



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**Secciones eficaces en un sistema hamiltoniano de
tres grados de libertad**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Wilhelm Pablo Karel Zapfe Zaldivar

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Christof Jung Kohl

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Luis Benet Fernández

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL: Dr. Carlos Federico Bunge Molina



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Hubo mucha gente que me apoyó decisivamente en este programa de doctorado. Podríamos empezar con Christoff Jung y Thomas Seligman, que siempre me brindaron su apoyo como profesores, asesores, jefes de grupo e infinitas veces con gestiones para conseguir dinero para los congresos y similares. El Dr. Mauricio Torres debe seguir, puesto que ha sido mi amigo constante en estos más de ocho años de física e idioteces varias, y siempre que pudo me cubrió la espalda. El Dr. Carlos Pineda nos ha proporcionado mucha diversión y risas y ideas extrañas sobre el uso correcto de un ordenador. También me han brindado apoyo y problemas (para trabajar) David Sanders, Luis Benet y Francois Leyvraz.

Fuera del medio académico esta la valiosísima beca alimenticia de mi madre, y la media beca de pensión García-Franco-Velutini. Mis compañeros del grupo de karate de la UNAM también merecen ser mencionados, por su entrenamiento emocional y sus enseñanzas sobre disciplina. De ellos me acordaré siempre de mis sempai: Atlan, Adair, Paola, Gina, Cesar y Nolzco. Hay al menos tres mujeres que me han hecho mucho más fuerte en estos seis años y medio de posgrado. Ellas son Carolina, Ana Paula y Tzolkin.

Resumen

En este trabajo presento una contribución al problema inverso dispersivo. Nuestro objetivo es tener una mayor comprensión de los sistemas hamiltonianos dispersivos usando sólo medidas asintóticas. Aquí presentamos un primer paso en esta dirección para sistemas de tres grados de libertad. Hemos restringido la clase de sistemas a aquellos que presentan una sola dirección abierta en el espacio de configuración. De los que están cerrados, uno se encuentra muy débilmente acoplado a los otros dos. Un parámetro nos permitirá desacoplarlo completamente, resultando esto en una simetría continua y un momento angular conservado. El sistema completo hereda sus propiedades de estabilidad estructural del sistema desacoplado.

Esta clase de problemas garantiza la existencia de una maraña heteroclínica en la sección de Poincaré de cuatro dimensiones asociada al problema. Este objeto es demasiado complicado como para visualizarlo. Optamos mejor por caracterizarlo por medio de medidas asintóticas contenidas en la sección eficaz. La sección eficaz es la obtenida por medio de los momentos de dispersión. Esta es la frecuencia absoluta con la que podemos obtener ciertos valores de los momentos finales en el sistema. Existen unos valores que aparecerán con mayor frecuencia que sus vecinos. Estos corresponden a las singularidades arcoíris, que son los valores donde la función es localmente no invertible. Ellos tienen una relación indirecta con los dominios de continuidad de la función de dispersión. A su vez, ellos se encuentran determinados por la partición que la maraña heteroclínica induce en el espacio fase.

Nosotros hemos caracterizado y explicado la forma de estas singularidades arcoíris en el caso de secciones eficaces para la clase de sistemas considerada. Estas aparecen sobre un codominio bidimensional, son estructuralmente estables y genéricas.

Abstract

In this work I present a contribution for the inverse scattering problem. Our objective is to reach a better understanding of chaotic systems with three degrees of freedom using only asymptotic measurements. In order to achieve this we had to restrict ourselves to a class of systems, namely, those with one open and two closed degrees of freedom. Of those closed, one of them is weakly coupled to the rest of the system. A parameter allows us to make it completely decoupled, which gives the system a continuous symmetry and a conserved momentum. The chaotic scatterer is strongly localized, which let us speak of incoming and outgoing orbits. The three degree of freedom system inherits its structural stability from the symmetric system.

Our class guarantees the existence of a heteroclinic tangle, which is embedded on a four dimensional Poincaré section. This object is too complex to visualize. We opt instead for obtaining information about it using the asymptotic data contained on the cross section. This cross section will be the absolute frequency of the outgoing momenta values, given a set of incoming orbits. The outgoing momenta are a good example of a scattering function which fits our purpose. There are on the cross section certain values which are much more frequent than their neighbours. Those correspond to the Rainbow Singularities, values of the scattering function which are non invertible. These have an indirect relation to the domains of continuity of the scattering function. These domains in their turn have a relationship to the partition the heteroclinic tangle induces on the asymptotic regions of the phase space. We have given the first step towards these measurements by giving an analysis of the Rainbow Singularity, its typical form and its structural stability.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
1.1. Sistemas caóticos	1
1.2. Dispersión en sistemas mecánicos	3
1.3. Objetivos	3
1.4. Plan de la tesis	5
2. Las herraduras de Smale	6
2.1. Las herraduras ternarias	6
2.2. El grado de desarrollo, γ	9
3. Los modelos para el trabajo	15
3.1. Clase topológica	15
3.2. Construcción de los modelos	18
3.2.1. Cercanía a un modelo con simetría continua	18
3.2.2. Las variedades estables e inestables para 3 grados de libertad	20
3.2.3. El caso simétrico	22
3.3. Un mapeo abstracto	23
3.4. Un billar	27
4. Funciones de dispersión	33
4.1. El caso bidimensional	33
4.2. Unos ejemplos	39
4.3. De dos a tres grados de libertad: el salto abrupto	39
4.4. El dominio de I_{out}	42
5. La sección eficaz	48
5.1. Sección eficaz en un mapeo bidimensional	48
5.2. Funciones típicas	51
5.3. Las singularidades arcoíris en mapeos cuadridimensionales	53
5.3.1. Una forma normal	54

5.4. Sobre el problema inverso	64
6. Conclusión	66
6.1. Otras clases: más grados de libertad o más de una dirección abierta. . .	67
6.2. Consideraciones cuánticas y semiclásicas	69

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El problema que tratamos en esta tesis pertenece a la clase de problemas dispersivos caóticos. Comenzaré por dar una breve introducción histórica al concepto de caos y de dispersión en sistemas mecánicos.

1.1. Sistemas caóticos

Que l'on cherche à se représenter la figure formée par deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique. . .

[1]

Este epígrafe es una celebración del descubrimiento de la dinámica que ahora llamamos caótica. Resultó sorprendente que tres masas puntuales, cuyo potencial de

interacción fuera tan simple como el gravitatorio, resultaran en marañas tan complicadas como las que forman las variedades estables e inestables de los sistemas hamiltonianos generales. Es indudable que este descubrimiento reactivó profundamente el interés en la mecánica clásica, al dar al traste con la intuición determinista radical como la que mantuvo Laplace [2], o la que podemos ver en ciertas posturas que sólo demuestran falta de imaginación, como la que William James adjudica a sus colegas:

... he oído a más de un profesor decir que todos los conceptos de la verdad han sido ya descubiertos por la ciencia, y que sólo basta rellenar la imagen con las siguientes cifras decimales.” (citado en [3]).

Es cierto que las leyes de la mecánica clásica son estrictamente deterministas, bien representadas por ecuaciones diferenciales cuyas soluciones satisfacen teoremas de existencia y unicidad. Sin embargo basta ver el grosor de un tomo como el de José y Saletan [4] para ver que hay mucho más que un par leyes que estudiar. Que sean deterministas es una cosa, que sean “computables” y “aburridas”, es harina de otro costal. Hoy entendemos que el determinismo y la predictibilidad son conceptos independientes [5]. El primero establece que la solución está unívocamente determinada por las condiciones iniciales, sin posibilidad de desviación alguna. El segundo concepto se refiere a que esta solución es computable de alguna forma, es decir, si dadas condiciones iniciales y un tiempo a futuro, tenemos la posibilidad de saber con certeza, o con un grado de error controlable, el estado del sistema en dicho tiempo. Podríamos imaginar sistemas dinámicos no completamente deterministas y que fueran estadísticamente predecibles. Por otro lado, contamos con la certeza de que si planteamos sistemas con dos o más grados de libertad, de forma bastante general, se comportan a largo plazo de forma impredecible, al menos en ciertos subconjuntos importantes de su espacio de soluciones. Buscar expresiones cerradas es muchas veces considerado una necesidad. Así que nos hemos movido a enfocar nuestro entendimiento de la mecánica en sus cualidades generales como sistemas dinámicos: en sus propiedades topológicas, algebraicas, ergódicas, etc.

En este último sentido hemos caminado de la mano de los matemáticos. El caos aparecía también por otros lados alejados de la física. Contemporáneo de Poincaré fue George Cantor, quien en 1884 introdujo el conjunto que lleva su nombre [6]. Fractales de este tipo, conjuntos monstruosos como fueron originalmente considerados, resultaron ser parte natural de la mecánica clásica, fenómeno reencontrado por Smale con su mapeo de la herradura [7]. El caos clásico parece tener una estructura matemática que lo conecta con los más elegantes y disparatados descubrimientos matemáticos, como pueden ser los fractales, las funciones no analíticas y la conjugación topológica de sistemas dinámicos.

En estos momentos sabemos muchísimo de los sistemas caóticos en Mecánica Clásica. La gran parte de esta sapiencia se encuentra concentrada en una clase bastante específica de problemas: aquellos que se pueden reducir a mapeos discretos bidimensionales. La razón es obvia: podemos dibujarlos y estudiar visualmente sus estructuras invariantes. Esto no es poca cosa. El comportamiento que laxamente llamamos caos es tan rico y complejo que aun ahora seguimos investigando sobre dichos sistemas. Así que esta restricción no es tan desgraciada como podría sonar para el lego.

1.2. Dispersión en sistemas mecánicos

Los problemas de dispersión son usuales en física, tanto así que son una rama completa de estudio [8]. Un sistema se llama dispersivo si tenemos un potencial que interactuó con partículas que se aproximan desde una región asintótica con características definidas, interactúan con el potencial y escapan a la región asintótica eventualmente. El clásico problema de dispersión, por su relevancia histórica y didáctica es el experimento de Rutherford [9]. El título de su trabajo (“La dispersión de partículas α y β y la estructura del átomo”) delata la variante más interesante de estos problemas: el llamado problema inverso. Esta tesis pertenece a esta clase. El problema inverso consiste en averiguar las características del dispersor por medio de medidas asintóticas sobre las órbitas. Ernest Rutherford logró usando la sección eficaz sobre los ángulos de dispersión obtener datos sobre la estructura interna del átomo. Su dispersor era un potencial integrable, y los núcleos estaban suficientemente lejos unos de otros como para no interferir entre ellos. Su trabajo fue simplificado por la naturaleza.

En sistemas caóticos no debemos intentar reconstruir la función hamiltoniana. Esto puede ser sencillamente imposible. Es mucho mejor si a partir de los datos asintóticos podemos obtener información de las cualidades generales de nuestro dispersor, asociado en el espacio fase a una silla caótica [10]. El problema puede ser tratado tanto por su interés matemático como físico. El primer punto de vista considera que tenemos precisión arbitraria sobre las medidas. Aquí consideraremos el segundo. En esta segunda variante asumimos precisión finita sobre las medidas de nuestro sistema dinámico. La aplicación práctica de estos estudios está más limitada en el caso clásico que en el cuántico, donde ocurre dispersión de ondas. Sin embargo, siempre puede ser útil obtener el caso de límite de onda corta como guía del tipo de dispersión. Las posibles implicaciones para el caso cuántico se consideran haciendo aproximaciones de onda corta (semiclásica) a los resultados ondulatorios y comparándolos con el resultado clásico.

1.3. Objetivos

La gran mayor parte de los resultados que se han logrado el problema inverso caótico son en sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad. En este trabajo usamos tres. Muchas veces leyes de conservación nos ayudan a reducirlos, incluso a veces hacemos gruesas aproximaciones de desacoplamiento y de esta forma podemos aportar bastante al entendimiento del sistema. Sin embargo, nos gustaría comprender más de estos sistemas cuando no es factible o necesario hacer estas reducciones. Un sistema de tres grados de libertad que sólo conserve energía tiene una sección de Poincaré de cuatro dimensiones. Será el caso que investigamos en este trabajo. Nuestros esfuerzos se concentraron en encontrar la huella de una dinámica que correspondería a lo que hemos llamado una herradura de Smale en cuatro dimensiones. Esta “superherradura” es difícil de representar visualmente, en oposición al conocido mapeo de la herradura. Estudiar su dinámica *in situ*, tanto visualmente como algebraicamente, no nos pareció la estrategia adecuada.

Para nuestro trabajo usamos simplificaciones que nos permiten acercarnos a esta

clase de problemas. La primera es usar sistemas cercanos a la simetría, idea que se ha usado antes con cierto éxito [11]. Usamos sistemas que dependan de un parámetro que, cuando fuera igual a cero, fueran reducibles por aplicación del teorema de Noether. Hemos considerado que nuestra comprensión de los sistemas reducidos puede ser generalizable al sistema completo después de que se ha roto la simetría. Como se verá en los próximos capítulos, dicho razonamiento es válido gracias a las propiedades genéricas y estables que comparten los sistemas reducidos y el sistema completo. *A grosso modo*, las propiedades genéricas y estables son aquellas que se preservan si perturbamos poco el sistema en cuestión. Dicho de otra forma, no dependen de detalles específicos de la función hamiltoniana.

La segunda simplificación consiste en no pretender entender la dinámica dentro de la región de interacción fuerte. Nos enfocamos en buscar su influencia en regiones asintóticas. En esto consiste el enfoque dispersivo. Hemos buscado sistemas en donde el caos se encuentra en una región definida (entendemos por esto que la localización de la mayor parte de la silla caótica está confinada en una vecindad acotada) y fuera de ésta la dinámica será trivialmente integrable. De esta forma hemos estudiado en realidad ciertas propiedades del mapeo de dispersión. A un subconjunto de órbitas caracterizadas perfectamente por los valores de ciertas cantidades que se conservan en el régimen integrable, les hemos asignado otro conjunto de órbitas del mismo tipo. La regla de asignación es la dinámica del sistema. A cada órbita de entrada en la región caótica le corresponde su estado de salida. Si pudiéramos especificar con certeza absoluta este mapeo, tendríamos una función de dispersión magnífica, con todo el contenido de información sobre la región caótica codificado en las reglas de asignación (exceptuando tal vez efectos no hiperbólicos debidos a islas elípticas en los fractales KAM).

Sabemos que en laboratorio las funciones de dispersión son casi imposibles de medir. Incluso en el caso idílico de que pudiéramos pasar por encima de todos los errores experimentales, la dinámica caótica obliga a conocer con precisión *infinita* las condiciones iniciales para poder predecir de forma absoluta un estado final. Y si pudiéramos llevar esto a cabo, entonces todavía tendríamos problemas con los problemas de resolución a escala cuántica. El principio de incertidumbre de Heisenberg nos impediría medir con certeza variables conjugadas. Es un imposible tras otro. Pero hay algo que sí se nos permite: medir la frecuencia con la que obtenemos ciertos estados de salida, dada una distribución de estados de entrada. Esto es la sección eficaz. Este acercamiento al problema se ha intentado ya en sistemas *reducibles a dos grados de libertad* [12, 13, 14, 15]. Se puede demostrar que bajo condiciones iniciales sensiblemente escogidas, hay codificada información valiosa en la forma en que la superherradura induce particiones en el espacio fase. Esta es una de las huellas del caos. Nuestra propuesta en este escrito consiste en tratar de medir una sección eficaz en un sistema con un mapeo simpléctico cuadridimensional.

Antes de atacar directamente el problema escogimos una clase de sistemas mecánicos que garantice la existencia de esta superherradura. Con la cercanía a un modelo simétrico y ciertas consideraciones topológicas logramos esto. Trabajamos sistemas que sólo tuvieran una dirección de escape, (a lo largo del trabajo la represente por la coordenada q). Alrededor del eje definido por esta coordenada impusimos la simetría rotacional. Esto hace que las partículas viajen en una especie de túnel, confinadas hasta alcanzar el potencial dispersor, donde cambian su estado definido por variables

asintóticas. Esto define un mapeo de dispersión. Este mapeo se estudió indirectamente usando la sección eficaz. Esta consiste en encontrar la probabilidad de obtener ciertos valores de las funciones valuadas sobre las órbitas después de interactuar con el dispersor. Hasta donde mi conocimiento alcanza, está es la primera vez que se intenta hacer esto en un sistema de tres grados de libertad no reducible. Sólo alcanzamos a medir y caracterizar los valores más frecuentes de esta sección eficaz, llamados singularidades arcoíris. Explicamos también porqué tienen la apariencia con que las detectamos en nuestras simulaciones numéricas. Esto tiene que ver con el tipo de funciones de dispersión usadas.

Aquí presentaremos secciones eficaces que detectan variables de tipo momento o acción, dadas distribuciones uniformes sobre variables de posición o ángulo. Nuestras sugerencias a futuro serán generalizar la clase y ser capaces de medir la sección eficaz de forma inversa, es decir, midiendo ángulos de dispersión suponiendo distribuciones sobre los momentos de entrada. Nuestra clase se construye compactificando todas las variables espaciales excepto una. Creemos que es posible dejar varias abiertas mientras haya una cerrada. Esto será trabajo a futuro. También nos gustaría aplicar razonamientos cuánticos y semi-clásicos a nuestros modelos, y observar la aplicabilidad de nuestros resultados en los regímenes en que estas teorías sean aplicables. Esto no fue tratado en este trabajo, esperemos hacerlo en un proyecto a futuro.

En sistemas no integrables, el propósito del problema inverso no es realmente reconstruir la hamiltoniana específica del sistema, sino reconstruir las cualidades topológicas de las variedades formadas por las órbitas, específicamente la silla caótica, al ser ésta el esqueleto sobre el cual se produce toda la dinámica interesante. Una meta ambiciosa sería poder construir una dinámica simbólica para este conjunto invariante. De momento sabemos al menos que dicha dinámica existe [16]. Esta dinámica se podría aproximar teniendo una *jerarquía* de las singularidades arcoíris aquí presentadas, de forma que cada una represente un elemento de la partición del espacio fase por la herradura.

1.4. Plan de la tesis

El plan de esta tesis es como se detalla aquí. El capítulo 2 es un repaso sobre el mapeo de la herradura y su grado de desarrollo para el caso ternario. El capítulo 3 detalla tres modelos mecánicos que hemos usado para nuestra investigación. El capítulo 4 repasa las propiedades de continuidad fundamentales para las funciones de dispersión, y su relación con el grado de desarrollo de las herraduras. Es hasta el capítulo 5 donde presentamos nuestros resultados, que son en la sección eficaz de las funciones de dispersión mostradas en el capítulo anterior. El capítulo 6 son las conclusiones, donde mencionamos posibles trabajos a futuro sobre esta línea de investigación.

CAPÍTULO 2

LAS HERRADURAS DE SMALE

La ubicua herradura de Smale será de tanta importancia en lo que sigue que bien vale dedicarle un capítulo a repasar aquellas de sus propiedades en las que descansará el resto del trabajo. Ejemplificaré esta discusión con una herradura ternaria, esto es, con tres puntos fijos.

Las herraduras de Smale aparecen naturalmente en secciones de Poincaré de sistemas mecánicos de dos grados de libertad. Esto se debe a que la intersección de variedades invariantes estables e inestables es un fenómeno común y estructuralmente estable, en primer lugar, y, en segundo lugar, a la conservación de área y quiralidad en estos mapeos, implicada por la invariancia de la forma simpléctica. Asumiré que estamos familiarizados con la dinámica esencial del mapeo de la herradura [7, 17] y pasaremos a discutir una de sus propiedades. Un buen repaso general se puede encontrar en [18], aunque se omiten ciertas propiedades ahí.

En este capítulo mostraré como existe una forma de asignarle un parámetro a la herradura simétrica, conocido como grado de desarrollo, siguiendo la línea mostrada en los artículos [10, 19, 20]. Dicho parámetro está relacionado con el caos topológico y la entropía del mapeo en cuestión. Recordemos primero entonces como funciona el mapeo de una herradura de Smale *ternaria*.

2.1. Las herraduras ternarias

En los sistemas que he trabajado, la herradura que aparece es una herradura ternaria, es decir, con tres puntos fijos. Además, es invariante respecto a inversión temporal y cuyas variedades estables e inestables se extienden al infinito a lo largo de una dirección en ambos sentidos. También le exigiremos a nuestros modelos que sean invariantes frente a la reflexión especular $q \rightarrow -q$, por simplicidad. Aunque la herradura no sea estrictamente causada por las variedades hiperbólicas de puntos fijos, sino por variedades parabólicas que se extienden al infinito, la silla caótica asociada sigue siendo igual a la del caso estrictamente ternario. Esta afirmación será igual-

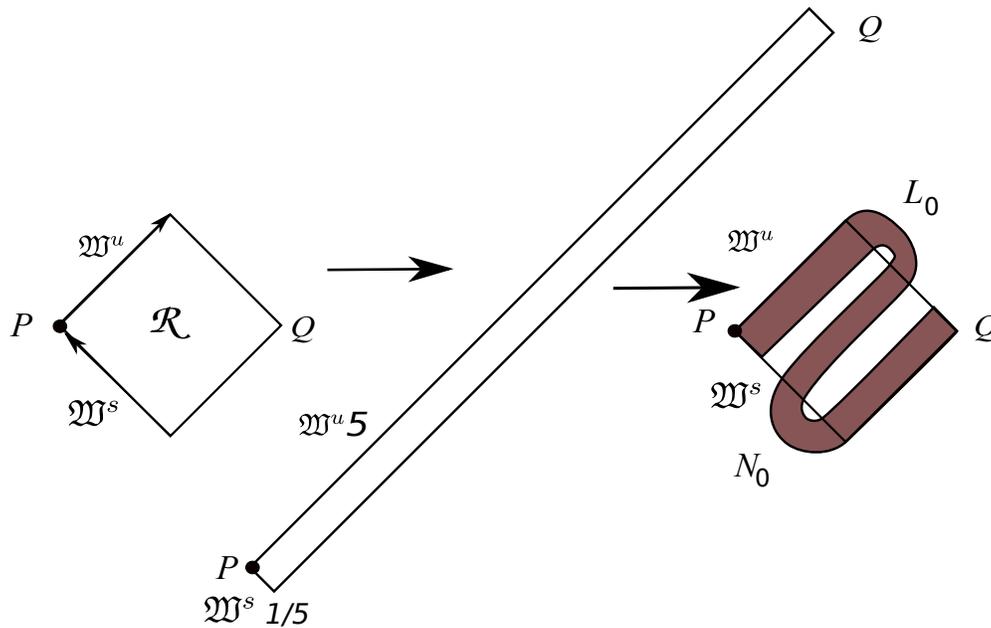


Figura 2.1: La aplicación del mapeo a \mathcal{R} . El factor usado fue cinco, pero cualquier valor mayor a tres para doblar la región sobre si misma funciona. Ver el texto para los detalles.

mente válida para el caso de tres grados de libertad. El hecho de que la herradura tenga una región fundamental no acotada no cambiará en nada la discusión aquí presentada.

Antes que nada mostremos una herradura sin referencia explícita a sistemas mecánicos. Sigamos la figura 2.1: tomemos una región cuadrada cerrada en \mathbb{R}^2 , y le llamamos \mathcal{R} . Fijaremos el punto izquierdo P , encogeremos sobre el vértice \mathcal{W}^s por un factor de cinco, y estiraremos en \mathcal{W}^u por el mismo factor. El valor exacto de éste no es realmente importante, hemos usado cinco porque se presta a dibujos más nítidos, pero cualquier valor mayor a tres funciona. Doblaremos después el rectángulo así obtenido, de forma que preserve área, y que intersecte en tres barras disjuntas la región original \mathcal{R} , y que el punto Q vuelva a coincidir con su lugar original. Este es el mapeo de la herradura de Smale ternaria *completa*. La primera aplicación sobre \mathcal{R} expulsa dos barras disconexas y las mapea sobre lo que llamaremos lóbulos. Hemos obtenido así los lóbulos \mathcal{L}_0 y \mathcal{N}_0 . Le llamaremos hueco a la parte de \mathcal{R} que no se intersecta con su imagen. De momento nos interesa que el hueco abierto por la primera iteración en \mathcal{R} atravesase por completo el rectángulo y se introduzca en ellos. Una segunda aplicación del mapeo, donde lo que ocurre con el exterior de \mathcal{R} lo definiremos por continuidad, produce dos nuevos lóbulos mucho más alargados, \mathcal{L}_1 y \mathcal{N}_1 . Estos resultan ser la imagen difeomórfica de los anteriores. Los huecos se transformaron ahora también en formas alargadas que dividen cada barra en tres, otra vez, teniendo ahora un total de ocho huecos, dos viejos y seis nuevos, véase la figura 2.2. Cada

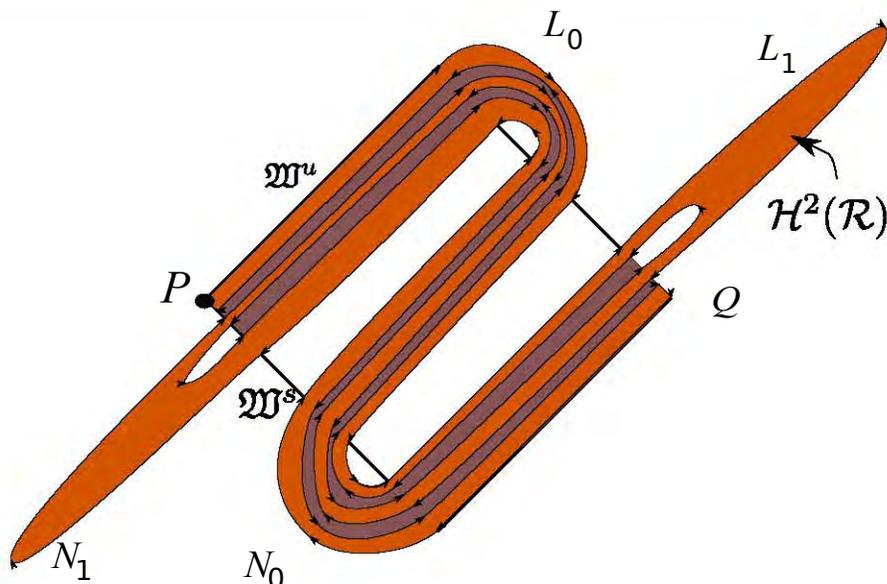


Figura 2.2: La aplicación del mapeo a \mathcal{R} iterada dos veces. El mapeo se extiende por continuidad a los lóbulos L_0 y N_0 , resultando estos en sus imágenes L_1 y N_1 . El área oscura indica la imagen de los primeros dos huecos bajo el mapeo \mathcal{H} .

aplicación dividirá cada barra en cinco partes medibles (la medida exacta no importa mientras sea mayor a cero) y expulsará la segunda y cuarta al exterior. Esto es, cada paso del mapeo produce un número de huecos igual a dos veces el número de barras que había antes. El número de huecos en el paso n es $5^n - 3^n$, tomando en cuenta los que ya había antes. Hemos denotado la unión de todas las imágenes de los vértices del cuadro como \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s , porque se comportan efectivamente como variedades inestables (*unstable*) y estables (*stable*) del punto fijo P , y es claro que como cada vez multiplican la distancia por cinco o por un quinto, son de naturaleza hiperbólica. De ahora en adelante usaremos la letra \mathcal{W} para variedades estables e inestables de mapeos simplécticos.

Es claro que el proceso sobre \mathcal{R} es equivalente a producir un polvo de Cantor quitando siempre dos quintos de los segmentos que vayan quedando de un intervalo. No debemos perder de vista que el proceso es difeomórfica en este caso, puesto que hemos considerado \mathcal{R} y sus alrededores.

Podemos entonces construir un mapeo que reacomode los lóbulos en los huecos y ponga las barras en su posición original, el inverso del primero. Debemos ahora estirar cinco veces en la dirección de \mathcal{W}^s y encoger en la de \mathcal{W}^u , y doblar el rectángulo así obtenido de forma que las barras terminen ocupando su espacio original, con su lado mas largo paralelo a \mathcal{W}^s . Es claro que es otro mapeo de herradura. Le llamaremos al primero el mapeo de herradura anclado en P , \mathcal{H}_P y al segundo su inverso, \mathcal{H}_P^{-1} . Este último produce los nuevos lóbulos Z_0 y S_0 y crea los huecos correspondientes (véase la figura 2.3).

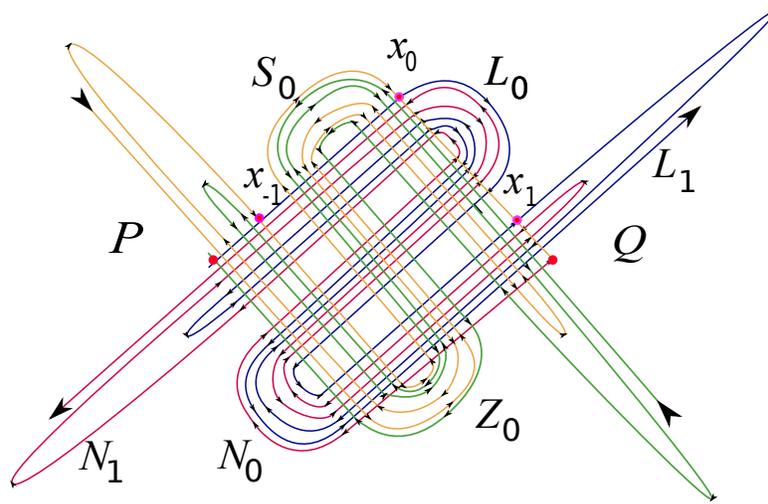


Figura 2.3: El desarrollo de la herradura y su inversa superpuestas, como aparece en sistemas simplécticos.

Si prestamos atención, podemos ver que la dinámica induce a que el vértice superior derecho del diagrama sea la \mathcal{W}^s del punto fijo Q . También se induce que el lado derecho inferior actúe como la variedad inestable asociada al mismo punto. También podemos observar que la forma en que S_0 se transforma en S_1 es cualitativamente la misma en que L_0 se transforma en L_1 , así que el mapeo considerando a P el ancla es el mismo que si hubiéramos usado a Q como ancla y las variedades estables e inestables como las inducidas por el primero. Así que ahora sólo hablaremos del mapeo \mathcal{H} sin especificar su anclaje, P o Q . Dado que todo lo hemos hecho preservando área y dirección, resulta simplécticos. En realidad esto es sólo consecuencia de que hemos exigido a priori las simetrías discretas de inversión temporal y reflexión espacial. En estos diagramas sin coordenadas dichas simetrías corresponden a las reflexiones sobre las diagonales de \mathcal{R} (reflexión arriba/abajo y derecha/izquierda).

2.2. El grado de desarrollo, γ

Hasta ahora he descrito herraduras completas, esto es, las barras que pertenecen a $\mathcal{R} \cap T(\mathcal{R})$ son disjuntas. Se dice que son herraduras completamente desarrolladas. Existe una forma de asignarles un parámetro que nos indica cuál es el grado de desarrollo de una herradura más general. Se le denota usualmente (en el caso de herraduras ternarias) por la letra γ . Ahora explicaré cómo se determinan los valores de ese parámetro.

Imaginemos la región \mathcal{R} con los huecos producidos por la aplicación iterada de \mathcal{H}^{-1} del caso completo, como se ve en la figura la figura 2.5. Los huecos son la parte de \mathcal{R} que no se intersecta bajo su imagen en el mapeo \mathcal{H} , y están marcados con gris. Numeraremos los huecos de cada iteración, de los cuales hay $3^n - 1$, de abajo a

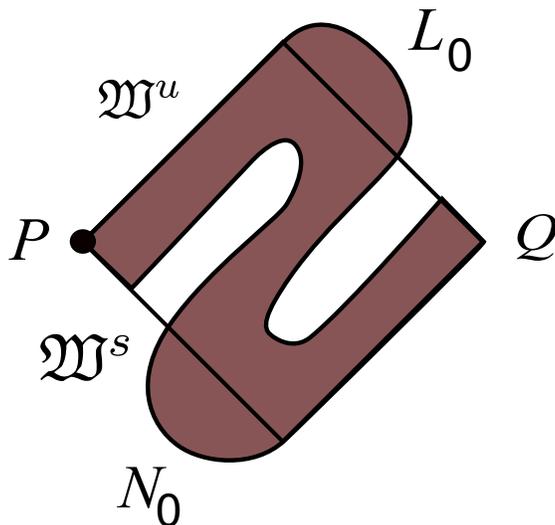


Figura 2.4: La intersección $\mathcal{R} \cap \tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{R})$, con una herradura incompleta. La zona coloreada corresponde a dicha intersección. En este caso es conexa, difiriendo fundamentalmente del caso completo.

arriba, en la dirección \mathfrak{W}^u_P . De esta forma cada hueco cuenta con una infinidad de números, cada uno identificándolo en un nivel jerárquico, que es el número de veces que es necesario iterar el mapeo para hacer aparecer el hueco. Para hacer unívoca la etiqueta de cada hueco le asignaré el cociente entre su número de cuenta y el número total de barras de la partición de la misma jerarquía. En el caso de la herradura ternaria este último es siempre 3^n . De esta forma el hueco $1/3$ es también $3/9$, $9/27$, etc. De esta manera, esta etiqueta es única, ya que el hueco j en la jerarquía n tiene j barras detrás de él. Cada aplicación le hará dos nuevos huecos a cada barra, que son $2j$ nuevos huecos. Con los j que ya estaban, tenemos en total $3j$. El número de barras de la partición también se multiplicó por tres, y por lo tanto el cociente se mantiene, como se puede ver la figura 2.5, donde muestro la numeración correspondiente al primer y segundo nivel de jerarquía. A esta numeración de los huecos se le conoce como las coordenadas lógicas del interior de la herradura.

Consideramos a \mathcal{R} y todos los huecos debidos al mapeo hasta ahora descrito, y pensemos en un nuevo mapeo, $\tilde{\mathcal{H}}$ que no alcance a formar los huecos completos, es decir, que las barras en $\mathcal{R} \cap \tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{R})$ no sean disjuntas, véase la figura 2.4. Si el primer hueco debido a estos mapeos no alcanza a atravesar \mathcal{R} por completo (y el correspondiente a sus inversos tampoco, por simetría), decimos que la herradura es incompleta, y que $\gamma < 1$. Porque así lo hemos exigido, los grados de desarrollo de $H\tilde{map}$ y $\tilde{\mathcal{H}}^{-1}$ coincidirán y los huecos debidos a las \mathfrak{W}^u y las \mathfrak{W}^s serán idénticos. Aún así numeraremos los huecos como si todos estuvieran ahí, a pesar de que si el primero no atraviesa a \mathcal{R} por completo, alguna de sus futuras imágenes no alcanzará a hacer todos los huecos que hubiera tenido que hacer. El valor de γ será la etiqueta unívoca del hueco. Si estuvieran todos los otros huecos transversales, al ir avanzando dentro

del espacio de \mathcal{R} con nuestro hueco produciríamos una escalera del Diablo. Una herradura incompleta se ve esquemáticamente como las figuras 2.5 y 2.6. De esta forma valores de $\gamma < 1$ corresponden a puntas del primer hueco que no atraviesan por completo \mathcal{R} . Esta manera de asignarle valores al parámetro de desarrollo tiene un efecto curioso. Existen valores de la forma $k/3^n$, $1 \leq k \leq 3^n$ para los cuales no existe una herradura, ya que el hueco correspondiente no se ha formado. El desarrollo de la herradura, conforme permitimos que el hueco vaya penetrando más y más en \mathcal{R} se comporta de forma mucho más terrible que una escalera del Diablo. Es una escalera del diablo atravesada por un fractal de discontinuidades. Estos monstruos analíticos aparecen con tanta naturalidad en Mecánica Clásica que hacen que las funciones diferenciales parezcan aberraciones.

Este parámetro, por lo tanto, no da tanta información sobre la topología de la herradura como podríamos creer. Por ejemplo, es posible encontrar herraduras con $\gamma < 1$ cuyo conjunto invariante tenga reglas simbólicas finitas con un alfabeto finito, y encontrar otra, con el mismo valor de γ , que no posea esta característica [17, 21, 19]. Un valor del exponentes de Liapunov asociados a P, Q suficientemente grande producirá el primer caso [22]. Por lo tanto, no debemos pensar que el valor γ determina unívocamente las características de un \mathcal{H} como homeomorfismo en el plano.

Aún así, aunque los valores de γ den brincos y pasemos de un tipo de dinámica a otro completamente diferente, siempre podemos deformar suavemente una curva \mathfrak{W}^s (y las simétricas, correspondientemente), de forma que una herradura ternaria se puede pasar homotópicamente a otra herradura ternaria, pasando lentamente los huecos a través de \mathcal{R} . A todo esto no debemos perder de vista que nuestro parámetro de desarrollo es función de alguna variable externamente controlable de nuestro sistema. En los ejemplos que mostraremos a continuación, γ será función del momento angular de los sistemas hamiltonianos, $\gamma \equiv \gamma(L)$. Es normalmente este parámetro externo el que controlará la homotopía de una herradura en otra. Esta consideración es especialmente importante para nuestra investigación, pues gracias a ese parámetro podremos unir los \mathfrak{W}^s y \mathfrak{W}^u correspondientes a las distintas herraduras como una superficie suave.

En los mapeos simplécticos que se obtienen de secciones de Poincaré de sistemas mecánicos, γ suele ser función de algún parámetro con significado físico, tales como el valor de una primera integral de movimiento o la intensidad de un campo perturbativo.

Si establecemos unos ejes coordenados llamados q y p , como se muestra en la figura 2.7, las herraduras que estudiemos serán invariantes frente a las reflexiones $q \rightarrow -q, p \rightarrow -p$. La elección de estos coincide con lo que observamos en mapeos hamiltonianos, donde los ejes representan coordenadas conjugadas y los puntos fijos forzosamente se encuentran sobre el valor $p = 0$ del momento. Si el problema presenta simetría especular respecto a q , la herradura lo reflejará.

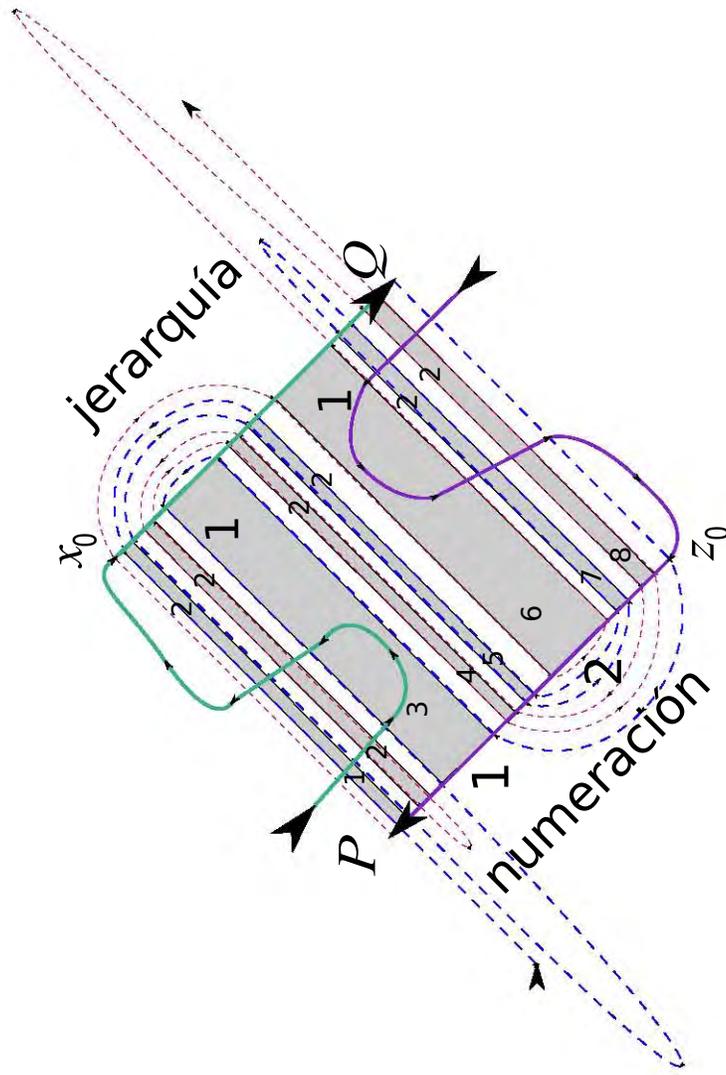


Figura 2.5: La posición de las coordenadas lógicas en una herradura incompleta. Obsérvese que el hueco numerado 1 en el primer grado de jerarquía es el 3 en el segundo grado. El cociente entre su número y 3^n se mantiene. Si dibujáramos las reflexiones de \mathcal{M}_P^s y \mathcal{M}_Q^s para tener las variedades inestables, tendríamos en este caso una herradura de $\gamma = 1/3$, ya que la punta de los primeros huecos se intersectaría.

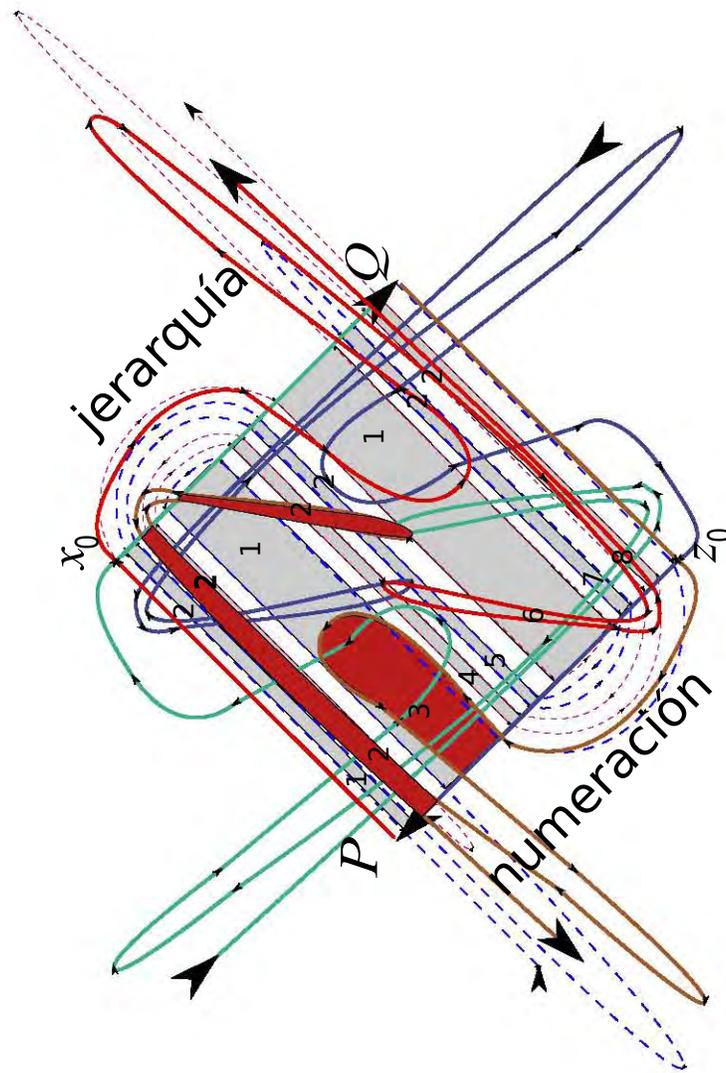


Figura 2.6: Una herradura in completa con $\gamma = 4/9$. En estos casos es imperante dibujar las verdaderas variedades estables e inestables de los dos puntos hasta el grado jerárquico necesario, puede ser que el hueco que suponemos atravesado no exista. Hemos superpuesto la herradura al diagrama de los huecos completos (en gris), y los huecos que se alcanzan a producir por el tentáculo inestable de Q (en marrón oscuro). Se observa que en general es difícil llevar la cuenta de los huecos existentes en una herradura con varias iteraciones representadas.

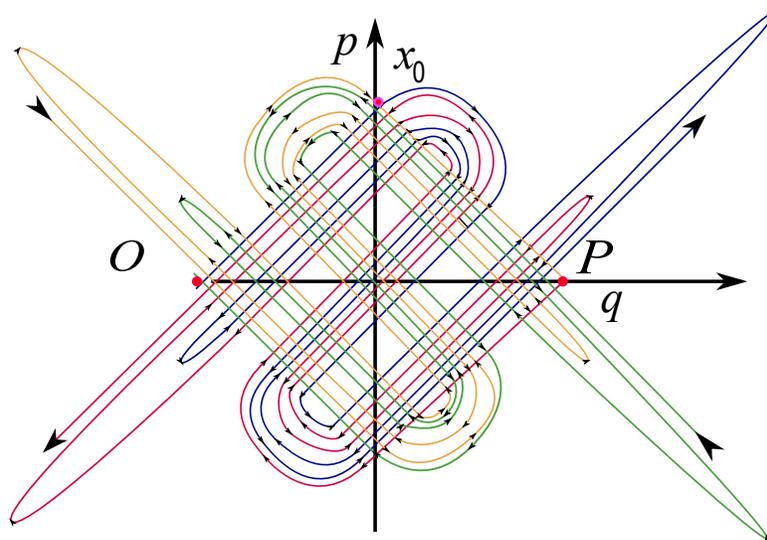


Figura 2.7: Una herradura con ejes de variables conjugadas. Aquí las simetrías impuestas se traducen en la invariancia frente a las inversiones $q \rightarrow -q$ y $p \rightarrow -p$.

CAPÍTULO 3

LOS MODELOS PARA EL TRABAJO

En éste capítulo detallo tres modelos distintos sobre los cuales obtuvimos resultados numéricos que sustentan este trabajo. Los modelos comparten ciertas cualidades topológicas en su espacio fase, que limitan la clase de sistemas en la que aplicamos nuestro trabajo. Antes que nada, detallo la clase en abstracto, dando la terminología necesaria para continuar con el resto del trabajo. Posteriormente describo un sistema gobernado por una función hamiltoniana y dinámica continua, un sistema gobernado por una función generatriz y una dinámica discreta, y finalmente un billar. En los tres se comprueban los resultados de éste trabajo.

3.1. Clase topológica

La aparición de sillas caóticas en mapeos bidimensionales se debe a la intersección transversal de variedades invariantes estables e inestables. Una primera intersección de este tipo fuerza una infinidad de ellas. Al observar la dinámica de áreas delimitadas por segmentos de dichas variedades, encontraremos que la dinámica es topológicamente conjugada a una herradura de Smale [7]. Eso nos hace inferir que, al igual que ésta última, los mapeos bidimensionales simplécticos contienen una infinidad de órbitas hiperbólicas de periodos arbitrariamente largos y una cantidad innumerable de órbitas hiperbólicas aperiódicas. Dichas órbitas son el esqueleto del caos.

Para forzar la aparición de un objeto similar a la herradura de Smale en cuatro dimensiones, debemos garantizar las intersecciones transversales de variedades invariantes estables e inestables. La codimensión de un objeto encajado en un espacio es la dimensión de ese espacio menos la dimensión del objeto. Definamos lo transverso como la siguiente propiedad sobre las codimensiones, de los objetos embebidos en el mismo espacio. Si M_1 y M_2 son dos variedades continuas y conexas en el espacio fase, decimos que son transversales sí y sólo sí:

$$\text{codim}(\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2) = \text{codim}(\mathbb{M}_1) + \text{codim}(\mathbb{M}_2). \quad (3.1)$$

Para garantizar que las variedades estables e inestables jueguen un papel relevante en la dinámica tienen que formar barreras efectivas al transporte en el espacio fase, es decir, deben tener codimensión uno. De ahí que la maraña homoclínica/heteroclínica divida el espacio fase en elementos medibles no triviales. Esta partición deberá ser tan complicada que uno no pueda, en general, predecir el comportamiento a largo plazo de una órbita particular sin tener con precisión infinita sus coordenadas iniciales.

Debemos asegurarnos entonces de que las variedades invariantes tengan codimensión 1. Usamos la generalización de los puntos hiperbólicos a objetos de mayor dimensión. Hablaremos de *variedades invariantes normalmente hiperbólicas*, abreviadas NHIMs, por su nombre en inglés, y de *variedades invariantes inestables parabólicas*. Los NHIMs se definen, siguiendo a Wiggins [23], de la siguiente manera. Decimos que una variedad es un NHIM (*normally hyperbolic invariant manifold*), si cumple las siguientes propiedades:

- invariante frente a la dinámica del sistema.
- el espacio tangente del espacio fase puede ser descompuesto en una componente estable, otra neutra y una inestable en cada uno de los puntos de dicha variedad.

Pragmáticamente, la segunda condición quiere decir que en la vecindad del NHIM, la dinámica hiperbólica domina sobre la dinámica neutra dentro mismo NHIM. Esto implica la existencia de variedades estables e inestables asociadas al NHIM. El ejemplo más sencillo de un NHIM son los puntos fijos hiperbólicos de una herradura como las mostradas en el capítulo anterior. Tomemos en cuenta que el espacio neutro tangente a este punto es vacío, por la baja dimensionalidad del sistema. Si, por ejemplo, extendemos el sistema añadiéndole una fase irrelevante que se mueva a ritmo constante, el punto se convertiría en un círculo, y el espacio tangente sobre esta dirección sería neutral.

Buscamos NHIMs de codimensión dos, así sus variedades estables e inestables asociadas tienen codimensión 1 y formarán, aunque sólo localmente, fronteras en el espacio fase [24].

Nos interesa que los NHIMs sean estables frente a perturbaciones. Podríamos imaginar que las variedades estables e inestables del NHIM formen una herradura de alta dimensión o algo parecido, pero su dimensión sería tan grande que dentro de ellos, la dinámica sería rica. Podemos imaginar que podríamos perturbar el sistema y este NHIM se pueda descomponer al estilo de los toros integrables por efectos KAM. Esto produciría que la complejidad de la dinámica procediera de dos fuentes de fractal distintas: la herradura de alta dimensión y los efectos KAM dentro de las mismos NHIM. Esto es algo con lo que no queremos lidiar en este trabajo. Para evitarnos complicaciones como un fractal de fractales debido a esa doble causa, como el que se expone en [25], usaremos NHIMs que se encuentren lejos de la zona de interacción. De hecho, la perturbación será anulada ahí.

Lo que es más, en los ejemplos estudiados los NHIM no serán objetos reales, sino casos límite de variedades de naturaleza parabólica, aunque utilizaremos muchas de sus propiedades como si estuvieran presentes en la dinámica realmente.

A la región cercana a la silla caótica le llamaremos la región de interacción. Este será un conjunto abierto definido por un valor mínimo de un potencial de interacción. Cuando este parámetro esté por debajo de ese valor, consideramos que nos encontramos fuera de aquella región.

Para poder estudiar la dinámica dispersiva necesitamos que fuera de esta región la dinámica tienda a lo integrable. Hablaremos de modelos que sean *maximalmente superintegrables* en un sentido asintótico. Un sistema mecánico es *integrable* si tiene n grados de libertad y la misma cantidad de integrales de movimiento en involución, es decir, que sean independientes según el criterio de paréntesis de Poisson [26]. Si I_1 e I_2 son dos integrales de movimiento no linealmente dependientes, se encuentran en involución si:

$$\{I_1, I_2\} = 0. \quad (3.2)$$

Por las reglas de la dinámica hamiltoniana, uno no puede tener más de n integrales de movimiento que se encuentren en involución. Es posible, de todas formas, que hasta $2n - 1$ sean funcionalmente independientes. En ese caso hablaremos de un sistema maximalmente superintegrable o completamente degenerado. El término *superintegrabilidad* es usual en la comunidad que estudia dispersión. El término degenerado se aplica al problema del potencial central en tres dimensiones, y muy especialmente, al problema de Kepler, que es completamente degenerado [27]. Cada órbita está etiquetada unívocamente por el valor de sus integrales. La última coordenada, que queda libre, es equivalente al tiempo que parametrice la órbita como curva en el espacio fase completo. Los sistemas que estudiaremos deberán converger, lejos de la región de interacción, a uno maximalmente superintegrable. Si el sistema en cuestión esta gobernado por una hamiltoniana $H(q, p)$ y existe otra función hamiltoniana H_0 cuya dinámica es máxima-mente superintegrable, nuestro criterio será

$$\lim_{\|q\| \rightarrow \infty} (H - H_0)q^{2+\epsilon} = 0. \quad (3.3)$$

Esto significa que la diferencia entre el sistema asintótico y el efectivo tiene que decrecer más rápido que un potencial $1/r^2$, a manera que las fases relativas converjan a valores estáticos, garantizando que el mapeo dispersivo esté bien definido y que las variables asintóticas no den saltos abruptos para $\|q\|$ suficientemente grande. Potenciales que decaen más lento tienen problemas de convergencia para el tiempo de dispersión y otras funciones similares (ver comentario al pie de página en la pagina 110 del libro [27]).

Sistemas del tipo límite se pueden ver como sumas directas de osciladores armónicos independientes, partículas libres o una suma directa de ambos.

El límite en la expresión 3.3 está tomado respecto a alguna variable que podamos interpretar como lejanía; en este sentido será una o varias coordenadas del espacio de configuración. Este último criterio nos obliga a que tengamos una variable que permita alejarnos de la región de interacción, es decir, alguna q que tenga libertad de moverse sin cotas. A esta variable le llamamos el canal abierto o la dirección abierta. Los sistemas que estudiaremos deben tener al menos una variable de posición abierta y una cerrada según este criterio. La variable cerrada la identificaremos con un ángulo, y nos garantizará la dirección neutra de los NHIMs. Usando coordenadas esféricas, podemos convertir familias enteras de problemas con un espacio de configuración no acotado en sistemas que cumplan nuestros requisitos.

3.2. Construcción de los modelos

Aquí expongo cómo producir sistemas que cumplan con los requisitos anteriormente descritos. A continuación presento tres ejemplos.

3.2.1. Cercanía a un modelo con simetría continua

Un buen método para garantizar que se cumplan los requisitos expuestos arriba es tomar un problema mecánico con una simetría continua. Gracias al teorema de Noether, sabemos que el sistema cuenta así con una cantidad conservada, independiente y en involución con E . Efectivamente se separa en hojas indexadas por el valor de esa primera integral. Al reducir el sistema a las hojas así obtenidas (que resultan dinámicamente independientes) y comprobar que en cada uno de ellos las variedades estables e inestables son de la dimensión adecuada, construiremos el sistema definitivo. Este truco es aplicable de forma iterativa, así que podremos construir a partir de un sistema que cumpla con los requisitos de dimensión arbitrariamente grande. Sigamos esta discusión con un ejemplo. Tomemos una función hamiltoniana que sea maximalmente superintegrable, H_0 y le añadamos una perturbación W_A que actúe como un potencial de rango limitado:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + W_A(q, p). \quad (3.4)$$

El rango de eficacia del potencial deberá ser tal que cumpla con la condición de la ecuación 3.3:

$$\lim_{\|q\| \rightarrow \infty} W_A(q, p) q^{2+\epsilon} = 0. \quad (3.5)$$

Hemos añadido un índice A a la perturbación que denota el rompimiento de simetría. Cuando $A = 0$, el sistema es invariante respecto a rotaciones planas. Cuando $A \neq 0$, tenemos perturbaciones del caso simétrico. Esto es posible si una expansión en potencias de W_A con respecto a A se comporta de forma decente, es decir, que para A suficientemente pequeños una truncamiento de la serie conlleve errores despreciables. La simetría rotacional es común en problemas de interés general, y la integral asociada, el momento angular, tiene una clara interpretación física. En estos sistemas tomaremos secciones de Poincaré indexadas por su energía, E , y momento angular, L . Como la primera la mantendremos constante a lo largo del trabajo, la obviaremos.

Concretando aún más el ejemplo, usaremos una extensión del sistema presentado por Jung, Luna Acosta y Orellana [13]. Si reescalamos las unidades del problema la función hamiltoniana la siguiente forma:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(y^2 + p_x^2 + p_y^2) - C \frac{\exp(-\sqrt{x^2 + y^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad (3.6)$$

donde C es la constante que indica la intensidad del potencial dispersivo.

Nuestra extensión a tres dimensiones es directa:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2}(y^2 + z^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - C \frac{\exp(-\sqrt{x^2 + y^2 + (1+A)z^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + y^2 + (1+A)z^2 + 1}}. \quad (3.7)$$

Esta última expresión es el modelo que nos proporcionará los primeros resultados de éste trabajo.

Para resaltar claramente la forma de la dinámica integrable y para resaltar las propiedades topológicas del modelo, lo usaremos siempre en la siguiente forma cilíndrica:

$$H(q, \rho, \theta, p_q, p_\rho, L,) = \frac{1}{2} \left(\rho^2 + \frac{L^2}{\rho^2} + p_q^2 + p_\rho^2 \right) - C \frac{\exp \left(- \sqrt{q^2 + \rho^2 [\sin(\theta)^2 + (1 + A) \cos(\theta)^2] + 1} \right)}{\sqrt{q^2 + \rho^2 [\sin(\theta)^2 + (1 + A) \cos(\theta)^2] + 1}}. \quad (3.8)$$

Siendo el cambio de variables en posición:

$$x = q \quad (3.9)$$

$$y = \rho \cos(\theta) \quad (3.10)$$

$$z = \rho \sin(\theta), \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

y los momentos (p_q, p_ρ, L) conjugados a (q, ρ, θ) , respectivamente.

Introduzcamos la distancia efectiva D :

$$D^2 = q^2 + \rho^2 [\sin(\theta)^2 + (1 + A) \cos(\theta)^2] + 1, \quad (3.13)$$

y fijemos la constante $C = 1$. En el trabajo bidimensional presentado en [13], esa variable controla la intensidad del potencial de interacción y por ende el desarrollo de la herradura. Aquí controlaremos ese desarrollo por el valor de L , de forma que $\gamma = \gamma(L)$ y es monótonamente decreciente.

Así la hamiltoniana se separa como deseamos:

$$H = H_0 + W_A, \quad (3.14)$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2} (\rho^2 + L^2/\rho^2 + p_q^2 + p_\rho^2), \quad (3.15)$$

$$W_A = -\frac{1}{D} \exp(-D)$$

H_0 es integrable: presenta la forma de un oscilador y una partícula libre separados. Lo que es más, H_0 es maximalmente superintegrable, ya que estos problemas son degenerados. El periodo del oscilador funge como un reloj interno del sistema [28]. Esto permite considerar a las condiciones iniciales, módulo una fase, como integrales de movimiento, de las cuales siempre se encuentran n en involución y $n - 1$ no. Analicemos esto en detalle

Fijando el valor de la energía H_0 en E_0 y el momento lineal inicial p_q en p_0 obtenemos un sistema con energía total

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E_0 - p_0^2/2 \\ &= \frac{1}{2} (\rho^2 + L^2/\rho^2 + p_\rho^2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Queda claro que L es una primera integral de movimiento, así que la dinámica de θ es cíclica. Fijando ahora valor de $L = L_0$, obtenemos una hamiltoniana de un solo grado de libertad, $K(\rho, p_\rho)$ separable en potencial efectivo:

$$V(\rho) = \frac{\rho^2}{2} + \frac{L_0^2}{2\rho^2}, \quad (3.17)$$

y energía cinética:

$$T(p_\rho) = \frac{p_\rho^2}{2}. \quad (3.18)$$

Estamos realmente usando a L_0 como un parámetro externo una vez que la variable θ ha sido ignorada. Este sistema dinámico reducido es soluble mediante la conocida formula [29]:

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2/m[\tilde{E} - V(\rho)]}}. \quad (3.19)$$

3.2.2. Las variedades estables e inestables para 3 grados de libertad

Una hamiltoniana maximalmente superintegrable en un espacio acotado obliga, en las coordenadas adecuadas, a una fibración de Hopf [30, 31]. Muestro esto expresando H_0 en coordenadas cartesianas una vez más:

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + y^2 + p_z^2 + z^2) \quad (3.20)$$

Hemos agrupado los términos de forma que sea evidente la existencia de dos acciones independientes:

$$I_y = (y^2 + p_y^2)/2, \quad I_z = (z^2 + p_z^2)/2, \quad (3.21)$$

$$\omega_y = 1, \quad \omega_z = 1. \quad (3.22)$$

Esto obliga a una fibración suave, en el sentido de que las fases relativas de los aros que fibran el toro se mantienen cercanas.

Fijando el valor de $H_0 = E$ nos queda una variedad de cinco dimensiones. Si definimos la hamiltoniana estática por:

$$\tilde{H}_0 = H_0 - p_x^2/2 = I_y + I_z \quad (3.23)$$

y fijamos el valor de $p_x = p_{x,0}$, nos reducimos a una subvariedad cuatridimensional. En esta subvariedad observamos que las coordenadas (y, p_y, z, p_z) forman una 3-esfera de radio

$$2E - p_{x,0}^2 = y^2 + z^2 + p_y^2 + p_z^2. \quad (3.24)$$

Además, del hecho de que son dos osciladores armónicos independientes nos queda claro que las órbitas deben de recorrer órbitas sobre toros con idénticos periodos. Por lo tanto cada órbita es un aro circular sobre un toro con acciones I_y e I_z constantes. Esta es la famosa fibración de Hopf, donde cada órbita tiene exactamente un

engarzamiento con cualquier otra. Esta variedad topológica viajaría en el espacio fase completo con momento p_x . Como no podemos intercambiar energía entre los distintos grados de libertad, cada órbita queda unívocamente etiquetada por la energía total (E), la esfera a la que pertenece (p_x), el toro al que pertenece en esa esfera ($I_y \circ I_z$) y la diferencia de fases entre las coordenadas angulares (χ_{rel}) y q_0 . Eso nos da cinco integrales de movimiento, aunque claramente no todas están en involución. En particular, las acciones entre los osciladores en los ejes y y z son conjugadas con χ_{rel} .

Aquellas 3-esferas de radio máximo para energía dada serán estacionarias en la dirección x ; i. e., $p_x = 0$. En cierto sentido, ellas actuarán como nuestros NHIMs. Al considerar la perturbación W_A con $A = 0$ (denotada W_0), el momento p_x deja de ser integral para toda región finita. Sin embargo, por la rapidez con la que decrece el potencial perturbativo en ambas direcciones, consideraremos que habría un par de NHIMs como límite de las órbitas que se alejan con momento asintóticamente convergente a 0. La igualdad de la geometría de este objeto límite con el anteriormente descrito está garantizada por la rapidez con la que converge W_A a cero, dada por la ecuación 3.5. Supongamos que construimos el potencial con los dos NHIMs a izquierda y derecha. Después los mandamos al infinito, esto es, los alejamos tanto como para hacer la influencia de W_A despreciable. Posteriormente rompemos la simetría. De ésta forma tenemos garantizada la geometría de éstos objetos límite. Valdría la pena remarcar que, cómo están fuera de la influencia del potencial W_A , son inestables en un sentido parabólico, no hiperbólico. Esta distinción es irrelevante para nuestra discusión, y por eso los llamo NHIMs de todas formas.

Regresemos a la forma cilíndrica de la Hamiltoniana y consideremos ésta su representación natural. Es decir, queremos no perder de vista el término centrífugo $L^2/2\rho^2$, puesto que hay un cambio cualitativo en la función cuando el momento L es igual a cero. En los párrafos anteriores definimos implícitamente las variedades estables e inestables de nuestro problema. Estos son realmente los objetos que nos interesan, y no tanto el NHIM, que aquí sólo sirve para demostrar que tienen la codimensión que nos interesa. Si restringimos nuestra dinámica a hojas de energía constante, tenemos un espacio fase de cinco dimensiones. Las variedades estables e inestables están definidas por la condición

$$\lim_{\|q\| \rightarrow \infty} p_q = 0. \quad (3.25)$$

Esto define implícitamente una ecuación, ya que la energía que se puede usar para la translación en q debe provenir exclusivamente del potencial perturbativo, es decir,

$$\frac{p_q^2}{2} + W_A(q, \rho, \theta) = 0. \quad (3.26)$$

Entonces esta familia de órbitas tiene codimensión uno sobre la superficie de energía constante, y sus NHIM límite codimensión dos, fijadas por las condiciones

$$\|q\| \rightarrow \infty \quad (3.27)$$

$$p_q = 0. \quad (3.28)$$

Definamos las variedades estables e inestables como:

$$\mathfrak{W}^s_+ = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0^+\} \quad (3.29)$$

$$\mathfrak{W}^u_+ = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0^-\} \quad (3.30)$$

$$\mathfrak{W}^s_- = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow -\infty} 0^-\} \quad (3.31)$$

$$\mathfrak{W}^u_- = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow -\infty} 0^+\} \quad (3.32)$$

Cada órbita está etiquetada por un juego de 3 cantidades asintóticas que escogimos de forma relevante para el problema. La más evidente es su momento angular L . Para escoger las otras dos podemos tomar un punto donde $|q|$ sea suficientemente grande, llamémosle q_0 y la dinámica esté dominada por H_0 (ec. 3.20). Entonces ρ oscilará confinado en el potencial $V(\rho)$ (ec. 3.17) y podemos tomar como fase su valor al cruzar el plano $q = q_0$. De igual manera podemos tomar el valor de θ en ese momento. Para parametrizar la órbita, pondremos el reloj en cero también ahí. A todas estas cantidades las denotaremos con un subíndice cero. De esta forma tenemos unas coordenadas sobre las $\mathfrak{W}^s, \mathfrak{W}^u$.

Analicemos ahora la dinámica reducida a un mapeo de Poincaré. La sección escogida fue definida por cada vez que la variable radial alcanza un máximo local. Esto fue inspirado por el caso límite de un potencial confinante infinitamente rígido, v.gr. la pared de un billar, y el mapeo de Poincaré-Birkhoff usado en su estudio. Las condiciones que determinan la sección de Poincaré son:

$$\dot{\rho} = 0, \quad \ddot{\rho} < 0. \quad (3.33)$$

De aquí en adelante denotaremos a esta sección \mathbb{M}_P , y al mapeo sobre ella T_A .

La aparición de la herradura de Smale en estas secciones se puede dibujar en papel cuando $A = 0$. Podemos verlas como una consecuencia del complejo intercambio de energía entre los grados de libertad ρ y ϕ que se debe al potencial W_0 . Cuando obligamos a la perturbación a desaparecer, los \mathfrak{W}^u y \mathfrak{W}^s coincidirán como separatrices, distinguiendo a las órbitas que monótonamente se alejan en una u otra dirección. Esto nos da una distinción cualitativa importante, puesto que es posible ahora hablar de transmisión y reflexión, dependiendo donde situemos nuestro q_0 .

Sabemos que la sección de Poincaré proyecta toros invariantes en toros invariantes de menor dimensión, así que toda la discusión sobre la topología de nuestras variedades invariantes se traduce íntegramente a la sección.

Hay que hacer notar que el subconjunto de órbitas que describen hélices circulares no pertenece a \mathbb{M}_P . Estas sólo ocurren en el caso $A = 0$, y aún así son un subconjunto despreciable.

A fin de no hacer más compleja la notación, denotaremos la intersección de los \mathfrak{W} y la sección con el mismo símbolo, dado que el análisis será en la sección de Poincaré, y no en el espacio fase completo.

3.2.3. El caso simétrico

Continuemos con $A = 0$. En este caso L es integral de movimiento y θ es ignorable. En ese caso separamos la dinámica en un continuo de hojas con L constante. A

energía constante podemos ver que L controla el desarrollo de la herradura ternaria así obtenida. En el ejemplo publicado en [13], este último se debe a la relación entre el potencial perturbativo y la energía total. Dado que esta herradura refleja el intercambio de energía entre q y ρ , podemos ver que L limita la energía disponible para este intercambio. La energía gastada en el movimiento alrededor del eje q no puede pasar de una cota inferior, dada la naturaleza repulsiva del potencial centrífugo. Este argumento vale en particular en el régimen asintótico, entonces podemos estimar la energía que disponemos para formar la herradura. Sobre la sección de Poincaré siempre estamos en un máximo local de ρ , entonces:

$$E_0 = \frac{L^2}{2\rho_{\text{máx}}^2} + \frac{\rho_{\text{máx}}^2}{2}. \quad (3.34)$$

Esto nos da una ecuación para obtener $\rho_{\text{máx}}$ a energía dada:

$$\rho_{\text{máx}} = \sqrt{E + \sqrt{E^2 - L^2}}. \quad (3.35)$$

Es claro que la menor energía que le podemos asignar al movimiento oscilatorio es también cuando $\rho = \rho_{\text{máx}}$. La restante será:

$$\tilde{E} = E - \frac{L^2}{E + \sqrt{E^2 - L^2}}. \quad (3.36)$$

Esto significa que hay un valor de L para el cual no hay más energía disponible para el intercambio, y por ende la herradura es inexistente, mientras que para valores de L cercanos a cero, casi toda la energía está disponible para la herradura. En las simulaciones numéricas hemos descubierto que $E \approx 10.0, L \gtrsim 0$ produce una herradura completa.

Resumiendo: a cada una de las hojas del sistema, indexada por el momento angular fijo, (denotado L de aquí en adelante), presentará una herradura de Smale en su sección de Poincaré. El grado de desarrollo γ de la herradura está determinado por el valor de L . Al tener una foliación continua del espacio fase en hiperplanos dinámicamente independientes podremos transitar suavemente entre una herradura plenamente desarrollada hasta una prácticamente inexistente.

3.3. Un mapeo abstracto

Ahora que hemos capturado las propiedades topológicas esenciales en un modelo continuo con una hamiltoniana que se puede simular en un laboratorio, podemos trabajar con un modelo más simple. Hemos reducido la dinámica a la sección de Poincaré y la superficie de energía constante, i.e., estamos trabajando ahora con espacios fases cuatridimensionales y una dinámica discreta en el tiempo. Un mapeo simpléctico iterado como sistema dinámico ahorra mucho poder de cómputo y, por ende, permite explorar más resultados.

Buscaremos un mapeo que coincida en cualidades con las secciones de Poincaré del sistema mecánico presentado en la sección anterior. Es conveniente, pues, escoger funciones generatrices que produzcan una transformación canónica, donde

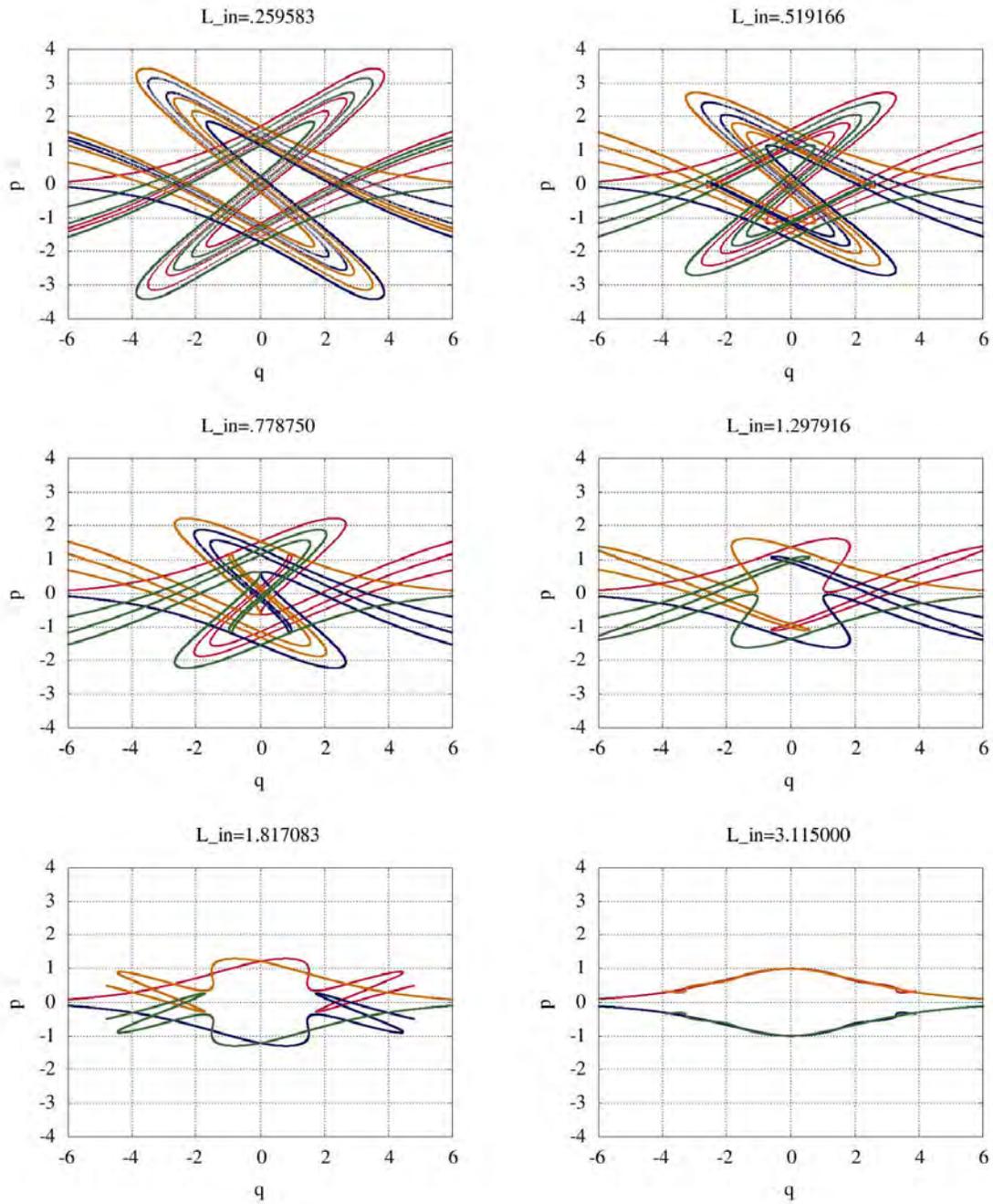


Figura 3.1: Las secciones de Poincaré $\mathbb{M}_{\mathcal{P}}$ del modelo de la función hamiltoniana 3.7, con distinto valor de momento angular inicial. Se presenta la reducción a subsistemas para el caso $A = 0$. Sólo la primera presenta un desarrollo completo, $\gamma = 1$. la última tiene un valor de γ comparativamente pequeño.

una parte de la función cumpla el papel del potencial perturbativo con las mismas cualidades que W_A en la ecuación 3.15. Para forzar la simetría temporal, hemos escogido el esquema “medio vuelo, patada, medio vuelo”. De esta manera las herraduras presentan simetría respecto a la inversión $q \rightarrow -q$. Esto no es estrictamente necesario desde el punto de vista dispersivo. Media patada más o menos no afecta los valores de los estados finales sino infinitesimalmente. Lo hacemos para que nuestras herraduras se vean más claras en las ilustraciones. El vuelo corresponde sencillamente a adelantar las coordenadas de posición por el valor de las de momento, media patada corresponde a hacerlo por la mitad del valor (una dislocación lineal, *shear transformation*). La patada es la transformación canónica dada por la función generatriz, que correspondería a la acción de un potencial sobre los momentos, aunque no exclusivamente sobre ellos.

Una función que cumple con nuestras especificaciones es:

$$G(q, \theta, \tilde{p}, \tilde{L}) = q\tilde{p} + \theta\tilde{L} + (L_{\text{máx}} - \tilde{L})(1 + A \cos \theta)V(q), \quad (3.37)$$

con potencial V :

$$V(q) = -e^{-q^2}. \quad (3.38)$$

La patada está dada implícitamente por

$$\tilde{q} = \frac{\partial G}{\partial \tilde{p}}, \quad p = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad (3.39)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\partial G}{\partial \tilde{L}}, \quad L = \frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad (3.40)$$

donde las coordenadas con tilde corresponden a “después de la patada” y las coordenadas sin tilde a “antes de la patada”. El medio vuelo libre está dado sencillamente por

$$\tilde{q} = q + 1/2p_n, \quad (3.41)$$

$$\tilde{\theta} = \theta + 1/2L_n, \quad (3.42)$$

$$\tilde{p} = p, \quad (3.43)$$

$$\tilde{L} = L. \quad (3.44)$$

Denotemos a éste $F_{1/2}$ y a la patada P_A , haciendo explícito en el primer caso que es “medio vuelo” y en el segundo la dependencia del parámetro de asimetría. El mapeo completo es

$$T_A = F_{1/2} \circ P_A \circ F_{1/2}, \quad (3.45)$$

resultando simpléctico al ser la composición de mapeos simplécticos. Siendo un poco más explícitos, desglosemos la acción de cada paso del mapeo, usando variables auxiliares primadas en cada paso. El valor de las coordenadas en el paso n será denotado por un subíndice n . También será cómodo trabajar usando la función auxiliar “fuerza”:

$$F(q) = -dV/dq = -2qe^{-q^2}. \quad (3.46)$$

Primero, un medio vuelo libre

$$q' = q_n + p_n/2, \quad (3.47)$$

$$\theta' = \theta_n + L_n/2, \quad (3.48)$$

$$p' = p_n, \quad (3.49)$$

$$L' = L_n. \quad (3.50)$$

Después, la “patada”:

$$q'' = q', \quad (3.51)$$

$$\theta'' = \theta' - (1 + A \cos \theta')V(q'), \quad (3.52)$$

$$p'' = p' + (L_{\text{máx}} - L') \frac{(1 + A \cos \theta')F(q')}{1 + AV(q') \sin \theta'}, \quad (3.53)$$

$$L'' = \frac{L' + L_{\text{máx}}AV(q') \sin \theta'}{AV(q') \sin \theta' + 1}. \quad (3.54)$$

Y finalmente medio vuelo libre más.

$$q_{n+1} = q'' + 1/2p'', \quad (3.55)$$

$$\theta_{n+1} = \theta'' + 1/2L'', \quad (3.56)$$

$$p_{n+1} = p'', \quad (3.57)$$

$$L_{n+1} = L''. \quad (3.58)$$

Cuando $A = 0$, obtenemos otra vez que L se conserva, haciendo irrelevante la coordenada θ , así que le llamaremos simetría rotacional a este caso. También podemos observar que la parte que actúa como el potencial perturbativo,

$$W_A = V(q)(L_{\text{máx}} - L)(1 + A \cos \theta), \quad (3.59)$$

decrece como una campana gaussiana, siendo efectivamente de muy corto alcance. Si lo consideramos cero lejos de $q = 0$ podemos ver que la patada tiende a la identidad. Los dos medios vuelos componen un vuelo completo con momentos constantes, y el sistema es maximalmente superintegrable. La constante $L_{\text{máx}}$ actúa satisfaciendo nuestra intuición física. Conforme L se va acercando a este valor, la patada efectiva se vuelve irrelevante, y no hay desarrollo de la herradura. El valor de L estará confinado al intervalo abierto $\mathbb{I} = (0, L_{\text{máx}})$.

El espacio fase que consideramos para el mapeo es

$$(q, p, \theta, L) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathbb{T}^1 \times \mathbb{I}. \quad (3.60)$$

Notemos que θ no se comporta como una variable de posición “natural” en el sentido en que es afectada por la patada. Esto es irrelevante, ya que sabemos que las transformaciones canónicas pueden mezclar momentos y posiciones, mientras respeten la estructura simpléctica. Sin embargo, bajo el sistema asintótico gobernado por F_1 dicha variable se comporta como una variable angular tradicional. De hecho se comporta como lo haría una variable de un 2-toro en una sección de Poincaré, saltando su valor dependiendo de su “momento angular”, o mas bien, la forma en que la órbita

se vaya enrollando en el toro. Así que aquí tenemos un 1-toro (un círculo) girando con momento L y viajando con momento p , estereoscópicamente, sobre este espacio fase, que denotaremos \mathbb{M}_p mañosamente.

Para definir las variedades invariantes del mapeo estables e inestables, nos robaremos la definición del sistema anterior:

$$\mathfrak{W}^s_+ = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0^+\} \quad (3.61)$$

$$\mathfrak{W}^u_+ = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0^-\} \quad (3.62)$$

$$\mathfrak{W}^s_- = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow -\infty} 0^-\} \quad (3.63)$$

$$\mathfrak{W}^u_- = \{\mathbf{q}|p_q \xrightarrow{q \rightarrow -\infty} 0^+\} \quad (3.64)$$

Si tomamos $A = 0$, θ recibe de todas formas una patada, sin embargo L es conservada y esa patada resulta ser una serie sobre los valores del potencial $V(q)$. Podemos entonces reducir entonces el espacio fase a (q, p) y dibujarlos en papel bidimensional. Tomando esto en cuenta podemos escribir explícitamente la acción de T_0 sobre (q, p) :

$$q_{n+1} = q_n + p_n - (q_n + p_n/2) \exp(-(q_n - p_n/2)^2)(L_{\text{máx}} - L) \quad (3.65)$$

$$p_{n+1} = p_n - 2(q_n + p_n/2) \exp(-(q_n - p_n/2)^2)(L_{\text{máx}} - L) \quad (3.66)$$

La herradura producida por estos mapeos se muestra en la figura 3.2, con varios valores de L . Obsérvese su similaridad con la figura 3.1

Podemos observar que la naturaleza de la patada hace que también tengamos “toros fijos al infinito” de naturaleza parabólica, la herradura es ternaria, y el transporte ocurre a lo largo de la coordenada q . La forma en que q y θ afectan mutuamente sus momentos conjugados esta dada por la patada y su intensidad depende del factor $(L_{\text{máx}} - L)$. En este sentido $L_{\text{máx}}$ actúa como un determinante de la máxima energía disponible para el sistema. Encontramos numéricamente que el valor $L_{\text{máx}} = 6.28$ basta para producir todo el escenario de desarrollo de la herradura.

3.4. Un billar

Hemos trabajado también con un tercer modelo que es distinto a los otros dos en una cualidad fundamental. El modelo es un billar tridimensional. Con esto queremos decir que las fronteras o paredes del billar son variedades suaves bidimensionales en una región del espacio de posiciones. La motivación para usar un billar es la siguiente. Los billares bidimensionales han sido utilizados *ad nauseam* para estudiar las propiedades de sistemas caóticos en mecánica clásica y cuántica. De ellos existe una interminable lista de resultados, que van desde rigurosamente matemáticos, de muchísima abstracción, hasta experimentos de laboratorio pasando por resultados numéricos extensivos. En billares tridimensionales hay comparativamente poco trabajo, aunque podemos encontrar modelos específicamente en mecánica estadística, relacionados con problemas de transporte [32, 33]. El aumentar un grado de libertad impide hacer los análisis relativamente sencillos que concede el caso plano. Nosotros tomaremos otra vez un ejemplo que esté próximo a un caso reducible por simetría rotacional, y lo deformaremos evitando perder la codimensión de las variedades estables e inestables. Esto se debe hacer con cuidado. Las cualidades de los billares

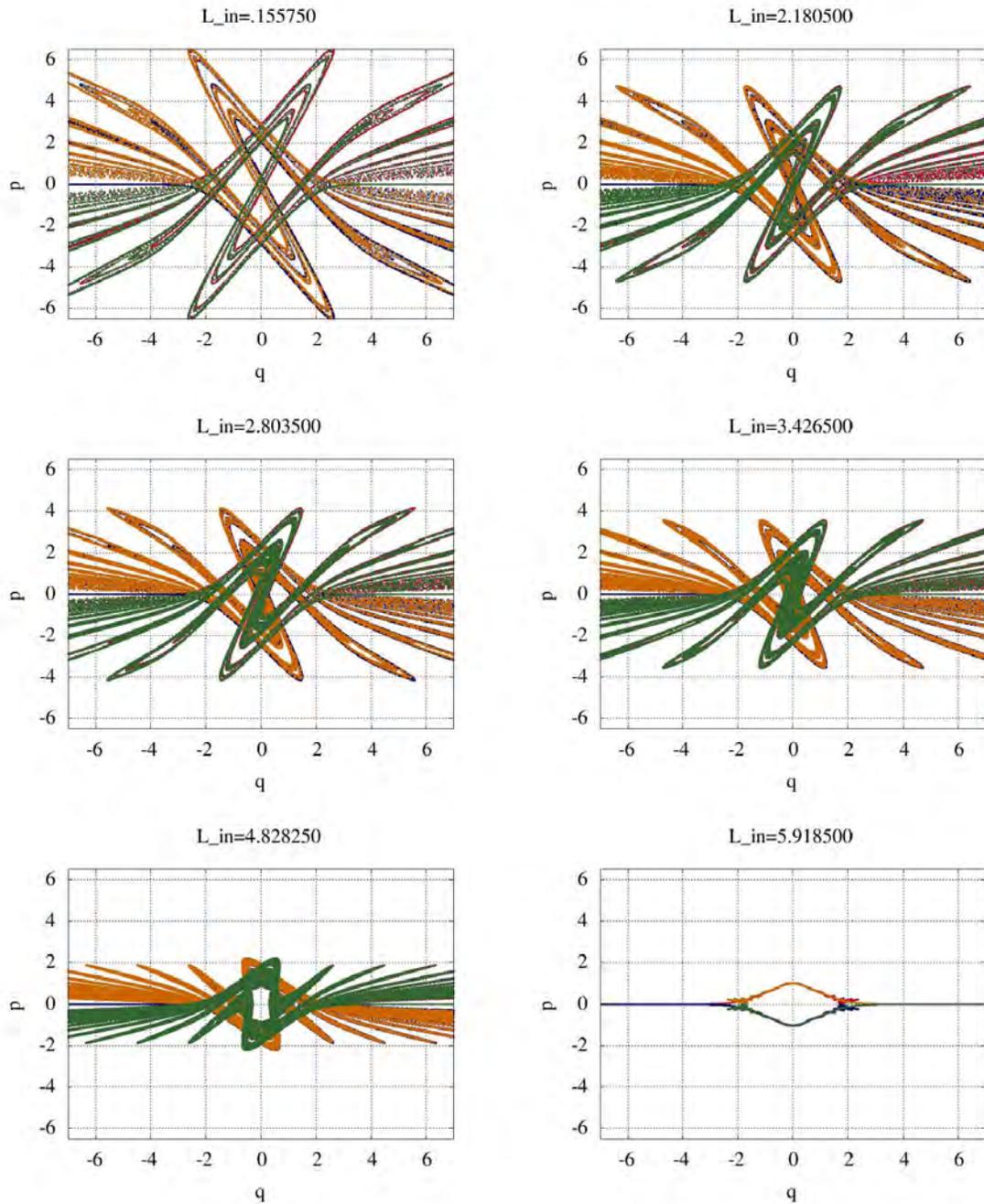


Figura 3.2: La herradura en el mapeo abstracto definido por la función generatriz 3.37, $A = 0$. Compárese con la figura 3.1

pueden cambiar muy abruptamente, respecto a ligeras perturbaciones en la frontera, puesto que funcionan efectivamente como potenciales infranqueables. Ejemplos de esta terrible forma de comportarse se pueden ver en [34], donde un cambio aparentemente pequeño a la frontera del billar cambia totalmente las cualidades dinámicas del sistema.

La dinámica del billar es simple. Una partícula se mueve libremente hasta encontrar una pared del billar. Ahí rebota elásticamente, es decir, la componente del momento que sea ortogonal al plano tangente de la frontera cambia de signo, mientras el resto permanecerá igual. La energía cinética se conserva. Una descripción detallada de estas reglas se puede consultar en [35]. Es fácil ver que la riqueza de la dinámica provendrá de las paredes, puesto que la partícula no tiene ninguna riqueza interna y no hay potenciales suaves. El equivalente a la sección de Poincaré que se usa en billares es la llamada sección de Poincaré-Birkhoff, que procedo a describir: una vez fijada la energía (en este caso por la magnitud del momento lineal total),

$$E = \frac{|p|^2}{2m}, \quad (3.67)$$

hacemos lo siguiente: fijamos un sistema de coordenadas local sobre la frontera del billar. Cualquier par de coordenadas bien definidas sobre ésta funcionará. Los momentos conjugados a estas direcciones son las componentes del momento que no cambian de signo al rebotar. La sección está formada por todos los puntos que justo acaban de rebotar en la frontera, con coordenadas de posición dadas por alguna parametrización de ésta y sus momentos conjugados. El mapeo de Poincaré-Birkhoff le asigna a cada punto el siguiente rebote que tenga con la frontera, indicado en el mismo sistema de coordenadas.

Existen billares donde no hay imágenes definidas para cada rayo en el espacio de configuración. Esto puede deberse a que el rayo no vuelve a tocar nunca más la frontera del billar después de cierto número de iteraciones, o que la golpea en una esquina, donde la derivada no está definida. El segundo problema lo evitaremos usando billares sin esquinas. El primer problema no lo será en nuestro enfoque: así será un billar dispersivo. Tomaremos conjuntos de puntos que no tengan preimagen bajo el mapeo de Birkhoff-Poincaré, que provengan de órbitas libres. Esto define para ellos el régimen asintótico. Los mapearemos hasta que no vuelvan a tener posible contacto con la frontera otra vez.

Una vez que la partícula no vuelva a tener interacciones con la frontera volará libremente en el espacio, con lo cual se vuelve trivialmente integrable. Esto es, vuelven a estar en nuestra región asintótica. Nos interesa, pues, un billar en donde las partículas provengan de una región libre, interaccionen un número finito de veces con la mesa de billar y escapen. Entonces las fronteras del billar serán un obstáculo dispersivo y ocuparán el lugar del potencial W_A en los ejemplos anteriores. Las únicas órbitas del espacio fase que consideraremos interesantes, entonces, son las que en el pasado o en el futuro han interactuado con la mesa de billar. Para las otras el mapeo dispersivo se reduce a la identidad.

El billar que hemos escogido recuerda a una ánfora antigua del Mediterráneo o una olla, como se aprecia en la figura 3.4. En el caso asimétrico presenta un ligero aplanamiento e uno de sus lados. La frontera del billar está definida por una función $\rho(q, \theta)$ que nos da la posición de la pared como una distancia al eje q . Primero defi-

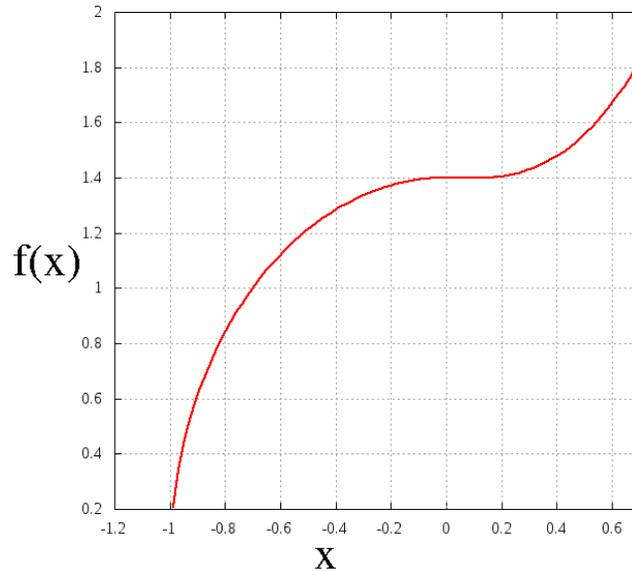


Figura 3.3: La función $f(q)$ que define la frontera del billar.

niremos dos funciones auxiliares, la frontera simétrica, $f(q)$, y la deformación $r(q, \theta)$. Primero construimos la función auxiliar $f(q)$ que podemos ver en la figura 3.3.

$$f(q) = \begin{cases} 1.4\sqrt{1-q^2}, & \text{para } q \leq 0 \\ a_0q^{2.5} + a_1q^2 + 1.4, & \text{para } 0 < q < \epsilon, \end{cases} \quad (3.68)$$

con

$$a_0 = \frac{14}{25}(3.49)^{-1/4}, \quad (3.69)$$

$$a_1 = -0.7 \quad (3.70)$$

$$, q_0 = (3.49)^{1/2}. \quad (3.71)$$

La dependencia angular está dada por:

$$r(q, \theta) = 1 + A \cos(\theta) \cos\left(\frac{q\pi}{2q_0}\right)^2. \quad (3.72)$$

La frontera queda entonces como un radio ρ construido a partir de las dos funciones:

$$\rho(q, \theta) = r(q, \theta)f(q) \quad (3.73)$$

Consideramos que la frontera del billar está definida poco más allá del punto más angosto del cuello. Después de la distancia $\epsilon < 1$, el régimen será de partícula libre.



(a) El billar del ánfora para el caso simétrico, $A = 0$. (b) El billar con una deformación fuerte, $A = 0.4$.

Figura 3.4: El billar del ánfora simétrico y asimétrico.

Una versión plana y asimetrizada de este billar fue usada en [36, 37] para otros estudios de dispersión. Ahí se trató de relacionar el desarrollo de la herradura con el tiempo de recurrencia de la isla elíptica más grande en su interior. El sistema demostró ser un sistema dispersivo conveniente.

Una visualización del billar puede ayudar a comprender la dinámica, obsérvese que no tiene esquinas, en las figuras 3.4(a) y 3.4(b). Ahí se ve la boca del billar rodeada de blanco, que es donde entran y salen las partículas. El interior del billar define nuestra región de interacción.

En el caso simétrico cada valor del momento angular inicial producirá una herradura en la sección de Poincaré-Birkhoff distinta. La razón es la misma que antes. Una mayor cantidad de energía dedicada exclusivamente a mantener el valor del momento angular evita que se desarrolle profundamente la maraña hetero/homoclínica. El NHIM exterior de nuestras herraduras, esta vez de naturaleza binaria, es el cuello de la botella. En este aro hay, para cada valor de L , un continuo de órbitas cuasiperiódicas inestables que difieren sólo en la fase inicial. Recorriendo todas las fases y los momentos angulares posibles tenemos una variedad bidimensional que será nuestro NHIM. Cuando consideramos el ánfora imperfecta, el cuello se mantiene igual, de forma que no afectamos la naturaleza del NHIM. Las variedades estables e inestables del NHIM forman la herradura, cuyos tentáculos distinguen las partículas que alcanzan a salir de una vez de la botella, a aquéllas que regresan al interior después de acercarse a la boca.

Al tener sólo una dirección de escape y entrada, consideraremos nuestro espacio fase reducido a sólo aquellas órbitas que tanto en el futuro como en el pasado hayan tenido contacto con el interior de la botella.

Con este tercer modelo se apreciará que los resultados de este trabajo son de

índole más general. No dependen del tipo de herradura del sistema, ni de la presencia asintótica o cercana de los NHIM's, sino sólo de lo transverso de los \mathfrak{W}^u 's y \mathfrak{W}^s 's y de la topología del dominio de nuestras funciones de dispersión. Esto segundo lo aclararemos en el siguiente capítulo.

Los resultados de este tercer modelo fueron obtenidos numéricamente por O. Merlo, coautor del artículo publicado con nuestros resultados [38].

CAPÍTULO 4

FUNCIONES DE DISPERSIÓN

En este capítulo presenté el concepto y uso de función de dispersión. Estas jugaron un papel muy importante en la obtención de resultados de ésta tesis, aunque de forma indirecta. Fue por medio de la sección eficaz, que se detalla en el próximo capítulo, que las funciones de dispersión aportaron su parte en nuestra investigación.

4.1. El caso bidimensional

Los sistemas caóticos bidimensionales han sido extensivamente estudiados [39], especialmente aquellos que son dispersivos [11, 40, 41]. Estos últimos han producido unas herramientas utilísimas que sólo dependen de medidas asintóticas, lo que nos libra del problema de interferir con la región de interacción. Éstas son las funciones de dispersión [10, 19, 42, 43].

Las funciones de dispersión tienen como dominio las órbitas asintóticas de entrada, y como codominio alguna o varias de las componentes de las órbitas asintóticas de salida. Si la función de dispersión identifica unívocamente cada órbita de entrada con un estado asintótico de salida, es entonces el mapeo de dispersión. Cuando hablamos de órbitas de entrada o de salida, nos referimos a que bajo la dinámica asintótica se acercan o alejan de la región de interacción respectivamente.

La mayoría de las funciones de dispersión que se estudian suelen tener clara interpretación en el laboratorio. Ejemplos son ángulos de deflexión, energía cinética final, cambio de momento angular, etc. Típicamente esto se mide en función de un ángulo de entrada, un parámetro de impacto, u otra función coordenada de posición.

Introduzcamos un poco de notación para discutir más cómodamente. Sea I_{out} una función de dispersión, donde I hace referencia a una función del espacio fase y el subíndice “out” hace a la salida de la zona de interacción. Asimismo un subíndice “in” indica los elementos del dominio. En esta notación podemos definir la función de dispersión como el siguiente conjunto de pares ordenados:

$$I_{\text{out}} = \{(\alpha(\mathbf{q}), I(T^n \mathbf{q})) | \mathbf{q} \in \mathbb{D}; n \rightarrow \infty\}, \quad (4.1)$$

Parafraseando: la función de dispersión es el límite de la función $I(q)$ cuando el número de iteraciones del mapeo tienda a infinito. Aquí \mathbb{D} es el dominio, subconjunto del espacio fase, α es una coordenada inicial del punto q que lo identifica unívocamente en \mathbb{D} , y T la transformación del espacio fase dada por la dinámica.

Si \mathbb{D} es una curva transversal a los lóbulos entonces existe una infinidad de puntos que pasan tiempos arbitrariamente largos cerca de la silla caótica en \mathbb{D} . Un subconjunto de ellos no escapará jamás de la región de interacción, sino que convergerán a la silla caótica. En particular, los puntos que se encuentren sobre las $\mathcal{W}^u, \mathcal{W}^s$ convergerán a la silla caótica [7, 10]. Lo más importante de la estructura de I_{out} es que estos puntos la dividen en intervalos de continuidad. Explicaremos cómo escoger sensatamente el dominio \mathbb{D} y saltará a la vista como estos intervalos de continuidad revelan información sobre la herradura. En la región asintótica tomemos un punto x_0 que se encuentre cerca de un lóbulo, pero fuera del mismo. Consideremos su primera imagen bajo el mapeo, x_1 , como en la figura 4.1. Unamos ambos puntos con una curva suave, una recta en las coordenadas locales es lo más conveniente. La curva atraviesa completamente el tentáculo. Éste contiene imágenes de otros tentáculos en número infinito, partiendo su espacio interior según el nivel de desarrollo de la herradura. Por lo tanto, también inducirán una partición en la curva \mathbb{D} . Si acaso una de las imágenes de todos los lóbulos no alcanzan a intersectar \mathbb{D} , lo hará alguna imagen posterior de ellos, de mayor jerarquía. De esta forma, gracias a la estructura fractal de la partición del lóbulo, no habrá pérdida de información, solamente se encontrará escondida en niveles de resolución más finos.

La figura 4.1 muestra un par de diagramas para ver cómo esta partición en \mathbb{D} y en la función de dispersión se relacionan con γ . La estructura que hay dentro de cada lóbulo exterior es difeomórfica a la que se encuentra dentro de \mathcal{R} , pues es después de todo, un mapeo continuo de los huecos y sus intersecciones que se adentran en ella. Por ende, el lóbulo contiene información del desarrollo de la herradura. En el primer diagrama (figura 4.1(a)) se observa cómo una herradura completa tiene lóbulos que se intersectan completamente de lado a lado, formando una partición equivalente a la que se obtiene con un polvo de Cantor, multiplicado por figuras aproximadamente semicirculares. En el caso de una herradura subdesarrollada el lóbulo contará con huecos incompletos que no alcanzan a partir adecuadamente el interior según este esquema (figura 4.1(b)). En este caso el lóbulo contará con sublóbulos dentro de él. Se dice que en este caso la partición no es una partición completa. Consideremos ahora como esto induce una partición en \mathbb{D} .

Los segmentos de \mathbb{D} que se encuentren contenidos en cierto nivel jerárquico y no en más altos, obtendrán, por continuidad, estados asintóticos similares. El hueco en el que se encuentran es la preimagen de uno de los otros lóbulos exteriores, así que saldrán todos juntos de \mathcal{R} . Las funciones continuas del espacio fase también tendrán por lo mismo valores cercanos. En resumen, los segmentos de un nivel de jerarquía bien definido forman un intervalo de continuidad en las funciones de dispersión. Por otro lado, existen puntos que son el límite de sucesiones de huecos y que no pertenecen a un nivel de jerarquía bien definido, como tampoco pertenecen los que se encuentran exactamente sobre las \mathcal{W}^u 's y las \mathcal{W}^s 's. Dichos puntos separan los intervalos de continuidad y forman un subconjunto en donde la I_{out} no está bien definida. Son el conjunto singular de \mathbb{D} . Estrictamente hablando, no pueden ser parte del dominio por esto, pero trataremos a \mathbb{D} todavía con ese conjunto incluido, siendo a

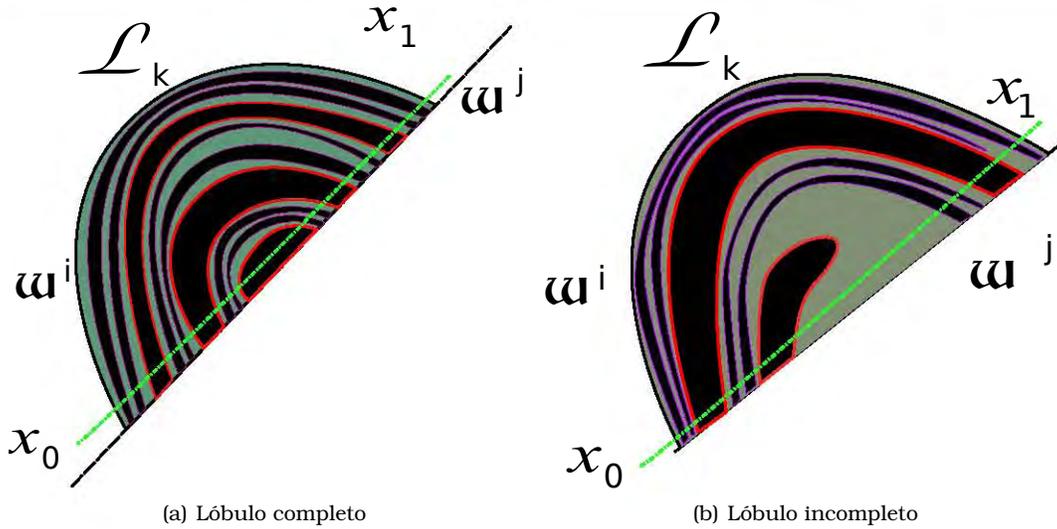


Figura 4.1: La partición de la línea $\overline{x_0x_1}$ inducida por los tentáculos dentro de los lóbulos externos. En el lado izquierdo, 4.1(a) se muestra el lóbulo correspondiente a una herradura completamente desarrollada. En caso de que no sea así, el lóbulo mostrara estructuras como las mostradas en 4.1(b). La línea $\overline{x_0x_1}$ es nuestro dominio \mathbb{D} .

partir de ahora no el dominio de la función, sino la cerradura del mismo. Observando una vez más que esta separación en intervalos de continuidad de \mathbb{D} corresponde a la penetración del lóbulo más exterior por otras imágenes de otros lóbulos, y que a su vez esto depende del desarrollo de la herradura, podemos conjeturar sobre una relación entre el parámetro de desarrollo γ y la partición en \mathbb{D} . Esta relación está bien descrita en varios trabajos [44]. La partición inducida por el desarrollo de la herradura sigue una cierta función que escala de cierta forma con el nivel de jerarquía. Si la situación es perfectamente hiperbólica, el ajuste de este escalamiento debe ser exponencial. Si l es la longitud de arco inducida por la medida de Lebesgue en el espacio fase, y denotamos por $D_{i,n}$ a cada intervalo de continuidad en un nivel de jerarquía n fijo, donde i es un subíndice apropiado, entonces, el decrecimiento exponencial de los intervalos queda expresado como:

$$\exp(n\beta F(\beta)) \approx \sum_i (l(D_{i,n}))^\beta. \quad (4.2)$$

Por la forma de esta expresión, a la lista de resultados basados en ella se les conoce como formalismo termodinámico. A $F(\beta)$ le llamamos la *energía libre* de la herradura y β actúa como una temperatura inversa. El comportamiento exponencial es más exacto conforme subimos en el nivel de jerarquía. Si existen efectos no hiperbólicos, también éstos empiezan a pesar más en niveles muy altos. La energía libre contiene mucha información sobre el mapeo. Por ejemplo, el máximo exponente de Liapunov es el valor de la derivada en $\beta = 1$ [45].

Existen casos en que los puntos de \mathbb{D} que pertenecen al conjunto singular son muy evidentes. Si, por ejemplo, consideramos el tiempo de dispersión, es claro que las orillas de cada intervalo de continuidad no alcanzarán a salir de la región de interacción, y convergen a la silla caótica, así que su tiempo de dispersión es infinito. Existen otras funciones que por costumbre no percibimos como discontinuas y sí lo son. En los ejemplos del túnel y el mapeo tenemos la posibilidad de recorrer la dirección q en ambos sentidos, y por ende escapar de la región de interacción con momentos lineales de signo opuesto. Esto produce que la función de dispersión p_{out} distinga entre transmisión y reflexión, que son dos estados finales cualitativamente distintos. Así que el valor $p_q = 0$, que separa a unas de otras, no está definido. Es decir, 0 no forma parte del codominio de la función, y en realidad es sólo un límite, como podría serlo ∞ para el tiempo (obsérvese la figura 4.2). La función es discontinua cuando cruza por el eje $p_{\text{out}} = 0$. Otro argumento experimental es que una partícula sin energía cinética no puede ser detectada. En los ejemplos que se muestran en las figuras se puede apreciar que el conjunto singular de ambas funciones coinciden. En los ejemplos mostramos estas funciones tipo “acción” dependiendo de “ángulos iniciales”. Esto es un punto que se explota en laboratorio.

Para escoger \mathbb{D} en las figuras 4.2 y 4.5 tomamos un punto $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{M}$ tal que su momento lineal sea pequeño (que su contribución con $p_{\text{in}}^2/2$ sea aproximadamente una centésima parte de la energía total E), y se encuentre muy lejos de la región de interacción, por ejemplo, en los modelos con herradura ternaria escogimos $q_0 = -6.962$ y $p_0 = 0.01$. Después buscamos la primera iteración bajo el mapeo, y \mathbb{D} será la recta en \mathbb{M}_p que une ambos puntos. En esta región el espacio fase está estriado por lóbulos muy largos y muy delgados, correspondientes a imágenes de muy alta jerarquía de los lóbulos. Recordemos además que llevan dentro de ellos una infinidad de copias de las puntas de los otros lóbulos y los huecos. Si \mathbf{q}_0 está dentro de uno de los lóbulos, su primera imagen \mathbf{q}_1 estará en el siguiente. La línea \mathbb{D} atravesará de uno a otro, cruzando toda la estructura fractal de huecos y tentáculos anidados. Si \mathbf{q}_0 está fuera de un tentáculo, también lo estará \mathbf{q}_1 y \mathbb{D} atravesará también toda la estructura, pero convenientemente toda dentro de la misma imagen, es decir, el mismo tentáculo. Es claro que para cada $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{D}$ y cada imagen posterior o anterior suya, el valor de I_{out} es el mismo, esto es:

$$I_{\text{out}}(\mathbf{x}_0) = I_{\text{out}}(\mathbf{x}_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Recordemos que las funciones de dispersión están valuadas sobre órbitas, no sobre puntos de \mathbb{M}_p . Tanto \mathbf{q}_0 como \mathbf{q}_1 pertenecen a la misma órbita, así que esta forma de escoger y parametrizar a \mathbb{D} le induce una estructura toroidal.

Otra observación que vale la pena hacer ahora: hemos afirmado que \mathbb{D} atravesará la estructura de huecos y tentáculos dentro de un tentáculo muy alejado. Esto podría ser falso. Podemos imaginar situaciones como las que se observan en la figura 4.4(a). Es por esto que escogemos valores de p muy pequeños. Esto fuerza a que estemos bajo tentáculos de altísima jerarquía, haciendo muy improbable la situación en 4.4(a), donde se muestra a \mathbb{D} pasando por un solo dominio de continuidad. El caso mostrado en 4.4(b) es indeseable también pero no es tan grave. Si hubiera huecos que no alcanzáramos a medir en su iteración de menor jerarquía, podemos estar seguros de que existe alguna imagen de ellos en alguno de los subtentáculos que sí atravesamos. Sencillamente su aparición en la partición será en un nivel más alto. Dado que nuestra capacidad de resolución es finita, no nos conviene dejar enterrada la infor-

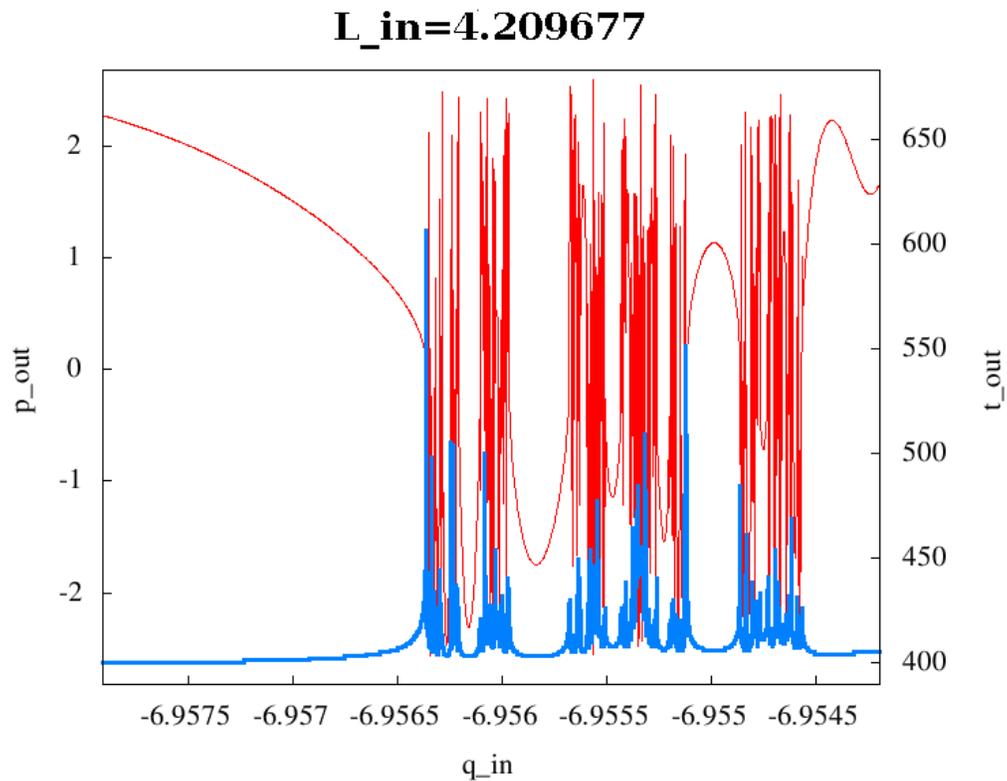


Figura 4.2: Comparación entre las singularidades del momento lineal final y del tiempo de dispersión. Del lado izquierdo está la escala de la primera, dibujada en línea delgada roja, y del lado derecho la de la segunda, en azul y gruesa. Puede verse como los intervalos de continuidad en t_{out} coinciden con los de p_{out} . Esto recalca el hecho de que el cero no pertenece a la imagen de la función. El valor es inalcanzable, y es sólo un límite por un lado de cada IoC. La gráfica del tiempo se distingue por los violentos picos que coinciden con los valores nulos de la del momento.

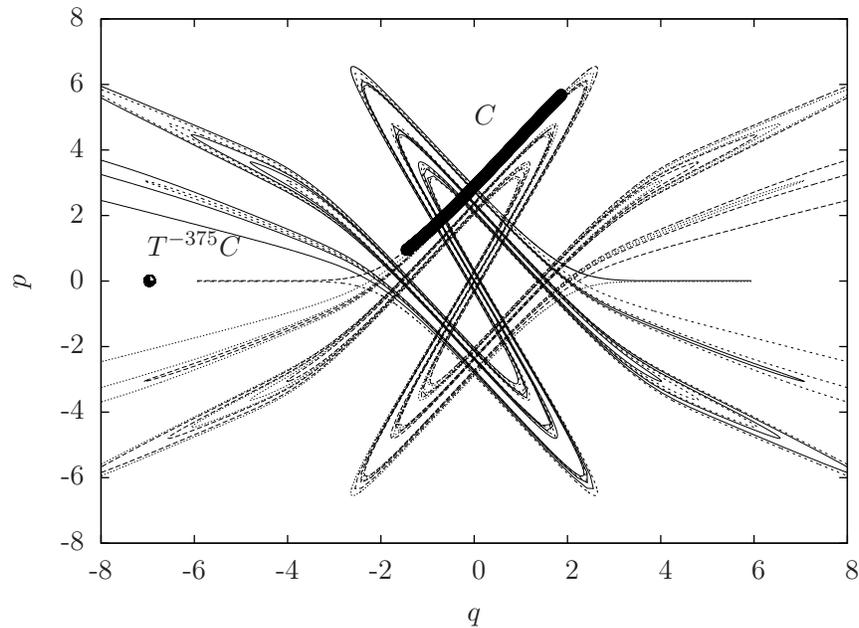


Figura 4.3: Una elección de \mathbb{D} para las funciones de dispersión. En este caso, $\mathbb{D} = T^{-375}C$, asegurándonos que casi empalme con la variedad inestable \mathcal{W}^u_- y corte de forma casi completa a los tentáculos. Este fue el dominio usado en las funciones presentadas.

mación escondida en niveles demasiado altos. Esto lo podemos evitar haciendo una pequeña trampa. Este truco está esquematizado en la figura 4.3. Escogeremos una línea C que sea paralela a la variedad inestable \mathcal{W}^u_- , y que intersecte a \mathcal{L}_0 muy cerca de aquella. Entonces garantizamos que C contenga al menos información inmediata sobre los niveles jerárquicos mas bajos de la partición en su aparición primera. Luego observamos que cualquier preimagen de C contendrá la misma información. En nuestros ejemplos, $\mathbb{D} = T_A^{-n}(C)$, donde T_A es el mapeo discreto 3.45 o el mapeo de Poincaré dado por la ecuación 3.33. El parámetro entero n es del orden de cientos. Para el billar sencillamente escogimos un subconjunto de rayos afuera del ánfora y dirigidas hacia la boca de ésta. Este pequeño acto irregular no es necesario para el trabajo experimental. En este trabajo sólo investigaremos la naturaleza de los dominios de continuidad de I_{out} y no la función de partición. En todo caso, en el laboratorio se puede escoger a \mathbb{D} de forma un tanto pragmática, haciendo diversas pruebas para el valor inicial de p_{in} , y ver si aparecen nuevos elementos en la partición.

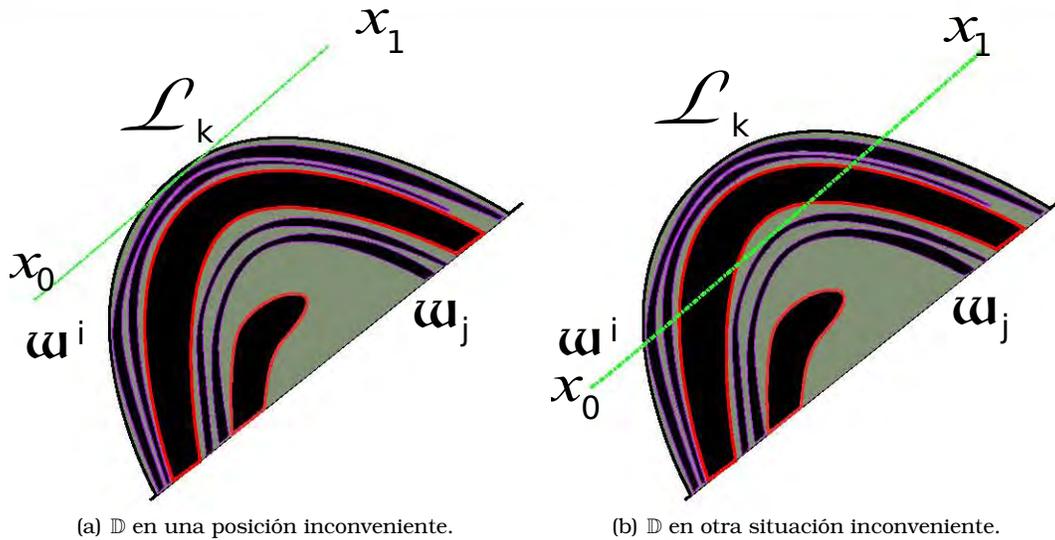


Figura 4.4: Dos formas en las que podemos perder información en la elección del dominio de las funciones de dispersión. La de la izquierda debe ser evitada, en cambio la situación de la derecha es salvable porque la información no se pierde, sino se oculta en niveles de jerarquía más altos.

4.2. Unos ejemplos

Primero tomemos como función de dispersión p_{out} , el momento conjugado a q en su valor asintótico, en el sistema reducible ($A = 0$), y observemos como se comporta esta función para una variedad de parámetros iniciales.

A ojo se puede distinguir que $p_{\text{out}}(q_{\text{in}})$ se comporta según el grado de desarrollo γ , como esperamos. Vemos como los intervalos de continuidad (desde ahora IoC, por *interval of continuity*) se funden entre ellos conforme L_{in} se acerca a su valor máximo. Tomemos por ejemplo como se comporta cuando $L_{\text{in}} = 4.209677$, ampliado en la figura 4.6. Los intervalos de continuidad mas grandes son de jerarquía 0, es decir, ni siquiera están dentro del tentáculo. Si podemos lograr inferir cuantos intervalos de continuidad hay de cierta jerarquía y cuantos debería de haber, podemos estimar el valor de γ , acorde a la expresión (4.2). En este ejemplo hay un intervalo de continuidad que tiene tres extremos, un mínimo y dos máximos, cerca de $q_{\text{in}} = -6.9545$. Esto delata una herradura incompleta. Para algún valor de L_{in} próximo, esos tres máximos colisionan y forman un máximo no genérico, de cuarto orden, relacionado con la tangencia de un tentáculo con \mathbb{D} , claramente un caso especial.

4.3. De dos a tres grados de libertad: el salto abrupto

En sistemas hamiltonianos o simplécticos nos vemos forzados a aumentar el número de dimensiones de un mapeo de dos en dos, con lo que aumenta considerablemente

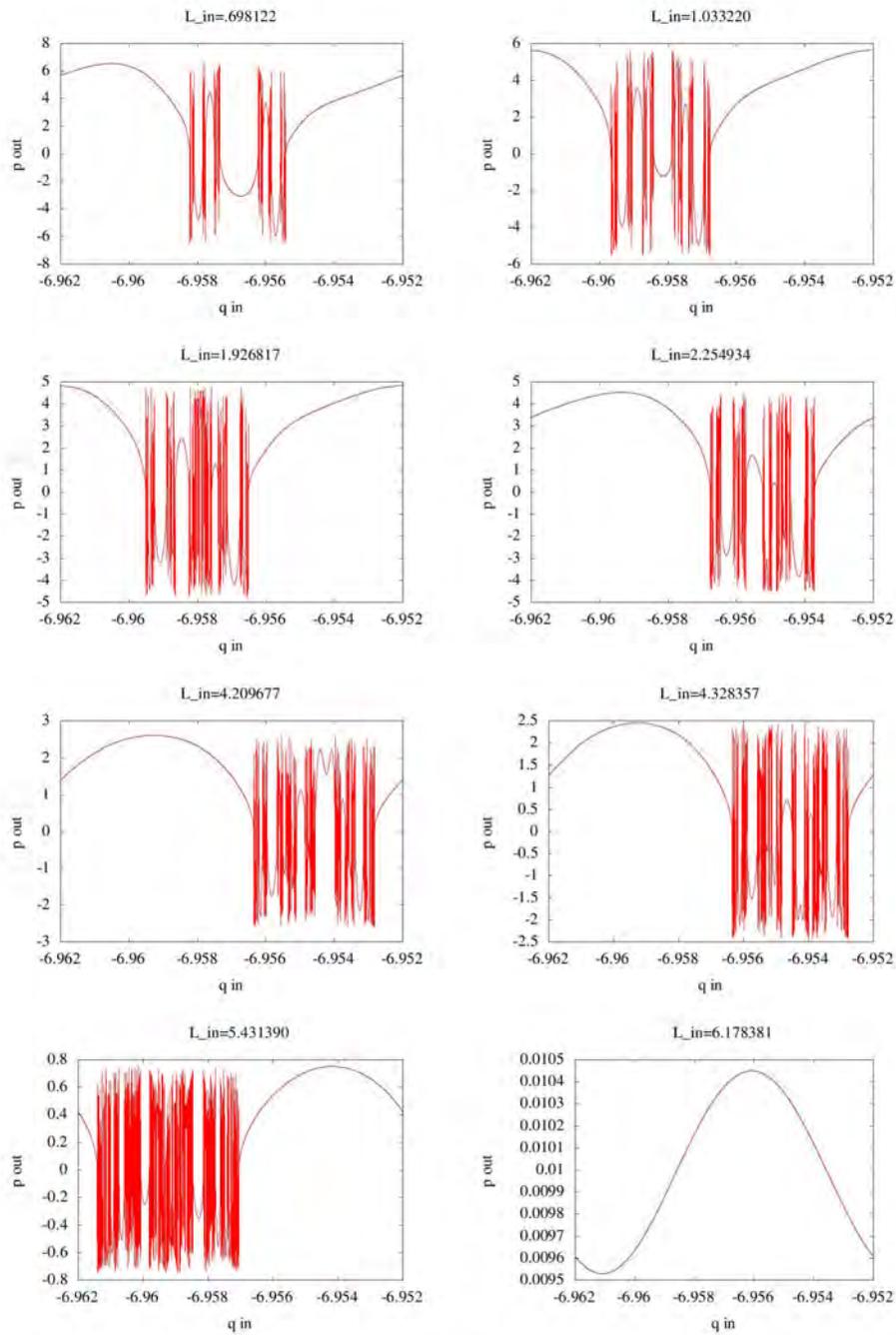
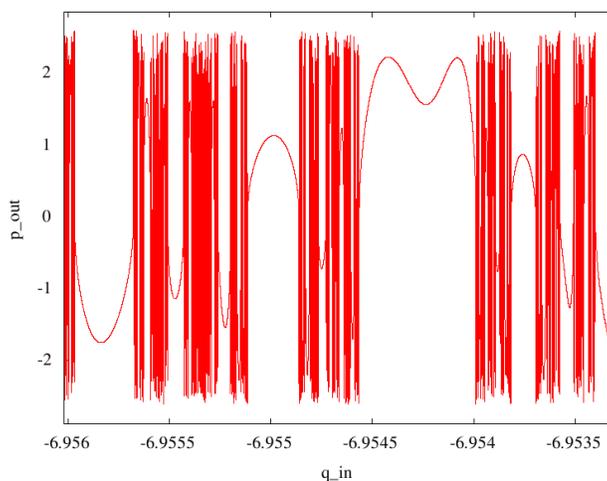
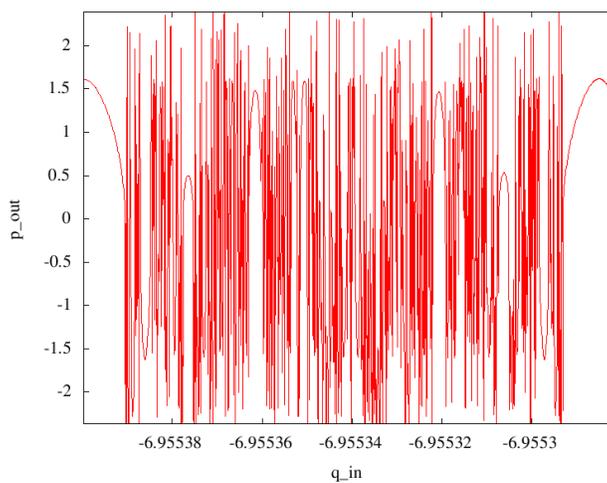


Figura 4.5: La función de dispersión $p_{out}(q_{in})$, para varios valores de L_{in} . Obsérvese como la función se torna de variación menor conforme el valor de L_{in} crece, apreciable en la escala de p_{out} .



(a)



(b)

Figura 4.6: Una función $p_{out}(q_{in})$. Hemos hecho dos aumentos de la figura 4.5 correspondiente al valor $L_{in} = 4.328357$. Obsérvese que cerca de $q_{in} = -6.9545$ hay tres extremos en un IoC. Esto es evidencia de una herradura incompleta. Se observa el patrón de auto similaridad fractal. En la segunda figura es extremadamente notorio que el límite $p_{out} \rightarrow 0$ sólo se puede obtener de un lado del IoC. Del otro lado, al aproximarnos al valor -6.9525 , las infinitas oscilaciones impiden definirlo.

la dificultad de visualizar el problema de un caso al siguiente. El mapeo de Poincaré de un sistema con tres grados de libertad se aplica en una sección de cuatro dimensiones, así como los mapeos simplécticos con dos pares de variables conjugadas. La maraña heteroclínica está formada por variedades tridimensionales interconectándose en un espacio fase cuadrimensional, para que tengan codimensión uno.

El propósito de este trabajo es precisamente poder estudiar estas “superherraduras” encajadas irremediamente en este espacio fase de cuatro dimensiones. En el primer capítulo hemos aclarado las condiciones que nos son útiles para obtener una herradura en cuatro dimensiones. Aquí les mostraremos el objeto completo.

Imaginemos que tenemos un sistema en el que una cantidad conservada controla el grado de desarrollo de la herradura, i.e. $\gamma = \gamma(L_{\text{in}})$. Como ejemplo podemos ver las figuras del capítulo 3. Las variedades \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u en una hoja son homotópicas respecto a las otras hojas, por continuidad. La homotopía de una curva induce una superficie continua. Esto quiere decir que podemos unir los distintos elementos de la homotopía indexados por L_{in} para crear una superficie suave. Entonces las variedades \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s en cada nivel se vuelven fibraciones de una superficie bidimensional que abarca todos los valores de L_{in} . Localmente, en la intersección de un lóbulo de la variedad estable con la variedad inestable, se ven como un par de cortinas entrecruzadas, como en la figura 4.7. Es de notar que la intersección es una curva, su punto de inflexión corresponde al valor de L_{in} en donde las variedades son tangentes. En esta unión los puntos de tangencia no juegan ya un papel. La intersección de las nuevas \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s es una curva.

En nuestros tres modelos, la cantidad L se conserva porque hay una simetría en θ y hasta ahora hemos ignorado su dinámica. Si tenemos en cuenta ésta, el espacio localmente adquiere una dimensión más, representada en la figura 4.7, es decir, la intersección ahora es un cilindro. La intersección, por cuenta de codimensiones, sigue siendo transversal según la definición 3.1.

La construcción de los modelos cumple con la aparición de esta estructura. La estructura de nuestros NHIM's no deja otra opción. Este argumento fue presentado suponiendo que se cumple la simetría rotacional; ahora podemos prescindir de ella. Dado que lo transverso es una propiedad estable, podemos hacerle perturbaciones ligeras al sistema y las intersecciones de las \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s seguirán siendo transversales y con la misma topología. Esto es muy importante. Significa que al romper la simetría, las nuevas \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s no se desmoronan en una madeja de órbitas separadas que no formen variedades suaves. Su intersección sigue siendo cualitativamente la misma, aunque en cada órbita el valor del momento angular no se conserve.

4.4. El dominio de I_{out}

Necesitamos extender a \mathbb{D} , puesto que el anterior dominio unidimensional es demasiado pequeño para investigar la naturaleza de la silla caótica. Su codimensión es tan grande que la probabilidad de que se interseque con variedades relevantes al problema es nula.

La primera definición de \mathbb{D} para el caso bidimensional le inducía una estructura toroidal, específicamente un círculo. Si en cada punto de este conjunto tomamos en cuenta la variable θ , producimos un toro bidimensional. Como sus dos variables

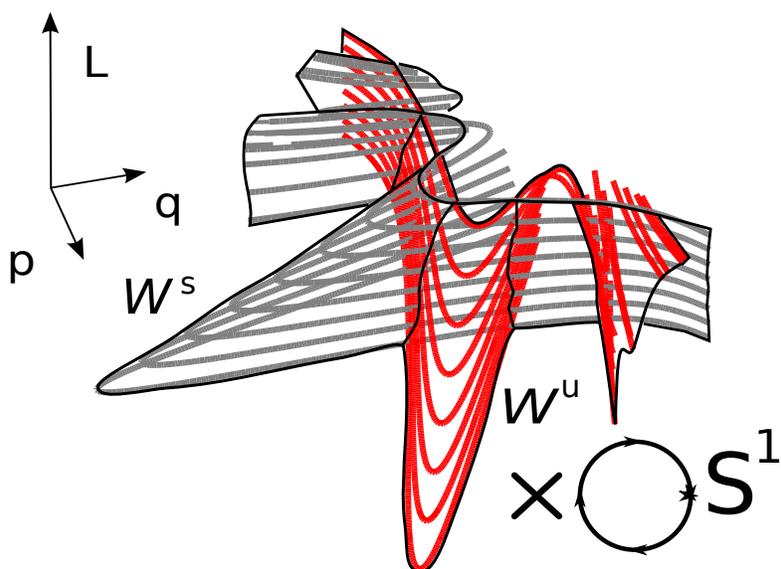


Figura 4.7: Una ilustración a partir de los tentáculos estables e inestables de varios valores L_{in} , puestos unos sobre otros según el valor de γ . Tomando en cuenta el círculo al que pertenece la variable θ , éste es el aspecto local de las variedades invariantes de nuestros modelos. Las variedades están separadas por el color de las distintas órbitas que en ellas se encuentran, siendo la inestable \mathcal{W}^u roja, y la estable \mathcal{W}^s gris. El sistema de coordenadas es meramente ilustrativo.

tienen estructura circular, resulta natural considerarlas como fases. Los toros de entrada están caracterizados por un par de acciones iniciales fijadas de antemano, y los valores de la función son acciones finales. La función de dispersión cobra la siguiente estructura general: se fijan $n - 1$ acciones iniciales. Sobre los $n - 1$ ángulos conjugado a estas acciones iniciales, mediremos $n - 1$ acciones finales, donde n es el número de grados de libertad en el sistema continuo. $n - 1$ es el número de grados de libertad sobre el mapeo en $\mathbb{M}_{\mathcal{P}}$.

Consideremos $A > 0$. Esta vez tomaremos como funciones de dispersión los valores de p_{out} y $\Delta L := L_{\text{out}} - L_{\text{in}}$. El dominio será la misma curva $T_A^{-312}(C)$ multiplicada directamente con el dominio de θ , que es un círculo. De esta manera nuestro nuevo \mathbb{D} es un dos-toro, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$. Observemos que efectivamente para $A \sim 0$ la función de dispersión se comporta como una copia en un anillo de la del caso reducible (ver figura 4.8). De ahora en adelante, en lugar de hablar de IoC (*intervals of continuity*), hablaremos de DoC (*domains of continuity*). Sin embargo, esta estructura de anillos se va perdiendo conforme los vamos rompiendo la simetría más y más bruscamente (figuras 4.9 y 4.10). Los intervalos de más baja jerarquía son los más estables, pues son más grandes, mientras que los más pequeños se funden rápido formando nuevas estructuras. Podemos inferir que la función de dispersión está obligada a tener también una estructura periódica a lo largo de θ_{in} , sencillamente porque así escogimos la topología de ésta coordenada. También podemos tener una idea intuitiva de que la dependencia de esta variable es pequeña para $A \sim 0$, y conforme tomamos parámetros A mayores, más compleja y significativa. La partición inducida en \mathbb{D} es cada vez más compleja también, evidenciando una silla caótica bastante distinta de la que estamos acostumbrados a ver en mapeos bidimensionales. Esta partición se vuelve más difícil de imaginar si tomamos en cuenta que deberíamos de recorrer la unión de todos los valores de L_{in} posibles para \mathbb{D} .

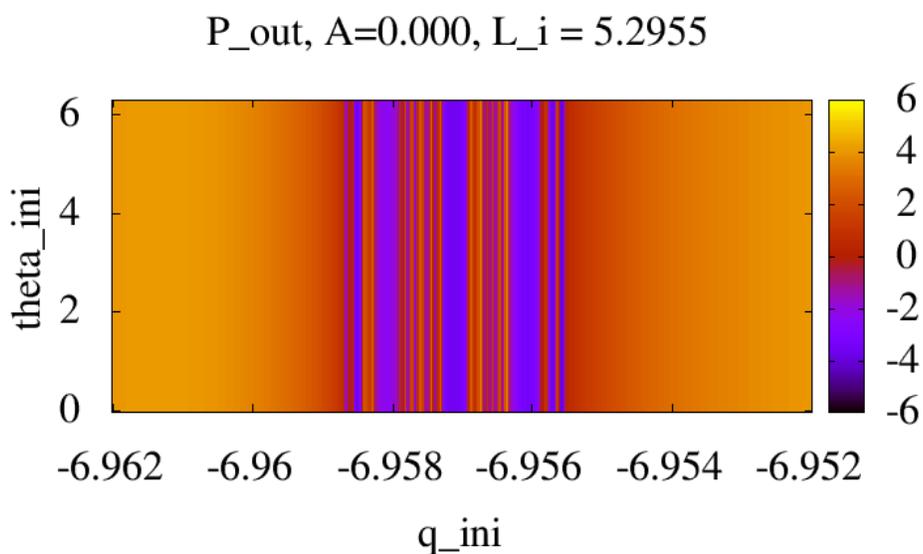


Figura 4.8: Una copia continua trivial de la función de dispersión p_{out} encimada a lo largo de la variable θ_{in} . Los intervalos de continuidad son ahora franjas que recorren el toro en esta dirección. La otra componente de la función, ΔL , es idénticamente cero, así que la omitimos. La barra de color a la izquierda muestra la correspondencia entre los tonos y los valores de p_{out} que van de -5 a 5 . Los colores oscuros y azulados corresponden a los valores negativos, los claros y amarillos a los positivos.

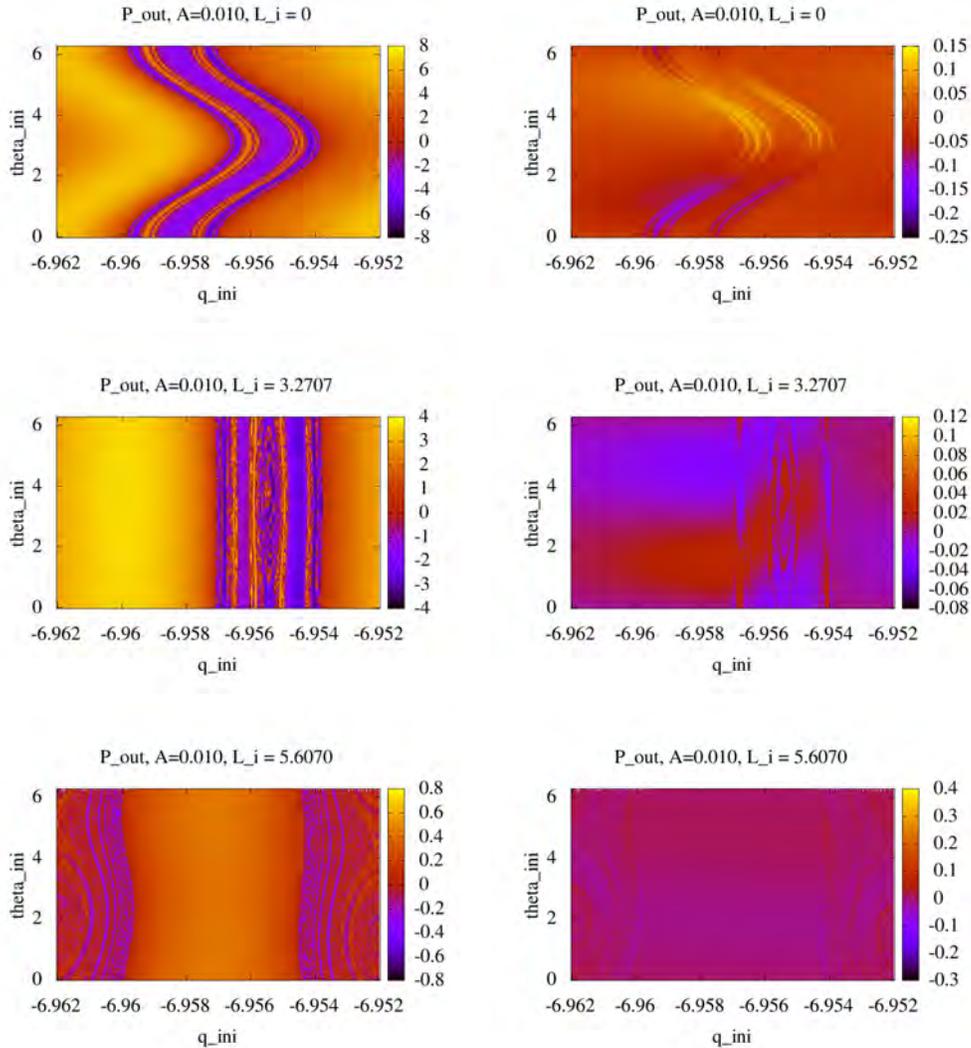


Figura 4.9: En esta serie de gráficas presentamos los dos componentes de la función de dispersión, $(p_{out}, \Delta L)$, a la izquierda el momento lineal final p_{out} y a la derecha la transferencia de momento angular, ΔL . De arriba a abajo se aumenta el momento angular inicial. La simetría se ha roto con $A = 0.010$. Como puede observarse, los DoC mas grandes se mantienen estables. También hay cierta dependencia entre el valor de L_{in} y la resistencia de los mismos ante perturbaciones. Los valores mayores de ΔL parecen producir DoC de formas más curiosas. En particular podemos observar un DoC con dos agujeros en la segunda línea. La tercera línea ya muestra mucho mayor riqueza en la topología de los DoC. La barra de colores sigue el mismo patrón que en 4.8, pero reescalada a los valores relevantes de la función en cada caso.

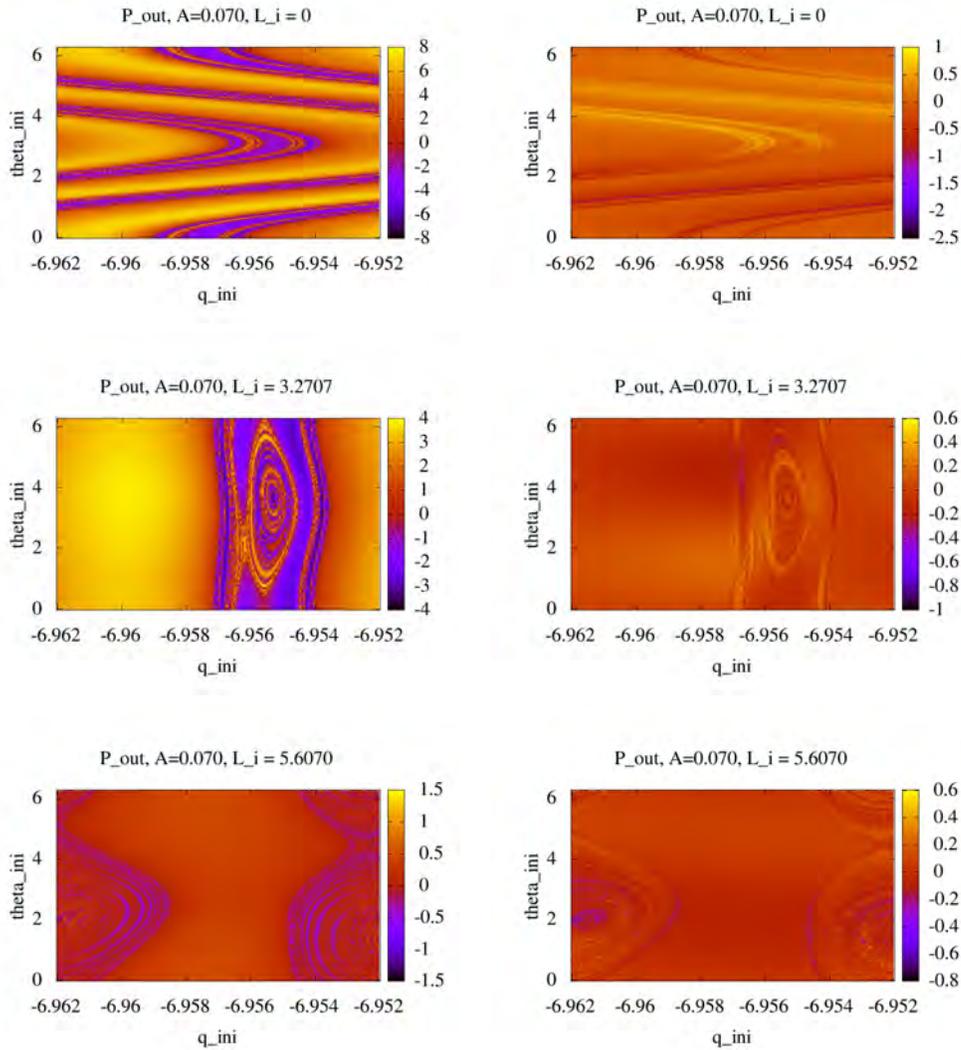


Figura 4.10: Igual que las figuras anteriores, 4.9 pero con $A = 0.07$. Ahora si existe una riqueza muy variada de DoC, y no sabemos si los argumentos presentados en el capítulo siguiente apliquen con valores de A mayores a éstos. Una vez más el código de colores está reescalado a los valores relevantes.

CAPÍTULO 5

LA SECCIÓN EFICAZ

La medición de las funciones de dispersión es imposible, aún en principio, en laboratorio. Cualquier colega experimental nos podrá narrar la dificultad de lograr un buen muestreo con condiciones iniciales perfectamente definidas. Lo que es posible obtener de un experimento es la frecuencia con la que ocurren ciertos valores de las variables de estado finales. Estas mediciones se conocen como secciones eficaces [8]. Ciertas consideraciones aquí mostradas nos permiten obtener de ellas información similar a la que otorgan las funciones de dispersión [13, 46]. Recordemos que nuestro propósito es obtener de alguna forma información topológica sobre la silla caótica. Usaremos la sección eficaz fijando variables de acción o momento de entrada, y obtendremos una distribución de ellas a la salida de la región de interacción. Nuestra esperanza es que esta distribución de valores contenga información cualitativa sobre la silla caótica o sobre nuestra superherradura.

En las secciones eficaces hay unos valores que son singularmente más brillantes que el resto. Estos puntos corresponden a los valores no invertibles de la función de dispersión. En análisis se conocen como valores críticos [47], en física, en el contexto de sistemas dispersivos, especialmente ópticos, se conocen como singularidades arcoíris [8], ya que el fenómeno meteorológico se explica por ellas.

Para ejemplificar todo esto primero usaremos el mapeo reducido a dos dimensiones ($A = 0$). Veremos cómo funciona la correspondencia de las singularidades arcoíris con los intervalos de continuidad de la función de dispersión, recreando el trabajo [13]. Luego extenderemos el sistema rompiendo la simetría y usando una sección eficaz de dos valores de salida. Estos resultados se han publicados en [38]. Es en este capítulo donde se muestra nuestra aportación al problema inverso en dispersión.

5.1. Sección eficaz en un mapeo bidimensional

En toda esta sección se usarán funciones de dispersión con dominio y codominio reales de una dimensión.

En el caso de dominios suaves unidimensionales al lado de cada valor singular de la función de dispersión hay, por un lado, un intervalo de continuidad (IoC, por sus siglas en inglés), y por el otro lado, una variación fractal de la función. El IoC está delimitado por otro valor singular (por ejemplo, en la función p_{out} , el valor 0). Dentro del IoC hay un valor extremo típicamente cuadrático, esto es, el valor de la función cerca del máximo es expansible en una serie de Taylor, y coeficiente del término cuadrático es distinto de cero (siendo el cero un valor muy especial). Esto se aprecia en las figuras 4.2, 4.5 y 4.6 del capítulo anterior. Si por cada uno de estos IoC podemos detectar el valor extremo de la función y asignarle la medida del intervalo, tendremos una información equivalente a conocer la partición del dominio completo. Esto es lo que un físico experimental hará para revelar información sobre la silla caótica. Procedamos a explicar el razonamiento subyacente.

Sea de ahora en adelante \mathbb{D} la cerradura del dominio de nuestra función de dispersión, en el caso reducible una curva que atraviese sensiblemente los lóbulos de la herradura de nuestro mapeo. Supongamos que \mathbb{D} esté poblado originalmente de una distribución homogénea, uniforme de puntos, es decir, lo que esperamos si asumimos que nuestra medida de los intervalos es la de Lebesgue sobre \mathbb{D} , parametrizado por su longitud de arco en \mathbb{M}_p . Sobre esta distribución medimos la probabilidad de obtener uno de los valores de la función de dispersión. Observaríamos la medida inducida en el contradominio por la función. Esto es debido a que en cada intervalo donde una función es diferenciable y estrictamente creciente o decreciente la medida de Lebesgue sobre el dominio es estirada por la derivada en cada punto. Si la función es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la explicación es natural: el valor de df en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ es el factor de crecimiento local. La probabilidad de obtener un valor f_0 depende de la población (la medida) de condiciones iniciales en la preimagen de f_0 . Debemos entonces corregir la longitud local de los intervalos alrededor de f_0 por el factor inverso de $df|_{x_0}$. Esto es lo que se le llama medida inducida por la función f (la medida *push forward* [48]). Así que la medida inducida en el contradominio (llamémosla μ_*) se puede calcular para funciones suaves de los reales en los reales por:

$$d\mu_*(f_0) = 1/(df|_{x_0})d\mu, \quad (5.1)$$

donde μ es la medida en el dominio. Como se puede ver, los valores donde f no es invertible, causan una singularidad en esta expresión. Esta es la llamada singularidad arcoíris.

Supongamos ahora que tenemos un detector en la región asintótica del experimento. Los valores que más aparecen en el detector se encuentran donde la función de dispersión varía poco, coincidiendo con la expresión 5.1. Los valores más probables se encuentran donde la función es localmente plana. Para ilustrar nuestra intuición podemos observar la figura 5.1. Aquellos puntos que sean extremales tendrán una contribución mucho mayor que aquellos de variación rápida. El conjunto de todos los posibles valores del contradominio de la función, con su medida inducida (su frecuencia de aparición en un experimento) es la sección eficaz. La sección diferencial eficaz es su medida inducida punto por punto, dada por la ecuación 5.1.

Un valor crítico de la función es sencillamente un conjunto donde al menos en una dirección no cambia de valor en una vecindad infinitesimal, es decir, está caracterizado por:

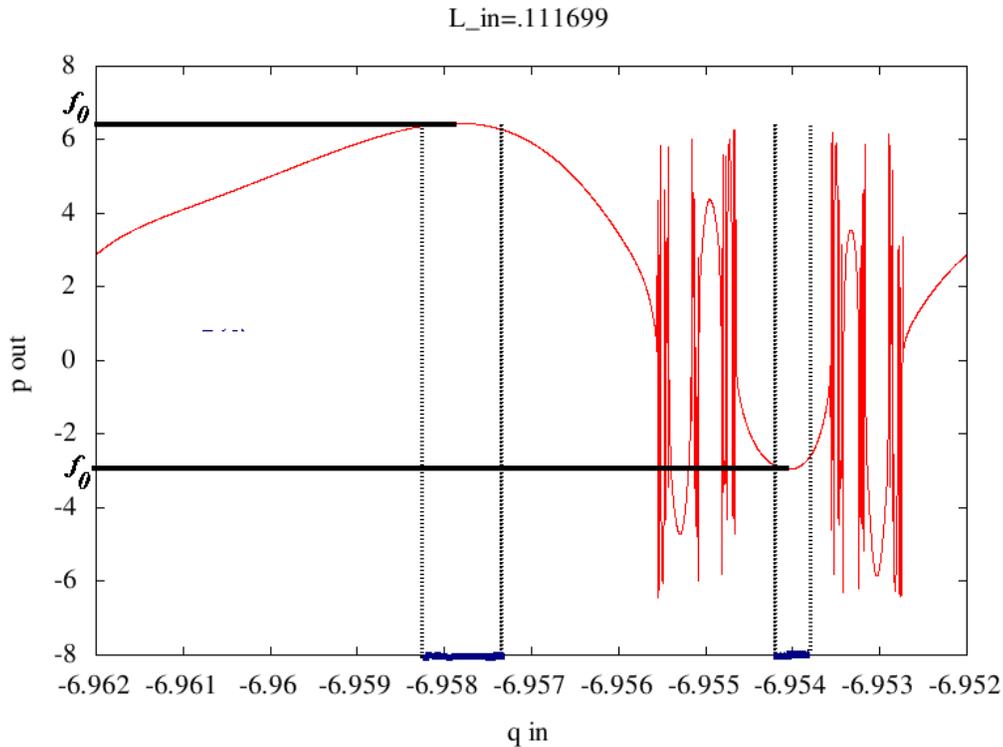


Figura 5.1: Interpretación intuitiva de la contribución de los valores extremos a la sección eficaz. Las líneas negras horizontales marcan dos valores no invertibles de la función de dispersión, denotados f_0 . Marcamos sobre el eje de las abscisas el intervalo que se encuentra suficientemente cerca de sus preimágenes.

$$\frac{\partial f_{\text{out}}}{\partial q_{\text{in}}} = 0. \quad (5.2)$$

En la dispersión de la luz de color por pequeñas gotas de agua, son estos puntos los que nuestro ojo, como detector, observa en la aparición del arcoíris. Cada color tiene un ángulo de dispersión donde aparece su singularidad. Esta parte del dominio tiene contribución diferencial infinita a la sección de corte eficaz. El valor integrado sobre el intervalo de continuidad sigue siendo finito, es sólo la diferencial la que diverge. Al ser los valores de mayor contribución en la dispersión resultan muy brillantes para nuestro ojo o detector.

La sección de corte es formalmente la proyección de la medida del dominio sobre el contradominio (por cada intervalo donde sea monótona) Formalmente, la contribución de un valor f_{out} de la función de dispersión a la a la sección de corte está dada por:

$$g_k(f_{\text{out}}) = 1/|\det \partial(f_{\text{out}}/\partial(q))|. \quad (5.3)$$

Cuando estemos hablando de funciones de un dominio unidimensional el determinante se reduce al valor absoluto, tal cual como en la expresión de la ecuación 5.1. La contribución total es:

$$\sigma(f_{\text{out}}) = \sum_k g_k(f_{\text{out}}), \quad (5.4)$$

donde la suma es sobre todas las preimágenes de f_{out} . En los sistemas reducidos ($A = 0$), nos basta estudiar la relación entre intervalos de continuidad y singularidades arcoiris. Si vemos las figuras del capítulo anterior, 4.6, 4.9 y 4.10 podemos intuir que *típicamente* hay un máximo cuadrático por cada intervalo de continuidad. Nuestra intuición no estaría muy equivocada, pero aclararemos esto en la siguiente sección.

Si el extremo de la función p_{out} es no degenerado y parametrizamos la variable $q_{\text{in}} \in [q_0, q_1)$ por $\chi \in [0, 2\pi)$, entonces esperamos un comportamiento alrededor de un extremo p_0 (por ejemplo, un mínimo) de la forma:

$$p_{\text{out}} = p_0 + \alpha(\chi - \chi_0)^2, \quad (5.5)$$

donde $p_{\text{out}}(\chi_0) = p_0$. Cada valor alrededor de p_{out} cerca del extremo provendrá de dos trayectorias distintas, caracterizadas por

$$\chi_{\pm} = \chi_0 \pm \sqrt{(p_{\text{out}} - p_0)/\alpha}. \quad (5.6)$$

La medida diferencial inducida es

$$g_{\pm} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(p_{\text{out}} - p_0)\alpha}}, \quad (5.7)$$

y la contribución total es el doble de este valor. Cuando alcanzamos el valor crítico decimos que las dos soluciones colisionan y aportan a la sección eficaz un valor que es diferenciablemente singular como el inverso de una raíz, pero integrable, así que la contribución total es finita, como esperaríamos de una medida inducida. Por lo tanto, la contribución del IoC es finito, y debe ser la longitud del mismo. Así que integrando alrededor de la singularidad debemos de encontrar una aproximación a esta cantidad, que es justo lo que necesitamos para la expresión 4.2. La sección eficaz para esta función de dispersión aparece numéricamente como se muestra en la figura 5.2.

Obsérvese que aquí estamos escogiendo funciones de dispersión que nos evitan tener lo que de Moura y Grebogi [14] llaman una transición arcoiris, la posibilidad de que tengamos un sistema caótico sin huellas de singularidades en la sección eficaz, como se muestra en [14]. En su ejemplo, es posible ajustar los parámetros del sistema para evitar tener singularidades arcoiris o tenerlas, lo cual para nosotros sería pérdida de nuestra información.

5.2. Funciones típicas

Hay un par de resultados de índole muy general que nos permiten asegurar la existencia de un conjunto de valores críticos (no invertibles) de una función suave y que dicho conjunto sea despreciable (de medida cero), lo cual nos permite hablar de secciones eficaces bien definidas.

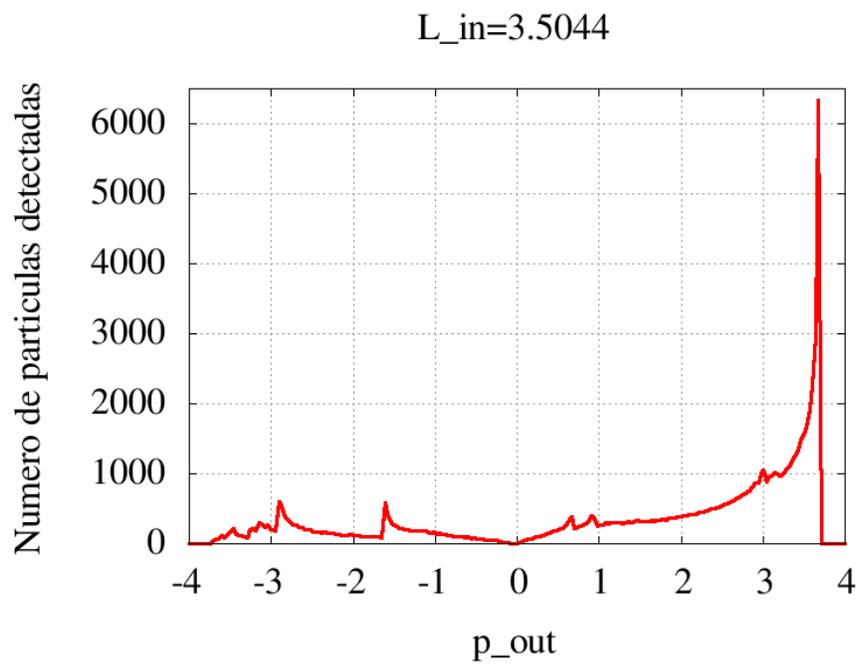


Figura 5.2: La sección eficaz para un caso particular de condiciones de entrada del sistema reducido, $A = 0.000$. Las singularidades arcoíris son claramente discernibles como picos abruptos.

El primero es el teorema de Sard [49], que nos asegura que si la función es suave, su conjunto de valores críticos es de medida cero y cerrado. Habremos de esperar entonces singularidades arcoíris que sean así sobre los detectores. Esto es requisito para que la medida inducida converja. El segundo nos asegura que una función suave de un intervalo se comporta cerca de un valor extremo como una función cuadrática *genéricamente*. Ambas aseveraciones se pueden consultar en el libro de Demazur sobre Bifurcaciones,[47]. ¿Qué es algo *genérico*? Algo *genérico* es algo que sucede en un subconjunto residual y denso, es decir, en una intersección numerable de abiertos que sean densos. Los polinomios son ejemplos de funciones genéricas en el espacio de las funciones suaves $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y las sumas de Fourier son genéricas en las funciones suaves del círculo en el intervalo $[-1, 1]$. Esto es lo que nos importa ahora.

Usaré el término *típico* para aquéllo que se cumple en los casos que podemos observar. Si aplicamos esto a las funciones de dispersión observaremos que funciona maravillosamente bien: la función p_{out} del sistema reducido ($A = 0$) se comporta en los intervalos resolubles con máximos y mínimos típicamente cuadráticos, y cuando dos intervalos de continuidad se funden, aparece un extremo de naturaleza cuártica, que es atípico, y se puede relacionar con el momento de tangencia de una variedad invariante con otra y su efecto sobre el dominio de la función de dispersión, \mathbb{D} . Dado que la transversalidad de dos variedades es genérica (y más aún: densa) en variedades suaves, los puntos de tangencia forman un conjunto raro (en el sentido de que son el complemento del conjunto genérico y denso). Este es el contenido de la versión suave del teorema de transversalidad de Thom [47, 50].

Si en la sección eficaz podemos establecer una relación entre la aparición de las singularidades arcoíris, y si observamos una jerarquía infinita de ellas reproduciendo la partición debida a la herradura, habremos llegado muy lejos. En mapeos bidimensionales o sistemas mecánicos continuos con dos grados de libertad se ha trabajado sobre esto [13, 14, 15] exitosamente, con diversos enfoques.

5.3. Las singularidades arcoíris en mapeos cuadrimensionales

Recordemos que en nuestros ejemplos escogimos para las funciones de dispersión un dominio toroidal. Esto es muy similar a lo que habríamos hecho en un laboratorio, fijando momento angular, energía y momento lineal en nuestro aparato y dejando los parámetros de impacto como variables arbitrarias. Una función típica en un toro es un tanto distinta a la de un intervalo, pero no tan rara como para que no nos hayamos topado con ella varias veces.

Una función suave en un dominio cíclico se puede aproximar por su expansión de Fourier. Las funciones expresables como una suma finita de senos y cosenos forman un conjunto residual y denso en este espacio. ¿Qué huella tendrán nuestras funciones de dispersión en la sección eficaz, tomando esto en cuenta?

Recordando nuestros argumentos anteriores: el rompimiento de simetría será un parámetro “pequeño”. En caso de que éste sea estrictamente nulo, el toro bidimensional de las funciones presentadas en el capítulo anterior tendrá como única partición la que ocurre a lo largo del eje q , es decir, la esperada por el hecho de que tenemos una copia trivial de la función sobre el círculo que contiene a θ_{in} . Esto parte

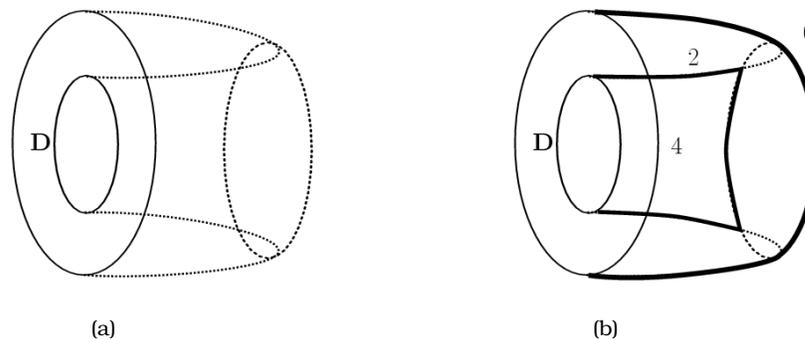


Figura 5.3: Aquí mostramos como una función suave sobre un dominio anular puede proyectar una sombra como la catástrofe en la figura 5.4(d). La figura 5.3(a) muestra la gráfica como una variedad transparente. En la figura 5.3(b) está resaltado los puntos no invertibles bajo la proyección, y marcamos el número de preimágenes de las regiones abiertas que están delimitadas por las cúspides, siendo éstas la proyección de los valores no invertibles.

al \mathbb{D} en tiras bidimensionales abiertas (véanse las figuras 4.9 y 4.10), cuyo subconjunto crítico es una línea que corre a lo largo del lomo o el valle de la función). Si representamos la circularidad de este dominio como un anillo, la función con un sólo componente se verá como en la imagen 5.3. Este caso singular no es detectable con nuestros métodos, ya que al tener $\Delta L = 0$ siempre, su contribución al jacobiano resulta completamente degenerada; la sección eficaz se acumula toda en la línea $\Delta L = 0$ y tenemos un resultado igual al presentado en [13].

De las últimas figuras del capítulo anterior, 4.9 y 4.10, podemos inferir lo siguiente: para los valores muy pequeños de A , las características topológicas de los dominios de continuidad más grandes (en área, según la medida de Lebesgue), que corresponden a los niveles jerárquicos más bajos, permanecen intactas. Estos son anillos, obtenidos al rebanar el toro de condiciones iniciales con los \mathcal{W}^u y \mathcal{W}^s , y la forma en que están intersectados es, al parecer, bastante estable. Podemos pensar que cambiar la topología de un objeto por métodos perturbativos es en si una acción difícil, puesto que las características (dimensión, género, etc) son variables discretas. Pero no debemos precipitarnos, ya que, como lo ejemplifica el teorema KAM [51], una perturbación pequeña puede cambiar esencialmente las características topológicas inducidas por un mapeo, de forma completamente no trivial. Es interesante notar que la estabilidad y el área de cada DoC están correlacionadas. Esto coincide con nuestra intuición, pero no habrá que precipitar conclusiones hasta que no hayamos estudiado a fondo la relación entre las funciones de dispersión, el parámetro A y los DoC que se inducen en un toro, o más aún, sobre la familia de 2-toros indexadas por L_{in} .

5.3.1. Una forma normal

Con todas estas precauciones en mente podemos proceder ahora a dilucidar formas “normales”, es decir, homeomórficamente representativas y genéricas de las funciones de dispersión, restringidas a los DoC anulares.

Empecemos por tomar la forma conocida para el sistema reducido alrededor de un máximo de p_{out} (la discusión es igual para un mínimo, cambiando el signo apropiado en la ecuación 5.10). Extenderemos esta forma para tomar en cuenta la dependencia periódica que tiene este DoC alrededor de la variable ψ , que es difeomórfica a θ . Vamos a manejar la siguiente parametrización del 2-toro de condiciones iniciales:

$$\chi = 2\pi \frac{q_{\text{in}} - q_0}{q_1 - q_0}, \quad (5.8)$$

$$\psi = \theta_{\text{in}}. \quad (5.9)$$

El DoC es típicamente una franja centrada en algún χ_0 y estirada a lo largo de la dirección ψ . Supongamos que $\delta > 0$ es tal que el intervalo $(\chi_0 - \delta, \chi_0 + \delta)$ está dentro del anillo para todo ψ . El modelo más simple posible es tal cual el presentado en [13]:

$$p_{\text{out}} = p_0 - (\chi_0 - \chi_{\text{in}})^2. \quad (5.10)$$

Aquí se han escogido factores de escalamiento tales que $\delta^2 = p_0$. Para el caso asimétrico añadimos una dependencia de Fourier en ψ usando únicamente el primer término:

$$p_{\text{out}} = p_0 - (\chi_0 - \chi_{\text{in}})^2 + b \cos(\psi_{\text{in}}). \quad (5.11)$$

La dependencia trigonométrica sólo funciona si A es suficientemente pequeño, y dentro de un anillo más pequeño que el DoC observado en las figuras 4.9 y 4.10.

La función ΔL es idénticamente cero si $A = 0$. Su dependencia más simple podría ser

$$\Delta L = a \sin(\psi_{\text{in}}). \quad (5.12)$$

Tomando en cuenta la dependencia de χ , proponemos

$$\Delta L = \frac{a \sin(\psi_{\text{in}})}{1 - c(\chi_{\text{in}} - \chi_0)}, \quad (5.13)$$

en la cual en realidad estamos proponiendo que la dependencia sinusoidal se aplica a $\Delta L(1 - c(\chi - \chi_0))$, de forma que el máximo de ΔL recorra la parábola aproximada de p_{out} . En estas cuatro formas que consideraremos normales (ecs. 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13) estamos considerando a a, b, c parámetros pequeños que dependen de A , que se anulan si $A = 0$.

Discutamos ahora la naturaleza general de las preimágenes para encontrar los puntos críticos y observar cómo aparecen las singularidades arcoíris para cada DoC. Combinemos primero las ecuaciones más simples, 5.10 y 5.11. En 5.10 no hay preimágenes reales (las únicas que nos interesan) si $p_{\text{out}} > p_0$. En cambio hay dos para $p_{\text{out}} < 0$. Para el momento en que el discriminante se anula, las dos soluciones colisionan y determinan una cáustica en $p_{\text{out}} = p_0$. Las soluciones para 5.12 también son dobles si $|\Delta L| < a$. Las soluciones también colisionan para $\Delta L = \pm a$, así que ahí tenemos otra cáustica. dado que en el DoC p_{out} no puede cambiar de signo. Estamos entonces delimitados por un rectángulo, dentro del cual hay cuatro soluciones para cada punto, y ninguna fuera de él (véase la imagen 5.4(a)). Ahora bien, obsérvese que en este caso simplificado las fronteras del rectángulo hacen que se pase de cuatro preimágenes a ninguna. Esto es completamente no genérico: una cáustica nos debe

reducir el número de soluciones de dos en dos. Pero como aquí cada una de las ecuaciones involucradas no afecta a la otra variable, y en el interior del contradominio las soluciones se multiplican, pasamos abruptamente de cuatro a cero. Consideremos pues los casos un poco más complejos, esperando obtener curvas cáusticas de que sean genéricas. Ahora tomemos las formas 5.11 y 5.12. Invirtamos la primera y sustituyamos en ella la dependencia en ψ por ΔL :

$$\chi = \chi_0 \pm \sqrt{p_0 - p_{\text{out}} \pm b\sqrt{1 - \Delta L^2/a^2}}. \quad (5.14)$$

Todavía tenemos aquí la cáustica no genérica (degenerada, en realidad) en $\Delta L = \pm a$, pero la otra se ha desdoblado en una curva de tipo más general y estable.

La cantidad de soluciones cambia sobre la elipse

$$a^2(p_0 - p_{\text{out}})^2 + b^2\Delta L^2 = a^2b^2. \quad (5.15)$$

Las soluciones para las preimágenes de I_{out} se pierden a lo largo de una dependencia conjunta de ΔL y p_{out} , haciendo que fuera de la franja no haya solución real. Dentro de la elipse existan dos, para p_{out} fuera de la elipse hacia los valores mayores dejemos de tener otra vez solución, y hacia los valores menores existen cuatro (véase la figura 5.4(b))

Combinemos ahora las formas 5.10 y 5.13, por un lado tenemos la cáustica degenerada $p_{\text{out}} = p_0$ (que podemos entender ahora como una elipse vista degenerada), por un lado, y por el otro, al sustituir 5.13 en 5.10:

$$\sin(\psi_{\text{in}}) = \Delta L(1 \pm c\sqrt{p_0 - p_{\text{out}}})/a, \quad (5.16)$$

que produce la curva cáustica en

$$\Delta L = \pm a(1 \pm c\sqrt{p_0 - p_{\text{out}}})^{-1}. \quad (5.17)$$

En la región $0 < p_{\text{out}} < p_0$ estas curvas parecen parábolas centradas en $\pm a$. Las curvas son estructuralmente estables y contienen una región con sólo dos preimágenes. Entre ellas hay cuatro soluciones, y fuera de ellas ninguna (véase la figura 5.4(c)). Nuestra intuición es que si le concedemos a las formas normales la dependencia no trivial en ambas variables de entrada, χ y ψ , obtendremos cáusticas genéricas y estructuralmente estables. Usando las formas 5.11 y 5.13, eliminando ψ , cambiando de variable $\omega = \chi_0 - \chi$, resulta en un polinomio de cuarto grado:

$$P(\omega) = \omega^4 + A\omega^2 + B\omega + C. \quad (5.18)$$

con las abreviaciones siguientes:

$$A = 2(p_{\text{out}} - p_0) + b^2\Delta L^2c^2/a^2, \quad (5.19)$$

$$B = -2b^2\Delta L^2c/a^2, \quad (5.20)$$

$$C = (p_{\text{out}} - p_0)^2 + b^2(\Delta L^2/a^2 - 1). \quad (5.21)$$

Tomemos también la siguiente cantidad para simplificar visualmente los razonamientos siguientes:

$$D = (\Delta L^2/a^2 - 1). \quad (5.22)$$

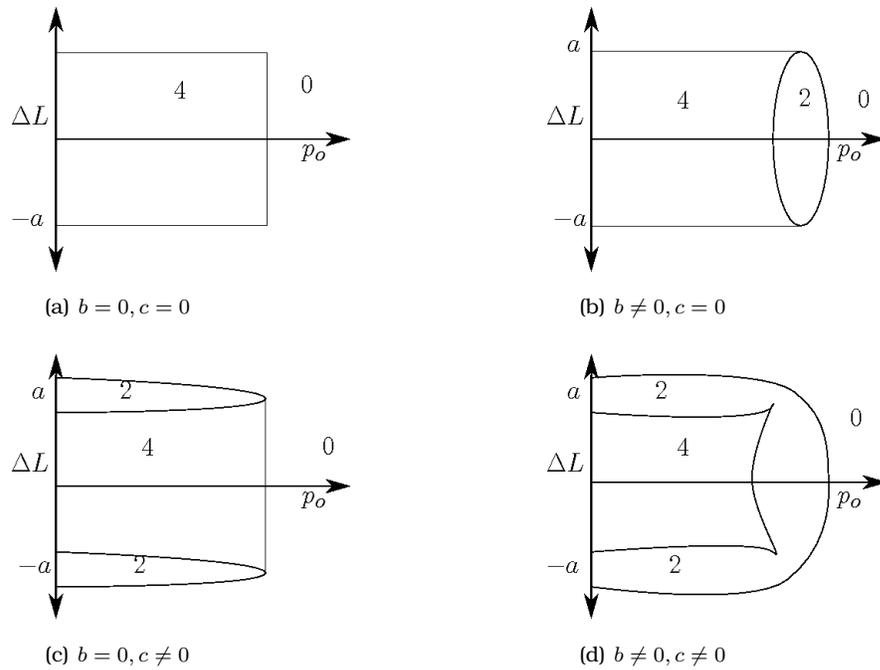


Figura 5.4: Diagramas que muestran las cáusticas inducidas por la función de dispersión sobre el espacio de la sección eficaz. De las mostradas aquí arriba, sólo la 5.4(d) es estructuralmente estable. El elipsoide en 5.4(b) y los paraboloides en 5.4(c) son estables también, pero la singularidad contiene cáusticas rectas degeneradas.

Necesitamos información sobre el número de soluciones reales que tiene el polinomio en $\mathbb{R}(\omega)$ (ec. 5.18). Cuando perdemos soluciones estamos cruzando una cáustica. Esta información en el discriminante del polinomio, que, cuando cambia de signo, delata el cambio en la naturaleza de las soluciones de reales a complejas [52]. El discriminante de un polinomio $P(x) = \sum_i^n a_i x^i$ está dado por la definición siguiente:

$$\text{Dis}(P(x)) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (r_i - r_j)^2. \quad (5.23)$$

El primer factor es irrelevante para nuestros propósitos. Las r_i son las raíces del polinomio. Estos son funciones de los coeficientes, y es claro que la expresión se anula si dos raíces son iguales. Se puede demostrar que el discriminante es un polinomio homogéneo de los coeficientes a_i . En el caso de un polinomio de cuarto grado normalizado ($a_4 = 1$) lo podemos escribir como

$$\text{Dis}(P(x)) = \begin{vmatrix} 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix} \quad (5.24)$$

Como se puede ver, las líneas son los coeficientes del mismo polinomio y su primera derivada. Si una raíz tiene multiplicidad mayor o igual a dos, la derivada tendrá la misma raíz. En nuestro caso $a_3 = 0$, lo cual nos ahorra unos cuantos términos:

$$\text{Dis}(P(\omega)) = -27B^4 - 4A^3B^2 + 16A^4C + 144AB^2C - 128A^2C^2 + 256C^3. \quad (5.25)$$

Desgraciadamente si tratamos de expresar esta última ecuación en términos de p_{out} y ω en lugar de usar las abreviaciones A, B, C, D , queda algo muy poco inteligible. Lo que haremos es analizarla perturbativamente, considerando parámetros pequeños a b, c . La primera contribución es de cuarto orden en ellos. Es más simple expresarla esta vez como función de p_{out} en lugar de la variable auxiliar ω

$$\text{Dis}_4(P(p_{\text{out}})) = 256b^4(p_{\text{out}} - p_0)^2 D^2 \quad (5.26)$$

Esta expresión se anula en $p_{\text{out}} = p_0, \Delta L = \pm a$, situación que ya habíamos visto al combinar las ecuaciones 5.10 y 5.12. Cada línea en el diagrama tiene multiplicidad dos, así que estamos otra vez en el caso no genérico. La situación se pone interesante si consideramos contribuciones hasta sexto orden. Dejando de lado un factor irrelevante de $256b^4$ que aparece por todos lados, queda como sigue:

$$\text{Dis}_6(P(\omega)) = b^2 D^3 + (p_{\text{out}} - p_0)^2 D^2 + 2(p_{\text{out}} - p_0)^3 (\Delta L^2/a^2 + 1) \Delta L^2 c^2/a^2. \quad (5.27)$$

Hemos buscado numéricamente los ceros de esta expresión. La figura que aparece en el plano $(p_{\text{out}}, \Delta L)$ es la que se aprecia en la figura 5.5.

Cualitativamente podemos compararla en la figura 5.4(d) con los otros casos. Esta curva no tiene ya la inestabilidad estructural que tenían las otras tres, 5.4(a), 5.4(b)

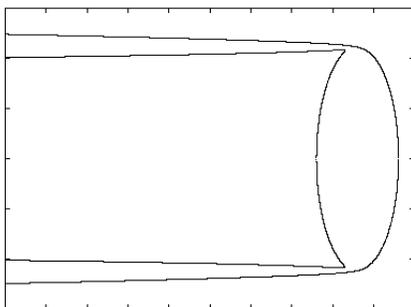


Figura 5.5: Búsqueda numérica de los ceros de la expresión Dis_6 en la ecuación 5.27, con los parámetros $a = 1, b = c = 0.1$. La escala de los ejes es irrelevante. Figura por Olivier Merlo.

y 5.4(c). se ha desdoblado por completo en dos fronteras que separan regiones que cambian su número de preimágenes de dos en dos.

Interpretemos estas cáusticas. La función de dispersión genera una gráfica suave en el espacio $(\chi, \psi, p_{out}, \Delta L)$ por cada dominio de continuidad. Dicha gráfica es una variedad bidimensional difeomorfa a un anillo. Es de hecho lo que los geómetras llaman una *inmersión*, un encaje inyectivo. La sección eficaz es la proyección de esta variedad sobre las últimas dos coordenadas. Dado que la forma cualitativa de la función es como una parábola y un poco de variación sinusoidal, tenemos algo parecido a un pastel o una montaña anular, véase la figura 5.3. Las cáusticas son la proyección del conjunto de la variedad que es paralelo a la dirección de proyección, o que es tangente a la normal del plano $(p_{out}, \Delta L)$. Ellas separan, pues, regiones en donde esta región se dobla y por ende acumula preimágenes. Las formas inestables son casos en donde la proyección logra que estas superficies coincidan al proyectarse, lo cual es un caso muy especial (para esclarecer un poco este razonamiento, véase el capítulo 5 y la figura 5.2 en [47]). La forma en que la variedad está doblada en el espacio de cuatro dimensiones es la causa de la cáustica separando regiones con n preimágenes de aquéllas con $n + 2$. Son la huella de un doblez suave y genérico inducido por I_{out} en la inmersión del DoC.

Como en nuestros experimentos numéricos podemos hacer varias manipulaciones, podemos, a través de las imágenes mostradas en el capítulo anterior, seleccionar un DoC de cada modelo y observar su sección eficaz. Estas imágenes se muestran en las figuras 5.6, 5.7, y 5.8. Obsérvese que la cáustica (los puntos con mayor conteo) tienen la forma cualitativa esperada. La huella de éstas nos hace tener confianza en nuestras formas normales. Podemos ahora explicar las singularidades arcoíris. Esta figura también se puede obtener proyectando medio toro, como se observa en la figura 6.13 del libro de texto de Ozorio de Almeida [51]. Esto es porque una montaña anular es medio 2-toro.

Esperamos ahora que si tomamos la sección eficaz a todo el toro de condiciones iniciales obtengamos infinitas copias de esta figura elemental, mas o menos deformadas

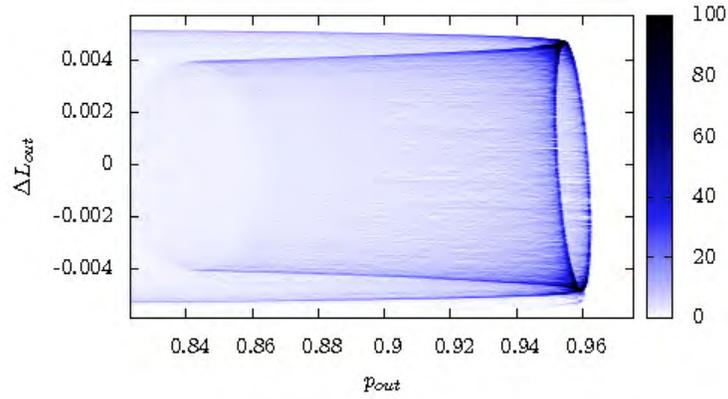


Figura 5.6: Singularidad arcoíris para el sistema mecánico continuo especificado por la hamiltoniana de la ecuación 3.7. El negro indica el máximo conteo, seguido del azul oscuro. El blanco es ausencia de puntos detectados. Obsérvese que en la región de mayor acercamiento entre la cáustica interior y exterior la cuenta es extremadamente alta.

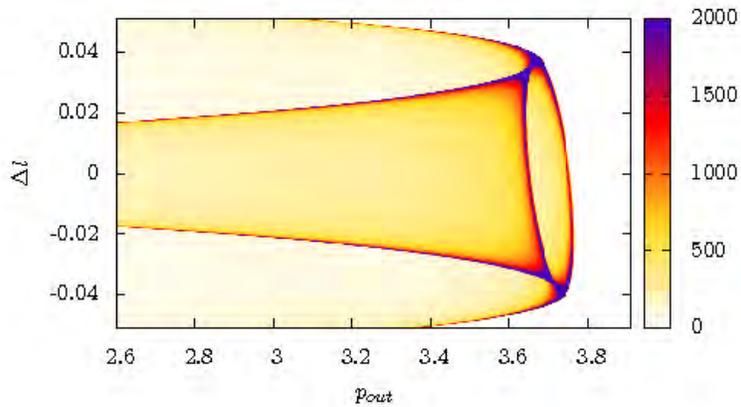


Figura 5.7: Singularidad arcoíris para el mapeo discreto dado por la función generatriz de la ecuación 3.37. El azul indica la máxima cuenta, seguida por el rojo y luego el amarillo.

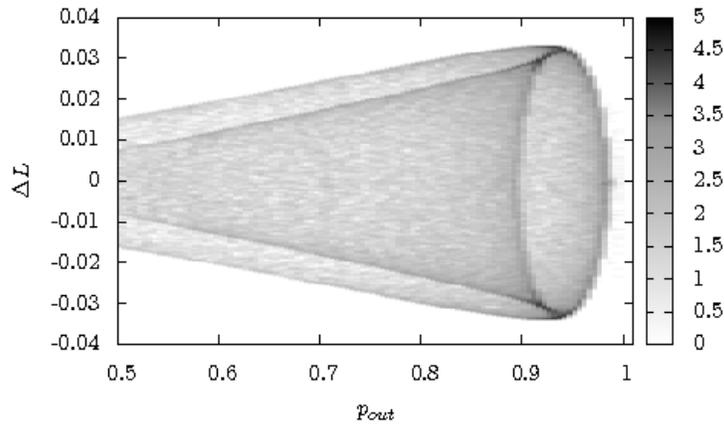


Figura 5.8: Singularidad arcoíris para el billar del ánfora especificado por la ecuación 3.73. El negro indica el valor más alto, y el blanco la ausencia de detección. Figura por O.Merlo.

conforme el DoC es más o menos estable frente a perturbaciones. Incluso podríamos ver mezclas de varios, cuando los DoC se funden y mezclan entre sí, creando objetos de mayor género. Algo interesante es que las singularidades parecen estorbarse entre sí algunas veces y otras no, como si sólo algunas de ellas fueran transparentes a la proyección (véase las figuras 5.9, 5.10 y 5.11). Realmente no contamos en este momento con explicación para este fenómeno.

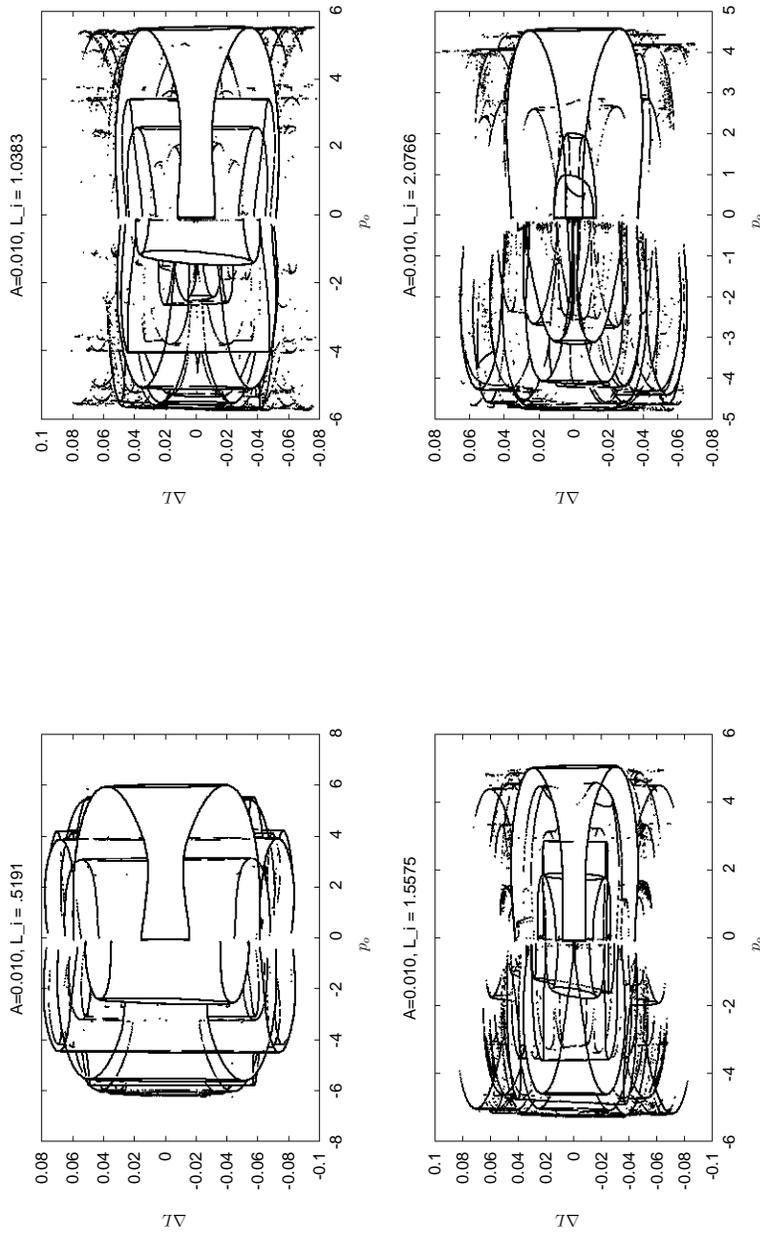


Figura 5.9: Las secciones eficaces para una serie de valores del momento angular de entrada con rompimiento de simetría constante, $A = 0.010$. Aquí mostramos sólo las singularidades arcoiris. Las hemos aislado usando un criterio numérico para el cambio abrupto de los valores en el detector. Si un elemento del detector recibía mucho mayor cuenta que los vecinos inmediatos, lo escogíamos para la imagen, si no, era descartado. El conjunto de singularidades parece ser una copia fractal de las singularidades aisladas mostradas en 5.7, aunque cada una posee variaciones en la estructura. Esto sería lo esperado.

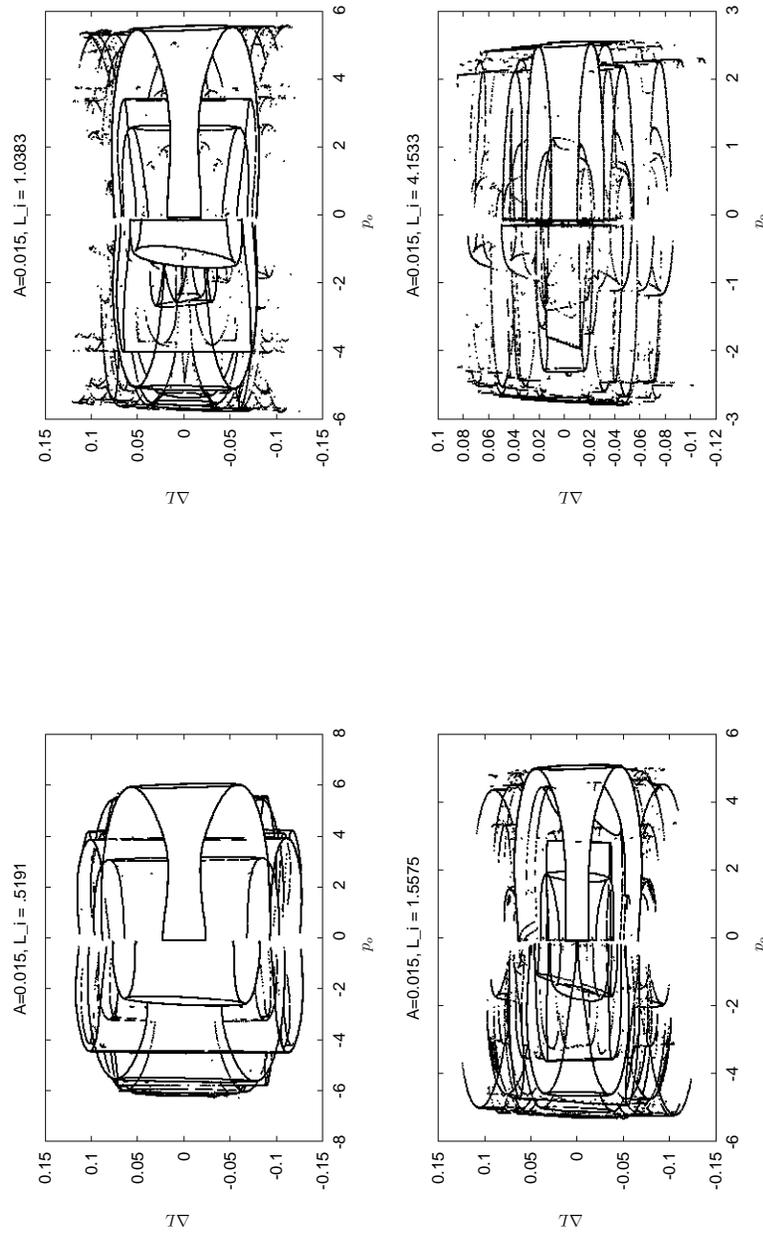


Figura 5.10: Las secciones eficaces para una serie de valores del momento angular de entrada con rompimiento de simetría, $A = 0.015$. Los puntos se han obtenido de la misma forma que en la figura 5.9.

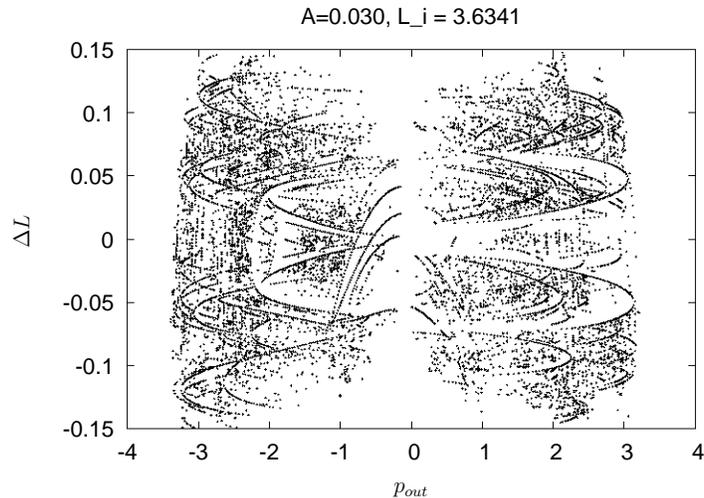


Figura 5.11: La sección para un valor relativamente fuerte del rompimiento de simetría, $A = 0.030$. La estructura empieza a ser confusa, pero los rasgos grandes todavía son discernibles. Una vez más hemos seleccionado los puntos como se indica en el pie de la figura 5.9.

5.4. Sobre el problema inverso

Todo este trabajo se ha desarrollado para contribuir en la medida de lo posible a resolver el problema inverso para sistemas dispersivos caóticos. Lo que nos gustaría sería, a partir de datos asintóticos, reconstruir la física subyacente. Hemos tratado de ser lo más apegados al experimento y observar los efectos de esta silla caótica usando únicamente variables de tipo acción de salida. Para lograrlo hemos trabajado, como es usual, construyendo el problema y produciendo paso a paso los efectos que deseábamos encontrar. Una vez entendido el proceso por el que aparecen, y comprendida su forma, podemos plantearlos en el detector de un experimento real. De aparecer estas estructuras, sabríamos que existe al menos una función hamiltoniana que tiene cualidades generales que producen una de estas herraduras suficientemente grandes. No podemos conocer la hamiltoniana exacta, pero al menos podemos clasificarla en clases usando como criterio sus propiedades genéricas. Son éstas las que son observables en la física, y son en ellas en las que debe descansar el valor de nuestro trabajo. Si de ellas podemos estudiar las que dejan huella en los datos asintóticos y lograr que sean suficientes para la clasificación del problema en una categoría de funciones hamiltonianas, habremos conseguido nuestro objetivo. El trabajo hasta ahora aquí presentado no es suficiente para ello. Esto sólo es el primer paso de un trabajo más amplio.

¿Qué es lo que tenemos en manos aquí? Reconocemos la forma de las singularidades arcoíris para un sistema de tres grados de libertad, que cumple con ciertas características topológicas y geométricas muy simples. Sabemos que las más gran-

des corresponden a la proyección de gráficas de funciones sobre dominios anulares a \mathbb{R}^2 , al menos mientras estemos cerca de un caso simétrico (para A suficientemente pequeño). En cuanto nos alejamos del régimen de aplicabilidad podemos observar la aparición de singularidades arcoíris correspondientes a dominios de topologías más complicadas, como son dominios multianulares.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIÓN

En esta tesis he presentado el siguiente resultado: a partir de una clase general de sistemas mecánicos dispersivos de tres grados de libertad, producimos una forma normal de la singularidad arcoíris sobre su sección eficaz. Detallando: sistemas que puedan ser aproximados por modelos que cumplan con nuestros requisitos; que son dos grados de libertad cerrados y uno abierto, y un acoplamiento pequeño entre uno de los cerrados y los otros dos; aseguramos la existencia de variedades inestables y estables transversales entre si. De ahí podemos establecer la existencia de una silla caótica que tiene asociada una dinámica que funciona como una herradura de Smale, partiendo el espacio fase. Esto lo medimos por la sección eficaz, que muestra singularidades arcoíris asociadas a intervalos de continuidad de las funciones de dispersión. Podemos establecer una explicación como una “forma normal” para estas singularidades que concuerda con lo observado, y que es genérica y estructuralmente estable. Por ende, tenemos un primer paso establecido a buscar la partición del espacio fase que inducen estas “superherraduras”, marañas heteroclínicas en una sección de Poincaré cuadridimensional. El proceso de construcción de éstos objetos es hereditario, donde la estabilidad de nuestros resultados se hereda de las propiedades de sistemas de dimensión menor.

Nuestros resultados son todos asintóticos. Una vez que hemos entendido como se forman y cómo se ven las singularidades arcoíris para sistemas que tengan una herradura formada por variedades tridimensionales encajada en un espacio cuadridimensional, la observación del objeto se vuelve innecesaria. No tenemos que reconstruir ni las funciones de dispersión ni la forma exacta de la herradura, ni el mapeo de Poincaré. ¿Qué podemos hacer con ello? Diremos lo siguiente: si pudiéramos establecer un conteo, al menos de los niveles jerárquicos más bajos, y establecer el peso de cada una de estas singularidades, tal vez sería posible, a futuro, establecer un análogo al de la fórmula 4.2 y de ahí obtener medidas caóticas sobre nuestro conjunto invariante, la generalización de la herradura de Smale. Por supuesto que tendríamos que encontrar la forma en que se desarrollan estas herraduras y ver si el formalismo es aplicable. Esto es trabajo que valdrá la pena desarrollar en un futuro.

Este trabajo busca ser una contribución al problema inverso en sistemas dispersivos. Nuestra aportación busca poder lidiar con el caso que no es reducible a un mapeo representable sobre el papel. La idea presentada aquí y publicada en [38] es útil en este enfoque porque sólo depende de consideraciones muy generales sobre la naturaleza del sistema (simetrías discretas, topología del espacio de configuración) y observaciones y preparaciones asintóticas. El resultado es la caracterización de las singularidades arcoíris para sistemas de tres grados de libertad. Una vez reconocida su forma general, y las posibles variaciones, podemos identificar las contribuciones más importantes a la sección eficaz. Así concluimos cómo se inducen los dominios de continuidad más grandes en un dos-toro. A partir de esto debe ser posible inferir parte de la estructura del conjunto caótico invariante, particularmente sobre el componente hiperbólico la silla caótica. Podremos variar el parámetro de asimetría A y observar cómo afecta esto los niveles de menor jerarquía en la estructura fractal observada. Para sacar mayores conclusiones de los datos hasta ahora obtenido sugerimos dos posibles rutas.

La más ambiciosa es la siguiente. Construir una dinámica simbólica a partir de las inferencias que podemos hacer sobre los datos asintóticos. Sabemos que dicha dinámica existe bajo premisas generales [16]. Se ha llevado a cabo de forma medianamente exitosa en sistemas de dos grados de libertad utilizando diversas técnicas, como se observa en los trabajos [19, 40, 53, 54]. El esfuerzo de caracterizar así los mapeos cuadrimensionales sería tal vez mayúsculo, pero por su exactitud, y por todas las medidas del caos que se obtienen a partir de una dinámica simbólica, bien vale la pena. La dinámica que se ha obtenido en las referencias mencionadas es una mera aproximación para sistemas no completamente hiperbólicos, pero puede ser un esfuerzo valioso de todas formas explorar en esa dirección.

La otra ruta es medir la contribución de las singularidades y clasificarlas por el nivel jerárquico al que pertenecen, sin pretensión de adjudicarles un símbolo para un desplazamiento de Bernoulli. Podríamos empezar por separar las más grandes de ellas, tanto en extensión en el plano $(p_{out}, \Delta L)$ como en peso por conteo de partículas. Estas parecen corresponder a los niveles de jerarquía más bajos. Dado que el conteo de las partículas en una vecindad de la singularidad debe ser la medida del dominio de continuidad sobre el toro de condiciones iniciales, encontraríamos una primera aproximación a los factores de escala. Hay un margen de error al no saber exactamente dónde termina dicha vecindad. La distribución de estos factores será analizable usando el formalismo termodinámico [55, 44, 12]. En dos grados de libertad, si se comparan los casos de desarrollo completo con los demás, se revela información sobre la estructura topológica de la herradura. Nos gustaría poder establecer un sistema de conocimiento similar para tres grados de libertad y más. Esta tarea tampoco parece fácil, pero aquí tenemos ya un primer paso.

6.1. Otras clases: más grados de libertad o más de una dirección abierta.

Hasta ahora nuestras disquisiciones se aplican a una clase concreto de problemas. Esta abarca aquellos sistemas que tienen una sola dirección abierta y dos direcciones cerradas. El potencial debe decrecer más rápido que un cuadrado inverso. Dada

la laxitud de estas condiciones, vaticinamos investigación en esta dirección, ya que abarca una categoría de problemas bastante amplia, de los cuales puede haber algunos realizables en laboratorio. Ahora existen técnicas que permiten confinar átomos en potenciales cuadráticos. Si fuera posible hacerlo en dos dimensiones solamente, dejando la tercera abierta, y colocar un potencial dispersivo que tenga las características descritas en el capítulo 3, observaríamos que tan buena es nuestro tratado clásico del problema.

Nos gustaría probar estos resultados en sistemas más generales. Para ello debemos ver qué es lo que hace que la única dirección abierta sea útil, y ver como le hacemos para encontrar esa utilidad en otras clases de sistemas.

La propiedad explotada de los sistemas aquí presentados es la siguiente: para todo valor de la energía total, existen $n-1$ grados de libertad cerrados que pueden absorber toda esa energía, de manera que su velocidad de escape se vuelva nula en el infinito (en el caso de potenciales atractivos rápidamente evanescentes) o en la última barrera de potencial (en casos donde éste sea atractivo cerca de \mathcal{R} pero repulsivo a distancia, e.g. el billar del ánfora). Existe una función implícita suave que representa este momento de escape, $p_{\text{out}}(\mathbf{q})$. Sobre ella pesa la condición que se expresa en la fórmula 3.26. Esto permite distinguir un umbral que separa al escape del movimiento confinado en una vecindad de \mathcal{R} . Esta división cualitativa es la que en última instancia nos haga las veces de separatriz en el espacio fase. El hecho de que estas superficies divisorias se intersectan de forma transversal es genérico y estructuralmente estable. Las superficies así especificadas tienen codimensión uno (pues sólo imponemos una condición sobre una de sus variables, el momento lineal), y cada una de sus intersecciones, por genéricas, tienen codimensión dos. Las superficies divisorias forman patrones de dobleces fractales. El patrón completo de intersecciones tiene por ende codimensión menor a dos. De ahí que la silla caótica tenga una dimensión (en el mapeo de Poincaré) mayor a dos. Esto nos permite detectarla.

Esto no funcionaría si todos los grados de libertad están abiertos [41]. En este caso es imposible tener trayectorias que se vayan al infinito y que asintóticamente pierdan su momento lineal, ya que no hay un movimiento oscilatorio que absorba esta energía. Es posible entonces que las estructuras aquí mostradas no se presenten en casos de abertura total. Esto, por supuesto, no implica que no haya caos topológico en dichos sistemas, pero éste se manifestará de una forma esencialmente distinta de aquél presente en los sistemas cerrados, y probablemente no dé lugar a una herradura. Acorde a [56] la silla caótica tendrá dimensión menor a dos, siendo imposible detectarla por medio de funciones de dispersión, mucho menos por su huella en la sección eficaz.

Otra característica de nuestra clase es la naturaleza especialmente favorable de la sección eficaz usada. Nuestro detector mide variables de tipo acción o momento. El uso de un momento lineal de salida contiene en su signo la información de la transmisión o reflexión de la órbita. Por la conservación de la energía total, las dos variables medidas ($p_{\text{out}}, \Delta L_{\text{out}}$) están acotadas en sus valores posibles. En las fronteras de los intervalos de los dominios de continuidad el valor de p_{out} tiende a cero, y dentro de cada uno de ellos es distinto de cero (esta observación es trivial si nos damos cuenta que la definición de un dominio de continuidad es el interior de una región con $p_{\text{out}} \neq 0$ en ella, y que $p_{\text{out}} = 0$ no es elemento de la imagen). La función es suave dentro de un dominio de continuidad. Por ende la función típicamente tiene

extremales cuadráticos en su interior. Esto implica la existencia de curvas en donde el determinante de la función se anule y nos quedamos con la estructura arcoiris explicada en el capítulo 5. Si las dos direcciones en un plano fueran abiertas, la transición entre “transmisión” y “reflexión” sería continua, puesto que tenemos todo un círculo de direcciones a escoger, un rango de ángulos de deflexión. Esto podría implicar que la sección eficaz no contuviera una huella discernible del fractal invariante de la dinámica [14, 15, 43].

De estas consideraciones podríamos empezar a ponderar la posible aplicación de estos resultados a sistemas con más de tres grados de libertad. Digamos que tenemos N grados de libertad. Dos de ellos se encuentran fuertemente acoplados, uno abierto y uno cerrado. Todos los otros grados de libertad están débilmente acoplados con aquellos dos y también entre sí. Obsérvese que un cambio a coordenadas esféricas generalizadas hace que todos los grados de libertad excepto uno sean cerrados. Supongamos que esta transformación se ha llevado a cabo. Excepto por la singularidad en el origen, siempre podemos llevar a cabo dicha transformación. Supongamos que tenemos ahora un parámetro A que controla la intensidad del acoplamiento y que cuando $A = 0$ estas $N - 2$ variables extras se separan trivialmente, resultando en una cantidad igual de momentos conservados. En este caso podemos encontrar un NHIM de $(2N - 4)$ dimensiones en la sección de Poincaré de $(2N - 2)$ dimensiones. Este NHIM será hiperbólicamente inestable en una dirección, estable en la otra y neutralmente estable en las otras, es decir, un objeto del tipo silla-centro-...-centro. Estos NHIM, en el tratamiento adecuado, serán $(2N - 4)$ -toros indexados por las acciones correctas. El caso $A = 0$ hace reducible estos objetos, tal cual lo hemos expuesto en los ejemplos manejados en el presente trabajo, donde la variable θ se ha desacoplado. El desarrollo de la herradura en las primeras dos variables dependerá de la energía disponible que no se encuentre utilizada en acciones conservadas. Podemos escoger cualquiera de ellas para controlar éste, y apilarlas como se ha mostrado.

Los argumentos de robustez son los mismos, sólo que ahora se aplican a una estructura que tendrá $2N - 5$ direcciones neutrales en producto directo. Esto nos garantiza que la estructura de las funciones de dispersión sea similar. La estructura proveniente de un DoC es una variedad $(N - 2)$ -dimensional encajada en el rango $(N - 1)$ -dimensional de la sección eficaz. Los argumentos de robustez se construyen a partir de los presentados en este trabajo. Si el subsistema con un grado de libertad menos es genérico y si el sistema total se puede construir apilando los anteriores, los resultados serán robustos. Habría que construir un modelo teórico que nos develará su estructura general tal como lo hicimos en el capítulo 5. Todo esto deberá ser tratado con detalle a futuro.

6.2. Consideraciones cuánticas y semiclásicas

Hasta aquí todos los razonamientos han sido estrictamente clásicos. Hemos mantenido la pregunta abierta sobre la posibilidad de aplicar estos resultados a la mecánica cuántica, que a todas luces es más correcta como descripción de los movimientos de las partículas. Hemos analizado aquí la sección eficaz para energía constante. Todas las acciones finales resultan ser variables continuas. No es así en mecánica cuántica, donde los grados de libertad que corresponden a direcciones acotadas son

discretos. Esto hace que el subconjunto de estados finales sea un subconjunto no trivial de un espacio homeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Esto provee una descomposición de la matriz en canales, como de las amplitudes de dispersión. El muestreo de las condiciones finales en acción no es la mejor idea en mecánica cuántica. Un procedimiento más recomendable es escoger condiciones iniciales y finales particulares y estudiar las posibles transiciones como funciones de la energía, es decir, estudiar las secciones eficaces como funciones de la energía total. Esperaríamos ver entonces resonancias que revelen la silla caótica clásica, amplitudes de probabilidad de estados finales mucho mayores que el resto [57, 46].

El meollo de este análisis sería encontrar el análogo ondulatorio a las singularidades arcoíris clásicas. Recordemos que en la aproximación semiclásica o en el formalismo de Feynman lo que sumamos son las amplitudes de probabilidad. Luego construimos el cuadrado de estos valores y finalmente tomamos todos ellos como la sección eficaz. Lo divertido aquí es que las diferentes trayectorias se influyen a la manera de la interferencia. Los términos diagonales son la contribución clásica y los no diagonales las diferentes interferencias entre distintas trayectorias. En un punto arcoíris dos trayectorias coinciden. El tratamiento semiclásico busca una uniformación que nos dé la contribución correcta a la sección eficaz. Ésta resulta una función de Airy del primer tipo, que es el sustituto ondulatorio de la singularidad de que va como el inverso de una raíz cuadrada.

Siguiendo estos últimos razonamientos, en un tratamiento ondulatorio debemos analizar los patrones de interferencia en la sección eficaz y detectar cuales contribuciones son explicables como provenientes de una función de Airy, tal vez recuperando los niveles más bajos de la jerarquía del patrón arcoíris. Hasta donde sabemos, este trabajo no ha sido llevado a cabo y valdría la pena intentarlo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Henri Poincaré. *Les Methodes Nouvelles de la Méchanique Céleste*. Gauthier-Villars et fills, 1899.
- [2] Pierre Simon Laplace. *A philosophical essay on probablities*. University of California Libraries, 1902.
- [3] Martin Gardner. *¿Tenían ombligo Adán y Eva?* Editorial Debate, 2001.
- [4] Jorge V. José and Eugene J. Saletan. *Classical Mechanics*. Cambridge University Press, 1998.
- [5] Martin C. Gutzwiller. *Chaops in Classical and Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 1990.
- [6] George Cantor. De la puissance des ensembles parfait de points. *Acta Mathematica*, 4, 1884. Reimpreso en *Çlassics on Fractals*", ed. Gerald A. Edgar, Addison-Wesley (1993).
- [7] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bul, Am. Math. Soc.*, 73:747, 1967.
- [8] Roger G. Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles*. Springer Verlag, New York, EUA., 1982 edition, 1966.
- [9] E. Rutherford. The scattering of α and β particles and the structure of the atom. *Philosophycal Magazine*, 21:669, 1911.
- [10] C. Jung, C. Lipp, and T. H. Seligman. The inverse scattering problem for chaotic hamiltonian systems. *Annals of Physics*, 275:151, 1999.
- [11] L. Benet, J. Broch, O. Merlo, and T. H. Seligman. Symmetry breaking: A heuristic approach to chaotic scattering in many dimensions. *Phys. Rev. E*, 71:036225, 2005.

- [12] C. Jung and T. Tel. Dimension and escape rate of chaotic scattering from classical and semiclassical cross section data. *J. Phys. A*, 24:2793, 1991.
- [13] C. Jung, G. Orellana-Rivadeneira, and G.A. Luna-Acosta. Reconstruction of the chaotic set from classical cross section data. *Jour. Phys. A*, 38:567, 2004.
- [14] A. P. de Moura and C. Grebogi. Rainbow transition in chaotic scattering. *Phys. Rev. E*, 65:035206, 2002.
- [15] Schelin A.B., de Moura A.P.S, and Grebogi C. Transition to chaotic scattering: Signatures in the differential cross section. *Phys. Rev. E.*, 78:046204, 2008.
- [16] Cresson. Symbolic dynamics and arnold diffusion. *J. Diff. Eq.*, 187, 2003.
- [17] M. Barge. Horseshoe maps and inverse limits. *Pacific Journal of Mathematics*, 121(1):29–39, 1986.
- [18] R. M. Vargas Magaña. Aspectos dinámicos y topológicos de la herradura de smale. Master's thesis, Fac. de Ciencias, UNAM, 2008.
- [19] B. Ruckerl and C. Jung. Scaling properties of a scattering system with an incomplete horseshoe. *J. Phys. A*, 27:55, 1994.
- [20] B. Ruckerl and C. Jung. Hierarchical structure in the chaotic scattering off a magnetic dipole. *J. Phys. A*, 27:6741, 1994.
- [21] S. N. Elaydi. *Discrete Chaos*. Chapman and Hall/CRC, EUA, 1999.
- [22] W. Breymann and J. Vollmer. Symbolic dynamics and topological entropy at the onset of pruning. *Zeitschrift für Physik B*, page 539, 1997.
- [23] S. Wiggins. *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1994.
- [24] S. Wiggins. *Chaotic Transport in Dynamical Systems*. Springer Verlag, 1992.
- [25] H. Waalkens, A. Burbanks, and S. Wiggins. A computational technique to detect a new type of high dimensional chaotic saddle. *J. Phys. A.*, 2004.
- [26] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 2 edition, 1989.
- [27] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, tercera edición edition, 2002.
- [28] F. Calogero and F. Leyvraz. How to embed an arbitrary hamiltonian dynamics in a superinteg rable hamiltonian dynamics. *J. Phys. A*, 42, 2009.
- [29] H. C. Corben and P. Stehle. *Classical Mechanics*. Dover, 1960.
- [30] V. I. Arnol'd. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [31] Kenneth R. Meyer. The geometry of harmonic oscillators. *Am. Math. Monthly*, 97(6):457–465, 1990.

-
- [32] D. Sanders. Normal diffusion in crystal structures and higher-dimensional billiard models with gaps. *Phys. Rev. E*, 78:060101, 2008.
- [33] Thomas Gilbert and Raphaël Lefevre. Heat conductivity from molecular chaos hypothesis in locally confined billiard systems. *Phys. Rev. Lett.*, 101(20):200601, 2008.
- [34] L. A. Bunimovich. Chaotic and nonchaotic mushrooms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(1 y 2):63, 2008.
- [35] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic Billiards*, volume 127. Mathematical Surveys and Monographs, 2006.
- [36] C. Jung, C. Mejía-Monasterio, O. Merlo, and T. H. Seligman. Self pulsing effect in chaotic scattering. *New J. Phys.*, page 48, 2004.
- [37] Carlos Mejía-Monasterio. *Quantum Chaotic Scattering in Systems with Incomplete Smale Horseshoes*. PhD thesis, UNAM, 2007.
- [38] C. Jung, O. Merlo, T.H. Seligman, and W. P. K. Zapfe. The chaotic set and the cross section for chaotic scattering in three degrees of freedom. *New Journal of Physics*, 12:103021, 2010.
- [39] Chaos no. 4. vol. 3, 1993. whole issue.
- [40] C. Jung, O. Merlo, and T. H. Seligman. Symmetry properties of periodic orbits extracted from scattering data. *CHAOS*, 14:969, 2005.
- [41] H. J. Korsch and A. Wagner. Fractal mirror images and chaotic scattering. *Comp. in Phys.*, 5:497, 1991.
- [42] T. Bütikofer, C. Jung, and T. H. Seligman. Extraction of information about periodic orbits from scattering functions. *Phys. Lett. A*, 76:265, 2000.
- [43] Alessandro P. S. de Moura and Celso Grebogi. Output functions and fractal dimensions in dynamical systems. *Physical Review Letters*, 86, 2001.
- [44] C. Beck and F. Schlögel. *Thermodynamics of Chaotic Systems*. Cambridge University Press, 1997.
- [45] T. Tel. On the organization of transient chaos - application to irregular scattering. *J. Phys. A*, 22:L691, 1989.
- [46] C. Jung. Fractal properties in the semiclassical scattering cross section of a classically chaotic system. *J. Phys A.*, 23:1217, 1990.
- [47] J. M. Demazur. *Bifurcations and Catastrophes*. Springer, 2000.
- [48] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag, 2002.
- [49] A. Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bull. Am. Math. Soc.*, 48:883, 1942.
-

- [50] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comm. Math. Helv.*, 28:17, 1954.
- [51] A. M. Ozorio de Almeida. *Hamiltonian Systems: Chaos und Quantization*. Cambridge University Press, 1988.
- [52] K. Kendig. *Elementary Algebraic Geometry*. Springer, 1977.
- [53] K. A. Mitchell and J. B. Delos. A new topological technique for characterizing homoclinic tangles. *Physica D*, 221:170, 2006.
- [54] K. A. Mitchell. The topology of nested homoclinic and heteroclinic tangles. *Physica D*, 238:737, 2009.
- [55] T. Tel. *Directions in Chaos*, chapter 3. World Scientific, 1990.
- [56] Q. Chen, M. Ding, and E. Ott. Chaotic scattering on several dimensions. *Phys. Lett. A*, 115:93, 1990.
- [57] C. Jung and S. Pott. Semiclassical cross section for a classically chaotic scattering system. *J. Phys A.*, 23:3729, 1990.