{\mathfrak{B}} = x^{\mathfrak{B}}. \end{array}$$

Si $f \in {}^C\{a, b\}$, como $\mathfrak{B} \models \sigma_f$, entonces hay c_α tal que $g(c_\alpha)^{\mathfrak{B}} \neq f(c_\alpha)^{\mathfrak{B}}$, por lo que $h(c_\alpha) \neq f(c_\alpha)$. Así $h \notin {}^C\{a, b\}$, lo cual es evidentemente una contradicción.

⋆

Bueno, pero entonces ¿hay un $\kappa > \omega$ para el cual $MTC_{\kappa\omega}$ sea cierto? A estos cardinales (en caso de existir) les daremos un nombre especial, y al fin llegó el momento de la gran definición:

Definición 4.8 *Decimos que κ es* (fuertemente) compacto *si y solo si $\kappa > \omega$ y $MTC_{\kappa\omega}$ es cierto.*

Por que lo probamos anteriormente podemos concluir lo siguiente.

Corolario 4.9 ***Si κ es compacto entonces, es inaccesible.***

⋆

Como no podemos probar que existan los inaccesibles, nuestro inocente deseo de generalizar compacidad ha sido desmoronado, sin embargo nos ha mostrado un nuevo tipo de inaccesibles, los cuales como veremos, son verdaderamente sorprendentes.

5 Cardinales Compactos y Ultrafiltros

Sabemos que el teorema de compacidad es equivalente al teorema del ultrafiltro, (lo cual puede verse en [Bell] páginas 102-106) por lo que uno podría sospechar que debe haber alguna relación entre los cardinales compactos y los ultrafiltros... ¡Y efectivamente la hay!

El teorema del ultrafiltro nos dice que todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro. Ahora si tenemos un filtro con una cierta propiedad ¿podrá agrandarse a un ultrafiltro que cumpla dicha propiedad? En particular, estaremos interesados en los filtros κ completos (filtros cerrados bajo intersección de tamaño menor que κ) ¿será cierto que todo filtro κ completo puede extenderse a un ultrafiltro κ completo? Pues resulta, que para los cardinales compactos **casi** se logra esto.

Definición 5.1 *Un álgebra completa puede tener subálgebras no completas, (por ejemplo $\wp(\omega)$ es completa, pero la subálgebra de los cofinitos y sus complementos no es completa) así, si tomamos $\mathfrak{B}$ completa (κ completa) decimos que $\mathfrak{A}$ es una subálgebra completa (κ completa) si $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ es completa (κ completa) y para cualquier $D \in \wp(A)$ ($D \in \wp_\kappa(A)$) se tiene que los ínfimos (y supremos) son los mismos en $\mathfrak{A}$ y en $\mathfrak{B}$.*

Un *campo de conjuntos* es una subálgebra de un álgebra potencia, y un *campo κ completo (completo) de conjuntos* es una subálgebra κ completa (completa) de un álgebra potencia.

El que $\mathfrak{A}$ sea subálgebra de $\mathfrak{B}$ y sea completa no implica que sea una subálgebra completa, como lo veremos con los siguientes lemas.

Lema 5.2 ***Todo campo completo de conjuntos tiene átomos.***

Prueba:

Sea A un conjunto y $\mathfrak{B}$ una subálgebra completa de $\wp(A)$. Tomemos $a \in A$ y sea $D = \bigcap \{ C \in B \mid a \in C \}$. Entonces $a \in D$ y, como $\mathfrak{B}$ es completa, $D \in B$. Supongamos que D no es un átomo en $\mathfrak{B}$ entonces hay $D_1, D_2 \in B$ no vacíos tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ y $D = D_1 \cup D_2$. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $a \in D_1$, pero $D_1 \subsetneq D$ y D era el ínfimo de los elementos de $\mathfrak{B}$ que tenían a a, lo cual es una contradicción.

$\star$

Usaremos varias nociones de topología, las cuales pueden consultarse en el apéndice correspondiente. Recordemos que si tenemos un espacio topológico entonces U es un *abierto regular* si y solo si $U = \left(\overline{U}\right)^{\circ}$. De manera intuitiva, estos conjuntos son los abiertos que "no tienen hoyitos ni cuarteaduras"(pues precisamente al cerrar a U se llenan los hoyitos y las cuarteaduras).

Llamemos $RO\,(X)$ al conjunto de todos los abiertos regulares de X. Entonces es fácil ver que $RO(X)$ es un álgebra booleana completa. Hay que mencionar que, aunque el orden de $RO(X)$ es la contención, el supremo y el complemento no son la unión y el complemento de conjuntos, por lo que $RO(X)$ no es un campo de conjuntos.

Lema 5.3 ***Si X es un espacio Hausdorff, entonces los átomos de $RO(X)$ son precisamente los unitarios de los puntos aislados de X.***

Prueba:

Primero tomemos $a \in X$ un punto aislado, entonces $\left(\overline{\{a\}}\right)^{\circ} = \{a\}^{\circ} = \{a\}$, por lo que $\{a\} \in RO\,(X)$ y claramente es un átomo.

Ahora, sea $A \in RO\,(X)$ con más de un punto, veamos que no puede ser un átomo. Sean $a, b \in A$ distintos, ya que $X \in T_2$ y A es abierto, entonces hay un abierto U tal que $a \in U \subseteq A$ y $b \notin \overline{U}$. Sabemos que $U \subseteq A$, por lo que $\left(\overline{U}\right)^{\circ} \subseteq \left(\overline{A}\right)^{\circ} = A$, pero como $b \notin \left(\overline{U}\right)^{\circ}$, tenemos que $\left(\overline{U}\right)^{\circ} \subsetneq A$. Dado que $\left(\overline{U}\right)^{\circ} \in RO(X)$, concluimos que A no es un átomo.

$\star$

Si juntamos los 2 lemas, obtenemos lo siguiente.

Corolario 5.4 ***Si X es un espacio Hausdorff y no tiene puntos aislados, entonces $RO(X)$ es un álgebra booleana completa que no es isomorfa a ningún campo completo de conjuntos.***

$\star$

El teorema de la representación de Stone nos dice que toda álgebra de Boole es isomorfa a un campo de conjuntos, por lo que $RO(\mathbb{R})$ es isomorfa a un campo de conjuntos, pero por el corolario sabemos que tal campo de conjuntos no es un campo completo de conjuntos. Podemos concluir que el "teorema de la representación completa de Stone"(toda álgebra booleana completa es isomorfa a un campo completo de conjuntos) es falso.

Dado un conjunto S, denotaremos por $\wp_{\kappa}\,(S)$ al conjunto de los subconjuntos de S de tamaño **estrictamente menor** que κ. Ahora, pasemos a generalizar la noción de pif.

Definición 5.5 *Sea* $\mathfrak{B}$ *un álgebra* κ *completa y* $S \subseteq B$, *decimos que* S tiene κpif *si y solo si para todo* $A \in \wp_\kappa(S)$ *se tiene que* $\bigwedge A \neq 0$.

Varias proposiciones antiguas se generalizan.

Lema 5.6 ***Sea*** $\mathfrak{B}$ ***un álgebra*** κ ***completa. Se tiene lo siguiente.***

$a)$ **Si** κ **es singular,**

1) S **tiene** κpif **si y solo si** S **tiene** $\kappa^+ pif$;

2) **si** $F \subseteq B$ **es un filtro, entonces** F **es** κ **completo si y solo si es** κ^+ **completo.**

$b)$ **Si** A **tiene** κpif, **entonces puede extenderse a un filtro** κ **completo.**

$c)$ **Si** κ **es regular,** A **tiene** κpif **y** $1 = \bigvee\limits_{\xi \in \mu} b_\xi$, **donde** $\mu < \kappa$ **y todos los** b_ξ **son ajenos, entonces hay** α **tal que** $A \cup \{b_\alpha\}$ **tiene** $kpif$.

$\star$

Ahora, veamos que relación tienen los filtros κ completos con los cardinales compactos.

Proposición 5.7 ***Sea*** κ ***compacto y*** $\mathfrak{B}$ ***un campo de conjuntos*** κ ***completo, entonces todo filtro*** κ ***completo de*** $\mathfrak{B}$ ***puede extenderse a un ultrafiltro*** κ ***completo.***

Prueba:

Tomemos A un conjunto, $\mathfrak{B}$ una subálgebra κ completa de $\wp(A)$ y F un filtro κ completo sobre $\mathfrak{B}$. Sea $\rho = \{ R_b \mid b \in B \}$,donde los R_b son símbolos relacionales de aridad 1. Ahora definimos $\mathfrak{A} = (A, ...)$ en el cual $R_b^{\mathfrak{A}} = b$. Consideremos el nuevo tipo $\rho' = \rho \cup \{c\}$, donde c es un símbolo de constante. Veamos el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned} \Sigma &= Th_{\kappa\omega}(\mathfrak{A}) \\ &\bigcup \{ R_b(c) \mid b \in F \} . \end{aligned}$$

Veamos que Σ es SAT. En virtud de que κ es compacto, basta que veamos que es κ SAT. Tomemos $\Sigma' \in \wp_\kappa(\Sigma)$ y sea S el conjunto de los elementos de F tal que R_b aparece en Σ'.Sabemos que $|S| < \kappa$, por lo que $\bigcap S \in F$ y, así, $\bigcap S \neq \emptyset$. Escojamos $a \in \bigcap S$ y claramente la expansión $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}, a)$ es modelo de Σ'.

Así, concluimos que Σ es SAT, por lo que hay $\mathfrak{C} \models \Sigma$. Ahora definamos $U = \{ b \in B \mid \mathfrak{C} \models R_b(c) \}$. Sabemos que $\mathfrak{C} \models R_b(c)$ para toda $b \in F$, por lo que $F \subseteq U$. Solo tenemos que ver que U es un ultrafiltro κ completo, veremos solo la κ completez dado que la prueba de lo demás es similar.

Sea $D \in \wp_\kappa(U)$, veamos que $\bigcap D \in U$. Para esto, tomemos la fórmula $\sigma = \forall x \left(\bigwedge_{b \in D} R_b(x) \longrightarrow R_{\cap D}(x) \right)$. Claramente $\mathfrak{A} \models \sigma$, por lo que $\mathfrak{C} \models \sigma$. Pero, como $\mathfrak{C} \models \bigwedge_{b \in D} R_b(c)$, entonces $\mathfrak{C} \models R_{\cap D}(c)$, lo que implica que $\bigcap D \in U$.

$\star$

Quizás el lector se pregunte, ¿cual es la razón de probar solo para campos de conjuntos y no para álgebras booleanas en general? Bueno, la razón es que en general esto no es cierto, pero tenemos que esperar un poco para descubrir por qué.

Corolario 5.8 ***Si*** κ ***es compacto, entonces para cualquier conjunto*** A, ***todo filtro*** κ ***completo en*** A ***puede extenderse a un ultrafiltro*** κ ***completo.***

$\star$

Resulta que las conclusiones de esta proposición y el corolario son equivalentes a ser compacto. El secreto para probar $MTC_{\omega\omega}$ era el Teorema de Łoš. Así que, para probar la equivalencias investigaremos el Teorema de Łoš para lenguajes infinitarios en el próximo capítulo.

Ahora pasemos a estudiar los ultrafiltros no principales y la primera observación que podemos hacer es que éstos tienen cierta restricción en cuanto a su completud.

Proposición 5.9 ***Sea*** U ***un ultrafiltro no principal sobre*** κ ***y sea*** $S \in U$. ***Entonces*** U ***no es*** $|S|^+$***-completo.***

Prueba:

Como U es no principal, para cada $\alpha \in S$, hay $B_\alpha \in U$ tal que $\alpha \notin B_\alpha$, de esta forma $\{S\} \cup \{ B_\alpha \mid \alpha \in S \} \subseteq U$, pero su intersección es vacía, por lo que U no es $|S|^+$ completo.

$\star$

Corolario 5.10 ***Ningún κ tiene ultrafiltros no principales κ^+ completos.***

$\star$

Pronto veremos que con la ayuda de un cardinal compacto podemos crear ultrafiltros no principales κ completos, pero para esto necesitaremos de la siguiente definición y el siguiente lema:

Definición 5.11 $co\kappa(\mu) \quad = \quad \{ \quad S \subseteq \mu \quad | \quad |\mu - S| < \kappa \quad \}$.

Y ahora el lema que se prueba sin problemas:

Lema 5.12 ***Sea $\mu \geq \kappa$. Se tiene lo siguiente.***

a) ***Si κ es regular, entonces $co\kappa(\mu)$ es un filtro κ completo no principal;***

b) ***si U es un ultrafiltro κ completo no principal, entonces $co\kappa(\mu) \subseteq U$;***

c) ***así, todos los elementos de U tienen cardinal al menos κ;***

d) ***si $\lambda < \kappa$ y U es un ultrafiltro κ completo y $\bigcup \quad \{ \quad S_\alpha \quad | \quad \alpha \in \lambda \quad \} \in U$, entonces hay $\alpha \in \lambda$ tal que $S_\alpha \in U$;***

e) ***U es κ completo si y solo si no hay particiones de μ en menos de κ conjuntos, donde ninguno esté en U.***

$\star$

Juntando todos nuestros conocimientos, podemos deducir lo siguiente.

Corolario 5.13 ***Si κ es compacto y $\mu \geq \kappa$ entonces, μ tiene un ultrafiltro κ completo no principal.***

$\star$

También se deduce el siguiente caso muy particular.

Corolario 5.14 ***Si κ es compacto entonces, tiene un ultrafiltro κ completo no principal.***

⋆

En realidad sólo por que un cardinal cumpla esto tendrá propiedades mágicas e increíbles, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 5.15 *Decimos que κ es un* cardinal medible *si y solo si κ es no numerable y tiene un ultrafiltro κ completo no principal.*

Y ¿por qué se llaman medibles? ¿no quedaría mejor cardinal ultrafiltroso o algo así? La razón es que estos cardinales tienen relación con problemas de la teoría de la medida, incluso uno puede ir de manera muy natural "De la Medida de Lebesgue a los Cardinales Grandes". Esto no se verá aquí, pero puede verse de una manera fabulosa en [Judith].

Proposición 5.16 ***Si κ es medible, entonces es inaccesible.***

Prueba:

$\star$) **Veamos que κ es regular.**

Supongamos que κ es medible, pero es un cardinal singular. Sea U un ultrafiltro sobre κ κ completo y no principal. Al ser singular, κ puede partirse en menos de κ pedazos cada uno de tamaño menor que κ, es decir, hay $P = \{ B_\alpha \mid \alpha \in \lambda \}$ una partición de κ tal que $\lambda < \kappa$, y $|B_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha \in \lambda$. Por el inciso c) del lema$_{5,12}$, ningún B_α pertenece a U (pués tienen tamaño menor que κ). Pero de esta manera tenemos una partición de κ, en menos de κ conjuntos donde ninguno pertenece a U, lo cual contradice el inciso e) del lema$_{5,12}$.

$\star\star$) **Veamos que κ es fuerte.**

Supongamos que hay $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$. Así, hay $A \subseteq 2^\lambda$ con $|A| = \kappa$. Ahora, tomemos un ultrafiltro no principal κ completo U sobre A y para cada $\alpha \in \lambda$, sean:

$$\begin{array}{lcl} C_\alpha & = & \{ f \in A \mid f(\alpha) = 0 \} \\ C'_\alpha & = & \{ f \in A \mid f(\alpha) = 1 \} \end{array}$$

Como $C_\alpha \cup C'_\alpha = A \in U$, uno de los dos está en U y sea B_α aquél que está en U. Así tenemos que $B = \{ B_\alpha \mid \alpha \in \lambda \} \subseteq U$, por lo que $\bigcap B \in U$. Sin embargo, $\bigcap B$ tiene a lo más un elemento, lo cual es una contradicción.

⋆

6 El Teorema de Łoš Infinito

Sabemos que los naturales y los naturales no estándar son elementalmente equivalentes en $L_{\omega\omega}$, pero no lo son en $L_{\omega_1\omega}$. Así, en lenguajes infinitarios una ultrapotencia no necesariamente es elementalmente equivalente al ultrapotenciado, por lo que el teorema de Łoš es falso. Sin embargo, no todo es tan grave como parece, ya que resulta que si le pedimos un poco más al ultrafiltro, entonces esta versión del teorema de Łoš sea verdadero. (Esto es como el principio de .Equivalencia de Intercambio": si queremos ganar más, entonces tenemos que dar más).

Como trabajaremos con los lenguajes $L_{\kappa\lambda}$, no perdemos nada al tomar κ regular y $\lambda \leq \kappa$. Ahora extenderemos la definición que teníamos del valor booleano a fórmulas de $L_{\kappa\lambda}$.

Definición 6.1 *Sea* $\sigma(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula de* $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ *y* $\{\overline{a_\alpha}\}_{\alpha\in\mu} \subseteq \prod\limits_{i\in I} A_i$. *Definimos* el valor booleano de $\sigma((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})$ *como*

$$\|\sigma((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\| \quad = \quad \{ \quad i \in I \quad | \quad \mathfrak{A}_i \models \sigma(\,(\overline{a_\alpha}(i))_{\alpha\in\mu}\,) \quad \} \ .$$

A continuación, se enuncian unas propiedades sobre el valor booleano cuyas pruebas son sencillas y pueden consultarse en [Hodgesc] página 239 (recuerden que * denota al complemento).

Lema 6.2

a) $\|\neg\sigma((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\| = \|\sigma((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\|^*$.

b) $\left\|\bigwedge\limits_{\beta\in\eta} \sigma_\beta((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\right\| = \bigcap\limits_{\beta\in\eta} \|\sigma_\beta((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\|$.

c) $\left\|\underset{\alpha\in\eta}{\exists} x_\beta \sigma(x_\alpha, ((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu}))\right\| \supseteq \left\|\sigma(\overline{b}, ((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu}))\right\|$ para cualquier $\overline{b} \in \left(\prod\limits_{i\in I} A_i\right)^\eta$.

d) $\left\|\underset{\beta\in\eta}{\exists} x_\beta \sigma(x_\alpha, (\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\right\| = \left\|\sigma(\overline{b}, ((\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu})\right\|$ para alguna $\overline{b} \in \left(\prod\limits_{i\in I} A_i\right)^\eta$.

⋆

Ahora veamos, para probar el teorema de Łoš necesitaremos hacer una inducción sobre las fórmulas. En particular para el símbolo $\bigwedge$ necesitamos saber que el hecho de que el valor booleano de todos los conyuntos esté en el ultrafiltro implica que también el valor booleano de la conjunción esté en el ultrafiltro, pero éste es la intersección de todos por lo que necesitamos que el ¡ultrafiltro sea κ completo!

Teorema de Łoš Infinitario

Sea $\{ \quad \mathfrak{A}_i \quad | \quad i \in I \quad \}$ un conjunto de estructuras y U un ultrafiltro κ completo sobre I;

a) **si σ es una fórmula de $L_{\kappa\lambda}(\rho)$ y $\{ \quad \overline{a_\alpha} \quad | \quad \alpha \in \mu \quad \} \subseteq \prod_{i \in I} A_i$, entonces:$\mathfrak{A} \models \sigma(\overline{a_\alpha}/U)_{\alpha\in\mu}$ si y solo si $\|\sigma(\overline{a_\alpha})_{\alpha\in\mu}\| \in U$.**

b) **Si σ es un enunciado, entonces, $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $\|\sigma\| \in U$.**

$\star$

Con esto estamos listos para probar una equivalencia de ser cardinal compacto, pero la dejaremos para el próximo capítulo. Mientras veamos unas sencillas consecuencias de el teorema de Łoš que serán utiles más adelante. Evidentemente tenemos el siguiente lindo corolario.

Corolario 6.3 ***Si $\mathfrak{B}$ es una estructura y $U \subseteq I$ es un ultrafiltro κ-completo, entonces $\mathfrak{B} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}^I/U$.***

$\star$

Aunque podemos obtener un mejor resultado, definamos la función:

$$\begin{array}{rcl} d & : & B \longrightarrow B^I/U \\ d(a) & = & (a)_{i\in I}/U. \end{array}$$

Es decir, $d(a)$ es la clase del vector constante a. Esta función recibe el nombre de *inmersión canónica*. Ahora es claro que se sigue el siguiente corolario.

Corolario 6.4 ***Si U es un ultrafiltro κ completo en I, entonces la inmersión canónica es una $\kappa\lambda$ inmersión elemental.***

⋆

De esta forma podemos pensar (y unas veces lo haremos pero otras no) en que $\mathfrak{B}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}^I/U$. Recordemos que la ultrapotencia de los naturales resultaba no estar bien fundada, pero veamos que esto cambia si nos restringimos a ultrafiltros $\aleph_1$ completos.

Lema 6.5 ***Sea*** I ***un conjunto de tamaño*** $\kappa > \omega$ ***y*** U ***un ultrafiltro no principal*** κ ***completo, entonces,***

a) $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$ ***es bien fundado si cada*** $\mathfrak{A}_i$ ***lo es;***

b) $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$ ***es bien fundado y extensional si cada*** $\mathfrak{A}_i$ ***lo es.***

Prueba:

Ya antes vimos que $COBF \in EC_{\omega_1\omega_1}$, así que se sigue del teorema de Łoš.

⋆

Usando el teorema de Łoš podemos probar que un medible es mucho más que un inaccesible. A esta altura en este punto de la aventura nos costará trabajo, pero ya que hayamos avanzado más podremos dar pruebas casi inmediatas de esta proposición.

Proposición 6.6 ***El primer inaccesible no es medible.***

Prueba:

Llamemos κ al primer inaccesible y supongamos que éste es medible. Ahora, para cada $\omega < \mu < \kappa$, definimos recursivamente lo siguiente:

$$\begin{array}{lcl} A_0(\mu) & = & \mu + 1 \\ A_{\alpha+1}(\mu) & = & \wp_\mu(A_\alpha(\mu)) \\ \underset{\alpha\in LIM}{A_\alpha(\mu)} & = & \bigcup\limits_{\xi<\alpha} A_\alpha(\mu) \end{array}$$

Finalmente definimos, $A(\mu) = \bigcup\limits_{\alpha\in OR} A_\alpha(\mu)$. Lo primero que haremos será mostrar que esto es un conjunto. Usando la regularidad de μ^+, es claro que $\wp_\mu\left(A_{\mu^+}(\mu)\right) = A_{\mu^+}(\mu)$, por lo que si $\mu^+ < \alpha$, entonces $A_\alpha(\mu) = A_{\mu^+}(\mu)$. Así, concluimos que $A(\mu) = A_{\mu^+}(\mu)$. Los siguientes hechos son evidentes, pero vitales para nuestra construcción.

a) $\mu + 1 \subseteq A(\mu)$.
b) Si $a \subseteq A(\mu)$ y $|a| < \mu$, entonces $a \in A(\mu)$.
c) Si $a \in A(\mu)$, entonces $a = \mu$ o $|a| < \mu$.
d) μ es el máximo ordinal de $A(\mu)$.
e) Si $a \in A(\mu)$, $a \neq \mu$ y $f : a \longrightarrow A(\mu)$, entonces $f \in A(\mu)$.
f) Si $\alpha < \beta \leq \mu$ y $f : \alpha \longrightarrow \beta$, entonces $f \in A(\mu)$.
g) Si $\alpha \in A(\mu)$, entonces α es cardinal si y solo si α es cardinal en $A(\mu)$.
h) Si $\lambda \in A(\mu)$, entonces λ es regular si y solo si λ es regular en $A(\mu)$.

Ahora queremos obtener un resultado similar al último inciso pero para cardinales fuertes. Sin embargo, hay un pequeño detalle técnico, pues $A(\mu)$ no es modelo del axioma de potencia, así que no es muy claro cómo interpretamos "ser fuerte en $A(\mu)$". Es evidente que se sigue que

λ es fuerte si y solo si $\wp(\alpha)$ existe para todo $\alpha < \lambda$ y además no hay una función $f : \wp(\alpha) \longrightarrow \lambda$ sobreyectiva.

De modo que si tomamos esta equivalencia como definición de fuerte, entonces dado un $\lambda \in A(\mu)$ éste es fuerte si y solo si lo es en $A(\mu)$. Como consecuencia, un elemento en $A(\mu)$ es inaccesible si y solo si lo es en $A(\mu)$, por lo que todos los $A(\mu)$ son modelo de "No existen los inaccesibles".

Aquí viene lo mágico. Tomemos U un ultrafiltro no principal κ completo sobre $CAR \cap \kappa - \{\omega\}$ (el cual tiene tamaño κ pues éste es inaccesible). Definamos $\mathfrak{A} = \prod A(\mu)/U$. Ahora como este ultraproducto es bien fundado y extensional, tomemos su colapso M. Observemos que si $a \subseteq M$ y $|a| < \kappa$, entonces $a \in M$. Esto es porque "ser cerrado bajo subconjuntos de tamaño μ"se puede escribir con una fórmula en $L_{\mu^+\mu^+}$, por lo que si $\mu < \kappa$, entonces esta fórmula es verdadera en casi todos los ultrafactores).

Sea α el máximo ordinal de M (su existencia nos la garantiza el teorema de Łoš). Afirmamos que $\kappa \leq \alpha$, pues en caso contrario $\alpha + 1 \in M$ (ya que M es cerrado bajo subconjuntos de tamaño $|\alpha|$), lo cual contradice la maximalidad de α. Pero entonces M tiene un inaccesible, por lo que casi todos los $A(\mu)$ tienen un inaccesible... y esto es falso.

⋆

Ahora estaremos interesados en una generalización de la propiedad que garantiza el teorema de Loweinheim Skolem ascendente.

Definición 6.7 ***Decimos que*** κ ***tiene*** la propiedad de la extensión ***si para cualquier*** ρ, ***toda estructura de tamaño al menos*** κ ***tiene una*** $\kappa\kappa$ ***extensión elemental no trivial.***

Sabemos que ω tiene la propiedad de la extensión, pero también la tienen los cardinales que acabamos de conocer.

Proposición 6.8 ***Si $\kappa > \omega$, entonces κ es medible si y solo si κ tiene la propiedad de la extensión.***

Prueba:

Sea $\mathfrak{A}$ de tamaño mayor o igual que κ. Veamos que tiene una extensión elemental no trivial. Como κ es medible, tomemos un ultrafiltro no principal κ completo U y probaremos que $\mathfrak{A}^{\kappa}/U$ es la extensión buscada. Por un lema anterior, solo tenemos que ver que es no trivial. Sea $(a_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ una enumeración sin repetición de los elementos de A, entonces para cada $a \in A$, tenemos que $\|(a_i) = \overline{a}\|$ tiene a lo más un elemento, por lo que no puede estar en U (dado que U es no principal).

Para el recíproco, sea $\mathfrak{A} = (\kappa, \{S\})_{S\subseteq\kappa}$ y ahora, usando la propiedad de la extensión, tomemos $\mathfrak{B} = (B, \{S'\})_{S\subseteq\kappa}$ una $\kappa\kappa$ extensión elemental no trivial. Sea $\heartsuit$ un elemento nuevo y veamos que si $S \in co\kappa\,(\kappa)$, entonces $\heartsuit \in S'$.

Sabemos que $\mathfrak{B}$ es un modelo de todo elemento está en S' o en $(S^*)'$ entonces solo tenemos que ver que $\heartsuit \notin (S^*)'$. Como $\mathfrak{A} \models \forall a \left(S^*(a) \longrightarrow \bigvee_{x\in S^*} x = a\right)$ y dado que S^* tiene tamaño menor que κ, tenemos que esta es una fórmula en $L_{\kappa\kappa}$. De modo que $\mathfrak{B}$ es un modelo de la misma fórmula. Así $(S^*)'$ no admite elementos nuevos.

De esta manera, podemos definir $U = \{ \ S \subseteq \kappa \ \mid \ \heartsuit \in S' \ \}$ y se puede probar que es un ultrafiltro κ completo, y dado que extiende a $co\kappa\,(\kappa)$, entonces es no principal.

$\star$

Como podemos ver en la prueba de arriba κ es medible si y solo si toda estructura de tamaño exactamente κ tiene una $\kappa\kappa$ extensión elemental no trivial. En este momento, es prudente hacer una aclaración, si tenemos $\mathfrak{A} = (A, \sim)$ y $\mathfrak{B} = (B, \longrightarrow)$ una $\kappa\lambda$ extensión elemental de $\mathfrak{A}$, es obvio que $x \sim a$ implica que $x \longrightarrow a$ pero **el recíproco no tiene por que ser cierto.** Es muy posible que en $\mathfrak{B}$ haya elementos (nuevos) más abajo que los de $\mathfrak{A}$. Es decir si, $a \in A$, entonces puede ser que $a_\sim \neq a_\longrightarrow$ (aunque obviamente siempre tenemos una contención).

Por ejemplo, si α es un ordinal infinito, $\mathfrak{A} = (\alpha^+, \in)$ y $\mathfrak{B} = (B, \longrightarrow)$ es una extensión elemental no trivial de $\mathfrak{A}$, como α es máximo en $\mathfrak{A}$, entonces también lo es en $\mathfrak{B}$, pero en $\mathfrak{B}$ hay un elemento nuevo de modo que el segmento inicial de

α creció. Sin embargo, a veces sí podemos garantizar que los segmentos iniciales se preservan.

Lema 6.9 ***Sea*** $\mathfrak{A} = (A, \sim)$ ***y*** $\mathfrak{B} = (B, \longrightarrow)$ ***una*** $\kappa\lambda$ ***extensión elemental de*** $\mathfrak{A}$. ***Si*** $a \in A$ ***y*** $|a_\sim| < \kappa$ ***entonces*** $a_\sim = a_\longrightarrow$.

Prueba:

Es trivial, pues podemos decir exactamente quién es el segmento inicial de a.

$\star$

Ya sabemos que alguien que cumpla la propiedad de la extensión tiene que ser inaccesible, pero solo por diversión lo volveremos a probar.

Proposición 6.10 ***Si*** κ ***es medible entonces es inaccesible.***

Prueba:

Empecemos viendo que es regular y esto lo haremos por contrapositiva, tomemos κ singular y sea $\{ \quad B_\alpha \quad | \quad \alpha \in cof\,(\kappa) \quad \}$ una partición de κ, donde $|B_\alpha| < \kappa$ para cada $\alpha \in cof\,(\kappa)$. Formemos $\mathfrak{A} = (\kappa, \{B_\alpha\})_{\alpha \in cof(\kappa)}$ y sea $\mathfrak{D} = (D, \{B'_\alpha\})_{\alpha \in cof(\kappa)}$ una $\kappa\kappa$ extensión elemental, veremos que forzosamente $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$.

Sea $b \in D$. Como $\mathfrak{A}$ es modelo de "Todo elemento está B_α relacionado para alguna α z ésta es una fórmula de $L_{\kappa\kappa}\,(\rho)$, tenemos que $\mathfrak{D}$ es modelo de esto mismo, por lo que hay $\beta \in cof\,(\kappa)$ tal que $b \in B^{\mathfrak{B}}_\beta$. Pero $\forall x(B_\beta\,(x) \longrightarrow \bigvee\limits_{\xi \in B_\xi} x = \xi)$ es cierto en $\mathfrak{A}$ y ésta es una fórmula de $L_{\kappa\kappa}\,(\rho)$, por lo que $\mathfrak{D}$ es modelo de lo mismo. Así $b \in \kappa$ de manera que $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}$. Concluimos que κ no cumple la propiedad de la extensión.

Ahora veamos que es fuerte. Para esto, tomemos $\lambda < \kappa$ y probaremos que $2^\lambda < \kappa$ al mostrar una estructura de este tamaño que no tiene una $\kappa\kappa$ extensión elemental. Definamos $\rho = \{ \quad R_\alpha \quad | \quad \alpha \in \lambda \quad \}$, donde R_α es un símbolo de relación de aridad 2. Sea $A = \{ \quad a_f \quad | \quad f \in {}^\lambda 2 \quad \} \cup \{0, 1\}$ y formemos la estructura $\mathfrak{A}$ con universo A, donde $R^{\mathfrak{A}}_\alpha\,(a_f, x)$ si y solo si $f\,(\alpha) = x$. Supongamos que $\mathfrak{B}$ es una $\kappa\kappa$ extensión elemental de $\mathfrak{A}$. Veamos que $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Sea $b \in B$ y supongamos que b no es ni 1 ni 0. Notemos que forzosamente $R^{\mathfrak{B}}_\alpha\,(b, 1)$ o $R^{\mathfrak{B}}_\alpha\,(b, 0)$ para cada $\alpha \in \lambda$, pues $\mathfrak{A}$ es modelo de que le suceda esto a todo elemento que no es ni cero ni uno y además solo pasa una de estas. De modo que podemos definir:

$$\begin{array}{rcll} g & : & \lambda & \longrightarrow 2 \\ g(\alpha) & = & x & \qquad x \text{ es el único tal que } R_\alpha^{\mathfrak{B}}(b,x). \end{array}$$

Afirmamos que $b = a_g$. Para probar esto, basta notar que si x, y no son ni 0 ni 1 y están R_α relacionados con los mismos elementos para cada α, entonces son iguales y, como $\mathfrak{B}$ es $\kappa\kappa$ extensión, se tiene lo que queríamos.

⋆

Observemos que en la prueba de arriba tenemos que $|\rho| \leq \kappa$, para mi tesis esta observación no es tan importante, pero lo es para quien deseé estudiar a los cardinales débilmente compactos. Por lo que acabamos de ver, es evidente que cualquier cardinal no numerable menor que $2^{\aleph_0}$ no tiene la propiedad de la extensión pero es ilustrativo dar otra prueba de esto.

Proposición 6.11 ***Si*** $\omega < \kappa \leq 2^{\aleph_0}$, ***entonces*** κ ***no cumple la propiedad de la extensión. Más aún*** $\mathbb{R}$, ***como campo ordenado no tiene una*** $\kappa\kappa$ ***extensión elemental no trivial.***

Prueba:

Sea $\mathfrak{A}$ cualquier $\omega\omega$ extensión elemental de $\mathbb{R}$ no trivial, veremos que no es una $\omega_1\omega_1$ extensión elemental. Ahora veremos que $\mathfrak{A}$ tiene un elemento mayor que todos los naturales estándar.

Tomemos $a \notin \mathbb{R}$, y sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que $a > 0$ y que a es menor que un natural estándar. De esta manera no es difícil ver que hay un $b \in \mathbb{R}$ infinitamente cercano a a, es decir, que $|b-a|$ es un infinitesimal positivo (esto puede verse en [Amorc] pag 75) y entonces $|b-a|^{-1}$ cumple con lo que queremos.

Es claro que si a es mayor que todos los naturales, entonces también lo es $a-1$, por lo que en $\mathfrak{A}$ tenemos que ω es un conjunto numerable acotado por arriba pero sin supremo, mientras que en $\mathbb{R}$ todo conjunto numerable acotado por arriba tiene supremo. Esto puede escribirse en $L_{\omega_1\omega_1}$ por lo que $\mathfrak{A} \not\equiv_{\omega_1\omega_1} \mathbb{R}$.

⋆

7 Ultrafiltros y Cardinales Compactos

En el capítulo llamado Çardinales compactos y Ultrafiltros"probamos un teorema que nos decía cómo se comportaban los cardinales compactos con los ultrafiltros. Ahora probaremos el recíproco de ese teorema así que...¡manos a la obra!

Proposición 7.1 ***Sea $\kappa > \omega$ tal que para todo conjunto A, todo filtro κ completo en $\wp(A)$ puede extenderse a un ultrafiltro κ completo entonces κ es compacto.***

Prueba:

Incluso probaremos algo que parecería ser más que compacto, probaremos $MTC_{\kappa\lambda}$ con $\lambda \leq \kappa$. Sea Σ un conjunto de enunciados de $L_{\kappa\lambda}$ que es κ SAT y veamos que también es SAT. Sabemos que si $|\Sigma| < \kappa$ no hay nada que probar por lo que supongamos $\kappa \leq |\Sigma|$.

Si $\Delta \in \wp_\kappa(\Sigma)$, entonces Δ es SAT, por lo que podemos tomar un $\mathfrak{A}_\Delta$ modelo de Δ y consideraremos $\mathfrak{A} = \prod_{\Delta \in \wp_\kappa(\Sigma)} \mathfrak{A}_\Delta / U$, donde U es un ultrafiltro adecuado. Veamos quién debe ser tal U.

Buscamos que si $\sigma \in \Sigma$, entonces $\mathfrak{A} \models \sigma$, que es equivalente a que $\|\sigma\| \in U$. Así que lo único que debemos hacer es mostrar que hay un ultrafiltro κ completo que extiende a $C = \{ \|\sigma\| \mid \sigma \in \Sigma \}$. Para esto, primero probaremos que C tiene κpif.

Si $\mu < \kappa$, hay que ver que $\bigcap_{\alpha \in \mu} \|\sigma_\alpha\| \neq \emptyset$. Sea $\Delta = \{ \sigma_\alpha \mid \alpha \in \mu \}$ y, como $\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta$ se tiene que $\Delta \in \bigcap_{\alpha \in \mu} \|\sigma_\alpha\|$. Así C tiene κpif. Entonces podemos extender C a un filtro κ completo. Más aún, por hipótesis, podemos extender a C a un ultrafiltro κ completo, de forma que el ultraproducto módulo ese ultrafiltro sea modelo de Σ.

$\star$

Ahora estudiaremos un poco más la prueba anterior para obtener otra equivalencia de cardinal compacto. Teníamos que:

$$\begin{array}{rcl} \|\sigma\| & = & \{ \Delta \in \wp_\kappa(\Sigma) \mid \mathfrak{A}_\Delta \models \sigma \} \\ & \supseteq & \{ \Delta \in \wp_\kappa(\Sigma) \mid \sigma \in \Delta \} . \end{array}$$

Este último conjunto tendrá un nombre especial:

Definición 7.2 *Sea A de tamaño mayor o igual que κ y $S \in \wp_\kappa(A)$. Entonces definimos el* cono de S *como* $\check{S} = \{ B \in \wp_\kappa(A) \mid S \subseteq B \}$.

Si $a \in A$, entonces escribiremos $\check{a}$ en vez de $\{a\}^\vee$. Como todo mundo sabe, comer nieve (en especial en cono) es muy bueno, así que diremos que un filtro es bueno si se come a todos los conos.

Definición 7.3 *Si F es un filtro sobre $\wp_\kappa(A)$, decimos que F es un* filtro bueno *si* $\{ \check{S} \mid S \in \wp_\kappa(A) \} \subseteq F$.

Sobre la existencia de filtros buenos tenemos lo siguiente:

Lema 7.4 ***Si A es de tamaño al menos κ, entonces $\wp_\kappa(A)$ tiene un filtro bueno, y si además κ es regular, entonces este filtro es κ completo.***

Prueba:

Definimos $F = \{ B \subseteq \wp_\kappa(A) \mid \text{hay } S \in \wp_\kappa(A) \text{ con } \widehat{S} \subseteq B \}$. Veremos que este es el filtro buscado solo veremos que cuando κ es regular entonces el filtro es κ completo, pues la prueba del resto es casi similar. Bastaría que probáramos que el conjunto de los conos es cerrado bajo intersecciones de tamaño menor que κ. Sea $\mu < \kappa$,

$$\begin{aligned} B \in \bigcap \{ \widehat{S}_\xi \mid \xi \in \mu \} &\iff \forall \xi \in \mu (B \in \widehat{S}_\xi) \\ &\iff \forall \xi \in \mu (S_\xi \subseteq B) \\ &\iff \bigcup_{\xi \in \mu} S_\xi \subseteq B. \end{aligned}$$

Ahora notemos que si κ es regular, entonces $\bigcup_{\xi\in\mu} S_\xi \in \wp_\kappa(A)$, por lo que lo último es equivalente a que B esté en el cono de $\bigcup_{\xi\in\mu} S_\xi$. Así, obtenemos lo que queríamos.

⋆

Como es de imaginarse nos interesarán los ultrafiltros buenos y en relación con éstos, tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.5 ***Sea $\kappa > \omega$ y A con $|A| \geq \kappa$. Supongamos que U es un ultrafiltro bueno sobre $\wp_\kappa(A)$. Entonces U es no principal.***

Prueba:

Supongamos que U es principal, de esta manera, hay $\{S\} \in U$, donde $S \in \wp_\kappa(A)$. Como $|S| < |A|$ existe un $a \in A - S$. Como U es bueno entonces $\check{a} \in U$, pero sabemos que $\{S\} \cap \check{a} = \emptyset$ por lo que $\emptyset \in U$ lo cual es una contradicción.

$\star$

Ahora pasemos a ver la nueva equivalencia de cardinal compacto.

Proposición 7.6 ***Si κ es no numerable, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:***

a) κ ***es compacto;***

b) ***si*** $|A| \geq \kappa$, ***entonces hay un ultrafiltro κ completo bueno sobre*** $\wp_\kappa(A)$.

Prueba:

El que el inciso *a*) implica el *b*) no es más que ligar los lemas previos. Para la otra implicación, solo hay que notar que en la primer prueba de éste capítulo solo necesitamos que $\wp_\kappa(\Sigma)$ tuviera un ultrafiltro κ completo al que le pertenecieran los conos de los unitarios, lo cual sucede en un ultrafiltro bueno (pues el tiene a todos los conos).

$\star$

En relación a la última parte de la prueba que acabamos de hacer tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.7 ***Sea A con $|A| \geq \kappa$, κ regular y F un filtro κ completo en $\wp_\kappa(A)$. Entonces F es bueno si y solo si los conos de los unitarios pertenecen a F.***

Prueba:

Es decir, para probar que algo es bueno basta que nos preocupemos solo por los conos de los unitarios, y no por todos los conos. Sea $S \in \wp_\kappa(A)$. Como vimos antes, tenemos que $\check{S} = \bigcap_{a \in S} \check{a}$. Además por nuestra hipótesis y κ completud, sucede que $\check{S} \in F$.

$\star$

Quizá el lector esté un poco confundido y considere a los filtros buenos como algo muy extaño. Por esa razón, dedicaré lo que resta de este capítulo para estudiar su utilidad.

Proposición 7.8 ***Sea*** Σ ***un conjunto de al menos*** κ ***enunciados y para cada*** $\Delta \in \wp_\kappa(\Sigma)$, ***sea*** $\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta$. ***Si*** U ***es un ultrafiltro bueno y*** κ ***completo sobre*** $\wp_\kappa(\Sigma)$, ***entonces*** $\prod_{\Delta \in \wp_\kappa(\Sigma)} \mathfrak{A}_\Delta/U \models \Sigma$.

⋆

Como usaremos muchas veces el caso $\kappa = \omega$ enunciémoslo en un corolario.

Corolario 7.9 ***Sea*** Σ ***un conjunto infinito enunciados y para cada*** $\Delta \in \wp_\omega(\Sigma)$ ***sea*** $\mathfrak{A}_\Delta \models \Delta$. ***Si*** U ***es un ultrafiltro bueno sobre*** $\wp_\kappa(\Sigma)$ ***entonces*** $\prod_{\Delta \in \wp_\kappa(\Sigma)} \mathfrak{A}_\Delta/U \models \Sigma$.

⋆

Escribiremos $\mathfrak{A} \curvearrowright \mathfrak{B}$ si hay un monomorfismo de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$. Ahora, usando este corolario, podemos probar que toda estructura se sumerge en un ultraproducto de sus subestructuras finitamente generadas.

Proposición 7.10 ***Sea*** $\mathfrak{A}$ ***una estructura infinita y*** U ***un ultrafiltro bueno sobre*** $\wp_\omega(A)$, ***entonces*** $\mathfrak{A} \curvearrowright \prod_{B \in \wp_\omega(A)} \langle B \rangle /U$.

Prueba:

Llamemos $\mathfrak{D} = \prod_{B \in \wp_\omega(A)} \langle B \rangle /U$. Buscamos mandar a cada $a \in A$ a un "vectorsote"de la forma (a_B), donde $a_B \in \langle B \rangle$ para cada B subconjunto finito de A. De esta manera es natural definir:

$$\begin{aligned} h &: A \longrightarrow D \\ h(a) &= (a_B)/U, \qquad \text{donde } a_B = \begin{cases} a & si \quad a \in \langle B \rangle \\ x & si \quad a \notin \langle B \rangle \text{ y } x \in \langle B \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora, probemos que h es un monomorfismo. Para esto, tomemos σ una literal, y supongamos que $\mathfrak{A} \models \sigma(a, b, ...)$. Sin embargo $\langle B \rangle \models \sigma(a, b, ...)$ para cada $B \subseteq A$ finito tal que $a, b, ... \in B$ (pues σ es literal) como consecuencia, tenemos que $\|\sigma(h(a), h(b), ...)\| \supseteq \{a, b...\}^\vee$. Usando la bondad de U concluimos que $\mathfrak{D} \models \sigma(h(a), h(b), ...)$.

⋆

Notemos que no podemos cambiar "se sumerge"por "se sumerge elementalmente". Por ejemplo, cualquier ultraproducto de estructuras finitas de $\mathbb{Q}$ (como orden) tendrá mínimo, máximo y aparte es discreto, por lo que no es elementalmente equivalente a $\mathbb{Q}$.

Sabemos que las fórmulas que no tienen ni $\neg$ ni $\exists$ "bajan"por lo que usando la proposición anterior concluimos lo siguiente.

Corolario 7.11 ***Sea σ una fórmula en la que no aparecen negaciones ni cuantificadores existenciales entonces se tiene lo siguiente.***

a) ***Si todas las subestructuras finitamente generadas de $\mathfrak{A}$ son modelo de σ, entonces $\mathfrak{A}$ también lo es.***
b) ***Sea K una edad y $\mathfrak{D}$ su límite de Fraïssé. Si $\sigma \in Th(K)$ entonces, $\mathfrak{D} \models \sigma$.***
c) ***El límite de Fraïssé de grupos, anillos, módulos, órdenes parciales... es un grupo, anillo, módulo, órden parcial...***

$\star$

Si el lector no sabe lo que es una edad o un límite de Fraïssé no debe preocuparse, pues no los usaremos en esta tesis, pero recomiendo leerlo en [Hodges] porque esta bien bonito.

Sabemos que no hay forma de que $(\mathbb{Q}, <) \curvearrowright (\mathbb{Z}, <)$, es imposible acomodar a $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$. Sin embargo, sí podemos acomodarlo en alguien elementalmente equivalente a $\mathbb{Z}$, incluso tenemos el siguiente gran teorema.

Proposición 7.12 ***Sean $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in COTO$ con $\mathfrak{A}$ infinito entonces hay una extensión elemental $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{B} \curvearrowright \mathfrak{D}$. Es decir, todo $COTO$ es suborden de alguna extensión elemental de $\mathfrak{A}$.***

Prueba:

Sea $\rho = \{<\} \cup \{ c_b \mid b \in B \}$ y consideremos el siguiente conjunto de enunciados:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sigma_{COTO} \\ &\bigcup \{ c_x < c_y \mid x < y \} . \end{aligned}$$

Puesto que $\mathfrak{A}$ es infinito, entonces para cada $\Delta \subseteq \Sigma$ finito, podemos encontrar una expansión $\mathfrak{A}_\Delta$ de $\mathfrak{A}$ que sea modelo de Δ. Ahora, tomemos el ultraproducto

$\mathfrak{D}$ de las $\mathfrak{A}_\Delta$ módulo un ultrafiltro bueno. De esta manera $\mathfrak{D}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{A}$ y claramente $\mathfrak{B}$ se sumerge en $\mathfrak{D}$.

⋆

Ahora terminaremos con la caracterización de las clases $EC(\Delta)$ que prometimos hace tiempo.

Proposición 7.13 ***Una clase es*** $EC(\Delta)$ ***si y solo si es cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental.***

Prueba:

El que una clase $EC(\Delta)$ sea cerrada bajo ultraproductos y equivalencia elemental ya lo sabíamos. Así, tomemos K cerrado bajo ultraproductos y equivalencia elemental y veamos que es $EC(\Delta)$. Con este fin, definamos $\Sigma = \bigcap_{\mathfrak{B}\in K} Th(\mathfrak{B})$. Es claro que $K \subseteq MOD(\Sigma)$, por lo que solo nos falta probar la otra contención. Tomemos $\mathfrak{A} \models \Sigma$ y para probar que pertenece a K, veamos que es elementalmente equivalente a un ultraproducto de elementos de K. Probaremos que Si $\Delta \subseteq Th(\mathfrak{A})$ y es finito, entonces hay $\mathfrak{A}_\Delta \in K$ que es un modelo de Δ.

Supongamos que $\Delta = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$. Si nadie de K fuera modelo de Δ, entonces $\neg(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n) \in \Sigma$ y así $\mathfrak{A} \models \neg(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_n)$, pero esto es imposible. Ahora, tomemos U un ultrafiltro bueno y sea $\mathfrak{B} = \prod \mathfrak{A}_\Delta / U$. De esta manera, $\mathfrak{B} \models Th(\mathfrak{A})$, por lo que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

⋆

8 Los teoremas de Stone y Tychonoff

Si κ es compacto, ¿será cierto que en cualquier álgebra booleana κ completa todo filtro κ completo puede extenderse a un ultrafiltro κ completo? Sabemos que esto es cierto para los campos κ completos de conjuntos. Si el κ análogo del teorema de Stone fuera cierto: "Toda álgebra booleana κ completa es isomorfa a un campo κ completo de conjuntos.entonces tendríamos que la respuesta a esta pregunta sería un trivial sí.

Aunque ya probamos antes que no toda álgebra completa es isomorfa a un campo de conjuntos, ¿habrá un $\kappa > \omega$ para el cual teorema de Stone siga siendo cierto? Resulta que no, y para probar esto necesitaremos una definición y unos lemas.

Definición 8.1 *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole y $A \subseteq B$.*

a) Decimos que A es una anticadena si para cualesquiera $x, y \in A$ distintos se tiene que $x \wedge y = 0$.

b) $\mathfrak{B}$ tiene cκc (condición de la κ cadena) si y solo si toda anticadena tiene tamaño menor que κ.

c) Escribiremos ccc (condición de la cadena contable) en vez de c$\aleph_1$c.

Veremos que con las anticadenas podemos conocer los supremos de los ideales.

Lema 8.2 ***Sea** $D \subseteq B$ **un ideal (quizá trivial) y** $A \subseteq D$, **anticadena maximal de** D. **Entonces** A **y** D **tienen las mismas cotas superiores (y así** $\bigvee A = \bigvee D$ **en caso de existir).***

Prueba:

Como $A \subseteq D$, toda cota superior de D es cota superior de A. Ahora supongamos que hay b cota superior de A que no es cota superior de D. Entonces hay $d \in D$ tal que $d \nleq b$ y así $d \wedge b^* \neq 0$ (y además $d \wedge b^* \in D$ ya que es ideal). Hay que notar que si $a \in A$, entonces $a \wedge (d \wedge b^*) = (a \wedge b^*) \wedge d = 0$, por lo que $A \cup \{d \wedge b^*\}$ sería una anticadena más grandota que A, lo cual es imposible.

⋆

En particular tenemos que si A es una anticadena maximal en B, entonces $\bigvee A = 1$. Usando el Lema de Zorn, es fácil ver lo siguiente:

Lema 8.3 ***Sea*** $D \subseteq B$ ***un ideal (quizá trivial), entonces*** D ***tiene una anticadena maximal.***

$\star$

Con estos lemas podemos encontrar una equivalencia sobre las anticadenas del álgebra.

Lema 8.4 ***Si*** $\kappa > \omega$, ***entonces*** $\mathfrak{B}$ ***tiene*** *cκc* ***si y solo si para todo*** $E \subseteq B$ ***hay*** $A \in \wp_\kappa(E)$ ***tal que*** A ***y*** E ***tienen las mismas cotas superiores (y así*** $\bigvee A = \bigvee E$ ***en caso de existir).***

Prueba:

Sea D el ideal generado por E, el cual se obtiene al tomar a todos los elementos que son menores que uno de E, (el cual es no trivial si y solo si E tiene *puf*). Es claro que D y E tienen las mismas cotas superiores, y ahora tomemos $C \subseteq D$ una anticadena tal que C y D tienen las mismas cotas superiores. Como $\mathfrak{B}$ tiene *cκc*, sabemos que $|C| < \kappa$.

Pero para cada $b \in C$ (como $b \in D$) hay $S_b \subseteq E$ finito tal que $b \leq \bigvee S_b$. Ahora, sea $A = \bigcup\limits_{b \in C} S_b$. Como $A \subseteq E$ y toda cota superior de A es una cota superior de C, se sigue que A y E tienen las mismas cotas superiores. Además, $|A| \leq |C|\aleph_0 < \kappa$.

Ahora, para el recíproco, tomemos una anticadena E y sea $A \in \wp_\kappa(E)$ con las mismas cotas superiores que E. Afirmamos que $E = A$. Supongamos lo contrario: hay $e \in E - A$. Sabemos que si $a \in A$, entonces $a \wedge e = 0$, de manera que $a \leq e^*$, por lo que e^* es cota superior de A. Pero entonces también debería serlo de E, lo cual es una contradicción.

$\star$

De esta manera podemos concluir que bajo *cκc* la κ completud implica la completud.

Corolario 8.5 ***Si*** $\mathfrak{B}$ ***tiene*** *cκc* ***y es*** κ ***completa, entonces*** $\mathfrak{B}$ ***es completa.***

$\star$

El ejemplo que daremos de un álgebra κ completa que no es isomorfa a un campo κ completo de conjuntos será casi el mismo que el que vimos para un álgebra completa que no es isomorfa a un campo completo de conjuntos.

Proposición 8.6 ***Sea X un espacio Hausdorff sin puntos aislados y con una base numerable, entonces $RO(X)$ es completa, sin átomos y tiene*** *ccc*.

Lo único que falta, es lo de *ccc*, pero ésta es una consecuencia de tener una base numerable.

⋆

Y finalmente podemos ver que la generalización del teorema de Stone es falsa.

Proposición 8.7 ***Si $\mathfrak{B}$ es completa sin átomos y con*** *ccc*, ***entonces $\mathfrak{B}$ no es isomorfa a ningún campo de conjuntos $\aleph_1$ completo (y así, menos a uno κ completo con $\kappa \geq \aleph_1$).***

Prueba:

Esta prueba es similar a la de que todo campo completo de conjuntos tiene átomos. Probaremos que si $\mathfrak{B}$ es completa con *ccc* y es subálgebra $\aleph_1$ completa de $\wp(A)$, entonces $\mathfrak{B}$ tiene átomos. Tomemos $a \in A$ y definamos $E = \{ \ C \in B \ | \ a \in C \ \}$. Como $\mathfrak{B}$ es completa, entonces existe $\bigwedge E$. Como $\mathfrak{B}$ tiene *ccc*, hay $D \subseteq E$ contable tal que $\bigwedge D = \bigwedge E$. Pero como $\mathfrak{B}$ es subálgebra $\aleph_1$ completa de $\wp(A)$, tenemos que $\bigwedge D = \bigcap D$, y razonando de la misma forma que en la prueba antes mencionada tenemos que éste es un átomo.

⋆

En particular,

Corolario 8.8 ***Si X es Hausdorff sin puntos aislados y con una base numerable, entonces $RO(X)$ no es isomorfa a algún campo κ completo de conjuntos con $\kappa > \omega$.***

⋆

Veamos ahora qué adecuación del teorema de Stone se puede probar.

Definición 8.9 *Si $\mathfrak{B}$ es κ completa, definimos*

$$S_\kappa(\mathfrak{B}) = \{ \ U \ | \ U \text{ es ultrafiltro } \kappa \text{ completo de } \mathfrak{B} \ \}.$$

Ahora consideremos la función:

$$\begin{array}{rcl} Ult_\kappa & : & B \longrightarrow \wp\left(S_\kappa\left(\mathfrak{B}\right)\right) \\ Ult_\kappa(a) & = & \{ \quad U \in S_\kappa\left(\mathfrak{B}\right) \quad | \quad a \in U \quad \} \ . \end{array}$$

Cuando no haya peligro de confusión, quitaremos el subíndice κ. La siguiente proposición es de rutina.

Lema 8.10

a) $U \in Ult\,(a)$ ***si y solo si*** $a \in U$,

b) $Ult\,(a \vee b) = Ult\,(a) \cup Ult\,(b)\,,$

c) $Ult\,(a \wedge b) = Ult\,(a) \cap Ult\,(b)\,,$

d) $Ult\,(a^*) = S\,(\mathfrak{B}) - Ult\,(a)\,,$

e) $Ult(1) = S\,(\mathfrak{B})\,,$

f) $Ult(0) = \emptyset,$

g) ***Si*** $D \in \wp_\kappa\,(B)$ ***entonces*** $Ult(\bigwedge D) = \bigcap Ult[D]$.

⋆

La función Ult casi es un monomorfismo, de hecho, lo único que falla es la inyectividad y ahora veremos una sencilla equivalencia de esto mismo.

Corolario 8.11 ***La función*** Ult_κ ***es un monomorfismo de álgebras*** κ ***completas si y solo si todo elemento no cero está en un ultrafiltro*** κ ***completo.***

Si Ult es un monomorfismo y $a \neq 0$, entonces $Ult\,(a) \neq Ult\,(0)$. Pero como $Ult\,(0) = \emptyset$, entonces hay un ultrafiltro κ completo que tiene a a. Para el recíproco, tomemos $a, b \in B$ distintos y veamos que $Ult\,(a) \neq Ult\,(b)$, es decir, que hay un ultrafiltro κ completo que tiene a uno y no al otro. Sin perdida de la generalidad, podemos suponer que $a \nleq b$ por lo que $a \wedge b^* \neq 0$. Así, por hipótesis, hay U ultrafiltro κ completo tal que $a \wedge b^* \in U$. De esta manera, $a, b^* \in U$ y también $b \notin U$.

⋆

Con esto, ya podemos ver cuáles álgebras κ completas son isomorfas a campos κ completos de conjuntos.

Proposición 8.12 *TGS) Teorema General de Stone*

Si $\mathfrak{B}$ ***es*** κ ***completa, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:***

a) $\mathfrak{B}$ ***es isomorfa a un campo*** κ ***completo de conjuntos.***

b) ***Todo elemento de*** $\mathfrak{B}$ ***no cero está en un ultrafiltro*** κ ***completo.***

Prueba:

Ya tenemos que b) implica a), por lo que sólo debemos esforzarnos por la otra implicación. Sea A un conjunto, $\mathfrak{B}$ subálgebra κ completa de $\wp(A)$ y $C \in B$ con $C \neq \emptyset$. Tomemos $a \in C$ y definamos U como el ultrafiltro principal que tiene a a. Si hacemos $U' = U \cap B$, entonces es fácil ver que $C \in U'$ y que éste es un ultrafiltro κ completo en $\mathfrak{B}$.

$\star$

Como $RO(\mathbb{R})$ no es isomorfa a un campo κ completo de conjuntos para $\kappa > \omega$, hay $A \in RO(\mathbb{R})$ distinto de vacío tal que A no está en ningún ultrafiltro κ completo. Evidentemente $\{A\}$ tiene κpif para toda κ y, por lo tanto, podemos extenderlo a un filtro κ completo. Así que, **no es cierto que en cualquier álgebra booleana** κ **completa todo filtro** κ **completo puede extenderse a un ultrafiltro** κ **completo,** aún pidiendo que κ sea compacto y el filtro sea principal.

Ahora veremos la relación que tiene todo esto con la topología, podemos darnos cuenta que $Ult[B] = \{ \ Ult(a) \ | \ a \in B \ \}$ es base de una topología. De esta manera,

Definición 8.13 *Llamamos el* κ espacio de Stone de $\mathfrak{B}$ a $(S_\kappa(\mathfrak{B}), \tau)$, *donde* τ *es la topología dada por* $Ult[B]$.

Aunque todos los $Ult\,(a)$ también son cerrados (pues $Ult\,(a)$ es el complemento de $Ult\,(a^*)$) por lo que $S(\mathfrak{B})$ tiene una base de abiertos-cerrados. Otra propiedad importante es la siguiente.

Proposición 8.14 $S(B)$ ***es Hausdorff y es totalmente disconexo.***

Prueba:

Tomemos U y $V \in S(\mathfrak{B})$ distintos. Así, hay $a \in U$ tal que $a \notin V$ y de esta forma $U \in Ult(a)$ y $V \notin Ult(a)$, por lo que $V \in Ult(a^*)$. Como $Ult(a) \cap Ult(a^*) = \emptyset$, obtenemos el resultado.

⋆

Ya hemos investigando sobre axiomas de separación y conexidad, ahora lo que sigue es investigar sobre su compacidad. Necesitaremos una nueva definición.

Definición 8.15 *Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que X es κ* Lindelöf *si y solo si toda cubierta abierta tiene una subcubierta de tamaño menor que κ.*

Así, vemos que ω Lindelöf es lo mismo que compacto y ω_1 Lindelöf es lo mismo que Lindelöf. Los espacios κ Lindelöf cumplen casi lo mismo que los compactos, pero agregando una κ en los lugares adecuados.

Proposición 8.16

a) ***X es κ Lindelöf si y solo si todo conjunto de cerrados con κpif tiene intersección no vacía.***

b) ***X es κ Lindelöf si y solo si todo conjunto de cerrados básicos con κpif tiene intersección no vacía.***

c) ***Si κ es singular, entonces X es κ Lindelöf si y solo si X es κ^+ Lindelöf.***

d) ***X es κ Lindelöf si y solo si todo filtro κ completo tiene un punto de acumulación.***

e) ***Si X es κ Lindelöf y $A \subseteq X$ cerrado, entonces A es κ Lindelöf.***

Las pruebas son similares a las de correspondientes de los compactos, que pueden consultarse en [Willard] páginas 116 a 120.

⋆

Ahora veremos un teorema que nos relaciona las álgebras de Boole con la topología.

Proposición 8.17 ***Si κ es regular, entonces son equivalentes.***

a) ***$S(\mathfrak{B})$ es κ Lindelöf y $\mathfrak{B}$ es isomorfa a un campo κ completo de conjuntos.***

b) ***Todo filtro κ completo de $\mathfrak{B}$ puede extenderse a un ultrafiltro κ completo.***

Prueba:

Las dos implicaciones son consecuencias de la siguiente afirmación.

$\star$) Sea $\mathfrak{B}$ isomorfo a un campo κ completo de conjuntos y $A \subseteq B$ entonces A tiene κpif si y solo si $Ult[A]$ tiene κpif.

Esta afirmación se sigue de que Ult es un monomorfismo. Ahora, para ver que el inciso a) implica el b), tomemos $A \subseteq B$ con κpif. De esta forma, $Ult\,[A]$ tiene κpif, pero éste es un conjunto de cerrados y, puesto que $S\,(\mathfrak{B})$ es κ Lindelöf, tenemos que $\bigcap Ult\,[A] \neq \emptyset$. Sea $U \in \bigcap Ult\,[A]$. Entonces para cada $a \in A$, tenemos que $U \in Ult(a)$, por lo que $a \in U$ y así $A \subseteq U$.

Ahora probemos que el inciso b) implica el a). Hay que probar que $\mathfrak{B}$ es isomorfa a un campo κ completo y basta que veamos que si $b \neq 0$, entonces b está en un ultrafiltro. Pero como $\{b\}$ tiene κpif, obtenemos lo que queríamos.

Sea E un conjunto de cerrados básicos con κpif, veamos que $\bigcap E \neq \emptyset$. Tomemos $A \subseteq B$ tal que $E = Ult\,[A]$. Por $\star$) obtenemos que A tiene κpif, de manera que hay U ultrafiltro κ completo tal que $A \subseteq U$. Así, concluimos que $U \in \bigcap E$, por lo que éste es no vacío.

$\star$

De esta forma, hemos obtenido una nueva equivalencia para cardinal compacto.

Corolario 8.18 ***Si $\kappa > \omega$ es regular, entonces κ es compacto si y solo si el κ espacio de Stone de cualquier campo κ completo de conjuntos es κ Lindelöf.***

$\star$

Willard dice que el teorema más importante de la topología general es el teorema de Tychonoff. En ese caso, el teorema más importante del κ mundo es el teorema de κ Tychonoff, el cual enunciaremos a continuación. Primero necesitaremos definir lo que entendemos por el κ producto de Tychonoff.

Sea $\{\ X_i \ \mid\ i \in I\ \}$ una colección de espacios topológicos, tomemos $J \subseteq I$ y para cada $j \in J$, sea $A_j \subseteq X_j$. Entonces definimos $\langle A_j \rangle_{j\in J}$, como $\prod\limits_{i\in I} Y_j$, donde $Y_j = A_j$ si $j \in J$ y $Y_j = X_j$ en otro caso. Notemos que si $(a_i) \in \prod\limits_{i\in I} X_i$, entonces $(a_i) \in \langle A_j \rangle_{j\in J}$ si y solo si $a_j \in A_j$ para toda $j \in J$ y para los que no están en J puede valer lo que sea.

Definición 8.19 *Sea* $\{ \quad X_i \quad | \quad i \in I \quad \}$ *una colección de espacios topológicos, definimos el* κ *producto de Tychonoff* $\prod\limits_{i\in I} {}_\kappa X_i = (\prod X_i, \tau)$, *donde* τ *es la topología que tiene como base a*
$\{ \quad \langle U_j \rangle_{j\in J} \quad | \quad$ *con* $J \in \wp_\kappa (I)$ *y* U_j *es abierto en* $X_j \quad \}$.

Aunque claro, primero tendríamos que ver que este último conjunto es base, pero seguramente el lector no tendrá problema en verlo. Este producto cumple algunas de las propiedades usuales del producto de Tychonoff.

Tomemos X, Y espacios topológicos, $h : X \longrightarrow Y$ y sea F un filtro en X que sea κ completo. Si tomamos $D \in \wp_\kappa (F)$ como $h[\bigcap D] \subseteq \bigcap\limits_{A\in D} h[A]$ y $\bigcap D \neq \emptyset$, entonces $\{ \quad h[A] \quad | \quad A \in F \quad \}$ tiene κpif, por lo que puede extenderse a un filtro κ completo. Denotaremos a este filtro como F_h.

Proposición 8.20 ***Sea*** F ***un filtro*** κ ***completo. Entonces*** F ***converge a*** (a_i) ***en*** $\prod {}_\kappa X_i$ ***si y solo si para cada*** $i \in I$ ***el filtro*** F_{π_i} ***converge a*** a_i.

De nuevo, este resultado es análogo al probado en el libro de [Willard].

⋆

¿Y qué pasa con el κ producto de κ Lindelöf? Consideremos la siguiente afirmación.

TT$_{\kappa)}$ Teorema de κ Tychonoff

El κ producto de κ Lindelöf es κ Lindelöf.

Y ha llegado el gran momento de ver la última equivalencia de cardinal compacto de esta tesis:

Proposición 8.21 ***Si*** $\kappa > \omega$ ***y es regular, entonces*** κ ***es compacto si y solo si el teorema de*** κ ***Tychonoff es verdadero.***

Notemos que al ser compacto tenemos la siguiente equivalencia: (de nuevo la prueba es análoga a la de compactos, que puede verse en [Willard] en las páginas antes mencionadas).

X es κ Lindelöf si y solo si todo ultrafiltro κ completo en X converge.

Así solo tenemos que copiar la prueba del Teorema de Tychonoff (que puede verse en [Willard]) y obtendremos el resultado. Ahora, para el recíproco, tomemos $\mathfrak{B}$ un campo κ completo. Veamos que $S(\mathfrak{B})$ es κ Lindelöf. Dado que 2 es compacto, se tiene que $\prod\limits_{b\in B} {}_{\kappa}2$ es κ Lindelöf. Veremos que $S(\mathfrak{B})$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\prod\limits_{b\in B} {}_{\kappa}2$ y entonces tendremos el resultado. Para esto definimos:

$$\begin{array}{rcll} F & : & S(\mathfrak{B}) \longrightarrow & \prod\limits_{b\in B} {}_{k}2 \\ F(U) & = & (x_b)\,, & \text{donde } x_b = 1 \text{ si y solo si } b \in U. \end{array}$$

Es decir, cada F manda a un ultrafiltro a su función característica. Claramente F no es sobre (pues cualquier vector que tenga un 1 en la entrada de 0 no puede estar en la imagen), pero sí es inyectiva. Ahora probaremos que $S(\mathfrak{B}) \cong F[S(\mathfrak{B})]$. Para esto veremos que F es continua y abierta.

Para ver que es continua, tomemos $U \in S(\mathfrak{B})$ y $J \in \wp_{\kappa}(B)$, donde para cada $j \in J$ A_j es un abierto de 2 tal que $F(U) \in \langle A_j \rangle$. Veamos que hay un abierto de U que bajo F se queda metido en $\langle A_j \rangle$. Claramente podemos suponer que $A_j \neq 2$, por lo que $A_j = \{0\}$ o $A_j = \{1\}$. Para cada $j \in J$, definamos:

$$a_j = \begin{cases} j & si \quad A_j = \{1\}\,, \\ j^* & si \quad A_j = \{0\}\,. \end{cases}$$

Entonces para todo $j \in J$, sucede que $a_j \in U$. Sea $a = \bigwedge a_j$ y, como U es κ completo, tenemos que $a \in U$. Así $U \in Ult\,(a)$ y claramente $F[Ult(a)] \subseteq \langle A_j \rangle$.

Antes de continuar, convengamos un poco de notación. Tomemos $b \in B$ y $n \in 2$, entonces definimos $b_n = \prod\limits_{a\in B} Y_a$, donde $Y_b = \{n\}$ y si $a \neq b$, entonces $Y_a = 2$. Así alguien está en b_n si y solo si en la entrada b tiene a n. Es claro que éstos son abiertos.

Veamos que F es abierta. Como $F[Ult\,(a)] = a_1 \cap F[S\,(\mathfrak{B})]$ y éste es abierto (en $F[S\,(\mathfrak{B})]$), tenemos lo que queremos.

Hemos probado que $S(\mathfrak{B}) \cong F[S(\mathfrak{B})]$. Ahora, solo veamos que es cerrado. Para esto veremos que su complemento es abierto. Sea $(x_b) \notin F[S(\mathfrak{B})]$, encontraremos un abierto de él que no interseca a la imagen. Consideremos al conjunto $D = \{\ b \in B \mid x_b = 1\ \}$. Si D estuviera en $S(\mathfrak{B})$, entonces $F(D) = (x_b)$, por lo que D no es un ultrafiltro κ completo. Esto puede pasar por varias razones.

1) $0 \in D$.

Entonces $x_0 = 1$ y así $(x_b) \in 0_1$ pero $0_1 \cap F[S(\mathfrak{B})] = \emptyset$.

2) $1 \notin D$.

Sucede algo similar a lo de arriba.

3) Hay $a \in D$ y $a \leq b$, pero $b \notin D$.

Aquí $x_a = 1$ y $x_b = 0$, entonces $(x_b) \in a_1 \cap b_0$, pero $a_1 \cap b_0 \cap F[S(\mathfrak{B})] = \emptyset$.

4) Hay $a \in B$ tal que $a, a^* \notin D$.

Así, $x_a = x_{a^*} = 0$ y entonces $(x_b) \in a_0 \cap a_0^*$, pero $a_0 \cap a_0^* \cap F[S(\mathfrak{B})] = \emptyset$.

5) Hay $A \in \wp_\kappa(D)$, pero $\bigwedge A \notin D$.

Para cada $a \in J$, tenemos que $x_a = 1$ y $x_{\wedge A} = 0$. De esta forma $(x_b) \in \bigcap_{a \in A} a_1 \cap (\bigwedge A)_0$ pero $\left(\bigcap_{a \in A} a_1 \cap (\bigwedge A)_0 \right) \cap F[S(\mathfrak{B})] = \emptyset$.

Solo hay que notar que $\bigcap_{a \in A} a_1 \cap (\bigwedge A)_0$ es un abierto en el κ producto. Es por esto que usamos el κ producto en vez del producto normal. De esta manera podemos concluir que $F[S(\mathfrak{B})]$ es cerrado y así obtenemos lo que queríamos.

$\star$

9 ¡Al Infinito y más allá!

Hemos visto varias propiedades de los cardinales compactos y algunas de los medibles, sin embargo, éstos son sólo dos de los muchos cardinales grandes que existen, y en este epílogo veremos algunos otros. Las pruebas de los resultados mencionados pueden verse en [Jech] , [Kanamori] o [Drake].

Usando motivaciones topológicas y algebraícas, podemos dar una clasificación de subconjunto "grande", "pequeñoz "no pequeño"de un cardinal regular. Decimos que $S \subseteq \kappa$ es un *cub,* si es cerrado con la topología del orden y no acotado (el nombre cub es abreviatura de su nombre en inglés çlosed and unbounded"). No es difícil probar que los subconjuntos que extienden a un cub forman un filtro, por lo que podemos ver a este tipo de conjuntos como grandes, y los contenidos en un cocubs (complementos de cubs) como pequeños. Los subconjuntos "no pequeños"(que no éstan contenidos en un cocub) son conocidos como *estacionarios.* Hay una gran cantidad de resultados interesantes sobre este tipo de conjuntos.

Decimos que un cardinal κ es de *Mahlo,* si es inaccesible y el conjunto de los inaccesibles debajo de él es estacionario. Obsérve que nada más por la definición, los cardinales de Mahlo son muy grandes, pues debe haber una cantidad "no pequeña"de cardinales grandes debajo de él (además es posible probar que este conjunto no puede extender a un cub). Evidentemente el primer Mahlo es mucho más grande que el primer inaccesible, más aún, si κ es Mahlo entonces es el κ-ésimo inaccesible.

Otro tipo de cardinales muy importantes son los *débilmente compactos.* Éstos deben su nombre a que los lenguajes con este tipo de cardinales cumplen un debilitamiento del $MTC_{\kappa\omega}$. Decimos que μ es débilmente compacto si todo conjunto de enunciados de $L_{\mu\omega}(\rho)$ es satisfacible **siempre que** $|\rho| \leq \mu$. Sin embargo, hay una equivalencia más bonita, μ es débilmente compacto si y solo si es no numerable y siempre que coloremos las aristas de K_μ (la gráfica completa de μ vértices) con verde y rosita habrá $M \subseteq \mu$ de tamaño μ tal que todas las aristas entre los elementos de M tienen el mismo color. Esto es una generalización del teorema de Ramsey (el cual afirma esto para ω). Los débilmente compactos son Mahlos, pero el primer débilmente compacto es mucho mayor que el primer Mahlo. Evidentemente todo compacto es débilmente compacto, incluso los medibles también lo son.

Pasando los débilmente compactos, encontramos el principio conocido como "$0^{\#}$ existe"(*zero sharp* en inglés) el cual no es un cardinal, sino un principio, que implica la consistencia de muchos cardinales grandes el cual ahora comentaré brevemente.

Dada una estructura $\mathfrak{A}$, decimos que $S \subseteq A$ es un *conjunto de indiscernibles,* si los elementos de S son indistinguibles mediante fórmulas de primer orden. De una manera muy imprecisa, "$0^{\#}$ existe"dice que L[1] esta generado por un cub de ordinales indiscernibles que contiene a todos los cardinales no numerables (la noción de cub la vi para cardinales regulares, pero la misma definición se extiende a la clase de los ordinales). Este principio no sólo implica que $BF \neq L$ pues incluso ω_1 es débilmente compacto para L.

Subiendo un poco más, (acercándonos a la inconsistencia) encontramos a los medibles y, como antes, el primer medible es mucho más grande que el primer débilmente compacto. Como sabemos, después vienen los compactos, sin embargo, es posible tanto que el primer compacto sea el primer medible, como que sea mucho mayor.

Desafortunadamente, no hubo tiempo de verlo en esta tesis (como era plan original), pero si tenemos un cardinal medible κ, entonces podemos hacer una ultrapotencia de BF usando al ultrafiltro de κ (aunque es necesaria una pequeña modificación pues BF es una clase propia).

Así, si U es un ultrafiltro no principal κ completo de κ, podemos definir BF^{κ}/U el cual será un modelo de ZFC bien fundado (por la κ completud). De esta manera, podemos usar el colapso de Mostowski para encontrar una clase transitiva $M \subseteq BF$ tal que $M \cong BF^{\kappa}/U$. Concluimos, entonces que hay una inmersión elemental $j : BF \longrightarrow M$ no trivial.

Es posible probar que toda inmersión elemental de BF no trivial debe mover a un ordinal y a éste lo llamamos el *punto crítico* de la inmersión. En la construcción de arriba, resulta que el punto crítico es precisamente κ, por lo que un cardinal medible es el punto crítico de una inmersión elemental de BF en una subclade de sí mismo. El recíproco también es cierto, dándonos así, una nueva equivalencia de medible.

Se prueba que $M \neq BF$, de hecho $U \notin M$. También sucede que mientras que ${}^{\kappa}M \subseteq M$, se tiene que ${}^{\kappa^+}M \subsetneq M$, por lo que M no es lo suficientemente "grueso". Esta observación nos da la clave para definir cardinales todavía más grandes. Un cardinal será *supercompacto* si es el punto crítico de inmersiones de BF a subclases de él tan "gruesasçomo queramos.

Formalmente, κ es súper compacto si para todo λ, hay $j : BF \longrightarrow N \subseteq BF$ inmersión elemental con punto crítico κ de manera que $j(\kappa) > \lambda$ y ${}^{\lambda}N \subseteq N$. Todo supercompacto es compacto y es posible que el primer compacto sea supercompacto, pero el primer medible no puede ser supercompacto.

[1] L se conoce como el üniverso constructible". Intuitivamente corresponde a los conjuntos que .$^{\mathrm{ev}}$entualmente"pueden ser definidos partiendo del vacío. Éste resulta ser el modelo de ZFC transitivo más pequeño que contiene a los ordinales. Vease el capítulo correspondiente de [Jech] para obtener más información

Ahora que estamos considerando inmersiones elementales de BF en una subclase de él cada vez más grande, es natural pensar en el caso extremo, cuando $N = BF$. Decimos que κ es un *cardinal de Reinhardt* si hay una inmersión elemental $i : BF \longrightarrow BF$ con punto crítico κ. Por poco tiempo, éste fue el cardinal grande más poderoso y monstruoso de todos, sin embargo, el famoso teorema de la inconsistencia de Kunen, afirma que no existen los cardinales de Reinhardt, poniendo así, un límite a los cardinales grandes. El Axioma de Elección es indispensable para la prueba de Kunen y aún no se sabe si ZF^{-} pudiera ser consistente con la existencia de un cardinal de Reinhardt.

En realidad, el párrafo anterior es muy descuidado, pues hay que tener cuidado en cómo manejamos el teorema de la inconsistencia de Kunen. Éste no es un teorema de ZFC^{-}, pues habla sobre una inmersión elemental de BF. Para arreglar la situación, hay que agregar al lenguaje de la teoría de conjuntos un símbolo de función i y además, agregar a ZFC^{-} los axiomas que establezcan que i es una inmersión elemental no trivial, **así como nuevas instancias del axioma de reemplazo para este nuevo lenguaje.**

El matemático Paul Corrazza inventó el axioma conocido como "Wholeness Axiom.el cual, básicamente dice que sí existe una inmersión elemental no trivial de BF en sí mismo, pero evita las instancias de reemplazo necesarias para la prueba del teorema de inconsistencia. Este axioma, se encuentra muy arriba en la jerarquía de los cardinales grandes, y lo más curioso es que Corrazza llegó a él motivado por enseñanzas de los antiguos místicos chinos e hindúes.

Los principios más fuertes sobre cardinales grandes son los .axiomas de rangoçonocidos como $I0, I1, I2$ e $I3$ los cuales afirman que hay inmersiones elementales no triviales de algunas subclases de BF en sí mismas. ¡Tanto el Wholeness Axiom como los axiomas de rango están demasiado cerca de la inconsistencia!

Estos fueron sólo unos pocos de los cardinales grandes conocidos hasta ahora, y sé que se irán encontrando nuevos cada vez más y más grandes. ¿Hasta qué punto es razonable seguir buscando cardinales tan inmensos? En mi opinión (como diría Shipon)...

"¡Hasta ver las estrellas de frente y no hacía arriba!"

A Notación

Cuando escribí este trabajo, pensaba que la notación que usé era más o menos estándar, pero mis sinodales me hicieron ver que no es así, por lo que aquí explicaré un poco la notación usada.

La letra ω siempre denotará al conjunto de los números naturales, (el cual es el primer ordinal infinito, así como la intersección de todos los conjuntos inductivos). Las letras κ, λ, μ siempre denotarán cardinales infinitos a menos que se indique lo contrario. Por otro lado, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ serán ordinales (finitos o infinitos).

El símbolo $^+$ juega dos papeles distintos, pues denota tanto al sucesor cardinal, como al sucesor ordinal. La forma de distinguir a cual se refiere es con la notación del párrafo anterior, de esta manera κ^+ (λ^+, μ^+) se refiere al sucesor cardinal de κ (λ, μ) mientras que $\alpha^+(\beta^+, \gamma^+, \delta^+, \xi^+)$ se refiere al sucesor ordinal de α $(\beta, \gamma, \delta, \xi)$. Obsérvese que cuando se trata de un número natural, el sucesor cardinal y ordinal coinciden.

Un conjunto es numerable si es biyectable con los naturales y es contable si es numerable o finito, de nuevo esta notación no es tan estándar y algunas personas le llaman numerable a lo que yo llamo contable, y numerable infinito a lo que yo llamo numerable.

Denotaré por ZF^- a los axiomas del vacío, extensionalidad, par, unión, comprensión, potencia, infinito y reemplazo. ZFC^- se obtiene al agregar el axioma de elección, y por ZFC denotaré a los axiomas de ZFC^- más el axioma de fundación. Con excepción del primer capítulo, en toda la tesis asumo ZFC^-. La clase V representará al universo de todos los conjuntos, y BF consta de aquellos conjuntos cuya clausura transitiva está bien fundada por la pertenencia. El axioma de fundación es equivalente a que $V = BF$. El capítulo 3 de [Kunen] es muy buena referencia para este tema.

Decimos que ρ es un tipo (posiblemente vacío) si es un conjunto de símbolos relacionales, funcionales y de constante (los símbolos relacionales y funcionales pueden ser de cualquier aridad positiva). Decimos que $\mathfrak{A} = \left(A, \left\{X^{\mathfrak{A}}\right\}\right)_{X\in\rho}$ es una ρ estructura si A es un conjunto no vacío, $X^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ cuando X es un símbolo de relación de aridad n, $X^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$ si X es un símbolo de función de aridad n y $X^{\mathfrak{A}} \in A$ en caso de que X sea un símbolo de constante. Cuando no hay confusión escribo X en vez de $X^{\mathfrak{A}}$. La clase de todas las ρ estructuras la denoto como V_ρ. Al conjunto A lo llamamos el universo de $\mathfrak{A}$. Las letras "fraktur", $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, etc. Siempre denotarán estructuras y, a menos que se especifique lo contrario, A es el universo de $\mathfrak{A}$, B es el universo de $\mathfrak{B}$, etc.

Sea ρ' un tipo tal que $\rho \subseteq \rho'$. Decimos que la estructura $\mathfrak{A}' \in V_{\rho'}$ es una *expansión* de $\mathfrak{A} \in V_\rho$ si $\mathfrak{A}$y $\mathfrak{A}'$ tienen el mismo universo, y los símbolos de ρ se interpretan de la misma manera en ambas estructuras. De esta manera podemos pensar que $\mathfrak{A}'$ se obtiene al .^{a}gregarle.^{es}tructura a $\mathfrak{A}$. También se suele decir que $\mathfrak{A}$ es un *reducto* de $\mathfrak{A}'$.

Si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in V_\rho$ decimos que $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo si cumple lo siguiente:

a) Si $R \in \rho$ es un símbolo de relación de aridad n, entonces para todo

$a_1, ..., a_n \in A$ se tiene que $R^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)$ si y solo si $R^{\mathfrak{B}}(f(a_1), ..., f(a_n))$.

b) Si $F \in \rho$ es un símbolo de función de aridad n, entonces para todo

$a_1, ..., a_n \in A$ se tiene que $f\left(F^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)\right) = F^{\mathfrak{B}}(f(a_1), ..., f(a_n))$.

c) Si $C \in \rho$ es un símbolo de constante, entonces $f\left(c^{\mathfrak{A}}\right) = c^{\mathfrak{B}}$.

Decimos que el homomorfismo f es monomorfismo si es inyectivo, epimorfismo si es sobre y si es biyectivo lo llamamos isomorfismo. Escribiré $\mathfrak{A} \curvearrowright \mathfrak{B}$ si existe un monomorfismo con dominio A e imagen en B, y el que sean isomorfas lo denotaré como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.Decimos que $\mathfrak{A}$ es una subestructura de $\mathfrak{B}$ si $A \subseteq B$ y la inclusión es un monomorfismo. Esto lo abreviaré como $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$.

Los conectivos lógicos que utilizo son $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\longrightarrow$ (implicación) y $\longleftrightarrow$ (bicondicional), mientras que los cuantificadores son el $\exists$ (cuantificador existencial) y $\forall$ (cuantificador universal). Los símbolos $\Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ los uso para implicaciones y bicondicionales en el metalenguaje.

Si $\mathfrak{A} \in V_\rho$, σ es una fórmula de primer orden y $a_1, ..., a_n \in A$ entonces escribiré $\mathfrak{A} \models \sigma(a_1, ..., a_n)$ para denotar que .^{en} $\mathfrak{A}$ es verdadera $\sigma(a_1, ..., a_n)$". Aunque intuitivamente es muy claro lo que esto significa, formalizarlo es un poco largo. Esto puede verse en el [Hodgesc] o en [Amorc] si se quiere ver de una manera muy formal. La teoría de $\mathfrak{A}$ es el conjunto de los enunciados que son verdaderos en $\mathfrak{A}$.

Decimos que un monomorfismo $f : A \longrightarrow B$ es una inmersión elemental si para todo $a_1, ..., a_n \in A$, y σ una fórmula se tiene que $\mathfrak{A} \models \sigma(a_1, ..., a_n)$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \sigma(f(a_1), ..., f(a_n))$. $\mathfrak{A}$ es una subestructura elemental de $\mathfrak{B}$ si y solo si la inclusión es una inmersión elemental. En este caso, también decimos que $\mathfrak{B}$ es una extensión elemental de $\mathfrak{A}$, y decimos que la extensión es no trivial si $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$. Finalmente, las estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes si y solo si para todo enunciado σ se tiene que $\mathfrak{A} \models \sigma$ si y solo si $\mathfrak{B} \models \sigma$.

Si $\mathfrak{A}$ es una estructura y $S \subseteq A$ entonces definimos $\langle S \rangle$ como la mínima subestructura de $\mathfrak{A}$ que contiene a S. Esta puede construirse intersectando a todas las subestructuras que contienen a S, o cerrando a S bajo todas las operaciones y agregando las constantes.

Si $\mathfrak{A} = (A, R)$ donde R es un símbolo de relación binario y $a \in A$, definimos a_R como el conjunto que tiene a todos los R predecesores de a. Este conjunto se conoce como el segmento inicial de a. Si $\mathfrak{A}$ es un órden, entonces el segmento inicial de a no es más que el conjunto de los elementos menores que a. Decimos que $\mathfrak{A}$ es *extensional,* si cualesquiera dos elementos distintos tienen segmentos iniciales distintos.

Si A es un conjunto, entonces $\wp_\kappa(A)$ denota a los subconjuntos de A de tamaño menor que κ, la notación $[A]^{<\kappa}$ también es bastante común en la literatura. Si A y B son dos conjuntos, denotaré por ${}^{A}B$ al conjunto de todas las funciones cuyo dominio es A e imagen está contenida en B. Una función $f : A \longrightarrow A$ es una función de elección si $f(x) \in x$ para todo $x \in A$ no vacío. El Axioma de Elección afirma que todo conjunto tiene una función de elección. Esta afirmación es equivalente a que todo conjunto que no tiene al vacío tiene una función de elección.

B Un poco de filtros y ultrafiltros

En este pequeño apéndice, repasaré algunas definiciones importantes respecto a los filtros en las álgebras de Boole. La intención es recordar algunas nociones importantes, así como aclarar un poco sobre la notación usada en la tesis. Usaré libremente los resultados del primer capítulo de [Bell] que trata sobre álgebras de Boole, donde pueden encontrarse los resultados que a continuación comentaré.

Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole, decimos que $F \subseteq B$ es un filtro si

a) $1 \in F$;
b) $0 \notin F$,
c) si $a \in F$ y $a \leq b$ entonces $b \in F$,
d) si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$.

Podemos pensar que un filtro es una medida de los elementos "grandes" de $\mathfrak{B}$, con este punto de vista, el inciso *a*) nos dice que el 1 es grande, mientras que *b*) afirma que el 0 no es grande. El inciso *c*) establece que un elemento más grande que uno grande es grande y finalmente, podemos pensar, que el inciso *d*) afirma que los elementos de F son tan grandes que el ínfimo de dos de ellos es algo grande.

Decimos que U es *ultrafiltro* si es un filtro maximal, existen varias equivalencias de este concepto, una interésante es que U es ultrafiltro si y solo si $a \in U$ o $a^* \in U$ para todo $a \in B$ (donde * denota al complemento del álgebra). Así, todo elemento de $\mathfrak{B}$ es grande o tiene complemento grande (según U).

El teorema del ultrafiltro (el cual es equivalente al de compacidad, como puede verse en [Bell] páginas 104 a 105) establece que todo filtro puede agrandarse a un ultrafiltro. Un ultrafiltro es *principal* si tiene un elemento mínimo. Cuando $\mathfrak{B}$ es un álgebra potencia (es decir, $\mathfrak{B}$ es la colección de los subconjuntos de algún conjunto A) un ultrafiltro es principal si y solo si tiene un unitario y también es equivalente a tener a todos los subconjuntos *cofinitos* de A (un subconjunto es cofinito si su complemento es finito). En teoría de modelos y en topología, nuestro principal interés es en los no principales.

La noción dual de filtro es la de *ideal*. Decimos que $I \subseteq B$ es un ideal si,

a) $0 \in I$;
b) $1 \notin I$,
c) si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces $b \in I$,
d) si $a, b \in I$ entonces $a \vee b \in I$.

De esta manera, si un filtro consta de los elementos grandes, un ideal tiene a los elementos pequeños. Si F es un filtro, se define $F^* = \{a^* \mid a \in F\}$ el cual resulta ser un ideal, conocido como el ideal dual de F. Si J es un subconjunto de B que cumpla $a), c)$ y $d)$ (pero podría tener al 1, en cuyo caso se tendría que $J = B$) decimos que J es un ideal posiblemente trivial.

Sea $A \subseteq B$ decimos que A tiene la *propiedad de la intersección finita* (lo cual abreviaremos diciendo que A tiene pif), si el ínfimo de cualquier subconjunto finito de A es distinto del cero. Los conjuntos con pif son importantes pues nos ayudan a definir filtros. Si $A \subseteq B$ definimos a los conjuntos:

$$\star) \quad A_{\downarrow} \quad = \quad \{ \quad a_1 \wedge ... \wedge a_n \quad | \quad a_1, ..., a_n \in A \quad \} \ .$$

$$\star\star) \quad A^{\uparrow} \quad = \quad \{ \quad b \quad | \quad \text{hay } a \in A \text{ tal que } a \leq b \quad \} \ .$$

Nótese que A tiene pif si y solo si $0 \notin A_{\downarrow}$. Un resultado muy importante al respecto, es que si A tiene pif, entonces $(A_{\downarrow})^{\uparrow}$ es un filtro, de hecho, es el filtro más pequeño que contiene a A.

Decimos que A es *base de filtro* si para cualesquiera $a_1, ..., a_n \in A$ existe $b \in A$ distinto de cero tal que $b \leq a_1, ..., a_n \in A$. Observen que si A es base de filtro, entonces tiene pif y además $(A_{\downarrow})^{\uparrow} = A^{\uparrow}$.

El conjunto A tiene la *propiedad de la unión finita* (abreviada puf) si el supremo de cualquier subconjunto finito de A es distinto de 1. Esta noción es la dual de pif.

Decimos que el álgebra $\mathfrak{B}$ es *completa,* si cualquier colección de elementos de $\mathfrak{B}$ tiene supremo e ínfimo. Las álgebras potencia son completas, pero existen álgebras de Boole que no lo son, por ejemplo, el álgebra que consiste de los subconjuntos finitos y cofinitos de los naturales. De nuevo, esto puede verse con más detalle en los libros previamente mencionados. Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra completa y $F \subseteq B$ es un filtro entonces el ínfimo de cualquier colección finita de elementos de F pertenece a F. Sin embargo, de nuevo, el ínfimo de una colección arbitraria de elementos de F puede no pertenecer a F. En caso de que esto suceda, decimos que F es *completo.*

Sin embargo, nuestro principal interés reside en una noción de completud menos estricta. Dado un cardinal $\kappa > \omega$ decimos que $\mathfrak{B}$ es κ *completa* si toda colección de menos de κ elementos de $\mathfrak{B}$ tiene supremo e ínfimo. En cuanto filtros, decimos que F es κ *completo,* si el ínfimo de cualquier subconjunto de F de tamaño menor que κ pertenece a F.

C Un poco de ultraproductos

Si ρ es un tipo y $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ es una colección de estructuras, entonces podemos formar su ”producto directo”, el cual tiene como universo al producto cartesiano de las estructuras $\mathfrak{A}_i$ y todo se interpreta entrada a entrada. Sin embargo, frecuentemente varias de las propiedades bonitas de las $\mathfrak{A}_i$ no se preservan al realizar el producto directo. Por ejemplo, el producto directo de más de dos campos nunca es un dominio entero. El ultraproducto es una forma de çombinar”varias estructuras en la cual se preservan muchas de las propiedades deseables de las estructuras con las que empezamos.

Ahora definiré y comentaré algunas propiedades básicas de los ultraproductos. Las pruebas pueden encontrarse en [Hodgesc] o en [Bell], pero estoy usando la notación de [Hodgesc].

Sean $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ un conjunto de estructuras y F un filtro en I. Si $\sigma(x_1,...,x_n)$ es una fórmula de primer orden y $\overline{a_1},...,\overline{a_n}\in\prod\limits_{i\in I}A_i$, definimos *el valor booleano de* $\sigma(\overline{a_1},...,\overline{a_n})$ como:

$$\|\sigma(\overline{a_1},...,\overline{a_n})\| \quad = \quad \{ \quad i\in I \quad | \quad \mathfrak{A}_i\models\sigma(a_1(i),...,a_n(i)) \quad \},$$

es decir, el conjunto de entradas en donde es verdadera σ. Si $\overline{a},\overline{b}\in\prod\limits_{i\in I}A_i$, escribiré $\overline{a}\sim_F\overline{b}$ en caso de que $\left\|\overline{a}=\overline{b}\right\|\in F$ (dicho de manera informal, que los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ coinciden en casi todas las entradas). Esta resulta ser una relación de equivalencia. Al cociente de esta relación se le suele llamar $\prod\limits_{i\in I}A_i/F$ y denoto a la clase de equivalencia de $\overline{a}$ por $\overline{a}/F$. Ahora, pasemos a darle estructura al cociente.

1) Definimos *el producto reducido* $\mathfrak{A}=\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i/F$ como la estructura con universo $\prod\limits_{i\in I}A_i/F$ y donde:

   a) si R es un símbolo relacional de aridad n entonces

   $R^{\mathfrak{A}}(\overline{a_1}/F,...,\overline{a_n}/F)\Longleftrightarrow||R(\overline{a_1},...,\overline{a_n})||\in F$;

   b) si G es un símbolo funcional de aridad n entonces

   $G^{\mathfrak{A}}(\overline{a_1},...,\overline{a_n})=(G^{\mathfrak{A}_i}(\overline{a_1}(i),...,\overline{a_n}(i)))_{i\in I}/F$;

   c) si c es un símbolo de constante entonces $c^{\mathfrak{A}}=(c^{\mathfrak{A}i})_{i\in I}$

2) Si U es un ultrafiltro, le llamamos a $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$ el *ultraproducto.*

3) En caso de que todas las $\mathfrak{A}_i$ sean iguales a una $\mathfrak{B}$, entonces a $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/U$ le llamamos la *ultrapotencia* y se denota $\mathfrak{B}^I/U$.

Evidentemente es necesario probar que las definiciones previas no dependen de los representantes elegidos. De nuevo esto puede consultarse en la literatura. La gran importancia de los ultraproductos viene del siguiente teorema.

Teorema de Łos

Sea $\{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$ un conjunto de estructuras, U un ultrafiltro en $I, \mathfrak{A} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i \ /U$ y $\overline{a_1}, ..., \overline{a_n} \in \prod_{i\in I} A_i$,

a) **Si $\sigma \in FORM$ entonces:**
$$\mathfrak{A} \models \alpha(\overline{a_1}/U, ..., \overline{a_n}/U) \Longleftrightarrow \left\|\sigma(\overline{a}, \overline{b})\right\| \in U.$$

b) **Sea σ un enunciado, entonces:**
$$\mathfrak{A} \models \sigma \Longleftrightarrow \|\sigma\| \in U.$$

Informalmente, decimos que el teorema de Łoš garantiza que σ es verdadera en un ultraproducto si es verdadero en çasi todas”(o en un conjunto grande) de sus entradas. Una muy interesante consecuencia del inciso *b*) es que una estructura $\mathfrak{B}$ es elementalmente equivalente a cualquiera de sus ultrapotencias.

Obsérvece además, que si U es no principal y $\left\|\sigma(\overline{a}, \overline{b})\right\|$ es cofinito entonces $\mathfrak{A} \models \alpha(\overline{a_1}/U, ..., \overline{a_n}/U)$. Usaremos varias veces este hecho.

D Un poco de Topología

La Topología es una rama muy bonita y fascinante de las matemáticas. Existe una gran cantidad relación entre ella y la teoría de conjuntos, y en esta tesis se muestra una muy pequeña parte de esta relación. Los conceptos básicos pueden revisarse en el libro de [Munkres] y los más avanzados (los referentes a filtros y convergencia) pueden consultarse en el libro de [Willard].

Un *espacio topológico* es una pareja (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X cerrada bajo uniones arbitrarias, intersecciones finitas, y además $X, \emptyset \in \tau$. A los elementos de τ los llamamos abiertos. Los conjuntos cerrados son aquellos cuyo complemento es abierto. Nótese que $\emptyset$ y X son cerrados, la intersección arbitraria de cerrados es cerrada, y la unión finita de abiertos es abierta. No es raro referirnos a X como el espacio topológico (en vez de a la pareja (X, τ)).

Sea (X, τ) un espacio topológico y A un subconjunto de X. Dado que la unión arbitraria de abiertos es abierta, existe un abierto máximo contenido en A (la unión de todos los abiertos contenidos en él). Este conjunto lo llamamos el interior de A y se denota por A°. La notación $int\,(A)$ también es muy común. Por otro lado, como la intersección de cerrados es cerrada, entonces existe un mínimo cerrado que contiene a A, este se llama la cerradura de A y lo llamo $\overline{A}$. Si $a \in X$ y $U \subseteq X$ decimos que U es un abierto de a si $a \in U$ y es una vecindad de a si $a \in U^{\circ}$, escribiré N_a al conjunto de vecindades de a. Es posible probar que éste siempre es un filtro.

Las nociones de continuidad, compacidad ,conexo y los axiomas de separación y numerabilidad juegan un papel importante en la tesis. Todas estas definiciones pueden consultarse en el [Munkres].

Cuando estudiamos la topología de los números reales (o de cualquier espacio métrico) las sucesiones son de gran ayuda, frecuentemente simplifican argumentos complicados. Sin embargo, existen espacios topológicos en las que las sucesiones son de poca ayuda o incluso son completamente inútiles. La teoría de convergencia de filtros viene a salvar esta situación.

Sea $s = (s_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de números reales, para cada $n \in \omega$ llamemos $Col_n\,(s)$ al conjunto de los s_m con $m \geq n$. Recordemos que s converge a a si y solo si,

$$\text{Para todo } V \in N_a \text{ hay } n \in \omega \text{ tal que } Col_n\,(s) \subseteq V.$$

Observen que $Col(s) = \{ Col_n(s) \mid n \in \omega \}$ es base de filtro, de manera que el conjunto $Col^{\uparrow}(s)$ de los subconjuntos que contienen a un $Col_n(s)$ es un filtro. Éste es llamado el filtro de las colas. Con esta nueva notación tenemos que s converge a a si y solo si $N_a \subseteq Col^{\uparrow}(s)$. Con esto en mente definimos, si X es un espacio topológico, F un filtro sobre X y $a \in X$. Decimos que F *converge* a a si $N_a \subseteq F$. Esto será denotado por $F \longrightarrow a$.

De esta manera tenemos que una sucesión converge a un punto si y solo si su filtro de las colas converge al punto. La convergencia de filtros resulta ser una muy buena alternativa cuando las sucesiones fallan. En el libro de [Willard] se encuentra un muy buen estudio respecto a este tema.

Observemos que si $F \longrightarrow a$ entonces $N_a \subseteq F$ de manera que todo abierto de a pertenece a F. De esta manera si U es un abierto de a y $B \in F$ entonces $U \cap B \neq \emptyset$ (pues pertenece a F) por lo que $a \in \overline{B}$. Así podemos concluir que si F converge a a entonces a pertenece a la cerradura de todos los elementos de F, este es un concepto tan importante, que merece su propio nombre. Decimos que $a \in X$ es un *punto de acumulación de* F si $a \in \bigcap\limits_{B \in F} \overline{B}$.

De esta manera, todo punto de convergencia es un punto de acumulación. El reciproco no es cierto, sin embargo un importante teorema de topología establece que todo ultrafiltro converge a sus puntos de acumulación.

E Equivalencias de cardinal compacto

Si κ es no numerable, entonces κ es *compacto* si y solo si pasa alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes.

1. κ cumple $MTC_{\kappa\omega}$;
2. κ cumple $MTC_{\kappa\lambda}$ para todo $\lambda \leq \kappa$;
3. en todo campo de conjuntos κ completo, todo filtro κ completo puede extenderse a un ultrafiltro κ completo.
4. Para cualquier conjunto A, todo filtro κ completo en A puede extenderse a un ultrafiltro κ completo;
5. si $|A| \geq \kappa$, entonces hay un ultrafiltro κ completo bueno sobre $\wp_\kappa(A)$;
6. κ es regular y el κ espacio de Stone de cualquier campo de conjuntos es κ Lindelöf;
7. κ es regular y cumple el κ teorema de Tychonoff; el κ producto de κ Lindelöf es κ Lindelöf.

F Equivalencias de cardinal medible

Si κ es no numerable, entonces κ es *medible* **si y solo si pasa alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes.** (tristemente, no todas las equivalencias están probadas en esta tesis, pero pueden consultarse en los libros de [Jech] y [Kanamori])

1. κ tiene un ultrafiltro κ completo no principal;
2. κ tiene un ultrafiltro κ completo no principal y normal (cerrado bajo intersección diagonal);
3. κ es el punto crítico de una inmersión elemental de BF en una subclase de si mismo;
4. Si $\mathfrak{B}$ es un campo de conjuntos κ completo, y $F \subseteq B$ es un filtro κ completo con $|F| \leq \kappa$, entonces F puede extenderse a un ultrafiltro κ completo;
5. κ cumple el κ *teorema de compacidad media*; si ρ es un tipo y $\Sigma = \bigcup\limits_{\alpha\in\kappa} \Sigma_\alpha$ es un conjunto de enunciados de $L_{\kappa\kappa}(\rho)$ tal que $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma_\beta$ siempre que $\alpha < \beta$ y cada Σ_α es satisfacible entonces Σ es SAT.
6. κ tiene *la propiedad de extensión;* para cualquier ρ, toda estructura de tamaño al menos κ tiene una $\kappa\kappa$ extensión elemental no trivial.
7. κ tiene *la R_κ propiedad de extensión;* para cualquier ρ y $\mathfrak{A}$ una $\rho \cup \{\in\}$ expansión de $(R_\kappa, \in)$ existe, $\mathfrak{B} = (B, \in, ...)$ transitivo $\kappa\kappa$ extensión elemental de $\mathfrak{A}$ tal que $\kappa \in B$.

Bibliografía

⋆ [Amor] Amor J.A. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, 2^a edición, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.

⋆ [Amorc] Amor J.A. *Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su Relación con el Teorema de Completud,* 2^aedición, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.

⋆ [Amort] Amor J.A. *Pequeños Grandes Cardinales (Los menos grandes de los grandes cardinales)* Tesis de Maestría UAM Iztapalapa 1984.

⋆ [Bell] Bell J.L., Slomson A.B. *Models and Ultraproducts an Introduction* Dover 2006.

⋆ [Bond] Bondy J.A. Murty U.S.R. *Graph Theory with Applications 5^a* edición, Elsevier 1982.

⋆ [Chang] Chang C.C. Keisler H.J. *Model Theory* Studies in Logic and The Foundations of Mathematics 3^a edición, Elsevier 1990.

⋆ [Cowen] Cowen R. *Two Hypergraph Theorems Equivalent to BPI* Notre Dame Journal of Formal Logic Volume 31, Number 2, Spring 1990.

⋆ [Dickmann] Dickmann M.A. *Large Infinitary Languages: Model Theory,* Amsterdam: North-Holland, 1975.

⋆ [Drake] Drake F.R. *Set Theory An Introduction to Large Cardinals* North-Holland Publ.com Amsterdam 1974.

⋆ [Hernández] Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos Una introducción* Sociedad Matemática Mexicana 2003.

⋆ [Hodges] Hodges W. *Model Theory,* Cambridge University Press, 1993.

⋆ [Hodgesc] Hodges W. *A shorter Model Theory,* Cambridge University Press, 1997.

⋆ [Ivorra] Ivorra C. *Pruebas de Consistencia* http://www.uv.es/ivorra/

⋆ [Jacobson] Jacobson N. *Basic Algebra I.* 2^a edición Dover 2009.

⋆ [Jech] Jech T. *Set Theory. The Third Millenium Edition Revised and Expanded* Springer 2002.

⋆ [Jechc] Jech T. *The Axiom of Choice.* 1^a edición Dover 2008.

⋆ [Judith] Campos J. *De la Medida de Lebesgue a los Cardinales Grandes.* Tesis de licenciatura UNAM 2010.

- ⋆ [Kunen] Kunen K. *Set Theory An Intriduction to Independence Proofs* Studies in Logic and The Foundations of Mathematics 4^a edición, Elsevier 1990.
- ⋆ [Kanamori] Kanamori A. *The Higher Infinite Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings* 2^a edición, Springer 2009.
- ⋆ [Levy] Levy A. *Basic Set Theory* 1^a edición, Dover 2002.
- ⋆ [Morandi] Morandi P. *Field and Galois Theory* 1^a edición Springer 1996.
- ⋆ [Munkres] Munkres J. *Topología* 2^a edición Prentice Hall 2002.
- ⋆ [Rafa] Rojas R. *Cardinales Monstruosamente Grandes* Tesis de Maestría UAM Iztapalapa 1984.
- ⋆ [Rotman] Rotman J. *An Introduction to the Theory of Groups* 4^a edición Springer 1999.
- ⋆ [Willard] Willard S. *General Topology* 1^a edición Dover 2004.