



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

BLACK SCHOLES Y MÁS ALLÁ

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:
JORGE ARTURO ESPINOSA MOORE

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. CLARA EUGENIA GARZA HUME

2011





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno Espinosa Moore Jorge Arturo 56 39 03 36 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría
2. Datos del tutor Dra Clara Eugenia Garza Hume
3. Datos del sinodal 1 Act David Josafat Santana Cobian
4. Datos del sinodal 2 Dr Arturo Olvera Chávez
5. Datos del sinodal 3 Dr Ramón Gabriel Plaza Villegas
6. Datos del sinodal 4 Dr Antonio Capella Kort
7. Datos del trabajo escrito Black Scholes y más allá 102p 2011

*A mi Tío Rodolfo, mis padres y mi hermana.
A Sara y a toda mi familia y amigos.*

Agradecimientos

Agradezco a mi *Alma mater* la Universidad Nacional Autónoma de México así como a la Facultad de Ciencias por formarme como Actuario. Agradezco a la Dra. Clara Garza por todas sus enseñanzas , por su apoyo y dedicación durante el desarrollo de mi tesis, al Dr. Arturo Olvera por su gran ayuda en la parte de soluciones numéricas, al Dr. Antonio Capella, al Dr. Ramón Plaza y al Act. David Josafat Santana por sus comentarios y recomendaciones.

Gracias a mis padres, a Tania , a mi abuela Dora, a mi abuelo Raúl (+) y a mi tía Nora por apoyarme siempre de manera incondicional.

Gracias a mi ex-profesor y gran amigo Pepe Zahoul ya que sus clases fueron el incentivo para que estudiara en la Facultad de Ciencias.

Gracias a Ulises y a Diana por su amistad incondicional, su gran ayuda en el ámbito laboral y por sus comentarios de mi tesis.

Gracias a “mis hermanos” Héctor y Rafa por crecer conmigo, a mis amigos de la carrera: Alfredo, Gaby, Marisol y Sergio por todas las experiencias que hemos vivido juntos, incluyendo las eternas desveladas y discusiones de las tareas que siempre valieron la pena y que empiezan a rendir frutos.

Gracias a Jonathan E. Guyer, uno de los desarrolladores de Fipy, por toda su ayuda en la implementación de los códigos para la solución numérica de las ecuaciones.

A todos aquellos que de alguna manera forman parte de mi vida, gracias.

Jorge Espinosa Moore

Índice general

Introducción	XI
1. Derivados, Opciones y Black-Scholes	1
1.1. Introducción	1
1.2. Conceptos de arbitraje y cartera equivalente	3
1.2.1. Retorno esperado del activo subyacente	7
1.3. Valuación en un mundo neutral al riesgo	7
1.4. Preliminares para la Ecuación de Black-Scholes	8
1.4.1. Espacio de Probabilidad	8
1.4.2. Variable Aleatoria y Proceso Estocástico	9
1.4.3. Browniano para modelar el precio de un activo	10
1.5. La E.D.P. de Black-Scholes	12
1.5.1. Supuestos del modelo	14
1.5.2. Derivación 1 (Construcción con subyacente y bonos)	14
1.5.3. Derivación 2 (Construcción con Posición larga en la opción y corta en subyacente)	17
1.5.4. La Solución	19
1.5.5. Solución para una Call europea	21
1.6. Las Griegas	26
1.7. Un ejemplo práctico	27
2. Control Estocástico	31
2.1. El problema de control	31
2.2. La función objetivo de un problema de control	32
2.3. La E.D.P. de H.J.B.	33
2.4. Manejo de la ecuación de H.J.B.	41

3. Diferencias Finitas	43
3.1. Discretización del dominio y definición del mallado	44
3.2. Discretización de la ecuación diferencial	45
3.3. Esquemas de solución	46
3.3.1. Esquema explícito	46
3.3.2. Esquema implícito	48
3.3.3. Esquema semi-implícito	49
3.4. Convergencia, consistencia y estabilidad	50
3.5. Fipy, un módulo de Python para parciales	51
3.5.1. Python	51
3.5.2. Fipy	51
4. Soluciones Numéricas	55
4.1. Solución numérica de Black-Scholes	55
4.2. Y más allá...	56
Conclusiones	65
A. Herramientas Teóricas	67
A.1. Cálculo estocástico	67
A.2. Martingalas	69
A.3. Justificación del Lema de Itô	70
A.3.1. Itô en una dimensión	71
A.3.2. Itô n-dimensional	72
A.4. Nota sobre convergencia	74
B. Códigos en Python	75
B.1. Código para generar un Movimiento Browniano Estándar	75
B.2. Código para generar un Movimiento Browniano Geométrico	76
B.3. Código para Black-Scholes Lineal	77
B.4. Código para Black-Scholes Lineal transformado	81
B.5. Código para Black-Scholes No Lineal (Soner)	83
Bibliografía	89

Introducción

Las finanzas son la rama de la economía dedicada a estudiar la obtención y el uso eficaz del dinero a través del tiempo.

En los últimos años las finanzas han sido un campo cada vez más estudiado por las matemáticas, en particular por las áreas relacionadas con probabilidad y procesos estocásticos ya que en los problemas financieros interviene un alto grado de incertidumbre.

Bajo procedimientos matemáticos es posible eliminar dicha incertidumbre y convertir los problemas azarosos en problemas gobernados por ecuaciones deterministas.

Existen muchos instrumentos financieros y uno de ellos son los productos derivados, instrumentos cuyo valor depende del valor de otro activo financiero, las opciones son un tipo de derivado y la fórmula más conocida para valuarlas (dar un precio) es la fórmula de Black-Scholes.

Dicha fórmula fue publicada en [4] en 1973 y los hizo acreedores al Premio Nobel de Economía en 1997, el cual fue recibido por Myron Scholes y Robert C. Merton (quien también aportó al modelo), Fisher Black había fallecido en 1995.

El problema de esa fórmula de valuación es que parte de un modelo cuyas hipótesis no son nada cercanas a la realidad, es por eso que se han propuesto varias modificaciones tratando de obtener un modelo aunque más complejo que sea más realista.

El objetivo del presente trabajo es por un lado resolver la ecuación de

Black-Scholes para el caso de un Call europeo utilizando la teoría de ecuaciones diferenciales parciales en lugar de la solución con el enfoque probabilístico y por otro lado presentar y resolver numéricamente dos modelos que suponen la existencia de costos de transacción.

La organización es la siguiente:

1. En la primera parte del capítulo 1 se introducen los conceptos de derivado, opciones y se dan las herramientas necesarias para obtener la ecuación de Black-Scholes. En la segunda parte se resuelve dicha ecuación para el caso de un Call europeo utilizando teoría de ecuaciones diferenciales parciales, se concluye el capítulo con un ejemplo práctico.
2. En el capítulo 2 se deriva la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman, la cual sirve para resolver problemas de control óptimo, por ejemplo, los que surgen al introducir la existencia de costos de transacción en el modelo de Black-Scholes.
3. En el capítulo 3 se aborda el método numérico de diferencias finitas para el caso de la ecuación de calor con coeficientes constantes y se introduce el software computacional con el que se resuelven numéricamente las ecuaciones de este trabajo.
4. Finalmente, en el capítulo 4 se resuelve de manera numérica la Ecuación Diferencial Parcial (E.D.P.) de Black-Scholes (sin transformar y transformada), se presentan dos modelos no lineales para valuar opciones en los que sí se consideran costos de transacción y se resuelven numéricamente.

Capítulo 1

Derivados, Opciones y Black-Scholes

1.1. Introducción

Un **Derivado** es un instrumento financiero cuyo valor depende (o se deriva) del valor de otro activo al cual generalmente se le llama **activo subyacente** (tasas de interés, acciones, monedas, índices bursátiles, etc).

Un tipo de derivado son las **opciones**, las cuales son contratos que otorgan al poseedor el derecho de comprar o vender un activo a un precio determinado, en una fecha futura o durante un período de tiempo prefijado.

Las opciones otorgan derechos de compra (**Call**) o de venta (**Put**). El activo sobre el que depende el valor de la opción se llama activo subyacente, y el precio pactado es el precio de ejercicio o entrega (**Strike Price**).

Existen opciones **européas** y opciones **americanas**, las primeras solamente se pueden ejercer en una fecha determinada (la cual es fijada al inicio del contrato), las segundas se pueden ejercer en cualquier momento de la vida del contrato.

En un contrato de opción los derechos y obligaciones, así como la posición ante el riesgo del comprador y del vendedor no son simétricas, ya que el comprador tiene el derecho (mas no la obligación) de comprar o vender (ejercer la opción) el activo subyacente, mientras que el vendedor tiene la obligación (mas no el derecho) de vender o comprar en caso de que el poseedor decida ejercerla, en caso contrario no hará nada.

Si los compradores ejercerán la opción únicamente si obtienen utilidades,

¿por qué vender la opción? porque se recibe una compensación (**Prima**) por parte del comprador, la cual debe compensar el riesgo que está asumiendo el vendedor.

Las opciones se pueden utilizar como instrumentos de cobertura o de especulación. Como instrumento de cobertura las opciones son el mejor instrumento financiero para cubrir riesgos de precios, ya que se transfiere el riesgo de pérdida pero se mantienen las posibilidades de utilidades, como instrumentos de especulación se utilizan para hacer apuestas hacia el rumbo futuro de alguna variable del mercado.

Se considerarán dos tipos de opciones:

Definición 1.1.1. Una opción **Call Europea** con maduración en \mathbf{T} , y precio de entrega \mathbf{K} es un contrato que le da al poseedor el derecho (mas no la obligación) de comprar el activo subyacente al precio \mathbf{K} en el tiempo \mathbf{T} .

Una opción **Put Europea** con maduración en \mathbf{T} , y precio de entrega \mathbf{K} es un contrato que le da al poseedor el derecho (mas no la obligación) de vender el activo subyacente al precio \mathbf{K} en el tiempo \mathbf{T} .

Nótese que el pago (**Payoff**) al tiempo \mathbf{T} es respectivamente¹:

$$\text{máx}(S_T - K, 0) := (S_T - K)_+ \quad (1.1)$$

$$\text{máx}(K - S_T, 0) := (K - S_T)_+ \quad (1.2)$$

Se tienen cuatro tipos de participantes en el mercado de opciones:

1. Comprador de Calls.
2. Vendedor de Calls.
3. Comprador de Puts.
4. Vendedor de Puts.

Se dice que los compradores tienen posiciones **largas** y que los vendedores tienen posiciones **cortas**. Siempre existen dos lados en cualquier contrato de opciones: En un lado está el inversor que ha tomado una posición larga y en

¹ S_t es el precio del subyacente al tiempo t por lo que S_T es el precio del subyacente en la fecha de maduración.

el otro el que ha tomado la posición corta. El inversor corto recibe dinero por adelantado pero tiene obligaciones potenciales posteriormente.

La ganancia o pérdida del vendedor de la opción es el negativo de la pérdida o ganancia del comprador. Es decir, es un juego de suma cero.

Generalmente se caracteriza una opción en términos del payoff del comprador de la opción (es decir de la posición larga).

Si S_T es el precio del activo subyacente en T y K su precio de entrega, entonces el payoff de un Call largo es: $\max(S_T - K, 0)$ y el del correspondiente Call corto es $-\max(S_T - K, 0) = \min(-(S_T - K), 0) = \min(K - S_T, 0)$.

Usualmente los activos financieros se valúan descontando los flujos futuros a la tasa apropiada, es decir el costo de oportunidad del dinero, esta manera de valuación no funciona para las opciones ya que determinar el costo de oportunidad para una opción es imposible pues el riesgo de la misma varía en función de las fluctuaciones del precio del subyacente.

Los modelos de valuación de opciones están basados en dos principios:

1. En la economía no hay arbitraje.
2. Valuación neutral al riesgo.

1.2. Conceptos de arbitraje y cartera equivalente

Definición 1.2.1. Arbitraje se entiende como la obtención de una ganancia sin riesgo al realizar operaciones simultáneas en dos o más mercados. Se dice que el precio de un instrumento es justo o que está valuado de manera correcta si éste no permite oportunidades de arbitraje.

Se verá un ejemplo² para fijar ideas: Supóngase que el precio de una acción el día de hoy es $S_0 = 20$, y que al final de tres meses el precio solamente puede subir a $S_u = 22$ o bajar a $S_d = 18$, lo que se quiere hacer es valuar una Call europea para comprar la opción a $K = 21$.

Al final de los tres meses el valor de la opción será:

²Basado en un ejemplo de [10].

Si el precio de la acción en T es	El valor de la opción será
22	$(22 - 21)_+ = 1$
18	$(18 - 21)_+ = 0$

Con el supuesto de no arbitraje se puede construir un portafolio constituido por α acciones y una opción de tal manera que se tenga la certeza del valor del portafolio al cabo de los 3 meses (es decir eliminamos el riesgo y de esa manera el retorno que gana el portafolio tendrá que ser la tasa libre de riesgo).

El portafolio será construido de la siguiente manera:

- Posición corta en la opción Call.
- Posición larga en una cantidad α de la acción.

El portafolio será libre de riesgo si el valor de α elegido es tal que el valor del portafolio sea el mismo bajo ambos escenarios, i.e,

$$22\alpha - 1 = 18\alpha$$

de donde

$$\alpha = 0.25$$

Así, el portafolio consiste en: Una posición larga en 0.25 acciones y una posición corta en una opción Call y no importando el comportamiento de la opción en T , el valor del portafolio será el mismo. En efecto:

En el caso en que el precio en T sea 22, el valor del portafolio será:

$$(22)(0.25) - 1 = 4.5$$

y en el caso en que el precio en T sea de 18, el valor del portafolio será

$$(18)(0.25) = 4.5$$

Si no hay oportunidades de arbitraje, los portafolios libres de riesgo ganan la tasa de interés libre de riesgo.

Supóngase que la tasa libre de riesgo es de 4.5 % anual. Entonces el valor del portafolio al día de hoy es:

$$4.5e^{(-0.045)\frac{3}{12}} = 4.449658701$$

El valor de la acción hoy es 20, si el precio de la opción es f , entonces el valor del portafolio el día de hoy es

$$(20)(0.25) - f = 5 - f$$

entonces por no arbitraje se tiene que

$$5 - f = 4.449658701$$

por lo que

$$f = 0.550341299.$$

Si el valor de la opción fuera mayor a 0.550341299 entonces el portafolio costaría menos que 4.449658701 y ganaría más que la tasa libre de riesgo, si el valor de la opción fuera menor a 0.550341299, vendiendo en corto el portafolio se tendría una manera de pedir dinero prestado a una tasa menor que la libre de riesgo.

Después del ejemplo anterior, se generalizará el argumento de no arbitraje.

Teorema 1.2.1. *Si se cumple que:*

- *Existen un activo que no paga dividendos y con precio inicial S_0 y un bono cupón cero a tasa r que paga un peso en la maduración.*
- *Una fecha de maduración T .*
- *En T el activo solamente puede tomar los valores S_u con probabilidad p y S_d con probabilidad $1 - p$ y además $S_u < S_d$.*
- *No existe arbitraje, lo cual se puede expresar con $S_u < S_0e^{rT} < S_d$.*³

Entonces cualquier instrumento contingente (instrumento cuyo valor depende de la ocurrencia de un hecho en el futuro) tiene asociado un portafolio compuesto de activo y bonos cupón cero que replica su payoff, por lo que únicamente la ausencia de arbitraje permitirá obtener el valor $V(f)$ de cualquier instrumento contingente.

³El activo subyacente debe ser capaz de ser mejor y peor que una inversión libre de riesgo.

Demostración: Constrúyase un portafolio con una cantidad α de activo y β de Bonos. Sea f_u el valor de dicho portafolio si el precio del activo en T es S_u y sea f_d el valor de dicho portafolio si el precio del activo en T es S_d . El valor inicial del portafolio será $\alpha S_0 + \beta e^{-rT}$; para que replique el payoff del contingente bajo cualquier situación se debe cumplir que:

$$\alpha S_u + \beta = f_u,$$

$$\alpha S_d + \beta = f_d.$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver siempre y las soluciones son:

$$\alpha = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}, \beta = \frac{S_u f_d - S_d f_u}{S_u - S_d}.$$

Así tenemos que el valor del activo contingente está dado por:

$$\begin{aligned} V(f) &= \alpha S_0 + \beta e^{-rT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} S_0 + \frac{S_u f_d - S_d f_u}{S_u - S_d} e^{-rT} \end{aligned}$$

Desarrollando la fracción y simplificando se tiene que:

$$V(f) = \frac{S_0 e^{rT} - S_d}{S_u - S_d} f_u + \frac{S_u - S_0 e^{rT}}{S_u - S_d} f_d.$$

Sea $q = \frac{S_0 e^{rT} - S_d}{S_u - S_d}$, entonces, $1 - q = \frac{S_u - S_0 e^{rT}}{S_u - S_d}$, por lo que:

$$V(f) = e^{-rT} [q f_u + (1 - q) f_d]. \quad (1.3)$$

Q.E.D.

Lo anterior da el valor de la opción y además sugiere la estrategia de réplica, la cual consiste en mantener α unidades de activo y $V(f) - \alpha S_0$ unidades de Bono.

Lo que se construyó fue un **portafolio (o cartera) de réplica**, es decir, un portafolio compuesto por otros activos que se comporta exactamente igual que el derivado.

Se pueden obtener algunas conclusiones del teorema anterior:s

1. La probabilidad no interviene en la fórmula de valuación.

2. El valor de $V(f)$ no depende del riesgo del mercado⁴ sino del carácter aleatorio de los precios del activo subyacente.
3. El valor de $V(f)$ tampoco depende de la actitud de los inversores ante el riesgo pues en ella no aparece ningún parámetro asociado a dicho factor, por lo tanto es válido valorarla suponiendo que el inversor es neutral al riesgo, i.e., valorarla utilizando la tasa libre de riesgo.

1.2.1. Retorno esperado del activo subyacente

La fórmula de valuación obtenida mediante los argumentos de no arbitraje no involucra las probabilidades de subida o bajada en el precio del subyacente, esto es debido a que se está calculando el valor de la opción en términos del precio del activo subyacente el cual incorpora ya dichas probabilidades y no es necesario considerarlas nuevamente.

1.3. Valuación en un mundo neutral al riesgo

La q definida en la demostración del teorema anterior se puede interpretar como la probabilidad asociada a un movimiento hacia arriba del precio del subyacente, así como $(1 - q)$ la correspondiente probabilidad de un movimiento hacia abajo; de esta forma la ecuación $[qf_u + (1 - q)f_d]$ sería la esperanza del payoff de la opción y la ecuación $V(f) = e^{-rT}[qf_u + (1 - q)f_d]$ sería **“la esperanza descontada a la tasa libre de riesgo “ r ” del payoff de la opción”**.

En un mundo *“neutral al riesgo”* todas las personas son indiferentes al riesgo, lo que significa que los inversionistas no exigen una “recompensa” por el riesgo de un activo, por lo que el retorno esperado de todos los activos deberá ser la *“tasa de interés libre de riesgo”*.

De forma matemática se tiene que la esperanza⁵ $\mathbb{E}(S_t)$ de S_t es:

⁴Riesgo referente al cambio de precios debido a las variaciones de la tasa de interés, tipos de cambio, etcétera.

⁵Para definiciones formales del concepto de Esperanza véase [16].

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_t) &= qS_u + (1 - q)S_d \\
&= \frac{S_0e^{rT} - S_d}{S_u - S_d}S_u + \left(1 - \frac{S_0e^{rT} - S_d}{S_u - S_d}\right)S_d \\
&= \frac{S_0e^{rT}S_u - S_0e^{rt}S_d}{S_u - S_d} \\
&= S_0e^{rT}.
\end{aligned}$$

Por lo que se ha probado que utilizar q es equivalente a suponer un mundo neutral al riesgo, y es por eso que a q y a $1 - q$ se les conoce como “probabilidades neutras al riesgo”.

1.4. Preliminares para la Ecuación de Black-Scholes

El análisis del apartado anterior fue en tiempo discreto, y el modelo que se utilizó fue el modelo llamado **árbol binomial de un período** propuesto por Cox-Ross-Rubinstein en 1979, aunque fue un modelo propuesto después del trabajo publicado en 1973 por Fisher Black y Miron Scholes⁶, provee de una cierta intuición y extendiéndolo a más períodos se puede explicar la convergencia al modelo de valuación de opciones en tiempo continuo, que se derivará en la siguiente sección. Para poder derivar dicho modelo es necesario revisar algunas herramientas matemáticas.

1.4.1. Espacio de Probabilidad

Sea Ω un **Espacio muestral** formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio (por ejemplo, todas las posibles trayectorias del precio de un activo subyacente a lo largo del tiempo). Un subconjunto de Ω es un evento y $\omega \in \Omega$ es un punto muestral.

Definición 1.4.1. Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{F} una colección de subconjuntos de Ω . \mathcal{F} es una σ -álgebra si:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

⁶Véase [11]

3. Para $n \in \mathbb{N}$, si $A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

En términos financieros, \mathcal{F} representa el espacio de los eventos que son observables en el mercado y por lo tanto toda la información disponible hasta el tiempo t es guardada como una σ -álgebra \mathcal{F} . Además $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ para $t < s$, pues la información disponible en t también está disponible en s ⁷.

Definición 1.4.2. Sea Ω un conjunto no vacío y \mathcal{F} una σ -álgebra de Ω . Una **Medida de Probabilidad** \mathbb{P} es una función que asigna un número entre $[0, 1]$ a todos los conjuntos $A \in \mathcal{F}$. Dicho número se llama “Probabilidad de A ” y se escribe $\mathbb{P}(A)$. Dicha función debe cumplir:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuntos $\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se le llama **Espacio de Probabilidad**.

1.4.2. Variable Aleatoria y Proceso Estocástico

Definición 1.4.3. Sea \mathcal{F} una σ -álgebra de Ω . Una función real X en Ω es **variable aleatoria** si los conjuntos $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}([-\infty, x])$ pertenecen a \mathcal{F} , es decir, si $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 1.4.4. Sea X una variable aleatoria. X es una **variable aleatoria normal**, o simplemente X se distribuye normal, con parámetros μ (media) y σ^2 (varianza) si su función de densidad de probabilidades es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathbb{I}_{(-\infty, \infty)}(x) \quad (1.4)$$

y como consecuencia de lo anterior:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds. \quad (1.5)$$

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ significa que X se distribuye normal con media μ y varianza σ^2 .

⁷Véase el Apéndice.

Definición 1.4.5. Un **Proceso Estocástico Continuo** $X_t = X(\cdot, t)$ con $t \in [0, \infty]$ es una familia de variables aleatorias $X : \Omega \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ con $t \rightarrow X(\omega, t)$ continua para todo $\omega \in \Omega$. Para $\omega \in \Omega$ fijo y t variable, la trayectoria de X_t se llamará una realización del proceso. Para t fijo, X_t es la posición aleatoria del proceso al tiempo t .

1.4.3. Browniano para modelar el precio de un activo

Un proceso estocástico continuo muy utilizado para los modelos financieros es el Movimiento Browniano Estándar, también conocido como **Proceso de Wiener** debido a que Norbert Wiener lo caracterizó matemáticamente.

Definición 1.4.6. Un **Movimiento Browniano Estándar** $W_t = (W_t : t \geq 0)$ es un proceso estocástico continuo que satisface:

1. $W_0 = 0$.
2. $W_t \sim N(0, t)$.
3. $W_{t+s} - W_s \sim N(0, t)$ y es independiente a la σ -álgebra \mathcal{F}_s generada por W_r con $r \leq s$.
4. Con probabilidad 1, W_t es continua.

Modelar el precio de un activo subyacente tomando $S_t = W_t$ no es bueno debido a que W_t tiene media cero y los activos crecen a una tasa, entonces se podría añadir una tendencia (μ) y así quedar $S_t = W_t + \mu t$. Para describir la volatilidad⁸ de los activos en el modelo se puede reescalar el Browniano al agregar un factor σ , quedando así $S_t = \sigma W_t + \mu t$, con $\mathbb{E}(S_t) = \mu t$ y $Var(S_t) = \sigma^2 t$.

El problema es que el modelo se podría volver negativo, lo que sería irreal pues se están modelando precios. Así que para hacerlo positivo se tomará la exponencial del proceso, quedando así el **movimiento Browniano exponencial con tendencia** también conocido como **Movimiento Browniano Geométrico**:

$$S_t = e^{\mu t + \sigma W_t}. \quad (1.6)$$

⁸La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente.

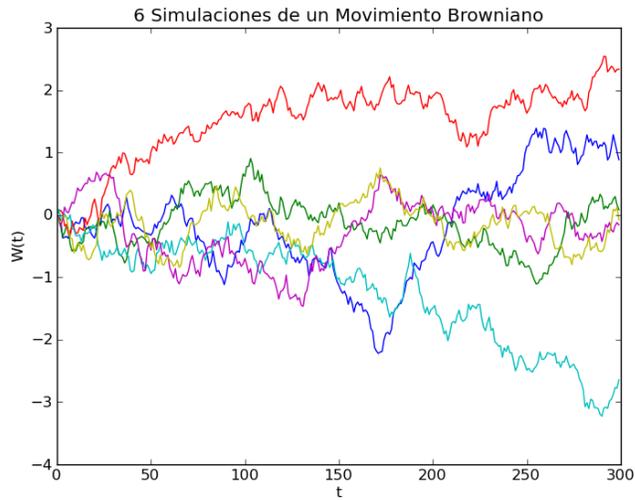


Figura 1.1: Trayectorias simuladas de un Movimiento Browniano aproximado vía caminatas aleatorias.

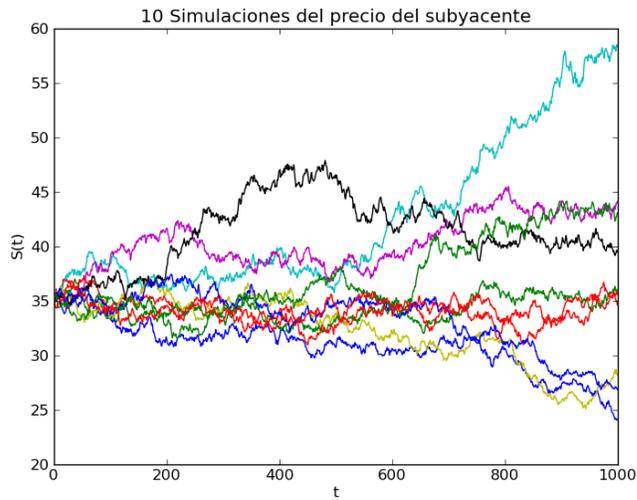


Figura 1.2: Trayectorias simuladas con $S_0 = 35$, $r = .045$, $\sigma = .2$.

Se ha observado que las series financieras se comportan de manera muy parecida a este tipo de proceso, aunque también se ha visto que las colas de las distribuciones son más pesadas que las colas de la normal, por lo que se ha introducido otro tipo de proceso más general llamado proceso de Lévy.

1.5. La E.D.P. de Black-Scholes

Antes de derivar la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes se mencionará un lema que juega un papel muy importante en la valuación de derivados, es la extensión de la regla de la cadena pero para el cálculo estocástico.

Lema 1.5.1 (Lema de Itô). *Sea X_t un proceso estocástico que satisface la ecuación diferencial: $dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$ entonces, un proceso Y_t función de t y X_t , i.e., $Y_t = f(t, X_t)$ satisface que*

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(X_t, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW_t \quad (1.7)$$

donde $a(X_t, t)$ y $b(X_t, t)$ son procesos adaptados⁹, W_t un proceso de Wiener y $f(t, X_t) \in C^{1,2}$ ($\frac{\partial f}{\partial t}$ continua, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ continuas).

Lema 1.5.2 (Lema de Itô multidimensional).¹⁰ *Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ un vector columna donde cada X_i tiene una diferencial estocástica de la forma $dX_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t)dW_j(t)$ y W_1, W_2, \dots, W_d son procesos de Wiener independientes.*

Defínase el vector columna n -dimensional de medias:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

el vector columna d -dimensional de procesos de Wiener:

⁹Véase el apéndice.

¹⁰Véase el apéndice para una justificación intuitiva de ambas versiones del lema de Itô.

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_d \end{bmatrix}$$

y la matriz de difusión $n \times d$ -dimensional:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nd} \end{bmatrix}$$

Escríbanse las dinámicas del proceso como:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Defínase también $Z(t) = f(t, X(t))$ donde $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $f \in C^{1,2}$.

Entonces, se cumple que:

$$df = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i dW$$

donde: $\sigma_i = [\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{id}]$, $C = \sigma \sigma^T$.

El lema de Itô será de utilidad para calcular diferenciales estocásticas o para obtener procesos a partir de la ecuación estocástica que satisface.

Para entender mejor la lógica de trabajo se precisarán tres definiciones que serán de gran ayuda:

Definición 1.5.1. Sean S_t el precio del activo subyacente y B_t el precio del bono, ambos en el instante t , sea también $f(S_T)$ el payoff del derivado en maduración.

1. Un **Portafolio** (α_t, b_t) es un par de procesos $\{\alpha_t\}, \{b_t\}$ tales que describen, respectivamente, la cantidad de subyacente y de bono que se debe mantener en el tiempo t . Su valor está dado por $\Pi_t = \alpha_t S_t + b_t B_t$.

2. Un portafolio es **Autofinanciado** si el cambio de su valor en el tiempo solamente depende del cambio de los precios de sus componentes, i.e.,

$$(\alpha_t, b_t) \text{ es autofinanciado} \Leftrightarrow d\Pi_t = \alpha_t dS_t + b_t dB_t.$$

A partir de $t = 0$ esta condición permite únicamente cambiar entre B y S .

3. El portafolio será **de réplica** si $\Pi_T = \alpha_T S_T + b_T B_T = f(S_T)$.

1.5.1. Supuestos del modelo

- El precio del subyacente (S_t) obedece al movimiento Browniano exponencial con tendencia o deriva, con μ y σ constantes (Dinámica lognormal).
- Se puede vender en corto, i.e., pedir prestado activos para su venta con la promesa de devolverlos en el futuro.
- No hay costos de transacción y todos los activos son divisibles.
- El subyacente no paga dividendos.
- No existen en el mercado oportunidades de arbitraje.
- El trading es continuo.
- r (la tasa de interés libre de riesgo) es constante y es la misma para todas las maduraciones.

1.5.2. Derivación 1 (Construcción con subyacente y bonos)

La primer idea para derivar la E.D.P. de Black-Scholes será construir un portafolio con α_t unidades de activo subyacente y b_t unidades de bono (activo libre de riesgo), dicho portafolio deberá ser autofinanciado y debe replicar el payoff $f(S_T)$ del derivado, de ser así, por principio de no arbitraje se tendrá que para cualquier tiempo el valor del derivado será el mismo que el valor del portafolio.

Dicho lo anterior y dados los supuestos se tiene que los precios del bono y del subyacente obedecen los siguientes procesos:

- Bono: $dB_t = rB_t dt$ con $B_0 = 1$ (E.D.O.)
- Subyacente: $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ ó $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ (E.D. Estocástica)

o de manera equivalente:

- $B_t = e^{rt}$
- $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$.

En efecto, sea $Y_t = f(S_t) = \log(S_t) \Rightarrow Y_t = \mu t + \sigma dW_t$, y aplicando el lema de Itô se tiene:

$$\begin{aligned} dY_t = d(\log S_t) &= \left(0 + \mu S_t \frac{1}{S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{1}{S_t} dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Integrando ambos lados de 0 a t para después exponenciar:

$$\log S_t = \log S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t.$$

Por lo tanto,

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}.$$

Y en consecuencia $S_t = S_0 e^Y$ donde $Y \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$, es decir, el proceso sigue una dinámica lognormal de precios.

Ahora sí, se construirá el portafolio deseado:

Sea V_t el valor del derivado en t , se buscan V y (α_t, b_t) tales que

$$\Pi_t = \alpha_t S_t + b_t B_t = V(S, t). \quad (1.8)$$

Como S_t es función de W_t y V es función de S y de t , es decir, $V_t = V(S, t)$, utilizando el lema de Itô se tiene que:

$$d\Pi_t = dV_t = d(V(S, t))$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t. \quad (1.9)$$

Por otro lado, como el portafolio (α_t, b_t) es autofinanciado se tiene:

$$d\Pi_t = \alpha_t dS + b_t dB_t = (\alpha_t \mu S + b_t r B) dt + \alpha_t \sigma S dW_t. \quad (1.10)$$

Igualando los términos estocásticos en (1.9) y (1.10) se tiene:

$$\alpha_t = \frac{\partial V}{\partial S}. \quad (1.11)$$

Igualando los términos newtonianos, usando (1.11) se tiene también:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + r b_t B_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (1.12)$$

de donde:

$$r b_t B_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}. \quad (1.13)$$

Además de (1.8) se sabía que $b_t B_t = V - \alpha_t S \Rightarrow r b_t B_t = rV - r \frac{\partial V}{\partial S} S$, que junto con la ecuación (1.13) da:

$$rV = rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Se quería también que $V(S, t)$ fuera un portafolio de réplica, esto se logra si $V(S, T) = f(S)$, es decir, si el valor del portafolio en T (maduración) coincide con el payoff del derivado.

Por lo tanto la ecuación que satisface $V(s, t)$ es:

$$\begin{cases} rs \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 & \text{para } 0 < s < \infty, 0 \leq t < T, \\ V(s, T) = f(s) & \text{para } 0 < s < \infty. \end{cases} \quad (1.15)$$

Esta es la famosa ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, es lineal, de la clase parabólica, con coeficientes variables y con condición final. Al

resolverla se puede obtener el valor de V para cualquier tiempo t , o lo que es lo mismo, el valor del derivado.

En particular para $t = 0$ se tiene el precio del derivado al inicio del contrato.

1.5.3. Derivación 2 (Construcción con Posición larga en la opción y corta en subyacente)

La idea ahora será calcular la derivada de V y luego construir un portafolio libre de riesgo con la **opción** y **activo subyacente** de tal manera que se pueda eliminar el riesgo en el portafolio.

Al igual que en la derivación anterior se tiene que:

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial s} dW_t.$$

Para eliminar el término estocástico se construye un portafolio que consista en una posición larga en la opción y una corta en Δ^{11} unidades de subyacente, por lo que las dinámicas del portafolio serán:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= d(V - \Delta S) = dV - \Delta dS \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial s} dW_t - \Delta (\mu S dt + \sigma S dW_t) \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta \mu S \right) dt + \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dW_t \end{aligned}$$

y al elegir $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ se elimina el término estocástico, por lo que la evolución del portafolio en el tiempo es:

$$d\Pi_t = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right\} dt. \quad (1.16)$$

Como el portafolio es libre de riesgo deberá ganar la tasa libre de riesgo r (principio de no arbitraje), es decir, se debe cumplir que:

¹¹Se utiliza Δ ya que es más común en la literatura.

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt. \quad (1.17)$$

Igualando los términos de (1.16) con los de (1.17),

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= r\Pi_t = r(V - \Delta S) \\ &= r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right). \end{aligned}$$

Con lo que también se obtiene la ecuación:

$$rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0.$$

Para poder resolverla será necesario transformarla en una ecuación parabólica con coeficientes constantes y con condición inicial, esto para luego convertir dicha ecuación en una ecuación de calor para la cual se cuenta con una solución explícita. La solución se obtendrá para el caso de una Call europea.

El proceso a seguir será el siguiente:

1. Se presentará y resolverá la Ecuación de Calor utilizando la transformada de Fourier.
2. Se presentará una ecuación parabólica de coeficientes constantes y mediante la proposición de una forma para su solución se podrá convertir en la ecuación de calor para resolverla.
3. Se planteará la ecuación (1.15) para el caso de una Call europea y mediante un cambio de variables se transformará en una de coeficientes constantes para poder obtener su solución de manera explícita.

¹²Si $d\Pi_t > r\Pi_t dt$ entonces se puede pedir prestado una cantidad Π_t para comprar el portafolio y como la ganancia $d\Pi_t$ es mayor que el costo $r\Pi_t dt$, se obtiene una utilidad sin riesgo de $d\Pi - r\Pi_t$. Si $d\Pi_t < r\Pi_t dt$ entonces se puede vender en corto el portafolio Π_t , invertir ese dinero en el banco a tasa r obteniéndose así una ganancia sin riesgo de $r\Pi_t dt - d\Pi_t$.

1.5.4. La Solución

La ecuación de calor con coeficientes constantes

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} & \text{para } -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad D \text{ constante,} \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (1.18)$$

Utilizando¹³ la transformada de Fourier $\mathcal{F}[u(x, t)](\omega) = \hat{u}(\omega, t)$ ¹⁴ y sus propiedades se tiene que:

$$\mathcal{F}[u_t] = D\mathcal{F}[u_{xx}],$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_t](\omega) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}](\omega) = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Por lo que la ecuación se transforma en:

$$\hat{u}_t = -D\omega^2 \hat{u}$$

con solución:

$$\hat{u}(\omega, t) = A_\omega e^{-\omega^2 Dt}.$$

Utilizando la condición inicial se tiene que:

$$\hat{u}(\omega, t) = \hat{f}(\omega) e^{-\omega^2 Dt}.$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier se obtendrá la solución al problema original. Para eso se expresará a \hat{u} como producto de 2 transformadas para así poder utilizar que $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$ (donde $*$ denota convolución), en efecto,

$$\blacksquare \text{ Si } g(x) = e^{-x^2/2} \Rightarrow \hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} = \sqrt{2\pi} g(\omega).$$

¹³Para esta sección $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, etcétera.

¹⁴ ω es el argumento de la transformada de Fourier.

- Si $m > 0$ y $g_m(x) = mg(mx) \Rightarrow \widehat{g_m}(\omega) = \widehat{g}(\omega/m)$.

Sea $g(x) = e^{-x^2/2}$ y $m = \frac{1}{\sqrt{2Dt}}$, utilizando lo anterior se tiene que:

$$e^{-D\omega^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{g_{1/\sqrt{2Dt}}}(\omega)$$

así $\widehat{u}(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(\omega) \widehat{g_{1/\sqrt{2Dt}}}(\omega)$ es el producto de 2 transformadas por lo que la inversa será:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}[\widehat{g * f}(\omega)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (g_{1/\sqrt{2Dt}} * f)(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{1/\sqrt{2Dt}}(x - \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución a (1.18) está dada explícitamente por:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} f(\xi) d\xi \quad (1.19)$$

Ahora se mostrará cómo transformar la siguiente ecuación parabólica con coeficientes constantes a la ecuación (1.18).

$$\begin{cases} U_t = DU_{xx} + bU_x + cU & \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad D, b, c \text{ constantes,} \\ U(x, 0) = g(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Se propone como solución $U(x, t) = e^{hx+kt} u(x, t)$ con h y k a determinar. Las derivadas de U son:

$$\begin{aligned} U_t &= ke^{hx+kt} u + e^{hx+kt} u_t \\ U_x &= he^{hx+kt} u + e^{hx+kt} u_x \\ U_{xx} &= h^2 e^{hx+kt} u + he^{hx+kt} u_x + he^{hx+kt} u_x + e^{hx+kt} u_{xx}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.20) y dividiendo entre el término e^{hx+kt} se tiene que:

$$u_t = Du_{xx} + (2Dh + b)u_x + (Dh^2 + bh + c - k)u,$$

para que la ecuación anterior satisfaga la ecuación de calor, tiene que suceder que:

$$\begin{cases} 2Dh + b = 0, \\ Dh^2 + bh + c - k = 0. \end{cases}$$

De donde:

$$h = -\frac{b}{2D} \quad k = \frac{-b^2 + 4cD}{4D}.$$

Por lo que con $U(x, t) = e^{-\frac{b}{2D}x + \frac{-b^2 + 4cD}{4D}t}u(x, t)$ se convierte a la ecuación (1.20) en:

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx}, \\ u(x, 0) = U(x, 0)e^{\frac{b}{2D}x} = g(x)e^{\frac{b}{2D}x}. \end{cases}$$

La anterior es la ecuación de calor con coeficientes constantes y condición inicial $g(x)e^{\frac{b}{2D}x}$.

1.5.5. Solución para una Call europea

Ahora sí se cuenta con las herramientas para resolver la ecuación de Black-Scholes para el caso de una Call europea, es decir, se tiene que resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 & \text{para } 0 < s < \infty, \quad 0 \leq t < T, \\ V(s, T) = (s - K)_+ & \text{para } 0 < s < \infty, \\ V(0, t) = 0 & \text{para } 0 \leq t < T, \\ V(s, t) \approx s & \text{para } 0 \leq t < T, \quad s \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.21)$$

Para resolverlo se utilizará la condición final (payoff). Al terminar se verá que la solución satisface las condiciones de frontera¹⁵.

¹⁵Si $s = 0$ el valor de de la opción también será cero ya que no se ejercerá, si $s \rightarrow \infty$ la opción seguramente se ejercerá y $s - K$ se aproximará a s .

Primero se transformará la ecuación (1.21) en una de coeficientes constantes de la forma (1.20), para lo cual se proponen los siguientes cambios de variables:

$$x = \log \frac{s}{K}, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad w(x, \tau) = \frac{1}{K}V \left(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right)$$

es decir,

$$s = Ke^x, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V(s, t) = Kw(x(s), \tau(t)).$$

Derivando parcialmente se tiene:

$$V_t = Kw_\tau \tau_t = -\frac{K}{2}\sigma^2 w_\tau,$$

$$V_s = Kw_x x_s = \frac{K}{s}w_x,$$

$$\begin{aligned} V_{ss} &= K(w_x x_s)_s = K(w_x)_s x_s + Kx_{ss} w_x = K(w_{xx} x_s) x_s + Kx_{ss} w_x \\ &= \frac{Kw_{xx} - Kw_x}{s^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1.21) y simplificando se obtiene:

$$w_\tau = w_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) w_x - \frac{2r}{\sigma^2} w.$$

Si $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, entonces:

$$w_\tau = w_{xx} + (k - 1)w_x - kw.$$

Como $\tau(T) = 0$, la condición final de la ecuación original (1.21) se transforma en la siguiente condición inicial para la nueva ecuación:

$$V(s, T) = Kw(x, \tau(T)) = Kw(x, 0) \Rightarrow w(x, 0) = \frac{(Ke^x - K)_+}{K} = (e^x - 1)_+$$

Para los rangos de las nuevas variables se tiene que:

- $0 < s < \infty \Leftrightarrow 0 < \frac{s}{K} < \infty \Leftrightarrow -\infty < \log \frac{s}{K} < \infty \Leftrightarrow -\infty < x < \infty$.
- $0 \leq t < T \Leftrightarrow 0 < (T-t)\frac{\sigma^2}{2} \leq \frac{\sigma^2 T}{2} \Leftrightarrow 0 < \tau \leq \frac{\sigma^2 T}{2}$.

Así el modelo (1.21) se transforma en:

$$\begin{cases} w_\tau = w_{xx} + (k-1)w_x - kw & \text{para } -\infty < x < \infty, \quad 0 < \tau \leq \frac{\sigma^2 T}{2}, \\ w(x, 0) = (e^x - 1)_+ & \text{para } -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (1.22)$$

Haciendo ahora la transformación $w(x, \tau) = e^{-\frac{k-1}{2}x - \frac{(k-1)^2 + 4k}{4}\tau} u(x, \tau)$, el modelo a resolver será:

$$\begin{cases} u_\tau = u_{xx} & \text{para } -\infty < x < \infty, \quad 0 < \tau \leq \frac{\sigma^2 T}{2}, \\ u(x, 0) = (e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{(k-1)}{2}x})_+ & \text{para } -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (1.23)$$

Es decir, se ha obtenido la ecuación de calor (1.18) con $D = 1$ y condición inicial (C.I.)

$$f(x) = u(x, 0) = (e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{(k-1)}{2}x})_+$$

Su solución ya se obtuvo y está dada explícitamente por (1.19). Sustituyendo la C.I. y haciendo $z = \frac{\xi - x}{\sqrt{2\tau}}$, $dz = \frac{d\xi}{\sqrt{2\tau}}$ entonces $\xi = z\sqrt{2\tau} + x$ y se tiene:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} f(z\sqrt{2\tau} + x) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} (e^{\frac{(k+1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} - e^{\frac{(k-1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)})_+ dz. \end{aligned}$$

El argumento de la integral sólo es diferente de cero si se cumple que:

$$\begin{aligned} \left(e^{\frac{k+1}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} - e^{\frac{(k-1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} \right)_+ > 0 &\Leftrightarrow e^{\frac{(k+1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} - e^{\frac{(k-1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{(k+1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} > e^{\frac{(k-1)}{2}(z\sqrt{2\tau} + x)} \\ &\Leftrightarrow z > -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(e^{\frac{(k+1)}{2}(z\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{(k-1)}{2}(z\sqrt{2\tau}+x)} \right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{(k+1)}{2}(z\sqrt{2\tau}+x)} dz \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{\frac{(k-1)}{2}(z\sqrt{2\tau}+x)} dz \\
&= I + II
\end{aligned}$$

Para facilitar los cálculos de las integrales I y II se hará uso del siguiente resultado:

Teorema 1.5.1. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces para $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_b^{\infty} e^{ax} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{a\mu + \frac{1}{2}a^2\sigma^2} N(d),$$

con

$$\begin{aligned}
d &= \frac{-b + \mu + a\sigma^2}{\sigma} \\
N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{y^2}{2}} dy.
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado se tiene que:

$$\begin{aligned}
I &= e^{\frac{k+1}{2}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{k+1}{2}\sqrt{2\tau}z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{k+1}{2}x} e^{\frac{(k+1)^2}{4}\tau} N(d_+) \\
&= e^{\frac{k+1}{2}x + \frac{(k+1)^2}{4}\tau} N(d_+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &= e^{\frac{k-1}{2}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{k-1}{2}\sqrt{2\tau}z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= e^{\frac{k-1}{2}x} e^{\frac{(k-1)^2}{4}\tau} N(d_-) \\
&= e^{\frac{k-1}{2}x + \frac{(k-1)^2}{4}\tau} N(d_-)
\end{aligned}$$

con

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad \text{y} \quad d_{\pm} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k \pm 1)}{2} \sqrt{2\tau}$$

Por lo tanto,

$$u(x, \tau) = e^{\frac{k+1}{2}x + \frac{(k+1)^2}{4}\tau} N(d_+) - e^{\frac{k-1}{2}x + \frac{(k-1)^2}{4}\tau} N(d_-).$$

Se ha resuelto el problema (1.23), para resolver el problema original (1.21) se aplicará la transformación inversa y se regresarán las variables x y τ a las originales s y t .

Como $w(x, \tau) = e^{-\frac{k-1}{2}x - \frac{(k-1)^2 + 4k}{4}\tau} u(x, \tau)$, entonces:

$$\begin{aligned} w(x, \tau) &= e^{-\frac{k-1}{2}x - \frac{(k+1)^2}{4}\tau} u(x, \tau) \\ &= e^x N(d_+) - e^{-k\tau} N(d_-). \end{aligned}$$

También $V(s, t) = Kw(x, \tau)$, $x = \log \frac{s}{K}$, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ y $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ por lo que,

$$\begin{cases} V(s, t) = sN(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-), \\ d_{\pm} = \frac{\log \frac{s}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{cases} \quad (1.24)$$

Esta es la solución a la E.D.P de Black-Scholes para una Call europea con strike price K , precio inicial s , volatilidad σ , tasa libre de riesgo r y maduración en T .

En la fórmula (1.24) $N(d_+)$ es la cantidad de subyacente necesaria para el portafolio de réplica de la opción así que $sN(d_+)$ representa su costo. $Ke^{-r(T-t)}N(d_-)$ es el importe necesario que se financiará a la tasa libre de riesgo, por lo tanto la diferencia entre los términos es el costo del portafolio de réplica de la opción.

Así la fórmula de Black-Scholes es simplemente una relación de arbitraje, el lado izquierdo de (1.24) es el valor de la opción y el lado derecho es el precio de mercado del portafolio de réplica.

Análisis de las condiciones de frontera

Para la solución de la ecuación de Black-Scholes en el caso de una Call europea solamente fue necesario utilizar la condición final $V(s, T) = (s - K)_+$ sin hacer hincapié en las condiciones de frontera, las cuales son satisfechas con la solución encontrada:

1. Si $s \rightarrow 0 \Rightarrow \log \frac{s}{K} \rightarrow -\infty \Rightarrow d_{\pm} \rightarrow -\infty \Rightarrow N(d_{\pm}) \rightarrow 0$, por lo tanto, $V(0, t) = 0$.
2. Si $s \rightarrow \infty \Rightarrow d_{\pm} \rightarrow \infty \Rightarrow N(d_{\pm}) \rightarrow 1$, por lo tanto,

$$V(s, t) \approx s - Ke^{-r(T-t)} \approx s$$

Dados los dos puntos anteriores se tiene resuelta la E.D.P. de Black-Scholes para el caso de una Call europea.

1.6. Las Griegas

Es importante estudiar la **sensibilidad** del portafolio respecto a cambios en el precio del activo subyacente así como a cambios en los parámetros del modelo, para dicho propósito se tiene la siguiente definición de las llamadas griegas las cuales son de gran ayuda para formar estrategias de cobertura.

Griega	Valor para Call europea
$\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$	$N(d_+)$
$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$	$\frac{N(d_+)}{s\sigma\sqrt{T-t}}$
$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_-)$
$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$	$-\frac{sN(d_+)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_-)$
$\nu = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$sN(d_+)\sqrt{T-t}$

Cuadro 1.1: Las Griegas

Un portafolio insensible respecto a cambios de sus parámetros es llamado **Neutral**.

Cuando se derivó la ecuación de Black-Scholes se utilizó un esquema de cobertura Δ para eliminar el riesgo del portafolio sintético.

Lo que se hace en la práctica es rebalancear el portafolio siguiendo un esquema **discreto** de cobertura Δ . En la sección siguiente se presenta un ejemplo.

1.7. Un ejemplo práctico

Para ilustrar el manejo de la fórmula de Black-Scholes se calculará el precio de venta de una Call europea con los datos de la siguiente tabla¹⁶:

S_0	35.5
K	35
r (Anual)	10 %
σ (Anual)	18 %
T (Días)	140

Dados los datos anteriores se tiene que:

$$d_+ = \frac{\log\left(\frac{35.5}{35}\right) + \left(0.10 + \frac{1}{2}0.18^2\right)\left(\frac{140}{365}\right)}{0.18\sqrt{\frac{140}{365}}} = 0.527$$

$$d_- = \frac{\log\left(\frac{35.5}{35}\right) + \left(0.10 - \frac{1}{2}0.18^2\right)\left(\frac{140}{365}\right)}{0.18\sqrt{\frac{140}{365}}} = 0.416$$

Y buscando en tablas de la distribución normal estándar se obtiene que:

$$N(d_+) = N(0.527) = 0.701$$

$$N(d_-) = N(0.416) = 0.661$$

Por lo que el precio de la Call europea al $t = 0$ es:

$$V(35.5, 0) = 35.5 * 0.701 - 35 * e^{-.10\left(\frac{140}{365}\right)} * 0.661 = 2.6136.$$

¹⁶Ejemplo tomado del libro [13].

Como se explicó anteriormente $N(d_+) = 0.701$ es la cantidad de subyacente que debe tener el portafolio de réplica, dicha cantidad de subyacente costará 24.8855, y para que el portafolio tenga el mismo valor que la opción se necesita que su valor sea igual a 2.61 por lo que se debe cumplir que:

$$24.8855 + b_0 = 2.6136 \Rightarrow b_0 = 2.6136 - 24.8855 = -22.2691$$

Lo anterior significa que se debe “pedir prestado” (a la tasa libre de riesgo) 22.2691.

Para ilustrar el proceso de cobertura se harán rebalances del portafolio de manera semanal, los resultados aparecen en tabla 1.2:¹⁷

Variables y precios de Call								Cobertura Δ		
t	DxV	S_t	d_+	$N(d_+)$	d_-	$N(d_-)$	$c(s, t)$	Π	$S_t N(d_+)$	Deuda
0	140	35.50	0.527	0.701	0.416	0.661	2.61	2.61	24.88	-22.27
7	133	34.63	0.292	0.615	0.183	0.573	1.96	1.96	21.29	-19.33
14	126	33.75	0.035	0.514	-0.070	0.472	1.39	1.39	17.35	-15.96
21	119	34.75	0.299	0.617	0.196	0.578	1.89	1.89	21.46	-19.57
28	112	33.75	-0.007	0.497	-0.107	0.457	1.25	1.25	16.78	-15.53
35	105	33.00	-0.263	0.396	-0.360	0.360	0.85	0.85	13.07	-12.23
42	98	33.88	-0.014	0.494	-0.107	0.457	1.17	1.17	16.75	-15.58
49	91	34.50	0.162	0.564	0.072	0.529	1.42	1.42	19.47	-18.05
56	84	33.75	-0.111	0.456	-0.198	0.422	0.96	0.96	15.38	-14.42
63	77	34.75	0.210	0.583	0.127	0.551	1.39	1.39	20.26	-18.87
70	70	34.38	0.056	0.522	-0.023	0.491	1.10	1.10	17.96	-16.85
77	63	35.13	0.318	0.625	0.243	0.596	1.44	1.44	21.94	-20.50
84	56	36.00	0.652	0.743	0.582	0.720	1.94	1.94	26.75	-24.81
91	49	37.00	1.079	0.860	1.013	0.845	2.65	2.65	31.81	-29.16
98	42	36.88	1.076	0.859	1.015	0.845	2.45	2.45	31.68	-29.23
105	35	38.75	2.026	0.979	1.970	0.976	4.10	4.10	37.92	-33.82
112	28	37.88	1.765	0.961	1.715	0.957	3.18	3.18	36.41	-33.23
119	21	38.00	2.060	0.980	2.016	0.978	3.21	3.21	37.25	-34.04
126	14	38.63	2.926	0.998	2.890	0.998	3.76	3.76	38.56	-34.80
133	7	38.50	3.913	1.000	3.888	1.000	3.57	3.57	38.50	-34.93
140	0	37.50	-	-	-	-	2.50	2.50	37.50	-35.00

Cuadro 1.2: Ejemplo de Cobertura Delta

El proceso es el siguiente:

¹⁷Los precios de la acción deberían ser observados en el mercado en el momento de realizar la cobertura, los considerados aquí son para fines didácticos y corresponden a los precios de cierre observados semanalmente del 11 de mayo al 21 de septiembre de 1983 de la acción Exxon.

- En $t = 0$ se tienen los datos pues son los que se utilizaron para calcular el valor de la opción y se obtuvo que la cantidad que se debe pedir prestada es 22.27.
- Pasa una semana ($t = 7$) y se calcula el precio del Call para ese tiempo, el precio de la acción ahora es de 34.63, por lo que el valor de la inversión en subyacente ahora es de $\frac{24.89}{35.50} * 34.64 = 24.28$ y la deuda adquirida en el tiempo anterior es de $-22.27(1 + 0.10\frac{7}{365}) = -22.31$. Así $24.28 - 22.31 = 1.96$ que coincide (salvo errores de redondeo) con el valor de la opción en ese tiempo.
- Ahora se debe tener $\Delta = 0.615$ de activo subyacente, es decir 21.28 (ΔS_1) y se pide prestado 19.32. Nótese que no se añadió ni se quitó dinero al valor del portafolio, solamente se rebalanceó siguiendo la estrategia dictada por la delta.
- Siguiendo el proceso anterior se tiene en $t = 133$ el valor de la opción es de 3.57 y el portafolio de réplica consta de $\Delta = 1$ unidad de subyacente con valor de 38.50 y una deuda en bonos de -34.93 por lo que en la maduración $t = T = 140$ el valor de la Call es $(37.50 - 35)_+ = 2.50$ por lo que se ejerce la opción. Es decir, el vendedor tiene que pagarle 2.50 al comprador, y lo puede hacer pues tiene una unidad de subyacente con valor de 37.50 y su deuda es de $-34.93(1 + 0.10\frac{7}{365}) = -35$, por lo que paga su deuda y le quedan 2.50, cantidad con la cual hace frente a su obligación.

El proceso anterior se hizo bajo los supuestos de que **no existen costos de transacción al comprar y vender activo subyacente** y que **el subyacente se puede comprar en unidades fraccionales**, ambos supuestos no se cumplen en la realidad y repercuten en la exactitud y en la cobertura total.

Al introducir al modelo de Black-Scholes el supuesto de la existencia de costos de transacción, el problema a resolver se complica bastante y se convierte en un problema de control. El propósito de los siguientes capítulos es el de tratar de resolver dicho problema para poder valorar opciones europeas de una manera que se apegue mejor a la realidad.

Capítulo 2

Control Estocástico

De manera intuitiva un control puede ser pensado como el “proceso mediante el cual se ejerce una influencia externa sobre el comportamiento de un sistema dinámico, con el objetivo de alcanzar un propósito fijado con anterioridad”¹.

2.1. El problema de control

Sean $\mu(t, x, u)$ y $\sigma(t, x, u)$ funciones de la forma:

$$\mu : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}.$$

Para un punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ considérese la siguiente ecuación diferencial estocástica (E.D.E.) CONTROLADA:

$$dX_t = \mu(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dW_t, \quad (2.1)$$

$$X_0 = x_0. \quad (2.2)$$

Al proceso X (en \mathbb{R}^n) se le llama **proceso de estado** y es el proceso al cual se busca “controlar” por medio de un **proceso control** U (en \mathbb{R}^k) elegido según un objetivo prefijado. W es un proceso de Wiener o movimiento Browniano en \mathbb{R}^d .

¹Véase [6].

Los controles que se buscan o **clase de controles admisibles** son aquellos adaptados al proceso X , i.e., aquellos controles u_t cuyo valor en t depende únicamente de la historia del proceso observada hasta t . Así que se puede tomar un control adaptado eligiendo una función determinista $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $u_t = g(t, X_t)$, a g se le llama **ley de control retroalimentativa**.

Supóngase que se tiene una función $u(t, x)$ fija, si se sustituye en (2.1) se tiene:

$$dX_t = \mu(t, X_t, u(t, X_t))dt + \sigma(t, X_t, u(t, X_t))dW_t. \quad (2.3)$$

La mayoría de las veces será necesario incluir restricciones de control, en esos casos se considerará $U \subseteq \mathbb{R}^k$ con $u_t \in U$ para cada t . Dicho lo anterior se puede definir cuándo un control es admisible.

Definición 2.1.1. u es un **control admisible** si:

1. $u(t, x) \in U$ para toda $t \in \mathbb{R}_+$ y toda $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Para cualquier condición inicial (t, x) la siguiente E.D.E. tiene solución única:

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s, u(s, X_s))ds + \sigma(s, X_s, u(s, X_s))dW_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

A la **clase de controles admisibles** se le denota como \mathcal{U} .

Antes de continuar se definirá el **operador diferencial parcial** A^u para cualquier vector o función u como:

$$A^u = \sum_{i=1}^n \mu_i^u(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^u(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.4)$$

2.2. La función objetivo de un problema de control

Para elegir un control por medio del cual se modifiquen las dinámicas del sistema para alcanzar una “meta” es necesario algún criterio que permita elegir un control adecuado.

Definición 2.2.1. Sean F y Φ ² dos funciones dadas tales que:

$$F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Se define la **Función valor** del problema como $\mathcal{J}_0 : \mathcal{U} \in \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathcal{J}_0(u) = \mathbb{E} \left[\int_0^T F(t, X_t^u, u_t) dt + \Phi(X_T^u) \right], \quad (2.7)$$

donde X^u es la solución a (2.3) con condición inicial $X_0 = x_0$.

El problema a resolver será el de maximizar o minimizar $\mathcal{J}_0(u)$ sobre todos los controles $u \in \mathcal{U}$.

Definición 2.2.2. El **Valor óptimo** $\hat{\mathcal{J}}_0$ se define como:

$$\hat{\mathcal{J}}_0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}_0(u). \quad (2.8)$$

Si existe una función \hat{u} admisible y tal que $\mathcal{J}_0(\hat{u}) = \hat{\mathcal{J}}_0$ se dice entonces que \hat{u} es un **control óptimo** para el problema.

Existen varias técnicas para resolver problemas de control óptimo, una de ellas es la “programación dinámica” que con ayuda de un principio llamado “Principio de optimalidad de Bellman” ayuda a descomponer el problema original “varios” subproblemas que juntos dan como resultado la E.D.P. de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.). Resolver dicha ecuación es equivalente a resolver el problema de control original.

2.3. La E.D.P. de H.J.B.

Definición 2.3.1. Sea t fijo con $0 \leq t \leq T$ y $x \in \mathbb{R}^n$ fijos, para (t, x) se define el **Problema de Control** $\mathcal{P}(t, x)$ como el problema de maximizar o minimizar:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T F(s, X_s^u, u_s) ds + \Phi(X_T^u) \right], \quad (2.9)$$

² F puede representar una función de utilidad debida al desplazamiento X y a la fuerza u mientras que Φ puede representar la penalización por la desviación del estado X_T en el instante final T de un estado deseado X_T .

dadas:

$$dX_s = \mu(s, X_s, u(s, X_s))ds + \sigma(s, X_s, u(s, X_s))dW_s, \quad (2.10)$$

$$X_t = x, \quad (2.11)$$

y sujeto a las siguientes restricciones:

$$u(s, y) \in \mathcal{U} \text{ para todo } (s, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}^n. \quad (2.12)$$

Nota: El problema original a resolver es $\mathcal{P}(0, x)$.

Definición 2.3.2. Para el problema de control $\mathcal{P}(t, x)$ se definen las siguientes funciones:

- La **función valor**:

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(t, x, u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T F(s, X_s^u, u_s) ds + \Phi(X_T^u) \right],$$

dadas las dinámicas (2.10) y (2.11).

- La **función de valor óptima**:

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, u).$$

La definición anterior quiere decir que $\mathcal{J}(t, x, u)$ es el valor esperado de la utilidad al adoptar la política de control u en el intervalo $[t, T]$ dado que el estado se encuentra en x al tiempo t . $V(t, x)$ es la utilidad esperada óptima sobre el mismo intervalo y bajo las mismas condiciones iniciales.

No se debe perder de vista que el objetivo principal es el de obtener la función de valor óptima.

El proceso siguiente consistirá en derivar una E.D.P. para V , suponiendo lo siguiente:

1. Existe un control óptimo \hat{u} .
2. V es $C^{1,2}$.

Sea $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ fijo y un incremento de tiempo pequeño $h \in \mathbb{R}^+$ tal que $t+h < T$. Sea u un control fijo y arbitrario. Defínase u^* de la siguiente forma:

$$u^*(s, y) = \begin{cases} u(s, y) & \text{con } (s, y) \in [t, t+h] \times \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(s, y) & \text{con } (s, y) \in (t+h, T] \times \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La definición de u^* anterior significa que se usará el control u arbitrario en el intervalo $[t, t+h]$ y a partir de ahí se adopta el control óptimo \hat{u} hasta el tiempo final T .

La programación dinámica se aplica en el siguiente proceso:

1. Dado el punto (t, x) se consideran dos estrategias:
 - a) Usar el control óptimo \hat{u} durante todo el intervalo.
 - b) Usar el control u^* .
2. Se calculan las utilidades esperadas bajo cada estrategia.
3. Se utiliza el hecho de que la primera estrategia es al menos tan buena como la segunda y se hace tender h a cero.

En efecto:

- Bajo la primer estrategia ya que \hat{u} es el control óptimo se tiene que $\mathcal{J}(t, x, \hat{u}) = V(t, x)$.
- Bajo la segunda se divide el intervalo $[t, T]$ en dos subintervalos: $[t, t+h]$ y $(t+h, T]$.
 - Para $[t, t+h]$ la utilidad esperada es:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, u_s) ds \right].$$

- Al inicio del intervalo $[t + h, T]$, el estado estará en X_{t+h}^u y como en $[t + h, T]$ se utilizará la estrategia óptima, la utilidad esperada será $V(t + h, X_{t+h}^u)$, así, la utilidad esperada sobre $[t + h, T]$ dado que en el tiempo t el estado estaba en x es:

$$\mathbb{E}_{t,x} [V(t + h, X_{t+h}^u)].$$

Por lo que la utilidad esperada total bajo la segunda estrategia es:

$$\mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, u_s) ds \right] + \mathbb{E}_{t,x} [V(t + h, X_{t+h}^u)].$$

Como la primera estrategia es mejor o igual que la segunda (ya que u es arbitrario y no necesariamente el óptimo), se tiene que:

$$V(t, x) \geq \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t+h} F(s, X_s^u, u_s) ds \right] + \mathbb{E}_{t,x} [V(t + h, X_{t+h}^u)]. \quad (2.13)$$

Nota: Se tiene la igualdad $\Leftrightarrow u = \hat{u}$.

Utilizando el lema de Itô n-dimensional³ se tiene que:

$$dV(t + h, X_{t+h}^u) = \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(t, X_t^u) + A^u V(t, X_t^u) \right\} dt + \nabla_x V(t, X_t^u) \sigma^u dW_t,$$

ó equivalentemente,

$$\begin{aligned} V(t + h, X_{t+h}^u) &= V(t, x) + \int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + A^u V(s, X_s^u) \right\} ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \nabla_x V(s, X_s^u) \sigma^u dW_s. \end{aligned}$$

³La fórmula de Itô se puede escribir utilizando el operador (2.4).

Aplicando esperanza a la ecuación anterior se tiene que⁴:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t,x}[V(t+h, X_{t+h}^u)] &= \mathbb{E}_{t,x} \left[V(t, x) + \int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + A^u V(s, X_s^u) \right\} ds \right] \\ &\quad + \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t+h} \nabla_x V(s, X_s^u) \sigma^u dW_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{t,x} \left[V(t, x) + \int_t^{t+h} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + A^u V(s, X_s^u) \right\} ds \right].\end{aligned}$$

Sustituyendo la expresión anterior en (2.13) y cancelando $V(t, x)$ se tiene:

$$0 \geq \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^{t+h} \left\{ F(s, X_s^u, u_s) + \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + A^u V(s, X_s^u) \right\} ds \right]. \quad (2.14)$$

Dividiendo ambos lados entre h , haciendo tender h a cero e intercambiando el límite con la esperanza⁵ se tiene que:

$$0 \geq \mathbb{E}_{t,x} \left[\frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \int_t^{t+h} \left\{ F(s, X_s^u, u_s) + \frac{\partial V}{\partial t}(s, X_s^u) + A^u V(s, X_s^u) \right\} ds \right].$$

Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo y el hecho de que $X_t = x$ se tiene que:

$$0 \geq F(t, x, u) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + A^u V(t, x).$$

Como (t, x) es fijo y arbitrario, la desigualdad anterior es válida para todo $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ teniéndose la igualdad solamente si $u = \hat{u}(t, x)$.

El desarrollo anterior ha “demostrado” el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 (Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman). *Si existe un control óptimo \hat{u} y $V \in C^{1,2}$ entonces:*

1. *V satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + A^u V(t, x)\} = 0,$$

con condición final $V(T, x) = \Phi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

⁴Véase el apéndice para la justificación de algunos pasos.

⁵Véase el apéndice.

2. Para cada $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ el supremo en la ecuación de H.J.B. se alcanza por $u = \hat{u}(t, x)$.

El teorema (2.3.1) es **una condición necesaria** pues lo que afirma es que si V es la función valor óptima y \hat{u} el control óptimo entonces V satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Pero resulta que dicha ecuación es también una **condición suficiente**, por lo que si una función H la satisface y existe una ley de control admisible g tal que para cada punto (t, x) se alcance el supremo cuando u sea igual a g entonces H es la función valor óptima y g el control óptimo.

A este resultado se le conoce como “Teorema de Verificación para la programación dinámica” y su enunciado es el siguiente:

Teorema 2.3.2 (Teorema de Verificación). *Supóngase que existen funciones $H(t, x)$ y $g(t, x)$ tales que:*

1. H resuelve la E.D.P. de H.J.B. y es suficientemente integrable.⁶
2. g es un control admisible.
3. Para cada (t, x) fijo el supremo de la expresión:

$$\sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + A^u H(t, x)\}$$

se alcanza cuando $u = g(t, x)$.

Entonces:

1. La función de valor óptima V para el problema de control está dada por $V(t, x) = H(t, x)$.
2. Existe un control óptimo \hat{u} y además $\hat{u}(t, x) = g(t, x)$.

Demostración:

Se demostrará que $H(t, x) = V(t, x)$ acotando a V por ambos lados por $H(t, x)$.

⁶En el sentido de que la integral estocástica que aparece tenga esperanza igual a cero, en este caso $\nabla_x H(s, X_s^u) \sigma^u(s, X_s^u) \in \mathcal{L}^2$ para todos los controles admisibles (Véase el apéndice para detalles).

- Por Demostrar: $H(t, x) \geq V(t, x)$.

Sea $u \in \mathcal{U}$ y (t, x) fijo, sea también el proceso X^u en $[t, T]$ solución de:

$$\begin{aligned} dX_s^u &= \mu(s, X_s^u)ds + \sigma^u(s, X_s^u)dW_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Por el Lema de Itô se tiene que:

$$\begin{aligned} H(T, X_T^u) &= H(t, x) + \int_t^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^u) + (A^u H)(s, X_s^u) \right\} ds \\ &\quad + \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^u) \sigma^u(s, X_s^u) dW_s. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como por hipótesis H satisface la ecuación de H.J.B. y u es arbitrario, se tiene que:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) + F(t, x) + A^u H(t, x) \leq 0,$$

de donde para cada s se cumple casi seguramente⁷ que

$$\frac{\partial H}{\partial t}(s, X_s^u) + (A^u H)(s, X_s^u) \leq -F(s, X_s^u).$$

Por lo tanto, despejando $H(t, x)$ de (2.15), utilizando la desigualdad anterior y el hecho de que $H(T, X_T^u) = \Phi(X_T^u)$ se tiene la siguiente desigualdad:

$$H(t, x) \geq \int_t^T F^u(s, X_s^u) ds + \Phi(X_T^u) - \int_t^T \nabla_x H(s, X_s^u) \sigma^u dW_s.$$

Tomando esperanza de ambos lados de la desigualdad y suponiendo suficiente integrabilidad:

⁷La sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots **converge casi seguramente a** X si

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x}[H(t,x)] &= H(t,x) \geq \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T F^u(s, X_s^u) ds + \Phi(X_T^u) \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \nabla_x H(s, X_s^u) \sigma^u dW_s \right] \\
&= \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T F^u(s, X_s^u) ds + \Phi(X_T^u) \right] \\
&= \mathcal{J}(t, x, u).
\end{aligned}$$

Por lo que

$$H(t, x) \geq \mathcal{J}(t, x, u).$$

Y como u es arbitrario, $\sup_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, u) = V(t, x)$ y el supremo es la mínima cota superior, entonces:

$$H(t, x) \geq V(t, x).$$

- Por Demostrar: $H(t, x) \leq V(t, x)$.

Sea $u(t, x) = g(t, x)$, por la hipótesis tres:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, x) + F^g(t, x) + A^g H(t, x) = 0.$$

Análogamente al proceso anterior (pero ahora con igualdad en vez de desigualdad) y considerando que:

$$\mathcal{J}(t, x, g) \leq \sup_{g \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(t, x, g) = V(t, x),$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t,x}[H(t,x)] &= H(t,x) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T F^g(s, X_s^g) ds + \Phi(X_T^g) \right] \\
&\quad - \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T \nabla_x H(s, X_s^g) \sigma^g dW_s \right] \\
&= \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T F^g(s, X_s^g) ds + \Phi(X_T^g) \right] \\
&= \mathcal{J}(t, x, g) \\
&\leq V(t, x).
\end{aligned}$$

Entonces $H(t, x) \leq V(t, x)$.

Juntando ambas desigualdades se llegó a que:

$$H(t, x) = \mathcal{J}(t, x, g) \leq V(t, x) \leq H(t, x).$$

Por lo tanto,

$$V(t, x) = H(t, x) = \mathcal{J}(t, x, g)$$

Lo que demuestra que $H = V$ y que g es el control óptimo.

Q.E.D.

¿Y cómo se utiliza la Ecuación Diferencial Parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman para resolver un problema de control óptimo?

2.4. Manejo de la ecuación de H.J.B.

Considérese el Problema de Control definido en 2.3.1 con su correspondiente ecuación de H.J.B.:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{u \in U} \{F(t, x, u) + A^u V(t, x)\} = 0 \\ V(T, x) = \Phi(x) \end{cases} \quad (2.16)$$

El proceso a seguir será el siguiente:

1. Considérese la ecuación de HJB como una E.D.P. para una V desconocida.
2. Fíjese un punto $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ y resuélvase el problema:

$$\max_{u \in U} [F(t, x, u) + A^u V(t, x)].$$

Nota: En el máximo la única variable es u , lo demás está dado.

3. La elección óptima de u , denotada como \hat{u} dependerá de la elección de t, x , de V y sus derivadas por lo que se escribe a \hat{u} como:

$$\hat{u} = \hat{u}(t, x; V). \quad (2.17)$$

Dicha función será el candidato para ser el control óptimo, el único problema es que todavía no se cuenta con la descripción completa de V la cual es necesaria para obtener \hat{u} .

4. Para encontrar la descripción completa de V es necesario sustituir (2.17) en (2.16) para obtener:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \{F^{\hat{u}}(t, x, u) + A^{\hat{u}}V(t, x)\} = 0 \\ V(T, x) = \Phi(x) \end{cases} \quad (2.18)$$

5. RESOLVER la ecuación diferencial parcial anterior (SI ES POSIBLE), para después sustituirla en (2.17) y así contar con la descripción completa de \hat{u} .
6. Utilizar el Teorema de Verificación para garantizar que V es la función valor óptima y que \hat{u} es el control óptimo.

Capítulo 3

Diferencias Finitas

La ecuación de Black-Scholes se puede transformar en la ecuación de calor y resolver de manera explícita, el problema es que para llegar a esa ecuación es necesario hacer suposiciones que no se cumplen totalmente en la realidad.

En los últimos años se han escrito numerosas variantes de Black-Scholes con hipótesis más realistas pero resultan ecuaciones parciales parabólicas que ya no se pueden resolver explícitamente. Para muchos de estos casos la alternativa más viable es resolver las ecuaciones numéricamente acompañada de un análisis cualitativo.

De manera general el precio de un derivado se puede obtener al calcular el valor esperado (bajo una cierta medida de probabilidad) del valor presente del payoff del mismo. Este tipo de valuación es el resultado de métodos probabilísticos.

Como se estudió anteriormente, es también posible obtener el precio de un derivado resolviendo una ecuación diferencial parcial sujeta a ciertas condiciones de frontera y a una condición inicial o final. Si la ecuación es del tipo forward (como la de calor) es necesaria una condición inicial y se resuelve hacia adelante en el tiempo, si es del tipo backward (como la de Black-Scholes) se necesita una condición final y se resuelve hacia atrás en el tiempo, lo anterior es necesario para que el problema esté bien planteado.

La conexión entre ambos enfoques (diferencial y probabilístico) es el Teorema de Feynman-Kac.¹

Un método numérico muy utilizado para resolver ecuaciones diferenciales es el de diferencias finitas el cual en pocas palabras consiste en discretizar

¹Véase [3].

el dominio (definir una malla) así como la ecuación diferencial sustituyendo las derivadas por cocientes diferenciales obtenidos del desarrollo de la serie de Taylor, este método convierte a la ecuación diferencial en una ecuación algebraica.

A continuación se explicarán brevemente tres esquemas comunes, todo el desarrollo será alrededor de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Se elige la ecuación (3.1) pues la ecuación de Black-Scholes se puede transformar en ella y además simplifica los cálculos.

La solución a la ecuación (3.1) es única si se complementa con:

- **Condiciones de frontera:** La solución $u(X^*, t)$ para todo tiempo en los extremos x^* de la barra.
- **Condición inicial:** Estado inicial de la temperatura en todo punto x de la barra.

Recuérdese que se tienen dos casos:

1. **Barra infinita:** No son necesarias condiciones de frontera, únicamente se impide que la temperatura crezca demasiado rápidamente.
2. **Barra finita:** Es necesario imponer condiciones de frontera para todo tiempo en los extremos de la barra.

3.1. Discretización del dominio y definición del mallado

Es necesario tener en cuenta la diferencia entre resolver analíticamente una ecuación y resolverla numéricamente; resolver (3.1) analíticamente implica conocer el valor de $u(x, t)$ para todo tiempo t y para todo punto espacial x , mientras que resolverla numéricamente significa conocer la solución “**a-proximada**” en **algunos** puntos del dominio de interés. Para poder calcular la solución es necesario definir una malla.

Lo primero que se tiene que hacer es acotar el dominio de la solución, considerándose $0 \leq t \leq T$ y $x_- \leq x \leq x_+$ en lugar de $-\infty \leq x \leq \infty$.

Al reducir el dominio espacial de infinito a finito se vuelve necesario formular condiciones de frontera en $x = x_-$ así como en $x = x_+$ para cualquier tiempo, de lo contrario no se podría garantizar la unicidad de la solución y el problema se convertiría en un problema mal planteado. Se deben elegir $x = x_-$ y $x = x_+$ lo suficientemente pequeño y grande (respectivamente) para no alterar la solución en la región de mayor interés.

Después de acotar el dominio se divide el eje espacial x en puntos equidistantes de tamaño Δx y el eje temporal t en puntos de tamaño Δt .

Dado lo anterior cada punto del mallado puede representarse como:

$$(i\Delta x, j\Delta t) \quad i = N^-, N^- + 1, \dots, N^+ - 1, N^+, \quad j = 0, 1, \dots, M - 1, M$$

y se calculará la solución únicamente en los puntos:

$$u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t).$$

Los puntos fuera del mallado se calcularán con interpolación.

3.2. Discretización de la ecuación diferencial

Recuérdese que si $u(x, t)$ es suficientemente diferenciable entonces el Teorema de Taylor concluye que:

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\Delta x + R_2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \quad (3.2)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\Delta x + R_2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \quad (3.3)$$

donde el residuo R_2 satisface que:

$$|R_2| \leq \max_{x \leq \xi \leq x + \Delta x} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, t) \right|.$$

De (3.2) se obtiene la **diferencia hacia adelante**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} + R_2 \frac{\Delta x}{2!} \quad (3.4)$$

De (3.3) se obtiene la **diferencia hacia atrás**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + R_2 \frac{\Delta x}{2!} \quad (3.5)$$

En ambos casos para Δx pequeño el término $R_2 \frac{\Delta x}{2!}$ es despreciable y se denota $O(\Delta x)$, lo que significa que el error en las aproximaciones tiende a cero linealmente cuando Δx tiende a cero.

Si se considera un término más en (3.2) y (3.3) y se restan ambos desarrollos se obtiene la **diferencia central**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (3.6)$$

donde el error en la aproximación tiende a cero como $(\Delta x)^2$.

Para obtener una aproximación a la segunda derivada es posible desarrollar $u(x + \Delta x, t)$ $u(x - \Delta x, t)$ hasta el tercer orden y sumar ambos desarrollos, llegando así a la expresión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2). \quad (3.7)$$

Con las discretizaciones anteriores será posible convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas y dependiendo del tipo de diferencias elegida (diferencias hacia adelante, hacia atrás o centrales) será el esquema de solución obtenido.

3.3. Esquemas de solución

3.3.1. Esquema explícito

Si se utilizan las diferencias hacia adelante² para la derivada temporal t y las centrales para la derivada espacial x , entonces, para un punto (x_i, t_j) la ecuación (3.1) se escribe como:

²Las diferencias centrales para el tiempo no se utilizan debido a que conducen a malos esquemas numéricos para la ecuación de calor, véase [18].

$$\frac{u(x_i, t_j + \Delta t) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

Si se desprecian los términos $O(\Delta t)$, $O((\Delta x)^2)$ y se denota como V_i^j a la solución aproximada de (3.1) se tiene:

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta t} = \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{(\Delta x)^2},$$

despejando de la expresión anterior el término V_i^{j+1} se tiene:

$$V_i^{j+1} = V_i^j + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j),$$

y denotando $\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$,

$$V_i^{j+1} = V_i^j + \alpha (V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j). \quad (3.8)$$

Es decir, la solución en el punto $(i, j + 1)$ depende únicamente de los puntos del estado anterior (x_{i+1}, t_j) , (x_i, t_j) y (x_{i-1}, t_j) .

Con la ecuación anterior es posible calcular la solución aproximada al problema si se conoce la solución para un instante inicial y para las fronteras $i = N^-$ e $i = N^+$.

$$\begin{aligned} V_i^0 &= u_0(i\Delta x) \quad \text{para } N^- \leq i \leq N^+, \\ V_{N^-}^j &= f(j\Delta t) \quad \text{para } 0 \leq j \leq M, \\ V_{N^+}^j &= g(j\Delta t) \quad \text{para } 0 \leq j \leq M. \end{aligned}$$

Algoritmo para el método explícito

1. Se conoce la solución para el tiempo $j = 0$ (condiciones iniciales).
2. Se calcula la solución para el tiempo $j = 1$ para todos los puntos interiores de la malla con la fórmula:

$$V_i^{j+1} = \alpha V_{i+1}^j + (1 - 2\alpha)V_i^j + \alpha V_{i-1}^j.$$

3. Se iteran los pasos 1,2 desde $j = 2$ hasta $j = M$.

3.3.2. Esquema implícito

Utilizando ahora las diferencias hacia atrás para la derivada temporal y las diferencias centrales para la derivada espacial, la ecuación (3.1) se transforma en:

$$\frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{\Delta t} = \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{(\Delta x)^2},$$

recorriendo el índice temporal se tiene:

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta t} = \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Manipulando la expresión y denotando nuevamente $\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ se llega a la expresión:

$$-\alpha V_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\alpha)V_i^{j+1} - \alpha V_{i-1}^{j+1} = V_i^j \quad (3.9)$$

Por lo que la solución en un punto depende implícitamente de la solución en otros puntos en el mismo instante, lo que vuelve necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 + 2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 + 2\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + 2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{N-+1}^{j+1} \\ v_{N-+2}^{j+1} \\ v_{N-+3}^{j+1} \\ \vdots \\ v_{N+ -2}^{j+1} \\ v_{N+ -1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{N-+1}^j \\ v_{N-+2}^j \\ v_{N-+3}^j \\ \vdots \\ v_{N+ -2}^j \\ v_{N+ -1}^j \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_{N-}^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{N+}^{j+1} \end{pmatrix}$$

Para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones de forma eficiente existen métodos del álgebra lineal como el **LU**, el cual consiste en factorizar una matriz M en dos matrices, una triangular inferior L y la otra triangular superior U . La obtención del vector solución x para $Ax = b$ se esquematiza como sigue:

$$\begin{aligned}
 Mx &= b, & \text{como } M &= LU, \\
 LUx &= b, & \text{sea } y &= Ux, & \text{entonces,} \\
 Ly &= b & \text{el cual se resuelve con sustitución hacia adelante.} \\
 Ux &= y & \text{el cual se resuelve con sustitución hacia atrás.}
 \end{aligned}$$

Algoritmo para el método implícito

1. Se conoce la solución para $j = 0$ (condiciones iniciales).
2. Se conoce la solución para $j = 1$ en los extremos de la malla (condiciones de frontera).
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones tridiagonal anterior para obtener la solución en el resto de los puntos interiores de $j = 1$.
4. Se iteran los pasos 1,2,3, desde $j = 2$ hasta $j = M$.

3.3.3. Esquema semi-implícito

Este esquema de solución es obtenido de una combinación lineal convexa de los esquemas explícito e implícito, i.e.,

$$\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\Delta t} = \Theta \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + (1 - \Theta) \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2}.$$

- Si $\Theta = 0$ se obtiene el esquema implícito.
- Si $\Theta = 1$ se obtiene el esquema explícito.
- Si $\Theta = \frac{1}{2}$ se obtiene el esquema Crank-Nicolson.

Como el método Crank-Nicolson es una combinación de los métodos anteriores implica la resolución de un sistema de ecuaciones.

3.4. Convergencia, consistencia y estabilidad

La **Convergencia** se refiere a que la solución del problema aproximado tiende a la solución del problema original. Para que se tenga convergencia de la solución aproximada a la solución verdadera de la ecuación diferencial parcial cuando los tamaños de paso en el espacio y en el tiempo tiendan a cero, son necesarias dos condiciones:

1. **Consistencia:** El error local por truncamiento del modelo tiende a cero cuando los tamaños de paso tienden a cero, i.e., el problema discretizado tiende al problema continuo correcto.
2. **Estabilidad:** El error global está acotado por alguna constante que multiplica al error local.

El **Teorema de Equivalencia de Lax** afirma que si se tiene consistencia y estabilidad entonces se tiene convergencia.

El problema de la estabilidad surge al utilizar una aritmética finita (como es el caso de utilizar software computacional) la cual introduce errores por redondeo.

En el caso del esquema explícito se puede probar lo siguiente:

- El método será estable si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.
- El método será inestable si $\alpha > \frac{1}{2}$.

La condición anterior se traduce en:

$$0 < \alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

Es decir, impone restricciones al tamaño del paso del tiempo. Imagínese que se refina la malla espacial dividiendo el tamaño de paso en el espacio entre dos (pensando en aumentar la exactitud), para cumplir la condición de estabilidad sería necesario dividir el paso en el tiempo entre cuatro. Cada paso en el tiempo tarda el doble y como hay cuatro veces más pasos en el tiempo significa que encontrar la solución requiere ocho veces más tiempo.

La restricción sobre α ya no es necesaria para el método implícito, lo que significa que se puede aumentar el número de puntos en la malla espacial sin ser necesario tomar pasos en el tiempo ridículamente pequeños. Aunque en

el caso de los métodos implícitos es necesario resolver sistemas de ecuaciones, el uso de métodos como el LU ayuda bastante, y además como el método implícito permites tomar menos puntos en el tiempo suelen ser más eficientes que los explícitos.

Como el método implícito es estable para cualquier valor positivo de α se dice que el método es incondicionalmente estable y también es consistente, el método implícito es incondicionalmente convergente.³

3.5. Fipy, un módulo de Python para parciales

El método de diferencias finitas se puede programar en cualquier lenguaje. Los paquetes matemáticos comerciales cuentan con módulos de solución de parciales con dicho método. Sin embargo se decidió usar software libre y un lenguaje amigable: Python.

3.5.1. Python

Python es un lenguaje de programación de alto nivel, una de sus principales ideas es que se logren hacer programas cuya sintaxis sea limpia para poder conseguir un código legible. Es multiplataforma, de código abierto y libre aún para uso comercial. Python soporta varios tipos de programación y se puede comunicar con otros lenguajes como C o Java.

Más información sobre Python (su historia, ejemplos, desarrolladores, etcétera) puede encontrarse en www.wikipedia.com o en la página oficial www.python.org.

3.5.2. Fipy

Fipy es un módulo escrito en Python y está hecho para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales, fue desarrollado en el “National Institute of Standards and Technology”.

Fipy utiliza el método de volúmenes finitos para resolver las ecuaciones o sistemas acoplados de parciales. En una dimensión espacial y coordenadas cartesianas el método de volúmenes finitos se reduce al de diferencias finitas.

³Para demostraciones y una explicación más detallada véase [18].

Una buena manera de empezar a trabajar con Fipy es responder las siguientes preguntas⁴:

- ¿Qué variables son necesarias?
- ¿En qué dominio se está trabajando?
- ¿Cuáles son las condiciones iniciales?
- ¿Cuáles son las condiciones de frontera?
- ¿Cuál es la ecuación?

Claro está que el primer paso es llamar el paquete Fipy y el último resolver la ecuación numéricamente.

Se debe tener en cuenta que la ecuación genérica que Fipy resuelve es:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \nabla \cdot (\vec{u}\phi) + [\nabla \cdot (\Gamma_i \nabla)]^n \phi + S_\phi. \quad (3.11)$$

Donde:

- $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$ es el término transitorio con coeficiente ρ .
- $\nabla \cdot (\vec{u}\phi)$ es el término convectivo con coeficiente \vec{u} .
- $[\nabla \cdot (\Gamma_i \nabla)]^n \phi$ es el término difusivo con coeficiente Γ_i .
- S_ϕ es el término fuente (todo lo que no se pueda expresar en los anteriores).

Por lo que al querer resolver alguna ecuación debe revisarse que no sobren o falten términos que se deriven de la aplicación de los operadores que aparecen en la ecuación (3.11).

Para el caso del presente trabajo, las ecuaciones que se tienen que resolver son de la forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + C \frac{\partial\phi}{\partial x} + S\phi, \quad (3.12)$$

⁴Idea del Prof. Daniel J. Lewis, Rensselaer Polytechnic Institute en la página <http://www.matforge.org/fipy/wiki/FiPyWorkbook>.

con coeficientes difusivo y convectivo $D = D(x)$, $C = C(x)$ respectivamente, para Fipy es necesario escribirlas de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (P\phi_x) + \frac{\partial}{\partial x} (Q\phi) + R\phi. \quad (3.13)$$

Es decir, se buscan coeficientes P, Q, R dependientes de x tales que al sustituirlos en (3.13) se obtenga (3.12). Para encontrarlos se deriva (3.13) y se agrupan sus términos:

$$\begin{aligned} \phi_t &= P_x\phi_x + P\phi_{xx} + Q_x\phi + Q\phi_x + R\phi \\ &= P\phi_{xx} + (P_x + Q)\phi_x + (Q_x + R)\phi \end{aligned}$$

y comparando los coeficientes de con los de la ecuación (3.12) se tiene lo siguiente:

$$P = D, \quad (3.14)$$

$$Q = C - P_x = C - D_x, \quad (3.15)$$

$$R = S - Q_x = S - (C_x - D_{xx}) = S - C_x + D_{xx}. \quad (3.16)$$

Capítulo 4

Soluciones Numéricas

4.1. Solución numérica de Black-Scholes

En primer lugar se presenta la solución numérica de la ecuación de Black-Scholes para una opción Call europea sin hacer cambios de variables, es decir se resuelve la ecuación:

$$\begin{cases} rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2s^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 & \text{para } 0 < s < \infty, \quad 0 \leq t < T, \\ V(s, T) = (s - K)_+ & \text{para } 0 < s < \infty, \\ V(0, t) = 0 & \text{para } 0 \leq t < T \\ , V(s, t) \approx s & \text{para } 0 \leq t < T, \quad s \rightarrow \infty, \end{cases}$$

y siguiendo (3.14), (3.15) y (3.16), los coeficientes para Fipy son:

$$P = \frac{1}{2}\sigma^2s^2, \quad Q = (r - \sigma^2)s, \quad R = \sigma^2 - 2r.$$

El “infinito” para la condición de frontera derecha se fija en $s = 3 * K$ ya que si se toman valores más grandes la solución no cambia de manera significativa.

En Fipy la ecuación se declara de la siguiente manera:

```
eqn=TransientTerm()+VanLeerConvectionTerm(coeff=Q)+  
DiffusionTerm(coeff=P)+ImplicitSourceTerm(coeff=R)
```

Todas las ecuaciones se resuelven con el método de diferencias finitas implícito.

Para los parámetros: $r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $K = 100$, $T = 365$ (días) y $S_0 = 95$ los resultados son los siguientes:

- Solución exacta: 9.8628.
- Solución numérica: 9.86062339.

La gráfica de la solución de la ecuación es:

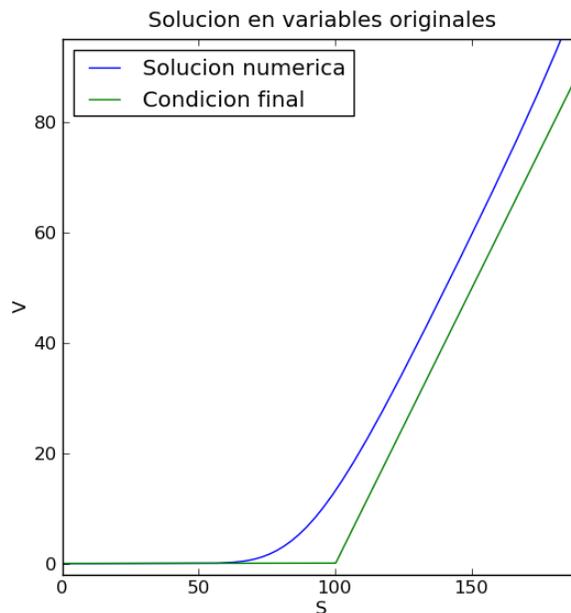


Figura 4.1: Precios Call europea con Black-Scholes Lineal

4.2. Y más allá...

Las ecuaciones no lineales de Black-Scholes han sido bastante estudiadas en los últimos tiempos pues a diferencia de la ecuación lineal surgen de modelos con supuestos más realistas (costos de transacción, preferencias respecto al riesgo, mercados con falta de liquidez, etcétera) y por ende proporcionan resultados más precisos.

La relajación de las hipótesis impacta en el precio del subyacente, su volatilidad, su tendencia y por supuesto en el precio de las opciones.

Generalmente las ecuaciones obtenidas son parabólicas no lineales, del tipo convección-difusión y posiblemente degeneradas donde la tendencia μ y la volatilidad σ pueden depender del tiempo, del subyacente así como de las derivadas del precio de la opción.

Para el caso del presente trabajo se revisaron varios modelos, poniendo énfasis en aquellos donde se introducen costos de transacción proporcionales (cada compra o venta del activo subyacente resultante de los rebalances del portafolio de réplica implica una comisión que es proporcional al monto operado). En dichos modelos se llega a la siguiente ecuación no lineal con tendencia μ constante y con volatilidad no constante $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(t, s, V_s, V_{ss})$:

$$rs \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(t, s, V_s, V_{ss}) s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 \quad (4.1)$$

donde: $s > 0, t \in (0, T)$ y $\tilde{\sigma}$ dependiendo del modelo propuesto.

Recuérdese que el modelo original de Black-Scholes requiere un rebalanceo **continuo** del portafolio para cubrir la posición (eliminar el riesgo), cuando existen costos de transacción dicho rebalanceo se vuelve excesivamente caro ya que son necesarias “infinitas” transacciones.

Por lo anterior se ha buscado debilitar la condición de cobertura prefiriéndose sobrerreplicar el payoff de la opción.

Se han propuesto varias maneras de relajar la cobertura:

En [12] Leland propone un modelo que permite hacer los rebalances únicamente en tiempos discretos.

Bajo argumentos de cobertura delta deduce una ecuación de Black-Scholes no lineal como (4.1) con volatilidad no constante:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \left[1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \text{sign}(V_{ss}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Donde:

- Δt es el intervalo entre transacciones.
- μ es el costo proporcional de transacción.

- σ es la volatilidad original.

Al término $Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ le llama **Número de Leland**.

Como para el caso de las opciones Call y Put europeas la función V es convexa¹ ($\Gamma = V_{ss} > 0$) en ausencia de costos de transacción, se asume el mismo comportamiento para el caso en el que sí existen, obteniéndose:

$$\tilde{\sigma} = \sigma [1 + Le]^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

lo que reduce la ecuación (4.1) al caso lineal pero con una volatilidad aumentada ya que $\tilde{\sigma} = \sigma [1 + Le]^{\frac{1}{2}} > \sigma$.

Como se explicó en la sección 1.5 es posible hacer cambios de variables para transformar (4.1) en una ecuación parabólica del tipo forward, siguiendo [1] se proponen:

$$x = \ln(S/K), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad u(x, \tau) = e^{-x} \frac{V(S, t)}{K}.$$

Considerando $D = \frac{2r}{\sigma^2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} u_\tau - \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} u_{xx} - \left(D + \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) u_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq \tau < \frac{\sigma^2 T}{2}, \\ u(x, 0) = (1 - e^{-x})_+, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, \tau) = 0 & x \rightarrow -\infty, \\ u(x, \tau) \approx 1 - e^{-D\tau - x} & x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.4)$$

La condición de frontera derecha tiene un término exponencial que para x grandes tiende a cero, por lo que para el análisis numérico se considerará que cuando $x \rightarrow \infty$, $u(x, \tau) \approx 1$.

Bajo este cambio de variables y tomando $\tilde{\sigma} = \sigma$ se obtiene el modelo de Black-Scholes clásico con la ventaja de que se obtiene una ecuación lineal

¹Véase la tabla (1.1).

parabólica de tipo convección-difusión y con coeficientes constantes, lo que ahorra cálculos para implementarla en Fipy ya que no es necesario calcular nuevos coeficientes para los términos convectivo y difusivo.

Para los mismos parámetros ($r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $K = 100$, $T = 365$ (días) y $S_0 = 95$) la solución obtenida es: 9.87404100084, véase la figura 4.2.

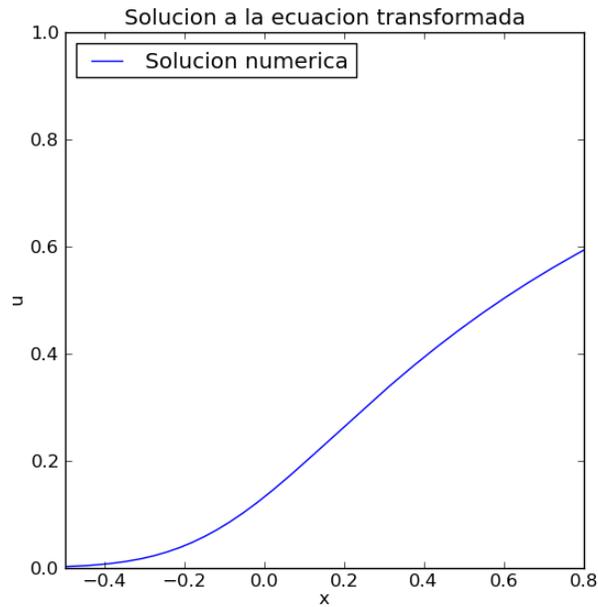


Figura 4.2: Precios Call europea con Black-Scholes lineal transformado.

Considerando el modelo de Leland con rebalanceo semanal y mensual y costos de transacción proporcionales del 0.25% se obtienen los siguientes resultados:

Δt	Precio Call	$\tilde{\sigma}$
Mensual	9.9843	0.2034
Semanal	10.1131	0.2070

Cuadro 4.1: Precios obtenidos con el modelo de Leland.

Otro enfoque totalmente diferente es el utilizado por Barles y Soner en [2], en su análisis introducen las preferencias respecto al riesgo y utilizan un enfoque de valuación basado en funciones de utilidad exponencial tal como lo hacen Hodges y Neuberger en [9].

Utilizan la función de utilidad exponencial:

$$U^\epsilon(\xi) = 1 - e^{-\frac{\xi}{\epsilon}} \quad \epsilon > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.5)$$

donde $\frac{1}{\epsilon}$ representa al producto del factor de aversión al riesgo con el número de opciones a vender.

Definen:

- μ costo de transacción proporcional.
- s precio del subyacente.
- $V^{\epsilon, \mu}(s, t)$ el precio de la opción con función de utilidad $U^\epsilon(\xi)$.
- $a = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon}}$

Al estudiar el comportamiento de $V^{\epsilon, \mu}(s, t)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$, en [2] Barles y Soner demuestran utilizando la teoría de control óptimo estocástico que V es la única solución (en el sentido de viscosidad) a (4.1) con volatilidad no constante:

$$\tilde{\sigma} = \sigma [1 + \Psi (e^{r(T-t)} a^2 s^2 V_{ss})]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

donde $\Psi(x)$ es la solución a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\begin{cases} \Psi'(x) &= \frac{\Psi(x)+1}{2\sqrt{x\Psi(x)-x}}, & x \neq 0, \\ \Psi(0) &= 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Barles y Soner analizan la solución de (4.7) obteniendo que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) = -1. \quad (4.8)$$

Por lo que para argumentos grandes $\Psi(x)$ se puede considerar como la identidad (figura 4.3) teniéndose así que la volatilidad para este modelo es:

$$\tilde{\sigma} = \sigma [1 + e^{r(T-t)} a^2 s^2 V_{ss}]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

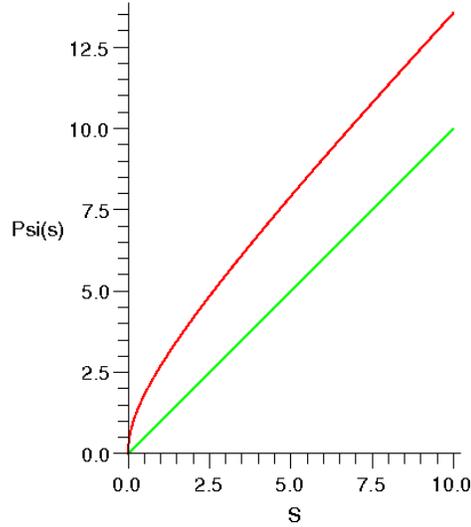


Figura 4.3: En rojo se muestra la solución de (4.7) y en verde la función identidad.

Si se escribe la ecuación (4.1) con la volatilidad (4.9) en forma conservativa (como Fipy la entiende) se obtiene una expresión bastante complicada, razón por la cual se decidió resolver la ecuación transformada (4.4) con su correspondiente volatilidad transformada:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \left[1 + e^{\frac{2r\tau}{\sigma^2}} a^2 K e^x (u_{xx} + u_x) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Los coeficientes para Fipy nuevamente son (3.14), (3.15) y (3.16); las derivadas de los coeficientes Q y R se calcularon numéricamente.

Resolver numéricamente la ecuación es complicado:

- La condición inicial $u(x, 0) = (1 - e^{-x})_+$ no es diferenciable.
- Se presentaron inestabilidades numéricas en los puntos cercanos a la frontera derecha que causaban errores grandes en el término $u_{xx} + u_x$.

Se optó por linearizar el problema resolviendo de manera simultánea ambas ecuaciones y cambiando $u_{xx} + u_x$ en la expresión (4.10) por $v_{xx} + v_x$,

donde $v(x, \tau)$ es la solución al problema lineal.

Esta aproximación al problema original es razonable ya que el cociente $\frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2}$ calculado con el problema no lineal difiere muy poco del calculado con el problema linearizado.

Para los mismos parámetros ($r = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $K = 100$, $T = 365$ (días), $S_0 = 95$ y $a = 0.02$) la solución obtenida es: 10.0768891802. (Véase la figura 4.4).

La figura 4.5 muestra de manera comparativa las soluciones en las variables originales S y V de los distintos modelos. Nótese que los precios más alto se obtienen con el modelo de Leland con rebalanceos semanales, seguido del modelo de Barles-Soner, Leland con rebalanceos mensuales y los precio más bajos se obtienen con el modelo lineal.

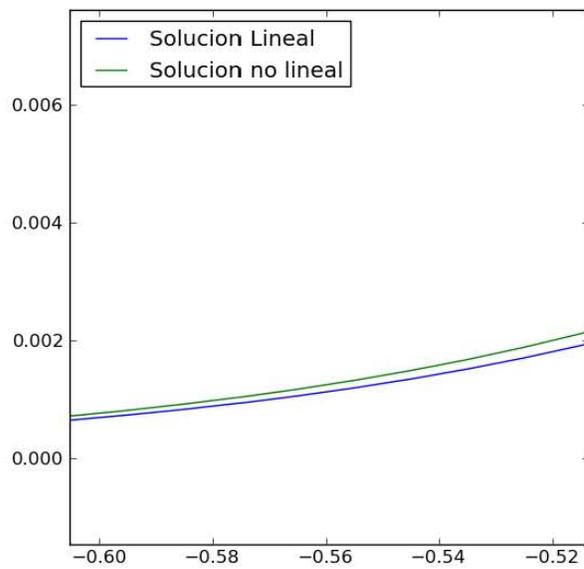
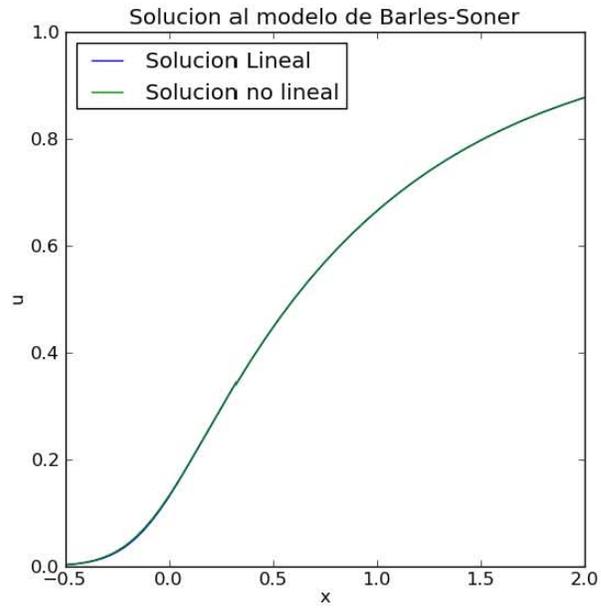


Figura 4.4: Comparación de las soluciones del modelo de BS lineal y el modelo de Soner (no lineal).

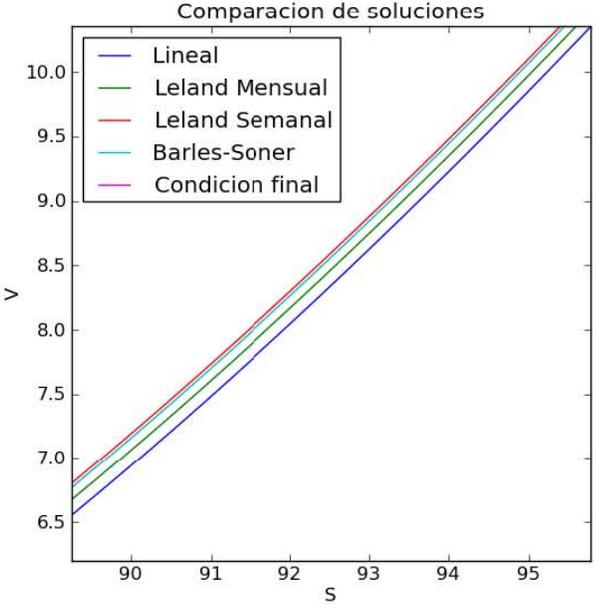
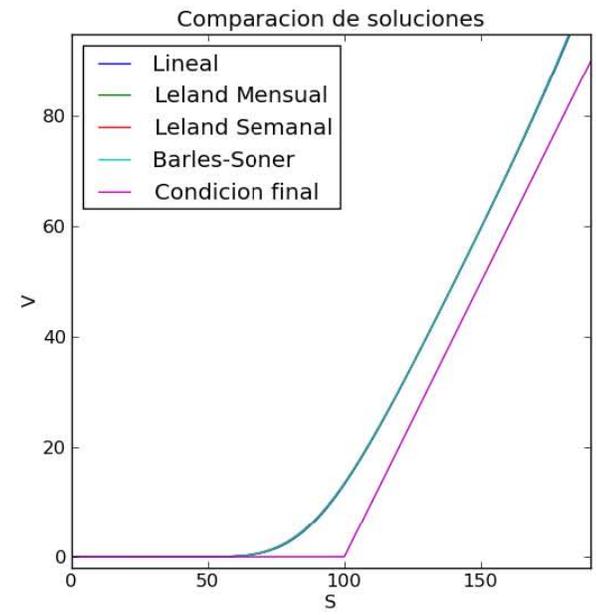


Figura 4.5: Comparación de las soluciones obtenidas por los distintos modelos.

Conclusiones

Es importante resaltar que casi ninguna (por no decir ninguna) de las hipótesis del modelo original de Black Scholes son realistas:

- Las acciones se negocian por lotes (no por unidad y mucho menos por fracciones).
- El trading no es continuo.
- La tasa de interés libre de riesgo r , la tasa promedio de retorno del subyacente μ y la volatilidad σ no son constantes.
- La tasa de interés a la cual se presta dinero es diferente a la que se pide prestado.
- Existe la información privilegiada (lo que significa que no todo el mercado tiene acceso inmediato a la información).
- Existen costos de transacción (cada compra y venta de acciones implica una comisión más un impuesto).

Aún siendo un modelo sumamente simplificado, los conceptos y técnicas matemáticas que respaldan al modelo original de Black-Scholes son bastante complicados.

En la práctica el precio de Black-Scholes es utilizado como referencia ya que los precios están regidos por las leyes de la oferta y la demanda. La forma en que algunas instituciones hacen coberturas de opciones, es eliminar su posición (larga o corta) tomando una posición contraria (corta o larga), obteniendo su ganancia en la diferencia de precios entre esas operaciones.

Ha habido varios intentos de debilitar las hipótesis del modelo original; uno de los problemas de dichos intentos es que las ecuaciones resultantes dejan de ser equivalentes a la ecuación de calor, muchas veces son no lineales y en la mayoría de los casos no se pueden resolver de manera analítica.

En este trabajo se hizo mención de los modelos propuestos por Leland y por Barles-Soner. El de Leland es equivalente al modelo clásico pero con una volatilidad aumentada. Para el modelo de Barles-Soner se resolvió una aproximación que concuerda con los datos reportados en la literatura.

En ambos casos se obtiene una ecuación en la cual el término de volatilidad no es constante. Para el modelo de Leland depende de los costos de transacción así como de la segunda derivada del valor de la opción y para el de Barles-Soner depende del tiempo, espacio, costos de transacción, preferencias respecto al riesgo y de la segunda derivada del valor de la opción. En ambos modelos se confirma que al suponer hipótesis más realistas la volatilidad deja de ser constante.

Aún utilizando un software numérico potente y especializado en resolver ecuaciones, el análisis numérico de problemas no lineales no es trivial. El mayor logro del presente trabajo es que se pudo aproximar la solución de la ecuación no lineal propuesta por Barles y Soner, mostrando con su solución que los costos de transacción elevan de manera “considerable” el precio de las opciones.

Por último se menciona que no existía un programa implementado en Fipy que resolviera la ecuación de Black-Scholes, por lo que se mandó una versión en inglés de dicho programa para que, en caso de ser aprobado, se anexara a los ejemplos del paquete.

Apéndice A

A.1. Cálculo estocástico

En esta sección se dará una idea intuitiva del concepto de integral estocástica así como algunas de sus propiedades que se utilizaron en el desarrollo del presente trabajo.

Sea X un proceso estocástico, se quiere “definir” (de manera no rigurosa)¹ el significado de “la información generada por X al transcurrir el tiempo”.

La **información o historia generada por X en el intervalo $[0, t]$** será denotada por \mathcal{F}_t^X haciendo tres distinciones:

1. Si se puede determinar si ha ocurrido o no un evento A , basándose en las observaciones de la trayectoria $\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$ entonces se dice que A es **\mathcal{F}_t^X -medible** y se escribe $A \in \mathcal{F}_t^X$.
2. Si Y es variable aleatoria y su valor puede determinarse completamente dadas las observaciones de la trayectoria $\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$ entonces también se escribe $Y \in \mathcal{F}_t^X$.
3. Si Z es un proceso estocástico tal que $Y(t) \in \mathcal{F}_t^X$ para toda $t \geq 0$ entonces se dice que Y es **adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$** .

Definición A.1.1. Sea W un movimiento Browniano estándar.

- Se dice que **el proceso g pertenece a la clase $\mathcal{L}^2[a, b]$** si:

¹Para definiciones más formales o rigurosas véase [3] o bibliografía sobre teoría de la medida.

1. $\int_a^b \mathbb{E}[g^2(s)]ds < \infty$.
 2. g es adaptado a la filtración \mathcal{F}_t^W .
- Se dice que **el proceso g pertenece a la clase \mathcal{L}^2** si $g \in \mathcal{L}^2[0, t)$ para toda $t > 0$.

Se busca dar sentido a la integral estocástica $\int_a^b g(s)dW_s$ para $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$.

- Supóngase que $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$ y g es **simple**, es decir, que existen puntos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tales que g es constante en cada subintervalo, i.e., $g(s) = g(t_k)$ para $s \in [t_k, t_{k+1})$.

Se puede definir la integral estocástica como:

$$\int_a^b g(s)dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]. \quad (\text{A.1})$$

- Si g es más general se puede aproximar con una sucesión g_n de procesos simples tales que:

$$\int_a^b \mathbb{E}[\{g_n(s) - g(s)\}^2]ds \rightarrow 0.$$

Así para cada n , $Z_n = \int_a^b g_n(s)dW(s)$ es una variable aleatoria (v.a.) bien definida y se puede probar que existe Z v.a. tal que $Z_n \rightarrow Z$ en \mathcal{L}^2 .

En dicho caso se define la integral estocástica como:

$$\int_a^b g(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(s) dW(s). \quad (\text{A.2})$$

Proposición A.1.1. *Sea g un proceso adaptado a la filtración \mathcal{F}_t^W tal que $\int_a^b \mathbb{E}[g^2(s)]ds < \infty$, entonces:*

1. $\mathbb{E} \left[\int_a^b g(s)dW(s) \right] = 0$.
2. $\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b g(s)dW(s) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b g^2(s) \right] ds$.

3. $\int_a^b g(s)dW(s)$ es \mathcal{F}_b^W medible.

Se demostrará el punto 1 de la proposición en el caso de g simple ya que es una propiedad que se ha utilizado mucho a lo largo del desarrollo.

Demostración:

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b g(s)dW(s) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)] \right].$$

Como g es adaptado a la filtración \mathcal{F}_t^W y el browniano tiene incrementos independientes se sigue que:

$$\mathbb{E}[g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]] = \mathbb{E}[g(t_k)]\mathbb{E}[W(t_{k+1}) - W(t_k)] = \mathbb{E}[g(t_k)] \cdot 0 = 0.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b g(s)dW(s) \right] = 0.$$

Q.E.D.

A.2. Martingalas

Antes de definir una martingala es necesario recordar un par de propiedades acerca de la esperanza condicional las cuales se resumen en la siguiente proposición:

Proposición A.2.1. Sean Y y Z dos variables aleatorias.

1. Si Z es medible respecto a \mathcal{F}_t (su valor se conoce en t) entonces $\mathbb{E}[ZY|\mathcal{F}_t] = Z\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$.
2. Si $s < t$ entonces $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_s]$.

Definición A.2.1 (Martingala). Un proceso estocástico X es una (\mathcal{F}_t) -martingala si se cumple que:

1. X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.
2. Para toda t , $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$.

3. Para toda s y t con $s \leq t$, $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$.

Proposición A.2.2. Si $g \in \mathcal{L}^2[s, t]$ entonces $\mathbb{E} \left[\int_s^t g(u)dW(u) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] = 0$.

Corolario A.2.1. Para cualquier proceso $g \in \mathcal{L}^2$, el proceso X tal que $X(t) = \int_0^t g(s)dW(s)$ es una (\mathcal{F}_t^W) -martingala.

Demostración: Por Demostrar: $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s^W] = X(s)$ para $s < t$.

Sea $s < t$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}_s^W] &= \mathbb{E} \left[\int_0^t g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^s g(\tau)dW(\tau) + \int_s^t g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^s g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] + \mathbb{E} \left[\int_s^t g(\tau)dW(\tau) \middle| \mathcal{F}_s^W \right] \\ &= \int_0^s g(\tau)dW(\tau) + 0 = X(s). \end{aligned}$$

Q.E.D.

A.3. Justificación del Lema de Itô

Dadas las interpretaciones y definiciones anteriores es posible dar una idea intuitiva de la justificación de los lemas (1.5.1) y (1.5.2).

Sea X un proceso estocástico y supóngase que existe un real a y dos procesos adaptados μ y σ tales que para todo $t \geq 0$,

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s),$$

de manera equivalente:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad \text{con } X(0) = a. \quad (\text{A.3})$$

En este caso se dice que X tiene una diferencial estocástica con condición inicial, la cual indica la dinámica que sigue el proceso.

Sean s, t dos puntos fijos en el tiempo con $s < t$, defínase $\Delta t = t - s$ y $\Delta W(t) = W(t) - W(s)$, nótese que $\Delta W(t) \sim N(0, t - s)$.

Dado lo anterior se tiene que $\mathbb{E}[\Delta W(t)] = 0$ y $Var[\Delta W(t)] = t - s = \Delta t$.

Además $Z = \frac{\Delta W - 0}{\sqrt{t-s}} \sim N(0, 1)$ y puede probarse que² $Z^2 \sim \chi_{(1)}^2$ con $\mathbb{E}[Z^2] = 1$ y $Var[Z^2] = 2$.

Multiplicando y dividiendo el argumento de la esperanza por $t - s$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\Delta W)^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{\Delta W - 0}{\sqrt{t-s}} \right)^2 (t-s) \right] \\ &= \mathbb{E}[Z^2(t-s)] \\ &= 1 \cdot (t-s) \\ &= \Delta t, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var[(\Delta W)^2] &= Var[Z^2(t-s)] \\ &= 2 \cdot (t-s)^2 \\ &= 2(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Lo anterior significa que la varianza de $(\Delta W)^2$ es despreciable respecto a su esperanza, i.e., si $\Delta t \rightarrow 0$ entonces $[\Delta W(t)]^2 \rightarrow 0$ y su varianza lo hace más rápidamente que su esperanza, así que es natural pensar que en el límite se cumple que:³

$$[dW(t)]^2 = dt. \tag{A.4}$$

A.3.1. Itô en una dimensión

Recuérdese que se tiene $f(t, X(t))$ con $f \in C^{1,2}$ y $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

²A la variable aleatoria denotada $\chi_{(n)}^2$ se le llama Chi cuadrada con n grados de libertad.

³Véase [14].

Haciendo la expansión en series de Taylor para f se tiene que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{\partial f}{\partial t \partial x} (dt dX) + o(h), \quad (\text{A.5})$$

considerando (A.3), (A.4), el hecho de que $(dt)^2$ es despreciable respecto a dt , $(dt)(dW)$ también lo es (se puede probar) y que también (A.4) se sigue que:

$$(dX)^2 = \mu^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma(dt)(dW) + \sigma^2 (dW)^2 = \sigma^2 dt. \quad (\text{A.6})$$

Sustituyendo lo anterior en la expansión (A.5) y relajando notación

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} (\mu dt + \sigma dW) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \mu \frac{\partial f}{\partial x} dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dW. \end{aligned}$$

A.3.2. Itô n-dimensional

Ahora se tiene X^T un vector columna n-dimensional de procesos tal que para cada entrada i :

$$dX_i(t) = \mu_i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t) dW_j(t), \quad (\text{A.7})$$

y sus respectivas matrices:

$$[W]_d^T \quad \text{con cada } W_i \text{ independiente}$$

$$[\mu]_n \quad [\sigma]_{n \times d}$$

Además $f(t, X(t))$ con $f \in C^{1,2}$ y $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Haciendo la expansión en series de Taylor para f y tomando su diferencial se tiene que:⁴

⁴Se utilizarán subíndices para las derivadas en vez del operador ∂ , así como $\sigma_i = [\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{id}]$.

$$\begin{aligned}
df &= f_t dt + \sum_{i=1}^n f_{X_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{X_i X_j} dX_i dX_j \\
&= f_t dt + \sum_{i=1}^n f_{X_i} \left(\mu_i dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij} dW_j \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{X_i X_j} \left(\mu_i dt + \sum_{k=1}^d \sigma_{ik} dW_k \right) \left(\mu_j dt + \sum_{l=1}^d \sigma_{jl} dW_l \right) \\
&= f_t dt + \sum_{i=1}^n \mu_i f_{X_i} \mu_i dt + \sum_{i=1}^n f_{X_i} \sigma_i dW \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{X_i X_j} \left(\mu_i dt + \sum_{k=1}^d \sigma_{ik} dW_k \right) \left(\mu_j dt + \sum_{l=1}^d \sigma_{jl} dW_l \right) \\
&= f_t dt + \sum_{i=1}^n \mu_i f_{X_i} \mu_i dt + \sum_{i=1}^n f_{X_i} \sigma_i dW \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{X_i X_j} \left(\sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d \sigma_{ik} \sigma_{jl} dW_k dW_l \right) \\
&= f_t dt + \sum_{i=1}^n \mu_i f_{X_i} \mu_i dt + \sum_{i=1}^n f_{X_i} \sigma_i dW \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{X_i X_j} \left(\sum_{k=1}^d \sigma_{ik} \sigma_{jk} \right) dt.
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho de que $dW_k dW_l = dt$ si $k = l$ y $dW_k dW_l = 0$ si $k \neq l$, pues las W_i son independientes.

Falta probar que $\sum_{k=1}^d \sigma_{ik} \sigma_{jk} = C_{ij}$ con $C = \sigma \sigma^T$:

$$C = \sigma \sigma^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{n1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1d} & \sigma_{2d} & \cdots & \sigma_{nd} \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^d \sigma_{1k}\sigma_{1k} & \sum_{k=1}^d \sigma_{1k}\sigma_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^d \sigma_{1k}\sigma_{nk} \\ \sum_{k=1}^d \sigma_{2k}\sigma_{1k} & \sum_{k=1}^d \sigma_{2k}\sigma_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^d \sigma_{2k}\sigma_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^d \sigma_{nk}\sigma_{1k} & \sum_{k=1}^d \sigma_{nk}\sigma_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^d \sigma_{nk}\sigma_{nk} \end{bmatrix}$$

juntando lo anterior se tiene que

$$df = \left(f_t + \sum_{i=1}^n \mu_i f_{X_i} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} f_{X_i X_j} \right) dt + \sum_{i=1}^n f_{X_i} \sigma_i dW.$$

Que es lo que se quería probar.

A.4. Nota sobre convergencia

Teorema A.4.1 (Teorema de convergencia dominada). *Sean X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias para la cual existe otra variable Y integrable tal que $|X_n| \leq Y$, para $n \geq 1$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ c.s., entonces X y X_n son integrables y además*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X). \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

B.1. Código para generar un Movimiento Browniano Estándar

```
1  # -*- coding: cp1252 -*-
2  #Algoritmo para simular trayectorias de un Movimiento
   Browniano Estándar.
3
4  from numpy.random import standard_normal
5  from numpy import array, zeros, sqrt
6  from pylab import *
7
8  Z0 = 0
9
10 #Tiempo final:
11 T = input('Introduce el valor del tiempo final= ')
12 #Tamaño de paso en el tiempo:
13 dt =input('Introduce el valor del paso temporal= ')
14 #Número de trayectorias:
15 N = input('Introduce el número de trayectorias a simular= '
   )
16 #Número de pasos:
17 Pasos=round(T/dt);
18
19 Z = zeros([N, Pasos], dtype=float)
20
21 #La función range(m, n, p), crea una lista que empieza en m
   y acaba antes de llegar a n, avanzando de p en p.
```

```

22
23 x = range(0, int(Pasos), 1)
24
25 #Para cada simulación se llena un vector de ceros (pues el
    movimiento browniano empieza en cero) y después se
    simulan las trayectorias bajo el esquema:
26 # $W[i+1]=W[i]+sqrt(dt)*Z[i+1]$  con  $Z[i]$  v.a. normal(media=0,
    varianza=1).
27
28 for j in range(0, N, 1):
29     Z[j,0]= 0
30     for i in x[:-1]:
31         Z[j,i+1]=Z[j,i]+sqrt(dt)*standard_normal();
32     plot(x, Z[j])
33
34 title('%d Simulaciones de un Movimiento Browniano' %N)
35 xlabel('t')
36 ylabel('W(t)')
37 show()

```

B.2. Código para generar un Movimiento Browniano Geométrico

```

1 # -*- coding: cp1252 -*-
2 #Algoritmo para simular trayectorias del precio de un
    subyacente, bajo el modelo de un movimiento browniano
    geométrico.
3
4 from numpy.random import standard_normal
5 from numpy import array, zeros
6 from math import exp
7 from pylab import *
8
9 #Valor inicial del subyacente:
10 S0 = input('Introduce el precio del Subyacente= ')
11 #Tiempo final:
12 T = input('Introduce el valor de T= ')
13 #Tamaño de paso en el tiempo:
14 dt =input('Introduce el tamaño del paso temporal= ')

```

```

15 #Parámetro de localización:
16 mu = input('Introduce el valor de la tasa de retorno=')
17 #Parámetro de escala:
18 sigma = input('Introduce el valor de la volatilidad=')
19 #Número de simulaciones:
20 N = input('Introduce el número de trayectorias a simular=')
21 )
22 #Número de pasos en años:
23 Pasos=round(T/dt);
24
25 S = zeros([N, Pasos], dtype=float)
26 x = range(0, int(Pasos), 1)
27
28 #Para cada simulación se llena un vector de S0 (ya que es
29 la condición inicial) y después se simulan las
30 trayectorias bajo el esquema:
31 #S[j, i+1]=S[j, i]+mu*S[j, i]*dt+sigma*S[j, i]*sqrt(dt)*Z[i]
32 con Z[i] v.a. normal(media=0, varianza=1).
33
34 for j in range(0, N, 1):
35     S[j,0]= S0
36     for i in x[:-1]:
37         S[j, i+1]=S[j, i]+mu*S[j, i]*dt+sigma*S[j, i]*
38             sqrt(dt)*standard_normal();
39     plot(x, S[j])
40
41 title('%d Simulaciones del precio del subyacente' %N)
42 xlabel('t')
43 ylabel('S(t)')
44 show()

```

B.3. Código para Black-Scholes Lineal

```

1 # -*- coding: cp1252 -*-
2 """
3 Código para resolver la ecuación diferencial parcial de
4 Black-Scholes para una opción Call tipo europea con Fipy
5
6 La ecuación es:

```

```

6 0=V_t +(1/2)sigma**2*S**2*V_{SS}+rSV_S-rV.
7 La ecuación se resuelve de manera directa (sin el cambio
  usual de variables).
8 Como Fipy deriva los coeficientes , se tiene que reescribir
  de la siguiente forma:
9
10 0=V_t+(d/dS)[(S**2*sigma**2/2.)*(d/dS)[V]]+
11 (d/dS)[r-sigma**2)*S] + (sigma**2 - 2 * r)*V
12
13 La representación para Fipy es:
14 ConvectionTerm((r - sigma**2) * S)
15 + DiffusionTerm(S**2 * sigma**2 / 2.)
16 + TransientTerm()
17 + ImplicitSourceTerm(sigma**2 - 2 * r) == 0
18
19 Como se trata de un Call europeo la condición final es: max
  (S-K,0), y las condiciones de frontera son V=0 en S=0 y
  V=L en S=L.
20
21 t es la variable temporal, S la variable espacial,
22 sigma es la volatilidad (anual),
23 K es el precio de ejercicio (strike) y
24 r es la tasa libre de riesgo(anual)
25 Se resuelve con paso de tiempo hacia atrás pues es una
  ecuación "Backward".
26 """
27
28 from pylab import *
29 from fipy import *
30
31 r=input('Introduce la tasa libre de riesgo anualizada=')
32 sigma=input('Introduce la volatilidad anual=')
33 K=input('Introduce el precio de ejercicio=')
34 Ti=input('Introduce el tiempo de maduracion en dias=')
35 S0=input('Introduce el valor actual del Subyacente=')
36
37 L=3.0*K #L es "infinito".
38 dS =0.01 #Tamaño de paso espacial.
39 nS=L/dS #Número de pasos espaciales.
40 T=Ti/365.

```

```

41 mesh = Grid1D(nx = nS, dx = dS) #Crea la malla.
42
43
44 V = CellVariable(name="Solucion_numerica",
45                 mesh=mesh,
46                 value=0.)
47 ci=CellVariable(name="Condicion_final",
48                 mesh=mesh,
49                 value=0.)
50
51 timeStepDuration = -.002 #Se resuelve hacia atrás en el
52 tiempo partiendo de la C.F.
53
54 steps= T/abs(timeStepDuration)
55
56 t = timeStepDuration * steps
57
58 # Se obtienen los centros de los puntos de la malla (ahí
59 evalua Fipy)
60 S = mesh.getFaceCenters()[0]
61 #Declaración del coeficiente difusivo:
62 D = FaceVariable(mesh=mesh, value=1.0)
63 #Valor del coeficiente difusivo:
64 D.setValue(S*S*sigma**2/2. )
65
66 #Declaración del coeficiente convectivo:
67 c = FaceVariable(mesh=mesh, rank=1, value=1.0)
68 #Valor del coeficiente convectivo:
69 c.setValue((r-sigma**2)*S)
70 #Nótese que c es un vector de rango uno (rank=1).
71
72 #Para evaluar la opción en el punto deseado:
73 index=where(S==S0)
74
75 #El término fuente es: (sigma**2 - 2 * r)*V
76
77 #Condición Final:
78 tmp=where(S>K)
79 for i in tmp[0][: -1]:
80     V[i]=S[i]-K

```

```

79     ci[i]=S[i]-K
80
81     #Condiciones de frontera:
82     valueLeft = 0.0 #Frontera izquierda
83     valueRight = L #Frontera derecha
84
85     BCs = (FixedValue(faces=mesh.getFacesRight(), value=
            valueRight),
86             FixedValue(faces=mesh.getFacesLeft(), value=
            valueLeft))
87
88     #Ecuación a resolver:
89
90     eqI =TransientTerm() + VanLeerConvectionTerm(coeff=c) +
            DiffusionTerm(coeff=D)+ImplicitSourceTerm(sigma**2 - 2 *
            r)
91
92     if __name__ == '__main__':
93         viewer = Viewer(vars=(V, ci),xmin=0.,xmax=2*S0,
94                         datamin=-2., datamax=S0)
95         viewer.plot()
96
97     # Se resuelve la ecuación haciendo loops en el tiempo:
98
99     for step in range(steps):
100         eqI.solve(var=V,
101                  boundaryConditions=BCs,
102                  dt=timeStepDuration)
103         if __name__ == '__main__':
104             viewer.plot()
105
106     #Imprimir en pantalla V(S0,0), el valor de la opción:
107     print S[index],V[index]
108     title('Solucion_en_variables_originales')
109     xlabel('S')
110     ylabel('V')
111     if __name__ == '__main__':
112         raw_input("Presiona <enter> para finalizar")

```

B.4. Código para Black-Scholes Lineal transformado

```

1  # -*- coding: cp1252 -*-
2  """
3  Código para resolver la ecuación diferencial parcial de
4      Black-Scholes para una opción Call tipo europea con Fipy
5
6  Se transforma la ecuación a una de la forma:
7       $0 = u_{\tau} - u_{xx} - (1+D)u_x$  con  $D = 2r/\sigma^2$   $\tau = (T/365) * (\sigma^2)/2$ .
8
9  Al ser los coeficientes constantes no es necesario
10     reescribirla.
11
12 La representación para Fipy es:
13     ConvectionTerm(1+D)
14     - DiffusionTerm()
15     + TransientTerm()==0
16
17 Como se trata de un Call europeo la condición final
18     original es:  $\max(S-K, 0)$ , la cual se transforma en:  $\max(1 - e^{-x}, 0)$ 
19     y las condiciones de frontera se convierten en:  $u=0$  en  $x=-\infty$ 
20     y  $u=1 - e^{-D\tau - x}$  en  $x=\infty$ .
21 """
22
23 from pylab import *
24 from fipy import *
25
26 #Malla en las variables nuevas:
27 L=10.
28 dx =0.001
29 nx=2.0*L/dx
30 mesh = Grid1D(nx = nx, dx = dx)+(-L)
31
32 r=input('Introduce la tasa libre de riesgo anualizada= ')
33 sigma=input('Introduce la volatilidad anual= ')

```

```

30 K=input('Introduce el precio de ejercicio=')
31 T=input('Introduce el tiempo de maduracion en dias=')
32 S0=input('Introduce el valor actual del Subyacente=')
33
34 u = CellVariable(name="Solucion_numerica",
35                 mesh=mesh,
36                 value=0.)
37
38 #El nuevo límite superior para el tiempo:
39 Ttilde=(T/365.0)*(sigma**2)/2.0
40
41 timeStepDuration = .0001 #Se resuelve hacia adelante en el
42 tiempo partiendo de la C.I.
43 steps= Ttilde/abs(timeStepDuration)
44
45 # Se obtienen los centros de los puntos de la malla (ahí
46 evalúa Fipy)
47 x = mesh.getFaceCenters()[0]
48
49 #Consante que multiplica al término convectivo (primera
50 derivada)
51 D=2*r/(sigma**2)
52 #Declaración del coeficiente difusivo:
53 b = FaceVariable(mesh=mesh, value=1.0)
54 #Valor del coeficiente difusivo:
55 b.setValue(1.)
56 #Declaración del coeficiente convectivo:
57 c = FaceVariable(mesh=mesh, rank=1, value=1.0)
58 #Valor del coeficiente convectivo:
59 c.setValue(D+1.)
60
61 #Condición inicial:
62 tmp=where(1>numerix.exp(-x))
63 for i in tmp[0][: -1]:
64     u[i]=1.0 - numerix.exp(-x[i])
65
66 #Condiciones de frontera:
67 valueLeft = 0.0
68 valueRight = 1.0

```

```

67 BCs = (FixedValue(faces=mesh.getFacesRight(), value=
        valueRight),
68         FixedValue(faces=mesh.getFacesLeft(), value=
        valueLeft))
69
70 #Ecuación a resolver:
71 eqX = TransientTerm() - VanLeerConvectionTerm(coeff=c)-
        ImplicitDiffusionTerm(coeff=b)
72
73 if __name__ == '__main__':
74     viewer = Viewer(vars=(u), xmin=-.5, xmax=0.8,
75                     datamin=0., datamax=1.0, main='')
76     viewer.plot()
77
78 # Se resuelve la ecuación haciendo loops en el tiempo:
79 for step in range(steps):
80     eqX.solve(var=u,
81               boundaryConditions=BCs,
82               dt=timeStepDuration)
83     if __name__ == '__main__':
84         viewer.plot()
85
86 #Imprimir en pantalla V(S0,0), el valor de la opción:
87 x0=numerix.log(S0/K)
88 print numerix.exp(x0)*u[(x0-L)/dx]*K
89 xlabel('x')
90 ylabel('u')
91 title('Solucion_a_la_ecuacion_transformada')
92 if __name__ == '__main__':
93     raw_input("Presiona <enter> para finalizar")

```

B.5. Código para Black-Scholes No Lineal (Soner)

```

1 #!/*- coding: cp1252 -*-
2 """
3 Código para resolver la ecuación no lineal de Black-Scholes
4 (modelo de Barles-Soner) para un Call Europeo.
5 La ecuación es:

```

```

5   $0 = u_{\tau} - (\sigma_{\tilde{}}^{**2} / \sigma^{**2}) * u_{\{xx\}} + (-\sigma_{\tilde{}}^{**2} /$ 
    $\sigma^{**2}) - D) u_x.$ 
6  con  $D = 2r / \sigma^2$ , tiempo final  $T_{\tilde{}} = (T / 365) * (\sigma^2) / 2$ .
7   $\sigma_{\tilde{}} = \sigma * \text{sqrt}[(1 + e^{\{2r * \tau / \sigma^{**2}\}}) a^{2K} e^x * (u_{xx} +$ 
    $u_x)]$ .
8
9  En fipy se escribe:
10  $0 = u_{\tau} - (d/dx)(Pu_x) + (d/dx)(Qu) + Ru$ 
11 donde P es el coeff. de difusión, Q de convección y R el
   término fuente.
12
13  $P = \sigma_{\tilde{}}^{**2} / \sigma^{**2}$ 
14  $Q = -D - \sigma_{\tilde{}}^{**2} / \sigma^{**2} + (d/dx)(\sigma_{\tilde{}}^{**2} / \sigma^{**2})$ 
15  $R = (d/dx)(\sigma_{\tilde{}}^{**2} / \sigma^{**2}) - (d^2/dx^2)(\sigma_{\tilde{}}^{**2} /$ 
    $\sigma^{**2})$ 
16 Las derivadas de Q, R se calculan numericamente.
17
18 Representación en Fipy:
19  $- DiffusionTerm(P)$ 
20  $+ ConvectionTerm(Q)$ 
21  $+ ImplicitSourceTerm(R)$ 
22  $+ TransientTerm() == 0$ 
23
24 Condición inicial:  $\max(1 - e^{-x}, 0)$ .
25 Condiciones de frontera:  $u = 0$  for  $x = -\infty$  and  $u = 1 - e^{-D\tau}$ 
    $-x$  for  $x = \infty$ .
26 """
27
28 from pylab import *
29 from fipy import *
30
31 L = 10.
32 dx = 0.01
33 nx = 2.0 * L / dx
34 mesh = Grid1D(nx = nx, dx = dx) + (-L)
35
36 r = .1
37 sigma = .2
38 T = 365.
39 K = 100.

```

```

40 S0=95.
41 a=0.02
42
43 phi = CellVariable (name=" Solucion_Lineal " ,
44                   mesh=mesh ,
45                   value=0.)
46
47 u = CellVariable (name=" Solucion_no_lineal " ,
48                 mesh=mesh ,
49                 value=0.)
50
51 x = mesh.getFaceCenters() [0]
52
53 #Nuevo límite de tiempo
54 Ttilde=(T/365.)*(sigma**2)/2.
55
56 timeStepDuration = .002
57
58 steps= Ttilde/(timeStepDuration)
59
60 sigmatilde = CellVariable (mesh=mesh, value=sigma)
61
62 ratiosigmas=sigmatilde**2/sigma**2
63
64 #C. I: max(1.-numerix.exp(-x),0)
65
66 tmp=where( 1>numerix.exp(-x))
67 for i in tmp[0][: -1]:
68     phi[i]=1.-numerix.exp(-x[i])
69     u[i]=1.-numerix.exp(-x[i])
70
71 #Parte del término convectivo:
72 D=2.*r/(sigma**2)
73
74 #Declaración coeficiente difusivo:
75 PL = FaceVariable (mesh=mesh, value=1.0)
76 P = FaceVariable (mesh=mesh, value=1.0)
77 P=ratiosigmas
78
79 #Declaración coeficiente convectivo:

```

```

80 QL= FaceVariable(mesh=mesh, rank=1, value=-D-1.0)
81 Q = FaceVariable(mesh=mesh, rank=1, value=-D-1.0)
82 Q=(-D-ratiosigmas+ratiosigmas.getGrad())
83
84 #Término fuente
85 R = CellVariable(mesh=mesh, value=0.0)
86
87 R=ratiosigmas.getGrad()[0]-(ratiosigmas.getFaceGrad()).
      getDivergence()
88
89 #C.F.:
90 valueLeft = 0.0
91 valueRight = 1.0
92
93 BCs = (FixedValue(faces=mesh.getFacesRight(), value=
      valueRight),
94         FixedValue(faces=mesh.getFacesLeft(), value=
      valueLeft))
95
96 #Ecuación lineal:
97 eqL= TransientTerm() + VanLeerConvectionTerm(coeff=QL)-
      ImplicitDiffusionTerm(coeff=PL)
98 #Ecuación no lineal:
99 eqNL=TransientTerm() + VanLeerConvectionTerm(coeff=Q)-
      ImplicitDiffusionTerm(coeff=P)+ImplicitSourceTerm(coeff=
      R)
100
101 if __name__ == '__main__':
102     viewer = Viewer(vars=(phi,u),xmin=-0.5,xmax=2.0,
103                     datamin=0.0, datamax=1.0)
104     viewer.plot()
105
106 tau=Variable()
107 dt=timeStepDuration
108 for step in range(steps):
109     eqL.solve(var=phi,
110              boundaryConditions=BCs,
111              dt=timeStepDuration)
112
113 sigmatilde.setValue(sigma*numerix.sqrt(1+numerix.exp

```

```

    ((2.*r*tau)/sigma**2)*a**2*K*numerix.exp(x)[: -1]*(phi.
    getGrad()[0]+(phi.getFaceGrad()).getDivergence()))
114 sigmatilde[-1]=sigmatilde[-3]
115 sigmatilde[-2]=sigmatilde[-3]
116 ratiosigmas=sigmatilde**2/sigma**2
117
118 eqNL.solve(var=u,
119             boundaryConditions=BCs,
120             dt=timeStepDuration)
121
122 for i in range(20):
123     u[-i-1]=phi[-i-1]
124     tau.setValue(tau()+dt)
125     if __name__ == '__main__':
126         viewer.plot()
127
128 x0=numerix.log(S0/K)
129
130 print 'V=', numerix.exp(x0)* phi[(x0-L)/dx]*K
131 print 'u=', numerix.exp(x0)* u[(x0-L)/dx]*K
132 title('Solucion al modelo de Barles-Soner')
133 xlabel('x')
134 ylabel('u')
135 show()
136 if __name__ == '__main__':
137     raw_input("Presiona <enter> para continuar... ")

```


Bibliografía

- [1] Ankudinova J., Ehrhardt M., *On the numerical solution of nonlinear Black-Scholes equations*, Comput. Math. Appl. 56 (3) 799-812.
- [2] Barles G., Soner M., *Option pricing with transactions costs and a nonlinear Black-Scholes equation*, Finance Stochast. 2 (1998) 369-397.
- [3] Björk T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Third Edition, Oxford University Press, New York, 2009.
- [4] Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Econ. 81 (3) (1973) 637-54.
- [5] Davis M. H. A., Panas V. G., Zariphopoulou T., *European option pricing with transaction costs*, SIAM J. Contr. Optim. 31 (2) (1993) 470-493.
- [6] Ferreyra G., Pascal J., *Control Óptimo via Programación Dinámica*, Divulgaciones Matemáticas, 7 (2) (1999) 167-185.
- [7] Fleming W.H., Soner H.M., *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Applied Mathematics, Vol. 25, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [8] Guyer J. E., Wheeler D., Warren J.A., *FiPy: Partial Differential Equations with Python*, Journal of Computing in Science & Engineering 11 (3) 6-15.
- [9] Hodges S., Neuberger A., *Optimal replication of contingent claims under transaction costs*, Review of Futures Markets 8 (1989) 222-239.
- [10] Hull J. H., *Options, Futures, And Other Derivatives*, Seventh Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2009.

- [11] Lamothe P., Pérez M., *Opciones Financieras y Productos Estructurados*, Segunda Edición, McGraw-Hill, Madrid, 2003.
- [12] Leland H. E., *Option pricing and replication with transactions costs*, J. Finance 40 (1985) 1283-1301.
- [13] Luenberger D.G., *Investment Science*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [14] Oksendal B., *Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Sixth Edition, Germany, 2007.
- [15] O'Neil P. V., *Beginning in Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [16] Rincón L., *Curso Intermedio de Probabilidad*, Las Prensas de Ciencias, Segunda Edición, México, 2008.
- [17] Salsa S., *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*, Springer-Verlag, Italia, 2008.
- [18] Willmott P., Dewynne J., Howison S., *Option Pricing*, Oxford Financial Press, 2007.
- [19] Willmott P., Dewynne J., Howison S., *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, New York, 1995.