



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Acondicionamiento de Parejas de Fotones  
a través de  
Conversión Paramétrica Ascendente y  
Descendente

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
RICARDO GUTIÉRREZ JÁUREGUI

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ALFRED B. U'REN CORTÉS



2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Acondicionamiento de Parejas de Fotones  
a través de  
Conversión Paramétrica Ascendente y  
Descendente

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
RICARDO GUTIÉRREZ JÁUREGUI

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ALFRED B. U'REN CORTÉS



2011

## **Datos del jurado.**

### **1. Datos del alumno**

Gutiérrez  
Jáuregui  
Ricardo  
52542057  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
303597645

### **2. Datos del tutor**

Dr.  
Alfred Barry  
U'Ren  
Cortés

### **3. Datos del sinodal 1**

Dr.  
Sahen  
Hacyan  
Saleryan

### **4. Datos del sinodal 2**

Dr.  
Octavio Héctor  
Castaños  
Garza

### **5. Datos del sinodal 3**

Dr.  
Victor Manuel  
Velázquez  
Aguilar

### **6. Datos del sinodal 4**

Dr.  
Pablo  
Barberis  
Blostein

### **7. Datos del trabajo escrito.**

Acondicionamiento de Parejas de Fotones a través de Procesos de Conversión Paramétrica  
Ascendente y Descendente.

69 p

2011

Antes que nada quisiera agradecer al Dr. Alfred B. U'Ren Cortés por todo el tiempo, conocimiento y oportunidades que me dio a lo largo de estos últimos años. También a mi comité de sinodales, compuesto por el Dr. Hacyan, Dr. Castaños, Dr. Barberis y Dr. Velázquez. Los diferentes modos de abordar los problemas de cada uno hicieron de este un trabajo mucho más completo e interesante del que yo pude haber logrado. Y por el tiempo que les tomo leerlo, analizarlo y discutirlo conmigo les agradezco aún más.

Quisiera dedicar no solo este trabajo, si no toda mi carrera a mi mamá, Rocío Jáuregui. No creo poder encontrar las palabras para mostrar lo agradecido que estoy con ella. También agradecer a mi padre quien siempre me enseñó a llevar todo con una sonrisa y mi hermano quien me cuida y apoya desde que tengo memoria.

A Pedro, Zubi, Gerardo, Emiliano, Raxel, Hugo, Diego (todos ellos), Guayaquil, Arturo, Salvador, Daniel, Maza, Roland, Rodrigo, Mau, Omar, Lorenz, Nora, George, Pablo. Probablemente esta sección es lo único que van a leer de mi tesis si es que llegan a leer algo, así que espero tengan en mente que cada uno es muy especial para mí, no solo por ayudarme a convertirme en físico si no por ayudarme a convertirme en la persona que soy ahora. Me tomaría otra tesis agradecerles todo lo que hicieron por mí, pero espero lo sepan. También a todos los amigos que tengo fuera de esta facultad y me apoyaron estos cuatro años. Entre los que no me perdonarían si no los menciono se encuentran Joanx, Gary, Pete, Natus, Tino y el Camarada.

A Hector, Bobby, Pedro, Yasser y Karina. Gracias a ellos estos últimos meses fueron mucho más fáciles. Me enseñaron la forma de vivir en un laboratorio y su contribución a este trabajo es enorme.

Quisiera agradecer también a Ana, por estar conmigo y aguantarme todo el tiempo que me tomo escribir esta tesis.

A los doctores Eugenio Ley Koo y Juan Manuel Lozano. Quienes con su amor a la física y su modo de transmitirlo, me ayudaron a ver que esta era realmente la carrera para mí. Finalmente, me gustaría agradecer a todos los que no pude mencionar por falta de tiempo o memoria.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Objetivos . . . . .	8
<b>2. Óptica No Lineal (Clásica)</b>	<b>9</b>
2.1. Procesos asociados a la óptica no lineal (clásica) . . . . .	10
2.2. Haz gaussiano . . . . .	11
<b>3. Cuantización del Campo Electromagnético</b>	<b>17</b>
3.1. Cuantización del campo electromagnético en el vacío . . . . .	17
3.1.1. Normalización . . . . .	20
3.2. Cuantización en medios . . . . .	20
3.2.1. Medio isotrópico . . . . .	21
3.2.2. Medio anisotrópico . . . . .	21
3.2.3. Índice de refracción . . . . .	23
3.2.4. Propagación al cambiar de medio . . . . .	24
3.2.5. Campo eléctrico en función de la frecuencia . . . . .	24
<b>4. Óptica Cuántica No Lineal</b>	<b>27</b>
4.1. Conversión paramétrica descendente . . . . .	27
4.1.1. Operador de evolución temporal . . . . .	29
4.1.2. Forma de la función de onda . . . . .	29
4.2. Conversión paramétrica ascendente . . . . .	33
<b>5. Simulación Numérica</b>	<b>35</b>
5.0.1. Propiedades del haz escolta . . . . .	37
5.0.2. Elección del cristal . . . . .	41
5.1. Simulación numérica . . . . .	43
5.1.1. Como funciona la simulación . . . . .	43

<b>6. Cálculo Analítico</b>	<b>49</b>
6.1. Cálculo analítico de la función de amplitud conjunta . . . . .	55
6.1.1. Análisis de correlación . . . . .	58
<b>7. Resultados</b>	<b>61</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Junto con la creación del láser se introdujo la rama no lineal de la óptica experimental. La intensidad de los primeros láseres permitió, por primera vez, explorar en el laboratorio los fenómenos ópticos no lineales de segundo orden. Estos fenómenos presentan análogos cuánticos, entre los que destaca el proceso de conversión paramétrica descendente que puede funcionar como una fuente de luz no clásica.

En el proceso de conversión paramétrica descendente (PDC) un haz conocido como bombeo incide sobre un cristal no lineal. En este cristal fotones individuales del bombeo se aniquilan, siguiendo condiciones de conservación de energía y momento, en dos fotones que se conocen como acompañante y señal. El carácter no clásico de la luz de salida tiene huellas claras en la correlación tanto espectral como en momento lineal que presentan los fotones acompañante y señal, así como en el número de fotones creados, por mencionar algunas. Existe un proceso inverso al de PDC, este proceso se conoce como conversión paramétrica ascendente (PUC), donde se cumple que al incidir parejas de fotones sobre un cristal no lineal dan paso a un fotón que llamaremos generado. Al ser un proceso que se demostró por primera vez en la última década, el proceso de conversión paramétrica ascendente, a diferencia del proceso de PDC, es menos estudiado y no se encuentran tantas referencias en el tema.

Para diferentes procesos se requiere controlar la correlación entre fotones. Por ejemplo, puede ser conveniente crear fotones que no presenten correlación en variable alguna. Es importante explorar métodos para que la luz no clásica cumpla con las condiciones deseadas, así como descartar aquellos escenarios que dificulten la creación de estas condiciones.

En este trabajo se propone una técnica para la manipulación de la co-

relación espectral de dos fotones usando una fuente de PDC, seguida de un cristal donde se realiza PUC. Se estudia este sistema y se determina el rango de validez para dicha manipulación y las condiciones óptimas para su uso en escenarios concretos.

## 1.1. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es el estudiar mecanismos para la manipulación de la correlación espectral de una pareja de fotones usando una fuente de PDC seguida de un cristal PUC. (Fig. 1)

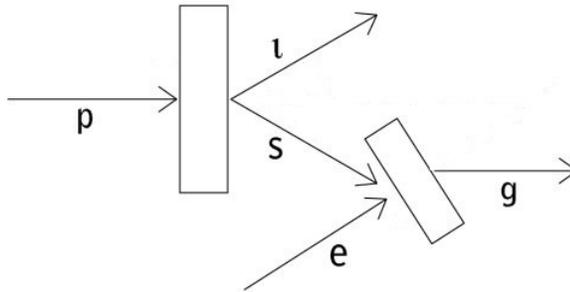


Figura 1.1: Fuente de PDC seguida por una fuente de PUC los subíndices e,s,p,g,i representan a los modos escolta, señal, bombeo, generado y testigo, respectivamente.

## Capítulo 2

# Óptica No Lineal (Clásica)

El ámbito de la óptica no lineal se presenta cuando la respuesta de un material a una onda electromagnética depende del campo eléctrico asociado con un exponente mayor a la unidad.

La respuesta de un material dieléctrico a un campo eléctrico externo viene dada, esencialmente, por su vector de polarización. Al enfocarnos en el régimen lineal encontramos que la dependencia de este con el campo externo de frecuencia  $\omega$  viene dada por la relación:

$$P_\omega = \epsilon_0 \chi^{(1)} E_\omega, \quad (2.1)$$

donde  $\chi^{(1)}$  se conoce como susceptibilidad eléctrica, dependiente del material dieléctrico, y  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío, a lo largo de este trabajo usaremos el sistema internacional de unidades SI. Al salir del régimen lineal tenemos que la polarización se describe como una serie de potencias del campo eléctrico,  $\vec{E}$ , entonces el vector de polarización tendrá la forma:

$$P_\omega(t) = \epsilon_0 [\chi^{(1)} E_\omega(t) + \chi^{(2)} E_\omega^2(t) + \chi^{(3)} E_\omega^3(t) + \dots], \quad (2.2)$$

donde a los términos  $\chi^{(2)}, \chi^{(3)}$  se les conoce como las susceptibilidades de segundo y tercer orden, respectivamente. Si trabajamos la naturaleza vectorial de los campos eléctricos vamos a encontrar que las susceptibilidades se deben de tratar como tensores, en particular la susceptibilidad eléctrica de segundo orden se transformará en un tensor de tercer orden,  $\chi^{(2)} \rightarrow \chi_{ijk}^{(2)}$ .

## 2.1. Procesos asociados a la óptica no lineal (clásica)

A lo largo de este trabajo vamos a simular materiales no lineales cuya respuesta no lineal predominante sea la de segundo orden. En esta sección analizaremos algunos de los procesos que se pueden dar en este orden. Podemos expresar el campo eléctrico como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n A_n(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} \vec{e}^{(n)} + C.C., \quad (2.3)$$

donde  $A_n(\vec{r})$  representa la amplitud del modo  $n$ ,  $\omega_n$  su frecuencia,  $\vec{e}^{(n)}$  su vector de polarización y C.C. abrevia las palabras complejo conjugado. Por simplicidad consideramos que el campo eléctrico es bimodal, así que solo tomamos los valores  $n = 1, 2$ . Esto causará que la componente  $i$  del vector de polarización tenga la forma:

$$\begin{aligned} P_i^{(2)}(\vec{r}, t) &= \chi_{ijk}^{(2)} \epsilon_0 \cdot [A_1(\vec{r}) A_1^*(\vec{r}) \epsilon_j^{(1)} \epsilon_k^{(1)*} + A_2(\vec{r}) A_2^*(\vec{r}) \epsilon_j^{(2)} \epsilon_k^{(2)*} \\ &+ 2A_1(\vec{r}) A_2(\vec{r}) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \epsilon_j^{(1)} \epsilon_k^{(2)} \\ &+ 2A_1(\vec{r}) A_2^*(\vec{r}) e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} \epsilon_j^{(1)} \epsilon_k^{(2)*} \\ &+ A_1(\vec{r})^2 e^{-2i\omega_1 t} \epsilon_j^{(1)} \epsilon_k^{(1)} + A_2(\vec{r})^2 e^{-2i\omega_2 t} \epsilon_j^{(2)} \epsilon_k^{(2)} + C.C.]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Estos términos van a corresponder a diferentes procesos:

Los primeros dos términos,  $A_1(\vec{r}) A_1^*(\vec{r}) + A_2(\vec{r}) A_2^*(\vec{r})$ , no presentan ninguna dependencia temporal y corresponden al proceso de rectificación óptica. Este fue el primer efecto no lineal que pudo predecirse cuantitativamente al conocer las propiedades ópticas del material ( $\chi^{(2)}$ ) [2]. La rectificación óptica consiste en la creación de una polarización DC<sup>1</sup> cuando incide un haz intenso en el medio no lineal. Se puede considerar como un efecto análogo al de rectificación eléctrica.

Los siguientes dos términos,  $A_1(\vec{r}) A_2(\vec{r}) e^{i(\omega_1 + \omega_2)t}$ ,  $A_1(\vec{r}) A_2^*(\vec{r}) e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}$ , corresponden a los procesos de suma y resta de frecuencias respectivamente. En estos procesos dos haces de bombeo generan un tercer haz. Este haz tendrá una frecuencia correspondiente a la suma de la frecuencia de los dos haces (generación de suma de frecuencias, SFG) o a la diferencia entre estas (generación de diferencia de frecuencias, DFG). Los procesos difícilmente se

<sup>1</sup>Las siglas DC corresponden a corriente directa *i.e.* se va a generar un campo eléctrico unidireccional, no dependiente del tiempo.

presentan simultáneamente por condiciones de empatamiento de fase (que veremos más adelante en el trabajo), y comunmente sólo se genera uno de los dos haces.

La primera vez que se reportó este proceso experimentalmente se usaron dos haces pulsados, emitidos por dos láseres de rubí que se encontraban a diferentes temperaturas (haciendo que la frecuencia a la que emiten sea diferente). Estos haces tenían una duración de 500  $\mu\text{seg}$  y una diferencia de emisión menor o igual a 100  $\mu\text{seg}$ . Además, ambos haces de bombeo fueron superpuestos mediante un espejo que los conducía a un mismo punto del cristal. Se encontraron tres pulsos a la salida del cristal, correspondientes a la suma de frecuencias y a la generación del segundo armónico del primer y segundo haz respectivamente [3].

Estos dos últimos pulsos (segundos armónicos) corresponden precisamente a los términos que nos faltaban de analizar  $A_1(\vec{r})^2 e^{2i\omega_1 t} + A_2(\vec{r})^2 e^{2i\omega_2 t}$ . La generación del segundo armónico es un caso degenerado del proceso de SFG. Consiste en que al incidir un haz intenso en un medio no lineal este genera un segundo haz con el doble de frecuencia que el primero.

Fue demostrado experimentalmente en 1961 por P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters y G. Weinreich y es descrita de un modo formal en 1962 en el famoso artículo ' *Interaction between Light Waves in a Nonlinear Dielectric* ' (Armstrong et al.)[4].

## 2.2. Haz gaussiano

La óptica no lineal fue un área de la física que se empieza a trabajar hasta el comienzo de los años 1960's. La primera demostración experimental de la generación del segundo armónico (1961) se considera el comienzo de este campo, y el primer proceso que pudo ser explicado cuantitativamente fue la rectificación óptica (1962), ambos ya mencionados antes.

Una de las razones por las que la óptica no lineal tardó tanto en ser estudiada es por la intensidad necesaria para poder producir los fenómenos no lineales. Experimentalmente encontramos que las susceptibilidades eléctricas de segundo orden tienen valores del orden de  $10^{-12} m/V$  (en SI) mientras que  $\chi^{(1)}$  es del orden de la unidad, por lo que necesitaremos una intensidad muy alta para poder ver estos fenómenos. Un modo superficial de analizar esta diferencia de ordenes de magnitud es el considerar que los procesos no lineales de orden mayor serán más pequeños que los del orden anterior por un factor de  $(E_l/E_{at})^2$ , donde  $E_{at}$  corresponde al promedio del campo eléctrico sobre electrones de valencia mientras que  $E_l$  es el campo

eléctrico de la onda de luz incidente. Numéricamente  $E_{at} \simeq 5,14 \cdot 10^8 V/cm$  y con suficientemente buenos detectores los efectos no lineales se pueden empezar a notar desde  $(E_l/E_{at})^2 = 10^{-10}$  así que necesitamos un campo eléctrico de aproximadamente  $5 \cdot 10^3 V/cm$ . [4]

Tenemos que la intensidad de un láser viene dada por:

$$I = \frac{\epsilon_0 \eta c}{2} |E|^2. \quad (2.5)$$

Donde  $\eta$  es el índice de refracción del medio en el que se propaga el haz y  $c$  es la velocidad de la luz, y  $|E|^2$  es la norma al cuadrado del campo eléctrico. Así que necesitaremos un láser de una intensidad de al menos  $0,25 MW/cm^2$ . Con un láser de rubi podemos alcanzar una potencia pico de 10 MW, con una sección transversal de  $0.5 cm^2$ . Vemos así que con un láser obtenemos fácilmente la magnitud del campo eléctrico necesario para poder analizar los fenómenos no lineales.

No fue coincidencia que el inicio del estudio de la óptica no lineal corresponda a poco tiempo después de la demostración del primer láser. El haz emitido por un láser corresponde a un estado coherente, con estadística Poissoniana. Además, espacialmente también presentará una forma Gaussiana, que puede ser descrita por un haz gaussiano.

Dada la importancia del haz gaussiano y sus propiedades para el resto de este trabajo, es importante describir algunas de estas propiedades, así como la forma explícita que adoptará este haz.

Llamaremos haz a un campo que cuya propagación es altamente direccional, y un haz electromagnético gaussiano aquel que además de ser altamente direccional tiene una amplitud de campo eléctrico:

$$E(x, y, 0) = A e^{-\frac{(x^2+y^2)}{W_o^2}}, \quad (2.6)$$

cuando se propaga a lo largo del eje  $z$  y nos concentramos en el plano de enfocamiento  $z = 0$ . Al parámetro  $W_o$  se le conoce como radio en la cintura y obtiene su nombre del hecho de que cuando el radio del haz es igual a  $W_o$ , la intensidad del haz es un factor  $1/e^2$  del valor en el centro del haz. El campo eléctrico propagante asociado a un haz gaussiano tiene la estructura [5]:

$$\vec{E}(\vec{\rho}, z, t) = A e^{-i\omega_0 t} \left[ \frac{W_o}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W(z)^2}} e^{i[kz + \frac{\rho^2}{2R(z)} + \Psi(z)]} \right] \hat{e}, \quad (2.7)$$

con

$$\begin{aligned}
\vec{\rho} &= (x, y), \\
W(z) &= W_o \left[ 1 + \left( \frac{2z}{kW_o^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
R(z) &= z \left[ 1 + \left( \frac{kW_o^2}{2z} \right)^2 \right], \\
\cos[\Psi(z)] &= \frac{W_o}{W(z)}, \\
\text{sen}[\Psi(z)] &= - \left[ 1 - \left( \frac{W_o}{W(z)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

que se puede expresar a su vez como:

$$\vec{E} = Ae^{-i\omega_o t} \frac{1}{1 + \frac{2iz}{kW_o^2}} \exp \left[ - \frac{x^2 + y^2}{W_o^2 \left( 1 + \frac{2iz}{kW_o^2} \right)} \right] e^{ikz} \hat{e}. \tag{2.9}$$

A lo largo de este trabajo resultará conveniente considerar un haz gaussiano que se propaga con un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección  $z$ , por ejemplo en el plano  $xz$ . Intuitivamente pensaríamos en rotar el haz un ángulo  $\theta$ , haciendo los cambios de coordenadas:

$$\begin{aligned}
z' &\rightarrow z \cos \theta - x \text{sen} \theta, \\
x' &\rightarrow x \cos \theta + z \text{sen} \theta.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Pero esto nos llevaría a varios problemas con el haz gaussiano, pues al obtener la ecuación (2.10), se hizo una aproximación paraxial del haz, y al hacer simplemente la rotación estamos alterando esta aproximación [6]. Al derivar la expresión de este haz desde el inicio, obtenemos que la expresión correcta para una propagación con ángulo  $\theta$  respecto al eje  $z$ , será:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= Ae^{-i\omega_o t} \frac{W_o}{p^2} \exp \left[ - \frac{(x \cos \theta - z \text{sen} \theta)^2 + y^2}{2p^2} \right] e^{ik(z \cos \theta + x \text{sen} \theta)} \hat{e}, \\
\text{con} \\
p &= \left( W_o^2 + \frac{iz}{k \cos \theta} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Una vez descrita la forma espacial del haz gaussiano, ahora vamos a describir la forma temporal al considerar en lugar de un haz monocromático a un haz pulsado. En este caso el campo eléctrico toma la forma[6]:

$$\vec{E} = Ae^{-i\omega_0 t} \frac{1}{1 + \frac{2iz}{kW_o^2}} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_o^2 \left(1 + \frac{2iz}{kW_o^2}\right)} \right] e^{ikz} e^{\left[ -\frac{(t-z/c)^2}{\tau^2} \right]} \hat{e}, \quad (2.12)$$

donde el término del haz pulsado está determinado por  $\frac{(t-z/c)^2}{\tau^2}$ . Al analizar este término vemos que nos indica que el pulso avanza en la dirección  $\hat{z}$  y mantiene una forma gaussiana durante todo su movimiento. El parámetro  $\tau$  corresponde a la duración del pulso.

Para propósitos del cálculo se evalúa el campo eléctrico en la frontera ( $z = 0$ ), resultando una dependencia temporal de la forma  $e^{\left[-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - i\omega_0 t\right]}$ . Tomando la transformada de Fourier de esta función obtendremos<sup>2</sup>:

$$\zeta(t) = \int d\omega \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} \right] e^{i\omega t}. \quad (2.13)$$

Llamaremos ancho espectral al valor de  $\sigma$ . Cuando trabajamos con transformadas de Fourier existe cierta incertidumbre entre los anchos de dos variables conjuntas<sup>3</sup>. Si conocemos el ancho temporal del haz ( $\Delta\tau$ ), entonces:

$$\Delta\tau = \frac{2 \ln 2}{\pi \Delta\omega} = \frac{0,441(2\pi)}{\Delta\omega}. \quad (2.14)$$

Mientras que el valor  $\sigma$  corresponde al ancho a la mitad del máximo del campo eléctrico. Haciendo que:

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}\Delta\omega}{2\sqrt{\ln(2)}}. \quad (2.15)$$

Resultando en nuestro haz gaussiano pulsado de la forma:

$$\vec{E}_p(\vec{r}, t) = \vec{A}_p \int d\omega \alpha(\vec{r}, \omega) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad (2.16)$$

donde nuestro factor  $\alpha(\vec{r}, \omega)$  es el que nos determinará el carácter gaussiano y pulsado de nuestro haz, su forma será:

<sup>2</sup>Físicamente corresponde a hacer una superposición de haces monocromáticos, con una frecuencia central  $\omega_{p0}$ .

<sup>3</sup>Principio de incertidumbre.

$$\alpha(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{1 + \frac{2iz}{k_p W_o^2}} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_o^2 \left(1 + \frac{2iz}{k_p W_o^2}\right)} \right] \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_{p0})^2}{\sigma^2} \right]. \quad (2.17)$$



## Capítulo 3

# Cuantización del Campo Electromagnético

La luz corresponde a ondas electromagnéticas descritas con mucha precisión por las ecuaciones de Maxwell. Así mismo tenemos que considerar la existencia de los fotones para describir algunos fenómenos ópticos. En este capítulo mostraremos las ideas presentadas en la física cuántica para integrar esta dualidad.

### 3.1. Cuantización del campo electromagnético en el vacío

Existe una forma semi-clásica para cuantizar el campo electromagnético en la que nos vamos a basar para esta sección. Comenzamos por usar las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sin presencia de cargas ni corrientes libres.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & ; & & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; & & \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Las ecuaciones del campo eléctrico y magnético muestran que estos pueden obtenerse a través de un potencial vectorial  $\vec{A}$  y un potencial escalar  $\Psi$ ; la elección de éstos no es única y diferentes potenciales están relacionados por las transformaciones que se conocen como de norma. Tomando la norma de Coulomb con  $\Psi = 0$ .

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (3.2)$$

El campo eléctrico y magnético se obtienen a partir del potencial vectorial, como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t) \quad ; \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (3.3)$$

y el potencial vectorial cumple con la ecuación de onda homogénea.

Una vez marcadas estas bases vamos a describir un campo electromagnético confinado a una caja tridimensional de ancho  $L$  y volumen  $V$ . Consideramos condiciones a la frontera periódicas. Comenzamos por expandir nuestro potencial vectorial,  $\vec{A}$ , en una serie de Fourier con los modos  $k_x, k_y, k_z$  de modo que:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left( \frac{1}{\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_k \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (3.4)$$

Resolveremos la ecuación de onda de acuerdo a esta expansión en modos, y esto nos llevará a que el potencial se puede escribir en función de la frecuencia de cada modo y en una base de los vectores ortonormales  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  (que nos van a describir la polarización), obteniendo finalmente:

$$\begin{aligned} \vec{A}_k(t) &= \sum_{s=1}^2 c_{ks} \vec{e}_{ks} e^{-i\omega_k t} + C.C. \\ \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}}} \sum_k \vec{A}_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La constante  $c_{ks}$  será determinada por las condiciones iniciales del problema. Ya encontrado este potencial vectorial es directo obtener el campo eléctrico y magnético (Ec. (3.3)). Para continuar con la cuantización de los campos en el vacío debemos de obtener las ecuaciones de movimiento de Hamilton para los campos. Las ecuaciones de movimiento de Hamilton tienen la forma:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (3.6)$$

donde  $p, q$  son las variables canónicas, variables que comunmente se usan para representar el momento y posición generalizados. Relacionaremos el

### 3.1. CUANTIZACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN EL VACÍO 19

Hamiltoniano con nuestro campo al determinar la energía de este. La energía del campo se obtiene al evaluar la integral de volumen:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left[ \epsilon_0 |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}(\vec{r}, t)|^2 \right] dV. \quad (3.7)$$

Usando los campos eléctricos y magnéticos (determinados por las Ec. (3.2) y (3.4)) tendremos que la energía viene como:

$$U = \sum_k \sum_{s=1}^2 2\omega_k^2 |c_{ks} e^{-i\omega_k t}|^2. \quad (3.8)$$

Al realizar el cambio de variable:

$$\begin{aligned} q_{ks} &= c_{ks} e^{-i\omega_k t} + c_{ks}^\dagger e^{i\omega_k t}, \\ p_{ks} &= -i\omega_k [c_{ks} e^{-i\omega_k t} - c_{ks}^\dagger e^{i\omega_k t}], \end{aligned} \quad (3.9)$$

utilizando  $U = H(p_{ks}, q_{ks})$ , llegamos a:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{s=1}^2 [p_{ks}^2 + \omega^2 q_{ks}^2]; \quad (3.10)$$

equivalente al Hamiltoniano de un conjunto de osciladores armónicos. Entonces, el campo electromagnético confinado a la caja se comportará como un conjunto de osciladores armónicos, cada uno correspondiente a los diferentes modos permitidos, comportamiento que sabemos describir en mecánica cuántica. Para cada modo, cambiaremos las variables canónicas por los operadores de momento y posición, y luego sustituiremos estos por los operadores, no hermitianos, de creación y destrucción ( $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ), con la transformación:

$$\hat{a} = \left( \frac{1}{2\hbar\omega} \right)^{\frac{1}{2}} [\omega\hat{q} + i\hat{p}]. \quad (3.11)$$

Paul Dirac, en 1927, es el primero en darse cuenta de esto. Es gracias a su idea de transformar el Hamiltoniano del campo electromagnético confinado a una caja en el de un conjunto de osciladores armónicos que se logra cuantizar el campo.

### 3.1.1. Normalización

Antes de escribir la forma final de nuestro campo electromagnético cuantizado vamos a normalizar sus modos. Para ello vamos a usar ideas de finales del siglo XIX (Ec. Maxwell la luz esta compuesta por ondas electromagnéticas) y principios del siglo XX (energía de un fotón; relación de Planck  $\varepsilon_k = \hbar\omega_k$ ).

Vamos a descomponer el campo electromagnético en modos, entonces cada modo tendrá una energía  $\varepsilon_k$ , tal que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= 2 \omega_k^2 |c_{ks} e^{-i\omega_k t}|^2 = \hbar\omega_k, \\ \rightarrow |c_{ks} e^{-i\omega_k t}| &= |A_k| = \left( \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\omega_k} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

permitiéndonos obtener el operador de campo eléctrico:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 V}} \sum_k \sum_s \left[ \frac{\hbar\omega_k}{2} \right]^{\frac{1}{2}} [\hat{a}_{ks} \vec{\epsilon}_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + H.C.], \quad (3.13)$$

donde *H.C.* abrevia el término hermitiano conjugado. Podemos transformar la suma sobre  $k$  en una integral al hacer que las dimensiones de la caja tiendan a infinito, transformando nuestro operador en uno más general:

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_s \int dk^3 \left[ \frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0(2\pi^3)} \right]^{\frac{1}{2}} [\hat{a}(\vec{k}, s) \vec{\epsilon}_{ks} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + H.C.]. \quad (3.14)$$

## 3.2. Cuantización en medios

Los medios ópticos pueden clasificarse como isotrópicos o anisotrópicos. Al trabajar con medios, ya sea anisotrópicos o isotrópicos, vamos a tener propiedades como la disipación (pérdida de energía por el medio) y dispersión (comportamiento de la onda dependiente de la frecuencia en el medio). Aún no existe una descripción formal totalmente consistente de ondas electromagnéticas (cuantizadas) para medios con disipación, en este trabajo **despreciaremos** los efectos de disipación en los medios.

### 3.2.1. Medio isotrópico

Un medio isotrópico lineal es aquel donde la respuesta del material no depende de la orientación de este, para este tipo de materiales se cumplen las relaciones:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.15)$$

donde  $\epsilon$  y  $\mu$  se comportan como constantes (respecto a la posición) dentro del material. Comúnmente vamos a trabajar con materiales que tienen una respuesta magnética muy baja, esto nos permite considerar  $\mu \simeq \mu_0$  lo que lleva directamente a que el índice de refracción sea  $\eta = \sqrt{\mu_0 \epsilon}$ . Nuestro campo eléctrico tendrá nuevamente la forma de un conjunto de osciladores armónicos, pero esta vez su normalización será diferente, pues la energía de cada modo se da por la relación:

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \int_V [\epsilon_0 \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{H} \cdot \vec{B}] dV. \quad (3.16)$$

Obtenemos directamente que nuestro campo eléctrico vendrá de la forma:

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \sum_s \int dk^3 \left[ \frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 \eta^2 (2\pi^3)} \right]^{\frac{1}{2}} [\hat{a}(\vec{k}, s) \epsilon_{ks} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + H.C.]. \quad (3.17)$$

### 3.2.2. Medio anisotrópico

Un medio anisotrópico es aquel donde la respuesta del material dependerá de la orientación de este. Como vimos en el capítulo anterior la respuesta del material depende directamente de la permitividad eléctrica. Para un medio anisotrópico tendremos que la permitividad se comporta como un tensor ( $\epsilon \rightarrow [\epsilon] = \epsilon_{ij}$ ). Al trabajar con este tensor es conveniente montarnos en el sistema de los ejes principales, en este sistema se cumple que:

$$[\epsilon] = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{vmatrix}.$$

A lo largo de este trabajo estaremos usando medios anisotrópicos uniaxiales. Un medio es uniaxial cuando existe una dirección privilegiada que llamaremos eje óptico. En este tipo de medios el tensor de permitividad eléctrica tiene la forma:

$$[\epsilon] = \begin{vmatrix} \epsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_o \end{vmatrix}.$$

cuando el eje óptico coincide con el eje  $Z$  ( $\hat{e}_3$ ).

A un medio óptico anisotrópico se le llama birrefringente. La terminología proviene del hecho de que cuando una onda no polarizada ingresa a un medio birrefringente esta se descompone en dos ondas, fácilmente identificables a través de la relación de dispersión para cristales uniaxiales:

$$\left(\frac{k_x^2}{\eta_o} + \frac{k_y^2}{\eta_o} + \frac{k_z^2}{\eta_o} - \frac{\omega^2}{c}\right) \left(\frac{k_x^2}{\eta_e} + \frac{k_y^2}{\eta_e} + \frac{k_z^2}{\eta_o} - \frac{\omega^2}{c}\right) = 0, \quad (3.18)$$

donde  $\eta_o$ ,  $\eta_e$  son los índices de refracción ordinario y extraordinario respectivamente, profundizaremos en ellos más adelante. La onda llamada ordinaria cumple con la relación dada por el primer paréntesis; esta onda tiene una polarización perpendicular al plano formado por el eje óptico del cristal y el vector de propagación  $\vec{k}$  (plano principal). Un haz ordinario se comportará como si estuviera en un medio isótropico y su operador de campo eléctrico viene dado por la Ec. (3.17).

A su vez la onda llamada extraordinaria cumple con la relación dada por el segundo paréntesis. La polarización de la onda extraordinaria se encuentra sobre el plano principal. Para realizar la descripción de esta onda, que es más complicada que la anterior, tendremos que normalizarla. Para poder normalizar la onda extraordinaria es necesario mostrar el comportamiento de su vector de desplazamiento y campo eléctrico. Para una onda plana obtenemos directamente de las ecuaciones de Maxwell en medios: [7]

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(E)} &= \left[ \frac{1}{\epsilon_e} \vec{k}^{(E)} \left( \hat{e}_3 \cdot \vec{k}^{(E)} \right) - \frac{\mu\omega^2}{c^2} \hat{e}_3 \right] \mathcal{E}^{(E)} e^{i(\vec{k}^{(E)} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{H}^{(E)} &= \frac{1}{\mu c} \left[ i \vec{e}_3 \times \vec{k}^{(E)} \right] \mathcal{E}^{(E)} e^{i(\vec{k}^{(E)} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

en donde tomamos a  $\hat{e}_3$  como la dirección del eje óptico,  $\mathcal{E}^{(E)}$  es proporcional a la amplitud del campo. Mientras que el vector de desplazamiento,  $\vec{D}^{(E)}$  resulta de la igualdad  $D_j^{(E)} = \epsilon_{jk} E_k^{(E)}$ . Una vez determinadas estas relaciones usaremos la Ec. (3.16) para normalizar nuestro campo, obteniendo un campo eléctrico de la forma:

$$\vec{E}^{(E)} = \left[ \frac{1}{\epsilon_e} \left[ k_z^{(E)2} - \mu \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \hat{e}_3 - \frac{1}{\epsilon_e} k_z^{(E)} \vec{k}_\perp^{(E)} \right] \mathcal{E}^{(E)} e^{i(\vec{k}^{(E)} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (3.20)$$

$$|\mathcal{E}^{(E)}|^2 = (2\hbar\omega) \cdot \left[ \left( |\vec{k}_\perp|^2 + \frac{\epsilon^e}{\epsilon} |\vec{k}_z|^2 + \frac{\epsilon^e \mu \omega^2}{c^2} \right) \left( \frac{\mu \omega^2}{c^2} + \frac{1}{\epsilon} |\vec{k}_z|^2 \right) \cdot V_c \right]^{-1}. \quad (3.21)$$

Vamos a mostrar algunas de las propiedades que poseen los medios birrefringentes, con el objetivo de poder profundizar en lo que sucede con el campo eléctrico dentro de estos.

### 3.2.3. Índice de refracción

Aunque la onda ordinaria dentro del medio anisotrópico se comportará como si estuviera en un medio isotrópico, a la onda extraordinaria le corresponderá un índice de refracción que es función del ángulo entre el eje óptico y el vector de propagación ( $\theta$ ). Este ángulo se determina a partir de la relación [8] :

$$\eta^e(\theta, \omega) = \left[ \frac{(\eta_e \eta_o)^2}{\eta_e^2 \cos^2 \theta + \eta_o^2 \sin^2 \theta} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

donde  $\eta_e$  y  $\eta_o$  se conocen como los índices de refracción principales y coinciden con el índice de refracción sobre el eje óptico y los ejes perpendiculares al óptico respectivamente. Esta última ecuación nos determina dos propiedades importantes del índice de refracción extraordinario:

1. El índice de refracción no presenta dependencia del ángulo azimutal<sup>1</sup>.
2. El índice de refracción extraordinario estará representado por un elipsoide de rotación (con eje de rotación en el eje óptico) mientras que el ordinario una esfera. Estos dos objetos geométricos se cruzarán sobre el eje óptico.

Se conoce como birrefringencia a la diferencia entre los índices de refracción principales  $\Delta\eta$ . Esto nos permite definir a nuestros medios como positivo si se cumple que  $\eta_o > \eta_e$  o negativo si  $\eta_o < \eta_e$ .

---

<sup>1</sup>Trabajando en coordenadas esféricas.

### 3.2.4. Propagación al cambiar de medio

Cuando se pasa de un medio a otro existe un cambio en el vector de propagación, al encontrarnos en un medio isotrópico este cambio se determina con la ley de Snell. Cuando nos encontramos en un medio anisotrópico el cambio del vector no puede ser generalizado a una sola ecuación. En estos casos se deben de plantear las ecuaciones de Maxwell y usar las ecuaciones de Fresnel para determinar las condiciones a la frontera [7].

No presentamos la forma general en este trabajo, por razones que veremos en el siguiente capítulo, pero hacemos notar que es importante considerarlo al trabajar con medios birrefringentes en el laboratorio.

### 3.2.5. Campo eléctrico en función de la frecuencia

Cuando trabajamos en el laboratorio resulta más fácil controlar variables del campo eléctrico como su frecuencia y ángulos de incidencia, que manipular el vector de propagación. Resulta conveniente utilizar el cambio de variable  $k_x k_y k_z \rightarrow \omega, \theta, \phi$  que resulta en la transformación de la diferencial:  $d^3k = d\omega d\theta d\phi \det|\mathbb{J}|$ , donde  $\mathbb{J}$  es la matriz jacobiana. Al describir la onda extraordinaria en coordenadas esféricas, tenemos:

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\eta_e \omega}{c} \text{sen}\theta \cos\phi, \\ k_y &= \frac{\eta_e \omega}{c} \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \\ k_z &= \frac{\eta_o \omega}{c} \cos\theta. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Esto nos lleva a que la matriz jacobiana tenga la forma:

$$[\mathbb{J}] = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial \omega} & \frac{\partial k_y}{\partial \omega} & \frac{\partial k_z}{\partial \omega} \\ \frac{\partial k_x}{\partial \theta} & \frac{\partial k_y}{\partial \theta} & \frac{\partial k_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial k_x}{\partial \phi} & \frac{\partial k_y}{\partial \phi} & \frac{\partial k_z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \frac{(\eta_o)(\eta_e^2)}{c^3} \omega^2 \text{sen}\theta$$

haciendo que la contribución al operador de campo eléctrico de los modos extraordinarios tenga la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}}_d(\vec{r}, t) &= \sum_s \int d\omega \int d\theta \int d\phi \frac{(\eta_o)(\eta_e^2)}{c^3} l(\omega) \omega^2 \text{sen}\theta e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega * t]} \\ &\cdot \vec{\epsilon}_{s\omega} \hat{a}(\omega_\mu, \theta, \phi, s) + H.C., \end{aligned} \quad (3.24)$$

puede ser comparada con la Ec. 3.17. El factor de normalización  $l(\omega_k)$  garantiza que la energía de cada fotón corresponda a la contribución  $\varepsilon_k = \hbar\omega_k$

$$l(\omega_k) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0\eta^2(2\pi^3)}}.$$

Suponiendo que cada detector es sensible únicamente a radiación incidente a una cierta orientación dada por los ángulos  $\theta = \theta_0$  y  $\phi = \phi_0$ . Matemáticamente corresponderá a aplicar diferentes deltas de Dirac. La Ec. (3.24) se transformará en:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}}_d(\vec{r}, t) &= \sum_s \int d\omega \int d\theta \int d\phi \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \frac{(\eta_o)(\eta_e^2)}{c^3} \omega^2 \text{sen}\theta \\ &\cdot l(\omega) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\cdot t]} \vec{\epsilon}_{s\omega} \hat{a}(\omega, \theta, \phi, s) + H.C. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Al llevar acabo la integración sobre  $\theta$  y  $\phi$  con ayuda de las deltas de Dirac, obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}}_d(\vec{r}, t) &= \sum_s \int d\omega \frac{(\eta_o)(\eta_e^2)}{c^3} \omega^2 l(\omega_\mu) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_\mu\cdot t]} \\ &\cdot \vec{\epsilon}_{s\omega} \hat{a}(\omega_\mu, \theta, \phi, s) + H.C. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En las ecuaciones (3.25), (3.26) llamamos  $\hat{\vec{E}}_d(\vec{r}, t)$  al campo que percibe el detector, que es un caso particular del campo dado en Ec. 3.24. De ahora en adelante tomaremos la notación  $\hat{\vec{E}}_d(\vec{r}, t) \rightarrow \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t)$ .



## Capítulo 4

# Óptica Cuántica No Lineal

En los capítulos anteriores encontramos la forma de un campo electromagnético cuantizado (en vacío y medios dieléctricos<sup>1</sup>) y determinamos el comportamiento clásico de un campo en un medio no lineal.

El paso natural a seguir es el sustituir los campos eléctricos (con sus términos no lineales) y magnéticos en el hamiltoniano por sus correspondientes operadores.

Al igual que en el segundo capítulo existirán diferentes procesos asociados a diferentes términos de nuestra expansión en serie de la polarización. A lo largo de este capítulo solo consideraremos procesos correspondientes al primer término no lineal de la expansión en serie, estos procesos corresponden a la combinación de tres operadores de campo eléctrico. En este capítulo determinaremos la forma analítica para las dos combinaciones que presentan mayor interés para este trabajo, que resultan en los procesos de conversión paramétrica ascendente y descendente.

### 4.1. Conversión paramétrica descendente

Burdamente podemos considerar el proceso de conversión paramétrica descendente (PDC por sus siglas en inglés) como un proceso cuántico en el que un fotón incide sobre un cristal no lineal y se “divide” en dos fotones que presentarán propiedades poco intuitivas.

Este proceso fue estudiado en el laboratorio por Burnham y Weinberg en 1970[9], mientras que el análisis teórico fue hecho en 1968 por Klyshko[10].

---

<sup>1</sup>Como ya mencionamos antes es una aproximación pues el problema es no trivial, y funciona bajo ciertas condiciones, entre otras aquellas en las que la absorción del medio es despreciable.

Restringiéndonos a términos de primer orden tenemos que el hamiltoniano de este proceso, considerando un bombeo clásico, es de la forma: [5]

$$\hat{H} = \sum_{j=i,s} \hbar\omega_j \left( \hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) + \hbar g [A_{p0} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_s^\dagger e^{-i\omega_0 t}] + H.C.. \quad (4.1)$$

El primer término es el del campo electromagnético libre en la base del número de fotones mientras que el segundo corresponde al término de nuestro interés. En este término,  $g$  es una mitad de la energía de acoplamiento entre el campo electromagnético y el medio no lineal. Trabajaremos en el esquema de interacción tomando la evolución de los estados del campo determinada por el hamiltoniano libre y la interacción lineal con el medio y la evolución de los operadores determinada por la contribución de segundo orden del operador de desplazamiento  $\hat{D}^{(2)}$ . Tendremos entonces que el hamiltoniano efectivo  $\hat{H}_i$  correspondiente a este proceso tiene la forma:

$$\begin{aligned} \hat{H}_i &= \int dV \left[ \frac{1}{2} \hat{E}(\vec{r}, t) \cdot \hat{D}^{(2)}(\vec{r}, t) \right] \\ &= \int dV \frac{\chi^{(2)}}{2} \hat{E}_p^{(+)}(\vec{r}, t) \hat{E}_i^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}_s^{(-)}(\vec{r}, t) \\ &+ \int dV \frac{\chi^{(2)}}{2} \hat{E}_p^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}_i^{(+)}(\vec{r}, t) \hat{E}_s^{(+)}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

En esta ecuación adoptamos una nueva notación de el campo eléctrico. De ahora en adelante:

$$\begin{aligned} \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) &= \sum_s \int d\omega_\mu \det[\mathbb{J}] l(\omega_\mu) e^{i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_\mu \cdot t]} \\ &\cdot \vec{\epsilon}_{s\omega} \hat{a}(\omega_\mu, \theta, \phi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Además se cumple que  $[\hat{E}^{(+)}]^\dagger = \hat{E}^{(-)}$ .

Notamos que el segundo término en la integral de la Ec. 4.2 es justamente el hermitiano conjugado del primer término. Adoptando la misma notación podemos definir:

$$\hat{H}_i = \hat{H}^{(+)} + \hat{H}^{(-)}. \quad (4.4)$$

Los términos de  $\hat{H}^{(-)}$  se asocian al proceso inverso al de PDC, conversión paramétrica ascendente (PUC). Más adelante analizaremos las propiedades del proceso de PUC. Los diferentes subíndices en los campos eléctricos

del hamiltoniano denotan el modo en el que se encuentra el campo. Estos subíndices,  $p$ ,  $i$ ,  $s$ , corresponden a los fotones bombeo, acompañante y señal respectivamente.

Físicamente nuestro modo bombeo corresponde al haz incidente en nuestro cristal, el cual se puede aproximar por un haz clásico. Los modos señal y acompañante corresponden a la pareja de fotones generados. Podemos mostrar que tanto en el hamiltoniano efectivo<sup>2</sup> como en el definido por la Ec. (4.1) se cumple  $[\hat{n}_i - \hat{n}_s, H] = 0$ , indicando que se conserva la diferencia entre el número de fotones en el modo  $i$  con el modo  $s$ , por lo que la emisión siempre ocurre en pares.

#### 4.1.1. Operador de evolución temporal

El estado de la radiación producida está dado en términos del operador de evolución temporal  $\hat{U}$  y del estado inicial  $|\Psi_0\rangle$  como:

$$|\Psi_{sal}(t)\rangle = \hat{U}|\Psi_0\rangle. \quad (4.5)$$

Truncando a primer el desarrollo en serie el operador de evolución, que resulta de la ecuación de Schrödinger, obtenemos:

$$\hat{U} \simeq 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t'). \quad (4.6)$$

#### 4.1.2. Forma de la función de onda

Sustituyendo las expresiones del campo eléctrico y del hamiltoniano en las Ecs. (4.5-4.6) obtendremos nuestra función de salida que tendrá la forma:

$$\begin{aligned} |\Psi_{PDC}(t)\rangle = |\Psi_0\rangle &+ \frac{V}{i\hbar} \int_0^{t_p} \int d\omega_s \det[\mathbb{J}_s] \int d\omega_i \det[\mathbb{J}_i] \left[\frac{1}{V}\right] \int dV \frac{\chi^{(2)}}{2} \\ &\cdot l(\omega_s)l(\omega_i) \int d\omega_p A_p \alpha(\vec{r}, \omega_p) e^{i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r} - \Delta\omega\cdot t} \\ &\cdot \hat{a}^\dagger(\omega_s, \theta_s, \phi_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i, \theta_i, \phi_i) |\Psi_0\rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde usamos las relaciones  $\Delta\vec{k} = \vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p$  y  $\Delta\omega = \omega_s + \omega_i - \omega_p$ . El tiempo entre eventos es mucho mayor que el tiempo de interacción, esto nos

---

<sup>2</sup>De ahora en adelante lo nombraremos como Hamiltoniano y se denotará como  $\hat{H} = \hat{H}_i$

permite hacer la aproximación de  $t_p \rightarrow \infty$ . Al notar que el único elemento dependiente del tiempo es el que contiene  $\Delta\omega$  obtenemos

$$\int_0^\infty e^{-i\Delta\omega \cdot t} dt = 2\pi\delta(\omega_p - \omega_i - \omega_s),$$

este factor garantiza conservación de energía.

Se puede resolver la integral sobre el volumen de la Ec. 4.7. suponiendo que el haz de bombeo corresponde a un haz gaussiano pulsado, esta integral resultará en una función  $f(\omega_s, \omega_i)$ , con la forma :

$$\begin{aligned} f(\omega_s, \omega_i) &= \frac{\chi^{(2)}}{2V} \int dV \det[\mathbb{J}_s] \det[\mathbb{J}_i] l(\omega_s) l(\omega_i) A_p \alpha(\vec{r}, \omega_s + \omega_i) e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}}, \\ &= \kappa_\lambda(\omega_s) \kappa_\chi(\omega_i) \phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \Xi(\omega_p), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde dividimos nuestra función  $f(\omega_s, \omega_i)$  en diferentes partes:

1. Términos polinomiales  $\kappa_\lambda(\omega_\mu)$ ,  $\kappa_\chi(\omega_\mu)$ . Los subíndices  $\chi$ ,  $\lambda = e, o$  dependiendo de la polarización del modo (extraordinaria y ordinaria, respectivamente)

Para modos extraordinarios:

$$\kappa(\omega_\mu)_e := \frac{(\eta_o)(\eta_e^2)}{c^3} \omega_\mu^2 l(\omega_\mu). \quad (4.9)$$

Para modos ordinarios:

$$\kappa(\omega_\mu)_o := \frac{(\eta_o^3)}{c^3} \omega_\mu^2 l(\omega_\mu). \quad (4.10)$$

2. Término espectral

$$\Xi(\omega_p) := \exp\left[-\frac{(\nu_p)^2}{\sigma^2}\right] = \exp\left[-\frac{(\nu_i + \nu_j)^2}{\sigma^2}\right]. \quad (4.11)$$

3. Función de empatamiento de fases

$$\begin{aligned} \phi_{PDC}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &\equiv \frac{1}{V} \int dV \frac{\chi^{(2)}}{2} A_p \alpha(\vec{r}) e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ &= \text{sinc}\left[k_{ric} \frac{L}{2}\right] \exp\left[-\frac{1}{4}(W_o^2 \Delta\vec{k}_\perp^2)\right] \exp\left[-ik_{ric} \frac{L}{2}\right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde definimos la nueva variable  $k_{ric} \equiv (|\Delta k_{\perp}|^2 - 2k_p \Delta k_{\parallel})(2k_p)^{-1}$ . Tomando  $\Delta k_{\parallel}$ ,  $\Delta k_{\perp}$  como las componentes paralela y perpendicular al haz bombeo del desempatamiento de fase, respectivamente. Además de  $\nu_n \equiv \omega_n - \omega_{n0}$ , donde  $\omega_{n0}$  es la frecuencia central del modo  $n$ .

### **Función de Empatamiento de Fases**

Esta función alcanza su máximo cuando  $\Delta \vec{k} = 0$ , que corresponde a la conservación de momento lineal. Hasta ahora tenemos las condiciones de conservación de energía y momento, que se pueden traducir como:

$$\omega_p = \omega_i + \omega_s \quad ; \quad \vec{k}_p = \vec{k}_i + \vec{k}_s. \quad (4.13)$$

En un medio el número de onda esta dado por  $|\vec{k}_{\mu}| = \frac{\eta(\omega_{\mu})\omega_{\mu}}{c}$ . Entonces para un medio isotrópico es imposible cumplir ambas relaciones (Excepto en un medio idealizado sin dispersión *i.e.*  $\eta(\omega) = cte$ ). Así que el proceso se debe realizar en un medio anisotrópico. En medios birrefringentes cuando nos encontramos en un cristal uniaxial negativo, como es el caso del BBO<sup>3</sup>, llamaremos tipo I a los procesos donde el haz de bombeo es extraordinario y los fotones generados son ordinarios mientras que conoceremos como tipo II a los procesos donde alguno de los fotones generados es a su vez extraordinario. En este trabajo nos enfocaremos en fuentes PDC tipo I.

### **Función de Amplitud Conjunta**

El estado de dos fotones se puede escribir del siguiente modo:

$$|\Psi_{PDC}(t)\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{V}{i\hbar} \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^{\dagger}(\omega_s) \hat{a}^{\dagger}(\omega_i) |\Psi_0\rangle \quad (4.14)$$

donde la función  $f(\omega_s, \omega_i)$ , definida en la sección anterior, será justamente nuestra función de amplitud conjunta<sup>4</sup>. La función  $|f(\omega_s, \omega_i)|^2$  se puede interpretar como una distribución de probabilidad siempre y cuando este debidamente normalizada

$$\int d\omega_s \int d\omega_i |f(\omega_s, \omega_i)|^2 = 1$$

<sup>3</sup>Cristal no lineal formado por Beta-Bario-Borato, mostraremos sus propiedades más adelante.

<sup>4</sup>Es importante notar nuestro cambio de notación ahora  $\hat{a}(\omega_{\mu}) = \hat{a}(\omega_{\mu}, \theta_{\mu}, \phi_{\mu}, s)$ .

. Estudiaremos esta función más a fondo.

Una de las propiedades que mencionábamos al principio del capítulo como poco intuitivas de nuestro nuevo estado es que la pareja de fotones mostrará enredamiento cuántico. Matemáticamente que una partícula presente enredamiento con otra significa que su estado no puede ser descrito como el producto de estados singulares (o independientes), para cada una de las partículas.

Si la función  $f(\omega_s, \omega_i)$  no puede ser separada como  $S(\omega_s)I(\omega_i)$  entonces el hacer una medición sobre alguno de los modos, digamos el señal, nos determinará (instantáneamente) alguna propiedad del modo acompañante, aún sin realizar la medición directamente sobre este último.

Por otro lado si las frecuencias entre los fotones no presentan correlación, *i.e.*, si se puede hacer la separación  $f(\omega_s, \omega_i) = S(\omega_s)I(\omega_i)$ , esta condición implica que podemos escribir el estado como:

$$|\Psi_{PDC}(t)\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int d\omega_s S(\omega_s) \hat{a}^\dagger(\omega_s) \int d\omega_i I(\omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_i) |\Psi_0\rangle. \quad (4.15)$$

Las parejas de fotones descritas por la Ec. 4.15 no muestran enredamiento cuántico (en la frecuencia) y realizar una medición sobre un modo no nos dará información alguna sobre el otro. Según la forma de la función de amplitud conjunta tendremos diferentes clases de correlación, cuantificadas por el índice de correlación. El índice de correlación (clásico) está definido por:

$$\rho_{is} = \frac{\mu_{is}}{\sigma_i \sigma_s} = \rho_{si}, \quad (4.16)$$

donde  $\mu_{is}$  es la covarianza asociada a la distribución de probabilidad  $|f(\omega_s, \omega_i)|^2$ , y  $\sigma_n$  representará la desviación estándar asociada a cada una de las distribuciones marginales. Es decir, si el promedio de la frecuencia se denota por  $\bar{\omega}_n$ , la desviación estándar correspondiente es:

$$\sigma_n^2 = \int d\omega_s \int d\omega_i (\bar{\omega}_n - \omega_n)^2 |f(\omega_s, \omega_i)|^2,$$

el subíndice  $n$  denota al modo señal o acompañante. Finalmente, la covarianza conjunta será:

$$\mu_{si} = \int d\omega_s \int d\omega_i (\bar{\omega}_i - \omega_i)(\bar{\omega}_s - \omega_s) |f(\omega_s, \omega_i)|^2.$$

## 4.2. Conversión paramétrica ascendente

Como mostramos en la sección anterior, el proceso de conversión paramétrica ascendente (PUC por sus siglas en inglés) es el proceso recíproco al de PDC. En este proceso dos fotones (no necesariamente enredados) al incidir por un medio no lineal se aniquilan, resultando en la generación de un nuevo fotón cumpliendo con la conservación de energía y momento.

Tenemos que la parte no hermitiana del hamiltoniano correspondiente a este proceso tendrá la forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int dV \frac{\chi^{(2)}}{2} \hat{E}_g^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}_e^{(+)}(\vec{r}, t) \hat{E}_{s2}^{(+)}(\vec{r}, t). \quad (4.17)$$

En este caso los índices  $e$ ,  $s2$ ,  $g$  corresponderán a los modos escolta, señal y generado, respectivamente. Es directo de la forma del hamiltoniano notar que se aniquilarán fotones individuales en cada uno de los modos escolta y señal dando paso al generado. Nuevamente consideraremos uno de los haces (el haz escolta) se considera clásico y lo describiremos por la Ec. (2.19).

Las condiciones de energía y momento lineal se traducirán como:

$$\omega_e + \omega_{s2} = \omega_g \quad ; \quad \vec{k}_e + \vec{k}_{s2} = \vec{k}_g. \quad (4.18)$$

La integral sobre el volumen tendrá una forma similar a la de la sección anterior obteniendo entonces:

$$|\Psi_{PUC}(t)\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{V}{i\hbar} \int d\omega_{s2} \int d\omega_g g(\omega_g, \omega_{s2}) \hat{a}^\dagger(\omega_g) \hat{a}(\omega_{s2}) |\Psi_0\rangle, \quad (4.19)$$

donde:

$$g(\omega_g, \omega_{s2}) := \kappa(\omega_{s2}) \kappa(\omega_g) \phi(\vec{k}_{s2}, \vec{k}_g) \Xi(\omega_e). \quad (4.20)$$

La Ec. (4.18) se ha escrito en términos de las siguientes definiciones:

$$\Xi(\omega_e) := \exp\left[-\frac{(\nu_e)^2}{\sigma^2}\right] = \exp\left[-\frac{(\nu_g - \nu_{s2})^2}{\sigma^2}\right], \quad (4.21)$$

$$\phi_{PUC}(\vec{k}_{s2}, \vec{k}_g) \equiv \text{sinc}\left[k_{ric}^u \frac{L_u}{2}\right] \exp\left[-\frac{1}{4}(W_{uo}^2 \Delta k_{u\perp}^2)\right] \exp\left[-ik_{ric}^u \frac{L_u}{2}\right], \quad (4.22)$$

donde  $\Delta k_{u\parallel}$ ,  $\Delta k_{u\perp}$  como las componentes del desempatamiento de fase, paralela y perpendicular al haz escolta, respectivamente, además  $k_{ric}^u \equiv (|\Delta k_{u\perp}|^2 - 2k_e \Delta k_{u\parallel})(2k_e)^{-1}$ ,  $L_u$  corresponde a la longitud del cristal y  $W_{uo}$  es la cintura del haz escolta. Además de  $\nu_n \equiv \omega_n - \omega_{n0}$ , donde  $\omega_{n0}$  es la frecuencia central del modo  $n$ .

## Capítulo 5

# Simulación Numérica

En este capítulo estudiaremos analíticamente y numéricamente un sistema físico constituido por una fuente de parejas de fotones, basada en el proceso de conversión paramétrica descendente (PDC), seguida de un cristal no lineal donde se efectúe conversión paramétrica ascendente (PUC), con el fotón señal del primer proceso junto con un haz láser intenso, que denominaremos haz escolta. (Fig. 5.1)

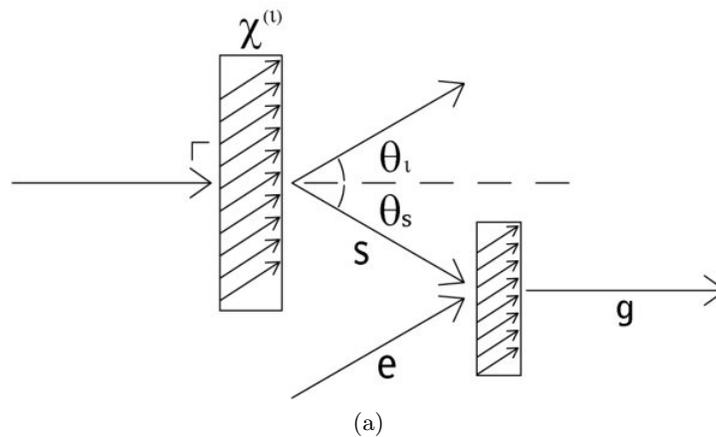


Figura 5.1: Arreglo del sistema. Los índices e, s, g representan los fotones escolta, señal y generado, respectivamente.

Primero obtenemos la función de onda de la pareja de fotones, por el

capítulo anterior sabemos que para el proceso de PDC se cumple:

$$|\Psi_{PDC}\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{V}{i\hbar} \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_s, \theta_s, \phi_s) \hat{a}^\dagger(\omega_i, \theta_i, \phi_i) |\Psi_0\rangle. \quad (5.1)$$

Del mismo modo podemos obtener la función de onda del fotón resultante de convertir el fotón señal junto con el haz escolta por conversión ascendente:

$$|\Psi_{PUC}\rangle = |\Psi_0\rangle + \frac{V'}{i\hbar} \int d\omega_{s'} \int d\omega_g g(\omega_{s'}, \omega_g) \hat{a}^\dagger(\omega_g, \theta_g, \phi_g) \hat{a}(\omega_{s'}, \theta_{s'}, \phi_{s'}) |\Psi_0\rangle. \quad (5.2)$$

El modelo que describimos requiere que exista una relación entre estos dos procesos, para lograr esto supondremos que la función de onda de entrada en el proceso de PUC es la determinada por el proceso de PDC ( $|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi_{PDC}\rangle$ ).

Suponemos que el modo que se aniquila en el segundo cristal corresponde al modo del fotón señal ( $\vec{k}_s = \vec{k}_{s2}$ ). Usando, además el hecho de que  $\hat{a}(\vec{k}_s) \hat{a}^\dagger(\vec{k}_{s2}) = \delta(\vec{k}_s - \vec{k}_{s2}) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_{s2})$  vamos a encontrar la función de onda<sup>1</sup>:

$$|\Psi_{PUC}\rangle = |\Psi_{PDC}\rangle + \frac{V}{i\hbar} \cdot \frac{V'}{i\hbar} \int d\omega_i \int d\omega_g G(\omega_g, \omega_i) \hat{a}^\dagger(\omega_g, \theta_g, \phi_g) \hat{a}^\dagger(\omega_i, \theta_i, \phi_i) |\Psi_{PDC}\rangle \quad (5.3)$$

donde  $G(\omega_g, \omega_i)$  será la función de amplitud conjunta entre el fotón acompañante y el generado, esta función va a tener la forma:

$$G(\omega_g, \omega_i) = \int d\omega_s \phi_{PDC}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \phi_{PUC}(\vec{k}_s, \vec{k}_g) \cdot \kappa_o(\omega_s)^2 \cdot \Xi(\omega_p) \cdot \Xi(\omega_e). \quad (5.4)$$

Notamos que la Ec. (5.3) tiene la misma forma que la amplitud conjunta del proceso de PDC, excepto con el modo  $g$ , en lugar del modo  $s$ . Esto nos permite considerar que según cambiemos las propiedades del segundo proceso podríamos transformar las propiedades de enredamiento en los modos  $i$  y  $g$  con respecto a las propiedades originales en los modos  $i$  y  $s$ . Tendremos entonces un sistema como el mostrado en la Figura 5.1.

Manipular y entender la dependencia de esta función según sus diferentes variables es el problema principal de este trabajo, en particular el manipular

<sup>1</sup>Al aplicar ambos términos al vacío, entonces  $\hat{a}^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}(\vec{k}_s) |0\rangle = 0$ .

la forma de la correlación entre los fotones. Para lograr nuestro objetivo vamos a tener la forma analítica (determinada por la Ec. (5.4) y analizaremos numéricamente el como manipular nuestra función  $G(\omega_g, \omega_i)$ .

Comenzamos por ver las variables del segundo proceso (PUC).

1. Propiedades del haz escolta:

- a) Frecuencia ; central y ancho de banda.
- b) Ángulo de incidencia.
- c) Radio en la cintura.
- d) Estructura espacial y espectral.

2. Elección del material:

- a) Longitud del cristal.
- b) Índice de refracción del cristal.

### 5.0.1. Propiedades del haz escolta

#### Estructura espacial del haz escolta

Para este trabajo supondremos que los dos haces clásicos involucrados ( $e$  y  $p$ ) están descritos por haces gaussianos pulsados (ver Capítulo 2). En este caso, la función de empatamiento de fases está dado por:

$$\phi_{PDC}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \frac{1}{V} \int dV \alpha(\vec{r}) \left[ \frac{\chi^{(2)}}{2} \right] e^{-i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (5.5)$$

donde  $\alpha(\vec{r})$  está dado por (Ec. ( 2.20)):

$$\alpha(\vec{r}) = \frac{1}{1 + \frac{2iz}{k_p W_p^2}} \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{W_p^2 \left( 1 + \frac{2iz}{k_p W_p^2} \right)} \right]. \quad (5.6)$$

Evaluar la integral sobre el volumen nos lleva directamente al primer problema de este arreglo, el sistema de coordenadas que debemos de tomar para describirlo y la geometría apropiada del sistema.

### Sistema de coordenadas del arreglo

Analizando las ventajas y desventajas de cada sistema de coordenadas y geometría escogeremos cual son los más apropiados para describir nuestro arreglo.

El buscar simetría en nuestro arreglo nos lleva a considerar que las caras de los cristales esten fijas y consideraremos que estas apuntan en la misma dirección (Fig. 5.1). Además tiene la ventaja de transformar fácilmente la dirección del haz señal mientras este cambia de un medio a otro. En el segundo capítulo determinamos la forma de un haz gaussiano rotado así que no debería existir un problema por este camino.

Para el proceso de PDC (tipo I) es común elegir un vector de propagación del bombeo cuya dirección es perpendicular a la cara del cristal (permitiéndonos suponer que los lados del cristal perpendiculares a la propagación del haz de bombeo son infinitos), resultando en una función de empataimiento de fases de la forma:

$$\phi_{PDC}(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \text{sinc} \left[ k_{ric} \frac{L_D}{2} \right] \exp \left[ -\frac{1}{4} \left( W_p^2 \Delta \vec{k}_\perp^2 \right) \right] \exp \left[ -ik_{ric} \frac{L}{2} \right], \quad (5.7)$$

que corresponde a la primera integral sobre el volumen de la Ec. (5.4), tomamos el sistema de coordenadas en el que un eje corresponda a la dirección de propagación del bombeo ( $\vec{k}_\parallel$ ) y otro eje a la perpendicular ( $\vec{k}_\perp$ ), además de una longitud del cristal (L) . Volvemos a usar la definición  $k_{ric} \equiv (|\Delta k_\perp|^2 - 2k_p \Delta k_\parallel)(2k_p)^{-1}$ .

Por su parte, en el segundo cristal, el vector de propagación del haz escolta forma un ángulo respecto a la normal del cristal. La función de amplitud conjunta tiene la forma (sin tomar el término de la dependencia temporal):

$$\phi_{PUC}(\vec{k}_s, \vec{k}_g) = \frac{1}{V} \int dV \left[ \frac{\chi^{(2)}}{2} \right] \frac{W_e}{p^2} \exp \left[ -\frac{(\cos[\theta_c]x - \text{sen}[\theta_c]z)^2 + y^2}{2p^2} \right] \cdot e^{i(k_e \cos[\theta_c]z + k_e \text{sen}[\theta_c]x)} e^{i(\vec{k}_g - \vec{k}_s) \cdot \vec{r}}. \quad (5.8)$$

Notamos que el haz presenta a la coordenada  $x$  en la dirección de propagación. Comunmente al momento de resolver esta integral se considera que como el haz escolta no se propaga ni en la dirección  $\hat{x}$  ni en  $\hat{y}$  entonces podemos integrar estos valores en los límites  $(-\infty, \infty)$ , pero como nuestro haz se propaga en esta dirección no podemos hacer una aproximación donde

$\int_0^L dx \rightarrow \int_0^\infty dx^2$ , entonces nuestra función de amplitud conjunta presentará diferentes factores que no la hacen una función que sea tan sencilla de analizar (se trata de funciones de error  $\text{erf}(z)$ ,  $\text{erf}(x)$ ). Este resultado nos indica que esta geometría no permite una descripción sencilla del proceso y por ello buscaremos sistemas donde nuestro haz escolta incida normalmente al cristal.

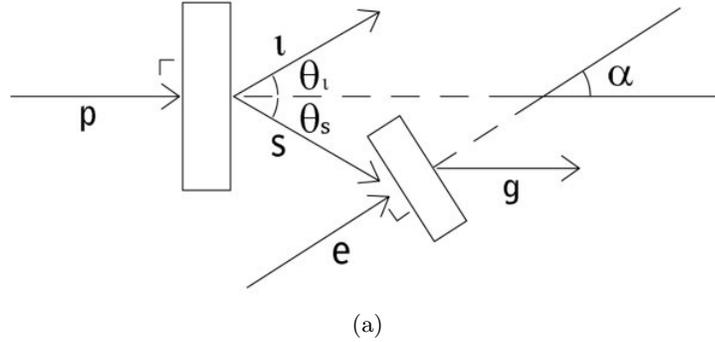


Figura 5.2: Geometría de nuestro sistema donde el haz escolta presenta incidencia normal en el segundo cristal, este segundo cristal puede rotar un ángulo  $\alpha$  respecto a la normal del primero

Para la segunda geometría vamos a suponer que el haz escolta incide normalmente al cristal. Ya que deseamos tener la mayor cantidad de grados de libertad posibles necesitaremos que las normales a nuestros cristales (cristal donde se realiza PDC y cristal donde se realiza PUC) no sean necesariamente paralelas (además de poder seguir controlando el ángulo de corte ( $\theta_c$ )) (Fig. 5.2). Es importante tomar en cuenta la refracción en las interfaces cristal 1 - vacío y vacío cristal 2. Utilizando dos veces la ley de Snell, obtenemos que el ángulo de propagación de  $\theta_s$  se transformará en  $\theta'_s$  según:

$$\theta'_s = \arcsin \left[ \frac{\eta_m}{\eta_2} \text{sen} \left[ \arcsin \left[ \frac{\eta_1}{\eta_m} \text{sen}[\theta_s] + \alpha \right] \right] \right], \quad (5.9)$$

donde  $\theta'_s$  corresponde al ángulo en el que se propagará el fotón señal a lo largo del segundo cristal, mientras que  $\theta_s$  es el ángulo que forma respecto a la normal del primer cristal, finalmente  $\alpha$  es el ángulo entre las normales de los cristales, notese que las normales a los cristales corresponden a la

<sup>2</sup>Deberíamos de restringirnos a una razón entre la longitud del cristal y el ángulo de incidencia tal que el haz no alcance una frontera del cristal antes de recorrer la longitud  $L$ .

dirección de propagación del modo  $p$  para el primer cristal y la dirección de propagación del modo escolta  $e$  para el segundo cristal (Fig. 5.2).

Los índices de refracción  $\eta_1, \eta_m, \eta_2$  corresponden a los índices del primer cristal, medio entre cristales y segundo cristal, respectivamente. Ya determinado el ángulo de propagación del haz señal obtenemos nuestra función de empataimiento de fases:

$$\phi_{PUC}(\vec{k}_s, \vec{k}_g) = \text{sinc} \left[ k_{ric} \frac{L'}{2} \right] \exp \left[ -\frac{1}{4} (W_{puo}^2 \Delta \vec{k}_\perp^2) \right] \exp[-ik_{ric} \frac{L}{2}]. \quad (5.10)$$

Nos encontramos que  $k_{ric}^u$  y  $k_{u\perp}$  están determinados en el sistema de coordenadas del haz escolta, i.e.  $k_{u\perp}, k_{u\parallel}$  corresponden a la componente perpendicular y paralela al haz escolta, respectivamente. Este resultado nos recomienda proponer un arreglo donde el haz escolta no solo incida normalmente al cristal, sino que también montemos los ejes de coordenadas sobre el haz escolta. Suponemos que el proceso de PUC es de tipo I, es decir dos modos escolta y señal están polarizados ordinariamente y el modo generado está polarizado extraordinariamente.

Tomando incidencia normal en nuestro haz escolta y bombeo con respecto a la cara del cristal correspondiente, tenemos que la función  $G(\omega_g, \omega_i)$  se transformará en:

$$\begin{aligned} G(\omega_g, \omega_i) = \int d\omega_s & \quad \text{sinc} \left[ k_{ric}^d \frac{L_d}{2} \right] \exp[-\frac{1}{4} (\Delta \vec{k}_{d\perp}) W_p^2] \exp[-ik_{ric}^d \frac{L_d}{2}] \\ & \cdot \text{sinc} \left[ k_{ric}^u \frac{L_u}{2} \right] \exp[-\frac{1}{4} (\Delta \vec{k}_{u\perp})^2 W_e^2] \exp[-ik_{ric}^u \frac{L_u}{2}] \\ & \cdot \kappa_o(\omega_s)^2 \cdot \Xi(\omega_p) \cdot \Xi(\omega_e), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde los subíndices  $d, u$  denotan que corresponde al proceso de PDC o PUC, respectivamente.

### Estructura espectral del haz escolta

Consideraremos nuestro haz escolta como pulsado. El ancho espectral  $\sigma$  o duración temporal constituye un grado de libertad que podemos controlar. La relación ente el ancho espectral ( $\sigma$ ) y duración temporal ( $\Delta\tau$ )

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\ln(2)}} \cdot \left[ \frac{2 \ln 2}{\pi \Delta\tau} \right]. \quad (5.12)$$

## Radio en la cintura del haz escolta

El radio en la cintura del haz escolta es determinado por la constante  $W_o$  y su dependencia explicita en la integral se encuentra en la función:

$$\exp \left[ -\frac{1}{4} \left( W_o \Delta \vec{k}'_{\perp} \right)^2 \right]. \quad (5.13)$$

Esta exponencial negativa acotará el rango espectral en el que  $G(\omega_g, \omega_i)$  tiene valores apreciables. La dependencia espectral de la función  $\kappa_{\lambda}(\omega)$  es típicamente lenta y puede ser despreciada. La consideraremos como evaluada en la frecuencia central.

### 5.0.2. Elección del cristal

#### Longitud del cristal

En este trabajo nos enfocaremos en estudiar como al elegir adecuadamente las variables del segundo proceso, podemos obtener propiedades de enredamiento  $i-g$  optimizadas, para una cierta configuración de la fuente PDC. Es decir, mantendremos las variables correspondientes al primer proceso fijas. La longitud del cristal se encuentra explícitamente en la función  $\text{sinc}[k_{ric}^u \frac{L_u}{2}]$  y en la fase  $\exp[-ik_{ric}^u \frac{L_u}{2}]$ . Por la forma de la función  $\text{sinc}[x]$  al aumentar la longitud, se vuelve más angosta y se crearán oscilaciones más rapidas, sin embargo el máximo de la función permanecerá en la misma posición ( $k_{ric}^u = 0$ ) y mantendrá su valor unitario. Por lo tanto aunque el máximo de la función  $G(\omega_g, \omega_i)$  será independiente de la longitud del cristal (excluyendo el caso límite  $L_u = 0$ ), la función será más angosta al aumentar la longitud del cristal.

#### Índice de refracción

Los índices de refracción estarán determinados por las ecuaciones de Sellmeier. Estas son ecuaciones empíricas que determinan el índice de refracción de un material en función de la frecuencia de la luz. A través de la relación de dispersión  $k(\omega) = \frac{\eta(\omega)\omega}{c}$  las ecuaciones de Sellmeier determinan la dependencia espectral de los números de onda.

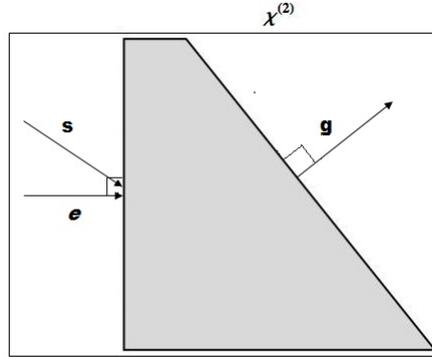
Para este trabajo en particular consideraremos que los cristales no lineales son de BBO (beta-bario borato). El índice de refracción ordinario y extraordinario se puede determinar por las ecuaciones [8]:

$$\begin{aligned}\eta_o(\omega)^2 &= 2,7359 + \frac{0,01878}{\lambda^2 - 0,01822} - 0,01354\lambda^2, \\ \eta_e(\omega)^2 &= 2,3753 + \frac{0,01224}{\lambda^2 - 0,01667} - 0,01516\lambda^2.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Estas ecuaciones son válidas en el rango espectral entre  $\lambda \simeq 252 \mu m$  hasta  $\lambda \simeq 2000 \mu m$ .

### Corte del cristal

El ángulo de corte del cristal se discutirá más adelante en el trabajo. En esta sección consideraremos un nuevo corte al cristal de modo que se evite la refracción del fotón generado en la interface cristal2 - vacío. La idea es construir un cristal con un perfil como el mostrado en la Fig. 5.3. Asegurándonos que el corte sea tal que el vector de propagación del modo  $g$  sea perpendicular al plano paralelo a la cara de salida del cristal.



(a)

Figura 5.3: Forma propuesta para el nuevo corte del cristal. El vector de propagación del haz generado normal a la cara de salida del cristal, evitando así efectos de refracción

Hacemos notar que en nuestro cálculo no tenemos en cuenta la forma propuesta en la Fig. 5.3, sino suponemos un paralelepípedo de ancho  $L_u$ .

## 5.1. Simulación numérica

A continuación procederemos a simular numéricamente la función  $G(\omega_g, \omega_i)$ . Nos enfocaremos en la dependencia de esta función en los diversos parámetros experimentales (propiedades del cristal, propiedades del haz escolta). Usaremos los resultados para entender como se deben elegir estos parámetros y las diferentes aproximaciones que podemos hacer para poder construir una solución analítica.

### 5.1.1. Como funciona la simulación

La simulación se realizó en *Mathematica*. Consiste en un programa que dividimos en varias secciones. En la primera sección se definen las constantes que se usarán a lo largo de esta ( $c, \hbar, \epsilon_0$ ) en el sistema internacional de unidades (SI). En esta misma sección definimos las propiedades del cristal (índice de refracción, longitud del cristal) y las propiedades de los haces bombeo y señal (frecuencia, ancho de cintura y ancho espectral), y la constante de la normalización de la onda,  $l(\omega_\mu)$ .

La segunda sección se encarga de definir el vector de onda y una subrutina en la que se encontrará el ángulo de salida de los haces al definir sus frecuencias y el ángulo de corte del cristal. Esta subrutina funciona al separar los componentes en paralelos y perpendiculares al haz de bombeo, igualar cada componente a cero y resolver las dos ecuaciones simultáneas resultantes para  $\theta_s$  y  $\theta_i$  la suma de estos a cero.

$$\begin{aligned} |k_p| - |k_s| \cos \theta_s - |k_i| \cos \theta_i &= 0 \\ |k_s| \sin \theta_s + |k_i| \sin \theta_i &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

En el segundo cristal el haz escolta, que ingresa perpendicular al cristal, es ordinario y el modo generado es extraordinario así que, para colocarnos en el sistema de referencia del bombeo, comenzamos por el sistema del haz generado y luego hacemos una rotación. Existen algunas relaciones geométricas entre los diferentes ángulos involucrados que deberemos considerar para poder encontrar estos ángulos y poderlos montar después en el sistema del primer cristal. Usando el arreglo de la Fig. 5.4 definimos:

$\theta_g \rightarrow$  ángulo que existe entre el eje óptico y el vector generado.

$\theta_c \rightarrow$  ángulo de corte del segundo cristal, es el ángulo entre la normal del cristal y el eje óptico.

$\theta_e^g \rightarrow$  ángulo entre el haz escolta y el vector generado. Además:

$$\theta_e^g = -(\theta_g^{eje} + \theta_c) = -\theta_g^e. \quad (5.16)$$

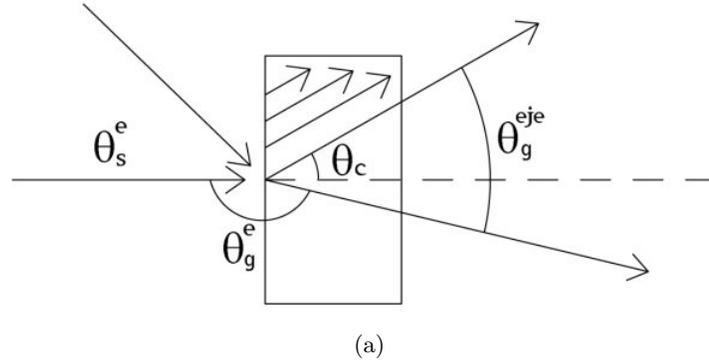


Figura 5.4: Acercamiento al proceso de conversión paramétrica ascendente

Ahora nos situaremos en un sistema similar al del proceso de PDC, donde vamos a considerar como sistema la trayectoria fotón extraordinario (la base será lo paralelo y perpendicular a este) y lo rotaremos al sistema del haz escolta. Obtendremos las ecuaciones de empatamiento de fase:

$$\begin{aligned} |k_g| \cos \theta_g^e - |k_s| \cos \theta_s \cos \theta_g^e + \text{sen} \theta_s \text{sen} \theta_g^e - |k_e| &= 0, \\ |k_g| \text{sen} \theta_g^e - |k_s| \cos \theta_s \text{sen} \theta_g^e - \cos \theta_g^e \text{sen} \theta_s &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Podemos transformarlo en:

$$\begin{aligned} |k_g| \cos \theta_g^e - |k_s| \cos \theta_s' - |k_e| &= 0 \\ |k_g| \text{sen} \theta_g^e - |k_s| \text{sen} \theta_s' &= 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

El ángulo  $\theta_s'$  corresponde al ángulo entre el modo señal y la normal al cristal y este es el determinado por la ley de Snell (Ec. (5.9)).

De las variables libres,  $\theta_s$ ,  $\theta_g^e$ ,  $\theta_c$ ,  $\alpha$ ,  $\theta_g$ ,  $\omega_s$ ,  $\omega_e$ ,  $\omega_g$ <sup>3</sup>, existe una restricción en  $\theta_s, \omega_s$  ya que estas dos son definidas por el primer proceso y no tenemos control sobre ellas, además se tiene la restricción dada por la Ec. (5.17). Por conservación de energía  $\omega_g = \omega_s + \omega_e$ . El ángulo de corte se escogerá de forma que podamos maximizar la probabilidad del proceso (empatamiento de fase

<sup>3</sup>Teniendo en claro que al ser extraordinario entonces  $|\vec{k}_g| = \frac{\eta(\theta_g, \omega_g)}{c} \omega_g$ .

perfecto), este lo consideramos una constante determinada por el cristal. Dejándonos simplemente con un sistema de dos incógnitas y dos variables. Así con solo definir la frecuencia de alguno de los haces (escolta o generado) ya determinamos los ángulos de salida y por lo tanto el sistema.<sup>4</sup>

Esto implica que solo se puede trabajar con un parámetro (sin considerar ancho de cristal ( $L_u$ ), cintura del bombeo ( $W_e$ ) y ancho del pulso ( $\sigma_u$ )), ya sea la frecuencia de algún haz o sus ángulos de incidencia. Para relacionar esta descripción con el experimento variaremos la frecuencia del haz escolta. Al buscar regiones de empatamiento de fase perfecto necesitamos que tanto  $\Delta k_{\perp}$  como  $\Delta k_{\parallel}$  sean cero, es en la tercera sección del programa donde encontramos estas regiones (Fig. 5.5).

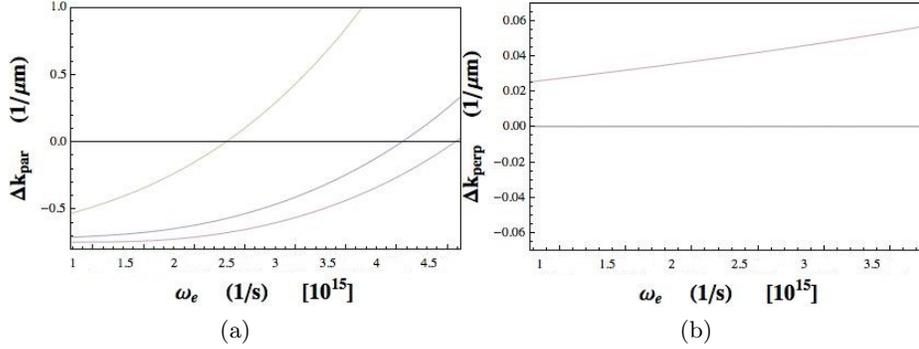


Figura 5.5: Encontramos  $\Delta k_{\perp}$  (b) y  $\Delta k_{\parallel}$  (a) en función de la frecuencia para un cristal BBO, con un ángulo de corte de  $-60,7^{\circ}$  considerando refracción. Los puntos donde se cumpla que ambas funciones valen cero serán la base de nuestro análisis. Las líneas correspondrán al ángulo obtenido con una longitud de onda central de  $.405 \mu\text{m}$  (amarillo)  $.810 \mu\text{m}$  (rojo)  $.462 \mu\text{m}$  (azul)

La tercera sección del programa define las dos funciones de empatamiento de fases (dependiente del primer cristal y del segundo cristal) de las que se compone la función  $G(\omega_g, \omega_i)$ , y grafica estas dos en función de  $\omega_s, \omega_g$  y  $\omega_s, \omega_i$ , respectivamente.

En la última sección calculamos la función  $G(\omega_g, \omega_i)$  numéricamente. Para hacer este cálculo numérico tomamos en cuenta únicamente frecuencias para las cuales la función  $G(\omega_e, \omega_i)$  toma valores apreciables<sup>5</sup>. Más formalmente deberíamos de hacer la integral en los límites  $\int_0^{\infty} d\omega_s$ , pero la trans-

<sup>4</sup>En resumen teníamos un sistema de once variables con nueve restricciones.

<sup>5</sup>Recordamos que el índice de refracción se determina experimentalmente y la expresión de Sellmeier es válida para un pequeño rango de frecuencias.

formamos a unos límites  $\int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta}$  donde la delta la definimos segun el ancho en el que son reales los valores del índice de refracción.

Mostramos resultados del proceso de PDC, para un bombeo cuasimonocromático centrado en una longitud de onda de 405 nm, una duración de 100 fs y una cintura de 100  $\mu\text{m}$  incidiendo sobre un cristal no lineal constituido por BBO de largo de 1000 $\mu\text{m}$  (Fig. 5.6).

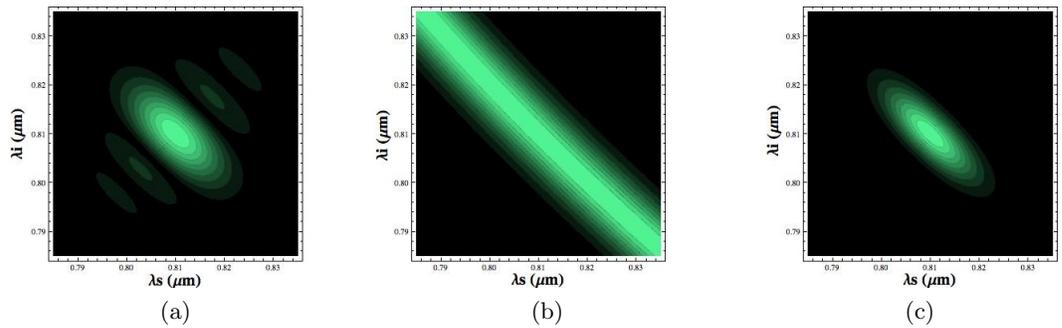


Figura 5.6: (a) Función de empatamiento de fases en función de las longitudes de onda del modo señal y acompañante, (b) Amplitud espectral del haz de bombeo. (c) Función de amplitud conjunta de las parejas de fotones en los modos señal y acompañante

Del mismo modo obtenemos resultados correspondientes al proceso de PUC, donde tengamos un haz escolta centrado en una longitud de onda de 462.72nm, una duración de 100 fs y una cintura de 45 $\mu\text{m}$  incidiendo sobre un cristal de BBO con una longitud de 600 $\mu\text{m}$  (Fig. 5.7).

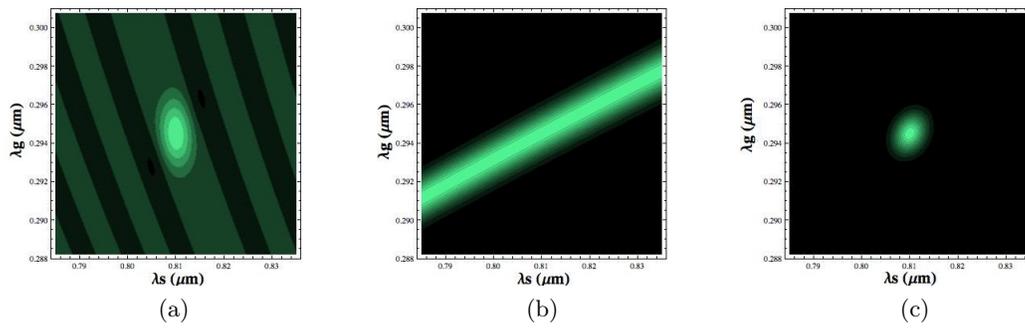


Figura 5.7: (a) Función de empatamiento de fases en función de las longitudes de onda del modo señal y generado, (b) Función que determina el carácter pulsado del haz escolta. (c) Función de amplitud conjunta.



## Capítulo 6

# Cálculo Analítico

El objetivo de nuestro trabajo, como ya se mencionó antes, es el poder manipular la correlación entre dos fotones enredados, a través del proceso de PDC, al someter uno de estos a un segundo proceso (PUC) en el que podamos cambiar sus propiedades. Durante todos los cálculos analíticos nos encontramos con una serie de funciones  $\text{sinc}[x] = \frac{\text{sen}[x]}{x}$ . Esta función presenta como caso límite una delta de Dirac, límite que, aunque lleva consigo una interpretación física de interés, no nos permite alcanzar nuestro fin.

Por otro lado, los resultados que obtuvimos con el análisis numérico sugieren que los lóbulos laterales de la función sinc juegan un papel limitado. Basandonos en la referencia [12] vamos a proponer el remplazo:

$$\text{sinc}[x] \simeq \exp[-\gamma x^2], \quad (6.1)$$

donde  $\gamma \simeq ,193$  es un parámetro que se escoge de modo tal que el ancho del lóbulo central de la primera función y el ancho de la función gaussiana a la mitad del máximo, tengan el mismo valor. Al hacer esta transformación encontramos que:

$$\text{sinc}\left[\frac{L}{2}k_{ric}\right] \rightarrow \exp\left[-\gamma\frac{L^2}{4}|k_{ric}|^2\right]. \quad (6.2)$$

Con esto transformamos las funciones de amplitud conjunta  $f(\omega_s, \omega_i)$ ,  $g(\omega_g, \omega_s)$  en un producto de exponenciales. Tenemos que:

$$\text{sinc}\left[\frac{L}{2}k_{ric}\right]\exp\left[-\frac{W_o^2}{4}(\Delta k_{\perp})^2\right] \simeq \exp\left[-\gamma\frac{L^2}{4}|k_{ric}|^2 - \frac{W_o^2}{4}(\Delta k_{\perp})^2\right].$$

Al desarrollar los términos, resulta:

$$\begin{aligned}
-\gamma \frac{L^2}{4} |k_{ric}|^2 - \frac{W_o^2}{4} (\Delta k_{\perp})^2 = & - \gamma \left( \frac{L}{4k_p} \right)^2 (\Delta k_{\perp}^2)^2 - \gamma \left( \frac{L}{4k_p} \right)^2 (4\Delta k_{\parallel}^2 |k_p|^2) \\
& - \gamma \left( \frac{L}{4k_p} \right) (\Delta k_{\perp}^2) \left[ -4\Delta k_{\parallel} |k_p| + \frac{W_o^2}{4} \left( \frac{4k_p}{L} \right)^2 \frac{1}{\gamma} \right].
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Si nos encontramos cerca del máximo tendremos que  $\Delta k_{\perp}^2 \rightarrow 0$  entonces es posible despreciar el término  $(\Delta k_{\perp}^2)^2$ , además al considerar que  $\frac{W_o}{L} \gg \sqrt{\gamma} \frac{\Delta k_{\parallel}}{|k_p|}$ , nuestra función tendrá la forma:

$$f(\nu_s, \nu_i) \simeq \exp \left[ -\frac{W_o^2}{4} (\Delta k_{\perp})^2 - \gamma \left( \frac{L \Delta k_{\parallel}}{2} \right)^2 - \frac{(\nu_i + \nu_s)^2}{\sigma^2} \right]. \tag{6.4}$$

Esta última aproximación se justifica trivialmente alrededor de regiones de empatamiento de fase perfecto ( $\Delta \vec{k} \rightarrow \vec{0}$ ) y en regiones cercanas a este punto. Tomemos como ejemplo el caso de un haz escolta con longitud de onda central de  $0.405 \mu\text{m}$ ; entonces  $\frac{\sqrt{\gamma}}{|k_p|}$  es aproximadamente 0,203 y  $\Delta k_{\parallel}$  no es mayor que la unidad (como vemos en Fig. 5.4). Solo debemos de cuidar la relación entre el radio de cintura y la longitud del cristal para que se cumpla la aproximación. Es importante recordar que estamos tomando la definición  $\nu_{\mu} \equiv \omega_{\mu} - \omega_{\mu 0}$  (con  $\mu = s, i, g$ ), que podemos interpretar como las desintonizaciones espectrales.

Para seguir el análisis buscaremos expresar la amplitud conjunta en términos de las frecuencias; para esto observamos que nuestra función se vuelve muy pequeña en los alrededores del punto donde existe empatamiento de fase perfecto ( $\Delta \vec{k} = \vec{0}$ ). Así que vamos a expandir  $|\Delta k_{\perp}|$ ,  $|\Delta k_{\parallel}|$  en serie de Taylor<sup>1</sup> alrededor de este punto. Para el caso de PDC obtendremos:

$$\begin{aligned}
\Delta k_{\parallel}^d & \simeq (k'_p|_{\omega_0} - k'|_{\frac{\omega_0}{2} \cos \theta})(\nu_s + \nu_i) \\
\Delta k_{\perp}^d & \simeq (k'|_{\frac{\omega_0}{2} \sin \theta})(\nu_s - \nu_i).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Las últimas igualdades corresponden al caso degenerado. Nuestra función  $f(\nu_s, \nu_i)$  será entonces:

<sup>1</sup>Adoptamos la notación  $\frac{\partial k}{\partial \omega} = k'$ .

$$f(\nu_s, \nu_i) \simeq \exp\left[-\gamma \frac{L^2}{4} V_e^2 (\nu_s + \nu_i)^2 - \frac{W_o^2}{4} V_i^2 (\nu_s - \nu_i)^2 - \frac{(\nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2}\right],$$

donde:

$$V_e = k'_p|_{\omega_0} - k'_i|_{\frac{\omega_0}{2}} \cos \theta \quad ; \quad V_i = k'_i|_{\frac{\omega_0}{2}} \sin \theta.$$

Se sigue el mismo análisis para el caso de PUC.

$$g(\nu_g, \nu_s) \simeq \exp\left[-\frac{W_e^2}{4} (\Delta k_{\perp}^u)^2 - \gamma \left(\frac{L_u \Delta k_{\parallel}^u}{2}\right)^2 - \frac{(\nu_g - \nu_s)^2}{\sigma_u^2}\right].$$

La expansión en Taylor corresponderá a:

$$\begin{aligned} \Delta k_{\parallel}^u &\simeq (k'_g|_{\omega_{g0}} \cos \theta_p - k'_p|_{\omega_{p0}})(\nu_g) - (k'_s|_{\omega_{s0}} \cos \theta_s - k'_p|_{\omega_{p0}})(\nu_s) \\ \Delta k_{\perp}^u &\simeq k'_g|_{\omega_{g0}} \sin \theta_p (\nu_g) - k'_s|_{\omega_{s0}} \sin \theta_s (\nu_s) \end{aligned} \quad (6.6)$$

La función de amplitud conjunta del proceso de PUC toma la forma:

$$g(\omega_g, \omega_s) \simeq \exp\left[-\gamma \frac{L^2}{4} (V_a \nu_g + V_b \nu_s)^2 - \frac{W_o^2}{4} (V_c \nu_g - V_d \nu_s)^2 - \frac{(\nu_g - \nu_s)^2}{\sigma^2}\right]. \quad (6.7)$$

donde:

$$\begin{aligned} V_a &= k'_g|_{\omega_{g0}} \cos \theta_p - k'_p|_{\omega_{p0}} \quad ; \quad V_b = -(k'_s|_{\omega_{s0}} \cos \theta_s - k'_p|_{\omega_{p0}}) \\ V_c &= k'_g|_{\omega_{g0}} \sin \theta_p \quad ; \quad V_d = k'_s|_{\omega_{s0}} \sin \theta_s. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Acabamos de demostrar que tanto en el proceso de PDC como en el proceso de PUC las funciones de amplitud conjunta se pueden aproximar por el producto de exponenciales cuadráticas, mostraremos el comportamiento de estas funciones. Al tener el producto de exponenciales cuadráticas de la forma:

$$\exp\left[-(ax - by)^2\right] \exp\left[-(cx + dy)^2\right] \quad (6.9)$$

cada exponencial tiene valores máximos sobre una franja que subtiende un ángulo con la horizontal determinado por:  $\arctan\left[\frac{b}{a}\right]$  (Fig. 6.1). El ancho de esta franja vendrá determinado por estos mismos parámetros. Al hacer el producto de dos de estas exponenciales, en el caso en que el ángulo que forme alguna de ellas respecto al eje horizontal pertenezca al intervalo  $[0, \frac{\pi}{2})$  y la otra forme un ángulo perteneciente a  $(\frac{\pi}{2}, \pi]$  se obtendrá una elipse, si los ángulos no pertenecen a este intervalo se obtendrá otra franja.

La elipse formada estará rotada respecto a la horizontal a razón de estos ángulos. Mostramos un ejemplo genérico en la Figura 6.1.

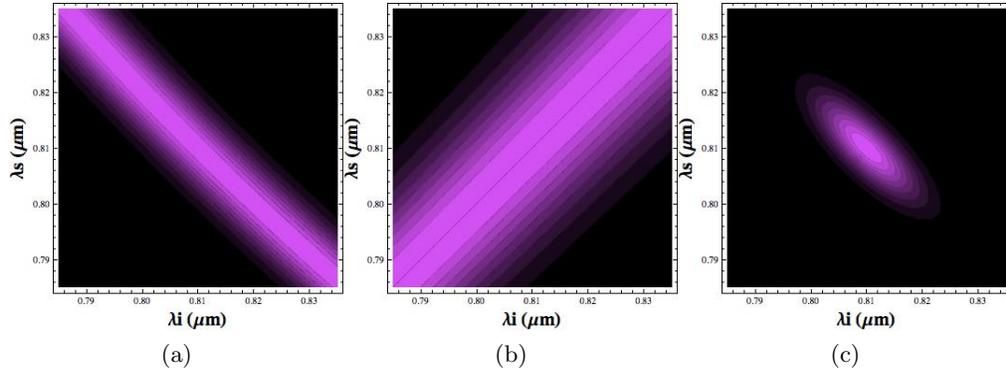


Figura 6.1: (a) Exponencial cuadrática con parámetros  $a = V_i = b$ . (b) Exponencial cuadrática con parámetros  $c = V_e = d$ . (c) Producto de las dos exponenciales

La comparación directa de estos resultados con las Figuras 5.6 y 5.7 (Fig. 6.2) sugiere que nuestra aproximación por gaussianas puede ser muy útil para describir este tipo de procesos.

Ya que la manipulación de las gaussianas es sencilla vamos a construir un modelo donde aproximemos la función de amplitud conjunta de cada proceso por la Ec. (6.9). Para el caso de interés, los modos correspondientes al primer cristal presentan correlación negativa. En este trabajo mantenemos fijos los parámetros de la fuente de PDC y ajustamos aquellos del proceso PUC para corregir el efecto de acondicionamiento deseado. En particular nos enfocaremos en el caso en que los modos ópticos (señal y acompañante) muestran correlación negativa.

Al tener definida la forma de las funciones de amplitud conjunta en la aproximación de las gaussianas (Ec. (6.4)) (Ec. (6.7)), vamos a hacer el producto directo de estas dos funciones e integrarlo en el rango  $(-\infty$

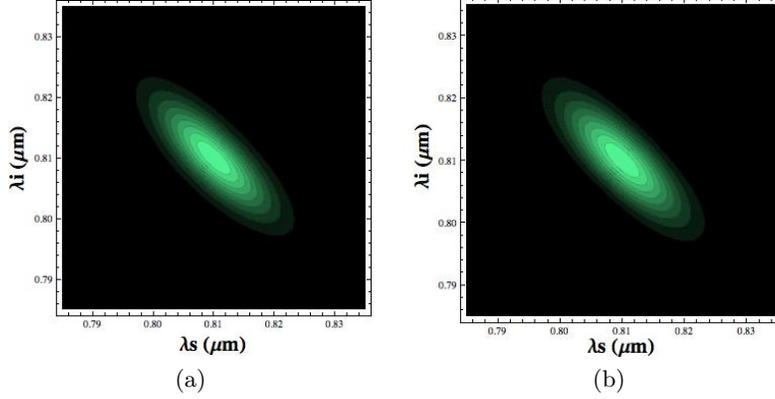


Figura 6.2: (a) Aproximación gaussiana a la función de amplitud conjunta del proceso de PDC. (b) Simulación numérica de la función amplitud conjunta del proceso de PDC.

,  $\infty$ ) en la variable  $\omega_s$ , tratando de modelar así, el comportamiento de la función  $G(\omega_g, \omega_i)$ , definida en el capítulo anterior como  $G(\omega_g, \omega_i) = \int_0^\infty d\omega_s f(\omega_s, \omega_i) g(\omega_g, \omega_s)$ .

Los resultados que se obtienen son ilustrados en la Figura 6.3, donde en lugar de tomar parámetros reales ( $V_\mu$ ), consideraremos constantes  $a, b, c, d$  para tener una idea de que resultados podríamos esperar.

La Figura 6.3 nos permite obtener conclusiones y resultados importantes para el trabajo. El primero de ellos es que la correlación entre el modo  $g$  y el modo  $i$  puede ser totalmente controlada por el proceso del segundo cristal (suponiendo que este permita barrer todos los tipos de correlación<sup>2</sup>). El segundo resultado es que las correlaciones resultantes tienen un análogo al producto de números reales, correlación positiva entre los fotones del primer proceso y correlación positiva entre los del segundo corresponde a una correlación positiva, negativa entre los primeros y negativa entre los asociados al segundo corresponde a positiva final, positiva entre los asociados al primeros y negativa a los segundo corresponde a negativa final, y cualquiera proceso en el que los fotones presenten correlación cero corresponde a correlación cero entre los fotones resultantes.

Esto nos permite pensar que de ahora en adelante basta con analizar el proceso en el segundo cristal para determinar la correlación final. Comenzaremos por mostrar la validez de nuestro modelo para el segundo proceso.

<sup>2</sup>Negativa, positiva y correlación cero.

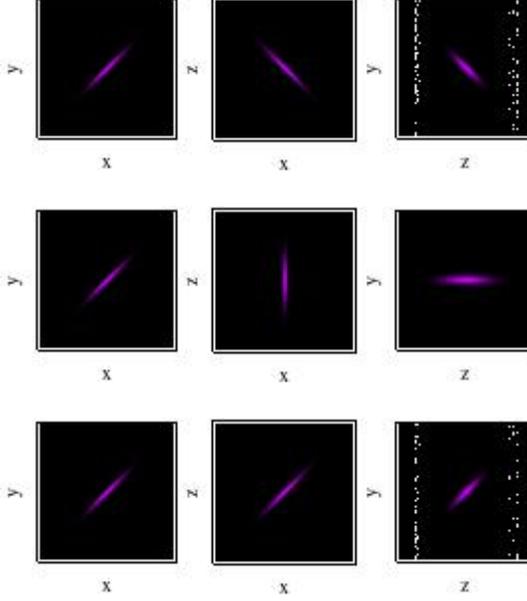


Figura 6.3: Funciones de amplitud conjunta  $f(x, y)$  (primera columna),  $g(x, z)$  (segunda columna) con la aproximación gaussiana e integrándolas para modelar la forma de la función  $G(z, x)$  (tercera columna).

Como ya mencionamos antes, en el PDC es claro que se cumple la forma dada por la Ec. (6.9). Sin embargo, esto no es tan claro para el PUC, ya que el signo relativo entre los parámetros  $V_a, V_b$  y  $V_c, V_d$  puede hacer que no se construya una elipse como la que deseamos sino una franja (como vimos en el modelo de las exponenciales). Para que se alcance la forma buscada en el proceso de PUC los parámetros  $V_a, V_b$  deben de tener los signos iguales, lo mismo se debe de cumplir para los parámetros  $V_c, V_d$ . Grafiquemos cada uno de estos parámetros en función de la longitud de onda central del haz escolta.

Utilizando una notación con una interpretación física más directa, notamos que  $L \cdot V_\mu$  tendrá unidades de tiempo entonces:

$$g(\nu_g, \nu_s) \simeq \exp[-(\tau_a \nu_g + \tau_b \nu_s)^2 - (\tau_c \nu_g - \tau_d \nu_s)^2 - \frac{(\nu_g - \nu_s)^2}{\sigma^2}]. \quad (6.10)$$

Definimos nuestros parámetros como:

## 6.1. CÁLCULO ANÁLITICO DE LA FUNCIÓN DE AMPLITUD CONJUNTA 55

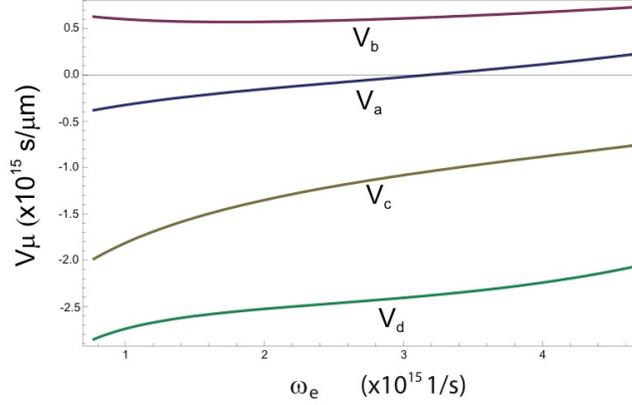


Figura 6.4: Parámetros  $V_a$  (azul)  $V_b$  (rojo)  $V_c$  (amarillo)  $V_d$  (verde) como función de  $\omega_e$ . Vemos como el carácter de cada uno es como lo esperabamos  $V_a, V_b > 0$ ;  $V_c, V_d < 0$ , comprobando la validez de nuestro modelo para la región donde se tengan los mismos signos de  $V_a, V_b$ .

$$\begin{aligned} \tau_a &= \sqrt{\gamma} \frac{L}{2} V_a & ; & & \tau_b &= \sqrt{\gamma} \frac{L}{2} V_b; \\ \tau_c &= \frac{W_o}{2} V_c & ; & & \tau_d &= \frac{W_o}{2} V_d. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mostrando así la región para la cual es válida nuestra aproximación de gaussianas.

### 6.1. Cálculo analítico de la función de amplitud conjunta

Al final de la sección anterior mostramos gráficamente que podemos anular la correlación entre los dos modos involucrados en el segundo cristal, causando la anulación de la correlación resultante entre el fotón acompañante y el generado. En esta sección vamos a demostrar este resultado, al encontrar la forma analítica de la función  $G(\omega_g, \omega_i)$ . Usando la aproximación gaussiana encontramos en la sección anterior que:

$$\begin{aligned}
f(\omega_s, \omega_i) &\simeq \exp[-(\tau_e(\nu_s + \nu_i))^2 - (\tau_i(\nu_s - \nu_i))^2 - \frac{(\nu_s + \nu_i)^2}{\sigma^2}] \\
g(\omega_g, \omega_s) &\simeq \exp[-(\tau_a\nu_g + \tau_b\nu_s)^2 - (\tau_c\nu_g - \tau_d\nu_s)^2 - \frac{(\nu_g - \nu_s)^2}{\sigma^2}] \quad (6.12)
\end{aligned}$$

donde se introdujeron las nuevas variables:

$$\tau_e = \sqrt{\gamma} \frac{L}{2} V_e \quad ; \quad \tau_i = \frac{W_o}{2} V_i. \quad (6.13)$$

Reordenando términos se obtiene:

$$\begin{aligned}
f(\omega_s, \omega_i) &\simeq \exp[-[S_D\nu_s^2 + R_D\nu_s\nu_i + T_D\nu_i^2]], \\
g(\omega_g, \omega_s) &\simeq \exp[-[S_U\nu_s^2 + R_U\nu_s\nu_g + T_U\nu_g^2]]. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

especialmente importantes para el trabajo son los términos cruzados<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned}
R_D &= -2[\tau_e^2 - \tau_i^2 + \frac{1}{\sigma^2}], \\
R_U &= -2[\tau_a\tau_b - \tau_c\tau_d - \frac{1}{\sigma^2}]. \quad (6.15)
\end{aligned}$$

Los demás términos corresponden a:

$$\begin{aligned}
S_D &= \tau_e^2 + \tau_i^2 + \frac{1}{\sigma_D^2}, \\
T_D &= \tau_e^2 + \tau_i^2 + \frac{1}{\sigma_D^2}, \\
S_U &= \tau_b^2 + \tau_d^2 + \frac{1}{\sigma_U^2}, \\
T_U &= \tau_a^2 + \tau_c^2 + \frac{1}{\sigma_U^2}. \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Volvemos a utilizar la notación de subíndices  $D$  ,  $U$  para los términos correspondientes a PDC y PUC respectivamente. Recordemos la definición de correlación y el hecho de que llamamos a dos fotones como no correlacionados cuando se puede hacer separación de variables, i.e.

---

<sup>3</sup>Llamaremos producto cruzado a la componente que contiene el producto de  $\nu_g$ ,  $\nu_i$ .

$$|g(\omega_g, \omega_s)| = G_g(\omega_g)S_s(\omega_s). \quad (6.17)$$

Esto corresponderá a que en nuestro modelo, el producto cruzado  $R_U$  se cancele. Este es uno de los puntos clave del trabajo. Encontramos, como ilustra la Figura 6.3, que podemos manipular la correlación de salida, a partir de la correlación fija de la primera pareja de fotones y el control sobre esta propiedad en el segundo proceso.

Hasta el momento, logramos reducir un problema en el que se busca conocer y, en lo posible, controlar la correlación entre dos fotones, a una ecuación en la que se incluyen todos los parámetros experimentales. A partir de esta ecuación es relativamente fácil encontrar los parámetros que nos lleven a la correlación deseada.

Para llegar a esta ecuación hicimos varias aproximaciones; antes de continuar nuestro análisis vamos a listar todas estas:

1. El haz de bombeo y escolta se consideran clásicos, gaussianos y pulsados.
2. Supusimos que nuestro materiales tienen una respuesta magnética muy débil  $\mu \simeq \mu_0$ .
3. No trabajamos con frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia del cristal.
4. Se consideran medios no disipativos.
5. Consideramos  $\kappa(\omega_s)$  como un término que permanece constante respecto al valor en la frecuencia central.
6. Utilizamos la aproximación gaussiana,  $\text{sinc}[x] \simeq \exp[-\gamma x^2]$ .
7. Despreciamos potencias de  $(\Delta k_\perp)$  de orden mayor a dos.
8. Supusimos que la relación entre el radio en la cintura y longitud del cristal es tal que  $(\frac{W_0}{L})^2 \gg \gamma \frac{\Delta k_\parallel}{k_p}$ .

Así que mientras nos mantengamos en estos límites, centrar nuestro análisis en la ecuación de los términos cruzados es válido. Vamos a probar nuestro modelo con un ejercicio donde hagamos que  $R_U = 0$ . La importancia de este ejemplo se ejemplifica con el hecho de que, para un proceso PDC degenerado de tipo 1 donde los dos fotones son colineales, es imposible lograr

correlación cero [12]. Poder lograr esto mediante el proceso descrito en este trabajo ilustra su relevancia.

Buscamos entonces que:

$$\tau_a\tau_b - \tau_c\tau_d - \frac{1}{\sigma^2} = 0. \quad (6.18)$$

Si escribimos directamente la dependencia de este término con el radio de cintura del haz escolta, longitud del cristal y ancho espectral, obtenemos

$$\sigma^2(\gamma L^2 V_a V_b - W_o^2 V_c V_d) - 4 = 0. \quad (6.19)$$

Por la naturaleza de nuestras constantes  $V_\mu$  ( $\mu = a, b, c, d$ ) existe una combinación de  $L, W_o$  para cada valor de  $\sigma$  donde se cumpla la Ec. (6.15). Permitiéndonos tener correlación cero para el caso de fotones colineales.

### 6.1.1. Análisis de correlación

Gracias a su carácter gaussiano, es posible calcular analíticamente  $G(\nu_g, \nu_i) = \int d\nu_s f(\nu_s, \nu_i) \cdot g(\nu_g, \nu_s)$ . Obtenemos:

$$G(\nu_g, \nu_i) = \exp \left[ - \left( \frac{A \nu_g^2 + B \nu_g \nu_i + C \nu_i^2}{4(S_D + S_U)\sigma_D^2\sigma_U^2} \right) \right]. \quad (6.20)$$

En donde definimos los parámetros:

$$\begin{aligned} A &= (-R_U^2 + 4(S_D + S_U)T_U)\sigma_D^2\sigma_U^2, \\ B &= -\frac{1}{2}R_D R_U \sigma_D^2\sigma_U^2, \\ C &= (R_D^2 - 4(S_D + S_U)T_D)\sigma_D^2\sigma_U^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Al determinar esta forma analítica obtenemos un resultado importante. El término cruzado,  $B$ , es el producto de los términos cruzados asociados a los procesos de los dos cristales. Esto nos lleva a que si en algún cristal no existe correlación, entonces la función  $G(\omega_g, \omega_i)$  no presentará correlación tampoco. Demostrando así el resultado ilustrado en las gráficas de la sección anterior (Fig. 6.3) (Además ya no es sorpresa que el signo de la correlación se comporte como el producto de números reales).

### 6.1. CÁLCULO ANÁLITICO DE LA FUNCIÓN DE AMPLITUD CONJUNTA 59

Esta forma analítica nos permite trabajar más a fondo con nuestra función de amplitud conjunta.

Calculemos el índice de correlación entre los dos fotones finales. Usando la definición del índice de correlación, determinada en el capítulo 4:

$$\rho_{sg} = \frac{\mu_{sg}}{\sigma_s \sigma_g} = \rho_{gs}, \quad (6.22)$$

encontramos que, para una función de la forma

$$F(x, y) = D \cdot \exp [-(ax^2 + bxy + cy^2)],$$

el índice de correlación es:

$$\rho_{sg} = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}. \quad (6.23)$$



# Capítulo 7

## Resultados

Aplicando la aproximación gaussiana a las funciones sinc que aparecen en el cálculo de los procesos PDC y PUC, mostramos explícitamente que es posible manipular el enredamiento entre los fotones generado y acompañante al cambiar las propiedades del haz escolta y la longitud del cristal donde se lleva a cabo el proceso PUC.

Simulamos numéricamente la función de amplitud conjunta del primer proceso (SPDC degenerado). Supusimos un bombeo pulsado<sup>1</sup>, con longitud de onda central de 405 nm, una duración de 1 ps y una cintura de  $100\mu\text{m}$  que incide sobre un cristal no lineal constituido por BBO de largo de  $1000\mu\text{m}$ . El fotón señal que se obtiene fue sometido al segundo proceso (SPUC) con un haz escolta pulsado, con una longitud de onda central de  $462\text{nm}^2$ . Se mostró que variando la cintura del haz escolta, la duración de este y la longitud del segundo cristal es posible obtener:

1. Cambio de signo índice de correlación.
2. Correlación cero.

Tenemos que en el primer proceso obtenemos el índice de correlación:

$$\rho_{is} = -\frac{(\tau_e^2 - \tau_i^2 + \frac{1}{\sigma^2})}{(\tau_e^2 + \tau_i^2 + \frac{1}{\sigma^2})} = -0,975906, \quad (7.1)$$

---

<sup>1</sup>Llamaremos pulsado a un haz que tenga un ancho de banda alrededor de la frecuencia central, es importante mantenerlo de este modo por la naturaleza de nuestros parámetros  $V_a$ ,  $V_b$ , pues el análisis del Capítulo 6 no puede seguirse con un haz estrictamente monocromático.

<sup>2</sup>De modo que cumpla empatamiento de fase perfecto y permanezca en el rango de frecuencias que satisface nuestro modelo.

correspondiente a una alta anticorrelación entre los dos fotones, y un índice de correlación negativo, como esperabamos. Los subíndices *is* indica que obtenemos la correlación entre el modo señal y acompañante La forma de la función de amplitud conjunta se encuentra en la Figura (5.6).

Ya que se busca cambiar el signo del índice de correlación, tomando en cuenta las ecuaciones 6.21, 6.23, hacer que el índice de correlación asociado al segundo proceso sea negativo se traduce en encontrar una combinación de  $W_o$ ,  $L$ ,  $\sigma_U$  tal que:

$$\begin{aligned} (-1 + \sigma_U^2(\tau_a\tau_b - \tau_c\tau_d))(1 + \sigma_D^2(\tau_e^2 - \tau_i^2)) &\geq 0 \\ \sigma_U^2(\tau_a\tau_b - \tau_c\tau_d) &\geq 1 \\ \sqrt{\frac{\frac{1}{\sigma_U^2} + \left(\frac{W_o}{2}\right)^2 V_c V_d}{\gamma V_a V_b}} &\leq L, \end{aligned} \quad (7.2)$$

donde la igualdad corresponde al caso donde la correlación es cero.

Mostramos para una longitud de onda del haz escolta de  $462nm$  y una duración de  $10fs$  la forma de  $R_U$  en función de la longitud del segundo cristal ( $L_U$ ) y cintura del haz escolta ( $W_o$ ), Figura 7.1.

Usando un ancho de cintura de  $45 \mu m$  encontramos que la longitud del cristal debería de ser mayor a  $6.68391 mm$  para alcanzar nuestros fines. Además, variar el ancho de la cintura no cambiará significativamente la longitud del cristal necesario para conseguir el cambio en la correlación. Sin embargo, si hacemos que el pulso sea más corto  $\Delta t \simeq 10^{-13}s$ , será necesario usar solo un cristal con una longitud mayor a  $828,341\mu m$ . Resultando con ello una correlación muy pequeña para valores cercanos a esta longitud:

$$\begin{aligned} \rho_{gi} &= 0 & ; & \quad L = 828,341 \mu m \\ \rho_{gi} &= 0,135102 & ; & \quad L = 1200 \mu m. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Los resultados de la simulación numérica de  $G(\omega_g, \omega_i)$  para estos parámetros del proceso asociado al primer cristal se ilustran en las Figuras 7.3 a 7.6 con diferentes parámetros para el segundo proceso. En todos los casos se tiene una función de amplitud conjunta de los fotones señal y acompañante como el mostrado en la Figura 7.2

Estas últimas imagenes nos reflejan la importancia de este trabajo ya que muestran como (manteniendo parámetros experimentles) es posible alterar la correlación espectral entre los fotones generado y acompañante. Siendo posible el recorrer valores entre menos uno y uno de de esta.

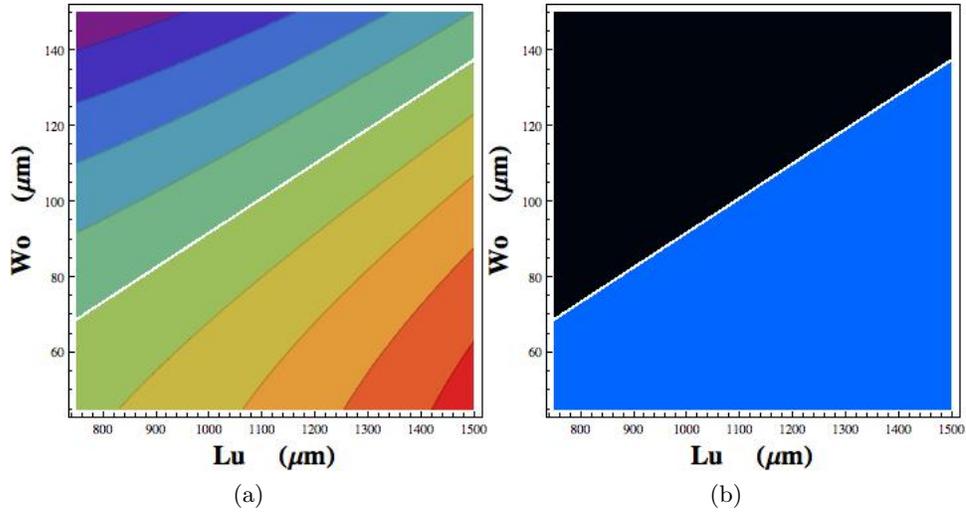


Figura 7.1: (a) Forma del término cruzado  $R_U$  en función del largo del cristal y cintura del haz escolta. (b) Signo de la función  $R_U$ . Mostramos en negro cuando el término cruzado es positivo y en azul cuando es negativo. En ambos casos la línea blanca corresponde a correlación cero.

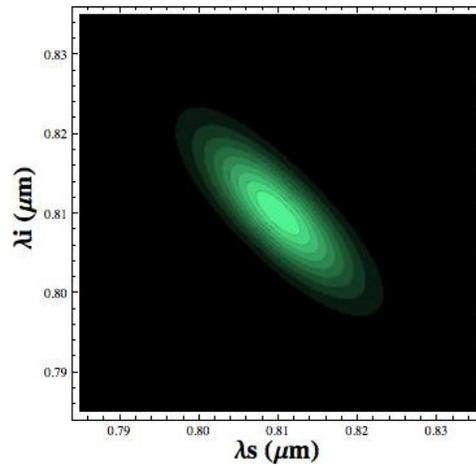


Figura 7.2: Simulación numérica de la amplitud conjunta de los modos señal y acompañante para los parámetros del texto.

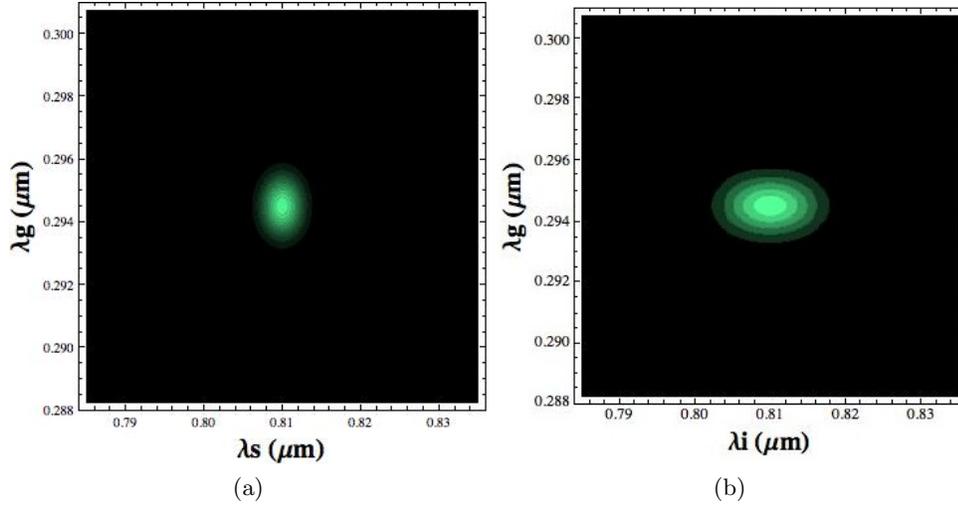


Figura 7.3: (a) Función de amplitud conjunta entre el fotón señal y el fotón generado. (b)  $G(\omega_g, \omega_i)$ , Siguiendo los parámetros  $L = 828.341 \mu\text{m}$   $W_o = 45 \mu\text{m}$   $\tau = 10^{-13}\text{s}$ .

Correlación :  $\rho_{gi} = 0$

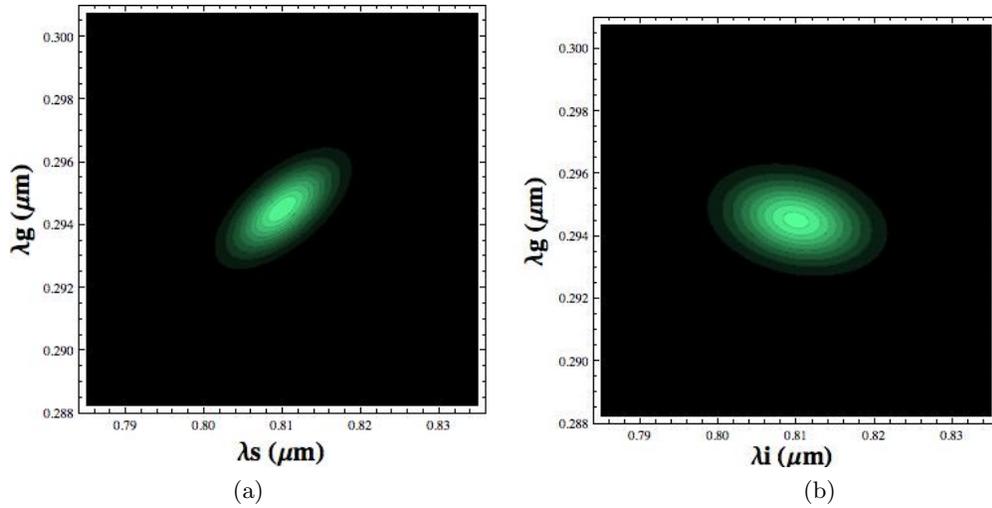


Figura 7.4: (a) Función de amplitud conjunta entre el fotón señal y el fotón generado. (b)  $G(\omega_g, \omega_i)$ , Siguiendo los parámetros  $L = 300 \mu\text{m}$   $W_o = 45 \mu\text{m}$   $\tau = 10^{-13}\text{s}$ .

Correlación :  $\rho_{gi} = -0.297116$

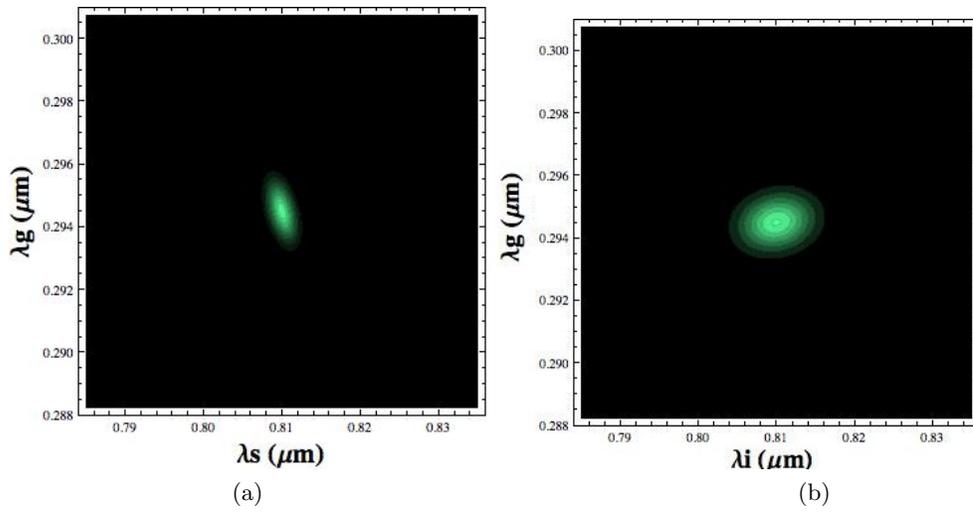


Figura 7.5: (a) Función de amplitud conjunta entre el fotón señal y el fotón generado. (b)  $G(\omega_g, \omega_i)$ , Siguiendo los parámetros  $L = 1500 \mu\text{m}$   $W_o = 45 \mu\text{m}$   $\tau = 10^{-13}\text{s}$ .

Correlación :  $\rho_{gi} = 0.10663$

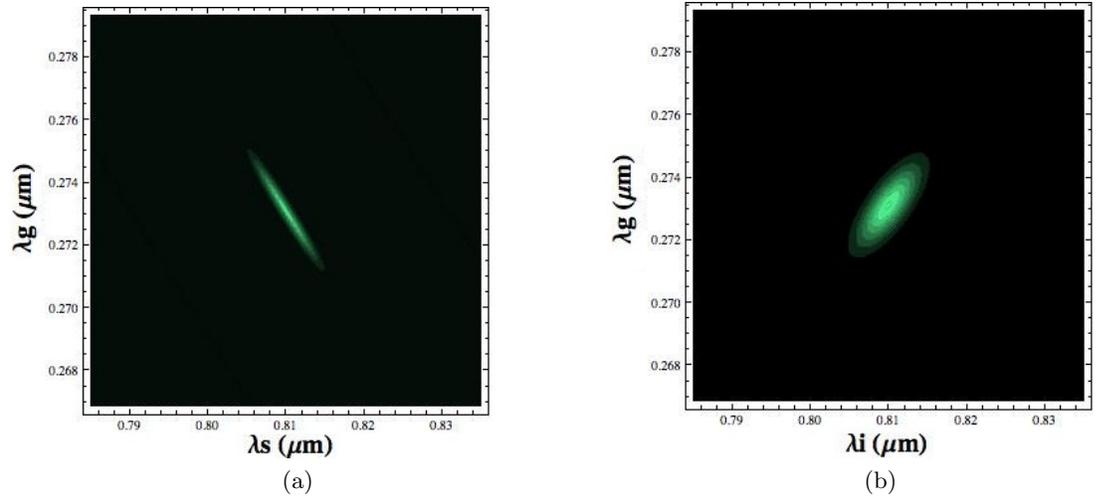


Figura 7.6: (a) Función de amplitud conjunta entre el fotón señal y el fotón generado. (b)  $G(\omega_g, \omega_i)$ , Siguiendo los parámetros  $L = 3000 \mu\text{m}$   $W_o = 45 \mu\text{m}$   $\tau = 10^{-14}\text{s}$  Con un haz escolta con una longitud de onda central de  $0.41199 \mu\text{m}$ .

Correlación :  $\rho_{gi} = 0.421218$

## Capítulo 8

# Conclusiones

El tema de este trabajo es el estudio de una técnica experimental mediante la cual se puede lograr el acondicionamiento de las propiedades de enredamiento espectral en parejas de fotones generadas por conversión paramétrica descendente espontánea.

En términos generales, las propiedades de enredamiento resultantes en parejas de fotones dependen crucialmente de la dispersión que experimentan los modos ópticos participantes en el medio no lineal. Tales propiedades se encuentran determinadas por el material en consideración, y por lo tanto no se pueden elegir libremente. Por lo tanto, resulta un reto lograr la emisión de parejas de fotones con propiedades arbitrarias de enredamiento espectral. En la técnica que aquí hemos propuesto, se utiliza un segundo cristal en el cual se hace incidir uno de los dos fotones (señal), de cada pareja de fotones junto con un llamado haz escolta, el cual se modela clásicamente. Se eligen las propiedades de este segundo cristal de forma tal que se cumpla la condición de empatamiento de fases correspondiente al proceso de suma de frecuencias entre el foton acompañante y el haz escolta. Se estudia la generación del fotón resultante de este proceso de suma de frecuencias (llamado fotón generado), y en particular las propiedades de enredamiento resultantes entre los fotones acompañante y generado. A lo largo de este trabajo se busco una forma analítica de la función de amplitud conjunta entre el fotón acompañante y el generado (Ec. (6.20)). Esta forma fue encontrada después de diferentes aproximaciones, cuya validez se mostró a lo largo del trabajo. Esta forma analítica se ajusta con buena precisión al valor numérico, además de que nos permite entender la dependencia de la función de amplitud conjunta respecto a diferentes parámetros experimentales, ya sea la longitud del cristal, el ancho espectral o el ancho de cintura de los haces

de bombeo y escolta. Se mantienen límites de estos parámetros dentro de valores permitidos experimentalmente.

Se logra un entendimiento claro de los procesos de SPDC, SPUC, en ambos procesos se deriva la teoría correspondiente a ambos procesos desde primeros principios, tratando de hacer las menos aproximaciones posibles. El trabajo sirve como una buena guía para entender el proceso de SPUC donde es muy difícil encontrar referencias al tema y una base teórica como esta puede ser de mucha ayuda.

Además de que este trabajo constituye el primer análisis, hasta donde conocemos, de los procesos SPUC, SPDC en cascada.

El derivar nuevamente el campo eléctrico nos lleva a notar que a diferencia de varios artículos sobre el tema [12], en esta tesis se encuentra y trabaja con un término polinomial del campo eléctrico (Ec. (4.9)-(4.10)). Se demuestra además la razón por la que este término puede ser considerado como una constante.

Se estudió a fondo el sistema propuesto en el capítulo cinco y se encuentra el modo en el que con un sistema de esta forma se puede hacer que la correlación entre los fotones acompañante y el generado sea positiva, negativa o cero, variando simplemente la longitud del cristal siempre y cuando se mantengan constantes los demás parámetros, teniendo un cuidado especial en el ancho de la función, ya que como se vió en el trabajo este ancho es el que determina que tan correlacionados se encuentran ambos modos. Cumpliendo así el objetivo principal de la tesis.

Entre las limitantes de este trabajo encontramos que aunque el análisis teórico es general y se puede aplicar a cualquier tipo de cristal no lineal, solo mostraremos resultados para el caso específico del cristal BBO.

Se tiene además la limitante de que no se consideró disipación por parte de los medios, se explicó en el capítulo dos que no considerarlos es válido pues no nos encontramos cerca de la frecuencia de resonancia del cristal, pero por completez del trabajo sería mejor considerar un análisis donde se tome en cuenta [13].

Finalmente, se propone una extensión para este trabajo donde no se tome el límite espontáneo (Ec. (4.6)). Esto se debe a la probabilidad de que exista el proceso cuando nos limitamos al caso espontáneo es muy baja así que es muy difícil construir un arreglo experimental donde se cumpla exitosamente con ambos procesos (SPDC, SPUC). Esto es importante ya que la probabilidad de que ocurran ambos procesos espontáneamente es muy baja. Al considerar el caso estimulado en el proceso PUC, incrementaremos considerablemente la utilidad práctica propuesta.

# Bibliografía

- [1] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press. Third Edition (2008)
- [2] M. Bass, P. A. Franken, J. F. Ward, y G. Weinreich, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 446 (1962)
- [3] M. Bass et al *Phys. Rev. Lett.* **9**, 11 (1962)
- [4] J. A. Armstrong et al. *Phys. Rev. Lett.* **127**, 6 (1962)
- [5] L. Mandel, E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge (1995)
- [6] Y. Zhang y Chun-Fang Li. *Eur. J. Phys.* **27**, 779 (2006)
- [7] S. Hacyan y R. Jáuregui, *J. Opt A: Pure Appl. Opt.* **11** 085204 (2009)
- [8] V. G. Dmitriev, et. al., *Handbook Of Nonlinear Optical Crystals*, Springer, Third Edition (1999)
- [9] D.C. Burnham y D.L. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 84 (1970)
- [10] D.N. Klyshko *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **55**, 1006 (1968)
- [11] G. U. Yule y M.G. Kendall, *An Introduction to the Theory of Statistics*. Griffin, London (1973)
- [12] W.P. Grice, A. B. U'Ren e I. A. Walmsley, *Phys. Rev. A* **64**, 063815 (2001)
- [13] Y. Jerónimo, *Descripción en el Dominio Temporal de Parejas de Fotones Generadas Mediante el Proceso de Downconversion Paramétrico*, Tesis de Maestría CICESE 2006