Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias

Sistemas Estratificantes Lineales

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestra en Ciencias

p r e s e n t a

Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda.

Director de Tesis

Dr. Octavio Medoza Hernández

México, D.F. 2011

Introducción

La noción de sistema estratificante fue introducida en el 2002, generalizando las nociones de módulo "estándar" e "inclinante característico" asociados clásicamente a álgebras casi-hereditarias y estandarmente estratificadas. Dichas álgebras estan definidas en base a un orden dado en los módulos proyectivos inescindibles y han sido extensamente estudiadas desde finales de los años 80. Cabe señalar que dichas álgebras aparecen también en el estudio de los grupos algebraicos, álgebras de Lie, categorías de peso máximo, y ciertas propiedades homológicas en álgebras asociativas de dimensión finita sobre un campo.

Las Categorías de Peso Máximo fueron introducidas por E. Cline, B. Parshall y L. Scott en [9]. Dicha noción fue dada con la finalidad de unificar ciertas construcciones que se dan muy frecuentemente en: (a) la teoría de representaciones de álgebras de Lie y de Grupos algebraicos, (b) álgebras de caminos, (c) espacios singulares y categorías de gavillas perversas (viene de geometría algebraica), y (d) categorías trianguladas (una nueva herramienta homológica que ha sido aplicada con éxito en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales lineales). La clase de álgebras casi-hereditarias fue introducida por L. Scott en [23], donde la idea era darle un contexto algebraico a las categorías de peso máximo. Dicha conexión fue establecida por primera vez en [10], donde se ve que, de cierta manera, las álgebras casi-hereditarias modelan (describen en términos de módulos) a las categorías de peso máximo.

Las álgebras casi-hereditarias se definen mediante una cadena muy especial de ideales (ver [10] y [23]). Sería pues muy deseable, tener otra "forma" de ver a dicha clase de álgebras. Este paso, fue dado por V. Dlab y C.M.Ringel en [11] donde se introduce por primera vez la clase de módulos estándar ${}_A\Delta$ asociada a una k-álgebra de dimensión finita A. Dicho concepto fue crucial para la "popularización" de las álgebras casi-hereditarias en el campo de las representaciones de álgebras. En [11], V. Dlab y C.M.Ringel se restringen al caso de conjuntos linealmente ordenados. A pesar de ello, este primer paso fue muy importante pues resultó que este tipo de álgebras (en el caso lineal) ya existían en la teoría de representaciones de álgebras sólo que no se habían estudiado desde este punto de vista.

Debido al éxito alcanzado en la teoría de álgebras casi-hereditarias, se intentaron varias posibles generalizaciones. Una de las más importantes ha sido la dada por I. Agoston, V. Dlab y E. Lukacs en [1], donde se introduce la clase de álgebras estardarmente estratificadas (ss-álgebras) con respecto a un orden lineal. Una de las propiedades más interesantes de las ss-álgebras es su conexión con la teoría de inclinación. Dicha conexión fue establecida en 1991 por C.M. Ringel (ver [20]), cuando estudiaba las propiedades homológicas de la categoría $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ de módulos ${}_A\Delta$-filtrados en el caso en que A es casi-hereditaria. Para esto, dada una álgebra casi-hereditaria A, C.M.Ringel construye el llamado "módulo característico" T (que resulta ser inclinante) asociado a $\mathcal{F}({}_A\Delta)$, y prueba que el álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}\,(T)$ es de nuevo casi-hereditaria. Muchos de los resultados de C.M. Ringel, fueron generalizados por I. Agoston, D. Happel, E. Lukacs y L. Unger en [2] para las ss-álgebras.

La primera noción (existen varias actualmente) de sistema estratificante $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$, fue introducida por K. Ermann y C. Sáenz en [18]. En tal caso, la clase Θ generaliza a la clase de los módulos estándar y la clase $\underline{Y}$ a la noción de inclinante característico. Por otro lado, los sistemas estratificantes son también una "categorificación" de las ss-álgebras; y por lo tanto, una generalización de las categorías de peso máximo para el caso en que los "pesos" son un conjunto finito y linealmente ordenado.

La teoría de sistemas estratificantes, en el caso de conjuntos finitos linealmente ordenados, ha sido desarrollada inicialmente por E. Marcos, O. Mendoza y C. Saénz. Posteriormente, O. Mendoza, C. Sáenz y C. Xi, introducen en [15] las nociones de sistemas estratificantes para conjuntos finitos pre-ordenados.
En [13] se da una caracterización homológica de los, llamados en [18], sistemas estratificantes $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ en términos de los Θ conocidos como simples relativos. Con dicha caracterización el par $(\Theta, \leq)$ se les conoce actualmente como sistema estratificante (ss); pasando el sistema $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ a rebautizarse con el nombre de sistema estratificante Ext-inyectivo (eiss). Esto se debe a que la clase $\underline{Y}$ caracteriza a los inyectivos relativos en la categoría $\mathcal{F}(\Theta)$ de módulos Θ-filtrados.
En [14] se introduce el triple $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ llamado Sistema estratificante Ext-proyectivo (epss). Con dicha noción, se generaliza, para ss-álgebras, la noción de sistema estandarizable introducida por V. Dlab y C.M. Ringel en [11] pa-

ra álgebras casi-hereditarias; probándose la existencia de cubiertas proyectivas relativas en $\mathcal{F}(\Theta)$. En dicho trabajo, se prueba también que dado un sistema estratificante $(\Theta, \leq)$ existen un único (salvo isomorfismos) epss $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ y un único (salvo isomorfismos) eiss $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ asociados a $(\Theta, \leq)$; más aun, las álgebras de endomorfismos $B := \mathrm{End}(Y)$ y $B' := \mathrm{End}(Q)$ son ss-álgebras.
En [16] se muestra cómo se puede usar la teoría de sistemas estratificantes para obtener información sobre las dimensiones globales y finitistas de un álgebra en general. También se investiga, desde el punto de vista de los sistemas estratificantes, algunos de los resultados más importantes obtenidos en [2]. Como aplicación, se consiguen cotas para la dimensión finitista de un álgebra; y en particular la llamada cota óptima de $2n-2$ para la dimensión finitista de una ss-álgebra con n simples (no isomorfos dos a dos).

Esta tesis tiene por objetivo recopilar estos resultados para sistemas estratificantes lineales; y en algunas ocasiones, proporcionar demostraciones distintas y más sencillas a las dadas en los artículos ya mencionados.
En el primer capítulo, el lector encontrará las definiciones y conceptos básicos de Teoría de Categorías que serán utilizadas a lo largo de esta tesis. En el segundo capítulo, veremos la definición de ss-álgebra y algunas de sus propiedades básicas. El tercer capítulo comprende la parte central de esta tesis: los sistemas estratificantes. Aquí, se definen dichos sistemas y se estudian sus propiedades básicas, mostrando los resultados que hemos mencionado; y que pueden ser encontrados en [18], [13] y [14]. Finalmente, en el cuarto capítulo, el lector podrá encontrar algunos de los resultados de [16]. Además, hemos agregado un Apéndice donde el lector podrá encontrar definiciones y resultados conocidos que usamos a lo largo de esta tesis. Esto, con el fin de que el texto sea en lo posible autocontenido.

Índice general

Capítulo 1

Algunas nociones categóricas.

En éste capítulo, introduciremos algunos conceptos categóricos que serán necesarios en el resto de esta tesis.

1.1. Definiciones Básicas de Categorías.

Definición 1.1. *Una categoría $\mathcal{A}$ está dada por una clase de objetos, denotada por* $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ *ó simplemente por* $\mathcal{A}$, *una clase* $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$ *de morfismos y una operación parcial binaria* $\circ$ *definida en* $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, *tales que las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}) = \displaystyle\bigcup_{(A,B)\in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})\times \mathrm{Obj}(\mathcal{A})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$, *donde* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ *es un conjunto para todo par* $(A,B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,D)$ *si y sólo si* $A = C$ *y* $B = D$.

(c) *Para cada triple* $(A,B,C) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, *la operación parcial binaria* $\circ$, *definida en* $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$, *induce por restricción, la función* $\Omega : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ *dada por* $\Omega(f,g) := f \circ g$, *que satisface las siguientes propiedades:*

   (i) *asociatividad:* $(h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$ *siempre que dicha composición esté definida,*

   (ii) *existencia de identidades: para cada* $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$, *existe* $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A)$ *tal que, para cada* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$ *y para cada* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,A)$ *se tiene que* $f \circ 1_A = f$ *y* $1_A \circ g = g$.

Para simplificar la notación, escribiremos fg en lugar de $f \circ g$; y en ocasiones, denotaremos a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ por $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$. Observemos además, que para cada $A \in \mathcal{A}$, el elemento identidad $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ es único.

Veamos ahora algunos ejemplos de categorías.

Ejemplo 1.2. (a) *La categoría $\mathcal{S}$, cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B)$ *es el conjunto de todas las funciones de A en B y la composición de morfismos es la composición usual de funciones.*

(b) *La categoría Gr, cuyos objetos son todos los grupos y* $\mathrm{Hom}_{Gr}(G, G')$ *es el conjunto de todos los morfismos de grupos de G en G'.*

(c) *La categoría Ab, cuyos objetos son todos los grupos abelianos; y para cada par de grupos abelianos G y G',* $\mathrm{Hom}_{Ab}(G, G')$ *es el conjunto de todos los morfismos de grupos abelianos. La composición de morfismos en Ab es la misma que en la categoría de grupos.*

(d) *La categoría* $\mathrm{mod}(R)$, *de $R-$módulos izquierdos finitamente generados, donde R es un anillo (asociativo con identidad); y* $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ *es el conjunto de todos los morfismo de $R-$módulos finitamente generados.*

Definición 1.3. *Una categoría $\mathcal{A}$ es **pequeña** si la clase de objetos* $\mathrm{Obj}(\mathcal{A})$ *es un conjunto.*

Definición 1.4. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría. Diremos que $\mathcal{A}'$ es una **subcategoría** de $\mathcal{A}$ si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Obj}(\mathcal{A}') \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{A})$.

(b) *Para cada* $(A, B) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}') \times \mathrm{Obj}(\mathcal{A}')$, *se tiene que* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

(c) *La operación parcial $\circ'$ en* $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}')$, *coincide con la restricción de la operación parcial $\circ$ (definida en* $\mathrm{Mor}(\mathcal{A})$*) en* $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}')$.

(d) *Si* $1'_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}'}(A, A)$ *es la identidad en $\mathcal{A}'$, entonces* $1'_A = 1_A$; *donde* $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$ *es la identidad en $\mathcal{A}$.*

Si $\mathcal{A}$ es una categoría y $\mathcal{B}$ es una subclase de objetos de $\mathcal{A}$, podemos ver a $\mathcal{B}$ como una subcategoría de $\mathcal{A}$, definiendo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ para cada par (X, Y) de objetos en $\mathcal{B}$. En tal caso, se dice que $\mathcal{B}$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{A}$; y son el único tipo de subcategorías que consideraremos.

Definición 1.5. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un* ***funtor covariante*** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *es una asignación de un objeto $F(A) \in \mathcal{B}$, para cada objeto $A \in \mathcal{A}$; y un morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(A'))$ para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$, tal que:*

(a) *si fg está definida en $\mathcal{A}$, entonces $F(fg) = F(f)F(g)$; y*

(b) *para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Definición 1.6. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un* ***funtor contravariante*** $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *es una asignación de un objeto $F(A) \in \mathcal{B}$, para cada objeto $A \in \mathcal{A}$; y un morfismo $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), F(A))$ para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$, tal que:*

(a) *si fg está definida en $\mathcal{A}$, entonces $F(fg) = F(g)F(f)$; y*

(b) *para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Ejemplo 1.7. *El funtor covariante $1_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, tal que $1_{\mathcal{A}}(A) = A$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y $1_{\mathcal{A}}(f) = f$ para cada morfismo f en $\mathcal{A}$, es llamado el funtor identidad sobre $\mathcal{A}$.*

Definición 1.8. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores cualesquiera. Definimos la composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ por las reglas $GF(A) := G(F(A))$ y $GF(f) := G(F(f))$.*

Observemos que: si G y F son del mismo tipo (es decir, covariantes ó contravariantes), entonces GF es covariante; mientras que, si uno es covariante y el otro contravariante entonces GF es contravariante.

En general, por simplicidad, en todo lo que sigue usaremos el término funtor para referirnos a funtor covariante.

Definición 1.9. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores cualesquiera. Una* ***transformación natural*** $\eta : F \to G$ *es una familia de morfismos $\eta := \{\eta_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ en $\mathcal{B}$ tal que para cada morfismo $f : A \to A'$ en $\mathcal{A}$, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(g)"'] & G(A) \arrow[d, "G(g)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] & G(A'). \end{tikzcd}$$

Observación 1.10. (a) *Si η_A es un isomorfismo para cada $A \in \mathcal{A}$, decimos que η es una* ***equivalencia natural****. En este caso, tenemos una transformación natural $\eta^{-1} : G \to F$ definida por $(\eta^{-1})_A := (\eta_A)^{-1}$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

En ocasiones escribiremos $F \simeq G$ para denotar que F y G son naturalmente equivalentes.

(b) *Si $\eta : F \to G$ y $\rho : G \to F$ son transformaciones naturales de funtores, definimos la composición $\rho\eta : F \to G$ por $(\rho\eta)_A := \rho_A \eta_A$, para cada $A \in \mathcal{A}$.*

(c) *Para cualquier funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, la transformación natural identidad $1_F : F \to F$ es por definición $(1_F)_A := 1_{F(A)}$ para cada $A \in \mathcal{A}$.*

(d) *Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $H : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores; y $\eta : F \to G$ una transformación natural. Entonces tenemos una transformación natural $H\eta : HF \to HG$ definida por $(H\eta)_A := H(\eta_A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Similarmente, si $L : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ es un funtor, entonces $\eta L : FL \to GL$ es una transformación natural dada por $(\eta L)_D := \eta_{L(D)}$, para cada $D \in \mathcal{D}$.*

Definición 1.11. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor. Para cada par de objetos A, $B \in \mathcal{A}$, se tiene la función inducida por F,*

$$F_{A,B} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B)),$$

dada por $F_{A,B}(f) := F(f)$, para cada $f \in \mathrm{Hom}_A(A, B)$.

(a) *Decimos que F es **fiel** si la función inducida $F_{A,B}$ es inyectiva para cada A, $B \in \mathcal{A}$.*

(b) *Decimos que F es **pleno** si la función inducida $F_{A,B}$ es suprayectiva para cada A, $B \in \mathcal{A}$.*

(c) *Decimos que F es **denso** si para cada objeto B de $\mathcal{B}$, existe un objeto A en $\mathcal{A}$, tal que B es isomorfo a $F(A)$.*

(d) *Decimos que F es una **equivalencia de categorías** si existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $GF \simeq 1_{\mathcal{A}}$ y $FG \simeq 1_{\mathcal{B}.}$ Además, diremos en este caso que F y G son cuasi-inversos uno del otro.*

Observación 1.12. *Una **dualidad**. es un funtor contravariante $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, el cual es una equivalencia de categorías.*

Definición 1.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **categoría aditiva** si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) *Para cada familia finita $\{X_i\}_{i=1}^n$ de objetos en $\mathcal{C}$, existe el coproducto $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ en $\mathcal{C}$.*

(b) *Para cada* X, $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *el conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *es un grupo abeliano.*

(c) *Para cada* X, Y, $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, *la composición de morfismos en* $\mathcal{C}$ *es* $\mathbb{Z}-$*bilineal. Esto es, para cada* f, $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ *y* g, $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *se tiene que* $(f + f')g = fg + f'g$ *y* $f(g + g') = fg + fg'$.

(d) *Existe un objeto* $0 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *(llamado* ***el objeto cero de*** $\mathcal{C}$*) tal que el morfismo identidad* 1_0 *es el elemento cero del grupo abeliano* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$.

Definición 1.14. *Sea* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un funtor entre categorías aditivas.*

(a) *Decimos que* F ***preserva sumas directas****, si para cada par de objetos* X_1 *y* X_2 *en* $\mathcal{C}$, *se tiene que* $F(X_1 \oplus X_2) \cong F(X_1) \oplus F(X_2)$.

(b) *Decimos que* F *es* ***aditivo****, si para cada par de objetos* X *y* Y *en* $\mathcal{C}$, *la función* $F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ *satisface que* $F(f + g) = F(f) + F(g)$ *para cada* f, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definición 1.15. *Sea* $\mathcal{C}$ *una categoría aditiva y* $f : X \to Y$ *un morfismo en* $\mathcal{C}$.

(a) *Un* ***núcleo de*** f *es un objeto* $\mathrm{Ker}(f)$ *junto con un morfismo* $u : \mathrm{Ker}(f) \to X$ *que satisface las siguientes condiciones.*

   (i) $fu = 0$.

   (ii) *Para cada morfismo* $h : Z \to X$ *en* $\mathcal{C}$ *tal que* $fh = 0$, *existe un único morfismo* $h' : Z \to \mathrm{Ker}(f)$ *tal que* $h = uh'$. *(Ésta es llamada* ***la propiedad universal del núcleo****).*

(b) *Un* ***Conúcleo de*** f *es un objeto* $\mathrm{Coker}(f)$ *junto con un morfismo* $\rho : Y \to \mathrm{Coker}(f)$ *que satisface las siguientes condiciones.*

   (i) $\rho f = 0$.

   (ii) *Para cada morfismo* $g : Y \to Z$ *en* $\mathcal{C}$ *tal que* $gf = 0$, *existe un único morfismo* $g' : \mathrm{Coker}(f) \to Z$ *tal que* $g = g'\rho$. *(Ésta es llamada* ***la propiedad universal del conúcleo****).*

Observación 1.16. (a) *Se puede probar que el morfismo* $u : \mathrm{Ker}(f) \to X$ *dado en 1.15* (a), *es un monomorfismo. Similarmente, el morfismo* $\rho : Y \to \mathrm{Coker}(f)$, *dado en 1.15* (b), *es un epimorfismo.*

(b) *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría aditiva que admite núcleos y conúcleos; entonces, para cada morfismo* $f : X \to Y$ *en* $\mathcal{C}$, *existe un único morfismo* $\overline{f} : \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Ker}(\rho)$ *en* $\mathcal{C}$, *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho'"'] & Y \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Coker}(f) \\ & \mathrm{Coker}(u) \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathrm{Ker}(\rho) \arrow[u, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

donde $u' : \mathrm{Ker}(\rho) \to Y$ *es el núcleo de* ρ *y* $\rho' : X \to \mathrm{Coker}(u)$ *es el conúcleo de* u. *El objeto* $\mathrm{Ker}(\rho)$ *es llamado* ***la imagen de*** f *y es denotado por* $\mathrm{Im}(f)$.

Definición 1.17. *Una categoría* $\mathcal{C}$ *es llamada* ***abeliana*** *si satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathcal{C}$ *es una categoría aditiva.*

(b) *Cada morfismo* $f : X \to Y$ *en* $\mathcal{C}$ *admite un núcleo* $u : \mathrm{Ker}(f) \to X$ *de* f *y un conúcleo* $\rho : Y \to \mathrm{Coker}(f)$ *de* f; *y el morfismo* $\overline{f} : \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Ker}(\rho)$ *es un isomorfismo.*

Definición 1.18. *Sea* K *un campo y* A *un anillo asociativo con identidad.*

(a) *Decimos que* A *es una* $K-$***álgebra*** *si tiene una estructura de* $K-$*espacio vectorial* $K \times A \to A$, *con* $(k, a) \mapsto k \cdot a$, *compatible con la multiplicación del anillo* A. *Esto es, para cada* $k \in K$ *y para cada* $x, y \in A$ *se tiene que* $k \cdot (xy) = (k \cdot x)y = x(k \cdot y)$.

(b) *Decimos que una* $K-$*álgebra* A *es de* ***dimensión finita***, *si la dimensión* $\dim_K(A)$, *del* $K-$*espacio vectorial* A, *es finita.*

Observación 1.19. *En esta tesis, estaremos interesados sólo en la categoría abeliana* $\mathrm{mod}(A)$ *de una* $K-$*álgebra* A *de dimensión finita.*

Definición 1.20. *Sea* $\mathcal{B}$ *una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(A)$, *donde* A *es una* $K-$*álgebra. Decimos que* $\mathcal{B}$ *es* ***cerrada por extensiones*** *si para cada sucesión exacta* $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ *en* $\mathrm{mod}(A)$, *tal que* $M_1, M_2 \in \mathcal{B}$, *se tiene que* $M \in \mathcal{B}$.

Definición 1.21. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $\mathcal{X}$ *una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y* $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ *la clase de sucesiones exactas en* $\mathrm{mod}(A)$ *con términos en* $\mathcal{X}$. *El par* $(\mathcal{X}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}})$ *se dice que es una* ***subcategoría exacta*** *de*

$\mathrm{mod}(A)$. *Un funtor aditivo* $H : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, *entre subcategorías de* $\mathrm{mod}(A)$ *cerradas por extensiones, se dice que es un* ***funtor exacto*** *si* $H(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}$.

Definición 1.22. *Sea* A *una* $K-$*álgebra y* $M \in \mathrm{mod}(A)$. *Definimos*
$\mathrm{add}(M) := \{X \in \mathrm{mod}(A) : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ y } Y \in \mathrm{mod}(A) \text{ tal que } X \oplus Y \cong M^n\}$.

1.2. Aproximaciones a izquierda y a derecha.

Definición 1.23. *Sea* A *una* $K-$*álgebra. Para cada objeto* $N \in \mathrm{mod}(A)$, *se define la categoría* $\mathrm{mod}(A)\diagup N$, *como sigue.*

(a) $\mathrm{Obj}(\mathrm{mod}(A)\diagup N) := \bigcup_{B\in \mathrm{mod}(A)} \mathrm{Hom}_A(B, N)$,

(b) $\mathrm{Mor}(\mathrm{mod}(A)\diagup N)$: *para cada par de morfismos* $f : B \to N$, $f' : B' \to N$ *en* $\mathrm{mod}(A)$, *se define* $\mathrm{Hom}(f, f') := \{g \in \mathrm{Hom}_A(B, B') : f'g = f\}$.

(c) *La composición de morfismos* $\Omega : \mathrm{Hom}(f', f'')\times\mathrm{Hom}(f, f') \to \mathrm{Hom}(f, f'')$ *es la inducida de* $\mathrm{mod}(A)$, *esto es,* $\Omega(g', g) := g'g$ *(ver en el siguiente diagrama).*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ B' \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "g'"'] & B'' \arrow[u, "f''"'] \end{tikzcd}$$

Definición 1.24. *Sea* A *una* $K-$*álgebra y* $f : M \to N$ *un morfismo en* $\mathrm{mod}(A)$. *Decimos que* f *es* ***minimal a derecha*** *si para cada* $g \in \mathrm{End}(_AM)$ *tal que* $fg = f$ *se tiene que* g *es un isomorfismo.*

Observación 1.25. *Sean* $f : B \to N$ *y* $g : B \to B$ *morfismos en* $\mathrm{mod}(A)$, *tales que* $fg = f$. *Notemos que* $g : f \to f$ *es un isomorfismo en* $\mathrm{mod}(A)\diagup N$ *si y sólo si* $g : B \to B$ *es un isomorfismo en* $\mathrm{mod}(A)$.

Se define la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathrm{Obj}(\mathrm{mod}(A)\diagup N)$ como sigue: $f \sim f'$ si y sólo si $\mathrm{Hom}(f, f') \neq \emptyset$ y $\mathrm{Hom}(f', f) \neq \emptyset$. La clase de equivalencia de f, se denotará por $[f]$.

Proposición 1.26. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $f : M \to N$ *un morfismo minimal a derecha en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, para cada isomorfismo* $\varphi : M \to M$, *se cumple que* $f\varphi : M \to N$ *es minimal a derecha.*

Demostración. Sea $g : M \to M$ tal que $f\varphi g = f\varphi$. Entonces, $f\varphi g\varphi^{-1} = f$. Como f es minimal a derecha, se tiene que $\varphi g\varphi^{-1}$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $g = \varphi^{-1}(\varphi g\varphi^{-1})\varphi$ también es un isomorfismo.

□

Teorema 1.27. *Sean A una $K-$álgebra y $f : B \to N$ en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces existe $f' : B' \to N$ minimal a derecha (único salvo isomorfismos) en* $\mathrm{mod}(A) \diagup N$ *tal que $f' \in [f]$.*

Demostración. En vista de que A es una $K-$álgebra de dimensión finita, sabemos que cada $B \in \mathrm{mod}(A)$ es de longitud finita; así que este resultado es consecuencia de [6, Proposition 2.1].

□

Definición 1.28. *Sean A una $K-$álgebra y $f : B \to N$ en* $\mathrm{mod}(A)$. *El morfismo $f' : B' \to N$ del Teorema 1.27 es llamado* ***la versión minimal a derecha de*** *f.*

Teorema 1.29. *Sean A una $K-$álgebra y $g : X \to N$ en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existen X_1, $X_2 \in \mathrm{mod}(A)$ tales que $X = X_1 \oplus X_2$, $g = (0, g_2) : X_1 \oplus X_2 \to N$ y $g_2 : X_2 \to N$ es la versión minimal a derecha de g.*

(b) $\mathrm{Ker}(g) \cong X_1 \oplus \mathrm{Ker}(g_2)$.

(c) *Si g es un epimorfismo, entonces g_2 también lo es.*

Demostración. Ver [6, Theorem 2.2].

□

Corolario 1.30. *Sea A una $K-$álgebra y $f : B \to N$ un morfismo en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *f es minimal a derecha.*

(b) *Si $0 \neq B' \in \mathrm{mod}(A)$ es un sumando directo de B, entonces $f|_{B'} \neq 0$.*

Demostración. Ver [6, Corollary 2.3].

□

De manera dual, tenemos la noción de morfismo minimal a izquierda.

Definición 1.31. *Sea A una $K-$álgebra. Para cada objeto $M \in \mathrm{mod}(A)$, se define la categoría* $\mathrm{mod}(A) \diagdown M$, *como sigue.*

(a) $\mathrm{Obj}(\mathrm{mod}(A) \diagdown M) := \bigcup_{B \in \mathrm{mod}(A)} \mathrm{Hom}_A(M, B)$,

(b) $\mathrm{Mor}(\mathrm{mod}(A)\diagdown M)$: *para cada par de morfismos* $f : M \to B,\ f' : M \to B'$ *en* $\mathrm{mod}(A)$, *se define* $\mathrm{Hom}(f, f') := \{g \in \mathrm{Hom}_A(B, B') : gf = f'\}$.

(c) *La composición de morfismos* $\Omega : \mathrm{Hom}(f', f'') \times \mathrm{Hom}(f, f') \to \mathrm{Hom}(f, f'')$ *es la inducida de* $\mathrm{mod}(A)$; *esto es,* $\Omega(g', g) := g'g$ *(ver en el siguiente diagrama)*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f''"'] \arrow[dr, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\ B'' & B'. \arrow[l, "g'"] \end{tikzcd}$$

Definición 1.32. *Sea A una $K-$álgebra y $f : M \to N$ un morfismo en* $\mathrm{mod}(A)$. *Decimos que f es* ***minimal a izquierda*** *si para cada $g \in \mathrm{End}({}_AN)$ tal que $gf = f$ se tiene que g es un isomorfismo.*

Observación 1.33. *Sean $f : M \to B$ y $g : B \to B$ morfismos en* $\mathrm{mod}(A)$, *tales que $gf = f$. Notemos que $g : f \to f$ es un isomorfismo en* $\mathrm{mod}(A)\diagdown M$ *si y sólo si $g : B \to B$ es un isomorfismo en* $\mathrm{mod}(A)$.

Se define la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathrm{Obj}(\mathrm{mod}(A)\diagdown M)$ como sigue: $f \sim f'$ si y sólo si $\mathrm{Hom}(f, f') \neq \emptyset$ y $\mathrm{Hom}(f', f) \neq \emptyset$. La clase de equivalencia de f, se denotará por $[f]$.

Proposición 1.34. *Sean A una $K-$álgebra y $f : M \to N$ un morfismo minimal a izquierda en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, para cada isomorfismo $\varphi : N \to N$, se cumple que $\varphi f : M \to N$ es minimal a izquierda.*

Demostración. Sea $g : N \to N$ tal que $g\varphi f = \varphi f$. Entonces, $\varphi^{-1}g\varphi f = f$. Como f es minimal a izquierda, se tiene que $\varphi^{-1}g\varphi$ es un isomorfismo. Por lo tanto, $g = \varphi(\varphi^{-1}g\varphi)\varphi^{-1}$ también lo es.

□

Teorema 1.35. *Sean A una $K-$álgebra y $f : M \to N$ en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces existe $f' : M \to N'$ minimal a izquierda (único salvo isomorfismo) en* $\mathrm{Mod}(A)\diagdown M$ *tal que $f' \in [f]$.*

Demostración. Es dual de 1.27.

□

Definición 1.36. *Sean A una $K-$álgebra y $f : M \longrightarrow N$ en* $\mathrm{mod}(A)$. *El morfismo $f' : M \longrightarrow N'$, del Teorema 1.35, es llamado la* ***versión minimal a izquierda de*** *f.*

Teorema 1.37. *Sean A una $K-$álgebra y $g : M \to X$ en* $\mathrm{mod}(A)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Existen $X_1, X_2 \in \mathrm{mod}(A)$ tales que $X = X_1 \oplus X_2$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} : M \to X_1 \oplus X_2$ y $g_1 : M \to X_1$ es la versión minimal a izquierda de g.*

(b) $\mathrm{Coker}(g) \cong \mathrm{Coker}(g_1) \oplus X_2$.

(c) *Si g es un monomorfismo, entonces g_1 también lo es.*

Demostración. Ver [6, Theorem 2.4].

□

Corolario 1.38. *Sean A una $K-$álgebra y $g : M \to N$ un morfismo en* $\mathrm{mod}(A)$*. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *g es minimal a izquierda.*

(b) *Para todo epimorfismo que se escinda $\alpha : N \to N'$, si $\alpha g = 0$ entonces $N' = 0$.*

□

Definición 1.39. *Sea A una $K-$álgebra, $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $f : N \to M$ un morfismo en* $\mathrm{mod}(A)$*.*

(a) *Decimos que f es una $\mathcal{C}-$**aproximación a derecha de** M si $N \in \mathcal{C}$ y para cada $C \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_A(C, f) : \mathrm{Hom}_A(C, N) \to \mathrm{Hom}_A(C, M)$ es suprayectivo.*

(b) *Decimos que f es una $\mathcal{C}-$**aproximación a izquierda de** N si $M \in \mathcal{C}$ y para cada $C \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_A(f, C) : \mathrm{Hom}_A(M, C) \to \mathrm{Hom}_A(N, C)$ es suprayectivo.*

Proposición 1.40. *Sea A una $K-$álgebra, $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y $\gamma : Z \to N$ una $\mathcal{C}-$aproximación a derecha de N. Si $Z \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathrm{Im}(\gamma) \xrightarrow{i} N$ es la factorización de γ a través de su imagen, entonces $\bar{\gamma}$ es una $\mathcal{C}-$aproximación a derecha de $\mathrm{Im}(\gamma)$. Más aún, si γ es minimal a derecha, entonces $\bar{\gamma}$ también lo es.*

Demostración. Sea $g : C \to \mathrm{Im}(\gamma)$, con $C \in \mathcal{C}$. Entonces, $ig : C \to N$. Como γ es una $\mathcal{C}-$aproximación a derecha de N, existe $w : C \to Z$ tal que

$ig = \gamma w = i\bar{\gamma}w$. Del hecho de que i es un monomorfismo, se sigue que $g = \bar{\gamma}w$. Por lo tanto, $\bar{\gamma}$ es un $\mathcal{C}-$aproximación a derecha de $\mathrm{Im}(\gamma)$.

Asumamos ahora que γ es minimal a derecha y veamos que $\bar{\gamma}$ también lo es. Sea $h : Z \to Z$ tal que $\bar{\gamma}h = \bar{\gamma}$. Entonces, $\gamma h = i\bar{\gamma}h = i\bar{\gamma} = \gamma$; lo cual implica que h es un isomorfismo.

□

Definición 1.41. *Sea A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Decimos que:*

(a) $\mathcal{C}$ *es **contravariantemente finita** en* $\mathrm{mod}(A)$ *si para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ existe una $\mathcal{C}-$aproximación a derecha de M.*

(b) $\mathcal{C}$ *es **covariantemente finita** en* $\mathrm{mod}(A)$ *si para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ existe una $\mathcal{C}-$aproximación a izquierda de M.*

(c) $\mathcal{C}$ *es **funtorialmente finita** en* $\mathrm{mod}(A)$ *si $\mathcal{C}$ es contravariantemente finita y covariantemente finita en* $\mathrm{mod}(A)$.

1.3. $\mathcal{C}-$filtraciones en $\mathrm{mod}(A)$.

Definición 1.42. *Dada una clase $\mathcal{C}$ de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$, *denotamos por $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ a la subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(A)$ *cuyos objetos son los $A-$módulos que son $\mathcal{C}-$**filtrados;** es decir, los $M \in \mathrm{mod}(A)$ para los cuales existe una $\mathcal{C}-$filtración ξ de M, esto es, una cadena finita $\xi :\ 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$ de submódulos de M tal que M_i/M_{i-1} es isomorfo a un módulo de $\mathcal{C}$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Cada cociente M_i/M_{i-1} se dice que es un factor de composición de la $\mathcal{C}-$filtración ξ de M. Observe que $0 \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ con la filtración trivial $0 = M_0$. Para una clase $\mathcal{C} = \emptyset$, hacemos $\mathcal{F}(\mathcal{C}) := \{0\}$.*

Definición 1.43. *Sea A una $K-$álgebra, $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$, *$C \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Dada una $\mathcal{C}-$filtración ξ de M, denotaremos por $[M : C]_\xi$ al número de veces que aparece C como factor de composición en la $\mathcal{C}-$filtración ξ de M.*

Definición 1.44. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(A)$.

(a) *La clase de los $\mathcal{C}-$proyectivos en* $\mathrm{mod}(A)$ *es*
$\mathcal{P}(\mathcal{C}) := \{M \in \mathrm{mod}(A) : \mathrm{Ext}^1_A(M, -)|_{\mathcal{C}} = 0\}$.

(b) *La clase de los* $\mathcal{C}-$*inyectivos en* $\mathrm{mod}(A)$ *es*
$\mathcal{I}(\mathcal{C}) := \{M \in \mathrm{mod}(A) : \mathrm{Ext}^1_A(-,M)|_{\mathcal{C}} = 0\}$.

Por simplicidad, denotaremos $\mathcal{P}(A) := \mathcal{P}(\mathrm{mod}(A))$ y $\mathcal{I}(A) := \mathcal{I}(\mathrm{mod}(A))$. De hecho, $\mathcal{P}(A)$ es la clase de los $A-$módulos proyectivos finitamente generados y $\mathcal{I}(A)$ es la clase de los $A-$módulos inyectivos finitamente generados.

Lema 1.45. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C})$, *donde* $\mathcal{P}(A) := \mathcal{P}(\mathrm{mod}(A))$.

(b) $\mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{C})$, *donde* $\mathcal{I}(A) := \mathcal{I}(\mathrm{mod}(A))$.

(c) $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ *y* $\mathcal{I}(\mathcal{C})$ *son cerradas por extensiones y sumandos directos.*

Demostración. (a) De 5.84 se tiene, en particular, que $\mathrm{Ext}^1_A(P,-)|_{\mathcal{C}} = 0$ para cada $P \in \mathcal{P}(A)$.
(b) Es dual a la hecha en (a).
(c) Haremos la prueba para $\mathcal{P}(\mathcal{C})$, ya que es similar para $\mathcal{I}(\mathcal{C})$. Primero probemos que $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ es cerrada por extensiones. Sea $\xi : 0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$, con $L,\, N \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Veamos que $M \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Para ello, tomando $C \in \mathcal{C}$ y aplicando $\mathrm{Hom}_A(-,C)$ a la sucesión ξ, obtenemos

$$\mathrm{Ext}^1_A(N,C) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,C) \to \mathrm{Ext}^1_A(L,C).$$

Como $\mathrm{Ext}^1_A(N,C) = 0 = \mathrm{Ext}^1_A(L,C)$, concluimos que $\mathrm{Ext}^1_A(M,C) = 0$.

Finalmente, veamos que $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ es cerrado por sumandos directos. Sean $M \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ y $L,\, N \in \mathrm{mod}(A)$ tales que $M = L \oplus N$. Veamos que $L,\, N \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. En efecto, usando que $M = L \oplus N$ y el hecho de que el funtor $\mathrm{Ext}^1_A(-,C)$ con $C \in \mathcal{C}$ es aditivo; obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(L,C) = 0 = \mathrm{Ext}^1_A(N,C)$. Por lo tanto, $L, N \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$.

□

Definición 1.46. *Sea A una $K-$álgebra, $\mathcal{C}$ una subcategoría plena de* $\mathrm{mod}(A)$ *y $M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Decimos que M admite una **cubierta** $\mathcal{C}-$**proyectiva** si existe una $\mathcal{P}(\mathcal{C})-$aproximación minimal a derecha $\pi_M : P_{\mathcal{C}}(M) \to M$ de M tal que* $\mathrm{Im}(\pi_M) = M$ *y* $\mathrm{Ker}(\pi_M) \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. *Dualmente, M admite una **envolvente** $\mathcal{C}-$**inyectiva** si existe una $\mathcal{I}(\mathcal{C})-$aproximación minimal a izquierda $\epsilon_M : M \to I_{\mathcal{C}}(M)$ de M tal que* $\mathrm{Ker}(\epsilon_M) = 0$ *y* $\mathrm{Coker}(\epsilon_M) \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Observación 1.47. *En el caso de existir, la cubierta $\mathcal{C}-$proyectiva y la envolvente $\mathcal{C}-$inyectiva son únicas salvo isomorfismos. En efecto, sean $\pi_M : P_{\mathcal{C}}(M) \to$*

M y $\pi'_M : P'_{\mathcal{C}}(M) \to M$ cubiertas $\mathcal{C}-$proyectivas de M. Como π_M y π'_M son $P(\mathcal{C})-$aproximaciones a derecha de M y $P_{\mathcal{C}}(M)$, $P'_{\mathcal{C}}(M) \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$; existen morfismos $f : P'_{\mathcal{C}}(M) \to P_{\mathcal{C}}(M)$ y $g : P_{\mathcal{C}}(M) \to P'_{\mathcal{C}}(M)$, tales que $\pi_M f = \pi'_M$ y $\pi'_M g = \pi_M$. Luego, $\pi_M fg = \pi_M$ y $\pi'_M gf = \pi'_M$. Del hecho de que π_M y π'_M son minimales a derecha, se sigue que fg y gf son isomorfismos; y por lo tanto, que f es un isomorfismo.

La prueba para la envolvente $\mathcal{C}-$inyectiva es similar.

Ejemplo 1.48. *Si $\mathcal{C} = \{S \in \mathrm{mod}(A) : S$ es simple $\}$, tenemos que los $\mathcal{C}-$proyectivos ($\mathcal{C}-$inyectivos) son los proyectivos (inyectivos) en* mod(A) *y la cubierta $\mathcal{C}-$proyectiva (envolvente $\mathcal{C}-$inyectiva) es simplemente la cubierta proyectiva (envolvente inyectiva) en* mod(A).

Proposición 1.49. *Sea A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* mod(A). *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(\mathcal{F}(\mathcal{C}))$ *y* $\mathcal{I}(\mathcal{C}) = \mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathcal{C}))$,

(b) $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ *es la menor subcategoría plena de* mod(A) *que es cerrada por extensiones y contiene a $\mathcal{C}$.*

(c) $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ *es cerrada por coproductos finitos.*

Demostración. (a) Veamos primero que $\mathcal{P}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Es claro que $\mathcal{P}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C})$ pues $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Supongamos ahora que $M \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. Veamos que $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = 0$ para cada $N \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Sea $N \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ y $0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m = N$ una $\mathcal{C}-$filtración de N. Así, para cada $i \in [0, m-1]$, obtenemos la sucesión exacta

$$\xi_i : 0 \to N_i \to N_{i+1} \to C_{i+1} \to 0 \text{ con } C_i \in \mathcal{C}.$$

En particular, $N_1 \cong C_1$.

Luego, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ a cada sucesión ξ_i; y dado que $\mathrm{Ext}^1_A(M, C_i) = 0$ para cada $i \in [1, m-1]$, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, N_i) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, N_{i+1}) \to 0.$$

Como $\mathrm{Ext}^1_A(M, N_1) \cong \mathrm{Ext}^1_A(M, C_1) = 0$, de la sucesión exacta anterior se tiene que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N_2) = 0$; y repitiendo el proceso, dado que $N_m = N$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$.

Ahora bien, la igualdad $\mathcal{I}(\mathcal{F}(\mathcal{C})) = \mathcal{I}(\mathcal{C})$, se obtiene de la anterior usando las propiedades de la dualidad D (ver 5.89) pues $D(\mathcal{P}(\mathcal{C})) = \mathcal{I}(D(\mathcal{C}))$.
(b) Sea $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \to 0$ una sucesión exacta en mod(A) con $L, M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Consideremos las $\mathcal{C}-$filtraciones $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$

y $0 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_k = L$, de M y L, respectivamente. Entonces, tenemos que $0 = f(M_0) \subseteq \cdots \subseteq f(M_m) \subseteq g^{-1}(L_1) \subseteq \cdots \subseteq g^{-1}(L_k) = N$ es una $\mathcal{C}-$filtración de N. Por lo tanto, $N \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Finalmente, probemos que si $\mathcal{B}$ una subcategoría plena de $\operatorname{mod}(A)$ que es cerrada por extensiones y contiene a $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ está contenida en $\mathcal{B}$.

Sea $X \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Consideremos la $\mathcal{C}-$filtración $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_m = X$, con $X_{i+1}/X_i \cong C_i \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ para $i \in [0, m-1]$ y $X_m = X$. Entonces, para cada $i \in [0, m-1]$ tenemos la sucesión exacta

$$\xi : \ 0 \to X_i \to X_{i+1} \to C_{i+1} \to 0.$$

En particular, $X_1 \cong C_1 \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Luego, dado que $\mathcal{B}$ es cerrada por extensiones y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, tenemos para $i = 1$ que $X_2 \in \mathcal{B}$. Repitiendo este razonamiento para cada $i \in \{0, m-1\}$, concluimos que $X_m = X \in \mathcal{B}$.

(c) Es consecuencia de (b).

$\square$

Definición 1.50. *Sea A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$. *Decimos que $\mathcal{C}$ es* ***resolvente*** *si es cerrada por extensiones, núcleos de epimorfismos y contiene a todos los proyectivos finitamente generados. Decimos que $\mathcal{C}$ es* ***co-resolvente*** *si es cerrada por extensiones, conúcleos de monomorfismos y contiene a todos los inyectivos finitamente generados.*

Capítulo 2

Álgebras estandarmente estratificadas.

En esta tesis, todas las álgebras a ser consideradas serán $K-$álgebras de dimensión finita sobre un campo K. Además, como es usual, $\mathrm{mod}(A)$ denotará a la categoría de los $A-$módulos finitamente generados a izquierda, donde A es una $K-$álgebra.

Este capítulo tiene por objetivo introducir al lector en la definición de ss-álgebra, familiarizarse con algunas de sus propiedades básica de éstas y de los módulos estándar. Enunciamos el teorema 2.26 que será importante en el siguiente capítulo, para darnos una idea de cómo es que los sistemas estratificantes generalizan el concepto de módulos estándar.

2.1. La traza en $\mathrm{mod}(A)$.

Definición 2.1. *Sea* $M \in \mathrm{mod}(A)$ *y* $\mathcal{U}$ *una familia de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *La* ***traza*** $\mathrm{Tr}_{\mathcal{U}}(M)$ ***de*** $\mathcal{U}$ ***en*** M *es el submódulo de* M *generado por el conjunto*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \bigcup_{f \in \mathrm{Hom}_A(U,M)} \mathrm{Im}(f).$$

Veamos ahora, algunas de las propiedades de la traza.

Lema 2.2. *Sean* M, N, $P \in \mathrm{mod}(A)$ *con* P *proyectivo. Entonces,*

(a) $\mathrm{Hom}_A(P, M/\mathrm{Tr}_P(M)) = 0$;

(b) *si* N *es un submódulo de* M *y* $\mathrm{Hom}_A(P, M/N) = 0$, *entonces* $\mathrm{Tr}_P(M) \subseteq N$.

Demostración. (a) Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P, M/\mathrm{Tr}_P(M))$. Consideremos el epimorfismo canónico $\pi : M \to M/\mathrm{Tr}_P(M)$. Como P es proyectivo, existe $\bar{\varphi} : P \to M$ tal que $\varphi = \pi\,\bar{\varphi}$. Luego, como $\mathrm{Im}(\bar{\varphi}) \subseteq \mathrm{Tr}_P(M)$, concluimos que $\varphi = 0$. En el siguiente diagrama ilustramos dicho argumento.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/\mathrm{Tr}_P(M) \end{tikzcd}$$

(b) Sea N un submódulo de M con $\mathrm{Hom}_A(P, M/N)$=0. Consideremos la sucesión exacta canónica

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

y $\varphi : P \longrightarrow M$. Como $\pi\varphi \in \mathrm{Hom}_A(P, M/N) = 0$, por la propiedad universal del núcleo, existe $\bar{\varphi} : P \longrightarrow N$ tal que $\iota\,\bar{\varphi} = \varphi$; esto es,

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[dl, dashed, "\bar{\varphi}"'] \arrow[d, "\varphi"] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] & M \arrow[r, two heads, "\pi"] & M/N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Entonces $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathrm{Im}(\bar{\varphi}) \subseteq N$ y por lo tanto $\mathrm{Tr}_P(M) \subseteq N$.

□

El siguiente lema nos da una característica importante de la traza y que será utilizada en la prueba de 2.8 (b).

Lema 2.3. *Sean A una $K-$álgebra y Y, $Z \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces,* $\mathrm{Tr}_Y(Z)$ *es el mayor submódulo de Z tal que existe un epimorfismo $\varphi : Y^m \to \mathrm{Tr}_Y(Z)$, con $m \geq 1$.*

Demostración. Notemos que $\mathrm{Hom}_A(Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_A(Y, \mathrm{Tr}_Y(Z))$. Ahora, consideremos una base $\{f_1, \ldots, f_m\}$ del $K-$espacio vectorial $\mathrm{Hom}_A(Y, \mathrm{Tr}_Y(Z))$ y el morfismo $\varphi : Y^m \to \mathrm{Tr}_Y(Z)$ dado por $\varphi(y_1, \ldots, y_m) := \sum_{i=1}^{m} f_i(y_i)$. Veamos que φ es un epimorfismo. En efecto, dado $x \in \mathrm{Tr}_Y(Z)$ existe un morfismo $f : Y \to Z$ tal que $f(y) = x$, para algún $y \in Y$. Luego, como $f = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$, se sigue que $x = f(y) = \sum_{i=1}^{m} f(a_i y_i) =: \varphi(a_1 y, \ldots, a_m y)$.

Por otro lado, si N es un submódulo de Z tal que existe un epimorfismo $f : Y^m \to N$; entonces tenemos el morfismo $\iota f : Y^m \to Z$, donde $\iota : N \to Z$ es la inclusión. Así, $N = \mathrm{Im}(\iota f) \subseteq \mathrm{Tr}_Y(Z)$. Esto muestra que $\mathrm{Tr}_Y(Z)$ es el mayor submódulo de Z con la propiedad mencionada.

$\square$

2.2. ${}_A\Delta-$módulos y ${}_A\nabla$-módulos.

Para cada $t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, el conjunto $\{1, 2, \dots, t\}$ será denotado por $[1, t]$. Sea A una $K-$álgebra. Denotaremos por $\{S(\lambda) : \lambda \in [1, n]\}$ a una familia completa de $A-$módulos simples no isomorfos dos a dos. Para cada $\lambda \in [1, n]$, la cubierta proyectiva de $S(\lambda)$ será denotada por $P(\lambda)$; e $I(\lambda)$ denotará a la envolvente inyectiva de $S(\lambda)$. Fijaremos el n como el número de $A-$módulos simples salvo isomorfismos.

Consideraremos la dualidad usual $D := \mathrm{Hom}_K(-, K)\colon \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$, con respecto al campo base K.

Definición 2.4. *Sea A una $K-$álgebra y $([1, n], \leq)$ linealmente ordenado. Para cada $\lambda \in [1, n]$, definimos el $A-$módulo estándar ${}_A\Delta(\lambda) := \dfrac{P(\lambda)}{\mathrm{Tr}_{P^{>\lambda}}(P(\lambda))}$, donde $P^{>\lambda} := \bigoplus_{\mu>\lambda} P(\mu)$.*

(a) *Los **módulos estándar** son ${}_A\Delta := \{{}_A\Delta(\lambda) : \lambda \in [1, n]\}$.*

(b) *Los **módulos co-estándar** son ${}_A\nabla := \{{}_A\nabla(\lambda) : \lambda \in [1, n]\}$, donde ${}_A\nabla(\lambda) := D({}_{A^{op}}\Delta(\lambda))$.*

Sea A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y $S \in \mathrm{mod}(A)$ simple. La multiplicidad de S en M, es decir, el número de veces que aparece S como factor de composición en M, será denotado por $[M : S]$.

Proposición 2.5. *Sea A una $K-$álgebra, $\lambda \in [1, n]$ y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, $\mathrm{Hom}_A(P(\lambda), M) \neq 0$ si y sólo si $[M : S(\lambda)] \neq 0$.*

Demostración. Por 5.26, se tiene que

$$\dim_K(\mathrm{Hom}_A(P(\lambda), M)) = [M : S(\lambda)] \cdot \dim_K(\mathrm{End}({}_AS(\lambda))).$$

Ahora, observemos que $\dim_K(\mathrm{End}({}_AS(\lambda))) \neq 0$, pues $S(\lambda)$ es simple.

Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_A(P(\lambda), M) \neq 0$ si y sólo si $[M : S(\lambda)] \neq 0$.

$\square$

Veamos ahora algunas propiedades de los módulos estándar.

Proposición 2.6. *Sea A una $K-$álgebra, $([1,\ n], \leq)$ linealmente ordenado y $\lambda \in [1, n]$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $[{}_A\Delta(\lambda) : S(\mu)] = 0$ *si* $\mu > \lambda$.

(b) *Sea* $\varphi : P(\lambda) \to M$ *un epimorfismo en* $\mathrm{mod}(A)$. *Si* $[M : S(\mu)] = 0$ *para* $\mu > \lambda$, *entonces* φ *se factoriza a través del epimorfismo canónico* $\pi : P(\lambda) \to {}_A\Delta(\lambda)$; *esto es, existe un homomorfismo* $\overline{\varphi} : {}_A\Delta(\lambda) \to M$ *tal que* $\overline{\varphi}\,\pi = \varphi$.

Demostración. (a) Por 2.4 y 2.2(a), se tiene que $\mathrm{Hom}_A\Big(\bigoplus_{\mu>\lambda} P(\mu), {}_A\Delta(\lambda)\Big) = 0$. Luego, (a) es consecuencia de 2.5.

(b) Sea $\varphi : P(\lambda) \to M$ un epimorfismo en $\mathrm{mod}(A)$, con $[M : S(\mu)] = 0$ para $\mu > \lambda$. Veamos que existe $\overline{\varphi} : {}_A\Delta(\lambda) \to M$ tal que $\varphi = \overline{\varphi}\,\pi$; para lo cual es suficiente ver que $\mathrm{Tr}_{P^{>\lambda}}(P(\lambda)) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. En efecto, por la hipótesis sobre M, se tiene de 2.5 que $\mathrm{Hom}_A(P^{>\lambda}, P(\lambda)/\mathrm{Ker}(\varphi)) = 0$; y por 2.2 (b) concluimos que $\mathrm{Tr}_{P^{>\lambda}}(P(\lambda)) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\square$

Observación 2.7. *Sea A una $K-$álgebra y $([1,n], \leq)$ linealmente ordenado.*

(a) *El resultado de 2.6 nos dice que, para cada $\lambda \in [1,n]$, el $A-$módulo ${}_A\Delta(\lambda)$ es el cociente más grande de $P(\lambda)$ cuyos factores de composición están entre los simples $S(\mu)$ con $\mu \leq \lambda$.*

(b) *El resultado dual de 2.6, dice que: para cada $\lambda \in [1,n]$, el $A-$módulo coestándar ${}_A\nabla(\lambda)$ es el submódulo más grande de $I(\lambda)$ cuyos factores de composición están entre los simples $S(\mu)$ con $\mu \leq \lambda$.*

Proposición 2.8. *Sea A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y $([1,n], \leq)$ linealmente ordenado. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $[M : S(\lambda)] \neq 0$ *si* $\mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(\lambda), M) \neq 0$.

(b) $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tr}_{P^{>\lambda}}(P(\lambda)), M) = 0$ *si* $[M : S(\mu)] = 0$ *para* $\mu > \lambda$.

(c) *Existe* $\mu > \lambda$ *tal que* $[M : S(\mu)] \neq 0$ *si* $\mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), M) \neq 0$.

Demostración. (a) Sea $\pi : P(\lambda) \to {}_A\Delta(\lambda)$ el epimorfismo canónico. Por hipótesis existe $f \in \mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(\lambda), M)$ con $f \neq 0$. Luego $0 \neq f\pi \in \mathrm{Hom}_A(P(\lambda), M)$; y aplicando 2.5 se obtiene (a).

(b) Supongamos que $[M : S(\mu)] = 0$ para $\mu > \lambda$. Sea $U(\lambda) := \mathrm{Tr}_{P^{>\lambda}}(P(\lambda))$. Por 2.3, existe $m \in \mathbb{N}$ y un epimorfismo $\psi : (P^{>\lambda})^m \to U(\lambda)$. Supongamos que existe $f \in \mathrm{Hom}_A(U(\lambda), M)$ con $f \neq 0$. Luego $0 \neq f\psi \in \mathrm{Hom}_A((P^{>\lambda})^m, M)$, y en particular, existe $\mu > \lambda$ con $\mathrm{Hom}_A(P(\mu), M) \neq 0$; por lo tanto (ver 2.5) se tiene que $[M : S(\mu)] \neq 0$ con $\mu > \lambda$, lo cual es una contradicción. De donde se obtiene que $\mathrm{Hom}_A(U(\lambda), M) = 0$.

(c) Sea $\mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), M) \neq 0$; y supongamos que $[M : S(\mu)] = 0$ para cada $\mu > \lambda$. Luego, por (b), se tiene que $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)), M) = 0$. Ahora bien, aplicando el functor $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ a la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)) \to P(\lambda) \to {}_A\Delta(\lambda) \to 0$$

se obtiene la sucesión exacta $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)), M) \to \mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), M) \to 0$, pues $\mathrm{Ext}^1_A(P(\lambda), M) = 0$ por ser $P(\lambda)$ un $A-$módulo proyectivo. De donde se tiene que $\mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), M) = 0$, contradiciendo la hipótesis. Luego, existe $\mu > \lambda$ tal que $[M : S(\mu)] \neq 0$.

$\square$

Proposición 2.9. *Sean A una $K-$álgebra y $([1, n], \leq)$ linealmente ordenado. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(\lambda), {}_A\Delta(\mu)) = 0$ *si* $\lambda > \mu$,

(b) $\mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), {}_A\Delta(\mu)) = 0$ *si* $\lambda \geq \mu$.

Demostración. (a) Sea $\varphi : {}_A\Delta(\lambda) \to {}_A\Delta(\mu)$ con $\varphi \neq 0$ y $\pi{:}P(\lambda) \to {}_A\Delta(\lambda)$ el epimorfismo canónico. Luego $0 \neq \varphi\pi \in \mathrm{Hom}_A(P(\lambda),_A \Delta(\mu))$ y por 2.5 se tiene que $[{}_A\Delta(\mu), S(\lambda)] \neq 0$; por lo tanto de 2.6 (a) se tiene que $\lambda \leq \mu$.

(b) Sea $\lambda \geq \mu$. Consideremos la siguiente sucesión exacta canónica en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)) \longrightarrow P(\lambda) \longrightarrow {}_A\Delta(\lambda) \longrightarrow 0.$$

Aplicándole $\mathrm{Hom}_A(-,_A \Delta(\mu))$ a dicha sucesión, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_A({}_A\Delta(\lambda), {}_A\Delta(\mu)) \to \mathrm{Hom}_A(P(\lambda), {}_A\Delta(\mu)) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)), {}_A\Delta(\mu))$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), {}_A\Delta(\mu)) \to \mathrm{Ext}^1_A(P(\lambda), {}_A\Delta(\mu)) = 0.$$

Si $\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda))$=0, se tiene que ${}_A\Delta(\lambda)$=$P(\lambda)$ y así $\mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), {}_A\Delta(\mu))$=0. Por lo tanto podemos suponer que $\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)) \neq 0$. Para concluir, veamos que $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)), {}_A\Delta(\mu)) = 0$. En efecto, si existe $0 \neq \psi : P(\sigma) \to {}_A\Delta(\mu)$ con $\sigma > \lambda$ entonces $[{}_A\Delta(\mu), S(\sigma)] \neq 0$. Luego, por 2.6 (a), se tiene que $\lambda < \sigma \leq \mu$ contradiciendo que $\lambda \geq \mu$; probándose que $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Tr}_{P>\lambda}(P(\lambda)),_A \Delta(\mu)) = 0$. Así, de la sucesión exacta larga, concluimos que $\mathrm{Ext}^1_A({}_A\Delta(\lambda), {}_A\Delta(\mu))$=0.

$\square$

Proposición 2.10. *Sean A una $K-$álgebra y $([1, n], \leq)$ linealmente ordenado. Entonces ${}_A\Delta(\lambda)$ es indescomponible, para cada $\lambda \in [1, n]$.*

Demostración. Consideremos los epimorfismos $\pi : P(\lambda) \to {}_A\Delta(\lambda)$ y $\varphi : P(\lambda) \to \operatorname{top}(P(\lambda))$. Dado que $P(\lambda)$ es proyectivo e indescomponible, sabemos que $\operatorname{top}(P(\lambda)) \cong S(\lambda)$. Entonces, para cada $\mu > \lambda$ se tiene que $[\operatorname{top}(P(\lambda)) : S(\mu)] = 0$. Luego, por 2.6 (b), existe un morfismo $\psi : {}_A\Delta(\lambda) \to \operatorname{top}(P(\lambda))$ tal que $\psi\pi = \varphi$; y con ello, $\operatorname{Ker}(\pi) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{rad}(P(\lambda))$. Luego, por 5.22 y 5.15, concluimos que $\operatorname{top}({}_A\Delta(\lambda)) \cong \operatorname{top}(P(\lambda)) \cong S(\lambda)$. En particular, $\operatorname{top}({}_A\Delta(\lambda))$ es indescomponible; y por lo tanto, de 5.24 se tiene que ${}_A\Delta(\lambda)$ es indescomponible.

□

2.3. Algunas propiedades de $\mathcal{F}({}_A\Delta)$.

Proposición 2.11. *Sean A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$. Entonces, $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ es cerrada por extensiones y núcleos de epimorfismos en* $\operatorname{mod}(A)$.

Demostración. Ver 1.49 (b) y [25, Proposition 2.1].

□

Definición 2.12. *Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,n]$. Para cada $i \in [1,n]$, el **módulo propio estándar** ${}_A\overline{\Delta}(i) := P(i)/\operatorname{Tr}_{\oplus_{j\geq i}P(j)}(\operatorname{rad}(P(i)))$. Se puede ver que es el cociente más grande de ${}_A\Delta(i)$ tal que $[{}_A\overline{\Delta}(i) : S(i)] = 1$. Dualmente, el **módulo propio co-estandar** ${}_A\overline{\nabla}(i)$ es el submódulo maximal de ${}_A\nabla(i)$ tal que $[{}_A\overline{\nabla}(i) : S(i)] = 1$.*

Observación 2.13. *En el caso en que el campo base K sea algebraicamente cerrado, se tiene que:*

(a) $\dim_K(\operatorname{Hom}_A(M, I(i))) = [M : S(i)] = \dim_K(\operatorname{Hom}_A(P(i), M))$ *para* $M \in \operatorname{mod}(A)$.

(b) *Para todo $i \in [1,n]$, se tiene que $\dim_K(\operatorname{End}_A({}_A\Delta(i))) = 1$ si y sólo si* $[{}_A\Delta(i) : S(i)] = 1$.

Definición 2.14. *Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,n]$, donde n es el número de $A-$módulos simples hasta isomorfismos. El par $(A,\leq)$ se dice que es un **álgebra estandarmente estratificada (ss-álgebra)** si ${}_AA \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Decimos que una ss$-$álgebra $(A,\leq)$ es **casi-hereditaria** si* $\operatorname{End}_A({}_A\Delta(\lambda))$ *es un anillo con división, para cada $\lambda \in [1,n]$.*

Veamos ahora un ejemplo de una $K-$álgebra A, que es casi-hereditaria con respecto a cierto orden lineal $\leq$ en $[1,n]$ y no con respecto a otro $\preceq$.

Ejemplo 2.15. *Sea $A = KQ/I$, con K algebraicamente cerrado, donde*

$$Q = \ 3 \xrightarrow{\alpha_1} 1 \xleftarrow{\alpha_2} 2 \xleftarrow{\alpha_3} 4$$

e I es el ideal admisible en KQ generado por $\alpha_2\alpha_3$.
Los proyectivos indescomponibles son

$$P(1) = S(1),\ \ P(2) = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\ ,\ \ P(3) = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\ \ y\ \ P(4) = \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}\ .$$

Consideremos los siguientes órdenes para $[1,4]$: σ_1 el orden natural; σ_2 el orden tal que $2 \leq_{\sigma_2} 3 \leq_{\sigma_2} 1 \leq_{\sigma_2} 4$; y σ_3 el orden tal que $4 \leq_{\sigma_3} 3 \leq_{\sigma_3} 1 \leq_{\sigma_3} 2$. Denotaremos por ${}_A\Delta_\sigma(i)$ al $A-$módulo estándar calculado con el correspondiente orden lineal $\leq_\sigma$ en $[1,4]$. Entonces, tenemos lo siguiente:

(a) *${}_A\Delta_{\sigma_1}(i) = P(i)$ para cada $i \in [1,4]$. Por lo tanto, A es casi-hereditaria con respecto al orden natural.*

(b) *${}_A\Delta_{\sigma_2}(2) = S(2)$, ${}_A\Delta_{\sigma_2}(3) = S(3)$, ${}_A\Delta_{\sigma_2}(1) = P(1)$ y ${}_A\Delta_{\sigma_2}(4) = P(4)$. Observe que: $0 \subseteq {}_A\Delta_{\sigma_2}(1) \subseteq P(2)$ y $0 \subseteq {}_A\Delta_{\sigma_2}(1) \subseteq P(3)$ son ${}_A\Delta_{\sigma_2}-$filtraciones, pues se tiene que ${}_A\Delta_{\sigma_2}(2) \cong P(2)/{}_A\Delta_{\sigma_2}(1)$ y ${}_A\Delta_{\sigma_2}(3) \cong P(3)/{}_A\Delta_{\sigma_2}(1)$. Ahora bien, dado que $[{}_A\Delta_{\sigma_2}(i) : S(i)] = 1$ para cada $i \in [1,4]$, concluimos por 2.13 (b), que $\mathrm{End}({}_A\Delta_{\sigma_2}(i))$ es un anillo con división para cada $i \in [1,4]$. Por lo tanto, A es casi-hereditaria con respecto al orden σ_2.*

(c) *${}_A\Delta_{\sigma_3}(4) = S(4)$, ${}_A\Delta_{\sigma_3}(3) = S(3)$, ${}_A\Delta_{\sigma_3}(1) = P(1)$ y ${}_A\Delta_{\sigma_3}(2) = P(2)$. Notemos que $P(4) \notin \mathcal{F}({}_A\Delta)$.En efecto, el único submódulo no trivial de $P(4)$ es $S(2)$. Dado que $S(2)$ y $P(4)$ no son isomorfos a ningún elemento de ${}_A\Delta_{\sigma_3}$, se tiene que las únicas filtraciones posibles de $P(4)$, que son $0 \subseteq S(2) \subseteq P(4)$ y $0 \subseteq P(4)$, ninguna de ellas es una ${}_A\Delta_{\sigma_3}-$filtración. Así, A no es una ss$-$álgebra con respecto al orden σ_3; y por lo tanto tampoco es casi-hereditaria.*

Ejemplo 2.16. *Sea $A = KQ/I$ con K algebraicamente cerrado, donde*

$$Q = 1 \xrightarrow{\ \alpha\ } 2 \circlearrowright \beta$$

e I es el ideal admisible en KQ generado por $\beta\alpha$ y β^2. Consideremos el orden $2 \leq_\sigma 1$. Entonces tenemos que ${}_A\Delta_\sigma(1) = P(1)$ y ${}_A\Delta_\sigma(2) = P(2)$. De ahí que, $(A, \leq_\sigma)$ es una ss-álgebra. Sin embargo, no es una álgebra casi-hereditaria. En efecto, $\mathrm{End}({}_A\Delta_\sigma(2))$ no es un anillo con división, ya que $[{}_A\Delta_\sigma(2) : S(2)] = 2$. Otra razón, es en vista de que gldim$(A) = \infty$ y el siguiente resultado (2.17).

Teorema 2.17. *Sea* $(A, \leq)$ *una ss-álgebra. Entonces,* A *es casi-hereditaria si y sólo si* $gldim(A) < \infty$.

Demostración. Ver [2, Theorem 2.4].

$\square$

Teorema 2.18. *Sea* A *una* $K-$*álgebra y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, n]$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(A, \leq)$ *es una ss*$-$*álgebra.*

(b) $D(A_A) \in \mathcal{F}({}_A\overline{\nabla})$.

(c) ${}_{A^{op}}A^{op} \in \mathcal{F}({}_{A^{op}}\overline{\Delta})$.

Demostración. Ver [2, Theorem 1.1].

$\square$

Teorema 2.19. *Sea* $(A, \leq)$ *una ss*$-$*álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ *es funtorialmente finita, resolvente y cerrada por sumandos directos.*

(b) $\mathcal{F}({}_A\overline{\nabla})$ *es covariantemente finita, co-resolvente y cerrada por sumandos directos.*

(c) $\mathcal{F}({}_A\overline{\nabla}) = \mathcal{I}({}_A\Delta)$ *y* $\mathcal{F}({}_A\Delta) = \mathcal{P}({}_A\overline{\nabla})$

Demostración. Ver [2, Theorem 1.6].

$\square$

Proposición 2.20. *Sea* $(A, \leq)$ *una ss*$-$*álgebra. Entonces* $\mathrm{Ext}^i_A(\mathcal{F}({}_A\Delta), \mathcal{I}({}_A\Delta)) = 0$ *para cada* $i \geq 1$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre i.

Para $i = 1$. Sea $X \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. De la definición de $\mathcal{I}({}_A\Delta)$, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_A(X, Y) = 0$ para cada $Y \in \mathcal{I}({}_A\Delta)$.

Supongamos ahora que $i \geq 2$. Sea $X \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Tomando la cubierta proyectiva de X, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\xi : 0 \to \mathrm{Ker}(\epsilon_X) \to P_0(X) \stackrel{\epsilon_X}{\to} X \to 0.$$

Por 2.19(a), $\mathrm{Ker}(\epsilon_X)$, $P_0(X) \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Luego $\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Ker}(\epsilon_X), I) = 0$ para cada $I \in \mathcal{I}({}_A\Delta)$.

Por otro lado, aplicando el functor $\mathrm{Hom}_A(-,I)$ a la sucesión ξ, obtenemos

$$\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Ker}(\epsilon_X),I) \to \mathrm{Ext}^2_A(X,I) \to \mathrm{Ext}^2_A(P_0(X),I) \to \cdots$$
$$\to \mathrm{Ext}^{i-1}_A(P_0(X),I) \to \mathrm{Ext}^{i-1}_A(\mathrm{Ker}(\epsilon_X),I) \to \mathrm{Ext}^i_A(X,I) \to \mathrm{Ext}^i_A(P_0(X),I).$$

Usando la hipótesis de inducción, y el hecho de que $P_0(X)$ es proyectivo, obtenemos que $\mathrm{Ext}^i_A(X,I) \cong \mathrm{Ext}^{i-1}_A(\mathrm{Ker}(\epsilon_X),I) = 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^i_A(X,I) = 0$ para todo $X \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$ e $I \in \mathcal{I}({}_A\Delta)$.

□

Definición 2.21. [19] *Sea A una $K-$álgebra y $T \in \mathrm{mod}(A)$. Decimos que T es un* ***módulo inclinante,*** *si satisface las siguientes condiciones:*

(a) *T tiene dimensión proyectiva finita, es decir,* $\mathrm{pd}(T) < \infty$;

(b) $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$ *para cada $i \geq 1$; y*

(c) *existe una sucesión exacta $0 \to {}_AA \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to 0$ en* $\mathrm{mod}(A)$, *con $T_j \in \mathrm{add}(T)$ para todo j.*

Observación 2.22. *Sea ${}_AT$ un $A-$módulo inclinante, con ${}_AT = \bigoplus_{i=1}^n T_i^{m_i}$; y donde los ${}_AT_i$ son indescomponibles tales que ${}_AT_i \ncong {}_AT_j$ para cada $i \neq j$. Se sabe (Ver [19, Theorem 1.19, Corollary 1] y prueba de [19, Corollary 2]) que n es el número, salvo isomorfismos, de $A-$módulos simples.*

Definición 2.23. *Sea A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A.)$ Decimos que M es* ***básico*** *si $M \cong \bigoplus_{i=1}^m M_i$ con M_i indescomponible para todo $i \in [1,m]$ y $M_i \ncong M_j$ para $i \neq j$.*

Teorema 2.24. *Sea $(A,\leq)$ una $ss-$álgebra. Entonces, existe un (único hasta isomorfismos) $A-$módulo inclinante básico T tal que $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta)$.*

Demostración. Ver [25, Theorem 3.3].

□

Definición 2.25. *Dada una $ss-$álgebra $(A,\leq)$, al $A-$módulo inclinante básico T de 2.24, se le conoce como el* ***módulo inclinante característico asociado a la*** *$ss-$**álgebra** $(A,\leq)$.*

Teorema 2.26. *Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,n]$ tal que $(A,\leq)$ es una $ss-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $i \in [1,n]$, existe una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \to {}_A\Delta(i) \to T(i) \to Z(i) \to 0,$$

tal que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{{}_A\Delta(j) : j < i\})$.

(b) $\{T(i)\}_{i=1}^n$ *es un conjunto de* $A-$*módulos indescomponibles y* $T := \bigoplus_{i=1}^n T(i)$ *es el* $A-$*módulo inclinante característico asociado a la ss*$-$*álgebra* $(A, \leq)$.

(c) *La* $K-$*álgebra* $B := \mathrm{End}({}_AT)$ *es una ss*$-$*álgebra básica con respecto al orden opuesto* $\leq^{op}$ *en* $[1, n]$; *donde* $\{{}_BP(i)\}_{i=1}^n$, *con* ${}_BP(i) := \mathrm{Hom}_B(T(i), {}_AT_{B^{op}})$, *es una familia completa de* $B-$*módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos entre sí.*

(d) *Los funtores* $F := \mathrm{Hom}_A(-, {}_AT_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$ *y* $G := \mathrm{Hom}_B(-, {}_AT_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(A)$, *inducen por restricción, equivalencias exactas de categorías* $\mathcal{F}({}_A\Delta) \overset{F}{\to} \mathcal{F}({}_B\Delta) \overset{G}{\to} \mathcal{F}({}_A\Delta)$ *tales que: G es cuasi-inverso de F,* $F({}_A\Delta(i)) \cong {}_B\Delta(i)$ *y* $G({}_B\Delta(i)) \cong {}_A\Delta(i)$ *para cada* $i \in [1, n]$.

(e) $\mathcal{I}({}_A\Delta) = \{X \in \mathrm{mod}(A) : \mathrm{Ext}_A^i(T, X) = 0 \, \textit{para cada} \, i \geq 1\}$.

Demostración. Ver [25, Lemma 4.2, Lemma 4.4] y [2, Theorem 2.6, Lemma 2.5].

□

Definición 2.27. *Dados una ss*$-$*álgebra* $(A, \leq)$ *y* T *el* $A-$*módulo inclinante característico asociado a* $(A, \leq)$, ***el dual de Ringel asociado a*** $(A, \leq)$ *es la ss*$-$*álgebra* $(R(A), \leq^{op})$ *donde* $R(A) := \mathrm{End}({}_AT)$.

Proposición 2.28. *Si* $(A, \leq)$ *es una ss*$-$*álgebra básica, entonces* $R(R(A)) \cong A$.

Demostración. Ver [2, Theorem 2.6].

□

Observación 2.29. *Otra prueba de 2.28, usando la teoría de sistemas estratificantes, puede verse en 3.61.*

Capítulo 3

Sistemas Estratificantes Lineales

La noción de sistema estratificante fue introducida en 2002, como una generalización de los módulos estándar e inclinante característico asociados clásicamente a álgebras estandarmente estratificadas y casi-hereditarias (ver 2.26).

En este capítulo veremos las definiciones de sistemas estratificantes $(\Theta, \leq)$, sistemas estratificantes Ext$-$inyectivos $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ y Ext$-$proyectivos $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$. Estudiaremos sus principales propiedades. Además, veremos que las álgebras de endomorfismos $B := \mathrm{End}(Y)$ y $B' := \mathrm{End}(Q)$ son ss-álgebras. Más aún, veremos que las categorías $\mathcal{F}(\Theta)$ y $\mathcal{F}({}_B\Delta)$ son contravariantemente equivalentes y las consecuencias que esto nos da.

3.1. Definiciones y propiedades básicas.

Definición 3.1. *Sea A una $K-$álgebra, $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $\leq$ un orden lineal en $[1, t]$. El par $(\Theta, \leq)$ se dice que es un* ***sistema estratificante (ss) de talla*** $\mathbf{t}$, *si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

(b) $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j \geq i$.

(c) $\Theta(i)$ *es indescomponible* $\forall\, i \in [1, t]$.

Ejemplo 3.2. *Sean A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1, n]$. Por 2.9 y 2.10, se tiene que el par $({}_A\Delta, \leq)$ es un ss de talla n. A dicho sistema se le conoce como el ss$-$**canónico asociado al par** $(A, \leq)$.*

Definición 3.3. *Sea A una $K-$álgebra, $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos no nulos en* $\mathrm{mod}(A)$, *$\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos indescomponibles* *en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1,t]$. *El triple* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *se dice que es un* ***sistema estratificante Ext-inyectivo (eiss) de talla*** $\mathbf{t}$, *si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

(b) *Para cada* $i \in [i,t]$, *existe una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{\alpha_i} Y(i) \longrightarrow Z(i) \longrightarrow 0$$

tal que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_A(-, Y)|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$ *donde* $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$.

Ejemplo 3.4. *Sea* $(A, \leq)$ *una ss−álgebra y* $\underline{T} := \{T(i)\}_{i=1}^n$ *la familia de* A*−módulos de 2.26* (b). *Por 2.26* (a) *y* (e), *se tiene que* $({}_A\Delta, \underline{T}, \leq)$ *es un eiss de talla* n.

Definición 3.5. *Sea* A *una* K*−álgebra,* $\Theta = \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ *una familia de objetos no nulos en* $\mathrm{mod}(A)$, $\underline{Q} = \{Q(i)\}_{i=1}^t$ *una familia de objetos indescomponibles en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1,t]$. *El triple* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *se dice que es un* ***sistema estratificante Ext-proyectivo (epss) de talla*** $\mathbf{t}$, *si se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j > i$.

(b) *Para cada* $i \in [i,t]$, *existe una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow K(i) \longrightarrow Q(i) \xrightarrow{\beta_i} \Theta(i) \longrightarrow 0$$

tal que $K(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$.

(c) $\mathrm{Ext}^1_A(Q, -)|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$, *donde* $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$.

Ejemplo 3.6. *Sea* $(A, \leq)$ *una ss−álgebra y* $\underline{Q} := \{P(i)\}_{i=1}^n$. *Se tiene que* $({}_A\Delta, \underline{Q}, \leq)$ *es un* epss *de talla* n.

Ejemplo 3.7. *Sea* A *una* K*−álgebra y* $M \in \mathrm{mod}(A)$ *indescomponible y tal que* $\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0$. *Consideremos* $\Theta := \{M\}$; *en tal caso* $(\Theta, \leq)$ *es un ss de talla* 1 *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Además, tomando* $\underline{Y} := \{M\}$ *y* $\underline{Q} := \{M\}$, *obtenemos que* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *y* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *son, respectivamente, eiss y epss de talla* 1.

Lema 3.8. *Sea* A *una* K*−álgebra y* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un eiss de talla* t. *Entonces* $Y(i) \in \mathcal{F}(\Theta)$ *para cada* $i \in [1,t]$. *En particular,* $\mathrm{add}(Y) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$.

Demostración. Dado que $Y(i)$ es indescomponible, el resultado es consecuencia de 3.3 (b) y 1.49 (b) y (c).

□

Lema 3.9. *Sea A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un epss de talla t. Entonces $Q(i) \in \mathcal{F}(\Theta)$ para cada $i \in [1,t]$. En particular,* $\mathrm{add}(Q) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$.

Demostración. Dado que $Q(i)$ es indescomponible, el resultado es consecuencia de 3.5 (b) y 1.49 (b) y (c).

□

Teorema 3.10. *Sea A una $K-$álgebra, $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$, $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos en $\mathrm{mod}(A)$ y $M \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j \leq \mu\})$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para $j > i$, entonces* $\mathrm{Hom}_A(\Theta(\ell), M) = 0$ *para cada $\ell > \mu$.*

(b) *Si* $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para $j \geq i$, entonces* $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(\ell), M) = 0$ *para cada $\ell \geq \mu$.*

Demostración. (a) Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$ una $\Theta-$filtración de M tal que $M_r/M_{r-1} \cong \Theta(j_r)$ y $j_r \leq \mu$ para cada $r \in [1,m]$. Entonces, para cada $r \in [1,m]$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \to M_{r-1} \to M_r \to \Theta(j_r) \to 0.$$

Aplicándole a dicha sucesión el funtor $\mathrm{Hom}(\Theta(i), -)$, con $i > \mu$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_{r-1}) \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_r) \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta(j_r)).$$

Como $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta(j_r)) = 0$, pues $i > \mu \geq j_r$; obtenemos el isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_{r-1}) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_r)$ para cada $r \in [1,m]$. Como además, $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_1) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta(j_1)) = 0$. Entonces se tiene que,

$$\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_{m-1}) \cong \cdots \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M_1) = 0.$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), M) = 0$ para $i > \mu$.

(b) Sea $0{=}M_0{\subseteq}M_1{\subseteq}\cdots{\subseteq}M_m{=}M$ una $\Theta-$filtración de M tal que $M_r/M_{r-1} \cong \Theta(j_r)$ y $j_r \leq \mu$ para cada $r{\in}[1,m]$.

Ahora, para cada $r \in [1,m]$, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to M_{r-1} \to M_r \to \Theta(j_r) \to 0.$$

Aplicándole a dicha sucesión el funtor $\mathrm{Hom}(\Theta(i), -)$, con $i \geq \mu$, y usando el hecho de que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), \Theta(j_r)) = 0$ pues $i \geq \mu \geq j_r$; obtenemos el epimorfismo

$$\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M_{r-1}) \xrightarrow{g_r} \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M_r) \longrightarrow 0.$$

En particular, $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M_1) = 0$ (pues $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M_0) = 0$ y g_1 es un epimorfismo). Luego, $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M_2) = \mathrm{Im}(g_2) = 0$. Ahora, dado que g_2 es un epimorfismo, se sigue que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M_3) = 0$. Repitiendo este procedimiento para cada g_r, concluimos que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M) = 0$.

□

Lema 3.11. *Sea A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $M \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j \geq \mu\})$. Si $\mu > i$ entonces* $\mathrm{Hom}_A(M, \Theta(i)) = 0$.

Demostración. Sea $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$ una $\Theta-$filtración para M tal que $M_r/M_{r-1} \cong \Theta(j_r)$ y $j_r \geq \mu$ para cada $r \in [1, m]$. Luego, para cada $r \in [1, m]$, tenemos la sucesión exacta $\xi_r : \ 0 \to M_{r-1} \to M_r \to \Theta(j_r) \to 0$.

Sea $i < \mu$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-, \Theta(i))$ a la sucesión ξ_r, obtenemos el isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(M_r, \Theta(i)) \cong \mathrm{Hom}_A(M_{r-1}, \Theta(i))$ para cada $r \in [1, m]$, ya que $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j_r), \Theta(i)) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j_r), \Theta(i)) = 0$ pues $i < \mu \leq j_r$. Como además, $\mathrm{Hom}_A(M_1, \Theta(i)) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(j_1), \Theta(i)) = 0$. Entonces se tiene que,

$$\mathrm{Hom}_A(M, \Theta(i)) \cong \mathrm{Hom}_A(M_{m-1}, \Theta(i)) \cong \cdots \cong \mathrm{Hom}_A(M_1, \Theta(i)) = 0.$$

Por lo tanto $\mathrm{Hom}_A(M, \Theta(i)) = 0$ para $i < \mu$.

□

En lo que sigue, veremos algunas de las propiedades básicas de los sistemas estratificantes Ext-inyectivos de talla t.

Proposición 3.12. *Sea A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(\mu), \Theta(\lambda)) = 0 = \mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), Z(\lambda))$ *para* $\mu \geq \lambda$,

(b) $\mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), Y(\lambda)) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), \Theta(\lambda))$ *para* $\mu \geq \lambda$.

Demostración. Sea $\mu \geq \lambda$. Por 3.3 (b), se tiene la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$\xi : \ 0 \to \Theta(\lambda) \to Y(\lambda) \to Z(\lambda) \to 0$$

con $Z(\lambda) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < \lambda\})$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), -)$ a ξ y usando que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(\mu), Y(\lambda)) = 0$ (ver 3.3 (c)), se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\overline{\xi} : \ 0 \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), \Theta(\lambda)) \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), Y(\lambda)) \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), Z(\lambda)) \to \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(\mu), \Theta(\lambda)) \to 0.$$

Ahora bien, dado que $Z(\lambda) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < \lambda\})$ y $\lambda \leq \mu$, se obtiene por 3.10 (a) que $\mathrm{Hom}_A(\Theta(\mu), Z(\lambda)) = 0$. Luego, de la sucesión exacta $\overline{\xi}$ se obtiene el resultado.

□

Proposición 3.13. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, para cada $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ la multiplicidad $[M : \Theta(i)]_\xi$ no depende de la $\Theta-$filtración ξ de M en Θ.*

Demostración. Definamos la matriz $D := [\, d_{ij}\,]_{t\times t}$, donde

$$d_{ij} := \dim_K(\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), Y(j))).$$

Por 3.12 (b) se tiene que $d_{ij}{=}0$ para $i > j$; y además $d_{ii} = \dim_K(\mathrm{End}(\Theta(i))) > 0$ para cada i. Por lo tanto, D es invertible pues $\det(D) = \prod_{i=1}^{t} d_{ii} > 0$.

Por otro lado, dado que $M \in \mathcal{F}(\Theta)$, existe una $\Theta-$filtración

$$\xi :\ 0{=}M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$$

tal que $M_r/M_{r-1} \cong \Theta(i_r)$ para cada $r \in [1, m]$. Así, para cada r podemos considerar la sucesión exacta $0{\to}M_{r-1}{\to}M_r{\to}\Theta(i_r){\to}0$; y aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, Y(i))$ a dicha sucesión, se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(\Theta(i_r), Y(i)) \to \mathrm{Hom}_A(M_r, Y(i)) \to \mathrm{Hom}_A(M_{r-1}, Y(i)) \to 0$$

para cada $r \in [1, m]$.

De ahí se sigue que $\dim_K(\mathrm{Hom}_A(M_r, Y(i)) = \dim_K(\mathrm{Hom}_A(\Theta(i_r), Y(i)))+$ $\dim_K(\mathrm{Hom}_A(M_{r-1}, Y(i)))$ para todo $r \in [1, m]$.

Luego, $\dim_K(\mathrm{Hom}_R(M, Y(i))){=}\sum_{j=1}^{t}[M : \Theta(j)]_\xi \dim_K(\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), Y(i)))$.

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} \dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, Y(1))) \\ \vdots \\ \dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, Y(t))) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} [M : \Theta(1)]_\xi \\ \vdots \\ [M : \Theta(t)]_\xi \end{pmatrix}.$$

Como D es invertible, se sigue que

$$D^{-1} \begin{pmatrix} \dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, Y(1))) \\ \vdots \\ \dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, Y(t))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [M : \Theta(1)]_\xi \\ \vdots \\ [M : \Theta(t)]_\xi \end{pmatrix}.$$

De donde, $[M : \Theta(j)]_\xi$ depende de d_{ij} y de $\dim_K(\mathrm{Hom}_A(M, Y(i)))$, los cuales no dependen de ξ.

□

En vista de la proposición anterior, de aquí en adelante, dado un *eiss* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$, denotaremos a la multiplicidad de $\Theta(i)$ en M simplemente como $[M : \Theta(i)]$. De ahí que, la $\Theta-$**longitud de** M, se define como $\ell_\Theta(M) := \sum_{i=1}^{t}[M : \Theta(i)]$.

Corolario 3.14. *Sea A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces $Y(i) \ncong Y(j)$ si $i \neq j$.*

Demostración. Podemos suponer que $j > i$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0,$$

donde $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(k) : k < i\})$. En particular, se tiene que $Y(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(k) : k \leq i\})$. Luego $[Y(i) : \Theta(\lambda)] = 0$ para $\lambda > i$ y $[Y(i) : \Theta(i)] = 1$. El resultado se tiene de lo anterior, pues si ocurriera que $Y(i) \cong Y(j)$, llegaríamos a la contradicción $0 = [Y(i) : \Theta(j)] = [Y(j) : \Theta(j)] = 1$.

□

Proposición 3.15. *Sean A y B $K-$álgebras, $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $H : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$ un funtor (covariante o contravariante) exacto. Entonces $H(\mathcal{F}(\mathcal{C})) \subseteq \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$.*

Demostración. Supongamos que H es covariante, pues el caso contravariante es similar.

Sean $M \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ y $\xi :\ 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_m = M$ una $\mathcal{C}-$filtración para M. Dado que $M_i/M_{i-1} \cong C_i \in \mathcal{C}$ para $i \in [1, m]$, tenemos la sucesión exacta $0 \to M_{i-1} \to M_i \to C_i \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$.

Aplicando H a dicha sucesión y usando el hecho de que H es exacto en $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, obtenemos la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(B)$

$$\xi_i :\ 0 \to H(M_{i-1}) \to H(M_i) \to H(C_i) \to 0$$

para cada $i \in [1, m]$. Como $H(M_1) \cong H(C_i)$ y $\mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$ es cerrado por extensiones, obtenemos que $H(M_2) \in \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$. Luego, aplicando el argumento anterior consecutivamente a cada una de las sucesiones exactas ξ_i, obtenemos que $H(M) \in \mathcal{F}(H(\mathcal{C}))$.

□

Teorema 3.16. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, *$B := \mathrm{End}(_AY)$, $F{:=}\mathrm{Hom}_A(-, {}_AY_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(A) \longrightarrow \mathrm{mod}(B)$ y $\leq^{op}$ el orden opuesto de $\leq$ en $[1, t]$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $(B, \leq^{op})$ *es una ss-álgebra básica, donde* $\{{}_BP(i)\}_{i=1}^t$, *con* ${}_BP(i){:=}F(Y(i))$, *es una familia completa de* $B-$*módulos proyectivos indescomponibles no isomorfos dos a dos.*

(b) ${}_B\Delta(i) \cong F(\Theta(i)) \ \ \forall\, i \in [1, t]$.

(c) *La restricción* $F|_{\mathcal{F}(\Theta)} : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathrm{mod}(B)$ *es un funtor exacto y* $F(\mathcal{F}(\Theta)) \subseteq \mathcal{F}({}_B\Delta)$.

Demostración. [(a) y (b)] Dado que $\{Y(i)\}_{i=1}^t$ es una familia de $A-$módulos indescomponibles y no isomorfos dos a dos (por 3.14), concluimos de 5.90 que B es básica y $\{{}_BP(i)\}_{i=1}^t$ es una familia completa de $B-$módulos proyectivos indescomponibles.

Ahora bien, como $\mathrm{Ext}_A^1(-, Y)|_{\mathcal{F}(\Theta)}{=}0$, se tiene que $F|_{\mathcal{F}(\Theta)} : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathrm{mod}(B)$ es exacto. Luego, aplicando F a la sucesión de 3.3 (b), para cada $i \in [1, t]$, se tiene la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(B)$

$$0 \to F(Z(i)) \overset{\alpha(i)}{\to} {}_BP(i) \overset{F(\alpha_i)}{\to} F(\Theta(i)) {\to} 0,$$

con $F(Z(i)){\in} \mathcal{F}(\{F(\Theta(j)) : j < i\})$.

Notemos que $[F(\Theta(j)){:}\,{}_BS(j)] = 0$ si $j >^{op} i$. En efecto, para $j < i$ tenemos por 5.90 y 3.12 (b) que

$$\mathrm{Hom}_B({}_BP(j), F(\Theta(i))) = \mathrm{Hom}_B(F(Y(j)), F(\Theta(i))) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), Y(j)) = 0.$$

Luego, por 2.5, concluimos que $[F(\Theta(i)) : S(j)] = 0$ para $j < i$.

Ahora, veamos que $\mathrm{Im}(\alpha(i)) \subseteq U(i){:=}\mathrm{Tr}_{{}_BP^{op}_{>i}}({}_BP(i))$. Para ello, consideremos $0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_m = F(Z(i))$ una $F(\Theta)-$filtración de $F(Z(i))$. Ésta filtración induce, para cada $r \in [1, m]$, la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(B)$

$$0 \to X_{r-1} \overset{\nu_r}{\to} X_r \to F(\Theta(i_r)) \to 0.$$

Para $r = 2$, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_BP(i_1) \arrow[r, "(1\ 0)"] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "\beta_2"'] & {}_BP(i_2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[dl, dashed, "\bar{\pi}_2"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "\nu_1"] & X_2 \arrow[r] & F(\Theta(i_2)) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $X_1{:=}F(\Theta(i_1))$ y $P_2{:=}{}_BP(i_1) \oplus {}_BP(i_2)$. Por el Lema de la Serpiente, la aplicación $\beta_2{:=}(\nu_1\pi_1, \bar{\pi}_2) : P_2 \to X_2$ es un epimorfismo. Además $i_1 < i$ y $i_2 < i$.

De manera análoga obtenemos, para r=3, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"'] & P_3 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_3"'] & {}_BP(i_3) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"] \arrow[dl, dashed, "\bar{\pi}_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\nu_2"] & X_3 \arrow[r] & F(\Theta(i_3)) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $P_3 := P_2 \oplus {}_BP(i_3)$. Usando el Lema de la Serpiente, concluimos que la aplicación $\beta_3{:=}(\nu_2\pi_2, \bar{\pi}_3) : P_3 \to X_3$ es un epimorfismo y $i_3 < i$.

Continuando éste proceso para cada $r \in [1, m]$, obtenemos $P_m = \bigoplus_{r=1}^{m} {}_BP(i_r)$ con $i_r < i$ para todo r y un epimorfismo $\beta_m : P_m \to F(Z(i))$.

De ahí, se tiene el morfismo $\alpha(i)\beta_m : P_m \to {}_BP(i)$ con $\mathrm{Im}(\alpha(i)\beta_m) = \mathrm{Im}(\alpha(i))$. Luego $\mathrm{Tr}_{{}_BP^{op}_{>i}}({}_BP(i)) = \sum_{j<i}\{\mathrm{Im}(f) \mid f : {}_BP(j) \to {}_BP(i)\} \supseteq \mathrm{Im}(\alpha(i))$.

Ahora bien, dado que $F(Z(i)) \in \mathcal{F}(\{F(\Theta(j)) : j < i\})$ y $[F(\Theta(i)) : {}_BS(j)] = 0$ si $j^{op} > i$, de la maximalidad del cociente ${}_BP(i) \to {}_B\Delta(i)$ (ver 2.6 (b)), existe un morfismo $u : {}_A\Delta(i) \to F(\Theta(i))$ y por lo tanto un morfismo $\bar{u} : U(i) \to F(Z(i))$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(Z(i)) \arrow[r, "\alpha(i)"] & {}_BP(i) \arrow[r, "F(\alpha_i)"] \arrow[d, equal] & F(\Theta(i)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & U(i) \arrow[r] \arrow[u, "\bar{u}"] & {}_BP(i) \arrow[r] & {}_B\Delta(i) \arrow[r] \arrow[u, "u"'] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Im}(\alpha(i)) \subseteq U(i)$, existe un morfismo $v : F(\Theta(i)) \to {}_B\Delta(i)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(Z(i)) \arrow[r, "\alpha(i)"] \arrow[d] & {}_BP(i) \arrow[r, "F(\alpha_i)"] \arrow[d, equal] & F(\Theta(i)) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U(i) \arrow[r] & {}_BP(i) \arrow[r, "\pi"] & {}_B\Delta(i) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces, ${}_B\Delta(i) \cong F(\Theta(i))$ y $U(i) \cong F(Z(i))$. En particular, ${}_BP(i) \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$ para todo i; probándose que $(B, \leq^{op})$ es una $ss-$álgebra.

(c) De (a) sabemos que F es exacto en $\mathcal{F}(\Theta)$. Luego, es consecuencia de 3.15 que $F(\mathcal{F}(\Theta)) \subseteq \mathcal{F}({}_B\Delta)$, tomando $\mathcal{C} = \Theta$.

□

3.2. Morfismos de ss, eiss y epss.

Lema 3.17. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t. Entonces, para cada $i \in [1, t]$, el morfismo $\alpha_i : \Theta(i) \longrightarrow Y(i)$, dado en 3.3* (b), *es una*

$\mathcal{I}(\Theta)-$*aproximación minimal a izquierda de* $\Theta(i)$.

Demostración. Primero veamos que α_i es una $\mathcal{I}(\Theta)-$aproximación a izquierda de $\Theta(i)$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to \Theta(i) \overset{\alpha_i}{\to} Y(i) \to Z(i) \to 0,$$

con $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$.

Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, X)$, con $X \in \mathcal{I}(\Theta)$, a la sucesión exacta anterior, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Z(i), X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y(i), X) \xrightarrow{{}_*\alpha_i} \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), X) \longrightarrow 0,$$

donde ${}_*\alpha_i := \mathrm{Hom}(\alpha_i, X)$. Se sigue que ${}_*\alpha_i$ es suprayectiva y entonces para cada $f : \Theta(i) \longrightarrow X$, existe $g : Y(i) \longrightarrow X$ tal que $f = {}_*\alpha_i(g) = g\alpha_i$. Esto muestra que α_i es una $\mathcal{I}(\Theta)-$aproximación a izquierda de $\Theta(i)$.

Por otro lado, del hecho que $Y(i)$ es indescomponible se sigue que α_i es minimal a izquierda (Ver 1.37 y 1.38.)

□

Lema 3.18. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un epss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, para cada* $i \in [1, t]$, *el morfismo* $\beta_i : Q(i) \to \Theta(i)$, *dado en 3.5 (b), es una* $\mathcal{P}(\Theta)-$*aproximación minimal a derecha de* $\Theta(i)$.

Demostración. Es similar a 3.17.

□

Definición 3.19. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, t]$ *que consideramos fijo. Denotamos por* $SS_{\leq}$ *a la siguiente clase de objetos y morfismos.*

(a) $\mathrm{Obj}(SS_{\leq})$: *Son todos los sistemas estratificantes* $(\Theta, \leq)$, *de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$, *donde* $\leq$ *es el orden fijo en* $[1, t]$.

(b) $\mathrm{Mor}(SS_{\leq})$: *Un* ***morfismo*** $f : (\Theta, \leq) \to (\Theta', \leq)$ ***de ss****, es una familia de morfismos* $f := \{f(i) : \Theta(i) \to \Theta'(i)\}_{i \in [1,t]}$ *en* $\mathrm{mod}(A)$.

(c) *La composición de los morfismos* $f : (\Theta, \leq) \to (\Theta', \leq)$ *y* $g : (\Theta', \leq) \to (\Theta'', \leq)$ *de ss, se define como* $gf := \{g(i)f(i) : \Theta(i) \to \Theta''(i)\}_{i \in [1,t]}$.

Proposición 3.20. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, t]$ *que consideramos fijo. La clase* $SS_{\leq}$ *es una categoría y se le conoce como* ***la categoría de sistemas estratificantes*** *en* $\mathrm{mod}(A)$ *con respecto al orden lineal* $([1, t], \leq)$.

Demostración. Dado que la aplicación

$$\phi : \mathrm{Hom}((\Theta, \leq), (\Theta', \leq)) \to \bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta'(i)),$$

dada por $\phi(\{f_i\}_{i\in[1,t]}) := (f_i)_{i\in[1,t]}$ es biyectiva, se satisface 1.1 (a).

Consideremos ahora los morfismos $f{:}(\Theta, \leq) \to (\Theta', \leq)$, $g{:}(\Theta', \leq) \to (\Theta'', \leq)$ y $h : (\Theta'', \leq) \to (\Theta''', \leq)$. Para cada $i \in [1, t]$ se tiene que $(h(i)g(i))f(i) = h(i)(f(i)g(i))$, lo cual prueba que $(hg)f = h(gf)$ en $SS_{\leq}$.

Finalmente, sea $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en $\mathrm{mod}(A)$ y $1_{(\Theta,\leq)} := \{1_{\Theta(i)} : \Theta(i) \to \Theta(i)\}_{i\in[1,t]}$, donde $1_{\Theta(i)}$ denota al morfismo identidad de $\Theta(i)$. Es claro que éste es el morfismo identidad del ss $(\Theta, \leq)$.

$\square$

Definición 3.21. *Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1, t]$ que consideramos fijo. Denotaremos por $EISS_{\leq}$ a la siguiente clase de objetos y morfismos.*

(a) $\mathrm{Obj}(EISS_{\leq})$: *Son todos los eiss $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, *donde $\leq$ es el orden fijo en $[1, t]$.*

(b) $\mathrm{Mor}(EISS_{\leq})$: ***Un morfismo de eiss*** $f : (\Theta, \underline{Y}, \leq) \longrightarrow (\Theta', \underline{Y'}, \leq)$, *es una familia de morfismos $f = \{f_1(i) : \Theta(i) \to \Theta'(i),\ f_2(i) : Y(i) \to Y'(i)\}_{i\in[1,t]}$ en* $\mathrm{mod}(A)$, *tales que para cada $i \in [1, t]$, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \Theta(i) \arrow[r, "f_1(i)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & \Theta'(i) \arrow[d, "\alpha'_i"] \\ Y(i) \arrow[r, "f_2(i)"'] & Y'(i), \end{tikzcd}$$

donde α_i y α'_i están dadas por 3.3 (b).

(c) *Sean $f : (\Theta, \underline{Y}, \leq) \to (\Theta', \underline{Y}', \leq)$ y $g : (\Theta', \underline{Y}', \leq) \to (\Theta'', \underline{Y}'', \leq)$ morfismos de eiss en* $\mathrm{mod}(A)$. *La composición está dada por $gf := \{g_1(i)f_1(i) : \Theta(i) \to \Theta''(i), g_2(i)f_2(i) : Y(i) \to Y''(i)\}_{i\in[1,t]}$.*

$$\begin{tikzcd} \Theta(i) \arrow[r, "f_1(i)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & \Theta'(i) \arrow[r, "g_1(i)"] \arrow[d, "\alpha'_i"'] & \Theta''(i) \arrow[d, "\alpha''_i"] \\ Y(i) \arrow[r, "f_2(i)"'] & Y'(i) \arrow[r, "g_2(i)"'] & Y''(i) \end{tikzcd}$$

Proposición 3.22. *Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1, t]$ que consideramos fijo. La clase $EISS_{\leq}$ es una categoría y se le conoce como* ***la***

categoría de sistemas estratificantes Ext$-$***inyectivos*** *en* mod(A) *con - respecto al orden lineal* $([1,t],\leq)$.

Demostración. Tenemos una aplicación inyectiva natural

$$\varphi:\mathrm{Hom}((\Theta,\underline{Y},\leq),(\Theta',\underline{Y}',\leq))\to\prod_{i=1}^{t}(\mathrm{Hom}_A(\Theta(i),\Theta'(i))\times\mathrm{Hom}_A(Y(i),Y'(i))),$$

dada por $\varphi(f):=(f_1(i),f_2(i))_{i=1}^{t}$, así que la clase $\mathrm{Hom}((\Theta,\underline{Y},\leq),(\Theta',\underline{Y}',\leq))$ es un conjunto.

Ahora consideremos los morfismos de eiss $f:(\Theta,\underline{Y},\leq)\to(\Theta',\underline{Y}',\leq)$, $g:(\Theta',\underline{Y}',\leq)\to(\Theta'',\underline{Y}'',\leq)$ y $h:(\Theta'',\underline{Y}'',\leq)\to(\Theta''',\underline{Y}''',\leq)$. Para cada $i\in[1,t]$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo en mod(A)

$$\begin{tikzcd}
\Theta(i) \arrow[r, "f_1(i)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & \Theta'(i) \arrow[r, "g_1(i)"] \arrow[d, "\alpha'_i"'] & \Theta''(i) \arrow[r, "h_1(i)"] \arrow[d, "\alpha''_i"] & \Theta'''(i) \arrow[d, "\alpha'''_i"] \\
Y(i) \arrow[r, "f_2(i)"'] & Y'(i) \arrow[r, "g_2(i)"'] & Y''(i) \arrow[r, "h_2(i)"'] & Y'''(i).
\end{tikzcd}$$

Luego, para cada $i\in[1,t]$, se tiene que $(h(i)g(i))f(i)=h(i)(f(i)g(i))$, lo cual prueba que $(hg)f=h(gf)$ en $EISS_{\leq}$.

Finalmente, sea $(\Theta,\underline{Y},\leq)$ un eiss de talla t en mod(A) y $1_{(\Theta,\underline{Y},\leq)}:=\{1_{\Theta(i)}:\Theta(i)\to\Theta(i),1_{Y(i)}:Y(i)\to Y(i)\}_{i\in[1,t]}$; donde, para cada $i\in[1,t]$, $1_{\Theta(i)}$ y $1_{Y(i)}$ denotan al morfismo identidad de $\Theta(i)$ y de $Y(i)$, respectivamente. Es claro que éste es el morfismo identidad del eiss $(\Theta,\underline{Y},\leq)$.

□

Definición 3.23. *Sean A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$, que consideramos fijo. Denotaremos por $EPSS_{\leq}$ a la siguiente clase de objetos y morfismos.*

(a) Obj$(EPSS_{\leq})$: *son todos los epss $(\Theta,\underline{Q},\leq)$ de talla t en* mod(A), *donde $\leq$ es el orden fijo en $[1,t]$.*

(b) Mor$(EPSS_{\leq})$: ***Un morfismo de epss*** $g:(\Theta,\underline{Q},\leq)\to(\Theta',\underline{Q}',\leq)$, *es una familia de morfismos* $g:=\{g_1(i):\Theta(i)\to\Theta'(i),g_2(i):Q(i)\to Q'(i)\}_{i\in[1,t]}$ *en* mod(A), *tales que para cada $i\in[1,t]$, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
Q(i) \arrow[r, "g_2(i)"] \arrow[d, "\beta_i"'] & Q'(i) \arrow[d, "\beta'_i"] \\
\Theta(i) \arrow[r, "g_1(i)"'] & \Theta'(i),
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos β_i y β'_i están dados por 3.5 (b).

(c) *Sean $g : (\Theta, \underline{Q}, \leq) \to (\Theta', \underline{Q}', \leq)$ y $h : (\Theta', \underline{Q}', \leq) \to (\Theta'', \underline{Q}'', \leq)$ morfismos en* $\mathrm{mod}(A)$. *La composición $hg : (\Theta, \underline{Q}, \leq) \to (\Theta'', \underline{Q}'', \leq)$ está dada por $hg := \{h_1(i)g_1(i) : \Theta(i) \to \Theta''(i), h_2(i)g_2(i) : Q(i) \to Q''(i)\}_{i\in[1,t]}$.*

$$\begin{tikzcd}
Q(i) \arrow[r, "g_2(i)"] \arrow[d, "\beta_i"'] & Q'(i) \arrow[r, "h_2(i)"] \arrow[d, "\beta'_i"'] & Q''(i) \arrow[d, "\beta''_i"] \\
\Theta(i) \arrow[r, "g_1(i)"'] & \Theta'(i) \arrow[r, "h_1(i)"'] & \Theta''(i)
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.24. *Sean A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$. La categoría $EPSS_{\leq}$ es una categoría y se le conoce como **la categoría de sistemas estratificantes*** Ext$-$***proyectivos*** *en* $\mathrm{mod}(A)$ *con respecto al orden lineal* $([1,t], \leq)$.

Demostración. Es similar a la dada en 3.22.

□

Definición 3.25. *Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal en $[1,t]$.*

(a) *Sea $f : (\Theta, \leq) \to (\Theta', \leq)$ un morfismo de ss. Decimos que f es un **isomorfismo** si existe un morfismo de ss $g : (\Theta', \leq) \to (\Theta, \leq)$ tal que $gf = 1_{(\Theta,\leq)}$ y $fg = 1_{(\Theta',\leq)}$.*

(b) *Sea $f : (\Theta, \underline{Y}, \leq) \to (\Theta', \underline{Y}', \leq)$ un morfismo de eiss. Decimos que f es un **isomorfismo**, si existe un morfismo de eiss $g{:}(\Theta', \underline{Y}', \leq) \to (\Theta, \underline{Y}, \leq)$ tal que $fg = 1_{(\Theta',\underline{Y}',\leq)}$ y $gf = 1_{(\Theta,\underline{Y},\leq)}$.*

(c) *Sea $g : (\Theta, \underline{Q}, \leq) \to (\Theta', \underline{Q}', \leq)$ un morfismo de epss. Decimos que g es un **isomorfismo**, si existe un morfismo de epss $h{:}(\Theta', \underline{Q}', \leq) \to (\Theta, \underline{Q}, \leq)$ tal que $gh = 1_{(\Theta',\underline{Q}',\leq)}$ y $hg = 1_{(\Theta,\underline{Q},\leq)}$.*

Proposición 3.26. *Sea $f : (\Theta, \underline{Y}, \leq) \to (\Theta', \underline{Y}', \leq)$ un morfismo en $EISS_{\leq}$. Entonces, f es un isomorfismo si y sólo si $f_1(i)$ y $f_2(i)$ son isomorfismos en* $\mathrm{mod}(A)$, *para cada $i \in [1,t]$.*

Demostración. Si f es un isomorfismo, existe $g : (\Theta, \underline{Y}, \leq) \to (\Theta', \underline{Y}', \leq)$ tal que $fg = 1_{(\Theta',\underline{Y}',\leq)}$ y $gf = 1_{(\Theta,\underline{Y},\leq)}$. Luego, $g_1(i)f_1(i) = 1_{\Theta(i)}$, $g_2(i)f_2(i) = 1_{Y(i)}$, $f_1(i)g_1(i) = 1_{\Theta'(i)}$ y $f_2(i)g_2(i) = 1_{Y'(i)}$; probándose que $f_1(i)$ y $f_2(i)$ son isomorfismos, para cada i. Recíprocamente, si $f_1(i)$ y $f_2(i)$ son isomorfismos en $\mathrm{mod}(A)$, para cada i existen morfismos $g_1(i) : \Theta'(i) \to \Theta(i)$ y $g_2(i) : Y'(i) \to Y(i)$ en $\mathrm{mod}(A)$ tales que $g_1(i)f_1(i) = 1_{\Theta(i)}$, $g_2(i)f_2(i) = 1_{Y(i)}$, $f_1(i)g_1(i) = 1_{\Theta'(i)}$ y $f_2(i)g_2(i) = 1_{Y'(i)}$. Además tenemos que,

$$g_2(i)\alpha'(i) = g_2(i)\alpha'(i)f_1(i)g_1(i) = g_2(i)f_2(i)\alpha(i)g_1(i) = \alpha(i)g_1(i).$$

Por lo tanto, $g := \{g_1(i), g_2(i)\} : (\Theta', \underline{Y'}, \leq) \to (\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un morfismo de eiss y satisface que $fg = 1_{(\Theta', \underline{Y'}, \leq)}$ y $gf = 1_{(\Theta, \underline{Y}, \leq)}$.

□

Proposición 3.27. *Sea* $f : (\Theta, \underline{Q}, \leq) \to (\Theta', \underline{Q'}, \leq)$ *un morfismo en* $EPSS_{\leq}$. *Entonces,* f *es un isomorfismo si y sólo si* $f_1(i) : \Theta(i) \to \Theta'(i)$ *y* $f_2(i) : Q(i) \to Q'(i)$ *son isomorfismos en* $\mathrm{mod}(A)$*, para cada* $i \in [1, t]$.

Demostración. Es similar a la hecha el 3.26.

□

Proposición 3.28. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, t]$; *y* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *y* $(\Theta, \underline{Y'}, \leq)$ *dos eiss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, existe una familia de isomorfismos* $\{f_i : Y(i) \to Y'(i)\}_{i \in [1,t]}$ *en* $\mathrm{mod}(A)$, *de tal manera que* $f := \{1_{\Theta(i)}, f_i\}_{i=1}^{t} : (\Theta, \underline{Y}, \leq) \to (\Theta, \underline{Y'}, \leq)$ *es un isomorfismo de eiss*.

Demostración. Sean $\alpha_i : \Theta(i) \to Y(i)$ y $\alpha'_i : \Theta(i) \to Y'(i)$ las $\mathcal{I}(\Theta)-$aproximaciones minimales a izquierda de $\Theta(i)$ y $\Theta'(i)$, respectivamente. Luego, existen morfismos $f_i : Y(i) \longrightarrow Y'(i)$ y $g_i : Y'(i) \longrightarrow Y(i)$ tales que $f_i\,\alpha_i = \alpha'_i$ y $g_i\,\alpha'_i = \alpha_i$, para todo i.

$$\begin{tikzcd} \Theta(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\alpha'_i"'] & Y(i) \arrow[dl, "f_i"] \\ Y'(i) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Theta(i) \arrow[r, "\alpha'_i"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & Y'(i) \arrow[dl, "g_i"] \\ Y(i) & \end{tikzcd}$$

De ahí se sigue que $f_i\,g_i\,\alpha'_i = f_i\,\alpha_i = \alpha'_i$ y $g_i\,f_i\,\alpha_i = g_i\,\alpha'_i = \alpha_i$; y dado que α_i y α'_i son minimales a izquierda, se sigue que $f_i\,g_i$ y $g_i\,f_i$ son isomorfismos para cada $i \in [1, t]$. De donde, f_i y g_i son isomorfismos.

Sea $f := \{1_{\Theta(i)} : \Theta(i) \to \Theta(i), f_i : Y(i) \to Y'(i)\}_{i \in [1,t]}$. Dado que $f_i\alpha_i = \alpha'_i$, es claro que f es un morfismo de eiss. Luego, el resultado se sigue de 3.26.

□

Proposición 3.29. *Sean* A *una* $K-$*álgebra,* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, t]$ *y* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *y* $(\Theta, \underline{Q'}, \leq)$ *epss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, existe una familia de isomorfismos* $\{f_i : Q(i) \to Q'(i)\}_{i \in [1,t]}$ *en* $\mathrm{mod}(A)$, *de tal manera que* $f := \{1_{\Theta(i)}, f_i\}_{i=1}^{t} : (\Theta, \underline{Q}, \leq) \to (\Theta, \underline{Q'}, \leq)$ *es un isomorfismo de epss.*

Demostración. Es similar a la hecha en 3.28.

$\square$

3.3. Θ-soportes y sucesiones especiales.

Sea A una $K-$álgebra y $\leq$ un orden lineal $[1,t]$. Extendemos el orden $\leq$ a $\langle 1,t\rangle := [1,t] \cup \{\pm\infty\}$, como sigue: $-\infty < i < +\infty$ para cada $i \in [1,t]$.

Definición 3.30. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. El $\Theta-$**soporte de** M se define como* $\mathrm{Supp}_\Theta(M){:=}\{i{\in}[1,t] : [M : \Theta(i)]{\neq}0\}$. *Observe que, por 3.13, la definición de soporte tiene sentido.*

Definición 3.31. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Definimos las funciones* $\max, \min : \mathcal{F}(\Theta) \to \langle 1,t\rangle$ *como sigue: si $M \neq 0$,* $\max(M){:=}\max(\mathrm{Supp}_\Theta(M), \leq)$ *y* $\min(M){:=}\min(\mathrm{Supp}_\Theta(M), \leq)$; *en el caso $M = 0$, definimos* $\max(M) := -\infty$ *y* $\min(M) := +\infty$.

Lema 3.32. *Sea A una $K-$álgebra y $Z \subseteq Y \subseteq X$ una cadena de submódulos en* $\mathrm{mod}(A)$ *tal que $X/Y \cong \Theta_2$ y $Y/Z \cong \Theta_1$. Si* $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta_2, \Theta_1) = 0$ *entonces existe una cadena de submódulos $Z \subseteq W \subseteq X$ tal que $X/W \cong \Theta_1$ y $W/Z \cong \Theta_2$.*

Demostración. Consideremos las sucesiones exactas dadas por las hipótesis

$$0 \to Y \to X \to \Theta_2 \to 0, \text{ y } 0 \to Z \to Y \to \Theta_1 \to 0.$$

Haciendo push-out obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & & \\
\xi : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & \Theta_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & \Theta_1 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \Theta_2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta_2, \Theta_1) = 0$, la sucesión exacta η se escinde. Entonces $X/Z \cong C \cong \Theta_1 \oplus \Theta_2$; y por lo tanto Θ_2 es un sumando directo de X/Z.

Luego, existe una cadena de submódulos $Z \subseteq W \subseteq X$ tal que $W/Z \cong \Theta_2$ y $X/W \cong \dfrac{(X/Z)}{(W/Z)} \cong \dfrac{\Theta_1 \oplus \Theta_2}{0 \oplus \Theta_2} \cong \Theta_1$.

□

Proposición 3.33. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$, $i_0 := \min(M)$ *y* $m := [M : \Theta(i_0)]$. *Entonces, existe una cadena* $0 \subseteq N \subseteq M_m \subseteq M_{m-1} \subseteq \cdots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$ *de submódulos de* M*, tal que:*

(a) $N \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i_0\})$,

(b) $M_k/M_{k+1} \cong \Theta(i_0)$ *para cada* $k \in [0, m]$*, donde* $M_{m+1} := N$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre la $\Theta-$longitud $\ell_\Theta(M)$ de M. Si $\ell_\Theta(M) = 1$, se tiene que $M \cong \Theta(i_0)$; y en tal caso $0 \subseteq N \subseteq M_1 \subseteq M$ con $N = 0$ y $M_1 = M$ satisface lo requerido.

Supongamos ahora que $\ell_\Theta(M) = r > 1$. Consideremos $\xi : 0 = L_{r+1} \subseteq L_r \subseteq \cdots \subseteq L_1 \subseteq L_0 = M$ una $\Theta-$filtración de M. Por 3.32, podemos suponer que $L_0/L_1 \cong \Theta(i_0)$; y entonces $[L_1 : \Theta(i_0)] = m - 1$.

Dado que $\ell_\Theta(L_1) = r - 1$, por hipótesis de inducción, el resultado vale para L_1. Por lo tanto vale para M pues $M/L_1 \cong \Theta(i_0)$.

□

Lema 3.34. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe una sucesión exacta* $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \Theta(i_o)^{m_{i_0}} \longrightarrow 0$ *en* $\mathcal{F}(\Theta)$ *tal que* $i_0 := \min(M) < \min(N)$ *y* $m_{i_0} := [M : \Theta(i_0)]$.

(b) *Existe una sucesión exacta* $0 \longrightarrow \Theta(i_1)^{m_{i_1}} \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ *en* $\mathcal{F}(\Theta)$ *tal que* $\max(M') < \max(M) =: i_1$ *y* $m_{i_1} := [M : \Theta(i_1)]$.

Demostración. (a) Por 3.33, se tiene una cadena de submódulos de M, $\xi : 0 \subseteq N = M_{m+1} \subseteq M_m \subseteq \cdots \subseteq M_0 = M$ tal que $N \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i_0\})$ y $M_k/M_{k+1} \cong \Theta(i_0)$ para cada $k \in [0, m]$ con $m := [M : \Theta(i_0)]$.

Veamos que $M/N \cong \Theta(i_0)^m$. Usando la filtración ξ, obtenemos la filtración cociente $N/N \subseteq M_m/N \subseteq \cdots \subseteq M_0/N = M/N$. Además $(M_k/N)/(M_{k+1}/N) \cong M_k/M_{k+1} \cong \Theta(i_0)$ y entonces tenemos las siguientes sucesiones exactas

$\zeta_m : 0 \to M_m/N \to \Theta(i_0) \to 0$, $\zeta_{m-1} : 0 \to M_m/N \to M_{m-1}/N \to \Theta(i_0) \to 0$, $\cdots$ $\zeta_k : 0 \to M_{k+1}/N \to M_k/N \to \Theta(i_0) \to 0$, $\zeta_0 : 0 \to M_1/N \to M/N \to \Theta(i_0) \to 0$.

Notemos que ζ_m y ζ_{m-1}, nos dan el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_m/N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & M_{m-1}/N \arrow[r] \arrow[d] & \Theta(i_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta(i_0) \arrow[r] & C \arrow[r] & \Theta(i_0) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Así, por el Lema del Cinco, tenemos que $M_{m-1}/N \cong C$. Por otro lado, como $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(i_0), \Theta(i_0)) = 0$, el segundo renglón del diagrama se escinde y por lo tanto $M_{m-1}/N \cong C \cong \Theta(i_0)^2$. Usando un argumento análogo para cada $k \in [0, m]$, obtenemos que $M_k/N \cong \Theta(i_0)^{m-k+1}$. Por lo tanto $M/N \cong \Theta(i_0)^m$, lo cual nos induce la sucesión exacta

$$0 \to N \to M \to \Theta(i_0)^m \to 0$$

con las propiedades requeridas.

(b) Se prueba de manera análoga al inciso (a).

□

Proposición 3.35. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Entonces, existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Theta)$*

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon_M} Y_M \longrightarrow M' \to 0,$$

tal que $\max(M') < \max(M)$, $Y_M \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j \leq \max(M)} Y(j))$ *y $\epsilon_M : M \to Y_M$ es una $\mathcal{I}(\Theta)-$aproximación a izquierda de M.*

Demostración. Por simplicidad supondremos que $\leq$ es el orden natural en $[1, t]$. Procederemos por inducción sobre $i_1 := \max(M)$. Sea $m_1 := [M : \Theta(i_1)]$.

Si $i_1 = 1$, entonces toda $\Theta-$filtración de M tiene cocientes isomorfos a $\Theta(1)$; y como $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(1), \Theta(1)) = 0$, se tiene un isomorfismo $f : M \to \Theta(1)^{m_1}$. Por otro lado, por 3.3 (b), tenemos que $\Theta(1) \cong Y(1)$ pues $Z(1) = 0$. En tal caso la sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{f} \Theta(1)^{m_1} \to 0 \to 0$, con $Y_M := \Theta(1)^{m_1}$ y $M' = 0$, satisfacen lo requerido.

Supongamos ahora que $i_1 > 1$. Por 3.34 (b), existe una sucesión exacta $0 \to \Theta(i_1)^{m_1} \to M \to N \to 0$ en $\mathcal{F}(\Theta)$ con $\max(N) < i_1$. Ahora bien, por 3.3 (b) se tiene la sucesión exacta $0 \to \Theta(i_1)^{m_1} \xrightarrow{\alpha_i^{m_1}} Y(i_1)^{m_1} \to Z(i_1)^{m_1} \to 0$. Luego, de las dos sucesiones exactas anteriores, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Theta(i_1)^{m_{i_1}} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(i_1)^{m_{i_1}} \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & Z(i_1)^{m_{i_1}} \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z(i_1)^{m_{i_1}} \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\operatorname{Ext}_A^1(N, Y(i_1)) = 0$, se tiene que $C \cong Y(i_1)^{m_1} \oplus N$. En particular, obtenemos la sucesión exacta

$$\xi : \ 0 \to M \to Y(i_1)^{m_1} \oplus N \to Z(i_1)^{m_1} \to 0.$$

Ahora, como $\max(N) < i_1$, por hipótesis de inducción, existe una sucesión exacta $\zeta : 0 \to N \to Y_N \to N' \to 0$ en $\mathcal{F}(\Theta)$, tal que $Y_N \in \operatorname{add}(\bigoplus_{j \leq \max(N)} Y(j))$ y $\max(N') < \max(N)$. Por lo tanto, de las sucesiones ξ y ζ, junto con el Lema de la Serpiente, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\operatorname{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y(i_1)^{m_{i_1}} \oplus N \arrow[r] \arrow[d] & Z(i_1)^{m_{i_1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & Y(i_1)^{m_{i_1}} \oplus Y_N \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N' \arrow[r, equal] \arrow[d] & N' \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Dado que $\mathcal{F}(\Theta)$ es cerrada por extensiones, $\max(N') < i_1$ y $\max(Z(i_1)^{m_1}) < i_1$, concluimos que $K \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $\max(K) < i_1$. Luego, la sucesión exacta

$$0 \to M \to Y(i_1)^{m_1} \oplus Y_N \to K \to 0$$

con $Y_M := Y(i_1)^{m_1} \oplus Y_N$ y $M' := K$ satisface las condiciones requeridas, ya que $\operatorname{Ext}_A^1(K, -)|_{\mathcal{I}(\Theta)} = 0$.

$\square$

Corolario 3.36. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$. Entonces, cualquier $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ admite una co-resolución finita en* $\mathrm{add}(Y)$; *esto es, una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_{-1}} Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow Y_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} Y_k \xrightarrow{f_k} 0$$

tal que $k \leq t-1$, $\mathrm{Im}(f_i) \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $Y_i \in \mathrm{add}(Y)$ para cada $i \in [0,k]$.

Demostración. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Podemos suponer que $M \neq 0$ pues en caso contrario es trivial. Ahora bien, por 3.35, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to M \xrightarrow{f_{-1}} Y_0 \xrightarrow{g_0} M_0 \to 0$$

en $\mathcal{F}(\Theta)$ tal que $\max(M_0)<\max(M)$ y $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$. Como $M_0 \in \mathcal{F}(\Theta)$, aplicamos nuevamente 3.35 y obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{h_0} Y_1 \xrightarrow{g_1} M_1 \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{F}(\Theta)$ tal que $\max(M_1) < \max(M_0)$ y $Y_1 \in \mathrm{add}(Y)$. Tomando $f_0 := h_0 g_0$, obtenemos la sucesión de morfismos $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_{-1}} Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1$. Usando el mismo argumento para $M_1 \in \mathcal{F}(\Theta)$, obtenemos $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f_{-1}} Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \xrightarrow{f_1} Y_2$ y $M_2 \in \mathcal{F}(\Theta)$ con $\max(M_2) < \max(M_1) < \max(M_0) < \max(M)$. Repetimos el procedimiento anterior para M_2, y así sucesivamente. Dado que $\max(M) \in [1,t]$, este proceso termina obteniéndose un $k \leq t-1$ tal que $M_k \in \mathrm{add}(Y)$.

□

Proposición 3.37. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un epss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Entonces, existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow Q_M \xrightarrow{\nu_M} M \longrightarrow 0$$

en $\mathcal{F}(\Theta)$, tal que $\min(M) < \min(M')$, $Q_M \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j \geq \min(M)} Q(j))$ y $\nu_M : Q_M \to M$ es una $\mathcal{P}(\Theta)-$aproximación a derecha de M.

Demostración. La prueba es similar a 3.35.

□

Corolario 3.38. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un epss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$. Entonces, cualquier $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ admite una resolución finita en* $\mathrm{add}(Q)$; *esto es, una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow Q_k \xrightarrow{f_k} Q_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \longrightarrow Q_0 \xrightarrow{f_0} M \xrightarrow{f_{-1}} 0$$

tal que $k \leq t-1$, $\mathrm{Ker}(f_i) \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $Q_i \in \mathrm{add}(Q)$ para cada $i \in [0,k]$.

Demostración. Es inmediato de 3.37; y similar a la prueba de 3.36.

□

3.4. Equivalencia contravariante entre $\mathcal{F}(\Theta)$ y $\mathcal{F}({}_B\Delta)$.

Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t y $B := \mathrm{End}({}_AY)$. En esta sección probaremos que las categorías $\mathcal{F}({}_B\Delta)$ y $\mathcal{F}(\Theta)$ son contravariantemente equivalentes.

Definición 3.39. *Sea A una $K-$álgebra, $Y \in \mathrm{mod}(A)$ y $B := \mathrm{End}({}_AY)$. Consideremos los funtores $F := \mathrm{Hom}_A(-, Y) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$ y $G := \mathrm{Hom}_B(-, Y) : \mathrm{mod}(B) \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$. La **evaluación** $\varepsilon : 1_{\mathrm{mod}(A)} \to GF$, se define como la familia de morfismos $\varepsilon := \{\varepsilon_X : X \to GF(X)\}_{X \in \mathrm{mod}(A)}$, donde $\varepsilon_X(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$.*

Lema 3.40. *Sea A una $K-$álgebra. La evaluación $\varepsilon : 1_{\mathrm{mod}(A)} \to GF$ es una transformación natural de funtores.*

Demostración. Primero veamos que $\varepsilon_X(x) : \mathrm{Hom}_A(X, Y) \to Y$ es un morfismo en $\mathrm{mod}(B)$. En efecto, dados $f, g : X \to Y$ $\varepsilon_X(x)(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \varepsilon_X(x)(f) + \varepsilon_X(x)(g)$; y dada $b \in B$, $\varepsilon_X(x)(bf) = (bf)(x) = f(x)b^{op} = b\varepsilon_X(x)(f)$.

Ahora vemos que $\varepsilon_X : X \to GF(X)$ es un morfismo en $\mathrm{mod}(A)$. Sean $f : X \to Y$, $x, y \in X$ y $r \in A$. Entonces $\varepsilon_X(rx + y)(f) = f(rx + y) = rf(x) + f(y) = r\varepsilon_X(x)(f) + \varepsilon_X(x)(f) = (r\varepsilon_X(x) + \varepsilon_X(y))(f)$.

Finalmente, veamos que ε es una transformación natural. Para ello, tenemos que probar que para cualquier $\alpha : M \to N$ en $\mathrm{mod}(A)$, el siguiente diagrama en $\mathrm{mod}(A)$ conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varepsilon_M"] \arrow[d, "\alpha"'] & GF(M) \arrow[d, "GF(\alpha)"] \\ N \arrow[r, "\varepsilon_N"'] & GF(N). \end{tikzcd}$$

En efecto, sean $f \in F(N)$ y $m \in M$. Entonces $(GF(\alpha))(\varepsilon_M(m))(f) = \varepsilon_M(m)(F(\alpha)(f)) = \varepsilon_M(m)(f\alpha) = f(\alpha(m)) = \varepsilon_N(\alpha(m))(f)$; y por lo tanto el diagrama anterior conmuta.

□

Observación 3.41. *Análogamente a 3.39, tenemos otra transformación natural llamada también evaluación $\varepsilon' : 1_{\mathrm{mod}(B)} \to FG$, definida como la familia $\{\varepsilon'_X :$*

$X \to FG(X)\}_{X \in \mathrm{mod}(B)}$ de morfismos en $\mathrm{mod}(B)$, donde $\varepsilon'_X(x)(f) := f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in \mathrm{Hom}_B(X, Y)$.

Para probar el resultado principal de esta sección, nos será de utilidad el siguiente lema.

Lema 3.42. *Sean A y B $K-$álgebras; $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ subcategorías plenas de $\mathrm{mod}(A)$ y $\mathrm{mod}(B)$, respectivamente; $H, L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores aditivos; y $\eta : H \to L$ una transformación natural de funtores. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathcal{C}$ que se escinde, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *$\eta_M : H(M) \to L(M)$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo).*

(b) *$\eta_{M'} : H(M') \to L(M')$ y $\eta_{M''} : H(M'') \to L(M'')$ son monomorfismos (resp. epimorfismos).*

Demostración. Sea $\xi : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathcal{C}$ que se escinde. Esto es, existen morfismos $f' : M \to M'$ y $g' : M'' \to M$ en $\mathcal{C}$ tales que $f'f = 1_{M'}$ y $gg' = 1_{M''}$; y que nos dan la sucesión exacta $\xi' : 0 \to M'' \xrightarrow{g'} M \xrightarrow{f'} M' \to 0$ que también se escinde.

El hecho de que η sea una transformación natural entre los funtores aditivos H y L, induce los siguientes diagramas conmutativos en $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd}
H(\xi): 0 \arrow[r] & H(M') \arrow[r, "H(f)"] \arrow[d, "\eta_{M'}"] & H(M) \arrow[r, "H(g)"] \arrow[d, "\eta_M"] & H(M'') \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M''}"] & 0 \\
L(\xi): 0 \arrow[r] & L(M') \arrow[r, "L(f)"] & L(M) \arrow[r, "L(g)"] & L(M'') \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H(\xi'): 0 \arrow[r] & H(M'') \arrow[r, "H(g')"] \arrow[d, "\eta_{M''}"] & H(M) \arrow[r, "H(f')"] \arrow[d, "\eta_M"] & H(M') \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M'}"] & 0 \\
L(\xi'): 0 \arrow[r] & L(M'') \arrow[r, "L(g')"] & L(M) \arrow[r, "L(f')"] & L(M') \arrow[r] & 0;
\end{tikzcd}$$

donde las sucesiones $H(\xi)$, $L(\xi)$, $H(\xi')$ y $L(\xi')$ también se escinden.
(a)$\Rightarrow$(b) Supongamos que η_M es un monomorfismo. Aplicando el Lema de la Serpiente al primer diagrama, obtenemos que $\mathrm{Ker}(\eta_{M'}) = 0$. Haciendo lo mismo en el segundo diagrama, obtenemos que $\mathrm{Ker}(\eta_{M''}) = 0$.

Si η_M es un epimorfismo, la prueba es similar.

(b)$\Rightarrow$(a) Es inmediato del Lema de la Serpiente, pues $\mathrm{Ker}(\eta_{M'}) \to \mathrm{Ker}(\eta_M) \to \mathrm{Ker}(\eta_{M''})$ (resp. $\mathrm{Coker}(\eta_{M'}) \to \mathrm{Coker}(\eta_M) \to \mathrm{Coker}(\eta_{M''})$) es una sucesión exacta.

$\square$

Proposición 3.43. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ *y* $B := \mathrm{End}({}_AY)$. *Consideremos los funtores* $F := \mathrm{Hom}_A(-, Y) : \mathrm{mod}(A) \longrightarrow \mathrm{mod}(B)$ *y* $G := \mathrm{Hom}_B(-, Y) : \mathrm{mod}(B) \longrightarrow \mathrm{mod}(A)$. *Entonces, el morfismo evaluación* $\varepsilon_X : {}_AX \to GF({}_AX)$ *dado por* $\varepsilon_X(x)(f)=f(x)$, *es un isomorfismo para cualquier* $X \in \mathcal{F}(\Theta)$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{F}(\Theta)$. Si $X = Y$, el morfismo $\varepsilon_Y : {}_AY \to GF({}_AY)$ es un isomorfismo. En efecto, ε_Y es un monomorfismo, ya que si $\varepsilon_Y(x) = 0$ entonces $0 = \varepsilon_Y(x)(1) = 1(x) = x$; y además para cualquier $f \in \mathrm{Hom}_B(B, Y)$ se tiene que $f(b) = bf(1)$ para cada $b \in B$, lo cual implica que $\varepsilon(f(1))(b) = b(f(1)) = bf(1)$, probándose que ε_Y es suprayectivo.

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $\varepsilon_{Y^m} : Y^m \to GF(Y^m)$ es un isomorfismo pues $F(Y^m) = \mathrm{Hom}_A(Y^m, Y) \cong \mathrm{Hom}_A(Y, Y)^m = B^m$; y por lo tanto, $G(F(Y^m)) \cong \mathrm{Hom}_B(B^m, Y) \cong \mathrm{Hom}_B(B, Y)^m \cong Y^m$.

De lo anterior se sigue que para cada $X \in \mathrm{add}(Y)$, el morfismo evaluación ε_X es un isomorfismo. En efecto, sean $m \in \mathbb{N}$ y $N \in \mathrm{mod}(A)$ tales que $X \oplus N \cong Y^m$. Usando que F y G son funtores aditivos y el hecho de que $Y \cong GF(Y)$, tenemos que $X \oplus N \cong Y^m \cong GF(Y)^m \cong GF(Y^m) \cong GF(X) \oplus GF(Y)$. De esta manera, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathcal{F}(\Theta)$

$$\begin{tikzcd}
\xi : 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & Y^m \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\varepsilon_{Y^m}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & GF(X) \arrow[r] & GF(Y^m) \arrow[r] & GF(N) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como ξ se escinde, ε es una transformación natural y ε_{Y^m} es un isomorfismo; se sigue por 3.42 que ε_X es un isomorfismo.

Ahora veamos el caso general. Sea $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Para ver que ε_M es un isomorfismo, usaremos inducción sobre $\max(M)$.

Sea $t_1 := \min([1, t], \leq)$ y $m_1 := [M : \Theta(t_1)]$. Si $\max(M) = t_1$, entonces $M \cong \Theta(t_1)^{m_1} \cong Y(t_1)^{m_1} \in \mathrm{add}(Y)$. Luego, por el argumento anterior, ε_M es un isomorfismo.

Supongamos ahora que $\max(M) > t_1$. Por 3.35, existe una sucesión exacta $0 \to M \to Y_0 \to N \to 0$ tal que $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$ y $\max(N) < \max(M)$. Por 3.16 (c), sabemos que $F : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathrm{mod}(B)$ es exacto; y entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{Ker}(\varepsilon_M) & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \varepsilon_M & & \cong \downarrow \varepsilon_{Y_0} & & \cong \downarrow \varepsilon_N & & \\
0 & \longrightarrow & GF(M) & \longrightarrow & GF(Y_0) & \longrightarrow & GF(N) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Coker}(\varepsilon_M) & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

Por hipótesis de inducción ε_N es un isomorfismo; y dado que $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$, ε_{Y_0} es un isomorfismo. Luego, por el Lema de la Serpiente concluimos que ε_M es un isomorfismo.

$\square$

Proposición 3.44. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t, $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ y $B := \mathrm{End}({}_AY)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{Ext}^1_B(N, Y) = 0$ *para cada* $N \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$.

(b) *La restricción* $G|_{\mathcal{F}({}_B\Delta)} : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathrm{mod}(A)$ *es un funtor exacto y además* $G(\mathcal{F}({}_B\Delta)) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$.

(c) *La aplicación* $\varepsilon'_X : X \to FG(X)$*, dada por* $\varepsilon'_X(x)(f) = f(x)$*, es un isomorfismo en* $\mathrm{mod}(B)$ *para cualquier* $X \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$.

Demostración. (a) y (b) Veamos que G es un funtor exacto sobre $\mathcal{F}({}_B\Delta)$. Para ello, es suficiente probar que $\mathrm{Ext}^1_B(-, Y)|_{\mathcal{F}({}_B\Delta)} = 0$. Consideremos la sucesión exacta $0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$. Aplicando el funtor F a dicha sucesión, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to F(Z(i)) \to {}_BP(i) \to {}_B\Delta(i) \to 0$$

donde ${}_BP(i) := F(\Theta(i))$ es $B-$proyectivo (ver el 3.16).

Luego, aplicando el funtor G y usando el isomorfismo de 3.43, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Theta(i) & \xrightarrow{f} & Y(i) & \xrightarrow{g} & Z(i) & \longrightarrow & & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong \downarrow \varepsilon_{\Theta(i)} & & \cong \downarrow \varepsilon_{Y(i)} & & \cong \downarrow \varepsilon_{Z(i)} & & & & \\
0 & \longrightarrow & G({}_B\Delta(i)) & \xrightarrow{f'} & G(P(i)) & \xrightarrow{g'} & GF(Z(i)) & \xrightarrow{h'} & \mathrm{Ext}^1_B({}_B\Delta(i), Y) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Como g es suprayectiva, $\varepsilon_{Y(i)}$ y $\varepsilon_{Z(i)}$ son isomorfismos; se tiene que g' es suprayectiva. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_B({}_B\Delta(i), Y) = 0$ para cada $i \in [1,t]$; y entonces $\mathrm{Ext}^1_B(-, Y)|_{\mathcal{F}({}_B\Delta)} = 0$.

Finalmente, notemos que la imagen de $\mathcal{F}({}_B\Delta)$ bajo G está contenida en $\mathcal{F}(\Theta)$. En efecto, esto se sigue de 3.15 usando el hecho de que G es exacto sobre $\mathcal{F}({}_B\Delta)$.

(c) Sea $M \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$. Probemos, por inducción sobre la ${}_B\Delta-$longitud de M, que ε'_M es un isomorfismo.

Veamos primero que $\varepsilon'_{{}_B\Delta(i)} : {}_B\Delta(i) \to FG({}_B\Delta(i))$ es un isomorfismo para cada $i \in [1,t]$. En efecto, por 3.43 y 3.16 (b), tenemos

$$FG({}_B\Delta(i)) = FG(F(\Theta(i))) = F(GF(\Theta(i))) \cong F(\Theta(i)) \cong {}_B\Delta(i).$$

Así que si $\ell_{{}_B\Delta}(M) = 1$, entonces $M \cong {}_B\Delta(j)$ para algún $j \in [1,t]$; y por lo tanto $\varepsilon_M : M \to FG(M)$ es un isomorfismo.

Supongamos ahora que $\ell_{{}_B\Delta}(M) = n \geq 2$. Sea $0 = M_0 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$ una ${}_B\Delta-$filtración para M, con $M_i/M_{i-1} \cong {}_B\Delta(j_i)$ para cada $i \in [1,n]$. En particular, tenemos que $M/M_{n-1} \cong \Delta(j_n)$ con $M_{n-1} \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$ y $\ell_{{}_B\Delta}(M_{n-1}) = n-1$.

Luego, usando la hipótesis de inducción y el hecho de que $F : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$ y $G : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ son exactos, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'_{M_{n-1}}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'_M"] & {}_B\Delta(j_n) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon'_{{}_B\Delta(j_n)}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & FG(M_{n-1}) \arrow[r] & FG(M) \arrow[r] & FG({}_B\Delta(j_n)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis de inducción $\varepsilon'_{M_{n-1}}$ es un isomorfismo. Además, hemos probado que $\varepsilon'_{{}_B\Delta(j_n)}$ es un isomorfismo. Finalmente, aplicando el Lema Corto del Cinco (ver 5.45) al diagrama anterior, concluimos que ε'_M es un isomorfismo.

□

Teorema 3.45. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, $Y := \bigoplus_{i=1}^t Y(i)$ *y* $B := \mathrm{End}({}_AY)$. *Entonces, los funtores* $F{:=}\mathrm{Hom}_A(-,Y) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$ *y* $G{:=}\mathrm{Hom}_B(-,Y) : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(A)$ *inducen, por restricción, equivalencias exactas de categorías*

$$F_1 := F|_{\mathcal{F}(\Theta)} : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta) \;\; y \;\; G_1 := G|_{\mathcal{F}({}_B\Delta)} : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$$

tales que F_1 es cuasi-inverso de G_1; esto es, $\varepsilon : 1_{\mathcal{F}(\Theta)} \to G_1F_1$ y $\varepsilon' : 1_{\mathcal{F}({}_B\Delta)} \to F_1G_1$ son isomorfismos.

Demostración. Es inmediato de 3.16 (c), 3.43 y 3.44.

□

Observación 3.46. *Por simplicidad, las equivalencias F_1 y G_1, del resultado anterior, serán denotadas por F y G.*

Observación 3.47. (a) *Se puede par una prueba diferente a 3.45, usando 5.94, ya que las evaluaciones $\varepsilon : 1_{\mathrm{mod}(A)} \to GF$ y $\varepsilon' : 1_{\mathrm{mod}(B)} \to FG$ satisfacen 5.93; y el hecho de que $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq {}_A\mathcal{R}[Y]$ y $\mathcal{F}({}_B\Delta) \subseteq \mathcal{R}_B[Y]$ (ver 5.92 y 5.94).*

(b) *Como lo mencionamos en* (a), *las evaluaciones $\varepsilon : 1_{\mathrm{mod}(A)} \to GF$ y $\varepsilon' : 1_{\mathrm{mod}(B)} \to FG$ satisfacen 5.93.*

Así, que si vemos a F y G como los funtores covariantes $F : \mathrm{mod}(A) \to (\mathrm{mod}(B))^{op}$ y $G : (\mathrm{mod}(B))^{op} \to \mathrm{mod}(A)$ (donde $(\mathrm{mod}(B))^{op}$ denota a la categoría opuesta de $\mathrm{mod}(B)$), tenemos en vista de lo anterior, que las transformaciones $\varepsilon : 1_{\mathrm{mod}(A)} \to GF$ y $\varepsilon' : GF \to 1_{(\mathrm{mod}(B))^{op}}$ satisfacen 5.95; implicando que F y G (vistos como funtores covariantes) son adjuntos.

Luego, se puede probar que se satisfacen las hipótesis de 5.97. Como consecuencia, obtendremos que F y G inducen, por restricción, una equivalencia entre las categorías $\mathcal{F}(\Theta)$ y $(\mathcal{F}({}_B\Delta))^{op}$ (donde $(\mathcal{F}({}_B\Delta))^{op}$ denota que estamos viendo a $\mathcal{F}({}_B\Delta)$ como subcategoria de $(\mathrm{mod}(B))^{op}$.)

Corolario 3.48. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en $\mathrm{mod}(A)$, $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ y $f : M \to N$ un morfismo en $\mathcal{F}(\Theta)$ tal que $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Entonces, $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{F}(\Theta)$ si y sólo si $\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}(f), Y) = 0$.*

Demostración. Primero supongamos que $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{F}(\Theta)$. Dado que $\mathrm{Ext}_A^1(\mathcal{F}(\Theta), Y) = 0$, es claro que $\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}(f), Y) = 0$. Ahora, supongamos que $\mathrm{Ext}_A^1(\mathrm{Coker}(f), Y(i)) = 0$. Entonces tenemos la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(B)$

$$0 \to F(\mathrm{Coker}(f)) \to F(N) \stackrel{F(f)}{\to} F(M) \to 0,$$

con $F(f)$ en $\mathcal{F}({}_B\Delta)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(F(f)) \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$ (ver 2.11) y $\mathrm{Ker}(F(f)) \cong F(\mathrm{Coker}(f)))$. Luego, por 3.45, se tiene la sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Theta)$

$$0 \to M \stackrel{f}{\to} N \to G(\mathrm{Ker}(F(f))) \to 0$$

En particular, $\mathrm{Coker}(f) \cong G(\mathrm{Ker}(F(f))) \in \mathcal{F}(\Theta)$.

□

Corolario 3.49. *Sea A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en $\mathrm{mod}(A)$. Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $(\Theta, \leq)$ *es un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$.

(b) $\mathcal{F}(\Theta)$ *es cerrado por sumandos directos en* $\mathrm{mod}(A)$.

Demostración. (a) Por 3.3 (a) y 3.12 (a), resta probar que $\Theta(i)$ es indescomponible para cada $i \in [1, t]$. De 2.10 tenemos que $\mathrm{End}({}_B\Delta(i))$ es una $K-$álgebra local. Luego por, 3.16 (b) y 3.45, se tiene el isomorfismo de $K-$álgebras $\mathrm{End}({}_A\Theta(i)) \cong \mathrm{End}({}_B\Delta(i))$. Por lo tanto, $\Theta(i)$ es indescomponible.
(b) Sea $B := \mathrm{End}({}_AY)$. Por 3.45, sabemos que $F := \mathrm{Hom}_A(-, Y) : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$ y $G := \mathrm{Hom}_B(-, Y) : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ son equivalencias exactas cuasi-inversas una de la otra. Mas aún, por 3.16 tenemos que $(B, \leq^{op})$ es una $ss-$álgebra. Luego, por 2.19, $\mathcal{F}({}_B\Delta)$ es cerrada por sumandos directos.

Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ y M_1, $M_2 \in \mathrm{mod}(A)$ sumandos directos de M tales que $M := M_1 \oplus M_2$. Esto es, tenemos una sucesión exacta $\xi : 0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ que se escinde en $\mathrm{mod}(A)$.

Ahora, como $F(M) \cong F(M_1) \oplus F(M_2) \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$ y $\mathcal{F}({}_B\Delta)$ es cerrada por sumandos directos; se sigue que $F(M_1)$, $F(M_2) \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$.

Por lo tanto, aplicando el funtor GF a la sucesión exacta ξ, obtenemos la sucesión exacta $\xi' : 0 \to GF(M_1) \to GF(M) \to GF(M_2) \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$, que también se escinde.

$$\begin{tikzcd}
\xi :\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{M_1}"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_M"', "\cong"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{M_2}"] & 0 \\
\xi' :\ 0 \arrow[r] & GF(M_1) \arrow[r] & GF(M) \arrow[r] & GF(M_2) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde $\varepsilon_M : M \to GF(M)$ es un isomorfismo (ver 3.43). Ahora bien, por 3.42, concluimos que ε_{M_1} y ε_{M_2} son isomorfismos. Por lo tanto, $M_i \cong GF(M_i) \in \mathcal{F}(\Theta)$ para $i = 1, 2$.

$\square$

Corolario 3.50. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$ *y* $B := \mathrm{End}({}_AY)$. *Consideremos las dualidades exactas $F : \mathcal{F}(\Theta) \to \mathcal{F}({}_B\Delta)$ y $G : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ (ver 3.45). Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $M, N \in \mathcal{F}(\Theta)$, la función*

$$\varphi : \mathrm{Ext}^1_A(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_B(F(N), F(M)),$$

dada por $\varphi([\mu]) := [F(\mu)]$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

(b) *Para cada* $M, N \in \mathcal{F}({}_B\Delta)$, *la función*

$$\psi : \mathrm{Ext}^1_B(M, N) \to \mathrm{Ext}^1_A(G(N), G(M)),$$

dada por $\psi([\nu]) := [G(\nu)]$, *es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Demostración. Es inmediato del hecho que F y G son exactos, $1_{\mathcal{F}(\Theta)} \cong GF$ y $1_{\mathcal{F}({}_B\Delta)} \cong FG$.

□

Proposición 3.51. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un eiss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$, $Y := \bigoplus_{i=1}^t Y(i)$ *y* $B := \mathrm{End}({}_AY)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{I}(\Theta) = \mathrm{add}(Y)$.

(b) $\mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta) = \mathrm{add}(G({}_BT))$, *donde* $G : \mathcal{F}({}_B\Delta) \to \mathcal{F}(\Theta)$ *es la dualidad obtenida en 3.45 y* ${}_BT$ *es el* $B-$*módulo inclinante característico asociado a la ss-álgebra* $(B, \leq^{op})$.

Demostración. (a) Por 3.8, se tiene que $\mathrm{add}(Y) \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$. Además, para cada $i \in [1, t]$, se tiene que $Y(i) \in \mathcal{I}(\Theta)$ pues $\mathrm{Ext}^1_A(\mathcal{F}(\Theta), Y(i)) = 0$. Por lo tanto $\mathrm{add}(Y) \subseteq \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{I}(\Theta)$.

Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{I}(\Theta)$. Por 3.35, obtenemos la sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Theta)$

$$\xi : 0 \to M \to Y_0 \to N \to 0,$$

con $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$. Ahora bien, dado que $M \in \mathcal{I}(\Theta)$, concluimos que ξ se parte; y por lo tanto $M \in \mathrm{add}(Y)$; probándose (a).
(b) Sea $X \in \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$. En particular, $\mathrm{Ext}^1_A(X, M) = 0$ para cada $M \in \mathcal{F}(\Theta)$; y por 3.50 esto es equivalente a que $\mathrm{Ext}^1_B(\mathcal{F}({}_B\Delta), F(X)) = 0$. Luego, $F(X) \in \mathcal{F}({}_B\Delta) \cap \mathcal{I}({}_B\Delta) = \mathrm{add}({}_BT)$ (ver 2.24). Ahora, bien $F(X) \in \mathrm{add}({}_BT)$ si y sólo si $X \in G(\mathrm{add}({}_BT))$, por 3.45.

□

Lema 3.52. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $M, N \in \mathrm{mod}(A)$ *básicos. Si* $\mathrm{add}(M) = \mathrm{add}(N)$ *entonces* $M \cong N$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{add}(M) = \mathrm{add}(N)$. Sean $\{M_i\}_{i=1}^m$ y $\{N_j\}_{j=1}^n$ conjuntos de objetos en $\mathrm{mod}(A)$ que son indescomponibles y no isomorfos dos a dos, tales que $M \cong \bigoplus_{i=1}^m M_i$ y $N \cong \bigoplus_{j=1}^n N_j$. Luego, como $\mathrm{add}(M) = \mathrm{add}(N)$, se sigue por el Teorema de Krull-Schmidt (ver 5.10) que $m = n$; y que para cada i existe un único j_i tal que $M_i \cong N_{j_i}$. Esto induce una biyección $\sigma : [1, m] \to [1, n]$, con $\sigma(i) = j_i$, ya que N y M son básicos. Luego $M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_{\sigma(i)} \cong \bigoplus_{i=1}^{m} N_{j_i} \cong N$.

$\square$

Definición 3.53. *Sea A una $K-$álgebra. Para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, sea $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i^{m_i}$ la descomposición en indescomponibles con $M_i \ncong M_j$ para $i \neq j$. Se define el* ***rango de*** *M como $\mathrm{rk}(M) := \sum_{i=1}^{m} m_i$. Observe que, por el Teorema de Krull-Schmidt (ver 5.10), el rango de un módulo está bien definido.*

3.5. Existencia de *eiss* asociados a *ss*.

En esta sección probaremos la existencia de *eiss* asociados a los sistemas estratificantes. Para ello, usaremos la noción de extensión universal.

Teorema 3.54. *Sea A una $K-$álgebra y M, $N \in \mathrm{mod}(A)$ tales que $\mathrm{Ext}_A^1(M,N) \neq 0$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe una sucesión exacta corta que no se parte*

$$\eta_{M,N} : \ 0 \to N \to E \to M^d \to 0,$$

llamada ***extensión universal****, donde $d = \dim_K(\mathrm{Ext}_A^1(M,N))$; y tal que el morfismo de conexión $\delta : \mathrm{Hom}_A(M, M^d) \to \mathrm{Ext}_A^1(M,N)$, inducido por $\eta_{M,N}$, es suprayectivo.*

(b) *Si $\mathrm{Ext}_A^1(M,M) = 0$ entonces $\mathrm{Ext}_A^1(M,E) = 0$.*

Demostración. (a) Sean $\xi_i : 0 \to N \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} M \to 0$ tales que $\{[\xi_i]\}_{i=1}^{d}$ es una $K-$base de $\mathrm{Ext}_A^1(M,N) \neq 0$. Consideremos la sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$\xi := \bigoplus_{i=1}^{d} \xi_i : \ 0 \to N^d \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{d} E_i \xrightarrow{g} M^d \to 0,$$

donde $f := \begin{bmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_d \end{bmatrix}$ y $g := \begin{bmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_d \end{bmatrix}$. Haciendo push-out con f y el morfismo co-diagonal

$\kappa := [1_N, \ldots, 1_N] : N^d \to N$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
\xi_i : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\nu_i"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
\xi : 0 \arrow[r] & N^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\kappa"'] & \bigoplus_{i=1}^d E_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\nu"] & M^d \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & M^d \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

donde ι_i, ν_i y u_i denotan a la $i-$ésima inclusión correspondiente, en cada caso.

Ahora, dado que $\kappa\iota_i = 1_N$, el diagrama anterior, induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\xi_i : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, equal] & E_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\nu\nu_i"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\
\eta : 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f'"] & E \arrow[r, "g'"] & M^d \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\eta_{M,N} := \eta$ es la sucesión buscada. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ a la sucesión exacta η, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_A(M,E) \to \mathrm{Hom}_A(M,M^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_A(M,N).$$

Del diagrama anterior, se tiene que $\xi_i = \eta u_i = \delta(u_i)$ para cada i; esto es, cada elemento generador $[\xi_i]$ de $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ está en la imagen de δ. Por lo tanto δ es suprayectivo. En particular, dado que cada ξ_i no se escinde, se tiene que η tampoco se escinde.

(b) Supongamos que $\mathrm{Ext}^1_A(M,M) = 0$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ a la sucesión exacta $\eta_{M,N}$, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_A(M,M^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_A(M,N) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1_A(M,E) \to 0.$$

Como δ es suprayectivo, se sigue que $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$=Im(δ)=Ker(γ) y entonces Im(γ)=0. Por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_A(M,E) = 0$.

$\square$

Lema 3.55. *Sea A una $K-$álgebra y $M, N \in \mathrm{mod}(A)$, con N indescomponible y $\mathrm{Hom}_A(N,M) = 0$. Si $\xi : 0 \to N \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} M \to 0$ es una sucesión exacta que no se escinde, entonces ξ es isomorfa a la suma directa de una sucesión $0 \to N \to W' \to M' \to 0$ con una sucesión que se escinde, donde W' es indescomponible.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\mathrm{rk}(W)$.

Si $\mathrm{rk}(W) = 1$ entonces W es indescomponible y por lo tanto $\xi = \xi \oplus \tilde{0}$, donde

$\tilde{0}$ denota a la sucesión exacta cero.

Supongamos ahora que $\mathrm{rk}(W) > 1$. Sea $W = W_1 \oplus W_2$, con W_1 indescomponible. Consideremos, para cada $i = 1, 2,$ la proyección canónica $\pi_i : W \to W_i$ y la inclusión canónica $\iota_i : W_i \to W$. Definamos los morfismos $f_i := \pi_i f$ y $g_i := g\iota_i$ con $i = 1, 2$. Sea $h_i : \mathrm{Ker}(g_i) \to W_i$ la inclusión para cada $i = 1, 2$. Notemos que $g\iota_1 h_1 = 0$; luego por la propiedad universal del $\mathrm{Ker}(g)$, existe un único morfismo $\alpha : \mathrm{Ker}(g_1) \to N$ tal que $f\alpha{=}\iota_1 h_1$. Como $\iota_1 h_1$ es un monomorfismo, se tiene que α es un monomorfismo; y por lo tanto obtenemos la sucesión exacta $\gamma' :\ 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g_1) \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Coker}(\alpha) \longrightarrow 0$. Por otro lado, tenemos la sucesión exacta $\gamma'' :\ 0 \to \mathrm{Im}(g_1) \xrightarrow{j_1} M \xrightarrow{\psi} \mathrm{Coker}(g_1) \to 0,$

donde $j_1 : \mathrm{Im}(g_1) \to M$ es la inclusión.

Haciendo uso de las observaciones anteriores y del Lema de la Serpiente, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \gamma' & \gamma & \gamma'' & \\
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\xi' : & 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g_1) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & W_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\iota_1"] & \mathrm{Im}(g_1) \arrow[r] \arrow[d, "j_1"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_2"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
\xi'' : & 0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & W_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(g_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}
$$

Veamos que $\xi \cong \xi' \oplus \xi''$. Para ello es suficente probar que γ' y γ'' se escinden, pues el diagrama anterior conmuta y γ se escinde.

Probemos primero que γ' se escinde. Es claro que $\mathrm{Ker}(g_1) \cap \mathrm{Ker}(g_2) \subseteq W_1 \cap W_2 = 0$ y $\mathrm{Ker}(g_1) \oplus \mathrm{Ker}(g_2) \subseteq f(N)$. Veamos que $f(N) \subseteq \mathrm{Ker}(g_1) \oplus \mathrm{Ker}(g_2)$. En efecto, sea $f(n) = (n_1, n_2) \in W_1 \oplus W_2$, esto es, $n_i = \pi_i f(n)$ para cada $i = 1, 2$. Como $g_i \pi_i f \in \mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$ para cada i; se tiene que $g_1(n_1) = 0$ y $g_2(n_2) = 0$, de donde $f(n) \in \mathrm{Ker}(g_1) \oplus \mathrm{Ker}(g_2)$.

De lo anterior obtenemos que $N \cong f(N) = \mathrm{Ker}(g_1) \oplus \mathrm{Ker}(g_2)$. De ahí que

$$
\mathrm{Coker}(\alpha) \cong \frac{N}{\mathrm{Ker}(g_1)} \cong \frac{\mathrm{Ker}(g_1) \oplus \mathrm{Ker}(g_2)}{\mathrm{Ker}(g_1)} \cong \mathrm{Ker}(g_2);
$$

y por lo tanto γ' se escinde.

Ahora probemos que γ'' se escinde. Para ello, consideremos las sucesiones ξ y γ''. Usando los teoremas de isomorfismos obtenemos que

$$
M \cong (W_1 \oplus W_2)/N \cong (W_1/\mathrm{Ker}(g_1)) \oplus (W_2/\mathrm{Ker}(g_2)) \cong \mathrm{Im}(g_1) \oplus \mathrm{Im}(g_2).
$$

Luego, $\mathrm{Coker}(g_1) \cong \dfrac{M}{\mathrm{Im}(g_1)} \cong \dfrac{\mathrm{Im}(g_1) \oplus \mathrm{Im}(g_2)}{\mathrm{Im}(g_1)} \cong \mathrm{Im}(g_2)$, probándose que γ'' se escinde.

Ahora, dado que $N \cong \mathrm{Ker}(g_1) \oplus \mathrm{Ker}(g_2)$ es indescomponible, se sigue que $\mathrm{Ker}(g_1) = 0$ ó $\mathrm{Ker}(g_2) = 0$.

Si $\mathrm{Ker}(g_2) = 0$, ξ'' se escinde y ξ' es la otra sucesión deseada, pues W_1 es indescomponible.

Por otro lado, si $\mathrm{Ker}(g_1) = 0$, entonces ξ' se escinde y ξ'' no se escinde (pues $\xi \cong \xi' \oplus \xi''$ no se escinde). Dado que $N \cong \mathrm{Ker}(g_2)$, se sigue que $\mathrm{Ker}(g_2)$ es indescomponible y $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Ker}(g_2), M) = 0$. Además $\mathrm{rk}(W_2) = \mathrm{rk}(W) - 1$. Luego, aplicando la hipótesis de inducción a la sucesión ξ'', existe una sucesión exacta ζ que se escinde y una sucesión exacta $\zeta' : \ 0 \to \mathrm{Ker}(g_2) \to W'' \to M'' \to 0$ con W'' indescomponible tal que $\xi'' \cong \zeta \oplus \zeta'$. Finalmente, $\xi \cong (\xi \oplus \zeta) \oplus \zeta'$ es la descomposición deseada de ξ.

□

Teorema 3.56. ***(Existencia de eiss asociados a ss)*** *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t. Entonces existe $\underline{Y} = \{Y(i)\}_{i=1}^{t}$ en* $\mathrm{mod}(A)$ *tal que $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un eiss de talla t.*

Demostración. Por simplicidad asumimos que $\leq$ es el orden natural en $[1, t]$. Para probar el resultado, hay que construir una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$$

tal que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$ y $Y(i) \in \mathcal{I}(\Theta)$ con $Y(i)$ indescomponible.

Para $i = 1$, definimos $Y(1) := \Theta(1)$ y $Z(1) := 0$, los cuáles satisfacen las condiciones requeridas. Consideremos ahora i fijo con $1 < i \leq t$. Para cada $1 \leq k \leq i-1$, probaremos por inducción la existencia de una sucesión exacta que no se escinde $\xi_k : 0 \to \Theta(i) \to U_k \to V_k \to 0$, tal que U_k es indescomponible, $V_k \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : i-k \leq j < i\})$ y $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), U_k) = 0$ para $i-k \leq j \leq i$.

Sean $k = 1$, $N := \Theta(i)$ y $M := \Theta(i-1)$. Si $\mathrm{Ext}_A^1(M, N) = 0$, hacemos $U_1 := \Theta(i)$ y $V_1 := 0$. Por otro lado, si $\mathrm{Ext}_A^1(M, N) \neq 0$, tomamos la extensión universal $\varrho : \ 0 \to \Theta(i) \to U \to M^n \to 0$. Por 3.54 tenemos que $\mathrm{Ext}_A^1(M, U) = 0$, pues $\mathrm{Ext}_A^1(M, M) = 0$. Además, aplicando $\mathrm{Hom}_A(\Theta(i), -)$ a la sucesión exacta ϱ y usando que $0 = \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), \Theta(i)) = 0 = \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), M)$, obtenemos que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i), U) = 0$. Ahora como N es indescomponible, ϱ no se escinde y $\mathrm{Hom}_A(N, M) = 0$ (pues $i > i-1$); obtenemos, por 3.55, una sucesión exacta que no se escinde $\xi_1 : \ 0 \to \Theta(i) \to U_1 \to M^m \to 0$, con U_1 un sumando directo indescomponible de U y $m \leq n$. Para ver que ξ_1 satisface las condiciones deseadas, es suficiente ver que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), U_1) = 0$ para $i-1 \leq j < i$, lo cual se debe a que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), U) = 0$.

Sea $1 < k < i-1$. Supongamos por hipótesis de inducción, que hemos construido la sucesión exacta ξ_k. Construyamos la sucesión exacta ξ_{k+1}. Si $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i-k-1), U_k) = 0$, tomamos $\xi_{k+1} := \xi_k$. Si $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(i-k-1), U_k) \neq 0$, tomamos la extensión universal $\varrho' : \ 0 \to U_k \to U \to \Theta(i-k-1)^n \to 0$. Dado que $U_k \in \mathcal{F}(\{\Theta(\lambda) : i-k \leq \lambda \leq i\})$, por 3.11 obtenemos que $\mathrm{Hom}_A(U_k, \Theta(i-k-1)^n) = 0$. Luego, por 3.55 existe una sucesión exacta que no se escinde $0 \to U_k \to U_{k+1} \to \Theta(i-k-1)^b \to 0$, tal que U_{k+1} es un sumando directo indescomponible de U_k y $b \leq n$.

Haciendo un push-out de dicha sucesión y ξ_k, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \Theta(i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Theta(i) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & U_k \arrow[r] \arrow[d] & U_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & \Theta(i-(k+1))^b \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & V_k \arrow[r] \arrow[d] & V_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & \Theta(i-(k+1))^b \arrow[r] & 0. \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Como la sucesión ξ_k no se escinde, se tiene que la sucesión exacta

$$\xi_{k+1} : 0 \to \Theta(i) \to U_{k+1} \to V_{k+1} \to 0$$

tampoco se escinde. Ahora, dado que $\mathcal{F}(\Theta)$ es cerrado por extensiones, se tiene que $V_{k+1} \in \mathcal{F}(\{\Theta(r) : i-k \leq r < i\})$. Finalmente, para probar que ξ_{k+1} es la sucesión deseada, resta probar que $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), U_{k+1}) = 0$ para $i-k-1 \leq j \leq i$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), -)$, para $i-k \leq j \leq i$, a la sucesión exacta $0 \to U_k \to U_{k+1} \to \Theta(i-k-1)^b \to 0$ obtenemos la sucesión exacta $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), U_k) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), U_{k+1}) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), \Theta(i-k-1))^b = 0$. Por hipótesis de inducción $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), U_k) = 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), U_{k+1}) = 0$ para $i-k \leq j \leq i$.

Ahora, como $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(i-k-1), \Theta(i-k-1)) = 0$, tenemos por 3.54 que $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(i-k-1), U) = 0$. De aquí es inmediato que $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(i-k-1), U_{k+1}) = 0$. Finalmente para cada $i \in [1, t]$ definimos $Y(i) := U_{i-1}$, que son indescomponibles; y $Z(i) := V_{i-1} \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j < i\})$. Veamos que $\mathrm{Ext}^1_A(-, Y)|_{\mathcal{F}(\Theta)} = 0$. En vista de 1.49 (a) y de que $Y := \bigoplus_{i=1}^t Y(i)$; es suficiente probar que $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), Y(i)) = 0$ para cada $i, j \in [1, t]$. Hemos probado arriba esta igualdad para $j \leq i$. Veamos que también se cumple para $i \leq j$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), -)$ a la sucesión exacta $\xi_{i-1} : 0 \to \Theta(i) \to Y(i) \to Z(i) \to 0$, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), \Theta(i)) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), Y(i)) \to \mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), Z(i)).$$

Por hipótesis $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$, pues $j \geq i$. Por otro lado, por 3.10 (b) $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), Z(i)) = 0$, ya que $Z(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(\lambda) : \lambda < i\})$ y $i \leq j$. Por lo tanto,

$\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), Y(i)) = 0$ para cada $i, j \in [1, t]$.

□

Teorema 3.57. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe un único (salvo isomorfismos) eiss $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ asociado a $(\Theta, \leq)$.*

(b) *$\mathcal{F}(\Theta)$ es cerrada por sumandos directos.*

(c) *Para $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$ existe una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Theta)$*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon_M} I_\Theta(M) \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

tal que $\varepsilon_M : M \to I_\Theta(M)$ es una envolvente $\Theta-$inyectiva, $\max(M') < \max(M)$ y $I_\Theta(M) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j \leq \max(M)} Y(j))$.

Demostración. (a) Es consecuencia de 3.56 y 3.28.
(b) Usando 3.56 obtenemos un *eiss* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t asociado al *ss* $(\Theta, \leq)$. Luego, por 3.49 (b), se tiene que $\mathcal{F}(\Theta)$ es cerrada por sumandos directos.
(c) Es inmediato de (b), 3.35 y 1.37.

□

Observación 3.58. *Como aplicación de la teoría desarrollada, podemos obtener una prueba independiente de 2.26 a la dada en [25, Lemma 4.2, Lemma 4.4] y [2, Theorem 2.6, Lemma 2.5].*

Teorema 3.59. *Sean A una $K-$álgebra y ${}_A\Delta = \{{}_A\Delta(i)\}_{i=1}^n$ definidos con un orden lineal $\leq$ en $[1, n]$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *$({}_A\Delta, \leq)$ es un ss de talla n.*

(b) *Existe un único eiss $({}_A\Delta, \underline{T}, \leq)$ asociado a $({}_A\Delta, \leq)$.*

(c) *Si $(A, \leq)$ es una ss$-$álgebra, entonces T es un $A-$módulo inclinante generalizado.*

Demostración. (a) Es una consecuencia de 2.10 y 2.9.
(b) Se sigue de (a) y 3.56.
(c) De (b) se tiene el *eiss* $({}_A\Delta, \underline{T}, \leq)$ de talla n. Dado que ${}_AA$ es una $ss-$álgebra, ${}_AA \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Luego, por el Lema 3.36, tenemos la sucesión exacta $0 \to_A A \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to 0$ con $T_j \in \mathrm{add}(T)$ para todo j.

Por 3.51 $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta)$. En particular $T \in \mathcal{F}({}_A\Delta) \cap \mathcal{I}({}_A\Delta)$; luego aplicando 2.20 concluimos que $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$ para todo $1 \leq i \in \mathbb{N}$. Finalmente, por 4.14, se tiene que $\mathrm{pd}(T) < \infty$.

$\square$

Teorema 3.60. *Sea A una $K-$álgebra básica, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $B := \mathrm{End}({}_AY)$. *Sea ${}_BT$ el $B-$módulo inclinante característico asociado a la ss-álgebra $(B, \leq^{op})$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* $t = \mathrm{rk}({}_AA)$ *(ver 3.53).*

(b) $\mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta) = \mathrm{add}({}_AA)$.

(c) $A \cong \mathrm{End}({}_BY)$ *y* ${}_BT_{A^{op}} \cong {}_BY_{A^{op}}$.

(d) $(A, \leq)$ *es una ss-álgebra y* ${}_A\Delta(i) \cong \Theta(i)$, *para cada* $i \in [1,t]$.

(e) ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* ${}_AY$ *es un $A-$módulo inclinante generalizado.*

(f) $\mathcal{F}(\Theta)$ *es resolvente.*

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) De (a) y 3.51 (b), se tiene que $\mathrm{add}({}_AA) \subseteq \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta) = \mathrm{add}(G({}_BT))$. Luego $\mathrm{rk}({}_AA) = t = \mathrm{rk}(G({}_BT))$; y dado que A es básica, concluimos que $\mathrm{add}({}_AA) = \mathrm{add}(G({}_BT)) = \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$.
(b)$\Rightarrow$(c) Supongamos que $\mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta) = \mathrm{add}({}_AA)$. Luego, por 3.51 (b), se tiene que $\mathrm{add}(G({}_BT)) = \mathrm{add}({}_AA)$. Como $G({}_BT)$ y ${}_AA$ son básicos, aplicando 3.52 tenemos que ${}_AA \cong G({}_BT)$. Entonces, ${}_BY \cong \mathrm{Hom}_A(A,Y) = F({}_AA) \cong FG({}_BT) \cong {}_BT$; y por lo tanto, $A \cong \mathrm{End}({}_AA)^{op} \cong G({}_BT) \cong G({}_BY) := \mathrm{End}({}_BY)$.
(c)$\Rightarrow$(d) Por 3.4 y 3.16, se tiene que $({}_B\Delta, {}_B\underline{T}, \leq^{op})$ es un eiss de talla t en $\mathrm{mod}(B)$. Sea $A' := \mathrm{End}({}_BT)$. Luego, por 3.16 $(A', \leq)$ es una ss-álgebra con ${}_{A'}P(i) := \mathrm{Hom}_B(T(i), T)$ y ${}_{A'}\Delta(i) \cong \mathrm{Hom}_B({}_B\Delta(i), {}_BT)$. Supongamos que $A \cong \mathrm{End}({}_BY)$ y ${}_BT_{A^{op}} \cong {}_BY_{A^{op}}$. Por lo tanto $A \cong \mathrm{End}({}_BY) \cong \mathrm{End}({}_BT) =: A'$, esto es, $A \cong A'$. Entonces, se tiene que ${}_BY_{A^{op}} \cong {}_BT_{A^{op}} \cong {}_BT_{A'^{op}}$. De ahí que, $\Theta(i) \cong G({}_B\Delta(i)) = \mathrm{Hom}_B({}_B\Delta(i), {}_AY_{B^{op}}) \cong \mathrm{Hom}_B({}_B\Delta(i), {}_BT_{A'^{op}}) =: {}_{A'}\Delta(i) \cong {}_A\Delta(i)$. Por lo tanto, $(A, \leq) \cong (A', \leq)$ es una ss-álgebra y ${}_A\Delta(i) \cong \Theta(i)$ para cada $i \in [1,t]$.
(d)$\Rightarrow$(e) Supongamos que $(A, \leq)$ es una $ss-$álgebra y ${}_A\Delta(i) \cong \Theta(i)$ para cada $i \in [1,t]$. En particular, se tiene que ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$. Veamos que ${}_AY$ es un $A-$módulo inclinante generalizado.

En vista de 2.24, sea ${}_AT$ el módulo inclinante asociado a $(A, \leq)$. Por 3.4, $({}_A\Delta, \underline{T}, \leq)$ es un eiss de talla t. Como ${}_A\Delta(i) \cong \Theta(i)$ para cada $i \in [1, t]$, podemos pensar que ${}_A\Delta = \Theta$. Entonces $({}_B\Delta, \underline{T}, \leq) \cong (\Theta, \underline{Y}, \leq)$; y por lo tanto ${}_AT \cong {}_AY$.
(e)$\Rightarrow$(a) Por (e), sólo nos resta ver que $t = \mathrm{rk}({}_AA)$. Como ${}_AY$ es un $A-$módulo inclinante generalizado, se sabe que $\mathrm{rk}({}_AY) = \mathrm{rk}({}_AA)$ pues ${}_AA$ es básico; y además por 3.14, se tiene que $\mathrm{rk}({}_AY) = t$. De donde $t = \mathrm{rk}({}_AA)$
(d)$\Rightarrow$(f) De las hipótesis se sigue que $\mathcal{F}(\Theta) = \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Como $(A, \leq)$ es una ss-álgebra, se tiene que $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ es resolvente. De donde, $\mathcal{F}(\Theta)$ también lo es.
(f)$\Rightarrow$ (b) Como $\mathcal{F}(\Theta)$ es resolvente, se tiene que $\mathrm{add}(A) = \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$.

Ahora, sean $M \in \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta)$ y $\epsilon_M : P_0(M) \to M$ la cubierta proyectiva de M. Como $\mathcal{F}(\Theta)$ es resolvente, tenemos que

$$\xi : 0 \to \mathrm{Ker}(\epsilon_M) \to P_0(M) \stackrel{\epsilon_M}{\to} M \to 0$$

es una sucesión exacta en $\mathcal{F}(\Theta)$. Ahora, como $M \in \mathcal{P}(\Theta)$, se sigue que la sucesión ξ se escinde; y con ello M es proyectivo. Por lo tanto, $\mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta) \subseteq \mathrm{add}(A)$.

$\square$

Corolario 3.61. *Sea $(A, \leq)$ una ss$-$álgebra básica, ${}_AT$ el módulo inclinante característico asociado a $(A, \leq)$. Si $C := \mathrm{End}({}_AT)$ y ${}_CT'$ es el módulo inclinante característico asociado a la ss$-$álgebra $(C, \leq^{op})$, entonces $A \cong \mathrm{End}({}_CT')$ y ${}_CT'_{A^{op}} \cong {}_CT_{A^{op}}$.*

Demostración. El resultado es inmediato de 3.60 (c) y (d), tomando $(\Theta, \underline{Y}, \leq) := ({}_A\Delta, \underline{{}_AT}, \leq)$.

$\square$

Definición 3.62. *Sea A una $K-$álgebra, $\leq$ un orden lineal en $[1, t]$ y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en $\mathrm{mod}(A)$. Diremos que $(\Theta, \leq)$ es un **ss estándar** si ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$. Dualmente, diremos que $(\Theta, \leq)$ es **ss co-estándar** si $D(A_A) \in \mathcal{F}(\Theta)$.*

Ejemplo 3.63. *Consideremos $A = KQ/I$, con K algebraicamente cerrado, donde*

$$Q = 3 \stackrel{\alpha}{\to} 1 \stackrel{\beta}{\leftarrow} 2 \stackrel{\gamma}{\leftarrow} 4$$

e I es el ideal admisible en KQ generado por $\beta\gamma$.

Tomando $\Theta(1) := S(1) = {}_A\Delta(1) = P(1)$, $\Theta(2) := {}_A\Delta(2)$, $\Theta(3) := {}_A\Delta(3) = P(3)$, $\Theta(4) := {}_A\Delta(4) = P(4) = I(2)$ y $\Theta(5) := S(4)$; obtenemos el ss $(\Theta, \leq)$ ($\leq$ es el orden natural) de talla 5 ; y que resulta ser estándar. Por otro lado, tenemos que $(A, \leq)$ es una ss-álgebra y $({}_A\Delta, \leq)$ es un ss de talla 4.

3.6. Dualidad y sistemas estratificantes.

En lo que sigue, usaremos la dualidad usual $D_A := \mathrm{Hom}_K(-, K) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$. Algunas propiedades de la dualidad, que usaremos a continuación, se pueden ver en el apéndice 5.9.

Proposición 3.64. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $(D_A(\Theta), \leq^{op})$ *es un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

(b) $D_A(\mathcal{F}(\Theta)) = \mathcal{F}(D_A(\Theta))$.

(c) $D_A(\mathcal{P}(\Theta)) = \mathcal{I}(D_A(\Theta))$ *y* $D_A(\mathcal{I}(\Theta)) = \mathcal{P}(D_A(\Theta))$.

Demostración. (a) El resultado se sigue de aplicar 5.89 a las hipótesis y del hecho de que $i \leq j$ si y sólo si $j \leq^{op} i$.
(b) Por 3.15, se tiene que $D_A(\mathcal{F}(\Theta)) \subseteq \mathcal{F}(D_A(\Theta))$. Aplicando de nuevo el argumento anterior, se tiene que $D_{A^{op}}(\mathcal{F}(D_A(\Theta))) \subseteq \mathcal{F}(D_{A^{op}} D_A(\Theta))$; y además $\mathcal{F}(D_{A^{op}} D_A(\Theta)) = \mathcal{F}(\Theta)$ pues $D_{A^{op}} D_A(\Theta(i)) \cong \Theta(i)$ para cada i. Por lo tanto $\mathcal{F}(D_A(\Theta)) = D_A D_{A^{op}}(\mathcal{F}(D_A(\Theta))) \subseteq D_A(\mathcal{F}(\Theta))$. De donde se concluye que $\mathcal{F}(D_A(\Theta)) = D_A(\mathcal{F}(\Theta))$.
(c) Veamos que $D_A(\mathcal{P}(\Theta)) = \mathcal{I}(D_A(\Theta))$, la otra igualdad de (c) se prueba análogamente. Por 5.89, se tiene que $\mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(-, D_A(M), -)|_{D_A(\mathcal{F}(\Theta))} = 0$. Luego, por (b), concluimos que $D_A(\mathcal{P}(\Theta)) = \mathcal{I}(D_A(\Theta))$.

$\square$

Como consecuencia de la proposición anterior y de las propiedades de la dualidad (ver 5.89) tenemos lo siguiente.

Proposición 3.65. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ un epss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $\delta_A := D_{A^{op}} D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A)$ la autoequivalencia usual de categorías. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $(D_A(\Theta), D_A(\underline{Q}), \leq^{op})$ *es un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

(b) $(\delta_A(\Theta), \delta_A(\underline{Q}), \leq)$ *es un epss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, *el cual es isomorfo a* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$.

(c) $\mathcal{F}(\Theta) = \mathcal{F}(\delta_A(\Theta))$ *y* $\mathcal{P}(\Theta) = \mathcal{P}(\delta_A(\Theta))$.

Demostración. (a) Dado que

$$\mathrm{Hom}_{A^{op}}(D_A(\Theta(j)), D_A(\Theta(i))) \cong \mathrm{Hom}_A(\Theta(i), \Theta(j)) = 0$$

para $i > j$, obtenemos la condición 3.3 (a). Usando ahora que

$$\mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(D_A(M), D_A(N)) \cong \mathrm{Ext}^1_A(N, M),$$

para cada N, $M \in \mathrm{mod}(A)$, se obtiene 3.3 (c).

Ahora, veamos que la familia $D_A(\underline{Q})$=$\{D_A(Q(i))\}_{i=1}^t$ satisface 3.3 (b). Sea $i \in [1,t]$ y $\xi : 0 \to K(i) \to Q(i) \to \Theta(i) \to 0$ con $K(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$ (ver 3.5 (b)). Dado que $D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$ es una equivalencia exacta y $K(i) \in \mathcal{F}(\{\Theta(j) : j > i\})$; aplicando sucesivamente dicho funtor en cada sucesión exacta (determinada por la $\Theta-$filtración de $K(i)$), se concluye que $D_A(K(i)) \in \mathcal{F}(\{D_A(\Theta(j)) : j \leq^{op} i\})$, y además que $D_A(\xi) : 0 \to D_A(\Theta(i)) \to D_A(Q(i)) \to D_A(K(i)) \to 0$ es exacta en $\mathcal{F}(D_A(\Theta))$.
(b) Como $D_{A^{op}} : \mathrm{mod}(A^{op}) \to \mathrm{mod}(A)$ es una dualidad exacta, con cuasi-inverso $D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$; y que $(D_A(\Theta), D_A(\underline{Q}), \leq^{op})$ es un eiss en $\mathrm{mod}(A^{op})$, se tiene análogamente (como se hizo en (a)) que $(\delta_A(\Theta), \delta_A(\underline{Q}), \leq)$ es un epss en $\mathrm{mod}(A)$. Ahora bien, dado que existe un isomorfismo natural $j : 1_{\mathrm{mod}(A)} \to \delta_A$, se tiene que $f := \{f_1(i), f_2(i)\}_{i=1}^t : (\Theta, \underline{Q}, \leq) \to (\delta_A(\Theta), \delta_A(\underline{Q}), \leq)$ es un isomorfismo de eiss, donde $f_1(i) := j_{\Theta(i)}$ t $f_2(i) := j_{Q(i)}$, para cada $i \in [1,t]$.
(c) Es inmediato del hecho que $\delta_A(X) \cong X$ para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$.

□

Proposición 3.66. *Sea A una $K-$álgebra, $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $\delta_A := D_{A^{op}} \circ D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A)$ la autoequivalencia usual de categorías. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $(D_A(\Theta), D_A(\underline{Y}), \leq^{op})$ *es un epss de talla t en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

(b) $(\delta_A(\Theta), \delta_A(\underline{Y}), \leq)$ *es un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$, *el cual es isomorfo a* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$.

(c) $\mathcal{F}(\Theta) = \mathcal{F}(\delta_A(\Theta))$ *y* $\mathcal{I}(\Theta) = \mathcal{I}(\delta_A(\Theta))$

Demostración. Es similar a 3.65.

□

Corolario 3.67. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Existe un único (salvo isomorfismos) epss $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ asociado a $(\Theta, \leq)$.*

(b) *Para cada* $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$ *existe una sucesión exacta* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P_\Theta(M) \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0$ *en* $\mathcal{F}(\Theta)$ *tal que* $\pi_M : P_\Theta(M) \longrightarrow M$ *es la cubierta* $\Theta-$*proyectiva,* $\min(M) < \min(M')$ *y* $P_\Theta(M) \in \mathrm{add}(\bigoplus_{j \geq \min(M)} Q(j))$.

Demostración. Se sigue de 3.64, 3.66 y 3.57.

□

Corolario 3.68. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Consideremos el eiss* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *asociado a* $(\Theta, \leq)$ *(ver 3.56) y el epss* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *asociado a* $(\Theta, \leq)$ *(ver 3.67). Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $P_\Theta(\Theta(i)) \cong Q(i)$ *y* $I_\Theta(\Theta(i)) \cong Y(i)$ *para cada* $i \in [1, t]$.

(b) $(D_A(\Theta), D_A(\underline{Y}), \leq^{op})$ *y* $(D_A(\Theta), D_A(\underline{Q}), \leq^{op})$ *son el epss y eiss asociados, respectivamente, al ss* $(D_A(\Theta), \leq^{op})$ *en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

Demostración. (a) Por 3.16, el monomorfismo $\alpha_i : \Theta(i) \to Y(i)$ es una $\mathcal{I}(\Theta)$-aproximación minimal a izquierda de $\Theta(i)$; y además, como $\mathrm{Coker}(\alpha_i) = Z(i) \in \mathcal{F}(\Theta)$, se tiene que $\alpha_i : \Theta(i) \to Y(i)$ es una envolvente Θ-inyectiva de $\Theta(i)$. De donde concluimos que $\mathcal{I}_\Theta(\Theta(i)) \cong Y(i)$ para cada $i \in [1, t]$.

Análogamente se prueba que $\beta_i : Q(i) \to \Theta(i)$, de 3.5(b), es una cubierta Θ-proyectiva de $\Theta(i)$.
(b) Es inmediato de 3.65 (a) y 3.66 (a).

□

Corolario 3.69. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *un epss de talla* t *y* $f : M \to N$ *un epimorfismo en* $\mathcal{F}(\Theta)$. *Entonces* $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{F}(\Theta)$ *si y sólo si* $\mathrm{Ext}^1_A(Q(\lambda), \mathrm{Ker}(f)) = 0$, *para cada* $\lambda \in [1, t]$.

Demostración. Como $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ es un epss de talla t en $\mathrm{mod}(A)$, aplicando la dualidad usual tenemos que $(D_A(\Theta), \mathcal{D}_A(\underline{Q}), \leq^{op})$ es un eiss de talla t en $\mathrm{mod}(A^{op})$ y que $D_A(f) : D_A(N) \to D_A(M)$ es un monomorfismo en $\mathcal{F}(D_A(\Theta))$. Luego, por 3.47 y 5.89 tenemos que $D_A(\mathrm{Ker}(f)) \cong \mathrm{Coker}(D_A(f) \in \mathcal{F}(D_A(\Theta))$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^1_A(Q_(\lambda), \mathrm{Ker}(f)) \cong \mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(\mathrm{Coker}(D_A(f)), D_A(Q(\lambda))) = 0$. El resultado se tiene de lo anterior.

□

Capítulo 4

Sistemas estratificantes y homología.

En este capítulo veremos que dado un eiss $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t en $\operatorname{mod}(A)$, la categoría $\mathcal{F}(\Theta)$ resulta ser funtorialmente finita; así como de obtener algunas condiciones para que el módulo Y sea inclinante y $t \leq n$; donde n es el número de simples salvo isomorfismos en $\operatorname{mod}(A)$.

Además veremos algunas de las aplicaciones de los sistemas estratificantes; por ejemplo, para obtener información sobre las dimensiones globales y finitistas de una $K-$álgebra A.

4.1. $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita.

En [20], C. M. Ringel probó que si $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ es una familia de objetos en $\operatorname{mod}(A)$ y $\leq$ es un orden lineal en $[1, t]$, que satisfacen la condición 3.1 (b), entonces la categoría $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita. En particular, para un $(\Theta, \leq)$ *ss* de talla t en $\operatorname{mod}(A)$, se tiene que $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita.

En esta sección, veremos éste y otros resultados relacionados que se encuentran en [20].

Lema 4.1. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$. *Si $\xi: \ 0 \to Y \to X \xrightarrow{\gamma} M \to 0$ en una sucesión exacta en* $\operatorname{mod}(A)$ *con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$, entonces γ es una $\mathcal{X}-$aproximación a derecha de M.*

Demostración. Sea $\gamma' : X' \to M$ un morfismo en $\mathcal{X}$. Haciendo pull-back, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en $\operatorname{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
\xi\gamma' : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 \\
\xi : 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \arrow[r, "\gamma"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Como $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$, tenemos que $\xi\gamma'$ se escinde, lo cual es equivalente a que γ' se factorice a través de γ (ver 5.50).

□

Lema 4.2. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones. Si para cada $N \in$* $\mathrm{mod}(A)$ *existe una sucesión exacta $0 \to N \to Y \to X \to 0$ con $X \in \mathcal{X}$ y $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$, entonces $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(A)$.

Demostración. Sean $M \in \mathrm{mod}(A)$ y $M' := \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(M)$. Dado que M' es finitamente generado, existen morfismos $p_i : X_i \to M$ con $X_i \in \mathcal{X}$ y $1 \leq i \leq s$ tales que M' está generado por las imágenes de estos morfismos. Así, obtenemos los morfismos $j_i p_i : X_i \to M'$, donde $j_i : \mathrm{Im}(p_i) \to M'$ es la inclusión correspondiente. Ahora, como $\mathcal{X}$ es cerrada por sumas directa finitas, tenemos que $X := \bigoplus_{i=1}^{s} X_i \in \mathcal{X}$. Luego, por la propiedad universal de la suma directa, existe un morfismo $p : X \to M'$, tal que $p_{|X_i} = j_i p_i$ para cada i. Observemos que p es un epimorfismo pues $M' = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Im}(p_i)$. Por lo tanto se tiene la sucesión exacta $\mu :\ 0 \to \mathrm{Ker}(p) \to X \xrightarrow{p} M' \to 0$.

Por otro lado, de las hipótesis, se tiene la sucesión exacta

$$\nu :\ 0 \to \mathrm{Ker}(p) \xrightarrow{r} Y_0 \to W \to 0,$$

con $W \in \mathcal{X}$ y $Y_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Haciendo push-out, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\mu : 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(p) \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & Y_0 \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & W \arrow[r] & 0 \\
 & M' \arrow[r, equal] \arrow[d] & M' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0. & &
\end{tikzcd}$$

Dado que $Y_0 \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $Z \in \mathcal{X}$ (pues $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones); se sigue de 4.1 (a), que $\gamma : Z \to M'$ es una $\mathcal{X}-$aproximación a derecha de M'.

Finalmente, tomando la inclusión $\iota : M' \to M$, veamos que $\iota\gamma : Z \to M$ es una $\mathcal{X}-$aproximación a derecha de M. En efecto, sean $C \in \mathcal{X}$ y $g : C \to M$. Entonces $\mathrm{Im}(g) \subseteq M'$ pues $M' = \mathrm{Tr}_{\mathcal{X}}(M)$. Por lo tanto, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\gamma"] & M' \arrow[r, "\iota"] & M \\ & \mathrm{Im}(g) \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "k"] & C, \arrow[l, "g'"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

donde j, ι, k son las correspondientes inclusiones, $g = kg'$ y $k = \iota j$. Consideremos el morfismo $jg' : C \to Z$. Como γ es una $\mathcal{X}-$aproximación a derecha de M', existe un morfismo $\beta : C \to Z$ tal que $jg' = \gamma\beta$. Por lo tanto, $(\iota\gamma)\beta = \iota(jg') = (\iota j)g' = kg' = g$.

$\square$

Lema 4.3. *Sea A una $K-$álgebra, $1 \leq k \leq t$ y $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos en $\mathrm{mod}(A)$ tales que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ para cada $j \geq i$. Si $N \in \mathrm{mod}(A)$ y $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), N) = 0$ para cada $j > k$, entonces existe una sucesión exacta $0 \to N \to N' \to Q \to 0$ tal que $Q \in \mathrm{add}(\Theta(k))$ y $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), N') = 0$ para cada $j \geq k$.*

Demostración. Siguiendo la prueba de 3.54 (ver la sección 3.5), se construye la extensión universal $\varrho :\ 0 \to N \to N' \to Q \to 0$ con $Q \in \mathrm{add}(\Theta(k))$. Observe que en este caso ϱ podría partirse. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(\Theta(j), -)$ a la sucesión ϱ, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\xi :\ \mathrm{Hom}_A(\Theta(j), Q) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), N) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), N') \to 0,$$

pues $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), Q) = 0$; y con el morfismo de conexión δ suprayectivo (por 3.54).

Ahora sea $j \geq k$. Veamos que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(k), N') = 0$. Si $j = k$, se tiene en la sucesión exacta ξ que $\mathrm{Ker}(\gamma) = \mathrm{Ext}_A^1(\Theta(k), N)$, pues δ es suprayectivo; y por lo tanto $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(k), N') = \mathrm{Im}(\gamma) = 0$. Si $j > k$, el resultado es inmediato ya que por hipótesis $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), N) = 0$ y además dado que $Q \in \mathrm{add}(k)$ y $k < j$ se tiene que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), Q) = 0$ en ξ.

$\square$

Lema 4.4. *Sean A una $K-$álgebra, y $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ una familia de objetos en $\mathrm{mod}(A)$ tales que $\mathrm{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ para cada $j \geq i$. Si $N \in \mathrm{mod}(A)$,*

$\ell \in [1,t]$ *y* $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N) = 0$ *para cada* $j > \ell$*, entonces existe una sucesión exacta* $0 \to N \to Y \to X \to 0$ *tal que* $X \in \mathcal{F}(\{\Theta(k) : k \leq \ell\})$ *y* $Y \in \mathcal{I}(\Theta)$.

Demostración. Supongamos primero que $\ell = 1$. Por 4.3 se tiene la sucesión exacta $0 \to N \stackrel{f_1}{\to} N_1 \to X_1 \to 0$ con $X_1 \in \mathrm{add}(\Theta(1)) = \mathcal{F}(\{\Theta(1)\})$ y $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N_1) = 0$ para cada $j \geq 1$ por lo tanto $N_1 \in \mathcal{I}(\Theta)$.

Supongamos ahora que $\ell \neq 1$. Entonces, existe $i \in [0, t-1]$ tal que $\ell = t - i$. Por 4.3, existe una sucesión exacta $0 \to N \stackrel{f_\ell}{\to} N_\ell \to X_\ell \to 0$ con $X_\ell \in \mathrm{add}(\Theta(\ell))$ y $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N_\ell) = 0$ para cada $j \geq \ell$; esto es, para $j > \ell - 1$.

Ahora, N_ℓ satisface las hipótesis de 4.3, así que existe una sucesión exacta $0 \to N_\ell \to N_{\ell-1} \to X_{\ell-1} \to 0$ con $X_{\ell-1} \in \mathrm{add}(\Theta(\ell-1))$ y $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N_{\ell-1}) = 0$ para cada $j > \ell - 2$.

Haciendo lo mismo para cada $r \in [0, \ell-1]$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to N_{\ell-r+1} \stackrel{f_{\ell-r}}{\to} N_{\ell-r} \to X_{\ell-r} \to 0$$

con $N_{\ell+1} := N$ y $Y := N_1$; tal que $X_{\ell-r} \in \mathrm{add}(\Theta(\ell-r))$, $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N_{\ell-r}) = 0$ para $j > \ell - r - 1$ y

Sea $f := f_1 f_2 \cdots f_{\ell-1} f_\ell : N \to Y$. Este morfismo es una composición de monomorfismos y por lo tanto un monomorfismo. Así que tenemos la sucesión exacta $\xi :\ 0 \to N \stackrel{f}{\to} Y \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$.

Veamos que ξ es la sucesión exacta buscada. Dado que $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), N_1) = 0$ para cada $j \geq 1$, se tiene que $Y := N_1 \in \mathcal{I}(\Theta)$. Así que sólo nos resta ver que $\mathrm{Coker}(f) \in \mathcal{F}(\{\Theta(k) : k \leq \ell\})$.

$$\begin{tikzcd}
\xi :\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f_\ell"] \arrow[d, "\cong"'] & N_\ell \arrow[r, "f_{\ell-1}"] \arrow[d, "\cong"'] & N_{\ell-1} \arrow[r, "f_{\ell-2}"] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots N_2 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\cong"'] & Y \\
& f_\ell(N) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & f_{\ell-1}(N_\ell) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & f_{\ell-2}(N_{\ell-1}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & \cdots f_1(N_2) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Para cada $r \in [0, \ell-1]$, se tiene que $N \cong f_{\ell-r} f_{\ell-r-1} \cdots f_\ell(N) \subseteq N_{\ell-r}$ y $N_{\ell-r+1} \cong f_{\ell-r}(N_{\ell-r+1}) \subseteq N_{\ell-r}$. De manera que si identificamos a cada $N_{\ell-r+1}$ con $f_{\ell-r}(N_{\ell-r+1})$; podemos suponer que $N_{\ell-r} \subseteq N_{\ell-r-1}$.

Entonces $0 \subseteq N_\ell/N \subseteq N_{\ell-1}/N \subseteq \cdots N_1/N = Y/N$ es una $\{\Theta(k) : k \leq \ell\}-$filtración de Y/N, pues $(N_{\ell-r}/N)/(N_{\ell-r+1}/N) \cong N_{\ell-r}/N_{\ell-r+1} \cong X_{\ell-r} \in \mathrm{add}(\Theta(\ell-r))$ para cada $r \in [0, \ell-1]$. Por lo tanto, $\mathrm{Coker}(f) \cong Y/N \in \mathcal{F}(\{\Theta(k) : k \leq \ell\})$.

□

Corolario 4.5. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ *una familia de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *tales que* $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para cada* $j \geq i$*. Entonces, para* *cada* $N \in \text{mod}(A)$ *existe una sucesión exacta* $0 \to N \to Y \to X \to 0$ *tal que* $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* $Y \in \mathcal{I}(\Theta)$.

Demostración. Es inmediato de 4.4, tomando $\ell := t$, ya que la condición en 4.4 para $j > t$ es vacía.

□

Corolario 4.6. *Sean* A *una* $K-$*álgebra,* $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *una familia de objetos en* $\text{mod}(A)$ *tales que* $\text{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para cada* $j \geq i$. *Entonces, para cada* $N \in \text{mod}(A)$, *existe una sucesión exacta* $0 \to X \to Z \to N \to 0$ *en* $\text{mod}(A)$, *tal que* $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* $Z \in \mathcal{P}(\Theta)$.

Demostración. Se sigue de 4.5 por dualidad.

Proposición 4.7. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $\Theta := \{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ *una familia de objetos en* $\text{mod}(A)$ *tal que* $\text{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para cada* $j \geq i$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{I}(\Theta)$ *es covariantemente finita en* $\text{mod}(A)$.

(a) $\mathcal{P}(\Theta)$ *es contravariantemente finita en* $\text{mod}(A)$.

Demostración. (a) Sea $N \in \text{mod}(A)$. Por 4.5, existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to N \xrightarrow{\beta} Y \to X \to 0,$$

tal que $X \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $Y \in \mathcal{I}(\Theta)$. Ahora, como $\text{Ext}_A^1(X, Y') = 0$ para cada $Y' \in \mathcal{I}(\Theta)$, usando la versión dual de 4.1 concluimos que β es una $\mathcal{I}(\Theta)-$aproximación a izquierda de N.
(b) Es similar a la prueba de (a), por dualidad.

□

Teorema 4.8. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $\Theta := \{\Theta(i) : i \in [1, t]\}$ *una familia de objetos en* $\text{mod}(A)$ *tal que* $\text{Ext}_A^1(\Theta(j), \Theta(i)) = 0$ *para* $j \geq i$. *Entonces* $\mathcal{F}(\Theta)$ *es funtorialmente finita en* $\text{mod}(A)$.

Demostración. Por 4.5 y 4.2, se tiene que $\mathcal{F}(\Theta)$ es contravariantemente finita. Usando 4.6 y dualizando 4.2, se tiene que $\mathcal{F}(\Theta)$ es covariantemente finita.

□

Como consecuencia de 4.5 y 4.6, se tiene lo siguiente.

Proposición 4.9. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, existen sucesiones exactas en* $\mathrm{mod}(A)$

$$0 \to M \to Y_M \to Z_M \to 0 \ \ y \ \ 0 \to K_M \to Q_M \to M \to 0,$$

tales que $Y_M \in \mathcal{I}(\Theta), Q_M \in \mathcal{P}(\Theta)$ y $Z_M, K_M \in \mathcal{F}(\Theta)$.

$\square$

La siguiente proposición es el conocido Lema de Wakamatsu.

Proposición 4.10. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si $f : X \to C$ es una $\mathcal{X}-$aproximación minimal a derecha de C, entonces* $\mathrm{Ker}(f) \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$.

(b) *Si $g : C \to X$ es una $\mathcal{X}-$aproximación minimal a izquierda de C, entonces* $\mathrm{Coker}(g) \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Demostración. Probaremos solamente el inciso (a), ya que la prueba de (b) es análoga.

En vista de 1.40, podemos suponer que f es suprayectiva y considerar la sucesión exacta $\xi : 0 \to Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} C \to 0$ con $Y := \mathrm{Ker}(f)$.

Sea $M \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ a la sucesión ξ, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{f_\star} \mathrm{Hom}_A(M, C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_A(M, Y) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1_A(M, X),$$

donde $f_\star := \mathrm{Hom}_A(M, f)$ y $\gamma := \mathrm{Ext}^1_A(M, i)$. Veamos que $\delta = 0 = \gamma$, pues ello implicará que $\mathrm{Ext}^1_A(M, Y) = 0$; probándose que $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$.

Como f es una $\mathcal{X}-$aproximación a derecha de C, se sigue que f_* es suprayectivo. Luego, $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Im}(f_*) = \mathrm{Hom}_A(M, C)$, y por lo tanto $\delta = 0$.

Finalmente, veamos que $\gamma = 0$. Sea $\nu : 0 \to Y \xrightarrow{t} Z \to M \to 0$ una sucesió exacta en en $\mathrm{mod}(A)$. Haciendo el push-out del diagrama $X \xleftarrow{i} Y \xrightarrow{t} Z$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en $\mathrm{mod}(A)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\nu : & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "t"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "j"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\eta : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r] \arrow[d, "h"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Del hecho de que $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y $X, M \in \mathcal{X}$, tenemos que $E \in \mathcal{X}$. Luego, dado que f es una $\mathcal{X}-$aproximación a derecha de C, existe $\lambda : E \to X$ tal que $f\lambda = h$. De donde, $f = f\lambda\beta$. Ahora, como f es minimal a derecha, β se escinde; y en particular, η se parte. De donde concluimos que $\gamma = 0$.

$\square$

4.2. Aplicaciones de sistemas estratificantes a la dimensión finitista.

Definición 4.11. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *La **dimesión proyectiva de** $\mathcal{C}$ es* $\mathrm{pd}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{pd}(C) : C \in \mathcal{C}\}$, *donde* $\mathrm{pd}(C)$ *es la dimensión proyectiva del A-módulo C. Análogamente, la **dimesión inyectiva de** $\mathcal{C}$ es* $\mathrm{id}(\mathcal{C}) := \sup\{\mathrm{id}(C) : C \in \mathcal{C}\}$, *donde* $\mathrm{id}(C)$ *es la dimensión inyectiva del A-módulo C.*

La dimensión global del álgebra A es $\mathrm{gldim}(A) := \mathrm{pd}(\mathrm{mod}(A))$. Es bien conocido que $\mathrm{gldim}(A)$ coincide con $\mathrm{id}(\mathrm{mod}(A))$.

En lo que sigue, dado un *ss* $(\Theta, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(A)$, consideraremos al *epss* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ y al *eiss* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ asociadas a $(\Theta, \leq)$.

Lema 4.12. *Sean A una $K-$álgebra, $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$ *y $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(Y) \leq \mathrm{pd}(Q) + t - 1$.

(b) $\mathrm{id}(M) \leq \mathrm{id}(Q) \leq \mathrm{id}(Y) + t - 1$.

(c) $\mathrm{pd}(\Theta) = \mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta))$.

Demostración. Por simplicidad, supondremos que $\leq$ es el orden natural en $[1,t]$.

(a) Si $M \in \mathrm{add}(Q)$, entonces M es sumando directo de Q y por lo tanto $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(Q) \leq \mathrm{pd}(Q) + t - 1$.

Por otro lado si $t = 1$, entonces $Q \cong \Theta(1)$; y por lo tanto, para cada $0 \neq M \in \mathcal{F}(\Theta)$ se tiene que $M \in \mathrm{add}(Q)$. El resultado se sigue de ahí inmediatamente.

Supongamos entonces que $M \notin \mathrm{add}(Q)$ y $t > 1$. Por 3.38, tenemos la sucesión exacta
$$0 \to Q_s \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$
con $s \in [1, t-1]$ y $Q_i \in \mathrm{add}(Q)$, para cada $i \in [0, s]$.

Ahora, para cada $i \in [0, s-1]$ tenemos una sucesión exacta $0 \to M_{i+1} \to Q_i \to M_i \to 0$ en $\mathcal{F}(\Theta)$, donde $M_0 := M$ y $M_s = Q_s$. De ahí que, $\mathrm{pd}(M_i) \leq \sup\{\mathrm{pd}(Q_i), \mathrm{pd}(M_{i+1}) + 1\}$. Luego, $\mathrm{pd}(M) \leq \sup\{\mathrm{pd}(Q)\mathrm{pd}(M_1) + 1\} \leq \cdots \leq \sup\{\mathrm{pd}(Q), \mathrm{pd}(Q_s) + s\} \leq \mathrm{pd}(Q) + s \leq \mathrm{pd}(Q) + (t-1)$. Veamos ahora que $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(Y)$. En efecto, si $M = 0$, es claro. Supongamos que $M \neq 0$. Haremos la prueba por inducción sobre $\max(M)$.

Si $\max(M) = 1$, entonces $M \cong \Theta(1)^m$, donde $m := [M : \Theta(1)]$; pues $\mathrm{Ext}^1_A(\Theta(1), \Theta(1)) = 0$. Ahora, supongamos que $\max(M) > 1$. Por 3.35, tenemos la sucesión exacta $0 \to M \to Y_0 \to N \to 0$ en $\mathcal{F}(\Theta)$, $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$ y $\max(N) \leq \max(M)$. En particular, por hipótesis de inducción, $\mathrm{pd}(N) \leq \mathrm{pd}(Y)$. Luego, $\mathrm{pd}(M) \leq \sup\{\mathrm{pd}(Y_0), \mathrm{pd}(N) - 1\} \leq \mathrm{pd}(Y)$.

(b) Por dualidad, $(D(\Theta), D(Y), \leq^{op})$ es un epss de talla t en $\mathrm{mod}(A^{op})$ y $D(M) \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(\Theta))$. Por (a) y haciendo uso de la dualidad; concluimos que $\mathrm{id}(M) = \mathrm{pd}(D(M)) \leq \mathrm{pd}(D(Y)) + (t-1) = \mathrm{id}(Y) + (t-1)$. Por otro lado $\mathrm{id}(M) = \mathrm{pd}(D(M)) \leq \mathrm{pd}(D(Q)) = \mathrm{id}(Q)$.

(c) En vista de que $\Theta \subseteq \mathcal{F}(\Theta)$, es suficiente probar que $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(\Theta)$ para cada $M \in \mathcal{F}(\Theta)$.

Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Si $M = 0$, no hay nada que probar. Supongamos que $M \neq 0$. Procederemos por inducción sobre $\ell_\Theta(M)$.

Si $\ell_\Theta(M) = 1$, entonces $M \cong \Theta(i)$ para algún $i \in [1, t]$, y por lo tanto $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{pd}(\Theta(i)) \leq \mathrm{pd}(\Theta)$.

Supongamos ahora que $\ell_\Theta(M) > 1$. Luego, por 3.34 existe una sucesión exacta $0 \to N \to M \to \Theta(i_0)^{m_{i_0}} \to 0$ en $\mathcal{F}(\Theta)$, con $\ell_\Theta(N) < \ell_\Theta(M)$. En particular, por hipótesis de inducción, $\mathrm{pd}(N) \leq \mathrm{pd}(\Theta)$. Consecuentemente, $\mathrm{pd}(M) \leq \sup\{\mathrm{pd(N)}, \mathrm{pd(\Theta(i))}\} \leq \mathrm{pd}(\Theta)$.

□

Teorema 4.13. *Sea A una K-álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$.

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $\mathrm{pd}(Y) = \mathrm{pd}\mathcal{F}(\Theta) = \mathrm{pd}(\Theta) \leq \mathrm{pd}(Q) + t - 1$.

(b) $\mathrm{id}(Q) = \mathrm{id}\mathcal{F}(\Theta) = \mathrm{id}(\Theta) \leq \mathrm{id}(Y) + t - 1$.

(c) $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \mathcal{P}^{<\infty}(A)$ *si y sólo si* $\mathrm{pd}(Y) < \infty$ *si y sólo si* $\mathrm{pd}(Q) < \infty$.

(d) $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \mathcal{I}^{<\infty}(A)$ *si y sólo si* $\mathrm{id}(Y) < \infty$ *si y sólo si* $\mathrm{id}(Q) < \infty$.

Demostración. Se sigue de 4.12.

□

Corolario 4.14. *Sea $(A, \leq)$ una ss−álgebra y ${}_AT$ el módulo inclinante característico asociado a $(A, \leq)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}({}_AT) = \mathrm{pd}(\mathcal{F}({}_A\Delta)) \leq n - 1$,

(b) $\mathrm{id}({}_AA) = \mathrm{id}(\mathcal{F}({}_A\Delta)) \leq \mathrm{id}({}_AT) + n - 1$,

Demostración. Se sigue de 3.4, 3.6 y 4.13.

□

Definición 4.15. *Sea A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Se define $\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{C}) := \{C \in \mathcal{C} : \mathrm{pd}(C) < \infty\}$ y $\mathcal{I}^{<\infty}(\mathcal{C}) := \{C \in \mathcal{C} : \mathrm{id}(C) < \infty\}$. La* ***dimensión proyectiva finitista de*** *$\mathcal{C}$ es $\mathrm{pfd}(\mathcal{C}) := \mathrm{pd}(\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{C}))$. Análogamente, la* ***dimensión inyectiva finitista de*** *$\mathcal{C}$ es $\mathrm{ifd}(\mathcal{C}) := \mathrm{id}(\mathcal{I}^{<\infty}(\mathcal{C}))$.*

Por simplicidad, $\mathrm{pfd}(A)$ denotará a $\mathrm{pfd}(\mathrm{mod}(A))$, y $\mathrm{ifd}(A)$ a $\mathrm{ifd}(\mathrm{mod}(A))$. Así mismo, $\mathcal{P}^{<\infty}(A) := \mathcal{P}^{<\infty}(\mathrm{mod}(A))$ y $\mathcal{I}^{<\infty}(A) := \mathcal{I}^{<\infty}(\mathrm{mod}(A))$

Lema 4.16. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $\mathrm{pd}(Y) < \infty$, *entonces* $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta))$, *donde* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es el eiss asociado a* $(\Theta, \leq)$.

(b) *Si* $\mathrm{id}(Q) < \infty$, *entonces* $\mathrm{ifd}(A) = \mathrm{ifd}(\mathcal{P}(\Theta))$, *donde* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *es el epss asociado a* $(\Theta, \leq)$.

Demostración. (a) Supongamos que $\mathrm{pd}(Y) < \infty$. Sea $X \in \mathrm{mod}(A)$ tal que $\mathrm{pd}(X) < \infty$. Por 4.9, tenemos la sucesión exacta

$$0 \to X \to Y_X \to M_X \to 0,$$

con $Y_X \in \mathcal{I}(\Theta)$ y $M_X \in \mathcal{F}(\Theta)$. Como $M_X \in \mathcal{F}(\Theta)$, se sigue que $\mathrm{pd}(M_X) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) = \mathrm{pd}(Y) < \infty$. Así que $\mathrm{pd}(Y_X) < \sup\{\mathrm{pd}(X), \mathrm{pd}(M_X)\} < \infty$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}(Y_X) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta))$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}(X) < \sup\{\mathrm{pd}(Y_X), \mathrm{pd}(M_X) - 1\}$.

Ahora, como $M_X \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $\mathrm{pd}(M_X) \leq \mathrm{pd}(Y) < \infty$; se sigue que $\mathrm{pd}(M_X) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta))$ y por lo tanto $\mathrm{pd}(X) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta))$. De donde, $\mathrm{pfd}(A) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta)) \leq \mathrm{pfd}(A)$.
(b) Es dual de (a).

□

Teorema 4.17. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $\mathrm{pd}(Y) < \infty$ *entonces* $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta)) \leq \sup\{\mathrm{pfd}(\mathcal{P}(\Theta)), \mathrm{pd}(Y)+1\}$.

(b) *Si* $\mathrm{id}(Q) < \infty$ *entonces* $\mathrm{ifd}(A) = \mathrm{ifd}(\mathcal{P}(\Theta)) \leq \sup\{\mathrm{ifd}(\mathcal{I}(\Theta)), \mathrm{id}(Q) + 1\}$.

Demostración. (a) En vista de 4.16, sólo nos resta probar que $\mathrm{pfd}(A) \leq \sup\{\mathrm{pfd}(\mathcal{P}(\Theta)), \mathrm{pd}(Y) + 1\}$. Para ello, tomemos $M \in \mathrm{mod}(A)$ con $\mathrm{pd}(M) < \infty$.

Por 4.9, se tiene una sucesión exacta $0 \to X_M \to Y_M \to M \to 0$, con $Y_M \in \mathcal{P}(\Theta)$ y $X_M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Luego, en vista de que $\mathrm{pd}(Y) < \infty$ y 4.13 (a), tenemos que $\mathrm{pd}(X_M) < \infty$; y consecuentemente, $\mathrm{pd}(Y_M) < \infty$.

Luego, $\mathrm{pd}(M) \leq \sup\{\mathrm{pd}(Y_M), \mathrm{pd}(X_M) + 1\} \leq \sup\{\mathrm{pfd}(\mathcal{P}(\Theta)), \mathrm{pd}(Y) + 1\}$, dado que por 4.12 (a), $\mathrm{pd}(X_M) \leq \mathrm{pd}(Y)$.

(b) Es dual de (a).

□

Corolario 4.18. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$ indescomponible tal que* $\mathrm{Ext}_A^1(M, M) = 0$. *Entonces:*

(a) $\mathrm{pfd}(A) \leq \sup\{\mathrm{pfd}(\mathcal{P}(\Theta)), \mathrm{pd}(M) + 1\}$ *si* $\mathrm{pd}(M) < \infty$;

(b) $\mathrm{ifd}(A) \leq \sup\{\mathrm{ifd}(\mathcal{I}(\Theta)), \mathrm{id}(M) + 1\}$ *si* $\mathrm{id}(M) < \infty$.

Demostración. (a) Sea $\Theta := \{M\}$. Se puede probar que esto nos dá un *ss* de talla 1 en $\mathrm{mod}(A)$ y $\underline{Y} = \{M\} = \underline{Q}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(\Theta) = \mathrm{add}(M)$. Luego, el resultado es inmediato de 4.17.

(b) Es dual de (a).

□

4.3. Homología relativa.

Definición 4.19. *Sea A una $K-$álgebra y $X \in \operatorname{mod}(A)$. Asociadas a X, se tienen las siguientes subcategorías de* $\operatorname{mod}(A)$.

(a) $X^{\perp} := \{M \in \operatorname{mod}(A) : \operatorname{Ext}^i_A(X, M) = 0 \,\forall\, i > 0\}$

(b) ${}^{\perp}X := \{N \in \operatorname{mod}(A) : \operatorname{Ext}^i_A(N, X) = 0 \,\forall\, i > 0\}$

(c) $\operatorname{fact}(X) := \{M \in \operatorname{mod}(A) : \exists\, m \in \mathbb{N}$ *y un epimorfismo* $\beta : X^m \to M\}$.

Definición 4.20. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$.

(a) *Sea $M \in \operatorname{mod}(A)$. Decimos que M* ***admite una*** $\mathcal{C}-$***resolución****, si existe una sucesión exacta*

$$\cdots \to X_t \to X_{t-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0,$$

con $X_i \in \mathcal{C}$, para cada i. Si existe una $\mathcal{C}-$resolución de M de la forma

$$0 \to X_m \to X_{m-1} \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to M \to 0,$$

diremos que M ***tiene una*** $\mathcal{C}-$***resolución finita*** *de longitud m.*

(b) *Sea $M \in \operatorname{mod}(A)$. Decimos que M* ***admite una*** $\mathcal{C}-$***co-resolución*** *si existe una sucesión exacta*

$$0 \to M \to X_0 \to X_1 \to \cdots X_t \to X_{t-1} \to \cdots$$

con $X_i \in \mathcal{C}$, para cada i. Si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_k = 0$ para cada $k \geq m+1$, diremos que M ***admite una*** $\mathcal{C}-$***co-resolución finita*** *de longitud m.*

Definición 4.21. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$. *Definimos las siguientes subcategorías de* $\operatorname{mod}(A)$.

(a) $\mathcal{C}^{\wedge} := \{M \in \operatorname{mod}(A) : M$ *admite una* $\mathcal{C}$ *– resolución finita*$\}$.

(b) $\mathcal{C}^{\vee} := \{M \in \operatorname{mod}(A) : M$ *admite una* $\mathcal{C}$ *– co-resolución finita*$\}$.

Ejemplo 4.22. *Si $(A, \leq)$ es una ss$-$álgebra con n simples (salvo isomorfismos) y ${}_AT$ es el inclinante característico asociado a $(A, \leq)$, tenemos que ${}_AA \in \operatorname{add}(T)^{\vee}$. Además, $\mathcal{P}^{<\infty}(\operatorname{add}(T)) = \operatorname{add}(T)$.*

Definición 4.23. *Sea A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$. *Se define lo siguiente.*

(a) *La correspondencia* $\mathrm{pd}_{\mathcal{C}} : \mathrm{mod}(A) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *dada por:* $\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(M) := \min\{m \in \mathbb{N} : \mathrm{Ext}^j_A(M, -)|_{\mathcal{C}} = 0 \,\forall\, j > m \geq 0\}$*. Ésta es llamada la **dimensión proyectiva relativa de** M **con respecto a** $\mathcal{C}$ (o bien, la* $\mathcal{C}-$*dimensión proyectiva de* M*). En particular, si* $\mathcal{C} = \mathrm{mod}(A)$*, se tiene que* $\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(M) = \mathrm{pd}(M)$.

(b) *La correspondencia* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathrm{mod}(A) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *dada por:* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(M) := \min\{m \in \mathbb{N} : \mathrm{Ext}^j_A(-, M)|_{\mathcal{C}} = 0 \,\forall\, j > m \geq 0\}$*. Ésta es llamada la **dimensión inyectiva relativa de** M **con respecto a** $\mathcal{C}$ (o bien, la* $\mathcal{C}-$*dimensión inyectiva de* M*). En particular, si* $\mathcal{C} = \mathrm{mod}(A)$*, se tiene que* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(M) = \mathrm{id}(M)$.

Definición 4.24. *Sean* A *una* $K-$*álgebra,* $\mathcal{C}$ *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $M \in \mathrm{mod}(A)$*. Se define lo siguiente.*

(a) *La **dimensión de** $\mathcal{C}-$**resolución de** M, denotada por* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(M)$*, se define como sigue. Si* $M \notin \mathcal{C}^{\wedge}$, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(M) := \infty$*; y si* $M \in \mathcal{C}^{\wedge}$, $\mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(M) := \min\{r \in \mathbb{N} : M$ *tiene una* $\mathcal{C}-$*resolución de longitud* $r\}$.

(b) *La **dimensión de** $\mathcal{C}-$**co-resolución de** M, denotada por* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{C}}(M)$*, se define como sigue. Si* $M \notin \mathcal{C}^{\vee}$, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{C}}(M) := \infty$*; y si* $M \in \mathcal{C}^{\vee}$, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{C}}(M) := \min\{r \in \mathbb{N} : M$ *tiene una* $\mathcal{C}-$*co-resolución de longitud* $r\}$.

Proposición 4.25. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $\leq$ *un orden lineal en* $[1, t]$, $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *y* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$*. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(a) $M \in (\mathrm{add}(Y))^{\vee}$ *y* $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}(Y)}(M) \leq t - 1$*, donde* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *es el eiss asociado a* $(\Theta, \leq)$.

(b) $M \in (\mathrm{add}(Q))^{\wedge}$ *y* $\mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(Q)}(M) \leq t - 1$*, donde* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *es el epss asociado a* $(\Theta, \leq)$.

Demostración. Es consecuencia de 3.36 y 3.38.

□

Observación 4.26. *Sea* $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$*. De 4.25 concluimos que* $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \mathrm{add}(Y)^{\vee}$ *y* $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \mathrm{add}(Q)^{\wedge}$.

Proposición 4.27. *Sean* A *una* $K-$*álgebra, y* $(\Theta, \leq)$ *es un ss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$*. Entonces,*

$$\mathrm{id}_{\mathrm{add}(Y)}(\mathcal{F}(\Theta)) = \mathrm{id}_{\mathrm{add}(Y)}(Q) = \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y) = \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(\mathcal{F}(\Theta)).$$

Demostración. Supondremos que $d := \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y)$ finita, pues en otro caso, el resultado es claro.

Veamos primero que $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y) = \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(\mathcal{F}(\Theta))$.

Dado que $Y \in \mathcal{F}(\Theta)$, se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(\mathcal{F}(\Theta))$; así que sólo nos resta probar que $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y) \geq \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(\mathcal{F}(\Theta))$. Sea $M \in \mathcal{F}(\Theta)$. Probaremos por inducción sobre $\max(M)$, que $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y)$. Si $\max(M) = 1$, entonces $M \in \mathrm{add}(Y)$ y consecuentemente $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y)$. Supongamos ahora que $\max(M) > 1$. Por 3.35, existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to M \to Y_M \to M' \to 0,$$

tal que $\max(M') < \max(M)$ y $Y_M \in \mathrm{add}(Y)$. Aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, Q)$ obtenemos

$$\mathrm{Ext}_A^j(Y_M, Q) \to \mathrm{Ext}_A^j(M, Q) \to \mathrm{Ext}_A^{j+1}(M', Q).$$

Como $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y) = d$ y por hipótesis de inducción $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(M) \leq d$; se sigue que para cada $j > d$, $\mathrm{Ext}_A^j(Y_M, Q) = 0 = \mathrm{Ext}_A^j(M', Q)$. De donde, $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(M) \leq d$.

Por lo tanto, $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y)$.

De manera similar, se prueba que $\mathrm{id}_{\mathrm{add}(Y)}(Q) = \mathrm{id}_{\mathrm{add}(Y)}(\mathcal{F}(\Theta))$.

Por otro lado, en vista de 4.46, se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathrm{add}(Q)}(Y) = \mathrm{id}_{\mathrm{add}(Y)}(Q)$.

□

Definición 4.28. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{C}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$*. Para cada clase $\mathcal{X}$ de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$*, definimos lo siguiente.*

(a) *La $\mathcal{C}-$**dimensión proyectiva de** $\mathcal{X}$ como* $\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}) := \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{C}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$*; y la $\mathcal{C}-$**dimensión inyectiva de** $\mathcal{X}$ como* $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}) := \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

(b) *La $\mathcal{C}-$**dimensión de resolución de** $\mathcal{X}$ se define como* $\mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}) := \sup\{\mathrm{resdim}_{\mathcal{C}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$*. Dualmente, se define la $\mathcal{C}-$**dimensión de co-resolución de** $\mathcal{X}$,* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{C}}(\mathcal{X}) := \sup\{\mathrm{coresdim}_{\mathcal{C}}(X) : X \in \mathcal{X}\}$.

Definición 4.29. *Sean A una $K-$álgebra y $T \in \mathrm{mod}(A)$.*

(a) *Si T es inclinante, definimos $\alpha_T(X) := \mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(T)}(X)$, para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$; y $\alpha_T := \mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(T)}(\mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp}))$.*

(b) *Si T es co-inclinante, definimos $\beta_T(X) := \mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}(T)}(X)$, para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$; y $\beta_T := \mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}(T)}(\mathcal{I}^{<\infty}({}^{\perp}T))$.*

Lema 4.30. *Sean A una $K-$álgebra y $T \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *T es inclinante si y sólo si $T^{\perp}$ es covariantemente finita. Más aún, $T^{\perp} = \{C \in \mathrm{mod}(A)$: existe una sucesión exacta $\cdots \to T_{n+1} \xrightarrow{f_n} T_n \to \cdots \to T_0 \to C \to 0,$ con $T_i \in \mathrm{add}(T)\, \forall i\}$.*

(b) $\mathrm{add}(T)$ *es funtorialmente finita en* $\mathrm{mod}(A)$.

(c) *La correspondencia $T \to T^{\perp}$ induce una biyección entre iso-clases de inclinantes básicos y subcategorías $\mathcal{X}$ en $\mathrm{mod}(A)$ que son covariantemente finitas, co-resolventes y satisfaciendo que $\mathcal{X}^{\wedge} = \mathrm{mod}(A)$.*

Demostración. Ver [7] y las versiones duales de [22, Teorema 3.28 y Teorema 3.39].

$\square$

Lema 4.31. *Sean A una $K-$álgebra y $T \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces $T^{\perp}$ es co-resolvente*

Demostración. Primero veamos que $T^{\perp}$ es cerrada por extensiones. Sea $\xi : 0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$, con $L, N \in T^{\perp}$. Aplicándole a ξ el funtor $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^i_A(T, L) \to \mathrm{Ext}^i_A(T, M) \to \mathrm{Ext}^i_A(T, N).$$

Como $\mathrm{Ext}^i_A(T, N) = 0 = \mathrm{Ext}^i_A(T, L)$ para cada i; se sigue que $\mathrm{Ext}^i_A(T, M) = 0$ para cada $i > 0$. Consecuentemente, $M \in T^{\perp}$.

Ahora probemos que $T^{\perp}$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos. Sea $\xi : 0 \to M \xrightarrow{f} N \to W \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$, con $M, N \in T^{\perp}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(T, -)$ a la sucesión ξ, obtenemos

$$\mathrm{Ext}^i_A(T, N) \to \mathrm{Ext}^i_A(T, W) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(T, M).$$

En vista de que $\mathrm{Ext}^i_A(T, N) = 0 = \mathrm{Ext}^{i+1}_A(T, M)$, se sigue que $\mathrm{Ext}^i_A(T, W) = 0$ para cada i. Por lo tanto $W \in T^{\perp}$.

Finalmente, dado que $\mathrm{Ext}^i_A(-, I) = 0$ para cada $I \in \mathcal{I}(A)$ e $i > 0$, en particular, $\mathrm{Ext}^i_A(T, I) = 0$. De donde $\mathcal{I}(A) \subseteq T^{\perp}$.

$\square$

Lema 4.32. *Sean A una $K-$álgebra y $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante. Entonces,*

(a) $T^{\perp} \subseteq \mathrm{fac}(T)$.

(b) $\mathrm{add}(T) \subseteq T^{\perp}$.

Demostración. (a) Sea $M \in T^{\perp}$. En vista de 4.30, existe un epimorfismo $f : T_0 \to M$ con $T_0 \in \mathrm{add}(T)$. Por otro lado, dado que $T_0 \in \mathrm{add}(T)$, existe un epimorfismo $h : T^m \to T_0$ con $m \in \mathbb{N}$. Luego, $fh : T^m \to M$ implica que $M \in \mathrm{fac}(T)$.
(b) Es consecuencia de que $\mathrm{Ext}_A^i(T, T) = 0$ para cada $i > 0$.

□

Lema 4.33. *Sean A una $K-$álgebra y $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $M \in T^{\perp}$ existe una sucesión exacta*
$$0 \to \mathrm{Ker}(f) \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0,$$
tal que $T_0 \in \mathrm{add}(T)$, $\mathrm{Ker}(f) \in T^{\perp}$ y $f : T_0 \to M$ es la $\mathrm{add}(T)-$aproximación minimal a derecha de M.

(b) *Si $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp})$, entonces $X \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$ y $\alpha_T(X) \leq \mathrm{pd}(X)$.*

(c) $\mathrm{pd}(X) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha_T(X)$ *para cada $X \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$.*

(d) *Si $X \in T^{\perp}$, entonces $\mathrm{pd}(X) < \infty$ si y sólo si $\alpha_T(X) < \infty$.*

(e) $\mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp}) = \mathrm{add}(T)^{\wedge}$.

Demostración. (a) Sea $M \in T^{\perp}$. Como $\mathrm{add}(T)$ es funtorialmente en $\mathrm{mod}(A)$ (ver 4.30), existe una $\mathrm{add}(T)-$aproximación minimal a derecha $f : T_0 \to M$, con $T_0 \in \mathrm{add}(T)$. Ahora, por 4.32 (a), existe un epimorfismo $g : T' \to M$ tal que $T' \in \mathrm{add}(T)$.

$$\begin{tikzcd} T_0 \arrow[r, "f"] & M \\ & T' \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Como f es una aproximación a derecha, existe $h : T' \to T_0$ tal que $g = fh$. De donde, f es un epimorfismo. y por lo tanto, $\mathrm{Im}(f) = M$. Además, por el Lema de Wakamatsu se tiene que $\mathrm{Ext}_A^1(T, \mathrm{Ker}(f)) = 0$.

Consideremos ahora la sucesión exacta $0 \to \mathrm{Ker}(f) \to T_0 \xrightarrow{f} M \to 0$. Aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}(T, -)$ obtenemos la sucesión exacta
$$\mathrm{Ext}_A^i(T, M) \to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(T, \mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(T, T_0),$$

para cada $i \geq 1$. Como $\mathrm{Ext}_A^i(T, M) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(T, T_0) = 0$, se sigue que $\mathrm{Ext}_A^{i+1}(T, \mathrm{Ker}(f)) = 0$ para cada $i \geq 1$. De donde, $\mathrm{Ker}(f) \in T^{\perp}$.

(b) Sea $X \in T^{\perp}$ con $\mathrm{pd}(X) = r$. Probemos que $X \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$ y que $\alpha_T(X) \leq r$. Como $X \in T^{\perp}$ por (a) obtenemos la sucesión exacta

$$\xi_{-1} : 0 \to K_0 \to T_0 \to X \to 0,$$

tal que $K_0 \in T^{\perp}$. Luego por (a), existe una sucesión exacta

$$\xi_0 : 0 \to K_1 \to T_1 \to K_0 \to 0,$$

con $K_1 \in T^{\perp}$. Repitiendo este argumento para cada $m \in \{-1, \ldots, r\}$, obtenemos la sucesión exacta

$$\xi_m : 0 \to K_{m+1} \to T_{m+1} \to K_m \to 0,$$

con $K_{-1} := X$; y tal que $K_{m+1} \in T^{\perp}$. y $T_{m+1} \in \mathrm{add}(T)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(-, K_{r+1})$ a ξ_j, obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_A^i(T_{j+1}, K_{r+1}) \to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(K_{j+1}, K_{r+1}) &\to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(K_j, K_{r+1}) \\ &\to \mathrm{Ext}_A^{i+1}(T_j, K_{r+1}). \end{aligned}$$

Usando que $\mathrm{Ext}_A^i(T_j, K_{r+1}) = \mathrm{Ext}_A^{i+1}(T_j, K_{r+1}) = 0$ para cada $i \in [1, r+1]$ y $\mathrm{pd}(X) = r$; obtenemos que $\mathrm{Ext}_A^i(K_r, K_{r+1}) \cong \mathrm{Ext}_A^{r+2}(X, K_{r+1}) = 0$. De donde, la sucesión ξ_r se parte; implicando que $K_r \in \mathrm{add}(T)$. Por lo tanto,

$$\xi : 0 \to K_r \to T_r \to T_{r-1} \to \cdots \to T_0 \to X \to 0$$

es una $\mathrm{add}(T)-$resolución de X. Esto implica que $X \in \mathrm{add}(T)$ y $\alpha_T(X) \leq r$.

(c) Sea $X \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$ con $X \neq 0$. Consideremos una $\mathrm{add}(T)-$resolución de X de longitud $r := \alpha_T(X)$,

$$0 \to T_r \xrightarrow{f_r} T_{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} T_{r-2} \xrightarrow{f_{r-2}} \cdots \xrightarrow{f_1} T_0 \xrightarrow{f_0} X \to 0.$$

Sea $K_i := \mathrm{Ker}(f_i)$, entonces tenemos la sucesión exacta

$$\xi_i : 0 \to K_i \to T_i \xrightarrow{f_i} \mathrm{Im}(f_i) \to 0.$$

para cada $i \in [0, r]$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{pd}(X) &\leq \sup\{\mathrm{pd}(T_0), \mathrm{pd}(K_0) + 1\} \leq \sup\{\mathrm{pd}(T_0), \mathrm{pd}(K_1) + 2\} \\ &\leq \cdots \leq \sup\{\mathrm{pd}(T), \mathrm{pd}(K_{r-1}) + r - 1\} \leq \mathrm{pd}(T) + r. \end{aligned}$$

(d) Sea $X \in T^{\perp}$. Si $\mathrm{pd}(X) < \infty$, entonces de (b) se sigue que $\alpha_T(X) \leq \mathrm{pd}(X) < \infty$. Recíprocamente, si $\alpha_T(X) < \infty$ entonces $X \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$. Luego, por ($c$) tenemos que $\mathrm{pd}(X) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha_T(X) < \infty$.

(e) De (b) se sigue que $\mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp}) \subseteq \mathrm{add}(T)^{\wedge}$. Veamos que se satisface la otra contención.

Sea $M \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$. Por (c) tenemos que $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha_T(M) < \infty$; así que sólo nos resta probar por inducción sobre $d := \alpha_T(M)$, que $M \in T^{\perp}$.

Si $d = 0$, entonces $M \in \mathrm{add}(T) \subseteq T^{\perp}$.

Si $d = 1$, existe una sucesión exacta $0 \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$. Usando que $\mathrm{add}(T) \subseteq T^{\perp}$, obtenemos que $\mathrm{Ext}_A^i(T, M) = 0\ \forall i \geq 1$.

Supongamos ahora que $d > 1$. Consideremos una $\mathrm{add}(T)-$resolución de M de longitud d,

$$0 \to T_d \to T_{d-1} \to \cdots \to T_1 \xrightarrow{f} T_0 \xrightarrow{g} M \to 0.$$

En particular, $\alpha_T(\mathrm{Im}(f)) = d - 1$ y por hipótesis de inducción se tiene que $\mathrm{Im}(f) \in T^{\perp}$. Finalmente aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(T, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Im}(f) \to T_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0;$$

y usando el hecho de que $\mathrm{Ext}_A^i(T, T_0) = 0 = \mathrm{Ext}_A^{i+1}(T, \mathrm{Im}(f))$ para cada $i \geq 1$; concluimos que $\mathrm{Ext}_A^i(T, M) = 0$ para cada $i \geq 1$.

$\square$

Proposición 4.34. *Sea A una $K-$álgebra, $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante, $\Gamma := \mathrm{End}({}_AT)$ y $F := \mathrm{Hom}_A(T, -) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(\Gamma)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\alpha_T \leq \mathrm{pfd}(T^{\perp}) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha_T$.

(b) $\alpha_T < \infty$ *si y sólo si* $\mathrm{pfd}(T^{\perp}) < \infty$.

(c) *El funtor F induce, por restricción, equivalencias exactas de categorías $T^{\perp} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(F|_{T^{\perp}})$ y $\mathrm{add}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\Gamma)$.*

(d) $\alpha_T(X) \leq \mathrm{pd}(F(X)) \leq \mathrm{pd}(X)$ *para cada* $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp})$.

(e) $\alpha_T \leq \mathrm{pfd}(\mathrm{Im}(F|_{T^{\perp}})) \leq \mathrm{pfd}(T^{\perp})$.

(f) $\mathrm{pfd}(T^{\perp}) \leq \mathrm{pd}(T) + \mathrm{pfd}(\Gamma)$.

Demostración. (a) Para cada $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp})$ se tiene por 4.33 (b) que $\alpha_T(X) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{P}^{\infty}(T^{\perp}))$. De donde, $\alpha_T \leq \mathrm{pfd}(T^{\perp})$.

Ahora, por 4.33 (b) y (c), tenemos que $X \in \mathrm{add}(T)^{\wedge}$ y $\mathrm{pd}(X) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha_T(X)$ para cada $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp})$. Por lo tanto, $\mathrm{pfd}(T^{\perp}) \leq \mathrm{pd}(T) + \alpha_T(X)$.

(b) Es consecuencia de (a).

(c) La equivalencia $\mathrm{add}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\Gamma)$ es bien conocida y puede ser encontrada en [4, Proposición 1.2]. Ahora, la equivalencia $T^{\perp} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f|_{T^{\perp}})$ se sigue del hecho de que para cada $M \in T^{\perp}$ existe una sucesión exacta

$$T_1 \xrightarrow{f} T_0 \to M \to 0,$$

con $T_1, T_0 \in \mathrm{add}(T)$ y $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f) \in T^{\perp}$ (ver 4.33 (a)).

(d) Sea $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(T^{\perp})$. Supongamos que $X \notin \operatorname{add}(T)$ (pues en otro caso no hay nada que probar). Por 4.33, existe $r > 0$ tal que $r \leq \operatorname{pd}(X)$ y una $\operatorname{add}(T)-$resolución de M de longitud r

$$\xi : 0 \to T_r \to T_{r-1} \overset{f_{r-1}}{\to} T_{r-2} \overset{f_{r-2}}{\to} \cdots \to T_1 \overset{f_1}{\to} T_0 \overset{f_0}{\to} X \overset{f_{-1}}{\to} 0,$$

tal que $\operatorname{Ker}(f) \in T^{\perp} \backslash \operatorname{add}(T)$ para cada $i \in [-1, r-2]$ y $f_i : T_i \to \operatorname{Ker}(f_{i-1})$ es la $\operatorname{add}(T)-$aproximación minimal a derecha de $\operatorname{Ker}(f_{i-1})$ para cada $i \in [0, r-1]$. Por lo tanto, $\alpha_T(X) \leq r \leq \operatorname{pd}(X)$.

Aplicando el funtor F a ξ y usando (c), obtenemos una resolución proyectiva minimal de $F(X)$. De donde, $r = \operatorname{pd}F(X)$.

(e) El hecho de que $\alpha_T \leq \operatorname{pfd}(\operatorname{Im}(f|_{T^{\perp}})) \leq \operatorname{pfd}(T^{\perp})$ se debe a que $\operatorname{pd}(X)$ es finita si y sólo si $\operatorname{pd}(F(X))$ es finita para $X \in T^{\perp}$.

(f) Se sigue de (a) y (e).

□

Teorema 4.35. *Sean $(A, \leq)$ una ss−álgebra, n el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\operatorname{mod}(A)$, ${}_AT$ *el inclinante característico asociado a $(A, \leq)$ y* $\Gamma := \operatorname{End}_A(T)^{op}$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\alpha_T \leq \operatorname{pfd}(\mathcal{F}({}_{\Gamma}\overline{\Delta})) \leq n - 1$.

(b) $\operatorname{pfd}(A) = \operatorname{pfd}(T^{\perp}) = \operatorname{pd}(\operatorname{add}(T)^{\wedge}) \leq \operatorname{pd}(T) + \alpha_T \leq 2n - 2$.

Demostración. Ver [16, Teorema 3.3].

□

Consideremos $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es un eiss de talla t en $\operatorname{mod}(A)$ y $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$. La siguiente proposición nos da condiciones suficientes para que sea inclinante.

Proposición 4.36. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\operatorname{mod}(A)$ *y* $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\operatorname{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$ *si y sólo si* $\mathcal{I}(\Theta)$ *es co-resolvente.*

(b) *Si* $\mathcal{I}(\Theta)$ *es co-resolvente, entonces* $\operatorname{Ext}^i_A(Y, Y) = 0$ *para cada* $i > 0$.

(c) *Si* $\operatorname{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$, $\operatorname{pd}(Y) < \infty$ *y* ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$, *entonces Y es inclinante en* $\operatorname{mod}(A)$.

Demostración. (a) Primero supongamos que $\operatorname{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$ y probemos que $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente.

Por 1.45, sólo nos resta probar que $\mathcal{I}(\Theta)$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos. Consideremos la sucesión exacta

$$\xi : 0 \to M \to E \to N \to 0,$$

con $M, E \in \mathcal{I}(\Theta)$. Ahora, dado $X \in \mathcal{F}(\Theta)$, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(X, -)$ a la sucesión ξ se tiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_A(X, E) \to \mathrm{Ext}^1_A(X, N) \to \mathrm{Ext}^2_A(X, M).$$

Como $\mathrm{Ext}^1_A(X, E) = 0$ y $\mathrm{Ext}^2_A(X, M) = 0$, concluimos que $\mathrm{Ext}^1_A(X, N) = 0$. Por lo tanto, $N \in \mathcal{I}(\Theta)$.

Supongamos ahora que $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente. Sean $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $N \in \mathcal{I}(\Theta)$. Luego, existe una sucesión exacta en $\mathcal{I}(\Theta)$,

$$\xi :\ 0 \to N \to I_0(N) \to L_N \to 0,$$

con $I_0(N) \in \mathcal{I}(A)$. Aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}(M, -)$ a la sucesión ξ, obtenemos que $\mathrm{Ext}^2_A(M, N) = 0$, ya que $\mathrm{Ext}^1_A(M, L_N) = 0$ y $\mathrm{Ext}^2_A(M, I_0(N)) = 0$.

(b) Como $Y \in \mathrm{add}(Y) \subseteq \mathcal{I}(\Theta)$ e $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, existe una sucesión exacta

$$\xi :\ 0 \to Y \to I_0(Y) \to I_1(Y) \to \cdots \to I_{i-1}(Y) \to \Omega^{-i}(Y) \to 0,$$

con $I_m(Y) \in \mathcal{I}(A)$ para cada $m \in [0, i-1]$ y $\Omega^{-i}(Y) \in \mathcal{I}(\Theta)$. Aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}(Y, -)$ y usando el hecho de que cada $I_m(Y) \in \mathcal{I}(A)$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^{i+1}_A(Y, Y) \cong \mathrm{Ext}^1_A(Y, \Omega^{-i}(Y)) = 0$.

(c) En vista de que $\mathrm{pd}(Y)$ es finita, es suficiente verificar (b) y (c) de 2.21. Como ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$, por 3.36, existe una sucesión exacta

$$0 \to {}_AA \to Y_0 \to Y_1 \to \cdots \to Y_k \to 0,$$

con $Y_i \in \mathrm{add}(Y)$ para cada $i \in [0, k]$ y $k < t$. Por lo tanto, se satisface 2.21 (c). Finalmente, dado que $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$, se sigue de (a) y (b) que $\mathrm{Ext}^i_A(Y, Y) = 0$ para cada $i \geq 1$. Esto verifica 2.21 (b).

□

Observación 4.37. *Se puede probar que* $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$ *si y sólo si* $\mathrm{Ext}^2_A(\Theta, \mathcal{I}(\Theta)) = 0$.

Teorema 4.38. *Sea A una $K-$álgebra y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ un eiss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si existe $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante tal que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$, entonces Y es un sumando directo de T.*

(b) *Existe $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante básico tal que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$ si y sólo si* $\mathrm{pd}(Y) < \infty$ *y* $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$.

Demostración. (a) Supongamos que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$, con $T \in \text{mod}(A)$ inclinante. Dado que $Y \in \mathcal{I}(\Theta)$, en vista de 4.33 (a), existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to K \to T_0 \to Y \to 0,$$

con $K \in T^{\perp}$ y $T_0 \in \text{add}(T) \subseteq T^{\perp}$. Ahora, como $Y \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $K \in \mathcal{I}(\Theta)$, se tiene que la sucesión ξ se escinde; y por lo tanto $Y \in \text{add}(T)$. En particular, cada $Y(i) \in \text{add}(T)$. El hecho de que Y sea básico implica que Y es un sumando directo de T.

(b) Primero supongamos que existe $T \in \text{mod}(A)$ inclinante básico tal que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$. En vista de 4.31 y 4.36, se tiene que $\text{Ext}_A^2(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$. Por otro lado, de (a) se sigue que $\text{pd}(Y) \leq \text{pd}(T) < \infty$.

Supongamos ahora que $\text{pd}(Y)$ es finita y $\text{Ext}_A^2(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$. Probemos que existe $T \in \text{mod}(A)$ inclinante básico tal que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$.

Por hipótesis y 4.7 tenemos que $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente y covariantemente finita en $\text{mod}(A)$. Luego, en vista de 4.30 (c), basta probar que $\text{mod}(A) \subseteq \mathcal{I}(\Theta)^{\vee}$.

Sea $X \in \text{mod}(A)$. Dado que $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, tenemos para cada $d > 0$ una sucesión exacta

$$0 \to X \to I_0(X) \to I_1(X) \to \cdots \to I_{d-1}(X) \to \Omega^{-d}(X) \to 0,$$

con $I_i(X) \in \mathcal{I}(A)$ para cada $i \in [0, d-1]$. Veamos que $\Omega^{-d}(X) \in \mathcal{I}(\Theta)$, si $d = \text{pd}(Y)$. De 4.13 (a) tenemos que $\text{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) = \text{pd}(Y) = d$. De ahí se sigue que $\text{Ext}_A^1(M, \Omega^{-d}(X)) \cong \text{Ext}_A^{d+1}(M, X) = 0$ para cada $X \in \mathcal{F}(\Theta)$; y por lo tanto, $\Omega^{-d}(X) \in \mathcal{I}(\Theta)$.

$\square$

Corolario 4.39. *Sean A una $K-$álgebra, n el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\text{mod}(A)$*, $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\text{mod}(A)$ *y $T \in \text{mod}(A)$ inclinante y básico. Si $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$ y ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$, entonces $Y \cong T$ y $t = n$, donde $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ es el eiss de talla t asociado a $(\Theta, \leq)$ y $Y := \bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)$.*

Demostración. Dado que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$ es co-resolvente, se sigue por 4.36 (a) que $\text{Ext}_A^2(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$. Ahora, de 4.38 (a) se sigue que Y es un sumando directo de T; y en particular, $\text{pd}(Y) \leq \text{pd}(T) < \infty$. Luego, por 4.36 (c), se tiene que Y es inclinante.

Finalmente, como Y y T son inclinantes básicos, con Y sumando directo de T, concluimos que $Y \cong T$ y $t = \text{rk}(Y) = \text{rk}(T) = n$.

$\square$

Proposición 4.40. *Sean A una $K-$álgebra, n el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\text{mod}(A)$ *y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\text{mod}(A)$*. Si existe $T \in$*

$\mathrm{mod}(A)$ *inclinante tal que* $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$, *entonces* $t \leq n$ *e* $\mathcal{I}(\Theta)$ *es co-resolvente en* $\mathrm{mod}(A)$.

Demostración. El hecho de que $\mathcal{I}(\Theta)$ sea co-resolvente es consecuencia de 4.31, ya que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$ por hipótesis.

Por otro lado, de 4.38 (a) se sigue que Y es un sumando directo de T. En particular, $t = \mathrm{rk}(Y) \leq \mathrm{rk}(T) = n$.

□

Proposición 4.41. *Sean* A *una* $K-$*álgebra,* n *el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathcal{I}(\Theta)$ *es co-resolvente*

(b) $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$.

(c) $\mathrm{Ext}^i_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$ *para cada* $i > 0$.

Demostración. ((a)$\Leftrightarrow$ (b)) Es inmediato de 4.36 (a).
((c)$\Leftrightarrow$ (b)) Es claro, tomando $i = 2$.
((a)$\Leftrightarrow$ (c)) Sean $M \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $N \in \mathcal{I}(\Theta)$. Como $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, obtenemos para cada $i \geq 2$ una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to N \to I_0(N) \to I_1(N) \to \cdots \to I_{i-2}(N) \to \Omega^{-i+1}(N) \to 0,$$

con $I_m(N) \in \mathcal{I}(A)$ para cada $m \in [0, i-2]$ y $\Omega^{-i+1}(N) \in \mathcal{I}(\Theta)$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}(M, -)$ a la sucesión ξ obtenemos que $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^1_A(M, \Omega^{-i+1}(N)) = 0$.

□

Corolario 4.42. *Sean* $(A, \leq)$ *una ss*$-$*álgebra casi-hereditaria,* n *el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $\mathcal{I}(\Theta)$ *es co-resolvente entonces* $t \leq n$.

(b) *Si* A *es hereditaria entonces* $t \leq n$.

Demostración. (a) Sea $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ el eiss de talla t asociado a $(\Theta, \leq)$. En vista de 2.17, se tiene que $\mathrm{gldim}(A) < \infty$. En particular, $\mathrm{pd}(Y)$ es finita. Por otro lado, de 4.36 (a) se tiene que $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$. Así, por 4.38 (b), existe $T \in$

$\mathrm{mod}(A)$ inclinante básico tal que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$. Finalmente, $t \leq n$ es consecuencia de 4.40.
(b) Como A es hereditaria tenemos que $\mathrm{gldim}(A) \leq 1$. En particular, se obtiene que $\mathrm{Ext}_A^2(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$. Por 4.41, esto es equivalente a que $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente. Finalmente, de (a) se tiene que $t \leq n$.

□

A continuación, veremos una prueba distinta para 2.20, usando los resultados que hemos obtenido y 2.19.

Corolario 4.43. *Sean* $(A, \leq)$ *una ss−álgebra y* n *el número de módulos simples (salvo isomorfismos) en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces* $\mathrm{Ext}_A^i(\mathcal{F}({}_A\Delta), \mathcal{I}({}_A\Delta)) = 0$ *para cada* $i > 0$.

Demostración. Consideremos $({}_A\Delta, \leq)$ el *ss* de talla n en $\mathrm{mod}(A)$ (ver 3.2). Luego, el resultado es consecuencia de 2.19 (b) y (c); y de 4.41.

□

Dada una $ss-$álgebra, de 2.26 (e) y de la definición de $T^{\perp}$, se obtiene que $\mathcal{I}({}_A\Delta) = T^{\perp}$. En el siguiente corolario, veremos una prueba diferente , usando 2.20.

Corolario 4.44. *Sea* $(A, \leq)$ *una ss−álgebra,* n *el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $T \in \mathrm{mod}(A)$ *el inclinante característico asociado a* $(A, \leq)$. *Entonces,* $\mathcal{I}({}_A\Delta) = T^{\perp}$.

Demostración. Consideremos el eiss de talla n $({}_A\Delta, \underline{T}, \leq)$ (ver 3.4). En vista de 2.20, tenemos que $\mathrm{Ext}_A^i(\mathcal{F}({}_A\Delta), \mathcal{I}({}_A\Delta)) = 0$ para cada $i > 0$. De 4.41, se sigue que $\mathcal{I}({}_A\Delta)$ es co-resolvente y $\mathrm{Ext}_A^2(\mathcal{F}({}_A\Delta), \mathcal{I}({}_A\Delta)) = 0$.

Como además $\mathrm{pd}(T)$ es finita, aplicando 4.38 (a), obtenemos $T' \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante y básico, tal que $\mathcal{I}(\Theta) = (T')^{\perp}$. Finalmente, por 4.39 concluimos que $T \cong T'$. Por lo tanto, $\mathcal{I}({}_A\Delta) = (T')^{\perp} = T^{\perp}$.

□

Dualizando 4.38, se tiene lo siguiente.

Teorema 4.45. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $\mathcal{P}(\Theta) = {}^{\perp}T$ *para algún* $T \in \mathrm{mod}(A)$ *co-inclinante, entonces* Q *es un sumando directo de* T*; donde* $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ *es el epss asociado a* $(\Theta, \leq)$.

(b) *Existe* $T \in \mathrm{mod}(A)$ *co-inclinante tal que* $\mathcal{P}(\Theta) = {}^{\perp}T$ *si y sólo si* $\mathrm{id}(Q)$ *es finita y* $\mathrm{Ext}_A^2(\mathcal{P}(\Theta), \mathcal{F}(\Theta)) = 0$.

Demostración. Es similar a la prueba de 4.38, por dualidad.

□

Proposición 4.46. *Sea A una $K-$álgebra y n el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\text{mod}(A)$*. Si $(A, \leq)$ es una ss−álgebra, T el inclinante asociado a $(A, \leq)$ y $\mathcal{F}({}_A\Delta) = \mathcal{P}^{<\infty}(A)$, entonces* $\text{pfd}(A) = \text{pd}({}_AT) \leq n - 1$.

Demostración. Consideremos el eiss de talla n $({}_A\Delta, \underline{T}, \leq)$ (ver 3.4). Por 4.14 y la hipótesis se tiene que $\text{pfd}(A) = \text{pd}(\mathcal{P}^{<\infty}(A)) = \text{pd}(\mathcal{F}({}_A\Delta)) = \text{pd}(T) \leq n-1$.

□

Proposición 4.47. *Sean $(A, \leq)$ una ss−álgebra y $T \in \text{mod}(A)$ el inclinante característico asociado a $(A, \leq)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathcal{F}({}_A\Delta) = \mathcal{P}^{<\infty}(\text{mod}(A))$.

(b) $\text{add}(T)^\wedge \subseteq \mathcal{F}({}_A\Delta)$.

(c) $\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}({}_A\Delta)) \subseteq \mathcal{F}({}_A\Delta)$

Demostración. ((a)⇒(b)) Por 4.33 (e), se tiene si $X \in \text{add}(T)^\wedge$ entonces $\text{pd}(X) < \infty$. De donde $X \in \mathcal{P}^{<\infty}(A) = \mathcal{F}({}_A\Delta)$ para cada $X \in \text{add}(T)^\wedge$.
((b)⇒(c)) Como $(A, \leq)$ es una $ss-$álgebra, sabemos que $\mathcal{I}({}_A\Delta) = T^\perp$. Luego, por 4.33 y (b), tenemos que $\mathcal{P}^{<\infty}(T^\perp) = \text{add}(T^\perp) \subseteq \mathcal{F}({}_A\Delta)$.
((c)⇒(a)) En vista de 4.14 (a) tenemos que $\text{pd}(\mathcal{F}({}_A\Delta)) \leq n-1$; y por lo tanto, $\mathcal{F}({}_A\Delta) \subseteq \mathcal{P}^{<\infty}(A)$.

Probemos ahora que $\mathcal{P}^{<\infty}(A) \subseteq \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Sea $X \in \text{mod}(A)$ tal que $\text{pd}(X) < \infty$. Por 4.9, existe una sucesión exacta

$$0 \to X \to Y_X \to Q_X \to 0,$$

tal que $Y_X \in \mathcal{I}({}_A\Delta)$ y $Q_X \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$. Dado que $\text{pd}(Q_X) \leq \text{pd}(\mathcal{F}({}_A\Delta)) \leq n-1$, se tiene por 5.74 (a) que $\text{pd}(Y_X)$ también es finita. Luego, (a) implica que $Y_X \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$.

Finalmente, del hecho de que $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ es resolvente (ver 2.19), concluimos que $X \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$.

□

Proposición 4.48. *Sean A una $K-$álgebra, $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\text{mod}(A)$*, $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ el epss de talla t asociado a $(\Theta, \leq)$, $Q := \bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)$, $B' := \text{End}({}_AQ)$ y T es el inclinante característico asociado a la ss-álgebra $(B', \leq^{op})$. Si* $\text{pd}(Q) \leq 1$, *entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}(\mathrm{Hom}_A(Q, {}_AM)) \leq \mathrm{pd}(M)$ *para cada* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$.

(b) $\mathrm{pd}(\mathcal{F}({}_{B'}\Delta)) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta))$, *en particular* $\mathrm{pd}({}_{B'}T) \leq \mathrm{pd}(Y)$.

(c) *Si* $\mathcal{F}({}_{B'}\Delta)$ *es cerrada por submódulos, entonces* B' *es casi-hereditaria,* $\mathrm{gldim}(B') \leq 1 + \mathrm{pd}(Y)$ *y* $\mathrm{id}({}_{B'}T) \leq 1$.

Demostración. Ver [16, Proposición 3.20].

□

Proposición 4.49. *Sean* $(A, \leq)$ *una* $ss-$*álgebra y* $T \in \mathrm{mod}(A)$ *el inclinante característico asociado a* $(A, \leq)$. *Si* $\mathcal{F}({}_A\Delta)$ *es cerrada por submódulos, entonces* A *es hereditaria y* $\mathrm{gldim}(A) \leq 1 + \mathrm{pd}(T)$.

Demostración. [16, Proposición 3.21]

Teorema 4.50. *Sea* A *un* $K-$*álgebra básica. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $(A, \leq)$ *es casi-hereditaria.*

(b) $\mathrm{gldim}(A) < \infty$ *y existe* $(\Theta, \leq)$ *un ss de talla* t *tal que* ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$ *y* $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$.

Demostración. ((a)⇒ (b)) Por 3.2, tenemos que $({}_A\Delta, \leq)$ es un *ss* de talla n en $\mathrm{mod}(A)$. Como $(A, \leq)$ es casi-hereditaria, tenemos que ${}_AA \in \mathcal{F}({}_A\Delta)$ y $\mathrm{gldim}(A)$ es finita. Ahora, como $\mathcal{I}({}_A\Delta)$ es co-resolvente, se sigue por 4.36 (a) que $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$.
((b)⇒(a)) Sean $(\Theta, \leq)$ un *ss* de talla t en $\mathrm{mod}(A)$ tal que ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$ y $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{F}(\Theta), \mathcal{I}(\Theta)) = 0$; y $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ el eiss asociado a $(\Theta, \leq)$. Por 4.36 (c), tenemos que Y es inclinante. Por 3.60, esto es equivalente a que $(A, \leq)$ sea una $ss-$álgebra. Finalmente, el resultado es consecuencia de 2.17.

□

Lema 4.51. *Sean* A *una* $K-$*álgebra,* $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ *un eiss de talla* t *en* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $B := \mathrm{End}({}_AY)$. *Si* $\mathcal{F}({}_B\Delta) = \mathcal{P}^{<\infty}(B)$, *entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $0 \to M \to Y_0 \xrightarrow{f} Y_1 \to 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$ *con* $Y_0, Y_1 \in \mathrm{add}(Y)$, *entonces* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$.

(b) *Si* $0 \to M \to Y_0 \xrightarrow{f} K \to 0$ *es una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$ *con* $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$ *y* $K \in \mathcal{F}(\Theta)$, *entonces* $M \in \mathcal{F}(\Theta)$.

(c) $\mathcal{F}(\Theta) = \mathrm{add}(Y)^{\vee}$.

Demostración. (a) Sea $\xi : 0 \to M \to Y_0 \xrightarrow{f} Y_1 \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$ con Y_0, $Y_1 \in \mathrm{add}(Y)$.

Consideremos el funtor $F := \mathrm{Hom}_A(-, {}_AY_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$. Aplicando dicho funtor a la sucesión exacta ξ y usando el hecho de que $\mathrm{Ext}^1_A(Y, Y) = 0$, obtenemos la sucesión exacta

$$F(\xi) : 0 \to F(Y_1) \xrightarrow{F(f)} F(Y_0)Y_1 \to F(M) \to 0.$$

Como $F(Y_0)$, $F(Y_1) \in \mathcal{F}({}_B\Delta) = \mathcal{P}^{<\infty}(B)$, por 5.74, concluimos que $F(M) \in \mathcal{P}^{<\infty}(B) = \mathcal{F}({}_B\Delta) = F(\mathcal{F}(\Theta))$.

Finalmente, aplicando el funtor $G := \mathrm{Hom}_B(-, {}_AY_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(A)$ a la sucesión $F(\xi)$ y usando 3.45, concluimos que $M \cong G(F(M)) \in \mathcal{F}(\Theta)$.

(b) Sea $\xi : 0 \to M \to Y_0 \xrightarrow{f} K \to 0$ es una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$ con $Y_0 \in \mathrm{add}(Y)$ y $K \in \mathcal{F}(\Theta)$. Consideremos el funtor $F := \mathrm{Hom}_A(-, {}_AY_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$. Aplicando dicho funtor a la sucesión exacta ξ y usando el hecho de que $\mathrm{Ext}^1_A(Y, Y) = 0$, obtenemos la sucesión exacta

$$F(\xi) : 0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(Y_0) \to F(M) \to 0.$$

Como $F(Y_0)$, $F(K) \in F(\mathcal{F}(\Theta)) = \mathcal{F}({}_B\Delta) = \mathcal{P}^{<\infty}(B)$, se sigue por 5.74 que $F(M) \in \mathcal{P}^{<\infty}(B) = \mathcal{F}({}_B\Delta)$.

Finalmente, aplicando el funtor $G := \mathrm{Hom}_B(-, {}_AY_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(A)$ y usando 3.45, concluimos que $M \cong G(F(M)) \in \mathcal{F}(\Theta)$.

(c) De 4.25 se sigue que $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \mathrm{add}(Y)^{\vee}$. Por (a) y (b) se tiene la otra contención.

□

4.4. Homología relativa, categorías inclinantes y temas afines.

En ésta sección, veremos algunos resultados que nos servirán para probar los resultados de la siguiente sección y que están relacionados con los sistemas estratificantes.

Lema 4.52. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \sup\{\mathrm{pd}_{\{X\}}(M) : X \in \mathcal{X}\}$ *y* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \sup\{\mathrm{id}_{\{X\}}(M) : X \in \mathcal{X}\}$.

(b) $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

(c) *Si* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *entonces* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M)$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{S} := \{\mathrm{pd}_{\{X\}}(M) : X \in \mathcal{X}\}$. Es claro que $\mathcal{S}$ está acotado superiormente por $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M)$. Consecuentemente, $\sup(\mathcal{S}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M)$. Por otro lado, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) = \min\{n : \mathrm{Ext}^i_A(M, X) = 0\,\forall\, i > n\,\forall\, X \in \mathcal{X}\} \leq \sup\{\min\{n : \mathrm{Ext}^i_A(M, X) = 0\,\forall\, i > n\} : X \in \mathcal{X}\} = \sup(\mathcal{S})$.

Por dualidad, se prueba que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \sup\{\mathrm{id}_{\{X\}}(M) : X \in \mathcal{X}\}$.

(b) El hecho de que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$, se sigue de lo anterior y de la definición de $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ y $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. En efecto, $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \sup\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(Y) : Y \in \mathcal{Y}\} = \sup\{\sup\{\mathrm{pd}_X(Y) : X \in \mathcal{X}\} : Y \in \mathcal{Y}\} = \sup\{\sup\{\mathrm{id}_Y(X) : X \in \mathcal{X}\} : Y \in \mathcal{Y}\} = \sup\{\mathrm{id}_Y(\mathcal{X}) : Y \in \mathcal{Y}\} = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

(c) Si $M = 0$ es clara la igualdad. Si $M \notin \mathcal{X}^\vee$, entonces $M \notin \mathcal{Y}^\vee$; y por lo tanto, también se tiene la igualdad. Ahora, si $M \notin \mathcal{Y}^\vee$, tenemos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M) = \infty \geq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M)$.

Si $M \in \mathcal{Y}^\vee$ entonces $M \in \mathcal{X}^\vee$, ya que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. Luego, $\{n : M$ tiene $\mathcal{X}-$co-resolución de longitud $n\} \supseteq \{n : M$ tiene $\mathcal{Y}-$co-resolución de longitud $n\}$. De donde, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{X}}(M) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(M)$.

$\square$

En [17] O. Mendoza y C. Sáenz trabajaron con ideas de Auslander, Buchweitz y Reiten, sobre la relación entre la dimensión inyectiva relativa y la dimensión de co-resolución de un módulo dado. En este artículo, ellos tuvieron como meta establecer algunos resultados de categorías inclinantes, que pueden ser aplicados tanto a módulos inclinantes, como a sistemas estratificantes. Una de sus motivaciones fue haber obtenido que para un eiss $(\Theta, \underline{Y}, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(A)$ se tiene que $\mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}(Y)}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq t - 1$; y que dado un epss $(\Theta, \underline{Q}, \leq)$ de talla t en $\mathrm{mod}(A)$, se tiene que $\mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(Q)}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq t - 1$.

Teorema 4.53. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerradas por isomorfismos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$ *para cada* $L \in \mathrm{mod}(A)$.

(b) *Sean* $\mathcal{Y} = \mathcal{I}(\mathcal{X})$ *o bien* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ *con* $\mathcal{Y}$ *cerrada por sumandos. Si* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$, *entonces* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$ *para cada* $L \in \mathcal{Y}^\vee$.

Demostración. (a) Podemos suponer que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) < \infty$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L) < \infty$; pues si uno de los dos fuese infinita no habría nada que probar.

Sean $\alpha{:=}\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y})$ y $d{:=}\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$. Probaremos (a) por inducción sobre d.

Si $d = 0$, entonces tenemos la sucesión exacta $\xi : 0 \to L \to Y \to 0$, con $Y \in \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{Y}$ es cerrada por isomorfismos, se sigue que $L \in \mathcal{Y}$. En particular, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \alpha$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L) = 0$.

Si $d = 1$, tenemos la sucesión exacta $\xi : 0 \to L \to Y_0 \to Y_1 \to 0$, con $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$. Sea $M \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ a ξ, obtenemos para cada i, la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M, Y_1) \to \mathrm{Ext}_A^{i}(M, L) \to \mathrm{Ext}_A^{i}(M, Y_0).$$

Por hipótesis, $\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M, Y_1) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^{i}(M, Y_0) = 0$ para cada $i > \alpha + 1$ y $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathrm{Ext}_A^{i}(-, L)|_{\mathcal{X}} = 0$ para cada $i > \alpha + 1$, concluyéndose que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \alpha + 1$.

Sea $d \geq 2$. Consideremos la $\mathcal{Y}-$co-resolución de L de longitud d

$$\xi : 0 \to L \to Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \to \cdots \xrightarrow{f_{d-1}} Y_d \to 0.$$

Sea $I_0 := \mathrm{Im}(f_0)$. Entonces $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(I_0) = d - 1$; y por hipótesis de inducción, se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(I_0) \leq \alpha + d - 1$.

Sea $M \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ a la sucesión exacta

$$0 \to L \to Y_0 \to I_0 \to 0,$$

obtenemos para $i > 0$ la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M, I_0) \to \mathrm{Ext}_A^{i}(M, L) \to \mathrm{Ext}_A^{i}(M, Y_0).$$

Como $\mathrm{Ext}_A^{i-1}(M, I_0) = 0$ y $\mathrm{Ext}_A^{i}(M, Y_0)$ para cada $i \geq \alpha + d + 1$, obtenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \alpha + d$.

(b) Sean $L \in \mathcal{Y}^{\vee}$ y $d := \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(L)$. Supongamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$.

Probaremos por inducción sobre d, que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = d$.

Si $d = 0$, existe $Y \in \mathcal{Y}$ tal que $L \cong Y$. En particular $L \in \mathcal{Y}$, pues $\mathcal{Y}$ es cerrada por isomorfismos. Luego, el hecho de que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$ implica que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = 0$.

Si $d = 1$, tenemos la sucesión exacta

$$\xi : 0 \to L \to Y_0 \to Y_1 \to 0,$$

con $Y_0, Y_1 \in \mathcal{Y}$ y $L \notin \mathcal{Y}$. Aplicándole el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ a ξ y usando el hecho de que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$; tenemos que $\mathrm{Ext}_A^{i}(M, Y_1) = 0 = \mathrm{Ext}_A^{i}(M, Y_0)$. De ahí que $\mathrm{Ext}_A^{i}(M, L) = 0$ para $i > 1$; y con ello, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq 1$. Ahora veamos que $\mathrm{Ext}_A^{1}(-, L)|_{\mathcal{X}} \neq 0$, pues esto implica que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = 1$.

En efecto, si ocurriera que $\mathrm{Ext}_A^{1}(-, L)|_{\mathcal{X}} = 0$, entonces tendríamos que $L \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Luego, en el caso de que $\mathcal{Y} = \mathcal{I}(\mathcal{X})$, llegaríamos a la contradicción $L \in \mathcal{Y}$. Mientras que en el caso de que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, con $\mathcal{Y}$ cerrada por sumandos directos, el hecho de que $\mathrm{Ext}_A^{1}(-, L) = 0$ implicaría que la sucesión ξ se escinda; y por lo tanto tendríamos que $L \in \mathcal{Y}$, lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $d \geq 2$. Consideremos la $\mathcal{Y}-$co-resolución de L de longitud d,

$$\xi : 0 \to L \to Y_0 \xrightarrow{f_0} Y_1 \to \cdots \xrightarrow{f_{d-1}} Y_d \to 0.$$

con $Y_i \in \mathcal{Y}$ para cada i. Como $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathrm{Im}(f_0)) = d-1$, se sigue por hipótesis de inducción que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Im}(f_0)) = d-1$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathrm{Im}(f_0))+1 = d$. Veamos que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L)$ no es menor que d. En efecto, si ocurriese ésto, tendríamos que $\mathrm{Ext}^d_A(-, L)|_{\mathcal{X}} = 0$. Luego, considerando la sucesión exacta $0 \to L \to Y_0 \to K_0 \to 0$ y el funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, con $M \in \mathcal{X}$; obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^{d-1}_A(M, Y_0) \to \mathrm{Ext}^{d-1}_A(M, K_0) \to \mathrm{Ext}^d_A(M, L).$$

Entonces, dado que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = 0$, $\mathrm{Ext}^{d-1}_A(-, Y_0)|_{\mathcal{X}} = 0$ y $\mathrm{Ext}^{d-1}_A(-, L)|_{\mathcal{X}} = 0$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^d_A(-, K_0)|_{\mathcal{X}} = 0$. Pero esto nos lleva a la contradicción $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(K_0) \leq (d-1) - 1 = d-2$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = d$.

□

Corolario 4.54. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si $\mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{X}$, entonces* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{id}(M)$ *para cada* $M \in \mathcal{I}^{<\infty}(A)$.

(b) *Si $\mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{X}$, entonces* $\mathrm{ifd}(A) = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}^{<\infty}(A))$.

Demostración. (a) Por 4.53 (b) y dado que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(A)) = 0$; se sigue que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(L) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(A)}(L) := \mathrm{id}(L)$, para cada $L \in \mathcal{I}(A)^{\vee} = \mathcal{I}^{<\infty}(A)$.
(b) De (a) se sigue que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}^{<\infty}(A)) = \sup\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(I) : I \in \mathcal{I}^{<\infty}(A)\} = \sup\{\mathrm{id}(I) : I \in \mathcal{I}^{<\infty}(A)\} = \mathrm{ifd}(A)$.

□

Corolario 4.55. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

(b) *Si* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$ *y $\mathcal{X}$ es cerrado por sumandos directos, entonces*

$$\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M) = \mathrm{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M),$$

para cada $M \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$; y donde $\mathcal{W}(\mathcal{X}) := \mathcal{X} \cap \mathcal{I}(\mathcal{X})$.

Demostración. (a) Es consecuencia inmediata de 4.53 (a).

(b) Dado que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))=0$, se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))=0=\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$. Luego, aplicando 4.53 (b) dos veces, una con $\mathcal{Y}=\mathcal{I}(\mathcal{X})$ y la otra con $\mathcal{Y}=\mathcal{W}(\mathcal{X})$, se obtiene (b).

□

Corolario 4.56. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})\leq \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$.

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))\leq \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))+\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$.

Demostración. Es inmediato de 4.53 (a).

□

Lema 4.57. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ *es co-resolvente en* $\mathrm{mod}(A)$.

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))=0$.

(c) $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{X},\mathcal{I}(\mathcal{X}))=0$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$ (b) Sea $M\in\mathcal{X}$. Como $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, para cada $N\in\mathcal{I}(\mathcal{X})$, existe una sucesión exacta

$$0\to N\to I_0\overset{f_0}{\to} I_1\to\cdots\overset{f_{i-2}}{\to} I_{i-1}\overset{f_{i-1}}{\to}\Omega^{-i+1}(N)\to 0,$$

con $I_m\in\mathcal{I}(A)$ para cada m y $\Omega^{-i+1}(N)\in\mathcal{X}$. De donde, se sigue que

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,N)\cong\mathrm{Ext}^1_A(M,\Omega^{-i+1}(N))=0 \text{ para cada } i>0.$$

Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))=0$.
(b) $\Rightarrow$ (c) Es inmediato de la definición de $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.
(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que $\mathrm{Ext}^2_A(\mathcal{X},\mathcal{I}(\mathcal{X}))=0$. Veamos que $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente. En vista de 1.45, sólo nos resta ver que $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es cerrada por conúcleos de monomorfismos.

Sean $M,N\in\mathcal{I}(\mathcal{X})$. Consideremos la sucesión exacta $\xi:\ 0\to M\overset{f}{\to} N\to C\to 0$. Probaremos que $C\in\mathcal{I}(\mathcal{X})$.

Sea $X\in\mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ a ξ, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}^1_A(X,N)\to\mathrm{Ext}^1_A(X,C)\to\mathrm{Ext}^2_A(X,M).$$

Por hipótesis $\mathrm{Ext}_A^2(X, M) = 0$; y como $N \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$, $\mathrm{Ext}_A^1(X, N) = 0$. De donde $\mathrm{Ext}_A^1(X, C) = 0$, lo cual prueba que $C \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$.

□

Definición 4.58. *Sea A una $K-$álgebra. Decimos que un funtor $F : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(\mathbb{Z})$ es **finitamente generado** si existe un epimorfismo $\mathrm{Hom}_A(-, C) \to F$, para algún $C \in \mathrm{mod}(A)$.*

Ejemplo 4.59. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de objetos en $\mathrm{mod}(A)$. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados.*

(a) *$\mathcal{C}$ es contravariantemente finita en $\mathrm{mod}(A)$ si y sólo si para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$, el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, X)|_{\mathcal{C}}$ es finitamente generado.*

(b) *$\mathcal{C}$ es covariantemente finita en $\mathrm{mod}(A)$ si y sólo si para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$, el funtor $\mathrm{Hom}_A(X, -)|_{\mathcal{C}}$ es finitamente generado.*

Proposición 4.60. *Sean A una $K-$álgebra, $C \in \mathrm{mod}(A)$ y $\mathcal{Y}$ una subcategoría de $\mathrm{mod}(A)$ cerrada por extensiones y sumandos directos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *$\mathrm{Ext}_A^1(C, -)|_{\mathcal{X}}$ es finitamente generado, si y sólo si existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to X_C \to Q_C \to C \to 0$ con $Q_C \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ y $X_C \in \mathcal{X}$. Dualmente, $\mathrm{Ext}_A^1(-, C)|_{\mathcal{X}}$ es finitamente generado si y sólo si existe una sucesión $\xi : 0 \to C \to Y \to X' \to 0$, con $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $X' \in \mathcal{X}$.*

(b) *Si $\mathcal{X}$ es covariantemente finita, entonces $\mathrm{Ext}_A^1(C, -)|_{\mathcal{X}}$ es finitamente generado y $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ es contravariantemente finita.*

(c) *Si $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita, entonces $\mathrm{Ext}_A^1(-, C)|_{\mathcal{X}}$ es finitamente generado e $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es covariantemente finita.*

Demostración. Ver [7, Proposición 2.14] y [22, Proposición 3.2].

□

Lema 4.61. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ clases de objetos en $\mathrm{mod}(A)$ tales que $\mathrm{Ext}_A^1(-, C)|_{\mathcal{X}}$ es finitamente generado, para cada $C \in \mathcal{Y}$. Si $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones y sumandos directos, entonces las siguientes condiciones se satisfacen, para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$.*

(a) $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M)\}$.

(b) *Si $\mathcal{X} \cup \mathcal{I}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$, entonces $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(M) = \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M)\}$.*

Demostración. (a) Sea $M \in \mathrm{mod}(A)$. Asumiremos que $d := \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)$ y $d' := \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M)$ son finitas, ya que en otro caso no hay hada que probar. Por 4.60, para cada $N \in \mathcal{Y}$ existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to N \to Y_N \to N' \to 0$ con $Y_N \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $N' \in \mathcal{X}$.

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ a la sucesión ξ; y usando el hecho de que $d = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M)$, obtenemos para cada $i > d$ la sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Ext}^i_A(Y_N, N) \to \mathrm{Ext}^i_A(N, M) \to 0.$$

Dado que $\mathrm{Ext}^i_A(Y_N, N) = 0$ para cada $i > d'$, obtenemos que $\mathrm{Ext}^i_A(-, M)|_{\mathcal{Y}} = 0$ para cada $i > \max\{d, d'\}$. Por lo tanto, $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \max\{d, d'\}$.
(b) Como $\mathcal{X} \cup \mathcal{I}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$, se tiene que $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(M) \geq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M)\}$. Luego, (b) se sigue de (a).

□

Corolario 4.62. *Sean A una $K-$álgebra, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y sumandos directos tal que* $\mathrm{Ext}^1_A(-, C)|_{\mathcal{X}}$ *finitamente generado para cada $C \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen, para cualquier $M \in \mathrm{mod}(A)$.*

(a) $\mathrm{id}(M) = \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M)\}$.

(b) $\mathrm{pd}(M) = \max\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(M)\}$.

Demostración. (a) Se tiene por 4.61 tomando $\mathcal{Y} := \mathrm{mod}(A)$ y usando el hecho de que $\mathrm{id}_{\mathrm{mod}(A)}(M) = \mathrm{id}(M)$.
(b) Es similar a la prueba hecha en (a), por dualidad.

□

Teorema 4.63. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una subcategoría de* $\mathrm{mod}(A)$ *contravariantemente finita, cerrada por extensiones y sumandos directos. Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1$.

(b) $\mathrm{ifd}(A) \leq \max\{\mathrm{ifd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}), \mathrm{id}(\mathcal{X}) + 1)\}$.

(c) *Si $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, entonces* $\mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. *Más aún,* $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) \leq 1 + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ *y* $\mathrm{id}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}(\mathcal{I}(X)) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1$

(d) *Sea $\mathcal{W}(\mathcal{X}) := \mathcal{I}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$. Si $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, entonces se tiene lo siguiente.*

  (i) *Si* $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$ *entonces* $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.

(ii) $\operatorname{gldim}(A) = \operatorname{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.

(iii) *Si* $\mathcal{P}^{\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \subseteq (\mathcal{W}(\mathcal{X}))^{\vee}$ *y* $\operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$, *entonces* $\operatorname{pfd}(A) = \operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$.

Demostración. (a) De 4.60 (c) se sigue que el funtor $\operatorname{Ext}^1_A(-, C)|_{\mathcal{X}}$ es finitamente generado, para cada $C \in \operatorname{mod}(A)$. Veamos que $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1$.

Sean $\alpha := \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$ y $\beta := \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$. Supongamos que α y β son finitas. Por 4.60 (a) y (b), existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to C \to Y \to X' \to 0$ con $Y \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $X' \in \mathcal{X}$.

Sea $M \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(M, -)$ a ξ, obtenemos para cada $i \geq \alpha + 1$ la sucesión exacta

$$0 \to \operatorname{Ext}^i_A(M, X') \to \operatorname{Ext}^{i+1}_A(M, C) \to 0.$$

Por lo tanto, para cada $i \geq \alpha+1$ tenemos que $\operatorname{Ext}^i_A(-, X')|_{\mathcal{X}} \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_A(-, C)|_{\mathcal{X}}$. Por otro lado, dado que $X' \in \mathcal{X}$, se tiene por 4.55 (a) que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(X') \leq \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \operatorname{coresdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) = \alpha + \beta$. Luego, $\operatorname{Ext}^i_A(-, X')|_{\mathcal{X}} = 0$ para cada $i \geq \alpha + \beta + 1$.

Entonces, para cada $M \in \mathcal{X}$ obtenemos que $\operatorname{Ext}^i_A(M, C) = 0$ para cada $i \geq \max\{\alpha + 1, \alpha + \beta + 1\}$. Esto implica por 5.74 que $\operatorname{pd}(M) \leq \alpha + \beta + 1$. Por lo tanto, $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) = \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\operatorname{mod}(A)) \leq \alpha + \beta + 1$.

(b) Supongamos que $\operatorname{id}(\mathcal{X})$ es finita. Sea $X \in \mathcal{I}^{<\infty}(A)$. Como $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita, por 4.60 (c), existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to X \to Y_X \to X' \to 0$, con $Y_X \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $X' \in \mathcal{X}$. Luego, como $\operatorname{id}(\mathcal{X})$ es finita, se sigue por el dual de 5.74 que $\operatorname{id}(Y_X)$ es finita. Por lo tanto, $\operatorname{id}(X) \leq \max\{\operatorname{id}(Y_X), \operatorname{id}(X') + 1\} \leq \max\{\operatorname{ifd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})), \operatorname{id}(\mathcal{X}) + 1\}$.

(c) Como $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, se sigue por 4.57 que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$. Por 4.62 (a) se tiene que $\operatorname{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \max\{\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})), \operatorname{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))\}$. Por otro lado, la primera desigualdad se tiene por (a).

Veamos finalmente que $\operatorname{id}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1$. Primero, usando (a) tenemos que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1$. Luego, por 4.56 y 4.62, concluimos que $\operatorname{id}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1$.

(d) (i) Sea $\operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$ finita. Veamos primero que $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) = \operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$. En efecto, como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, tenemos que $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}) = \operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$ (ver 4.64). Por otro lado, como $\mathcal{W}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$, tenemos que $\operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) \leq \operatorname{pd}(\mathcal{X})$.

Por lo tanto, $\operatorname{pd}(\mathcal{X})$ es finita, pues $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) = \operatorname{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$.

Ahora veamos que $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. Basta probar que $\mathrm{pfd}(A) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$; pues la desigualdad $\mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{pfd}(A)$ se tiene del hecho de que $\mathcal{I}(\mathcal{X}) \subseteq \mathrm{mod}(A)$.

Sea $M \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$. Por 4.60, existe una sucesión exacta

$$\xi : 0 \to M \to L \to \tilde{N} \to 0,$$

con $L \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $\tilde{N} \in \mathcal{X}$. Como $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) < \infty$ y $\mathrm{pd}(M) < \infty$, se sigue de 5.74 que $\mathrm{pd}(L) < \infty$. Por lo tanto $\mathrm{pd}(L) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. Finalmente concluimos que $\mathrm{pd}(M) \leq \max\{\mathrm{pd}(L), \mathrm{pd}(\tilde{N}) - 1\} \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$ (ya que $\mathrm{pd}(\tilde{N}) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$).

Por lo tanto, $\mathrm{pfd}(A) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.

Observación 4.64. $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee})$.

Es suficiente probar que $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$, *ya que la desigualdad* $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee})$ *se debe a que* $\mathcal{W}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$. *Ahora, dado* $M \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$ *y* $d := \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M)$; *haciendo inducción sobre* d, *se puede probar que* $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$. *Por lo tanto,* $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$.

(ii) Es similar a la prueba hecha en (i).

(iii) Probemos finalmente que si $\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$. y $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$, entonces $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$.

Por (ii) sabemos que $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. Veamos que $\mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$. Como $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$ es finita, tenemos que $\mathcal{W}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$; y por lo tanto, $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.

Así que sólo nos resta probar que $\mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$. En efecto, por 4.64 y en vista de que $\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, obtenemos que $\mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{pd}(\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$.

□

Definición 4.65. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $\mathcal{X}$ *una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y sumandos directos.*

(a) *Decimos que* $\mathcal{X}$ *es una categaría* ***parcialmente inclinante*** *si* $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ *y* $\mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ *son finitas.*

(b) *Decimos que* $\mathcal{X}$ *es una categoría* ***inclinante****, si* $\mathcal{X}$ *es parcialmente inclinante y* ${}_A A \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, *donde* $\mathcal{W}(\mathcal{X}) := \mathcal{I}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$.

Ejemplo 4.66. *Si* $(A, \leq)$ *es una ss−álgebra casi-hereditaria, entonces* $\mathcal{X} := \mathcal{F}({}_A\Delta)$ *es una categoría inclinante.*

Definición 4.67. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y sumandos directos.*

(a) *Decimos que $\mathcal{X}$ es una categoría* ***parcialmente co-inclinante*** *si* $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ *y* $\operatorname{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ *son finitas.*

(b) *Decimos que $\mathcal{X}$ es una categoría* ***co-inclinante****, si $\mathcal{X}$ es co-inclinante y $D(A_A) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})^\wedge$, donde $\mathcal{Z}(\mathcal{X}) := \mathcal{P}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$.*

Proposición 4.68. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$ *contravariantemente finita, cerrada por extensiones y sumandos directos. Si $_AA \in \mathcal{X}$ entonces $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.*

Demostración. Es claro, por definición, que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. Veamos la otra contención.

Sea $C \in \operatorname{mod}(A)$ tal que $\operatorname{Ext}^1_A(C, \mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$. Como $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita en $\operatorname{mod}(A)$, existe una $\mathcal{X}-$aproximación minimal a derecha de C, $f : X_C \to C$. Ahora, como $C \in \operatorname{mod}(A)$, existe un epimorfismo $g : A^n \twoheadrightarrow C$ en $\mathcal{X}$, pues $_AA \in \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ es cerrada por extensiones.

Luego, como f es una aproximación a derechas existe $h : A^n \to X_C$ tal que $g = fh$. En particular, f es un epimorfismo.

Así, obtenemos la sucesión exacta $\xi : 0 \to \operatorname{Ker}(f) \to X_C \xrightarrow{f} C \to 0$. Por el Lema de Wakamatsu, $\operatorname{Ker}(f) \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$. Por lo tanto, la sucesión ξ se escinde, ya que $\operatorname{Ext}^1_A(C, \mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$. De donde $C \in \mathcal{X}$.

□

Lema 4.69. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\operatorname{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y sumandos directos. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Sea $\mathcal{X}$ covariantemente finita. Entonces, $\mathcal{X}$ es parcialmente inclinante si y sólo si* $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) < \infty$.

(b) *Sea $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita. Entonces, $\mathcal{X}$ es parcialmente co-inclinante si y sólo si* $\operatorname{id}(\mathcal{X}) < \infty$.

Demostración. Probaremos sólo (a), pues (b) se tiene por dualidad. Para ello, consideremos las siguientes obsevaciones.

Observación 4.70. $\operatorname{pd}(M) = \operatorname{máx}\{\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(M), \operatorname{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(M)\}$ *para cada $M \in \mathcal{X}$. Sea $\mathcal{Y} :=$* $\operatorname{mod}(A)$. *Por 4.60 (b), se tiene que* $\operatorname{Ext}^1_A(C, -)|_{\mathcal{X}}$ *es finitamente generado para cada $C \in \mathcal{Y}$. Luego, por 4.61 se tiene que* $\operatorname{pd}(M) = \operatorname{pd}_{\mathcal{Y}}(M) = \operatorname{máx}\{\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(M), \operatorname{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(M)\}$ *para cada $M \in \mathcal{X}$.*

Observación 4.71. $\mathrm{pd}(M) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))}(M)\}$ *para cada* $M \in \mathcal{X}$. *En efecto, por 4.60 (b) y (c) tenemos que la categoría* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ *es contravariantemente finita y* $\mathrm{Ext}^1_A(-, C)|_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}$ *es finitamente generado para cada* $C \in \mathrm{mod}(A)$. *Luego, por 4.62 obtenemos* $\mathrm{pd}(M) = \text{máx}\{pd_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(M), \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))}(M)\}$ *para cada* $M \in \mathcal{X}$.

Si $\mathcal{X}$ es parcialmente inclinante, entonces $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$; y por lo tanto, de 4.70 concluimos que $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) < \infty$.

Recíprocamente, si $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) < \infty$, entonces tenemos que $\mathrm{pd}(M) < \infty$ para cada $M \in \mathcal{X}$. Luego, por 4.70 y 4.71 tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(M) < \infty$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(M) < \infty$ para cada $M \in \mathcal{X}$. De donde $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ y $\mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ son finitas; probándose que $\mathcal{X}$ es parcialmente inclinante.

□

Proposición 4.72. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $\mathcal{X}$ *una subcategoría contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones, sumandos directos y tal que* $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ *es co-resolvente. Entonces, se tiene lo siguiente.*

(a) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ *es finita si y sólo si* $\mathrm{pd}(\mathcal{X})$ *es finita si y sólo si* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A))$ *es finita. Más aún,* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) = \mathrm{pd}(\mathcal{X})$.

(b) *Si* $\mathrm{pd}(\mathcal{X})$ *es finita, entonces*

$$\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)).$$

Si además, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{X}$, *entonces* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A))$.

Demostración. (a) Observemos que para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, tenemos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) \leq \max\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M), 1\}$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) \leq \max\{\mathrm{pd}(\mathcal{X}), 1\}$. Luego, el hecho de que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) < \infty$ implica por 4.63 que $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) < \infty$. Entonces, por la observación, $\mathcal{I}(\mathcal{X})^{\vee} = \mathrm{mod}(A)$. Finalmente, por 4.53 concluimos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) = \mathrm{pd}(\mathcal{X})$, probándose (a).
(b) Por (a) obtenemos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) = \mathrm{pd}(\mathcal{X}) \geq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Por otro lado, como $\mathrm{pd}(\mathcal{X})$ es finita y $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{X}$, se sigue por 4.53 y el resultado dual de 4.54 que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{X})$.

□

Proposición 4.73. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $\mathcal{X}$ *una subcategoría contravariantemente finita en* $\mathrm{mod}(A)$ *cerrada por extensiones y sumandos directos. Si* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = 0$, *entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si* $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$ *es finita, entonces* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$ *y* $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$.

(b) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M)$ *para cada* $M \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$.

Demostración. (a) Dado que $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita y cerrada por extensiones, se sigue por 4.60 que para cada $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to X \to W \to X' \to 0$, con $W \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$ y $X' \in \mathcal{X}$.

Sea $X \in \mathcal{X}$, $X_{-1} := X$ y $d := \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Usando la sucesión ξ podemos construir las sucesiones $\xi_i := 0 \to X_{i-1} \to W_i \to X_i \to 0$, con $W_i \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$ y $X_i \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(X_d, -)$ a la sucesión ξ_i obtenemos que $\mathrm{Ext}^j_A(X_d, X_i) \cong \mathrm{Ext}^{j+1}_A(X_d, X_{i-1})$, ya que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = 0$. Luego,

$$\mathrm{Ext}^1_A(X_d, X_{d-1}) \cong \mathrm{Ext}^2_A(X_d, X_{d-2}) \cong \cdots \cong \mathrm{Ext}^{d+1}_A(X_d, X_{-1}) = 0,$$

ya que $\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = d$. Por lo tanto, la sucesión ξ_d se escinde, probándose que $W'_d := X_{d-1}$ es un sumando directo de $W_d \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$. De donde, la sucesión exacta

$$\eta : 0 \to X \to W_0 \to W_1 \to \cdots \to W_{d-1} \to W'_d \to 0$$

es una $\mathcal{W}(\mathcal{X})-$co-resolución de M.
(b) Se sigue de 4.53, pues $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = 0$.

□

Teorema 4.74. *Sea A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una subcategoría de* $\mathrm{mod}(A)$ *contravariantemente finita y parcialmente inclinante. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1 < \infty$.

(b) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) \leq \max\{\mathrm{pd}(\mathcal{X}), 1\} < \infty$.

(c) *Si* $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$ *entonces:*

(i) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M) = \mathrm{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M)$ *para cada* $M \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$.

(ii) $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(M) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M)$ *para cada* $M \in \mathrm{mod}(A)$.

(iii) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) = \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$.

(iv) $\mathrm{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$.

Demostración. (a) Por 4.63 (a), tenemos que

$$\mathrm{pd}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) + 1.$$

Así que, para probar el inciso (a), sólo nos falta notar que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) < \infty$; pues $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$ es finita por hipótesis.

Veamos que $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) \leq \max\{\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}), 1\} = \max\{\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}), 1\} < \infty$.. En efecto, sea $M \in \operatorname{mod}(A)$. Sea $d := \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(M)$ finita; y consideremos la sucesión exacta $\xi : 0 \to M \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{s-1} \to \Omega^{-s}(M) \to 0$, con $s = 1$ si $d = 0$ y $s = d$ en otro caso. Entonces, $\operatorname{Ext}^1_A(-, \Omega^{-s}(M))_{|\mathcal{X}} \cong \operatorname{Ext}^{s+1}_A(-, M)_{|\mathcal{X}} = 0$.

De donde, $\Omega^{-s}(M) \in \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y por lo tanto, $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) \leq s$; probándose lo deseado.

Finalmente, como $\mathcal{X}$ es parcialmente inclinante, tenemos que $\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) < \infty$. Por lo tanto, $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) < \infty$.

(b) Por (a) tenemos que $\operatorname{pd}(\mathcal{X})$ es finita; así que sólo nos falta probar que $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\operatorname{mod}(A)) \leq \max\{\operatorname{pd}(\mathcal{X}) + 1\}$.

Notemos primero que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\operatorname{mod}(A)) = \operatorname{pd}(\mathcal{X})$. Luego, como lo notamos en (a), $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) \leq \max\{\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(M), 1\}$ $\forall M \in \operatorname{mod}(A)$; así que tomando supremos concluimos que $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\operatorname{mod}(A)) \leq \max\{\operatorname{pd}(\mathcal{X}), 1\}$.

(c) (i) Se sigue de 4.55(.b)

(ii) Se sigue (b) y 4.53

(iii) De (ii) tenemos que $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) = \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\operatorname{mod}(A)) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\operatorname{mod}(A))$ y $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) = \operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}(\mathcal{X})) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X}))$. Por otro lado, del resultado dual de 4.54 tenemos que $\operatorname{pd}(\mathcal{X}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$, pues $\operatorname{pd}(\mathcal{X})$ es finita.

(iv) Tenemos que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$. Así que en particular, $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = 0$. Veamos primero que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$ y $\operatorname{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) \leq \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$.

Dado que $\mathcal{X}$ es contravariantemente finita y cerrada por extensiones, se sigue por 4.60, que para cada $X \in \mathcal{X}$ existe una sucesión exacta $\xi : 0 \to X \to W \to X' \to 0$, con $W \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$ y $X' \in \mathcal{X}$.

Sea $X \in \mathcal{X}$, $X_{-1} := X$ y $d := \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X})$. Usando la sucesión ξ podemos construir las sucesiones $\xi_i := 0 \to X_{i-1} \to W_i \to X_i \to 0$, con $W_i \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$ y $X_i \in \mathcal{X}$. Aplicando el funtor $\operatorname{Hom}_A(X_d, -)$ a la sucesión ξ_i obtenemos que $\operatorname{Ext}^j_A(X_d, X_i) \cong \operatorname{Ext}^{j+1}_A(X_d, X_{i-1})$, ya que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) = 0$. Luego, $\operatorname{Ext}^1_A(X_d, X_{d-1}) \cong \operatorname{Ext}^2_A(X_d, X_{d-2}) \cong \cdots \cong \operatorname{Ext}^{d+1}_A(X_d, X_{-1}) = 0$, ya que $\operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = d$.

Por lo tanto, la sucesión ξ_d se escinde, probándose que $W'_d := X_{d-1}$ es un sumando directo de $W_d \in \mathcal{W}(\mathcal{X})$. Por lo tanto,

$$\eta : 0 \to X \to W_0 \to W_1 \to \cdots \to W_{d-1} \to W'_d \to 0$$

es una $\mathcal{W}(\mathcal{X})-$coresolución de M.

Finalmente, probemos que $\operatorname{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \operatorname{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$. Se sigue de 4.55 (b) y del hecho que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$, que $\operatorname{id}_{\mathcal{X}}(M) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M) = \operatorname{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(M)$ $\forall M \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$. Como $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, en particular obtenemos que $\operatorname{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \operatorname{coresdim}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) =$

$\mathrm{id}_{\mathcal{W}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$.

□

Lema 4.75. *Sean A una $K-$álgebra, $\mathcal{X}$ una clase de objetos en* $\mathrm{mod}(A)$ *contravariantemente finita, cerrada por extensiones, sumandos directos y* $\mathcal{Y} := \mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. *Si* $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ *es co-resolvente, entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{Y}$ *es resolvente y funtorialmente finita.*

(b) $\mathcal{I}(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}(\mathcal{X})$ *y* $\mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{Y}) = 0$.

Demostración. Ver [17, Lema 3.9].

□

Teorema 4.76. *Sea A una $K-$álgebra, $\mathcal{X}$ una subcategoría contravariantemente finita y parcialmente inclinante de* $\mathrm{mod}(A)$ *y* $\mathcal{Y} := \mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. *Si* $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ *es co-resolvente, entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{Y}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) = \mathrm{pd}(\mathcal{Y}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) = \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$.

(b) $\mathcal{Y}$ *es una subcategoría inclinante, resolvente y funtorialmente finita de* $\mathrm{mod}(A)$.

(c) $\mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) = \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(M)$ *para cada* $M \in \mathcal{Y}^\wedge$.

(d) $\mathcal{Y}^\wedge = \{M \in \mathrm{mod}(A) : \mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) < \infty\} = \mathcal{P}^{<\infty}(A)$.

(e) *Para cada* $M \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$ *se tiene que* $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(M)$.

(f) $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}^\wedge)$.

(g) $\mathrm{gldim}(A) = \mathrm{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. *Más aún, si $\mathcal{X}$ es covariantemente finita, entonces* $\mathrm{gldim}(A) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) + \mathrm{id}(\mathcal{I}(X))$.

Demostración. (a) Por el lema 4.75 tenemos que $\mathcal{Y}$ es contravariantemente finita, cerrada por sumandos directos y extensiones, $\mathcal{I}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{I}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{Y}$. Como $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, se sigue por 4.57 que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = 0$. Luego, por el teorema 4.74 (c) (iii) y (iv) tenemos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) = \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X})) < \infty$.

Ahora, dado que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, se sigue que $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$. Veamos que esto es equivalente a que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})$ sea finita. En efecto, esto se tiene del hecho de que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{id}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}), 1\} = \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}), 1\}$ y $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A)) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}(\mathcal{X}), 1\} < \infty$. Por lo tanto, sólo nos resta probar que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A))$. Como $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) < \infty$ y $\mathcal{P}(A) \subseteq A$, obtenemos por 4.53 y el resultado dual de 4.54, $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{X})$. Así, que por lo anterior tenemos que $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathrm{mod}(A))$.

(b) De (a) se sigue que $\mathrm{pd}(\mathcal{Y}) = \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) = (\mathcal{Y}) < \infty$. Por 4.74 se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{Y})}(\mathcal{Y}) < \infty$. Por lo tanto $\mathcal{Y}$ es parcialmente inclinante. Finalmente, como $\mathcal{I}(\mathcal{Y})$ es co-resolvente, tenemos que $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{W}(\mathcal{Y})) = 0$; lo cual implica por 4.73 que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$. Por lo tanto, $\mathcal{Y}$ es una categoría inclinante, pues $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$; y por lo tanto, $A \in \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$.

Finalmente, por 4.75, sabemos que $\mathcal{Y}$ es resolvente y funtorialmente finita en $\mathrm{mod}(A)$.

(c) Del lema 4.75 se tiene que $\mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{Y}) = 0$. Finalmente (c) se obtiene del resultado dual de 2.1 (b).

(d) Sea $\mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(A) := \{M \in \mathrm{mod}(A) : \mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M) < \infty\}$. Notemos que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{P}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))}(M) \leq \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(M), 1\}$ para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(A) \subseteq \mathcal{Y}^{\wedge}$. Luego, de (c) obtenemos que $\mathcal{Y}^{\wedge} = \mathcal{P}^{<\infty}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(A)$.

Dado que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{Y}$, se sigue que $\mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{resdim}_{\mathcal{P}(A)}(M) = \mathrm{pd}(M)$; y por lo tanto $\mathcal{P}^{<\infty}(A) \subseteq \mathcal{Y}^{\wedge}$. Por otro lado, dado que $\mathrm{pd}(\mathcal{Y}) < \infty$ se tiene que $\mathcal{Y}^{\wedge} \subseteq \mathcal{P}^{<\infty}(A)$.

(e) Por 4.53 (a), tenemos que $\mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(M) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{Y}}(M)$ para cada $M \in \mathcal{Y}^{\wedge}$. Por otro lado, por (a) y (d) tenemos que $\mathcal{Y}^{\wedge} = \mathcal{P}^{<\infty}(A)$ y $\mathrm{pd}(\mathcal{Y}) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$. Finalmente, el resultado se sigue del dual de 4.54, pues $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{Y}$.

(f) Como hemos visto en (a) y (b), $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$ y $\mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) < \infty$. Así que por 4.63 (d) obtenemos que $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. Entonces, el resultado se sigue de (e), pues $\mathcal{P}^{<\infty}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{Y}^{\wedge}$, (ver (d)).

(g) Dado que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{W}(\mathcal{X})^{\vee}$, obtenemos de 4.63 (d) que $\mathrm{gldim}(A) = \mathrm{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$. Ahora, en vista de que $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, se sigue por 4.63 (c) que $\mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.

Así por 4.60 y 4.62 obtenemos que $\mathrm{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{máx}\{\mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})), \mathrm{pd}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))\}$, ya que $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es covariantemente finita y $\mathrm{pd}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$.

Si además $\mathcal{X}$ es covariantemente finita, por 4.60 y 4.62, tenemos que $\mathrm{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \max\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{I}(\mathcal{X})), \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))\}$.

Por otro lado, de 4.56 tenemos que

$$\mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\mathcal{X})}(\mathcal{P}(\mathcal{X})).$$

Por lo tanto, de 4.74 (c), se sigue que

$$\mathrm{pd}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) \leq \mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \max\{\mathrm{pd}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}), \mathrm{pd}_{\mathcal{P}(\mathcal{X})}(\mathcal{X})\} = \mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) + \mathrm{pd}(\mathcal{X}).$$

De lo anterior concluimos que $\mathrm{gldim}(A) \leq \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X})) + \mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X}))$, ya que por (a) se tiene que $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(\mathcal{W}(\mathcal{X}))$.

□

Teorema 4.77. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una subcategoría contravariantemente finita y parcialmente inclinante de* $\mathrm{mod}(A)$. *Si $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, entonces existe $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante, que satisface las siguientes condiciones.*

(a) $\mathcal{I}(\mathcal{X}) = T^{\perp}$ *y* $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{pd}(T)$.

(b) $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(T^{\perp}) \leq \mathrm{pd}(T) + \mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(T)}(\mathrm{add}(T)^{\wedge})$.

(c) $\mathrm{pfd}(A)$ *es finita si y sólo si* $\mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(T)}(\mathrm{add}(T)^{\wedge})$ *es finita.*

(d) *Las siguientes condiciones son equivalentes.*

   (i) $\mathrm{id}(T^{\perp})$ *es finita.*

   (ii) $\mathrm{gldim}(A)$ *es finita.*

   (iii) $T^{\perp} = \mathrm{add}(T)^{\wedge}$ *y* $\mathrm{pfd}(A)$ *es finita.*

   (iv) $\mathrm{pd}(T^{\perp})$ *es finita.*

(e) *Si* $\mathrm{gldim}(A)$ *es finita, entonces* $\mathrm{id}(\mathcal{I}(\mathcal{X})) = \mathrm{id}(T)$.

Demostración. Ver [17, Teorema 4.2].

□

Teorema 4.78. *Sean A una $K-$álgebra y $\mathcal{X}$ una subcategoría contravariantemente finita e inclinante de* $\mathrm{mod}(A)$. *Si existe una sucesión exacta*

$0 \to {}_AA \to X_0 \to \cdots \to X_m \to 0$, *con $X_i \in \mathcal{W}(\mathcal{X}) := \mathcal{I}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}$ para cada $i \in [0, m]$ y $\mathcal{I}(\mathcal{X})$ es co-resolvente, entonces el módulo $T := \bigoplus_{i=0}^{m} X_i$ satisface las siguientes condiciones.*

(a) *T es inclinante.*

(b) $\mathcal{W}(\mathcal{X}) = \mathrm{add}(T)$.

(c) $\mathcal{I}(\mathcal{X}) = T^{\perp}$.

(d) $\mathrm{pd}(\mathcal{X}) = \mathrm{pd}(T)$.

Demostración. Ver [17, Teorema 4.5].

□

4.5. Sistemas estratiticantes como fuentes de categorías parcialmente inclinantes.

En esta sección veremos como los sistemas estratificantes nos proveen de una importante fuente de categorías parcialmente inclinantes o co-inclinantes.

Proposición 4.79. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathcal{F}(\Theta)$ *es una categoría parcialmente inclinante si y sólo si* $\mathrm{pd}(Y)$ *es finita.*

(b) $\mathcal{F}(\Theta)$ *es una categoría inclinante si y sólo si* $\mathrm{pd}(Y)$ *es finita y* ${}_AA \in \mathrm{add}(Y)^{\vee}$.

(c) $\mathcal{F}(\Theta)$ *es una categoría parcialmente coinclinante si y sólo si* $\mathrm{id}(Q)$ *es finita*

(d) $\mathcal{F}(\Theta)$ *es una categoría coinclinante si y sólo si* $\mathrm{id}(Q)$ *es finita y* $D(A_A) \in \mathrm{add}(Q)^{\wedge}$.

Demostración. (a) Se sigue de 4.69 (a) pues $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita (ver 4.8) y $\mathrm{pd}(Y) = \mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta))$, por 4.13.
(b) Se sigue de (a) y del hecho de que $\mathcal{W}(F(\Theta)) = \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{I}(\Theta) = \mathrm{add}(Y)$.
(c) y(d) Son obtenidos dualizando (a) y (b), respectivamente.

□

Con la finalidad de saber cuándo la categoría $\mathcal{F}(\Theta)$ es parcialmente inclinante, es necesario encontrar una cota para la dimensión proyectiva de $\mathcal{F}(\Theta)$. La siguiente proposición nos da una cota para esto en términos de $\mathrm{id}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{I}(\Theta))$. En particular, si $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, entonces obtendremos que $\mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta))$ es finita siempre.

Proposición 4.80. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces* $\mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{I}(\Theta)) + t$ *y* $\mathrm{id}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{P}(\Theta)) + t$.

Demostración. Probaremos que $\mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{I}(\Theta)) + t$. Primero, dado que $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita, cerrada por sumandos directos y extensiones, se sigue por 4.63 (a) que $\mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{I}(\Theta)) + \mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\Theta)}(\mathcal{F}(\Theta)) + 1$. Por otro lado, de 4.25 (a), y del hecho de que $\mathrm{add}(Y) = \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{I}(\Theta)$, obtenemos que $\mathrm{coresdim}_{\mathcal{I}(\Theta)}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{coresdim}_{\mathrm{add}(Y)}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq t - 1$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{id}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{I}(\Theta)) + t$.

De manera similar se prueba que $\mathrm{id}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{pd}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{P}(\Theta)) + t$.

□

El siguiente teorema establece que si $(\Theta, \leq)$ es un *ss* de talla t y $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, entonces t esta acotada por n, donde n es el número de simples (salvo isomorfismos) en $\mathrm{mod}(A)$. Más aún, establece que si $\mathcal{F}(\Theta)$ es una categoría inclinante, entonces $t = n$.

Teorema 4.81. *Sean A una $K-$álgebra, n es el número de simples (salvo isomorfismos) en* $\mathrm{mod}(A)$, *y* $(\Theta, \leq)$ *es un ss de talla t. Si $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq t \leq n$ *y* $\mathrm{id}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq \mathrm{id}(\mathcal{I}(\Theta)) + t$.

(b) *Si* ${}_AA \in \mathrm{add}(Y)^{\vee}$ *entonces la categoría $\mathcal{F}(\Theta)$ es inclinante, Y es inclinante y* $\mathcal{I}(\Theta) = Y^{\perp}$.

Demostración. (a) Dado que $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolventes, se sigue por 4.57 que $\mathrm{id}_{\mathcal{F}(\Theta)}(\mathcal{I}(\Theta)) = 0$. Así, por 4.80 (a) obtenemos que $\mathrm{pd}(Y) = \mathrm{pd}(\mathcal{F}(\Theta)) \leq t$. Ahora bien, por 4.38 existe $T \in \mathrm{mod}(A)$ inclinante tal que $\mathcal{I}(\Theta) = T^{\perp}$ y con Y un sumando directo de él. En particular, $t \leq n$.
(b) De (a) se sigue que $\mathrm{pd}(Y)$ es finita. Por 4.79 (b), concluimos que $\mathcal{F}(\Theta)$ es inclinante.

Ahora, como $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente fnita (4.8), ${}_AA \in \mathrm{add}(Y)^{\vee}$, y $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente; aplicando 4.78, obtenemos que Y es inclinante y $\mathcal{I}(\Theta) = Y^{\perp}$.

□

Corolario 4.82. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t. Si $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente y* ${}_AA \in \mathrm{add}(Y)^{\vee}$, *entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pfd}(A) \leq \mathrm{pd}(Y) + \mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(Y)}(\mathrm{add}(Y)^{\wedge})$.

(b) $\mathrm{pfd}(A)$ *es finita si y sólo si* $\mathrm{resdim}_{\mathrm{add}(Y)}(\mathrm{add}(Y)^{\wedge})$ *es finita.*

(c) $\mathrm{gldim}(A)$ *es finita si y sólo si* $Y^{\perp} = \mathrm{add}(Y)^{\wedge}$ *y* $\mathrm{pfd}(A)$ *es finita.*

(d) *Si* $\mathrm{gldim}(A)$ *es finitae entonces* $\mathrm{id}(\mathcal{I}(\Theta)) = \mathrm{id}(Y)$.

Demostración. De 4.81 se sigue que Y es inclinante y $\mathcal{I}(\Theta) = Y^{\perp}$. Por lo tanto, el resultado es consecuencia de 4.78 y 4.77.

□

Corolario 4.83. *Sean A una $K-$álgebra básica y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t. Si $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente y ${}_AA \in \mathcal{F}(\Theta)$, entonces A es una ss-álgebra.*

Demostración. Por 4.25 tenemos que $\mathcal{F}(\Theta) \subseteq \mathrm{add}(Y)^{\vee}$. Así que aplicando 4.81 (b), obtenemos que Y es inclinante y $\mathcal{I}(\Theta) = Y^{\perp}$. Finalmente, por 4.39 y 3.60 podemos concluir que $t = n$ y $(A, \leq)$ es una $ss-$álgebra.

□

Teorema 4.84. *Sean A una $K-$álgebra y $(\Theta, \leq)$ un ss de talla t en* $\mathrm{mod}(A)$. *Si $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, entonces las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $M \in \mathcal{P}^{<\infty}(A)$ se tiene que* $\mathrm{pd}(M) \leq \mathrm{pd}(Y) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{P}(\mathcal{I}(\Theta))}(M)$.

(b) $\mathrm{pfd}(A) = \mathrm{pfd}(\mathcal{I}(\Theta)) \leq \mathrm{pd}(Y) + \mathrm{resdim}_{\mathcal{P}(\mathcal{I}(\Theta))}(\mathcal{P}(\mathcal{I}(\Theta))^{\wedge})$.

(c) $\mathrm{gldim}(A) = \mathrm{pd}(\mathcal{I}(\Theta)) \leq \mathrm{pd}(Y) + \mathrm{id}(\mathcal{I}(\Theta))$.

Demostración. Sabemos que $\mathcal{F}(\Theta)$ es funtorialmente finita y $\mathrm{add}(Y) = \mathcal{F}(\Theta) \cap \mathcal{I}(\Theta) = \mathcal{W}(\mathcal{F}(\Theta))$. Ahora como $\mathcal{I}(\Theta)$ es co-resolvente, se sigue de 4.81 y 4.79 que $\mathcal{F}(\Theta)$ es inclinante. Luego, el resultado es consecuencia de 4.76.

□

Capítulo 5

Apéndice.

A continuación enunciamos algunos hechos básicos de teoría de módulos sobre $K-$álgebras. Para más detalles y consulta de las demostraciones de los resultados aquí enunciados, el lector puede ver los textos [3], [5], [6], [21] y [24].

5.1. Sobre módulos

Definición 5.1. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Decimos que M es* ***simple*** *si $M \neq 0$ y los únicos submódulos de M son 0 y él mismo.*

Definición 5.2. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Se dice que M es* ***semisimple*** *si existe una familia $\{S_i\}_{i\in I}$ de simples en $\mathrm{mod}(A)$ tales que $M \cong \bigoplus_{i\in I} S_i$. En particular, diremos que A es semisimple si ${}_AA$ es semisimple.*

Definición 5.3. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Decimos que M es* ***indescomponible*** *(o inescindible) si satisface las siguientes dos condiciones.*

(a) $M \neq 0$.

(b) *Si $M = M_1 \oplus M_2$ entonces $M_1 = 0$ ó $M_2 = 0$.*

Definición 5.4. *Sean A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y X un submódulo de M. Se dice que X es un submódulo* ***maximal*** *de M si satisface la siguiente condición: si L es un submódulo propio de M tal que $X \subseteq L \subset M$, entonces $X = L$.*

Definición 5.5. *Sean A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y $\mathcal{M}_M := \{X : X \text{ es un submódulo maximal de } M\}$. El* ***radical de*** *$M$ es el submódulo de M, $\mathrm{rad}(M) := \bigcap_{X\in\mathcal{M}_M} X$.*

Definición 5.6. *Sea A una $K-$álgebra. El* ***radical de Jacobson*** *de A es el submódulo $J(A) := \mathrm{rad}({}_AA)$.*

Proposición 5.7. *Sea A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *M es simple.*

(b) *0 es un submódulo maximal de M.*

(c) *$M \neq 0$ y para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$ y cada morfismo $f : M \to X$, se tiene que $f = 0$ ó $\mathrm{Ker}(f) = 0$.*

(d) *$M \neq 0$ y para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$ y cada morfismo $g : X \to M$ se tiene que $f = 0$ ó $\mathrm{Im}(f) = M$.*

□

Proposición 5.8. *Sea A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y N un submódulo de M. Entonces, N es un submódulo maximal de M si y sólo si M/N es simple.*

□

Proposición 5.9. *Sean R y S $K-$álgebras. Consideremos un $R-$módulo izquierdo ${}_RM$, un $S-$módulo derecho N_S y un $R-$izquierdo $S-$derecho bimódulo ${}_RU_S$. Entonces, la correspondencia*

$$\eta : \mathrm{Hom}_R({}_RM, \mathrm{Hom}_S(N_S, {}_RU_S)) \to \mathrm{Hom}_S(N_S, \mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RU_S)),$$

dada por $[\eta(\gamma)(n)](m) := [\gamma(m)](n)$, es un isomorfismo de grupos abelianos.

Demostración. Ver [3, Proposition 20.7].

□

Teorema 5.10. *(Krull-Schmidt) Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ no nulo, tiene una descomposición $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i^{m_i}$, donde $M_1, \ldots, M_m$ son módulos no isomorfos dos a dos e indescomponibles en $\mathrm{mod}(A)$.*

(b) *Si $M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i^{m_i}$ y $M = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j^{n_j}$, son dos descomposiciones de M como en (a), entonces $m = n$ y existe una permutación σ de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, \ldots, m$.*

□

5.2. Estructura de los proyectivos.

Definición 5.11. *Sean A una $K-$álgebra y $P \in \mathrm{mod}(A)$. Decimos que P es* ***proyectivo*** *si para cada epimorfismo $h : M \to N$ y para cualquier morfismo $f : P \to N$, existe un morfismo $f' : P \to M$ tal que $f = hf'$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Lema 5.12. *Sean A una $K-$álgebra y $\{P_i\}_{i \in I}$ una familia finita de objetos en $\mathrm{mod}(A)$. Entonces $\bigoplus\limits_{i \in I} P_i$ es proyectivo si y sólo si cada P_i es proyectivo.*

□

Proposición 5.13. *Sean A una $K-$álgebra y $P \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *P es proyectivo.*

(b) *P es un sumando directo de un módulo libre $F \in \mathrm{mod}(A)$.*

(c) *Cada sucesión exacta $0 \to L \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} P \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$ se escinde.*

(d) *Para cada sucesión exacta $0 \to M_1 \overset{\varphi}{\to} M \overset{\psi}{\to} M_2 \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$, se tiene que $0 \to \mathrm{Hom}_A(P, M_1) \overset{\bar{\varphi}}{\to} \mathrm{Hom}_A(P, M) \overset{\bar{\psi}}{\to} \mathrm{Hom}_A(P, M_2) \to 0$ es una sucesión exacta, donde $\bar{\varphi} := \mathrm{Hom}_A(P, \varphi)$ y $\bar{\psi} := \mathrm{Hom}_A(P, \psi)$.*

□

Definición 5.14. *Sean A una $K-$álgebra. Un epimorfismo $f{:}M \to N$ en $\mathrm{mod}(A)$, se dice que es* ***esencial*** *si satisface la siguiente condición: $\forall\, g \in \mathrm{Hom}_A(X, M)$, si fg es un epimorfismo, entonces g también lo es.*

Notemos que para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, el morfismo identidad $1_M : M \to M$ es un claro ejemplo de un epimorfismo esencial.

Proposición 5.15. *Sean A una $K-$álgebra y $f : M \to N$ un epimorfismo en $\mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *f es un epimorfismo esencial.*

(b) $\operatorname{Ker}(f) \subseteq \operatorname{rad}(M)$.

(c) *El morfismo* $\overline{f} : M/\operatorname{rad}(M) \to N/\operatorname{rad}(N)$, *dado por* $\overline{f}(\overline{a}) := \overline{f(a)}$, *es un isomorfismo.*

□

Como consecuencia de 5.15, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 5.16. *El epimorfismo canónico* $\pi_M : M \to M/\operatorname{rad}(M)$, *con* $\pi_M(m) := m + \operatorname{rad}(M)$, *es esencial para todo* $M \in \operatorname{mod}(A)$.

□

Proposición 5.17. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $f : M \to N$ *un epimorfismo en* $\operatorname{mod}(A)$. *Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen.*

(a) *Si* f *es un epimorfismo esencial, entonces* f *es minimal a derecha.*

(b) *Sea* M *proyectivo. Entonces,* f *es minimal a derecha si y sólo si* f *es un epimorfismo esencial.*

□

Definición 5.18. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $M \in \operatorname{mod}(A)$. *Una* ***cubierta proyectiva de*** M *es un epimorfismo esencial* $f : P \to M$ *con* P *proyectivo.*

Proposición 5.19. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $h : P \longrightarrow M$ *una cubierta proyectiva de* $M \in \operatorname{mod}(A)$. *Entonces,* $\operatorname{Ker}(h) \subseteq \operatorname{rad}(P)$.

□

Proposición 5.20. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $M \in \operatorname{mod}(A)$. *Si* $f : P \to M$ *y* $g : Q \to M$ *son dos cubiertas proyectivas de* M, *entonces existe un isomorfismo* $h : P \to Q$ *tal que* $gh = f$.

Demostración. Tenemos que $f : P \to M$ es un epimorfismo y Q es proyectivo; así que existe un morfismo $\tilde{h} : Q \to P$ tal que $f\tilde{h} = g$. En vista de que g es un epimorfismo y f es esencial, tenemos que $\tilde{h}$ es un epimorfismo.

Ahora, como P es proyectivo, existe un morfismo $h : P \to Q$ tal que $\tilde{h}h = 1_P$. Luego, h es un monomorfismo; y además un epimorfismo, pues 1_P es esencial. Por lo tanto $h : P \to Q$ es un isomorfismo; y $gh = f\tilde{h}h = f1_P = f$.

□

De 5.20 se sigue que si $M \in \operatorname{mod}(A)$ admite una cubierta proyectiva, ésta es única (salvo isomorfismos). En este caso, denotaremos como $\epsilon_M : P_0(M) \to M$ a la elección de una cubierta proyectiva de M.

Teorema 5.21. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, admite una cubierta proyectiva $\epsilon_M : P_0(M) \to M$.*

$\square$

Definición 5.22. *Sea A una $K-$álgebra. Para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, el* ***top de M*** *es el cociente* $\mathrm{top}(M) := M/\mathrm{rad}(M)$.

Proposición 5.23. *Sea A una $K-$álgebra y $P \in \mathrm{mod}(A)$. Si P es proyectivo, entonces el epimorfismo canónico $t : P \longrightarrow \mathrm{top}(P)$ es una cubierta proyectiva de* $\mathrm{top}(P)$.

$\square$

Proposición 5.24. *Sea A una $K-$álgebra. Definamos la correspondencia*

$$\mathrm{top} : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A),$$

dada por $\mathrm{top}(f) : \mathrm{top}(X) \to \mathrm{top}(Y)$ *con* $\mathrm{top}(f)(x) := f(x) + \mathrm{rad}(Y)$ $\forall x \in X$, $\forall\, f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$. *Entonces, dicha correspondencia es un funtor aditivo que conmuta con coproductos arbitrarios y preserva epimorfismos.*

$\square$

Proposición 5.25. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Sea $f : P \to M$ un epimorfismo en $\mathrm{mod}(A)$, con P proyectivo. Entonces, f es una cubierta proyectiva de M si y sólo si $\mathrm{top}(f)$ es un isomorfismo.*

(b) *Sea $\{f_i : P_i \to M_i\}_{i=1}^{n}$ una familia de epimorfismos en $\mathrm{mod}(A)$ con P_i proyectivo para todo $i \in [1, n]$. Consideremos $P := \bigoplus_{i=1}^{n} P_i$, $M := \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ y el epimorfismo $f := \bigoplus_{i=1}^{n} f_i$. Entonces, f es una cubierta proyectiva de M si y sólo si cada f_i es una cubierta proyectiva de M_i, para cada $i \in [1, n]$.*

$\square$

Proposición 5.26. *Sea A una $K-$álgebra, $P \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivo indescomponible, $S := \mathrm{top}(P)$ y $\pi_P : P \to S$ el epimorfismo canónico. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $X \in \mathrm{mod}(A)$ simple, $\mathrm{Hom}_A(P, X) \neq 0$ si y sólo si $S \cong X$.*

(b) $\dim_K(\mathrm{Hom}_A(P, M)) = [M : S] \cdot \dim_K(\mathrm{End}(_A S))$, *para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$.*

□

Proposición 5.27. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, $\mathrm{top}(M)$ es semisimple.*

(b) *Sean $M \in \mathrm{mod}(A)$ y $\pi_M : M \to \mathrm{top}(M)$ el epimorfismo canónico. Entonces, existe un isomorfismo $t : P_0(M) \longrightarrow P_0(\mathrm{top}(M))$ que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} P_0(M) \arrow[r, "\epsilon_M"] \arrow[d, "t"'] & M \arrow[d, "\pi_M"] \\ P_0(\mathrm{top}(M)) \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{top}(M)}"'] & \mathrm{top}(M) \end{tikzcd}$$

(c) *Sea $\{M_i\}_{i=1}^n$ en $\mathrm{mod}(A)$ y $M := \bigoplus_{i=1}^n M_i$. Entonces, existe un isomorfismo $h : P_0(M) \to \bigoplus_{i=1}^n P_0(M_i)$, tal que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} P_0(M) \arrow[r, "\epsilon_M"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, equal] \\ \bigoplus_{i=1}^n P_0(M_i) \arrow[r, "\bigoplus_{i=1}^n \epsilon_{M_i}"] & M \end{tikzcd}$$

(d) *Para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, si $P_0(M)$ es indescomponible entonces $\mathrm{top}(M)$ es simple.*

□

Teorema 5.28. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Para cada $P \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivo, el epimorfismo canónico $\pi_P : P \longrightarrow \mathrm{top}(P)$ es una cubierta proyectiva.*

(b) *Para cualesquiera $P, Q \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivos, se tiene que $P \cong Q$ si y sólo si $\mathrm{top}(P) \cong \mathrm{top}(Q)$.*

(c) *Sea $P \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivo. Entonces, P es indescomponible si y sólo si $\mathrm{top}(P)$ es simple.*

Corolario 5.29. *Sean A una $K-$álgebra y $\{S_i\}_{i=1}^n$ una lista completa de $A-$módulos simples no isomorfos dos a dos en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, $\{P_0(S_i)\}_{i=1}^n$ es una lista completa de $A-$módulos proyectivos indescomponibles, finitamente generados y no isomorfos dos a dos.*

□

Corolario 5.30. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, para cada $M \in \mathrm{mod}(A)$, se tiene que* $\mathrm{top}(P_0(M)) \cong \mathrm{top}(M)$.

□

5.3. Módulos inyectivos.

Definición 5.31. *Sean A una $K-$álgebra e $I \in \mathrm{mod}(A)$. Decimos que I es* ***inyectivo*** *si para cada monomorfismo $u : L \to M$ y cualquier morfismo $g : L \to I$, existe un morfismo $g' : M \to I$ tal que $g = g'u$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M. \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Proposición 5.32. *Sean A una $K-$álgebra y $I \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *I es inyectivo.*

(b) *Cada sucesión exacta $0 \to I \overset{\alpha}{\to} L \overset{\beta}{\to} M \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$ se escinde.*

(c) *Para cada sucesión exacta $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ en $\mathrm{mod}(A)$, se tiene que $0 \to \mathrm{Hom}_A(M_2, I) \to \mathrm{Hom}_A(M, I) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, I) \to 0$ es una sucesión exacta.*

□

Definición 5.33. *Sean A una $K-$álgebra y $f : M \to N$ un monomorfismo en $\mathrm{mod}(A)$. Decimos que f es un* ***monomorfismo esencial*** *si satisface la siguiente condición: $\forall\, g \in \mathrm{Hom}_A(N, X)$, si gf es un monomorfismo, entonces g también lo es.*

Definición 5.34. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Una envolvente inyectiva de M es un monomorfismo esencial $g : M \to I$ con $I \in \mathrm{mod}(A)$ inyectivo.*

Proposición 5.35. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Si $f : M \to I$ y $g : M \to E$ son dos envolventes inyectivas de M, entonces existe un isomorfismo $h : I \to E$ tal que $hf = g$.*

□

De 5.35 se sigue que si $M \in \mathrm{mod}(A)$ admite una envolvente inyectiva, ésta es única (salvo isomorfismos). En este caso, denotaremos como $i_M : M \to I_0(M)$ a la elección de una envolvente inyectiva de M.

5.4. Álgebras locales.

Teorema 5.36. *Sean A una $K-$álgebra no trivial (esto es, $1 \neq 0$). Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *A tiene un único ideal izquierdo maximal.*

(b) $\mathrm{rad}(A)$ *es el único ideal izquierdo maximal en A.*

(c) $\mathrm{rad}(A) = A \backslash U(A)$; *donde $U(A)$ denota al conjunto de las unidades de A, es decir, a los elementos de A que son invertibles.*

(d) $A \backslash U(A)$ *es cerrado bajo la suma en A.*

(e) *Para cada $a \in A$, se tiene que $\{a, 1 - a\} \cap U(A) \neq \emptyset$.*

(f) $A/\mathrm{rad}(A)$ *es una $K-$álgebra con división.*

□

Definición 5.37. *Decimos que una $K-$álgebra A es* ***local*** *si A es no trivial y satisface alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.*

Teorema 5.38. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{End}(M)$ *es local si y sólo si M es indescomponible.*

(b) *Sea M es indescomponible. Entonces, para cada $f \in \mathrm{End}(M)$ se tiene que f es nilpotente o un isomorfismo.*

□

5.5. Sucesiones Exactas, diagramas y temas afines.

Definición 5.39. *Sean A una $K-$álgebra y*

$$\varepsilon: \quad \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

una sucesión finita o infinita de morfismos en $\mathrm{mod}(A)$.

(a) *Decimos que la sucesión ε es un **complejo**, si para cada i se satisface que* $\mathrm{Im}(f_{i-1}) \subset \mathrm{Ker}(f_i)$. *Esto es equivalente a que $f_i f_{i-1} = 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Decimos que la sucesión ε es **exacta** si* $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$ *para cada i.*

Definición 5.40. *Sean A una $K-$álgebra y*

$$\varepsilon: \quad \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

una sucesión exacta finita o infinita en $\mathrm{mod}(A)$. *Decimos que ε se **escinde**, si para cada subsucesión de la forma $M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1}$ se tiene que* $M_i = \mathrm{Im}(f_{i-1}) \oplus \mathrm{Ker}(f_i)$.

Definición 5.41. *Una sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

*es llamada **sucesión exacta corta**.*

Definición 5.42. *Sean A una $K-$álgebra y $\xi: 0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$ una sucesión exacta corta en* $\mathrm{mod}(A)$. *Decimos que ξ se **escinde** (ó divide) si existe un isomorfismo $h: M \longrightarrow L \oplus N$, tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"', "\cong"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \oplus N \arrow[r] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Proposición 5.43. *Sean A una $K-$álgebra y*

$$\xi: 0 \to L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \to 0$$

una sucesión exacta corta en $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *La sucesión ξ se escinde.*

(b) *Existe un morfismo $\varphi: M \longrightarrow L$ tal que $\varphi\alpha = 1_L$.*

(c) *Existe un morfismo $\psi: N \longrightarrow M$ tal que $\beta\psi = 1_N$.*

□

Lema 5.44. *(Lema del Cinco) Sea A una $K-$álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r] \arrow[d, "t_1"] & L_2 \arrow[r] \arrow[d, "t_2"] & L_3 \arrow[r] \arrow[d, "t_3"] & L_4 \arrow[r] \arrow[d, "t_4"] & L_5 \arrow[d, "t_5"] \\
M_1 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & M_3 \arrow[r] & M_4 \arrow[r] & M_5.
\end{tikzcd}$$

Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) *Si t_2 y t_4 son epimorfismos y t_5 es monomorfismo, entonces t_3 es un epimorfismo.*

(b) *Si t_2 y t_4 son monomorfismos y t_1 es un epimorfismo, entonces t_3 es un monomorfismo.*

(c) *Si t_2 y t_4 son isomorfismos, t_1 es un epimorfismo y t_5 es un monomorfismo; entonces t_3 es un isomorfismo.*

Demostración. Ver [24, Lemma 1.3.6 y Corolary 1.3.7].

□

Corolario 5.45. *(Lema Corto del Cinco) Sea A una $K-$álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "t_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "t_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "t_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si dos cualesquiera de los morfismos t_1, t_2, y t_3 son isomorfismos, entonces el tercero también lo es.

Demostración. Ver [24, Corolary 1.3.9].

□

Teorema 5.46. *(Lema de la Serpiente) Sea A una $K-$álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo y exacto en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "h"] & N' \arrow[r, "t"] & M'. &
\end{tikzcd}$$

Entonces, existe una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma),$$

donde $\delta : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ *está dado por* $\delta(m) := h^{-1}\beta f^{-1}(m) + \mathrm{Im}(\alpha)$. *Más aún, si* $g : L \to N$ *es un monomorfismo, entonces* $\mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta)$ *es un monomorfismo; y si* $t : N' \to M'$ *es un epimorfismo, entonces* $\mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma)$ *es un epimorfismo.*

Demostración. Ver [21, Theorem 6.5].

□

Definición 5.47. *Sean A una K−álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "t"] \\ Z \arrow[r, "s"] & E. \end{tikzcd}$$

Decimos que $E \in \mathrm{mod}(A)$, *junto con los morfismos* $t : B \to E$ *y* $s : Z \to E$, *es un* ***push-out****(o* ***coproducto fibrado****) si se satisface la siguiente condición: Para cada* $X \in \mathrm{mod}(A)$ *y morfismos* $s' : Z \to X$ *y* $t' : B \to X$ *tales que* $t'f = s'g$; *existe un único morfismo* $\varphi : E \to X$ *tal que* $\varphi s = s'$ *y* $\varphi t = t'$. *Esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "t"] \arrow[ddr, bend left, "t'"] & \\ Z \arrow[r, "s"] \arrow[drr, bend right, "s'"'] & E \arrow[dr, dotted, "\varphi"] & \\ & & X. \end{tikzcd}$$

Definición 5.48. *Sea A una K−álgebra. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"] & C. \end{tikzcd}$$

Decimos que $E \in \mathrm{mod}(A)$, *junto con los morfismos* $u : E \to Z$ *y* $v : E \to B$ *es un* ***pull-back*** *(o* ***producto fibrado****) si se satisface la siguiente condición: Para cada* $W \in \mathrm{mod}(A)$ *y morfismos* $v' : W \to B$ *y* $u' : W \to Z$ *tales que* $gu' = fv'$; *existe un único morfismo* $\psi : W \to E$ *tal que* $u\psi = u'$ *y* $v\psi = v'$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "u'"] \arrow[dr, dotted, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "v'"'] & & \\
& E \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[d, "g"'] \\
& B \arrow[r, "f"] & C.
\end{tikzcd}$$

Teorema 5.49. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Cada diagrama $Z \overset{g}{\leftarrow} C \overset{f}{\rightarrow} B$ en $\mathrm{mod}(A)$ admite un push-out, el cual es único (salvo isomorfismos).*

(b) *Cada diagrama $B \overset{f}{\rightarrow} C \overset{g}{\leftarrow} Z$ en $\mathrm{mod}(A)$ admite un pull-back, el cual es único (salvo isomorfismos).*

Demostración. (a) Ver [24, Proposition 1.7.2 y Proposition 1.7.3]. (b) Ver [24, Proposition 1.7.5 y Proposition 1.7.6].

□

Proposición 5.50. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Consideremos el siguiente diagrama pullback en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h'"'] & X \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "g"] & C.
\end{tikzcd}$$

Si g es un epimorfismo, entonces g' es un epimorfismo. Más aún, g' es un epimorfismo que se escinde si y sólo si h se factoriza a través de g.

(b) *Consideremos el siguiente push-out en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "t"'] & B \arrow[d, "t'"] \\
Z \arrow[r, "f'"] & E.
\end{tikzcd}$$

Si f es un monomorfismo, entonces f' es un monomorfismo. Más aún, f' es un monomorfismo que se escinde si y sólo si t se factoriza a través de f.

□

5.6. Otras cosas.

Proposición 5.51. *Si A es una $K-$álgebra tal que ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ es una descomposicion de A en submódulos indescomponibles. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados.*

(a) *Cada $A-$módulo simple es isomorfo a uno de los módulos*
$$S_1 = \mathrm{top}(Ae_1),\ \ldots,\ S_n = \mathrm{top}(Ae_n).$$

(b) *Cada $A-$módulo proyectivo e indescomponible es isomorfo a uno de los módulos $P_1 = Ae_1,\ P_2 = Ae_2, \ldots,\ P_n = Ae_n$.*

Más aún, $Ae_i \cong Ae_j$ si y sólo si $S_i \cong S_j$.

□

En el siguiente Teorema encontramos una caracterización para los módulos sobre una álgebra semisimple. Este teorema nos asegura que cuando A es una $K-$álgebra semisimple, entonces cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ es proyectivo e inyectivo.

Teorema 5.52. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *A es semisimple.*

(b) *Cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ es proyectivo.*

(c) *Cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ es inyectivo.*

□

5.7. Álgebras básicas

Definición 5.53. *Sea A una $K-$álgebra con un conjunto completo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de idempotentes ortogonales primitivos. El álgebra A es llamada* ***básica*** *si $Ae_j \ncong Ae_i$, para todo $j \neq i$.*

El siguiente teorema es de gran utilidad para saber cuando un álgebra es básica o no.

Proposición 5.54. *Sea A una $K-$álgebra, con K algebraicamente cerrado. Entonces, las siguientes condiciones se satistacen.*

(a) *A es básica si y sólo si el álgebra* $B := A/\mathrm{rad}(A)$ *es isomorfa a un producto de copias de* K.

(b) *Cada módulo simple sobre una* $K-$*álgebra básica es uno-dimensional.*

$\square$

Definición 5.55. *Sea* A *una* $K-$*álgebra con un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos* $\{e_1, \ldots, e_n\}$. *Un* ***álgebra básica*** *asociada a* A *es el álgebra* $A^b = e_A A e_A$ *donde* $e_A = e_{j_1} + \cdots + e_{j_a}$, *y* $e_{j_1}, \ldots, e_{j_a}$ *son elegidos de tal manera que* $Ae_{j_i} \not\cong Ae_{j_t}$ *para* $i \neq t$ *y cada módulo* Ae_s *es isomorfo a uno de los módulos* $Ae_{j_1}, \ldots, Ae_{j_a}$.

5.8. Algunos resultados de Álgebra Homológica.

En esta sección enunciaremos algunos resultados básicos de la Teoría de Álgebra Homológica que utilizamos en esta tesis.

5.8.1. Resoluciones proyectivas e inyectivas.

Recordemos que un $A-$módulo M está generado por una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de M si cada elemento $x \in M$ se puede escribir como $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$, con $a_i = 0$ para casi todo i. Si además se cumple que los a_i están únicamente determinados por x, entonces la familia $\{x_i\}_{i\in I}$ es una **base** para M.

Definición 5.56. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* M *un* $A-$*módulo. Decimos de* M *es* ***libre*** *si tiene una base.*

Proposición 5.57. *Sea* A *una* $K-$*álgebra y* M *un* $A-$*módulo. Entonces* M *es libre si y sólo si* $M \cong A^{(I)}$ *para algún* I. *Es decir,* M *es libre si y sólo si* M *es isomorfo a una suma directa de* $|I|$ *copias del módulo* ${}_AA$.

$\square$

.

Proposición 5.58. *Sean* A *una* $K-$*álgebra y* $M \in \mathrm{mod}(A)$. *Entonces existe* $F \in \mathrm{mod}(A)$ *libre, tal que* M *es un módulo cociente de* F.

$\square$

Proposición 5.59. *Sean A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces existe una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\xi : \cdots \longrightarrow \; P_2 \; \xrightarrow{h_2} \; P_1 \; \xrightarrow{h_1} \; P_0 \; \xrightarrow{h_0} \; M \; \longrightarrow \; 0,$$

tal que P_j es proyectivo para cada j.

$\square$

Definición 5.60. *Sea A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Una **resolución proyectiva** de M, está formada por un complejo*

$$\xi : \quad \cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \xrightarrow{h_{m-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \longrightarrow 0$$

de módulos $P_i \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivos junto con un epimorfismo $h_0 : P_0 \to M$; de tal manera que la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \longrightarrow \; P_2 \; \xrightarrow{h_2} \; P_1 \; \xrightarrow{h_1} \; P_0 \; \xrightarrow{h_0} \; M \; \longrightarrow \; 0.$$

Definición 5.61. *Sea A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$.*

(a) *Una sucesión exacta $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ en $\mathrm{mod}(A)$ es una **presentación proyectiva minimal** de M si los morfismos $p_0 : P_0 \to M$ y $p_1 : P_1 \to \mathrm{Ker}(p_0)$ son cubiertas proyectivas.*

(b) *Consideremos la sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$

$$\xi : \cdots \longrightarrow \; P_2 \; \xrightarrow{h_2} \; P_1 \; \xrightarrow{h_1} \; P_0 \; \xrightarrow{h_0} \; M \; \longrightarrow \; 0$$

*con $P_j \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivo para cada j. Decimos que ξ es una **resolución proyectiva minimal de** M si $h_j : P_j \longrightarrow \mathrm{Im}h_j$ es una cubierta proyectiva, para cada $j \geq 1$ y $h_0 : P_0 \to M$ es una cubierta proyectiva de M.*

Proposición 5.62. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, cada $M \in \mathrm{mod}(A)$ admite una presentación proyectiva minimal y una resolución proyectiva minimal en* $\mathrm{mod}(A)$.

$\square$

.

Definición 5.63. *Sea A una $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Una **co-resolución inyectiva de** M en $\mathrm{mod}(A)$ está dada por un complejo*

$$\eta : \; 0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^m \xrightarrow{d^{m+1}} I^{m+1} \longrightarrow \cdots$$

de $A-$ módulos inyectivos y un monomorfismo $d^0 : M \longrightarrow I^0$ en $\mathrm{mod}(A)$; de tal manera que se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^m \xrightarrow{d^{m+1}} I^{m+1} \longrightarrow \cdots.$$

Se puede probar que cualquier $A-$módulo finitamente generado $\mathrm{mod}(A)$ tiene una resolución inyectiva de módulos finitamente generados.

5.8.2. Dimensiones proyectiva, inyectiva y global.

A continuación introducimos el concepto de dimensión proyectiva de un módulo, que es lo más cercano a ”medir ” qué tan lejos está un módulo de ser proyectivo.

Definición 5.64. *Sea A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y*

$$P_\bullet : \cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M. Se define long$(P_\bullet)$ la ***longitud de la resolución*** $P_\bullet$*, como sigue :*

(a) *Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_n \neq 0$ y $P_{n+k} = 0$ para todo $k > 1$, long$(P_\bullet) :=$ $\min\{m \in \mathbb{N} : P_n = 0, \forall n > m\}$; y en tal caso, diremos que $P_\bullet$ tiene longitud finita.*

(b) *Si para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n > m$ tal que $P(n) \neq 0$, long$(P_\bullet) := \infty$; y diremos que $P_\bullet$ es es longitud infinita.*

Definición 5.65. *Sean A un $K-$álgebra y $M \in \mathrm{mod}(A)$. Se define la* ***dimensión proyectiva de*** *M*

$$\mathrm{pd}(M) := \min\{\mathit{long}(P_\bullet) : P_\bullet \text{ es una resolución proyectiva de } M\}.$$

Si no existe una resolución proyectiva de longitud finita para M, diremos que $\mathrm{pd}(M) := \infty$.

Ejemplo 5.66. *Si P es proyectivo, entonces* $\mathrm{pd}(P) = 0$. *De hecho, que P sea proyectivo es equivalente a que* $\mathrm{pd}(P) = 0$.

Proposición 5.67. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\mathrm{pd}(\bigoplus_{i=1}^{m} M_i) = \max_{1\leq i\leq m}\{\mathrm{pd}(M_i)\}$.

(b) *Sea $M \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, $\mathrm{pd}(M) \leq n$ si y sólo si, para cada sucesión exacta $P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, con $P_i \in \mathrm{mod}(A)$ proyectivo para cada i; se tiene que $\mathrm{Ker}(f_{n-1})$ es proyectivo.*

□

Proposición 5.68. *Sean A una $K-$álgebra y $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ una sucesión exacta en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Si cualesquiera dos de los tres $A-$módulos tienen dimensión proyectiva finita, entonces el tercero también.*

(b) $\mathrm{pd}(L) \leq \max(\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(N) - 1)$.

(c) $\mathrm{pd}(M) \leq \max(\mathrm{pd}(L), \mathrm{pd}(N))$.

(d) $\mathrm{pd}(N) \leq \max(\mathrm{pd}(M), \mathrm{pd}(L) + 1)$.

(e) *Si* $\mathrm{pd}(L) < \mathrm{pd}(M)$ *entonces* $\mathrm{pd}(N) = \mathrm{pd}(M)$.

(f) *Si* $\mathrm{pd}(L) = \mathrm{pd}(M)$ *entonces* $\mathrm{pd}(N) \leq 1 + \mathrm{pd}(M)$.

(g) *Si* $\mathrm{pd}(L) > \mathrm{pd}(M)$ *entonces* $\mathrm{pd}(N) = 1 + \mathrm{pd}(L)$.

□

Proposición 5.69. *Sea A una $K-$álgebra y $0 \to L \to P \to M \to 0$ una sucesión exacta de $A-$módulos, con P proyectivo. Si M no es proyectivo, entonces* $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{pd}(L) + 1$.

□

Proposición 5.70. *Sea A una $K-$álgebra y $0 \to L \to P_{k-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ una sucesión exacta con módulos proyectivos $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ en* $\mathrm{mod}(A)$. *Si* $\mathrm{pd}(M) \geq k$, *entonces* $\mathrm{pd}(M) = \mathrm{pd}(L) + k$

□

Definición 5.71. *Sea A una $K-$álgebra, $M \in \mathrm{mod}(A)$ y*

$$I^\bullet : 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots \to I^{m+1} \to,$$

una co-resolución inyectiva de M en $\mathrm{mod}(A)$. *Se define la longitud de la co-resolución $I^\bullet$ como sigue:*

(a) *Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^n = 0$ para cada $n > m$, $long(I^\bullet) := \min\{m \in \mathbb{N} : I^n = 0 \; \forall \, n > m\}$; y en tal caso, diremos que $I^\bullet$ tiene longitud finita.*

(b) *Si para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n > m$ tal que $I^n \neq 0$, $long(I^\bullet) := \infty$.*

Definición 5.72. *Sean A un $K-$álgebra y $M \in \text{mod}(A)$. Se define la* ***dimensión inyectiva de*** *M*

$$\text{id}(M) := \min\{long(I^\bullet) : I^\bullet \textit{ es una co-resolución inyectiva de } M\}.$$

Si no existe una co-resolución inyectiva de longitud finita para M, diremos que $\text{id}(M) := \infty$.

Proposición 5.73. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\text{id}(\bigoplus_{i=1}^{m} M_i) = \max_{1\leq i\leq m}\{\text{id}(M_i)\}$.

(b) *Sea $M \in \text{mod}(A)$. Entonces,* $\text{id}(M) \leq n$ *si y sólo si, para cada sucesión exacta* $0 \to M \to I^0 \to \cdots \to I^{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} I^{n-1}$ *con* $I^i \in \text{mod}(A)$ *inyectivo para cada i; se tiene que* $\text{Coker}(f_{n-2})$ *es inyectivo.*

□

Proposición 5.74. *Sean A una $K-$álgebra y* $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta en* $\text{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) $\text{id}(L) \leq \max(\text{id}(M), \text{id}(N) + 1)$.

(b) $\text{id}(M) \leq \max(\text{id}(L), \text{id}(N))$.

(c) $\text{id}(N) \leq \max(\text{id}(M), \text{id}(L) - 1)$.

□

Definición 5.75. *Sea A una $K-$álgebra. La* ***dimensión global de*** *A se define como* $\text{gldim}(A) := \sup\{\text{pd}(M) : M \in \text{mod}(A)\}$.

Teorema 5.76. *Sea A una $K-$álgebra. Entonces,* $\text{gldim}(A) = \text{pd}(\text{top}(_A A)) = \text{máx}\{\text{pd}(S) : S \in \text{mod}(A) \textit{ es simple}\}$.

□

5.8.3. Ext.

Definición 5.77. *Sea A una $K-$álgebra y X, $Y \in \text{mod}(A)$. Consideremos una resolución proyectiva de X*

$$P_\bullet : \cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_1} X \to 0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, introducimos el $K-$espacio vectorial

$$\text{Ext}_A^n(X, Y) := \text{Ker}(\text{Hom}(d_{n+1}, Y))/\text{Im}(\text{Hom}(d_n, Y)).$$

Se puede probar que $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y)$ es independiente de la elección de una resolución proyectiva para X.

Para el functor covariante $\mathrm{Hom}_A(X,-)$ se consideran functores derivados usando co-resoluciones inyectivas.

Definición 5.78. *Sean A una $K-$álgebra y $X, Y \in \mathrm{mod}(A)$. Consideremos una co-resolución inyectiva de Y*

$$Q_\bullet : 0 \to Y \to Q_0 \stackrel{d_0}{\to} Q1 \stackrel{d_1}{\to} Q_2 \to \dots .$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, introducimos el $K-$espacio vectorial $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(X,d_n))/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(X,d_{n+1}))$ *donde es una co-resolución inyectiva del $A-$módulo Y.*

Se puede probar que la definición de $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y)$ es independiente de la elección de una co-resolución inyectiva para Y.

Además, se puede probar que ambos functores Ext son isomorfos; y por ello podemos abusar de la notación y escribir $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y)$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Después de estas definiciones presentamos los siguientes resultados conocidos de Álgebra Homológica; y que pueden ser consultados en [21].

Proposición 5.79. *Sean A una $K-$álgebra y $X, Y \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces $\mathrm{Ext}_A^0(X,Y)$ es equivalentemente natural a $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$.*

□

Proposición 5.80. *Sea A una $K-$álgebra y $X, Y \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces $\mathrm{Ext}_A^n(X,Y) = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ negativo.*

□

Teorema 5.81. *Sea A una $K-$álgebra y $0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$ una sucesión exacta de $A-$módulos. Entonces, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(X,Y') \to \mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(X,Y'') \to \mathrm{Ext}_A^1(X,Y') \to \dots$$
$$\dots \to \mathrm{Ext}_A^n(X,Y') \to \mathrm{Ext}_A^n(X,Y) \to \mathrm{Ext}_A^n(X,Y'') \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(X,Y') \to \dots$$

□

Teorema 5.82. *Sea A una $K-$álgebra y $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ una sucesión exacta en $\mathrm{mod}(A)$. Entonces, existe una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(X'',Y) \to \mathrm{Hom}_A(X,Y) \to \mathrm{Hom}_A(X',Y) \to \mathrm{Ext}_A^1(X'',Y) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}_A^n(X'',Y) \to \mathrm{Ext}_A^n(X,Y) \to \mathrm{Ext}_A^n(X',Y) \to \mathrm{Ext}_A^{n+1}(X'',Y) \to \cdots$$

□

Proposición 5.83. *Sea A una $K-$álgebra y $P \in \operatorname{mod}(A)$ proyectivo. Entonces* $\operatorname{Ext}_A^n(P, Y) = 0$ *para cada* $Y \in \operatorname{mod}(A)$ *y para cada* $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

$\square$

La proposición anterior tiene su versión dual para los $A-$módulos inyectivos. Si Q es un $A-$módulo inyectivo, entonces para cada $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ y para cada $A-$módulo X se tiene que $\operatorname{Ext}_A^n(X, Q) = 0$.

Proposición 5.84. *Sea A una $K-$álgebra y $X \in \operatorname{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *X es un $A-$módulo proyectivo.*

(b) $\operatorname{Ext}_A^n(X, Y) = 0$ *para cada* $Y \in \operatorname{mod}(A)$ *y* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$;

(c) $\operatorname{Ext}_A^1(X, Y) = 0$ *para cada* $Y \in \operatorname{mod}(A)$.

$\square$

Proposición 5.85. *Sea A una $K-$álgebra y* $\cdots \to P_2 \stackrel{d_2}{\to} P_1 \stackrel{d_1}{\to} P_0 \stackrel{\pi}{\to} M \to 0$ *una resolución proyectiva para* $M \in \operatorname{mod}(A)$. *Entonces, para cada* $Y \in \operatorname{mod}(A)$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(X, Y) \cong \operatorname{Ext}_A^1(\operatorname{Ker}(d_{n-1}), Y)$.

$\square$

Proposición 5.86. *Sean A una $K-$álgebra y $X \in \operatorname{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\operatorname{pd}(X) \leq n$.

(b) $\operatorname{Ext}_A^k(X, Y) = 0$ *para cada* $Y \in \operatorname{mod}(A)$ *y para cada* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k \geq n+1$.

(c) $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(X, Y) = 0$ *para cada* Y.

(d) *Para cualquier resolución proyectiva de X,* $\operatorname{Ker}(d_{n-1})$ *es un $A-$módulo proyectivo.*

$\square$

Ejemplo 5.87. *Sea A una $K-$álgebra. Se dice que A es* ***hereditaria*** *si cada ideal I de A es proyectivo. En este caso, si A es hereditaria, se satisface que cada submódulo N de un módulo proyectivo M es proyectivo y entonces* $\operatorname{pd}(M) \leq 1$. *Por lo tanto,* $\text{gl.dim.}(A) \leq 1$.

Ahora bien, si A es semisimple, entonces en vista del Teorema 5.52, se tiene que todo $A-$módulo M es proyectivo y por tanto $\mathrm{pd}(M) = 0$. *De donde* $\mathrm{gl.dim.}(A) = 0$.

5.9. La dualidad usual $\mathrm{Hom}_K(-,K)$

Sea A una $K-$álgebra. Denotaremos por $D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$ a la dualidad usual $\mathrm{Hom}_K(-,K)$. Se sabe que $D_A \circ D_{A^{op}} \simeq 1_{\mathrm{mod}(A^{op})}$ y $D_{A^{op}} \circ D_A \simeq 1_{\mathrm{mod}(A)}$ (Ver [5] y [6]).

Proposición 5.88. *Sea A una $K-$álgebra, $D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$ la dualidad usual y $h : M \to N$ un morfismo en* $\mathrm{mod}(A)$. *Entonces, las siguientes condicones se satisfacen.*

(a) *Existe un isomorfismo $t : D_A(\mathrm{Ker}(h)) \to \mathrm{Coker}(D_A(h))$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
D_A(Y) \arrow[r, "D_A(h)"] & D_A(X) \arrow[r, "D_A(i)"] \arrow[d] & D_A(\mathrm{Ker}(h)) \arrow[dl, dashed, "t"'] \\
 & \mathrm{Coker}(D_A(h)), &
\end{tikzcd}$$

donde $i : \mathrm{Ker}(h) \to X$ es la inclusión.

(b) *Existe un isomorfismo $t' : \mathrm{Ker}(D_A(h)) \to D_A(\mathrm{Coker}(h))$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(D_A(h)) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "t'"'] & D_A(Y) \arrow[r, "D_A(h)"] & D_A(X) \\
 & D_A(\mathrm{Coker}(h)), \arrow[u, "D_A(\pi)"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\pi : Y \to \mathrm{Coker}(h)$.

(c) *h es un monomorfismo si y sólo si $D_A(h)$ es un epimorfismo.*

(c) *h es un epimorfismo si y sólo si $D_A(h)$ es un monomorfismo.*

□

Proposición 5.89. *Sea A una $K-$álgebra, $D_A : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{op})$ la dualidad usual y $M, N \in \mathrm{mod}(A)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *D_A es un funtor exacto que conmuta con coproductos finitos.*

(b) $\mathrm{Hom}_A(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{A^{op}}(D(N), D(M))$ *como* $K-$*módulos.*

(c) $\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_{A^{op}}(D_A(N), D_A(M))$ *como* $K-$*módulos.*

(d) M *es indescomponible en* $\mathrm{mod}(A)$ *si y sólo si* $D_A(M)$*es indescomponible en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

(e) M *es simple* $\mathrm{mod}(A)$ *si y sólo si* $D_A(M)$*es simple en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

(f) M *es proyectivo(resp. inyectivo) en* $\mathrm{mod}(A)$ *si y sólo si* $D_A(M)$*es inyectivo (resp. proyectivo) en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

(f) $f : M \to N$ *es un epimorfismo esencial en* $\mathrm{mod}(A)$ *si y sólo si* $D_A(f) : D_A(N) \to D_A(M)$ *es un monomorfismo esencial en* $\mathrm{mod}(A^{op})$.

□

Teorema 5.90. *Sea* A *una* $K-$*álgebra,* $M \in \mathrm{mod}(A)$, $B := \mathrm{End}({}_AM)$ *y* $F := \mathrm{Hom}_A(-, {}_AM_{B^{op}}) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$. *Entonces se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) $\forall\, Z \in \mathrm{add}(M)\ \forall\, X \in \mathrm{mod}(A),\ \ \mathrm{Hom}_A(X,Z) \cong \mathrm{Hom}_B(F(Z), F(X))$ *en* $\mathrm{mod}(K)$ *y es functorial en* X *y* Z.

(b) $F|_{add(M)} : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{add}({}_BB)$ *es una* $K-$*equivalencia de categorías.*

Demostración. (a) Primero probemos el resultado para M. Notemos que $F(X) = \mathrm{Hom}_A(X,M) \cong \mathrm{Hom}_B(B, \mathrm{Hom}_A(X,M)) = \mathrm{Hom}_B(B, F(X))$ $= \mathrm{Hom}_B(F(M), F(X))$. Esto es,

$$\mathrm{Hom}_A(X,M) \cong \mathrm{Hom}_B(F(M), F(X)).$$

Ahora, sea $n \in \mathbb{N}$. Considerando lo anterior y el hecho de que F y el funtor Hom son aditivos, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo para M^n.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(X,M^n) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, dashed] & \mathrm{Hom}_A(X,M)^n \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_B(F(M^n),F(X)) & \mathrm{Hom}_B(F(M),F(X))^n. \arrow[l, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

De donde, $\mathrm{Hom}_A(X,M^n) \cong \mathrm{Hom}_B(F(M^n), F(X))$.

Finalmente, tomemos $Z \in \mathrm{add}(M)$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Z \oplus Y \cong M^n$. Consideremos la sucesión exacta que se parte

$$0 \to Z \overset{\iota_Z}{\to} M^n \overset{\pi_Y}{\to} Y \to 0.$$

Como F es un funtor aditivo, se tiene que la sucesión

$$0 \to F(Y) \to F(M^n) \to F(Z) \to 0$$

es exacta y se parte.

Así, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo y exacto.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(\beta_Z) \arrow[d] & & \mathrm{Ker}(\beta_Y) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,Z) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_Z"'] & \mathrm{Hom}_A(X,M^n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(X,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_Y"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(F(Z),F(X)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_B(F(M^n),F(X)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(F(Y),F(X)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \mathrm{Coker}(\beta_Z) & & \mathrm{Coker}(\beta_Y) &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el Lema de la Serpiente obtenemos que $\mathrm{Ker}(\beta_Z) = 0 = \mathrm{Coker}(\beta_Y)$.

Haciendo un procedimiento similar con la sucesión exacta que se parte

$$0 \to Y \to M^n \to Z \to 0,$$

obtenemos que $\mathrm{Ker}(\beta_Y) = 0 = \mathrm{Coker}(\beta_Z)$.

Por lo tanto, β_Z es el isomorfismo deseado.

(b) Primero notemos que $F(\mathrm{add}(M)) \subseteq \mathrm{add}(B)$. En efecto, sea $X \in \mathrm{add}(M)$. Entonces, existen Y y $n \in \mathbb{N}$ tales que $M^n \cong X \oplus Y$. Luego, aplicando el funtor F y usando el hecho de que éste es aditivo obtenemos que $B^n = F(M)^n \cong F(X) \oplus F(Y)$; probándose que $F(X) \in \mathrm{add}(B)$. Así, tenemos $F_1 := F|_{\mathrm{add}(M)} : \mathrm{add}(M) \to \mathrm{add}(B)$.

Ahora, por (a) se sigue que F_1 es fiel y pleno, así que sólo resta ver que F_1 es denso. Sea $X \in \mathrm{add}(B)$, entonces existe $Y \in \mathrm{add}(B)$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\psi := X \oplus Y \cong B^m$.

Sea $\varphi \in \mathrm{End}(B^m)$, con $\varphi := \psi \iota_Y \pi_Y \psi^{-1}$. Luego, se puede notar que $\varphi^2 = \varphi$, $Y = \mathrm{Im}(\varphi)$ y $X = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(1_{B^m} - \varphi)$.

Por otro lado, sabemos que $\mathrm{End}({}_A M^m) \cong \mathrm{End}({}_B B^m)$. Entonces, existe $u \in \mathrm{End}({}_A M^m)$ tal que $\varphi = F_1(u)$ y por lo tanto $u = u^2$.

Sea $N := (1_{M^m} - u)(M^m)$ y notemos que $F_1(N) \cong F_1(1_{M^m} - u)(F(M)^m) = (1_{B^m} - F_1(u))(B^m) = (1-\varphi)(B^m) = X$. Esto es, $F_1(N) \cong X$.

Por lo tanto, F_1 es un funtor fiel, pleno y denso, lo cual significa que es una $K-$equivalencia de categorías.

$\square$

5.10. Módulos reflexivos.

Los siguientes resultados se encuentra en [3, Proposition 20.14 y Proposition 23.1], en un contexto más general para anillos y módulos. A continuación enunciaremos dichos resultados para $K-$álgebras y módulos finitamente generados a izquierda.

Definición 5.91. *Sean R, S $K-$álgebras y ${}_R U_S$ un $R-$izquierdo $S-$derecho bimódulo. Consideremos los funtores $F := \operatorname{Hom}_R(-, U) : \operatorname{mod}(R) \to \operatorname{mod}(S^{op})$ y $G := \operatorname{Hom}_{S^{op}}(-, U) : \operatorname{mod}(S^{op}) \to \operatorname{mod}(R)$.*

(a) *La evaluación $\varepsilon : 1_{\operatorname{mod}(R)} \to GF$, se define como la familia de morfismos $\varepsilon := \{\varepsilon_X : X \to GF(X)\}_{X \in \operatorname{mod}(R)}$, donde $\varepsilon_X(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in \operatorname{Hom}_R(X, U)$.*

(b) *La evaluación $\varepsilon' : 1_{\operatorname{mod}(S^{op})} \to FG$, se define como la familia de morfismos $\varepsilon' := \{\varepsilon'_X : X \to FG(X)\}_{X \in \operatorname{mod}(S^{op})}$, donde $\varepsilon'_X(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y $f \in \operatorname{Hom}_{S^{op}}(X, U)$.*

De manera similar a 3.40, se puede probar que las evaluaciones $\varepsilon : 1_{\operatorname{mod}(R)} \to GF$ y $\varepsilon' : 1_{\operatorname{mod}(S^{op})} \to FG$ son transformaciones naturales.

Definición 5.92. *Sean R, S $K-$álgebras y ${}_R U_S$ un $R-$izquierdo $S-$derecho bimódulo. Consideremos los funtores F y G definidos en 5.91. Definimos lo siguiente.*

(a) *Sea $M \in \operatorname{mod}(R)$. Decimos que M es $U-$**reflexivo** si $\varepsilon_M : M \to GF(M)$ es un isomorfismo.*

(b) *Sea $N \in \operatorname{mod}(S^{op})$. Decimos que N es $U-$**reflexivo** si $\varepsilon'_N : N \to FG(N)$ es un isomorfismo.*

(c) *La subcategoría plena de $\operatorname{mod}(R)$ de los objetos en $\operatorname{mod}(R)$ que son los $U-$reflexivos es ${}_R\mathcal{R}[U] := \{M \in \operatorname{mod}(R) : \varepsilon_M$ es un isomorfismo $\}$.*

(d) *La subcategoría plena de $\operatorname{mod}(S^{op})$ de los objetos en $\operatorname{mod}(S^{op})$ que son los $U-$reflexivos, es $\mathcal{R}_S[U] := \{N \in \operatorname{mod}(S^{op}) : \varepsilon'_N$ es un isomorfismo $\}$.*

Proposición 5.93. *Sean R, S $K-$álgebras y ${}_R U_S$ un $R-S-$bimódulo. Consideremos los funtores $F := \operatorname{Hom}_R(-, U) : \operatorname{mod}(R) \to \operatorname{mod}(S^{op})$ y $G := \operatorname{Hom}_{S^{op}}(-, U) : \operatorname{mod}(S^{op}) \to \operatorname{mod}(R)$. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.*

(a) *Las categorías* ${}_R\mathcal{R}[U]$ *y* $\mathcal{R}_S[U]$ *son cerradas por sumandos directos y sumas directas finitas.*

(b) $F(\varepsilon_M)\varepsilon'_{F(M)} = 1_{F(M)}$, *para cada* $M \in \text{mod}(R)$; *y* $G(\varepsilon'_N)\varepsilon_{G(N)} = 1_{G(N)}$, *para cada* $N \in \text{mod}(S^{op})$. *Esto es, se tienen los siguientes diagramas conmutativos.*

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[d, "\varepsilon'_{F(M)}"'] \arrow[dr, "1_{F(M)}"] & \\ FGF(M) \arrow[r, "F(\varepsilon_M)"] & F(M) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(N) \arrow[d, "\varepsilon_{G(N)}"'] \arrow[dr, "1_{G(N)}"] & \\ GFG(N) \arrow[r, "G(\varepsilon'_N)"] & G(N) \end{tikzcd}$$

(d) *Si* $M \in \text{mod}(R)$ *(resp.* $N \in \text{mod}(S^{op})$*) es* $U-$*reflexivo, entonces* $F(M)$ *(resp.* $G(N)$*) es* $U-$*reflexivo.*

Demostración. Ver [3, Proposition 20.13 y Proposition 20.14].

□

Teorema 5.94. *Sean* R, S $K-$*álgebras y* ${}_RU_S$ *un* $R-S-$*bimódulo. Consideremos los funtores* $F := \text{Hom}_R(-,U) : \text{mod}(R) \to \text{mod}(S^{op})$ *y* $G := \text{Hom}_S(-,U) : \text{mod}(S^{op}) \to \text{mod}(R)$. *Entonces, se satisfacen las siguientes condiciones.*

(a) F *y* G *inducen, por restricción, una equivalencia contravariante entre las categorias* ${}_R\mathcal{R}[U]$ *y* $\mathcal{R}_S[U]$.

(b) *Para cada* $M \in {}_R\mathcal{R}[U]$ *y cada* $N \in \mathcal{R}_S[U]$, *los morfismos* $\varepsilon_M : M \to GF(M)$ *y* $\varepsilon'_N : N \to FG(N)$ *son isomorfismos naturales.*

Demostración. Ver [3, Proposition 23.1].

□

5.11. Funtores adjuntos y una aplicación interesante.

Definición 5.95. *Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *dos categorías. Consideremos dos funtores* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *y* $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. *Decimos que los funtores* F *y* G *son* ***adjuntos****(ó un par adjunto), denotado por* $F \dashv G$, *si se satisfacen las siguientes dos condiciones.*

(a) *Existe una transformación natural* $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$, *llamada* ***unidad de la adjunción****, tal que para cada* $M \in \mathcal{A}$ *se satisface que* $\epsilon_{F(M)}F(\eta_M) = 1_{F(M)}$. *Esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en* $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[d, "F(\eta_M)"'] \arrow[dr, "1_{F(M)}"] & \\ FGF(M) \arrow[r, "\epsilon_{F(M)}"] & F(M) \end{tikzcd}$$

(b) *Existe una transformación natural $\epsilon : FG \to 1_{\mathcal{B}}$, llamada* ***co-unidad de la adjunción****, tal que para cada $N \in \mathcal{B}$ se satisface que $G(\epsilon_N)\eta_{G(N)} = 1_{G(N)}$. Esto es, se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$.*

$$\begin{tikzcd} G(N) \arrow[d, "\eta_{G(N)}"'] \arrow[dr, "1_{G(N)}"] & \\ GFG(N) \arrow[r, "G(\epsilon_N)"] & G(N) \end{tikzcd}$$

Si F y G son funtores adjuntos, de acuerdo con la definición 5.95, entonces diremos que F es **adjunto izquierdo de** G y que G es **adjunto derecho de** F.

Definición 5.96. *Sean $\mathcal{A}$ una categoria y $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$ Decimos que $\mathcal{C}$ es* ***reflexiva en*** *$\mathcal{A}$, si existe un funtor $H : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$, tal que H es adjunto izquierdo de la inclusión $\iota : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$. Dualmente, decimos que $\mathcal{C}$ es* ***co-reflexiva en*** *$\mathcal{A}$, si existe un funtor $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$, tal que L es adjunto derecho de la inclusión $\iota : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}$.*

Teorema 5.97. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Consideremos un par de funtores adjutos, $F \dashv G$, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$; tales que para cada $M \in \mathcal{A}$ y $N \in \mathcal{B}$, se tiene que los morfismos $\eta_{G(N)} : G(N) \to GFG(N)$ y $\epsilon_{F(M)} : FGF(M) \to F(M)$ son isomorfismos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Consideremos las categorías plenas $\mathcal{A}_0 := \{M \in \mathcal{A} : \exists\, N \in \mathcal{B}$ tal que $M \cong G(B)\}$ y $\mathcal{B}_0 := \{N \in \mathcal{B} : \exists\, M \in \mathcal{A}$ tal que $N \cong F(M)\}$ de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Entonces, F y G inducen, por restricción, una equivalencia entre las categorías $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{B}_0$. Más aún, $\mathcal{A}_0$ es reflexiva en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}_0$ es co-reflexiva en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Ver [12, Lemma II.6.4].

$\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[1] I. Agoston, V. Dlab, E. Lukacs. *Stratified algebras.* C.R.Math. Rep. Acad. Sci. Canada Vol. 20(1), 1998, 22-28.

[2] I. Ágoston, D. Happel, E. Lukács, L. Unger. *Standarly stratified algebras and tilting.* Journal of Algebra 2000, 226 (144-160).

[3] F. W. Anderson y K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules.* Springer-Verlag, 1975.

[4] I. Assem, J. Cappa, M. I. Platzeck y M. Verdecchia. *Notas de Álgebra y Análisis, Vol. 21. Módulos Inclinantes y Álgebras Inclinadas.* INMABB-CONICET, Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca, Argentina, 2008.

[5] I. Aseem, D. Simson y A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol. I Techniques of Representation Theory.* Cambridge University Press, 2006.

[6] M. Auslander, I. Reiten y S. Smalo. *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 36. 1995.

[7] M. Auslander, I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. Adv. Math. Vol. 86, 1991 (111-152).

[8] P. Cadavid *Álgebras estandarmente estratificadas e álgebras quasehereditárias.* Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas, dirigida por el Dr. Eduardo do Nascimento Marcos. Universidad de Sao Paulo, Brasil, 2008.

[9] E. Cline, B. Parshall y L. Scott. *Finite dimensional algebras and highest weight categories.* J. Reine angew. Math. 391 (1988), 85-99.

[10] B. Parshall, L. Scott. *Derived Categories, quasi-hereditary algebras and algebraic groups.* Math. LNS, Carleton University, 3 (1988) 1-105.

[11] V. Dlab, C.M.Ringel. *The module Theoretical Approach to Quasi-hereditary algebras.* Repr. Theory and Related Topics, London Math. Soc. LNS, 168 (1992) 200-224.

[12] S. Mac Lane, I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A first introduction to Topos Theory.* Springer-Verlag Universitext, 1992.

[13] E. Do N. Marcos, O. Mendoza, C. Saénz. *Stratitying sistems via relative simple modules.* Journal of Algebra 2004, 280 (472-487).

[14] E. Do N. Marcos, O. Mendoza, C. Saénz. *Stratitying sistems via relative projective modules.* Comm. in Algebra 2005, Vol. 33 (1559-1573).

[15] O. Mendoza, C. Saénz, C. Xi. *Homological systems in module categories over pre-ordered sets.* Quart. J. Marth. 2009, 60 (75-103).

[16] E. Do N. Marcos, O. Mendoza, C. Saénz. *Applications of stratifying systems to the finitistic dimension.* Journal of Pure and Applied Algebra 2006, 205 (393-411).

[17] O. Mendoza, C. Saénz. *Tilting categories with applications to stratifying systems.* Journal of Pure and Applied Algebra 2006, 302 (419-449).

[18] K. Erdmann, C. Saénz.*On Standardly Stratified Algebras.* Comm. in Algebra 2003, Vol. 31, No. 7 (3429-3446).

[19] Y. Miyashita, *Tilting modules of finite projective dimension.* Math Z. 1986, 193 (113-146).

[20] C. M. Ringel. *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences.* Math. Z. 1991, 208 (209-223).

[21] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Universytext Springer, 2009.

[22] V. Santiago *Homología relativa en los contextos de Auslander-Buchweitz y de Auslander-Reiten.* Tesina para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas, dirigida por el Dr. Octavio Mendoza Hernández. Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.

[23] L. Scott. *Simulating Algebraic Geometry with Algebra, I: The Algebraic Theory of Derived Categories*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,47(1987)271-281.

[24] L. R. Vermani. *An elementary approach to homological algebra*. Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Math, 2003.

[25] C. Xi. *Standardly stratified algebras and cellular algebras*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2002, 133 (37-53).