



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

CÓPULAS Y APLICACIONES
A PRUEBAS DE SIMETRÍA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

EDITH JURADO GALICIA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ MARÍA GONZÁLEZ-BARRIOS MURGUÍA

MÉXICO, D.F.

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Cópulas	3
1.3. Teorema de Sklar	5
1.4. Cópulas y Variables Aleatorias	12
1.5. Las Cotas de Fréchet-Hoeffding para Variables Aleatorias con Función de Distribución Conjunta H.	15
1.6. Cópulas de Supervivencia	16
1.7. Simetría	19
1.8. Orden	21
1.9. Generación de Variables Aleatorias	23
1.10. Cópulas Multivariadas	24
2. Cópulas Arquimedianas	33
2.1. Cópulas Arquimedianas Bivariadas	33
2.2. Cópulas Arquimedianas Multivariadas	44
2.3. Cópulas Arquimedianas y Funciones d -Monótonas	47
3. Dependencia	53
3.1. Concordancia y la Tau de Kendall	53
3.2. La Rho de Spearman	68
3.3. Relación entre la Tau de Kendall y la Rho de Spearman	74
3.4. Otras Medidas de Concordancia	78
3.5. Dependencia	83
3.5.1. Medidas de Dependencia	105
3.5.2. Cópulas Empíricas	109

4. Una Prueba de Simetría	115
4.1. Extremos de no intercambiabilidad	115
4.2. Cópulas y Variables Aleatorias no Intercambiables Maximales. 122	
4.3. Una Prueba no Paramétrica para Cópulas Bivariadas Absolu- tamente Continuas.	126
4.4. Simulaciones	145
Bibliografía	149

Capítulo 1

Introducción

1.1. Preliminares

Comenzaremos esta sección con una definición intuitiva: Cópulas son aquellas funciones que relacionan una función de distribución multivariada con sus funciones de distribución marginales.

Las pruebas de los resultados que no se dan en este capítulo se pueden encontrar en Nelsen[13].

A lo largo de esta tesis usaremos la siguiente notación:

Sea $\bar{\mathbb{R}}$ el conjunto de los reales extendidos, es decir $[-\infty, \infty]$; sea $\bar{\mathbb{R}}^2$ el plano real extendido.

Una función $f : A \rightarrow B$, con A, B subconjuntos de $\bar{\mathbb{R}}$ es **creciente** si dados x, y en los reales tales que $x \leq y$, se cumple $f(x) \leq f(y)$.

Una función $f : A \rightarrow B$, con A, B subconjuntos de $\bar{\mathbb{R}}$ es **estrictamente creciente** si dados x, y en los reales tales que $x < y$, se cumple $f(x) < f(y)$. Un **rectángulo** en $\bar{\mathbb{R}}$ es el producto cartesiano B de dos intervalos cerrados $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, cuyos vértices son la coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2)$ y (x_2, y_1) , con $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$. El cuadrado unitario I^2 se define como el rectángulo $I \times I$ con $I = [0, 1]$.

Usaremos la notación $DomH$, para denotar el dominio de la función H y $RanH$ para denotar el rango de la función H ; no definimos el dominio y

rango, ya que dichos conceptos se retoman de la definición de función ya conocida.

Una función H es **2-real valuada**, si su dominio $DomH$ es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}^2$ y el rango $RanH$ es un subconjunto de \mathbb{R} .

Definición 1.1.1 Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función tal que $DomH = S_1 \times S_2$; sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo, donde todos sus vértices pertenecen al dominio de H ; es decir, $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$. Entonces el **H volumen** de B se define como:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (1.1)$$

Definición 1.1.2 Una función H es **2-creciente** si $V_H(B) \geq 0$ para todos los rectángulos B cuyos vértices están en el $DomH$.

Lema 1.1.3 Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y H una función 2-creciente con dominio $S_1 \times S_2$, sean $x_1, x_2 \in S_1$ con $x_1 \leq x_2$ y $y_1, y_2 \in S_2$ con $y_1 \leq y_2$; entonces las funciones $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ son crecientes sobre S_1 y las funciones $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ son crecientes sobre S_2 .

Definición 1.1.4 Una función H de $S_1 \times S_2$, se dirá que está **fija** si

- I. Si $a_1 = (\inf S_1) \in S_1$ y $a_2 = (\inf S_2) \in S_2$.
- II. Para todos $(x, y) \in S_1 \times S_2$, $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$.

Lema 1.1.5 Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función que está fija, 2-creciente con dominio $S_1 \times S_2$ entonces H es creciente en cada argumento, es decir, para cada $x_1 \in S_1$ fija, $H(x_1, y)$ es creciente en $y \in S_2$ y para cada $y_1 \in S_2$ fija, $H(x, y_1)$ es creciente en $x \in S_1$.

Definición 1.1.6 Sean $b_1 = (\sup S_1) \in S_1$ y $b_2 = (\sup S_2) \in S_2$. Decimos que la función H de $S_1 \times S_2$ a \mathbb{R} , tiene **marginales** F con dominio S_1 y G con dominio S_2 dadas por:

$$F(x) = H(x, b_2), \text{ para toda } x \in S_1 \quad (1.2)$$

$$G(y) = H(b_1, y), \text{ para toda } y \in S_2 \quad (1.3)$$

Lema 1.1.7 Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$, H una función que está fija y es 2–creciente con dominio en $S_1 \times S_2$, con marginales F y G , sean (x_1, x_2) y (y_1, y_2) puntos cualesquiera de $S_1 \times S_2$, entonces

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

1.2. Cópulas

Definición 1.2.1 Una **subcópula bidimensional** o (2–subcópula) es una función C' con las propiedades:

- I. $\text{Dom}C' = S_1 \times S_2$, donde S_1, S_2 son subconjuntos de I que contienen al 0 y al 1.
- II. C' está fija y es 2–creciente.
- III. Para todo $u \in S_1$ y $v \in S_2$,

$$C'(u, 1) = u \text{ y } C'(1, v) = v.$$

Note que para todo (u, v) en el $\text{Dom}C'$, $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, por lo tanto el $\text{Ran}C'$ es un subconjunto del intervalo I .

Ejemplo 1:

Sea $S_1 = S_2 = \{0, 1\}$, la función C' definida como

$$C'(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u = 0 \text{ ó } v = 0 \\ 1 & \text{si } u = 1 = v. \end{cases}$$

es una subcópula, el conjunto de las posibles parejas $S_1 \times S_2$, consta de las parejas ordenadas $\{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$.

Verifiquemos las propiedades de subcópula.

- I. Por definición $DomC' = S_1 \times S_2$, donde S_1, S_2 son subconjuntos de I que contienen al 0 y al 1.
- II. C' está fija y es 2-creciente

$$C'(u, 0) = 0 = C'(0, v), \quad (1.4)$$

pues, $C'(0, 0) = C'(0, 1) = C'(1, 0) = 0$, $C'(1, 1) = 1$.

Y $V_C'([0, 1] \times [0, 1]) = C'(1, 1) - C'(0, 1) - C'(1, 0) + C'(0, 0) = 1 \geq 0$.

- III. Además, para todo $u \in S_1$ y $v \in S_2$,

$$C'(u, 1) = u \quad y \quad C'(1, v) = v.$$

Ésta es la mínima subcópula, en el sentido que $\{0, 1\}^2$ es el mínimo subconjunto de I^2 que puede ser dominio de una subcópula.

Definición 1.2.2 Una **Cópula** C (**2-cópula**) es una 2-subcópula cuyo $DomC = I^2$. Equivalentemente, una cópula es una función $C : I^2 \mapsto I$ con las siguientes propiedades:

1. Para todo $u, v \in I$,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (1.5)$$

y

$$C(u, 1) = u \quad y \quad C(1, v) = v. \quad (1.6)$$

II. Para cada u_1, u_2, v_1, v_2 en I tal que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (1.7)$$

Ejemplo 2:

Sea $S_1 = S_2 = I$, sea $C = \Pi$ definida como $\Pi(u, v) = uv$.

Verifiquemos las propiedades de cópula

I. Para todo $u, v \in I$,

$$\Pi(u, 0) = 0 = \Pi(0, v)$$

y

$$\Pi(u, 1) = u \quad \text{y} \quad \Pi(1, v) = v.$$

II. Para cada a, b, c, d en I tal que $a \leq b, c \leq d$

$$\begin{aligned} V_{\Pi}([a, b] \times [c, d]) &= \Pi(b, d) - \Pi(b, c) - \Pi(a, d) + \Pi(a, b) \\ &= bd - bc - ad + ab \\ &= (b - a)(d - c) \geq 0. \end{aligned}$$

1.3. Teorema de Sklar

Definición 1.3.1 Una función de distribución es una función F , con dominio en $\bar{\mathbb{R}}$, tal que:

I. F es creciente, es decir, si $-\infty \leq x \leq y \leq \infty$, entonces $F(x) \leq F(y)$.

II. $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$.

Definición 1.3.2 Una función de distribución conjunta es una función H con dominio en $\bar{\mathbb{R}}^2$ tal que:

I. H es 2-creciente.

$$\text{II. } H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0 \text{ y } H(+\infty, +\infty) = 1.$$

Entonces H está fija, y dado que $\text{Dom}H = \bar{\mathbb{R}}^2$, H tiene marginales $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$. Las cuales son funciones de distribución.

Teorema 1.3.3 (Teorema de Sklar) *Sea H una función de distribución conjunta, con marginales F y G , entonces existe una cópula C tal que para todo $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (1.8)$$

Si F y G son continuas entonces C es única, de otra manera, C esta únicamente determinada sobre $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$. Inversamente, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución entonces la función H definida en (1.8) es una función de distribución conjunta con marginales F y G .

Para probar este teorema utilizaremos los siguientes Lemas.

Lema 1.3.4 *Sea H función de distribución conjunta con marginales F y G , entonces existe una única subcópula C' tal que:*

- I. $\text{Dom}C' = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$.
- II. *Para todo x, y que pertenece a $\bar{\mathbb{R}}$, se cumple $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.*

Demostración:

Sea $H : \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fija y 2–creciente con $S_1 = S_2 = \bar{\mathbb{R}}$. Por el Lema (1.1.7) si $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ pertenece a $\bar{\mathbb{R}}^2$, entonces:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|$$

Si $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$, entonces $H(x_2, y_2) = H(x_1, y_1)$.

Por lo tanto, el conjunto de parejas

$$\{(F(x), G(y)), H(x, y) \mid x, y \text{ pertenecen a } \bar{\mathbb{R}}\}$$

define una función C' con dominio $RanF \times RanG$. Entonces dados $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$ en $RanF \times RanG$ tales que

$$(F(x_2), G(y_2)) = (F(x_1), G(y_1))$$

implica que

$$F(x_2) = F(x_1)$$

y

$$G(y_2) = G(y_1),$$

entonces

$$H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2),$$

por lo tanto si

$$C'(F(x), G(y)) = H(x, y)$$

C' tiene dominio $RanF \times RanG$.

Como H es función de distribución conjunta entonces $H(-\infty, -\infty) = 0$ y $H(\infty, \infty) = 1$. Como 0 pertenece a $RanF \cap RanG$, entonces H está fija pues, $H(x, -\infty) = C'(F(x), G(-\infty)) = 0 = C'(F(-\infty), G(y)) = H(-\infty, y)$. \square

Lema 1.3.5 *Sea C' una subcópula, Entonces existe una cópula C tal que $C(u, v) = C'(u, v)$ para todo (u, v) en $DomC'$; es decir, cualquier subcópula puede ser extendida a una cópula. La extensión generalmente no es única.*

Demostración:

Sea $DomC' = S_1 \times S_2$, con S_1, S_2 conjuntos no vacíos y contenidos en I tales que $\{0, 1\} \in S_1 \cap S_2$.

C' es creciente en cada coordenada y es continua. Sea \bar{S}_1, \bar{S}_2 las cerraduras S_1 y S_2 .

Sean x un punto límite de S_1 , y un punto límite de S_2 , entonces existen sucesiones $\{x_n\}$ completamente contenida en S_1 y $\{y_n\}$ completamente contenida en S_2 tales que

$$\{x_n\} \rightarrow x$$

y

$$\{y_n\} \rightarrow y,$$

es decir,

$$|x_n - x| \rightarrow 0,$$

$$|y_n - y| \rightarrow 0.$$

Entonces $|(x_n, y_n) - (x, y)| := |x_n - x| + |y_n - y| \rightarrow 0$. Así definimos $C'(x, y) = \lim C'(x_n, y_n)$ que existe por la continuidad de C' .

Supondremos que C' está definida en $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$.

Sea (a, b) en I^2 , sean $a_1 = \sup \{c \in \bar{S}_1 \mid c \leq a\}$ y $a_2 = \inf \{d \in \bar{S}_1 \mid a \leq d\}$.

Si a está en \bar{S}_1 , entonces $a_1 = a = a_2$. Supongamos que a no está en \bar{S}_1 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ está completamente contenido en $(\bar{S}_1)^c$, entonces $a_1 < a < a_2$.

Sean $b_1 = \sup \{c \in \bar{S}_2 \mid c \leq b\}$ y $b_2 = \inf \{d \in \bar{S}_2 \mid b \leq d\}$.

De la misma manera que para a , si b no está en \bar{S}_2 , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ está completamente contenido en $(\bar{S}_2)^c$, entonces $b_1 < b < b_2$.

Definimos

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2. \end{cases}$$

y

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1} & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2. \end{cases}$$

Definimos

$$C(a, b) = (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'(a_2, b_2)$$

Si $a \in S_1$ y $b \in S_2$, entonces $C(a, b) = C'(a, b)$, pues $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ y $a_1 = a = a_2$, $b_1 = b = b_2$; C es una extensión de C' a todo I^2 .

Verifiquemos las propiedades de cópulas.

Si $a = 0 = a_1 = a_2$ y $b = 0 = b_1 = b_2$, entonces $C(0, b) = 0 = C(a, 0)$.

Si $a = 1 = a_1 = a_2$, $\lambda_1 = 1$, entonces

$$C(1, b) = (1 - 1)(1 - \mu_1)C'(1, b_1) + (1 - 1)\mu_1C'(1, b_2) \\ + (1 - \mu_1)C'(1, b_1) + \mu_1C'(1, b_2) \\ = (1 - \mu_1)C'(1, b_1) + \mu_1C'(1, b_2) \\ = (1 - \mu_1)b_1 + \mu_1b_2$$

Analizamos por casos, si $b \in \bar{S}_2$ entonces $b = b_1 = b_2$ y entonces $C(1, b) = C'(1, b) = b$; ahora supongamos que $b \notin \bar{S}_2$, entonces

$$C(1, b) = (1 - \mu_1)b_1 + \mu_1b_2 \\ = \left(1 - \frac{b - b_1}{b_2 - b_1}\right) b_1 + \frac{b - b_1}{b_2 - b_1} b_2 \\ = \frac{b_2 - b}{b_2 - b_1} b_1 + \frac{b - b_1}{b_2 - b_1} b_2 \\ = \frac{1}{b_2 - b_1} ((b_2 - b)b_1 + (b - b_1)b_2) \\ = b$$

Sólo resta comprobar que $C(a, b)$ es 2-creciente, es decir que $V_C(B) \geq 0$, para este fin se que analizan varios casos; sea (c, d) otro punto en I^2 que cumple $a \leq c$ y $b \leq d$, sean $c_1 < c < c_2$, $d_1 < d < d_2$ con c_1, c_2, d_1, d_2

definidos de la misma manera que a_1, a_2, c_1, b_2 y definir μ_2, λ_2 como sigue:

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{c-c_1}{c_2-c_1} & \text{si } c_1 < c_2 \\ 1 & \text{si } c_1 = c_2. \end{cases}$$

y

$$\mu_2 = \begin{cases} \frac{d-d_1}{d_2-d_1} & \text{si } d_1 < d_2 \\ 1 & \text{si } d_1 = d_2. \end{cases}$$

El caso más sencillo es aquel en donde $a_1 = c_1, a_2 = c_2, b_1 = d_1$ y $b_2 = d_2$, entonces μ_2 y λ_2 cambian como sigue

$$\lambda_2 = \begin{cases} \frac{c-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 < a_2 \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2. \end{cases}$$

y

$$\mu_2 = \begin{cases} \frac{d-b_1}{b_2-b_1} & \text{si } b_1 < b_2 \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2. \end{cases}$$

calculemos el volumen $V_C(B)$

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) \\ &= [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_2C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_2)C'(a_2, b_1) + \lambda_2\mu_2C'(a_2, b_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_2)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_2C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_2)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_2C'(a_2, b_2)] \\ &\quad - [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_2)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_2(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_2\mu_1C'(a_2, b_2)] \\ &\quad + [(1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)C'(a_1, b_1) + (1 - \lambda_1)\mu_1C'(a_1, b_2) \\ &\quad + \lambda_1(1 - \mu_1)C'(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C'(a_2, b_2)] \end{aligned}$$

haciendo los productos y las reducciones pertinentes

$$\begin{aligned}
V_C(B) &= [(1 - \lambda_2)(1 - \mu_2) - (1 - \lambda_1)(1 - \mu_2) - (1 - \lambda_2)(1 - \mu_1) \\
&\quad + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1)]C'(a_1, b_1) \\
&\quad - [-(1 - \lambda_2)\mu_2 + (1 - \lambda_1)\mu_2 + (1 - \lambda_2)\mu_1 \\
&\quad - (1 - \lambda_1)\mu_1]C'(a_1, b_2) \\
&\quad - [-\lambda_2(1 - \mu_2) + \lambda_1(1 - \mu_2) + \lambda_2(1 - \mu_1) \\
&\quad - \lambda_1(1 - \mu_1)]C'(a_2, b_1) \\
&\quad + [\lambda_2\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_1]C'(a_2, b_2) \\
&= [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_1, b_2) - [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_1, b_2) \\
&\quad - [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_2, b_1) + [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]C'(a_2, b_2) \\
&= [(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \lambda_1)]V_{C'}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]).
\end{aligned}$$

Los otros casos se hacen de forma similar. \square

Definición 1.3.6 Sea F una función de distribución, una **Cuasi-inversa** de F es una función $F^{(-1)}$ con dominio I tal que

- I. Si t pertenece al $\text{Ran}F$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es un número x en $\bar{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, es decir, para todo t en el $\text{Ran}F$

$$F(F^{(-1)}(t)) = t.$$

- II. Si t no pertenece al $\text{Ran}F$

$$F^{(-1)}(t) = \inf \{x \mid F(x) \geq t\} = \sup \{x \mid F(x) \leq t\}$$

Si F es estrictamente creciente entonces tiene una única cuasi-inversa, la cual es la inversa ordinaria F^{-1} .

Ejemplo 3:

La cuasi-inversa de la función salto unitario en a definida por

$$\epsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a. \end{cases}$$

Observamos que el $Ran\epsilon_a = \{0, 1\}$. Si $t = 0$, $\epsilon_a^{-1}(0)$ es cualquier valor $a_0 < a$. Si $t = 1$, $\epsilon_a^{-1}(1)$ es cualquier valor $a_1 \geq a$. Si $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned} y = \epsilon_a^{(-1)}(t) &= \inf \{x | \epsilon_a(x) \geq t\} \\ &= \sup \{x | \epsilon_a(x) \leq t\} = a \end{aligned}$$

Así, sean $a_0 < a \leq a_1$, las cuasi-inversas estan dadas por la familia de funciones

$$\epsilon_a^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0 & \text{si } t = 0 \\ a & \text{si } t \in (0, 1) \\ a_1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Corolario 1.3.7 Sean H una función de distribución conjunta con marginales F y G , y C' la única subcópula asociada a H , y sean $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ cuasi inversas de F y G respectivamente, entonces para todo (u, v) en el $DomC'$

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (1.9)$$

Observación: Cada cópula, con una extensión adecuada de su dominio a $\bar{\mathbb{R}}^2$ define una función de distribución conjunta H_C cuyas marginales son uniformes sobre I^2 , definida como

$$H_C(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ ó } y < 0 \\ C(x, y) & (x, y) \in I^2 \\ x & y > 1, x \in I \\ y & x > 1, y \in I \\ 1 & x > 1, y > 1. \end{cases}$$

1.4. Cópulas y Variables Aleatorias

Definición 1.4.1 Una Variable Aleatoria X es una función medible sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

es el σ -álgebra generada por los abiertos de la topología usual de \mathbb{R} .

La medibilidad de X significa que cada evento

$$[X \in B] := X^{-1}(B) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in B\}$$

pertenece a \mathcal{F} para todo $B \in \mathcal{B}$.

F es una función de distribución de una variable aleatoria X , cuando para todo x en $\bar{\mathbb{R}}$

$$F(x) = \mathbb{P}[X \leq x].$$

Si X, Y son variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, H es una función de distribución conjunta si para todo x, y en $\bar{\mathbb{R}}$

$$H(x, y) = \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \mathbb{P}[X \leq x, Y \leq y].$$

Observación: el conjunto $[X \leq x] = \{w \in \Omega \mid X(w) \in (-\infty, x]\}$ pertenece a \mathcal{F} ya que $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $x \in \bar{\mathbb{R}}$.

Teorema 1.4.2 (Teorema de Sklar en términos de variables aleatorias) Sean X, Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G , respectivamente y H su función de distribución conjunta, entonces existe una cópula C tal que

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

.

Si F y G son continuas, C es única, de lo contrario C esta únicamente determinada en $\text{Ran}F \times \text{Ran}G$.

Se denotará por C_{XY} a la cópula de X y Y .

Teorema 1.4.3 Sean X, Y variables aleatorias continuas entonces X y Y son independientes si y sólo si $C_{XY} = \Pi$.

Observación: Si la función de distribución de la variable aleatoria X es continua y α es una función estrictamente monótona cuyo dominio contiene a $\text{Ran}X$, entonces la función de distribución de la variable aleatoria $\alpha(X)$ es continua.

Teorema 1.4.4 Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son estrictamente crecientes sobre $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ respectivamente entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$.

Por lo que C_{XY} es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de X y Y .

Teorema 1.4.5 Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son estrictamente monótonas sobre $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ respectivamente

- I. Si α es estrictamente creciente y β estrictamente decreciente, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$.
- II. Si α es estrictamente decreciente y β estrictamente creciente, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$.
- III. Si α y β son estrictamente decrecientes, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)$.

Observación: Cada función de distribución conjunta H induce una medida de probabilidad P_H sobre $\bar{\mathbb{R}}^2$ mediante $P_H((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = H(x, y)$ y la extensión estándar de conjuntos de Borel de $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Dado que las cópulas son funciones de distribución con marginales uniformes $(0, 1)$, cada cópula C induce una medida de probabilidad P_C sobre I^2 mediante $P_C([0, u] \times [0, v]) = C(u, v)$ llamada C -medida.

Las C -medidas son doblemente estocásticas dado que para cualquier subconjunto medible S en I se cumple $P_C(S \times I) = P_C(I \times S) = \lambda(S)$, donde λ denota la medida de Lebesgue sobre I .

Para cada cópula C ,

$$C(u, v) = A_C(u, v) + S_C(u, v).$$

Donde A_C es la parte absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue

$$A_C(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s, t) dt ds$$

y S_C la parte singular con $S_C(u, v) = C(u, v) - A_C(u, v)$.

1.5. Las Cotas de Fréchet-Hoeffding para Variables Aleatorias con Función de Distribución Conjunta H.

Las cotas de Fréchet-Hoeffding M y W satisfacen

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v)$$

Como consecuencia del Teorema de Sklar, si X y Y son variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G respectivamente, entonces para todo x, y en $\bar{\mathbb{R}}$,

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y))$$

Dado que M y W son cópulas entonces las cotas son a su vez funciones de distribución conjunta, y se llaman las cotas de Fréchet-Hoeffding para la función de distribución conjunta H con marginales F y G .

La pregunta que se resuelve en esta sección es ¿Qué podemos decir de la función de distribución conjunta H si ésta es igual a alguna de las cotas de Fréchet-Hoeffding?

Definición 1.5.1 *Un subconjunto de S de $\bar{\mathbb{R}}^2$ es **creciente** si para cualesquiera (x, y) y (u, v) en S , $x < u$ implica $y \leq v$; Similarmente, un subconjunto de S de $\bar{\mathbb{R}}^2$ es **decreciente** si para cualesquiera (x, y) y (u, v) en S , $x < u$ implica $y \geq v$.*

Lema 1.5.2 *Sea S subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}^2$, S es creciente si y sólo si para cada (x, y) en $\bar{\mathbb{R}}^2$ se cumple una de las siguientes:*

- I. Para todo (u, v) en S , $u \leq x$ implica $v \leq y$, ó bien,
- II. Para todo (u, v) en S , $v \leq y$ implica $u \leq x$.

Lema 1.5.3 *Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H , entonces H es igual a la cota superior de Fréchet-Hoeffding M si*

y sólo si para cada (x, y) en $\bar{\mathbb{R}}^2$ se cumple que $\mathbb{P}(X > x, Y \leq y) = 0$ o bien que, $\mathbb{P}(X \leq x, Y > y) = 0$.

Teorema 1.5.4 Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta H , entonces H es igual a la cota superior de Fréchet-Hoeffding M si y sólo si el soporte de H es un conjunto creciente de $\bar{\mathbb{R}}^2$.

1.6. Cópulas de Supervivencia

En muchas aplicaciones es de interés calcular los tiempos de vida de un evento, digamos el tiempo que transcurre antes de la desaparición de una población, o el tiempo de supervivencia de una bacteria, entonces la probabilidad de que un individuo sobreviva más allá del tiempo x estará dado por la función de supervivencia, si F es la función de distribución de la variable aleatoria X entonces su **función de supervivencia** está dada por $\bar{F}(x) = \mathbb{P}[X > x] = 1 - F(x)$.

Para un par de variables aleatorias (X, Y) con función de distribución conjunta H la **función conjunta de supervivencia** está dada por $\bar{H}(x, y) = \mathbb{P}[X > x, Y > y]$, las marginales de \bar{H} son las funciones $\bar{F}(x) = \bar{H}(x, -\infty)$ y $\bar{G}(y) = \bar{H}(-\infty, y)$.

En el desarrollo de esta sección analizaremos cual es la relación entre las funciones de supervivencia conjunta y sus marginales de supervivencia, y que relación tiene con el Teorema de Sklar. Para determinar esta relación supongamos que la cópula para X y Y es C , entonces

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\
 &= 1 - 1 + 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\
 &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + H(x, y) \\
 &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\
 &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)).
 \end{aligned}$$

Sean $u = \bar{F}(x)$ y $v = \bar{G}(y)$, entonces tiene sentido la siguiente

Definición 1.6.1 Definimos la cópula de supervivencia \hat{C} como

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \quad (1.10)$$

Entonces, por el Teorema 1.3.3, ecuación 1.8, tenemos que

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)). \quad (1.11)$$

Ejemplo 4: La distribución bivariada de Pareto.

Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución conjunta de supervivencia dada por

$$\bar{H}_\theta(x, y) = \begin{cases} (1 + x + y)^{-\theta} & x \geq 0, \ y \geq 0, \\ (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0, \ y < 0, \\ (1 + y)^{-\theta} & x < 0, \ y \geq 0, \\ 1 & x < 0, \ y < 0. \end{cases}$$

Por la Definición 1.6.1 y las ecuaciones (1.11) y (1.10), \bar{H}_θ tiene como cópula de supervivencia \hat{C} ,

$$\bar{H}_\theta(x, y) = \hat{C}_\theta(\bar{F}_\theta(x), \bar{G}_\theta(y))$$

entonces, por el Corolario 1.3.7,

$$\hat{C}_\theta = \bar{H}_\theta\left(\bar{F}_\theta^{(-1)}(u), \bar{G}_\theta^{(-1)}(v)\right)$$

donde las marginales de \bar{H} están dadas por

$$\bar{F}_\theta(x) = \bar{H}_\theta(x, \infty) = \begin{cases} (1 + x)^{-\theta} & x \geq 0 \\ 1 & x < 0. \end{cases}$$

$$\bar{G}_\theta(y) = \bar{H}_\theta(\infty, y) = \begin{cases} (1 + y)^{-\theta} & y \geq 0 \\ 1 & y < 0. \end{cases}$$

y sus inversas son

$$\bar{F}_\theta^{(-1)}(u) = -1 + u^{-1/\theta} \quad y \quad \bar{G}_\theta^{(-1)}(v) = -1 + v^{-1/\theta}.$$

Entonces por el Corolario 1.3.7, la cópula de supervivencia

$$\begin{aligned}
 \hat{C}_\theta(u, v) &= \bar{H}_\theta \left(\bar{F}_\theta^{(-1)}(u), \bar{G}_\theta^{(-1)}(v) \right) \\
 &= \bar{H}_\theta \left(-1 + u^{-1/\theta}, -1 + v^{-1/\theta} \right) \\
 &= \left(1 - 1 + u^{-1/\theta} - 1 + v^{-1/\theta} \right)^{-\theta} \\
 &= \left(u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1 \right)^{-\theta}.
 \end{aligned}$$

Otras funciones relacionadas a las cópulas de supervivencia son el dual de una cópula \tilde{C} y la co-cópula C^* , definidas por

$$\tilde{C}(u, v) = u + v - C(u, v),$$

y

$$C^*(u, v) = 1 - C(1 - u, 1 - v).$$

Aunque ninguna de las dos es una cópula, éstas relaciones expresan la probabilidad de un evento que relaciona a las variables aleatorias X y Y con probabilidades específicas, es decir

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = C(F(x), G(y)) \quad y \quad \mathbb{P}(X > x, Y > y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \leq x \cup Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(Y \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x \cap Y \leq y) \\
 &= F(x) + G(y) - C(F(x), G(y)) \\
 &= \tilde{C}(F(x), G(y)).
 \end{aligned}$$

si, hacemos el cambio de variable $u = F(x)$ y $v = G(y)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \leq x \cup Y \leq y) &= u + v - C(u, v) \\
 &= \tilde{C}(u, v).
 \end{aligned}$$

usando un argumento similar y usando la ecuación (1.10)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x \cup Y > y) &= \mathbb{P}(X > x) + \mathbb{P}(Y > y) - \mathbb{P}(X > x \cap Y > y) \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y)) \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) \\
&\quad - (\bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))) \\
&= 1 - C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)) \\
&= C^*(\bar{F}(x), \bar{G}(y)).
\end{aligned}$$

si hacemos la sustitución $u = \bar{F}(x)$ y $v = \bar{G}(y)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > x \cup Y > y) &= u + v - \hat{C}(u, v) \\
&= u + v - (u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)) \\
&= 1 - C(1 - u, 1 - v) \\
&= C^*(u, v).
\end{aligned}$$

Además las funciones C^* , $\tilde{C}(u, v)$, \hat{C} y $C = i$, forman el grupo dihédrico bajo la composición de funciones.

1.7. Simetría

Si X es una variable aleatoria y a es un número real, diremos que X es **simétrica alrededor de a** , si la función de distribución de las variables aleatorias $X - a$ y $a - X$ es la misma, es decir, si para cualquier x en \mathbb{R}

$$\mathbb{P}[X - a \leq x] = \mathbb{P}[a - X \leq x]$$

Cuando la función de distribución F de la variable aleatoria X es continua, la igualdad anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}
F(a + x) &= \mathbb{P}[X - a \leq x] = \mathbb{P}[a - X \leq x] = \mathbb{P}[a - x \leq X] \\
&= 1 - \mathbb{P}[a - x \geq X] = 1 - F(a - x) \\
&= \bar{F}(a - x).
\end{aligned}$$

Se pueden definir diferentes tipos de simetría bivariada.

Definición 1.7.1 Sean X, Y variables aleatorias y (a, b) un punto en \mathbb{R}^2

- I. (X, Y) son **marginalmente simétricas con respecto al par** (a, b) si X, Y son simétricas alrededor de a y b respectivamente.
- II. (X, Y) son **radialmente simétricas con respecto al par** (a, b) si la función de distribución conjunta de $X - a$ y $Y - b$ es la misma que la función de distribución conjunta de $a - X$ y $b - Y$.
- III. (X, Y) son **simétricas de manera conjunta** en (a, b) si los pares $(X - a, Y - b)$, $(X - a, b - Y)$, $(a - X, Y - b)$ y $(a - X, b - Y)$ tienen una función de distribución conjunta común.

Teorema 1.7.2 Sean X, Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G respectivamente, sean (a, b) un punto en \mathbb{R}^2 , entonces (X, Y) es radialmente simétrica en (a, b) si y sólo si

$$H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y)$$

para todo (x, y) en \mathbb{R}^2 .

Demostración: Supongamos que (X, Y) son radialmente simétricas con respecto al par (a, b) entonces

$$H(x + a, y + b) = H(a - x, b - y),$$

y en este caso

$$\begin{aligned} H(x + a, y + b) &= \mathbb{P}[X \leq x + a, Y \leq y + b] \\ &= \mathbb{P}[X - a \leq x, Y - b \leq y] \\ &= \mathbb{P}[a - X \leq x, b - Y \leq y] \\ &= 1 - \mathbb{P}[X \leq a - x, Y \leq b - y] \\ &= 1 - H(a - x, b - y) \\ &= \bar{H}(a - x, b - y). \end{aligned}$$

Observemos que la simetría conjunta implica la simetría radial, y que la simetría radial implica la simetría marginal.

Teorema 1.7.3 Sean X, Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente, y cópula C , aun mas, supongamos que F y G son simétricas alrededor de a y b respectivamente; entonces el par (X, Y) es radialmente simétrico en (a, b) , es decir, H satisface $H(a + x, b + y) = \bar{H}(a - x, b - y)$ si y sólo si $C = \hat{C}$, es decir, si y sólo si C satisface la ecuación

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (1.12)$$

para todo (u, v) en I^2 .

La ecuación (1.12), establece geoméricamente que dados (u, v) en I^2 , los rectángulos $[0, u] \times [0, v]$ y $[1 - u, 1] \times [1 - v, 1]$ tienen el mismo volumen.

Otra forma de simetría es la **intercambiabilidad**, dadas dos variables aleatorias X y Y se dice que son intercambiables si los vectores (X, Y) y (Y, X) , son idénticamente distribuidos, entonces la función de distribución conjunta H de X y Y satisface, $H(x, y) = H(y, x)$ para todo x, y en \mathbb{R}^2 .

Teorema 1.7.4 Sean X, Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G respectivamente, y cópula C ; entonces X y Y son intercambiables si y sólo si $F = G$ y $C(v, u) = C(u, v)$ para todo (u, v) en I^2 .

Cuando $C(v, u) = C(u, v)$ para todo u, v en I^2 diremos simplemente que C es **simétrica**.

1.8. Orden

La cotas de Fréchet-Hoeffding $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$ para cada cópula C y todo u, v en I , nos sugieren un orden parcial sobre el conjunto de todas las cópulas.

Definición 1.8.1 Dadas dos cópulas C_1 y C_2 , diremos que C_1 es menor que C_2 (ó que C_2 es más grande que C_1) y escribimos $C_1 \prec C_2$ (o $C_2 \succ C_1$) si $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$ para todo u, v en I ($C_1(u, v) \geq C_2(u, v)$ para todo u, v en I).

Por ejemplo, la cota inferior de Fréchet-Hoeffding W es menor que cualquier cópula, y la cota superior de Fréchet-Hoeffding M es más grande que cualquier cópula.

Observamos que la operación \prec induce un orden parcial en el conjunto de las cópulas; en efecto, la operación \prec cumple las propiedades:

Reflexiva: dada la cópula C_1 , siempre se cumple $C_1 \leq C_1$, esto implica $C_1 \prec C_1$.

Transitiva: dadas tres cópulas C_1, C_2 y C_3 , tales que $C_1 \prec C_2$ y $C_2 \prec C_3$, es decir, que $C_1 \leq C_2$ y $C_2 \leq C_3$, por transitividad de la relación \leq se sigue que $C_1 \leq C_3$, entonces $C_1 \prec C_3$.

Antisimétrica: sean C_1 y C_2 cópulas tales que $C_1 \prec C_2$ y $C_1 \succ C_2$ es decir $C_1 \leq C_2$ y $C_1 \geq C_2$, entonces $C_1 = C_2$.

Este orden parcial del conjunto de las cópulas se llama **orden de concordanancia**.

Ejemplo 5:

Veamos si la cópula Π y la cópula obtenida del promedio de las cópulas de Fréchet-Hoeffding $C = \frac{W+M}{2}$ son comparables para \prec ; evaluamos las cópulas en $(1/4, 1/4)$ realizando cálculos

$$1/8 = \frac{0 + 1/4}{2} = C(1/4, 1/4) > \Pi(1/4, 1/4) = 1/16,$$

para $(1/4, 3/4)$

$$1/8 = \frac{0 + 1/4}{2} = C(1/4, 3/4) < \Pi(1/4, 3/4) = 3/16.$$

Por lo tanto la cópula Π y la cópula obtenida del promedio de las cópulas de Fréchet-Hoeffding $C = \frac{W+M}{2}$ no son comparables para \prec .

Ejemplo 6:

La familia de cópulas de Cuadras-Augé, es positivamente ordenada dado $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ y (u, v) en $(0, 1)$; esto se sigue de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \frac{[\text{mín}(u, v)]^{\alpha-\beta}}{(uv)^{\alpha-\beta}} &\leq 1 \\ [\text{mín}(u, v)]^{\alpha-\beta} (uv)^{-(\alpha-\beta)} &\leq 1 \\ [\text{mín}(u, v)]^\alpha (uv)^{1-\alpha} [\text{mín}(u, v)]^{-\beta} (uv)^{-1+\beta} &\leq 1 \\ [\text{mín}(u, v)]^\alpha (uv)^{1-\alpha} &\leq [\text{mín}(u, v)]^\beta (uv)^{1-\beta} \\ C_\alpha(u, v) &\leq C_\beta(u, v), \end{aligned}$$

para $\alpha \leq \beta$.

1.9. Generación de Variables Aleatorias

Esta sección se avoca a tratar el problema de generar un conjunto de muestras aleatorias; una manera de generar las muestras es el método de la función inversa de la función de distribución F que se puede resumir en los siguientes pasos:

- I. Generar una variable uniforme u en el intervalo $(0, 1)$.
- II. Definir $x = F^{-1}(u)$, donde F^{-1} es una cuasi-inversa de F .

Existen varios métodos de generación de variables aleatorias bivariadas, por ejemplo el método de la distribución condicional, mediante el cual como su nombre lo indica, necesitamos la función de distribución condicional para una variable V dado que $U = u$, la cual denotaremos por $c_u(v)$:

$$c_u(v) = P[V \leq v | U = u] = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \quad (1.13)$$

La función $c_u(v)$ existe y es creciente casi en todas partes. El algoritmo a seguir es el siguiente:

- I. Generar dos variables con distribución uniforme $(0, 1)$ independientes digamos u y t .

- II. Definimos v como el valor $v = c_u^{(-1)}(t)$, donde $c_u^{(-1)}(t)$ denota la cuasi inversa de c_u .
- III. El par deseado es (u, v) .

1.10. Cópulas Multivariadas

En esta sección se generalizarán para el caso multivariado los resultados de las secciones precedentes, sin embargo no todas las definiciones y teoremas tienen su análogo para el caso multivariado, a continuación enunciamos los más importantes y sus diferencias; antes, daremos algunas definiciones.

Dado un entero positivo n , definimos $\bar{\mathbb{R}}^n$ como el espacio real extendido de n dimensiones, $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \times \cdots \times \bar{\mathbb{R}}$, usaremos la notación de vector para los puntos en $\bar{\mathbb{R}}^n$ como $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; escribiremos $\vec{a} \leq \vec{b}$ cuando $a_k \leq b_k$ para todo k en $\{1, 2, \dots, n\}$. Ahora, dados dos vectores $\vec{a} \leq \vec{b}$ denotaremos al producto cartesiano de n intervalos $B = [\vec{a}, \vec{b}]$ como la n -caja $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, los vértices de la n -caja son los puntos de la forma $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ con c_k igual a a_k ó b_k . La n -caja unitaria I^n es el producto cartesiano de $I \times \cdots \times I$.

Una **función real de n -valores** H , es una función cuyo dominio $DomH$ es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}^n$ y cuyo rango, $RanH$, es un subconjunto de $\bar{\mathbb{R}}$.

El cuadrado unitario es la caja I^2 y una “2-caja” es un rectángulo $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ en $\bar{\mathbb{R}}^2$.

Definición 1.10.1 Sean S_1, S_2, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función real de n -valores con $DomH = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, sea $B = [\vec{a}, \vec{b}]$ una n -caja cuyos vértices están en $DomH$. Se define el **H-volumen** de B como:

$$V_H(B) = \sum sgn(\vec{c})H(\vec{c}),$$

donde la suma se toma sobre todos los vértices \vec{c} de B y la función sgn se define como:

$$\text{sgn}(\vec{c}) = \begin{cases} 1, & \text{Si } c_k = a_k \quad \text{para un número par de } k\text{'s} \\ -1, & \text{Si } c_k = a_k \quad \text{para un número impar de } k\text{'s.} \end{cases}$$

Equivalentemente el volumen H de una n -caja $B = [a, b]$ es la diferencia de orden n de H sobre B

$$V_H(B) = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} H(\vec{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(\vec{t}).$$

Donde la diferencia de orden 1 de la función de n -valores H se expresa como:

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\vec{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

Definición 1.10.2 Una función real de n -valores H es **n -creciente** si el volumen $V_H(B) \geq 0$, para todas las n -cajas B cuyos vértices estén en el $DomH$.

Suponga que el $DomH$ es igual al producto $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, donde cada S_k tiene un elemento minimal a_k . Diremos que H esta **fija**, si $H(\vec{t}) = 0$ para toda \vec{t} en el $DomH$ tal que $t_k = a_k$ para al menos una k .

Si cada S_k es no vacío y tiene un elemento máximo o mayor, digamos b_k , para k en $\{1, 2, \dots, n\}$, entonces diremos que H tiene **marginales**, y las **marginales unidimensionales** de H son las funciones H_k con $DomH_k = S_k$, y

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \text{ para toda } x \text{ en } S_k.$$

Las marginales de dimensiones mayores se obtienen fijando una menor cantidad de elementos máximos b_k en H , por ejemplo las marginales bidimensionales

$$H_{k,k+1}(x, y) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, y, b_{k+2}, \dots, b_n) \text{ para toda } x, y \text{ en } S_k.$$

Ejemplo 7:

Sea H la función con dominio $[-1, 1] \times [0, \infty] \times [0, \pi/2]$ definida

$$H(x, y, z) = \frac{(x+1)(e^y - 1) \sin z}{x + 2e^y - 1}.$$

Entonces H está fija, pues

$$H(-1, y, z) = \frac{(-1+1)(e^y - 1) \sin z}{x + 2e^y - 1} = 0,$$

$$H(x, 0, z) = \frac{(x+1)(e^0 - 1) \sin z}{x + 2e^y - 1} = 0,$$

$$H(x, y, 0) = \frac{(x+1)(e^y - 1) \sin 0}{x + 2e^y - 1} = 0.$$

H tiene marginales unidimensionales:

$$H(x) = H(x, \infty, \pi/2) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y - 1) \sin \pi/2}{x + 2e^y - 1} = \frac{x+1}{2},$$

$$H(y) = H(1, y, \pi/2) = \frac{(1+1)(e^y - 1) \sin \pi/2}{1 + 2e^y - 1} = 1 - e^{-y},$$

$$H(z) = H(1, \infty, z) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(1+1)(e^y - 1) \sin z}{1 + 2e^y - 1} = \sin z.$$

Y sus marginales dos dimensionales, son:

$$H_{1,2}(x, y, \pi/2) = \frac{(x+1)(e^y - 1) \sin \pi/2}{x + 2e^y - 1} = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1},$$

$$H_{1,3}(x, \infty, z) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(e^y - 1) \sin z}{x + 2e^y - 1} = \frac{(x+1) \sin z}{2},$$

$$H_{2,3}(1, y, z) = \frac{(2)(e^y - 1) \sin z}{2e^y} = (1 - e^{-y}) \sin z.$$

A continuación enunciaremos los resultados más importantes sin dar la demostración de éstos, dado que el objetivo principal de este trabajo no es ahondar en los resultados básicos, sino analizar algunas otras propiedades de cópulas.

Lema 1.10.3 Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una

función fija n -creciente con dominio $DomH = S_1 \times \cdots \times S_n$, entonces H es creciente en cada argumento, esto es, sean $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ y $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$ tales que $x < y$, entonces

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Lema 1.10.4 Sean S_1, \dots, S_n subconjuntos no vacíos de $\bar{\mathbb{R}}$ y sea H una función fija n -creciente con dominio $DomH = S_1 \times \cdots \times S_n$, con marginales H_k para $k = 1, \dots, n$. Sean $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ puntos en el $DomH$, entonces

$$H(\vec{x}) - H(\vec{y}) \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|.$$

Definición 1.10.5 Una **subcópula n -dimensional** o (**n -subcópula**) es una función C' con las siguientes propiedades.

- I. $DomC' = S_1 \times \cdots \times S_n$, donde cada conjunto S_k está contenido en I , para cada k en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.
- II. C' está fija y es n -creciente.
- III. C' tiene marginales uno-dimensionales C_k , para k en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, que satisfacen

$$C_k(u) = u \quad \text{para todo } u \text{ en } S_k.$$

Notemos que para cada $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{a} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n)$, $\vec{b} = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n)$ en el $DomC'$, tenemos que

$$0 = C'(\vec{a}) \leq C'(\vec{u}) \leq C'(\vec{b}) \leq 1.$$

Por lo tanto $RanC'$, al igual que el $DomC'$, son subconjuntos del intervalo I .

Definición 1.10.6 Una **cópula n -dimensional** o (**n -cópula**) es una n -subcópula C cuyo dominio es I^n .

Equivalentemente, una n -cópula C es una función $C : I^n \rightarrow I$ con las siguientes propiedades:

- I. Para cada $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ en I^n , con $u_k = 0$ para al menos un k en $\{1, 2, \dots, n\}$, $C(\vec{u}) = 0$. Si $\vec{u} = (1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1)$, entonces $C(\vec{u}) = u_k$.
- II. Para cada \vec{a} y \vec{b} en I^n tal que $\vec{a} \leq \vec{b}$, entonces $V_C([\vec{a}, \vec{b}]) \geq 0$.

Se puede ver que cada marginal bidimensional es por si misma una cópula.

Ejemplo 8:

Sea $C(u, v, w) = w \min(u, v)$ entonces C es una 3-cópula, en efecto,

- I. C está fija, pues si, $\vec{u} = (u, v, w)$ en I^3 , es tal que alguna componente es cero, entonces en cualquiera de los casos ya sea u , v ó w

$$\begin{aligned} C(\vec{u}) &= w \min(0, v) = 0, \\ C(\vec{u}) &= w \min(u, 0) = 0, \\ C(\vec{u}) &= 0 \min(u, v) = 0. \end{aligned}$$

Si dos elementos del conjunto $\{u, v, w\}$ son igual a uno, entonces

$$\begin{aligned} C(\vec{u}) &= 1 \min(1, v) = v, \\ C(\vec{u}) &= 1 \min(u, 1) = u, \\ C(\vec{u}) &= w \min(1, 1) = w. \end{aligned}$$

- II. Sean $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, entonces

$$\begin{aligned} V_C(B) &= \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} C(u, v, w) \\ &= \Delta_{a_3}^{b_3} \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} w \min(u, v) \\ &= \Delta_{a_3}^{b_3} w \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} \min(u, v) \\ &= (b_3 - a_3) \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} \min(u, v) \geq 0, \end{aligned}$$

pues, $M(u, v) = \min(u, v)$ es cópula.

Teorema 1.10.7 *Sea C' una n -subcópula, entonces para cada \vec{u} y \vec{v} en $DomC'$*

$$|C'(\vec{v}) - C'(\vec{u})| = \sum_{k=1}^n (v_k - u_k)$$

entonces C' es uniformemente continua sobre este dominio.

Definición 1.10.8 *Una función de distribución n -dimensional H es una función con dominio $\bar{\mathbb{R}}^n$ tal que*

- I. H es n -creciente.
- II. Para todo \vec{t} en $\bar{\mathbb{R}}^n$, el cual cumpla que para al menos un k , $t_k = -\infty$, entonces $H(\vec{t}) = 0$,
- III. y $H(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$.

Observamos que H está fija, además dado que $DomH = \bar{\mathbb{R}}^n$, entonces por el Teorema 1.10.3 se deduce que las marginales unidimensionales de H son a su vez funciones de distribución, las cuales denotaremos como F_1, F_2, \dots, F_n , para $n \geq 3$.

Teorema 1.10.9 Teorema de Sklar en n -dimensiones *Sea H una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n , entonces existe una n -cópula C tal que para todo \vec{x} en $DomH = \bar{\mathbb{R}}^n$.*

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son todas continuas, entonces C es única, en caso contrario, C esta únicamente determinado sobre $RanF_1 \times RanF_2 \times \dots \times RanF_n$; inversamente, si C es una n -cópula y F_1, F_2, \dots, F_n son funciones de distribución entonces la función H definida como

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)),$$

es una función de distribución n -dimensional con marginales F_1, F_2, \dots, F_n .

Corolario 1.10.10 Sea H, C y F_1, F_2, \dots, F_n , como en el teorema anterior, y sean $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ las cuasi inversas de F_1, F_2, \dots, F_n , entonces para cualquier \vec{u} en I^n

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Teorema 1.10.11 Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias con funciones de distribución F_1, F_2, \dots, F_n respectivamente y función de distribución conjunta H , entonces existe una única n -cópula C , tal que

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Si F_1, F_2, \dots, F_n son todas continuas, C es única, de otra forma, C está únicamente determinada sobre $\text{Ran}F_1 \times \text{Ran}F_2 \times \dots \times \text{Ran}F_n$.

Las extensiones de las cópulas M, Π, W a sus semejantes n -dimensionales se denotarán M^n, Π^n, W^n .

$$\begin{aligned} M^n(\vec{u}) &= \min(u_1, \dots, u_n), \\ \Pi^n(\vec{u}) &= u_1 u_2 \cdots u_n, \\ W^n(\vec{u}) &= \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0). \end{aligned}$$

Las funciones M^n y Π^n son n -cópulas para todo $n \geq 2$, sin embargo la función W^n no es cópula para $n > 2$, como se muestra a continuación:

- i. $W^n(\vec{u})$ está fija, en efecto, sea $\vec{u} = (u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_n)$, entonces

$$\begin{aligned} W^n(\vec{u}) &= \max(u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + 0 + u_{k+1} + \dots + u_n - n + 1, 0) \\ &\leq \max(n - 1 - n + 1, 0) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $W^n(\vec{u}) = 0$.

II. Sea $\vec{u} = (1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} W^n(\vec{u}) &= \text{máx}(1 + 1 + \dots + 1 + u_k + 1 + \dots + 1 - n + 1, 0) \\ &= \text{máx}(n - 1 + u_k - n + 1, 0) = u_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto $W^n(\vec{u}) = u_k$ para cada k en $\{1, 2, \dots, n\}$.

III. Sólo nos falta verificar que W^n es n -creciente, supongamos que lo es, es decir que para cada \vec{a}, \vec{b} en I^n , se define el intervalo $B = [\vec{a}, \vec{b}]$,

$$V_{W^n}(B) = \Delta_{\vec{a}}^{\vec{b}} W^n(\vec{u}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} W^n(\vec{u}) \geq 0.$$

Sean, $\vec{1}/2 = (1/2, \dots, 1/2)$ y $\vec{1} = (1, \dots, 1)$, entonces la desigualdad se cumple para cualquier intervalo B , en especial para la n -caja $B = [\vec{1}/2, \vec{1}]$, observamos que todos los vértices c de la caja se caracterizan por tener entradas 1 ó $1/2$, además que si en un vértice existen k entradas con valor 1, entonces las otras $n - k$ entradas tienen el valor $1/2$, entonces para cada vértice \vec{c}

$$\begin{aligned} W^n(\vec{c}) &= \text{máx}\{k + (n - k)/2 - n + 1, 0\} = \text{máx}\{1 - (n - k)/2, 0\} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{(n-k)}{2} & \text{si } k > n - 2 \\ 0 & \text{si } k \leq n - 2, \end{cases} \end{aligned}$$

si $k > n - 2$, entonces para $k = n - 1$ o n , $W^n(C)$ es positiva. Entonces, aquellos vértices que tengan una sólo entrada con valor $1/2$ y $n - 1$ entradas con valor 1, o bien, el vértice $\vec{1} = (1, \dots, 1)$, son los vértices que cuentan. Entonces

$$\begin{aligned} V_{W^n}(B) &= \sum \text{sgn}(\vec{c}) W^n(\vec{c}) \\ &= W^n(\vec{1}) - n \text{máx}\{n - 1 + 1/2 - n + 1, 0\} = 1 - n(1/2). \end{aligned}$$

Así, una condición para que el volumen $V_{W^n}(B)$ sea mayor que cero es que $n \leq 2$.

Por lo tanto W^n no es cópula para $n > 2$.

Teorema 1.10.12 *Si C' es cualquier n -subcópula, entonces para cada \vec{u} en $\text{Dom}C'$*

$$W^n(\vec{u}) \leq C'(\vec{u}) \leq M^n(\vec{u}).$$

La demostración del siguiente teorema se encuentra en el libro de Nelsen [13].

Teorema 1.10.13 *Para cualquier $n \geq 3$ y cualquier \vec{u} en I^n , existe una n -cópula C tal que*

$$C(\vec{u}) = W^n(\vec{u}).$$

Teorema 1.10.14 *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias continuas entonces dichas variables son independientes si y sólo si $C_{X_1, \dots, X_n} = \Pi^n$.*

Teorema 1.10.15 *Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , entonces H es igual a la cota superior de Fréchet-Hoeffding M^n si y sólo si el soporte de H es un subconjunto creciente de \mathbb{R}^n .*

Capítulo 2

Cóputas Arquimedianas

2.1. Cóputas Arquimedianas Bivariadas

Las cóputas Arquimedianas ofrecen varias ventajas; son fáciles de construir, hay una gran variedad de cóputas que pertenecen a esta clase, los miembros de esta familia poseen muchas propiedades agradables que reducen la dimensionalidad.

Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G , respectivamente; X y Y son independientes si, $H(x, y) = F(x)G(y)$, para todo x, y en $\bar{\mathbb{R}}$. Observemos que la función de distribución conjunta se expresa como el producto de dos funciones de diferentes variables, sin embargo no es necesaria la independencia para que una función de distribución conjunta pueda ser expresada como un producto, por ejemplo, la familia de distribuciones de **Ali-Mikhail-Haq** cumplen:

$$\frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \frac{1 - F(x, y)}{F(x, y)} + \frac{1 - G(x, y)}{G(x, y)} + (1 - \Theta) \frac{1 - F(x, y)}{F(x, y)} \frac{1 - G(x, y)}{G(x, y)}.$$

Expresión que con un poco de álgebra se transforma en

$$1 + (1 - \Theta) \frac{1 - H(x, y)}{H(x, y)} = \left[1 + (1 - \Theta) \frac{1 - F(x, y)}{F(x, y)} \right] + \left[1 + (1 - \Theta) \frac{1 - G(x, y)}{G(x, y)} \right],$$

para Θ entre $[-1, 1]$.

Esto es, las funciones se pueden ver expresadas en terminos de una función λ como $\lambda(H(x, y)) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$, donde $\lambda(t) = 1 + (1 - \Theta)(1 - t)/t$ con λ una función positiva sobre el intervalo $(0, 1)$; si tomamos otra función digamos $\varphi(t) = -\ln \lambda(t)$, entonces $\varphi(H(x, y)) = \varphi(F(x)) + \varphi(G(y))$. También podemos usar la expresión para cópulas, por el Teorema de Sklar.

$$\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Definición 2.1.1 Sea φ una función continua, estrictamente decreciente de I a $[0, \infty]$, tal que $\varphi(1) = 0$. La **pseudo-inversa** de φ es la función $\varphi^{[-1]}$ con $Dom\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ y $Ran\varphi^{[-1]} = I$, definida como.

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{para } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \text{para } \varphi(0) < t \leq \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Note que $\varphi^{[-1]}$ es una función continua y decreciente sobre $[0, \infty]$, y estrictamente decreciente sobre $[0, \varphi(0)]$, aun mas $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ en I y,

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & \text{para } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \text{para } \varphi(0) < t \leq \infty \end{cases} \\ &= \text{mín}(t, \varphi(0)). \end{aligned}$$

Es importante observar que cuando $\varphi(0) = \infty$, entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, es decir, la pseudo-inversa coincide con la inversa usual; en este caso se dirá que el **generador φ es estricto**.

Lema 2.1.2 Sea φ una función de I a $[0, \infty]$, continua y estrictamente decreciente, tal que $\varphi(1) = 0$, y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ definida en la ecuación 2.1. Sea C la función de I^2 a I dada por:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (2.2)$$

Entonces C satisface las condiciones de frontera (1.5) y (1.6) de una cópula.

Lema 2.1.3 Sean φ , $\varphi^{[-1]}$ y C como en el Lema 2.1.2, entonces C es 2-creciente si y sólo si siempre que $u_1 \leq u_2$, se cumpla la relación:

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1.$$

Demostración: La desigualdad $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$ es equivalente a probar que $V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0$. Asumimos que C satisface $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$, y elegimos v_1, v_2 , en I , tales que $v_1 \leq v_2$, observamos que

$$C(0, v_1) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2).$$

Dado que C es continua, pues φ y $\varphi^{[-1]}$ lo son, entonces por el Teorema del valor intermedio, existe t en I , tal que $C(t, v_2) = v_1$, ó lo que es lo mismo

$$\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &\quad - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \\ &= V_C([u_1, v_1] \times [u_2, v_2]). \end{aligned}$$

□

Antes de proseguir con el desarrollo de las características de las cópulas Arquimedianas es necesario mencionar algunos resultados que serán de utilidad

para demostrar el Teorema 2.1.7.

Definición 2.1.4 Una función ϕ es medio convexa si para cualesquiera x, y en $\text{Dom}\phi$, cumple:

$$\phi(1/2(x + y)) \leq 1/2\phi(x) + 1/2\phi(y).$$

Teorema 2.1.5 Sea $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y medio convexa, entonces M es convexa.

Demostración: Debemos demostrar que dados $u_1 \leq u_2$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, se cumple $M(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha)M(u_2)$, se observa que la desigualdad se cumple para $\alpha = 0$ ó 1 . Procederemos por contradicción; supongamos que existe un α en $(0, 1)$ tal que

$$M(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) > \alpha M(u_1) + (1 - \alpha)M(u_2).$$

Definimos $f(\alpha) = M(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) - \alpha M(u_1) - (1 - \alpha)M(u_2)$ para todo α en el intervalo $[0, 1]$. Dado que M es continua entonces f es continua, y sea $M_0 = \sup_{\alpha \in [0, 1]} f(x)$, que es mayor que 0 . Sea

$$\alpha_0 = \inf \{ \alpha \in (0, 1) \mid f(\alpha) = M_0 > 0 \}.$$

Sea $\delta > 0$ tal que el intervalo $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta]$ esta completamente contenido en $[0, 1]$. Definimos las siguientes combinaciones convexas

$$\begin{aligned} u_1^* &= (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2 \\ u_2^* &= (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2. \end{aligned}$$

Tomando promedio de u_1^* y u_2^* obtenemos

$$\frac{u_1^* + u_2^*}{2} = \alpha_0 u_1 + (1 - \alpha_0)u_2$$

Aplicamos M en la igualdad anterior, y entonces se cumple la siguiente des-

igualdad, dado que M es medio convexa

$$\begin{aligned}
 M(\alpha_0 u_1 + (1 - \alpha_0) u_2) &= M\left(\frac{u_1^* + u_2^*}{2}\right) \\
 &\leq \frac{1}{2} [M(u_1^*) + M(u_2^*)] \\
 &= \frac{1}{2} [M((\alpha_0 - \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta) u_2)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [M((\alpha_0 + \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta) u_2)].
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 f(\alpha_0) &= M(\alpha_0 u_1 + (1 - \alpha_0) u_2) - \alpha_0 M(u_1) - (1 - \alpha_0) M(u_2) \\
 &\leq \frac{1}{2} [M((\alpha_0 - \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta) u_2)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [M((\alpha_0 + \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta) u_2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [2\alpha_0 M(u_1) + 2(1 - \alpha_0) M(u_2)] \\
 &= \frac{1}{2} [M((\alpha_0 - \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta) u_2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [(\alpha_0 - \delta) M(u_1) - (1 - (\alpha_0 - \delta)) M(u_2)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [M((\alpha_0 + \delta) u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta) u_2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [(\alpha_0 + \delta) M(u_1) - (1 - (\alpha_0 + \delta)) M(u_2)] \\
 &= \frac{1}{2} [f(\alpha_0 - \delta) + f(\alpha_0 + \delta)] < M_0.
 \end{aligned}$$

Lo cual, es una contradicción debido a la definición de α_0 . Por lo tanto, para todo α en $[0,1]$

$$M(\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2) \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha) M(u_2).$$

Es decir, M es convexa. □

Teorema 2.1.6 *Sea $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente*

decreciente, entonces φ es convexa si y sólo si φ^{-1} es convexa.

Demostración: Sabemos que dado que φ es estrictamente decreciente su inversa φ^{-1} también es estrictamente decreciente. Sea $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$, entonces $\varphi^{-1}(d) = a$ y $\varphi^{-1}(c) = b$. Dado que φ es convexa, para μ en $[0, 1]$ se cumple la desigualdad

$$\varphi(\mu a + (1 - \mu)b) \leq \mu\varphi(a) + (1 - \mu)\varphi(b)$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} \mu a + (1 - \mu)b &= \varphi^{-1}[\varphi(\mu a + (1 - \mu)b)] \\ &\geq \varphi^{-1}[\mu\varphi(a) + (1 - \mu)\varphi(b)], \end{aligned}$$

si y sólo si

$$\mu\varphi^{-1}(d) + (1 - \mu)\varphi^{-1}(c) \geq \varphi^{-1}[\mu d + (1 - \mu)c]$$

Por lo tanto, φ es convexa si y sólo si φ^{-1} es convexa. \square

Teorema 2.1.7 sea φ una función continua, definida de I a $[0, \infty]$, estrictamente decreciente, tal que $\varphi(1) = 0$, y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa definida como en 2.1. La función C de I^2 a I dada en el Lema 2.1.2 es una cópula si y sólo si φ es convexa.

Demostración: C satisface las condiciones de frontera, en efecto, por el Lema 2.1.2, y la definición de $\varphi^{[-1]}$ $C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$, de la misma manera $C(0, v) = 0$, y $C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$, también $C(1, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(1) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v)) = v$.

Demostraremos que C es 2-creciente si y sólo si φ es convexa.

Supongamos que φ es convexa es decir, dado α en $[0, 1]$ se cumple la desigualdad

$$\varphi(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha\varphi(u_1) + (1 - \alpha)\varphi(u_2).$$

Si $u_1 \leq u_2$ por el Lema 2.1.2, $C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1$, si y sólo si

$$C(u_2, v) + u_1 \leq C(u_1, v) + u_2.$$

De lo cual se sigue

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)),$$

sean $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ y $c = \varphi(v)$, observamos que $a \geq b$ y $c \geq 0$ entonces la última desigualdad se transforma en

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c). \quad (2.3)$$

Ahora, sean s, t en $[0, \infty]$ tales que $0 \leq s < t$, definimos $a = (s + t)/2$, $b = s$ y $c = (t - s)/2$, sustituímos estos valores en (2.3), y obtenemos

$$\varphi^{[-1]} \left(\frac{s + t}{2} \right) + \varphi^{[-1]} \left(\frac{s + t}{2} \right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t),$$

asi,

$$\varphi^{[-1]} \left(\frac{s + t}{2} \right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}.$$

Por lo tanto $\varphi^{[-1]}$ es medio convexa, además $\varphi^{[-1]}$ es continua, entonces $\varphi^{[-1]}$ es convexa esto ocurre si y sólo si φ es convexa, estas implicaciones se siguen de los Teoremas 2.1.5 y 2.1.6 demostrados anteriormente. \square

Definición 2.1.8 *las cópulas de la forma (2.2) se llaman **cópulas Arquimedianas**.*

Ejemplo de cópulas Arquimedianas: Sea $\varphi(t) = -\ln(t)$; por verificar que esta función es un *generador aditivo*, es decir que cumple con todas las condiciones del teorema 2.1.7, y después encontraremos la cópula asociada usando (2.2).

- I. Sabemos que la función $\ln(t)$ es una función continua.
- II. La derivada de φ es $\varphi'(t) = -1/t$, la cual es negativa, entonces la función es estrictamente decreciente.
- III. La segunda derivada de φ es $\varphi''(t) = t^{-2}$, la cual es positiva, entonces la función es convexa.

- IV. $\varphi(1) = 0$.
- V. $\varphi(0) = \infty$, por lo cual $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, es decir, φ es un generador estricto.
- VI. La pseudo-inversa de φ es $\varphi^{-1}(t) = e(-t)$.

Usando (2.2) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\
 &= \varphi^{[-1]}(-\ln(u) - \ln(v)) \\
 &= e[-(-\ln(u)) - \ln(v)] \\
 &= uv \\
 &= \Pi(u, v).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la cópula producto es Arquimediana.

Teorema 2.1.9 *Sea C una cópula Arquimediana con generador φ , entonces:*

- I. $C(u, v)$ es simétrica, es decir, $C(u, v) = C(v, u)$.
- II. $C(u, v)$ es asociativa, es decir, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$.
- III. Si $c > 0$ es cualquier constante, entonces $c\varphi$ también es un generador de C .

Cabe mencionar que la demostración del siguiente teorema aparece en un artículo de Cho-Hsin Ling [6], acerca de la representación de las funciones asociativas.

Recordemos que la sección diagonal de C , es la función δ_C , definida como $\delta_C(u) = C(u, u)$.

Teorema 2.1.10 *Sea C una cópula, entonces C es Arquimediana si y sólo si C es asociativa, y $\delta_C(u) < u$ para todo u en $(0, 1)$.*

Ejemplos de cópulas Arquimedianas de un sólo parámetro: Sea $\varphi_\Theta(t) = \frac{1}{\Theta}(t^{-\Theta} - 1)$ con Θ en $[-1, \infty) \setminus \{0\}$; por verificar que esta función es un generador aditivo, es decir que cumple con todas las condiciones del Teorema 2.1.7, y después encontraremos la cópula asociada usando (2.2).

- I. Sabemos que la función $\varphi_\Theta(t)$ es una función continua.
- II. La derivada de φ_Θ es $\varphi'_\Theta(t) = -t^{-(\Theta+1)}$, la cual es negativa, entonces la función es estrictamente decreciente.
- III. La segunda derivada de φ es $\varphi''(t) = (\Theta + 1)t^{-(\Theta+2)}$, la cual es positiva, entonces la función es convexa.
- IV. $\varphi_\Theta(1) = 0$.
- V. Si $\Theta > 0$ entonces $\varphi_\Theta(0) = \frac{1}{\Theta} \left[\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^\Theta} - 1 \right] = \infty$ por lo cual $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, es decir, φ_Θ es un generador estricto.
- VI. La inversa de φ_Θ si $\Theta > 0$ es $\varphi_\Theta^{-1} = (\Theta t + 1)^{-1/\Theta}$.
- VII. Si $\Theta < 0$ entonces $\varphi_\Theta(0) = \frac{1}{\Theta} \left[\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\Theta - 1 \right] = -\frac{1}{\Theta}$ por lo cual, φ no es un generador estricto, entonces la pseudo-inversa es

$$\varphi_\Theta^{[-1]} = \begin{cases} (\Theta t + 1)^{-1/\Theta} & \text{si } 0 \leq t \leq -\frac{1}{\Theta} \\ 0 & \text{si } -\frac{1}{\Theta} \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Usando (2.2) para el caso en que $\Theta > 0$ se obtiene:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi_\Theta^{-1}(\varphi_\Theta(u) + \varphi_\Theta(v)) \\ &= \varphi_\Theta^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}(u^{-\Theta} - 1) + \frac{1}{\Theta}(v^{-\Theta} - 1)\right) \\ &= \varphi_\Theta^{-1}\left(\frac{1}{\Theta}[(u^{-\Theta} - 1) + (v^{-\Theta} - 1)]\right) \\ &= [(u^{-\Theta} - 1) + (v^{-\Theta} - 1) + 1]^{-1/\Theta} \\ &= [u^{-\Theta} + v^{-\Theta} - 1]^{-1/\Theta}. \end{aligned}$$

Las cópulas caracterizadas por el generador aditivo $\varphi_\Theta(t) = \frac{1}{\Theta}(t^{-\Theta} - 1)$ con Θ en $[-1, \infty) \setminus \{0\}$, son de la familia Clayton.

Otro ejemplo es cuando $\varphi_\Theta(t) = (1 - t)^\Theta$ con Θ en $[1, \infty)$; verifiquemos que esta función es un **generador aditivo**, es decir, que cumple con todas las condiciones del teorema 2.1.7, y encontraremos la cópula asociada usando (2.2).

- I. Sabemos que la función $\varphi_\Theta(t)$ es una función continua.
- II. La derivada de φ_Θ es $\varphi'_\Theta(t) = -\Theta(1-t)^{\Theta-1}$, la cual es negativa, entonces la función es estrictamente decreciente.
- III. La segunda derivada de φ es $\varphi''_\Theta(t) = \Theta(\Theta-1)(1-t)^{\Theta-2}$, la cual es positiva, entonces la función es convexa.
- IV. $\varphi_\Theta(1) = 0$ para todo Θ en $[1, \infty)$.
- V. $\varphi_\Theta(0) = 1$ por lo cual φ_Θ no es un generador estricto.
- VI. La inversa de φ_Θ para $t \leq \varphi_\Theta(0)$, es $\varphi_\Theta^{-1} = 1 - t^{1/\Theta}$.
- VII. La pseudo-inversa es

$$\varphi_\Theta^{[-1]} = \begin{cases} 1 - t^{1/\Theta} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Usando (2.2) para el caso en que $\Theta > 0$ se obtiene para el caso en el que $\varphi_\Theta(u) + \varphi_\Theta(v) \leq 1$:

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi_\Theta^{[-1]}(\varphi_\Theta(u) + \varphi_\Theta(v)) \\ &= \varphi_\Theta^{[-1]}((1-u)^\Theta + (1-v)^\Theta) \\ &= 1 - [(1-u)^\Theta + (1-v)^\Theta]^{1/\Theta}. \end{aligned}$$

Las cópulas Arquimedianas deben su nombre a la propiedad Arquimediana que se enuncia a continuación: Sean a, b en \mathbb{R} positivos, entonces existe un número natural n tal que $b < na$.

Una cópula Arquimediana se comporta como una operación binaria sobre I , es decir, $C : I^2 \rightarrow I$ asigna un valor $C(u, v) = k$, con $k \in I$, por el Teorema 2.1.9, C es conmutativa, asociativa y preserva orden, es decir, dados $u_1 \leq u_2$, $v_1 \leq v_2$ entonces $C(u_1, v_1) \leq C(u_2, v_2)$, por lo anterior el par (I, C) forma un grupo Abelian ordenado.

Definición 2.1.11 Para todo u en I , definimos las C -potencias de u y las denotaremos por u_C^n por

$$\begin{aligned} u_C^1 &= u \\ u_C^n &= C(u, u_C^{n-1}), \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Note que $u_C^2 = C(u, u)$ pertenece a la sección diagonal $\delta_C(u)$ de C . La propiedad Arquimediana pero en versión cópulas se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.12 Sea C una cópula Arquimediana generada por φ , entonces para cualesquiera u, v en I , existe un entero positivo n tal que $u_C^n < v$.

Recordemos que los conjuntos de nivel de una cópula estan dados por

$$\{(u, v) \in I^2 | C(u, v) = t\}.$$

Para una cópula Arquimediana y para $t > 0$ se define la **curva de nivel** $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ en I^2 , la cual conecta los puntos $(1, t)$ y $(t, 1)$. Usualmente la denotaremos por $v = L_t(u)$ donde

$$v = L_t(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u))$$

observamos que $\varphi(t) - \varphi(u)$ está en el intervalo $[0, \varphi(0))$, entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$. Para $t = 0$, llamaremos al conjunto $Z(C) = \{(u, v) \in I^2 | C(u, v) = 0\}$, el **conjunto cero** de C .

Teorema 2.1.13 Las curvas de nivel de una cópula Arquimediana son conexas.

Teorema 2.1.14 Sea C una cópula Arquimediana generada por φ .

1. Para t en $(0, 1)$, la C -medida de la curva de nivel $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ está dada por

$$\varphi(t) = \frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)}.$$

Donde $\varphi'(t^-)$ y $\varphi'(t^+)$ denotan las derivadas por la izquierda y la derecha de φ en t respectivamente; en particular, si $\varphi'(t)$ existe, entonces la C -medida es 0.

- II. Si C no es estricta, entonces la C -medida de la curva cero $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$, es igual a

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}.$$

la cual es igual a 0, siempre y cuando $\varphi'(0^+) = -\infty$.

Teorema 2.1.15 Sea C una cópula Arquimediana generada por φ . Si $K_C(t)$ denota la C -medida del conjunto $\{(u, v) \in I^2 | C(u, v) \leq t\}$, o equivalentemente $\{(u, v) \in I^2 | \varphi(u) + \varphi(v) \geq \varphi(t)\}$, entonces para cualquier t en I .

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}.$$

Corolario 2.1.16 Sea C una cópula Arquimediana generada por φ . Si $K'_C(s, t)$ denota la C -medida del conjunto $\{(u, v) \in I^2 | u \leq s, C(u, v) \leq t\}$, entonces para cualesquiera s, t en I .

$$K'_C(s, t) = \begin{cases} s & \text{si } s \leq t \\ t - \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi'(t^+)} & \text{si } s > t. \end{cases}$$

2.2. Cópulas Arquimedianas Multivariadas

Quisiéramos que los algoritmos para construir cópulas Arquimedianas que enunciamos en la sección anterior se pudieran reproducir para los casos en que la dimensión n de dichas cópulas es mayor o igual a 3.

Tomemos como referencia la cópula Π la cual también se expresa como $\Pi(u, v) = uv = e(-[(-\ln u) + (-\ln v)])$. La extensión natural de esta idea a n dimensiones es la cópula producto Π^n , que se expresa de la forma

$$\Pi^n(\vec{u}) = u_1 u_2 \cdots u_n = e(-[(-\ln u_1) + (-\ln u_2) + \cdots + (-\ln u_n)])$$

entonces, este tipo de expresiones nos da una idea de la generalización de una cópula en términos de su generador φ

$$C^n(\vec{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \cdots + \varphi(u_n)) \quad (2.4)$$

La cópula C^n se llama **iteraciones en serie**, la cual sugiere la composición $C^n(u_1, \dots, u_n) = C(C^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n)$, sin embargo esta técnica de componer cópulas generalmente falla. Los requisitos que la función φ debe cumplir tienen que ver con la siguiente definición.

Definición 2.2.1 Una función $g(t)$ es **completamente monótona** si sobre un intervalo J es continua, y tiene derivadas de todos los órdenes las cuales alternan en signo, es decir, satisfacen

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0 \quad (2.5)$$

para todo t en el interior de J y $k = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Como consecuencia de la definición anterior, si $g(t)$ es una función completamente monótona sobre $[0, \infty)$ y $g(c) = 0$ para alguna constante $c > 0$, entonces g debe ser idénticamente cero sobre $[0, \infty)$; por lo tanto, si la pseudo inversa $\varphi^{[-1]}$ de un generador Arquimediano φ es completamente monótona, entonces es positiva sobre $[0, \infty)$, así pues, φ es un generador estricto y entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

El siguiente teorema nos muestra el requisito para que la extensión natural de una cópula a n -dimensiones (2.4) se cumpla.

Teorema 2.2.2 Sea φ una función estrictamente decreciente, continua de I a $[0, \infty]$, tal que $\varphi(0) = \infty$, y $\varphi(1) = 0$, y sea φ^{-1} la inversa de φ . Si C^n es la función de I^n a I dada por (2.4), entonces C^n es una n -cópula, para todo $n \geq 2$ si y sólo si φ^{-1} es completamente monótona sobre $[0, \infty)$.

Corolario 2.2.3 Si la inversa φ^{-1} de un generador estricto φ de una cópula Arquimediana C es completamente monótona entonces $C \succ \Pi$.

Observación 2.2.4 *Enunciaremos algunos resultados adicionales de las funciones completamente monótonas y absolutamente monótonas que son de gran utilidad.*

- I. *si g es completamente monótona y f es absolutamente monótona, es decir, $d^k f(t)/dt^k \geq 0$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, entonces la composición $f \circ g$ es completamente monótona.*
- II. *Si f y g son completamente monótonas su producto $f \cdot g$ también lo es.*
- III. *Si f es completamente monótona y g es una función positiva con una derivada monótona entonces $f \circ g$ es completamente monótona, en particular, e^{-g} es completamente monótona.*

Ejemplo: Sea $\varphi_\Theta(t) = -\ln((e^{-\Theta t} - 1)/(e^\Theta - 1))$ para $\theta > 0$, entonces $\varphi_\Theta(0) = \infty$ y $\varphi_\Theta(1) = 0$, haciendo cálculos la inversa de la función es

$$\varphi_\Theta^{-1}(t) = -1/\Theta \ln[1 - (1 - e^{-\Theta})e^{-t}].$$

Falta verificar que $\varphi_\Theta^{-1}(t)$ es completamente monótona; observamos que la función $\varphi_\Theta^{-1}(t)$ es el resultado de componer dos funciones $f(x) = -\ln(1 - x)/\Theta$ y $g(t) = (1 - e^{-\Theta})e^{-t}$, afirmamos que f es absolutamente monótona y que g es completamente monótona; comprobamos lo dicho.

Para $f(x)$ debemos comprobar que las derivadas de todos los órdenes son positivas para x en $(0, 1)$, en efecto:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} &= \frac{\Theta}{1-x} > 0 \\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{\Theta}{(1-x)^2} > 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^k f(x)}{dx^k} &= \frac{(k-1)!\Theta}{(1-x)^k} > 0. \end{aligned}$$

Para $g(t)$ debemos comprobar que las derivadas de todos los órdenes alternan

el signo para x en $[0, \infty)$, en efecto:

$$\begin{aligned}\frac{dg(t)}{dt} &= -(1 - e^{-\theta})e^{-t} < 0 \\ \frac{d^2g(t)}{dt^2} &= (1 - e^{-\theta})e^{-t} > 0 \\ \\ \frac{d^3g(t)}{dt^3} &= -(1 - e^{-\theta})e^{-t} < 0 \\ &\vdots \\ \frac{d^kg(t)}{dt^k} &= (-1)^k(1 - e^{-\theta})e^{-t}.\end{aligned}$$

Usando el inciso (I) de 2.2.4, podemos concluir que $\varphi^{-1}(t) = (f \circ g)(t)$ es completamente monótona. Además por el Teorema 2.1.6 de la sección anterior dado que φ_{Θ}^{-1} es convexa entonces φ_{Θ} es convexa, entonces $\varphi_{\Theta}^{-1}(t)$ y φ_{Θ} cumplen con las condiciones del Teorema 2.2.2, así pues la cópula $C(u, v)$ de dos dimensiones

$$C_{\Theta}(u, v) = -\frac{1}{\Theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\Theta u} - 1)(e^{-\Theta v} - 1)}{(e^{-\Theta} - 1)} \right],$$

puede ser extendida a su versión en n -dimensiones para $n \geq 2$.

$$C_{\Theta}^n(\vec{u}) = -\frac{1}{\Theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\Theta u_1} - 1) \dots (e^{-\Theta u_n} - 1)}{(e^{-\Theta} - 1)^{n-1}} \right].$$

2.3. Cópulas Arquimedianas y Funciones d -Monótonas

En la sección anterior vimos que una condición necesaria para que una cópula arquimediana bidimensional pudiese ser extendida a dimensiones $d > 2$, es que la inversa de la función φ cumpla con la definición 2.2.1, la cual nos pide que la función $\varphi^{[-1]}$ tenga derivadas de todos los órdenes que alternen en signo según la ecuación (2.5); en un artículo muy reciente de McNeil y Nešlehová [12] se han encontrado condiciones necesarias y suficientes

para que un generador de una cópula Arquimediana, genere una cópula d -dimensional, con $d < \infty$ pero no genere una cópula $d + 1$ dimensional, se demuestra que el generador debe ser una función d -monótona.

Es importante destacar que en el artículo de McNeil y Nešlehová [12], hacen un cambio de notación al que hemos usado en el presente trabajo, por ejemplo la función generadora φ cambia por ψ^{-1} y la inversa φ^{-1} por ψ , para la dimensión usan d en lugar de n ; así cualquier cópula Arquimediana se denota por

$$C(u_1, \dots, u_d) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \dots + \psi^{-1}(u_d)), \quad (2.6)$$

con (u_1, \dots, u_d) un vector en $[0, 1]^d$.

La primer parte del artículo trata el problema de generar una cópula Arquimediana en una dimensión dada, es decir, dar las condiciones necesarias y suficientes para que el generador ψ induzca, según la expresión dada en la ecuación (2.6), una cópula Arquimediana de dimensión $d < \infty$.

Empezaremos por hacer las definiciones pertinentes, cabe señalar que a excepción de los cambios que se mencionen, el resto de los conceptos vistos hasta ahora, permanecen iguales.

Definición 2.3.1 *Una cópula d -dimensional es una función $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, la cual satisface*

- I. $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ si $u_i = 0$ para al menos un subíndice $i = \{1, \dots, d\}$.
- II. $C(u_1, \dots, u_d) = u_i$ si $u_j = 1$ para todo $j = \{1, \dots, d\}$ e $i \neq j$.
- III. C es cuasi-monótona en $[0, 1]^d$.

El uso del término **cuasi-monótona** es el mismo que el concepto d -monótona, o lo que es lo mismo que el volumen de $B \subset [0, 1]^d$, satisface que $V_C(B) \geq 0$.

El estudio de las cópulas Arquimedianas equivaldrá a investigar ciertas distribuciones de probabilidad en \mathbb{R}^d dadas por su función de supervivencia y no su función de distribución.

Lema 2.3.2 *una d -función $\bar{H} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ es una función de supervivencia de una medida de probabilidad sobre \mathbb{R}^d si y sólo si*

- I. $\bar{H}(-\infty, \dots, -\infty) = 1$ y $\bar{H}(\vec{x}) = 0$ si $x_i = \infty$ para al menos un subíndice $i = \{1, \dots, d\}$.
- II. \bar{H} es continua por la derecha, esto es, para todo \vec{x} en \mathbb{R}^d se cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\vec{y} > \vec{x}$ con $\|\vec{y} - \vec{x}\|_1 < \delta$, implica $|\bar{H}(\vec{y}) - \bar{H}(\vec{x})| < \epsilon$.
- III. La función G , dada por $G(\vec{x}) = \bar{H}(-\vec{x})$, con $-\vec{x}$ en \mathbb{R}^d , es cuasi-monótona sobre \mathbb{R}^d .

El siguiente teorema es análogo al Teorema de Sklar 1.3.3, pero en términos de funciones de supervivencia.

Teorema 2.3.3 *Sea \bar{H} una función de supervivencia d -dimensional con marginales \bar{F}_i , con $i = \{1, \dots, d\}$, entonces existe una cópula C , la cual es en realidad la cópula de supervivencia de \bar{H} , tal que*

$$\bar{H}(\vec{x}) = C(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_d(x_d)), \quad (2.7)$$

para cualquier \vec{x} en \mathbb{R}^d . Además C esta únicamente determinada sobre $D = \{\vec{u} \in [0, 1]^d | \vec{u} \in \text{Ran}\bar{F}_1, \dots, \text{Ran}\bar{F}_d\}$. Además, para cualesquier \vec{u} en D ,

$$C(\vec{u}) = \bar{H}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}_d^{-1}(u_d)),$$

donde $\bar{F}_i^{-1}(u_i) = \inf \{x | \bar{F}_i^{-1}(x) \leq u_i\}$, con $i = \{1, \dots, d\}$; inversamente, dada una cópula C y una función de supervivencia univariada \bar{F}_i , con $i = \{1, \dots, d\}$ y \bar{H} como en la ecuación (2.7), es una función de supervivencia d -dimensional con marginales $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_d$ y cópula de supervivencia C .

Anteriormente una caracterización de las cópulas Arquimedianas era la propiedad $C(u, u) < u$ para cualquier u en $[0, 1]$, el artículo de McNeil y Nešlehová, usa una definición basada en el generador ψ .

Definición 2.3.4 Una función decreciente y continua $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, la cual satisface las condiciones $\psi(0) = 1$, $\lim_{\infty} \psi(x) = 0$ y es estrictamente decreciente sobre el intervalo $[0, \inf \{x | \psi(x) = 0\})$, es llamado un **generador Arquimediano**. Una cópula d -dimensional C se le llama Arquimediana si permite la representación

$$C(\vec{u}) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d)), \quad \vec{u} \in [0, 1]^d$$

para algún generador Arquimediano ψ e inversa $\psi^{-1} : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, donde, por convención $\psi(\infty) = 0$ y $\psi^{-1}(0) = \inf \{u | \psi(u) = 0\}$.

Así pues, cada generador ψ define una cópula d -dimensional según la expresión de la ecuación (2.6) si y sólo si $\psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d))$ es cuasimonótona.

Proposición 2.3.5 Sea ψ un generador Arquimediano en el sentido de la definición 2.3.4, entonces la función

$$\psi(\psi^{-1}(u) + \psi^{-1}(v))$$

para u, v en $[0, 1]$, es una cópula si y sólo si ψ es convexa.

La Proposición 2.3.5 puede ser extendida al caso $d \geq 3$, aunque necesitamos pedirle al generador ψ más requisitos.

Definición 2.3.6 Una función real es llamada d -**monótona** en el intervalo (a, b) , con a, b en \mathbb{R} y $d \geq 2$, si tiene derivadas hasta de orden $d - 2$ y las derivadas satisfacen

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, d - 2$$

para cualquier x en el intervalo (a, b) , aun más, $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}$ es decreciente y convexa en (a, b) . Para $d = 1$, f es llamada 1-monótona en (a, b) si la función es no negativa y decreciente en el intervalo. Y como ya lo habíamos

definido f es completamente o absolutamente monótona si f tienen derivadas de todos los órdenes en (a, b) y $(-1)^k f^{(k)} \geq 0$ para cualquier x en (a, b) .

El siguiente Teorema generaliza al Teorema 2.2.2.

Teorema 2.3.7 Sea ψ un generador Arquimediano, y $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$C(\vec{u}) = \psi(\psi^{-1}(u_1) + \cdots + \psi^{-1}(u_d)), \quad \vec{u} \in [0, 1]^d$$

es una cópula d -dimensional si y sólo si ψ es d -monótona sobre el intervalo $[0, \infty)$.

Proposición 2.3.8 Sea $d \geq 0$ un entero fijo, ψ es un generador Arquimediano en el sentido de la definición 2.3.4; entonces ψ es d -monótona sobre el intervalo $[0, \infty)$ si y sólo si, $(-1)^{d-2} f^{(d-2)}$ existe en $[0, \infty)$, es no negativa, decreciente y convexa en el mismo intervalo.

El artículo de McNeil y Nešlehová [12], se publicó en 2009 y da respuesta a la pregunta acerca de la caracterización de las funciones d -monótonas, que había permanecido sin respuesta por un largo tiempo.

Capítulo 3

Dependencia

En este capítulo veremos como se usan las cópulas para estudiar la dependencia entre variables aleatorias; una propiedad importante en las medidas de dependencia es que no cambian con respecto a la escala, veremos que las medidas de dependencia y las medidas de asociación están relacionadas.

Algunas de las medidas que son invariantes bajo escala más conocidas son la tau de Kendall y la rho de Spearman.

3.1. Concordancia y la Tau de Kendall

Sean (x_i, y_i) y (x_j, y_j) dos observaciones de un vector (X, Y) de variables aleatorias continuas. Diremos que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son **concordantes** si y sólo si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ ó $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. Análogamente diremos que son **discordantes** si y sólo si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ ó $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$. Estas condiciones se traducen en las expresiones, $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ cuando son concordantes, y $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ cuando son discordantes.

Sean $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ una muestra aleatoria de n observaciones del vector (X, Y) de variables aleatorias continuas; existen $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i, y_j) con i, j en el conjunto de subíndices $\{1, \dots, n\}$ e $i \neq j$. Cada par es concordante o discordante. c denotará el número de pares concordantes, y d denotará el número de pares discordantes; así se define la **Tau de Kendall muestral** como:

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}$$

La versión poblacional de la **Tau de Kendall** o la **función de Concordancia** Q esta definida como la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia entre dos vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) con diferentes (o iguales) funciones de distribución H_1 y H_2 , pero con marginales comunes F para X_1 y X_2 , y G para Y_1 y Y_2 .

$$Q = \tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.1)$$

Teorema 3.1.1 Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) vectores independientes de variables aleatorias con funciones de distribución conjunta H_1 y H_2 respectivamente, con marginales comunes F , para X_1 y X_2 , y G , para Y_1 y Y_2 . Si C_1 y C_2 denotan las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= C_1(F(x), G(y)) \\ H_2(x, y) &= C_2(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Sea Q , la función de Concordancia de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) definida arriba. Entonces

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (3.2)$$

Demostración: Dado que todas las variables X_1, X_2, Y_1 y Y_2 son variables aleatorias continuas, entonces

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0],$$

entonces,

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1, \quad (3.3)$$

calculamos la probabilidad,

$$\begin{aligned} P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] &= P[\{X_1 > X_2, Y_1 > Y_2\} \cup \{X_1 < X_2, Y_1 < Y_2\}] \\ &= P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2], \end{aligned}$$

las cuales se pueden calcular integrando indistintamente sobre la distribución de alguno de los vectores (X_1, Y_1) o (X_2, Y_2) , en este caso usamos (X_1, Y_1) ,

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[X_2 < x, Y_2 < y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} H_2(x, y) dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \quad (3.4)$$

De la misma manera se comprueba

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)), \end{aligned}$$

de nuevo, tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int \int_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v),$$

dado que la cópula C_1 es la función de distribución del par de variables aleatorias (U, V) , las cuales tienen distribución uniforme $(0, 1)$, por lo que,

$E(U) = E(V) = 1/2$, entonces

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = 1 - 1/2 - 1/2 + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

entonces la expresión anterior se reduce

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \quad (3.5)$$

Así pues, sustituyendo y sumando las expresiones encontradas (3.5) y (3.6) para Q en la ecuación (3.3), se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= 2 \left\{ \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \right\} - 1 \\ &= 4 \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.2 Sean (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , dos pares de vectores independientes de variables aleatorias con funciones de distribución conjunta H_1 y H_2 respectivamente, con marginales comunes F para X_1 y X_2 , y G para Y_1 y Y_2 . Si C_1 y C_2 denotan las cópulas de (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) respectivamente. Entonces

- I. Q es **simétrica**, es decir, $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.
- II. Q es **creciente en cada argumento**, si $C_1 \prec C'_1$ y $C_2 \prec C'_2$, entonces $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$.
- III. Las cópulas C_1 y C_2 pueden ser reemplazadas por sus cópulas de supervivencia en Q , es decir, $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$.

Demostración: Para el inciso I, utilizamos el hecho de que la probabilidad $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$, puede ser calculada usando el vector (X_2, Y_2) ,

entonces

$$\begin{aligned}
P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[x < X_2, y < Y_2] dC_2(F(x), G(y)) \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} 1 - F(x) - G(y) + H_1(x, y) dC_2(F(x), G(y)) \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_1(F(x), G(y)) dC_2(F(x), G(y)),
\end{aligned}$$

tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v). \quad (3.6)$$

De la misma manera se comprueba

$$\begin{aligned}
P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P[X_1 < x, Y_1 < y] dC_2(F(x), G(y)) \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_1(F(x), G(y)) dC_2(F(x), G(y)),
\end{aligned}$$

de nuevo, tomando $u = F(x)$ y $v = G(y)$,

$$P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] = \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v),$$

entonces

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1).$$

Demostramos que el inciso II se cumple, en efecto, dado que $C_1 \prec C'_1$ y $C_2 \prec C'_2$, entonces $C_1(u, v) \leq C'_1(u, v)$ y $C_2(u, v) \leq C'_2(u, v)$, si y solo si

$$\int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) \leq \int \int_{I^2} C'_1(u, v) dC_2(u, v) \leq \int \int_{I^2} C'_1(u, v) dC'_2(u, v),$$

si y sólo si

$$4 \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 \leq 4 \int \int_{I^2} C'_1(u, v) dC'_2(u, v) - 1,$$

por lo tanto

$$Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2).$$

Por último, demostramos el inciso III, partimos del hecho $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$, evaluamos $\hat{C}(u, v)$ en el punto $(1 - u, 1 - v)$ y obtenemos

$$\hat{C}(1 - u, 1 - v) = (1 - u) + (1 - v) - 1 + C(u, v) = 1 - u - v + C(u, v),$$

entonces

$$C(u, v) = u + v - 1 + \hat{C}(1 - u, 1 - v),$$

observamos que las diferenciales cumplen $dC(u, v) = d\hat{C}(1 - u, 1 - v)$, entonces

$$\begin{aligned} \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) &= \int \int_{I^2} [u + v - 1 + \hat{C}(1 - u, 1 - v)] d\hat{C}(1 - u, 1 - v) \\ &= \int \int_{I^2} \hat{C}(1 - u, 1 - v) d\hat{C}(1 - u, 1 - v), \end{aligned}$$

la última igualdad se cumple del hecho $\int \int_{I^2} [u + v - 1] dudv = 0$; entonces definimos $\hat{u} = 1 - u$ y $\hat{v} = 1 - v$, por lo tanto se obtiene

$$\begin{aligned} Q(C_1, C_2) &= 4 \int \int_{I^2} C_1(u, v) dC_2(u, v) - 1 \\ &= 4 \int \int_{I^2} \hat{C}_1(1 - u, 1 - v) d\hat{C}_2(1 - u, 1 - v) - 1 \\ &= 4 \int \int_{I^2} \hat{C}_1(\hat{u}, \hat{v}) d\hat{C}_2(\hat{u}, \hat{v}) - 1 \\ &= Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2). \end{aligned}$$

□

Ejemplos: La función Q , se evalúa fácilmente para las cópulas M , W y Π . Recordemos que el soporte de M es la diagonal $v = u$ en I^2 . Dado que M tiene marginales uniformes en $(0, 1)$; si g es una función integrable cuyo dominio es I^2 , entonces

$$\int \int_{I^2} g(u, v) dM(u, v) = \int_I g(u, u) du. \quad (3.7)$$

Entonces, calculemos los tres casos en los cuales en Q aparece la cópula M

$$Q(M, M) = 4 \int \int_{I^2} \min(u, v) dM(u, v) - 1$$

usando la igualdad de la integral en (3.7)

$$\begin{aligned} Q(M, M) &= 4 \int_I \min(u, u) du - 1 \\ &= 4 \int_I u du - 1 \\ &= 4 \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

ahora calculamos las Q restantes, que están relacionadas con la cópula M

$$Q(M, \Pi) = 4 \int \int_{I^2} uv dM(u, v) - 1$$

volvemos a usar (3.7)

$$\begin{aligned} Q(M, \Pi) &= 4 \int_I u^2 du - 1 = 4 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 - 1 \\ &= \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$Q(M, W) = 4 \int \int_{I^2} \max(u + v - 1, 0) dM(u, v) - 1$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(M, W) &= 4 \left\{ \int_0^{1/2} \max(2u - 1, 0) du + \int_{1/2}^1 \max(2u - 1, 0) du \right\} - 1 \\ &= 4 \int_{1/2}^1 (2u - 1) du - 1 \\ &= 4 [(u^2 - u)]_{1/2}^1 - 1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{4} \right) - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

El soporte de W es la diagonal $v = 1 - u$, entonces la integral

$$\int \int_{I^2} g(u, v) dW(u, v) = \int_I g(u, 1 - u) du. \quad (3.8)$$

Así, calculemos las integrales

$$Q(W, \Pi) = 4 \int \int_{I^2} uv dW(u, v) - 1$$

usando (3.8)

$$\begin{aligned} Q(W, \Pi) &= 4 \int_I u(1 - u) du - 1 \\ &= 4 \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 - 1 \\ &= 4 \left(\frac{1}{6} \right) - 1 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(W, W) &= 4 \int \int_{I^2} \text{máx}(u + v - 1, 0) dW(u, v) - 1 \\
&= 4 \int_I \text{máx}(u + 1 - u - 1, 0) du - 1 \\
&= 4 \int_I 0 du - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

La diferencial de Π es $d\Pi(u, v) = dudv$, entonces

$$\begin{aligned}
Q(\Pi, \Pi) &= 4 \int \int_{I^2} uv d\Pi(u, v) - 1 \\
&= 4 \int \int_{I^2} uv dudv - 1 \\
&= 4 \left[\int_I u du \right]^2 - 1 \\
&= 4 \left(\left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 \right)^2 - 1 \\
&= 4 \frac{1}{4} - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Observamos que dado que Q está definida como una diferencia de probabilidades, entonces los valores de Q siempre se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$.

Sea C una cópula arbitraria, comprobamos que $Q(C, W)$, cae en un intervalo bien definido, usando el Corolario 3.1.2. Para la cota inferior, como $W \prec W$ y $W \prec C$, entonces $Q(C, W) \geq Q(W, W) = -1$. Para la cota superior, como $C \prec W$ y $W \prec M$, entonces $Q(C, W) \leq Q(M, W) = 0$, así

$$-1 \leq Q(C, W) \leq 0.$$

De la misma manera para $Q(C, M)$, cae en un intervalo bien definido, usando de nuevo el Corolario 3.1.2. Para la cota superior, como $C \prec M$ y $M \prec M$,

entonces $Q(C, M) \leq Q(M, M) = 1$. Para la cota inferior, como $W \prec C$ y $M \prec M$, entonces $0 = Q(W, M) \leq Q(C, M)$, es decir

$$0 \leq Q(C, M) \leq 1.$$

De igual manera se comprueba que para toda cópula C .

$$-1/3 \leq Q(C, \Pi) \leq 1/3.$$

Teorema 3.1.3 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la versión poblacional de la tau de Kendall está dada por

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

Ejemplo 1: Sea C_Θ , Θ en el intervalo $[-1, 1]$, una cópula de la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern, es decir,

$$C_\Theta(u, v) = uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v),$$

y cuya diferencial es

$$\begin{aligned} dC_\Theta(u, v) &= \frac{\partial^2 C_\Theta(u, v)}{\partial v \partial u} dudv \\ &= 1 + \Theta \frac{\partial}{\partial v} [v(1 - v)(1 - u - u)] dudv \\ &= 1 + \Theta(1 - 2u)(1 - 2v) dudv. \end{aligned}$$

Calculamos la integral

$$\begin{aligned} K = \int \int_{I^2} C_\Theta(u, v) dC_\Theta(u, v) &= \int \int_{I^2} [uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v)] \\ &\quad \cdot [1 + \Theta(1 - 2u)(1 - 2v)] dudv, \end{aligned}$$

multiplicando cada factor

$$\begin{aligned}
 K &= \int \int_{I^2} uvdudv + \int \int_{I^2} \Theta uv(1-u)(1-v)dudv \\
 &+ \int \int_{I^2} \Theta uv(1-2u)(1-2v)dudv \\
 &+ \int \int_{I^2} [\Theta^2 uv(1-u)(1-v)] [(1-2u)(1-2v)] dudv,
 \end{aligned}$$

cada una de las integrales bidimensionales pueden ser expresadas como integrales unidimensionales elevadas al cuadrado

$$\begin{aligned}
 K &= \left[\int_0^1 udu \right]^2 + \Theta \left[\int_0^1 u(1-u) \right]^2 + \Theta \left[\int_0^1 u(1-2u)du \right]^2 \\
 &+ \Theta^2 \left[\int_0^1 u(1-u)(1-2u)du \right]^2,
 \end{aligned}$$

por último, evaluamos la integral

$$\begin{aligned}
 K &= \left[\frac{1}{2} \right]^2 + \Theta \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right]^2 + \Theta \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right]^2 + \Theta^2 \left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right]^2 \\
 &= \left[\frac{1}{2} \right]^2 + \Theta \left[\frac{1}{6} \right]^2 + \Theta \left[-\frac{1}{6} \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \Theta \frac{2}{36} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{\Theta}{18}.
 \end{aligned}$$

Entonces, la tau de Kendall

$$\begin{aligned}
 \tau_{\Theta} &= 4 \left[\frac{1}{4} + \frac{\Theta}{18} \right] - 1 \\
 &= \frac{2\Theta}{9}.
 \end{aligned}$$

Corolario 3.1.4 Sean X y Y variables aleatorias con cópula Arquimediana

C , generada por φ , la versión poblacional de la tau de Kendall τ_C para X y Y , esta dada por

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Para ver la demostración de este Corolario consulte el libro de Nelsen [13].

Ejemplo 2: Sea C_Θ una cópula de la familia Clayton.

$$C_\Theta(u, v) = \max \left\{ (u^{-\Theta} + v^{-\Theta} - 1)^{-1/\Theta}, 0 \right\},$$

el generador de C_Θ , para $\Theta \geq -1$

$$\varphi_\Theta(t) = \frac{1}{\Theta}(t^{-\Theta} - 1),$$

la derivada de φ_Θ

$$\varphi'_\Theta(t) = -t^{-(\Theta+1)},$$

usamos el Corolario 3.1.4 para calcular la tau de Kendall

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} &= \frac{\frac{1}{\Theta}(t^{-\Theta} - 1)}{-t^{-(\Theta+1)}} \\ &= \frac{t^{(\Theta+1)} - t}{\Theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tau_C &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{(\Theta+1)} - t}{\Theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\Theta} \left[\frac{t^{(\Theta+2)}}{\Theta+2} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 + \frac{4}{\Theta} \left[\frac{1}{\Theta+2} - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{\Theta}{(\Theta+2)}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Sea C_Θ una cópula Arquimediana de la familia de cópulas

Gumbel-Hougaard, con $\Theta \geq 1$

$$C_{\Theta}(u, v) = e \left[- \left((-\ln u)^{\Theta} + (-\ln v)^{\Theta} \right)^{1/\Theta} \right],$$

el generador

$$\varphi_{\Theta}(t) = (-\ln t)^{\Theta},$$

la derivada de φ_{Θ}

$$\varphi'_{\Theta}(t) = -\frac{\Theta}{t} (-\ln t)^{\Theta-1},$$

por el Corolario 3.1.4 para calcular la tau de Kendall

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} &= \frac{(-\ln t)^{\Theta}}{-\frac{\Theta}{t} (-\ln t)^{\Theta-1}} \\ &= \frac{t \ln t}{\Theta}. \end{aligned}$$

entonces integrando por partes, tomando $u = \ln t$ y $dv = t dt$

$$\begin{aligned} \tau_C &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\Theta} dt \\ &= 1 + \frac{4}{\Theta} \left[\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right] \\ &= 1 + \frac{4}{\Theta} \left[-\frac{t^2}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{4}{\Theta} \left[\frac{1}{4} \right] \\ &= \frac{\Theta - 1}{\Theta}. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.5 *Sea C una cópula tal que el producto $(\partial C/\partial u)(\partial C/\partial v)$ es integrable sobre I^2 , entonces*

$$\int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) = \frac{1}{2} - \int \int_{I^2} \left(\frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \right) dudv.$$

Demostración: Sólo trataremos el caso en que la cópula C es una función

absolutamente continua, entonces la integral

$$\int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} du dv,$$

puede ser calculada, usando integración por partes. Sea $m(u) = C(u, v)$ y $dw(u) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} du$, en la integral interior

$$\begin{aligned} \int_0^1 C(u, v) \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} du &= \left[C(u, v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} du \\ &= v - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} du. \end{aligned}$$

Sustituimos esta expresión en

$$\begin{aligned} \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) &= \int_0^1 \left[v - \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} du \right] dv \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} du dv. \end{aligned}$$

Para ver el caso general, donde se construyen las sumas de Reimann, se puede consultar [13]. \square

Observación: Dado que $\tau_C = 4 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$, entonces

$$\tau_C = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} du dv. \quad (3.9)$$

Ejemplo 4: Sea $C_{\alpha, \beta}$, una cópula de la familia Marshall-Olkin para $0 < \alpha, \beta < 1$, es decir, $0 < \alpha, \beta < 1$.

$$C_{\alpha, \beta} = \begin{cases} u^{1-\alpha} v & u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta} & u^\alpha \leq v^\beta. \end{cases}$$

Esta cópula, no tiene parciales en la curva $u^\alpha = v^\beta$, entonces las parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} C_{\alpha,\beta}(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C_{\alpha,\beta}(u,v) &= \begin{cases} (1-\alpha)u^{-\alpha}v u^{1-\alpha} & u^\alpha > v^\beta \\ (1-\beta)uv^{-\beta}v^{1-\beta} & u^\alpha < v^\beta \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1-\alpha)u^{1-2\alpha}v & u^\alpha > v^\beta \\ (1-\beta)uv^{1-2\beta} & u^\alpha < v^\beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Debemos calcular la integral

$$R = \int \int_{I^2} C(u,v) dC(u,v) = \frac{1}{2} - \int \int_{I^2} \left(\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \right) dudv$$

entonces

$$\begin{aligned} R &= \int \int_{I^2} \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) dudv = \int_I \int_{v=0}^{u^{\alpha/\beta}} (1-\alpha)u^{1-2\alpha}v dv du \\ &\quad + \int_I \int_{u=0}^{v^{\beta/\alpha}} (1-\beta)uv^{1-2\beta} du dv \end{aligned}$$

calculamos ambos sumandos

$$\begin{aligned} R &= (1-\alpha) \int_I u^{1-2\alpha} \int_{v=0}^{u^{\alpha/\beta}} v dv du + (1-\beta) \int_I v^{1-2\beta} \int_{u=0}^{v^{\beta/\alpha}} u du dv \\ &= (1-\alpha) \int_I u^{1-2\alpha} \frac{u^{2\alpha/\beta}}{2} du + (1-\beta) \int_I v^{1-2\beta} \frac{v^{2\beta/\alpha}}{2} dv \\ &= \frac{(1-\alpha)}{2} \int_0^1 u^{(\beta-2\alpha\beta+2\alpha)/\beta} du + \frac{(1-\beta)}{2} \int_0^1 v^{(\alpha-2\alpha\beta+2\beta)/\alpha} dv \\ &= \frac{(1-\alpha)}{2} \left[\frac{u^{(\beta-2\alpha\beta+2\alpha)/\beta+1}}{(\beta-2\alpha\beta+2\alpha)/\beta+1} \right]_0^1 + \frac{(1-\beta)}{2} \left[\frac{v^{(\alpha-2\alpha\beta+2\beta)/\alpha+1}}{(\alpha-2\alpha\beta+2\beta)/\alpha+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta} \right] \end{aligned}$$

usando la expresión del Teorema 3.1.5

$$\int \int_{I^2} C(u,v) dC(u,v) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha + \beta - 2\alpha\beta}{2\alpha + 2\beta - 2\alpha\beta} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} \right]$$

y de la observación (3.9)

$$\begin{aligned}\tau_C &= 1 - 4 \left[\frac{1}{4} \right] \left[\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta} \right] \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}.\end{aligned}$$

3.2. La Rho de Spearman

La rho de Spearman está basada en la concordancia o discordancia de pares de variables aleatorias, sean (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (X_3, Y_3) tres vectores aleatorios independientes con función de distribución común H , marginales F y G para X_i, Y_i para $i = \{1, 2, 3\}$ respectivamente, y cópula C .

La versión poblacional de la rho de Spearman es proporcional a la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia de los vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3) , es decir,

$$\rho = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]). \quad (3.10)$$

Los vectores (X_1, Y_1) y (X_2, Y_3) , tienen las mismas marginales $F(X)$, $G(Y)$, sin embargo, observamos que el vector (X_1, Y_1) , tiene función de distribución conjunta $H(x, y)$, mientras que el vector (X_2, Y_3) tiene función de distribución conjunta distribución $F(x)G(y)$.

Teorema 3.2.1 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la versión poblacional de la rho de Spearman para X y Y está dada por

$$\rho = \rho_{X,Y} = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \quad (3.11)$$

$$= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \quad (3.12)$$

Ejemplo 1: Sea $C_{\alpha,\beta}$, la cópula de la familia de Fréchet, definida

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \alpha M + (1 - \alpha - \beta)\Pi + \beta W,$$

con $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y $\alpha + \beta \leq 1$.

$$\begin{aligned} Q(C_{\alpha,\beta}) &= \alpha Q(M, \Pi) + (1 - \alpha - \beta)Q(\Pi, \Pi) + \beta Q(W, \Pi) \\ &= \alpha\left(\frac{1}{3}\right) + (1 - \alpha - \beta)(0) + \beta\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{\alpha - \beta}{3}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sea C_Θ la cópula de la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern

$$C_\Theta(u, v) = uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v).$$

Para calcular la rho de Spearman necesitamos calcular

$$\begin{aligned} \int \int_{I^2} C(u, v) dudv &= \int \int_{I^2} [uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v)] dudv \\ &= \int \int_{I^2} uv dudv + \int \int_{I^2} \Theta uv(1 - u)(1 - v) dudv \\ &= \left[\int_0^1 udu \right]^2 + \Theta \left[\int_0^1 u(1 - u) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} + \Theta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\Theta}{36}. \end{aligned}$$

Calculamos ρ_Θ

$$\begin{aligned} \rho_\Theta &= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \left[\frac{1}{4} + \frac{\Theta}{36} \right] - 3 \\ &= \frac{\Theta}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Sea $C_{\alpha,\beta}$ la cópula de la familia Marshall-Olkin con $0 < \alpha, \beta < 1$,

definida como

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & \text{para } u^\alpha \leq v^\beta \\ uv^{1-\beta} & \text{para } u^\alpha \geq v^\beta. \end{cases}$$

Primero, calculamos la integral

$$\begin{aligned} \int \int_{I^2} C(u, v) dudv &= \int \int_{I^2} C_{\alpha,\beta}(u, v) dudv \\ &= \int_I \int_{v=0}^{u^{\alpha/\beta}} u^{1-\alpha} v dv du + \int_I \int_{u=0}^{v^{\beta/\alpha}} uv^{1-\beta} dudv \\ &= \int_I u^{1-\alpha} \left[\int_{v=0}^{u^{\alpha/\beta}} v dv \right] du + \int_I v^{1-\beta} \left[\int_{u=0}^{v^{\beta/\alpha}} u du \right] dv \\ &= \int_I u^{1-\alpha} \left[\frac{u^{2\alpha/\beta}}{2} \right] du + \int_I v^{1-\beta} \left[\frac{v^{2\beta/\alpha}}{2} \right] dv \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 u^{1-\alpha+2\alpha/\beta} du + \int_0^1 v^{1-\beta+2\beta/\alpha} dv \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{u^{2-\alpha+2\alpha/\beta}}{2-\alpha+2\alpha/\beta} \right]_0^1 + \left[\frac{v^{2-\beta+2\beta/\alpha}}{2-\beta+2\beta/\alpha} \right]_0^1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\beta}{2\beta-\alpha\beta+2\alpha} \right] + \left[\frac{\alpha}{2\alpha-\beta\alpha+2\beta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha+\beta}{2\beta-\alpha\beta+2\alpha} \right]. \end{aligned}$$

La rho de Spearman para la cópula $C_{\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned} \rho_\Theta &= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\alpha+\beta}{2\beta-\alpha\beta+2\alpha} \right] \right] - 3 \end{aligned}$$

desarrollando los cálculos,

$$\begin{aligned}
 \rho_{\Theta} &= 6 \left[\frac{\alpha + \beta}{2\beta - \alpha\beta + 2\alpha} \right] - 3 \\
 &= \frac{6\alpha + 6\beta - 6\beta + 3\alpha\beta - 6\alpha}{2\beta - \alpha\beta + 2\alpha} \\
 &= \frac{3\alpha\beta}{2\beta - \alpha\beta + 2\alpha}.
 \end{aligned}$$

Ahora, definiremos que condiciones debe cumplir una *medida de concordancia*.

Definición 3.2.2 *Una medida numérica de asociación entre dos variables aleatorias continuas X y Y , con cópula C , es una **medida de concordancia** $\kappa_{X,Y}$ o κ_C si satisface:*

- I. $\kappa_{X,Y}$ esta definida para cada par X, Y de variables aleatorias continuas.
- II. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ y $\kappa_{X,-X} = -1$.
- III. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$.
- IV. Si X y Y son independientes, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$.
- V. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$.
- VI. Si C_1 y C_2 son cópulas tales que $C_1 \prec C_2$, entonces $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$.
- VII. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias continuas con cópulas C_n y, si la sucesión $\{C_n\}$ converge puntualmente a C , entonces $\lim \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

En el inciso IV, el caso recíproco no se cumple, es decir, si $\kappa_{X,Y} = 0$, no implica que X y Y son independientes; los incisos VI y VII son condiciones que no deberían ser indispensables para definir una medida de concordancia.

Teorema 3.2.3 *Sea K una medida de concordancia para X y Y variables aleatorias continuas.*

- I. *Si Y es una función creciente de X , casi seguramente, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$.*
- II. *Si Y es una función decreciente de X , casi seguramente, entonces $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$.*
- III. *Si α y β son funciones estrictamente monótonas sobre $\text{Ran}X$ y $\text{Ran}Y$ casi seguramente, entonces $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.*

El siguiente teorema afirma que la tau de Kendall y la Rho de Spearman son medidas de concordancia.

Teorema 3.2.4 *Si X y Y son variables aleatorias continuas con cópula C , entonces la versión poblacional de la τ de Kendall y la ρ de Spearman, satisfacen las condiciones de una medida de concordancia.*

Dado que ρ y τ satisfacen los criterios de la Definición 3.2.2, a la función \prec se llama orden de concordancia.

La ρ de Spearman se le llama el grado del coeficiente de correlación; los grados son análogos a los rangos de las funciones, es decir, si x, y son dos observaciones de dos variables aleatorias X, Y , con funciones de distribución F y G , respectivamente, entonces los grados de x y y están dados por $u = F(x)$, $v = G(y)$, haga notar que los grados u, v son observaciones con distribución uniforme en $(0, 1)$ de las variables aleatorias $U = F(X)$ y $V = G(Y)$, cuya función de distribución conjunta está determinada por C ; dado que ambas variables U y V tienen media $1/2$ y varianza $1/12$, entonces la ecuación (3.11), es equivalente a la expresión

$$\begin{aligned} \rho = \rho_{X,Y} &= 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 = 12E(UV) - 3 \\ &= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}} \\ &= \frac{\text{COV}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)}\sqrt{\text{Var}(V)}}. \end{aligned}$$

Esta expresión es el coeficiente de correlación de Pearson entre U y V .

Ejemplo 4: Sean U, V variables aleatorias uniformes en $(0, 1)$, Θ una constante en $(0, 1)$, sea $V = U \oplus \Theta$ la suma directa de U y Θ con probabilidad uno, C_Θ es la función de distribución que corresponde a las variables de U y V ,

$$C_\Theta(u, v) = \begin{cases} \min(u, v - \Theta), & \text{para } (u, v) \in [0, 1 - \Theta] \times [\Theta, 1], \\ \min(u + \Theta - 1, v) & \text{para } (u, v) \in [1 - \Theta, 1] \times [0, \Theta], \\ W(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calculamos la esperanza del producto UV

$$\begin{aligned} E(UV) &= \int_0^1 u(u \oplus \Theta) du \\ &= \int_0^{1-\Theta} u(u + \Theta) du + \int_{1-\Theta}^1 u(u + \Theta - 1) du \\ &= \left[\frac{u^3}{3} + \Theta \frac{u^2}{2} \right]_0^{1-\Theta} + \left[\frac{u^3}{3} + (\Theta - 1) \frac{u^2}{2} \right]_{1-\Theta}^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\Theta^2 - \Theta}{2} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\Theta(1 - \Theta)}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_\Theta &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{\Theta(1-\Theta)}{2} - \frac{1}{4}}{1/12} \\ &= -1 + 6\Theta - 6\Theta^2 \\ &= 1 - 6\Theta(1 - \Theta). \end{aligned}$$

Otra interpretación de la rho de Spearman esta dada por la ecuación (3.12), que representa la diferencia de volúmenes bajo las gráficas de la cópula C y

la de la cópula Π , la ecuación (3.12) puede ser escrita como

$$\rho_{\Theta} = 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 = 12 \left[\int \int_{I^2} C(u, v) dudv - \int \int_{I^2} uv dudv \right],$$

desarrollando los cálculos,

$$\rho_{\Theta} = 12 \left[\int \int_{I^2} (C(u, v) - uv) dudv \right].$$

3.3. Relación entre la Tau de Kendall y la Rho de Spearman

La relación entre τ y ρ varía de una familia a otra, para ver ejemplos puede revisar el libro de Nelsen [13]. El siguiente teorema, escrito por Daniels [4] nos da desigualdades universales para estas medidas.

Teorema 3.3.1 Sean X y Y variables aleatorias continuas, τ y ρ denotan la tau de Kendall y la rho de Spearman, entonces

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1 \tag{3.13}$$

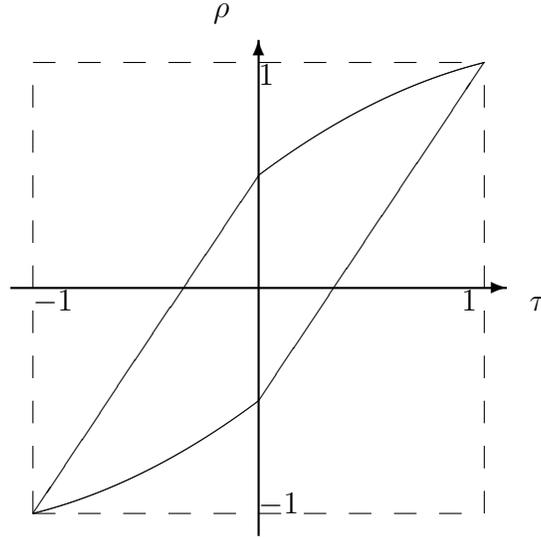
Teorema 3.3.2 Sean X y Y variables aleatorias continuas, τ y ρ denotan la tau de Kendall y la rho de Spearman, entonces

$$\frac{1 + \rho}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau}{2} \right)^2$$

y

$$\frac{1 - \rho}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau}{2} \right)^2$$

Figura 3.1: Cotas dadas en el Corolario 3.3.3 para ρ y τ de un par de variables aleatorias con cópula C .



Corolario 3.3.3 Sean X y Y variables aleatorias continuas, τ y ρ denotan la tau de Kendall y la rho de Spearman, entonces

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2} \quad \tau \geq 0,$$

y

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho \leq \frac{3\tau + 1}{2} \quad \tau \leq 0.$$

Ejemplo 1: Sean U, V variables aleatorias uniformes $(0,1)$, $V = U \oplus \Theta$, sea C_Θ la cópula

$$C_\Theta(u, v) = \begin{cases} \min(u, v - \Theta), & \text{para } (u, v) \in [0, 1 - \Theta] \times [\Theta, 1], \\ \min(u + \Theta - 1, v) & \text{para } (u, v) \in [1 - \Theta, 1] \times [0, \Theta], \\ W(u, v) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con Θ en el intervalo $[0, 1]$, por cálculos anteriores, sabemos que $\rho_\Theta = 1 - 6\Theta(1 - \Theta)$, falta calcular la τ_Θ de Kendall, necesitamos calcular la integral

$$B = \int \int_{I^2} C_\Theta(u, v) dC_\Theta(u, v),$$

para lo cual, usamos el soporte de la función que esta determinado por dos rectas, la recta $v = u + \Theta$ para el intervalo $[0, 1 - \Theta]$ y $v = u - 1 + \Theta$ para el intervalo $[1 - \Theta, 1]$.

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{1-\Theta} C_\Theta(u, u + \Theta) du + \int_{1-\Theta}^1 C_\Theta(u, u - 1 + \Theta) du \\ &= \int_0^{1-\Theta} \min(u, u) du + \int_{1-\Theta}^1 \min(u - 1 + \Theta, u - 1 + \Theta) du \\ &= \int_0^{1-\Theta} u du + \int_{1-\Theta}^1 u - 1 + \Theta du \\ &= \frac{(1 - \Theta)^2}{2} + \left[\frac{u^2}{2} - (1 - \Theta)u \right]_{1-\Theta}^1 \\ &= \frac{1}{2} + (\Theta - 1) + (1 - \Theta)^2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tau_\Theta &= 4 \left[\frac{1}{2} + (\Theta - 1) + (1 - \Theta)^2 \right] - 1 \\ &= (1 - 2\Theta)^2. \end{aligned}$$

Verificamos que para esta familia,

$$\begin{aligned} \frac{3\tau_\Theta - 1}{2} &= \frac{3[(1 - 2\Theta)^2] - 1}{2} \\ &= \frac{2 - 12\Theta + 12\Theta^2}{2} = 1 - 6\Theta + 6\Theta^2 \\ &= 1 - 6\Theta(1 - \Theta) = \rho_\Theta. \end{aligned}$$

Entonces cada punto de la cota $\frac{3\tau-1}{2}$ es alcanzado por un punto de esta familia para $\tau \geq 0$.

Sean U, V variables aleatorias uniformes $(0,1)$, $U \oplus V = \Theta$, sea C_Θ con Θ en el intervalo $[0, 1]$, la cópula

$$C_\Theta(u, v) = \begin{cases} \text{máx}(0, u + v - \Theta), & \text{para } (u, v) \in [0, \Theta]^2, \\ \text{máx}(\Theta, u + v - 1) & \text{para } (u, v) \in [\Theta, 1]^2, \\ M(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Falta calcular la τ_Θ de Kendall y la rho de Spearman, necesitamos calcular la integral

$$A = \int \int_{I^2} C_\Theta(u, v) dC_\Theta(u, v),$$

para lo cual, usamos el soporte de la función que al igual que para la cópula anterior está determinado por dos rectas, la recta $v = -u + \Theta$ para el intervalo $[0, \Theta]$ y $v = -u + 1 + \Theta$ para el intervalo $[\Theta, 1]$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\Theta C_\Theta(u, -u + \Theta) du + \int_\Theta^1 C_\Theta(u, -u + 1 + \Theta) du \\ &= \int_0^\Theta \text{máx}(0, u - u + \Theta - \Theta) du + \int_\Theta^1 \text{máx}(\Theta, \Theta) du \\ &= \int_0^\Theta 0 du + \int_\Theta^1 \Theta du = \Theta(1 - \Theta). \end{aligned}$$

Entonces

$$\tau_\Theta = 4[\Theta(1 - \Theta)] - 1 = -(1 - 2\theta)^2.$$

Ahora, calculamos la rho de Spearman

Calculamos la esperanza del producto UV

$$\begin{aligned} E(UV) &= \int_0^\Theta u(\Theta - u) du + \int_\Theta^1 u(1 + \Theta - 1) du \\ &= \left[\Theta \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \right]_0^\Theta + \left[(1 + \Theta) \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + \right]_\Theta^1, \end{aligned}$$

evaluando los límites y simplificando.

$$\begin{aligned}
 E(UV) &= \left[\Theta \frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^3}{3} + \right] + \left[\frac{(1+\Theta)}{2} - \frac{1}{3} - \frac{(1+\Theta)\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^3}{3} \right] \\
 &= \frac{\Theta^3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{3} - \frac{\Theta^2}{2} - \frac{\Theta^3}{3} \\
 &= \frac{1}{6} [1 + 3\Theta - 3\Theta^2].
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \rho_{\Theta} &= \frac{1/6(1 + 3\Theta - 3\Theta^2) - 1/4}{1/12} \\
 &= -1 + 6\Theta - 6\Theta^2 \\
 &= -1 + 6\Theta(1 - \Theta).
 \end{aligned}$$

Verificamos que para esta familia, cada punto de la cota $\frac{3\tau+1}{2}$ es alcanzado por un punto de esta familia para $\tau \leq 0$, en efecto,

$$\begin{aligned}
 \frac{3\tau_{\Theta} + 1}{2} &= \frac{3[-(1 - 2\theta)^2] - 1}{2} \\
 &= \frac{-2 + 12\theta - 12\theta^2}{2} \\
 &= -1 + 6\theta - 6\theta^2 \\
 &= -1 + 6\theta(1 - \theta) \\
 &= \rho_{\Theta}.
 \end{aligned}$$

Es conveniente mencionar que a la fecha, no se ha demostrado que todos los puntos la frontera de las cotas dadas en el corolario 3.3.3 sean alcanzados por alguna cópula.

3.4. Otras Medidas de Concordancia

Enunciaremos dos medidas de concordancia más, el índice de cograduación simple de Gini y el coeficiente de correlación mediana de Blomqvist.

Antes de definir estas medidas es conveniente mencionar algunos conceptos.

Dado un conjunto de vectores aleatorios $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$, se define el **rango** de X_i con $i = \{1, \dots, n\}$ de la siguiente manera: Primero, se ordenan las primeras coordenadas, de menor a mayor, haciendo una lista ordenada digamos $X_{[1]} \leq \dots \leq X_{[k]} \leq \dots \leq X_{[n]}$ de variables, si la variable $X_i = X_{[k]}$, entonces el rango de X_i es k , de la misma manera se procede para las variables Y_n . Note que al obtener los rangos de cada una de las entradas de los vectores aleatorios $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$, se obtienen pares de vectores $(X_{[i]}, Y_{[j]})$ con i, j en el conjunto de subíndices $\{1, \dots, n\}$.

El **índice simple de cograduación de Gini** fué propuesto por Conrado Gini en 1910, éste introduce una medida de asociación g . Si p_i y q_i denotan el rango de una muestra de tamaño n de dos variables aleatorias continuas X, Y , se define

$$g = \frac{1}{[n^2/2]} \left[\sum_{i=1}^n |p_i + q_i - n - 1| - \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \right]. \quad (3.14)$$

donde $[t]$ denota la parte entera de t .

Sean F, G las funciones de distribución de X y Y , con $U = F(X)$ y $V = G(Y)$ y cópula C ; dado que p_i/n y q_i/n , son observaciones que tienen distribución uniforme sobre el conjunto $\{1/n, 2/n, \dots, 1\}$, usando estas observaciones g puede ser escrita como

$$g = \frac{n^2}{[n^2/2]} \left[\sum_{i=1}^n \left| \frac{p_i}{n} + \frac{q_i}{n} - \frac{(n+1)}{n} \right| - \sum_{i=1}^n \left| \frac{p_i}{n} - \frac{q_i}{n} \right| \right] \frac{1}{n}.$$

Sea $\gamma = 2E[|U + V - 1| - |U - V|]$ la expresión poblacional, si tomamos límite al infinito de la expresión anterior para g , entonces

$$\gamma = 2 \int \int_{I^2} (|u + v - 1| + |u - v|) dC(u, v).$$

El siguiente teorema, nos dice que γ es una medida de asociación.

Teorema 3.4.1 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C .

La versión poblacional de la medida de asociación de Gini γ esta dado por

$$\gamma_C = \gamma_{X,Y} = Q(C, M) + Q(C, W) \quad (3.15)$$

Demostración: Partimos del hecho que para toda u, v en I ,

$$M = \text{mín}(u, v) = \frac{1}{2} [u + v - |u - v|]$$

y que también se cumple que para toda u, v en I ,

$$W = \text{máx}(u + v - 1, 0) = \frac{1}{2} [u + v - 1 + |u + v - 1|],$$

entonces, calculamos

$$Q(C, M) = 4 \int \int_{I^2} M(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} Q(C, M) &= 4 \int \int_{I^2} \frac{1}{2} [u + v - |u - v|] dC(u, v) - 1 \\ &= 2 \int \int_{I^2} [u + v - |u - v|] dC(u, v) - 1 \\ &= 2 \int \int_{I^2} u dC(u, v) + 2 \int \int_{I^2} v dC(u, v) \\ &\quad - 2 \int \int_{I^2} |u - v| dC(u, v) - 1 \\ &= 1 - 2 \int \int_{I^2} |u - v| dC(u, v), \end{aligned}$$

así,

$$Q(C, M) = 1 + 1 - 2 \int \int_{I^2} |u - v| dC(u, v) - 1.$$

y

$$Q(C, W) = \int \int_{I^2} W(u, v) dC(u, v) - 1.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
Q(C, W) &= 4 \int \int_{I^2} \frac{1}{2} [u + v - 1 + |u + v - 1|] dC(u, v) - 1 \\
&= 2 \int \int_{I^2} [u + v - 1 + |u + v - 1|] dC(u, v) - 1 \\
&= 2 \int \int_{I^2} u dC(u, v) + 2 \int \int_{I^2} v dC(u, v) \\
&\quad - 2 \int \int_{I^2} dC(u, v) + 2 \int \int_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 1 \\
&= 1 + 1 - 2 + 2 \int \int_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 1,
\end{aligned}$$

así,

$$Q(C, W) = 2 \int \int_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Q(C, M) + Q(C, W) &= \\
&= 1 - 2 \int \int_{I^2} |u - v| dC(u, v) + 2 \int \int_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 1 \\
&= -2 \int \int_{I^2} |u - v| dC(u, v) + 2 \int \int_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v) \\
&= 2 \int \int_{I^2} |u + v - 1| dC(u, v) - 2 \int \int_{I^2} |u - v| dC(u, v) \\
&= 2 \int \int_{I^2} [|u + v - 1| - |u - v|] dC(u, v) \\
&= \gamma.
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.4.2 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C .
La versión poblacional de la medida de asociación de Gini

$$\gamma = 4 \left[\int_0^1 C(u, 1 - u) du - \int_0^1 (u - C(u, u)) du \right].$$

En 1950, Blomqvist propuso y estudió la probabilidad de discordancia usando las medias poblacionales, esta medida se llama **coeficiente de correlación mediana**.

$$\beta = \beta_{X,Y} = P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0] - P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) < 0], \quad (3.16)$$

donde \tilde{x} y \tilde{y} , son las medianas de X y Y , respectivamente. Si X, Y son variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G respectivamente y cópula C , se cumple que $F(\tilde{x}) = G(\tilde{y}) = 1/2$, entonces

$$\begin{aligned} \beta = \beta_{X,Y} &= 2P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0] - 1 \\ &= 2\{P[X < \tilde{x}, Y < \tilde{y}] + P[X > \tilde{x}, Y > \tilde{y}]\} - 1, \end{aligned}$$

dadas las igualdades,

$$\begin{aligned} P[X > \tilde{x}, Y > \tilde{y}] &= 1 - P[(X \leq \tilde{x}) \cup (Y \leq \tilde{y})] \\ &= 1 - \{P[Y \leq \tilde{y}] + P[X \leq \tilde{x}] - P[X \leq \tilde{x}, Y \leq \tilde{y}]\}, \end{aligned}$$

se sigue

$$\begin{aligned} \beta &= 2\{H(\tilde{x}, \tilde{y}) + [1 - F(\tilde{x}) - G(\tilde{y}) + H(\tilde{x}, \tilde{y})]\} - 1 \\ &= 4H(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1. \end{aligned}$$

Dado que $H(\tilde{x}, \tilde{y}) = C(1/2, 1/2)$, entonces

$$\beta = \beta_C = 4C(1/2, 1/2) - 1.$$

Aunque β depende sólo de los valores en el centro del intervalo I^2 , β puede dar una buena aproximación de τ y ρ .

Ejemplo 1: Sea C_θ , con Θ en $[-1, 1]$, la cópula de la familia Ali-Mikhail-Haq

$$C_\Theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \Theta(1-u)(1-v)},$$

el valor de β para esta familia

$$\beta = \beta_{\Theta} = \frac{\Theta}{4 - \Theta},$$

entonces

$$\Theta = \frac{4\beta}{1 + \beta}.$$

En el libro de Nelsen [13], se obtienen expresiones para el τ_{Θ} y ρ_{Θ}

$$\tau_{\Theta} = \frac{3\Theta - 2}{3\Theta} - \frac{2(1 - \Theta)^2}{3\Theta^2} \ln(1 - \Theta),$$

$$\rho_{\Theta} = \frac{121 + \Theta}{\Theta^2} \operatorname{dilog}(1 - \Theta) - \frac{24(1 - \Theta)}{\Theta^2} \ln(1 - \Theta) - \frac{3(\Theta + 12)}{\Theta},$$

con $\operatorname{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1-t} dt$

Para β entre $[-1/5, 1/3]$, sustituimos $\Theta = 4\beta/(1 + \beta)$ y parametrizamos las expresiones para ρ_{Θ} y τ_{Θ} , obteniendo

$$\rho_{\Theta} = \frac{4}{3}\beta + \frac{44}{75}\beta^3 + \frac{8}{25}\beta^4 + \dots$$

$$\tau_{\Theta} = \frac{8}{9}\beta + \frac{8}{15}\beta^3 + \frac{16}{45}\beta^4 + \dots$$

3.5. Dependencia

Quizás la propiedad más estudiada que se relaciona con la dependencia es precisamente, la ausencia de ésta, es decir, la independencia. En el capítulo anterior hemos visto que si X y Y son dos variables aleatorias con función de distribución conjunta H tales que, X y Y son independientes, entonces su función de distribución conjunta es igual al producto de sus marginales; así pues el conjunto de variables aleatorias continuas que son independientes queda caracterizado por la cópula Π .

Una idea intuitiva de la propiedad de dependencia de cuadrante positivo expresa que los valores grandes (o pequeños) de las variables tienden a ocurrir

juntos, la propiedad de dependencia negativa expresa que valores grandes de una variable se relacionan con valores pequeños de la otra.

Definición 3.5.1 Propiedad de Dependencia de Cuadrante Positivo Sean X, Y variables aleatorias, X, Y tienen dependencia de cuadrante positivo PQD (Positive Quadrant Dependence, por sus siglas en inglés), si para todo (x, y) en \mathbb{R}^2

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y] \quad (3.17)$$

esta expresión es equivalente a

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x] P[Y > y],$$

La propiedad de **Dependencia de Cuadrante Negativo NQD**, se da si para todo (x, y) en \mathbb{R}^2

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x] P[Y \leq y].$$

La equivalencia para la dependencia de cuadrante positivo se comprueba, usando las propiedades de una medida de probabilidad P . Si X y Y son PQD, entonces $P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y]$. Entonces

$$\begin{aligned} P[X > x, Y > y] &= 1 - P[(X \leq x) \cup (Y \leq y)] \\ &= 1 - P[X \leq x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x, Y \leq y] \\ &\geq 1 - P[X \leq x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x] P[Y \leq y] \\ &= (1 - P[X \leq x]) (1 - P[Y \leq y]) \\ &= P[X > x] P[Y > y]. \end{aligned}$$

Así pues, siguiendo las desigualdades, se obtiene el resultado

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x] P[Y > y].$$

Si X y Y son variables aleatorias continuas, con función de distribución

conjunta H , marginales F y G , respectivamente y cópula C , si X, Y son dependientes de cuadrante positivo, entonces la ecuación (3.17) es equivalente a

$$H(x, y) \geq F(x)G(y),$$

y por lo tanto

$$C(u, v) \geq uv = \Pi(u, v).$$

Si X y Y son dependientes de cuadrante positivo, diremos que H o su cópula C son dependientes de cuadrante positivo (PQD), observamos que la gráfica de C siempre se encuentra por arriba de la gráfica de Π , el orden $C \succ \Pi$ es llamado el **orden de cuadrante positivo**.

Ejemplo 1: Existen varias familias de cópulas que tienen subfamilias que son PQD o NQD, según sus parámetros; por ejemplo, la familia Farlie-Gumbel-Morgenstern, dada por la cópula

$$C_{\Theta}(u, v) = uv + \Theta uv(1 - u)(1 - v).$$

La familia Ali-Mikhail-Haq, que tiene cópula

$$C_{\Theta}(u, v) = \frac{uv}{1 - \Theta(1 - u)(1 - v)},$$

en ambas familias se cumple que para $\Theta > 0$ las cópulas son PQD y para $\Theta < 0$ las cópulas son NQD.

Teorema 3.5.2 *Si X, Y son variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H , marginales F y G y cópula C . Si X y Y son PQD, entonces*

$$3\tau_{X,Y} \geq \rho_{X,Y} \geq 0, \quad \gamma_{X,Y} \geq 0, \quad \beta_{X,Y} \geq 0.$$

Demostración: Del hecho que las variables X y Y son PQD entonces $C(u, v) \geq \Pi$, es decir, $C \succ \Pi$ y $\Pi \succ \Pi$ entonces por el Corolario 3.1.2

$$Q(C, \Pi) \geq Q(\Pi, \Pi),$$

por otro dado, $C \succ C$ y $C \succ \Pi$, entonces

$$Q(C, C) \geq Q(C, \Pi),$$

asi pues

$$Q(C, C) \geq Q(C, \Pi) \geq Q(\Pi, \Pi) = 0,$$

es decir,

$$3\tau_{X,Y} \geq \rho_{X,Y} \geq 0,$$

del Corolario 3.4.2 y del hecho que X y Y son PQD, entonces $\gamma_{X,Y} \geq 0$, para la última desigualdad se usa el hecho $C(u, v) \geq \Pi$, entonces en particular $C(1/2, 1/2) \geq 1/4$, asi pues $\beta_{X,Y} = 4C(1/2, 1/2) - 1 \geq 0$. \square

Observamos que si X y Y tienen la propiedad de dependencia de cuadrante positivo, entonces la condición

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y],$$

puede ser interpretada de otra manera, si $P[X \leq x] \neq 0$, dividimos entre ella a la expresión anterior y obtenemos

$$P[Y \leq y | X \leq x] = \frac{P[X \leq x, Y \leq y]}{P[X \leq x]} \geq \frac{P[X \leq x] P[Y \leq y]}{P[X \leq x]} \geq P[Y \leq y],$$

la cual, si X y Y son variables aleatorias continuas, es equivalente

$$\frac{H(x, y)}{F(x)} \geq G(y).$$

Podemos pedir una condición más fuerte, por ejemplo, que $P[Y \leq y | X \leq x]$ sea una función decreciente de X . Si X, Y representan el tiempo de vida, entonces se dice que la probabilidad del tiempo de vida de Y decrece cuando el tiempo de vida X aumenta.

Definición 3.5.3 Sean X, Y variables aleatorias continuas, entonces

1. Y es decreciente de cola izquierda en X ($LTD(Y|X)$), por sus

siglas en inglés *Left Tail Decreasing*), si $P[Y \leq y|X \leq x] = \frac{H(x,y)}{F(x)}$ es una función decreciente de x para cada y .

- II. X es decreciente de cola izquierda en Y ($LTD(X|Y)$), por sus siglas en inglés *Left Tail Decreasing*), si $P[X \leq x|Y \leq y] = \frac{H(x,y)}{G(y)}$ es una función decreciente de y para cada x .
- III. Y es creciente de cola derecha en X ($RTI(Y|X)$), por sus siglas en inglés *Right Tail Increasing*), si $P[Y > y|X > x] = \frac{\bar{H}(x,y)}{\bar{F}(x)}$ es una función creciente de x para cada y .
- IV. X es creciente de cola derecha en Y ($RTI(X|Y)$), por sus siglas en inglés *Right Tail Increasing*), si $P[X > x|Y > y] = \frac{\bar{H}(x,y)}{\bar{G}(y)}$ es una función creciente de y para cada x .

Similarmente hay 4 propiedades adicionales de dependencia negativa, creciente de cola izquierda LTI(left tail increasing) y decreciente de cola derecha RTD(right tail decreasing) que se definen de manera análoga intercambiando las palabras decreciente y creciente en la definición anterior.

Las cuatro definiciones de monotonía de colas para X y Y , implican dependencia de cuadrante positiva. Por ejemplo, si $LTD(Y|X)$, entonces para $x < \infty$

$$P[Y \leq y|X \leq x] \geq P[Y \leq y|X \leq \infty] = P[Y \leq y],$$

entonces, la expresión anterior se expresa como

$$\frac{P[Y \leq y, X \leq x]}{P[X \leq x]} \geq P[Y \leq y],$$

por lo tanto

$$P[Y \leq y, X \leq x] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y],$$

es decir, PQD($Y|X$).

Teorema 3.5.4 Sean X y Y variables aleatorias tales que satisfacen cualquiera de las condiciones de la definición 3.5.3 entonces X y Y son dependientes de cuadrante positivo PQD.

Sin embargo, la dependencia de cuadrante positivo no implica ninguna de las cuatro propiedades de monotonía de colas, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2: *Construcción de una cópula que es PQD, pero no cumple con ninguna de las propiedades de monotonía de colas.* Sea C la suma ordinal de $\{M, W, M\}$ con respecto a la partición $\{[0, \Theta], [\Theta, 1 - \Theta], [1 - \Theta, 1]\}$ para cualquier Θ en $(1/4, 1/2)$; debemos construir una cópula con las características antes mencionadas, entonces necesitamos que la cópula cumpla con la desigualdad $C(u, v) \geq uv$ para todo (u, v) en I^2 y ser el resultado de una combinación de la cópula M , entonces sea

$$C_{\Theta}(u, v) = \begin{cases} A + B \max(u + v - 1, 0), & \text{para } (u, v) \in [\Theta, 1 - \Theta]^2, \\ E + D \min(u + \Theta - 1, v) & \text{para } (u, v) \in [1 - \Theta, 1]^2, \\ M(u, v) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Determinemos las constantes A, B, C, D y cómo cambian u y v en cada intervalo; para este propósito analizamos el soporte de la cópula C_{Θ} .

La cópula C_{Θ} tiene soporte como se muestra en la gráfica.

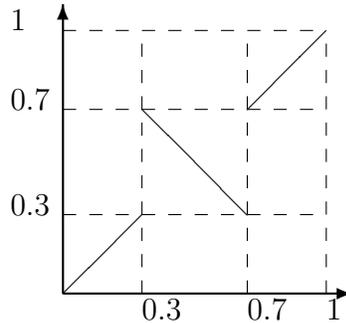


Figura 3.2: Soporte de la cópula C para $\Theta = 0.3$.

Para el primer intervalo $[0, \Theta]^2$ la cópula $\min(u, v)$ permanece igual.

Para el intervalo $[\Theta, 1 - \Theta]^2$ con la cópula C_{Θ} es igual a $A + B \max(u + v - 1, 0)$, debemos determinar las constantes A y B además de un cambio de variables, entonces queremos encontrar una función lineal reescalada $c : [0, 1] \rightarrow [\Theta, 1 - \Theta]$ digamos $c(x) = Bx + A$ de tal manera que $c(0) = \Theta$ y $c(1) = 1 - \Theta$, entonces $\Theta = c(0) = A$ y $1 - \Theta = c(1) = B + \Theta$ implican $A = \Theta$ y

$B = 1 - 2\Theta$, por lo cual $c(x) = (1 - 2\Theta)x + \Theta$; además su inversa esta dada por $c^{-1}(x) = (x - \Theta)/(1 - 2\Theta)$, así pues la cópula en el intervalo es igual

$$C_{\Theta}(u, v) = \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{u - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{v - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right)$$

Para el intervalo $[1 - \Theta, 1]^2$ tenemos que calcular los valores desconocidos de la cópula $C_{\Theta}(u, v) = E + D \min(u, v)$, usamos nuevamente una función lineal $c : [0, 1] \rightarrow [1 - \Theta, 1]$ digamos $C(x) = E + Dx$ de tal manera que $c(0) = 1 - \Theta$ y $c(1) = 1$, entonces $1 - \Theta = c(0) = E$ y $1 = c(1) = D + 1 - \Theta$ implican $E = 1 - \Theta$ y $D = \Theta$, por lo cual $c(x) = (1 - \Theta) + \Theta x$; además su inversa esta dada por $c^{-1}(x) = (x - 1 + \Theta)/\Theta$, así pues la cópula en el intervalo es igual

$$(1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{u - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{v - 1 + \Theta}{\Theta}\right)$$

por lo tanto la cópula finalmente se expresa

$$C_{\Theta}(u, v) = \begin{cases} \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{u - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{v - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right) & (u, v) \in [\Theta, 1 - \Theta]^2, \\ (1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{u - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{v - 1 + \Theta}{\Theta}\right) & (u, v) \in [1 - \Theta, 1]^2, \\ M(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es bastante claro que para el conjunto $I^2 - \{[\Theta, 1 - \Theta]^2, [1 - \Theta, 1]^2\}$, donde la cópula C_{Θ} es igual a $M(u, v)$ se cumple trivialmente la desigualdad $\Pi(u, v) \leq M(u, v)$ dado que M es la cota superior de Fréchet-Hoeffding.

Para el conjunto $[\Theta, 1 - \Theta]^2$ la cópula $C_{\Theta}(u, v) = \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{u - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{v - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right)$, observamos que si $u = v = \Theta$

$$\begin{aligned} C_{\Theta}(\Theta, \Theta) &= \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{\Theta - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{\Theta - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right) \\ &= \Theta \\ &\geq \Theta^2. \end{aligned}$$

Si $u = v = 1 - \Theta$

$$\begin{aligned} C_{\Theta}(1 - \Theta, 1 - \Theta) &= \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{1 - \Theta - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{1 - \Theta - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right) \\ &= \Theta + 1 - 2\Theta \\ &= 1 - \Theta \\ &\geq (1 - \Theta)^2, \end{aligned}$$

el caso en el cual $\Theta < u, v < 1 - \Theta$

$$\begin{aligned} C_{\Theta}(u, v) &= \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{u - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{v - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right) \\ &= \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{u + v - 2\Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right), \end{aligned}$$

analizando los casos posibles, partiendo del hecho $\Theta < u < 1 - \Theta$ y de que $\Theta < v < 1 - \Theta$ se cumplen las desigualdades,

$$2\Theta < u + v < 2 - 2\Theta,$$

restando 2Θ ,

$$0 < u + v - 2\Theta < 2 - 4\Theta = 2(1 - 2\Theta),$$

dado que $1/4 < \Theta < 1/2$, entonces $1/2 < 2\Theta < 1$ lo cual implica $0 < 1 - 2\Theta < 1/2$, así pues dividimos entre $1 - 2\Theta$

$$0 < \frac{u + v - 2\Theta}{1 - 2\Theta} < \frac{2(1 - 2\Theta)}{1 - 2\Theta} = 2,$$

entonces

$$-1 < \frac{u + v - 2\Theta}{1 - 2\Theta} - 1 < 1,$$

si $-1 < \frac{u + v - 2\Theta}{1 - 2\Theta} - 1 \leq 0$, entonces

$$\begin{aligned} C_{\Theta}(u, v) &= \Theta \\ &\geq \Theta^2, \end{aligned}$$

si $0 < \frac{u+v-2\Theta}{1-2\Theta} - 1 < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 C_{\Theta}(u, v) &= \Theta + (1 - 2\Theta) \max\left(\frac{u - \Theta}{1 - 2\Theta} + \frac{v - \Theta}{1 - 2\Theta} - 1, 0\right) \\
 &= \Theta + (1 - 2\Theta) \left(\frac{u + v - 2\Theta}{1 - 2\Theta} - 1\right) \\
 &= \Theta + u + v - 2\Theta - 1 + 2\Theta \\
 &= u + v - 1 + \Theta \\
 &> \Theta > \Theta^2 > uv.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto C_{Θ} es PQD en $[\Theta, 1 - \Theta]^2$.

Para el conjunto $[1 - \Theta, 1]^2$ la cópula

$$C_{\Theta}(u, v) = (1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{u - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{v - 1 + \Theta}{\Theta}\right),$$

observamos que si $u = v = 1 - \Theta$,

$$\begin{aligned}
 C_{\Theta}(1 - \Theta, 1 - \Theta) &= (1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{1 - \Theta - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{1 - \Theta - 1 + \Theta}{\Theta}\right) \\
 &= 1 - \Theta > (1 - \Theta)^2.
 \end{aligned}$$

Si $u = v = 1$

$$\begin{aligned}
 C_{\Theta}(1, 1) &= (1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{1 - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{1 - 1 + \Theta}{\Theta}\right) \\
 &= (1 - \Theta) + \Theta \min(1) \\
 &= 1 \geq 1,
 \end{aligned}$$

si $1 - \Theta < u, v < 1$, entonces

$$C_{\Theta}(u, v) = (1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{u - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{v - 1 + \Theta}{\Theta}\right),$$

para analizar este caso supongamos, sin pérdida de generalidad, que $u < v$

(el caso contrario se analiza similarmente) entonces $\frac{u-1+\Theta}{\Theta} < \frac{v-1+\Theta}{\Theta} < 1$

$$\begin{aligned} C_{\Theta}(u, v) &= (1 - \Theta) + \Theta \min\left(\frac{u - 1 + \Theta}{\Theta}, \frac{v - 1 + \Theta}{\Theta}\right) \\ &= (1 - \Theta) + \Theta \left(\frac{u - 1 + \Theta}{\Theta}\right) \\ &= (1 - \Theta) + u - 1 + \Theta = u \geq uv. \end{aligned}$$

Por lo tanto la cópula C_{Θ} es PQD.

Falta verificar que ninguna de las propiedades de monotonía de colas se cumplen.

Verifiquemos que Y no es decreciente de cola izquierda en X ($LTD(Y|X)$), en efecto, sea $\Theta < v < 1 - \Theta$ fijo, entonces $C(u, v)/u$ es no necesariamente es decreciente para toda u en I . Dado cualquier u en I tal que $\Theta < u < 1 - \Theta$, la cópula evaluada en dichos valores es igual

$$\frac{C_{\Theta}(u, v)}{u} = \begin{cases} \frac{\Theta}{u} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{u+v-1+\Theta}{u} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

derivando

$$\left(\frac{C_{\Theta}(u, v)}{u}\right)' = \begin{cases} -\frac{\Theta}{u^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{1-v-\Theta}{u^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

observamos que la función $\frac{1-v-\Theta}{u^2}$ es una función creciente ya que, del hecho que $v < 1 - \Theta$, obtenemos $1 - v - \Theta > 0$ lo cual implica que la derivada es positiva, y por lo tanto $\frac{C_{\Theta}(u, v)}{u}$ es una función creciente para algunos valores de u .

Verifiquemos que X no es decreciente de cola izquierda en Y ($LTD(X|Y)$), en efecto, sea $\Theta < u < 1 - \Theta$ fijo, entonces $C(u, v)/v$ no necesariamente es decreciente para toda v en I . Dado cualquier v en I tal que $\Theta < v < 1 - \Theta$, la cópula evaluada en dichos valores es igual

$$\frac{C_{\Theta}(u, v)}{v} = \begin{cases} \frac{\Theta}{v} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{u+v-1+\Theta}{v} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

derivando

$$\left(\frac{C_{\Theta}(u, v)}{v}\right)' = \begin{cases} -\frac{\Theta}{v^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{1-u-\Theta}{v^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

observamos que la función $\frac{1-u-\Theta}{v^2}$ es una función creciente ya que, del hecho que $u < 1 - \Theta$, obtenemos $1 - u - \Theta > 0$ lo cual implica que la derivada es positiva, y por lo tanto $\frac{C_{\Theta}(u, v)}{v}$ es una función creciente para un subconjunto de I .

Verifiquemos que Y no es creciente de cola derecha en X ($\text{RTI}(Y|X)$), en efecto, sea $\Theta < v < 1 - \Theta$ fijo, entonces $1 - u - v + C(u, v)/(1 - u)$ no necesariamente es creciente para toda u en I . Dado cualquier u en I tal que $\Theta < u < 1 - \Theta$, la cópula evaluada en dichos valores es igual

$$\frac{1 - u - v + C_{\Theta}(u, v)}{1 - u} = \begin{cases} \frac{1-u-v+\Theta}{1-u} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{\Theta}{1-u} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

derivando

$$\left(\frac{C_{\Theta}(u, v)}{u}\right)' = \begin{cases} \frac{\Theta-v}{(1-u)^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{\Theta}{(1-u)^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

observamos que dado que $\Theta < v$ la función $\frac{\Theta-v}{(1-u)^2}$ es decreciente, y por lo tanto no se cumple la propiedad $\text{RTI}(Y|X)$.

Verifiquemos que X no es creciente de cola derecha en Y ($\text{RTI}(X|Y)$), en efecto, sea $\Theta < u < 1 - \Theta$ fijo, entonces $1 - u - v + C(u, v)/(1 - v)$ no necesariamente es creciente para toda v en I . Dado cualquier v en I tal que $\Theta < v < 1 - \Theta$, la cópula evaluada en dichos valores es igual

$$\frac{1 - u - v + C_{\Theta}(u, v)}{1 - v} = \begin{cases} \frac{1-u-v+\Theta}{1-v} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{\Theta}{1-v} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

derivando

$$\left(\frac{C_{\Theta}(u, v)}{1 - v}\right)' = \begin{cases} \frac{\Theta-u}{(1-v)^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 \leq 0, \\ \frac{\Theta}{(1-v)^2} & \text{si } \frac{u-\Theta}{1-2\Theta} + \frac{v-\Theta}{1-2\Theta} - 1 > 0, \end{cases}$$

observamos que dado que $\Theta < u$ la función $\frac{\Theta-u}{(1-v)^2}$ es decreciente, y por lo tanto no se cumple la propiedad $RTI(Y|X)$.

Teorema 3.5.5 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces

- I. $LTD(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I , $C(u, v)/u$ es decreciente en u .
- II. $LTD(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I , $C(u, v)/v$ es decreciente en v .
- III. $RTI(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I , $[1 - u - v + C(u, v)] / (1 - u)$ es creciente en u , es equivalente, si $[v - C(u, v)] / (1 - u)$ es decreciente en u .
- IV. $RTI(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I , $[1 - u - v + C(u, v)] / (1 - v)$ es creciente en v , es equivalente, si $[u - C(u, v)] / (1 - v)$ es decreciente en v .

Éste Teorema es consecuencia directa de la definición 3.5.3.

Corolario 3.5.6 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces

- I. $LTD(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I , $\partial C(u, v) / \partial u \leq C(u, v) / u$ para casi toda u .
- II. $LTD(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I , $\partial C(u, v) / \partial v \leq C(u, v) / v$ para casi toda v .
- III. $RTI(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I ,

$$\partial C(u, v) / \partial u \geq [v - C(u, v)] / (1 - u)$$

para casi toda u .

iv. $RTI(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I ,

$$\partial C(u, v)/\partial v \geq [u - C(u, v)]/(1 - v)$$

para casi toda v .

Demostración: Sólo demostraremos el primer caso, los demás se demuestran de manera similar. Si X, Y son $LTD(Y|X)$, por el Teorema 3.5.5 la función $C(u, v)/u$ es creciente en u , por lo tanto su derivada es positiva, es decir,

$$\frac{C(u, v) - u\partial C(u, v)/\partial u}{u^2} \geq 0,$$

entonces,

$$C(u, v) - u\partial C(u, v)/\partial u \geq 0,$$

por lo tanto

$$\frac{C(u, v)}{u} \geq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u},$$

para casi toda u . □

Teorema 3.5.7 Sean X, Y variables aleatorias continuas, si $LTI(Y|X)$ y $RTD(Y|X)$, entonces $\rho_{X,Y} \geq \tau_{X,Y} \geq 0$ (se tiene el mismo resultado si $LTI(X|Y)$ y $RTD(X|Y)$).

Para ver la demostración de este Teorema se puede consultar [3]. La dependencia de cuadrante positivo de X y Y no es una condición suficiente para que la desigualdad $\rho_{X,Y} \geq \tau_{X,Y} \geq 0$ se cumpla, como lo demuestra el siguiente.

Ejemplo 3: Sean U, V variables aleatorias cuya función de distribución conjunta es la cópula construida de la diagonal $\delta(t) = t^2$, es decir, $C(u, v) = \min(u, v, (u^2 + v^2)/2)$. Dado que $u \leq 1, v \leq 1$ y $0 \leq u^2 - 2uv + v^2$, entonces, $uv \leq u, uv \leq v$ y $uv \leq (u^2 + v^2)/2$, entonces las variables U y V son dependientes de cuadrante positivo (PQD). Sin embargo, se puede verificar

que U no es decreciente de cola izquierda en V , sean

$$\begin{aligned}
 P[U \leq 1/2 | V \leq 1/2] &= \frac{C(1/2, 1/2)}{C(1, 1/2)} \\
 &= \frac{\text{mín}(1/2, 1/2, (1/2)^2 + (1/2)^2/2)}{\text{mín}(1, 1/2, 1 + (1/2)^2)/2} \\
 &= \frac{\text{mín}(1/2, 1/4)}{\text{mín}(1/2, 5/4)} \\
 &= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 P[U \leq 1/2 | V \leq \sqrt{3}/2] &= \frac{C(1/2, \sqrt{3}/2)}{C(1, \sqrt{3}/2)} \\
 &= \frac{\text{mín}(1/2, \sqrt{3}/2, (1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2/2)}{\text{mín}(1, \sqrt{3}/2, 1 + (\sqrt{3}/2)^2)/2} \\
 &= \frac{\text{mín}(1/2, \sqrt{3}/2)}{\text{mín}(1, \sqrt{3}/2, 7/8)} \\
 &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

entonces, observamos que $1/2 < \sqrt{3}/2$, sin embargo, $\frac{C(1/2, 1/2)}{C(1, 1/2)} = 1/2 < \sqrt{3}/3 = \frac{C(1/2, \sqrt{3}/2)}{C(1, \sqrt{3}/2)}$ lo cual muestra que la función $C(u, v)/v$ no es decreciente. Aun mas, V no es creciente de cola derecha en U , sean

$$\begin{aligned}
 P[U > 1/2 | V > 1/2] &= \frac{1 - 1/2 - 1/2 + C(1/2, 1/2)}{1 - 1/2} \\
 &= \frac{\text{mín}(1/2, 1/2, (1/2)^2 + (1/2)^2/2)}{1 - 1/2} \\
 &= \frac{\text{mín}(1/2, 1/4)}{1/2} \\
 &= \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
P[U > 1/2 | V > 1 - \sqrt{3}/2] &= \frac{1 - 1/2 - 1 + \sqrt{3}/2 + C(1/2, \sqrt{3}/2)}{1 - 1 + \sqrt{3}/2} \\
&= \frac{-1/2 + \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} \\
&\quad + \frac{\min(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{(1/2)^2 + (1 - \sqrt{3}/2)^2}{2})}{\sqrt{3}/2} \\
&= \frac{-1/2 + \sqrt{3}/2 + 1 - \sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/2} \\
&= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

entonces, observamos que $1 - \sqrt{3}/2 < 1/2$, sin embargo, $P[U > 1/2 | V > 1/2] \leq P[U > 1/2 | V > 1 - \sqrt{3}/2]$ lo cual muestra que la función $C(u, v)/v$ no es creciente. Por simetría, V no es decreciente de cola izquierda en U , tampoco V es decreciente de cola derecha en U ; así pues no se cumplen las condiciones del Teorema 3.5.7, entonces

$$\begin{aligned}
\tau &= 4 \int_0^1 \delta(t) dt - 1 = 4 \int_0^1 t^2 dt - 1 \\
&= 4 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 - 1 = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\rho &= 12 \int \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \\
&= 5 - \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

entonces $\tau > \rho = 5 - \frac{3\pi}{2} \approx 0.287$.

Otro caso de estudio para las propiedades de monotonía es considerar la probabilidad $P[Y > y | X = x]$ conocida como **Monotonía Estocástica**.

Definición 3.5.8 Sean X y Y variables aleatorias,

- I. Y es **estocásticamente creciente** en X , lo denotaremos $SI(Y|X)$, por sus siglas en inglés *Stochastically Increasing*, si $P[Y > y|X = x]$ es una función creciente de x para toda y .
- II. X es **estocásticamente creciente** en Y , lo denotaremos $SI(X|Y)$, por sus siglas en inglés *Stochastically Increasing*, si $P[X > x|Y = y]$ es una función creciente de y para toda x .

Las propiedades de dependencia negativa $SD(Y|X)$, Y es **estocásticamente decreciente** en X , y $SD(X|Y)$, X es **estocásticamente decreciente** en Y , se definen de manera análoga.

Ejemplo 4: Suponga que X y Y son variables aleatorias con distribución bivariada exponencial Marshall-Olkin H , esta familia representa la distribución exponencial bivariada con parámetros λ_1 , λ_2 y λ_{12} , también juega un papel en los procesos de Poisson en dos dimensiones, su función de supervivencia $\bar{H}(x, y)$ representa la probabilidad que el primer evento sobreviva mas allá de determinado tiempo x y que el segundo evento sobreviva mas allá de determinado tiempo y , ésto se expresa

$$\bar{H}(x, y) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y + \lambda_{12} \min(x, y)}.$$

La probabilidad de supervivencia condicional $P[Y > y|X = x]$, puede ser calculada a partir de \bar{H} tomado las densidades de los eventos, de la siguiente manera

$$P[Y > y|X = x] = \frac{P[Y > y, X = x]}{P[X = x]},$$

entonces

$$\frac{P[Y > y, X = x]}{P[X = x]} = \frac{\frac{\partial \bar{H}(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial \bar{F}(x)}{\partial x}},$$

dado que $\bar{F}(x) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}$

$$\frac{P[Y > y, X = x]}{P[X = x]} = \frac{\frac{\partial e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y + \lambda_{12} \min(x, y)}}{\partial x}}{\frac{\partial e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}}{\partial x}}$$

la derivada de numerador depende de que valor toma x

$$P[Y > y|X = x] = \begin{cases} \frac{-\lambda_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y + \lambda_{12}x}}{-(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}} & \text{si } x \leq y, \\ \frac{-(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - \lambda_2 y}}{-(\lambda_1 + \lambda_{12})e^{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x}} & \text{si } x > y, \end{cases}$$

reduciendo terminos

$$P[Y > y|X = x] = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_{12}} e^{(-\lambda_{12}(y-x) - \lambda_2 y)} & \text{si } x \leq y, \\ e^{(-\lambda_{12}y)} & \text{si } x > y, \end{cases}$$

Observamos que esta probabilidad condicional de supervivencia es creciente para x , por lo tanto, Y es estocásticamente creciente en X , es decir, $SI(Y|X)$.

Teorema 3.5.9 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces

- I. $SI(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I y para casi toda u , la parcial $\partial C(u, v)/\partial u$ es decreciente en u .
- II. $SI(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I y para casi toda v , la parcial $\partial C(u, v)/\partial v$ es decreciente en v .

Demostración: Partimos de hecho $SI(Y|X)$, entonces $P[Y > y|X = x]$ es creciente en x , entonces

$$P[Y > y|X = x] = 1 - P[Y \leq y|X = x]$$

es creciente, se sigue que

$$-P[Y > y|X = x] = -1 + P[Y \leq y|X = x]$$

es decreciente, por lo tanto $P[Y \leq y|X = x]$ es decreciente, esto sucede si y sólo si $P[V \leq v|U = u]$ es decreciente, en la ecuación (1.13) se muestra que

$$P[V \leq v|U = u] = \frac{\partial}{\partial u} C(u, v)$$

que es decreciente como función de u . □

Roberts y Varberg [15] dan una interpretación geométrica de la propiedad de monotonía estocástica.

Teorema 3.5.10 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces

- I. $SI(Y|X)$ si y sólo si para cualquier v en I , $C(u, v)$ es una función cóncava de u .
- II. $SI(X|Y)$ si y sólo si para cualquier u en I , $C(u, v)$ es una función cóncava de v .

Ejemplo 5: Sea C_Θ la cópula de la familia Plackett

$$C_\Theta(u, v) = \frac{[1 + (\Theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\Theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1)}}{2(\Theta - 1)}$$

Calculemos la segunda derivada de C_Θ , usemos $A = 1 + (\Theta - 1)(u + v)$, entonces

$$C_\Theta(u, v) = \frac{[A] - \sqrt{[A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1)}}{2(\Theta - 1)}$$

la parcial de A con respecto de u

$$\frac{\partial A}{\partial u} = (\Theta - 1),$$

la segunda parcial de A , con respecto de u

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} = 0,$$

la primer derivada de C_Θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\Theta(u, v)}{\partial u} &= \frac{\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{[A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1)}}{2(\Theta - 1)} \\ &= \frac{1}{2(\Theta - 1)} \left\{ \frac{\partial A}{\partial u} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2(\Theta - 1)} 1/2 ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{-1/2} \\ &\quad \cdot (2A\partial A/\partial u - 4v\Theta(\Theta - 1)), \end{aligned}$$

la segunda derivada de C_Θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_\Theta(u, v)}{\partial u^2} &= \frac{1}{4(\Theta - 1)} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{2A\partial A/\partial u - 4v\Theta(\Theta - 1)}{([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{1/2}} \right] \\ &= \frac{(-4(\partial A/\partial u)^2 - 4A\partial^2 A/\partial u^2) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))}{8(\Theta - 1) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\ &\quad + \frac{(2A\partial A/\partial u - 4v\Theta(\Theta - 1))^2}{8(\Theta - 1) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\ &= \frac{(-4(\partial A/\partial u)^2) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))}{8(\Theta - 1) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\ &\quad + \frac{(2A\partial A/\partial u - 4v\Theta(\Theta - 1))^2}{8(\Theta - 1) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}}, \end{aligned}$$

dato que $\frac{\partial^2 A}{\partial u^2} = 0$; ahora en la última expresión, sustituimos los valores de la derivada $\frac{\partial A}{\partial u}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_\Theta(u, v)}{\partial u^2} &= \frac{(-4(\Theta - 1)^2) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))}{8(\Theta - 1) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\ &\quad + \frac{(2A(\Theta - 1) - 4v\Theta(\Theta - 1))^2}{8(\Theta - 1) ([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-4A^2(\Theta - 1)^2 + 16uv\Theta(\Theta - 1)^3 + 4A^2(\Theta - 1)^2}{8(\Theta - 1)([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\
&\quad - \frac{16Av\Theta(\Theta - 1)^2 - 16v^2\Theta^2(\Theta - 1)^2}{8(\Theta - 1)([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\
&= \frac{16v\Theta(\Theta - 1)^2 \{v\Theta + u(\Theta - 1) - 1 - (\Theta - 1)(u + v)\}}{8(\Theta - 1)([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\
&= \frac{16v\Theta(\Theta - 1)^2 \{-1 + v\}}{8(\Theta - 1)([A]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}} \\
&= \frac{-2v\Theta(\Theta - 1)(1 - v)}{([1 + (\Theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\Theta(\Theta - 1))^{3/2}},
\end{aligned}$$

Observamos que para $\Theta > 1$, $\frac{\partial^2 C_\Theta(u,v)}{\partial u^2} < 0$, por lo cual la cópula $C_\Theta(u, v)$ es una función cóncava de u para $\Theta > 1$; entonces Y es estocásticamente creciente en X , $SI(Y|X)$ (por simetría también $SI(X|Y)$) para $\Theta > 1$.

Teorema 3.5.11 sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C

- I. Si $SI(Y|X)$ entonces $LTD(Y|X)$ y $RTI(Y|X)$.
- II. Si $SI(X|Y)$ entonces $LTD(X|Y)$ y $RTI(X|Y)$.

Definición 3.5.12 Sean X y Y variables aleatorias

- I. sean X y Y son **crecientes de conjunto de esquina izquierda**, $LCSD(X, Y)$ (de las siglas en inglés *left corner set decreasing*), si

$$P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$$

es decreciente en x' y y' para toda x y y .

- II. sean X y Y son **crecientes de conjunto de esquina derecha**, $RCSI(X, Y)$ (de las siglas en inglés *right corner set increasing*), si

$$P[X > x, Y > y | X > x', Y > y']$$

es creciente en x' y y' para toda x y y .

Las propiedades de dependencia negativa $LCSI(X, Y)$ (left corner set increasing) y $RCSL(X, Y)$ (right corner set decreasing) se definen de manera análoga.

Teorema 3.5.13 Sean X y Y variables aleatorias continuas

- I. si $LCSD(X, Y)$, entonces $LTD(Y|X)$ y $LTD(X|Y)$.
- II. si $RCSI(X, Y)$, entonces $RTI(Y|X)$ y $RTI(X|Y)$.

Demostración: Partimos de que se cumple que las variables X y Y son $LCSD(X, Y)$, entonces la probabilidad

$$P[X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y']$$

es una función decreciente en x' y y' para toda x y y ; en particular para $x = \infty$ y $y' = \infty$, entonces

$$P[X \leq \infty, Y \leq y | X \leq x', Y \leq \infty] = P[Y \leq y | X \leq x']$$

es una función decreciente de x' para toda y , así Y es decreciente de cola izquierda con respecto a X , $LTD(Y|X)$. Para comprobar la otra parte del inciso I, se usa $y = \infty$ y $x' = \infty$, entonces

$$P[X \leq x, Y \leq \infty | X \leq \infty, Y \leq y] = P[X \leq x | Y \leq y]$$

es una función decreciente de y' para toda x , así X es decreciente de cola izquierda con respecto a Y $LTD(Y|X)$. La parte II se demuestra de manera similar. \square

El siguiente teorema nos da un criterio para determinar las propiedades $LCSD(X, Y)$ y $RCSI(X, Y)$ en términos de desigualdades que involucra las funciones de distribución conjunta y las funciones de distribución conjuntas de supervivencia.

Teorema 3.5.14 Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H

- I. $LCSD(X, Y)$, si y sólo si

$$H(x, y)H(x', y') \geq H(x, y')H(x', y)$$

para toda x, y, x' y y' en $\bar{\mathbb{R}}$ tales que $x < x'$ y $y < y'$

- II. $RCSI(X, Y)$, si y sólo si

$$\bar{H}(x, y)\bar{H}(x', y') \geq \bar{H}(x, y')\bar{H}(x', y)$$

para toda x, y, x' y y' en $\bar{\mathbb{R}}$ tales que $x < x'$ y $y < y'$.

El criterio del Teorema 3.5.14 puede ser expresado usando el concepto de las funciones **totalmente positivas de orden dos** denotado por TP_2 , sea $f : \bar{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ entonces f es totalmente positiva de orden dos si $f(x, y) \geq 0$ en $\bar{\mathbb{R}}$ y para $x \leq x'$ y $y \leq y'$

$$\begin{vmatrix} f(x, y) & f(x, y') \\ f(x', y) & f(x', y') \end{vmatrix} \geq 0.$$

Si la desigualdad se invierte, entonces diremos que f es **reversamente regular de orden dos** abreviada de su expresión en inglés reverse regular of order two RR_2 .

Corolario 3.5.15 Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H ; entonces $LCSD(X, Y)$ si y sólo si H es TP_2 , y $RCSI(X, Y)$ si y sólo si \bar{H} es TP_2 .

Corolario 3.5.16 Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C , entonces $LCSD(X, Y)$ si y sólo si C es TP_2 y $RCSI(X, Y)$ si y sólo si \hat{C} es TP_2 .

De los Teoremas 3.5.5, 3.5.11 y 3.5.13 se establecen las implicaciones que se ilustran en la tabla (3.18)

$$\begin{array}{ccccc}
 SI(Y|X) & \Rightarrow & RTI(Y|X) & \Leftarrow & RCSI(X, Y) \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 LTD(Y|X) & \Rightarrow & PQD(X, Y) & \Leftarrow & RTI(X|Y) \\
 \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 LCSD(X, Y) & \Rightarrow & LTD(X|Y) & \Leftarrow & SI(X|Y).
 \end{array} \tag{3.18}$$

3.5.1. Medidas de Dependencia

En la sección (3.2), la propiedad IV de la definición 3.2.2 de medidas de concordancia, nos señala que dadas dos variables aleatorias independientes, entonces la medida de concordancia de éstas es igual a cero, pero la implicación inversa no es cierta, dado que podemos encontrar ejemplos donde la medida de concordancia es cero pero las variables no son independientes, es por esto que se define la medida de asociación o dependencia, como sigue

Definición 3.5.17 *Una medida δ , $\delta_{X,Y}$ o δ_C de asociación entre dos variables aleatorias continuas X y Y con cópula C es una **medida de dependencia**, si satisface las siguientes propiedades:*

- I. $\delta_{X,Y}$ esta definida para cada par de variables continuas X y Y .
- II. $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$.
- III. $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.
- IV. $\delta_{X,Y} = 0$ si y sólo si X y Y son independientes.
- V. $\delta_{X,Y} = 1$ si y sólo si para cada X y Y , alguna de las variables es una función estrictamente monótona casi seguramente de la otra.
- VI. si α y β son funciones estrictamente monótonas sobre $RanX$ y $RanY$ respectivamente, entonces $\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}$.

- VII. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ es una sucesión de variables aleatorias con cópulas C_n , y si la sucesión $\{C_n\}$ converge puntualmente a C , entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{C_n} = \delta_C$.

Cuando enunciamos en la sección (3.2) la definición de medida de concordancia, ya hacíamos notar que las condiciones V a VII no son indispensables para definir una medida de concordancia; en este caso opinamos lo mismo, recordando las propiedades que debe satisfacer una medida en un espacio métrico nos parece más adecuado que la medida de dependencia cumpla sólo con los cuatro primeros incisos, creemos en la necesidad de una definición más clásica, que cualquier medida debe cumplir condiciones menos restrictivas, por ejemplo, en el inciso III de la definición de medida de dependencia en vez de exigir que la medida esté entre los valores cero y uno, podríamos pedir que sea no negativa y finita, es decir, que esté acotada.

Por ejemplo, podemos pensar en una medida de dependencia basada en la métrica discreta.

Ejemplo 1: Sea

$$\delta_{X,Y} = \begin{cases} 0 & \text{si } X, Y \text{ son independientes,} \\ 1 & \text{si } X, Y \text{ son dependientes.} \end{cases}$$

Verificamos que esta métrica cumple con las propiedades de I a IV, en efecto:

- I. Es obvio que $\delta_{X,Y}$ esta definida para cualesquiera X, Y variables aleatorias.
- II. Si X, Y variables aleatorias son independientes, entonces $\delta_{X,Y} = 0 = \delta_{Y,X}$, si X, Y variables aleatorias son dependientes, entonces $\delta_{X,Y} = 1 = \delta_{Y,X}$.
- III. Es claro que para todas X, Y variables aleatorias $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$.
- IV. Por definición $\delta_{X,Y} = 0$ si y sólo si X, Y son variables aleatorias independientes.

Sin embargo, por la definición, no podemos hablar de monotonía de funciones de acuerdo a la métrica discreta, ni de convergencia puntual, entonces ninguna de las propiedad V, VI y VII se cumplen.

Un ejemplo clásico de medida de dependencia se construye a través de la rho de Spearman, recordemos como esta definida

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 12 \int \int_{I^2} [C(u,v) - uv] dudv.$$

ρ_C es proporcional al volumen contenido entre la gráfica de la cópula y la cópula Π ; si a la expresión $[C(u,v) - uv]$ la sustituimos por $|C(u,v) - uv|$, entonces obtenemos una medida basada en la distancia L_1 entre las gráficas de las cópulas C y Π , esta medida es conocida como σ de Schweizer y Wolff [17].

$$\sigma_{X,Y} = 12 \int \int_{I^2} |C(u,v) - uv| dudv.$$

Teorema 3.5.18 Sean X, Y variables aleatorias continuas con cópula C ; entonces la cantidad σ_C es una medida de dependencia, es decir, que satisface las siete propiedades de la definición (3.5.17).

Demostración: Verificamos que la métrica

$$\sigma_{X,Y} = 12 \int \int_{I^2} |C(u,v) - uv| dudv,$$

cumple con las propiedades de I a IV, en efecto:

- I. Es obvio que $\sigma_{X,Y}$ esta definida para cualesquiera X, Y variables aleatorias.
- II. Dadas X, Y variables aleatorias arbitrarias, entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{X,Y} &= 12 \int \int_{I^2} |C(u,v) - uv| dudv \\ &= 12 \int \int_{I^2} |C(v,u) - vu| dvdu = \sigma_{Y,X}. \end{aligned}$$

- III. Se ha demostrado que para todas X, Y variables aleatorias la rho de spearman cumple $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ y $|C(v, u) - uv| \geq 0$ entonces, $0 \leq \sigma_{X,Y} \leq 1$.
- IV. $\sigma_{X,Y} = 0$ si y sólo si $12 \int \int_{I^2} |C(u, v) - uv| dudv = 0$, es decir, si y sólo si $|C(u, v) - uv| = 0$ si y sólo si $C(u, v) = uv = \Pi(u, v)$ es decir, si X y Y son independientes.

La demostración de las propiedades restantes pueden ser consultadas en el libro de Nelsen [13]. \square

Antes de analizar algunos ejemplos mas debemos observar algunas implicaciones que son mas o menos inmediatas, por ejemplo, si las variables aleatorias X, Y son PQD, entonces $C(u, v) \geq uv$ así, $0 \leq \rho_{X,Y} = \sigma_{X,Y}$. Si las variables aleatorias X, Y son NQD entonces $C(u, v) \leq uv$ por lo tanto $0 \leq uv - C(u, v) = -(C(u, v) - uv)$, entonces $\sigma_{X,Y} = -\rho_{X,Y}$. Para muchas familias como la Plackett, la Farlie-Gumbel-Morgenstern y muchas familias de cópulas Arquimedianas $\sigma_{X,Y} = |\rho_{X,Y}|$; sin embargo, para aquellas variables aleatorias X, Y que no son NQD ni PQD, es decir, para aquellas cópulas que no pueden ser comparables con Π , σ frecuentemente es una mejor medida que ρ , como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2: Sean X, Y variables aleatorias con función de distribución Circular Uniforme.

$$C(u, v) = \begin{cases} M(u, v) & \text{si } |u - v| > 1/2, \\ W(u, v) & \text{si } |u + v - 1| > 1/2, \\ \frac{u+v}{2} - \frac{1}{4} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

la cópula C es simétrica, satisface $C = \hat{C}$ y satisface las ecuaciones

$$C(u, v) = u - C(u, 1 - v)$$

y

$$C(u, v) = v - C(1 - u, v)$$

para todo (u, v) en I^2 . Se puede demostrar que si una cópula cumple alguna de las ecuaciones anteriores entonces

$$\tau = \rho = \beta = \gamma = 0.$$

Es claro que aunque $\rho = 0$, las variables X y Y no son independientes, por lo tanto la medida de dependencia $\sigma_{X,Y}$ será positiva.

$$\sigma_{X,Y} = \frac{3}{4}.$$

Como ya mencionaban Schweizer y Wolff [17], una medida que normaliza adecuadamente la distancia entre las superficies $z = C(u, v)$ y $z = uv$ estaría dada por una distancia L_P , ésta podría darnos una medida simétrica y no paramétrica de la propiedad de dependencia para cualquier P , tal que $1 \leq P < \infty$, la distancia L_P entre la cópula C y la Π esta dada por

$$\left[k_p \int \int_{I^2} |C(u, v) - uv|^p \right]^{1/p},$$

donde k_p es aquella constante que normaliza la medida, se puede demostrar que esta medida cumple con todas las propiedades de la definición 3.5.17 de medidas de dependencia. Por ejemplo, para $p = 2$

$$\Phi_{X,Y} = \Phi = \left[90 \int \int_{I^2} |C(u, v) - uv|^2 \right]^{1/2},$$

el cuadrado de esta medida de dependencia $\Phi_{X,Y}^2$ es llamado **índice de dependencia**.

3.5.2. Cópulas Empíricas

Existen versiones muestrales de las medidas de asociación que hemos estudiado en secciones anteriores. Ésto podría servir para modelar una cópula en base a una determinada muestra.

Definición 3.5.19 Sea $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^k$ una muestra de tamaño n de una función de distribución continua bivariada. La **cópula empírica** es la función

C_n dada por

$$C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \frac{\text{número de pares } (x, y) \text{ en la muestra, tales que } x \leq x_{(i)}, y \leq y_{(j)}}{n}$$

donde, $x_{(i)}$ y $y_{(j)}$ denotan las estadísticas de orden de la muestra. La **frecuencia empírica de la cópula** c_n está dada por

$$c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \begin{cases} 1/n & \text{si } (x_{(i)}, y_{(j)}) \text{ es un elemento de la muestra,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que C_n y c_n estan relacionadas mediante las ecuaciones

$$C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right), \quad (3.19)$$

y

$$\begin{aligned} c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) &= C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n} \right) \\ &\quad - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \right) + C_n \left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Las cópulas empíricas fueron estudiadas por primera vez por Dehuevels [5] en (1979) a las cuales llamó **funciones de dependencia empírica**.

En la ecuación 3.19 observamos que si definimos a la cópula empírica en los puntos $C_n(\frac{i}{n}, \frac{0}{n}) = 0 = C_n(\frac{0}{n}, \frac{i}{n})$ para $i = 1, \dots, n$, entonces tenemos que la cópula empírica es una subcópula, como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.5.20 Sea $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^k$ una muestra de tamaño n de una función de distribución continua bivariada y sea C_n la cópula empírica, tal como en la definición 3.5.19, y con la propiedad adicional $C_n(\frac{i}{n}, \frac{0}{n}) = 0 = C_n(\frac{0}{n}, \frac{i}{n})$ para $i = 1, \dots, n$, entonces la cópula empírica es una subcópula.

Demostración: La cópula empírica es subcópula pues cumple:

- I. $DomC_n = S_1 \times S_2$, donde $S_1 = S_2 = \left\{ \frac{0}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}$ para $i = 1, \dots, n$ son subconjuntos de I que contienen al 0 y al 1.
- II. C_n está fija, en efecto, por la ecuación (3.19), $C\left(\frac{i}{n}, \frac{0}{n}\right) = 0 = C\left(\frac{0}{n}, \frac{i}{n}\right)$ para $i = 1, \dots, n$.

Primero observemos que $c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = \frac{1}{n}$ o $c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = 0$, entonces,

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^j c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \geq 0$$

Tomemos $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ y $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$, entonces el volumen de C_n en el conjunto $k = [i_1, i_2] \times [j_1, j_2]$

$$\begin{aligned} V_{C_n}(K) &= C_n\left(\frac{i_2}{n}, \frac{j_2}{n}\right) - C_n\left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_2}{n}\right) \\ &\quad - C_n\left(\frac{i_2}{n}, \frac{j_1}{n}\right) + C_n\left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_1}{n}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{i_2} \sum_{q=0}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) - \sum_{p=0}^{i_1} \sum_{q=0}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \\ &\quad - \sum_{p=0}^{i_2} \sum_{q=0}^{j_1} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) + \sum_{p=0}^{i_1} \sum_{q=0}^{j_1} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{i_2} \left[\sum_{q=0}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) - \sum_{q=0}^{j_1} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \right] \\ &\quad - \sum_{p=0}^{i_1} \left[\sum_{q=0}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) - \sum_{q=0}^{j_1} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{p=0}^{i_2} \left[\sum_{q=j_1+1}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \right] - \sum_{p=0}^{i_1} \left[\sum_{q=j_1+1}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \right] \\ &= \sum_{p=i_1+1}^{i_2} \left[\sum_{q=j_1+1}^{j_2} c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) \right] \geq 0 \end{aligned}$$

III. Si $i = \{0, 1, \dots, n\}$,

$$C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{n}{n} \right) = \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^n c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) = \frac{i}{n}$$

$$C_n \left(\frac{n}{n}, \frac{i}{n} \right) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^i c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) = \frac{i}{n},$$

ya que en cada columna y cada renglón se tiene una única entrada $c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) = \frac{1}{n}$ ver figura 3.3.

Ejemplo: Daremos un ejemplo para el caso en que tenemos cuatro muestras, sean $(1.78, 5.6)$, $(10.1, -2.2)$, $(-3.1, 6)$, $(2.2, -3.4)$, determinamos la estadística de orden de cada una de ellas, entonces

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= -3.1 = x_3, & y_{(1)} &= -3.4 = y_4 \\ x_{(2)} &= 1.78 = x_1, & y_{(2)} &= -2.2 = y_2 \\ x_{(3)} &= 2.2 = x_4, & y_{(3)} &= 5.6 = y_1 \\ x_{(4)} &= 10.1 = x_2, & y_{(4)} &= 6 = y_3, \end{aligned}$$

así pues, la muestra queda etiquetada según su estadística de orden como sigue:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (x_{(2)}, y_{(3)}), & (x_2, y_2) &= (x_{(4)}, y_{(2)}) \\ (x_3, y_3) &= (x_{(1)}, y_{(4)}), & (x_4, y_4) &= (x_{(3)}, y_{(1)}), \end{aligned}$$

La frecuencia empírica de la cópula es diferente de cero, sólo para los puntos $(\frac{1}{4}, \frac{4}{4})$, $(\frac{2}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{4}{4}, \frac{2}{4})$

Los valores de la subcópula empírica en los 25 puntos es

$$\begin{aligned} C_4 \left(\frac{0}{4}, \frac{1}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{2}{4}, \frac{1}{4} \right) &= 0 \\ C_4 \left(\frac{0}{4}, \frac{2}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{2}{4}, \frac{2}{4} \right) &= 0 \\ C_4 \left(\frac{0}{4}, \frac{3}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right) &= \frac{1}{4} \\ C_4 \left(\frac{0}{4}, \frac{4}{4} \right) &= 0 & C_4 \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{4} \right) &= \frac{1}{4} & C_4 \left(\frac{2}{4}, \frac{4}{4} \right) &= \frac{2}{4} \end{aligned}$$

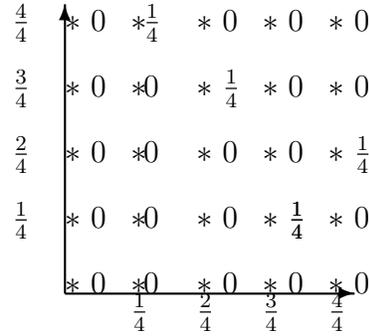


Figura 3.3: Valores de la frecuencia empírica de la subcópula C_4 .

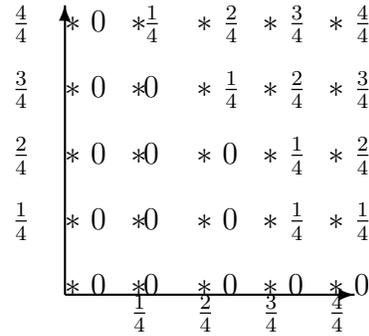


Figura 3.4: Valores de la subcópula empírica C_4 .

$$\begin{array}{lll}
 C_4\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} & C_4\left(\frac{4}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} & C_4\left(\frac{1}{4}, \frac{0}{4}\right) = 0 \\
 C_4\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{4}\right) = \frac{1}{4} & C_4\left(\frac{4}{4}, \frac{2}{4}\right) = \frac{2}{4} & C_4\left(\frac{2}{4}, \frac{0}{4}\right) = 0 \\
 C_4\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{2}{4} & C_4\left(\frac{4}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} & C_4\left(\frac{4}{4}, \frac{4}{4}\right) = 0 \\
 C_4\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right) = \frac{3}{4} & C_4\left(\frac{4}{4}, \frac{4}{4}\right) = \frac{4}{4} & C_4\left(\frac{4}{4}, \frac{0}{4}\right) = 0 \\
 & C_4\left(\frac{0}{4}, \frac{0}{4}\right) = 0 &
 \end{array}$$

Así, la cópula empírica queda definida.

Las versiones poblacionales de las medidas ρ de Spearman, la τ de Kendall y la γ de Gini se representan mediante

$$\rho = 12 \int \int_{I^2} [C(u, v) - uv] dudv,$$

$$\tau = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{v'} \int_0^{u'} [c(u, v)c(u', v') - c(u, v')c(u', v)] dudvdu'dv'$$

y

$$\gamma = 4 \left[\int_0^1 C(u, 1-u) du - \int_0^1 [u - C(u, u)] du \right]$$

El siguiente da versiones de las medidas de dependencia en términos de las cópulas empíricas.

Teorema 3.5.21 Sean C_n y c_n la cópula empírica y la función de frecuencia respectivamente, para la muestra $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. Si r , t y g denotan las versiones muestrales del rho de Spearman, la tau de Kendall y la gamma de Gini, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{12}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \right] \\ t &= \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \sum_{p=0}^{i-1} \sum_{q=0}^{j-1} \left[c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right) - c_n \left(\frac{i}{n}, \frac{q}{n} \right) c_n \left(\frac{p}{n}, \frac{j}{n} \right) \right] \\ g &= \frac{2n}{n^2/2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} C_n \left(\frac{i}{n}, 1 - \frac{i}{n} \right) - \sum_{i=1}^n \left[\frac{i}{n} - C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{i}{n} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Para ver la demostración de este teorema, se sugiere consultar el libro de Nelsen [13].

Capítulo 4

Una Prueba de Simetría

En este capítulo nos avocaremos a estudiar algunos resultados publicados en los últimos años acerca de las cópulas empíricas y las propiedades de dependencia. Iniciaremos con un artículo de Roger B. Nelsen [14]

4.1. Extremos de no intercambiabilidad

Un par de variables aleatorias X, Y son intercambiables si poseen la misma función de distribución y los vectores (X, Y) y (Y, X) tienen la misma distribución conjunta, digamos que H denota la función de distribución conjunta.

Cuando X, Y no son intercambiables $H(x, y) \neq H(y, x)$, para algún x, y ; el supremo de $|H(x, y) - H(y, x)|$ puede ser usado como una medida de no intercambiabilidad de las variables X y Y , esta cantidad puede ser igual a uno. Extremos de no intercambiabilidad es equivalente a máxima asimetría.

Si X y Y son variables aleatorias idénticamente distribuidas, el conjunto de valores $|H(x, y) - H(y, x)|$ para los números reales x y y es el mismo que para el conjunto de valores $|C(u, v) - C(v, u)|$ para u y v en I , donde C denota la cópula de X y Y .

C^T representa la **transpuesta** de C definida como $C^T(u, v) = C(v, u)$.

Las dos cópulas siguientes juegan un papel muy importante en el tema de la

intercambiabilidad.

$$C_1(u, v) = \min(u, v, (u - 2/3)^+ + (v - 1/3)^+) \quad (4.1)$$

$$C_2(u, v) = \max(0, u + v - 1, 1/3 - (1/3 - u)^+ - (2/3 - v)^+). \quad (4.2)$$

Con $x^+ = \max(x, 0)$, el soporte de C_1 está dado por las dos rectas que unen los puntos $(0, 1/3)$ con $(2/3, 1/3)$ y la recta que une los puntos $(2/3, 0)$ con $(1, 1/3)$ y de C_2 el soporte está dado por tres rectas que son aquellas que unen los puntos $(0, 2/3)$ con $(1/3, 1/3)$, $(1/3, 1)$ con $(2/3, 2/3)$ y $(2/3, 1/3)$ con $(1, 0)$.

Observamos que los soportes de C_1 y C_2 son:

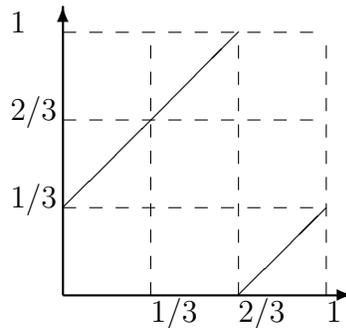


Figura 4.1: Soporte de la cópula C_1 .

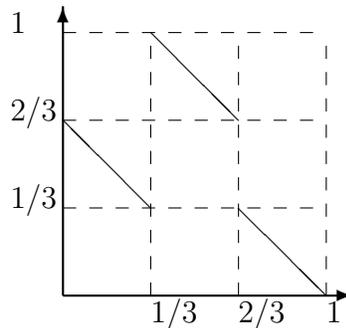


Figura 4.2: Soporte de la cópula C_2 .

Se demuestra que C_1 y C_2 son una combinación o barajeo de M , en inglés

shuffle, para mayor referencia se recomienda consultar el libro de Nelsen [13], de hecho,

$$C_1 = M(2, \{[0, 2/3], [2/3, 1]\}, (2, 1), 1) \quad (4.3)$$

y

$$C_2 = M(3, \{[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]\}, (3, 1, 2), -1) \quad (4.4)$$

El lema siguiente, muestra que la cantidad $|C(u, v) - C(v, u)|$ tiene una cota superior igual a $1/3$.

Lema 4.1.1 *para cada cópula C y cualquier u, v en I ,*

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq \min(u, v, 1 - u, 1 - v, |u - v|) \quad (4.5)$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u \leq v$, así pues, tenemos que demostrar que

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq \min(u, 1 - v, v - u)$$

Notemos que $|C(u, v) - C(v, u)| \leq \max(C(u, v), C(v, u)) \leq u$ y también se cumple la desigualdad $C(u, v) - C(v, u) \leq u - C(v, u) \leq 1 - v$, donde la última desigualdad se cumple dado que el volumen

$$\begin{aligned} V_C([v, 1] \times [u, 1]) &= C(v, u) - C(v, 1) - C(1, u) + C(1, 1) \\ &= C(v, u) - v - u + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Del volumen

$$\begin{aligned} V_C([u, 1] \times [v, 1]) &= C(u, v) - C(u, 1) - C(1, v) + C(1, 1) \\ &= C(u, v) - u - v + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

se cumple $C(v, u) - C(u, v) \leq u - C(u, v) \leq 1 - v$, así pues,

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq 1 - v.$$

Por último, se cumple la desigualdad $C(u, v) - C(v, u) \leq C(u, v) - C(u, u) \leq v - u$, la última desigualdad se cumple debido al volumen

$$\begin{aligned} V_C([u, 1] \times [u, v]) &= C(u, u) - C(1, u) - C(u, v) + C(1, v) \\ &= C(u, u) - u - C(u, v) + v \geq 0. \end{aligned}$$

De la misma manera debido al volumen

$$\begin{aligned} V_C([u, v] \times [u, 1]) &= C(u, u) - C(u, 1) - C(v, u) + C(v, 1) \\ &= C(u, u) - u - C(v, u) + v \geq 0, \end{aligned}$$

se justifica la desigualdad $C(u, v) - C(v, u) \leq C(u, v) - C(u, u) \leq v - u$. Entonces,

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq v - u.$$

Así, se concluye con la demostración, el otro caso, $v \leq u$ se demuestra de manera análoga. \square

La gráfica de la función $z = \min(u, 1 - v, v - u)$, para (u, v) tales que $0 \leq u \leq v \leq 1$, satisface las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 - v &= v - u \\ 1 - v &= u \\ u &= v - u, \end{aligned}$$

resolviendo el sistema, entonces $(u, v) = (1/3, 2/3)$, y $z = \min(1/3, 1 - 2/3, 2/3 - 1/3) = 1/3$.

La gráfica de $z = \min(u, 1 - v, v - u)$ consiste en las caras superiores de un tetrahedro cuya base en el plano u, v es el triángulo $0 \leq u \leq v \leq 1$ y vértice en el punto $(1/3, 2/3, 1/3)$. Existe el resultado análogo para $z = \min(v, 1 - u, u - v)$ con $0 \leq v \leq u \leq 1$, así,

$$\min(u, v, 1 - u, 1 - v, |u - v|) \leq 1/3.$$

Aun mas, las cópulas C_1 y C_2 , cumplen

$$\begin{aligned}
C_1(1/3, 2/3) - C_1(2/3, 1/3) &= \text{mín}(1/3, 2/3, (1/3 - 2/3)^+ \\
&\quad + (2/3 - 1/3)^+ \\
&\quad - \text{mín}(2/3, 1/3, (2/3 - 2/3)^+ \\
&\quad + (1/3 - 1/3)^+) \\
&= \text{mín}(1/3, 1/3) - \text{mín}(1/3, 0) = 1/3.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
C_2(1/3, 2/3) - C_2(2/3, 1/3) &= \text{máx}(0, 1/3 + 2/3 - 1, 1/3 \\
&\quad - (1/3 - 1/3)^+ - (2/3 - 2/3)^+) \\
&\quad - \text{máx}(0, 2/3 + 1/3 - 1, 1/3 \\
&\quad - (1/3 - 2/3)^+ - (2/3 - 1/3)^+) \\
&= \text{máx}(0, 1/3) - \text{máx}(0, 0) = 1/3.
\end{aligned}$$

Lo cual prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.1.2 *Para cualquier cópula C ,*

$$\sup_{u,v \in I} |C(u, v) - C(v, u)| \leq 1/3, \quad (4.6)$$

y esta desigualdad es la mejor posible.

Corolario 4.1.3 *Dada cualquier función bivariada H , con marginales idénticas,*

$$\sup_{x,y \in (-\infty, \infty)} |H(x, y) - H(y, x)| \leq 1/3,$$

y esta desigualdad es la mejor posible.

Definición 4.1.4 *Sea C una cópula, el grado de no intercambiabilidad de C , denotado por $\delta(C)$, está dado por*

$$\delta(C) = 3 \sup_{u,v \in I} |C(u, v) - C(v, u)|. \quad (4.7)$$

El grado de no intercambiabilidad de una cópula puede ser visto como una medida de asimetría dado que $\delta(C) = 0$ si y sólo si $C = C^T$.

Ejemplo 1: Sean $\{C_{\alpha,\beta}\}$ una familia de cópulas asimétricas dadas por

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = uv + uv(1-u)(1-v)[\alpha + (\beta - \alpha)v(1-u)]$$

con $|\alpha| \leq 1$, $(1/2)[\alpha - 3 - (9 + 6\alpha - 3\alpha^2)^{1/2}] \leq \beta \leq 1$ y $\alpha \neq \beta$, la cantidad $|C_{\alpha,\beta}(u, v) - C_{\alpha,\beta}(v, u)|$ alcanza el valor máximo de $|\alpha - \beta| \sqrt{5}/125$ en los puntos $(u, v) = ((5 - \sqrt{5})/10, (5 + \sqrt{5})/10)$ y $((5 + \sqrt{5})/10, (5 - \sqrt{5})/10)$, evaluando en el grado de no intercambiabilidad,

$$\delta(C_{\alpha,\beta}) = 3|\alpha - \beta| \sqrt{5}/125.$$

Los valores de α, β que maximizan $|\alpha - \beta|$ son respectivamente, 1 y $-1 - \sqrt{3}$; entonces el miembro de esta familia con el grado de no intercambiabilidad máximo está determinado por la cópula $C_{1, -1 - \sqrt{3}}$ con $\delta(C_{1, -1 - \sqrt{3}}) \cong 0.20$

Ejemplo 2: Sean $\{C_{\Theta}\}$ la familia de cópulas asimétricas dadas por

$$C_{\Theta}(u, v) = \min\left(u, \frac{\Theta}{1 - \Theta}v + \frac{1 - 2\Theta}{1 - \Theta}(u + v - 1)^+\right)$$

para Θ en el intervalo $[0, 1/2]$.

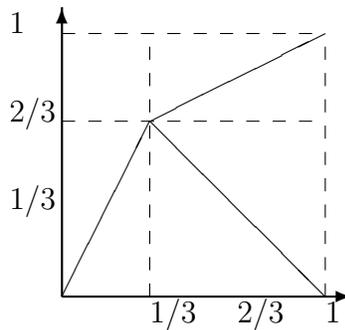


Figura 4.3: Soporte de la cópula C_{Θ} , para $\Theta = 1/3$.

Cada miembro de esta familia es singular, con masa de probabilidad Θ uni-

formemente distribuida en la línea que une $(0, 0)$ con $(\Theta, 1 - \Theta)$ y sobre el segmento de línea que une $(\Theta, 1 - \Theta)$ con $(1, 1)$ y masa $1 - 2\Theta$ uniformemente distribuida en el segmento que une $(\Theta, 1 - \Theta)$ con $(1, 0)$. Note que $C_0 = W(u, v)$ y que $C_{1/2} = M(u, v)$.

Para los miembros de esta familia la cantidad $|C_\Theta(u, v) - C_\Theta(v, u)|$ alcanza su valor máximo $\Theta(1 - 2\Theta)/(1 - \Theta)$, en los puntos $(u, v) = (\Theta, 1 - \Theta)$ y $(1 - \Theta, \Theta)$, el valor de Θ que maximiza $\Theta(1 - 2\Theta)/(1 - \Theta)$ está dado por el siguiente análisis.

$$\begin{aligned} (\Theta(1 - 2\Theta)/(1 - \Theta))' &= \frac{(1 - \Theta)(1 - 2\Theta - 2\Theta) + \Theta(1 - 2\Theta)}{(1 - \Theta)^2} \\ &= \frac{2\Theta^2 - 4\Theta + 1}{(1 - \Theta)^2} \end{aligned}$$

El cual tiene puntos críticos cuando $2\Theta^2 - 4\Theta + 1 = 0$, las raíces de esta ecuación son $1 \pm \sqrt{2}/2$, dado que Θ debe estar en el intervalo $[0, 1/2]$, entonces el valor máximo para $\Theta(1 - 2\Theta)/(1 - \Theta)$ se encuentra en el valor $\Theta = 1 - \sqrt{2}/2$.

Entonces el miembro de esta familia con el grado mayor de no intercambiabilidad es $C_{1 - \sqrt{2}/2}$, con $\delta(C_{1 - \sqrt{2}/2}) = 3(3 - \sqrt{2})/2 \cong 0.515$.

Si X y Y son variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas con cópula C , entonces X y Y son intercambiables si y sólo si $\delta(C) = 0$, en el otro extremo tenemos:

Definición 4.1.5 *Si X y Y son variables aleatorias continuas idénticamente distribuidas con cópula C y $\delta(C) = 1$, entonces X y Y son **no intercambiables maximales** y C se llama **cópula no intercambiable maximal**.*

Observe que las cópulas C_1 y C_2 son no intercambiables maximalmente, analizaremos a continuación propiedades de estas cópulas.

4.2. Cópulas y Variables Aleatorias no Intercambiables Maximales.

Sean \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_3 y \mathbf{C}_4 los conjuntos de cópulas:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1 &= \{C \mid C(2/3, 1/3) = 0\}, \\ \mathbf{C}_2 &= \{C \mid C(1/3, 2/3) = 1/3\}, \\ \mathbf{C}_3 &= \{C \mid C(1/3, 2/3) = 0\}, \\ \mathbf{C}_4 &= \{C \mid C(2/3, 1/3) = 1/3\},\end{aligned}$$

notamos que los conjuntos \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_4 son disjuntos, que \mathbf{C}_2 y \mathbf{C}_3 son disjuntos. Una cópula C está en \mathbf{C}_1 (\mathbf{C}_2) si y sólo si C^T está en \mathbf{C}_3 (\mathbf{C}_4); las cópulas C_1 , C_2 están en $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$.

Con éstos cuatro conjuntos podemos describir el conjunto de cópulas no intercambiables maximalmente, hallar las cotas para dichos conjuntos y examinar una medida de asociación para las variables aleatorias no intercambiables maximales.

Teorema 4.2.1 *Sea \mathbf{C} el conjunto de cópulas no intercambiables maximales, es decir, $\mathbf{C} = \{C \mid \delta(C) = 1\}$, entonces*

- (a) $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2) \cup (\mathbf{C}_3 \cap \mathbf{C}_4)$, es decir, C pertenece a \mathbf{C} si y sólo si $C(1/3, 2/3) = 1/3$ y $C(2/3, 1/3) = 0$ o $C(1/3, 2/3) = 0$ y $C(2/3, 1/3) = 1/3$
- (b) Para cada C en \mathbf{C} , C pertenece a $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$ si y sólo si $C_2 \prec C \prec C_1$ y C pertenece a $\mathbf{C}_3 \cap \mathbf{C}_4$ si y sólo si $C_2^T \prec C \prec C_1^T$, donde \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 se definen en (4.1) y (4.2).
- (c) Cada cópula no intercambiable maximal tiene la misma sección diagonal $C(u, u)$, es decir, para cada C en \mathbf{C} , $C(u, u) = (u - 1/3)^+ + (u - 2/3)^+$.

Demostración: Iniciamos la demostración del inciso (a), si $\delta(C) = 1$ entonces existe un punto, digamos (u_0, v_0) en I^2 tal que $u_0 \leq v_0$ para el

cual $C(u_0, v_0) - C(v_0, u_0) = 1/3$ o $C(v_0, u_0) - C(u_0, v_0) = 1/3$, solo demostraremos el primer caso ya que el otro se demuestra de manera análoga, demostraremos que C pertenece a $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$; suponemos que se cumple la igualdad $C(u_0, v_0) - C(v_0, u_0) = 1/3$, entonces por las ecuaciones (4.5) y (4.6) se tiene que $\min(u_0, 1 - v_0, u_0 - v_0) = 1/3$ y entonces por la observación del Lema 4.1.1 $(u_0, v_0) = (1/3, 2/3)$, entonces $C(1/3, 2/3) - C(2/3, 1/3) = 1/3$, por otro lado dado que $C(1/3, 2/3) \leq 1/3$ y $C(2/3, 1/3) \geq 0$, entonces $C(1/3, 2/3) = 1/3$ y $C(2/3, 1/3) = 0$, por lo tanto C está en $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$.

(b) Sea C en \mathbf{C} y supongamos que $C_2 \prec C \prec C_1$, entonces $C(1/3, 2/3) = 1/3$ y $C(2/3, 1/3) = 0$, así pues C está en $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$; para demostrar la otra parte supongamos que C está en $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$, sabemos por la ecuación (4.3) que C_1 es un barajeo o shuffle de M y por el Teorema 3.2.2 del libro de Nelsen [13] C_1 es una cota superior del conjunto \mathbf{C}_1 , pero C_1 es un elemento tanto de \mathbf{C}_1 como de \mathbf{C}_2 , entonces también es una cota superior para el conjunto $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$, similarmente C_2 es un barajeo o shuffle de M y por el Teorema 3.2.2 del libro de Nelsen [13] C_2 es una cota inferior del conjunto \mathbf{C}_2 , pero C_2 es un elemento tanto de \mathbf{C}_1 como de \mathbf{C}_2 , entonces también es una cota inferior para el conjunto $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$. El caso C en el conjunto $\mathbf{C}_3 \cap \mathbf{C}_4$ se demuestra de manera similar.

(c) Sea C en $(\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2)$; dado que $C_1(u, u) = C_2(u, u) = (u - 1/3)^+ + (u - 2/3)^+$ y en el inciso anterior se mostró que C_1 es una cota superior y C_2 es una cota inferior, entonces $C(u, u) = (u - 1/3)^+ + (u - 2/3)^+$. Un resultado similar se cumple para C en $(\mathbf{C}_3 \cap \mathbf{C}_4)$ dado que $C^T(u, u) = C(u, u)$. \square

Note que, como consecuencia del Teorema 4.2.1, una tercera parte de la masa de probabilidad asociada a cualquier cópula no intercambiable maximal en el conjunto $(\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2)$ está contenido en los cuadrados $[0, 1/3] \times [1/3, 2/3]$, $[1/3, 2/3] \times [2/3, 1]$ y $[2/3, 1] \times [0, 1/3]$, otro tercio de la masa de probabilidad asociada a cualquier cópula no intercambiable maximal en el conjunto $(\mathbf{C}_3 \cap \mathbf{C}_4)$ está contenido en los cuadrados $[0, 1/3] \times [2/3, 1]$, $[1/3, 2/3] \times [0, 1/3]$ y $[2/3, 1] \times [1/3, 2/3]$.

A diferencia de las variables aleatorias intercambiables, si X, Y son variables aleatorias no intercambiables maximales se sabe que deben estar correla-

cionadas negativamente, en el sentido de la rho de Spearman con

$$\rho_{X,Y} = \rho(C) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u,v) dudv - 3.$$

Corolario 4.2.2 Sean X, Y variables aleatorias continuas no intercambiables maximales; si $\rho_{X,Y}$ denota la rho de Spearman para X y Y entonces, $\rho_{X,Y}$ pertenece al intervalo $[-5/9, -1/3]$.

Otras medidas de asociación, como el coeficiente de correlación mediana de Blomqvist, dado por $\beta(C) = 4C(1/2, 1/2) - 1$, para cualquier par de variables aleatorias no intercambiables maximales $\beta(C)$ es igual a

$$\begin{aligned} \beta(C) &= 4 [(1/2 - 1/3)^+ + (1/2 - 2/3)^+] - 1 \\ &= 4 [1/6] - 1 = -1/3. \end{aligned}$$

Sin embargo, si usamos otra medida de asociación las variables aleatorias no intercambiables maximales pueden estar positivamente correlacionadas.

Sea $\tau(C)$ la version poblacional de la la tau de Kendall dada por

$$\tau_C = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} dudv.$$

Por el Teorema 4.2.1, dado que $C \prec C'$, entonces $\tau(C) \leq \tau(C')$ y $\tau(C) = \tau(C^T)$ y dado que $\tau(C_1) = 1/9$ y $\tau(C_2) = -5/9$, entonces cuando X, Y son variables aleatorias continuas no intercambiables maximales $\tau_{X,Y}$ está en el intervalo $[-5/9, 1/9]$.

Para terminar, hacemos unas observaciones, el grado de intercambiabilidad $\delta(C)$ definido en (4.7) es una distancia normalizada en L_∞ entre las gráficas $z = C(u,v)$ y $z = C(v,u)$, desearíamos establecer una medida de no intercambiabilidad, por ejemplo, en L_p , con $1 \leq p < \infty$, dada por

$$\left(k_p \int_0^1 \int_0^1 |C(u, v) - C(v, u)|^p \right)^{1/p},$$

donde k_p es la constante que normaliza la distancia.

Existen otras medidas de asimetría, por ejemplo, Una cópula C es **radialmente simétrica** si $C(u, v) = \hat{C}(u, v)$ para todo u, v en I , donde \hat{C} denota la cópula de supervivencia asociada a C , definida en 1.10, es decir, $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$; entonces la cantidad $|C(u, v) - \hat{C}(u, v)|$ mide la asimetría radial.

Usando un análisis análogo al empleado en la sección de Extremos de no Intercambiabilidad para probar

$$\left| C(u, v) - \hat{C}(u, v) \right| \leq \min(u, v, 1 - u, 1 - v, \max(|u - v|, |u + v - 1|)),$$

y la parte derecha de la desigualdad alcanza un máximo de $1/3$ en los puntos $(1/3, 1/3)$, $(1/3, 2/3)$, $(2/3, 1/3)$ y $(2/3, 2/3)$; igual que en el caso de no intercambiabilidad

$$\sup_{u, v \in I} \left| C(u, v) - \hat{C}(u, v) \right| \leq 1/3,$$

y la mejor desigualdad posible, dado que $\sup_{u, v \in I} |C_1(u, v) - \hat{C}_1(u, v)| = \sup_{u, v \in I} |C_2(u, v) - \hat{C}_2(u, v)| = 1/3$, entonces las cópulas que alcanzan su máximo valor en esta medida que podemos llamar **grado de asimetría radial** definido de manera análoga que en (4.7), puede ser estudiado.

4.3. Una Prueba no Paramétrica para Cópu- las Bivariadas Absolutamente Continuas.

Esta sección esta basada en el artículo de Erdely A. y González-Barrios, J.M. [8] (2010), en dicho artículo se define y estudia el concepto de *trismetría* de una cópula bivariada, enuncia algunos ejemplos de cópulas trisimétricas y estudia la relación del concepto de asimetría extrema o no intercambiabilidad máxima y el de trismetría.

Teorema 4.3.1 *La medida*

$$\delta(C) = 3 \sup_{u,v \in I} |C(u,v) - C(v,u)|,$$

definida en (4.7), cumple con las propiedades:

- I. $\delta(C) = 0$ si y sólo si C es una cópula intercambiable o simétrica.
- II. Para cualquier cópula C , $0 \leq \delta(C) \leq 1$.
- III. C es una cópula maximal no intercambiable o asimétrica extrema si y sólo si $\delta(C) = 1$.
- IV. Por el teorema 4.1.2, el valor de $\delta(C) = 1$ para cópulas no intercambiables maximales o asimétricamente extremas se alcanza en el punto $(u,v) = (1/3, 2/3)$ o en el punto $(u,v) = (2/3, 1/3)$.

La demostración de este teorema es consecuencia directa de las observaciones de las propiedades del valor absoluto, la definición de δ y el Teorema 4.2.1.

Ahora, procederemos a enunciar la construcción de una familia de cópulas absolutamente continuas, las cuales incluyen a cópulas no intercambiables maximales y también a la cópula Π .

Sea $0 \leq \epsilon \leq 6$ se define la función

$$c_\epsilon(u,v) = \begin{cases} \epsilon/6 & \text{si } (u,v) \in I_1 \cup I_2 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_9 \\ 3 - \epsilon/3 & \text{si } (u,v) \in I_3 \cup I_4 \cup I_8, \end{cases} \quad (4.8)$$

con $I_1 = (0, 1/3] \times (0, 1/3]$, $I_2 = (1/3, 2/3] \times (0, 1/3]$, $I_3 = (2/3, 1] \times (0, 1/3]$,
 $I_4 = (0, 1/3] \times (1/3, 2/3]$, $I_5 = (1/3, 2/3] \times (1/3, 2/3]$, $I_6 = (2/3, 1] \times (1/3, 2/3]$,
 $I_7 = (0, 1/3] \times (2/3, 1]$, $I_8 = (1/3, 2/3] \times (2/3, 1]$ e $I_9 = (2/3, 1] \times (2/3, 1]$.

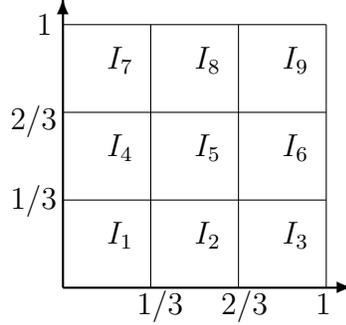


Figura 4.4: Regiones I_1, \dots, I_9 definidos en (4.8) para la función de densidad c_ϵ , correspondiente a la cópula C_ϵ .

Entonces c_ϵ es una función Borel medible no negativa y además esta acotada. Definimos para (u, v) en el intervalo I^2 , la cópula $C_\epsilon(u, v) := \int_0^v \int_0^u c_\epsilon(s, t) ds dt$, integrando y simplificando obtenemos

$$C_\epsilon(u, v) =$$

$$\begin{cases} uv \frac{\epsilon}{6} & \text{si } (u, v) \in I_1 \cup I_2 \\ v \frac{\epsilon}{9} + (v - \frac{2}{3})v(3 - \frac{\epsilon}{3}) & \text{si } (u, v) \in I_3 \\ u \frac{\epsilon}{18} + u(v - \frac{1}{3})(3 - \frac{\epsilon}{3}) & \text{si } (u, v) \in I_4 \\ u \frac{\epsilon}{18} + (v - \frac{1}{3})(1 - \frac{\epsilon}{9} + (u - \frac{1}{3})\frac{\epsilon}{6}) & \text{si } (u, v) \in I_5 \\ \frac{\epsilon}{27} + (u - \frac{2}{3})(1 - \frac{\epsilon}{9}) + (v - \frac{1}{3})(1 - \frac{\epsilon}{9} + (u - \frac{1}{3})\frac{\epsilon}{6}) & \text{si } (u, v) \in I_6 \\ u(1 - \frac{\epsilon}{18} + (v - \frac{2}{3})\frac{\epsilon}{6}) & \text{si } (u, v) \in I_7 \\ u \frac{\epsilon}{9} + \frac{1}{3} - \frac{\epsilon}{18} + (v - \frac{2}{3})(\frac{\epsilon}{18} + (u - \frac{1}{3})(3 - \frac{\epsilon}{3})) & \text{si } (u, v) \in I_8 \\ u(1 - \frac{\epsilon}{18}) + \frac{\epsilon}{18} - \frac{1}{3} + (v - \frac{2}{3})(1 - \frac{\epsilon}{18} + (u - \frac{2}{3})\frac{\epsilon}{6}) & \text{si } (u, v) \in I_9. \end{cases}$$

Verificamos que C_ϵ es una cópula.

I. $Dom C_\epsilon = I$.

II. Comprobamos que C_ϵ está fija y es 2-creciente.

Si $(u, 0)$ está en $I_1 \cup I_2$ $C_\epsilon(u, 0) = 0$, si $(u, 0)$ está en I_3 entonces $C_\epsilon(u, 0) = 0$.

Para $(0, v)$, si $(0, v)$ está en I_1 , $C_\epsilon(0, v) = 0$; si $(0, v)$ está en I_4 , $C_\epsilon(0, v) = 0$; si $(0, v)$ está en I_7 , $C_\epsilon(0, v) = 0$.

Por lo tanto C_ϵ está fija.

C_ϵ es dos creciente; dado que $c_\epsilon \geq 0$, entonces para cada u_1, u_2, v_1, v_2 en I tal que $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ sea $B = [u_1, v_1] \times [u_2, v_2]$, por definición $C_\epsilon(u, v) := \int_0^v \int_0^u c_\epsilon(s, t) ds dt \geq 0$ por las propiedades de la integral C_ϵ es creciente, por lo tanto

$$V_C(B) = C_\epsilon(u_2, v_2) - C_\epsilon(u_2, v_1) - C_\epsilon(u_1, v_2) + C_\epsilon(u_1, v_1) \geq 0.$$

Por lo tanto C_ϵ es 2-creciente.

III. Para todo $u \in I_i$ y $v \in I_k$ con $i, k = \{1, \dots, 9\}$,

$$C_\epsilon(u, 1) = u \quad \text{y} \quad C_\epsilon(1, v) = v.$$

Afirmamos que $C_6(u, v) = \Pi = uv$ para todo u, v en I , dado que $c_6 = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} st = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} C_\Pi(s, t) = 1$ para cada (s, t) en I^2 , es decir, C_6 es la cópula producto Π .

Si $\epsilon = 0$

$$C_\epsilon(u, v) =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } (u, v) \in I_1 \cup I_2 \\ (v - \frac{2}{3})v(3) & \text{si } (u, v) \in I_3 \\ u(v - \frac{1}{3})(3) & \text{si } (u, v) \in I_4 \\ (v - \frac{1}{3}) & \text{si } (u, v) \in I_5 \\ (u - \frac{2}{3}) + (v - \frac{1}{3}) & \text{si } (u, v) \in I_6 \\ u & \text{si } (u, v) \in I_7 \\ \frac{1}{3} + (v - \frac{2}{3})((u - \frac{1}{3})(3)) & \text{si } (u, v) \in I_8 \\ u - \frac{1}{3} + (v - \frac{2}{3}) & \text{si } (u, v) \in I_9. \end{cases}$$

Sea $0 \leq \epsilon \leq 6$, si definimos

$$c'_\epsilon(u, v) = \begin{cases} \epsilon/6 & \text{si } (u, v) \in I_1 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_8 \cup I_9 \\ 3 - \epsilon/3 & \text{si } (u, v) \in I_2 \cup I_6 \cup I_7, \end{cases}$$

con $I_1 \dots, I_9$ definidos anteriormente, si definimos para (u, v) en el intervalo I^2 , la cópula $C'_\epsilon(u, v) := \int_0^v \int_0^u c'_\epsilon(s, t) ds dt$ entonces la cópula $C'_\epsilon(u, v)$ es la versión simétrica de la cópula $C_\epsilon(u, v)$; como es de esperarse para C'_ϵ , cuan-

do $\epsilon = 0$, C'_ϵ es una cópula no intercambiable maximal o extremadamente asimétrica.

Se calcula y se pueden comprobar las igualdades

$$\begin{aligned} C_\epsilon(2/3, 1/3) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\epsilon}{6} \\ &= \frac{\epsilon}{27} = C'_\epsilon(1/3, 2/3), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_\epsilon(1/3, 2/3) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\epsilon}{18} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3 - \frac{\epsilon}{3}\right) \\ &= \frac{\epsilon}{54} + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9 - \epsilon}{3}\right) = \frac{\epsilon}{54} + \frac{1}{3} - \frac{\epsilon}{27} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\epsilon}{54} = C'_\epsilon(2/3, 1/3), \end{aligned}$$

entonces para $\epsilon = 0$, según C_0 pertenece al conjunto $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$ y C'_0 pertenece al conjunto $\mathbf{C}_3 \cap \mathbf{C}_4$ esto, por el Teorema 4.2.1.

Calculamos la medida de no intercambiabilidad definida en la ecuación (4.7)

$$\delta(C_\epsilon) = 3 |C_\epsilon(2/3, 1/3) - C_\epsilon(1/3, 2/3)| = 1 - \frac{\epsilon}{6},$$

y

$$\delta(C'_\epsilon) = 3 |C'_\epsilon(2/3, 1/3) - C'_\epsilon(1/3, 2/3)| = 1 - \frac{\epsilon}{6}.$$

Dada una cópula C , por el Teorema 4.2.1, el valor de la expresión

$$|C(2/3, 1/3) - C(1/3, 2/3)|,$$

determina si la cópula C es intercambiable maximal o es asimétricamente extrema. En la siguiente proposición se prueba un resultado general que involucra esta cantidad.

Proposición 4.3.2 *Sea $C(u, v)$ una cópula asociada al vector aleatorio (U, V)*

con marginales uniformes $(0, 1)$, tal que

$$|C(2/3, 1/3) - C(1/3, 2/3)| = 0. \quad (4.9)$$

Definimos I_j , $j = 1, 2, \dots, 9$, como en (4.8), sean $p_j = P(\{(U, V) \in I_j\})$, para $j = 1, \dots, 9$, entonces

$$p_2 = p_4, \quad p_3 = p_7 \quad \text{y} \quad p_6 = p_8.$$

Demostración: Sea C una cópula, suponemos que (4.9) se cumple. Dado que C es una función de distribución del vector aleatorio (U, V) con marginales uniformes $(0, 1)$, entonces para cada (u, v) en I^2 ,

$$C(u, v) = P(\{(U, V) \in (0, u] \times (0, v]\}).$$

Observamos que los intervalos $(0, 2/3] \times (0, 1/3] = I_1 \cup I_2$ y $(0, 1/3] \times (0, 2/3] = I_1 \cup I_4$ y los conjuntos I_j son disjuntos a pares, entonces

$$0 = |C(2/3, 1/3) - C(1/3, 2/3)| = |P(I_1 \cup I_2) - P(I_1 \cup I_4)| = |p_2 - p_4|,$$

entonces $p_2 = p_4$.

Por propiedades de las cópulas $C(1, 1/3) = C(1/3, 1) = 1/3$, entonces $1/3 = p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + p_4 + p_7$, entonces $p_2 + p_3 = p_4 + p_7$, entonces $p_3 = p_7$. Para terminar, observamos lo siguiente

$$\begin{aligned} p_8 + p_9 &= P(\{(U, V) \in (1/3, 1] \times (2/3, 1]\}) \\ &= C(1, 1) - C(1/3, 1) - C(2/3, 1) + C(1/3, 2/3) \\ &= 1 - 1/3 - 2/3 + C(1/3, 2/3), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} p_6 + p_9 &= P(\{(U, V) \in (2/3, 1] \times (1/3, 1]\}) \\ &= C(1, 1) - C(2/3, 1) - C(1/3, 1) + C(2/3, 1/3) \\ &= 1 - 2/3 - 1/3 + C(2/3, 1/3), \end{aligned}$$

entonces

$$|(p_8 + p_9) - (p_6 + p_9)| = |C(1/3, 2/3) - C(2/3, 1/3)| = 0,$$

entonces

$$|p_8 - p_6| = 0,$$

así, $p_8 = p_6$.

□

Definición 4.3.3 Una cópula C que satisface la Proposición 4.3.2 se llamará **trisimétrica**.

Observemos que cualquier *cópula simétrica*, la cual, sabemos que cumple $C(u, v) = C(v, u)$ para cada u, v en I es trisimétrica, por lo tanto, cualquier cópula Arquimediana es trisimétrica.

Si C es una cópula trisimétrica entonces, ¿Qué tan grande puede ser el valor de $\delta(C)$?

Proposición 4.3.4 Sea C una cópula trisimétrica, entonces

$$\delta(C) = 3 \sup_{(u,v) \in I^2} |C(u, v) - C(v, u)| \leq \frac{1}{2}, \quad (4.10)$$

y la desigualdad es la mejor posible.

Demostración: Si C es trisimétrica entonces $C(1/3, 2/3) = C(2/3, 1/3)$, sea $q = C(1/3, 2/3) = p_1 + p_4 = C(2/3, 1/3) = p_1 + p_2$, entonces $0 \leq q \leq 1/3$.

Supongamos que $q = 0$ así $p_1 + p_2 = p_1 + p_4 = q = 0$ además C es trisimétrica, entonces por la Proposición 4.3.2, $p_3 = p_7$ y de la igualdad determinada en la demostración anterior $p_1 + p_2 + p_3 = p_1 + p_4 + p_7 = 1/3$, se concluye que $p_3 = p_7 = 1/3$. Por otro lado, $C(2/3, 1) = p_1 + p_2 + p_4 + p_5 + p_7 + p_8 = 2/3 = C(1, 2/3) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$, entonces $p_5 + p_7 + p_8 = 2/3 = p_3 + p_5 + p_6$,

entonces $p_5 + p_8 = 1/3 = p_5 + p_6$, por la Proposición 4.3.2 $p_6 = p_8$, entonces $p_6 = p_8 = 0$, así $p_5 = 1/3$; de lo anterior también se sigue que $p_9 = 0$. Entonces C es una suma ordinal de cópulas, es un barajeo o shuffle de M , esto por el Teorema 3.2.2 del libro de Nelsen [13]; entonces existen cópulas C_1, C_2 y C_3 en I_3, I_7 e I_5 asociadas al shuffle o barajeo de C .

Sean C_1 y C_2 , a las cuales queremos hallar una cota superior mediante la expresión,

$$\delta(C_1, C_2) = \sup_{(u,v) \in I^2} |C_1(u, v) - C_2(v, u)|$$

Usando las cotas de Fréchet-Hoeffding sabemos que para cada $i = 1, 2$, $W(u, v) \leq C_i(u, v) \leq M(u, v)$, donde $M(u, v) = \min(u, v)$ es la cota superior y $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ es la cota inferior para cada (u, v) en I^2 , usando la simetría de W entonces

$$\begin{aligned} \delta(C_1, C_2) &= \sup_{(u,v) \in I^2} |C_1(u, v) - C_2(v, u)| \\ &\leq \sup_{(u,v) \in I^2} |M(u, v) - W(v, u)| \\ &= \sup_{(u,v) \in I^2} (M(u, v) - W(u, v)) \\ &\leq M(1/2, 1/2) - W(1/2, 1/2) \\ &= 1/2, \end{aligned}$$

entonces para cada (u, v) en I_3 y dado que el simétrico (v, u) está en I_7 , tenemos que

$$\sup_{(u,v) \in I_3} |C(u, v) - C(v, u)| \leq \frac{1}{3} \sup_{(u,v) \in I^2} |C_1(u, v) - C_2(v, u)| \leq \frac{1}{6},$$

Por el Teorema 4.1.2 para cualquier cópula $\sup_{(u,v) \in I^2} |C_3(u, v) - C_3(v, u)| \leq 1/3$, entonces

$$\sup_{(u,v) \in I_5} |C(u, v) - C(v, u)| \leq \frac{1}{3} \sup_{(u,v) \in I^2} |C_3(u, v) - C_3(v, u)| \leq \frac{1}{9}.$$

En el Lema 4.1.1, sean la cópula C y u, v en I ,

$$|C(u, v) - C(v, u)| \leq \min(u, v, 1 - u, 1 - v, |u - v|)$$

entonces, dada una cópula C , las cotas superiores

$$\sup_{(u,v) \in I_1} |C(u, v) - C(v, u)|$$

y

$$\sup_{(u,v) \in I_9} |C(u, v) - C(v, u)|$$

Usando el Lema 4.1.1,

$$\sup_{(u,v) \in I_1} |C(u, v) - C(v, u)| \leq \min(u, v, 1 - u, 1 - v, |u - v|) \quad (4.11)$$

$$= \min(u, v, |u - v|) = \frac{1}{9}, \quad (4.12)$$

el mínimo se alcanza $u = 1/9$ y $v = 2/9$, o $u = 2/9$ y $v = 1/9$ por un argumento similar obtenemos,

$$\sup_{(u,v) \in I_9} |C(u, v) - C(v, u)| \leq \frac{1}{9}. \quad (4.13)$$

Seguido, asumimos que $q = 1/3$, con $p_2 = p_4 = 1/3$, esto implica que $p_1 = p_3 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = 0$ y $p_9 = 1/3$. En este caso C es el barajeo o shuffle de tres cópulas en las regiones I_2 , I_4 y I_9 , y usando exactamente los mismos argumentos que en el caso $q = 0$, obtenemos

$$\sup_{(u,v) \in I_2} |C(u, v) - C(v, u)| \leq \frac{1}{6}$$

entonces,

$$\delta(C) = 3 \sup_{(u,v) \in I^2} |C(u, v) - C(v, u)| \leq 3 \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

El caso $q = 1/3$ con $p_1 = 1/3$ y $p_6 = p_8 = 1/3$, pueden analizarse del mismo modo.

Si $q = 1/3$ con $p_1 = 1/3$ y $p_1 = p_5 = p_9 = 1/3$, el resultado se sigue de las ecuaciones (4.11) y (4.13) y observando el caso en el cual C es simplemente la suma ordinal de las tres cópulas en la diagonal principal. Note que en este caso $\delta(C) = 1/9$.

Hemos analizado todos los casos extremos, para los restantes basta observar que algunos de los p_i 's son mayores que cero y menores que $1/3$, se observa que en éstos casos la cota superior también se aplica. \square

Para ver que la igualdad es la mejor posible, damos seis ejemplos en los cuales la cota superior en la ecuación (4.10) se alcanza. sean C_i con $i = 1, \dots, 6$ shuffles o barajeos de M .

Sea una muestra aleatoria $\underline{\mathbf{X}} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) en \mathbb{R}^2 , con cópula $C_{X,Y}$; sin pérdida de generalidad suponemos que las muestras cumplen que $X_1 < \dots < X_n$. A continuación damos una definición equivalente a la definición (3.5.19).

Definición 4.3.5 Sea $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^k$ una muestra de tamaño n de una función de distribución continua bivariada. La **cópula empírica** es la función C_n dada por

$$\begin{aligned} C_n \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\text{ran}(X_k) \leq i, \text{ran}(Y_k) = j} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\text{ran}(Y_k) = j} \end{aligned}$$

donde, i, j pertenecen al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y $\text{ran}(X_k), \text{ran}(Y_k)$ denotan las estadísticas de orden de la muestra o rango de los elementos de la muestra.

Ya demostramos en la sección anterior que C_n es una subcópula con dominio $\{0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1\} \times \{0, 1/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$, por un teorema que se demuestra en un artículo de Deheuvels [5].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}} |C_n(i/n, j/n) - C_{X,Y}(i/n, j/n)| = 0$$

casi seguramente con respecto a P . Donde P es la medida de probabilidad sobre \mathbb{R}^2 definida para la función de distribución $C_{X,Y}$; entonces si n es sufi-

cientemente grande la cópula empírica C_n es una buena aproximación de la cópula real $C_{X,Y}$.

Usando la propiedad asintótica para definir una prueba estadística adecuada.

Para dar sentido a las definiciones siguientes, necesitamos extender el dominio de la cópula empírica para cada $n > 1$ a todo I^2 , como sigue

$$C_n(u, v) = \begin{cases} C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) & \text{si } (u, v) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+(i+1)}{2n+1}\right) \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+(j+1)}{2n+1}\right) \\ C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j+1}{n}\right) & \text{si } (u, v) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+(i+1)}{2n+1}\right) \times \left[\frac{j+(j+1)}{2n+1}, \frac{j}{n}\right) \\ C_n\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j}{n}\right) & \text{si } (u, v) \in \left[\frac{i+(i+1)}{2n+1}, \frac{i}{n}\right) \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+(j+1)}{2n+1}\right) \\ C_n\left(\frac{i+1}{n}, \frac{j+1}{n}\right) & \text{si } (u, v) \in \left[\frac{i+(i+1)}{2n+1}, \frac{i+1}{n}\right) \times \left[\frac{j+(j+1)}{2n+1}, \frac{j+1}{n}\right) \end{cases},$$

para algún i, j en el conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Definición 4.3.6 Sean $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) en \mathbb{R}^2 con cópula $C_{X,Y}$, Definimos $S_n = |T_n|$, donde

$$T_n = C_n(1/3, 2/3) - C_n(2/3, 1/3). \quad (4.14)$$

Recordemos que una cópula es trisimétrica si $C(1/3, 2/3) = C(2/3, 1/3)$.

Teorema 4.3.7 Sea $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias independientes en \mathbb{R}^2 . Sea i un entero fijo tal que $1 \leq i < n/2$. Definimos las variables aleatorias

$$Z_n = nC_n(i/n, i/n), \quad V_n = nC_n(i/n, 1 - i/n), \quad W_n = nC_n(1 - i/n, i/n), \quad (4.15)$$

donde C_n es la cópula empírica. Sea

$$T_{i,n} = V_n - W_n, \quad (4.16)$$

entonces,

$$P(T_{i,n} = t) = \sum_{v=0}^i P(V = v, W = v - t), \quad t \in \{-i, -i + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, i\} \quad (4.17)$$

donde,

$$P(V = v, W = v - t) = \sum_{z=0}^i \frac{\binom{i-z}{v-z} \binom{n-2i+z}{v}}{\binom{n-i}{i}} \frac{\binom{i-z}{w-z} \binom{n-2i+z}{w}}{\binom{n-i}{i}} \frac{\binom{i}{z} \binom{n-i}{i-z}}{\binom{n}{i}}, \quad (4.18)$$

para z en $\{0, 1, \dots, i\}$ y v, w en $\{z, z + 1, \dots, \text{mín}\{i, n - 2i + z\}\}$.

Demostración: Sea $1 \leq i < n/2$ un entero fijo sea, $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias independientes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que las muestras cumplen que $X_1 < \dots < X_n$.

Observamos que dado que se cumple $1 \leq i < n/2$ entonces, $1 \leq i < n/2 < n - i \leq n - 1$. De la definición de cópula empírica, Z_n es el número de parejas (X_i, Y_j) tales que $j \leq i$ y el $\text{ran}(Y_j) \leq i$, V_n es el número de parejas (X_i, Y_j) tales que $j \leq i$ y el $\text{ran}(Y_j) \leq n - i$, W_n es el número de parejas (X_i, Y_j) tales que $j \leq n - i$ y el $\text{ran}(Y_j) \leq i$, de las observaciones anteriores $Z_n \leq \text{mín}(V_n, W_n)$.

Primero, obtenemos la densidad conjunta de (V_n, W_n, Z_n) , condicionando

$$\begin{aligned} P(V_n = v, W_n = w, Z_n = z) &= P(V_n = v, W_n = w | Z_n = z) P(Z_n = z) \\ &= P(V_n = v | W_n = w, Z_n = z) \cdot \\ &\quad P(W_n = w | Z_n = z) P(Z_n = z) \\ &= P(V_n = v | Z_n = z) \cdot \\ &\quad P(W_n = w | Z_n = z) P(Z_n = z) \end{aligned}$$

esta igualdad se sigue de la independencia de V_n y W_n dado $\{Z_n = z\}$.

Los valores de $\text{ran}(Y_1), \dots, \text{ran}(Y_n)$ son una simple permutación aleatoria en el conjunto $\{1, \dots, n\}$, y de la propiedad de independencia asumimos que para cada una de las $n!$ permutaciones, estas tienen la misma probabilidad.

Ahora, demostraremos que Z_n tiene distribución hipergeométrica

$$P(Z_n = z) = \frac{\binom{i}{z} \binom{n-i}{i-z}}{\binom{n}{i}}, \quad z \in \{0, \dots, i\},$$

Para demostrar esto, observemos que $0 \leq Z_n \leq i$ y que $Z_n = z$ si y sólo si, la condición $\text{card}\{\text{ran}(Y_j) \leq i | j = 1, 2, \dots, i\} = z$ se cumple. Dado que $nC_n(i/n, j/n) = i$, usando argumentos de combinatoria, mediante cálculos, se ve que

$$\begin{aligned} P(Z_n = z) &= \frac{\binom{i}{z} [i \cdots (i-z+1)] [(n-i) \cdots (n-i-(i-z)+1)] (n-i)!}{n!} \\ &= \frac{\binom{i}{z} \frac{(n-i)!}{[(n-i)-(i-z)]!} \frac{i!}{(i-z)!} (n-i)!}{n!} \\ &= \frac{\binom{i}{z} \frac{(n-i)!}{[(n-i)-(i-z)]!} \frac{1}{(i-z)!}}{\frac{n!}{(n-i)!i!}} \\ &= \frac{\binom{i}{z} \binom{n-i}{i-z}}{\binom{n}{i}}, \end{aligned}$$

Con el propósito de hallar la densidad condicional $h(v, z) = P(V_n = v | Z_n = z)$, observamos que $z \leq v \leq i$, en la figura damos un esquema del número de puntos en cada región inducida por las variables $V_n = v$, $Z_n = z$.

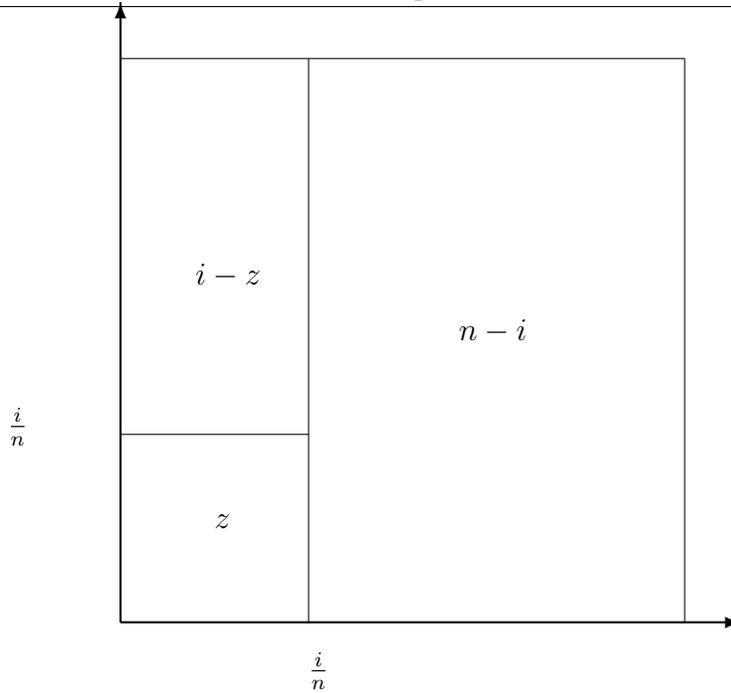


Figura 4.5: Figura para calcular $P(Z_n = z)$.

Usando propiedades de combinatoria

$$\begin{aligned}
 h(v, z) &= \frac{P(Z_n = z, V_n = v)}{P(Z_n = z)} \\
 &= \frac{\binom{i}{z} [i \cdots (i - z + 1)] \binom{i-z}{v-z} [(n - 2i) \cdots (n - 2i - (v - z) + 1)]}{n!} \\
 &= \frac{[i \cdots (i - (i - v) + 1)] (n - i)!}{P(Z_n = z)} \\
 &= \frac{\binom{i-z}{v-z} \frac{(n-2i)!}{(n-2i+z-v)!} \frac{i!}{(i-z)!} \frac{v!}{v!} (n - i)!}{\frac{n!(n-i)!(n-i)!}{(n-2i+z)!(i-z)!n!}} \\
 &= \frac{\binom{i-z}{v-z} \frac{(n-2i)!}{(n-2i+z-v)!} i! \frac{1}{v!}}{\frac{(n-i)!}{(n-2i+z)!}} \\
 &= \frac{\binom{i-z}{v-z} \frac{(n-2i+z)!}{(n-2i+z-v)!} v!}{\frac{(n-i)!}{(n-2i)!i!}} \\
 &= \frac{\binom{i-z}{v-z} \binom{n-2i+z}{v}}{\binom{n-i}{i}},
 \end{aligned}$$

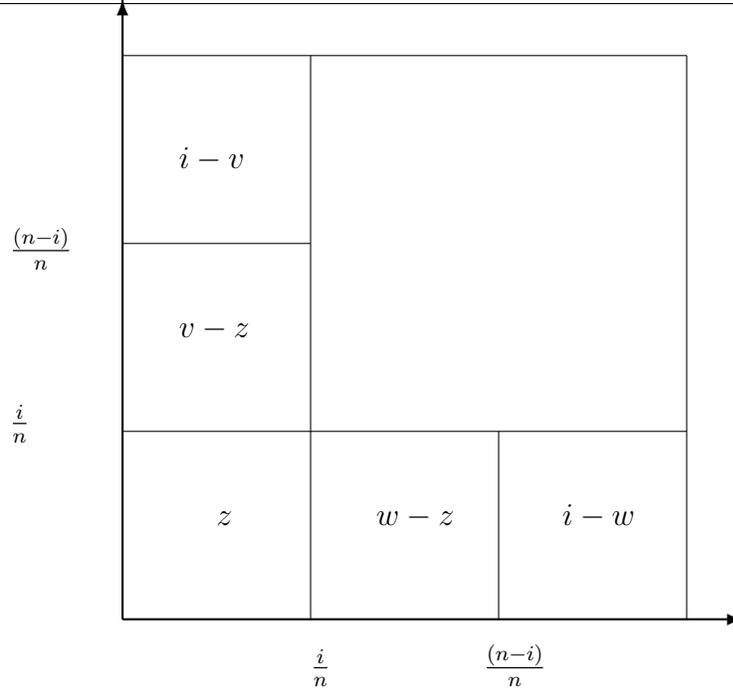


Figura 4.6: Figura para calcular $P(V_n = v, Z_n = z)$.

Entonces

$$P(V_n = v | Z_n = z) = \frac{\binom{i-z}{v-z} \binom{n-2i+z}{v}}{\binom{n-i}{i}} \text{ si } v \in \{z, z+1, \dots, \text{mín}\{i, n+z-2i\}\}$$

Usando argumentos similares podemos hallar la densidad condicional de W_n dado $Z_n = z$, entonces

$$\begin{aligned} P(W_n = w | Z_n = z) &= \frac{P(W_n = w, Z_n = z)}{P(Z_n = z)} = \frac{\frac{\binom{i-z}{w-z} \binom{n-2i+z}{w}}{\binom{n-i}{i}}}{\frac{\binom{i}{z} \binom{n-i}{i}}{\binom{n}{i}}} \\ &= \frac{\binom{i-z}{w-z} \binom{n-2i+z}{w}}{\binom{n-i}{i}} \text{ si } w \in \{z, z+1, \dots, \text{mín}\{i, n+z-2i\}\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
P(V_n = v, W_n = w) &= \sum_{z=0}^i P(V_n = n, W_n = w, Z_n = z) \\
&= \sum_{z=0}^i P(V_n = n | Z_n = z) P(W_n = w | Z_n = z) P(Z_n = z) \\
&= \sum_{z=0}^i \frac{\binom{i-z}{v-z} \binom{n-2i+z}{v}}{\binom{n-i}{i}} \frac{\binom{i-z}{w-z} \binom{n-2i+z}{w}}{\binom{n-i}{i}} \frac{\binom{i}{z} \binom{n-i}{i-z}}{\binom{n}{i}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $T_{i,n} = V_n - W_n$ sumando sobre todos los índices, obtenemos

$$P(T_{i,n} = t) = \sum_{v=0}^i P(V_n = n, W_n = v - t) \text{ si } v \in \{-i, \dots, -1, 0, 1, \dots, i\}$$

□

Corolario 4.3.8 Sea $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias independientes en \mathbb{R}^2 . Sea i un entero fijo tal que $1 \leq i < n/2$. Definimos las variables aleatorias V_n, W_n y $T_{i,n}$ definidos en el teorema anterior; si $S_{i,n} = |T_{i,n}|$, entonces

$$P(S_{i,n} = s) = \begin{cases} P(T_{i,n} = 0) & \text{si } s = 0 \\ P(T_{i,n} = s) & \text{si } s = 1, \dots, i. \end{cases}$$

Demostración: Es suficiente, observar que en la ecuación (4.19), la densidad conjunta de W_n y V_n son simétricas, entonces $T_{i,n}$ es una variable aleatoria simétrica y de la ecuación (4.17) se sigue el resultado. □

Ahora, se calcula la media y varianza de la variable $T_{i,n} = V_n - W_n$.

Proposición 4.3.9 Sea $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias

independientes en \mathbb{R}^2 . Sea i un entero fijo tal que $1 \leq i < n/2$. Definimos las variables aleatorias V_n, W_n y $T_{i,n}$ definidos en el teorema anterior; si $S_{i,n} = |T_{i,n}|$, entonces

$$E(T_{i,n}) = 0$$

y

$$Var(T_{i,n}) = \frac{2i^2(n-2i)}{n(n-1)}$$

Demostración: Sea i un entero fijo tal que $1 \leq i < n/2$, sea una muestra aleatoria de tamaño n , $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias independientes en \mathbb{R}^2 . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $X_1 < \dots < X_n$, sabemos que $T_{i,n} = V_n - W_n = nC_n(i/n, 1 - i/n) - nC_n(1 - i/n, i/n)$, entonces $T_{i,n}$ es igual a la diferencia del número de pares (X_j, Y_j) tal que $j \leq i$ y $ran(Y_j) \leq n - i$ y el número de pares (X_j, Y_j) tal que $j \leq n - i$ y $ran(Y_j) \leq i$. Equivalentemente

$$T_{i,n} = \sum_{j=1}^i \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=i+1}^{n-i} \mathbf{1}_{B_j}, \quad (4.19)$$

donde A_j y B_j son los eventos

$$A_j = \{ran(Y_j) \in \{i+1, i+2, \dots, n-i\}\} \text{ y } B_j = \{ran(Y_j) \in \{1, \dots, i\}\}$$

Dado que bajo la propiedad de independencia, los rangos de T_i 's son permutaciones equiprobables sobre el conjunto $\{1, \dots, n\}$; la esperanza de la función característica del conjunto A_j , $E(\mathbf{1}_{A_j}) = P(A_j) = (n-2i)/n$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ y $E(\mathbf{1}_{B_j}) = P(B_j) = i/n$ para cada $j \in \{i+1, \dots, n-i\}$. Por otro lado,

$$E(\mathbf{1}_{A_j} \mathbf{1}_{A_k}) = \begin{cases} \frac{(n-2i)(n-2i-1)}{n(n-1)} & \text{si } j \neq k \in \{1, \dots, i\} \\ \frac{(n-2i)}{n} & \text{si } j = k \in \{1, \dots, i\}, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$E(\mathbf{1}_{B_j}\mathbf{1}_{B_k}) = \begin{cases} \frac{i}{n} \frac{(i-1)}{(n-1)} & \text{si } j \neq k \in \{i+1, \dots, n-i\} \\ \frac{i}{n} & \text{si } j = k \in \{i+1, \dots, n-i\}, \end{cases} \quad (4.21)$$

y

$$E(\mathbf{1}_{A_j}\mathbf{1}_{B_k}) = \frac{(n-2i)}{n} \frac{i}{(n-1)}, \text{ si } j \in \{1, \dots, i\} \text{ y } k \in \{i+1, \dots, n-i\}. \quad (4.22)$$

Entonces

$$\begin{aligned} E(T_{i,n}) &= E\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=i+1}^{n-i} \mathbf{1}_{B_j}\right) = \sum_{j=1}^i E(\mathbf{1}_{A_j}) - \sum_{j=i+1}^{n-i} E(\mathbf{1}_{B_j}) \\ &= \frac{i(n-2i)}{n} - \frac{(n-2i)i}{n} = 0. \end{aligned}$$

De la definición,

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_{i,n}) &= E(T_{i,n}^2) \\ &= E\left[\left(\sum_{j=1}^i \mathbf{1}_{A_j} - \sum_{j=i+1}^{n-i} \mathbf{1}_{B_j}\right)\left(\sum_{k=1}^i \mathbf{1}_{A_k} - \sum_{k=i+1}^{n-i} \mathbf{1}_{B_k}\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^i \sum_{j=1}^i E(\mathbf{1}_{A_j}\mathbf{1}_{A_k}) - \sum_{j=1}^i \sum_{k=i+1}^{n-i} E(\mathbf{1}_{A_j}\mathbf{1}_{B_k}) \\ &\quad - \sum_{j=i+1}^{n-i} \sum_{k=1}^i E(\mathbf{1}_{B_j}\mathbf{1}_{A_k}) + \sum_{j=i+1}^{n-i} \sum_{k=i+1}^{n-i} E(\mathbf{1}_{B_j}\mathbf{1}_{B_k}), \end{aligned}$$

usando las ecuaciones (4.20),(4.21) y (4.22).

$$\begin{aligned}
 Var(T_{i,n}) &= \sum_{j=1}^i \sum_{j=1, k \neq j}^k \frac{(n-2i)(n-2i-1)}{n(n-1)} + \sum_{j=1}^i \frac{(n-2i-1)}{(n-1)} \\
 &\quad - 2 \sum_{j=1}^i \sum_{k=i+1}^{n-i} \frac{(n-2i)}{n} \frac{i}{(n-1)} + \sum_{j=i+1}^{n-i} \sum_{k=i+1, k \neq j}^{n-i} \frac{i(i-1)}{n(n-1)} \\
 &\quad + \sum_{k=i+1}^{n-i} \frac{i}{n} \\
 &= i(i-1) \frac{(n-2i)(n-2i-1)}{n(n-1)} + i \frac{(n-2i)}{n} \\
 &\quad - 2i(n-2i) \frac{(n-2i)}{n} \frac{i}{(n-1)} + (n-2i)(n-2i-1) \frac{i(i-1)}{n(n-1)} \\
 &\quad + (n-2i) \frac{i}{n} \\
 &= \frac{i(n-2i)}{n} \left[\frac{2(i-1)(n-2i-1)}{(n-1)} + 2 - \frac{2(n-2i)i}{(n-1)} \right] \\
 &= \frac{2i(n-2i)}{n} \left[\frac{(i-1)(n-2i-1) + (n-1) - (n-2i)i}{(n-1)} \right] \\
 &= \frac{2i(n-2i)}{n(n-1)} [ni - 2i^2 - i - n + 2i + 1 + n - 1 - ni + 2i^2] \\
 &= \frac{2i(n-2i)}{n(n-1)} [i] = \frac{2i^2(n-2i)}{n(n-1)}.
 \end{aligned}$$

Se puede demostrar que $Cov(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{A_k}) = -2i(n-2i)/(n^2(n-1))$ para $j \neq k$, $j, k \in \{1, \dots, i\}$, $Cov(\mathbf{1}_{B_j}, \mathbf{1}_{B_k}) = -i(n-i)/(n^2(n-1))$ para $j \neq k$, $j, k \in \{i+1, \dots, n-i\}$ y $Cov(\mathbf{1}_{A_j}, \mathbf{1}_{B_k}) = i(n-2i)/(n^2(n-1))$ para $j \in \{1, \dots, i\}$, $k \in \{i+1, \dots, n-i\}$. \square

Hemos hallado la distribución de $T_{i,n}$ bajo independencia, sin embargo, para valores grandes de n , bajo estandarización y propiedades adecuadas para i podemos hallar su distribución asintótica.

Teorema 4.3.10 Sea $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias independientes en \mathbb{R}^2 . Sea i un entero fijo tal que $1 \leq i < n/2$. Sea $0 < K < 1/2$ una constante fija y sea $i = [Kn]$, donde $[a]$ denota el mayor entero menor o igual a a . Definimos las variables aleatorias Z_n, V_n y W_n como en (4.15) del Teorema 4.3.7; si definimos

$$X_n \frac{T_{i,n}}{\sqrt{\frac{2i^2(n-2i)}{n(n-1)}}}, \quad (4.23)$$

entonces X_n se distribuye asintóticamente como $N(0, 1)$.

Demostración:

Sea $0 < K < 1/2$ una constante fija, sea $i = [Kn]$, donde $[a]$ denota el mayor entero menor o igual a a , usando la ecuación 4.19 podemos mostrar que $T_{i,n} = \sum_{i=1}^n a(i, R_i)$, donde $\{a(i, j)\}$ es la matriz de tamaño $n \times n$ dada por:

$$a(j, R_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq j \leq i \text{ y } i+1 \leq R_j \leq n-i \\ -1 & \text{si } i+1 \leq j \leq n-i \text{ y } 1 \leq R_j \leq i \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces, $T_{i,n}$ es un rango estadístico lineal y la normalidad asintótica se sigue de los resultados estándar de la R -estimación, ver el libro de Serfling [16]. \square

Con el propósito de verificar que las hipótesis $H_0: C$ es una cópula trisimétrica, contra $H_1: C$ no es una cópula trisimétrica.

Usaremos la estadística $T_{i,n}$ y su función de distribución. Sea $n \geq 3$ un entero fijo, $i = [n/3]$, donde $[n/3]$ denota el mayor entero menor o igual a $n/3$, y $1 \leq i \leq n/2$. Suponemos que $\underline{X} = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ una muestra aleatoria de tamaño n de un vector aleatorio continuo (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) de variables aleatorias, con cópula $C_{X,Y}$. Si queremos probar la hipótesis de trisimetría tendremos que usar $T_{i,n}$ con $i = [n/3]$.

4.4. Simulaciones

En esta última sección se programaron algunas simulaciones para checar la potencia o alcance de la prueba estadística de trisimetría (Proposición 4.3.2) propuesta en el artículo de Erdely y González [8]. En [8] se hacen comparaciones contra otras dos pruebas de simetría conocidas, como la prueba de Hollander [9] (1971), la corrección de la continuidad de Edwards aplicada a la prueba de Bowker [2] (1948) a la cual nos referimos como la prueba de Bowker-Edwards.

Para una cópula absolutamente continua C , queremos probar las siguientes hipótesis:

$$H_0 : C \text{ es una cópula trisimétrica vs. } H_1 : C \text{ no es una cópula trisimétrica.} \quad (4.24)$$

La prueba propuesta para la prueba de trisimetría rechaza la hipótesis nula H_0 siempre que $|T_{i,n}| > k_\alpha$ para un umbral apropiado k_α dependiendo del tamaño del nivel de prueba α .

Se simularon 10,000 muestras de tamaño $n = 15$, $n = 30$ y $n = 51$, para encontrar los valores críticos con niveles de tamaño de prueba $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$.

Rechazamos H_0 si la estadística de prueba $T_{[\frac{n}{3}],n}$ excede al valor crítico dado por el nivel α .

Para encontrar el valor crítico se hicieron simulaciones bajo independencia de la cópula simétrica Π , y se calculó la estadística $T_{[\frac{n}{3}],n}$ para los tamaños de muestra $n = 15$, 30 y 51.

Ejemplo 1: Se simularon 10,000 muestras de tamaño $n = 15$, $n = 30$ y $n = 51$ de la cópula,

$$C_\Theta(u, v) = \begin{cases} u & \text{si } 0 \leq u \leq \Theta v \leq \Theta \\ \Theta v & \text{si } 0 \leq \Theta v \leq u \leq 1 - (1 - \Theta)v \\ u + v - 1 & \text{si } \Theta v \leq 1 - (1 - \Theta)v \leq u \leq 1 \end{cases}$$

para $\Theta = 1/2$. esta cópula no es simétrica y tampoco es trisimétrica.

Para encontrar los valores críticos con niveles de tamaño de prueba $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$ se hicieron 10,000 simulaciones de la cópula de

independencia Π .

A continuación se presentan en los cuadros 4.1, 4.2 y 4.3 el número de rechazos de las 10,000 simulaciones.

Cuadro 4.1: Elementos Rechazados para $\alpha = 0.1$, para 10,000 simulaciones.

Tamaño de la muestra	Valor Crítico	Elementos rechazados
15	0.13	6640
30	0.06	9797
51	0.058	9981

Cuadro 4.2: Elementos Rechazados para $\alpha = 0.05$, para 10,000 simulaciones.

Tamaño de la muestra	Valor Crítico	Elementos rechazados
15	0.13	6640
30	0.1	6272
51	0.073	9889

Cuadro 4.3: Elementos Rechazados para $\alpha = 0.01$, para 10,000 simulaciones.

Tamaño de la muestra	Valor Crítico	Elementos rechazados
15	0.2	2523
30	0.16	3831
51	0.137	6938

Se observa que el número de rechazo es mucho mayor que la proporción α por ciento, por lo tanto se tiene evidencia que la cópula no es trisimétrica y por lo tanto tampoco es simétrica.

Ejemplo 2: Como en el ejemplo anterior se simularon 10,000 muestras de tamaño $n = 15$, $n = 30$ y $n = 51$ de la cópula C de ecuación

$$C(u, v) = \begin{cases} 2uv & \text{si } (u, v) \in [0, 1/2]^2 \\ \frac{1}{2} - \frac{uv}{2} & \text{si } (u, v) \in (1/2, 1]^2 \\ M(u, v) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

esta cópula resulta ser simétrica y trisimétrica.

Para encontrar los valores críticos con niveles de tamaño de prueba $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$, se tomaron muestras de tamaño 10,000 de la cópula.

A continuación se presentan en número de rechazos de las simulaciones en los cuadros 4.4, 4.5 y 4.6.

Cuadro 4.4: Elementos Rechazados para $\alpha = 0.1$, para 10,000 simulaciones.

Tamaño de la muestra	Valor Crítico	Elementos rechazados
15	0.13	160
30	0.06	937
51	0.058	703

Cuadro 4.5: Elementos Rechazados para $\alpha = 0.05$, para 10,000 simulaciones.

Tamaño de la muestra	Valor Crítico	Elementos rechazados
15	0.13	160
30	0.1	170
51	0.073	703

Cuadro 4.6: Elementos Rechazados para $\alpha = 0.01$, para 10,000 simulaciones.

Tamaño de la muestra	Valor Crítico	Elementos rechazados
15	0.2	3
30	0.16	1
51	0.137	1

Como se observa que la proporción de rechazos de la muestra es mucho menor que el α por ciento de los rechazos que se esperarían, lo cual da evidencia de que la cópula es en efecto, trisimétrica.

En el artículos de Erdely y González [8], se presentan muchos otros casos y comparaciones con las pruebas de simetría conocidas, que dan evidencia de que esta prueba es una buena y simple alternativa para probar simetría.

Bibliografía

- [1] Alsina C., Frank M.J., Schweizer B. (2006) Associative Functions: Triangular Norms and Copulas. *World Scientific Publising Co.*, Singapore.
- [2] Bowker A.H.(1948) A test for Simmetry in contingency Tables. *J Amer. Statist. Assoc.* **43**, 572-574.
- [3] Capéra P. y Genest C. (1993); Spearman's ρ is larger than Kendall's τ for positively dependent random variables. *J. Non-parametr. Statist.* **2**, 183-194
- [4] Daniels, H. E.(1950) Rank Population and Correlation Models. *J. Roy. Statist. Soc., Ser. B*, **12**, 171-181.
- [5] Deheuvels, P. (1979) la fonction de dépendence empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendence. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5)* **65**, 274-292.
- [6] Ling, Cho-Hsin(1965) Representation of associative functions. *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 189-212.
- [7] Erdely A., Díaz-Viera M.A.(2010) Nonparametric and semiparametric Bivariate Modeling for Petrophysical Porosity-Permeability Well Log Data. In: Jaworski P., Durante F., Hardle W., Rychlik T., (eds) Copula Theory and Its Applications, *Springer*, Berlin, 267-278.
- [8] Erdely, A., Gonzalez-Barrios, J.M.(2010) A Nonparametric Simmetry Test for absolutely Continuous bivariate Copulas. *Statist. Methods Appl.* (2010) **19**.

- [9] Hollander M.(1971) A Nonparametric Test for Bivariate Symmetry. *Biometrika*, **58**, 203-212.
- [10] Klement EP, Mesiar R. (2006) How Non-symmetric can a Copula be?, *Comment Math Univ Carolinae*, **47** 141-148.
- [11] Krampe A., Kuhnt S. (2007) Bowker's Test for Symmetry and Modifications within the Algebraic Framework. *Comput. Statist. Data Anal.*, **51**, 4124-4142.
- [12] McNeil, A.J. y Nešlehová J. (2009) Multivariate Archimedean Copulas, d -Monotone Functions and l_1 -Norm Symmetric Distributions. *Ann. Statist.*, **37**, No. 5B, 3059-3097.
- [13] Nelsen, R.B.(1999) *An Introduction to Copulas*. Lecture Notes in Statistics **139**; Ed. Springer, New York.
- [14] Nelsen, R.B.(2007) Extremes of nonexchangeability. *Stat. Papers*. **48**, 329-336.
- [15] Roberts, A. W. y Varberg, D. E. (1973); Random variables with maximum sums. *Adv. in Appl. Prob.* **14**, 623-632.
- [16] Serfling RJ (1980) *Approximation Theorems of mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, New York.
- [17] Schweizer, B. y Wolff, E. F. (1981) On nonparametric measures of dependence for bivariate distributions. *Ann. Statist.* **9**, 870-885.