Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

AFINADOR DE TEMPERAMENTOS HISTÓRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
MARÍA TERESA CAMPOS ARCARAZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2011

1. Datos del Alumno
Campos
Arcaraz
María Teresa
5655 8850
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
401043785

2. Datos del Tutor
Dr
Padilla
Longoria
Pablo

3. Datos del Sinodal 1
Dr
Ley
Koo
Marcos

4. Datos del Sinodal 2
Dr
Orduña
Bustamante
Felipe

5. Datos del Sinodal 3
Dr
Lluis
Puebla
Emilio Esteban

6. Datos del Sinodal 4
Dra
Stern
Forgach
Catalina Elizabeth

7. Datos del trabajo escrito
Datos de la Tesis
Afinador de Temperamentos Históricos
104p.
2011

A mis padres y a mis hermanos,
por todo el amor y el apoyo,
por la paciencia y todo lo que me han dado
para convertirme en la persona que soy.

Agradecimientos

A la maestra Guadalupe Martínez (d.e.p.), por su ejemplo, por todas sus enseñanzas, por el esfuerzo que invirtió para que aprendiera tanto. Por introducirme al estudio de la música con un enfoque nuevo para mi, de una manera tan acertada.

Al Dr. Pablo Padilla por el esfuerzo invertido en esta tesis, por su paciencia y por siempre tener una palabra de motivación. También por el ejemplo de su persona, que al igual que la maestra Guadalupe, ha marcado mi vida para ser mejor.

A mis maestros en la Facultad de Ciencias, por su apoyo y su preocupación por mi persona y por mi desarrollo profesional.

A mis amigos en la Facultad, Margarita, Ethel, Isaac, Carolina, Lizbeth, Pedro, Alí, Dan, Alejandro, Xamanek, Héctor, Edgar, Pamela y Ariel, Ismael, Alfredo, Pancho, Paco, Iván, Indira, Gustavo y Josué; por escucharme siempre, por darme palabras de aliento cuando las necesité, por estar conmigo y compartir momentos que jamás voy a olvidar.

A mis maestros en la Escuela Nacional de Música por todo su conocimiento, su esfuerzo e interés en mi aprendizaje,

A mis compañeros en la música, Hebzoariba, Laura y Toño, Mario, Rosaura, Alfredo, Germán, Mariana, Pamela y Alejandro, por tratar de entenderme y por apoyarme en mis proyectos, por dejarme participar en los suyos, y por compartir conmigo tantas cosas.

A mis papás por todo su apoyo, su tiempo, su esfuerzo y su cariño, para que pudiera alcanzar mis metas. Por escucharme siempre y entenderme. Sin ustedes no hubiera podido hacer todo lo que he hecho. A mis hermanos, por el tiempo que dedicaron ayudándome y escuchándome, ha sido tiempo muy valioso para mí.

A Ximena y Yaneli, por todo su apoyo, por siempre estar cerca y demostrarme una amistad constante, en los momentos difíciles y en los alegres, por escucharme siempre y por abrirme su corazón, por acompañarme y apoyarme en todas las aventuras de mi vida.

A Marcelita, Karla, Christián, Miguel, tía Norma, Paz, por apoyarme siempre y por todo lo que he aprendido de ustedes.

A Ana Cecilia Pérez y Ramiro Chávez del Departamento de Matemáticas y Mecánica del Instituto de Investigación de Matemáticas Aplicadas a Sistemas de la UNAM, por la ayuda en la edición de este trabajo.

Índice general

Introducción

Un aspecto importantísimo de la música es la relación que tienen los sonidos en ésta, el "color" que tiene influye de manera decisiva en las sensaciones que transmite. Este color ha ido cambiando a lo largo de la historia, depende del estilo y la intención de la música, de los instrumentos que se usan para interpretarla y el ambiente en el que todo se desarrolla. El color está dado, de manera muy importante, por los intervalos o las razones que tienen los sonidos entre sí. Esta estructura de proporciones que se conoce como afinación, ha ido cambiando a lo largo de la historia, ha sido un tema continuamente estudiado y actualizado y sin embargo, ahora es un tema en el que no se profundiza. Es importante que la gente que estudia la música y la interpreta tenga conocimiento de una parte que ha ocasionado tantos cambios importantes en ésta.

El objetivo de esta tesis es crear un afinador en el que puedan escucharse las afinaciones y los temperamentos más representativos de la historia de la música occidental. Con este programa se pueden escuchar las notas de una octava en las afinaciones pitagórica y justa, asícomo en el temperamento mesotónico de Aron, en los buenos temperamentos de Aron-Neidhardt, Werckmeister I, Young y el temperamento igual, que es el utilizado como estándar actualmente.

El trabajo escrito cuenta con cuatro capítulos:

El primero trata de la física del sonido, de las ondas y sus propiedades, además de las características psicoacústicas de éste. También menciona conceptos físicos básicos del movimiento de las cuerdas y de la producción del sonido en los tubos de instrumentos musicales. Se incluyen videos que pretenden explicar de modo visual algunos conceptos mencionados, los cuales se señalan al agregar la extensión ".avi" en los pies de imagen. Si se da doble click con el mouse sobre ellos se activarán y podrá verse la animación.

En el segundo capítulo se explica el problema de la afinación, así como los temperamentos y afinaciones más importantes que se propusieron para darle una solución. También se describen matemáticamente los temperamentos que son utilizados en el afinador creado para este trabajo. Se pueden escuchar algunas de estas afinaciones, dando doble click con el mouse sobre los ejemplos en cuyo pie de imagen se muestre la extensión ".mp3" y sobre las casillas de color que contengan el nombre de la afinación en la que se muestra el ejemplo.

El tercer capítulo trata acerca de una parte del desarrollo de la armonía de la música occidental, a partir de alrededor del año 1600 hasta principios del siglo XX, que puede tener que ver con el desarrollo de los temperamentos. Se muestran fragmentos de obras de cada época, que hacen evidente los cambios en la armonía y en los estilos, pudiéndose escuchar en distintas afinaciones y temperamentos para poder comparlos. Se pueden hacer sonar todos los ejemplos al hacer click en la casilla con el nombre correspondiente a la afinación en la cual se escuchan, o en su ausencia, sobre el fragmento escrito.

El cuarto capítulo describe el funcionamiento del afinador creado en este trabajo. Se describe su instalación y sus funciones.

Al final, existe un apéndice que incluye todos los términos musicales que se utilizan en este trabajo, y también contiene algunos ejemplos sonoros, con el objetivo de que la expliación sea más clara.

Capítulo 1

El Sonido

Resumen

En este capítulo se presentan las herramientas físicas y matemáticas necesarias para modelar el sonido. A partir de la ecuación de onda, se deducen algunas de sus propiedades, hasta llegar al fenómeno de superposición y a los fenómenos de batimientos y aspereza, que son los que dan origen al problema de la afinación.

También se describe el movimiento de la cuerda punteada, rasgada y percutida, así como la producción del sonido en los tubos de órgano.

La mayor parte de la información fue obtenida del libro “The Physics of Musical Instruments” escrito por Neville H. Fletcher y Thomas D. Rossing [9], así como del libro “Fundamentals of Physical Acoustics” de David T. Balckstock [4].

El sonido es el fenómeno de propagación de ondas longitudinales a través de un medio elástico, producidas por un medio vibrante. Los instrumentos musicales funcionan con base en diferentes elementos vibratorios, que forman un sistema complejo que produce una onda longitudinal que se propaga por el aire. Las ondas longitudinales hacen oscilar un medio (por ejemplo el aire) en la dirección en la que se propagan y en el caso del sonido provocan cambios en la densidad del medio que atraviesan.

1.1. Ondas

Una onda es la propagación de una perturbación en una propiedad de un medio. En el caso de la luz los campos eléctrico y magnético sufren la perturbación, en el caso del sonido es la presión en el aire la que cambia. Las ondas transmiten energía provocando movimientos pequeños de partículas alrededor de un punto de equilibrio sin que exista un transporte neto de masa.

En los análisis de este trabajo, sólo se toma en cuenta una dimensión.

1.1.1. Deducción de la Ecuación de Onda Acústica

A partir de la ecuación de estado del sistema, la ecuación de continuidad y la de movimiento, se deduce la ecuación de onda acústica .

Suponiendo ondas cuya amplitud es pequeña, se pueden despreciar los efectos no lineales en la perturbación del medio, por lo que se trabajará con ecuaciones lineales.

La ecuación de estado que describe el comportamiento termodinámico de un fluido, en este caso el aire, corresponde a la del gas ideal y relaciona la presión en un punto P del gas, su densidad ρ y su temperatura T_k dada en Kelvins:

$$P = \rho r T_k. \tag{1.1}$$

La presión puede escribirse como $P = P_0 + p$, donde P_0 es la presión en un punto en equilibrio y p es el cambio de la presión cuando la onda perturba el gas.

También puede escribirse $\rho = \rho_0 + \rho_e$ donde ρ_0 es la densidad del medio en equilibrio y ρ_e es la variación en la densidad cuando es perturbado el medio por la onda.

Además puede escribirse $P = f(\rho)$ y $P_0 = f(\rho_0)$, entonces

$$P_0 + p = f(\rho_0 + \rho_e). \tag{1.2}$$

Si se desarrolla la serie de Taylor a primer orden alrededor del punto de equilibrio ρ_0

$$P_0 + p = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0) + \frac{\rho_e^2}{2!} f''(\rho_0). \tag{1.3}$$

Si se asume $p \ll P_0$ y $\rho_e \ll \rho_0$ entonces

$$P_0 + p = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0), \tag{1.4}$$

por lo que $p = \rho_e f'(\rho_0) = \rho_e (\frac{\partial p}{\partial \rho})_{\rho_0}$, además $f'(\rho_0) = \frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2$ donde c es la velocidad. Por lo tanto la ecuación se convierte en

$$P = \rho_e c^2. \tag{1.5}$$

La ecuación de continuidad en este caso se refiere a la conservación de la masa.

Se toma una sección transversal del gas donde dos puntos x y $x + \Delta x$ se mueven debido a la perturbación a $x + \xi(x,t)$ y $x + \Delta x + \xi(x + \Delta x, t)$ donde $\xi(x,t)$ representa el movimiento de la partícula debido a la perturbación.

$$M_u = \rho_0 A \Delta x, \tag{1.6}$$

donde A es la sección transversal y M_u representa la masa de un volumen en estado de equilibrio. Si M_D representa la masa del volumen afectado por la perturbación entonces

$$M_D = (\rho_0 + \rho_e)A\left[\Delta x + \xi(x+\Delta x, t) - \xi(x,t)\right], \tag{1.7}$$

para $\Delta x \ll 1, \xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x$ y entonces

$$M_D = (\rho_0 + \rho_e)A\left[\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x\right] = (\rho_0 + \rho_e)\left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]. \tag{1.8}$$

Aplicando el principio de conservación de masa ($M_u = M_D$)

$$M_u = \rho_0 A \Delta x = (\rho_0 + \rho_e)A\left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] = M_D, \tag{1.9}$$

entonces

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e)\left[1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] \tag{1.10}$$

y

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{1.11}$$

Para encontrar la ecuación de movimiento se toma en cuenta que esxiste un diferencial de presión entre los planos en los puntos $x + \xi(x,t)$ y $x + \Delta x + \xi(x+\Delta x, t)$. La fuerza dada por este diferencial es

$$F = pA = \left[P(x + \xi(x,t)) - P(x + \Delta x + \xi(x + \Delta x, t))\right]A. \tag{1.12}$$

Aplicando la segunda ley de Newton $F = ma = pA$ se obtiene

$$M_D \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\rho_0 + \rho_e)A\left[\Delta x + \xi(x+\Delta x, t) - \xi(x,t)\right]\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

donde $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ es la aceleración en un punto fijo.

Si se igualan las ecuaciones 1.12 y 1.13 se obtiene

$$P(x+\xi(x,t))-P(x+\Delta x+\xi(x+\Delta x,t)) = (\rho_0+\rho_e)\left[\Delta x + \xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t)\right]\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{1.14}$$

y como $\Delta x \ll 1$, $\xi(x+\Delta x,t) - \xi(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x$ entonces

$$P(x+\xi(x,t)) - P(x+\Delta x+\xi(x+\Delta x,t)) = \rho\left[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\Delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{1.15}$$

Simplificando la notación

$$P(x+\xi) - P(x+\Delta x+\xi+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x) = \rho\left[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\Delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t2}. \tag{1.16}$$

Si se expande el segundo término del lado izquierdo alrededor de $x+\xi$

$$P(x+\Delta x+\xi+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x) = P(x+\xi+(1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x)) = P(x+\xi)+(1+\frac{\partial \xi}{\partial x})\Delta x P'(x+\xi) \tag{1.17}$$

y sustituyendo en 1.16

$$-\left(1-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\Delta x P'(x+\xi) = \rho\left[1+\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]\Delta x\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \tag{1.18}$$

por lo que la ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial p}{\partial(x+\xi)} = -\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{1.19}$$

Ahora, reorganizando 1.19 se tiene

$$-\rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{1}{(1+\frac{\partial \xi}{\partial x})^2} \tag{1.20}$$

y reorganizando 1.11

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}\rho = -\rho_0 \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{(1+\frac{\partial \xi}{\partial x})^2}. \tag{1.21}$$

Combinando 1.20 y 1.21 se tiene

$$-\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial \rho}\rho_0 \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x 2}}{(\frac{\rho_0}{\rho})^3}, \tag{1.22}$$

por lo que

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (\frac{\rho_0}{\rho})^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{1.23}$$

y por 1.5 y tomando en cuenta que $(\frac{\rho_0}{\rho})^2 \approx 1$ se obtiene la ecuación de onda acústica

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t 2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{1.24}$$

En realidad, todas las ondas ideales (sin tomar en cuenta los efectos de la fricción o la viscosidad, por ejemplo) pueden ser descritas con la misma ecuación:

$$c^2 \nabla^2 u - u_{tt} = 0, \tag{1.25}$$

donde u es la propiedad física asociada a la perturbación, c es la constante que representa la velocidad de la onda y $\nabla 2() = ()_{xx}()_{yy}()_{zz}$. Los subíndices x, y, z y t representan a la primera derivada con respecto a estas variables, respectivamente.

1.1.2. Ondas Transversales y Longitudinales

En un movimiento ondulatorio, la propiedad que es perturbada puede ser el movimiento de una cuerda, la presión del aire o cualquier otra propiedad que sufra una perturbación.

1.1.3. Ondas Transversales

Cuando en una cuerda una de las partículas se mueve, ésta lo hace en una dirección perpendicular a la cuerda y transmite el movimiento a las partículas alrededor, que a su vez afectan la posición de otras y se genera una onda. En este caso la energía se transmite de manera perpendicular al movimiento y la onda se conoce como *transversal*. En la Figura 1.1 se muestra una onda de este tipo.

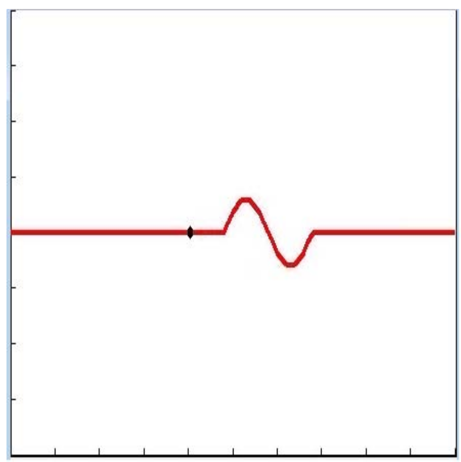


Figura 1.1: Onda Transversal.avi

Se puede deducir la ecuación de onda para ondas transversales en una cuerda vibrante, a partir de la suma de fuerzas ejercidas sobre un segmento ds de una cuerda que vibra y la segunda ley de Newton. En cada elemento ds de cuerda extendida sobre la dirección x, con una densidad lineal μ y sometida a una tensión T, se ejerce al vibrar en la dirección y una fuerza

$$dF_y = T sen\theta|_{x+dx} - T sen\theta|_x \tag{1.26}$$

lo que ocasiona que ds regrese a su posición de equilibrio. Aplicando el Teorema de Taylor a primer orden para $f(x + dx)$ se obtiene

$$dF_y = \left[Tsen\theta + \frac{\partial(Tsen\theta)}{\partial x} dx \right] |_x - Tsen\theta|_x = \frac{\partial(Tsen\theta)}{\partial x} \tag{1.27}$$

y para y pequeños $sen\theta \approx tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, por lo que

$$dF_y = T \frac{\partial \frac{\partial y}{\partial x}}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \tag{1.28}$$

En este caso al aplicar la segunda ley de Newton se obtiene

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1.29}$$

para vibraciones lo suficientemente pequeñas dx se aproxima a ds, por lo que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1.30}$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda. Ésta última es la ecuación para ondas transversales en una cuerda vibrante.

Las soluciones a esta ecuación son de la forma $f(x + ct)$ y $f(x - ct)$, donde las funciones f son arbitrarias, propuestas por Jean Le Rond D'Alembert en 1753.

La forma de onda se propaga manteniendo su forma, ya que al añadir un tiempo τ a t y $c\tau$ a x en la ecuación, el argumento $(x \pm ct)$ se conserva.

La solución entonces a la ecuación de onda es $f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$, donde cada valor de $(x - ct)$ define un frente de onda.

1.1.4. Energía en una cuerda

Sea dx un elemento en la cuerda, con una masa $dm = \rho_l dx$ y con una velocidad $y_t = \frac{dy}{dt}$. La energía cinética de este elemento está dada por

$$dE_k = \frac{1}{2}dm(\xi_t^2) = \frac{1}{2}\rho_l dx y_t^2. \tag{1.31}$$

La cuerda se deforma un poco y esta deformación se expresa como

$$ds - dx = (\frac{1}{cos\theta} - 1)dx = (\sqrt{1 + y_x^2 - 1})dx = \frac{1}{2}y_x^2 dx, \tag{1.32}$$

y el elemento tiene una energía almacenada

$$dE_a = T(\frac{1}{2}y_x^2 dx) = \frac{1}{2}\rho_l c^2 y_x^2 dx. \tag{1.33}$$

Por lo tanto

$$dE = dE_k + dE_a = \frac{1}{2}\rho_l c^2 (y_x^2 + c^{-2}y_t^2)dx. \tag{1.34}$$

Integrando sobre la longitud de la cuerda se obtiene

$$E = \frac{1}{2}\rho_l c^2 \int (y_x^2 + c^{-2}y_t^2)dx = \rho_l c^2 \int y_x^2 dx. \tag{1.35}$$

1.1.5. Ondas Longitudinales

En el aire se producen ondas *longitudinales* que se caracterizan por transmitir la energía en dirección paralela al movimiento de cada una de las partículas; cuando éstas se mueven producen una compresión en una zona del aire y empujan a otras partículas en la misma dirección, lo que provoca una descompresión en esa zona. En la Figura 1.2 se muestra una onda de este tipo.

Las ondas sonoras son de este tipo, la ecuación que las describe es la ecuación de onda acústica.

1.1.6. Propiedades de las Ondas

Se describen algunas de las propiedades de las ondas, entre ellas el Principio de Superposición y los efectos de batimientos y aspereza, que dan origen al problema de la afinación.

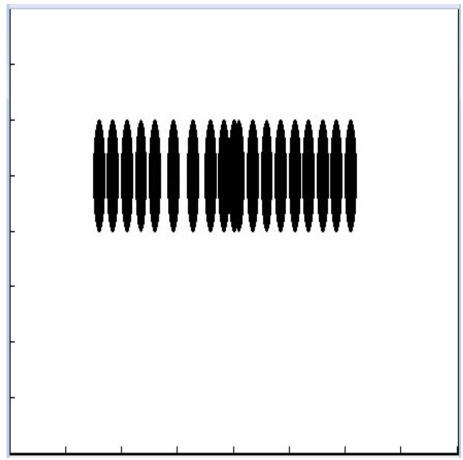


Figura 1.2: Onda Longitudinal.avi

Impedancia Acústica

La impedancia acústica está dada por la razón de la presión sonora P_{av} sobre una superficie con respecto a la velocidad q de las partículas del fluido a través de esta superficie.

$$Z_{ac} = \frac{P_{av}}{q} \tag{1.36}$$

Reflexión, Eco y Reverberación

Siempre que una onda choca contra una superficie, una parte de ésta se refleja, otra se transmite y otra se absorbe. La medida en que esto ocurre depende de las propiedades del material del que está hecha la superficie. En esta sección se utiliza la solución de la función de onda $F_1(t - c/x) + F_2(t + c/x)$ que es una representación equivalente a la utilizada anteriormente, pero en este caso más útil.

Si una onda viaja de un medio con impedancia Z_1 a otro con impedancia Z_2, se llama a las funciones que describen el comportamiento de la onda que llega, la onda que se refleja y la que se transmite, respectivamente $p^+ = p^+(t - x/c_1), p^- = p^-(t + x/c_1)$ y $p^{tr} = p^{tr}(t - x/c_2)$.

Como la presión debe ser la misma en ambos lados de la interfase, $u^+ + u^- u^{tr}$, por lo que $\frac{p^+}{Z_1} - \frac{p^-}{Z_1} = \frac{p^{tr}}{Z_2}$. Se define el coeficiente de reflexión como $R = \frac{p^-}{p^+}$. Cuando no existe una onda que se transmita a través de la interfase, $p^{tr} = 0$ y $p^-(t) = Rp^+(t)$, lo que indica que la forma de la onda incidente es igual a la de la reflejada, pero con una amplitud que varía según la magnitud de R, con $R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$.

Si la impedancia del medio después de la interfase a la que la onda llega es muy grande $R \approx 1$ y la onda se refleja con la misma amplitud pero en sentido contrario y, la onda no se transmite a través de la interfase.

Cuando una onda se refleja y regresa al punto de partida con un tiempo mayor a 50 milisegundos, el cerebro interpreta dos sonidos iguales, uno detrás de otro, el segundo más tenue y, a este efecto se le conoce como eco.

Por otra parte, cuando en un lugar cerrado como por ejemplo una sala, el sonido rebota en distintos lugares y regresa, el cerebro no distingue cada una de las ondas reflejadas, sino lo interpreta como una alteración en el sonido a la que se llama reverberación.

El tiempo que transcurre hasta que la intensidd de un sonido queda reducida a una millonésima parte de su valor inicial se llama *tiempo de reverberación.*

Refracción

Se define el coeficiente de transmisión como $T = \frac{p^{tr}}{p^+}$. y $T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$. Si $Z_2 \approx Z_1$ entonces $p^{tr} = Tp^+$, es decir que la onda se transmite totalmente y no se refleja, mantiene su amplitud, aunque como $c_1 \neq c_2$, la onda se alarga o se acorta.

Cuando la onda incidente no es perpendicular a la interfase, la refracción sigue la Ley de Snell:

$$\frac{sen(\theta_1)}{v_1} = \frac{sen(\theta_2)}{v_2} \tag{1.37}$$

donde θ_1 es el ángulo de incidencia de la onda que viaja desde el primer medio y v_1 es la velocidad del sonido en él, θ_2 es el ángulo con el que la onda viaja en el segundo medio y v_2 es la velocidad del sonido en éste.

Difracción

Al final de una barrera finita cuyo tamaño es más grande que la longitud de onda que la recorre, la onda se dispersa en todas direcciones formando una fuente puntual al borde de la barrera. Ésta es la razón por la que las ondas "dan vuelta en la esquina" y un observador que está fuera de contacto visual (en línea recta) con una fuente emisora puede escucharla aún sin existir un objeto que permita que la onda se refleje.

Este fenómeno también ocurre cuando la onda choca con una barrera con una rendija mucho más pequeña que su longitud. La apertura de la rendija se vuelve una fuente puntual que transmite el sonido.

Intensidad del Sonido

La intensidad del sonido se define como el promedio temporal del flujo de energía (energía por unidad de tiempo, o potencia) por unidad de área, donde el vector normal de área apunta a la dirección sobre la cuela se quiere medir la intensidad.

La potencia $P = f \cdot v$, y en versión acústica $pu \cdot \Delta s = i \cdot \Delta s$, donde Δs es el elemento de área, $i \equiv pu$ es la energía de flujo instantánea por unidad de área. El promedio de i es la intensidad.

$$I = \frac{1}{t_{prom}} \int_0^{t_{prom}} pudt \tag{1.38}$$

Absorción

Al propagarse la onda sonora en un medio va perdiendo energía cinética debido a los choques entre las partículas del medio, por lo que la onda va atenuándose. La absorción (pérdida de energía en el medio) depende de las características del material en el que se propaga la onda.

Superposición

Cuando dos o más ondas atraviesan el mismo medio, la perturbación de éste es equivalente a la suma de todas las ondas. A este fenómeno se le llama Principio de Superposición.

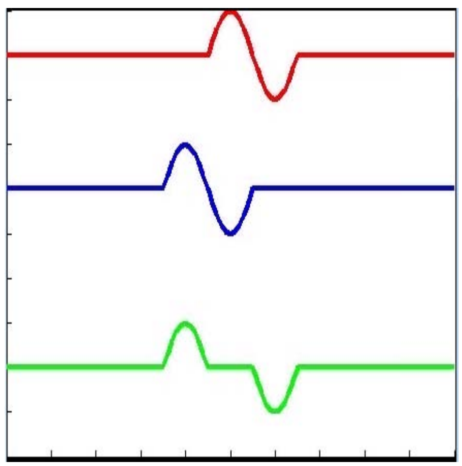


Figura 1.3: Principio de Superposición.avi

Batimientos y Aspereza

Cuando dos tonos con frecuencias muy cercanas se suman, resulta un sonido cuya frecuencia es igual al promedio de las dos frecuencias originales, pero con una amplitud que varía con una frecuencia igual en magnitud a la diferencia de las frecuencias de los tonos.

Si la diferencia de frecuencias de los tonos es muy pequeña, la percepción del sonido es de un tono con la frecuencia ya mencionada, con pulsaciones. A ésto se le llama *batimentos*. Sin embargo, si las pulsaciones alcanzan la frecuencia de un sonido audible, el cerebro interpreta al nuevo sonido con un tono de frecuencia muy baja, es decir, escucha dos sonidos, uno con la frecuencia promedio de los dos tonos originales, y otro de frecuencia muy baja. A este fenómeno se le denomia *aspereza*[16].

Efecto Doppler

Es un fenómeno que tiene que ver con el movimiento relativo de la fuente que emite sonido y del receptor. La frecuencia del sonido que el observador capta va cambiando confrome la fuente se mueve acercándose o alejándose de él. La ecuación que describe este fenómeno es

$$f' = \frac{v_s - v_0}{v_s - v_e} f, \tag{1.39}$$

donde f' es la frecuencia que el receptor u observador percibe, f es la frecuencia del sonido que la fuente emite y v_e su velocidad, v_s es la velocidad del sonido en el medio y v_0 es la velocidad del observador respecto a un punto fijo en el sistema.

Resonancia

Además de combinarse los elementos vibratorios para producir notas, los instrumentos cuentan con un elemento que resuena y amplifica las ondas, dando un mayor volumen a los sonidos.

La resonancia es un fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica, cuyo periodo de vibración coincide con el periodo de vibración característico de dicho cuerpo. En estas circunstancias el cuerpo vibra aumentando de forma progresiva la amplitud del movimiento, tras cada una de las actuaciones sucesivas de la fuerza.

1.1.7. Ondas Estacionarias

A partir de esta ecuación se puede analizar la reflexión de una onda en los extremos de la cuerda, sustituyendo los valores iniciales y de frontera. Por ejemplo, si la cuerda está atada en uno de sus extremos y en el otro se encuentra libre, $x = 0$ implica $y = 0$ y por lo tanto $f_1(ct) = -f_2(ct)$, lo que implica que un impulso se refleja con la misma amplitud y en dirección contraria en el extremo fijo. En la figura 1.4 puede observarse este fenómeno.

En una cuerda o en una columna de aire dentro de un tubo, se transmite una

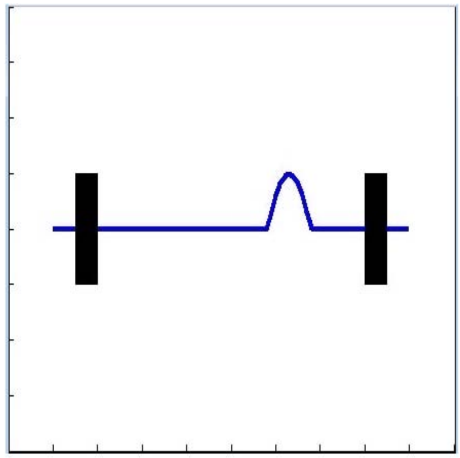
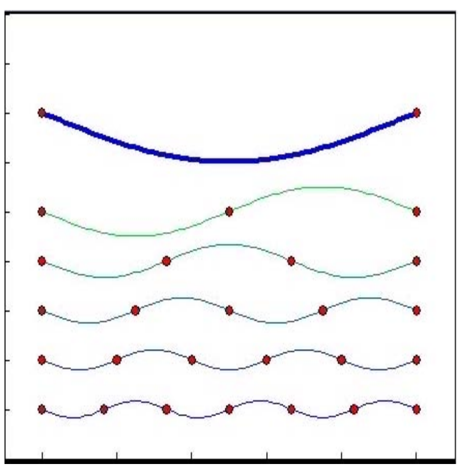
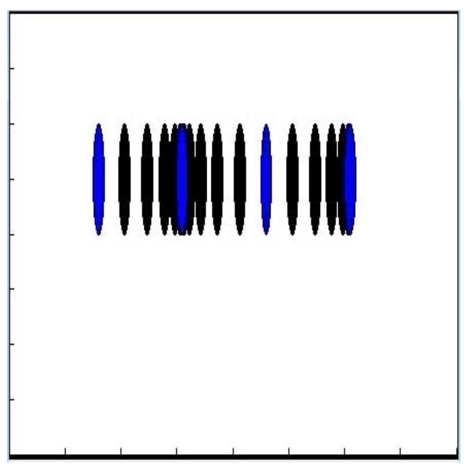


Figura 1.4: Reflexión de una onda en una cuerda.avi

onda que al llegar a los extremos del medio se refleja, sumándose a la onda original por el principio de superposición y genera una *onda estacionaria.* Estas ondas son las que producen los sonidos afinados de los instrumentos musicales.



(a) Ondas Estacionarias Transversales.avi



(b) Ondas Estacionarias Longitudinales.avi

La solución a la ecuación del oscilador armónico forzado representa a estas ondas, ya que para producir un sonido afinado se requiere una fuerza armónica que haga vibrar al instrumento durante un tiempo determinado.

Tomando en cuenta el principio de superposición para ecuaciones diferenciales lineales la solución puede escribirse como la suma de los armónicos de la onda, es decir

$$y = \sum_n y_n, \tag{1.40}$$

y

$$y_n(x,t) = (A_n senw_n t + B_n cosw_n t) sen\frac{w_n x}{c}, \tag{1.41}$$

donde $w_n = \frac{n\pi c}{L}$, L es la longitud de la cuerda y $n = 1, 2, 3...$ También puede escribirse

$$y = \sum_n C_n sen(w_n t + \Phi_n) senk_n x, \tag{1.42}$$

donde C_n es la amplitud del modo enésimo y Φ_n su fase.

A cada n corresponde un modo de vibración de la cuerda. Al tono que cada uno de los modos produce se le llama enésimo armónico.

La energía total de la cuerda que vibra es la suma de la energía de cada uno de sus modos y como en un oscilador simple, la energía total es igual a la energía cinética máxima, o a la energía potencial máxima, por lo que

$$dE_n = \frac{w_n^2 \mu}{2}(A_n^2 + B_n^2) sen^2 \frac{n\pi x}{L} dx \tag{1.43}$$

y entonces

$$E_n = \frac{w_n^2 \mu L}{4}(A_n^2 + B_n^2) = \frac{w_n^2 \mu L}{4} C_n^2 \tag{1.44}$$

y $E = \sum_n E_n$.

Espectro de Frecuencias

Una forma de analizar un sonido es identificando la frecuencia de cada una de las vibraciones simples (tonos puros) que lo componen y la intensidad que tiene cada una de éstas. A este análisis se le conoce como *Espectro de Frecuencias*. Al tono puro con la frecuencia más baja se le llama *fundamental* y establece la altura del sonido.

En 1807, el matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier desarrolló la teoría que permite hacer esta descomposición de cualquier onda, ahora conocida como *Análisis de Fourier*. Consiste en que, dada la función $f(t)$ que describe a un movimiento periódico con periodo $2T$, se encuentra la serie de Fourier asociada

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n cos \frac{n\pi}{T} t + b_n sen \frac{n\pi}{T} t \right], \tag{1.45}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier y toman los valores

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) cos(\frac{n\pi t}{T}) dt \tag{1.46}$$

y

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(t) sen(\frac{n\pi t}{T}) dt. \tag{1.47}$$

También pueden expresarse en forma compleja como

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\pi \frac{n}{T} t} dt. \tag{1.48}$$

1.1.8. Cuerda Punteada

Al deformar una cuerda fija en ambos extremos jalando sólo un pedazo de ésta y luego soltándola, se produce una forma de onda específica. Las condiciones iniciales son $v_0 = 0$ y $y_0 \neq 0$. Los armónicos producidos son aquellos que no tienen nodos en el punto donde la cuerda fue punteada. El movimiento de la cuerda punteada a la mitad de su longitud es equivalente a la suma de dos pulsos que viajan en sentido contrario sobre la cuerda.

Los coeficientes de Fourier que describen a la onda producida son:

$$A_n = \frac{2}{w_n L} \int_0^L \dot{y}(x, 0) sen \frac{n\pi x}{L} dx, \tag{1.49}$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) sen \frac{n\pi x}{L} dx. \tag{1.50}$$

Cuando las fases de los armónicos no coinciden, el sonido se apaga rápidamente ya que al sumarse éstos se anulan.

1.1.9. Cuerda Percutida

En una cuerda percutida, las condiciones iniciales son diferentes a las de la cuerda punteada: $y_0 = 0$ y $v_0 \neq 0$. Un objeto golpea a la cuerda en un punto y le transmite su velocidad. El segmento de cuerda se mueve y transmite este movimiento al resto de la cuerda. Al reflejarse la onda en los extremos de la cuerda la interacción con el objeto que la golpea produce un movimiento muy complicado. La onda se estabiliza hasta que el objeto se separa totalmente de la cuerda.

1.1.10. Cuerda Rasgada

La forma de la onda producida al frotar un arco con una cuerda es siempre la de dos líneas cuya intersección recorre parábolas envolventes.

Al mover el arco sobre la cuerda, la fricción hace que la cuerda se mueva junto con éste, hasta llegar a la posición inicial de una cuerda punteada, sin embargo cuando la cuerda no puede deformarse más en esa dirección y el arco sigue moviéndose, ésta regresa rápidamente a la posición original y luego repite el mismo movimiento en dirección contraria, entrando en un ciclo siempre y cuando el arco siga moviéndose con velocidad constante.

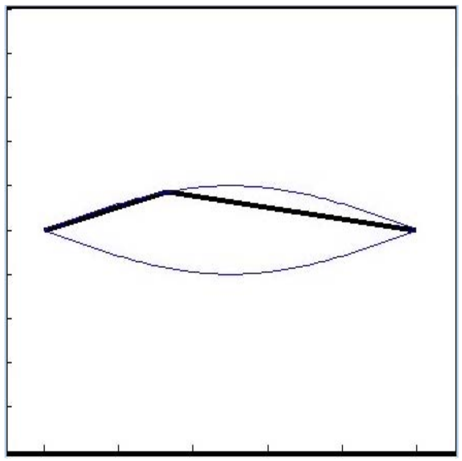


Figura 1.5: Cuerda Rasgada.avi

La ecuación que describe este movimiento es:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen \frac{n\pi x}{L} sen(nwt). \tag{1.51}$$

La velocidad en la cuerda es constante y positiva mientras la cuerda se mueve junto con el arco, luego es mayor, constante y negativa mientras regresa a su posición original y cambia de sentido, repitiéndose este movimiento.

1.1.11. Tubos de Órgano

Los tubos de órgano tienen en uno de sus extremos una embocadura por donde entra un chorro de aire y también una boca que lo hace vibrar. La interacción del chorro con la columna de aire dentro del tubo es lo que provoca el sonido de este instrumento.

El flujo de aire dentro del tubo no es completamente laminar, es decir, las partículas de aire no se mueven en trayectorias paralelas, sino que existen turbulencias cerca del tubo que son las que permiten que las ondas se estabilicen. Las condiciones en los extremos determinan gran parte de las características del sonido resultante.

Si un tubo es abierto, la columna de aire vibra con su máxima amplitud en

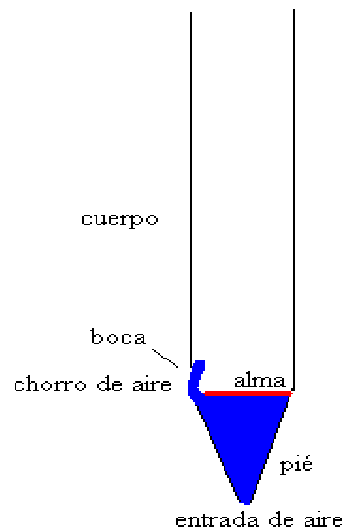


Figura 1.6: Esquema de un tubo de órgano[1]

los extremos y la frecuencia de los modos de vibración es

$$f = \frac{nv_s}{2L}, \tag{1.52}$$

donde L es la longitud del tubo, n es el enésimo modo de vibración y v_s es la velocidad del sonido del aire.

En un tubo cerrado, la frecuencia de los modos está dada por

$$f = \frac{(2n+1)v_S}{2L}. \tag{1.53}$$

La vibración de la columna de aire es longitudinal y se producen nodos en los extremos cerrados y crestas en los extremos abiertos. En un tubo cerrado el nodo se produce en el extremo, por lo tanto la longitud de onda del sonido fundamental es $4L$. En un tubo abierto el sonido fundamental tiene un único nodo en el centro, por lo que su longitud de onda es de $2L$.

Los tubos abiertos emiten la serie completa de armónicos correspondientes a su longitud, mientras que los tubos cerrados emiten sólo los armónicos impares. En realidad los tubos abiertos deben ser más cortos que la mitad de la longitud de onda fundamental debido a que la cresta de la onda no se forma exactamente en el extremo sino alrededor del tubo.

La embocadura de los tubos es una abertura con bordes biselados y provoca que la corriente de aire se divida en dos ramas: una que entra al tubo y origina pequeñas vibraciones que excitan a la columna de aire por resonancia, la otra rama escapa del tubo[1].

La embocadura puede ser directa o indirecta. En la embocadura directa la corriente de aire es dirigida directamente sobre la embocadura, mientras que en la indirecta la corriente de aire pasa por un tubo llamado portavientos, antes de incidir sobre el bisel de la embocadura. El primer tipo es el caso de una flauta, mientras el segundo es el caso de un órgano.

1.1.12. Características Psicoacústicas del Sonido

Un sonido tiene características físicas como la amplitud, la frecuencia y la forma de onda, que percibimos como la sonoridad, la altura y el timbre del sonido, respectivamente. A estas percepciones se les conoce como *características psicoacústicas del sonido*.

La intensidad o sonoridad de un sonido es directamente proporcional a la amplitud de la onda producida y se mide en unidades llamadas *decibeles*. El decibel es una unidad logarítmica relativa, es decir, que depende de un valor base dado que en general se toma como un sonido cuya presión es de 20 micropascales. Nuestra percepción de la intensidad depende también de la frecuencia del sonido, cuya percepción puede variar de persona a persona. Los diagramas de Fletcher y Munson que se muestran en la Figura 1.7, son curvas que muestran la relación de la intensidad percibida con la frecuencia del sonido que se mide.

La altura del sonido percibida depende de la frecuencia fundamental del sonido. En realidad la percepción de la altura es un fenómeno muy complejo. Si las componentes parciales de un sonido corresponden a múltiplos de una frecuencia fundamental, aunque esta última no esté en el sonido, la altura percibida es la de esta frecuencia. La sensación de altura se va haciendo más confusa cuando las componentes parciales no son múltiplos enteros de la frecuencia más baja del sonido[16].

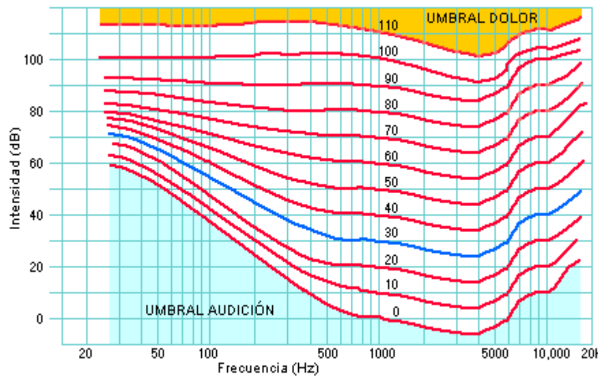


Figura 1.7: Diagramas de Fletcher y Munson de la Intensidad

La percepción del timbre depende también de muchas variables, la amplitud y la fase de las componentes parciales del sonido, incluso la envolvente del sonido[16]. Cuando un objeto vibra, la forma de la onda que produce depende de su densidad, longitud, tensión y forma en como se hace vibrar. Cambios en una o más de estas variables ocasionan una forma de onda diferente que percibimos como un timbre diferente.

El problema de la afinación se relaciona directamente con las sensaciones que varios sonidos que se escuchan al mismo tiempo provocan, y estn dadas por las características por le fenómeno de superposición, batimentos y aspereza.

Capítulo 2

Afinaciones y
Temperamentos Históricos

Resumen

En este capítulo se describen grosso modo los cambios más importantes hechos a las afinaciones con las que se interpreta la música occidental, desde la escala pitágorica hasta el temperamento igual, explicando brevemente las bases matemáticas de cada una de las afinaciones.

2.1. Marco Histórico

La música es una expresión que ha estado presente en todas las culturas aunque no siempre de la misma manera. En la mayoría de las civilizaciones los tonos de una melodía se dan de manera discreta y no continua, utilizando intervalos entre notas de la escala mucho más grandes que el más pequeño que el oído humano puede distinguir[11]. En general se emplean escalas de 7 sonidos, aunque hay culturas cuyas escalas tienen 5, 9, 17 e incluso 22. La música occidental se basa en la escala de 7 sonidos, por lo que esta investigación se limita a la historia de las afinaciones de ésta.

El instrumento musical más antiguo del que quizás se tenga conocimiento es una pequeña flauta tallada en el hueso de un oso encontrada en Eslovenia [5]. Se cree que este instrumento tiene 43 000 años de antigüedad. Sólo un poco menos antiguo, se encontró en Australia un instrumento llamado "romba" que es una tabla ovalada con agujeros y está sostenida de un cordel por sus extremos. Al hacer girar la tabla el aire atraviesa los agujeros produciendo una nota de frecuencia variable dependiendo de la velocidad con la que se gira. Se tiene evidencia de que la construcción de éstos y otros instrumentos musicales coincide con la aparición de la especie *homosapiens-sapiens*[5].

No se tienen datos de que antes de la dinastía Shang en China (1700 - 1100 a.C.) existiesen reglas para crear e interpretar música, aunque ésta estuviera presente en la vida del hombre desde mucho antes. Los instrumentos cuya afinación es fija correspondientes a esta época producen los sonidos de una escala pentáfona (con cinco sonidos). Éstos estaban relacionados por intervalos de quinta (relación de frecuencias 3:2). Las notas actuales con las que se pueden relacionar estos sonidos son: Do, Re, Fa, Sol y La[12].

Figura 2.1: Escala Pentáfona.mp3

En el oído humano el mecanismo neuronal que analiza un mensaje musical se basa en los intervalos de las notas, es decir, en la diferencia entre dos frecuencias y no en el valor de la frecuencia de cada una de las notas por separado[11]. Este fenómeno provocó que la música se interpretara con notas que mantenían una relación muy similar, sin embargo durante mucho tiempo no se definió una frecuencia específica para cada una de ellas, haciendo difícil la ejecución simultánea de varios instrumentos, sobre todo de afinación fija.

Se sabe que un objeto al vibrar transmite ondas al aire. Si éstas tienen una frecuencia entre 20 y 20 000 Hz y una amplitud suficiente podemos escuchar un sonido. La vibración de cada objeto es equivalente a la superposición de vibraciones simples (o pendulares) de varias frecuencias. Cuando estas frecuencias corresponden a múltiplos de la frecuencia más baja escuchamos un tono musical. A la frecuencia más baja se le conoce como *frecuencia fundamental* y a sus múltiplos se les llama *armónicos* o *parciales*. Cuando los parciales no son múltiplos de una frecuencia fundamental, la sensación de altura del sonido se hace confusa, e incluso puede llegar a percibirse el sonido como un ruido[16].

Las características principales de un tono musical son: la amplitud de vibración, que nuestro cerebro interpreta como sonoridad; su frecuencia fundamental, que interpretamos como altura; y la forma de la vibración periódica que interpretamos como timbre y es la que nos permite distinguir al objeto que produce el tono musical. La forma de la onda está dada por la suma de los armónicos que la constituyen, afectándolo de manera importante la amplitud y la fase de cada uno de ellos.

A través de la historia la forma de expresión musical ha ido cambiando, tanto las relaciones de frecuencias entre los sonidos como el modo de utilizarlos. Se puede clasificar grosso modo el desarrollo de la música occidental en las siguientes categorías:

- Música Homofónica: es la unión melódica de los sonidos en el tiempo, donde se hace sonar una sola nota a la vez. Todavía se utiliza en culturas como la china, india, árabe y turca. En esta época se desarolló el sentido de tono y modo de las escalas, es decir, había una nota que atraía de alguna manera a las demás; la relación de los diferentes sonidos de la escala con la tónica definía el modo. Se consideraba a la octava como un unísono, por ejemplo, al cantar hombres, mujeres y niños, en realidad las notas están separadas por una o más octavas pero la sensación es la de estar cantando todos la misma nota.
- Música Polifónica: Empezó a desarrollarse en la Edad Media. Dos o más voces cantaban la misma melodía en diferentes afinaciones a veces al mismo tiempo y otras, una voz respondía o imitaba a la otra. A este

tipo de música se le llamó *organum*. El siguiente paso desarrollado al final del siglo XI fue cantar dos melodías distintas e independientes al mismo tiempo (contrapunto), pero que producían consonancias. A este estilo se le llamó *discanto*. El objetivo, más que producir consonancias, era el de evitar disonancias. También se alentó el desarrollo de formas rítmicas que dieran variedad a estos cantos. Empezaron a establecerse reglas acerca de los sonidos que podían usarse juntos produciendo intervalos consonantes, prohibiendo los que producían intervalos disonantes.

- Música Armónica: Al agregarse más melodías contrapuntísticas la unión de varios intervalos formados entre cada voz formaban acordes, lo que dio origen a la armonía. El Protestantismo tenía por principio que la música formara parte del rito religioso, por lo que la congregación debía participar de ésta y no sólo escucharla de algunos intérpretes. Ésto ocasionó que se cantaran varias voces a la vez de manera intuitiva. Se utilizaban canciones populares a las que se les alteraba la letra para darles un sentido religioso. La escala mayor fue la que mejor se ajustaba a este tipo de música y la escala menor era la segunda más fácil de manejar; así, la música se redujo a la utilización de estas dos.

- Música Atonal: Su interpretación se basa en las sensaciones que requiere provocar, rompiendo con las reglas de la armonía, melodía y ritmo anteriores.

Los cambios en las afinaciones han permitido la modificación de las reglas establecidas para buscar consonancias y manejar las disonancias a modo de crear sensaciones distintas. Algunos intervalos son muy suaves y placenteros, otros producen tensión al ser escuchados. El grado de tensión que estamos dispuestos a tolerar ha cambiado con el tiempo y desarrollo de la música[10].

El desarrollo de los instrumentos musicales ha marcado también el desarrollo de la música. En los instrumentos de teclado los sonidos son fijos, a diferencia de otros instrumentos como el violín, en el que se puede hacer sonar cualquier tono dentro del rango de frecuencias de sus cuerdas, o un continuo en el sonido. Ésto dio lugar a que se buscara un estándar en las escalas musicales. Aunque no se pudo fijar una frecuencia específica para las notas, las proporciones entre éstas se estandarizaron.

2.2. El Problema de la Afinación

Se cree que la consonancia entre dos notas está dada por la estructura de los armónicos presentes en cada una de ellas, ya que cuando dos frecuencias muy parecidas son escuchadas juntas producen batimientos o se presenta un fenómeno conocido como aspereza. Si las dos notas tienen armónicos comunes no hay batimientos y el sonido es agradable, en caso contrario se presentan batimientos o aspereza, lo que provoca una sensación poco agradable. El desarrollo de la música ha llevado a la búsqueda de afinaciones que tengan el mayor número de notas consonantes posibles.

Las frecuencias más importantes en la serie armónica tienen proporciones 2:1 (octava), 3:2 (quinta), 4:3 (cuarta) y 5:4 (tercera mayor) con la frecuencia fundamental. Al ser 3:2 el primer armónico diferente a la octava y el que tiene más fuerza, se construyeron las notas de la escala con esta proporción. Aplicado siete veces a una octava el intervalo de quinta o doce veces el de quinta, se debería alcanzar la misma nota, sin embargo $(\frac{2}{1})^7 \neq (\frac{3}{2})^{12}$ y se obtienen dos notas ligeramente distintas. A la proporción entre dos notas que debieran ser iguales y no lo son se llama *coma*. A lo largo de la historia se ha tratado de solucionar este problema formulando distintas proporciones entre las notas de la escala, ya que los intervalos que varían en una coma se oyen "desafinados". Incluso se modificó el valor de cada intervalo para poder distribuir esta coma y las distribuciones dieron lugar a diferentes afinaciones y temperamentos, que según las necesidades de expresión de cada época y las características físicas de los instrumentos han ido evolucionando.

2.3. Afinaciones y Temperamentos

2.3.1. Afinación Pitagórica y Pitagórica Medieval

La construcción de la escala de siete sonidos se atribuye a Pitágoras de Samos (569 - 475 a.C.), aunque la afinación de ésta era diferente a la de la escala igualmente temperada que se utiliza actualmente. El primero en documentar esta afinación fue Eratóstenes (276 - 194 a.C.) por lo que también lleva su nombre[12].

Fue Pitágoras quien notó que si las longitudes de dos cuerdas estaban en proporción de números enteros (es decir, 2:1, 3:2, 4:3, etc.), los sonidos que producen son consonantes.

La relación de consonancia más inmediata es de 2:1, a lo que ahora llamamos octava y los griegos llamaban *diapasón*, que significa "todo el recorrido". La segunda relación más consonante es la de 3:2, que ahora conocemos como intervalo de quinta justa y que los griegos llamaban *diapente*. La tercera relación con mayor consonancia es la cuarta justa con proporción 4:3 que los griegos llamaban *diatesseron*[11]. A partir de estos experimentos Pitágoras construyó la escala diatónica de siete sonidos que se repite en octavas más graves y más agudas. Ésta es la base de la estructura musical occidental.

Figura 2.2: Intervalos Pitagóricos.mp3

Nicomaco (60 - 120 d.C.) relata la leyenda de este descubrimiento en su obra "Manual de Armonía":

> "... suspendió cuatro cuerdas semejantes entre sí por la sustancia, grosor, número de hilos y torsión, e hizo que cada una de ellas sostuviese un peso que fijó en el extremo inferior; dio a cada una de estas cuerdas una longitud absolutamente igual y, así, golpeándolas por pares reconoció (oyó) las consonancias que buscaba y que variaban en cada pareja de cuerdas. Con dos pesos de doce y seis obtuvo la octava, así dedujo que la octava está en relación 2:1. Con doce y ocho obtuvo la quinta, de donde dedujo la relación 3:2. Con doce y nueve obtuvo la cuarta que da la relación 4:3. Comparando los dos pesos de nueve y ocho obtuvo el intervalo de un tono que le dio la relación de 9:8." [17].

La leyenda no es verdadera ya que la frecuencia de las notas no está relacionada con la magnitud del peso sino con su cuadrado. No se conocía entonces que el tono de las notas está dado por la frecuencia a la que vibran los objetos que lo producen, ni que es proporcional a la longitud de la cuerda que vibra, o que estuviera en relación al cuadrado de la tensión de la misma. El primero en corregir este error fue Marin Mersenne en su obra "Questions Harmoniques" en 1634[17].

La construcción de la escala pitagórica se basa en encontrar los sonidos por intervalos de quinta y luego ubicarlos dentro de la octava correspondiente. Su construcción matemática es como sigue:

Dado un sonido de frecuencia f su octava tiene frecuencia $2f$ y estas dos frecuencias son los extremos de la escala. Para encontrar la nota que tenga un intervalo de quinta ascendente se multiplica la frecuencia f por $\frac{3}{2}$; para una quinta descendente se divide por $\frac{3}{2}$, muliplicando (o dividiendo) este resultado por 2 para obtener sonidos dentro de los límites dentro de la escala. Por ejemplo, al buscar una quinta descendente con el método descrito se obtiene $\frac{2}{3}f$ y para ubicar esta nota dentro de la octava se multiplica por 2 y se obtiene $\frac{4}{3}f$, que es el cuarto grado de la escala: Fa. Pero si se multiplica f por $\frac{3}{2}$ se obtiene el quinto grado de la escala: Sol. Luego al multiplicar $\frac{3}{2}f \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}f$ y dividirlo por 2 (y ubicarlo así dentro de la octava) se obtiene $\frac{9}{8}f$ que corresponde al segundo grado: Re. Con este método se pueden encontrar todas las notas de la escala. Las proporciones obtenidas para los grados de la escala se encuetran en el Cuadro 2.1.

Grado	Nombre	Proporción con f
1	Do	1
2	Re	9/8
3	Mi	81/64
4	Fa	4/3
5	Sol	3/2
6	La	27/16
7	Si	243/128
8	Do'	2

Cuadro 2.1: Afinación Pitagórica

Siguiendo esta misma construcción se incorporaron todas las notas utilizadas en la Edad Media. Al conjunto de estas notas se le conoció como "Afinación Pitagórica Medieval" la cual se utilizó hasta el final del siglo XV[2]. En el Cuadro 2.2 pueden observarse los valores de las notas de esta afinación.

Sin embargo al completar la escala de doce sonidos se obtiene un *Do* "desafinado". En el diagrama siguiente se muestra este problema:

Nota	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Re$\flat$	256/243	90
Do$\sharp$	2187/2048	114
Re	9/8	204
Mi$\flat$	32/27	294
Re$\sharp$	19683/16384	318
Mi	81/64	408
Fa	4/3	498
Sol$\flat$	1024/729	588
Fa$\sharp$	729/512	612
Sol	3/2	702
La$\flat$	128/81	792
Sol$\sharp$	6561/4096	816
La	27/16	906
Si$\flat$	16/9	996
La$\sharp$	59049/32768	1020
Si	243/128	1110
Do'	2	1200

Cuadro 2.2: Afinación Pitagórica Medieval

$... \leftarrow Fa \leftarrow Do \rightarrow Sol \rightarrow Re \rightarrow La \rightarrow Mi \rightarrow Si \rightarrow Fa\sharp \rightarrow Do\sharp \rightarrow Sol\sharp \rightarrow Re\sharp \rightarrow La\sharp \rightarrow Mi\sharp(Fa) \rightarrow Si\sharp(Do) \rightarrow ...$

La razón de las frecuencias de *Do* calculándolo por quintas y por octavas se llama *coma pitagórica* y equivale a $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}0136$.

Coma Pitagórica.mp3

Otro problema de desafinación es esta escala es que el armónico correspondiente a Mi que tiene una proporción de 5:4 con respecto a *Do* y, con esta escala Mi tiene relación de 81:64. La diferencia en afinación de una tercera construida a través de quintas y la de la serie armónica se llama *coma sintónica* y equivale a $\frac{81}{80} = 1{,}0125$. La proporción en la que una coma pitagórica rebasa a una sintónica se llama *schisma*.

Coma Sintónica.mp3

La diferencia de afinación entre las notas alteradas consecutivas, por ejemplo $Do\sharp$ y $Re\flat$, es sólo de una coma pitagórica, sin embrago los intervalos de quinta que utilizan estas notas y son más pequeños por una coma pitagórica producen un efecto desagradable al que llamaban *quinta de lobo*. Y aunque hubo instrumentos de teclado con más de doce notas en una octava, la mayoría debía escoger afinar sólo una de las notas alteradas. Las afinaciones de la mayoría de los instrumentos de teclado tenían como notas alteradas a $Do\sharp, Mi\flat, Fa\sharp, Sol\sharp$ y $Si\flat$. Se evitaba tocar en tonalidades que tuvieran notas como $La\flat$ o $Re\sharp$.

Intervalo de Lobo.mp3

Figura 2.3: Quinta de Lobo

Uno de los discípulos de Pitágoras, Aristógenes (350 a.C.) se preguntaba si las razones de los matemáticos para escoger las frecuencias de las notas eran más importantes que las de los músicos al hacer música, por lo que el propuso el sistema de afinación justa, que busca tener razones de intervalos con números enteros pequeños conservando el mayor número de quintas perfectas[17].

2.3.2. Afinación Justa

Claudio Ptolomeo (100 - 170 d.C.) sostuvo que la mejor afinación es la que permite que el oído (la consonancia entre los sonidos) y las razones matemáticas de los intervalos estén de acuerdo, tratando de llegar a un punto común entre los puntos de vista de los seguidores de Pitágoras y los de Aristógenes. Además registra en el año 140 d.C. los valores que Aristógenes propuso para esta afinación que está basada en el principio de tener notas cuyas frecuencias tengan razones de números enteros y que correspondan a los armónicos de la nota que genera la escala[14].

En orden de consonancia, los intervalos que mejor se escuchan son los que tienen radios de 2:1 (octava), 3:2 (quinta), 4:3 (cuarta), 5:4(tercera mayor), 6:5 (tercera menor), 8:5 (sexta menor) y 5:3 (sexta mayor) con la frecuencia fundamental f [19]. Por lo tanto las notas Do, Sol, Fa, Mi y La son las más consonantes dentro de la escala. Para completarla hacen falta las notas Re y Si, que ofrecen cierta libertad la situarlas entre los intervalos requeridos, ya que los armónicos de Do que corresponden a estas notas no se perciben fácilmente por su volumen, evitando los batimientos y atenuando las disonancias[3].

La afinación de las notas propuestas por Aristógenes se muestran en el Cuadro 2.3[13].

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Re	9/8	204
Mi	5/4	408
Fa	4/3	498
Sol	3/2	702
La	5/3	906
Si	15/8	1088
Do'	2	1200

Cuadro 2.3: Afinación Justa

Hay dos tipos de tono y uno de semitono. Los tonos entre Do y Re, Fa y Sol y La y Si miden $\frac{9}{8}$, entre Re y Mi y Sol y La miden $\frac{10}{9}$ y todos los semitonos miden $\frac{16}{15}$. Las triadas mayores totalmente consonantes (sin batimentos o aspereza) que pueden construirse con esta escala son: $Do - Mi - Sol$, $Fa - La - Do'$ y $Sol - Si - Re'$; las menores son $La - Do' - Mi'$ y $Mi - Sol - Si$. Sin embargo la triada menor $Re - Fa - La$ es un problema ya que la tercera menor $Re - Fa$ mide $\frac{32}{27}$, aunque es parecido a $\frac{6}{5}$ que es lo que mide el intervalo de tercera menor; la quinta $Re - La$ mide $\frac{40}{27}$ (en lugar de $\frac{3}{2}$), por lo que es un acorde muy disonante. Pero al ser uno de los más importantes traía muchos disgustos a los compositores. También en esta escala hay dos séptimas de distinto tamaño: $Re - Do'$ de $\frac{16}{9}$ y $Mi - Re'$ de $\frac{9}{5}$.

En realidad está afinación no se utilizó sino hasta la Edad Media cuando Bartolomé Ramos de Pareja (1440 - 1522) propuso este sistema en lugar de la afinación pitagórica en su trabajo “Musica Pratica” (1482). Con esta nueva afinación los intervalos de tercera y de sexta no eran tan disonantes

(a) Escalas Do Mayor y La menor (b) Acorde Re menor

Figura 2.4: Afinación Justa

como en la afinación pitagórica, creando nuevas posibilidades en la música polifónica que estaba desarrollándose. Ramos de Pareja dio instrucciones específicas para afinar el monocordio y obtener terceras puras en las notas sobre las que se contruyen los acordes principales ($Si\flat, Fa, Do$ y Sol)[2].

En el Cuadro 2.4 se muestran las proporciones de las notas correspondientes a la afinación justa[12], con respecto a la frecuencia fundamental y su valor en cents.

Algunas tonalidades en esta afinación no se utilizaban debido a los sonidos desagradables que se producían melódica y armónicamente con las quintas de lobo. Por ejemplo, las tonalidades $DoMayor$ y $Mi\flat Mayor$ eran agradables, sin embargo $MiMayor, Domenor, SiMayor$ y $Remenor$ pueden ser desagradables.

(a) Do y La menor (b) Mi♭ y Do menor (c) Mi y Do♯ menor (d) Si y Sol♯ menor

Figura 2.5: Escalas en Afinación Justa

Cuando se necesitaba interpretar música con notas que no se encuentran entre las anteriores se hacía una transposición en las proporciones, es decir, se mantenía su frecuencia o una muy parecida, pero las proporciones no se

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Do$\sharp$	16/15	112
Re	9/8	204
Mi$\flat$	6/5	316
Mi	5/4	386
Fa	4/3	498
Fa$\sharp$	45/32	590
Sol	3/2	702
Sol$\sharp$	25/16	773
La	5/3	884
Si$\flat$	9/5	1018
Si	15/8	1088
Do'	2	1200

Cuadro 2.4: Afinación Justa

guardaban con respecto a *Do* sino a otra nota, de modo que se obtenían valores para *Re*$\sharp$ por ejemplo, o *La*$\sharp$, dejando de utilizar las notas enarmónicas [1] correspondientes.

2.3.3. Afinaciones Justas Extendidas

Estas afinaciones están basadas en los intervalos de quinta y terceras justas, pero aumentando sonidos a la escala de modo que entre dos sonidos parecidos se escoja el que esté más acorde al contexto musical, evitando las disonancias. Nicola Vicentino (1511 - 1576) construyó un archicémbalo con 36 notas distintas dentro de una octava, con afinaciones que podían utilizarse en todos los instrumentos de la época. Bosanquet en 1876 ideó un armonio (un instrumento de viento con teclado) con un teclado de 53 notas distintas en una octava y Christian Huygens (1629 - 1695) uno con 31 notas en la octava.

[1] En el temperamento igual se llama así a las notas que tienen el mismo sonido pero diferente nombre, por ejemplo *Sol*$\sharp$ y *La*$\flat$

2.3.4. Temperamentos

Franchino Gaffurio (1451 - 1522) en su trabajo "Pratica Musica" publicado en 1496, fue el primero en mencionar el temperamento en las afinaciones. Escribe que los afinadores de órganos disminuían las quintas en una pequeña parte llama *participata*. Esta disminución se hacía de forma empírica ya que no había una medida específica[2].

En una afinación los intervalos son puros y la coma pitagórica no se distribuye sino que se coloca en un intervalo poco usado (usualmente es una quinta lejana de la tonalidad de *Do*, como *Sol*♯) al que se le llama intervalo de lobo, por ser un sonido disonante que produce mucha tensión en el espectador. En un temperamento la coma se distribuye en varios intervalos de manera que puede ser uniforme o no, desafinando sólo un poco varias notas. Ésto puede hacerse ya que el oído escucha como notas bien afinadas a las terceras con una desviación no mayor a 22 cents y a las quintas con una desviación no mayor a 11 cents[7].

Los temperamentos se clasifican esencialmente en[7]:

- Regulares: la coma se distribuye en proporciones iguales en todas las quintas excepto una (de lobo).
- Irregulares: La proporción de la coma repartida cambia a través del círculo de quintas para que las notas más comunes sean más consonantes y las notas menos comunes sean las más desafinadas y acumulen la mayor parte de la coma.
- Circulares o cerrados: Permiten la modulación a tonos cercanos y lejanos.
- No circulares o abiertos: sólo permiten la modulación a tonos cercanos.

Es en este momento cuando la armonía empieza a desarrollarse ocasionando un cambio muy importante en la creación e interpretación de la música. Las voces de la música polifónica empiezan a combinarse ahora de manera distinta dando como resultado ya no un contrapunto (cantos distintos que suenan bien juntos), sino una armonía (cada voz es parte de un acorde).

2.3.5. Temperamento Mesotónico

Pietro Aron (1489 - 1545) en su trabajo “Toscanello in Musica” escrito en 1523, menciona por primera vez al temperamento mesotónico. En éste, una tercera justa (5:4 con respecto a la tónica) se divide en dos partes iguales formando dos tonos iguales de tamaño $\sqrt{\frac{5}{4}}$. En su trabajo, Aron nunca escribió acerca de la distribución de la coma, pero como la tercera justa (5:4) es una coma sintónica más baja que la tercera pitagórica y cada quinta está temperada en la misma medida, todas las quintas están alteradas por $\frac{1}{4}$ de coma[2].

El primero en describir el temperamento mesotónico de manera explícita fue el alemán Michael Praetorius (1571 - 1621) en su obra “Syntagma Musicum” en 1618, explicando cómo varios intervalos son alterados por fracciones de la coma.

En el Cuadro 2.5 se muestran los valores correspondientes al temperamento mesotónico de Aron[12], en el que la coma se reparte de manera regular.

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Do$\sharp$	$25/16\sqrt[4]{5}$	76
Re	$\sqrt{5}/2$	193
Mi$\flat$	$\sqrt{5}\sqrt[4]{5}$	310
Mi	$5/4$	386
Fa	$2/\sqrt[4]{5}$	503
Fa$\sharp$	$5\sqrt{5}/8$	579
Sol	$\sqrt[4]{5}$	697
Sol$\sharp$	$25/16$	773
La	$\sqrt{5}\sqrt[4]{5}/2$	890
Si$\flat$	$4/\sqrt{5}$	1007
Si	$5\sqrt[4]{5}/4$	1083
Do’	2	1200

Cuadro 2.5: Temperamento Mesotónico

Existen dos tipos de semitonos: el diatónico con proporción $\frac{8}{5\sqrt[4]{5}}$ y el cromático [2] con $\frac{25}{16\sqrt[4]{5}}$; todos los tonos son la unión de un semitono cromático con uno diatónico, por lo que tienen el mismo tamaño.

Figura 2.6: Escalas Do Mayor y La menor.mp3

Se experimentó también con algunas variaciones de este temperamento repartiendo la coma de manera distinta entre las quintas, por ejemplo el temperamento de $\frac{2}{7}$ de coma de Zarlino (1558). en el cual los semitonos cromáticos tenían una razón de $\frac{25}{4}$; de $\frac{1}{3}$ de coma de Francisco Salinas (1577) donde las sextas mayores tenían una proporción de 5:3; de $\frac{2}{9}$ de coma de Cyriac Schneegas (1590) que resultaba en tonos de $\frac{75}{64}$; de $\frac{1}{5}$ de coma propuesto por Abraham Verheijen (1600) que resultaba en séptimas mayores de $\frac{15}{8}$; el de $\frac{3}{10}$ de coma de Harrison (1749) donde los tonos tenían una proporción de $\frac{144}{125}$; el de $\frac{1}{8}$ de coma también, que resultaba en terceras mayores de $\frac{9}{7}$, etc.[12] .

Cada temperamento tenía las mejores consonancias en diferentes intervalos y triadas. Por ejemplo, los intervalos de tercera menor se escuchan mejor en el temperamento de $\frac{2}{7}$ de coma de Zarlino, pero los de tercera mayor son muy disonantes, por lo que este temperamento era bueno sólo para los tonos menores. El temperamento de $\frac{1}{8}$ de coma de Harrison proporcionaba las mejores terceras mayores, pero sus terceras menores eran muy disonantes, por lo tanto se usaba en tonalidades mayores en los órganos de iglesias. El temperamento de $\frac{1}{4}$ de coma de Aron fue uno de los más utilizados porque aunque no tiene triadas mayores tan consonantes como las de Zarlino, éstas no son desagradables, pero también tiene triadas menores consonantes[12]. Los instrumentos que no tenían una afinación fija se adaptaban al teclado con relativa facilidad ya que la diferencia en afinaciones no debe ser muy grande.

Al principio el temperamento mesotónico sólo se utilizó en instrumentos de teclado ya que al igual que la afinación justa, algunas tonalidades no se

[2] Se llama semitono diatónico al intervalo de semitono que cambia de nombre, por ejemplo $Mi - Fa$ o $Sol\sharp - La$; y semitono cromático al que no cambia de nombre, por ejemplo $Do - Do\sharp$, o $Si\flat - Si$. En la mayoría de las afinaciones (como la pitagórica y el temperamento mesotónico) el semitono cromático es más grande que el semitono diatónico. En la afinación justa el semitono cromático es más pequeño que el diatónico.

escuchaban bien.

(a) Mi y do♯ menor (b) Fa♯ y mi♭ menor (c) Sol♯ y fa menor

2.3.6. Temperamentos Irregulares

El primero en proponer un temperamento irregular fue Henricus Grammateus (1495 - 1521). Se basó en la escala de Pitágoras de siete sonidos y obtuvo las notas entre cada uno de los tonos (las notas negras del piano) con una media proporcional, utilizando el método del temperamento mesotónico sólo en las notas cromáticas. Una de las características más importantes de este temperamento es que no tiene quinta de lobo. La coma se distribuye por mitades en dos de sus quintas, aunque cuatro de las terceras mayores puras se desafinan[2]. Este temperamento fue una base para el temperamento igual que se utiliza en la actualidad.

Arnold Schlick (1450 - 1521) escribió acerca de la inestabilidad en la escala que causa la afinación por intervalos justos. Si se construyen los doce sonidos de la octava con quintas justas, las terceras son muy altas. Si se construye la escala cuidando que las terceras sean justas, las quintas son muy bajas. Él propuso que se respetaran los intervalos justos de tercera en las notas más importantes de la tonalidad de Do, que son las terceras mayores $Do - Mi$, $Fa - La$, $Sol - Si$, $Re - Fa\sharp$ y $Si\flat - Re$ y las terceras menores $Fa\sharp - La$ y $Do\sharp - Mi$, creando otro temperamento irregular.

Bishop Jean Caramuel (1606 - 1682) fue el primero en aplicar el concepto de logaritmos a la medición de los intervalos de la escala [3] haciendo más tratable el enfoque matemático y el trabajo de la afinación más accesible a las personas. J. E. Gallimard, utilizando este método, propuso que se añadiera una porción de la coma diferente a cada intervalo de quinta empezando desde Si hasta La.

[3] Conociendo la proporción P de un intervalo, la potencia x de 2 que le corresponde a esta proporción está dada por $x = \frac{log(P)}{log(2)}$

Fue hasta ese momento que la ciencia natural se encargó de la medida y la evalución de las consonancias y fue en 1701 cuando Joseph Sauveur llamó a esta área de estudio *Acústica*[18].

2.3.7. Buenos Temperamentos

Se empezaron a estudiar alrededor del año 1690, aunque probablemente el concepto se manejó desde tiempo antes.

Una de sus características principales es que no tienen quinta de lobo y son útiles para todos los tonos. Para los cantantes y ejecutantes de instrumentos con frecuencias no fijas era fácil adaptarse a este tipo de temperamentos porque la diferencia en las relaciones entre los grados de la escala es apenas perceptible, sin embargo daba un "color" a cada tonalidad, ya que las proporciones entre los distintos grados de la escala cambian según la tónica que se escoja.

Había una serie de reglas que debían seguirse para construir un buen temperamento[12]:

1. Los doce semitonos de la octava pueden ser desiguales.
2. Ninguna quinta, tercera menor o sexta menor debe ser más amplia que el correspondiente intervalo justo. Ninguna cuarta, tercera mayor o sexta mayor deber ser más pequeña que el intervalo justo correspondiente.
3. Ninguna quinta o cuarta debe ser alterada por más de media coma sintónica con respecto al intervalo justo correspondiente. Ninguna tercera o sexta, mayor o menor, debe ser alterada por más de una coma con respecto al intervalo justo correspondiente.
4. Las octavas deben ser justas.

El temperamento de Johann P. Kirnberger (1721 - 1783) fue el primer buen temperamento documentado. Hizo modificaciones a éste para obtener mejores resultados creando varios temperamentos de este tipo. El primero se basa en el temperamento de $\frac{1}{2}$ de coma y obtiene batimientos en veinte de las veinticuatro triadas mayores y menores, pero no hay disonancias marcadas, por lo que permite tocar en cualquier tonalidad y modular. Escogió las terceras puras $Do - Mi, Sol - Si, Re - Fa\sharp$ y las quintas $Re - La$ y $La - Mi'$ se disminuyeron para cerrar el círculo de quintas.

Otro de sus temperamentos (Kirnberger III) también se basa en la escala de Pitágoras, pero esta vez distribuye la coma diatónica entre cuatro quintas, conservando sólo la tercera justa $Do - Mi$. Este temperamento fue muy utilizado porque lograba que el color de las tonalidades más cercanas fuera muy parecido[12].

Otro buen temperamento muy utilizado fue el de Johann Philipp Bendeler que está basado en el temperamento mesotónico de $\frac{1}{4}$ de coma, pero varía en que sólo una de las quintas está disminuida $\frac{1}{4}$ de coma y las otras tres tienen fracciones diferentes de ésta. También logró reducir los contrastes de color de cada tonalidad, con la desventaja de que la tercera menor $Si - Re$ fuera mucho más pequeña que $Fa\sharp - La$, provocando un desbalance notable en algunas tonalidades.

El buen temperamento de Andreas Werckmeister de 1691 es una corrección al buen temperamento de Bendeler. Werckmeister temperó la nota Re para que la tercera $Si - Re$ no fuera tan pequeña y la quinta $Re - La$ no fuera muy disonante. La coma está distribuida entre cuatro quintas; sólo hay siete triadas pitagóricas y dieciseis de las veinticuatro triadas mayores y menores tienen batimientos iguales, por lo que su balance es muy bueno. Casi todas las quintas son justas excepto $Re - La, La - Mi, Fa\sharp - Do\sharp, Do\sharp - Sol\sharp$ y $Fa - Do$ que son disminuidas por $\frac{1}{4}$ de coma, mientras $Sol\sharp - Mi\flat$ es aumentada en $\frac{1}{4}$ de coma.

En el Cuadro 2.6 se muestran los valores correspondientes al buen temperamento Werckmeister I[12].

(a) Do Mayor y La menor (b) La Mayor y Fa$\sharp$ menor (c) Fa Mayor y Re menor

Johann George Neidhardt trabajó con varios temperamentos. En uno distribuyó la coma entre seis quintas dando $\frac{1}{6}$ a cada una. Las quintas obtenidas son muy parecidas a las justas aunque las terceras mayores son más altas y

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Do♯	256/243	90
Re	$128/81\sqrt{2}$	192
Mi♭	32/27	294
Mi	$512/243\sqrt[4]{8}$	390
Fa	4/3	498
Fa♯	1024/729	588
Sol	$16/9\sqrt[4]{2}$	696
Sol♯	25/16	773
La	$2048/729\sqrt[4]{8}$	888
Si♭	16/9	996
Si	$256/81\sqrt[4]{8}$	1092
Do'	2	1200

Cuadro 2.6: Buen Temperamento Werckmeister I

las menores son más bajas. La afinación de cada grado de la escala es muy parecida a la del temperamento igual, variando apenas en una schisma. En otro de sus temperamentos reparte la coma irregularmente entre seis quintas: a dos quintas les corresponde $\frac{1}{12}$ de la coma, a otras dos $\frac{1}{6}$ y a otras dos $\frac{1}{4}$ de la coma[2]. Otra de sus modificaciones corresponde a una versión revisada del temperamento de $\frac{1}{4}$ de coma de Pietro Aron y se conoce como el buen temperamento de Aron-Neidhardt, que también es el temperamento No. 1 de Kirnberger.

Los valores correspondientes al buen temperamento de Aron Neidhardt se muestran en el Cuadro 2.7[12].

(a) Do Mayor y La menor (b) Mi Mayor y Do♯ menor (c) Sol Mayor y Mi menor

Otro buen temperamento que fue muy utilizado es el de Abraham Verheije, que distribuye la coma de manera desigual entre cinco quintas, por lo que

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Do$\sharp$	256/243	90
Re	$\sqrt{5}/2$	193
Mi$\flat$	32/27	294
Mi	5/4	386
Fa	4/3	498
Fa$\sharp$	1024/729	588
Sol	$\sqrt[4]{5}$	697
Sol$\sharp$	128/81	792
La	$5/2\sqrt[4]{5}$	890
Si$\flat$	16/9	996
Si	4096/2187	1086
Do'	2	1200

Cuadro 2.7: Buen Temperamento de Aron-Neidhardt

deben temperarse cuatro notas. Tiene uno de los mayores contrastes en el color de las tonalidades[12], lo que era útil a algunos compositores.

Otros buenos temperamentos importantes fueron el de Friedrick Wilhelm Marpug y el de Juan Bermudo, basados en los mismos principios. Los más usados fueron aquellos que se acercaban mucho al temperamento igual como el de Marpug y el de Neidhardt, que permitían modular a cualquier tonalidad pero que daban también colores distintos a las tonalidades.

Por último, el buen temperamento de Thomas Young publicado en 1800, propone temperar cinco notas para distribuir la coma de manera desigual entre seis de las quintas. Hay varias versiones donde las fracciones de coma asignadas a cada quinta cambian. Tiene también colores muy distintos para diferentes tonalidades. Los valores de las notas se muestran en el Cuadro 2.8[12].

En el barroco, se buscaba que la música sonara diferente dependiendo de la tonalidad en que fuera escrita, así podría darse diferente intención a las obras. Los buenos temperamentos ofrecían esta cualidad que los compositores de la época aprovecharon. Una de las obras más famosas de este tipo es “El Clave bien Temperado” de Johann Sebastian Bach (1685 - 1750), en la que compuso piezas en todas las tonalidades mayores y menores, para

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Do$\sharp$	256/243	90
Re	$8\sqrt[3]{2}/9$	196
Mi$\flat$	32/27	294
Mi	$64\sqrt[3]{4}/81$	392
Fa	4/3	498
Fa$\sharp$	1024/729	588
Sol	$4\sqrt[6]{2}/3$	698
Sol$\sharp$	128/81	792
La	$64/27\sqrt{2}$	894
Si$\flat$	16/9	996
Si	$512/243\sqrt[6]{2}$	1090
Do'	2	1200

Cuadro 2.8: Buen Temperamento de Young

(a) Do Mayor y La menor

(b) Re Mayor y Si menor

(c) Mi$\flat$ Mayor y Do menor

mostrar el color que cada una tenía.

Sin embargo el desarrollo de la música exigió después la modulación a varias tonalidades sin que se perdiera el color original de la obra, llevando al uso del temperamento igual.

2.3.8. Temperamento Igual

Francisco Salinas (1513 - 1590) en su obra "De Musica Libri VII" (1577) escribió:

"Una cosa debe ser tomada en cuenta por los constructores de

> violas, de modo que la separación de los trastes debe ser regular, para que la octava esté dividida en doce partes igualmente proporcionadas, las doce siendo semitonos iguales...”[2]

Para dividir la escala en doce partes iguales cada intervalo de semitono debe medir $\sqrt[12]{2}f$ y cada nota, con respecto a la tónica, tiene una proporción de $2^{\frac{n}{12}}f$, donde n es el número de semitonos a partir de la tónica y f es la frecuencia de la tónica. Cada cent mide $\sqrt[12]{2}f = 1{,}0005778f$ [10]. Cada quinta es dos cents más grave que una quinta justa.

En este temperamento se presenta el fenómeno de enramonía para cada nota, que consiste en que dos notas obtenidas de manera diferente y con nombres diferentes, pero que son muy cercanas (cuya diferencia es menor a un semitono), sean la misma. Por ejemplo, $Do\sharp$ es la misma nota que $Re\flat$, resulta de tocar un intervalo de quinta ascendente desde $Fa\sharp$ o una quinta descendente desde $La\flat$. Este fenómeno no sucede en ninguna otra afinación o temperamento. Tampoco existen en él triadas que tengan batimientos proporcionales, por lo que no se precibe un ritmo armónico agradable al escuchar acordes[12].

Aunque la idea del temperamento igual surgió siglos atrás, la dificultad de llevarla a la práctica no lo permitió hasta alrededor de 1917[8] cuando se desarrolló una técnica de afinación aural [4]. La forma más efectiva de afinar los intervalos era contar los batimientos producidos a partir de una frecuencia dada y compararlos con notas diferentes, en lo cual este temperamento es especialmente difícil, ya que los intervalos están dados por números irracionales.

El propósito de este temperamento, en principio, fue el de permitir la modulación ilimitada de una melodía, pero la creación e interpretación de música atonal necesita este temperamento debido a que utiliza los doce sonidos de la escala sin que haya una jerarquía en los intervalos, ni una atracción especial hacia alguna de las notas, es decir, no hay una tónica y por lo tanto la obra no se encuentra en ninguna tonalidad.

En el Cuadro 2.9 se encuentran los valores para este temperamento.

[4] Se llama afinación aural a la “afinación de oído”.Se deben percibir algunos armónicos de una nota para poder afinar otras notas, además de temperar las notas con los batimientos calculados para cada intervalo

Grado	Proporción con f	Valor en Cents
Do	1	0
Do♯	$2^{\frac{1}{12}}$	100
Re	$2^{\frac{2}{12}}$	200
Mi♭	$2^{\frac{3}{12}}$	300
Mi	$2^{\frac{4}{12}}$	400
Fa	$2^{\frac{5}{12}}$	500
Fa♯	$2^{\frac{6}{12}}$	600
Sol	$2^{\frac{7}{12}}$	700
Sol♯	$2^{\frac{8}{12}}$	800
La	$2^{\frac{9}{12}}$	900
Si♭	$2^{\frac{10}{12}}$	1000
Si	$2^{\frac{11}{12}}$	1100
Do'	2	1200

Cuadro 2.9: Temperamento Igual

2.3.9. Temperamentos Desiguales

Estos temperamentos tienen los mismos propósitos que el temperamento igual, que son la modulación sin límites y la creación e interpretación de música atonal. Sin embargo éstos poseen la cualidad de tener triadas con batimientos proporcionales, lo que da la sensación de un ritmo armónico agradable. Además no provocan la sensación de una tónica, lo que los saca de la clasificación de buenos temperamentos.

Uno de los más importantes es el Círculo de Quintas No. 3 de Johann George Neidhardt publicado en 1732. En él se crean doce triadas mayores y menores con batimientos proporcionales. Siguiendo el círculo de quintas, cada segunda quinta está temperada, por lo que hay sólo seis quintas justas. Aunque todas las triadas mayores y menores pueden utilizarse, la sensación de la existencia de una tónica se pierde.

Otro temperamento desigual importante es el propuesto por Friedrick Wilhelm Marpug, publicado en 1776. En éste, la coma se divide entre tres de las seis quintas utilizando nueve quintas justas. Se tempera una de cada cuatro quintas siguiendo el círculo de quintas. Cumple con los mismos propósitos que el temperamento de Neidhardt.

Capítulo 3

La Armonía a través de las Afinaciones Históricas

Resumen

La música ha evolucionado a través de la historia, debido a muchos factores como los cambios en los instrumentos que la producen y las situaciones de las personas que la crean y la interpretan. La armonía, que ha sido una rama muy importante de la música, ha tenido también cambios significativos. En este trabajo se quiere justificar, con ayuda de algunos ejemplos sonoros, que una parte de estos cambios tiene que ver con las afinaciones que se utilizaron en cada época, ya que se modificaron las sensaciones producidas por los intervalos, se crearon nuevas consonancias y se perdieron otras. En específico, se toman en cuenta sólo las afinaciones y temperamentos más utilizados en cada época a partir de 1600 y hasta principios del siglo XX.

La evolución histórica de la armonía a partir del año 1600 y los ejemplos fueron obtenidos del libro “Armonía”de Diether de la Motte[6].

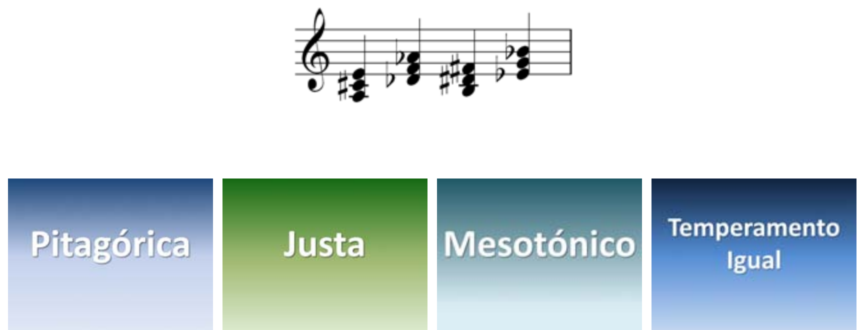


Figura 3.1: Acordes en distintas Afinaciones

3.1. Antes de 1600

La afinación pitagórica y la afinación justa fueron utilizadas hasta el siglo XVI. Entre los siglos XVI y XVIII empezaron a utilizarse los buenos temperamentos al mismo tiempo que el temperamento mesotónico.

Se estableció como un acuerdo que las notas alteradas en un teclado serían afinadas como $Do\sharp, Mi\flat, Fa\sharp, Sol\sharp$ y $Si\flat$, aunque si era necesario que se tocara una nota diferente en una obra, el teclado podría tener otra afinación. En general no se utilizaban acordes como $Re\flat$ Mayor o Si Mayor debido a que las notas del teclado no coincidían en afinación. Por ejemplo, el acorde $Re\flat$ Mayor tiene las notas $Re\flat - Fa - La\flat$, que en un teclado sonaban como $Do\sharp - Fa - Sol\sharp$, lo que ocasionaba la sensación de desafinación en el acorde.

En la Figura 3.1 se muestran algunos acordes que contienen notas que en los teclados estaban afinadas como sus enarmónicas. Por ejemplo, la nota $Re\flat$ se afinaba como $Do\sharp$.

Hasta alrededor de 1600 no existió el concepto de tonalidad como se entiende actualmente. Se utilizaban los modos, que corresponden a estructuras variadas con atracción hacia una nota; sin embargo, en esta época se dejan de utilizar la mayoría de ellos, dejando sólo al modo mayor y al modo menor. Es con el desarrollo de la ópera, nacida también alrededor de 1600, que se desarrolla el concepto de función tonal.

La Figura 3.2 muestra dos fragmentos del "Stabat Mater" de Giovanni Pierluigi da Palestrina (1525 - 1594). Es probable que esta obra se haya compuesto en afinacion pitagórica o justa.

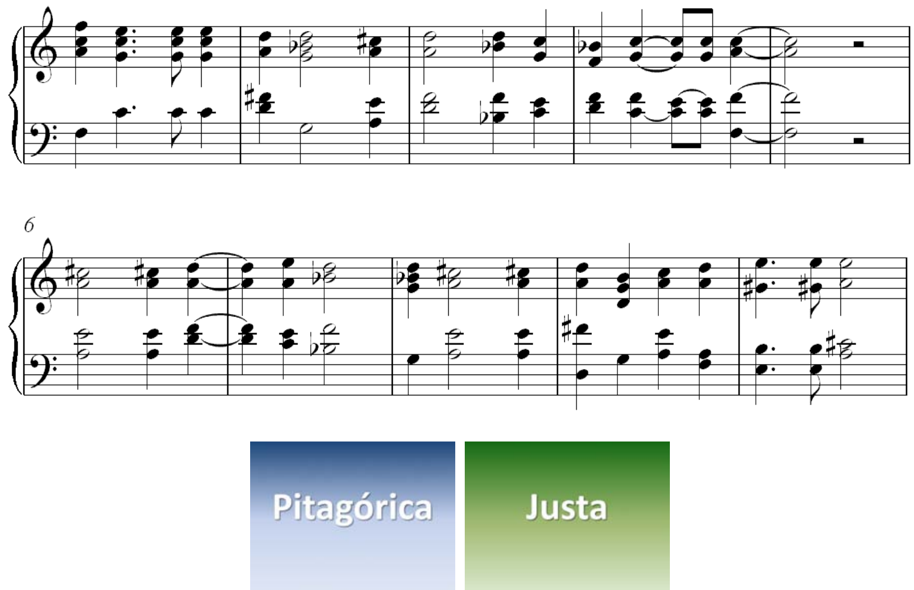


Figura 3.2: Palestrina: Stabat Mater, fragmentos

Existían algunas reglas de armonía en esta etapa como por ejemplo: en las triadas mayores se duplicaba siempre la fundamental; si la quinta del acorde se omitía entonces se triplicaba la fundamental; hasta 1550 la tercera se omitía pero en 1600 era indispensable; en las triadas menores se duplicaba la fundamental y a veces la tercera por motivos melódicos. Se muestra en la Figura 3.3 un fragmento de la obra "Sprüche von Leben und Todd" (Refranes alemanes sobre la vida y la muerte) de Leonard Lechner, escrita en 1606, que como la mayoría de las obras de la época, obedece todas estas reglas.

En las obras corales podía haber cruzamiento de voces entre soprano y contralto, o contralto y tenor, pero nunca con el bajo; y no era común que las progresiones de todas las voces tuvieran la misma dirección, excepto cuando existiían saltos [1] sin provocar un cambio de acorde, para no perder la independencia de las voces. Siendo la soprano la voz más llamativa dominaron en ella los movimientos de segunda y tercera. También se evitaron todos los intervalos aumentados, excepto la primera aumentada (alteración cromática del mismo grado).

Una convención importante que se obedeció hasta el Romanticismo fue la

[1] Movimiento de una voz que está a más de un tono de distancia

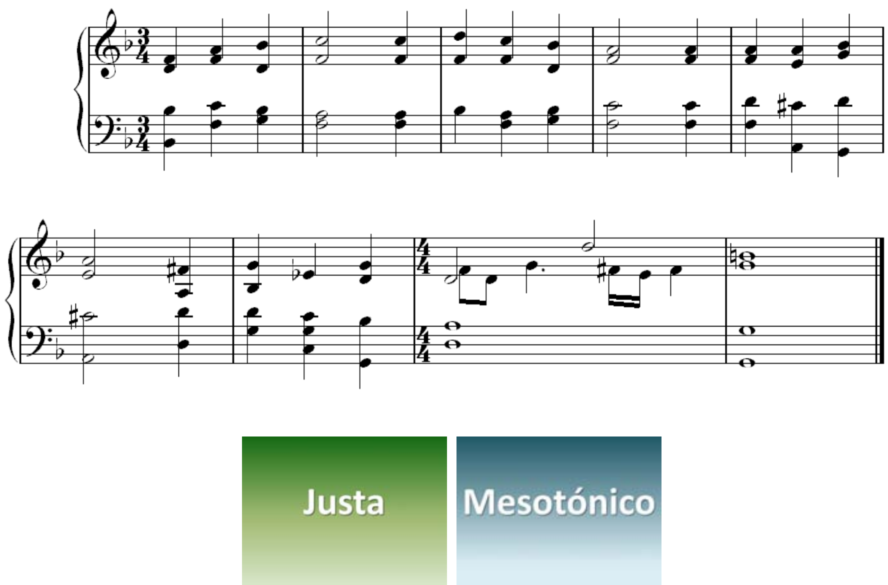


Figura 3.3: Leonhard Lechner, Sprüche von Leben und Todd

prohibición de movimientos paralelos entre dos voces con intervalos de octava y quinta (aunque a veces se empleaba sobre pausas o cesuras), a pesar de que antes del siglo XV éstos eran los únicos intervalos aceptados como consonantes. El movimiento de cuartas paralelas no se prohibió. En la Figura 3.4 se muestra un Conductus del siglo XIII que muestra estas convenciones.

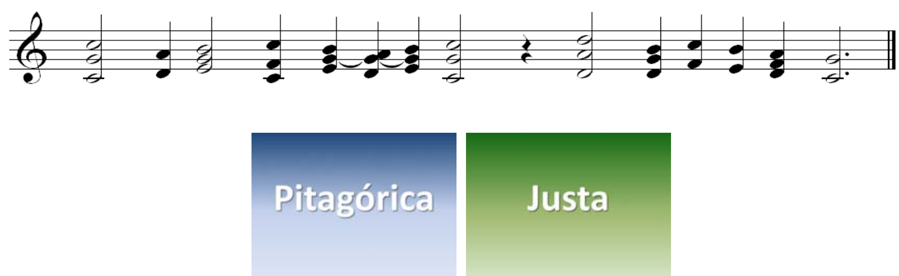


Figura 3.4: Conductus siglo XIII

A partir de 1600 se utilizaron formalmente las fórmulas conclusivas (cadencias) y se desarrollaron giros que hoy se denominan retardos. Estas cadencias y retardos crean centros tonales momentáneos.

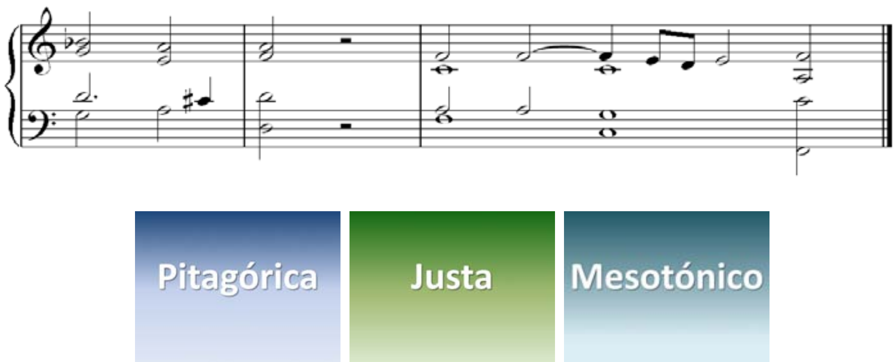


Figura 3.5: Fragmentos de Obras de Palestrina y Orlando di Lasso

Los retardos de cuarta fueron los más comunes. La nota disonante se introducía en un tiempo anterior al acorde como una nota consonante, después era ligada o repetida como disonancia. La nota de resolución es la tercera retardada del nuevo acorde y no puede sonar en otra voz en el momento del retardo. En la figura 3.5 se muestran dos de las formas más utilizadas de cadencia con resolución de V a I grado y un retardo de cuarta.

Con la resolución de V a I grado, surge un centro tonal que sin embargo no es obligatorio para una pieza entera. El Stabat Mater de Palestrina, por ejemplo, empieza en *La* Mayor y termina en *Re* Mayor. Las cadencias retardadas toman importancia al dar lugar a la construcción ocasional de puntos tonales terminales y de descanso.

En las composiciones corales a cuatro voces se emplea la totalidad del espectro de acordes disponibles y existen en ocasiones centros tonales. La Figura 3.6 muestra una composición de Lucas Osiandro de 1586, que contiene once triadas mayores y menores. Esta obra fue probablemente pensada en afinación pitagórica.

3.1.1. Barroco, 1700 - 1750

En la época de Bach se impusieron los buenos temperamentos y el temperamento mesotónico. Se habían establecido ya las tonalidades mayor y menor y se podía modular sin límites y emplear todas las triadas. A partir de entonces y hasta el siglo XX todo hizo referencia a una nota tónica.

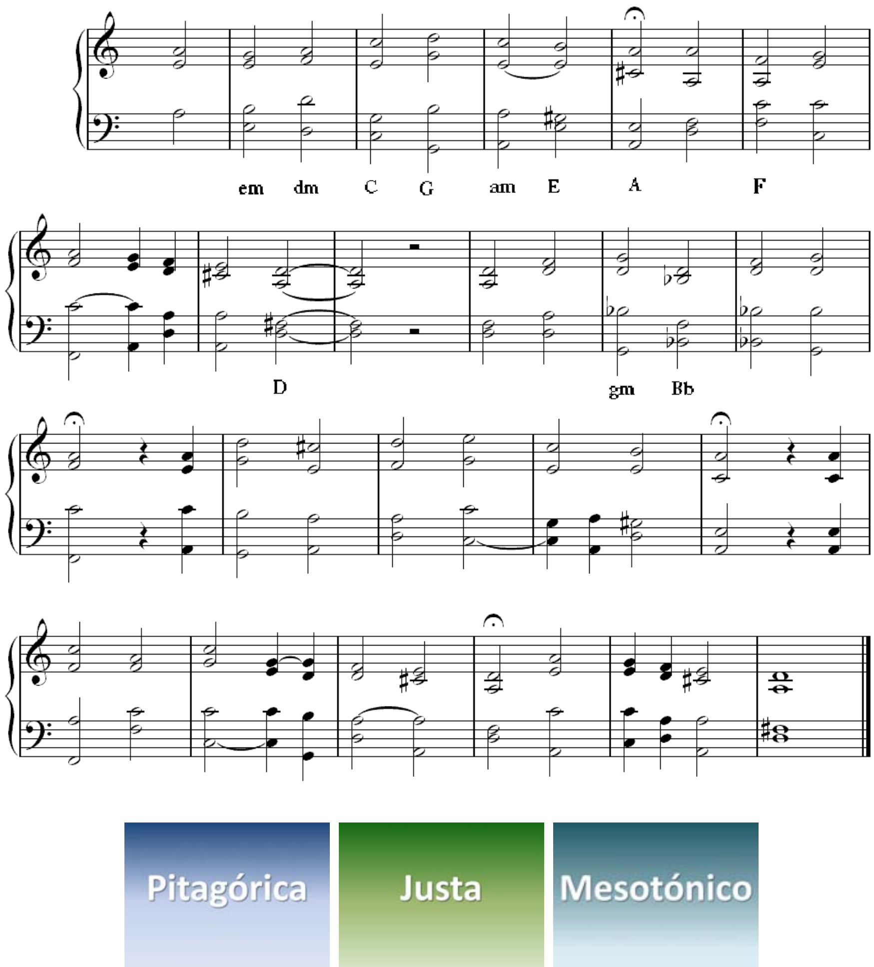


Figura 3.6: Osiandro, 1586

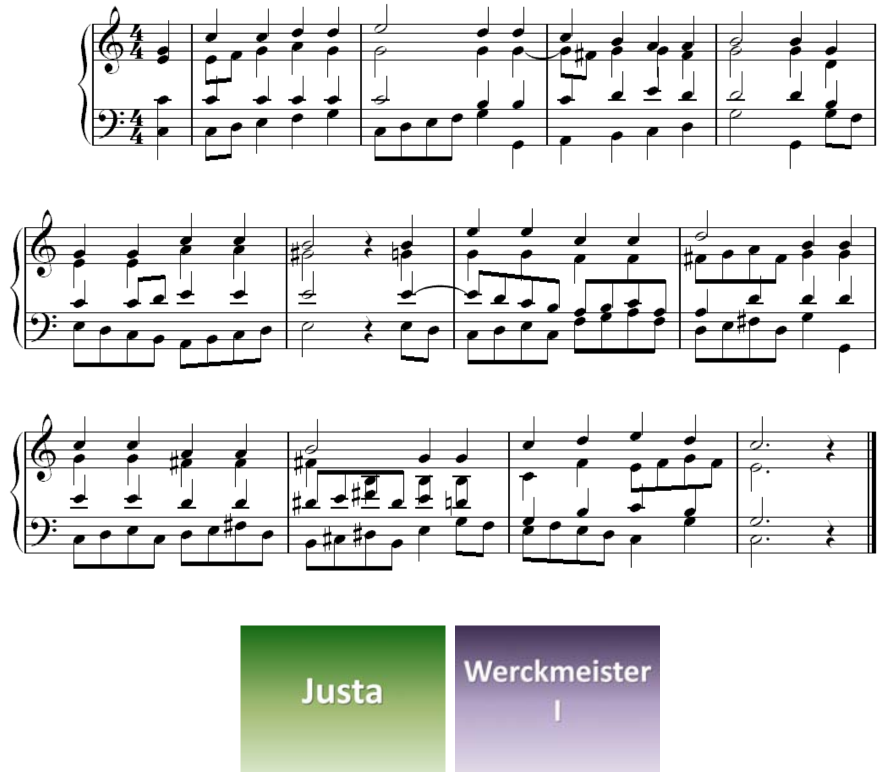


Figura 3.7: Corales de Bach

Para establecer tonalidades se emplean generalmente los acordes en correspondencia de quinta (resolución V a I), aunque esto no establece inequívocamente una tonalidad, es necesario un tercer acorde para definirla y puede ser el de cuarto o el de segundo grado. Se desarrolla la armonía cadencial tanto en la música eclesiástica como en la secular. La Figura 3.7 muestra fragmentos de corales de Bach, donde las cadencias definen centros tonales. La afinación justa no favorece el cambio de centro tonal, pero el temperamento Werckmeister I si, y fue uno de los temperamentos más utilizados en la época.

Se hacen importantes tres funciones tonales: Tónica (T), Dominante (D) y Subdominante (S). Aunque los términos vienen desde los estudios de Rameau, es en este momento cuando adquieren el sentido que hasta ahora guardan. Entre 1700 y 1850 se habla sólo de estas tres funciones fundamentales, todos los acordes cumplen con alguna de ellas: todos los acordes

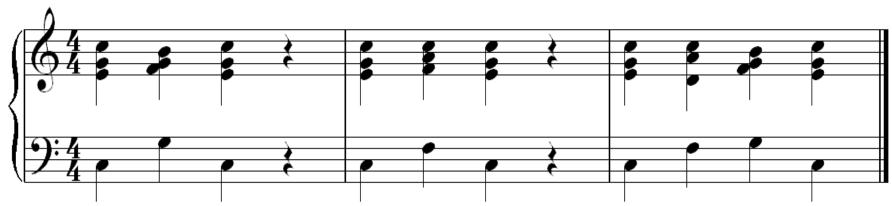


Figura 3.8: D → T, S → T, S → D → T

Figura 3.9: Acordes con notas añadidas

funcionan como centro tonal (función de tónica), como tensión existente hacia ese centro (función de dominante) o como alejamiento distendido de él (función de subdominante). La nota sensible siempre conduce a la tónica.

En esta etapa no son permisibles los grandes movimientos por saltos de todas las voces, no debe haber quintas ni octavas paralelas aunque se permiten las cuartas, nunca se permiten movimientos paralelos entre la voz soprano y el bajo, la subdominante nunca sigue a la dominante y sólo se permiten las progresiones de funciones tonales como las que se muestran en la Figura 3.8 en una cadencia.

Se consideraban como disonancias utilizables la séptima menor añadida a una triada mayor (que le daba carácter de dominante) y la sexta mayor añadida a una triada mayor (que le daba carácter de subdominante), aunque esta última es más antigua. En la Figura 3.9 se muestran fragmentos de obras de Johann Walter (1551) y Leonard Schrörer (1578), pensadas talvez para temperamento mesotónico, donde se utilizan estos acordes.

En la época de Bach son raras las cadencias conclusivas sin la séptima de dominante. La séptima menor siempre resuelve hacia abajo y la sensible hacia arriba. En general este acorde aparece completo, pero se le puede suprimir la quinta. En la Figura 3.10 se muestran dos ejemplos de estas resoluciones.

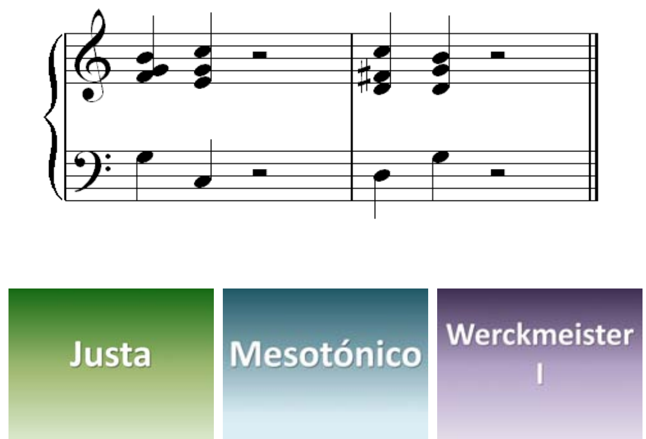


Figura 3.10: Resoluciones de V_7 a I

Se consideraba como consonancia al acorde de séptimo grado, que es un acorde disminuido, aunque si se trataba como acorde de séptima de dominante incompleto era concebido como disonancia de tensión. Se muestra este acorde en fragmentos de obras de Dufay (1450), Isaac (1541) y Praetorious (1609) en la Figura 3.11.

El ritmo melódico de las voces puede ser igual que el armónico, donde cada una de las notas de la voz principal pertenece a un acorde. Sin embargo si el ritmo melódico es más rápido que el armónico los acordes no apoyan a cada una de las notas, por lo que se crean algunas disonancias:

1. Notas de paso: están en tiempo débil y no pertenecen al acorde. Puede haber varias notas de paso al mismo tiempo y en general éstas son consonantes. Sin embargo en una composición que requiera gran tensión se utilizan notas de paso disonantes. En la Figura 3.12 se muestran tres fragmentos de corales de Bach con notas de paso.

2. Bordadura: Se forman por el movimiento de segunda a una nota auxiliar inmediata y el regreso a la nota inicial, siempre en tiempo débil. En obras anteriores a Bach se daba preferencia a una nota auxiliar inferior por producir una disonancia menos llamativa. En la Figura 3.13 se muestran bordaduras hacia notas inferiores en un fragmento de Monteverdi, y después en la Figura 3.14, hacia notas inferiores y superiores, en un fragmento de "El Mesías" de Händel.

Figura 3.11: Acorde de séptimo grado

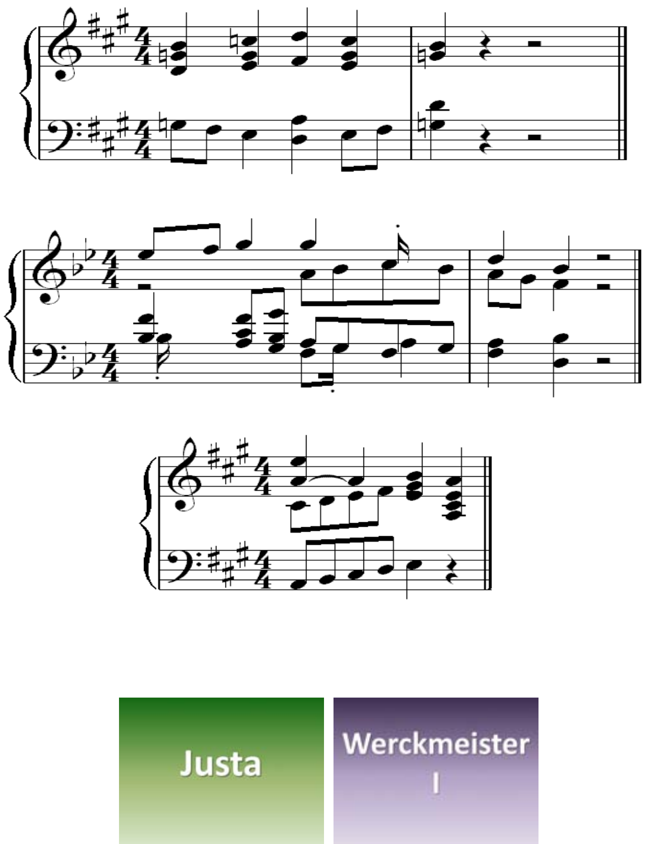


Figura 3.12: Notas de paso en corales de Bach

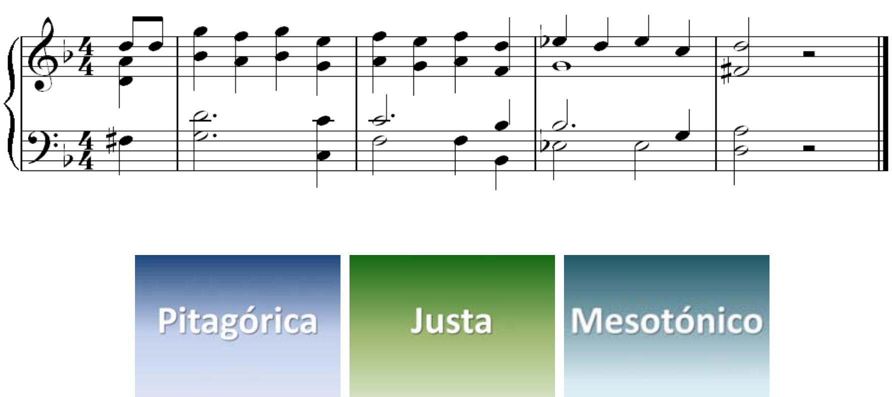


Figura 3.13: Bordaduras en un fragmento de Monteverdi (1651)

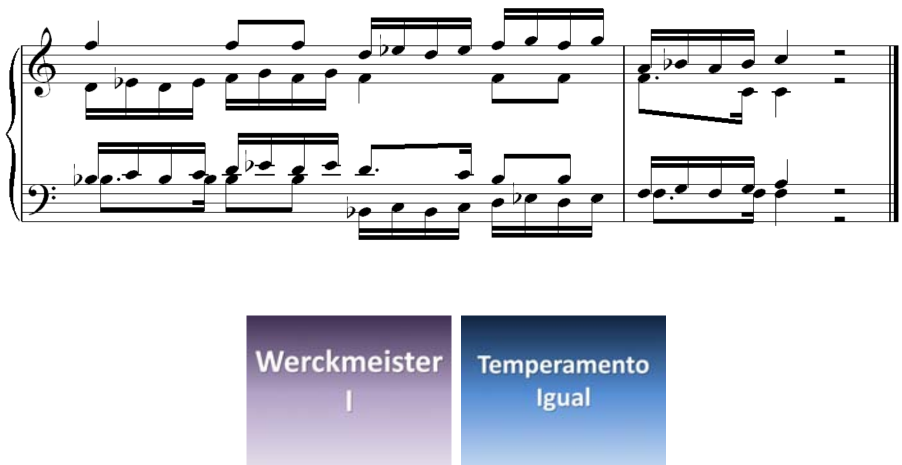


Figura 3.14: Bordaduras. El Mesías de Händel

3. Retardo: se forma sobre el tiempo fuerte y en la mayoría de los casos son disonantes. Antes de Bach la resolución se hacía siempre por descenso de grado. Después de Bach también son comunes los retardos ascendentes.

4. Escapadas: son notas auxiliares por salto a intervalos de segunda junto a la nota del acorde.

5. Anticipación: una voz alcanza en tiempo débil la nota que pertenece a un acorde que alcanzará en tiempo fuerte. Se hallan casi exclusivamente en la melodía y en los giros finales. En la Figura 3.15 se muestra un ejemplo.

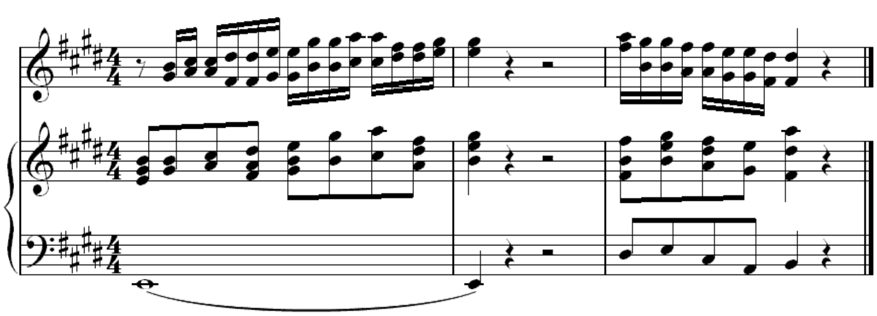


Figura 3.15: Anticipaciones. Pasión Según San Mateo, Bach

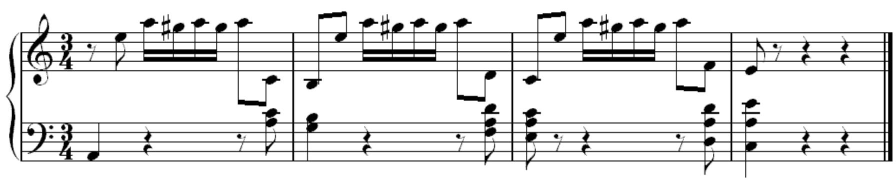


Figura 3.16: Fragmento de Coral de Bach, fragmento de “El Mesías” de Händel

Gioseffo Zarlino en 1558 fue el primero en referir toda la música polifónica a los modos mayores y menores, cada uno con siete notas, no obstante en la práctica una tonalidad menor cuenta con nueve notas. Las escalas armónicas, melódicas y naturales existen sólo como escalas, pero en una composición se utilizan las nueve notas que las conforman. Los grados sexto y séptimo son mayores al ascender y existe la nota sensible; la armonización de estas notas sería imposible al descender por lo que se usan los grados descendidos.

Hay muchas excepciones a estas reglas en las obras de Bach. Los grados sexto y séptimo descendidos en un motivo ascendente se usan para modular, ya que quitan la atracción hacia la tónica de la tonalidad menor (porque no hay nota sensible). Son típicas las armonizaciones y movimiento de bajo que se muestran en la Figura 3.16.

Se empiezan a utilizar los intervalos de quinta disminuida en el acorde de séptimo grado y también como movimientos melódicos. Las triadas aumentadas se crean en el modo menor y en general aparecen como retardo, resol-

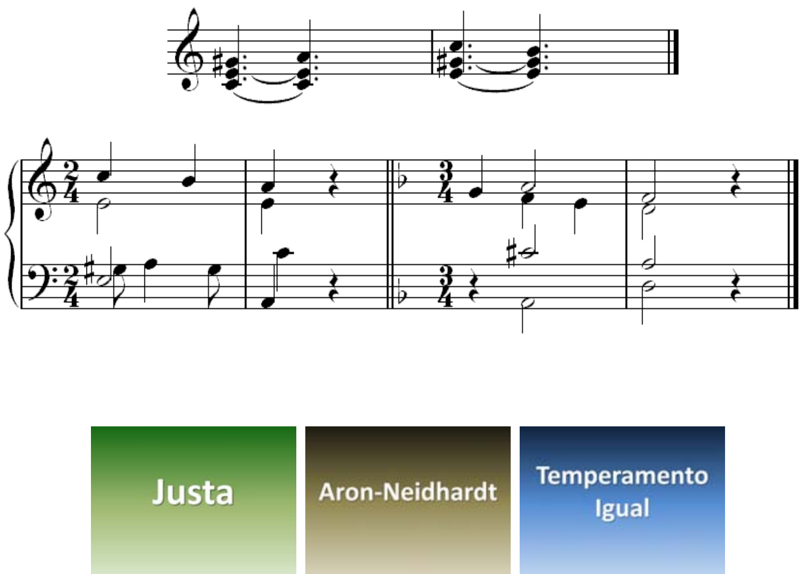


Figura 3.17: Acordes aumentados como retardos. Corales de Bach.

viendo a la tónica menor o a la dominante. En la Figura 3.17 se muestran ejemplos que aparecen en obras de Bach.

También se hace más común el uso de los acordes de “sexta Napolitana”, que es un acorde con función de subdominante en el modo menor con una sexta menor en lugar de la quinta, como se muestra en la Figura 3.18. Se vuelve un recurso indispensable para la ópera napolitana, de donde adquiere su nombre.

Este acorde se reservaba para la expresión más intensa de lamento y de dolor, por lo que no se le debe interpretar como material armónico puro, sino como un recurso poco común. En la Figura 3.19 se muestran más ejemplos de este acorde, pensados talvez en el buen temperamento Werckmeister I.

También toma importancia el acorde de séptima disminuida, que se utilizaba como retardo en el acorde de séptima de dominante. Mucho tiempo más tarde se definiría el acorde de séptima y novena y se redefiniría el acorde de séptima disminuida como una abreviación de éste, es decir, sin el generador. En la Figura 3.20 se muestran estos acordes en fragmentos de la Pasión según San Mateo de Bach.

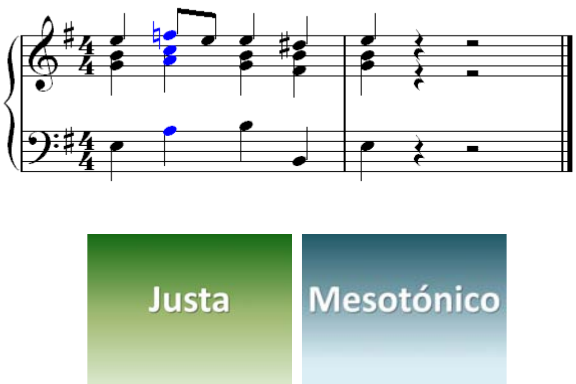


Figura 3.18: "Jefté", Giacomo Carissimi (1645)

Hacia 1640 se desarrolla un tipo de melodía que fue muy importante de ahí en adelante. Un tema dado se repetía y luego se transportaba a una quinta que se afirmaba mediante su sensible, después regresaba hacia la tónica principal. Se identificaban dos formas: la semicadencia de la dominante y la dominante como tónica intermedia.

Los cambios a la tonalidad de la subdominante eran menos comunes, pero tenían también mucha importancia, se utilizaba como acorde de cambio al acorde de subdominante de la subdominante. Más adelante todas las tonalidades se vuelven el centro de desviaciones más grandes. El acorde de séptima disminuida tenía una función de dominante intermedia que permitía modular a cualquier tonalidad. Este último tipo de acorde se muestra en la Figura 3.21.

3.2. Clásico, 1750 - 1800

En esta época desaparecen las composiciones a cuatro voces y se crean melodías acompañadas por una segunda voz en forma de terceras y un acompañamiento sobre un bajo. El bajo se limita a las tres funciones principales (tónica, dominante o subdominante) por lo que la armonía se simplifica. Se crea el *presto*, ya que la armonía se mantiene por tiempos más largos y permite el juego con una melodía a mayor velocidad. Un ejemplo de este estilo se muestra en la Figura 3.22.

Con la simplificación de la armonía se empieza a crear la conciencia de

Figura 3.19: Fragmentos de obras de Alessandro Scarlatti (1700) y Bach

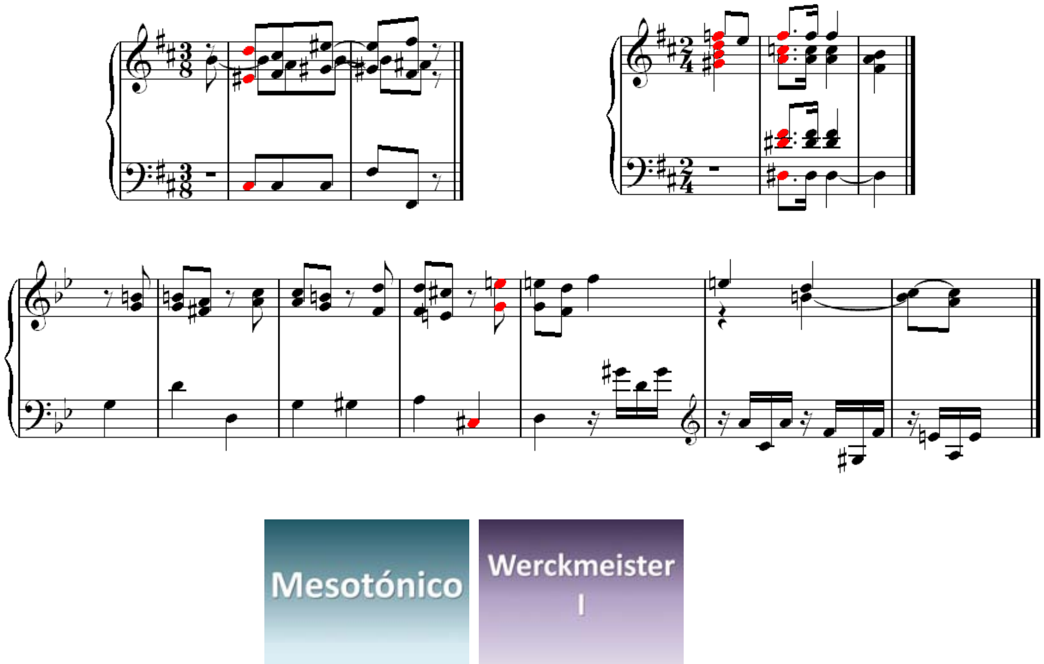


Figura 3.20: Acordes de séptima disminuida

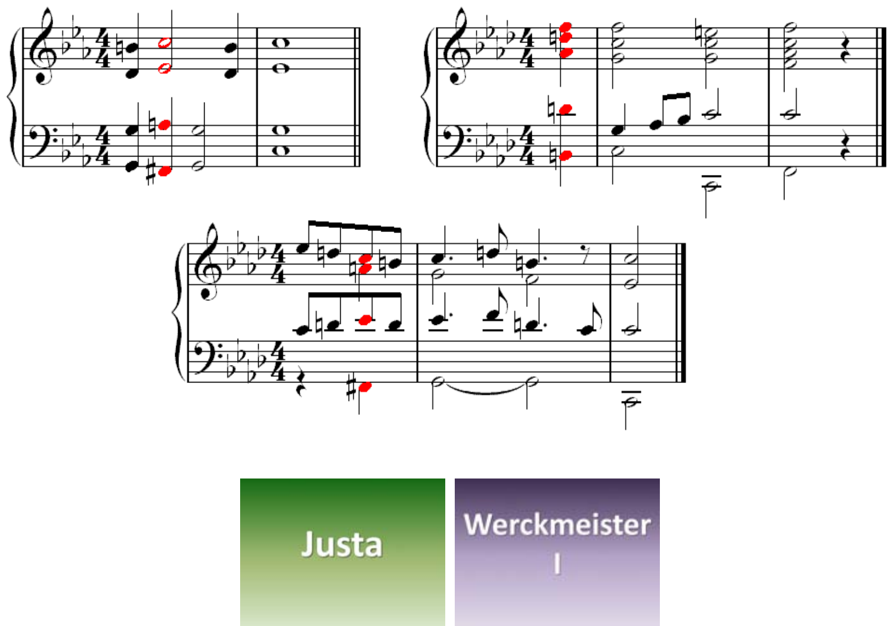


Figura 3.21: Fragmento de obras para órgano, Bach

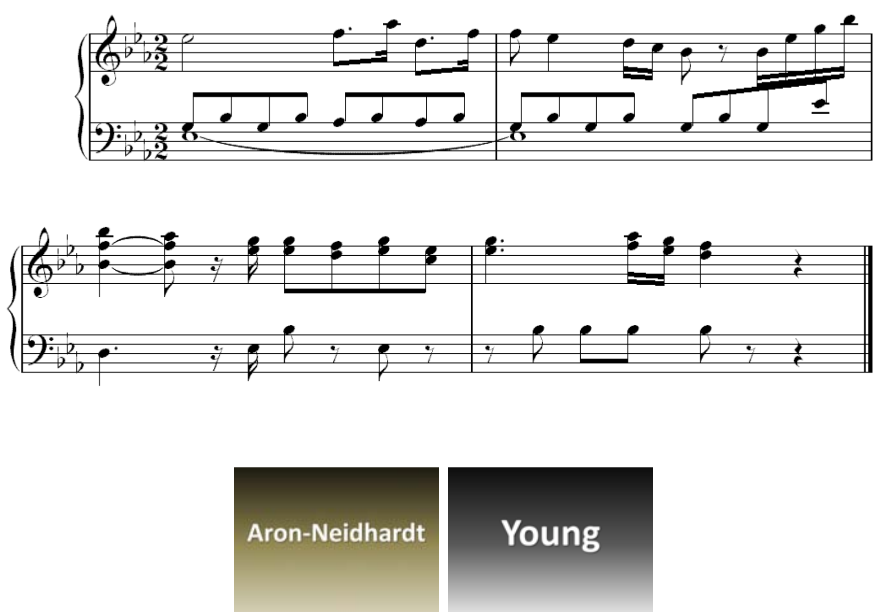


Figura 3.22: Larguetto. Cuarteto para cuerdas KV 551

tonalidad en el oyente, por lo que se empieza a modular propiamente dicho. Por ejemplo, en sólo cinco compases de la Pasión según San Mateo de Bach, existen once acordes mayores y menores, por lo que es difícil hablar de una modulación. En el periodo clásico, donde la armonía se reduce a sólo tres funciones, se utilizan mayormente los acordes que tienen notas de la tonalidad, por lo que al cambiar de tónica la modulación es muy clara. Se utilizan los acordes de dominante de las tonalidades a las que se quiere llegar. La modulación más común es al quinto grado y se logra por medio de la dominante de la dominante con una cadencia que marca a la dominante como nueva tónica.

Las obras tienen un tema que luego desarrollan para después regresar a él. En el segundo tema se trata de convencer al oyente de una nueva tonalidad, para después en el desarrollo sorprenderlo con un espacio libre armónico de mucha amplitud, el oyente se pierde con tantos cambios en tan poco tiempo porque existe en ese fragmento una armonía casi ilimitada.

Uno de los métodos más utilizados para modular es la cromatización [2] de una o más notas de un acorde de modo que el acorde no pierde su función pero da lugar a una tonalidad distinta.

Cada nota de un acorde disminuido puede convertirse en la nota sensible de una nueva tonalidad. Un compositor puede hacer obvia la nueva tonalidad con la escritura de las notas alteradas, pero auditivamente adivinarla es imposible, gracias a los buenos temperamentos. Las inversiones de un acorde le quitan fuerza a la función tonal que cumple y se transforma en un grado de otra escala. Al enarmonizar un acorde su función cambia también dando paso a una nueva tonalidad.

El pasaje 3.23 de Mozart representa la aparición de un fantasma, y lo hace con acordes tensos y cambiando de tono rápidamente. El efecto de tensión se logra utilizando buenos temperamentos, ya que el color cambia con la tonalidad. Es probable que esta obra se interpretara en el buen temperamento de Aron-Neidhardt.

[2]Cuando en un acorde una de las notas se altera en un semitono cromático, el acorde pertenece a otra tonalidad, aunque no cambia de función en la tonalidad anterior. El acorde funciona como un pivote para un cambio de tonalidad.

Figura 3.23: Don Giovanni, Mozart

3.3. Romanticismo y Siglo XX

En esta época la armonía empieza a hacerse mucho más compleja y la melodía pierde importancia frente a ésta. Debido a los buenos temperamentos es posible modular desde cualquier tonalidad a cualquier otra, e incluso se pierde la sensación de tonalidad nuevamente, pero a diferencia de los años anteriores a 1600, la cantidad de acordes utilizables es mucho más grande. Se utilizan acordes de más de cuatro notas y acordes que no se contruyen sobre terceras, sino con cualquier distancia entre las notas.

En la música de Richard Wagner (1813 - 1883) casi no hay melodía y predomina la armonía, aunque en la mayor parte de sus obras no hay un centro tonal excepto momentáneamente. Se cambia de centro tonal con los personajes y con las situaciones, casi como un signo de puntuación.

En esta época se utilizaban buenos temperamentos muy cercanos al temperamento igual que es el ideal para este tipo de armonía. En la Figura 3.24 se muestra un pasaje de la obra de Richard Wagner, "Tristán e Isolda".

3.4. Música Atonal

La búsqueda del temperamento igual y el acercamiento a éste de los buenos temperamentos, permitieron la pérdida total de un centro tonal en las obras de algunos compositores como Franz Liszt (1811 - 1886). La armonía era cada vez más compleja y trataba de crear sensaciones nuevas, dejando atrás las reglas que existieron hasta el clasicismo.

En su obra "Violes" (Figura 3.25), Claude Debussy (1862 - 1918) utiliza la escala de tonos enteros, basándose en la música javanesa. No existe una tónica en la escala de tonos enteros, todos los tonos deben ser del mismo tamaño y por lo tanto son equivalentes. Se utilizan notas enarmónicas en distintas voces incluso en el mismo compás.

En su obra "Nocturnos" (Figura 3.26) utiliza una escala pentatónica.

Es en esta época en la que empieza a desarrollarse la música dodecafónica y como tal la música atonal.

En realidad se manejaron los buenos temperamentos hasta 1917, cuando se

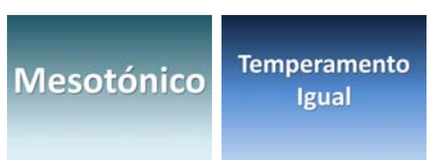


Figura 3.24: Tristán e Isolda, Wagner

Figura 3.25: Violes, Debussy. Temperamento Igual

Figura 3.26: Nocturnos, Debussy. Temperamento Igual

implementó una técnica aural eficiente para afinar los instrumentos en el temperamento igual, aunque algunos fueron muy cercanos a éste[8]. Desaparece totalmente la atracción a una tónica.

Capítulo 4

Afinador de Temperamentos Históricos

Resumen

En este capítulo se explica el funcionamiento del Afinador. Es un archivo ejecutable en el que se muestra la octava de un piano. En él pueden escucharse todas las notas dentro de una octava (la octava central del piano) en las siete afinaciones más utilizadas, que son : afinación pitagórica, justa, temperamentos mesotónico, Werckmesiter I, Aron-Neidhardt, Young y el temperamento igual.

4.1. Características del Programa

En el archivo existe una casilla de texto, en donde debe anotarse (sólo con números) la cantidad de segundos que se quiere que la nota suene, los suficientes para poder afinar el instrumento deseado. Después debe seleccionarse la afinación o temperamento que se quiere escuchar. Si no se selecciona ninguna, el programa marcará un error.

Al dar un click con el mouse sobre alguna de las notas, ésta suena en la afinación seleccionada, durante el tiempo escrito dado en segundos.

Este programa es útil para las personas que quieren afinar algún instrumento, en especial de cuerda, en alguna de las afinaciones o temperamentos antes mencionados. También puede resultar de utilidad para aquellas personas que desean cantar en alguna de estas afinaciones y desean memorizar alguno de los intervalos.

Las notas enarmónicas son diferentes sólo para la afinación pitagórica, ya que para las demás afinaciones y temperamentos por razones hitóricas se escogieron las notas $Do\sharp, Mi\flat, Fa\sharp, Sol\sharp$ y $Si\flat$ como notas fijas en el teclado y este trabajo sigue esta convención.

El programa fue construido usando MATLAB 7.1, con la herramienta MIDITOOLBOX, creada por Petri Toiviainen y Tuomas Eerola de la Universidad de Jyväskylä de Finlandia, obtenida en la página de internet
https://www.jyu.fi/hum/laitokset/musiikki/en/research/coe/materials
/miditoolbox/Download/

4.2. Instalación

En las computadoras que no tengan instalado el programa MATLAB con la herramienta MIDITOOLBOX, debe instalarse el programa MCRInstaller que se incluye en la carpeta “ejecutable” del disco compacto anexo. Para instalar MCRInstaller, debe darse doble click sobre ícono que se muestra en la Figura 4.1.

Una vez que se haya instalado este programa, se debe dar click sobre el ejecutable “elecaf.exe” que se muestra en la Figura 4.2.

Figura 4.1: MCRInstaller.exe

Figura 4.2: elecaf.exe

Se abrirá una ventana como la que se muestra en la Figura 4.3,

Figura 4.3: Inicializando el programa

y poco después se abrirá el afinador, como se muestra en la Figura 4.4.

4.3. Utilizando el Afinador

Si se da click sobre el botón instrucciones, resaltado en rojo en la Figura 4.5

se desplegará una ventana con las instrucciones del programa, como se muestra en la Figura 4.6.

Para que el afinador funcione correctamente debe escribirse el tiempo (sólo con números) que se quiere que cada nota suene al presionarla, en la casilla

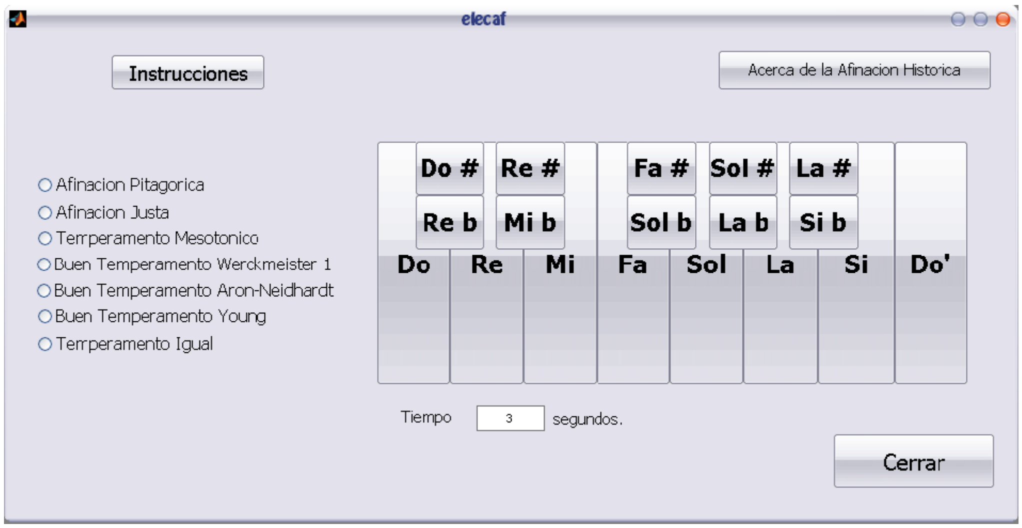


Figura 4.4: Afinador, elecaf.exe

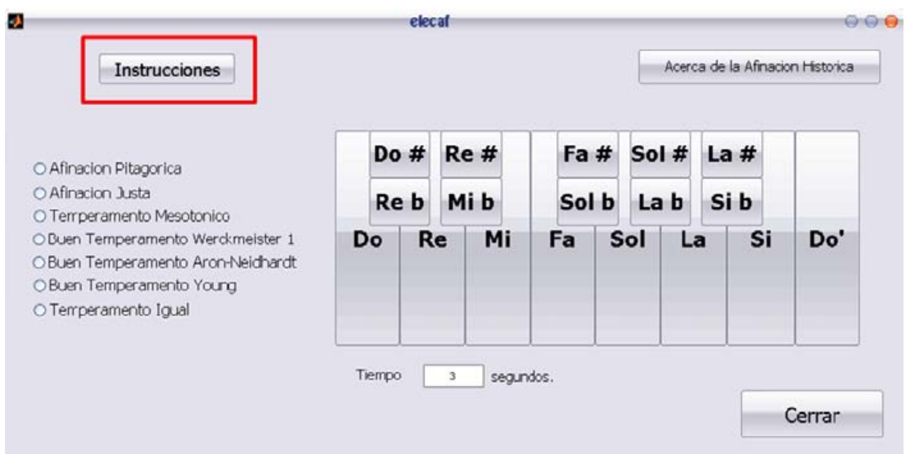


Figura 4.5: Botón para desplegar instrucciones

de tiempo, que se señala en rojo en la figura 4.7.

Debe seleccionarse una afinación o temperamento para que al tocar una nota se produzca un sonido, de lo contrario el afinador produce un error. Éstas se seleccionan haciendo click sobre el círculo que corresponde a cada una, como se muestra en la Figura 4.8.

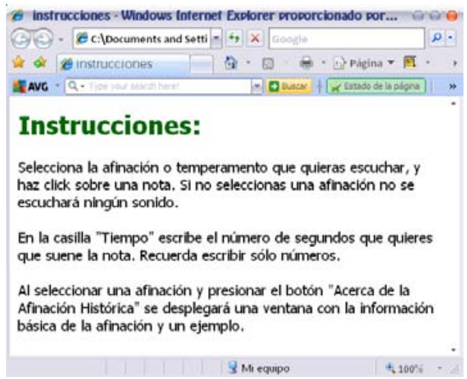


Figura 4.6: Ventana de Instrucciones

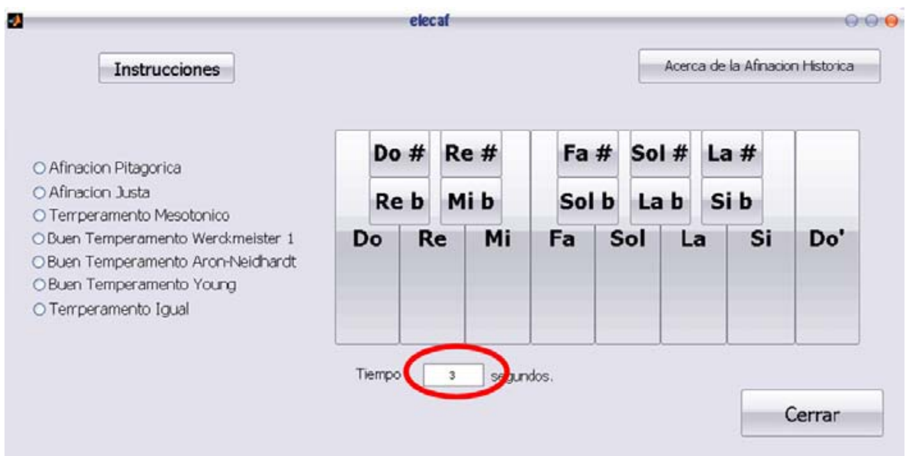


Figura 4.7: Casilla de Tiempo

Al seleccionar una afinación y dar click sobre el botón “Acerca de la Afinación Histórica”, resaltado en la Figura 4.9, aparecerá la información básica de esa afinación en una ventana. Por ejemplo, al seleccionar “Afinación Justa”, aparece la imagen 4.10

Cuando una nota se hace sonar, ésta se ilumina en azul, como se muestra en la figura 4.11

Para salir del programa, se debe presionar el botón “cerrar”, que en la Figura 4.12 se resalta en rojo.

Ésta es una primera versión del afinador. Se buscará, en versiones poste-

Figura 4.8: Seleccionar una afinación o temperamento

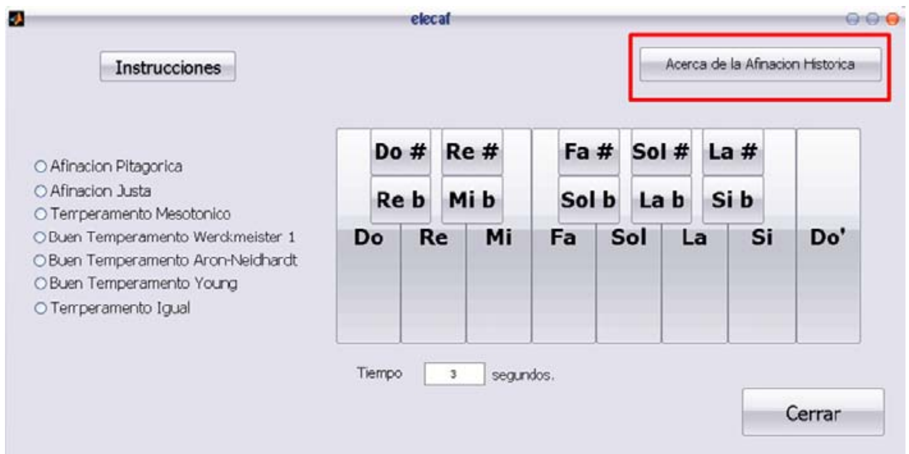


Figura 4.9: Botón Acerca de la Afinación

riores, agregar otras afinaciones y temperamentos, además de mejorarlo en cuanto a presentación y calidad del sonido, así como agregar funciones.

Figura 4.10: Ejemplo: Acerca de la Afinación Justa

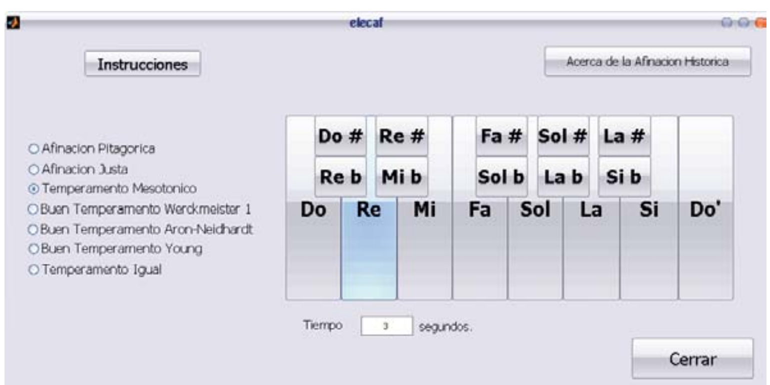


Figura 4.11: Nota seleccionada

Figura 4.12: Cerrar

Conclusiones

Se construyó la primera versión del afinador de temperamentos históricos, que más adelante será mejorada. Entre otros ajustes, se hará más agradable el timbre de los sonidos y se incluirán más temperamentos. Se pretende que este programa pueda leer cualquier archivo MIDI y hacerlo sonar en las distintas afinaciones o temperamentos históricos.

Aunque es imposible que el programa reemplace el uso de instrumentos musicales, será útil en cuanto permita una aproximación de los colores que los temperamentos daban a las obras musicales, como se mostró de manera muy básica en el tercer capítulo de este trabajo.

Espero que al ser posible la comparación de obras en diferentes fragmentos, sea evidente la importancia que los cambios en los temperamentos han tenido en el desarrollo de la música, asícomo la importancia de tratar de ejecutar las obras artísticas lo más cercano posible a la intención que el autor de a conocer.

Apéndice A

Términos Musicales

Se explican brevemente y se dan algunos ejemplos de los términos musicales utilizados en este trabajo. La mayoría de los conceptos de obtuvieron del libro “Armonía” de Walter Piston [15].

- La escala occidental utilizada actualmente consta de 12 sonidos en una octava. Del más grave al más agudo se muestran en el Cuadro A.1:

- Un *intervalo* es la distancia que hay entre dos notas dada en términos de número de sonidos de la escala entre ellas. Los intervalos tienen cantidad y cualidad. La cantidad se mide con el número de sonidos que cambian de nombre, la cualidad toma en cuenta el número de semitonos entre las notas y la escala a la que pertenecen. En el Cuadro A.2 se muestran los intervalos de todas las notas de la octava con respecto a Do. Respetando las distancias en semitonos se puede encontrar el intervalo entre cualesquiera dos notas.

  También se llama *quinta justa* al intervalo en el que las frecuencias de las notas tienen razón exactamente de $\frac{3}{2}$. Aunque en los temperamentos las quintas son más pequeñas y desiguales, a este intervalo se le llama “justo” para diferenciarlo de uno de quinta aumentada o disminuida.

  Se consideran como intervalos *consonantes* a la tercera mayor y menor, a la cuarta y quinta justas y a la sexta mayor y menor. A las segundas y séptimas mayores y menores se les considera como intervalos *disonantes*. Antes de 1600 se trataba a los intervalos de tercera y sexta como disonantes.

- Las funciones tonales representan el grado de atracción de las notas de la escala a la tónica, que es la nota que le da origen. En el Cuadro A.2 se muestran estas funciones para las escalas mayor y menor. La supertónica y la subtónica están a un tono de distancia para arriba o para abajo de la tónica respectivamente. La sensible está medio tono debajo de la tónica y tiene una atracción muy fuerte a ésta, siempre resuelve hacia ella. Las mediantes modales son las que definen el modo de una escala (mayor o menor) y se encuentran a una distancia de tercera mayor o menor según la escala. La dominante y la subdominante están a una quinta ascendente o descendente de distancia respectivamente.
- Cuando un cuerpo vibra lo hace de manera simultánea en varios modos, es decir, en múltiplos enteros de la frecuencia fundamental de la vibración. Estas frecuencias son conocidas como *armónicos* y forman la *columna de armónicos* o *serie armónica*. Algunos de estos armónicos son muy parecidos a los sonidos de la escala, pero no corresponden a las notas de la escala. En la Figura A.1 se representa la columna de armónicos transportada a una octava, con la nota más cercana al sonido marcada con una flecha que indica si el sonido es un poco más grave o más agudo.

Número de Nota	Nombre	Grado	Símbolo
1	Do	1°	C
2	$Do\sharp = Re\flat$		$C\sharp = D\flat$
3	Re	2°	D
4	$Re\sharp = Mi\flat$		$D\sharp = E\flat$
5	Mi	3°	E
6	Fa	4°	F
7	$Fa\sharp = Sol\flat$		$F\sharp = G\flat$
8	Sol	5°	G
9	$Sol\sharp = La\flat$		$G\sharp = A\flat$
10	La	6°	A
11	$La\sharp = Si\flat$		$A\sharp = B\flat$
12	Si	7°	B

Cuadro A.1: Grados de la Escala

Nota	Intervalo con respecto a *Do*	Número de Semitonos	Función Tonal
Do	Unísono	0	Tónica
Do$\sharp$	Primero ascendido	1	
Re$\flat$	Segundo descendido	1	
Re	Segunda	2	Supertónica
Re$\sharp$	Segundo ascendido	3	
Mi$\flat$	Tercera menor	3	Mediante Modal Primera (modo menor)
Mi	Tercera Mayor	4	Mediante Modal Primera (modo Mayor)
Fa	Cuarta Justa	5	Subdominante
Fa$\sharp$	Cuarta Aumentada	6	
Sol$\flat$	Quinta disminuida	6	
Sol	Quinta Justa	7	Dominante
Sol$\sharp$	Quinta Aumentada	8	
La$\flat$	Sexta menor	8	Mediante Modal Segunda (modo menor)
La	Sexta Mayor	9	Mediante Modal Segunda (modo Mayor)
La$\sharp$	Sexta ascendida	10	
Si$\flat$	Séptima menor	10	Subtónica
Si	Séptima Mayor	11	Sensible
Do	Octava	12	

Cuadro A.2: Intervalos

Figura A.1: Columna de Armónicos

- Se llama *acorde* a un conjunto de sonidos simultáneos con una estructura específica. Una triada es un conjunto de tres notas en intervalos de tercera (mayor o menor) y es el tipo de acorde más básico. Las triadas pueden ser de varios tipos: mayor (una tercera mayor seguida de una tercera menor), menor (una tercera menor seguida de una mayor), aumentada (dos terceras mayores), o disminuida (dos terceras menores). Los sonidos extremos de una triada mayor o menor están a intervalos de quinta justa, de una aumentada a intervalos de quinta aumentada y de una triada disminuida a una quinta disminuida. Se muestran en la Figura A.2 acordes del mismo grado con distinta calidad.

Figura A.2: Acordes Mayor, menor, Aumentado y disminuido de DO

- En un acorde, la nota que permite la construcción de éste por terceras es la *fundamental*. La nota más grave es el *bajo*. Cuando la nota fundamental del acorde no está en el bajo se dice que el acorde está en inversión. Se llama *generador* a la nota del acorde en cuya columna de armónicos se encuentran las dem'ás notas de éste.

- Entre los acordes más importantes de más de tres notas se encuentran la *séptima de dominante*, la *séptima de sensible* y el acorde de *séptima y novena*. Estos acordes se construyen también a partir de intervalos de tercera. Las notas en los extremos de los primeros dos acordes están en un intervalo de séptima menor o dismiuida. El acorde de séptima y novena está construido por cinco notas en intervalos de tercera. El intervalo entre las notas de los extremos se conoce como novena y rebasa en un grado a la octava. Las primeras tres notas siempre forman un acorde mayor, la séptima siempre es menor y la novena puede ser mayor o menor. Todos estos acordes tienen función de dominante. En la Figura A.3 se muestran estos acordes.

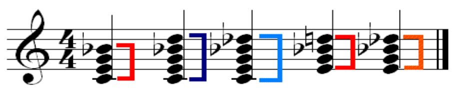


Figura A.3: Séptima de dominante, novena mayor, novena menor, séptima de sensible y séptima disminuida

- Los acordes de "sexta napolitana" son acordes en primera inversión que tienen función de subdominante. Tienen al segundo y sexto grados descendidos. En la Figura A.4 se muestra un ejemplo de este tipo de acorde.

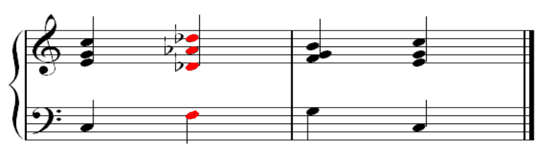


Figura A.4: Acorde de Sexta Napolitana

- En los corales, que como lo indica su nombre eran piezas escritas para ser interpretadas por un coro, existen cuatro voces. De la más aguda a la más grave éstas son: soprano, contralto, tenor y bajo. En la actualidad se tiene un registro definido para cada una de las voces, y se prohíbe el cruzamiento de éstas, sin embargo hasta alrededor de 1600 estas reglas no se seguían[6].

- Con los doce sonidos en la escala se pueden crear varias estructuras alrededor de un centro tonal. A estas estructuras se les conoce como *modos*. Algunos de los más importantes, o más utilizados, son los llamados *modos gregorianos* o *modos antiguos*. Se utilizaron sobre todo en la Edad Media y en la música tradicional de algunos países. Aunque tienen los nombres de los modos griegos, en realidad no tienen la misma estructura. En las Figuras A.5a, A.5b, A.5c, A.5d, A.5e, A.5f y A.5g se muestra la estructura de los modos gregorianos.

El modo Jónico corresponde al modo mayor y el modo Eólico a la escala menor natural, pero en el modo menor existen nueve notas, ya que para que la tonalidad tenga una nota con función de sensible se altera el séptimo grado medio tono hacia arriba y el sexto grado se asciende también medio tono en algunas ocasiones.

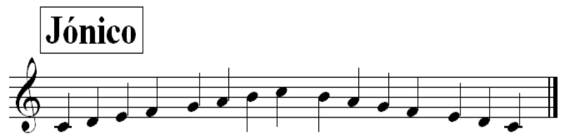
- En el temperamento igual al construir intervalos de quinta a partir de alguna nota y acomodarlos dentro de la misma escala, se llega a la nota con la que se empezó y se puede formar un *Círculo de Quintas*. Esta representación es muy útil debido a que si estas notas representan a las tonalidades, las armaduras de las escalas quedan acomodadas por el número de alteraciones (bemoles $\flat$ o sostenidos $\sharp$) en su armadura. Por esta misma razón, las escalas que están cerca en el círculo tienen más notas en común haciendo su modulación de manera sencilla, mientras que las escalas lejanas en el círculo son las que tienen menos notas en común y la modulación a éstas es un poco más complicada. En la Figura A.5 se muestra ésta representación.

  En la afinación pitagórica, al seguir el sistema de buscar las notas de la escala por intervalos de quintas justas, no se llega a la misma nota con la que se empezó y en lugar de formarse un círculo se forma una *Espiral de Quintas*.

- Las notas *auxiliares* son aquellas que se utilizan en una obra como adorno, pero no se encuentran en el acorde que está sonando en ese tiempo del compás y a veces no pertenecen a la tonalidad. Cuando no pertenecen a la tonalidad pueden utilizarse como alteraciones en los acordes para cambiar a la tonalidad a la que pertenecen.

- Una *cadencia* es una progresión de acordes que refuerzan un centro tonal con la sensación que provocan. Las más utilizadas a partir de 1600 son: la Cadencia Auténtica Simple, la Auténtica Compuesta, la Plagal y la Cadencia Rota. Una *semicadencia* es una cadencia incompleta. Termina en un acorde como la séptima de dominante que no resuelve a la tónica, aunque no provoca un cambio en el centro tonal. Algunas de las cadencias más utilizadas se muestran en la Figura A.6.

- Debido a que los acordes tenían funciones de dominante, subdominante o tónica, un acorde que no pertenecía a la tonalidad podía utilizarse



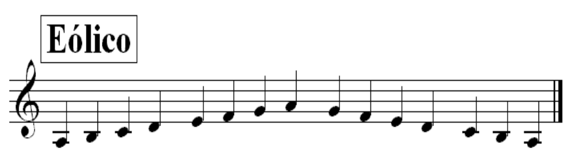
(a) Jónico

(b) Dórico

(c) Frigio

(d) Lidio

(e) Mixolidio



(f) Eólico

(g) Locrio

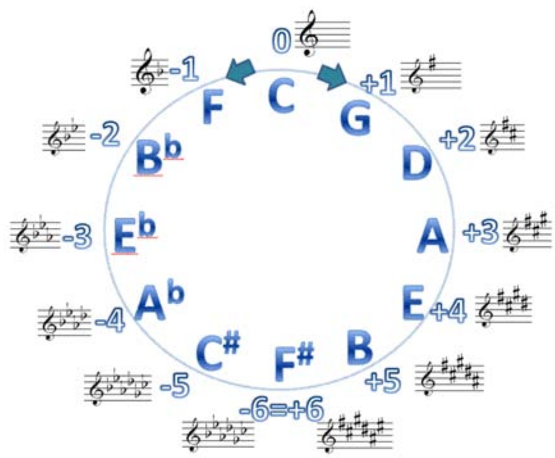


Figura A.5: Círculo de Quintas

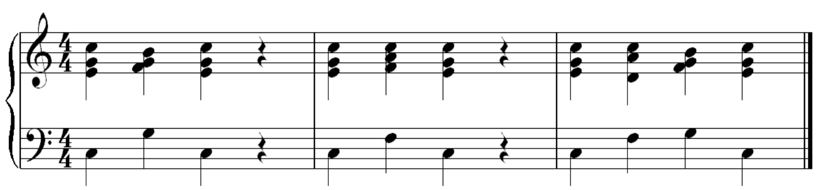


Figura A.6: Cadencia Auténtica Simple, Plagal y Auténtica Compuesta

como dominante de otra tonalidad para cambiar el centro tonal, reforzando este cambio al utilizar una cadencia de la nueva tonalidad. A estos acordes se les llama *dominantes auxiliares.*

- A diferencia de las demás escalas que tienen tonos y semitonos, la *escala por tonos* tiene sólo tonos. Consta solamente de seis sonidos distintos y la octava.

- Para dividir la escala en doce partes iguales, como se hace en el temperamento igual, cada intervalo de semitono debe medir $\sqrt[12]{2}f$ y cada

Figura A.7: Escala por Tonos

nota, con respecto a la tónica, tiene una proporción de $2^{\frac{n}{12}}f$, donde n es el número de semitonos a partir de la tónica y f es la frecuencia de la tónica. Cada cent mide $\sqrt[12]{2}f = 1{,}0005778f$ [10].

Bibliografía

[1] http://www.educando.edu.do/sitios/PNC2005/recursos/recursos/Ciencias.

[2] J. Murray Barbour. *Tunning and Temperament. A Historical S urvey.* Da Capo Press, New York, 1972.

[3] Arthur H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics.* Dover Publications Inc., New York, segunda Edition edition, 1990.

[4] David T Blackstock. *Fundamentals of Physical Acoustics.* John Wiley and Sons Inc., U.S.A., 2000.

[5] José Luis Cormellas. *Historia Sencilla de la Música.* Ediciones RIALP, S.A., Madrid, 2006.

[6] Diether De la Motte. *Armonía.* Labor, España, 1989.

[7] Alexander Ellis and Arthur Mendel. *Studies in the History of Musical Pitch.* Da Capo Press, New York, 1968.

[8] Alejandro Esbrí. *Acústica Musical y Afinación de Pianos, un Enfoque Moderno.* UNAM, México, 1997.

[9] Neville H. Fletcher and Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments.* Springer, New York, 1998.

[10] Hermann Helmholtz. *On the Sensations of the Tone.* Dover Publications, Inc., New York, second English Edition edition, 1954.

[11] Ian Johnston. *Measured Tones.* IOP, London, 1989.

[12] Owen Jorgensen. *Tunning the Historical Temperaments by Ear.* Northern Michigan University Press, U.S.A., 1977.

[13] Mariano Merino De La Fuente. *Las Vibraciones de la Música.* Editorial Club Universitario, España, 2006.

[14] Harry F. Olson. *Music, Physics and Engineering.* Dover Publications Inc., New York, segunda Edición edition, 1967.

[15] Walter Piston. *Armonía.* IDEA Books, España, 2001.

[16] Rudolph Rasch and Reinier Plomp. The Perception of Musical Tones. In Diana Deutch, editor, *The Psychology of Music*, pages 89–101. Academic Press, USA, 1999.

[17] Josep Soler. *La Música.* Biblioteca de Divulgación no. 15, España, 1987.

[18] Thomas Street Christensen. *The Cambridge History of Western Music Theory.* Cambridge University Press, 2006.

[19] Johan Sundberg. *The Science of Musical Sounds.* Academic Press Inc., U.S .A ., segunda Edición edition, 1991.