



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

CONTROL MEDIANTE TÉCNICAS NO LINEALES
DE UN SISTEMA DE PÉNDULO INVERTIDO
SOBRE UN BALANCÍN

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
INGENIERO ELÉCTRICO Y ELECTRÓNICO

P R E S E N T A:

Borja Rosales Luis Pablo

DIRECTOR DE TESIS :

Dr. Marcos Ángel González Olvera



MÉXICO, D.F. 2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: M.F. Rafael Iriarte Vivar Balderrama
Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
Vocal: Dr. Marcos Ángel González Olvera
1er. Suplente: Dr. Yu Tang Xu
2o. Suplente: Dr. Juan Mauricio Ángeles Cervantes

La tesis se realizó en México, D.F.

DIRECTOR DE TESIS:

Marcos Ángel González Olvera

Índice general

1. Introducción	1
2. Antecedentes	5
2.1. Conceptos básicos de control	5
2.2. Tipos de modelado	6
2.2.1. Variables de estado	6
2.2.2. Método de Euler-Lagrange	8
2.3. Discretización	9
2.4. Linealización	10
2.5. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	11
2.6. Control óptimo lineal	12
2.7. Incertidumbre paramétrica	17
2.8. Sistemas difusos	17
2.8.1. Lógica difusa	17
2.8.2. Operadores lógicos difusos	19
2.8.3. Sistemas Difusos Takagi-Sugeno	20
3. Análisis del sistema péndulo-carro-balancín	23
3.1. Parámetros del sistema	23
3.2. Identificación de parámetros y caracterización del sistema	24
3.2.1. Coeficiente de fricción estática y coeficiente de fricción viscosa	24
3.2.2. Acondicionamiento del motor	26
3.2.3. Conversión par-voltaje	28
3.2.4. Filtros derivativos	30
3.3. Modelado matemático	32
3.3.1. Balancín	32
3.3.2. Péndulo	35
3.3.3. Sistema péndulo-carro-balancín	37
3.4. Tarjeta de Adquisición	41
4. Diseño de controladores	43
4.1. Diseño de controladores lineales	43
4.1.1. Balancín	43

4.1.2. Péndulo	45
4.1.3. Sistema péndulo-carro-balancín	47
4.2. Diseño de controladores no lineales	50
4.2.1. Control difuso para el balancín	50
4.2.2. Control difuso para el péndulo invertido	55
5. Resultados experimentales	61
5.1. Acondicionamiento de las señales	61
5.2. LQR balancín	62
5.3. Control difuso para el balancín	64
5.4. LQR péndulo	65
5.5. Control difuso para el péndulo invertido	66
6. Conclusiones	69
A. Anexos	71
A.1. Regresión lineal	71
A.2. Interpolación lineal y multilínea	72
A.3. Filtros analógicos	74

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se presentan diversos diseños de controladores difusos y lineales para los sistemas de balancín y péndulo invertido. Para obtener los modelos matemáticos de estos sistemas se utilizan las ecuaciones de equilibrio de fuerzas; por su parte, para la obtención del modelo matemático del péndulo invertido sobre el balancín, se hace uso del método de Euler-Lagrange. Para cada sistema estudiado se diseñan dos tipos de controladores distintos. En el primer caso (controlador LQR) es necesario realizar la linealización de los modelos en torno a un punto de equilibrio. Por otro lado, el diseño de los controladores difusos, se obtiene a partir de observaciones y conocimientos empíricos de los sistemas.

Los controladores diseñados se utilizan para simulaciones y, posteriormente implementaciones físicas. Con los datos obtenidos en este trabajo, se comparan las técnicas de control utilizadas.

Objetivos

Esta tesis tiene como objetivo analizar, diseñar e implementar controladores para sistemas mecánicos subactuados con punto de equilibrio inestable. Para lo cual se emplea la técnica de control lineal denominada LQR, así como técnicas de control difuso, para los sistemas de péndulo invertido y balancín. De esta manera se pretende observar ventajas y desventajas que ofrece cada técnica de control, con base en el siguiente criterio de comparación:

- Sobrepasso
- Tiempo de asentamiento
- Consumo energético
- Saturación
- Tiempo de procesamiento

Posteriormente se pretende diseñar un controlador no lineal, de tipo difuso, que sea capaz de estabilizar al sistema de péndulo invertido con balancín.

Justificación

Los sistemas utilizados en esta tesis, el péndulo invertido y el balancín, cuentan con características de interés en el área de control, por ejemplo su modelo es no lineal, son sistemas subactuados y cuentan con puntos de equilibrio inestables, por lo que son comunes en el área académica. Se elige la técnica de control LQR, debido a que los modelos matemáticos de los sistemas se pueden linealizar de una manera sencilla por medio de herramientas de cómputo, lo mismo ocurre al momento de sintonizar los controladores. Mientras que los controladores difusos resultan atractivos debido a que no se requiere un modelo matemático del sistema, restando importancia a parámetros desconocidos de éstos.

Por su parte se ha elegido el criterio de comparación mencionado, para conocer ventajas y desventajas que presenta cada técnica de control, en cuanto, al desempeño de los controladores implementados de forma física.

El sistema de péndulo-carro-balancín además de presentar las características de los sistemas anteriores, presenta un mayor reto al contar con un más variables y únicamente un actuador para controlarlas. Los tres sistemas ilustran principios fundamentales de control, teniendo semejanzas con robots bípedos y robots que escalan superficies.

Antecedentes

Para el sistema de péndulo invertido existe una vasta bibliografía, tal es el caso de los trabajos [8, 14]. Se pueden encontrar diseños de controladores difusos para sistemas muy similares al péndulo invertido con el que se trabaja en esta tesis; combinaciones de un controlador difuso con un modo deslizante en [10], o incluso comparaciones entre un controlador difuso y alguna otra técnica de control en [11]. Por su parte, para el sistema de balancín se tiene como antecedente [3], en el cual se utiliza un controlador difuso en combinación con un LQR. Resulta conveniente retomar los trabajos anteriores ya que la manera en la que atacan el problema de control o el modelado de los sistemas resultan útiles para el desarrollo de la tesis.

Para obtener el modelo del sistema de péndulo-carro-balancín se tienen como antecedentes los trabajos [18, 19, 22]. Es posible observar en los tres artículos citados, la presencia de dos masas (carros), mientras que en este trabajo únicamente hay una; lo anterior ocasiona que el modelo sufra modificaciones, así mismo la manera de resolver el problema de control también es distinta, al considerar las implicaciones de la ausencia de la masa de contrapeso.

Motivación

De antemano la teoría de los controladores difusos y la de los controladores LQR muestran características distintas, pudiendo esbozar ventajas de cada técnica para algunos problemas; no obstante, con el criterio de comparación que

se ha elegido, es posible encontrar ventajas en la implementación física de controladores para sistemas electromecánicos subactuados, particularmente de los estudiados en esta tesis. Lo anterior es de gran interés debido a que los sistemas electromecánicos subactuados, con características similares a las de los sistemas en estudio, son encontrados de manera frecuente en problemas reales de ingeniería.

En lo referente al sistema de péndulo-carro-balancín, se han utilizado controladores no lineales para atacar el problema de control [18, 19], en el caso del primero se utiliza una matriz de ganancia, que permanece constante, para controlar al sistema. Mientras que en el segundo se utiliza un control H_∞ , sin embargo, no se realiza la implementación física de éste. Por su parte en [22] se hace uso de un modelo lineal del sistema para implementar un controlador LQR. La novedad del presente trabajo es que el sistema sólo cuenta con una masa y se intenta controlar mediante técnicas distintas a las usadas en los trabajos mencionados.

Resumen del trabajo

Esta tesis se divide en seis capítulos. El capítulo dos tiene como objetivo explicar cada una de las herramientas que se utilizan para el desarrollo del trabajo. En este capítulo de la tesis se dan definiciones importantes para las siguientes secciones.

En el capítulo tres se lleva a cabo el modelado de los sistemas de péndulo invertido y balancín; así como las observaciones necesarias para el diseño de los controladores respectivos.

Durante el capítulo cuatro se diseñan en forma teórica, posibles controladores para los sistemas con los cuales se trabaja, se presentan simulaciones y observaciones a partir de éstas.

En el capítulo cinco se implementan de manera física los controladores previamente diseñados, obteniendo resultados experimentales.

A lo largo del capítulo seis se analizan de los resultados experimentales y de las simulaciones de capítulos anteriores, se hacen observaciones y se obtienen las conclusiones del trabajo realizado. Se compara entre las diferentes técnicas utilizadas para el control de los sistemas, se justifican los resultados obtenidos y se plantean trabajos futuros.

Logros

En este trabajo, se lograron implementar de manera física distintos controladores, para los sistemas de péndulo invertido y balancín. A partir de los resultados experimentales, se tienen elementos suficientes para hacer una comparación de acuerdo al criterio elegido, mostrando ventajas y desventajas de los controladores LQR y las técnicas de control difusas respectivamente, teniendo un panorama de cuándo y cómo se puede, utilizar cada una de estas técnicas

de control en forma práctica, en sistemas subactuados que presentan comportamientos no lineales e incertidumbres paramétricas.

Para el caso particular del sistema carro-péndulo-balancín, se logró diseñar un control LQR capaz de estabilizar al sistema en una pequeña región cercana al punto de equilibrio. Además, se hacen observaciones acerca de las limitantes físicas del sistema; que resultan importantes para trabajos futuros con éste.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo, se definen en forma breve conceptos importantes para el diseño posterior de los controladores. Se explican las formas de modelado utilizadas para el trabajo. Así como la teoría para el diseño de controladores LQR y controladores difusos.

2.1. Conceptos básicos de control

Se considera **sistema**, a un conjunto de entradas y uno de salidas, que se relacionan de forma definida entre sí; además de poseer una frontera que los diferencia del ambiente. Existen varias maneras de catalogar a los sistemas de acuerdo a sus características. En esta tesis se trabaja únicamente con **sistemas dinámicos o con memoria**; esto quiere decir que la salida de estos depende tanto de la entrada presente, así como de entradas pasadas. Visto de otra forma, todos los sistemas con los que se trabaja tienen elementos almacenadores de energía.

El modelo de un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones que representan su dinámica, de forma adecuada para el objetivo de análisis y diseño. Es importante resaltar que un modelo matemático no es único para un sistema determinado; sino que pueden existir varios modelos para este, de forma que un modelo matemático puede ser más conveniente que otro dependiendo del empleo que se le dé.

Por otra parte, un **sistema de parámetros concentrados** es aquel en el que el número de variables que intervienen en el modelo es finito. En caso de que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que conforman al modelo sean constantes, se trata de un **sistema invariante en el tiempo**; esto quiere decir, que las características de los sistemas no cambian conforme éste transcurre. Los modelos vistos en este trabajo son de parámetros concentrados e invariantes en el tiempo.

Se ha dicho que todos los sistemas con los que se trabaja en esta tesis son dinámicos, es decir, que no dependen sólo de las entradas presentes. No obstante,

los tres sistemas presentes en este trabajo son físicos y por tanto son **sistemas causales**; esto quiere decir que su salida en tiempo presente, depende únicamente de valores pasados y/o presentes de las variables de entrada, pero nunca de valores futuros de éstas.

Se dice que un **sistema** es **lineal**, siempre que cumpla con el principio de superposición, el cual se expresa

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}.$$

En un sistema lineal, la respuesta ante múltiples entradas se calcula, tratando cada una por separado y sumando los resultados. Otra condición para que el sistema sea lineal, es que la salida debe de ser cero mientras no se le aplique una entrada.

Otra forma de clasificar a los sistemas es desde el punto de vista energético. Los sistemas en los cuales existen pérdidas de energía son llamados **sistemas disipativos**; que se identifican porque presentan elementos resistivos o fricciones. Desde un punto de vista mecánico, una fuerza disipativa es aquella que merma la energía cinética del sistema, sin convertirla en energía potencial reutilizable.

Aquellos sistemas en donde no se presentan fuerzas disipativas, y por tanto elementos resistivos o fricciones, son llamados **sistemas conservativos**, dado que conservan su energía no cediéndola al medio con el que interactúan.

2.2. Tipos de modelado

En este trabajo, se utilizan dos formas de modelado de sistemas: variables de estado y método de Euler-Lagrange. En esta sección se da una breve descripción de los métodos de modelado y sus características.

2.2.1. Variables de estado

Se define **estado** como el conjunto más pequeño de variables, cuyo conocimiento en un tiempo $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada en un tiempo $t \geq t_0$ determinan el comportamiento del sistema para $t \geq t_0$. Mientras que las **variables de estado** son las que forman al conjunto más pequeño de variables que determina el estado del sistema. La representación en variables de estado pretende describir al sistema mediante n ecuaciones diferenciales de primer orden; dando origen a una ecuación diferencial matricial de primer orden. El modelo, para el caso de parámetros invariantes en el tiempo, se representa:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix},$$

donde:

n es el número de estados del sistema,

m es el número de entradas del sistema,

p es el número de salidas del sistema,

Si el sistema es lineal se representa de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

donde:

x es el vector de estados del sistema,

y es el vector de salidas producidas por el sistema,

u es el vector de entradas aplicadas al sistema,

A, B, C y D son las matrices de coeficientes.

El uso de este tipo de modelado permite el diseño de observadores para estimar los estados que se desconocen, así como el análisis de cada estado en forma individual.

Un **punto de equilibrio** se puede ver como el punto, en el que el sistema permanece sino se le excita. Además, es aquel valor de $x = X$ y $u = U$ tal que es solución de

$$f(X, U) = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Para el caso de un sistema lineal el punto de equilibrio es único y se encuentra en el origen; mientras que un sistema no lineal puede presentar varios puntos de equilibrio.

Un sistema es **controlable**, si para cualquier condición inicial $X_0 = X(0)$, existe una entrada $u(t)$ tal que lleva al sistema a cualquier condición final $X(t_1)$ en tiempo finito.

Para determinar si un sistema lineal es controlable, como se indica en [5] se obtiene la matriz de controlabilidad

$$\varrho = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B],$$

siendo n es el número de estados del sistema

Una vez obtenida la matriz de controlabilidad ϱ , se determina su rango. El rango de una matriz, se obtiene del número máximo de renglones o columnas linealmente independientes entre sí, se dice que una matriz es de rango completo si todos sus renglones y columnas son linealmente independientes. Si la matriz ϱ es de rango completo, entonces el sistema es totalmente controlable [5].

2.2.2. Método de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden utilizar para describir un sistema y por tanto, para modelarlo. Este tipo de modelado se basa en obtener las ecuaciones de energía del sistema, y mediante derivadas parciales describir el comportamiento de éste en un arreglo de matrices, las cuales se relacionan con las diferentes coordenadas del sistema [15].

La ecuación de Euler-Lagrange para las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema es

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (2.1)$$

donde

q_j es la coordenada generalizada de la j -ésima partícula,

Q_j son las fuerzas generalizadas que actúan sobre la partícula j ,

T es la energía cinética total del sistema,

Para el caso de los sistemas mecánicos, las coordenadas q_j se refieren a posiciones [4]. Por lo que \dot{q}_j es la velocidad generalizada de dicha partícula.

Si se supone que el sistema es conservativo (todas sus fuerzas son conservativas), se pueden expresar a todas las fuerzas como un potencial, quedando

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (2.2)$$

en donde V es la energía potencial total del sistema. Se pueden igualar las ecuaciones 2.1 con 2.2, teniendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} &= 0. \end{aligned}$$

El lagrangiano expresa la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema, estando definido como

$$L = T - V.$$

Para el caso de los sistemas mecánicos la energía potencial no depende de las velocidades, por lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

De esta forma las ecuaciones del sistema se pueden definir mediante el lagrangiano, teniendo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Para el caso general no se pueden expresar todas las fuerzas del sistema como un potencial, dado que no todas son conservativas. La ecuación de Euler-Lagrange para las fuerzas disipativas generalizadas que actúan sobre el sistema es

$$\tilde{Q}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

El modelado mediante ecuaciones de Euler-Lagrange o mediante el lagrangiano, generalmente se expresa de la forma:

$$\tau = M(\dot{q})\ddot{q} + D(q, \dot{q}) + G(q) + C(q, \dot{q})\dot{q},$$

en donde:

M es la matriz de inercias del sistema, siempre es invertible,

D es la matriz de disipación del sistema, es positiva semidefinida, cuando no hay fricciones es cero,

G es la matriz de gravedad del sistema, contiene la información de las fuerzas asociadas a la gravedad,

C es la matriz de coriolis del sistema, contiene la información de los efectos de fuerzas de coriolis y términos rotacionales,

q es el vector de estados del sistema,

τ es la entrada del sistema,

2.3. Discretización

Cuando se hacen implementaciones físicas se debe tomar en cuenta que las lecturas del sistema tienen cierto tiempo de muestreo, por lo que resulta conveniente pasar del tiempo continuo al discreto en la planta. Lo anterior se puede hacer por diversos métodos, en esta tesis se utiliza el método de discretización exacta con retenedor de orden cero (ZOH). Para un sistema lineal representado en variables de estado este método se expresa como

$$A_d = e^{A_c T_s},$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A_c a} B_c da,$$

$$C_d = C_c,$$

$$D_d = D_c,$$

donde $T_s =$ es el tiempo de muestreo, el cual debe ser el mismo para el diseño de controladores u observadores.

2.4. Linealización

La mayoría de los sistemas tienen una naturaleza no lineal, mientras que algunas técnicas de control como LQR o asignación de polos, únicamente trabajan con sistemas lineales.

Una alternativa es linealizar los sistemas para facilitar el diseño de controladores, lo cual se logra aproximando el comportamiento del sistema no lineal al de un plano o una recta, dicha aproximación se hace en torno a un punto de operación. Para lo cual se modela al sistema en variables de estado [5], teniendo la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \\ y &= h(x, u),\end{aligned}$$

con puntos de equilibrio constantes (U, X, Y) .

El siguiente paso es expandir al sistema en torno al punto de operación $x = X$ y $u = U$, lo que se hace mediante series de Taylor. Siendo el resultado de la expansión

$$\begin{aligned}f(x, u) &= f(X, U) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} + T.O.S, \\ h(x, u) &= h(X, U) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X, U)} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X, U)} + T.O.S,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Las matrices del sistema linealizado en torno al punto de operación se obtienen a partir de los jacobianos de la siguiente forma

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad B \in \mathfrak{R}^{n \times m},$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X,U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad C \in \mathfrak{R}^{p \times n},$$

$$D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X,U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \vdots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad D \in \mathfrak{R}^{p \times m}.$$

Finalmente se considera que $x - X$ es un valor pequeño, con lo que se puede aproximar al sistema como

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}, \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}, \end{aligned}$$

en donde

$$\bar{x} = x - X, \quad \bar{u} = u - U, \quad \bar{y} = y - Y \quad \text{y} \quad \dot{\bar{x}} = \dot{x}.$$

Es importante mencionar que el modelo linealizado, únicamente es válido para una región cercana al punto de operación respecto al cual se linealiza.

2.5. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La estabilidad de un sistema se entiende como la continuidad en la evolución de sus trayectorias, ante pequeños cambios de la condición inicial y la entrada [7].

Para conocer la estabilidad en el sentido de Lyapunov se considera una entrada $u(t) = 0$ y una condición inicial $X_0 \neq 0$ para un sistema $\dot{x} = f(x)$ con un punto de equilibrio $X = 0$, en donde se dice lo siguiente

- Es marginalmente estable si cada X_0 finito excita una respuesta de $x(t)$ acotada.
- Es asintóticamente estable si cada X_0 finito excita una respuesta de $x(t)$ acotada que además cumple con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

En cuanto a los puntos de equilibrio, se definen tres regiones con centro en el punto de equilibrio. La primera de radio k es una bola que contiene a las soluciones y condiciones iniciales del sistema, la región de las soluciones es la de radio ε y la región de las condiciones iniciales es de radio δ . Un punto

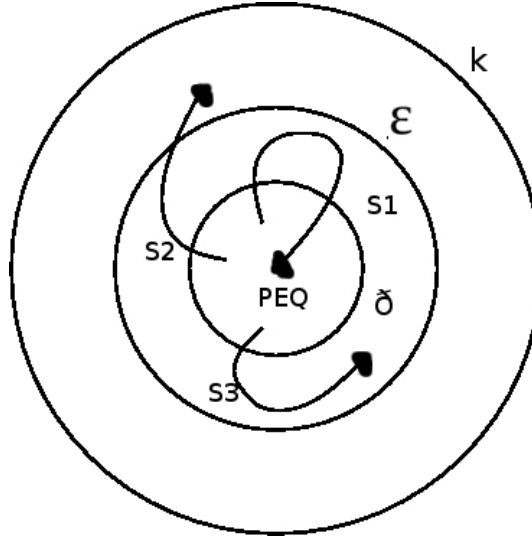


Figura 2.1: Regiones alrededor del punto de equilibrio

de equilibrio es estable, si todas las trayectorias que comienzan dentro de la región de radio δ permanecen dentro de la región de radio ϵ cuando el tiempo tiende a infinito, tal es el caso de la trayectoria S_3 en la figura 2.1. Si, además, dicha trayectoria tiende al punto de equilibrio, como en la trayectoria S_1 en la misma figura, se trata de un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si la trayectoria sale de la región de radio ϵ el punto de equilibrio es inestable, como lo muestra S_2 [21].

Para el caso de los sistemas lineales $\dot{x} = Ax$ con una entrada acotada $u(t) = 0$ y una condición inicial $X_0 \neq 0$, la estabilidad se puede determinar mediante los valores característicos λ_i de A : son marginalmente estables los sistemas con al menos un valor característico $\lambda_i = 0$; asintóticamente estables los que tengan todos sus valores característicos con parte real menor negativa e inestables los que tengan al menos un valor característico con parte real positiva.

Para el caso de los sistemas discretos la estabilidad también es determinada por sus valores característicos. Siendo estables aquellos sistemas en los cuales todos sus valores propios se encuentren dentro de un círculo de radio unitario con centro en el origen. Por su parte, los sistemas con uno o más valores propios que salen del círculo mencionado, son inestables.

2.6. Control óptimo lineal

El control óptimo se basa en minimizar una función de costo, tal que encuentre la ley de control más adecuada para el problema que se ataca [5]. La

función de costo a minimizar está dada por la ecuación:

$$J = m(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} l(x, u, t) dt,$$

en donde la función l es el término de pesos, tanto para la trayectoria $x(t)$ como para el esfuerzo de control $u(t)$; por su parte el término $m(x(t_1))$ evalúa el estado final del sistema.

Dado un sistema

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

con un control realimentado $u(t) = \varphi(x, t)$. El valor mínimo de la función de costo J , se define como

$$J^* = \min_{u[t_0, t_1]} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} l(x, u, t) dt + m(x(t_1)) \right\},$$

donde al control que minimiza a J se le denomina “control óptimo ” y se le denota u^* . Este control es único para cada función de costo.

Por su parte, según el **principio de optimalidad** si $u^*(t)$ es óptimo en el intervalo $[t, T]$, entonces necesariamente es óptimo en el subintervalo $[t + \Delta t, T]$

La solución al problema de optimalidad se obtiene a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u[t]} \left\{ l(x, u, t) + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} f(x, u, t) \right\},$$

que tiene como condición de frontera

$$J^*(x, T) = m(x(T)) \forall x.$$

Por su parte, el control que minimiza a J es

$$u^* = \varphi \left(\frac{\partial^T J^*}{\partial x}, x, t \right),$$

al aplicarse a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = l(x, \varphi \left(\frac{\partial^T J^*}{\partial x}, x, t \right), t) + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} f(x, \varphi, t),$$

con condición de frontera en

$$J^*(x, T) = m(x(T)).$$

El regulador cuadrático lineal (LQR por sus siglas en inglés) es un caso particular de control óptimo lineal, en el cual se manejan en forma matricial, tanto la ecuación de estado como los factores de peso del sistema. Es un controlador por realimentación de estados, con ganancia constante, es decir, estático. Para el caso particular de un LQR se tienen las siguientes características:

un sistema lineal en la forma

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),$$

con un control lineal realimentado

$$u = -k(t)x(t),$$

donde el objetivo es regular a x en un punto de equilibrio.

De esta manera, se forma la función de costo cuadrática

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(t_1) M x(t_1),$$

con

$$Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}, Q \geq 0,$$

$$R \in \mathfrak{R}^{m \times m}, R > 0,$$

$$M \in \mathfrak{R}^{n \times n}, M \geq 0,$$

siendo n el número de estados y m es el número de entradas del sistema.

En la función de costo Q es la matriz de pesos de los estados, mientras que R es la matriz de peso del gasto energético. Cuando se incrementa Q se asigna un mayor peso a la convergencia de los estados, de manera similar, al incrementar R se incrementa el peso asignado al gasto energético.

En la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman la función de costo tiene la relación

$$l(x, u, t) = x^T Q x + u^T R u,$$

$$J^*(x, t_1) = x^T(t_1) M x(t_1),$$

$$f(x, u, t) = Ax + Bu,$$

en donde $Mx(t_1)$ es el término que evalúa el estado final del sistema.

Se desea minimizar al término

$$l(x, u, t) + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} f(x, u, t),$$

el cual se reescribe como

$$H = x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} (Ax + Bu).$$

Para obtener el mínimo, se deriva con respecto a u y se iguala con cero

$$\nabla_u H = u^T R + u^T R + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} B = 0,$$

$$2u^T R = -\frac{\partial^T J^*}{\partial x} B,$$

debido a que $R > 0$ es posible obtener R^{-1} , entonces

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial^T J^*}{\partial x}.$$

Para comprobar que u^* es un mínimo se obtiene la segunda derivada

$$\nabla_u^2 H = 2R > 0.$$

Considerando que $u^* = -k(t)x(t)$, el valor mínimo de J toma la forma

$$J^* = x^T(t)P(t)x(t),$$

que es una forma cuadrática con $J^* > 0$ y con $P(t) = P^T(t)$.

De esta manera

$$\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T = x^T P + x^T P = 2x^T P,$$

entonces

$$u^* = -R^{-1} B^T P(t)x(t),$$

y por lo tanto $k(t) = R^{-1} B^T P(t)$.

Para encontrar a $P(t)$ se sustituye el control óptimo en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= (A - BR^{-1}B^T P)x(t), \\ l(x, u, t) &= x^T Qx + (-x^T PBR^{-1})R(-R^{-1}B^T Px), \\ \frac{\partial J^*}{\partial t} &= \frac{\partial(x^T Px)}{\partial t} = x^T \dot{P}x, \end{aligned}$$

pudiendo reescribir la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman como

$$-x^T \dot{P}x = x^T Qx + x^T PBR^{-1}B^T x + 2x^T P(A - BR^{-1}B^T P)x.$$

Desarrollando la ecuación anterior

$$-x^T \dot{P}x = x^T Qx + 2x^T P Ax - x^T PBR^{-1}B^T Px.$$

Sin embargo el término $2x^T P Ax$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} 2x^T P Ax &= x^T P Ax + x^T P Ax, \\ &= x^T P Ax + (x^T P Ax)^T, \\ &= x^T P Ax + x^T A^T P x. \end{aligned}$$

Además se puede obviar la forma cuadrática $x^T(\dots)x$, obteniendo finalmente la ecuación de Ricatti, dada por

$$-\dot{P} = Q - PBR^{-1}B^T P + A^T P + PA \quad ; P \in \mathfrak{R}^{n \times n},$$

$$m(x(t_1)) = x^T(t_1)Mx(t_1),$$

cuya condición de frontera es

$$P(t_1) = M.$$

En esta tesis únicamente se utiliza el método de solución del LQR para tiempo infinito, en el cual la función de costo está dada por

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

En el problema de horizonte de tiempo infinito se asume que P es una solución estable, por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} P < \infty$. Lo que implica que $\dot{P} = 0$, razón por la cual la ecuación de Ricatti queda reducida a

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

lo cual resulta en un control con ganancia constante.

$$u = -kx,$$

$$k = R^{-1}B^T P(t).$$

Aunque la ecuación de Ricatti tiene varias soluciones para P , se debe considerar aquella en la que $P > 0$ y además sea invertible.

Para el caso discreto la función de costo que se desea minimizar es

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u).$$

Se busca la matriz $P[n]$ que solucione la ecuación de Ricatti en tiempo discreto dada por

$$A^T P A - P - (A^T P B)(R + B^T P B)^{-1}(B^T P A) + Q = 0.$$

Al igual que en el caso de tiempo continuo P debe de ser invertible, además de positiva definida. R debe de ser positiva definida y Q positiva semidefinida.

Al encontrar la matriz P que cumpla con lo anterior y sea solución de la ecuación de Ricatti se puede encontrar una matriz de ganancias k

$$k = (B^T P B + R)^{-1}(B^T P A), \quad (2.3)$$

en donde el control está dado por $u = -kx$ y el sistema en variables de estado en tiempo discreto se expresa como

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n].$$

2.7. Incertidumbre paramétrica

En algunos campos complejos, los modelos matemáticos únicamente sirven para simplificar y reducir representaciones de la física real del sistema; en estos casos existen un gran número de incertidumbres en los parámetros, condiciones iniciales y finales, y leyes constitutivas de éste [23].

Suponiendo un sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$y = h(x, u, t),$$

el comportamiento de este sistema se determina mediante los coeficientes de las matrices que lo caracterizan. Por lo general, en los casos prácticos, estos coeficientes dependen de parámetros físicos, tales como masas, resistencias, coeficientes de fricción, etc [2]. Se llama **incertidumbre paramétrica** a la falta o deficiencia en la información de los parámetros antes mencionados; se presenta cuando no se conocen exactamente las condiciones iniciales o finales, los parámetros físicos del sistema, las leyes constitutivas del modelo o existe ruido en la medición. Todos los fenómenos anteriores, se presentan en gran medida en sistemas físicos complejos de modelar, como ya se ha dicho.

Los principales problemas que se presentan para modelar o eliminar incertidumbres paramétricas son

1. Uso de herramientas matemáticas complejas para el manejo de señales, que por lo general no son diferenciables ni integrables de manera ordinaria
2. Es complicado realizar experimentos con procesos aleatorios, debido a que se requiere material especial y bastante tiempo de medición
3. Las no linealidades producen grandes perturbaciones en la teoría lineal, razón por la cual los sistemas pueden llegar a ser complejos de modelar adecuadamente de forma convencional.

El análisis del impacto que tienen las incertidumbres paramétricas, constituye una rama de investigación dentro de la teoría de control.

2.8. Sistemas difusos

2.8.1. Lógica difusa

La lógica difusa fue propuesta por Lofti Zadeh en 1965, con el tiempo ha demostrado ser útil en la solución de problemas de control. Ha sido empleada con mucho éxito sobre todo en Japón, en donde se pueden encontrar componentes de lógica difusa en aparatos como televisores, cámaras de video, lavadoras, hornos de microondas, etc [1]. En lo referido a control, se ha utilizado para sistemas de purificación de agua y procesos de manufactura en la industria cementera; quizás una de las aplicaciones más importantes de control mediante sistemas difusos,

es la utilizada para la operación de los trenes automáticos del subterráneo de la ciudad de Sendai [20].

En la lógica difusa, una variable pertenece en cierto grado a un conjunto, dicha pertenencia toma valores dentro del intervalo $[0, 1]$. La lógica booleana se puede entender como un caso particular de la lógica difusa, en el que la variable toma el valor de 0 o 1 según sea el caso.

Adjetivos como “mucho” o “poco” a menudo se utilizan en el lenguaje coloquial de las personas para denotar qué tan marcada es alguna característica; dicho análisis se realiza de forma empírica. Como ejemplo se puede considerar el clima, del cual sin conocer algún modelo matemático que lo describa, las personas son capaces de hacer un análisis e indicar cuándo un día es frío o caluroso.

Este tipo de análisis empírico presenta la ventaja de no requerir un modelo que describa al sistema, sin embargo, es necesario contar con un vasto conocimiento de éste, para que el análisis sea lo más adecuado posible.

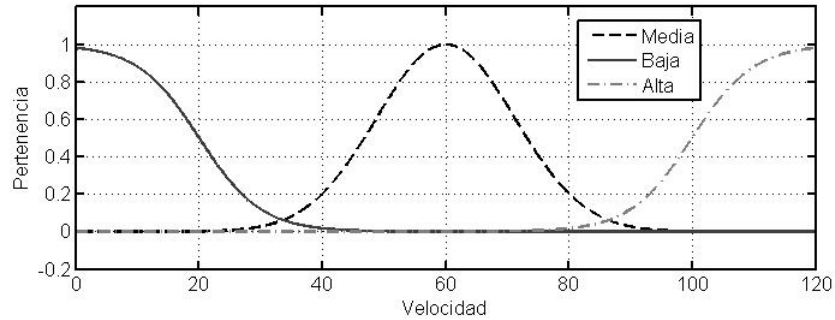


Figura 2.2: Ejemplo de conjuntos difusos para la velocidad de un carro

Los sistemas difusos se componen principalmente por tres partes, que son

- **Conjuntos difusos.**- Son los conjuntos a los cuales puede pertenecer una variable, por ejemplo para el caso de la estatura de una persona, pueden existir los conjuntos difusos de estatura alta, estatura media o estatura baja, se puede observar un ejemplo en la figura 2.2. Las variables de entrada se etiquetan con términos lingüísticos.
- **Funciones de membresía.**- Determinan el valor de pertenencia de una variable a un conjunto difuso. Algunos tipos de funciones de membresía son

$$\begin{array}{l}
 \text{Trapezoidales} \\
 \text{Triangulares} \\
 \text{Gaussianas} \\
 \text{Sigmoiales}
 \end{array}
 \mu_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} -a_1x + b_1, x \in [x_{min}, x_{m1}] \\ c, x \in [x_{m1}, x_{m2}] \\ a_2x + b_2, x \in [x_{m2}, x_{max}] \end{array} \right\}$$

$$\mu_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} -a_1x + b_1, x \in [x_{min}, x_{m1}] \\ a_2x + b_2, x \in [x_{m2}, x_{max}] \end{array} \right\}$$

$$\mu_i(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\mu_i(x) = \frac{\tanh(x)+1}{2}$$

los cuales se muestran en la figura 2.3

- **Reglas difusas.**- Son variables lingüísticas expresadas mediante conjuntos difusos, las cuales tienen la estructura

Si x_1 es A_1 y x_2 es A_2 y ... y x_n es A_n (parte antecedente) entonces y es B_i (parte consecuente)

En la salida final cada regla se debe ponderar, el valor de verdad o valor de activación de cada regla depende de su parte antecedente.

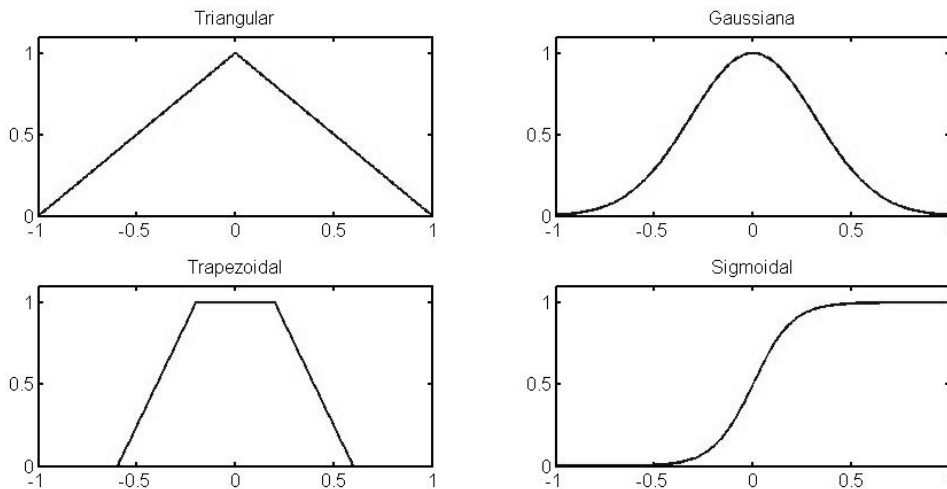


Figura 2.3: Ejemplos de funciones de membresía

2.8.2. Operadores lógicos difusos

Son una extensión de los operadores lógicos booleanos, en donde los valores se obtienen mediante las funciones de membresía de cada variable. Los operadores lógicos difusos son

$$\begin{array}{ll}
\text{Negación } NOT & NOT(\mu_i(x)) = 1 - \mu_i(x) \\
\text{Conjunción } AND & \mu_i(x)AND\mu_j(x) = \left\{ \begin{array}{l} \min[\mu_i(x), \mu_j(x)] \\ \mu_i(x)\mu_j(x) \\ \max[0, \mu_i(x) + \mu_j(x) - 1] \end{array} \right\} \\
\text{Disyunción } OR & \mu_i(x)OR\mu_j(x) = \left\{ \begin{array}{l} \max[\mu_i(x), \mu_j(x)] \\ \mu_i(x) + \mu_j(x) - \mu_i(x)\mu_j(x) \\ \min[1, \mu_i(x) + \mu_j(x)] \end{array} \right\}
\end{array}$$

Para clasificación o rápida implementación en procesadores limitados se utilizan los criterios de *max* y *min*, mientras que en sistemas de identificación, control y aproximación se suelen utilizar las formas algebraicas, por suavidad y diferenciabilidad.

2.8.3. Sistemas Difusos Takagi-Sugeno

El diagrama de bloques de la figura 2.4 muestra las etapas de los sistemas difusos



Figura 2.4: Diagrama de bloques que describe el proceso de un control difuso

El proceso de *difusión* es aquel en donde las entradas adquieren grados de pertenencia para los pasos posteriores, la *agregación* es la evaluación de la parte antecedente, la *activación* es la evaluación de la parte consecuente, la *acumulación* es la combinación de las partes consecuentes y finalmente la *desdifusión* es donde se obtiene la decisión final.

Según el método utilizado para llevar a cabo los pasos anteriores, los sistemas difusos se dividen en tipo **Mamdani**, **Larsen**, **Tsukamoto** o **Takagi-Sugeno** [12].

Para esta tesis únicamente se utilizan sistemas difusos del tipo Takagi-Sugeno en los cuales las reglas están dadas en la forma

$$R_i : \text{si } x_1 \text{ es } A_{i1} \text{ y } x_2 \text{ es } A_{i2} \text{ y } \dots \text{ y } x_k \text{ es } A_{ik} \text{ entonces } f_i(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

o bien de la forma

$$R_i : \text{si } x_i \text{ es } A_i \text{ entonces } f_i(x), i = 1, 2, \dots, n,$$

donde f_1, f_2, \dots, f_n son funciones $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \rightarrow \mathfrak{R}$ y $A_i = \bigwedge_{j=1}^k A_{ij}$.

Dichas reglas se combinan para obtener la función

$$R(x) = \frac{A_1(x)f_1(x) + A_2(x)f_2(x) + \dots + A_n(x)f_n(x)}{A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_n(x)},$$

la cual es una función real.

Tomando el producto de los elementos A_{ij} , las reglas difusas se pueden expresar de una manera simplificada como

$$R_j : \text{si } x \text{ es } A_j \text{ entonces } u_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

donde el grado de activación de cada regla R_j es $A_j(x)$, mientras que el valor total de la señal de control se obtiene a partir del método de desfusión de promedios ponderados. El cual consiste en obtener un promedio de todas las reglas con su respectivo grado de activación, es decir, al momento de promediar tienen un mayor peso las reglas que presentan un mayor grado de activación; para este caso se utiliza el criterio de máximos para realizar la conjunción entre funciones [14].

La desfusión por este método se describe mediante el promedio ponderado

$$u(x) = \frac{\sum_{j=1}^r A_j(x) f_j(x)}{\sum_{j=1}^r A_j(x)}.$$

En los sistemas Takagi-Sugeno, las funciones f_j generalmente son lineales, siendo expresadas como

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{0j} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i.$$

Sin embargo, en algunos casos también se utilizan funciones cuadráticas

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{0j} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i^2,$$

o funciones trigonométricas

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \sin x_i}.$$

La decisión del tipo de función a emplear, depende de la aplicación que se le da al control difuso.

Por su parte los sistemas tipo **Singleton** son un caso particular de los Takagi-Sugeno, en los cuales las funciones f_j son constantes a_{0j} .

Capítulo 3

Análisis del sistema péndulo-carro-balancín

El sistema consta de un péndulo invertido colocado sobre un balancín, el cual se puede dividir en dos partes. La primera consta del balancín, en donde, se pretende que al mover el carro por medio del motor, el balancín llegue a su punto de equilibrio inestable en lazo abierto. La segunda parte del sistema es el péndulo invertido, el cual mediante el motor del carro, debe llegar a su punto de equilibrio inestable en lazo abierto, es decir, cuando la barra del péndulo se encuentra en posición vertical respecto a su base.

El sistema con el cual se trabaja es un sistema electromecánico subactuado, esto significa que posee menos entradas de control que grados de libertad. Únicamente se cuenta con un actuador (motor) y tres sensores (potenciómetros) que se encargan de medir la posición traslacional y las posiciones angulares. Además del sistema físico, para este trabajo son necesarios un sistema de cómputo que se encarga del control, y una tarjeta de adquisición que sirve para la lectura y escritura de datos.

3.1. Parámetros del sistema

La mayoría de los valores constantes del sistema se encuentran indicados en los manuales [16] [17], los cuales son utilizados para los modelos matemáticos. Existen otros valores que se determinan de forma experimental en la sección 3.2, en la tabla 3.1 se encuentra la lista de los valores obtenidos de los manuales

Otro parámetro que se utiliza es la aceleración gravitacional g , la cual depende de la altura en la que se realiza el experimento. Para este trabajo se considera $g = 9.78 \frac{m}{s^2}$.

24CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

masa del carro	$0.52Kg$
masa del balancín	$3.3Kg$
masa de la barra	$0.209Kg$
centro de gravedad de la barra	$0.32m$
inercia del balancín	$0.427Kg\,m^2$
altura de la base del balancín al riel	$0.14m$
altura de la base del balancín al punto de pivote	$0.06m$
resistencia en la armadura del motor	2.6Ω
relación de transformación en la caja de engranes	$3.71\frac{N}{A}$
radio del engrane del motor	$0.00635m$
constante de par del motor	$0.00767\frac{Nm}{A}$

Cuadro 3.1: Valores nominales de los parámetros del sistema

3.2. Identificación de parámetros y caracterización del sistema

3.2.1. Coeficiente de fricción estática y coeficiente de fricción viscosa

Para los modelos matemáticos, se desprecian todas las fuerzas de fricción, excepto la fricción viscosa entre el carro y el riel. Para obtener el coeficiente de fricción entre estos dos cuerpos, se descompone la fuerza mg de la figura 3.1, para después encontrar las ecuaciones que describen el comportamiento de las fuerzas en cada eje

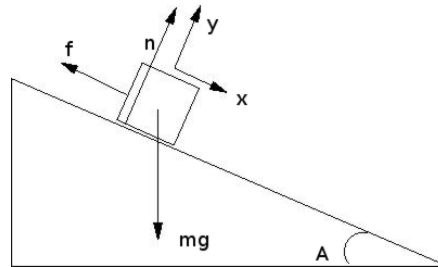


Figura 3.1: Plano inclinado con una masa m

$$\Sigma_x = 0 = mg \sin A - f,$$

$$\Sigma_y = 0 = mg \cos A - n,$$

de donde se despeja a f y a n respectivamente,

$$f = mg \sin A,$$

3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 25

$$n = mg \cos A.$$

Al relacionar las dos ecuaciones anteriores

$$f = \frac{n}{\cos A} \sin A = n \tan A,$$

al variar el ángulo de inclinación A hasta que la fuerza de fricción estática tome su valor máximo

$$\mu_s n = n \tan A,$$

$$\mu_s = \tan A.$$

Haciendo lo anterior se encuentra el coeficiente de fricción estática de un bloque sobre un plano inclinado; se puede aplicar por su similitud, al carro sobre el balancín. De esta manera, se inclina el balancín hasta que el carro comienza a moverse, considerando este punto como aquel en el que la fuerza de fricción estática alcanza su mayor valor. El resultado es útil para tener un mayor conocimiento de los efectos de la fricción en el sistema.

Las gráficas de los experimentos se muestran en la figuras 3.2 y 3.3, de las cuales se pueden obtener los coeficientes de fricción estática

$$\mu_{s1} = \tan(0.2249) = 0.23,$$

$$\mu_{s2} = \tan(0.2114) = 0.21,$$

$$\mu_{s3} = \tan(0.2244) = 0.23,$$

$$\mu_{s4} = \tan(0.2233) = 0.23,$$

Al obtener un promedio entre los cuatro experimentos

$$\frac{\mu_{s1} + \mu_{s2} + \mu_{s3} + \mu_{s4}}{4} = 0.225,$$

por lo que se tiene un coeficiente de fricción estática aproximado

$$\mu_s = 0.225.$$

Además de los resultados obtenidos, se consulta el experimento realizado en [11] para encontrar el coeficiente de fricción viscosa del sistema, dicho experimento consiste en utilizar un método de mínimos cuadrados resolviendo la ecuación

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

donde

$\hat{\Theta}$ es el vector que incluye el coeficiente de fricción viscosa

Φ es la matriz formada por el vector de $n - 1$ muestras de velocidad y fuerza en el carro, en distintos instantes de tiempo

Y es el vector de velocidades de n muestras en distintos instantes de tiempo

Los resultados experimentales de aplicar el método citado, arrojan un valor de $b = 0.2 \frac{N \cdot \text{seg}}{m}$, el cual es el utilizado para los modelos matemáticos realizados en esta tesis.

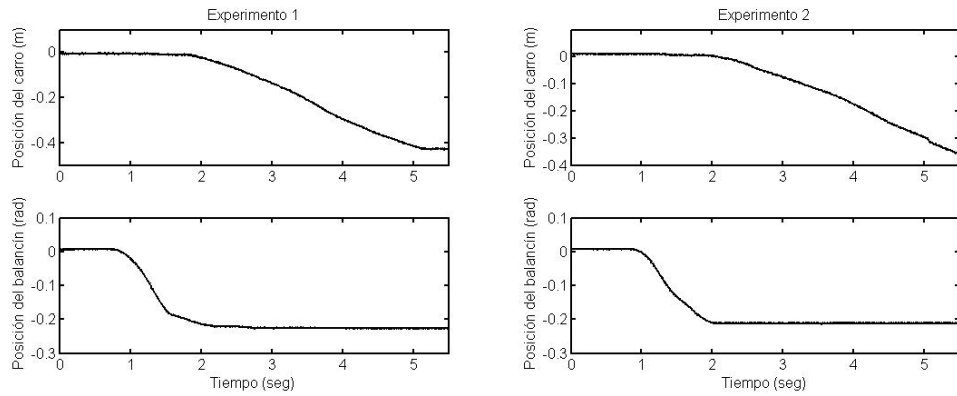


Figura 3.2: Experimentos 1 y 2 que tienen, respectivamente, coeficientes de fricción estática de 0.23 y 0.21

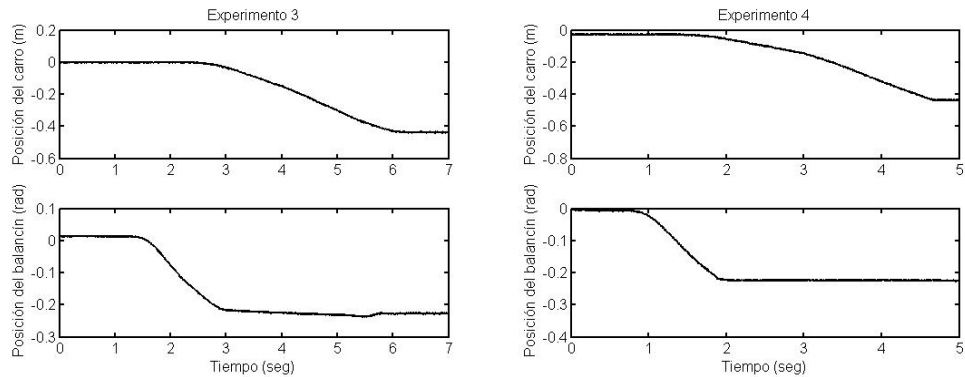


Figura 3.3: Experimentos 3 y 4 que tienen, respectivamente, coeficientes de fricción estática de 0.23 y 0.23

3.2.2. Acondicionamiento del motor

El motor utilizado es alimentado con corriente directa, su rango de operación debe de ser $\pm 7.5V$. Sin embargo, la tarjeta de adquisición que es la que alimenta al motor tiene un rango de escritura de 0 a 5V. Por otra parte la corriente que brinda no es suficiente para que el motor funcione. Por estas causas, mediante amplificadores operacionales se acondiciona la señal de la siguiente manera

1. Al voltaje enviado por la tarjeta se le restan 2.5V

3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 27

2. Se triplica la señal obtenida de la diferencia
3. Se aumenta la corriente con un amplificador de potencia, en configuración de seguidor de voltaje.

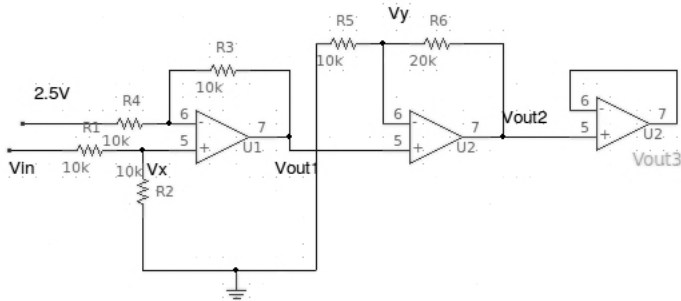


Figura 3.4: Esquema de la etapa de acondicionamiento del motor

La figura 3.4 muestra el diagrama de conexiones para el acondicionamiento del motor, la ganancia de voltaje se obtiene al hacer un análisis de corrientes

$$\frac{V_{in} - V_x}{R} = \frac{V_x}{R}, \quad (3.1)$$

$$\frac{2.5 - V_x}{R} = \frac{V_x - V_{out1}}{R}, \quad (3.2)$$

de la Ec. 3.1 se puede despejar V_x

$$V_{in} - V_x = V_x,$$

$$V_{in} = 2V_x,$$

$$V_x = \frac{1}{2}V_{in},$$

al sustituir lo anterior en la Ec. 3.2

$$\frac{2.5 - \frac{1}{2}V_{in}}{R} = \frac{\frac{1}{2}V_{in} - V_{out1}}{R},$$

$$2.5 - V_{in} = -V_{out1},$$

$$V_{out1} = V_{in} - 2.5, \quad (3.3)$$

para el siguiente amplificador operacional

$$-\frac{V_y}{R} = \frac{V_y - V_{out2}}{2R}, \quad (3.4)$$

se observa que

$$V_y = V_{out1},$$

al sustituir lo anterior en la Ec. 3.4

$$\begin{aligned} -V_{out1} &= \frac{1}{2}(V_{out1} - V_{out2}), \\ \frac{1}{2}V_{out2} &= \frac{3}{2}V_{out1}, \\ V_{out2} &= 3V_{out1}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

finalmente al sustituir la Ec. 3.3 en la Ec. 3.5

$$V_{out2} = 3(V_{in} - 2.5).$$

Para el tercer amplificador, al ser un seguidor de voltaje, se tiene una relación

$$V_{out3} = V_{out2} = 3(V_{in} - 2.5).$$

El tercer amplificador incrementa la corriente sin modificar en forma alguna la señal de voltaje.

De esta forma, la tarjeta de adquisición escribe valores entre 0 y 5V, mientras que el motor es alimentado en un rango de $\pm 7.5V$.

3.2.3. Conversión par-voltaje

En los modelos de los sistemas de péndulo invertido y balancin, la variable de entrada es el par del motor, mientras que la tarjeta de adquisición, maneja voltajes; debido a lo anterior es necesario obtener una relación par-voltaje en el motor. Para el caso del modelo de péndulo-carro-balancín existe una relación que depende de la velocidad del carro y valores nominales [18, 22] que se encuentran en los manuales. Por su parte para modelar los sistemas por separado se define otra relación par-voltaje, que depende únicamente de estas variables; dicha relación se encuentra de forma experimental.

Para realizar el experimento se cuenta con un resorte de comportamiento casi lineal descrito en la siguiente tabla

Fuerza (N)	Elongación (mm)
1	5
2	9
3	15
4	20
5	24

3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 29

De los datos se puede obtener una relación entre fuerza y elongación de $1N$ cada $5mm$, sabiendo que en un resorte la fuerza es

$$F = kx,$$

se despeja la constante k

$$k = \frac{F}{x} \Rightarrow k = \frac{1}{0.005},$$

$$k = 200 \frac{N}{m}.$$

El siguiente paso del experimento consiste en mantener fijo un extremo del resorte, mientras que el otro se engancha en el carro; después se le aplica un voltaje constante al motor y se observa la elongación del resorte. La siguiente tabla muestra los datos obtenidos

Voltaje (V)	Elongación (mm)	Fuerza (N)
0.5	26	5.2
1	15	3
1.5	11	2.2
2	2	0.4
3	3	0.6
3.5	9	1.8
4	1.2	2.4
4.5	2	4

Además de los datos anteriores, el motor tiene una zona muerta; es decir aunque se le aplique un voltaje distinto de cero, el par del motor no es el necesario para vencer la fricción estática del carro. Para determinar esta zona muerta, se le coloca la barra al carro (pues es la masa máxima a la que se enfrenta el motor) y se le aplican al motor voltajes cercanos a $2.5V$. El carro se mueve a la izquierda hasta que el valor de voltaje aplicado al motor es de $2.16V$, mientras que el movimiento hacia el lado derecho comienza en $2.73V$, entonces se considera el intervalo de zona muerta $V \in [2.16, 2.73]$.

Finalmente con los datos obtenidos se puede encontrar, mediante una regresión lineal, las relaciones voltaje-par del motor, las cuales se muestran en las figuras 3.5 y 3.6, y están descritas por las ecuaciones

- Para el intervalo en el que el motor gira en sentido antihorario

$$T = 3.04V - 6.5,$$

$$V = 0.3199T + 2.1136,$$

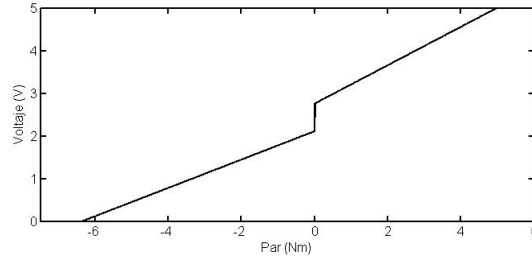


Figura 3.5: En la figura se muestra la relación par-voltaje del motor

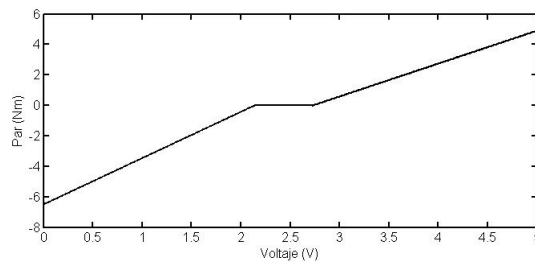


Figura 3.6: El la figura se muestra la relación voltaje-par del motor

- Para el intervalo en el que el motor gira en sentido horario

$$T = 2.16V - 5.9,$$

$$V = 0.45T + 2.76.$$

3.2.4. Filtros derivativos

En los modelos de los sistemas, es necesario tener conocimiento de las velocidades del carro, del péndulo o del balancín. Sin embargo, el sistema físico utilizado para este trabajo, no cuenta con sensores de velocidad. Una posible solución para este problema es derivar las señales de posición, las cuales se obtienen de los potenciómetros. No obstante, al hacer esto aumenta el ruido, teniendo como resultado una señales de velocidad ruidosas y poco precisas.

Para resolver el problema del ruido se implementan filtros derivativos pasabajas, de esta forma se deriva la señal de posición y se elimina ruido de la señal de velocidad. La frecuencia de corte de los filtros es de vital importancia, debido a que cuando se incrementa demasiado, la señal sufre un atraso que afecta las lecturas; mientras que al decrementarse puede dejar de eliminar el ruido necesario. Debido a lo anterior es importante elegir una frecuencia de corte, que elimine el suficiente ruido, sin atrasar demasiado la señal.

3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS Y CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA 31

En esta tesis los filtros que se utilizan son digitales, y se incluyen en los programas de Simulink respectivos a cada controlador. La función de transferencia de estos filtros está dada por

$$G(S) = \frac{XS}{S + XS}, \quad (3.6)$$

en donde X es la frecuencia de corte del filtro en $\frac{rad}{seg}$.

Lo anterior se puede aproximar en tiempo discreto, con el llamado método bilineal o de Tustin, el cual es

$$S = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1},$$

entonces, al aplicar el método de Tustin en la ecuación 3.6

$$G(z) = \frac{X \frac{2}{T_s} (z - 1)}{\frac{2}{T_s} (z - 1) + X(z + 1)},$$

$$G(z) = \frac{X \frac{2}{T_s} (z - 1)}{(\frac{2}{T_s} + X)z + (X - \frac{2}{T_s})},$$

al normalizar

$$numG(z) = \frac{X \frac{2}{T_s}}{X + \frac{2}{T_s}} (z - 1), \quad (3.7)$$

$$denG(z) = z + \frac{X - \frac{2}{T_s}}{X + \frac{2}{T_s}}, \quad (3.8)$$

en donde

T_s es el tiempo de muestreo

X es la frecuencia de corte del filtro derivativo pasabajas.

Los filtros derivativos utilizados en este trabajo, son iguales para todas las velocidades, teniendo una frecuencia de corte de $55Hz$. El tiempo de muestreo para los controladores lineales (LQR) es de $8ms$; mientras que para los controles difusos es de $10ms$. Al sustituir los valores en las ecuaciones 3.7 y 3.8

$$\frac{45.0819z - 45.0819}{z - 0.6393}; T_s = 0.008,$$

$$\frac{43.1372z - 43.1372}{z - 0.5686}; T_s = 0.01.$$

3.3. Modelado matemático

Para el diseño de los controladores lineales es necesario el modelo de los sistemas, por lo cual es necesario modelar el balancín, el péndulo invertido y finalmente el sistema de péndulo-carro-balancín.

Para linealizar el modelo del balancín se considera que el ángulo θ , formado por el riel y una línea paralela a la base del balancín, únicamente puede tomar valores pequeños por la configuración física del sistema. Debido a lo anterior se puede hacer una aproximación que tiene un resultado muy parecido a realizar la linealización por el método visto en 2.4.

Para el caso del modelo del péndulo invertido se puede hacer una aproximación similar a la del balancín, considerando que el ángulo α , que se forma entre la vertical y la barra, únicamente puede tomar valores pequeños. El punto de equilibrio del sistema requiere que los ángulos mencionados sean cero, de esta manera se hacen las siguientes aproximaciones

$$\cos\alpha \approx 1,$$

$$\sin\alpha \approx \alpha,$$

$$\cos\theta \approx 1,$$

$$\sin\theta \approx \theta,$$

Las variables elevadas al cuadrado o productos entre variables son iguales a cero.

3.3.1. Balancín

A partir de la figura 3.7 se definen las ecuaciones de las fuerzas que intervienen en el sistema

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + mh\ddot{\theta} - mx\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta = f, \quad (3.9)$$

$$(J + mh^2 + 2mx\dot{\theta} + mx^2)\ddot{\theta} + mh\ddot{x} + bh\dot{x} - mgh \sin \theta - mgx \cos \theta - Msgc \sin \theta = 0, \quad (3.10)$$

al despejar a \ddot{x} en la Ec. 3.9

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} - h\ddot{\theta} + x\dot{\theta}^2 + g \sin \theta - \frac{b\dot{x}}{m}, \quad (3.11)$$

obteniendo a $\ddot{\theta}$ en la Ec. 3.10:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgh \sin \theta + mgx \cos \theta + Msgc \sin \theta - mh\ddot{x} - bh\dot{x}}{J + mh^2 + 2mx\dot{\theta} + mx^2}, \quad (3.12)$$

sustituyendo la Ec. 3.11 en la Ec. 3.12:

$$\ddot{\theta} = \frac{mgx \cos \theta + Msgc \sin \theta - fh - mh\dot{\theta}^2}{J + 2mx\dot{\theta} + mx^2},$$

finalmente se sustituye $\ddot{\theta}$ en la Ec. 3.11 para obtener \ddot{x}

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} + x\dot{\theta}^2 + g \sin \theta - \frac{b\dot{x}}{m} - \frac{hmgx \cos \theta + hMsgc \sin \theta - fh^2 - mh^2x\dot{\theta}^2}{J + 2mx\dot{\theta} + mx^2},$$

al linealizar y agrupar los términos

$$\ddot{\theta} = \frac{mgx + Msgc\theta - hf}{J},$$

$$\ddot{x} = \frac{(mh^2 + J)f}{Jm} - \frac{g(Mshc - J)\theta + mghx}{J} - \frac{b\dot{x}}{m},$$

representando al sistema en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgh}{J} & -\frac{g(Mshc - J)}{J} & -\frac{b}{m} & 0 \\ \frac{mg}{J} & \frac{Msgc}{J} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mh^2 + J}{Jm} \\ -\frac{h}{J} \end{bmatrix} f,$$

donde

x y \dot{x} son la posición y velocidad del carro respectivamente

θ y $\dot{\theta}$ son la posición y velocidad angular del balancín respectivamente

f es la fuerza aplicada al carro

c es la distancia del punto de pivote del balancín al riel

h es la distancia de la base del balancín al riel

J es la inercia del balancín

Ms es la masa del balancín más el riel

m es la masa del carro

g es la aceleración gravitacional

b es el coeficiente de fricción viscosa entre el carro y el riel.

Al sustituir los valores se tiene como resultado las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1.6674 & 9.1451 & -0.3846 & 0 \\ 11.9101 & 4.5350 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.9690 \\ -0.3279 \end{bmatrix} f.$$

donde la matriz A tiene los valores característicos $\lambda(A) = \{3.4447, -0.1234 + 3.0698i, -0.1234 - 3.0698i, -3.5825\}$, de lo anterior es claro que el sistema en tiempo continuo es inestable.

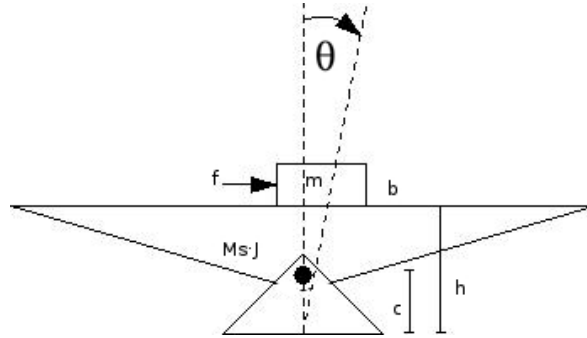


Figura 3.7: Balancín

Cuando se discretiza el sistema se tienen las nuevas matrices Ad y Bd para el tiempo discreto. Una vez utilizado el método de retenedor de orden cero (ZOH), el resultado es el sistema en tiempo discreto

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008 \\ -0.0133 & 0.0731 & 0.9969 & 0 \\ 0.0953 & 0.0363 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0157 \\ -0.0026 \end{bmatrix} f,$$

en donde la matriz Ad tiene los valores característicos $\lambda(Ad) = \{1.0279, 0.9987 + 0.0245i, 0.9987 - 0.0245i, 0.9717\}$. Con estos valores característicos se sabe que el sistema es inestable, ya que al menos uno se encuentra fuera del círculo de radio unitario.

El siguiente paso es comprobar la controlabilidad del sistema linealizado, para lo cual se obtiene el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango}(q_{bal}) = 4,$$

con lo que se comprueba que el sistema linealizado es controlable.

Para el diseño de un control difuso es necesario hacer un análisis empírico del sistema. Se sabe que cuando el carro permanece a la izquierda del centro del riel (referencia), entonces el balancín tiende a caer hacia el lado izquierdo; lo mismo ocurre cuando el carro se encuentra a la derecha de la referencia. Por otra parte, entre más alejado se encuentre el carro del centro del riel, más rápido cae el balancín. En caso de que éste se encuentre inclinado, basta con mover el carro al lado contrario para hacer contrapeso y lograr que el balancín pueda equilibrarse.

En resumen el carro debe estar al lado contrario de la inclinación del balancín, cuando éste logre estar centrado, entonces el carro deberá mantenerse en el centro del riel para que el balancín no pierda el equilibrio.

3.3.2. Péndulo

Esta parte del sistema se modela mediante ecuaciones diferenciales, que representan a las fuerzas involucradas en la dinámica de la barra y del carro, obtenidas a partir de la figura 3.8

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha} = VL \sin \alpha - HL \cos \alpha, \quad (3.13)$$

$$V - mg = -mL(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha), \quad (3.14)$$

$$H - m\ddot{x} = mL(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha), \quad (3.15)$$

donde tanto H como V son fuerzas que se presentan en el punto de pivote; estas fuerzas son producto del movimiento del carro y son, respectivamente, la fuerza en el eje horizontal y la fuerza en el eje vertical.

La suma de fuerzas de interés, que actúan sobre el carro es

$$f = M\ddot{x} + b\dot{x} + H. \quad (3.16)$$

De la Ec. 3.15 se despeja a la fuerza H y al sustituirla en la Ec. 3.16

$$f = (M + m)\ddot{x} + mL(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + b\dot{x}. \quad (3.17)$$

De la Ec. 3.17 se encuentra una relación entre \ddot{x} y $\ddot{\alpha}$ descrita por

$$\ddot{x} = \frac{f + mL(\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) - b\dot{x}}{M + m},$$

se despeja a la fuerza V de la Ec. 3.14, y ya conociendo a la fuerza H , se pueden sustituir estas dos fuerzas en la Ec. 3.13

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\alpha} = (mg - mL(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha))L \sin \alpha - (mL(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) + m\ddot{x})L \cos \alpha, \quad (3.18)$$

de la Ec. 3.18 se agrupan términos para finalmente encontrar otra relación entre \ddot{x} y $\ddot{\alpha}$

$$\ddot{\alpha} = \frac{3}{4} \frac{g \sin \alpha}{L} - \frac{3}{4} \frac{\ddot{x} \cos \alpha}{L},$$

de las relaciones obtenidas entre \ddot{x} y $\ddot{\alpha}$ es posible despejar ambas variables:

$$\ddot{x} = \frac{f - b\dot{x} + mL\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \frac{3}{4}mg \cos \alpha \sin \alpha}{(M + m) - \frac{3}{4}m \cos^2 \alpha},$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{(M + m)g \sin \alpha - \cos \alpha (f + mL\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - b\dot{x})}{\frac{4}{3}L(M + m) - Lm \cos^2 \alpha}.$$

36CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

Al linealizar y agrupar términos,

$$\ddot{x} = \frac{f - b\dot{x} - \frac{3}{4}mg\alpha}{(M+m) - \frac{3}{4}m},$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{(M+m)g\alpha - f + b\dot{x}}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm}.$$

Si se representa al sistema en variables de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\frac{3}{4}mg}{(M+m) - \frac{3}{4}m} & -\frac{b}{(M+m) - \frac{3}{4}m} & 0 \\ 0 & \frac{(M+m)g}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm} & \frac{b}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{(M+m) - \frac{3}{4}m} \\ -\frac{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm}{\frac{4}{3}L(M+m) - Lm} \end{bmatrix} f,$$

donde

x y \dot{x} son la posición y velocidad del carro, respectivamente

α y $\dot{\alpha}$ son la posición y velocidad angular del péndulo, respectivamente

f es la fuerza aplicada al carro

L es la distancia del pivote al centro de masa de la barra

m es la masa de la barra

M es la masa del carro

g es la aceleración gravitacional

b es el coeficiente de fricción viscosa entre el carro y el riel.

Al sustituir los valores

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2.9213 & -0.3463 & 0 \\ 0 & 29.7687 & 0.8117 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.7316 \\ -4.0584 \end{bmatrix} f.$$

donde la matriz A tiene los valores característicos $\lambda(A) = \{0, 5.4182, -5.4981, -0.2665\}$, de lo anterior es claro que el sistema en tiempo continuo es inestable.

Al discretizar el sistema se obtienen las nuevas matrices Ad y Bd para el tiempo discreto. Una vez utilizado el método de retenedor de orden cero (ZOH), el sistema resultante en tiempo discreto es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.008 \\ 0 & -0.0233 & 0.9972 & 0 \\ 0 & 0.2381 & 0.0065 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0138 \\ -0.0324 \end{bmatrix} f.$$

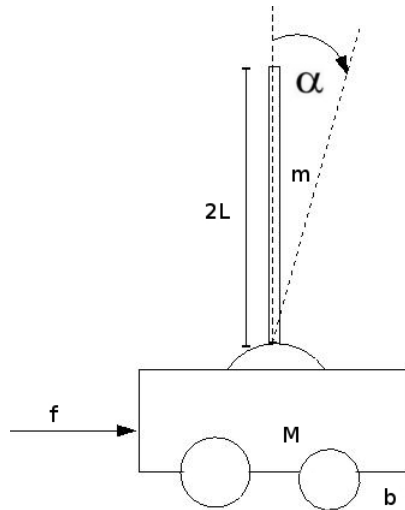


Figura 3.8: Péndulo invertido

Para comprobar la estabilidad del sistema se observan los valores propios de la matriz Ad , los cuales son $\lambda(Ad) = \{1, 1.0443, 0.9570, 0.9979\}$. A partir de estos valores característicos se determina que este sistema es inestable en lazo abierto, pues uno de los valores característicos está fuera del círculo de radio unitario.

De la misma forma que ocurre con el balancín, es importante comprobar la controlabilidad del sistema mediante el rango de la matriz de controlabilidad

$$\text{rango}(q_{bal}) = 4,$$

con lo que se comprueba que el sistema linealizado es controlable.

Al igual que ocurre con el balancín, es necesario hacer un análisis empírico del sistema. Cuando el péndulo se encuentra cayendo hay que compensar el movimiento, moviendo al carro rápidamente hacia el mismo lado hacia el cual cae aquél, de esta manera se evita que la barra caiga totalmente. No obstante, hacer que el carro converja a la referencia es un problema distinto al caso del balancín, pues se tiene como prioridad mantener en posición vertical a la barra, aún cuando esto signifique alejar al carro del centro del riel.

3.3.3. Sistema péndulo-carro-balancín

Al unir los dos sistemas ya modelados anteriormente, se obtiene el sistema de la figura 3.9, el cual tiene más estados y cuenta con una sola entrada al igual que los dos anteriores; además presenta fenómenos no lineales. El modelo

38CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

matemático se obtiene a partir de los modelos expuestos en [18, 22], haciendo las adecuaciones necesarias para una sola masa.

$$\begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_D \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}}_G,$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_c + m_p & c_{23} &= \frac{c_{22}}{2} \\ m_{12} &= m_{21} = hm_{11} + m_p L \cos \alpha & c_{32} &= m_p L \dot{\theta} (h \sin \alpha + z \cos \alpha) \\ m_{13} &= m_{31} = m_p L \cos \alpha & d_{11} &= b \\ m_{22} &= m_p (h^2 + z^2 + L^2 + 2L(h \cos \alpha - z \sin \alpha)) + m_c (h^2 + z^2) + J & d_n &= 0 \forall n \neq 11 \\ m_{23} &= m_{32} = m_p L (L + h \cos \alpha - z \sin \alpha) & g_1 &= -g(m_c + m_p) \sin \theta \\ m_{33} &= m_p L^2 & g_2 &= -g(zm_c + m_p(z + L \sin(\theta + \alpha))) + m_s c \sin \theta \\ c_{11} &= c_{31} = c_{33} = 0 & g_3 &= -gm_c L \sin(\theta + \alpha) \\ c_{12} &= m_{12} & q_1 &= z \\ c_{13} &= m_{13} & q_2 &= \theta \\ c_{21} &= 2\dot{\theta}z(m_p + m_c) & q_3 &= \alpha \\ c_{22} &= -2Lm_p(\dot{\alpha}(h \sin \alpha + z \cos \alpha) + \dot{z} \sin \alpha) \end{aligned}$$

Para este modelo se describe la relación voltaje-par en el motor, mediante algunos valores nominales de éste, teniendo como resultado la relación

$$f = \frac{K_m K_g}{Rr} v - \frac{K_m^2 K_g^2}{Rr^2} \dot{z},$$

donde

z y \dot{z} son la posición y velocidad del carro, respectivamente

θ y $\dot{\theta}$ son la posición y velocidad angular del balancín, respectivamente

α y $\dot{\alpha}$ son la posición y velocidad angular del péndulo, respectivamente

L es la distancia del pivote al centro de masa de la barra

m es la masa de la barra

c es la distancia del punto de pivote del balancín al riel

h es la distancia de la base del balancín al riel

J es la inercia del balancín

Ms es la masa del balancín más el riel

m es la masa del carro

g es la aceleración gravitacional

b es el coeficiente de fricción viscosa entre el carro y el riel

R es la resistencia en la armadura del motor

Km es la constante del par del motor

r es el radio del engrane del motor

Kg es la relación de transformación en la caja de engranes del motor

f es la fuerza aplicada al carro

v es el voltaje aplicado al motor.

Para poder expresar el modelo en variables de estado es necesario despejar el vector \ddot{q} , lo cual resulta en la ecuación

$$\ddot{q} = -M^{-1}D\dot{q} - M^{-1}C\dot{q} - M^{-1}G + M^{-1}\tau. \quad (3.19)$$

El sistema en variables de estado tiene la forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix},$$

de la ecuación 3.19 se obtiene el sistema no lineal representado en variables de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ f_1(z, \theta, \alpha, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, f) \\ f_2(z, \theta, \alpha, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, f) \\ f_3(z, \theta, \alpha, \dot{z}, \dot{\theta}, \dot{\alpha}, f) \end{bmatrix}.$$

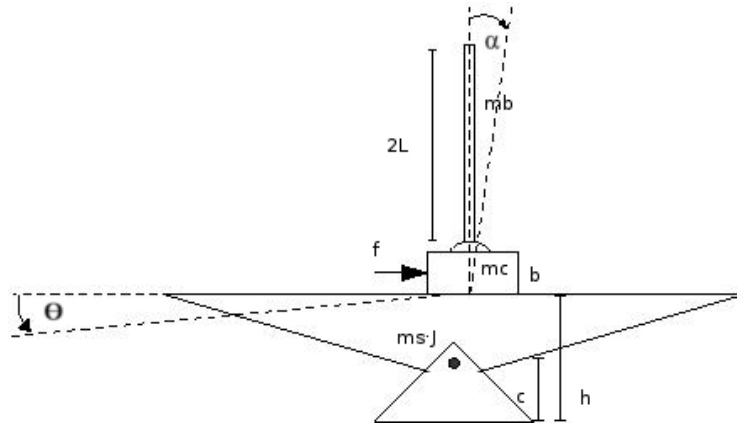


Figura 3.9: Sistema péndulo-carro-balancín

Una vez linealizado el sistema mediante los jacobianos, se sustituyen los valores y se obtiene el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.4049 & 9.3893 & -5.1159 & -15.601 & -0.3517 & -0.1449 \\ 17.178 & 2.7904 & 5.6435 & 2.5979 & 0.0586 & 0.0241 \\ -17.178 & -2.7904 & 38.437 & 45.02 & 1.0148 & 0.4182 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.3936 \\ -0.5651 \\ -9.7927 \end{bmatrix} v.$$

la matriz A tiene los valores propios $\lambda(A) = \{-15.8796, 5.6590, 2.3267, -1.0578 + 2.4095i, -1.0578 - 2.4095i, -5.1148\}$, por lo cual el sistema en tiempo continuo es inestable.

Al discretizar el sistema se obtienen las matrices Ad y Bd para el tiempo discreto. Una vez utilizado el método de retenedor de orden cero (ZOH), se tiene

como resultado el sistema en tiempo discreto.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.007 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.008 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.001 & 0 & 0.008 \\ -0.0182 & 0.0706 & -0.0387 & 0.8824 & -0.0024 & -0.0012 \\ 0.1372 & 0.0231 & 0.0448 & 0.0201 & 1 & 0 \\ -0.1405 & -0.0093 & 0.3012 & 0.3388 & 0.0076 & 1.0044 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0256 \\ -0.0043 \\ -0.0738 \end{bmatrix} v.$$

Para comprobar la estabilidad del sistema se observan los valores propios de la matriz Ad , los cuales son $\lambda(Ad) = \{0.8807, 1.0463, 1.0188, 0.9914 + 0.0191i, 0.9914 - 0.0191i, 0.9599\}$. De dichos valores propios, se determina que el sistema es inestable en lazo abierto, debido a que dos de sus polos se encuentran fuera del círculo de radio unitario.

Para determinar la controlabilidad de este sistema, se verifica el rango de la matriz de controlabilidad, teniendo como resultado

$$rango(\varrho_{completo}) = 6,$$

con lo que se comprueba que el sistema linealizado es controlable.

Al analizar este sistema, se observa un caso particular que limita en forma física a éste. Cuando el balancín tiene una inclinación mayor o igual a 4° , en sentido horario o antihorario, la barra del péndulo tiende a caer hacia el lado inclinado. Para compensar la caída de la barra, el carro se mueve hacia el mismo lado hacia el cual está inclinado el balancín, provocando que éste se incline aún más. Lo anterior ocurre hasta que el balancín no se puede inclinar más y el carro se topa con el fin del riel, haciendo que la barra del péndulo caiga.

Debido a lo anterior se debe evitar una inclinación pronunciada del balancín.

3.4. Tarjeta de Adquisición

La tarjeta utilizada para adquisición y escritura de datos es la USB-6009 de *National Instruments*, la cual es una tarjeta de bajo costo que tiene las siguientes características de interés

- 12 puertos digitales entrada/salida
- 8 puertos analógicos de entrada, los cuales equivalen a 8 canales de adquisición en *Single-Ended Mode* o 4 canales de adquisición en modo diferencial, entre cada puerto de entrada y la tierra interna de la tarjeta puede existir una diferencia de potencial máxima de $\pm 10V$

42CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DEL SISTEMA PÉNDULO-CARRO-BALANCÍN

- 2 puertos analógicos de salida con un rango de trabajo de $\pm 5V$
- una referencia a $5V$ y otra de $2.5V$
- una tasa máxima de muestreo de 42 mil muestras/segundo, cuando se trabaja con más de un canal, esto equivale a un tiempo de muestreo de aproximadamente $0.02ms$, este tiempo depende del programa utilizado para la comunicación con la tarjeta,
- convertidores D/A de 12 bits y un convertidor A/D de 14 bits
- una precisión en las entradas analógicas de $14.7V$ para el caso del *Single-Ended Mode* y de $7.73V$ para el caso del modo diferencial manejando un rango de $\pm 10V$ que es el utilizado
- una frecuencia de actualización de $150Hz$ para las salidas analógicas (esta frecuencia depende del software), lo cual equivale a un tiempo de escritura de $6.67ms$
- un ruido nominal en las entradas analógicas de $0.73mVrms$ en el caso del *Single-Ended Mode* y de $0.37mVrms$ para el modo diferencial.

De los datos anteriores se determina que el menor tiempo de muestreo es de aproximadamente $7ms$ ya que se realizan las operaciones de lectura y escritura, además resulta conveniente utilizar el modo diferencial ya que presenta un menor ruido y una mayor precisión.

La interfaz que utiliza para este trabajo es *Simulink*, debido a que *LabView* (software de *National Instruments*) requiere de un tiempo de muestreo mayor para ejecutar las operaciones necesarias. Por su parte Visual Basic con el cual se trabajó en [11], brinda un mejor tiempo de muestreo, pero presenta la desventaja de no poder mostrar los datos adquiridos en tiempo real.

Capítulo 4

Diseño de controladores

A lo largo de este capítulo, se diseñan los controladores para cada sistema. Además se muestran los resultados obtenidos a partir de simulaciones realizadas, con el fin de conocer el desempeño de cada controlador diseñado.

4.1. Diseño de controladores lineales

Los controladores se diseñan con base en los modelos en tiempo discreto obtenidos en las secciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3, respectivamente.

4.1.1. Balancín

Al diseñar el control lineal del balancín, se considera que el estado de mayor importancia es la posición de éste. El criterio para elegir las matrices Q y R , es el siguiente

- el gasto energético no debe ser demasiado alto, pues puede provocar oscilaciones al momento de implementar físicamente
- los estados deben converger en el origen
- el tiempo de asentamiento debe ser el menor posible
- el controlador debe ser capaz de estabilizar al sistema cuando las condiciones iniciales tengan valores físicamente posibles.

Tras varias simulaciones, se proponen las matrices que mejor cumplen con el criterio, que son

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$R = 0.25,$$

con las cuales se tiene una matriz P que resuelve la ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto

$$P = \begin{bmatrix} 0.7655 & 1.5093 & 0.0931 & 0.3951 \\ 1.5093 & 4.1311 & 0.1824 & 0.8697 \\ 0.0931 & 0.1824 & 0.0118 & 0.0481 \\ 0.3951 & 0.8697 & 0.0481 & 0.2176 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

después de sustituir valores en la ecuación 2.3, se obtiene la matriz de ganancias

$$k = [160.1983 \quad 218.2106 \quad 22.4401 \quad 69.3094].$$

Con la matriz k se forma el sistema $(A - Bk)$, que tiene valores característicos $\lambda(A - Bk) = \{0.9581 + 0.0542i, 0.9581 - 0.0542i, 0.951 + 0.0134i, 0.951 - 0.0134i\}$. Al estar contenidos dentro del círculo de radio unitario, los valores propios son estables; con esto se asegura que el comportamiento del sistema realimentado es estable. Finalmente la señal de control está dada por

$$u = - [160.1983 \quad 218.2106 \quad 22.4401 \quad 69.3094] \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

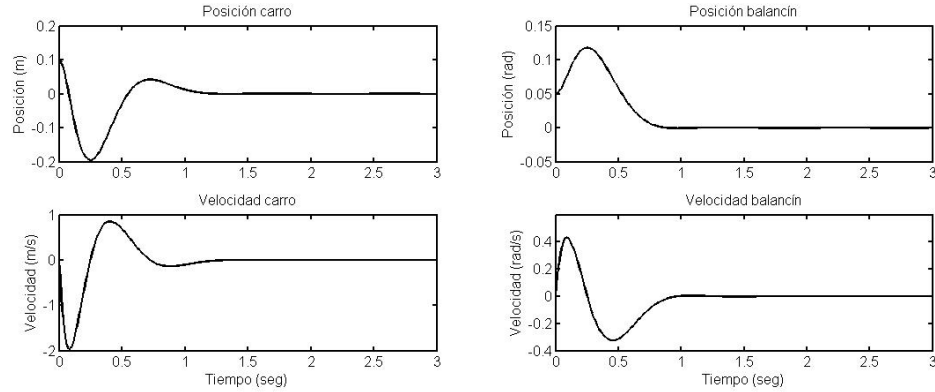


Figura 4.1: Estados del sistema masa-balancín (simulación)

Se realiza una simulación para comprobar que los estados convergen en el origen. Para la simulación se emplea el modelo no lineal, se eligen condiciones iniciales distintas de cero y se realimenta con la matriz de ganancias k . Las condiciones iniciales elegidas son

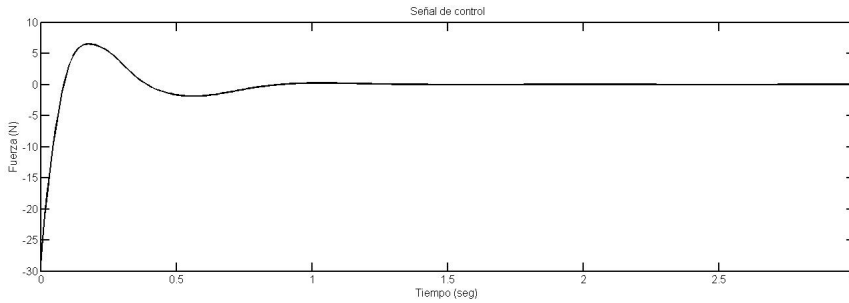


Figura 4.2: Señal de control para el sistema masa-blancín (simulación)

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los resultados de simulación se pueden observar en las figuras 4.1 y 4.2.

A partir de la simulación, se puede concluir que el controlador logra estabilizar al sistema sin sobrepasar sus límites físicos. Además, éste converge, aún cuando las condiciones iniciales son lejanas al punto de equilibrio, por lo que la región para la cual es válida la linealización es adecuada para la implementación física del controlador.

4.1.2. Péndulo

Para el caso del péndulo invertido, el punto de equilibrio es el origen. El estado de mayor interés es la posición de la barra del péndulo, por lo que en la matriz Q se le da un mayor peso a este estado. Siguiendo el mismo criterio que se utilizó para el blancín, se realizan varias simulaciones y se proponen las matrices que mejor cumplen con el criterio, siendo

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$R = 0.25.$$

Con estas matrices se encuentra una solución a la ecuación algebraica de

Ricatti en tiempo discreto

$$P = \begin{bmatrix} 1.2526 & 1.1187 & 0.6163 & 0.2785 \\ 1.1187 & 3.2035 & 0.838 & 0.4379 \\ 0.6163 & 0.838 & 0.5003 & 0.2291 \\ 0.2785 & 0.4379 & 0.2291 & 0.1121 \end{bmatrix} \times 10^4,$$

después de sustituir valores en la ecuación 2.3 se obtiene una matriz de ganancias

$$k = [-17.2075 \quad -90.9856 \quad -17.4431 \quad -15.7617],$$

con la matriz k se forma el sistema $(A - Bk)$, el cual tiene como valores característicos, $\lambda(A - Bk) = \{0.8197, 0.9196, 0.9895 + 0.009i, 0.9895 - 0.009i\}$. Todos los valores propios del nuevo sistema, están ubicados dentro del radio de círculo unitario, por lo que el sistema se vuelve estable en lazo cerrado.

La señal de control es entonces

$$u = - \begin{bmatrix} -17.2075 & -90.9856 & -17.4431 & -15.7617 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

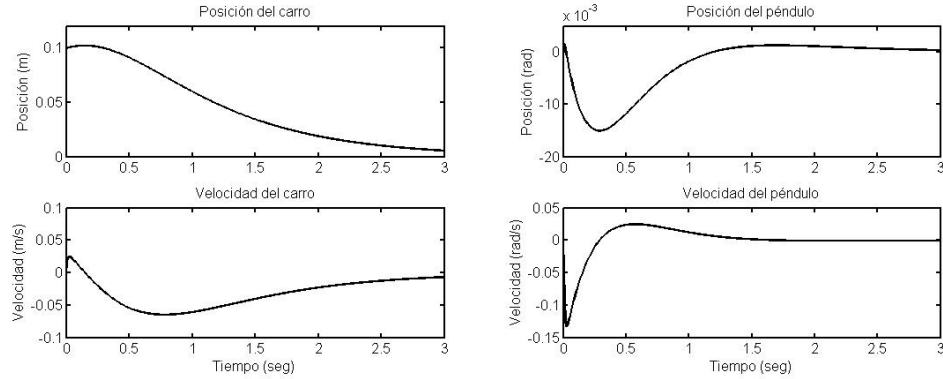


Figura 4.3: La figura muestra el comportamiento de los estados del sistema de péndulo invertido (simulación)

Se realiza una simulación empleando el modelo no lineal y con condiciones iniciales distintas de cero

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.002 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

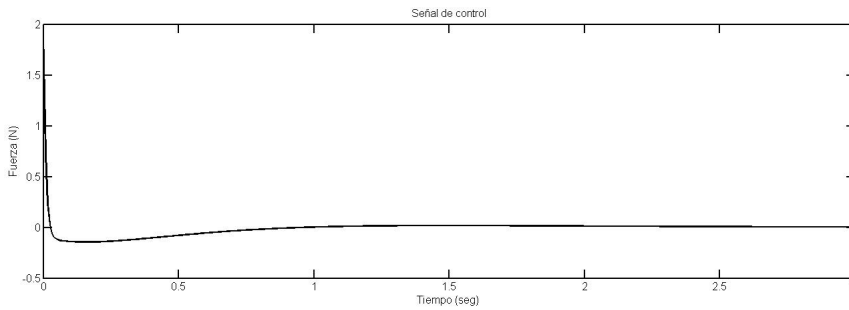


Figura 4.4: Señal de control para el péndulo invertido (simulación)

Los resultados de la simulación muestran que los estado convergen al punto deseado. Lo anterior se logra sin sobrepasar los límites físicos del sistema, además las condiciones iniciales propuestas son lejanas al punto de equilibrio, pudiéndose observar que la región en la cual es válida el modelo lineal, es adecuada para la implementación física del controlador diseñado.

Las figuras 4.3 y 4.4, muestran el resultado de cerrar el lazo de control, realimentando al sistema con la matriz de ganancias k .

Se puede concluir, que el controlador diseñado cumple con el objetivo de estabilizar al sistema; aún cuando éste se aleje del punto de equilibrio. Los estados no sobrepasan los límites físicos del sistema.

4.1.3. Sistema péndulo-carro-balancín

Para el caso del sistema de péndulo-carro-balancín las tres posiciones manejadas son de suma importancia. Si la barra del péndulo llega a desviarse $\pm 0.122rad$ respecto al eje vertical, el motor no tiene el par suficiente para levantarla de nuevo, por tanto a este estado es al que mayor peso se le otorga en la matriz Q . Cuando la masa está lejos del origen, provoca una inclinación en el balancín, dicha inclinación hace que la barra tienda a caer; cuando la barra tiende a caer hace que el carro cambie su posición para compensar la caída. Lo anterior provoca que las posiciones del carro y del balancín tengan pesos similares a las de la barra en la matriz Q .

Para este sistema se sigue utilizando el criterio de los diseños anteriores para la selección de las matrices; después de realizar varias simulaciones se proponen Q y R con los siguientes valores

$$Q = \begin{bmatrix} 700 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 \end{bmatrix},$$

$$R = 0.1,$$

con las cuales se tiene una matriz P que resuelve la ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto

$$P = \begin{bmatrix} 9.9316 & 7.3674 & 4.6111 & 2.2585 & 2.5147 & 0.6478 \\ 7.3674 & 6.2569 & 3.592 & 1.7784 & 2.0146 & 0.5091 \\ 4.6111 & 3.592 & 2.527 & 1.1427 & 1.187 & 0.3349 \\ 2.2585 & 1.7784 & 1.1427 & 0.5713 & 0.5814 & 0.1674 \\ 2.5147 & 2.0146 & 1.187 & 0.5814 & 0.6815 & 0.165 \\ 0.6478 & 0.5091 & 0.3349 & 0.1674 & 0.165 & 0.0498 \end{bmatrix} \times 10^5,$$

después de sustituir valores en la ecuación 2.3 se obtiene una matriz de ganancias

$$k = [-346.483 \quad -309.2034 \quad -256.3999 \quad -105.42 \quad -95.5249 \quad 40.3441],$$

con la cual se forma un sistema $(A-Bk)$, el cual tiene como valores propios $\lambda(A-Bk) = \{0.2725, 0.9902+0.0319i, 0.9902-0.0319i, 0.955, 0.9275+0.0046i, 0.9275-0.0046i\}$, a partir de estos valores característicos se puede determinar que el sistema en lazo cerrado, realimentado con la matriz de ganancias k se vuelve estable.

La señal de control del sistema está dada por

$$u = - \begin{bmatrix} -346.483 & -309.2034 & -256.3999 & -105.42 & -95.5249 & 40.3441 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestra el resultado de una simulación del control previamente diseñado, para unas condiciones iniciales cercanas al punto de equilibrio, las cuales están dadas por

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.02 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

en donde se puede observar, que los estados del sistema convergen al punto deseado, sin superar los límites físicos de aquél. Por lo que el sistema se vuelve estable en lazo cerrado, al realimentarse con la matriz de ganancias k . Sin embargo, para implementar el controlador en forma física, es necesario realizar simulaciones en donde las condiciones iniciales se encuentren más alejadas del punto de equilibrio. Debido a esto se eligen las siguientes condiciones iniciales

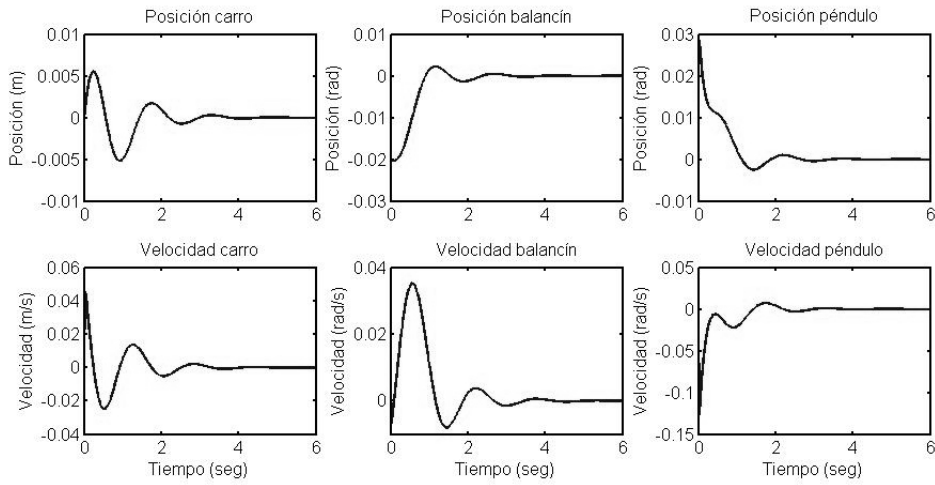


Figura 4.5: La figura muestra el comportamiento de los estados del sistema péndulo-carro-balancín (simulación)

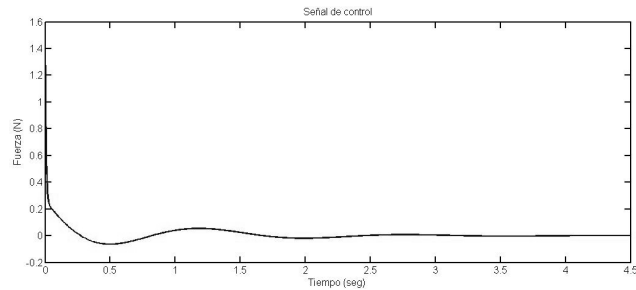


Figura 4.6: Señal de control para el sistema péndulo-carro-balancín (simulación)

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0.08 \\ -0.02 \\ 0.03 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede apreciar en la figura 4.7, que el sistema no logra estabilizarse dentro de los límites físicos de éste. Lo que significa que el modelo lineal, no es válido

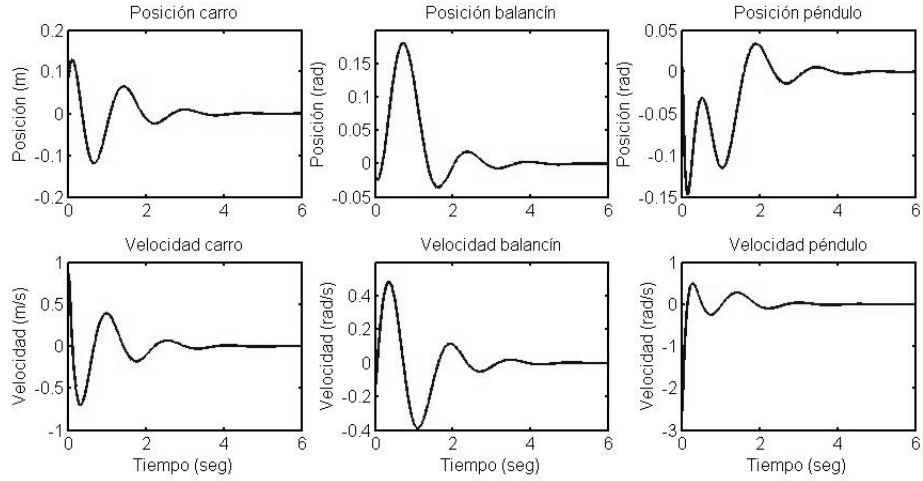


Figura 4.7: La figura muestra el comportamiento de los estados del sistema péndulo-carro-balancín con la masa lejos del punto de equilibrio. Simulación

para la toda la región en la que el sistema opera en forma física. De esta forma se concluye que el controlador diseñado, no es adecuado para implementarse de manera física.

4.2. Diseño de controladores no lineales

Los controladores se diseñan con base en el análisis realizado en las secciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 respectivamente.

4.2.1. Control difuso para el balancín

El control difuso para el balancín, se basa en el análisis empírico realizado en la sección 3.3.1. Se consideran tres entradas, las cuales son la posición del carro, la posición del balancín y la velocidad de éste. Se elige un sistema de tipo Singleton debido a que la desfusión es simple y requiere menor tiempo de procesamiento, por su parte se eligen funciones de membresía triangulares y cuadradas ya que con estas se pueden evitar traslapes no deseados. Cada variable de entrada cuenta con cinco conjuntos difusos que la describen, esto con la finalidad de tener un control suave. Las etiquetas lingüísticas son

c centro

i, d ligeramente izquierda o derecha, respectivamente

mi, md muy a la izquierda o derecha, respectivamente.

Si se propone una regla para cada posible combinación de conjuntos difusos, se tiene un total de 125 reglas. No obstante, sintonizar todas esas reglas eleva la complejidad del problema. Debido a lo anterior se descartan situaciones que físicamente no son posibles, por ejemplo, cuando el balancín y el carro se ubican en un mismo lado, no es posible que la velocidad del balancín se dirija al lado contrario. Haciendo esa suposición, únicamente son necesarias 75 reglas. No obstante, con el fin de tener un controlador más suave se agregan casos generales en los que la velocidad del balancín tiene un sentido contrario a la posición del carro. De esta manera se forma un sistema de 83 reglas difusas; en donde para cada una se propone un valor de salida constante.

A diferencia de los controladores lineales previamente diseñados, la salida del controlador difuso, es una señal de voltaje y no de fuerza o par. Dicha señal de voltaje se encuentra dentro del rango de operación de la tarjeta de adquisición, y además considera la zona muerta del motor. De esta forma se evita tener que hacer modificaciones a la señal de salida del sistema difuso para implementarse en forma física.

La tabla 4.9 muestra las 83 reglas difusas que conforman al controlador, así como su respectivo valor de salida.

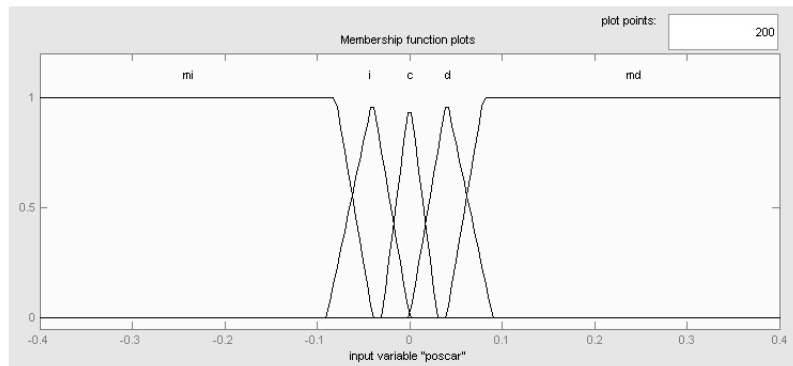


Figura 4.8: Conjunto difuso para la posición del carro

Pos. Carro	Pos. Bal.	Vel. Bal.	Salida	Pos. Carro	Pos. Bal.	Vel. Bal.	Salida
mi	-	d	3.25	e	e	d	1.75
mi	-	md	3	e	e	md	1
i	-	d	2.5	e	d	mi	3.25
i	-	md	2	e	d	i	3
mi	mi	m	5.25	e	d	e	1.25
mi	mi	i	5	e	d	d	1
mi	mi	e	4.5	e	d	md	0.75
mi	i	m	5	e	md	mi	3
mi	i	i	4.75	e	md	i	2.5
mi	i	e	4.5	e	md	e	1
mi	e	m	4.75	e	md	d	0.75
mi	e	i	4.5	e	md	md	0.5
mi	e	e	4.25	d	mi	e	3.85
mi	d	m	4.5	d	mi	d	2
mi	d	i	4.25	d	mi	md	1.5
mi	d	e	4	d	i	e	1.75
mi	md	m	4.25	d	i	d	1.5
mi	md	i	4	d	i	md	1
mi	md	e	2.5	d	e	e	1.5
i	mi	m	4.75	d	e	d	1.25
i	mi	i	4.5	d	e	md	0.75
i	mi	e	4.25	d	d	e	1.25
i	i	m	4.5	d	d	d	1
i	i	i	4	d	d	md	0.5
i	i	e	3.75	d	md	e	0.75
i	e	m	4.25	d	md	d	0.5
i	e	i	3.75	d	md	md	0.25
i	e	e	3.5	md	mi	e	2.5
i	d	m	4	md	mi	d	1
i	d	i	3.5	md	mi	md	0.75
i	d	e	3.25	md	i	e	1
i	md	m	3.5	md	i	d	0.75
i	md	i	3	md	i	md	0.5
i	md	e	1.15	md	e	e	0.75
e	mi	m	4.5	md	e	d	0.5
e	mi	i	4.25	md	e	md	0.25
e	mi	e	4	md	d	e	0.5
e	mi	d	2.5	md	d	d	0.25
e	mi	md	2	md	d	md	0
e	i	m	4.25	md	md	e	0.5
e	i	i	4	md	md	d	0
e	i	e	3.75	md	md	md	-0.25
e	i	d	2	d	-	mi	3
e	i	md	1.75	d	-	i	2.5
e	e	m	4	md	-	mi	2
e	e	i	3.25	md	-	i	1.75
e	e	e	2.5	-	-	-	-

Figura 4.9: Reglas difusas para el sistema de masa-balancín

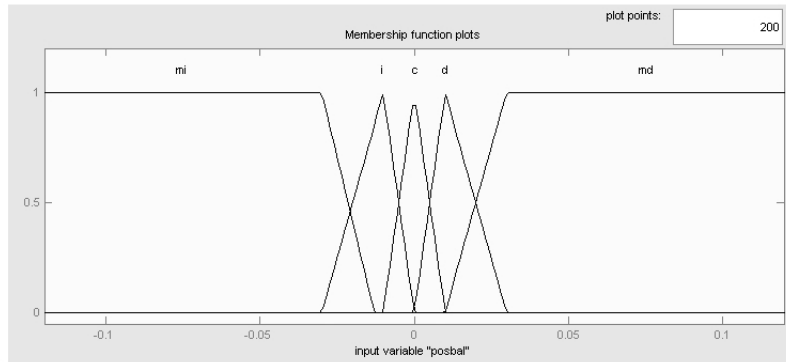


Figura 4.10: Conjunto difuso para la posición del balancín

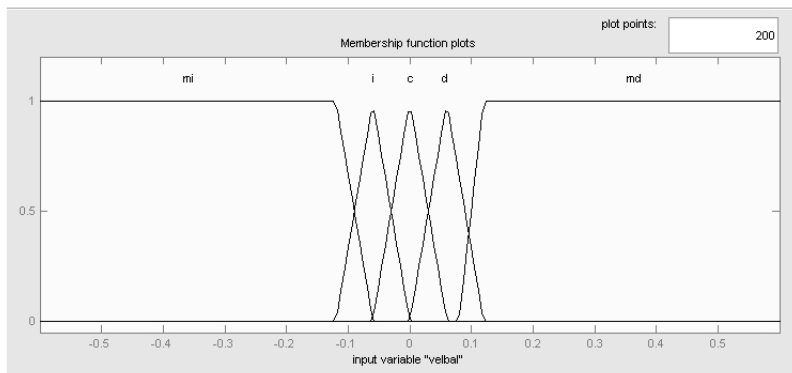


Figura 4.11: Conjunto difuso para la velocidad del balancín

Las figuras 4.8, 4.10 y 4.11 muestran los conjuntos difusos que conforman a cada variable de entrada. La distancia máxima del carrito al centro es de 40cm , la inclinación máxima del balancín es de 6.9° y la velocidad máxima de éste es de $0.9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$; estos límites son importantes porque son los máximos valores que las variables de entrada pueden tomar, para que el controlador funcione de manera adecuada. Por lo que es conveniente saturar los valores de entrada en los límites ya mencionados.

Por su parte, las figuras 4.12 y 4.13 muestran las superficies formadas a partir de las reglas difusas. Estas superficies tienen pendiente negativa o nula en todo momento, por lo que su derivada también es negativa o nula; de lo que se puede determinar que el sistema en lazo cerrado es estable al realimentarse con el controlador difuso. En caso de que se desee un control más suave, se

debe incrementar el número de conjuntos difusos que forman a las variables de entrada, sin embargo esto provoca un mayor número de reglas difusas, haciendo más difícil sintonizar al sistema.

A diferencia de los controladores lineales, este controlador no puede presentar valores mayores a $5V$ o menores a $0V$, por lo que el gasto energético debe de ser menor. No obstante, es probable que la respuesta sea más lenta debido a la misma situación.

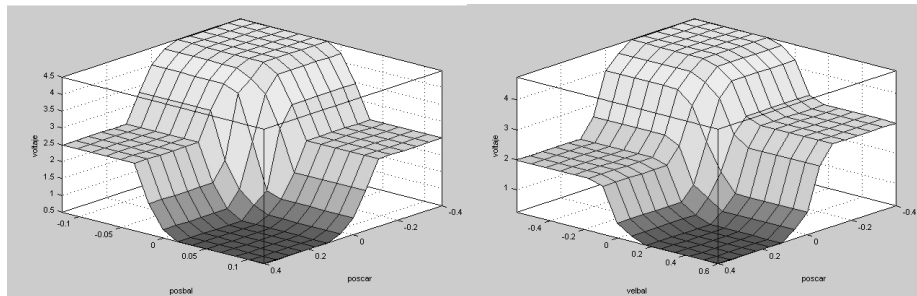


Figura 4.12: Superficies generadas por las variables de entrada del sistema masa-balancín

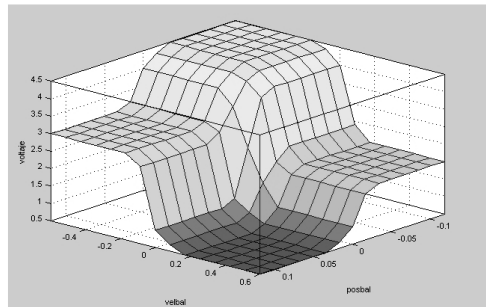


Figura 4.13: Superficie formada por las variables de entrada del sistema masa-balancín

4.2.2. Control difuso para el péndulo invertido

En los trabajos [10, 8, 11], se ataca el problema del péndulo invertido por medio de un sistema difuso; presentando variantes en el sistema o en la forma de emplear el control difuso. Los trabajos antes citados sirven de referencia, sin embargo el objetivo es atacar al problema de una manera diferente. Se propone realimentar al sistema con diferentes matrices de ganancia, obtenidas a partir de controladores LQR, y un controlador difuso que se encargue de la conmutación entre dichas matrices. De esta forma el controlador difuso, decide cual es la matriz más adecuada para los valores de los estados del sistema en ese instante. En la figura 4.14 se muestra el esquema del controlador propuesto.

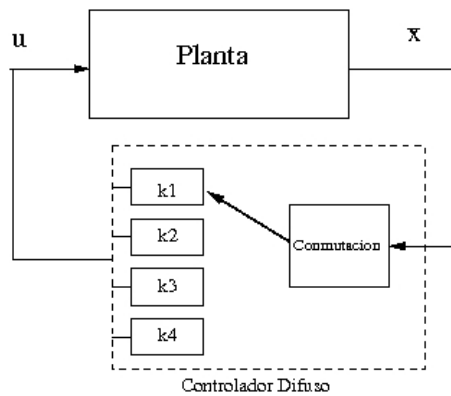


Figura 4.14: Esquema del controlador diseñado para el sistema de péndulo invertido

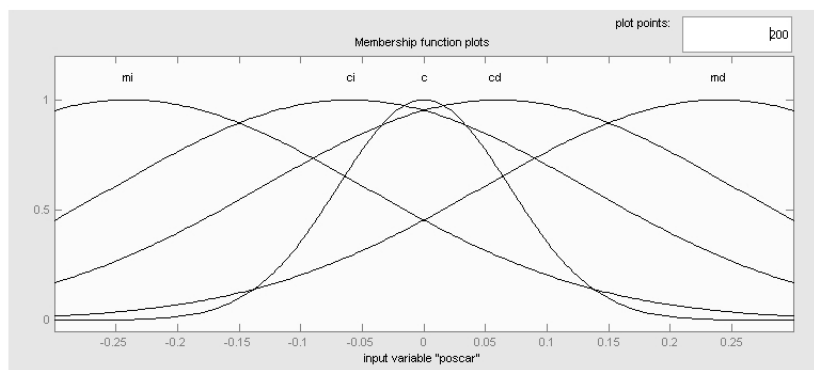


Figura 4.15: Conjuntos difusos para la posición del carro

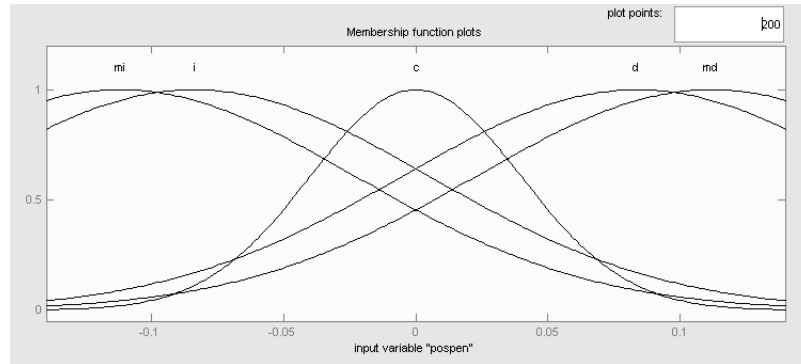


Figura 4.16: Conjuntos difusos para la posición del péndulo

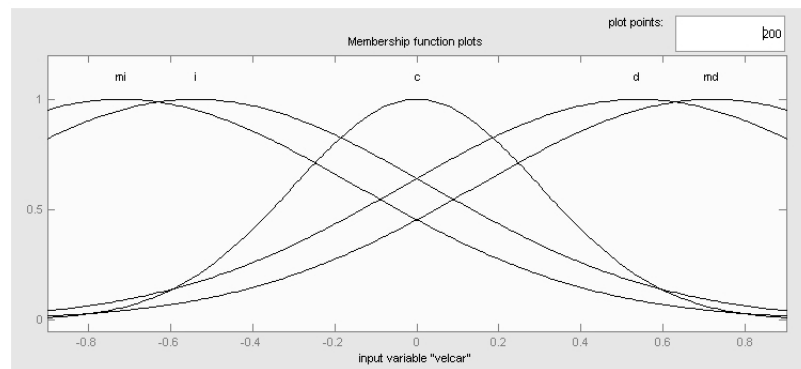


Figura 4.17: Conjuntos difusos para la velocidad del carro

Los estados del sistema se definen mediante conjuntos difusos, como se muestra en las figuras 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18. En estas figuras se observan los intervalos de cada variable de entrada, así como las funciones de membresía que describen a cada conjunto, las cuales son del tipo gaussiano ya que los traslapes definirán en qué grado se activa cada matriz de ganancia. Las etiquetas lingüísticas son las mismas que las utilizadas para el balancín.

El siguiente paso es definir las situaciones diferentes en las que se puede encontrar operando el sistema, las cuales son:

- El carro se encuentra lejos, pero la barra está cerca de la posición vertical
- Tanto el carro como la barra se encuentran lejos del punto deseado
- El carro y el péndulo se encuentran cerca del punto deseado

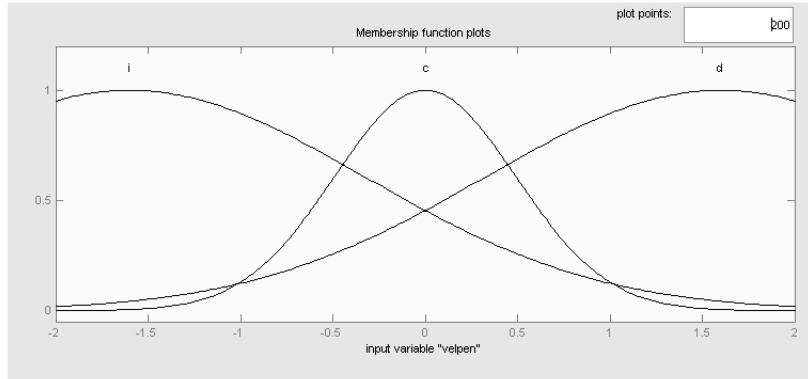


Figura 4.18: Conjuntos difusos para la velocidad del péndulo

- El péndulo se encuentra muy lejos de la posición vertical, en este caso no importa la posición del carro.

Para obtener las matrices de ganancia es necesario resolver la ecuación algebraica de Ricatti para tiempo discreto, variando los pesos de los estados en la matriz Q y siguiendo el criterio utilizado para los controladores lineales. Por su parte el gasto energético es igual para los cuatro casos siendo $R = 0.25$. Las matrices de ganancia k_i son

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 800 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_1 = [-45.6 \quad -250.7 \quad -47.9 \quad -32.1],$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_2 = [-12.1 \quad -105 \quad -15.8 \quad -15.5],$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_3 = [-63.5 \quad -216.4 \quad -52.3 \quad -33.2],$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$k_4 = [-17.2 \quad -91 \quad -17.4 \quad -15.8].$$

El sistema difuso utilizado es de tipo Takagi-Sugeno, de esta forma las matrices de ganancia obtenidas expresan valores asignados a las reglas de correspondencia. Cuando se hace la desfusión el sistema hace un promedio ponderado, el cual indica en qué grado se activa cada una de las matrices de ganancia, dependiendo de las lecturas obtenidas de los estados del sistema.

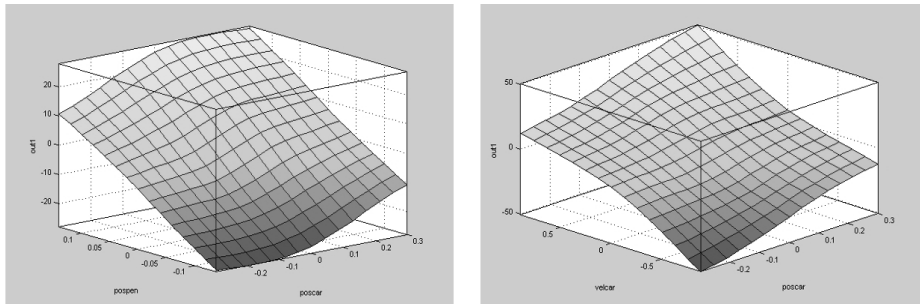


Figura 4.19: Superficies formadas por las variables de entrada del sistema

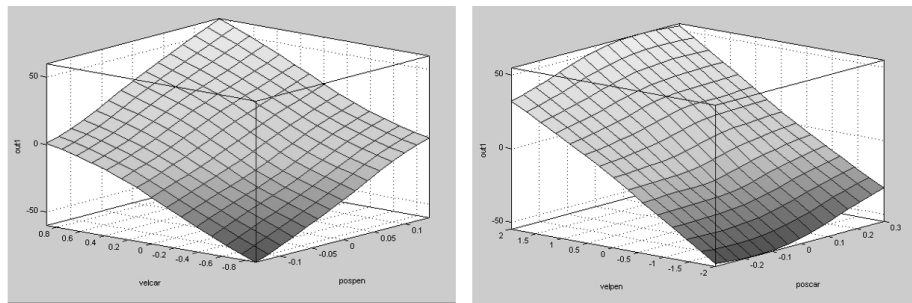


Figura 4.20: Superficies formadas por las variables de entrada del sistema

En las figuras 4.19, 4.20 y 4.21 se observan las superficies de control, las cuales poseen una pendiente negativa en todo momento y son claramente más suaves que las del balancín.

Por su parte en las figuras 4.22 y 4.23, muestran el comportamiento de los estados, así como la señal de control del sistema. Las condiciones iniciales elegidas para la simulación son las mismas que se eligieron para el diseño del controlador lineal; teniendo resultados muy similares en ambos casos. El sistema en lazo cerrado se vuelve estable, sin sobrepasar los límites físicos de los estados, por lo que es posible implementar este controlador de manera física.

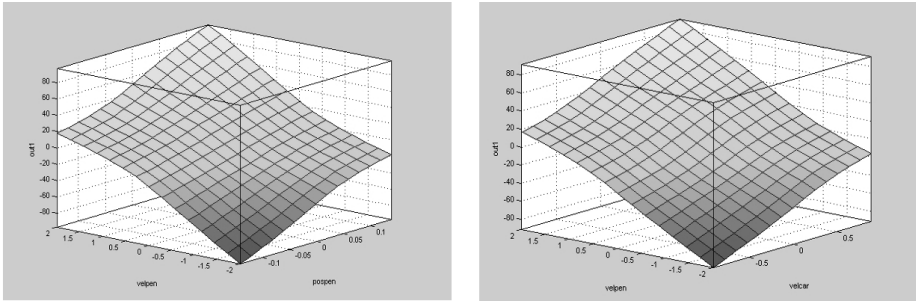


Figura 4.21: Superficies formadas por las variables de entrada del sistema

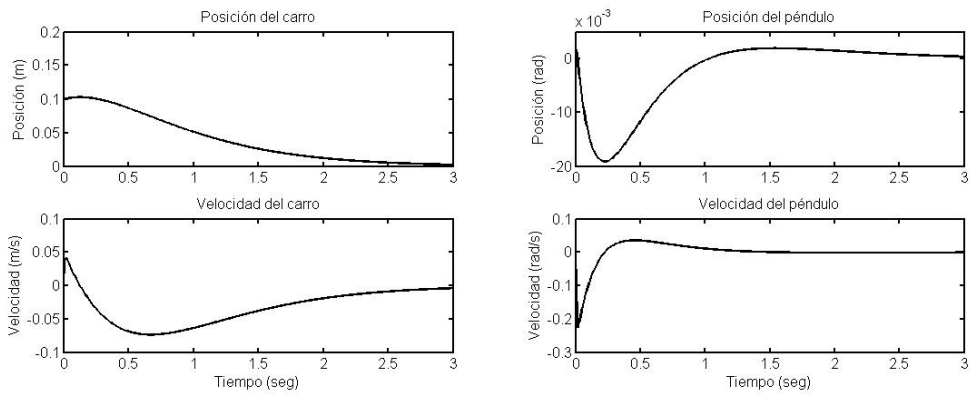


Figura 4.22: Comportamiento de los estados del sistema de péndulo invertido (simulación)

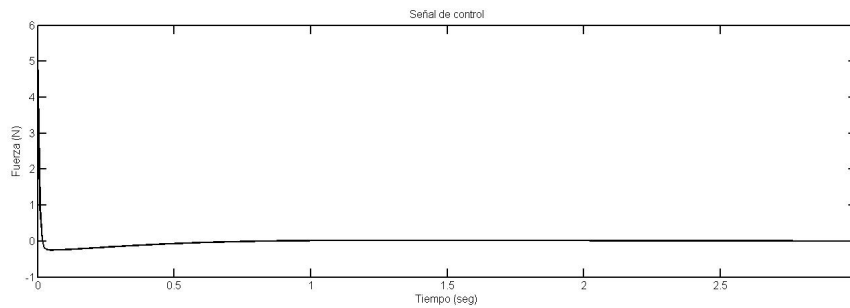


Figura 4.23: Señal de control para el péndulo invertido (simulación)

Capítulo 5

Resultados experimentales

En este capítulo se exponen las soluciones a los problemas relacionados con el manejo físico de las señales, necesarias para la implementación física de los controladores diseñados en el capítulo anterior. Además, se muestran los resultados experimentales obtenidas a partir de lecturas físicas del sistema realimentado con los controladores diseñados en el capítulo anterior.

5.1. Acondicionamiento de las señales

Para acondicionar las señales de los potenciómetros se conectan a $12V$ y tierra, tomando la medición de la terminal central. Esto se ilustra en la figura 5.2. Posteriormente se obtiene una ecuación lineal que relacione voltaje y posición; de esta manera la tarjeta obtiene una lectura de voltaje que se puede interpretar para saber en qué posición se encuentra el carro, el balancín o el péndulo.

La obtención de las ecuaciones lineales que relacionan la posición con el voltaje se hace de forma experimental, tomando varias mediciones de voltaje en diferentes posiciones y realizando una regresión lineal del tipo $Ax + B$.

Para el caso del potenciómetro ubicado en el carro, la recta que describe la relación entre el voltaje y la posición está dada por $z = 0.2454V_{potcar} - 1.4149$, donde z es la posición expresada en metros. La recta que describe la relación entre la posición y el voltaje en el potenciómetro que detecta el movimiento del péndulo es $\alpha = -0.3863V_{potpend} + 2.276$, donde α es la posición angular de la barra y está expresada en radianes. Por su parte la relación posición-voltaje en el potenciómetro del balancín, está descrita por $\theta = -0.0774V_{potbal} + 0.512$, donde θ es la posición angular del balancín expresada en radianes; para el caso del modelo del sistema de péndulo-carro-balancín, la recta anterior cambia de signos, esto se debe a que en el modelo se consideran ángulos positivos aquellos que tienen un sentido antihorario.

También es necesario filtrar las señales adquiridas por los potenciómetros debido a que existe una gran cantidad de ruido en ellas. Véase A.3

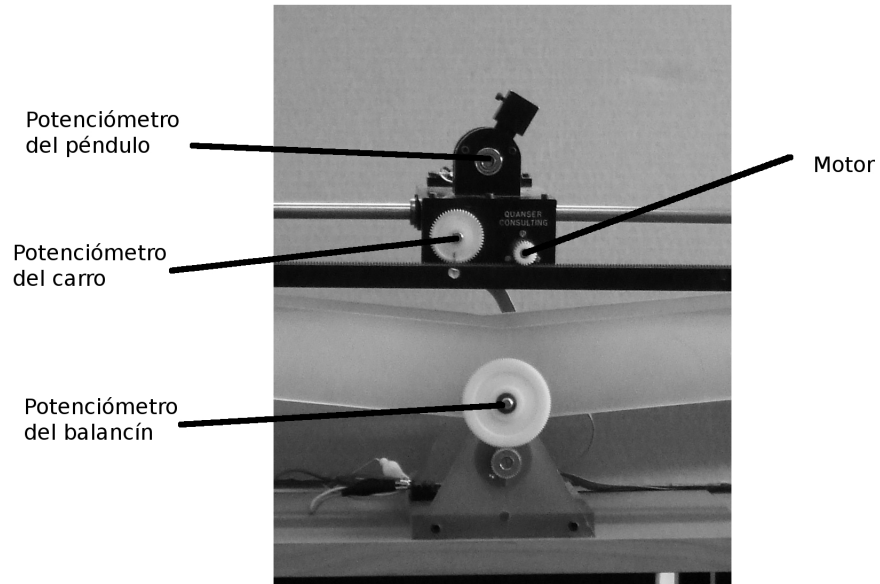


Figura 5.1: En la figura se muestran los potenciómetros y el motor

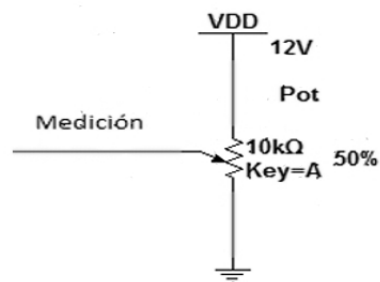


Figura 5.2: Conexión de los potenciómetros

5.2. LQR balancín

Al implementar de forma física el controlador diseñado en el capítulo anterior, se obtienen los resultados mostrados en las figuras 5.3 y 5.4. El sistema físico tiende a estabilizarse en el punto deseado, además es capaz de compensar

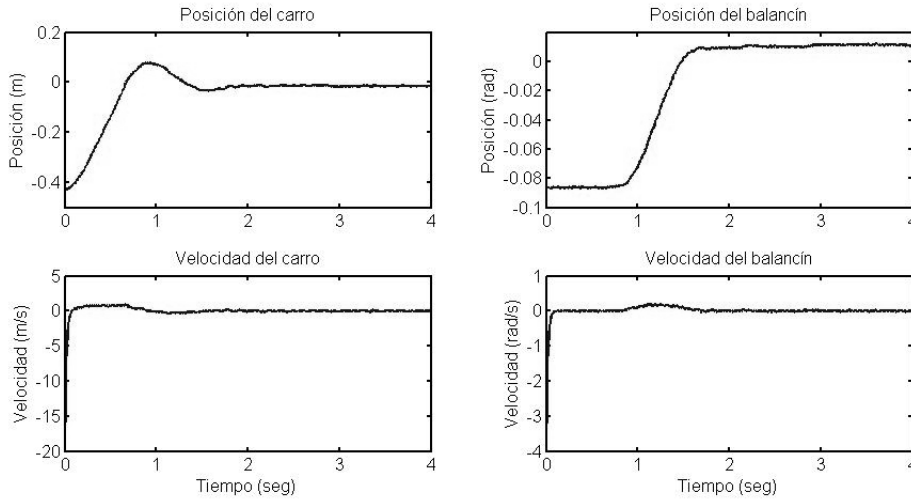


Figura 5.3: Comportamiento físico del sistema masa-balancín con un control LQR

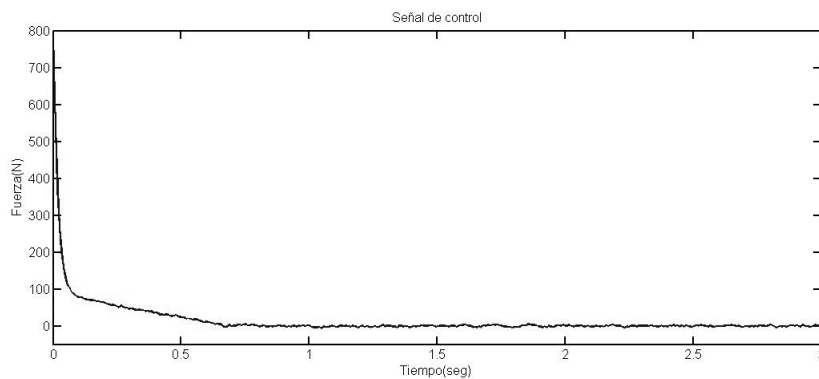


Figura 5.4: Señal de control para el sistema de masa-balancín

pequeñas fuerzas externas aplicadas sobre el riel balancín; los resultados muestran un error aproximado de $0.02rad$ y de $2cm$, en las respectivas posiciones. A partir de lo observado se determina que el controlador cumple con la función de mantener al riel del balancín en una posición cercana a la línea paralela a la base de éste, siendo el objetivo principal del control implementado.

Los resultados experimentales muestran un sobrepaso importante en la señal de control, así como oscilaciones en la posición del carro. Lo anterior se debe a una ganancia alta en la posición del carro. No obstante, con la matriz Q elegida se consigue estabilizar al sistema aproximadamente en $1.5seg$, siendo este el

mejor tiempo obtenido.

5.3. Control difuso para el balancín

Para implementar de manera física el controlador difuso diseñado es necesario reducir el tiempo de procesamiento requerido para el sistema difuso. Esto se debe a que utilizar un bloque que evalúe el sistema en tiempo real con *Simulink*, consume demasiados recursos de cómputo, por lo que se forman tablas que contengan valores de salida correspondientes a combinaciones de valores de entrada. Se hace un mapeo en el cual se evalúan valores de salida ante distintos vectores de entrada, guardando los resultados en las tablas mencionadas; con éstas se realiza una interpolación lineal, la cual reduce el tiempo de procesamiento brindando un valor casi idéntico al del controlador difuso. Lo anterior logra reducir el tiempo necesario de $14ms$ a $10ms$ por muestra.

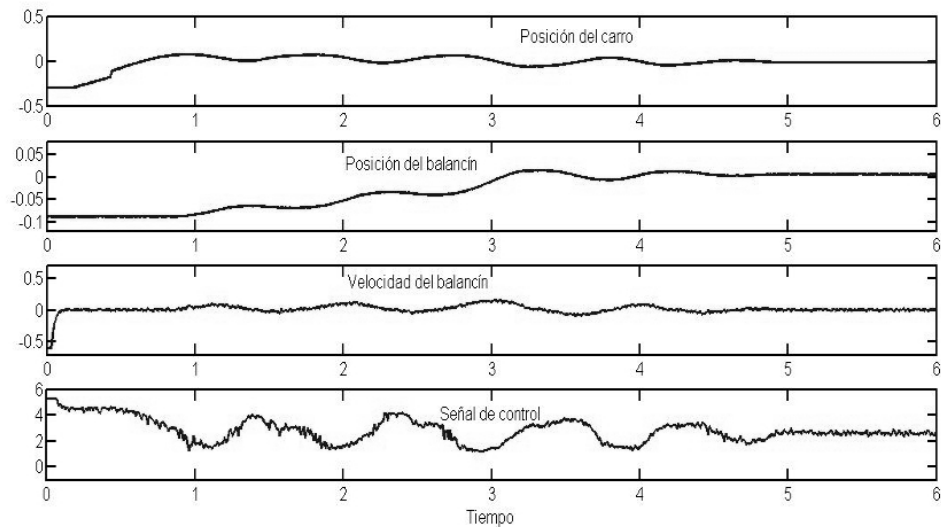


Figura 5.5: Comportamiento de los estados y de la señal de control para el sistema masa-balancín controlado por métodos difusos

El desempeño del sistema se muestra en la figura 5.5, donde se observa que el sistema en comparación con el controlador lineal, tarda más tiempo en llegar al punto deseado, no presenta tantas oscilaciones y el gasto energético es considerablemente menor. De lo anterior se concluye que el controlador difuso cumple con el objetivo de mantener al riel del balancín en una posición cercana a la línea paralela a la base de éste, presentando un error menor al del controlador lineal con ganancias menores y siendo capaz de compensar fuerzas externas

aplicadas al riel del balancín.

5.4. LQR péndulo

Al implementar de forma física el controlador lineal para el péndulo invertido se tienen los resultados mostrados en las figuras 5.6 y 5.7. De los datos obtenidos se observa que los estados del sistema, principalmente las posiciones, presentan importantes oscilaciones; además de lo anterior el carro no logra llegar al punto deseado. No obstante, el controlador cumple con su principal función que es mantener en una posición vertical a la barra, siendo capaz de compensar pequeñas fuerzas externas aplicadas a ésta.

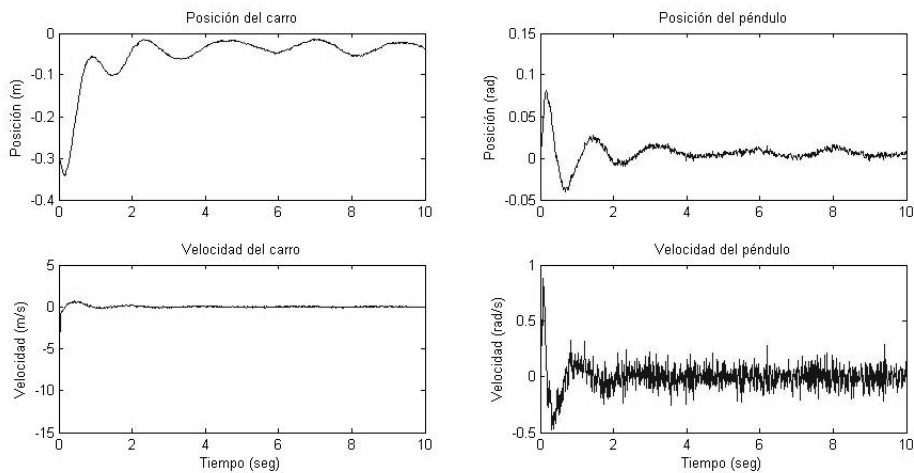


Figura 5.6: Comportamiento de los estados del sistema de péndulo invertido

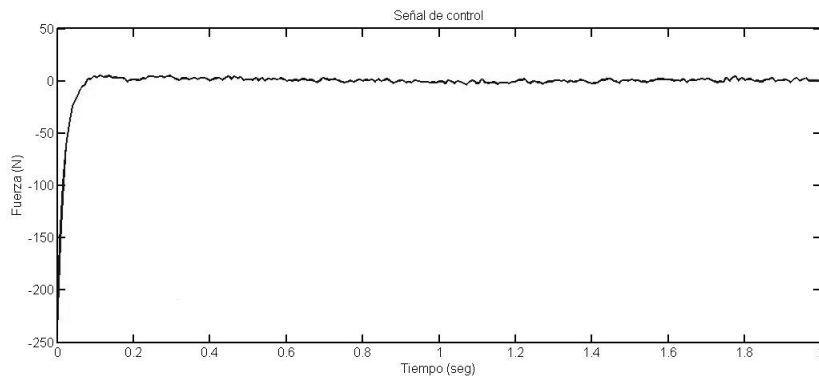


Figura 5.7: Señal de control para el sistema de péndulo invertido

Al igual que en el caso del balancín, la señal de control presenta un sobrepaso grande, resultado de una ganancia alta. Sin embargo, esta ganancia es necesaria para que el controlador responda rápidamente. Respecto a las oscilaciones en la posición del carro, el aumentar el peso de este estado resulta en oscilaciones mucho mayores; mientras que el decrementarlo, hace que el error de convergencia sea mayor.

5.5. Control difuso para el péndulo invertido

Para implementar el controlador difuso en forma física, debe realizarse una interpolación multilínea de una manera muy similar a la realizada en la sección 5.3, con el fin de requerir menor tiempo de procesamiento para cada muestra.

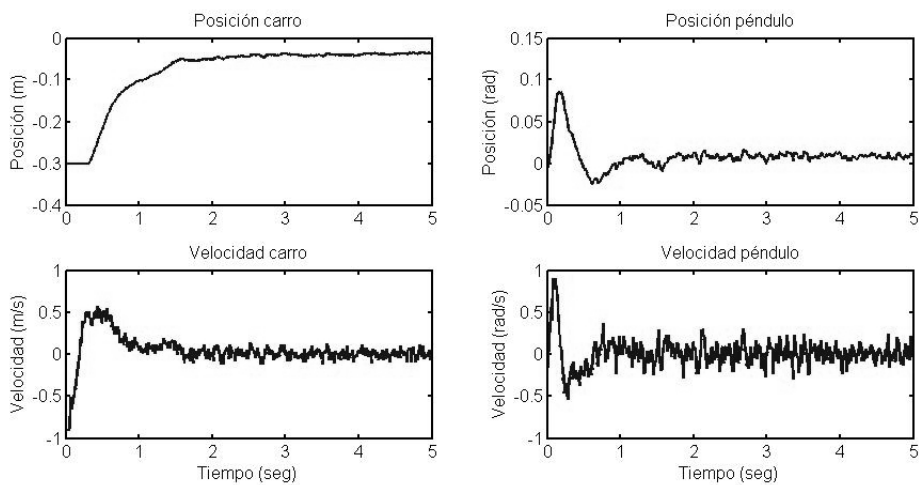


Figura 5.8: Comportamiento de los estados del sistema de péndulo invertido

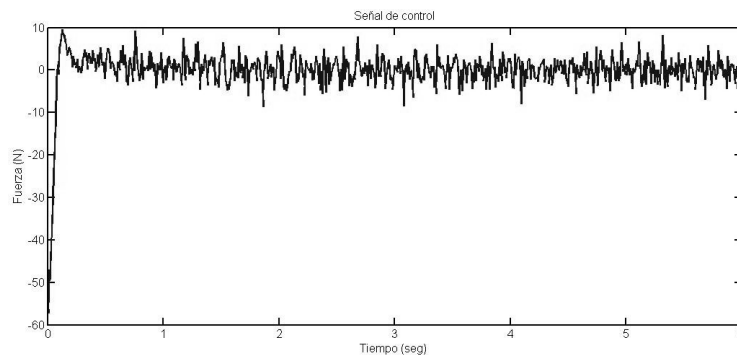


Figura 5.9: Señal de control para el sistema de péndulo invertido

Las figuras 5.8 y 5.9 muestran los resultados obtenidos de las pruebas físicas, en donde se observa que el sistema tiende a estabilizarse en el punto deseado, presentando pequeñas oscilaciones y un error cercano a los $3cm$ en la posición del carro. El sistema no se estabiliza por completo, sin embargo evita que la barra del péndulo caiga aún ante fuerzas externas aplicadas a ésta.

Haciendo una comparación entre este controlador y el lineal, se hacen varias observaciones, por ejemplo, este controlador tiene una respuesta más rápida que el lineal; así mismo cuando se comparan las señales de control, se encuentra un sobrepaso menor en este controlador, pero se pueden notar oscilaciones mayores en su señal de control. La diferencia más significativa se encuentra en el estado de la posición del carro, para el caso de este controlador las oscilaciones son mucho menores, además de reducir el error.

Capítulo 6

Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, tanto teórica como experimentalmente, se puede hacer una comparación entre las técnicas de control utilizadas en este trabajo. Cada una presenta características distintas, lo que hace que tenga ventajas y desventajas ante la otra; en la implementación física de controladores para sistemas electromecánicos. Algunas de las características más importantes son

- los controladores difusos presentan un sobrepaso menor que los lineales
- los controladores lineales requieren un tiempo de procesamiento menor que los difusos. Siendo para los primeros de aproximadamente $8ms$, mientras que en los difusos oscila entre $14ms - 16ms$.
- el error que presentan los controladores difusos es menor con respecto al de los lineales
- el tiempo de asentamiento de los lineales es menor que los difusos, en gran medida por la dificultad de sintonizar estos últimos
- el gasto energético en los controladores lineales es mayor que en los difusos, razón por la cual también se presenta una mayor saturación en los primeros.

Como ya se dijo los controladores difusos diseñados en esta tesis presentan un error menor a los lineales. No obstante, también presentan un tiempo de procesamiento mayor, lo que hace que se requieran técnicas de manejo de datos, tales como la interpolación vista en este trabajo; además se vuelven poco prácticos cuando el sistema tiene más de cuatro estados. Por su parte los controladores lineales resultan menos complejos de diseñar. Sin embargo, dependen de un modelo matemático lineal, lo cual puede ocasionar que se vean muy afectados por incertidumbres paramétricas o fenómenos no lineales ignorados en los modelos. En conclusión, no se puede decir en forma general que alguna de las técnicas de control utilizada en esta tesis sea mejor que la otra. Para tomar la

decisión de cuál usar se deben considerar varios factores, tales como el número de estados, la dificultad para modelar al sistema, el conocimiento que se tenga de éste, la rapidez de convergencia requerida y que tan afectado se ve por no linealidades.

Para un sistema en el cual se tienen más de cuatro estados, las no linealidades no influyen demasiado en el comportamiento de éste o se cuenta con un modelo matemático que lo describe de una manera precisa; resulta conveniente utilizar un controlador del tipo LQR, debido a que su implementación y sintonización es sencilla en relación con los controladores difusos. Por su parte cuando el sistema presenta pocos estados, no es fácil modelarlo o se tiene un amplio conocimiento de su comportamiento; un controlador difuso es una buena opción, debido a la exactitud que puede llegar a tener, además de evitar los problemas que se presentan al modelar el sistema. También se ha visto que el combinar ambas técnicas puede resultar benéfico, pudiendo obtener mayor precisión, un tiempo de asentamiento menor u oscilaciones menores.

Se puede pensar en utilizar el algoritmo de control LQG como técnica de control lineal, con lo que se eliminan los filtros derivativos, evitando que la señal se atrase. Sin embargo, en los modelos utilizados en esta tesis no se consideran algunos fenómenos de fricción, por lo que dichos modelos presentan incertidumbres. Los observadores se ven afectados por el error proveniente de las incertidumbres paramétricas, haciendo que el desempeño de los controladores LQG no sea el adecuado. Los métodos necesarios para eliminar incertidumbres paramétricas, resultan complejos, razón por la cual se utilizan controladores LQR.

En lo que se refiere al sistema de péndulo-carro-balancín, las técnicas de control que se utilizan en esta tesis no resultan adecuadas para lograr estabilizar a este sistema. Se presentan limitaciones físicas que ya se han expuesto en capítulos anteriores, las cuales alteran el comportamiento de éste. Además, la tarjeta de adquisición utilizada cuenta con un tiempo de escritura alto, provocando que el controlador sea menos eficiente. Como trabajo futuro para lograr controlar este sistema, se propone utilizar una tarjeta de adquisición que tenga un tiempo de escritura menor; diseñar un controlador que no dependa de un modelo lineal y en caso de ser necesario desarrollar un modelo no lineal que contemple incertidumbres paramétricas, logrando describir de una manera más adecuada la dinámica del sistema. Esperando con lo anterior, poder aplicar técnicas de control no lineal, que permitan estabilizar al sistema en un rango de operación mayor al obtenido en este trabajo, lo cual es necesario para implementar en forma física un controlador para este sistema.

Apéndice A

Anexos

A.1. Regresión lineal

Una regresión lineal, intenta ajustar datos dispersos al comportamiento de una recta. Existen varias maneras de hacerlo, el método que se utiliza para este trabajo es el de mínimos cuadrados.

Suponiendo la ecuación de una recta en la forma

$$y = mx + b,$$

y un error

$$\varepsilon = y - \hat{y},$$

se intenta aproximar la recta estimada como

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x.$$

De las ecuaciones anteriores, se hace un desarrollo para encontrar a $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$

$$\Sigma \varepsilon^2 = \Sigma (y - \hat{y})^2, \Sigma \varepsilon^2 = \Sigma (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)^2,$$

al obtener las derivadas parciales respecto a $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$,

$$\frac{\Sigma \varepsilon^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 2 \Sigma (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)(-1) = 0,$$

$$\Sigma (y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x) = 0,$$

$$\Sigma y - n \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \Sigma x = 0,$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma y}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\Sigma x}{n},$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}, \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Sigma \varepsilon^2}{\partial \hat{\beta}_1} &= 2\Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)(-x) = 0, \\
\Sigma(y - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x)(x) &= 0, \\
\Sigma xy - \hat{\beta}_0 \Sigma x - \hat{\beta}_1 \Sigma x^2 &= 0, \\
n\Sigma xy - \frac{\Sigma y - \hat{\beta}_1 \Sigma x}{n} \Sigma x - \hat{\beta}_1 \Sigma x^2 &= 0, \\
n\Sigma xy - \Sigma y - \hat{\beta}_1 \Sigma x \Sigma x - n\hat{\beta}_1 \Sigma x^2 &= 0, \\
n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y + \hat{\beta}_1 (\Sigma x)^2 - n\hat{\beta}_1 \Sigma x^2 &= 0,
\end{aligned}$$

de donde se despeja $\hat{\beta}_1$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}, \quad (\text{A.2})$$

sustituyendo la ecuación A.2 en A.1

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma y}{n} - \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \frac{\Sigma x}{n},$$

desarrollando

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}. \quad (\text{A.3})$$

Con las ecuaciones A.3 y A.2 se aproximan los valores dispersos al comportamiento de una recta, considerando que n es el número de datos con el que se trabaja.

A.2. Interpolación lineal y multilinear

Las tablas de datos, sirven para escenificar dependencias de datos entre variables. Son comúnmente utilizadas por que son sencillas de entender. Sin embargo, carecen de continuidad y eso puede llegar a limitarlas; por ejemplo, al buscar la relación entre dos variables de la tabla en algún valor que no exista en ésta, aparentemente resulta inservible. No obstante, mediante los métodos de interpolación se puede resolver este problema. El método que se utiliza para este trabajo es el de interpolación lineal y multilinear.

Las condiciones para poder aplicar este método a una tabla de datos, son tres:

Que todas la variables sean numéricas y pertenezcan al conjunto de los números reales

En el caso de existir más de una variable dominante, estas deben de ser independientes entre sí

Que la variable dependiente sea función de las variables dominantes.

Al suponer el caso más sencillo en el que únicamente se tiene una variable dominante x y una dependiente y , la tabla necesita tener al menos dos puntos, $P_0 = (X_0, Y_0)$ y $P_1 = (X_1, Y_1)$, si se desea conocer el valor de y para un valor de x entre X_0 y X_1 , se puede utilizar el método de interpolación lineal; el cual consiste en aproximar el comportamiento de los datos a una línea recta. Lo cual se hace con la ecuación

$$y = A + Bx.$$

Considerando que se tienen dos puntos, se puede determinar B y A teniendo las ecuaciones

$$B = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0},$$

$$A = \frac{Y_0 X_1 - Y_1 X_0}{X_1 - X_0}.$$

De las tres ecuaciones anteriores se puede encontrar la siguiente relación

$$y = \frac{X_1 - x}{X_1 - X_0} Y_0 - \frac{x - X_0}{X_1 - X_0} Y_1,$$

donde se observa que cuando $x \rightarrow X_0$ entonces $y \rightarrow Y_0$ y si $x \rightarrow X_1$ entonces $y \rightarrow Y_1$. Por su parte cuando x está en un valor intermedio, entonces se calcula un valor aproximado de y , en caso de que la tabla contenga más de dos valores para cada variable, es posible seguir utilizando este método, únicamente cuidando que los puntos elegidos sean contiguos en la tabla.

Cuando existe más de una variable dominante se aplica el método de interpolación multilineal, el cual es bastante similar al lineal pero permite el uso de más variables dominantes. Se tiene que encontrar la ecuación que describe la pendiente y la ordenada al origen de la recta formada entre cada uno de los puntos de cada variable dominante. Siendo expresado de la siguiente forma

$$\# \text{ rectas} = 2^{\# \text{ variables dominantes}}.$$

Por ejemplo para un sistema de tres variables dominantes y una dependiente se tiene

$$y = \alpha_{000} Y_{000} + \alpha_{001} Y_{001} + \alpha_{010} Y_{010} + \alpha_{011} Y_{011} + \alpha_{100} Y_{100} + \alpha_{101} Y_{101} + \alpha_{110} Y_{110} + \alpha_{111} Y_{111},$$

con

$Y_{i,j,k}$ es el valor de y correspondiente al punto (X_{1i}, X_{2j}, X_{3k}) , donde i, j, k valen 1 o 0

$\alpha_{i,j,k} = \beta_{1i} \beta_{2j} \beta_{3k}$, donde i, j, k valen 1 o 0

$\beta_{m0} = \frac{X_{m1} - x_m}{X_{m1} - X_{m0}}$, donde m toma valores de 1, 2 o 3

$\beta_{m1} = 1 - \beta_{m0}$, donde m toma valores de 1, 2 o 3.

A.3. Filtros analógicos

Las mediciones de los potenciómetros tienen demasiado ruido para proporcionar una medición correcta, por lo que es necesario filtrar la señal, para este propósito se utilizan filtros activos tipo *sallen key* [6]. Se eligen filtros analógicos debido a que al realizar pruebas con filtros digitales programados el resultado no es satisfactorio, ya que atrasan demasiado la señal o no eliminan la cantidad suficiente de ruido; la configuración utilizada se muestra en la figura A.1. Estos filtros son pasabajas y se utilizan para los tres potenciómetros, teniendo todos una frecuencia de corte de $f_c \approx 8.8Hz$. Sus componentes son dos resistencias de $180K\Omega$, dos capacitores de $0.1\mu F$ y un amplificador operacional (TL084).

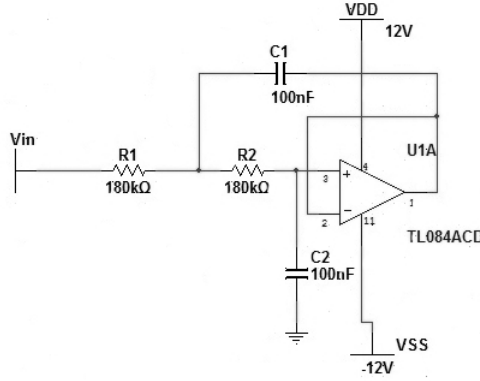


Figura A.1: Filtro activo pasabajas

La frecuencia de corte de estos filtros se determina a través de su función de transferencia. Se considera que las resistencias tienen el mismo valor, misma consideración que se hace para los capacitores, al realizar un análisis de corrientes se tiene

$$\frac{V_x - V_{out}}{R} = \frac{V_{out}}{Z_C}, \quad (A.4)$$

$$\frac{V_{in} - V_x}{R} - \frac{V_{out} - V_x}{Z_C} = \frac{V_x - V_{out}}{R}, \quad (A.5)$$

de la Ec. A.4 se despeja a V_x quedando

$$V_x = V_{out} \frac{Z_C + R}{Z_C},$$

al sustituir este valor de V_x en la Ec. A.5

$$\frac{V_{in}}{R} - 2V_{out} \left(\frac{Z_C + R}{RZ_C} \right) + \frac{V_{out}}{Z_C} - V_{out} \left(\frac{Z_C + R}{Z_C^2} \right) = -\frac{V_{out}}{R},$$

$$\frac{V_{in}}{R} = V_{out} \left(\frac{Z_C R + R^2 + 2Z_C^2 + 2Z_C R - Z_C - Z_C^2}{Z_C^2 R} \right),$$

$$G(S) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Z_C^2}{R^2 + Z_C^2 + 2Z_C R},$$

en donde el término Z_C es la impedancia del capacitor. Sin embargo, esta impedancia también puede ser expresada como

$$Z_C = \frac{1}{SC},$$

al sustituir lo anterior en $G(S)$,

$$G(S) = \frac{\frac{1}{S^2 C^2}}{R^2 + 2R \frac{1}{SC} + \frac{1}{S^2 C^2}},$$

$$G(S) = \frac{\frac{1}{S^2 C^2}}{\frac{S^2 R^2 C^2 + 2SRC + 1}{S^2 C^2}},$$

$$G(s) = \frac{1}{S^2 R^2 C^2 + 2SRC + 1},$$

al normalizar

$$G(S) = \frac{\frac{1}{R^2 C^2}}{S^2 + \frac{2S}{RC} + \frac{1}{R^2 C^2}},$$

lo cual se puede igualar con la forma general de una función de transferencia para un sistema de segundo orden, dada por

$$\frac{K_0 \omega_n^2}{S^2 + 2\xi \omega_n S + \omega_n^2},$$

al igualar

$$\omega_n = \frac{1}{RC}.$$

Sin embargo, para el caso del filtro se sabe que

$$\omega_n = \omega_c,$$

$$\omega = 2\pi f,$$

entonces

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

En la figura A.2 se observa el resultado de filtrar la señal; mientras que en la figura A.3 se observa la señal de ruido que se elimina con el filtro.

Al derivar las señales de posición para obtener las velocidades, el ruido se incrementa. Debido a lo anterior es necesario que las señales de los potenciómetros tengan un ruido máximo de $\pm 6mV$. Por su parte los filtros analógicos implementados eliminan, hasta $\pm 4mV$ de ruido, con lo cual éste se reduce a $\pm 5mV$ en las señales obtenidas de los potenciómetros.

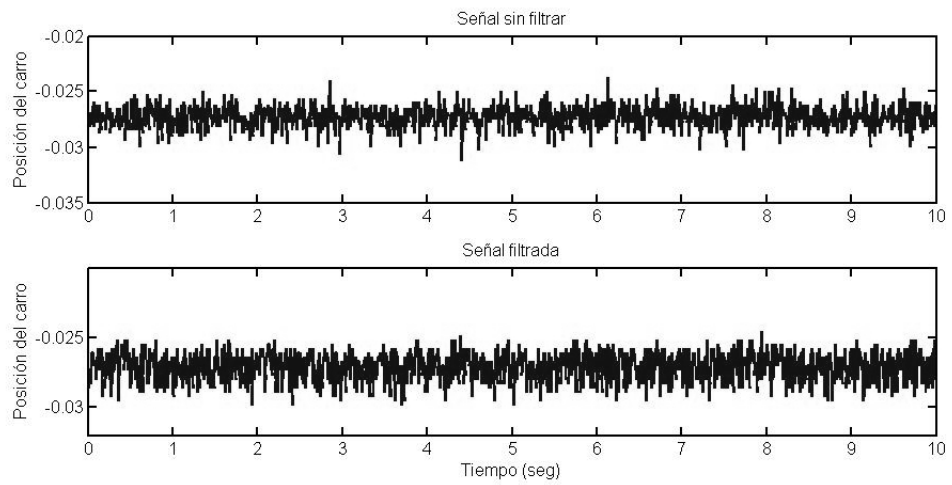


Figura A.2: Comparación entre la señal filtrada y la señal sin filtrar

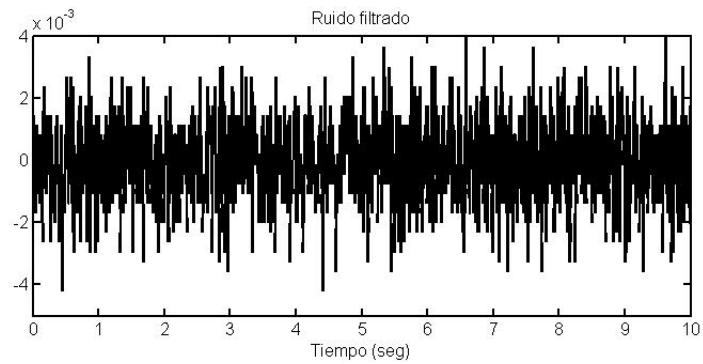


Figura A.3: Ruido eliminado por el filtro

Bibliografía

- [1] C. Bellon, P. Bosc, and H. Prade. Fuzzy boom in Japan. *International Journal of Intelligent Systems*, 7(4):293–316, 1992.
- [2] Y.Y. Boers. Average performance control for systems with parametric uncertainty. 1999.
- [3] B.M. Chung, J.W. Lee, H.H. Joo, and Y.K. Lim. Hybrid Fuzzy Learning Controller for an Unstable Nonlinear System. *International Journal the Korean Society of Precision Engineering*, 1(1):79–83, 2000.
- [4] F. Saeta I. García P. Maciá E. Hacar, A. Revuelta. *Mecánica lagrangiana teoría y práctica*. Alqua, 2009.
- [5] E. Hendricks, O. Jannerup, and P.H. Sørensen. *Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic Methods*. Springer Verlag, 2008.
- [6] P. Horowitz and W. Hill. *The art of electronics*. Cambridge university press, 2001.
- [7] H.K. Khalil and JW Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 2002.
- [8] S. Kizir, Z. Bingul, and C. Oysu. Fuzzy control of a real time inverted pendulum system. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 21(1):121–133, 2010.
- [9] M.L. Lee, H.Y. Chung, and F.M. Yu. Modeling of hierarchical fuzzy systems. *Fuzzy sets and systems*, 138(2):343–361, 2003.
- [10] T.H.S. Li and M.Y. Shieh. Switching-type fuzzy sliding mode control of a cart-pole system. *Mechatronics*, 10(1-2):91–109, 2000.
- [11] J. A. Montiel. *Identificación y control de un sistema mecánico. Péndulo invertido*. 2010.
- [12] H.T. Nguyen. *A first course in fuzzy and neural control*. Crc press, 2003.
- [13] K. Ogata. *Modern control engineering*. Prentice Hall, 2009.

- [14] K.M. Passino and S. Yurkovich. *Fuzzy control*. Citeseer, 1998.
- [15] C.A.D.C. Payares. Ecuaciones de Euler-Lagrange y Lagrangiano de sistemas mecánicos de partículas.
- [16] L.M.S. QUANSER User Manual. Plants: IP01 and IP02. *Single Inverted Pendulum*.
- [17] L.M.S. QUANSER User Manual. Quanser Seesaw Experiment. *Linear Control Challenge*.
- [18] L.E. Ramos, B. Castillo-Toledo, and S. Negrete. Nonlinear regulation of a seesaw inverted pendulum. In *Control Applications, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1399–1403. IEEE, 2002.
- [19] C. Rios, C.I. Lim, R.P. Metzger, and A.A. Rodriguez. Multivariable analysis and control of a cart-pendulum-seesaw system using an animation tool. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*, volume 1, pages 825–830. IEEE, 2002.
- [20] D.H. Sleeman and J.S. Brown. Intelligent tutoring systems. 1982.
- [21] J.J.E. Slotine, W. Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 461. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [22] M.V. Subbotin. Balancing an Inverted Pendulum on a Seesaw. *Project Report, University of California, Santa Barbara, Spring*, 2004.
- [23] D. Xiu. Efficient collocational approach for parametric uncertainty analysis. *Communications in computational physics*, 2(2):293–309, 2007.