Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

TOPOLOGÍAS DE ÁLGEBRA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

PABLO MANUEL TEJADA BASSOLS

TUTOR:
M. EN C. ÁNGEL MANUEL CARRILLO HOYO

2011

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Tejada
Apellido materno	Bassols
Nombre(s)	Pablo Manuel
Teléfono	56161354
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	301521471
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Angel Manuel
Apellido paterno	Carrillo
Apellido materno	Hoyo
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Dr.
Nombre(s)	Hugo
Apellido paterno	Arizmendi
Apellido materno	Peimbert
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Dr.
Nombre(s)	Carlos
Apellido paterno	Hernández
Apellido materno	Garciadiego
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Dr.
Nombre(s)	Ricardo
Apellido paterno	Gómez
Apellido materno	Aíza
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	M. en C.
Nombre(s)	Alejandra
Apellido paterno	García
Apellido materno	García
7.Datos del trabajo escrito.	7. Datos del trabajo escrito
Título	Topologías de álgebra
Número de páginas	151
Año	2011

Topologías de álgebra

Pablo Manuel Tejada Bassols

January 26, 2011

Contenido

Preface

En este trabajo se estudia el problema de dotar con una topología vectorial, es decir respecto a la cual las operaciones lineales resulten continuas, a un álgebra A sobre el campo $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y de manera que el producto en A sea también continuo (a veces se dice: conjuntamente continuo en las dos variables) o al menos continuo en cada variable.

Cuando se tiene una topología vectorial τ en un álgebra A con alguna de estas dos características respecto a su producto, entonces se dice que τ es una topología de álgebra. En el primer caso, (A, τ) se llama álgebra topológica y en el segundo, álgebra semitopológica.

Dada un álgebra A siempre es posible convertirla en un álgebra semitopológica e inclusive se puede lograr que la topología que le da tal estructura sea localmente convexa, es decir que esté definida a través de una familia de seminormas definidas en A. Sin embargo, no siempre se puede lograr que A sea un álgebra topológica y cuando esto último sí es posible, dicha topología no siempre es localmente convexa.

Al respecto hay trabajos realizados por A. Kokk, V. Müller y W. Żelazko. Esta tesis tiene como parte de sus fundamentos a tres de ellos: *On vector spaces and algebras with maximal locally pseudoconvex topologies*, de A. Kokk y W. Żelazko, *On topologizable algebras*, de V. Müller y *On topologization of countably generated algebras*, de W. Żelazko.

Se presentan topologías localmente pseudoconvexas, es decir, dadas por pseudoseminormas, que incluyen a las $p-$localmente convexas, con $0 < p \leq 1$, las que a su vez son una generalización de las localmente convexas ($p = 1$). Con cualquiera de esas topologías se puede hacer semitopológica, localmente pseudoconvexa, de Hausdorff y completa a cualquier álgebra.

Cuando un álgebra A no es numerablemente generada, entonces todas esas topologías son distintas entre sí y por consiguiente, existe un continuo de topologías que hacen a A un álgebra semitopológica de Hausdorff y completa. Si A es numerablemente generada, entonces todas esas topologías coinciden con la máxima topología vectorial localmente convexa $\tau_{\max}^{LC}$ en A y $\left(A, \tau_{\max}^{LC}\right)$ es entonces un álgebra topológica y, por lo antes dicho, de Hausdorff y completa. Con un ejemplo que aparece en el artículo de Müller se hace ver que si se acepta el axioma del continuo, entonces no es posible mejorar el último de tales resultados, pues en él se construye un álgebra con un sistema de generadores de cardinalidad c que no admite una topología que la haga álgebra topológica.

Para presentar las topologías anteriores se estudian los espacios localmente pseudoconvexos, los cuales fueron introducidos por S. Rolewicz [15].

No nos limitamos a estudiarlos vía las pseudoseminormas sino que también lo hacemos a través de los conjuntos pseudoconvexos.

Dentro de las álgebras topológicas localmente convexas destacan las localmente $m-$convexas, las cuales se caracterizan porque sus topologías están dadas por seminormas submultiplicativas. Dichas álgebras se asemejan, en cuanto a sus propiedades, a las álgebras normadas. En tanto que en el ámbito de las álgebras semitopológicas locamente convexas destacan las localmente $\mathcal{A}-$convexas. Toda álgebra localmente $m-$convexa es localmente $\mathcal{A}-$convexa, pero el resultado inverso es falso.

En [14], Oudadess mostró que toda álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa admite una topología más fuerte que la hace $m-$convexa. En dicho trabajo se afirmaba también que la topología por él construida es la mínima con tales dos propiedades, pero hay un error en su argumentación. Sin embargo, por varios años se dio por bueno el resultado A la mínima topología $m-$convexa más fuerte que la topología de un álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa se le llama de Oudadess y con base en su existencia fueron enunciados y probados diversos resultados.

En esta tesis también se estudia esa topología. En este aspecto, otro de sus fundamentos es el artículo de L. Oubbi, *The weakest m-convex topology stronger than an A-convex topology need not exist*, donde como su título indica se muestra que es falso que siempre exista la topología de Oudadess.

Además de presentar un ejemplo respecto a esa inexistencia se dan otros contraejemplos, todos ellos construidos por Oubbi, a afirmaciones hechas o dadas a entender por él mismo en su artículo [13].

Finalmente, se dan dos condiciones suficientes para la existencia de la topología de Oudadess, que hasta donde sabemos son originales y que forman parte de la versión preliminar de un artículo del que el autor de esta tesis es coautor. Con base en ellas se prueba que las topologías de Oudadess de varias álgebras localmente $\mathcal{A}-$convexas es efectivamente la dada en [14]. Esto ya se había hecho, pero dando por garantizada su existencia.

Para todo lo anterior se dividió el trabajo en tres capítulos, cuyos contenidos se describen a continuación.

En el Capítulo 1 se introducen los conceptos fundamentales y nociones básicas de topología necesarios para el estudio de espacios vectoriales topológicos. Como estos son presentados a partir de sus sistemas fundamentales de vecindades del 0, la noción de espacio topológico también se presenta a través de sistemas locales de vecindades.

Se dan algunas propiedades de los operadores lineales continuos sobre espacios vectoriales topológicos y normados. Se prueba que todo espacio de dimensión finita tiene una única topología vectorial de Hausdorff. Al final de este capítulo se estudian el espacio y la topología cocientes para espacios vectoriales topológicos.

En el Capítulo 2 se define los conceptos de $p-$convexidad y $p-$seminormas, como generalizaciones de los conceptos de convexidad y seminorma, respectivamente. Para un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ se define la noción de espacio localmente pseudoconvexo como aquel que tiene un sistema fundamental $\{V_\alpha\}$ de vecindades del 0 donde cada V_α es un conjunto $p(\alpha)$-convexo para alguna $0 < p(\alpha) \leq 1$ que depende de α. Cuando el número $p(\alpha)$ es el mismo número p para todos los miembros del sistema fundamental, entonces se dice que el espacio es localmente $p-$convexo y si $p = 1$, entonces el espacio es localmente convexo.

La definición más usada de espacio localmente pseudoconvexo es la que se da en términos de familias de pseudoseminormas; es decir; familias en las que cada elemento es una $p-$seminorma, donde p puede variar con el elemento. En este capítulo se muestra que ambas definiciones son equivalentes. En particular, se observa que una familia de pseudoseminormas que generan la topología de un espacio localmente pseudoconvexo es la de las funcionales de Minkowski de un sistema fundamental $\{V_\alpha\}$ de vecindades del 0, donde cada V_α es un conjunto $p(\alpha)$-convexo.

Especializando parte de lo visto en el Capitulo 1 se estudian las condiciones de continuidad para operadores y funcionales lineales entre espacios localmente pseudoconvexos y los espacios cocientes de espacios localmente convexos.

En el libro [16], S. Rolewicz introduce el concepto de conjunto pseudoconvexo. En la tesis se hace notar que la clase de los conjuntos $p-$convexos, con $0 < p \leq 1$, es una subclase propia de la clase de los conjuntos pseudoconvexos y que la clase de los espacios localmente $p-$convexos es una subclase propia de la clase de los espacios pseudoconvexos. Esta parte culmina con la prueba de que un espacio vectorial es localmente pseudoconvexo si y sólo si tiene un sistema fundamental de vecindades del cero formado por conjuntos balanceados y pseudoconvexos.

Finalmente, para cualquier espacio vectorial X se definen dos clases de topologías maximales localmente pseudoconvexas, a saber $\tau^p_{\max}$ y $\tau^{q+}_{\max}$, donde $\tau^p_{\max}$, con $0 < p \leq 1$, es la topología generada por la familia de todas las $p-$seminormas definidas en X y $\tau^{q+}_{\max}$, con $0 \leq q < 1$ es la topología generada por la familia de todas las $p-$seminormas, al variar p en $(q, 1]$. Se dan algunas relaciones de contención que existen entre estas topologías y propiedades de las mismas; las que son necesarias para demostrar que un espacio vectorial equipado con cualquiera de ellas es un espacio localmente pseudoconvexo, de Hausdorff y completo

Se muestra que si X tiene una dimensión no numerable, entonces todas las topologías $\tau_{\max}^{p}$ $(0 < p \leq 1)$ y $\tau_{\max}^{q+}$ $(0 \leq q < 1)$ son diferentes, dos a dos, pero si el espacio vectorial es de dimensión a lo más numerable, entonces todas estas topologías coinciden entre sí.

En el Capítulo 3 se definen los conceptos de álgebra semitopológica, álgebra topológica y topología de álgebra. Se generalizan algunos teoremas del Capítulo 1 acerca de los sistemas fundamentales de vecindades del 0 para abarcar a las álgebras

Se presentan algunos tipos de topología de álgebra, lo que lleva a las álgebras normadas y a las localmente: convexas, $m-$convexas, pseudoconvexas, $p-$convexas y $\mathcal{A}-$convexas.

Cada una de estas topologías está determinada por una familia de pseudoseminormas; según las propiedades de éstas se obtienen alguno de los diferentes tipos.

Se muestra que un álgebra libre $\mathbb{F}(t)$, donde t es un sistema de variables no conmutativas, equipada con la máxima topología localmente convexa $\tau_{\max}^{1} = \tau_{\max}^{LC}$ es topológica si y sólo si t es a lo más numerable. Como corolario se prueba que un álgebra cualquiera puede ser topologizada como álgebra topológica localmente convexa, de Haudorff y completa siempre que dicha álgebra sea numerablemente generada. En caso contrario, las topologías $\tau_{\max}^{p}$ y $\tau_{\max}^{q+}$ son diferentes entre sí y A es semitopológica de Hausdorff y completa, con respecto a cualquiera de ellas.

Se ve que siempre es posible equipar a cualquier álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa con una topología localmente $m-$convexa más fuerte que la original.

Como ya se señaló, no es cierto en general que la colección de todas las topologías con esas dos propiedades tiene un elemento mínimo. Cuando tal elemento existe es llamado la topología de Oudadess. Se formulan ciertas preguntas pertinentes y se responden algunas de ellas. Finalizamos dando condiciones suficientes para que exista la topología de Oudadess y ejemplos donde ésta existe.

Quedan sin respuesta preguntas que nos sugirió el artículo [13] de Oubbi. Por otra parte, no sabemos de una condición necesaria para la existencia de la topología de Oudadess en un álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa.

Capítulo 1

Preliminares

Aquí se recuerdan conceptos y resultados básicos que serán usados en el resto de la tesis. Se refieren a topología general y a espacios vectoriales topológicos, dentro de estos últimos se ve que un espacio de dimensión finita admite una única topología vectorial de Hausdorff y que esta topología está dada por una norma que lo hace completo.

1.1 Algunas nociones de topología

Escribiremos (X, τ) para denotar a un espacio topológico (e.t.) con la topología τ. En ocasiones simplemente diremos el espacio topológico X.

El interior de $A \subset X$ será denotado por $int(A)$ y la cerradura de A por $\overline{A}$ o bien $cl\,(A)$.

A continuación veremos que toda topología puede definirse mediante sistemas de vecindades e inclusive a través de bases de vecindades.

Definición 1.1.1 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un subconjunto V de X es llamado una vecindad de x para τ si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$.*

Cuando decimos que V es una $\tau-$ vecindad de x queremos señalar que V es una vecindad de x para la topología τ. De manera análoga, señalaremos otras propiedades: $\tau-$ abierto, $\tau-$ convergente, etc.

Teorema 1.1.2 *Sea X un espacio topológico. Para cada $x \in X$, sea $\mathcal{B}\,(x)$ la colección de todas las vecindades de x. Entonces*

(a) $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{B}\,(x)$

(b) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}\,(x)$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}\,(x)$

(c) Si $V \in \mathcal{B}(x)$ *y* $V \subset W$ *entonces* $W \in \mathcal{B}(x)$

(d) Si $V \in \mathcal{B}(x)$*, entonces existe* $W \in \mathcal{B}(x)$ *tal que si* $y \in W$*, entonces* $V \in \mathcal{B}(y)$*.*

(e) $U \subset X$ *es abierto si y sólo si satisface la condición u):* U *contiene a un elemento de* $\mathcal{B}(x)$ *para cada* $x \in U$*.*

Inversamente, si para cada $x \in X$ *se tiene una colección* $\mathcal{B}(x) \subset 2^X$ *tal que se cumplen a)-d) y se definen los conjuntos abiertos como en e), entonces hay una única topología* τ *para la que cada* $\mathcal{B}(x)$ *es la colección de todas las vecindades de* x *según* τ*.*

Demostración. De la primera parte sólo se probará d). Sea $V \in \mathcal{B}(x)$, entonces $x \in Int(V) \subset V$ y $W = Int(V) \in \mathcal{B}(x)$. Si $y \in W$, entonces se cumple que $W \in \mathcal{B}(y)$ y por c) concluimos que $V \in \mathcal{B}(y)$.

Ahora se probará la segunda parte. Sea $\tau = \{U \subset X : U \text{ satisface u)}\}$. Claramente, $X \in \tau$ y por vacuidad también $\emptyset \in \tau$. La unión de elementos en τ pertenece a τ. Finalmente, supongamos que $U_1, U_2 \in \tau$ y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Existen $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(x)$, tales que $V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$; y por b) $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Así, τ es una topología en X.

Sean $x \in X$ y W una τ-vecindad de x. Existe un τ-abierto U tal que $x \in U \subset W$; de donde existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset U \subset W$ y entonces por c), $W \in \mathcal{B}(x)$.

Por último, sea $V \in \mathcal{B}(x)$, debemos probar que V es una τ-vecindad de x. Afirmamos que $U = \{y \in X : V \in \mathcal{B}(y)\}$ es un τ-abierto. Sea $y_0 \in U$, o sea $V \in \mathcal{B}(y_0)$; por d) existe $W \in \mathcal{B}(y_0)$ tal que si $y \in W$, entonces $V \in \mathcal{B}(y)$ es decir, $W \subset U$ y entonces U es τ-abierto. Claramente, $x \in U \subset V$, de donde V es una τ-vecindad de x.

Una topología tiene a cada $\mathcal{B}(x)$ como la colección de todas las vecindades de x si y sólo si sus elementos están definidos según e). ∎

1.1.1 Bases de vecindades

Sea X un espacio topológico. Para cada $x \in X$ sea $\mathcal{B}(x)$ la colección de todas las vecindades de x. Una *base de vecindades* de x, llamada también *base local o sistema fundamental de vecindades* de x, es una subcolección $\mathcal{N}_x$ de $\mathcal{B}(x)$ que satisface que para cada $W \in \mathcal{B}(x)$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V \subset W$. Es decir,

$$\mathcal{B}(x) = \{W \subset X : V \subset W \text{ para alguna } V \in \mathcal{N}_x\}.$$

Teorema 1.1.3 *Sea* X *un espacio topológico y para cada* $x \in X$ *sea* $\mathcal{N}_x$ *una base de vecindades de* x*. Entonces* *(a) $x \in V$ para todo $V \in \mathcal{N}_x$*

(b) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$

(c) Si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces existe $V_0 \in \mathcal{N}_x$ tal que si $y \in V_0$, entonces $V_1 \subset V$ para algún $V_1 \in \mathcal{N}_y$.

Además,

(d) $U \subset X$ es abierto si y sólo si satisface la condición u): U contiene un elemento de $\mathcal{N}_x$ para cada $x \in U$.

Inversamente, si en un conjunto X se tiene una colección $\mathcal{N}_x \subset 2^X$ para cada $x \in X$ tal que se cumplen (a)-(c) y se definen los conjuntos abiertos como en (d), entonces hay una única topología τ para la que $\mathcal{N}_x$ es una base de vecindades de x para cada $x \in X$.

Demostración. De la primera parte del teorema sólo se probará c). Sea $V \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in int\,(V)$. Existe $V_0 \in \mathcal{N}_x$ tal que $V_0 \subset int\,(V)$. Sea $y \in V_0$, entonces existe $V_1 \in \mathcal{N}_y$ tal que $V_1 \subset int\,(V) \subset V$.

Ahora se probará la segunda parte. Sea $\tau = \{U \subset X : U \text{ satisface u)}\}$. Claramente, $X \in \tau$ y por vacuidad también $\emptyset \in \tau$. La unión de elementos en τ pertenece a τ. Finalmente, supongamos que $U_1, U_2 \in \tau$ y sea $x \in U_1 \cap U_2$. Existen $V_1, V_2, V \in \mathcal{N}_x$, tales que $V \subset V_1 \cap V_2 \subset U_1 \cap U_2$; por tanto, $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Así, τ es una topología en X.

Para cada $x \in X$ definimos

$$\mathcal{B}\,(x) = \{W \subset X : V \subset W \text{ para alguna } V \in \mathcal{N}_x\}$$

Veremos que esta es la colección de todas las τ-vecindades de x. Sea W una τ-vecindad de x, entonces $V \subset W$ para alguna $V \in \mathcal{N}_x$ y por tanto, $W \in \mathcal{B}\,(x)$. Inversamente sea $W \in \mathcal{B}\,(x)$, afirmamos que $x \in int\,(W)$. Tenemos que $V \subset W$ para alguna $V \in \mathcal{N}_x$. Por c) existe $V_0 \in \mathcal{N}_x$ tal que si $y \in V_0$, entonces $V_1 \subset V$ para algún $V_1 \in \mathcal{N}_y$ es decir, $x \in V_0 \subset int\,(W)$.

La unicidad de τ se sigue del Teorema1.1.2. ∎

1.2 Comparación de topologías

Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre el mismo conjunto X. Decimos que τ_1 es *más fina* que τ_2 y que τ_2 es *más gruesa* que τ_1 si $\tau_2 \subset \tau_1$; en este caso escribimos $\tau_2 \preceq \tau_1$. Cualquiera de las siguientes dos condiciones son necesarias y suficientes para que τ_1 sea más fina que τ_2:

(a) Para cada $x \in X$, tenemos $\mathfrak{B}_1\,(x) \supset \mathfrak{B}_2\,(x)$, donde $\mathfrak{B}_i\,(x)$ es la colección de todas las vecindades de x para τ_i $(i = 1, 2)$.

(b) La biyección identidad $x \to x$ de X_1 a X_2 es continua, donde X_i denota a X equipado con la topología τ_i $(i = 1, 2)$.

Claramente, la relación "τ_1 es más fina que τ_2" es un orden parcial en el conjunto de todas las topologías definidas en el conjunto X. La topología más fina en X; es decir, el elemento más grande del conjunto de todas las topologías en X, es la *topología discreta*, en la cual cada subconjunto de X es abierto. La topología más gruesa en X; es decir, la topología más pequeña, es aquella en la cual ϕ y X son los únicos conjuntos abiertos. Esta última topología es llamada *topología indiscreta*.

Sea $(\tau_i)_{i\in I}$ una familia no vacía de topologías definidas en un conjunto X. Existe una topología $\underline{\tau}$ en X que es el *ínfimo de las topologías* τ_i, es decir, una topología τ que tiene las siguientes dos propiedades:

(a) $\underline{\tau}$ es más gruesa que cualquier τ_i.

(b) Si τ' es más gruesa que cualquier τ_i, entonces τ' es más gruesa que $\underline{\tau}$.

De hecho, $\underline{\tau} = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ y $\underline{\tau}$ es la topología más fina entre las que son más gruesas que cada una de las τ_i.

La topología $\underline{\tau}$ también es denotada por $\bigwedge (\tau_i)_{i\in I}$.

De manera similar, existe una topología $\overline{\tau}$ que es el *supremo de las topologías* τ_i, es decir, una topología $\overline{\tau}$ que tiene las siguientes dos propiedades:

(a) $\overline{\tau}$ es más fina que cualquier τ_i.

(b) Si τ' es más fina que cualquier τ_i, entonces τ' es más fina que $\overline{\tau}$.

La topología $\overline{\tau}$ también es denotada por $\bigvee (\tau_i)_{i\in I}$ y es llamada la *topología supremo de* $(\tau_i)_{i\in I}$, ésta es la topología más gruesa de las que son más finas que cada τ_i; o sea si Φ es el conjunto de todas las topologías más finas que cualquier τ_i, entonces $\bigvee (\tau_i)_{i\in I} = \bigwedge \Phi$.

Sea $\mathfrak{G}$ una colección de subconjuntos de un conjunto X. Existe una topología τ que es la más gruesa de todas las topologías definidas en X para la cual todos los conjuntos de $\mathfrak{G}$ son abiertos, a saber, el ínfimo del conjunto Φ de todas las topologías para las cuales los conjuntos de $\mathfrak{G}$ son abiertos. El conjunto Φ es no vacío pues contiene a la topología discreta. Decimos que $\mathfrak{G}$ es una *sub-base* o un *sistema de generadores* de τ y que τ es la topología *generada* por $\mathfrak{G}$. Sea $\mathfrak{G}'$ la colección de todas las intersecciones de un número finito de conjuntos en $\mathfrak{G}$, entonces la topología τ está formada por todas las uniones de conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{G}'$.

En particular, si $(\tau_i)_{i\in I}$ es una familia no vacía de topologías en un conjunto X, entonces, $\bigcup_{i\in I} \tau_i$ es una sub-base del la topología supremo $\bigvee (\tau_i)_{i\in I}$.

Si $\mathfrak{B}$ es una colección de subconjuntos de un conjunto X con la propiedad de que cualquier conjunto abierto en la topología τ generada por $\mathfrak{B}$ es la unión de conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{B}$, entonces decimos que $\mathfrak{B}$ es una *base* para τ. Así, si $\mathfrak{G}$ es una sub-base de la topología τ, entonces la colección $\mathfrak{G}'$ de todas las intersecciones de un número finito de conjuntos en $\mathfrak{G}$ es una base de τ.

Sea X un conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$ sea $f_i : X \to Y_i$ una función. La topología τ en X que es la más gruesa para la cual todas las funciones f_i son continuas es llamada la *topología inicial* en X para la familia $(f_i)_{i\in I}$. Una sub-base de τ esta formada por todos los conjuntos $f_i^{-1}(U)$, donde $U \in \tau_i$, $i \in I$. Una función g de un espacio topológico Z a X es continua para τ si y sólo si $f_i \circ g$ es una función continua de Z a Y_i para cada $i \in I$.

Sea X un e.t. y $A \subset X$. La *topología inducida* en A es la topología inicial en A determinada por la inyección canónica $A \to X$.

Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y sea π_i, $i = 1, 2$, la proyección del producto cartesiano $X_1 \times X_2$ sobre el espacio factor X_i, es decir, $\pi_i((x_1, x_2)) = x_i$. La *topología producto* en $X_1 \times X_2$ se define como la topología inicial determinada por las funciones π_i. Una base para la topología producto en $X_1 \times X_2$ esta formada por todos los conjuntos

$$U_1 \times U_2 = \pi_1^{-1}(U_1) \cap \pi_2^{-1}(U_2),$$

donde U_i es un conjunto abierto en X_i.

Sea $f : (x, y) \to f(x, y)$ una función de $X_1 \times X_2$ a un e.t. Z. Si $y \in X_2$, definimos la y-sección de f como la función f_y de X_1 a Z como $f_y(x) = f(x, y)$ para todo $x \in X_1$. Si f es continua, entonces, f_y también es continua. De manera análoga se define la x-sección de f.

Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, Y un conjunto y para cada índice $i \in I$, sea f_i: $X_i \to Y$ una función. La topología τ en Y que es la más fina para la cual todas las funciones f_i son continuas es llamada la *topología final* en Y para la familia $(f_i)_{i\in I}$. Un conjunto $U \subset Y$ es abierto para τ si y solo si $f_i^{-1}(U)$ es abierto en X_i para cada $i \in I$. Una función g de Y a un e.t. Z es continua para τ si y solo si $g \circ f_i$ es una función continua de X_i a Z para cada $i \in I$.

1.3 Filtros

Definición 1.3.1 *Una colección no vacía $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de un conjunto X es llamada* filtro *de X, si satisface los siguientes axiomas:*

(a) Si $A \subset X$ y A contiene a un conjunto $B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \in \mathfrak{F}$.

(b) La intersección de una colección finita de conjuntos de $\mathfrak{F}$ pertenece a $\mathfrak{F}$.

(c) El conjunto vacío de X no pertenece a $\mathfrak{F}$.

Se sigue de estos axiomas que la intersección de una colección finita de conjuntos de un filtro nunca es vacía. Y como la intersección de la familia vacía de subconjuntos de X es X, se sigue que X pertenece a todo filtro.

Ejemplos 1.3.2 **1**. *Sea x un punto de un conjunto X. La colección de todos los subconjuntos de X que contienen a x es un filtro en X.*

2. *Sea X un espacio topológico y $x \in X$. La colección $\mathfrak{B}(x)$ de todas las vecindades de x forma un filtro en X.*

3. *Sea A un subconjunto no vacío de X. La colección de todos los subconjuntos de X que contienen a A es un filtro de X. El primer ejemplo es un caso especial de éste.*

Definición 1.3.3 *Sea $\mathfrak{B}$ una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X y sea $\mathfrak{F}$ la colección de todos los subconjuntos de X que contienen un conjunto de $\mathfrak{B}$. Claramente, $\mathfrak{F}$ es un filtro si y sólo si $\mathfrak{B}$ satisface las siguientes dos condiciones:*

(a) La intersección de dos conjuntos de $\mathfrak{B}$ contiene a un conjunto de $\mathfrak{B}$.

(b) El conjunto vacío no pertenece a $\mathfrak{B}$.

Tal colección $\mathfrak{B}$ es llamada una base de filtro. También decimos que $\mathfrak{B}$ es una base para el filtro $\mathfrak{F}$ que genera.

Sean $\mathfrak{G}$ una colección no vacía de subconjuntos de X y $\mathfrak{B}$ la colección de todas las intersecciones de un número finito de conjuntos en $\mathfrak{G}$. Si $\emptyset \notin \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B}$ es una base de filtro.

Sea X un espacio topológico y x un punto de X. Una base para el filtro $\mathfrak{B}(x)$ de todas las vecindades de x es lo que llamamos un sistema fundamental de vecindades o base de vecindades de x.

Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y $X_1 \times X_2$ su producto equipado con la topología producto. Un sistema fundamental de vecindades de un punto $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ está dado por todos los conjuntos de la forma $V_1 \times V_2$ donde V_i es una vecindad de x_i en X_i $(i = 1, 2)$. Más en general, si $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2)$ es un sistema fundamental de vecindades del punto x_i en X_i, entonces, los conjuntos $W_1 \times W_2$, donde W_i corre en $\mathfrak{G}_i$, forman un sistema fundamental de vecindades de (x_1, x_2).

Definición 1.3.4 *Un conjunto dirigido es un conjunto no vacío I con una relación $\preceq$ para la que los elementos de I satisfacen:*
(1) $i \preceq i$.
(2) Si $i \preceq j$ y $j \preceq k$, entonces $i \preceq k$.
(3) Dados $i, j \in I$ existe $k_{i,j} \in I$ tal que $i \preceq k_{i,j}$ y $j \preceq k_{i,j}$.

Definición 1.3.5 *Una red en un conjunto X es una función de un conjunto dirigido I en X. El conjunto I es llamado el conjunto de índices de la red. Una sucesión es una red en la que su conjunto de índices es $\mathbb{N}$, con su orden natural.*

Nota 1.3.6 *Si $f : I \to X$ es una red, entonces $f(i)$ se denotará como x_i para cada $i \in I$ y la red completa se denotará como $(x_i)_{i\in I}$ o simplemente (x_i).*

Definición 1.3.7 *Sea (x_i) una red en un espacio topológico X y $x \in X$. Entonces (x_i) converge a x y se dice que x es el límite de (x_i), si para cada vecindad U de x, existe $i_U \in I$ tal que $x_i \in U$ siempre que $i_U \preceq i$. Esta convergencia es denotada como $(x_i) \to x$ ó $\lim_i x_i = x$.*

Proposición 1.3.8 *Si X es un espacio topológico y $F \subset X$ entonces son equivalentes:*
(a) F es cerrado
(b) toda red $(x_i) \subset F$ tal que $(x_i) \to x$ con $x \in X$ cumple $x \in A$.

1.4 Espacios vectoriales topológicos

En lo que sigue $\mathbb{F}$ denota al campo de los números reales o complejos y todos los espacios vectoriales (lineales) se tomarán sobre $\mathbb{F}$.

Definición 1.4.1 *Sea X un espacio vectorial en el que está definida una topología τ. (X, τ) es llamado un espacio vectorial topológico (e.v.t.) si se cumplen:*
(a) La función $(x, y) \to x + y$ de $X \times X$ en X es continua;
(b) La función $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $\mathbb{F} \times X$ a X es continua.
En ambos incisos se consideran las topologías productos.
Una estructura de espacio vectorial y una topología τ en X se dice que son compatibles si (X, τ) es un e.v.t. En este caso también se dice que τ es un topología vectorial en X.

Definición 1.4.2 *Sea X un espacio vectorial. Para $A, B \subset X$ y $F \subset \mathbb{F}$ definimos:*

$$\begin{aligned} A + B &= \{a + b : a \in A, b \in B\}; \\ FA &= \{ra : r \in F, a \in A\}. \end{aligned}$$

Si A consta de un solo punto x, entonces escribimos $a + B$, en lugar de $\{a\} + B$; es decir:

$$a + B = \{a + b : b \in B\}.$$

Todo conjunto de la forma $x + B$ es llamado un trasladado de B.

Si F consta de sólo un punto λ, entonces escribimos λA, en lugar de $\{\lambda\} A$; es decir:

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Definición 1.4.3 *Sean X y Y espacios vectoriales topológicos y sea $f : X \to Y$. Decimos que f es un homeomorfismo si es una aplicación continua y biyectiva y su inversa, $f^{-1} : Y \to X$ también es continua.*

Se sigue de la Definición 1.4.1 que para cualquier $a \in X$, la traslación definida por a es una función continua de X a X. Y como su inverso es la traslación $x \to x - a$, tenemos que la traslación por a es un homeomorfismo de X en X. En particular, las vecindades de a son los conjuntos de la forma $V + a$, donde V es una vecindad del 0. Por lo que conocemos la topología de un espacio vectorial topológico si conocemos las vecindades del 0. También se sigue de la Definición 1.4.1 que para cualquier vecindad V del 0, existe una vecindad U del 0 tal que $U + U \subset V$.

Con relación al producto por un escalar se tiene que para cualquier escalar $\lambda \neq 0$, la homotecia $x \to \lambda x$ definida por λ es una función continua de X a X. Y como su inverso es la homotecia $x \to \frac{1}{\lambda}x$, tenemos que la homotecia dada por λ es un homeomorfismo de X en X. En especial λU es una vecindad de 0 siempre que U lo sea y $\lambda \neq 0$.

Definición 1.4.4 *Sea X un espacio vectorial y $A \subset X$. Decimos que*

(a) A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda x \in A$ si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $|\lambda| \leq \varepsilon$.

(b) A es balanceado si $\lambda A \subset A$ siempre que $|\lambda| \leq 1$.

La condición (a) es equivalente a:

(a') A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in \lambda A$ si $|\lambda| \geq \varepsilon$.

De (b) de la Definición 1.4.1 se sigue inmediatamente que toda vecindad del 0 en X es absorbente. Se tiene que $0 \in A$ si A es un conjunto absorbente

Por otro lado, si A es un conjunto balanceado y $r > 0$ entonces rA es un conjunto balanceado pues si $|\lambda| \leq 1$ y $x \in rA$ entonces $\frac{x}{r} \in A$ y por ser A un conjunto balanceado $\lambda\frac{x}{r} \in A$ lo que implica $\lambda x \in rA$.

Proposición 1.4.5 *La intersección de una colección finita de conjuntos absorbentes en un espacio vectorial X es un conjunto absorbente.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i=1}^n \subset X$ una colección finita de conjuntos absorbentes. Si $x \in X$, entonces por la absorbencia de cada A_i se tiene que existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $\lambda x \in A_i$ si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $|\lambda| < \varepsilon_i$. Hacemos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ y se tiene que $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $|\lambda| < \varepsilon$; es decir $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un conjunto absorbente. ∎

Proposición 1.4.6 *La intersección de una familia arbitraria de conjuntos balanceados es un conjunto balanceado. La cerradura en un e.v.t. de un conjunto balanceado es balanceada.*

Demostración. Sean X un espacio vectorial, $\{A_i\}_{i \in I} \subset X$ una familia arbitraria de conjuntos balanceados y $|\lambda| \leq 1$. Si $\bigcap_{i \in I} A_i = \phi$ la propiedad se cumple por vacuidad. Así, supongamos $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$; entonces, ya que A_i es un conjunto balanceado y que $x \in A_i$ para todo i se cumple que $\lambda x \in A_i$, de donde $\lambda x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, es decir $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un conjunto balanceado

Sean X un e.v.t., $A \subset X$ balanceado, $x \in \overline{A}$ y $|\lambda| \leq 1$. Sea (x_i) una red en A que converge a x, entonces $\lambda x_i \to \lambda x$ y como cada $\lambda x_i \in A$ concluimos que $\lambda x \in \overline{A}$. ∎

Dado un conjunto $B \subset X$, existe un conjunto A que es el más pequeño subconjunto de X que es balanceado y contiene a B. Llamamos a este conjunto A la *envolvente balanceada* de B y es la intersección de todos los conjuntos balanceados que contienen a B.

Se demuestra de manera análoga a la proposición anterior que la unión de una familia arbitraria de conjuntos balanceados es un conjunto balanceado; por lo tanto, dado cualquier subconjunto A de X, existe el conjunto balanceado más grande que está contenido en A, a saber, la unión de todos los conjuntos balanceados contenidos en A. El conjunto B es llamado el *núcleo balanceado* de A. Es no vacío si y sólo si A contiene al 0.

Proposición 1.4.7 *Un punto $x \in X$ pertenece al núcleo balanceado B de A si y sólo si $\lambda x \in A$ para todo $|\lambda| \leq 1$. En particular $0 \in B$ si y sólo si $0 \in A$.*

Demostración. El conjunto $C(x) = \{\lambda x : |\lambda| \leq 1\}$ es claramente balanceado; por lo que si $C(x) \subset A$, entonces $C(x) \subset B$, y en particular, $x \in B$. Inversamente, si $x \in B$, entonces $\lambda x \in B$ y por tanto, $\lambda x \in A$ para todo $|\lambda| \leq 1$. ∎

A partir de esta proposición, y con la misma notación, tenemos que si $B \neq \phi$, o sea si $0 \in A$, entonces

$$B = \bigcap_{|\lambda| \geq 1} \lambda A. \tag{1.1}$$

Sean X y Y dos espacios vectoriales y $f : X \to Y$ una transformación lineal. Si A es un conjunto balanceado en X, entonces $f(A)$ es un conjunto balanceado en Y. Si B es un conjunto balanceado en Y, entonces $f^{-1}(B)$ es un conjunto balanceado en X.

Ya que $x \to \lambda x$ es un homeomorfismo de X en sí mismo, se sigue que la fórmula (1.1) prueba que si A es cerrado, entonces su núcleo balanceado también es cerrado.

Proposición 1.4.8 *En un e.v.t. el núcleo balanceado $B(V)$ de una vecindad V del 0 es una vecindad del 0.*

Demostración. Por la Definición 1.4.1 existen un $0 < \varepsilon < 1$ y una vecindad U del 0 tales que $|\lambda| \leq \varepsilon$ implica $\lambda U \subset V$. El conjunto εU es una vecindad del 0 y está contenido en el núcleo balanceado de V por la fórmula (1.1). ∎

Hemos probado la primera parte del siguiente resultado:

Teorema 1.4.9 *En un espacio vectorial topológico X existe un sistema fundamental $\mathfrak{N}$ de vecindades de 0 tal que*

(a) Todo $V \in \mathfrak{N}$ es absorbente.

(b) Todo $V \in \mathfrak{N}$ es balanceado.

(c) Para cada $V \in \mathfrak{N}$ existe un $U \in \mathfrak{N}$ tal que $U + U \subset V$.

Si X es de Hausdorff, entonces

(d) dado $x \neq 0$ existe $V \in \mathfrak{N}$ tal que $x \notin V$.

Inversamente, sea X un espacio vectorial y $\mathfrak{N}$ una base de filtro en X que satisface las condiciones (a)-(c). Entonces, existe una única topología vectorial en X para la cual $\mathfrak{N}$ es un sistema fundamental de vecindades del 0. Si $\mathfrak{N}$ también satisface (d), entonces X con esa topología es de Hausdorff.

Demostración. Por la Proposición 1.4.8 y las propiedades vistas sobre las vecindades de 0, tenemos que para la prueba de la primera parte del teorema, basta definir

$$\mathfrak{N} = \{B(W) : W \text{ es una vecindad de } 0\}$$

donde $B(W)$ es el núcleo balanceado de W.

Si X es de Hausdorff, entonces dado $x \neq 0$ existe una vecindad W de 0 tal que $(x + W) \cap W = \emptyset$ así, $x \notin B(W)$.

Para la segunda parte, definimos $\mathcal{N}_x = \{x + V : V \in \mathfrak{N}\}$ para cada $x \in X$, así $\mathcal{N}_0 = \mathfrak{N}$.

Comprobaremos que las familias $\mathcal{N}_x$ satisfacen las condiciones (a)-(c) del Teorema 1.1.3

- Es claro que $x \in x + V$ para todo $V \in \mathfrak{N}$ ya que $0 \in V$ por ser V absorbente, de acuerdo (a).
- Si $W_1, W_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $W_1 = x + V_1, W_2 = x + V_2$ con $V_1, V_2 \in \mathfrak{N}$. Por ser $\mathfrak{N}$ una base de filtro existe $V \in \mathfrak{N}$ tal que $V \subset V_1 \cap V_2$ y por tanto, $x + V \subset W_1 \cap W_2$
- Si $W \in \mathcal{N}_x$, entonces $W = x + V$ con $V \in \mathfrak{N}$. Por (c) existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $U + U \subset V$. Hacemos $V_0 = x + U$ y tomamos $y \in V_0$, entonces $V_0 \in \mathcal{N}_x$ y $y + U \subset x + U + U \subset x + V$.

Por el Teorema 1.1.3 existe una única topología τ en X tal que cada $\mathcal{N}_x$ es un sistema fundamental de vecindades de x para τ y cada $x \in X$. En particular $\mathfrak{N} = \mathcal{N}_0$ es un sistema fundamental de vecindades del 0.

Ahora verificamos que esta topología es vectorial para X.

Sean $a, b \in X$ y W una vecindad de $c = a + b$. Entonces $c + V \subset W$ para alguna $V \in \mathfrak{N}$. Por (c) existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $U + U \subset V$. Entonces $a + U$ es una vecindad de a, $U + b$ es una vecindad de b y tenemos

$$(a + U) + (b + U) \subset a + b + V = c + V \subset W;$$

Es decir, la suma es continua.

Sea $V \in \mathfrak{N}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Afirmamos que existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $\lambda U \subset V$. Se sigue de (c), por inducción, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que

$$2^n U \subset \overbrace{U + ... + U}^{2^n} \subset V.$$

Sea n lo suficientemente grande para que $|\lambda| \leq 2^n$. Por (b) tenemos $\lambda 2^{-n} U \subset U$, es decir $\lambda U \subset 2^n U \subset V$.

Sean $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$, y W una vecindad de λa. Existe $W_0 \in \mathfrak{N}$ tal que $\lambda a + W_0 \subset W$. Por (c) existe $V \in \mathfrak{N}$ tal que $V + V + V \subset W_0$. Por (a) existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\eta| < \varepsilon$ implica $\eta a \in V$. Y por lo que acabamos de probar, existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $\lambda U \subset V$.

Si $|\eta| \leq 1$ y $x \in a + V$, entonces, $\eta(x - a) \in V$. Sea $U_0 \in \mathfrak{N}$ tal que $U_0 \subset U \cap V$. Se sigue de la identidad

$$\xi x - \lambda a = (\xi - \lambda) a + \lambda (x - a) + (\xi - \lambda)(x - a)$$

que si $|\xi - \lambda| \leq \min(1, \varepsilon)$ y $x \in a + U_0$, entonces

$$\xi x - \lambda a \in V + V + V \subset W_0,$$

es decir, $\xi x \in W$. Esto prueba la continuidad del producto por un escalar.

Supongamos que $\mathfrak{N}$ también satisface (d), entonces se sigue de que la Proposición 1.4.11 que X es de Hausdorff.

■

Corolario 1.4.10 *Sea X un e.v. y sea $\mathfrak{G}$ una colección no vacía de subconjuntos de X que son absorbentes y balanceados y tales que para cada $V \in \mathfrak{G}$ existe $U \in \mathfrak{G}$ tal que $U + U \subset V$. Entonces, existe una única topología vectorial τ en X para la cual la colección de intersecciones de cualquier número finito de elementos de $\mathfrak{G}$ forman un sistema fundamental de vecindades del 0. Se cumple*

$$A \in \tau \text{ si y sólo si para cada } x \in A \text{ existen } U_1, ..., U_n \in \mathfrak{G} \text{ tales que } x + \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset A.$$

Demostración. Todo conjunto absorbente es no vacío. Por tanto, la intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathfrak{G}$ es no vacía y la colección de dichas intersecciones forman una base de filtro $\mathfrak{N}$ en X. Debido a que $\mathfrak{N}$ satisface las condiciones del teorema anterior se sigue el resultado.
■

Proposición 1.4.11 *Un espacio vectorial topológico es un espacio Hausdorff si para cada elemento $a \neq 0$ existe una vecindad V del 0 que no contiene a a.*

Demostración. Si $a \neq b$, entonces $a - b \neq 0$. Sea U una vecindad del 0 tal que $a - b \notin U$. Existe una vecindad balanceada V del 0 tal que $V + V \subset U$. Entonces

$$(a + V) \cap (b + V) = \phi.$$

Así, X es de Hausdorff. ■

Proposición 1.4.12 *En un e.v.t. toda vecindad del* 0 *contiene una vecindad cerrada y balanceada del* 0.

Demostración. Sea V una vecindad del 0. Existe una vecindad balanceada U del 0 tal que $U + U \subset V$. Veamos que $\overline{U} \subset V$ y entonces $\overline{U}$ es una vecindad de 0 balanceada y cerrada. Si $x \in \overline{U}$, entonces $(x + U) \cap U \neq \phi$; es decir, existe $y \in U$ tal que $x + y \in U$, pero entonces

$$x \in -y + U \subset U + U \subset V. \blacksquare$$

Decimos que un espacio Hausdorff es *regular* si toda vecindad contiene una vecindad cerrada. Como corolario de la proposición anterior se tiene que si un e.v.t es un espacio Hausdorff, entonces es regular.

Definición 1.4.13 *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Decimos que A es un conjunto acotado si es absorbido por toda vecindad del cero, o sea, si para cada vecindad V del cero existe $s > 0$ tal que:*

$$A \subset tV \text{ siempre que } t \geq s$$

Lo anterior equivale a que para toda vecindad balanceada V de 0 en X existe $s > 0$ tal que $A \subset sV$.

Es claro que todo subconjunto de un acotado también lo es y que los conjuntos acotados en dos topologías equivalentes son los mismos.

Proposición 1.4.14 *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) A es acotado.

(b) Para cualesquiera sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{F}$, tal que $\lambda_n \to 0$, se cumple que $\lambda_n x_n \to 0$.

(c) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A se cumple que $\frac{1}{n}x_n \to 0$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b) Sea A un conjunto acotado, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A, $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{F}$, tal que $\lambda_n \to 0$, y U una vecindad del cero. Podemos suponer que $\lambda_n \neq 0$ para todo n. Existe $N > 0$ tal que $A \subset \frac{1}{\lambda_n}U$ si $n \geq N$; de donde $\lambda_n x_n \in U$ si $n > N$, lo que quiere decir que $\lambda_n x_n \to 0$.

(b)$\Rightarrow$(c) Es consecuencia inmediata tomando $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

(c)$\Rightarrow$(a) Supongamos que A no es acotado. Existe una vecindad balanceada U del cero en X y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que , $x_n \notin nU$. Se sigue que $\frac{x_n}{n} \notin U$ para todo $n \geq 1$, lo que contradice (c). $\blacksquare$

Definición 1.4.15 *Sea* (x_i) *una red en un espacio vectorial topológico* X*, decimos que* $(x_i)_{i\in I}$ *es de Cauchy si para cada vecindad* U *del cero, existe un* $i_U \in I$ *tal que* $x_j - x_k \in U$ *siempre que* $i_U \preceq j, k$*. Si toda red de Cauchy es convergente, entonces se dice que* X *es completo.*

Proposición 1.4.16 *Toda red convergente en un espacio vectorial topológico* X*, es de Cauchy.*

Demostración. Sean X un e.v.t. y $(x_i)_{i\in I}$ una red que converge a $x_0 \in X$. Sea W una vecindad del cero en X. Por el inciso (c) del Teorema 1.4.9 existen conjuntos absorbentes y balanceados U y V que cumplen $U + U \subset V \subset W$. Observamos que por ser U balanceado se tiene que $U = -U$. Sea $i_V \in I$ tal que $x_i \in x_0 + U$ siempre que $i_V \preceq i$. Si $i_V \preceq j, k$ entonces:

$$x_j - x_k \in (x_0 + U) - (x_0 + U) = U - U = U + U \subset V \subset W,$$

y así $(x_i)_{i\in I}$ es de Cauchy. ∎

1.5 Operadores y funcionales lineales (Espacios normados)

Proposición 1.5.1 *Una transformación lineal* T*, llamada también operador lineal, de un espacio vectorial topológico* X *en un espacio vectorial topológico* Y *es continua si es continua en el origen. Es decir si para cada* W *vecindad del* 0 *en* Y*, existe una vecindad* V *del* 0 *en* X *tal que* $T(V) \subset W$*.*

Demostración. *Sea* $x \in X$. Toda vecindad de $T(x)$ es de la forma $T(x) + W$, donde W es una vecindad del 0 en Y. Existe una vecindad V del 0 en X tal que $T(V) \subset W$ y entonces, $x + V$ es una vecindad de x que satisface $T(x + V) \subset T(x) + W$. ∎

Una transformación lineal f de un espacio vectorial X en el campo $\mathbb{F}$ es llamada una *funcional lineal*. Para este tipo de transformaciones lineales tenemos el siguiente resultado sobre su continuidad.

Proposición 1.5.2 *Si* f *es un funcional lineal en un e.v.t.* X *sobre el campo* $\mathbb{F}$*, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f *es continuo.*

(b) $\ker(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ *es un conjunto cerrado en* X*.*

(c) Existe una vecindad U *del* 0 *en* X *tal que* $f(U)$ *es un subconjunto acotado de* $\mathbb{F}$*.*

Demostración. El teorema es trivialmente cierto si f es el funcional cero, así que suponemos que no lo es.

(a) $\Rightarrow$ (b) Ya que el núcleo de f es la imagen inversa bajo f del subconjunto cerrado $\{0\}$ de $\mathbb{F}$, se tiene que como f es continuo, entonces $\ker(f)$ es un conjunto cerrado en X.

(b) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que $\ker(f)$ es un conjunto cerrado en X, ya que f no es el funcional cero se tiene que existe $x_0 \in X \diagdown \ker(f)$. Además $X \diagdown \ker(f)$ es un conjunto abierto. Por el Teorema 1.4.9 existe una vecindad balanceada U de cero tal que $x_0 + U \subset X \diagdown \ker(f)$. Observamos que $f(U)$ es un subconjunto balanceado de $\mathbb{F}$ por ser f lineal. Se tiene que $f(u) = -f(x_0)$ implica $u + x_0 \in \ker(f)$, por lo que si $u \in U$, entonces $f(u) \neq -f(x_0)$. Finalmente, ya que el subconjunto balanceado $f(U)$ de $\mathbb{F}$ contiene junto con cada uno de sus miembros λ a cada escalar de valor absoluto menor que $|\lambda|$, no puede contener a ningún escalar con valor absoluto mayor que $|-f(x_0)|$, y por lo tanto debe de ser acotado.

(c) $\Rightarrow$ (a) Existe $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ siempre que $x \in U$. Por consiguiente, para $\varepsilon > 0$ se cumple $|f(x)| < \varepsilon$ siempre que $x \in \frac{\varepsilon}{M}U$. El resultado se sigue al tomar $Y = \mathbb{F}$ en la proposición anterior. ∎

Definición 1.5.3 *Al conjunto de operadores lineales de un espacio vectorial X en otro Y se le denota por $L(X,Y)$. Cuando X y Y son e.v.t. al subespacio de $L(X,Y)$ formado por aquellos operadores que son continuos se le denota por $B(X,Y)$ y por $B(X)$ cuando además $X = Y$. En particular, al conjunto de todas las funcionales lineales lo llamamos el dual algebraico de X y se denota por $X^{\#}$. Cuando X es un e.v.t., entonces al subespacio de $X^{\#}$ formado por los funcionales lineales que son continuos se le llama el dual topológico de X y se le denota por X^*.*

Definición 1.5.4 *Un operador lineal T biyectivo y continuo de un e.v.t. X en un e.v.t Y es llamado isomorfismo si el operador inverso T^{-1} es continuo, es decir, si T es un homeomorfismo lineal. Un operador lineal T continuo e inyectivo de un e.v.t X en un e.v.t Y es llamado un morfismo estricto si es un isomorfismo de X en su imagen $T(X)$ $(\mathrm{Im}(T))$.*

Dos espacios vectoriales topológicos X y Y son isomorfos si existe un isomorfismo de X sobre Y. Un isomorfismo de X sobre X es llamado automorfismo.

Si M es un subespacio de un espacio vectorial topológico (X, τ), entonces la topología inducida en M por τ es vectorial para M y por tanto, M es un espacio vectorial topológico. A menos que se diga lo contrario, siempre consideraremos en cualquier subespacio la topología inducida.

Definición 1.5.5 *Una norma en un espacio vectorial* X *es una función* $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ *que satisface las siguientes tres propiedades.*

(a) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

siempre que $x, y \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$.

La función $d(x, y) = \|y - x\|$ *es una métrica en* X *que es llamada la inducida por la norma* $\|\cdot\|$.

Proposición 1.5.6 *Si* $\|\cdot\|$ *es una norma en un espacio vectorial* X *y en éste consideramos la topología definida por la distancia inducida por* $\|\cdot\|$, *entonces* X *es un espacio vectorial topológico de Hausdorff que se denota como* $(X, \|\cdot\|)$. *Si este espacio es completo entonces es llamado de Banach.*

Demostración. La continuidad de las operaciones lineales se sigue de la siguientes dos desigualdades:

$$\|x + y - (z + w)\| \leq \|x - z\| + \|y - w\|,$$

$$\|\alpha x - \beta y\| \leq |\alpha| \, \|(x - y)\| + |\alpha - \beta| \, \|y\|.$$

El espacio $(X, \|\cdot\|)$ es de Hausdorff por ser métrico. ∎

El siguiente resultado es fácil de probar.

Lema 1.5.7 *En un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *toda bola abierta con centro en* 0 *es balanceada, absorbente y convexa. La colección* $\{B_r(0) : r > 0\}$, *donde* $B_r(0)$ *es la bola abierta con centro en* 0 *y radio* r, *es una base de su topología vectorial. Un conjunto* A *es acotado si y sólo si* $A \subset B_r(0)$ *para alguna* $r > 0$.

Proposición 1.5.8 *Sean* $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *dos espacios normados y* $T : X \to Y$ *un operador lineal, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) T *es continua.*

(b) T *es continua en* 0.

(c) T *es acotado, es decir transforma todo conjunto acotado de* X *en un conjunto acotado de* Y.

(d) Existe $M > 0$ *tal que* $\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$ *para todo* $x \in X$.

(e) Existe $M > 0$ *tal que* $\|T(x)\|_Y \leq M$ *si* $\|x\|_X = 1$.

Demostración. Por la Proposición 1.5.1 se tiene que (a) $\Leftrightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (c) Si T es continua en 0 entonces existe una bola abierta U centrada en el cero tal que $\|T(x)\| < 1$, siempre que $x \in U$. Para cada subconjunto acotado A de X, existe un número positivo t_A tal que $A \subset t_A U$, y por consiguiente, $\|T(x)\| < t_A$ si $x \in A$. Por lo que el operador T es acotado.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sea T acotado, entonces $T(B)$ es acotado en Y donde B es la bola unitaria cerrada de X. Definimos

$$M = \sup\{\|T(x)\| : x \in B\}.$$

Si $x \neq 0$, entonces $\|x\|^{-1} x \in B$, así que $\left\|T\left(\|x\|^{-1} x\right)\right\| \leq M$ y por consiguiente $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. Esta última desigualdad se mantiene cierta si $x = 0$, por lo que la implicación queda probada.

(d) $\Rightarrow$ (a) La desigualdad que aparece en (d) implica la continuidad de T en 0.

Es inmediato comprobar que (d) $\Leftrightarrow$ (e). ∎

Corolario 1.5.9 *Con la notación del teorema anterior, tenemos que si* $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ *para todo* $x \in X$ *y* T *es biyectiva, entonces* T *es un isomorfismo.*

Demostración. Como se cumple que

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

se sigue que

$$\left\|T^{-1}(y)\right\|_X = \|y\|_Y$$

y entonces T y T^{-1} son continuas por el Teorema 1.5.8. ∎

1.6 Espacios vectoriales de dimensión finita

Definición 1.6.1 *Sea* X *un espacio vectorial, si* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ *es un conjunto de elementos de* X*, entonces* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ *es una base de Hamel para* X *si todo elemento* $x \in X$ *tiene una representación única de la forma:*

$$x = \sum_{\alpha\in\Delta} \lambda_\alpha x_\alpha,$$

en donde todos excepto un número finito de los coeficientes λ_α *son cero.*

Definición 1.6.2 *Si X es un e.v. decimos que X tiene dimensión finita si X tiene una base de Hamel finita, en este caso, decimos que la dimensión de X es n ($\dim X = n$) si la cardinalidad de alguna de sus bases de Hamel es igual a n.*

Observación 1.6.3 *Es una consecuencia del axioma de elección que todo espacio vectorial tiene una base de Hamel, así como que cualquier subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial se puede extender para formar una base del espacio; además la cardinalidad de todas las bases de Hamel de un espacio es la misma.*

Lema 1.6.4 *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$ y $\{x_i\}_{i=1}^n$ una base de Hamel para X. La función $|\cdot|$ definida para cada $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ como:*

$$|x| = |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| .$$

es una norma en X.

Además, la función:

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \mathbb{F}^n & \longrightarrow & (X, |\cdot|) \\ (\lambda_1, ..., \lambda_n) & \longrightarrow & \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \end{array}$$

es un isomorfismo, donde $\mathbb{F}^n$ tiene su topología usual, misma que se genera con la norma

$$\|(\lambda_1, ..., \lambda_n)\|_1 = |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| .$$

Demostración. Es inmediato comprobar que $|\cdot|$ es una norma en X. Es claro que T es lineal. La suprayectividad de T es consecuencia de que $\{x_i\}_{i=1}^n$ genera a X, y la inyectividad de T es consecuencia de la independencia lineal de $\{x_i\}_{i=1}^n$.

Como se cumple que

$$|T(\lambda_1, ..., \lambda_n)| = \|(\lambda_1, ..., \lambda_n)\|_1$$

entonces T es un isomorfismo por el Corolario 1.5.9. ∎

Observación 1.6.5 *Como consecuencia del lema anterior tenemos que una sucesión $\left(\alpha_1^j x_1 + ... + \alpha_n^j x_n\right)$ en $(X, |\cdot|)$ converge a $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$ si y sólo si $\lim_j \alpha_m^j = \alpha_m$ para $1 \leq m \leq n$.*

Corolario 1.6.6 *Si S_n es la esfera unitaria en $\mathbb{F}^n$, entonces la esfera unitaria de $(X, |\cdot|)$ es $T(S_n)$ y por tanto es compacta en $(X, |\cdot|)$*

En las pruebas de todos los resultados que siguen en esta sección , excepto el último, se supone que $n \geq 1$, pero ellos son trivialmente ciertos para $n = 0$. En el Corolario 1.6.12, $\mathbb{F}^n$ con $n = 0$ debe interpretarse como $\{0\}$.

Lema 1.6.7 *Sea X de dimensión finita n. Consideramos la norma $|\cdot|$ definida en el lema anterior. Sea $(Z, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces cada función lineal $T : X \to Z$ es continua*

Demostración. Tenemos

$$\|T(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n)\| \leq (\|T(x_1)\| + ... + \|T(x_n)\|) \cdot |\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|;$$

así T es continua. ■

Teorema 1.6.8 *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados, con X de dimensión n, entonces todo operador lineal de X a Y es continuo.*

Demostración. Sean $W = (X, |\cdot|)$ el espacio normado con la norma $|\cdot|$ definida como en el Lema 1.6.4.

Sea I el operador identidad en X, visto como miembro de $L(X, W)$. Ya que por el lema anterior $T \in B(W, Y)$ y $T = TI$ el teorema quedará probado una vez que se muestre que $I : (X, \|\cdot\|_X) \to (X, |\cdot|)$ es acotado.

Sea S_W la esfera unitaria S_W de W. Sabemos que S_W es compacto en W. Ya que $I^{-1} \in B(W, X)$ por el Lema 1.6.7 se sigue que la función $w \to \|I^{-1}(w)\|$ de W a $\mathbb{R}$ es continua y por tanto, alcanza su valor mínimo m en el compacto S_W y $m > 0$ ya que $\|I^{-1}(x)\| = 0$ implica $x = 0$. Si I no es acotada, existe una sucesión (z_j) en la esfera S de X tal que $|I(z_j)| \geq j$ para cada j. Al hacer $w_j = |I(z_j)|^{-1} I(z_j)$ para cada $j \geq 1$ obtenemos una sucesión (w_j) en S_W tal que $\|I^{-1}(w_j)\|_X = |I(z_j)|^{-1} \|z_j\|_X \to 0$ cuando $j \to \infty$, lo que contradice que $m > 0$. Por consiguiente, el operador I es acotado. ■

Teorema 1.6.9 *Sean X y Y espacios normados $n-$dimensionales. Entonces, todo operador lineal biyectivo de X a Y es un isomorfismo*

Demostración. Sea T un operador lineal de X a Y. Ya que X y Y tienen la misma dimensión finita, el operador T es biyectivo y por el teorema anterior se tiene que tanto T, como T^{-1} son continuos. ■

Corolario 1.6.10 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *entonces, todos los espacios normados* $n-$*dimensionales son isomorfos entre sí.*

Demostración. En vista del teorema anterior, basta probar que existe un operador lineal entre cualesquiera dos espacios normados $n-$dimensionales X y Y, pero esto siempre es cierto: considérese la extensión lineal de cualquier función biyectiva entre una base de X y una base de Y. ∎

Corolario 1.6.11 *Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene exactamente una topología inducida por una norma.*

Demostración. Sea X un e.v. de dimensión n y S un operador lineal biyectivo de X sobre $\mathbb{F}^n$. Se verifica fácilmente que la fórmula $\|x\|_S = \|S(x)\|$ define una norma en X. Si $\|\cdot\|$ es cualquier norma en X, entonces, la identidad $I : (X, \|\cdot\|_T) \to (X, \|\cdot\|_0)$ es un isomorfismo; así, las dos normas inducen a la misma topología. ∎

Resumimos en el siguiente corolario resultados que se siguen inmediatamente de lo antes visto.

Corolario 1.6.12 *Para cada* $n \geq 0$*, la única topología de norma que* $\mathbb{F}^n$ *puede tener es su topología euclidiana.*

Todo espacio normado de dimensión finita n *es isomorfo al espacio euclidiano* $n-$*dimensional.*

Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es un subconjunto cerrado del espacio.

Lema 1.6.13 *Si* (X, τ) *es un e.v.t. de Hausdorff y* Y *es un subespacio de* X *tal que la topología de* X *restringida a* Y *está inducida por una norma* $\|\cdot\|$ *con respecto a la cual* Y *es de Banach, entonces* Y *es un subespacio cerrado de* X.

Demostración. Basta mostrar que si (y_i) es una red en Y tal que $(y_i) \xrightarrow{\tau} x$ con $x \in X$, entonces $x \in Y$. Para tal red se tiene que (y_i) es de Cauchy en $(Y, \|\cdot\|)$. Por ser este subespacio de Banach se sigue que existe $y \in Y$ tal que $(y_i) \xrightarrow{\tau} y \in Y$. Por ser X de Hausdorff, $y = x$. ∎

Teorema 1.6.14 *Si* X *es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces* X *tiene una y sólo una topología que lo hace un espacio vectorial topológico de Hausdorff y esta topología está inducida por una norma de Banach.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre la dimensión de X. Si $\dim(X) = 0$ el resultado se cumple: la topología indiscreta y la norma trivial cumplen las condiciones y la topología indiscreta es la única topología para el espacio trivial. Suponemos que el teorema es cierto cuando $\dim(X) = n-1$. Sea X un e.v. tal que $\dim(X) = n$ y sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ una base de Hamel para X, sea $|\cdot|$ la norma en X definida como en el Lema 1.6.4, la cual es una norma de Banach. Sea τ una topología vectorial Hausdorff en X. Para $1 \leq j \leq n$, sea f_j el $j-$coeficiente funcional para la base $\{x_i\}_{i=1}^n$, es decir, si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ entonces $f_j(x) = \lambda_j$ para $1 \leq j \leq n$. Cada f_j es una funcional lineal y $\dim(\ker(f_j)) = n-1$ ya que una base para $\ker(f_j)$ es $\{x_i\}_{i=1,\, i\neq j}^n$. Por la hipótesis de inducción y el lema anterior $\ker(f_j)$ es $\tau-$cerrado. Se sigue de la Proposición 1.5.2 que cada f_j es $\tau-$continuo, además, por el Teorema 1.6.8 cada f_j es $|\cdot|-$continuo.

De la τ y$|\cdot|-$continuidad de la operaciones lineales y de los coeficientes funcionales se sigue que el operador identidad

$$I(x) = f_1(x)\, x_1 + ... + f_n(x)\, x_n$$

de (X, τ) a $(X, |\cdot|)$ y de $(X, |\cdot|)$ a (X, τ) es continuo, por lo que τ coincide con la topología inducida por $|\cdot|$. ∎

1.7 Espacio cociente

Proposición 1.7.1 *La cerradura $\overline{M}$ de un subespacio vectorial M de un espacio vectorial topológico X es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. Sean $x \in \overline{M}$, $y \in \overline{M}$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Sean (x_i) y (y_i) redes en M que convergen a x y y, respectivamente. Entonces $x_i + y_i \to x + y$ y $\lambda x_i \to \lambda x$ como $x_i + y_i \in M$ y $\lambda x_i \in M$ para todo i, tenemos que $x + y, \lambda x \in \overline{M}$. ∎

Sea X un espacio vectorial arbitrario, R una relación de equivalencia en X, y sea φ la función canónica de X sobre el conjunto cociente X/R que asigna a cada elemento $x \in X$ su clase de equivalencia $\varphi(x)$ módulo R.

Para un espacio vectorial topológico X, la *topología cociente* en X/R es la topología final inducida por φ, es decir es la topología más fina que hace a φ continua. Así, un subconjunto A de X/R es abierto si y solo si $\varphi^{-1}(A)$ es abierto en X.

En lo que sigue, siempre consideraremos a X/R equipado con la topología cociente.

Sea M un subespacio vectorial de X, y definamos R como xRy si $y - x \in M$. Al espacio X/R lo denotamos como X/M y dotado con la topología cociente es llamado el espacio cociente de X módulo M.

Proposición 1.7.2 *Sea $f : X \to Y$ una función entre los espacios vectoriales X y Y. Existe una única función $\overline{f} : X/R \to Y$ que hace conmutativo al diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & \varphi & \\ X & \to & X/R \\ & f \searrow & \downarrow \overline{f} \\ & & Y \end{array}$$

(o sea, $f = \overline{f} \circ \varphi$) si y sólo si f es constante en cada clase de equivalencia módulo R. Si X y Y son e.v.t entonces $\overline{f}$ es continua si y sólo si f es continua.

Demostración. La primera afirmación es inmediata. Si $\overline{f}$ es continua, entonces, la función composición f también lo es. Inversamente, supongamos que f es continua y sea U un conjunto abierto en Y. Entonces el conjunto $f^{-1}(U) = \varphi^{-1}\left(\overline{f}^{-1}(U)\right)$ es abierto en X, y por tanto, por la definición de topología cociente, $\overline{f}^{-1}(U)$ es abierto en X/R, lo que implica que $\overline{f}$ es continua. ∎

Consideremos un e.v.t. X y M uno de sus subespacios lineales, no necesariamente cerrado. A la clase de $x \in X$ en X/M la denotaremos por $[x]$, o sea $[x] = \varphi(x)$.

El espacio X/M es un espacio vectorial al definir las operaciones lineales entre clases mediante sus representantes. En este caso, la función canónica φ es lineal y no solamente es continua sino abierta, como ahora comprobamos: sea A un conjunto abierto en X; entonces $\varphi^{-1}(\varphi(U))$ es claramente el conjunto $U + M$. El conjunto $x + U$ es abierto para cada $x \in M$, y por tanto,

$$U + M = \bigcup_{x \in M} (x + U)$$

es abierto, lo que prueba que $\varphi(U)$ es abierto en X/M.

Se sigue que un conjunto V en X/M es una vecindad de un punto $[x]$ si y solo si $\varphi^{-1}(V)$ es una vecindad de x en X.

Proposición 1.7.3 *Sean X un e.v.t. de Hausdorff y M un subespacio lineal. El espacio X/M es vectorial topológico, y es de Hausdorff si y sólo si M es cerrado en X.*

Demostración. Sea V una vecindad del punto $[x]+[y] \in X \diagup M$. Entonces, $\varphi^{-1}(V)$ es una vecindad de $x+y$. Existen vecindades U y W de x y y tales que $U+W \subset \varphi^{-1}(V)$ y así, $\varphi(U)$ y $\varphi(W)$ son vecindades de $[x]$ y $[y]$, respectivamente, tales que $\varphi(U)+\varphi(W)=\varphi(U+W) \subset V$.

De forma similar, si V es una vecindad de $\lambda[x]$ en $X \diagup M$, entonces $\varphi^{-1}(V)$ es una vecindad de λx en X y existen una vecindad B de λ en $\mathbb{F}$ y una vecindad U de x en X tales que $BU \subset \varphi^{-1}(V)$. Entonces, B y $\varphi(V)$ son vecindades de λ y$[x]$, respectivamente, tales que $B\varphi(U)=\varphi(BU) \subset V$.

Si $X \diagup M$ es un espacio Hausdorff, entonces, en particular, el conjunto $\{[0]\}$ es cerrado en $X \diagup M$. Como φ es continua, el conjunto $M=\varphi^{-1}(\{[0]\})$ es cerrado en X.

Inversamente, supongamos que M es cerrado y sea $[x]$ un elemento de $X \diagup M$ distinto de $[0]$. Entonces, $x \notin M$; por lo que existe una vecindad U de x tal que $U \cap M \neq \emptyset$, pero entonces, $[x]-\varphi(U)$ es una vecindad de $[0]$ que no contiene a $[x]$ y por tanto, $X \diagup M$ es un espacio Hausdorff por la Proposición 1.4.11. ∎

Capítulo 2

Espacios localmente pseudoconvexos

En este capítulo se definen los espacios localmente p-convexos, con $0 < p \leq 1$, que tienen como caso particular a los localmente convexos ($p = 1$). También se introducen los espacios localmente pseudoconvexos que son una clase más amplia que los localmente p-convexos y se estudian los operadores lineales entre estos espacios y funcionales lineales en ellos definidos.

Para lo anterior son fundamentales los conceptos de conjunto absorbente, balanceado y p-convexo y la relación de estos con las p-seminormas. Con el uso de las funcionales de Minkowski se prueba que un espacio es pseudoconvexo si y sólo si su topología está dada por una familia de p-seminormas, donde p puede variar con la seminorma.

En la última sección se presenta un antecedente histórico a lo expuesto en las anteriores. Ahí se da la definición de conjunto pseudoconvexo que fue introducida por Rolewicz y se hace ver que la definición de espacio pseudoconvexo que el mismo dio con base en tales conjuntos es equivalente a la vista en la primera sección, vía la caracterización por $p-$seminormas.

2.1 Espacios localmente p-convexos y localmente pseudoconvexos

Definición 2.1.1 *Decimos que un subconjunto A de un e.v. X es p-convexo, donde $0 < p \leq 1$, si siempre que $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ y $\alpha^p + \beta^p = 1$ tenemos $\alpha A + \beta A \subset A$; en el caso especial en que $p = 1$ decimos que A es convexo; es decir un subconjunto A de un e.v. X es convexo si para $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ tenemos que $\alpha A + \beta A \subset A$.*

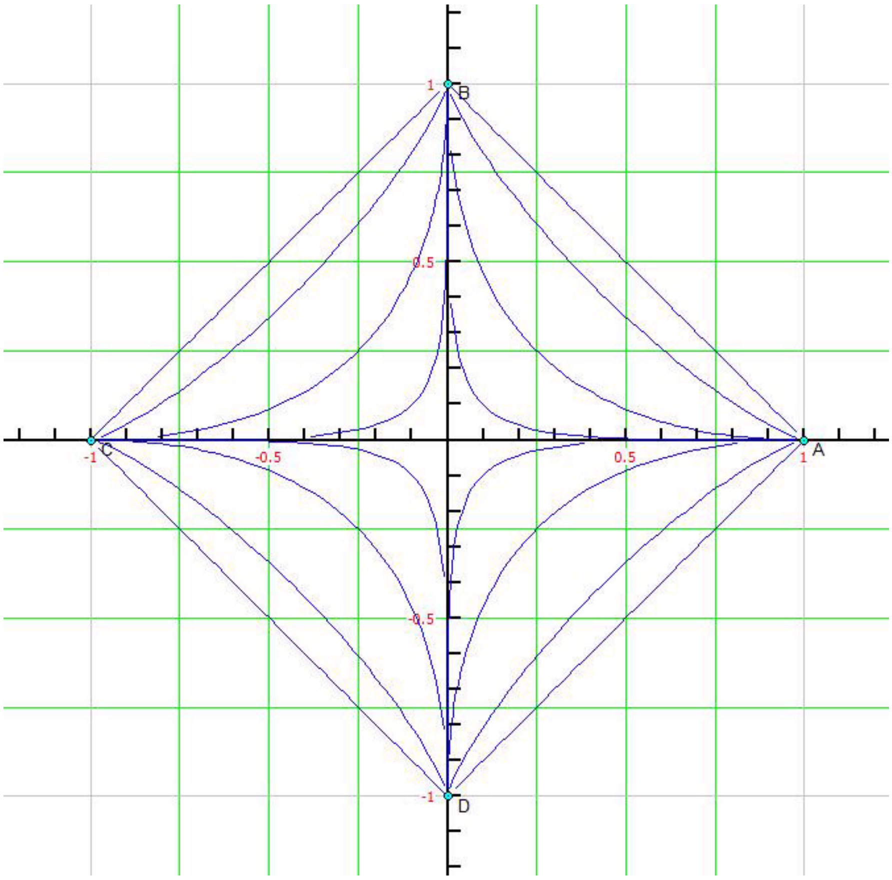

Figura 2.1:

Se dice que A es absolutamente p-convexo si es balanceado y p-convexo; esto equivale a que $\alpha A + \beta A \subset A$ si los escalares son tales que $|\alpha|^p + |\beta|^p \leq 1$. Cuando $p = 1$, entonces A es simplemente llamado absolutamente convexo o disco.

Para ilustrar con un ejemplo el concepto de $p-$convexidad, a continuación se presenta un dibujo de 4 conjuntos $p-$convexos anidados, siendo las fronteras de cada uno de ellos las $p-$líneas que unen a los puntos $A = (1, 0)$ con $B = (0, 1)$, B con $C = (-1, 0)$, C con $D = (0, -1)$ y D con A; mientras que la p toma los valores $1, 0.8, 0.5$ y 0.3.

Proposición 2.1.2 *Si un subconjunto A de un e.v. X es $p-$convexo, entonces*

$$\alpha^{\frac{1}{p}} A + \beta^{\frac{1}{p}} A \subset (\alpha + \beta)^{\frac{1}{p}} A$$

si $\alpha, \beta \geq 0$. En el caso $p = 1$ se da la igualdad.

Demostración. Supongamos que $\alpha + \beta > 0$. Entonces $\frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}} \geq 0$, $\frac{\beta^{\frac{1}{p}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}} \geq 0$ y $\left(\frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}}\right)^p + \left(\frac{\beta^{\frac{1}{p}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 1$, de donde:

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}} A + \frac{\beta^{\frac{1}{p}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{p}}} A \subset A$$

y obtenemos la contención.

Cuando $p = 1$ es obvia la otra contención: $(\alpha + \beta) A \subset \alpha A + \beta A$. ∎

Diremos que A es $p(A)$ convexo para señalar que $0 < p(A) \leq 1$ y que A es p-convexo para el escalar $p = p(A)$. Haremos lo anterior cuando se hable de la p-convexidad de diversos conjuntos, donde el valor p puede variar de conjunto a conjunto.

En la penúltima sección de este capítulo, se define conjunto *pseudoconvexo*. Ahí damos un ejemplo que muestra que la clase de los conjuntos p-convexos de un espacio vectorial X, para alguna $0 < p \leq 1$, es una subclase propia de la clase de los conjuntos pseudoconvexos de X.

Si un subconjunto A de un e.v. X es p-convexo, entonces λA es p-convexo para todo $\lambda \in \mathbb{F}$. Es decir, las homotecias de p-convexos también lo son. Las traslaciones de todo conjunto convexo son convexas.

Sean X y Y dos espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una transformación lineal . Si A es $p-$convexo en X, entonces $T(A)$ es $p-$convexo en Y. Si B es $p-$convexo en Y, entonces $T^{-1}(B)$ es $p-$convexo en X.

La intersección de una familia arbitraria de conjuntos $p-$convexos es un conjunto $p-$convexo. Dado un conjunto arbitrario B en X, existe un conjunto A que es el conjunto p-convexo más pequeño que contiene a B, a saber, la intersección de todos los conjuntos $p-$convexos que contienen a B. Este conjunto A es llamado la *envolvente* $p-$*convexa* de B. Como cualquier múltiplo escalar de un p-convexo es p convexo y por tanto, el núcleo balanceado de un p-convexo es p-convexo.

Lema 2.1.3 *Si A es absolutamente p_1-convexo y B es absolutamente p_2-convexo, entonces $A \cap B$ es absolutamente* p-convexo, *donde* $p = \min(p_1, p_2)$.

Demostración. El resultado se sigue de que $\alpha^p + \beta^p \leq 1$, con $\alpha, \beta \geq 0$, implica

$$\alpha^{p_i} + \beta^{p_i} \leq 1$$

para $i = 1, 2$. ∎

Por supuesto, este resultado se generaliza por inducción para un número finito de conjuntos.

Proposición 2.1.4 *En un e.v.t. la cerradura de un conjunto $p-$convexo A es un conjunto $p-$convexo.*

Demostración. Sean $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{A}$, $\alpha > 0, \beta > 0$, con $\alpha^p + \beta^p = 1$. Sean (x_i) y (y_i) redes en A que convergen a x y y, respectivamente. Entonces $\alpha x_i + \beta y_i \to \alpha x + \beta y$ y como $\alpha x_i + \beta y_i \in A$ para todo i, tenemos que $\alpha x + \beta y \in \overline{A}$. ∎

Definición 2.1.5 *Un espacio vectorial topológico X es llamado localmente pseudoconvexo si 0 tiene un sistema fundamental de vecindades tal que cada uno de sus elementos V es un conjunto $p(V)$-convexo para algún $0 < p(V) \leq 1$ que depende de V. Si dicha p es la misma para todos los miembros del sistema fundamental, entonces se dice que el espacio es localmente p-convexo y si este es el caso y $p = 1$, entonces X es llamado localmente convexo en lugar de 1-convexo.*

Nota 2.1.6 *Si $\mathfrak{G}$ es un sistema de subconjuntos de un e.v. X que satisface las condiciones del Corolario 1.4.10 y además, cada $V \in \mathfrak{G}$ es $p-$convexo, entonces, la topología definida por $\mathfrak{G}$ en X es localmente $p-$convexa.*

En este capítulo se probará que un espacio puede ser $p-$convexo para alguna $0 < p < 1$ y no ser localmente convexo $(p = 1)$, y también se probará que los espacios localmente $p-$convexos son un subconjunto propio de los espacios localmente pseudoconvexos.

De aquí en adelante todos los teoremas y proposiciones se referirán a espacios localmente pseudoconvexos pero debido a las contenciones antes mencionadas y a la importancia de los espacios localmente convexos y de los localmente $p-$ convexos es conveniente recordar, cuando no se menciona explícitamente, que ellos son aplicables a los importantes casos particulares en que el espacio es convexo o, más en general, $p-$ convexo.

Proposición 2.1.7 *En un espacio localmente pseudoconvexo, las vecindades V del 0 que son cerradas y absolutamente $p(V)-$convexas, para algún $0 < p(V) \leq 1$ forman un sistema fundamental de vecindades del 0. Si el espacio es localmente p-convexo, para alguna $0 < p \leq 1$, entonces las vecindades V del 0 que son cerradas y absolutamente $p-$convexas forman un sistema fundamental de vecindades del 0.*

Demostración. Sea W una vecindad del 0. Entonces, por la Proposición 1.4.12 W contiene a una vecindad cerrada V del 0. Por hipótesis, V contiene una vecindad U del 0 que es $p(U)$ −convexa y $\overline{U} \subset V$. Finalmente, el núcleo balanceado de $\overline{U}$ es una vecindad del 0 cerrada, absolutamente $p(U)$ −convexa y está contenido en W. ∎

Probemos un resultado en la dirección opuesta.

Proposición 2.1.8 *Sea X un e.v. y sea $\mathfrak{B}$ una base de filtro en X formada por conjuntos V absorbentes y absolutamente $p(V)$-convexos. Sea $\mathfrak{N}$ la colección de todos los conjuntos λV, con $\lambda > 0$ y $V \in \mathfrak{B}$. Entonces, existe una única topología τ en X para la cual $\mathfrak{N}$ es un sistema fundamental de vecindades del 0. Es claro que (X, τ) es localmente pseudoconvexo. Si cada conjunto V es $p-$ convexo, para alguna $0 < p \leq 1$, entonces (X, τ) es localmente $p-$ convexo.*

Demostración. La colección $\mathfrak{N}$ es una base de filtro en X, ya que

$$\lambda V \subset \lambda_1 V_1 \cap \lambda_2 V_2$$

si $V_i, V \in \mathfrak{B}, \lambda_i > 0$ para $i = 1, 2$, $V \subset V_1 \cap V_2$ y $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Además es obvio que satisface las condiciones (a) y (b) del Teorema 1.4.9, y ahora comprobamos que también satisface la (c): sean $V \in \mathfrak{B}$ y $\lambda > 0$, entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p(V)}} \lambda V \in \mathcal{N}$ y $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p(V)}} \lambda V + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p(V)}} \lambda V \subset \lambda V$. Por ese teorema, se sigue la existencia y unicidad de la topología τ. Por otra parte, λV es $p(V)$-convexo para cada $V \in \mathfrak{B}$ y $\lambda > 0$. ∎

Observación 2.1.9 *La proposición anterior es válida si restringimos los valores de λ al intervalo $(0, 1]$.*

Proposición 2.1.10 *Sea X un e.v. y sea $\mathfrak{G}$ una colección no vacía de subconjuntos V de X absorbentes y absolutamente $p(V)$ −convexos. Sea $\mathfrak{B}$ la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma λV donde $\lambda > 0$ y $V \in \mathfrak{G}$. Entonces, existe una única topología localmente pseudoconvexa en X para la cual $\mathfrak{B}$ es un sistema fundamental de vecindades del 0. Si cada conjunto V es $p-$ convexo, para alguna $0 < p \leq 1$, entonces (X, τ) es localmente $p-$ convexo.*

Demostración. La colección $\mathfrak{B}$ es una base de filtro en X formada por conjuntos absorbentes U, cada uno de ellos absolutamente $p(U)$-convexo. Dicha colección coincide con $\mathfrak{N} = \{\lambda U : U \in \mathfrak{B}, \lambda > 0\}$. Por consiguiente, el resultado se sigue de la proposición anterior. ∎

Corolario 2.1.11 *Sean $\mathfrak{G}$ la colección de la proposición anterior, $\mathfrak{I}$ la de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{B}_0$ la de todos los conjuntos λU, con $\lambda > 0$ y $U \in \mathfrak{I}$. Entonces, $\mathfrak{B}_0$ es un sistema fundamental de vecindades del 0 equivalente al $\mathfrak{B}$ de la proposición anterior; es decir, generan la misma topología.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{B}_0$ es una base de filtro en X formada por conjuntos absorbentes U, cada uno de los cuales es absolutamente $p(U)$-convexos; por tanto, existe en X una única topología localmente pseudoconvexa $\tau(\mathfrak{B}_0)$ para la cual $\mathfrak{B}_0$ es un sistema fundamental de vecindades del 0. Por sus definiciones, $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}$, por lo que en $\tau(\mathfrak{B}_0) \subset \tau(\mathfrak{B})$.

Inversamente, si $V_i \in \mathfrak{G}$ para $1 \leq i \leq n$ y $\lambda = \min\limits_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$, entonces

$$\lambda_1 U_1 \cap \lambda_2 U_2 \cap ... \cap \lambda_n U_n \supset \lambda (U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n).$$

y por tanto, $\tau(\mathfrak{B}) \subset \tau(\mathfrak{B}_0)$. ∎

Observación 2.1.12 *Por la Observación 2.1.9 se tiene que en la proposición y corolarios anteriores también podemos restringir los valores de λ al intervalo $(0,1]$.*

2.1.1 Las p-seminormas

Definición 2.1.13 *Una $p-$seminorma, donde $0 < p \leq 1$, en un e.v. X es una función*

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$$

que satisface las siguientes dos propiedades

(a) $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$.

(b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ si $x, y \in X$

Se sigue de (a) y (b) que toda $p-$seminorma $\|\cdot\|$ también tiene las siguientes propiedades

(c) $\|0\| = 0$.

(d) $\|-x\| = \|x\|$.

(d) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Nota 2.1.14 *Si $\|\cdot\|$ no es idénticamente 0, entonces p es llamado el índice de homogeneidad de $\|\cdot\|$, y cuando $p = 1$ la función es llamada simplemente una seminorma.*

Lema 2.1.15 *La desigualdad $(r + s)^p \leq r^p + s^p$ se cumple si $0 < p \leq 1$ y $r, s \geq 0$.*

Demostración. Si $p = 1$ se tiene la igualdad. Lo mismo sucede si r o s es 0. Así, supongamos $0 < p < 1$ y $r, s > 0$.

Al dividir la inecuación entre r^p y hacer el cambio de variable $t = \frac{s}{r}$ obtenemos la inecuación equivalente.

$$(1+t)^p - t^p - 1 \leq 0$$

La función $h(x) = (1+t)^p - t^p - 1$ definida en $[0, \infty]$ es continua y derivable en $(0, \infty)$. Su derivada

$$h'(x) = p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1}$$

es negativa ya que

$$(1+t)^{p-1} < t^{p-1} \Leftrightarrow 1 + t > t$$

Por lo que la función es estrictamente decreciente. En particular,

$$(1+t)^p - t^p - 1 < h(0) = 0.$$

■

El lema anterior tiene la siguientes dos consecuencias:

En cualquier espacio vectorial X no nulo, el conjunto de todas las $p-$seminormas no nulas es no vacío, pues si f es una función lineal de X, entonces para cualquier p con $0 < p \leq 1$ la función $x \longrightarrow |f(x)|^p$ es una $p-$seminorma en X, como ahora comprobamos:

(i) $|f(\lambda x)|^p = |\lambda f(x)|^p = |\lambda|^p |f(x)|^p$

(ii) $|f(x+y)|^p = |f(x) + f(y)|^p \leq (|f(x)| + |f(y)|)^p \leq |f(x)|^p + |f(y)|^p$.

Si $0 < p, r \leq 1$ y $\|\cdot\|$ es una $p-$seminorma de X, entonces $\|\cdot\|^r$ es una $pr-$ seminorma de X, ya que $0 < pr \leq 1$ y

(i) $\|\lambda x\|^r = |\lambda|^{pr} \|x\|^r$

(ii) $\|x+y\|^r \leq (\|x\| + \|y\|)^r \leq \|x\|^r + \|y\|^r$.

Proposición 2.1.16 *Sean X un e.v., $\|\cdot\|$ una $p-$seminorma en X y $\varepsilon > 0$. Entonces, el conjunto*

$$V = \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$$

es absorbente y absolutamente $p-$convexo.

Demostración. Es claro que $0 \in V$. *Si* $\|x\| = \alpha^p \neq 0$, entonces $\left\|\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\alpha} x\right\| = \varepsilon$ y V es absorbente.

Además, si $\|x\| \leq \varepsilon$, $\|y\| \leq \varepsilon$ y $|\alpha|^p + |\beta|^p \leq 1$, entonces

$$\|\alpha x + \beta y\| \leq |\alpha|^p \|x\| + |\beta|^p \|y\| \leq \varepsilon.$$

O sea, V es absolutamente $p-$convexo. ■

Proposición 2.1.17 *Sea X un e.v.t y $\|\cdot\|$ una $p-$seminorma en X. La seminorma $\|\cdot\|$ es continua si y sólo si es continua en 0.*

Demostración. Supongamos que $\|\cdot\|$ es continua en 0. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe una vecindad V de 0 en X tal que

$$\|z\| < \varepsilon \text{ si } z \in V$$

De donde,

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\| < \varepsilon$$

si $y \in x + V$. O sea, $\|\cdot\|$ es continua en x. ∎

Sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$una familia de $p(\alpha)-$seminormas definidas en X. Los escalares $0 < p(\alpha) \leq 1$ pueden variar con α.

Para cada $\alpha \in \Lambda$ hacemos $V_\alpha = \{x \in X : \|x\|_\alpha \leq 1\}$. Por la Proposición 2.1.10, la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma εV_α, con $\varepsilon > 0$, forman un sistema fundamental de vecindades del 0 para una topología localmente pseudoconvexa τ en X. El conjunto $\varepsilon V_\alpha = V_{\alpha,\varepsilon}$ está formado por todos los elementos $x \in X$ tales que $\|x\|_\alpha \leq \varepsilon^{p(\alpha)}$ y por tanto, un sistema fundamental de vecindades del 0 para τ está dado por los conjuntos

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} = \left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_k} \leq \varepsilon_k \text{ para } 1 \leq k \leq n\right\},$$

donde $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ es un subconjunto finito de Λ y $\varepsilon_k > 0$ $(1 \leq k \leq n)$. Por el Corolario 2.1.11, un sistema fundamental de vecindades del 0 para τ equivalente al anterior está formado por los conjuntos

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\varepsilon} = \left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_k} \leq \varepsilon \text{ para } 1 \leq k \leq n\right\}. \tag{2.1}$$

∎

La topología τ es llamada la topología generada por familia $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $p(\alpha)-$seminormas. Escribiremos $(X, \mathcal{P})$ en lugar de (X, τ). Resumimos lo anterior en el siguiente resultado.

Teorema 2.1.18 *Un e.v. X con la topología generada por una familia $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $p(\alpha)-$seminormas es un espacio localmente pseudoconvexo al que denotaremos por $(X, \mathcal{P})$. Si $p(\alpha) = p$ para todo α y algún $0 < p \leq 1$, entonces $(X, \mathcal{P})$ es un espacio localmente $p-$convexo.*

El siguiente ejemplo muestra que un espacio puede ser $p-$convexo para alguna $0 < p < 1$ y no ser localmente convexo.

Ejemplo 2.1.19 *Sean* $0 < p < 1$ *y*

$$L^p = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{F} : \ f \text{ es Lebesgue medible y } \int\limits_{[0,1]} |f|^p \, d\ell < \infty \right\}.$$

La función $\|f\| = \int\limits_{[0,1]} |f|^p \, d\lambda$ *no negativa es una* $p-$*norma en* $\mathcal{L}^p$*, ya que*

(i) $\|f\| = 0$ *si y sólo si* $f = 0$.

(ii) $\|\lambda f\| = |\lambda|^p \|f\|$ *para todo escalar* λ *y* $f \in \mathcal{L}^p$.

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *si* $f, g \in \mathcal{L}^p$ *ya que por el lema 2.1.15 tenemos*

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq |f(x)|^p + |g(x)|^p$$

para todo $x \in [0,1]$.

Así, $(L^p, \|\cdot\|)$ *es un espacio localmente* $p-$*convexo y no es localmente convexo, ya que se probará que los únicos conjuntos abiertos y convexos son* $\emptyset$ *y* L^p *y por tanto, la vecindad del* 0

$$\{f \in L^p : \|f\| < 1\}$$

no contiene ninguna vecindad convexa de 0.

Supongamos que $V \neq \emptyset$ *es un subconjuntos abierto y convexo de* L^p. *Podemos suponer que* $0 \in V$ *puesto que en otro caso trabajamos con un trasladado de* V. *Existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\{f \in L^p : \|f\| < \delta\} \subset V$$

Sea $f \in \mathcal{L}^p$*, entonces* $\frac{1}{n^{1-p}} \|f\| < \delta$ *para un natural* n *suficientemente grande.*

Como $\lim\limits_{y \to x} \chi_{[0,y]} = \chi_{[0,x]}$*, con* $x \in [0,1]$*, donde* χ_J *es la característica de* J*, se sigue del Teorema de convergencia dominada que si* $F(x) = \int\limits_{[0,x]} |f|^p \, d\ell$ *para* $x \in [0,1]$*, entonces* F *es una función continua en* $[0,1]$

Por el teorema del valor intermedio, tenemos que existe una partición $x_0 = 0 < x_1 < ... < x_n = 1$ *tal que*

$$\int\limits_{[x_{i-1}, x_i]} |f|^p \, d\ell = \frac{1}{n} \|f\|.$$

Definamos

$$g_i(x) = \begin{cases} nf(x) & \text{si } x \in (x_{i-1}, x_i] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n$.

Entonces, $\|g_i\| = \frac{n^p}{n}\|f\| < \delta$ *y por tanto,* $g_i \in V$ *para todo* i. *Como* V *es convexo, entonces* $f = \frac{1}{n}(g_1 + ... + g_n)$ *pertenece a* V *y entonces* $V = L^p$.
■

Asimismo, los espacios localmente $p-$ convexos son un subconjunto propio de los espacios localmente pseudoconvexos, como se hará ver al final del capítulo.

Para no tener que referirnos explícitamente al tipo de homogeneidad de una seminorma introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.20 *Si* $\|\cdot\|$ *es una* $p-$*seminorma para alguna* $0 < p \leq 1$ *en un espacio vectorial* X, *entonces la llamamos una pseudoseminorma en* X.

Conforme a esta definición, hemos visto que un e.v. X con la topología generada por una familia de pseudoseminormas es un espacio localmente pseudoconvexo.

Corolario 2.1.21 *Cada una de las pseudoseminormas* $\|\cdot\|$ *de una familia* $\mathcal{P}$ *de pseudoseminormas en un espacio vectorial* X *es continua en el espacio localmente pseudoconvexo* $(X, \mathcal{P})$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $\{x : \|x\|_\alpha < \varepsilon\}$ es una vecindad de 0. ■

Probaremos que el recíproco del Teorema 2.1.18; es decir que toda topología localmente pseudoconvexa coincide con la generada por una familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $p(\alpha)$ $-$seminormas. Para esto introducimos las funcionales que a continuación veremos.

2.1.2 Funcionales de Minkowski

Sean X un espacio vectorial, $A \subset X$ y $0 < p \leq 1$. El $p-$*funcional de Minkowski de* A es la función $\|\cdot\|_A : X \to [0, \infty)$ definida como:

$$\|x\|_A = \inf\left\{t > 0 : \ x \in t^{\frac{1}{p}}A\right\}$$

donde $\|x\|_A = \infty$ si $x \notin t^{\frac{1}{p}}A$ para todo $t > 0$.

Nota 2.1.22 *Si* $p = 1$ *esta función es llamada simplemente la funcional de Minkowski de* A.

Para $\lambda > 0$ se tiene $\|\lambda x\|_A = \lambda^p \|x\|_A$ pues las condiciones $x \in t^{\frac{1}{p}} A$ y $\lambda x \in (\lambda^p)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{p}} A$ son equivalentes. Si A es absorbente, entonces $\|\cdot\|_A$ es claramente finita. Si $0 \in A$, entonces $\|0\|_A = 0$.

Propiedades de la $p-$funcional de Minkowski.

Supongamos que A es un conjunto absorbente y absolutamente $p-$convexo. Entonces su $p-$funcional de Minkowski $\|\cdot\|_A$ tiene las siguientes propiedades:

Subaditividad. Se satisface la desigualdad

$$\|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A .$$

para todo $x, y \in X$.

Para cada $\varepsilon > 0$ existen s y t tales que $\|x\|_A \leq s < \|x\|_A + \varepsilon$, $\|y\|_A \leq t < \|y\|_A + \varepsilon$, $x \in s^{\frac{1}{p}} A$, $y \in t^{\frac{1}{p}} A$. Entonces

$$x + y \in s^{\frac{1}{p}} A + t^{\frac{1}{p}} A \subset (s + t)^{\frac{1}{p}} A,$$

es decir,

$$\|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A + 2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, tenemos $\|x + y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$.

$p-$Homogeneidad absoluta. Se satisface la igualdad

$$\|\lambda x\|_A = |\lambda|^p \|x\|_A$$

para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

Este resultado lo sabemos para $\lambda > 0$ y es obvio para $\lambda = 0$. Para $|\lambda| = 1$ las relaciones $\lambda x \in t^{\frac{1}{p}} A$ y $x \in t^{\frac{1}{p}} A$ son equivalentes debido a que A es un conjunto balanceado. Así, $\|\lambda x\|_A = \|x\|_A$ si $|\lambda| = 1$.

Dado $\lambda \neq 0$, sea $\sigma(\lambda)$ el signo de λ, es decir $|\sigma(\lambda)| = 1$ y $\sigma(\lambda)\lambda = |\lambda|$. Entonces,

$$\|\lambda x\|_A = \left\| \frac{|\lambda|}{\sigma(\lambda)} x \right\| = |\lambda|^p \|x\|_A .$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene el siguiente resultado

Proposición 2.1.23 *En cualquier espacio vectorial X, el $p-$funcional de Minkowski de un conjunto absorbente, balanceado y $p-$convexo es una $p-$seminorma.*

Proposición 2.1.24 *Un conjunto A, absorbente y absolutamente $p-$convexo en un espacio vectorial topológico X, es una vecindad del 0 si y sólo si su $p-$ funcional de Minkowski $\|\cdot\|_A$ es continua.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.17 es suficiente probar que $\|\cdot\|_A$ es continua en 0.

Supongamos A es una vecindad del 0. Para cada $\varepsilon > 0$, la relación $x \in \varepsilon^{\frac{1}{p}} A$ implica $\|x\|_A \leq \varepsilon$ y $\varepsilon^{\frac{1}{p}} A$ es una vecindad del 0. Así, $\|\cdot\|_A$ es continua en 0.

Inversamente, si $\|\cdot\|_A$ es continua, entonces $\{x : \|x\|_A < 1\}$ es un conjunto abierto contenido en A y que contiene al 0, por lo que A es una vecindad de 0. ■

Proposición 2.1.25 *Sean V una vecindad del 0, absolutamente $p-$convexa en un espacio vectorial topológico X y $\|\cdot\|_V$ su $p-$funcional de Minkowski. Entonces,*

$$\overline{V} = \{x : \|x\|_V \leq 1\}.$$

Demostración. *Sea* $B = \{x : \|x\|_V \leq 1\}$. La continuidad de $\|\cdot\|_V$ implica que B es cerrado. Y como es claro que $V \subset B$, tenemos $\overline{V} \subset B$. Para probar $B \subset \overline{V}$, sean $\|x\|_V \leq 1$ y W una vecindad de x. Existen $0 < \varepsilon < 1$ y $t > 0$ tales que $sx \in W$ para $1 - \varepsilon < s \leq 1$, $1 \leq t < \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}$ y $x \in t^{\frac{1}{p}} V$. Por tanto, $\frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} x \in V \cap W$; lo que prueba que $x \in \overline{V}$. ■

Sea X un espacio localmente pseudoconvexo. Sabemos por la Proposición 2.1.7 que las vecindades V cerradas y absolutamente $p(V)-$convexas del 0 forman un sistema fundamental de vecindades del 0.

El $p(V)-$funcional de Minkowski $\|\cdot\|_V$ de cada una de dichas vecindades V es una $p(V)-$seminorma continua en X y la topología localmente pseudoconvexa definida por la familia $\{\|\cdot\|_V\}$ de $p(V)-$seminormas es la misma que la topología original, pues $V = \{x : \|x\|_V \leq 1\}$. Y un resultado similar se tiene cuando X es un espacio localmente $p-$convexo, para alguna $0 < p \leq 1$.

Por lo que hemos probado el resultado recíproco del Teorema 2.1.18:

Teorema 2.1.26 *Si (X, τ) es un espacio localmente pseudoconvexo, entonces hay una familia de pseudoseminormas que generan la topología τ. En particular, si (X, τ) es localmente $p-$convexo, entonces τ está generada por una familia de $p-$seminormas.*

Si X es localmente pseudoconvexo, entonces cualquiera de sus subespacios M es localmente pseudoconvexo, ya que si la topología de X está definida por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $p(\alpha)-$seminormas, entonces la topología de M está definida por las restricciones de éstas a M.

Definición 2.1.27 *Decimos que dos familias de pseudoseminormas en un espacio vectorial X son equivalentes si definen la misma topología localmente pseudoconvexa en X.*

2.1.3 Saturación de una familia de pseudoseminormas

Sea $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de $p-$seminormas en un espacio vectorial X. Entonces, la función

$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq n} \|x\|_i$$

es también una $p-$seminorma en X y tenemos

$$\{x \in X : \|x\| \leq \varepsilon\} = \{x \in X : \|x\|_i \leq \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}. \tag{2.2}$$

Si además tenemos que X es un espacio vectorial topológico y las $\|\cdot\|_i$ $(1 \leq i \leq n)$ son continuas, entonces $\|\cdot\|$ también lo es.

Decimos que una familia $\mathcal{P}$ de seminormas en un espacio vectorial está *saturada* si para cualquier subfamilia finita $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^n$ de $\mathcal{P}$, la $p-$seminorma $\max\limits_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_i$ también pertenece a $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de $p-$seminormas que define una topología localmente $p-$convexa en un espacio vectorial X, entonces la familia de $p-$seminormas

$$\overline{\mathcal{P}} = \left\{ \max_{1\leq i\leq n} \|x\|_{\alpha_i} : n \geq 1, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda \right\}$$

es llamada la *saturación* $\mathcal{P}$ y la denotamos como $\overline{\mathcal{P}}$.

Es fácil probar que $\overline{\mathcal{P}}$ es una familia saturada de $p-$seminormas y por (2.2) es equivalente a $\mathcal{P}$.

El concepto de una familia saturada de $p-$seminormas en un espacio vectorial se puede extender para familias de pseudoseminormas; para esto nos apoyaremos en el segundo de los resultados obtenidos a partir del Lema 2.1.15.

Si $0 < p \leq p' \leq 1$ y $\|\cdot\|$ es una $p'-$seminorma en X, entonces $\|\cdot\|^{\frac{p}{p'}}$ es una $p-$ seminorma. Por tanto, si para $1 \leq i \leq n$, $\|x\|_i$ es una $p\,(i)\,-$seminorma en un espacio vectorial X, entonces la funcional

$$\bigvee_{1\leq i\leq n} \|x\|_i = \max_{1\leq i\leq n} \left(\|x\|_i^{\frac{p}{p(i)}} \right)$$

donde, $p = \min\limits_{1\leq i\leq n} p\,(i)$, es una $p-$seminorma en X.

Si $p\,(i) = p$ para todo i, entonces $\bigvee\limits_{1\leq i\leq n} \|x\|_i$ es la $p-$seminorma $\max\limits_{1\leq i\leq n} (\|x\|_i)$.

Si $\delta > 0$, entonces se cumple

$$\max_{1\leq i\leq n} (\|x\|_1, ..., \|x\|_n) < \delta \Rightarrow \bigvee_{1\leq i\leq n} \|x\|_i < \max_{1\leq i\leq n} \delta^{\frac{p}{p(i)}} \tag{2.3}$$

y

$$\bigvee_{1\leq i\leq n} \|x\|_i < \delta \Rightarrow \max_{1\leq i\leq n} \left(\|x\|_1, ..., \|x\|_n\right) < \max_{1\leq i\leq n} \delta^{\frac{p(i)}{p}} \tag{2.4}$$

Definición 2.1.28 *Decimos que la familia* $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* $p(\alpha)-$ *seminormas en un espacio vectorial* X *está saturada si la pseudoseminorma* $\bigvee_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_{\alpha_i}$ *pertenece a* $\mathcal{P}$ *para cualquier subconjunto finito* $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, *con* $n \geq 1$, *de* Λ.

Definición 2.1.29 *Sea* $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia de* $p(\alpha)-$*seminormas en un espacio vectorial* X. *La familia de pseudoseminormas*

$$\overline{\mathcal{P}} = \left\{\bigvee_{\alpha\in F} \|\cdot\|_\alpha : F \subset \Lambda \text{ finito no vacío}\right\}$$

es llamada la saturación de $\mathcal{P}$.

Proposición 2.1.30 *La saturación* $\overline{\mathcal{P}}$ *de una familia* $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* $p(\alpha)-$*seminormas tiene las siguientes propiedades*

(a) $\overline{\mathcal{P}}$ *es una familia saturada de pseudoseminormas.*

(b) $\mathcal{P}$ *y* $\overline{\mathcal{P}}$ *son familias equivalentes de pseudoseminormas.*

(c) La familia $\mathcal{P}$ *está saturada si y sólo si* $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$

(d) Un sistema fundamental de vecindades de 0 *para la topología dada por* $\overline{\mathcal{P}}$ *son los conjuntos de la forma*

$$\left\{x \in X : \bigvee_{\alpha\in F} \|x\|_\alpha < \varepsilon\right\}$$

para $F \subset \Lambda$ *finito y no vacío, y* $\varepsilon > 0$.

Demostración. (a) Sean $\bigvee_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_{\alpha_i} = \max_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_{\alpha_i}^{\frac{p_0}{p(\alpha_i)}}$ y $\bigvee_{1\leq j\leq m} \|\cdot\|_{\beta_j} = \max_{1\leq j\leq m} \|\cdot\|_{\beta_j}^{\frac{p_1}{p(\beta_j)}}$ dos elementos de $\overline{\mathcal{P}}$. Definamos $p = \min\{p_0, p_1\}$ entonces, se cumple

$$\begin{aligned} &\max\left(\max_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_i^{\frac{p}{p(\alpha_i)}}, \max_{1\leq j\leq m} \|\cdot\|_j^{\frac{p}{p(\beta_j)}}\right) \\ = \ &\max\left\{\|\cdot\|_{\alpha_1}^{\frac{p}{p(\alpha_1)}}, ..., \|\cdot\|_{\alpha_n}^{\frac{p}{p(\alpha_n)}}, \|\cdot\|_{\beta_1}^{\frac{p}{p(\beta_1)}}, ..., \|\cdot\|_{\beta_m}^{\frac{p}{p(\beta_m)}}\right\} \end{aligned}$$

y $p = \min\{p(\alpha_1), ..., p(\alpha_n), p(\beta_1), ..., p(\beta_m)\}$.

La prueba de (a) se concluye aplicando inducción sobre el número de pseudoseminormas en $\overline{\mathcal{P}}$ que son tomadas.

(b) Llamemos τ y $\overline{\tau}$ a las topologías generadas por $\mathcal{P}$ y $\overline{\mathcal{P}}$, respectivamente. Es claro que $\tau \subset \overline{\tau}$, pues $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}}$. Inversamente, dados $F \subset \Lambda$ finito y no vacío, y $\varepsilon > 0$ se cumple (2.3) y tenemos que

$$\left\{x \in X : \max_{\alpha \in F} \|x\|_\alpha < \delta\right\} \subset \left\{x \in X : \bigvee_{\alpha \in F} \|x\|_\alpha < \varepsilon\right\}$$

si escogemos $\delta > 0$ suficientemente pequeña, concluimos que $\overline{\tau} \subset \tau$.

(c) Siempre se tiene $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{P}}$. Supongamos que $\mathcal{P}$ está saturada, entonces $\bigvee_{1 \leq i \leq n} \|\cdot\|_{\alpha_i} \in \mathcal{P}$ siempre que $\|\cdot\|_{\alpha_i} \in \mathcal{P}$ para todo $1 \leq i \leq n$; es decir $\overline{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$.

Inversamente, si $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P}$ esta saturada porque $\overline{\mathcal{P}}$ lo está.

(d) Se sigue del inciso (b), (2.3) y (2.4). ∎

Corolario 2.1.31 *Si $\mathcal{P}$ es una familia saturada de pseudoseminormas en X, entonces la topología localmente pseudoconvexa que ella genera tiene por sistema fundamental del* 0 *a los conjuntos de la forma*

$$\{x \in X : \|x\| < \varepsilon\} \tag{2.5}$$

donde $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ y $\varepsilon > 0$. En particular, si X es un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología τ está dada por una familia $\mathcal{P} = \{\|x\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $p(\alpha)$ −seminormas, entonces una base de vecindades del 0 *para τ está dada por los conjuntos de la forma*

$$\left\{x \in X : \bigvee_{\alpha \in F} \|x\|_\alpha < \varepsilon\right\}$$

donde F corre por los subconjuntos finitos y no vacíos de Λ y ε por los reales no negativos.

De acuerdo a lo anterior, siempre podremos suponer que la topología de un espacio localmente pseudoconvexo está dada por una familia saturada $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de pseudoseminormas

Proposición 2.1.32 *Supongamos que la topología localmente pseudoconvexa del espacio vectorial (X, τ) está definida por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $p(\alpha)$ −seminormas. Entonces, τ es Hausdorff si y sólo si para cada $x \neq 0$ en X, existe un índice $\alpha \in \Lambda$ tal que $\|x\|_\alpha \neq 0$.*

Demostración. Si $\|x\|_\alpha = \lambda > 0$, entonces $\left\{z \in X : \|z\|_\alpha \leq \frac{\lambda}{2}\right\}$ es una vecindad del 0 en X que no contiene a x. Por tanto, τ es Hausdorff por la Proposición 1.4.11.

Inversamente, sea τ de Hausdorff y $x \neq 0$. Entonces, otra vez por la Proposición 1.4.11 existe una vecindad W del 0 que no contiene a x. La vecindad W contiene a un conjunto de la forma

$$\left\{z \in X : \|z\|_{\alpha_k} \leq \varepsilon,\ 1 \leq k \leq n\right\},$$

y por tanto, $\|x\|_{\alpha_k} \neq 0$ para algún $1 \leq k \leq n$. ∎

Teorema 2.1.33 *Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ dos familias de pseudoseminormas en X, la primera de ellas saturada. La topología inducida por $\mathcal{P}'$ es menos fina que la inducida por $\mathcal{P}$ si y sólo si se cumple que para cada $\|\cdot\|' \in \mathcal{P}'$ existen $M > 0$ y $\|\cdot\| \in \mathcal{P}$ tales que*

$$\|x\|' \leq M \|x\|^{\frac{p'}{p}} \tag{2.6}$$

para todo $x \in X$, donde p' y p son los índices de homogeneidad de $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|$, respectivamente.

Demostración. Es claro que si se cumple (2.6), entonces la topología inducida por $\mathcal{P}'$ es menos fina que la inducida por $\mathcal{P}$. Inversamente, si esto último se cumple, existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|' \leq 1$ si $\|x\| \leq \delta$. Como $\left\|\frac{\delta^{\frac{1}{p}} x}{\|x\|^{\frac{1}{p}}}\right\| \leq \delta$ si $\|x\| \neq 0$, entonces se cumple (2.6) para $M = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{p'}{p}}$. ∎

Por tanto, dos familias $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ saturadas de pseudoseminormas en X, son equivalentes si y sólo si satisface (2.6) y la condición correspondiente que resulta de intercambiar los papeles de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$.

Corolario 2.1.34 *Sea X un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por una familia $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $p(\alpha)-$seminormas. Entonces, la familia $\mathcal{C} = \left\{\|\cdot\|_\beta\right\}_{\beta \in \Gamma}$ de todas las pseudoseminormas continuas en $(X, \mathcal{P})$ es una familia saturada de pseudoseminormas equivalente a $\mathcal{P}$. Si $p(\alpha) = p$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces basta considerar como $\mathcal{C}$ a la familia de todas las p-seminormas continuas en $(X, \mathcal{P})$; si $p = 1$ entonces $\mathcal{C}$ será la familia de todas las seminormas continuas en $(X, \mathcal{P})$.*

Demostración. Llamemos $\tau(\mathcal{P})$ y $\tau(\mathcal{C})$ a las topologías inducidas por las familias respectivas de pseudoseminormas. La familia $\mathcal{C}$ está saturada ya que $\bigvee_{\beta\in F} \|\cdot\|_\beta$ es una pseudoseminorma ($p-$seminorma si toda $\|\cdot\|_\beta$ lo es) continua si $F \subset \Gamma$ es finito y no vacío.

Debido al Corolario 2.1.21 se tiene que $\tau(\mathcal{P}) \subset \tau(\mathcal{C})$. Por otra parte, si $\|\cdot\|_\beta \in \mathcal{C}$, entonces por el inciso (b) de la Proposición 2.1.30 existen $\delta > 0$ y $\|\cdot\|_{\alpha_1}, ..., \|\cdot\|_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$ tales que $\|x\|_\beta \leq 1$ si $\bigvee_{1\leq i\leq n} \|x\|_{\alpha_i} \leq \delta$. De donde

$$\|x\|_\beta \leq M \left(\bigvee_{1\leq i\leq n} \|x\|_{\alpha_i} \right)^{\frac{p'}{p}}$$

para todo $x \in X$, donde $M = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{p'}{p}}$, p' es el índice de homogeneidad de $\|x\|_\beta$ y p el de $\bigvee_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_{\alpha_i}$. Entonces, $\tau(\mathcal{C}) \subset \tau(\mathcal{P})$ por el teorema 2.1.33. ∎

Corolario 2.1.35 *Sea X un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por una familia $\mathcal{P}$ de pseudoseminormas. Una pseudoseminorma $|\cdot|$ es continua en $(X, \mathcal{P})$ si y sólo si existen $M > 0$ y $\|\cdot\|$ en la saturación $\overline{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{P}$ tales que*

$$|x| \leq M \|x\|^{\frac{p}{r}} \tag{2.7}$$

para todo $x \in X$, donde p y r son los índices de homogeneidad de $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$, respectivamente.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todas las pseudoseminormas continuas en $(X, \mathcal{P}) = (X, \overline{\mathcal{P}})$. Sabemos que $\mathcal{C}$ es equivalente a $\overline{\mathcal{P}}$. Si $|\cdot|$ es continua en $(X, \mathcal{P})$, entonces se cumple (2.6) del Teorema 2.1.33; es decir,

$$|x| \leq M \|x\|^{\frac{p}{r}}$$

para algún real $M > 0$, una $r-$seminorma de la saturación $\overline{\mathcal{P}}$ y todo $x \in X$.

Inversamente si (2.7) se cumple, entonces dado $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$|x| < \varepsilon$$

si $\|x\| < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{r}{p}}$ y por tanto, $|x|$ es continua en $(X, \mathcal{P})$. ∎

Proposición 2.1.36 *Sea X un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por una familia $\mathcal{P}$ de pseudoseminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Un subconjunto A de X es acotado si y sólo si cada $\|\cdot\|_\alpha$ es acotada en A.*

Demostración. Supongamos que A es acotado y supongamos que $\|\cdot\|_\alpha$ es una $p-$seminorma. Como $V = \{x \in X : \|x\|_\alpha \leq 1\}$ es una vecindad de 0, existe $M > 0$ tal que

$$A \subset MV,$$

lo que implica

$$\|x\|_\alpha \leq M^p$$

para todo $x \in A$; así, $\|\cdot\|_\alpha$ es acotada A.

Inversamente, sea V una vecindad balanceada de 0 en X. Existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ y $M_1, ..., M_n > 0$ tales que

$$\left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_i} \leq \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\right\} \subset V.$$

y $\|x\|_{\alpha_i} \leq M_i$ para $1 \leq i \leq n$ y todo $x \in A$. Entonces, $A \subset MV$ donde $0 < M < \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\varepsilon}{M_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} V$ y p_i es el índice de homogeneidad de $\|x\|_{\alpha_i}$ para $1 \leq i \leq n$. De donde A es acotado en X. ∎

Proposición 2.1.37 *Sea X un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por una familia $\mathcal{P}$ de pseudoseminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Un red $(x_i)_{i\in I}$ en X converge a $x \in X$ si y sólo si $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. Supongamos que $x_i \to x$ en X y sean $\alpha \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$. Como $V = \{x \in X : \|x\|_\alpha < \varepsilon\}$ es una vecindad de 0, existe $i_0 \in I$ tal que $\|x_i - x\|_\alpha < \varepsilon$ si $i_0 \preceq i$. Entonces, $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$.

Inversamente, sea V una vecindad de 0 en X. Existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ y $i_0 \in I$ tales que

$$\left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_i} \leq \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\right\} \subset V.$$

y $\|x_i - x\|_\alpha < \varepsilon$ si $i_0 \preceq i$ para $1 \leq i \leq n$. Entonces, $x_i \in x + V$ si $i_0 \preceq i$. Por tanto, $x_i \to x$ en X ∎

2.2 Operadores y funcionales lineales en espacios localmente pseudoconvexos

Proposición 2.2.1 *Sea X un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por una familia saturada $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $p(\alpha)-$seminormas y Y un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por* *una familia* $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ *de* $p'(\beta)-$*seminormas. Un operador lineal* $T \in L(X,Y)$ *es continuo si y sólo si para cada* $\beta\in\Gamma$ *existen* $\alpha_\beta\in\Lambda$ *y* $M_\beta>0$ *tales que*

$$\|T(x)\|'_\beta \leq M_\beta \|x\|_{\alpha_\beta}^{\frac{p'(\beta)}{p(\alpha)}} \tag{2.8}$$

para todo $x\in X$*, donde* $p'(\beta)$ *y* $p(\alpha)$ *son los índices de homogeneidad de* $\|\cdot\|'_\beta$ *y* $\|\cdot\|_\alpha$*, respectivamente.*

Demostración. Supongamos que para cada $\beta\in\Gamma$ se pueden encontrar tales elementos $\alpha=\alpha_\beta$ y $M=M_\beta$. Sea W una vecindad del 0 en Y. Entonces, W contiene un conjunto de la forma

$$\left\{y\in Y : \max_{1\leq i\leq n}\|y\|'_{\beta_i}\leq\varepsilon\right\}.$$

donde $n\geq 1$, $\beta_1,...,\beta_n\in\Gamma$ y $\varepsilon>0$.

Para cada $1\leq i\leq n$ sean $\alpha_i=\alpha_{\beta_i}\in\Lambda$ y $M_i=M_{\beta_i}>0$ tales que satisfacen (2.8) para β_i.

Hagamos $p_i=p(\alpha_i)\,, p'_i=p'(\beta_i)\,, M=\max\limits_{1\leq i\leq n}M_i,$

$$V_i=\left\{y\in Y:\|y\|'_{\beta_i}\leq\varepsilon\right\}.$$

y

$$U_i=\left\{x\in X:\|x\|'_{\alpha_{\beta_i}}\leq\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{p_i}{p'_i}}\right\}.$$

para $1\leq i\leq n$.

Entonces $T(U_i)\subset V_i$ para todo $1\leq i\leq n$. Hagamos $U=\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$, se sigue que $T(U)\subset W$. Por la proposición 1.5.1 el operador T es continuo.

Inversamente, sea T continua; como $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ está saturada, para cada $\beta\in\Gamma$ existen un índice $\alpha\in\Lambda$ y $\delta>0$ tales que $\|x\|_\alpha\leq\delta$ implica $\|T(x)\|'_\beta\leq 1$. Entonces, tenemos $\|T(x)\|'_\beta\leq\frac{1}{\delta^{\frac{p'(\beta)}{p(\alpha)}}}\|x\|_\alpha^{\frac{p'(\beta)}{p(\alpha)}}$ para todo $x\in X$ tal que $\|x\|_\alpha\neq 0$.

Si $\|x\|_\alpha=0$, entonces también $\|T(x)\|'_\beta=0$, pues en este caso, $\|\lambda x\|_\alpha=0$ para todo $\lambda>0$ y entonces $\lambda\|T(x)\|'_\beta\leq 1$ para todo $\lambda>0$. ∎

Corolario 2.2.2 *Sea* X *un espacio localmente pseudoconvexo cuya topología está definida por una familia saturada* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* $p(\alpha)-$*seminormas. Una funcional lineal* $f\in X^\#$ *es continua si y sólo si existen* $\alpha\in\Lambda$ *y* $M>0$ *tales que* $|f(x)|\leq M\|x\|_\alpha^{\frac{1}{p(\alpha)}}$ *para cada* $x\in X$.

Corolario 2.2.3 *Sean X y Y dos espacios vectoriales localmente pseudoconvexos cuyas topologías están definidas, respectivamente por las familias $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $p(\alpha)$ −seminormas y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ de $p'(\beta)$ −seminormas. Un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$existe una subfamilia F, finita y no vacía, de Λ y $M > 0$ tales que*

$$\|T(x)\|'_\beta \leq M\left(\bigvee_{\alpha\in F}\|x\|_\alpha\right)^{\frac{p'(\beta)}{p}} = M\max_{\alpha\in F}\|x\|_\alpha^{\frac{p'(\beta)}{p(\alpha)}}$$

para todo $x \in X$, donde $p = \min_{\alpha\in F}(p(\alpha))$.

Sean X un espacio vectorial, $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ dos familias de $p(\alpha)$ −seminormas y $p'(\beta)$ −seminormas, respectivamente. Entonces $\tau \preceq \tau'$ si y sólo si dada $\beta \in \Gamma$ existe una subfamilia F, finita y no vacía, de Λ y $M > 0$ tales que

$$\|x\|'_\beta \leq M\max_{\alpha\in F}\|x\|_\alpha^{\frac{p'(\beta)}{p(\alpha)}} \tag{2.9}$$

para todo $x \in X$, donde , donde $p'(\beta)$ y $p(\alpha)$ son los índices de homogeneidad de $\|\cdot\|'_\beta$ y $\|\cdot\|_\alpha$, respectivamente, ya que esta condición significa, de acuerdo al corolario anterior, que la identidad

$$\begin{array}{ccc}(X,\tau) & \to & (X,\tau') \\ x & \to & x\end{array}$$

es continua.

Así, τ y τ' coinciden, es decir, $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$son familias equivalentes si y sólo si se cumple la condición (2.9) y la correspondiente que resulta de intercambiar los papeles de $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$.

Por su uso frecuente, enunciaremos los últimos resultados en el contexto de espacios localmente convexos.

- Sean X y Y dos espacios localmente convexos cuyas topologías están definidas respectivamente por las familias $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ de seminormas, la primera de ellas saturada $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Un operador lineal $T \in L(X,Y)$ es continuo si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$ existen $\alpha_\beta \in \Lambda$ y $M_\beta > 0$ tales que

$$\|T(x)\|'_\beta \leq M_\beta\|x\|_{\alpha_\beta} \tag{2.10}$$

para todo $x \in X$.

- Sea X un espacio localmente convexo cuya topología esta definida por una familia saturada $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas. Una funcional lineal $f \in X^\#$ es continua si y sólo si existen $\alpha \in \Lambda$ y $M > 0$ tales que
$$|f(x)| \leq M \|x\|_\alpha \tag{2.11}$$
para cada $x \in X$.

- Sean X y Y dos espacios localmente convexos cuyas topologías están definidas, respectivamente por las familias $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ de seminormas. Un operador lineal $T \in L(X,Y)$ es continuo si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$ existe una subfamilia F, finita y no vacía, de Λ y $M > 0$ tales que
$$\|T(x)\|'_\beta \leq M \max_{\alpha\in F} \|x\|_\alpha \tag{2.12}$$
para todo $x \in X$.

- Sean X un espacio vectorial y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ dos familias de seminormas. Entonces, $\tau \preceq \tau'$ si y sólo si dada $\beta \in \Gamma$ existe una subfamilia F, finita y no vacía, de Λ y $M > 0$ tales que
$$\|x\|'_\beta \leq M \max_{\alpha\in F} \|x\|_\alpha \tag{2.13}$$
para todo $x \in X$. Así, τ y τ' coinciden, es decir, $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ son familias equivalentes, si y sólo si se cumple la condición (2.13) y la correspondiente que resulta de intercambiar los papeles de $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\left\{\|\cdot\|'_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$.

2.3 Espacios cocientes de espacios localmente convexos

Lema 2.3.1 *Sean X un espacio localmente convexo, M un subespacio cerrado de X y $\|\cdot\|$ una seminorma definida en X. Entonces la función $\|\cdot\|'$ definida en X/M como*
$$\|\widehat{x}\|' = \inf_{m\in M} \|x+m\|$$
es una seminorma en X/M.

Demostración. Claramente la función es no negativa y $\left\|\widehat{0}\right\|' = 0$. Sean $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x, y \in X$ entonces:

(a) Para probar la homogeneidad sólo falta ver el caso $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} \|\lambda \widehat{x}\|' &= \inf_{m \in M} \|\lambda (x+m)\| = \inf_{m \in M} |\lambda| \|(x+m)\| \\ &= |\lambda| \inf_{m \in M} \|\lambda (x+m)\| = |\lambda| \|\widehat{x}\|' \end{aligned}$$

(b) Observamos que

$$\inf_{\substack{m_1 \in M \\ m_2 \in M}} \|(x+m_1)+(y+m_2)\| \leq \|x+m_1+y+m_2\|$$

para todo $m_1, m_2 \in M$. De donde,

$$\|\widehat{x}+\widehat{y}\|' \leq \|x+m_1\| + \|y+m_2\|$$

para todo $m_1, m_2 \in M$. Al tomar el ínfimo sobre los elementos de $M \times M$ se obtiene

$$\|\widehat{x}+\widehat{y}\|' \leq \|\widehat{x}\|' + \|\widehat{y}\|' .$$

■

Teorema 2.3.2 *Sean X un espacio localmente convexo de Hausdorff definido por la familia saturada de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y M un subespacio X. Entonces la topología cociente τ en X / M coincide con la topología τ' generada por la familia de seminormas $\left\{\|\cdot\|'_\alpha\right\}_{\alpha \in \Lambda}$ definidas como en el lema anterior. Así, el espacio cociente X / M es en este caso un espacio localmente convexo y es de Hausdorff si y sólo si M es cerrado.*

Demostración. Observamos que para todo $x \in X$ y $\alpha \in \Lambda$ se cumple que

$$\|\widehat{x}\|'_\alpha = \inf_{m \in M} \|x+m\|_\alpha \leq \|x+m\|_\alpha$$

para todo $m \in M$, en especial $\|\widehat{x}\|'_\alpha \leq \|x\|_\alpha$, por lo que se cumple (2.10) y el homomorfismo canónico $\varphi : X \to X / M$ es continuo cuando en X / M se considera la topología τ'. Por consiguiente, $\tau' \subset \tau$.

Para mostrar que $\tau \subset \tau'$, veremos que si $\varphi^{-1}(V)$ es un abierto en X entonces V es abierto en τ'. Sea $\widehat{x_0} \in V$, entonces existen $\delta > 0$ y $\alpha \in \Lambda$ tales que $\|z - x_0\|_\alpha < \delta$ implica $z \in \varphi^{-1}(V)$.

Supongamos que $\|\widehat{y}-\widehat{x_0}\|'_\alpha < \delta$, entonces existe $m \in M$ tal que

$$\|y - x_0 + m\|_\alpha < \delta.$$

Por lo anterior, $y + m \in \varphi^{-1}(U)$ es decir $\widehat{y} \in V$ y se tiene el resultado. La última afirmación del enunciado se sigue de la Proposición 1.7.3. ∎

2.4 Relación entre los conjuntos y espacios localmente pseudoconvexos

En su articulo [15], S. Rolewicz introduce la noción de conjunto pseudoconvexo referido a vecindades acotadas del 0 en un espacio métrico lineal. Posteriormente en su libro [16] define, en el contexto de espacios vectoriales, el concepto de conjunto pseudoconvexo para conjuntos estrellados. Con base en esto define cuándo un espacio métrico lineal es un espacio localmente pseudoconvexo.

Hacemos una presentación de una parte de lo expuesto en dicho libro, con algunas modificaciones que consideramos necesarias y pertinentes. Culminamos dicha presentación comprobando que su definición de espacio localmente pseudoconvexo concuerda, en el ámbito más general de espacios vectoriales topológicos, con la que dimos en la primera sección de este capítulo (Definición 2.1.5)

2.4.1 Conjuntos pseudoconvexos

Definición 2.4.1 *Sea X un espacio vectorial. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es un conjunto estrellado si $tA \subset A$ para todo $0 \leq t \leq 1$.*

La unión de conjuntos estrellados en X es un conjunto estrellado.

Observación 2.4.2 *Se sigue que si A es estrellado, entonces $0 \in A$ y $sA \subset tA$ siempre que $0 \leq s \leq t$.*

Es claro que todo conjunto balanceado es estrellado.

Proposición 2.4.3 *Todo conjunto $p-$convexo que contiene al 0 es un conjunto estrellado.*

Demostración. *Si A es un conjunto $p-$ convexo y contiene al cero, entonces $\alpha^{\frac{1}{p}}A \subset (1-\alpha)^{\frac{1}{p}}A + \alpha^{\frac{1}{p}}A \subset A$ si $\alpha \in [0,1]$ pero esto es lo mismo que decir que $tA \subset A$ para todo t, $0 \leq t \leq 1$, pues $\alpha^{\frac{1}{p}}$ recorre el intervalo $[0,1]$ si α recorre el intervalo $[0,1]$.* ∎

Definición 2.4.4 *Se define el módulo de concavidad para un conjunto estrellado A como:*

$$c(A) = \inf \{s > 0 : A + A \subset sA\},$$

donde convenimos, como es usual, que el ínfimo del conjunto vacío es ∞.

Se dice que A es un conjunto pseudoconvexo si $c(A) < +\infty$.

Observación 2.4.5 *Por la Observación 2.4.2 tenemos que si A es estrellado y $A + A \subset sA$, entonces $A \subset sA$.*

Proposición 2.4.6 *Si A es pseudoconvexo, entonces $A + A \subset tA$ para todo $t > c(A)$. Es decir, $A + A \subset \bigcap_{t>c(A)} sA$.*

Demostración. *Sea $t > c(A)$ Por la definición de módulo de concavidad se tiene que existe un número $c(A) \leq s < t$ tal que $A + A \subset sA$. De la observación 2.4.2 se sigue que $A + A \subset tA$.* ∎

Proposición 2.4.7 *Si A es un conjunto $p-$ convexo que contiene a 0, entonces A es un conjunto pseudoconvexo.*

Demostración. *Sabemos que A es estrellado. De la definición de $p-$convexidad, se sigue que $x, y \in A$ implica $\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}(x + y) \in A$; o sea, $A + A \subset 2^{\frac{1}{p}} A$.* ∎

Corolario 2.4.8 *Si $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in F}$ es una familia finita de pseudoseminormas en el e.v. X y $\varepsilon > 0$, entonces*

$$\left\{ x \in X : \bigvee_{\alpha \in F} \|x\|_\alpha < \varepsilon \right\}$$

es un conjunto pseudoconvexo.

Ejemplo 2.4.9 *Existen conjuntos pseudoconvexos que no son $p-$ convexos para ningún $0 < p \leq 1$. El siguiente conjunto cerrado A en el plano es un ejemplo:*

Definimos $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$
$$A_2 = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 0, -2 \leq y \leq 0\}$$
$$A_3 = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

El conjunto A es estrellado ya que así es cada conjunto A_i, $1 \leq i \leq 3$.

Por otro lado, $A + A = \bigcup_{i,j=1}^{3} (A_i + A_j)$ y $A_i \subset 2A_3$ para $1 \leq i \leq 3$. De donde,

$$A + A \subset 2A_3 + 2A_3 = 4A_3 \subset 4A.$$

Por lo que A es un conjunto pseudoconvexo del plano.

Por último, sean $\alpha \in (0,1)$ y $0 < p \leq 1$. Si (x_1, y_1) y $(0, y_0)$ son puntos del plano que cumplen $x_1 > 0$ y $y_0 < y_1 < 0$, entonces, $\alpha^{\frac{1}{p}} (x_1, y_1) + (1-\alpha)^{\frac{1}{p}} (0, y_0) \subset int(T)$, donde T es la región limitada por el triángulo con vértices $(0, y_1), (x_1, y_1)$ y $(0, y_0)$. Para justificar lo anterior debe tenerse en cuenta que $1 > \alpha^{\frac{1}{p}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{p}}$.

Hagamos, $(0, y_0) = (0, -2)$ y $(x_1, y_1) = (1, -1)$ los cuales son puntos de A. En este caso, $\alpha^{\frac{1}{p}} (1, -1) + (1-\alpha)^{\frac{1}{p}} (0, -2) \subset int(T)$, donde T es la región limitada por el triángulo con vértices $(0, -1), (1, -1)$ y $(0, -2)$. Como $A \cap int(T) = \emptyset$, concluimos que $\alpha^{\frac{1}{p}} (1, -1) + (1-\alpha)^{\frac{1}{p}} (0, -2) \notin A$ y A no es $p-$ convexo.

Proposición 2.4.10 *Sea A un conjunto estrellado y acotado en un espacio vectorial topológico de Hausdorff X. Si A tiene más de un punto, entonces $c(A) \geq 2$.*

Demostración. Supongamos lo contrario y sea $0 < s < 2$ tal que $A + A \subset sA$. Entonces, $2A \subset sA$ y por tanto $A \subset \frac{s}{2}A$. Sea $x \in A$ distinto de 0. Existe una sucesión (x_n) en A tal que $x = \frac{s}{2}x_1 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 x_2 = ...$ Como $\left(\frac{s}{2}\right)^n \to 0$ y A es acotado, obtenemos de la Proposición 1.4.14 que $x = 0$, con lo que se contradice la elección de x. ∎

Observación 2.4.11 *Sea X un espacio vectorial topológico. Si $A \subset X$ es un conjunto acotado, convexo, contiene a 0 y tiene más de un punto, entonces $c(A) = 2$, pues si A es convexo, entonces $A + A \subset 2A$ de donde $c(A) \leq 2$, pero por la Proposición 2.4.10 $c(A) \geq 2$; por lo que $c(A) = 2$.*

Proposición 2.4.12 *Sea A un conjunto abierto y pseudoconvexo en un espacio vectorial topológico X, con $c(A) > 0$. Entonces*

$$A + A \subset c(A)\, A.$$

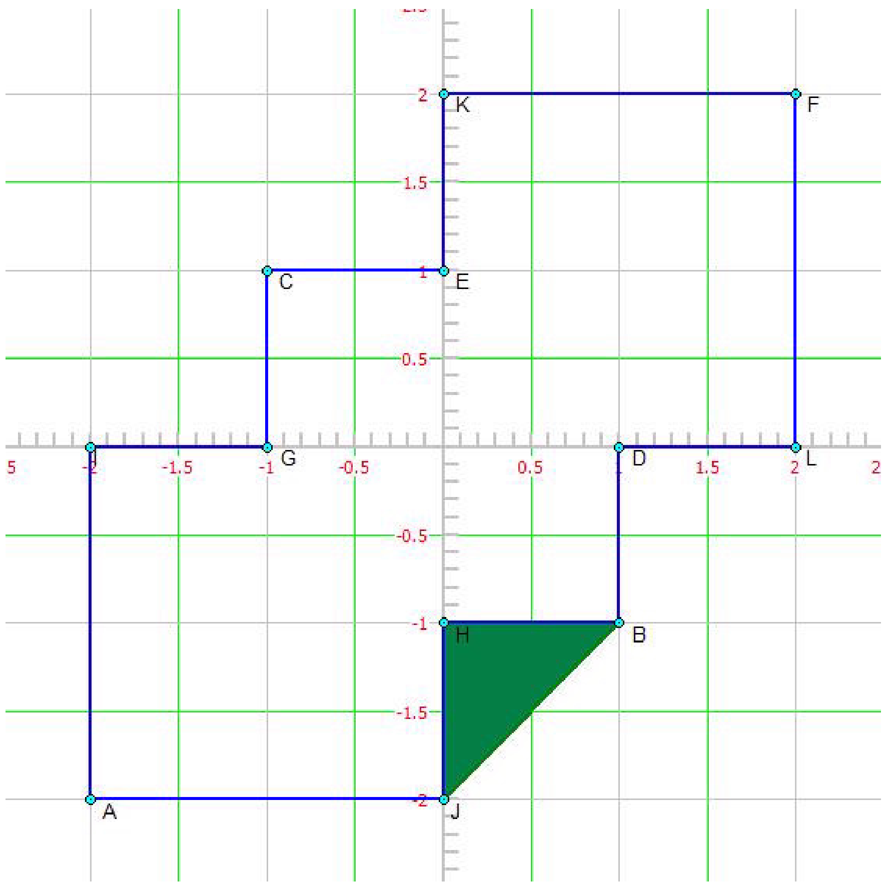

Figura 2.2:

Demostración. Sea $r > 1$. Por la proposición 2.4.6 se cumple

$$A + A \subset rc(A)\, A,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{A + A}{r} \subset c(A)\, A.$$

Sea $x \in A + A$, por ser $A + A$ un conjunto abierto y la multiplicación por un escalar continua, existe $r > 1$ tal que $rx \in A + A$; de donde

$$x \in \frac{A + A}{r}$$

y así, $x \in c(A)\, A$. ∎

Definición 2.4.13 *Un conjunto A de un espacio vectorial X es llamado convexo por puntos medios si $x, y \in A$ implica $\frac{1}{2}(x + y) \in A$.*

Lema 2.4.14 *Si A es convexo por puntos medios y $x, y \in A$ entonces $x + \frac{m}{2^n}(y - x) \in A$ para todo n natural y todo entero $0 < m < 2^n$.*

Demostración. Definimos

$$R(x, y) = \{\alpha \in [0, 1] : x + \alpha (y - x) \in A\}.$$

Debemos probar que $\frac{m}{2^n} \in R(x, y)$ si n es un natural y $0 < m < 2^n$ es un entero.

De la hipótesis tenemos que $x + \alpha(y - x) \in A$ y $x + \beta(y - x) \in A$ implica

$$\frac{1}{2}(x + \alpha(y - x)) + \frac{1}{2}(x + \beta(y - x)) = x + \frac{\alpha + \beta}{2}(y - x) \in A.$$

Es decir $\alpha, \beta \in R(x, y)$ implica $\frac{\alpha+\beta}{2} \in R(x, y)$.

Probaremos el lema por inducción sobre n. Para $n = 1$ la afirmación es obviamente válida. Supongamos que se cumple para un natural n. Sea $0 < m < 2^{n+1}$ un entero. Si m es impar entonces $m = 2r - 1$ con $r \geq 1$ y $1 \leq r \leq 2^n$. Por tanto, $\frac{r-1}{2^n}, \frac{r}{2^n} \in R(x, y)$; de donde, $\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{2r-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{2^n} + \frac{r}{2^n}\right)$ pertenece a $R(x, y)$. En tanto que si $m = 2r$ con $r \geq 1$, entonces $1 \leq r \leq 2^n$ y por consiguiente, $\frac{m}{2^{n+1}} = \frac{2r}{2^{n+1}} = \frac{r}{2^n}$ pertenece a $R(x, y)$. ∎

Proposición 2.4.15 *Sea A un conjunto estrellado y abierto en un espacio vectorial topológico X. Si $c(A) = 2$, entonces A es un conjunto convexo.*

Demostración. *Sean* $x, y \in A$. Definimos

$$R(x,y) = \{\alpha \in [0,1] : x + \alpha(y-x) \in A\}.$$

Observamos que como la función $\alpha \to x + \alpha(y-x)$, con $\alpha \in [0,1]$, es continua y A es abierto, entonces $R(x,y)$ es un abierto de $[0,1]$.

Probar que A es convexo equivale a probar que $[0,1] \subset R(x,y)$. Como es obvio que $0, 1 \in R(x,y)$, sólo es necesario verificar que

$$(0,1) \subset R(x,y). \tag{2.14}$$

Ya que A es un conjunto abierto y la operación producto por un escalar es continua, existe $t > 1$ tal que $tx, ty \in A$. Como $c(A) = 2$, entonces $A + A \subset 2tA$. Así $tx + ty \in 2tA$. Esto implica que $\frac{x+y}{2} \in A$, o lo que es lo mismo $x + \frac{1}{2}(y-x) \in A$. Por tanto, A es convexo por puntos medios y entonces el conjunto

$$D_1 = \left\{\frac{m}{2^n} : n \text{ natural y } 0 < m < 2^n \text{ entero}\right\},$$

que es denso en $[0,1]$, cumple que $D_1 \subset R(x,y)$.

Supongamos que $s_0 \in R(x,y)$ y $s_0 < 1$. Por ser $R(x,y)$ abierto en $[0,1]$ existe $\delta > 0$ tal que $s_0 + \delta < 1$ y $(s_0 + \alpha) \in R(x,y)$ si $0 \leq \alpha \leq \delta$. En particular como $0 \in R(x,y)$, entonces

$$\{0 < r \leq 1 : \alpha \in R(x,y) \text{ si } 0 \leq \alpha \leq r\} \neq \emptyset.$$

Definimos

$$s = \sup\{0 < r \leq 1 : \alpha \in R(x,y) \text{ si } 0 \leq \alpha \leq r\}.$$

Entonces $0 < s \leq 1$. Es claro que $\alpha \in R(x,y)$ para cualquier $0 \leq \alpha < s$. Afirmamos que $s = 1$ y por tanto, se cumple (2.14).

Supongamos que $s < 1$. Por la densidad de D_1, existe $d \in D_1$ tal que $s < d < \min(1, 2s)$. Entonces, el simétrico $d' = 2s - d$ de d respecto a s satisface que $0 < d' < s$. Así, $d', d \in R(x,y)$ y como $s = \frac{1}{2}(d + d')$ entonces s pertenece a $R(x,y)$. Por lo dicho antes, existe $\delta > 0$ tal que , $s+\alpha \in R(x,y)$ para todo $0 \leq \alpha \leq \delta$. Así, $0 \leq \alpha \leq s+\delta$ implica $\alpha \in R(x,y)$, lo que contradice la definición de s. ∎

Proposición 2.4.16 *Sea A un conjunto estrellado y cerrado en un espacio vectorial topológico X. Si $c(A) = 2$, entonces A es un conjunto convexo.*

Demostración. *Sean $x, y \in A$.* Probaremos que $[0,1] \subset R(x,y)$, donde

$$R(x,y) = \{\alpha \in [0,1] : x + \alpha(y-x) \in A\}.$$

De que la función $\alpha \to x + \alpha(y-x)$, con $\alpha \in [0,1]$, es continua y A cerrado, se sigue que $R(x,y)$ es un cerrado de $\mathbb{R}$.

Afirmamos que $2A = \bigcap_{s>2} sA$. Se tiene que $2A \subset sA$ para todo $s > 2$, por ser A estrellado. La contención contraria se da ya que si $x = sy_s$ para cada $s > 2$ y algún $y_s \in A$, entonces $\lim_{n\to\infty} y_{2+\frac{1}{n}} = \frac{x}{2} \in A$, por ser A cerrado, lo que quiere decir que $x \in 2A$.

Como $c(A) = 2$, tenemos que $A + A \subset sA$ para todo $s > 2$ y por lo afirmación previa concluimos que $A + A \subset 2A$. Entonces, $x, y \in A$ implica $\frac{x+y}{2} \in A$.

O sea, A es convexo por puntos medios y entonces el conjunto

$$D_1 = \left\{\frac{m}{2^n} : n \text{ natural y } 0 < m < 2^n \text{ entero}\right\},$$

que es denso en $[0,1]$, cumple que $D_1 \subset R(x,y)$.

En vista de que $R(x,y)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, se concluye que $[0,1] = \overline{D} \subset R(x,y)$. ∎

2.4.2 Espacios localmente pseudoconvexos en términos de conjuntos pseudoconvexos

Por los Corolarios 2.1.31 y 2.4.8 tenemos:

Teorema 2.4.17 *Todo espacio localmente pseudoconvexo tiene un sistema fundamental de vecindades del* 0 *formado por conjuntos balanceados y pseudoconvexos.*

Nuestro objetivo es ahora probar el recíproco.

Racionales diádicos no negativos

Definición 2.4.18 *Un numero racional de la forma $\frac{m}{2^n}$ con $m \geq 0$ entero es llamado un racional diádico no negativo. A la colección de todos estos números los denotaremos por D^+. Es fácil ver que $r \in D^+$ si sólo si tiene un desarrollo binario que termina es decir*

$$r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^i$$

donde $a_i = 0$ ó 1 y $a_i = 0$ excepto para un número finito de índices.

En lugar de $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^i$ escribiremos $\sum_{i=-\infty}^{k} a_i 2^i$ si $a_i = 0$ para $i > k$. De manera similar podremos escribir $\sum_{i=j}^{\infty} a_i 2^i$ o $\sum_{i=j}^{k} a_i 2^i$ cuando $a_i = 0$ para $i < j$ o para $i < j$ y $k < i$, respectivamente.

La colección D^+ es cerrada bajo sumas y si $r \in D^+$, entonces $r = \sum_{i=-N}^{N} a_i 2^i$ para algún $N \geq 0$.

Supongamos que $r_1 = \sum_{i=-N}^{N} a_i 2^i$ y $r_2 = \sum_{i=-N}^{N} b_i 2^i$ pertenecen a D^+. Es fácil probar por inducción que las siguientes sumas tienen los desarrollos binarios de los tipos que se indican.

- $r_1 + r_2 = \sum_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i$.
- $r_1 + r_2 + 2^{N+2} = \sum_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i + 2^{N+2}$.
- $r_1 + r_2 + 2^{-N-1} = 2^{-N-1} + \sum_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i$.
- $r_1 + r_2 + 2^{N+1} = \sum_{i=-N}^{N+2} c_i 2^i$.
- $r_1 + r_2 + 2^j = \sum_{i=-N}^{N+2} c_i 2^i$ si $-N \leq j \leq N+1$.

Los conjuntos $U(r)$

En esta sección suponemos que X es un e.v.t., U es una vecindad de 0 balanceada y pseudoconvexa. Además, $s = s(U)$ es un escalar tal que $s \geq 2$ y

$$U + U \subset sU.$$

Dicho escalar s existe bajo las hipótesis indicadas, ya que por ser U pseudoconvexo se tiene que $U + U \subset s_0 U$ para algún $s_0 > 0$, por lo que si tomamos $s = \max(2, s_0)$, entonces $s \geq 2$, $s_0 U \subset sU$, por ser U balanceado, y así, $U + U \subset sU$

Lema 2.4.19 *Para $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ definimos*

$$U(2^i) = s^i U$$

y para todo $r \in D^+$ hagamos

$$U(r) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_i U(2^i).$$

si $\sum_{-\infty}^{\infty} a_i 2^i$ es el desarrollo binario de r. En particular, $U(0) = 0$.

Para enteros k, j y $a_i = 0$ ó 1, se satisface:
(a) $U(2^j) + U(2^j) \subset U(2^k)$ *si* $j < k$.
(b) $\sum\limits_{i=j}^{k-1} U\left(2^i\right) + U\left(2^j\right) \subset U\left(2^k\right)$ *si* $j < k$.
(c) $U(2^j) \subset U(2^k)$ *si* $j \leq k$.
(d) $U\left(\sum\limits_{i=-\infty}^{k+1} a_i 2^i\right) + U\left(2^{k+1}\right) \subset U\left(\sum\limits_{i=-\infty}^{k+1} a_i 2^i + 2^{k+1}\right)$.
(e) $U\left(2^j\right) + U\left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} a_i 2^i\right) \subset U\left(2^j + \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_i 2^i\right)$
(f) $U\left(2^j + \sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i 2^i\right) = U\left(\sum\limits_{i=k}^{\infty} a_i 2^i\right) + U\left(2^j\right)$ *si* $j < k$.
(g) $U\left(\sum\limits_{i=-\infty}^{j} a_i 2^i + 2^k\right) = U\left(\sum\limits_{i=-\infty}^{j} a_i 2^i\right) + U\left(2^k\right)$ *si* $j < k$.
(h) $U(r)$ *es una vecindad balanceada del* 0, *cuando* $r \neq 0$. *En particular, es absorbente.*
(i) $U(2^k r) = s^k U(r)$.

Demostración.
(a) Por definición $U(2^j) = s^j U$ y $U(2^k) = s^k U$. Tenemos que $s^j U + s^j U = s^j (U + U) \subset s^{j+1} U \subset s^k U$, ya que $U + U \subset sU$, $0 < s^{j+1-k} \leq 1$ y U es balanceado

(b) Procedemos por inducción sobre $k-j$. Para $k-j = 1$; o sea, $k = j+1$, tenemos $\sum\limits_{i=j}^{k-1} U\left(2^i\right) + U\left(2^j\right) = U\left(2^j\right) + U\left(2^j\right)$ y el resultado se sigue de (a)

Supongámoslo cierto si $k-j = n$ y probémoslo para cuando $k-j = n+1$; o sea, $k = j + n + 1$

$$\sum_{i=j}^{k} U\left(2^i\right) + U\left(2^j\right) = \sum_{i=j}^{k-1} U\left(2^i\right) + U\left(2^k\right) + U\left(2^j\right) \subset U\left(2^k\right) + U\left(2^k\right).$$

De (a) se sigue $U\left(2^k\right) + U\left(2^k\right) \subset U\left(2^{k+1}\right)$.
(c) $U(2^j) \subset U(2^j) + U(2^j)$. El resultado se sigue de a):
(d) Tenemos

$$\sum_{i=-\infty}^{k+1} a_i 2^i + 2^{k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{i=-\infty}^{k} a_i 2^i + 2^{k+1} & \text{si } a_{k+1} = 0 \\ \sum\limits_{i=-\infty}^{k} a_i 2^i + 2^{k+2} & \text{si } a_{k+1} = 1 \end{array} \right. ,$$

de donde,

$$U\left(\sum_{i=-\infty}^{k+1} a_i 2^i + 2^{k+1}\right) = \begin{cases} \sum\limits_{i=-\infty}^{k} a_i U\left(2^i\right) + U\left(2^{k+1}\right) & \text{si } a_{k+1} = 0 \\ \sum\limits_{i=-\infty}^{k} a_i U\left(2^i\right) + U\left(2^{k+2}\right) & \text{si } a_{k+1} = 1. \end{cases}$$

Además,

$$\begin{aligned} & U\left(\sum_{i=-\infty}^{k+1} a_i 2^i\right) + U\left(2^{k+1}\right) \\ = & \begin{cases} \sum\limits_{i=-\infty}^{k} a_i U\left(2^i\right) + U\left(2^{k+1}\right) & \text{si } a_{k+1} = 0 \\ \sum\limits_{i=-\infty}^{k} a_i U\left(2^i\right) + U\left(2^{k+1}\right) + U\left(2^{k+1}\right) & \text{si } a_{k+1} = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Por (a) concluimos que se satisface (d).
(e) Tenemos

$$2^j + \sum_{i=j}^{\infty} a_i 2^i = \begin{cases} 2^j + \sum\limits_{i=j+1}^{\infty} a_i 2^i & \text{si } a_j = 0 \\ 2^k + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i 2^i & \text{si } a_j = 1, \end{cases}$$

donde k es el primer entero mayor que j tal que $a_k = 0$. Entonces,

$$U\left(2^j + \sum_{i=j}^{\infty} a_i 2^i\right) = \begin{cases} U\left(2^j\right) + \sum\limits_{i=j+1}^{\infty} a_i U\left(2^i\right) & \text{si } a_j = 0 \\ U\left(2^k\right) + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i U\left(2^i\right) & \text{si } a_j = 1. \end{cases}$$

Además,

$$U\left(2^j\right) + U\left(\sum_{i=j}^{\infty} a_i 2^i\right) = \begin{cases} U\left(2^j\right) + \sum\limits_{i=j+1}^{\infty} a_i U\left(2^i\right) & \text{si } a_j = 0 \\ U\left(2^j\right) + \sum\limits_{i=j}^{k-1} a_i U\left(2^i\right) + \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i U\left(2^i\right) & \text{si } a_j = 1. \end{cases}$$

Por (b) concluimos que se satisface (e).

(f) y (g) son afirmaciones obvias.

h) $U(r)$ contiene a un múltiplo no cero de U y es balanceada, por ser la suma de balanceados.

i) Sea $r = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^i$. Veamos que $U(2^k r) = s^k U(r)$

$$2^k r = 2^k \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^k 2^i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^{k+i},$$

entonces

$$\begin{aligned} U(2^k r) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i U(2^{k+i}) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i s^k s^i U. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} U(2^k r) &= s^k \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i s^i U \\ &= s^k U(r). \end{aligned}$$

■

Proposición 2.4.20 *Si $r_1, r_2 \in D^+$, entonces*

$$U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1 + r_2) \tag{2.15}$$

Demostración.

Todas las referencias a incisos que aparecen en esta demostración son a los incisos del lema anterior.

Dados $r_1 = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i 2^i$ y $r_2 = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} b_i 2^i$ en D^+ existe un natural $N \geq 0$ tal que que $a_i = b_i = 0$ si $|i| > N$. Haremos la prueba por inducción sobre N.

Si $N = 0$, entonces $r_1 = a_0 2^0$ y $r_2 = b_0 2^0$ Así,

$$U(r_1) + U(r_2) = a_0 U + b_0 U$$

Si $a_0 + b_0 = 0$, entonces $U(r_1) + U(r_2) = 0 = U(0) = U(r_1 + r_2)$.

Si $a_0 + b_0 = 1$, entonces $U(r_1) + U(r_2) = U = U(1) = U(r_1 + r_2)$.

Si $a_0 + b_0 = 2$, entonces $U(r_1) + U(r_2) = U + U \subset sU = U(2) = U(r_1 + r_2)$.

Supongamos que el resultado es válido para cuando $a_i = b_i = 0$ siempre que $|i| > N$, para un entero $N \geq 0$, y supongamos que r es un diádico tal que $a_i = b_i = 0$ si $|i| > N + 1$.

Definimos $r_1' = r_1 - a_{N+1}2^{N+1} - a_{-N-1}2^{-N-1}$ y $r_2' = r_2 - b_{N+1}2^{N+1} - b_{-N-1}2^{-N-1}$. Entonces estos números pertenecen a D^+ y sus coeficientes en sus desarrollos binarios son 0 para $|i| > N$. Tenemos que

$$r_1' + r_2' = \sum_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i.$$

con $c_i = 0$ ó 1 para todo i.

Por la hipótesis de inducción se cumple

$$U(r_1') + U(r_2') \subset U(r_1' + r_2') \tag{2.16}$$

Si $a_{N+1} = a_{-N-1} = b_{N+1} = b_{-N-1} = 0$, entonces $r_i = r_i'$ para $i = 1, 2$ y se tiene el resultado. Supongamos en lo que sigue que al menos uno de esos cuatro naturales es 1.

Tenemos que

$$U(r_1) = U(r_1') + a_{N+1}U\left(2^{N+1}\right) + a_{-N-1}U\left(2^{-N-1}\right)$$

y

$$U(r_2) = U(r_2') + b_{N+1}U\left(2^{N+1}\right) + b_{-N-1}U\left(2^{-N-1}\right);$$

por lo que de (2.16) obtenemos:

$$\begin{aligned} U(r_1) + U(r_2) \subset\ & U(r_1' + r_2') + a_{N+1}U\left(2^{N+1}\right) + b_{N+1}U\left(2^{N+1}\right) \\ & + a_{-N-1}U\left(2^{-N-1}\right) + b_{-N-1}U\left(2^{-N-1}\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

1. Supongamos $a_{N+1} = b_{N+1} = 0$.

1.1 Si $a_{-N-1} + b_{-N-1} = 1$, entonces

$$U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{-N-1}\right)$$

y $r_1 + r_2 = r_1' + r_2' + 2^{-N-1} = 2^{-N-1} + \sum_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i$.

Por consiguiente, $U(r_1 + r_2) = U\left(2^{-N-1}\right) + U(r_1' + r_2')$ y se obtiene (2.15).

1.2 Si $a_{-N-1} + b_{-N-1} = 2$, entonces

$$U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{-N-1}\right) + U\left(2^{-N-1}\right)$$

y $r_1 + r_2 = r_1' + r_2' + 2^{-N}$. Por la hipótesis de inducción tenemos:

$$U(r_1' + r_2') + U\left(2^{-N}\right) \subset U\left(r_1' + r_2' + 2^{-N}\right) = U(r_1 + r_2)$$

De esta contención y (a), obtenemos:

$$\begin{aligned} U(r_1) + U(r_2) &\subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{-N-1}\right) + U\left(2^{-N-1}\right) \\ &\subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{-N}\right) \subset U(r_1 + r_2). \end{aligned}$$

2. Supongamos $a_{N+1} + b_{N+1} = 1$.
2.1 Si $a_{-N-1} + b_{-N-1} = 0$, entonces (2.17) se transforma en

$$U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{N+1}\right)$$

y $r_1 + r_2 = r_1' + r_2' + 2^{N+1} = \sum\limits_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i + 2^{N+1}$. Por (d) tenemos:

$$U(r_1' + r_2') + U\left(2^{N+1}\right) \subset U\left(\sum_{i=-N}^{N+1} c_i 2^i + 2^{N+1}\right) = U(r_1 + r_2).$$

y se cumple (2.15).
2.2 Si $a_{-N-1} + b_{-N-1} = 1$, entonces (2.17) se reduce a:

$$U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{N+1}\right) + U\left(2^{-N-1}\right)$$

y $r_1 + r_2 = r_1' + r_2' + 2^{-N-1} + 2^{N+1}$.
Por (f) se tiene:

$$U(r_1' + r_2') + U\left(2^{-N-1}\right) = U\left(r_1' + r_2' + 2^{-N-1}\right)$$

y por (d),

$$U\left(r_1' + r_2' + 2^{-N-1}\right) + U\left(2^{N+1}\right) \subset U\left(r_1' + r_2' + 2^{-N-1} + 2^{N+1}\right).$$

De donde, se obtiene (2.15).
2.3 Si $a_{-N-1} + b_{-N-1} = 2$, entonces de (2.17) y (a) obtenemos:

$$\begin{aligned} U(r_1) + U(r_2) &\subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{N+1}\right) + U\left(2^{-N-1}\right) + U\left(2^{-N-1}\right) \\ &\subset U(r_1' + r_2') + U\left(2^{N+1}\right) + U\left(2^{-N}\right) \end{aligned}$$

y $r_1+r_2=r_1'+r_2'+2^{-N}+2^{N+1}$.
Por (d) y (e)

$$\begin{aligned} U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{-N}\right)+U\left(2^{N+1}\right) &\subset U\left(r_1'+r_2'+2^{-N}\right)+U\left(2^{N+1}\right) \\ &\subset U\left(r_1'+r_2'+2^{-N}+2^{N+1}\right) \end{aligned}$$

por lo que se obtiene (2.15).
3 Supongamos $a_{N+1}+b_{N+1}=2$.
3.1 Si $a_{-N-1}+b_{-N-1}=0$, entonces de (2.17) y (a) obtenemos:

$$\begin{aligned} U\left(r_1\right)+U\left(r_2\right) &\subset U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+1}\right)+U\left(2^{N+1}\right) \\ &\subset U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+2}\right) \end{aligned}$$

y $r_1+r_2=r_1'+r_2'+2^{N+2}$. Por consiguiente, $U\left(r_1+r_2\right)=U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+2}\right)$. De aquí se sigue (2.15).
3.2 Si $a_{-N-1}+b_{-N-1}=1$, entonces de (2.17) y (a) obtenemos:

$$\begin{aligned} U\left(r_1\right)+U\left(r_2\right) &\subset U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+1}\right)+U\left(2^{N+1}\right)+U\left(2^{-N-1}\right) \\ &\subset U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+2}\right)+U\left(2^{-N-1}\right) \end{aligned}$$

y $r_1+r_2=r_1'+r_2'+2^{-N-1}+2^{N+2}$. Por consiguiente, $U\left(r_1+r_2\right)=U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+2}\right)+U\left(2^{-N-1}\right)$ y se se obtiene (2.15).
3. Finalmente, supongamos $a_{-N-1}+b_{-N-1}=2$, entonces de (2.17) y (a) obtenemos:

$$\begin{aligned} U\left(r_1\right)+U\left(r_2\right) &\subset U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+1}\right)+U\left(2^{N+1}\right) \\ &\quad +U\left(2^{-N-1}\right)+U\left(2^{-N-1}\right) \\ &\subset U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+2}\right)+U\left(2^{-N}\right) \end{aligned}$$

y $r_1+r_2=r_1'+r_2'+2^{-N}+2^{N+2}$. Por (e) tenemos:

$$U\left(r_1'+r_2'\right)+U\left(2^{N+2}\right)+U\left(2^{-N}\right)\subset U\left(r_1'+r_2'+2^{-N}\right)+U\left(2^{N+2}\right).$$

Y por (d) concluimos que

$$U\left(r_1'+r_2'+2^{-N}\right)+U\left(2^{N+2}\right)\subset U\left(r_1'+r_2'+2^{-N}+2^{N+2}\right),$$

ya que la expresión binaria de $r_1'+r_2'+2^{-N}$ es de la forma $\sum_{i=-\infty}^{N+2} d_i 2^i$. Así, (2.15) es también válida en este caso. ∎

La p-seminorma de una vecindad balanceada y pseudoconvexa

Lema 2.4.21 *Sea U una vecindad de 0 balanceada y pseudoconvexa de un e.v.t. X. Definimos $D_0 = D^+ \diagdown \{0\}$ y*

$$\|x\|' = \inf\{r \in D_0 : \ x \in U(r)\}$$

Entonces,
(a) $\|0\|' = 0$.
(b) $\|x+y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$ (Desigualdad del triángulo).
(c) $\|\alpha x\|' = \|x\|'$ para todo $|\alpha| = 1$.
(d) $\left\|s^k x\right\|' = 2^k \|x\|$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, donde $s = s(U)$.
(e) $\|tx\|' \leq \|x\|'$ si $0 \leq t \leq 1$ (Monotonía).
(f) $\|t_1 x\|' \leq \|t_2 x\|'$ si $|t_1| \leq |t_2|$. En particular, $\|tx\|'$ es creciente, como función en la variable t, en $[0,\infty)$ y $\|t_1 x\|' = \|t_2 x\|'$ si $|t_1| = |t_2|$.

Demostración. *La función* $\|\cdot\|'$ es real, ya que dado $x \in X$ se tiene que $x \in U(2^r) = 2^r U$ para r suficientemente grande.

(a) $\|0\|' = 0$ ya que $0 \in U(r)$ para todo $r \in D_0$ y estos números forman un conjunto denso en $[0,\infty)$.

Observamos que cualquier número $t \in [0,\infty)$ es el limite de una sucesión en D_0 que es decreciente y con todos sus elementos distintos de t.

(b) Supongamos que $x \in U(r_1)$ y $y \in U(r_2)$. Así,

$$x + y \in U(r_1) + U(r_2) \subset U(r_1 + r_2)$$

y

$$\|x+y\|' \leq r_1 + r_2$$

de donde,

$$\|x+y\|' \leq \|x\|' + \|y\|'$$

(c) Las condiciones $x \in U(r)$ y $|\alpha| = 1$ implican $\alpha x \in U(r)$, pues $U(r)$ es un conjunto balanceado, así

$$\|\alpha x\|' = \inf\{r \in D_0 : \alpha x \in U_n(r)\} \leq \inf\{r \in D_0 : x \in U_n(r)\} = \|x\|'.$$

Por otro lado, $|\alpha^{-1}| = 1$ y entonces

$$\|x\|' = \left\|\alpha^{-1}\alpha x\right\|' \leq \|\alpha x\|'$$

por lo que se tiene $\|\alpha x\|' = \|x\|$.

(d) Sea $r \in D_0$. Entonces:

$\|s_n^k x\|' < r$ implica $s_n^k x \in U(r)$; así $x \in s_n^{-k} U(r) = U(2^{-k} r)$ y entonces $2^k \|x\|' \leq r$. De donde, $2^k \|x\|' \leq \|s_n^k x\|'$. Por esto tenemos $\|x\| = \|s_n^{-k} s_n^k x\|' \geq 2^{-k} \|s_n^k x\|'$ y de aquí se sigue la igualdad señalada en (d).

(e) Tomemos $0 \leq t \leq 1$ y sea $r \in D_0$ tal que $\|x\| < r$, entonces $x \in U(r)$. Como $U(r)$ es un conjunto balanceado se tiene $tx \in U(r) \|x\|$ y por consiguiente $\|tx\|' \leq r$, de donde se sigue que $\|tx\|' \leq \|x\|'$

(f) Sean $t_i = s_i^{-1} |t_i|$ para $i = 1, 2$, con $|t_1| \leq |t_2|$ y donde s_i es el signo de t_i. Entonces, $0 \leq \frac{|t_1|}{|t_2|} < 1$, si $|t_2| > 0$ y por los incisos (b) y (e) obtenemos

$$\|t_1 x\|' = \left\| \frac{t_1}{t_2} t_2 x \right\|' = \left\| \frac{|t_1|}{|t_2|} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} t_2 x \right\|' \leq \left\| \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} t_2 x \right\|' = \|t_2 x\|'.$$

Cuando $|t_2| = 0$ la afirmación es obvia.

Proposición 2.4.22 *Sea U una vecindad de 0 balanceada y pseudoconvexa de un e.v.t. X. La función definida en X como*

$$\|x\| = \sup_{t>0} \frac{\|tx\|'}{t^p},$$

donde $p = \frac{\log 2}{\log s} \leq 1$ y $s = s(U)$, es una $p-$seminorma.

Demostración. Por las definiciones de p y $s(u)$ y las propiedades de logaritmo se tiene $0 < p \leq 1$ y $s^P = 2$. La función $\|x\|$ está bien definida. Para probarlo dado $t > 0$ escogemos n como el primer natural q tal que $t \leq s^q$. Entonces $s^{q-1} < t$ y por tanto,

$$\frac{\|tx\|'}{t^p} \leq \frac{\|s^q x\|'}{s^{(q-1)p}} = \frac{2^q \|x\|'}{2^{q-1}} = 2 \|x\|'$$

Es decir,

$$\|x\| \leq 2 \|x\|' \tag{2.18}$$

Pasamos a verificar que la función no negativa $\|\cdot\|$ es una p-seminorma.

(i) $\|0\| = 0$ ya que $\|0\|' = 0$.

(ii) Sean $x, y \in X$ y $t > 0$. Entonces

$$\frac{\|t(x+y)\|'}{t^p} \leq \frac{\|tx\|'}{t^p} + \frac{\|ty\|'}{t^p}$$

De aquí se sigue que $\|\cdot\|$ satisface la desigualdad del triángulo.

(ii) Sean λ un escalar no nulo y $x \in X$. Por el inciso (f) del Lema 2.4.21

$$\|\lambda x\| = \sup_{t>0} \frac{\|t\lambda x\|'}{t^p} = \sup_{t|\lambda|>0} |\lambda|^p \frac{\|t\,|\lambda|\,x\|'}{(t\,|\lambda|)^p} = |\lambda|^p \|x\| .$$

Si $\lambda = 0$, entonces la igualdad $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$ obviamente se satisface.

Teorema 2.4.23 *Si un e.v.t.* (X, τ) *tiene una sistema fundamental de vecindades formado por conjuntos balanceados y pseudoconvexos entonces su topología está dada por una familia* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* $p(\alpha)$ *−seminormas . Es decir,* X *es localmente pseudoconvexo.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una base local del cero formada por conjuntos pseudoconvexos y balanceados. Para cada $\alpha \in \Lambda$ consideramos el número $0 < p(\alpha) \le 1$, la función $\|\cdot\|_\alpha'$ y la seminorma $p(\alpha)$-homogénea $\|\cdot\|_\alpha$ asociados a U_α de acuerdo al lema y proposición anteriores. Sea $\tau(\mathcal{F})$ la topología generada por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas.

Al tomar $t = 1$ se sigue de la definición de $\|\cdot\|_\alpha$ que

$$\|x\|_\alpha' \le \|x\|_\alpha .$$

De donde,

$$\{x \in X : \|x\|_\alpha < r\} \subset U_\alpha(r)$$

y entonces $\tau \subset \tau(\mathcal{F})$

Inversamente, dado $\varepsilon > 0$ existe $r \in D_0$ tal que $2r < \varepsilon$ y de (2.18) se sigue que

$$U_\alpha(r) \subset \{x \in X : \|x\|_\alpha \le 2r\} \subset \{x \in X : \|x\|_\alpha < \varepsilon\}$$

por lo que $\tau(\mathcal{F}) \subset \tau$. Por tanto, τ está generada por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas.

Por el Teorema 2.1.18, se tiene que X es localmente pseudoconvexo.∎

Con el teorema anterior y el 2.4.17 obtenemos el siguiente resultado que resume mucho de lo antes hecho.

Corolario 2.4.24 *Un e.v.t.* X *es localmente pseudoconvexo si y sólo si tiene una sistema fundamental de vecindades de* 0 *formado por conjuntos balanceados y pseudoconvexos.*

La condición señalada en este corolario para que X sea pseudoconvexo es la definición de espacio localmente pseudoconvexo dada por Rolewicz y explica el nombre de tales espacios.

Observación 2.4.25 *El corolario anterior, el conjunto A del Ejemplo 2.4.9 y la Proposición 2.1.10 parecieran sugerir la manera de construir un espacio vectorial localmente pseudoconvexo que no es $p-$ convexo para ninguna $0 < p \leq 1$, al considerar en el plano un sistema fundamental de vecindades del cero compuesto por las intersecciones de un número finito de múltiplos positivos del conjunto A. Sin embargo, es consecuencia del Teorema 1.6.14 que la única topología vectorial del plano es la euclidiana, la cual es una topología $1-$convexa. En la siguiente sección se desarrollan las herramientas que permiten dar un ejemplo, de hecho una clase, de espacios vectoriales localmente pseudoconvexos que no son $p-$convexos para ningún p (ver página 78).*

2.5 Dos clases de topologías maximales localmente pseudoconvexas en espacios vectoriales

Dados un espacio vectorial X y un real $0 < p \leq 1$, mostraremos que existe la máxima topología $p-$ convexa y que con respecto a ella X es de Hausdorff y completo y obviamente $p-$convexo. Si X tiene dimensión no numerable, entonces estas topologías son distintas entre sí para valores diferentes de p. Sin embargo, si la dimensión de X es a lo más numerable, entonces todas ellas coinciden. Esto conduce a un ejemplo de un espacio X localmente pseudoconvexo y completo que no es localmente convexo, pero que cumple que todos sus subespacios separables son localmente convexos.

Definición 2.5.1 *Sean X un espacio vectorial y un real $0 < p \leq 1$. Se define la máxima topología localmente $p-$convexa $\tau^p_{\max}$ como la topología generada por todas las $p-$seminormas en X. Cuando $p = 1$ se le llama la máxima topología localmente convexa de X y en este caso la denotamos por $\tau^{LC}_{\max}$ en lugar de $\tau^1_{\max}$.*

Por la Proposición 2.1.21 cada $p-$seminorma en X es continua según $\tau^p_{\max}$. El siguiente resultado es más general.

Proposición 2.5.2 *Si $0 < q \leq p \leq 1$, entonces todas las $p-$seminormas de X son continuas en la topología $\tau^q_{\max}$. Por consiguiente, $\tau^p_{\max} \preceq \tau^q_{\max}$.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una $p-$seminorma en X entonces $\|\cdot\|^{\frac{q}{p}}$ es una $q-$ seminorma y para todo $x \in X$ se cumple

$$\|x\| = \left(\|x\|^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}$$

Por lo que $\|\cdot\|$ es la composición de dos funciones: $x \to \|x\|^{\frac{q}{p}}$ que es $\tau^q_{\max}-$continua y $\lambda \to \lambda^{\frac{p}{q}}$ que es continua en $[o, \infty)$ y así, $\|\cdot\|$ es $\tau^q_{\max}-$continua. ■

Definición 2.5.3 *Sea X un espacio vectorial y $0 \leq q < 1$. Se define $\tau^{q+}_{\max}$ como la topología localmente pseudoconvexa generada por todas las $p-$seminormas con $q < p \leq 1$.*

Si X es un espacio vectorial, $0 < p \leq 1$ y $0 \leq q < 1$, entonces, $\tau^p_{\max}$ y $\tau^{q+}_{\max}$ son topologías generadas por familias saturadas de $p-$seminormas y pseudonormas con índices de homogeneidad que varían en $(q, 1]$, respectivamente.

Proposición 2.5.4 *Para $0 \leq q < p < r \leq 1$ se tiene las siguientes relaciones entre las topologías recién definidas:*

$$\tau^r_{\max} \preceq \tau^{p+}_{\max} \preceq \tau^p_{\max} \preceq \tau^{q+}_{\max} \tag{2.19}$$

Demostración. Que $\tau^p_{\max} \preceq \tau^{q+}_{\max}$, es consecuencia de la definición de $\tau^{q+}_{\max}$ y las otras relaciones se siguen de la proposición anterior. ■

Lema 2.5.5 *Sea $0 < p < 1$. Si existe una $p-$seminorma definida en X que es $\tau^q_{\max}-$discontinua para todo $p < q \leq 1$, entonces también es $\tau^{p+}_{\max}-$discontinua.*

Demostración. Sea $|\cdot|$ tal seminorma y supongamos que es $\tau^{p+}_{\max}-$ continua. Por el Corolario 2.1.35 existen $M > 0$ y una $q-$seminorma $\|\cdot\|$, para algún $p < q \leq 1$, tales que se cumple

$$|x| \leq M \|x\|^{\frac{p}{q}}$$

para todo $x \in X$. Por ese mismo corolario, entonces $|\cdot|$ es $\tau^q_{\max}$-continua, lo que contradice la hipótesis. ■

Lema 2.5.6 *Sean $0 < p < r \leq 1$. Si existe una $p-$seminorma $|\cdot|$ en X que no es continua en la topología $\tau^r_{\max}$, entonces*

(a) $\tau^p_{\max} \neq \tau^r_{\max}$.

(b) $\tau^p_{\max} \neq \tau^{r+}_{\max}$, si $r < 1$.

Demostración.

(a) Para que $\tau^p_{\max} \neq \tau^r_{\max}$ basta que exista una función $f : X \to \mathbb{K}$ tal que f es $\tau^p_{\max}-$continua en pero no es $\tau^r_{\max}-$continua y tal cosa sucede para la $p-$seminorma $|\cdot|$.

(b) De la Proposición 2.5.4 se sigue que $\tau^{r+}_{\max} \preceq \tau^r_{\max} \preceq \tau^{p+}_{\max} \preceq \tau^p_{\max}$. Si se cumple que $\tau^p_{\max} = \tau^{r+}_{\max}$, entonces $\tau^p_{\max} = \tau^r_{\max}$, lo que contradice lo probado en (a). ∎

Proposición 2.5.7 *Si para cada $0 < p < 1$, existe una $p-$seminorma en X que no es continua en la topología $\tau^r_{\max}$ para todo $p < r \leq 1$, entonces todas las topologías $\tau^p_{\max}$ $(0 < p \leq 1)$ y $\tau^{q+}_{\max}$ $(0 \leq q < 1)$ son diferentes, dos a dos.*

Demostración.

(a) Caso $\tau^p_{\max} \neq \tau^{p'}_{\max}$. Por (a) del lema anterior tenemos: $\tau^p_{\max} \neq \tau^{p'}_{\max}$ si $0 < p, p' \leq 1$ y $p \neq p'$.

(b) Caso $\tau^p_{\max} \neq \tau^{p'+}_{\max}$. Sean $0 < p \leq 1$ y $0 \leq p' < 1$ distintos entre sí. Por (b) del mismo lema, $\tau^p_{\max} \neq \tau^{p'+}_{\max}$ si $0 < p < p' < 1$.

Supongamos que $0 \leq p' < p \leq 1$. De la Proposición 2.5.4 se sigue que si $p' < r < p$, entonces $\tau^p_{\max} \preceq \tau^{r+}_{\max} \preceq \tau^r_{\max} \preceq \tau^{p'+}_{\max}$. Si $\tau^p_{\max} = \tau^{p'+}_{\max}$, entonces $\tau^r_{\max} = \tau^p_{\max}$, lo que contradice (a) de esta prueba.

Si $0 < p = p' < 1$, entonces existe una $p-$seminorma $|\cdot|$ que es $\tau^r_{\max}-$discontinua para cualquier $p < r \leq 1$, por tanto, $|\cdot|$ es $\tau^{p+}_{\max}-$discontinua por el Lema 2.5.5 y así, $\tau^p_{\max} \neq \tau^{p+}_{\max}$.

(c) Caso $\tau^{p+}_{\max} \neq \tau^{p'+}_{\max}$. Sean $0 \leq p, p' < 1$, con $p \neq p'$. Supongamos $0 < p' < q < p$, entonces $\tau^{p+}_{\max} \preceq \tau^p_{\max} \preceq \tau^{q+}_{\max} \preceq \tau^q_{\max} \preceq \tau^{p'+}_{\max}$. Si se satisface que $\tau^{p+}_{\max} = \tau^{p'+}_{\max}$, entonces $\tau^p_{\max} = \tau^{p'}_{\max}$ y esto contradice (a) de esta prueba. Se procede de la misma manera si $0 < p < p'$. Supongamos $p' = 0$ y tomemos $0 < q < p$. Existe una q seminorma $|\cdot|$, por consiguiente $\tau^{0+}_{\max}-$continua, que no es $\tau^p_{\max}-$ continua y por tanto, no es $\tau^{p+}_{\max}-$ continua Así, $\tau^{p+}_{\max} \neq \tau^{0+}_{\max}$.
∎

Proposición 2.5.8 *Si X es un espacio vectorial equipado con alguna de las topologías maximales anteriores, entonces todos sus funcionales lineales son continuos.*

Demostración. En vista de la Proposición 2.5.4, basta probar que cada funcional lineal f es $\tau^p_{\max}-$continuo para todo $0 < p \leq 1$. Sabemos que si $f \in X^{\#}$, entonces la fórmula $x \longrightarrow |f(x)|^p$ da una $p-$seminorma en X que denotamos por $\|\cdot\|$. Entonces, $\|\cdot\|$ es $\tau^p_{\max}$-continua y tenemos que se cumple

$$|f(x)| = \|x\|^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in X$ y por el Corolario 2.2.2, f es $\tau_{\max}^{p}-$continuo ∎

Proposición 2.5.9 *Si X es un espacio vectorial equipado con alguna de las topologías maximales anteriores, entonces todos sus endomorfismos son continuos.*

Demostración. Por la Proposición 2.5.4 basta ver todo endomorfismo $T : X \longrightarrow X$ es $\tau_{\max}^{p}-$continuo para todo $0 < p \leq 1$. Sea $\|\cdot\|$ una $p-$seminorma en X, definimos $\|x\|_T = \|T(x)\|$ para cada $x \in X$. Entonces $\|\cdot\|_T$ es una $p-$seminorma de X y se cumple

$$\|T(x)\| = \|x\|_T$$

para todo $x \in X$. Por la Proposición 2.2.1, T es $\tau_{\max}^{p}-$continuo. ∎

Proposición 2.5.10 *Si X es un espacio vectorial equipado con alguna de las topologías maximales anteriores, entonces todos sus subespacios lineales son cerrados.*

Demostración. En vista de la Proposición 2.5.4, basta probar que cada un subespacio lineal $M \subset X$ es $\tau_{\max}^{p}-$cerrado para todo $0 < p \leq 1$. Supongamos que existe $x_0 \in \overline{M} - M$ y sea $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda(M)}$ una base de Hamel de M.

Al ser $\{x_0\} \cup \{h_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda(M)}$ un conjunto linealmente independiente de vectores, puede extenderse para formar una base de Hamel $\{h_\beta\}_{\beta \in \Lambda(X)}$ para el espacio X.

La funcional lineal $f : X \to \mathbb{F}$ definida como $f(h_\beta) = 0$ si $h_\beta \neq x_0$ y $f(x_0) = 1$ es $\tau_{\max}^{p}-$continua por la Proposición 2.5.8. Consideremos una red (x_i) en M tal que $x_i \longrightarrow x_0$. Entonces, se llega al absurdo $\lim f(x_i) = 0 = f(x_0) = 1$. ∎

Para lo que sigue recordamos algunas nociones e itroducimos notaciones.

Sea $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una base de Hamel de X. Cada $x \in X$ tiene una representación única de la forma

$$x = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x)\, h_\alpha,$$

donde todos excepto un número finito de los coeficientes $f_\alpha(x)$ son distintos de cero. Para $\alpha \in \Lambda$ definimos, el *coeficiente funcional* $f_\alpha : X \to \mathbb{F}$ que asocia a cada $x \in X$ su coeficiente $f_\alpha(x)$. Es claro que f_α es lineal.

Definimos el *soporte de* x, respecto a la base $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, como

$$sop\ (x) = \{\alpha \in \Lambda : f_\alpha(x) \neq 0\};$$

Así, *sop* $0 = \phi$ y es inmediato ver que se cumple

$$sop\,(x+y) \subset sop\,(x) \cup sop\,(y)$$

si $x, y \in X$.

Lema 2.5.11 *Sean* $(h_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *una base de Hamel de* X *y* $\{x_i\}_{i\in I}$ *una red de Cauchy en* $(X, \tau^p_{\max})$ *(o bien* $(X, \tau^{q+}_{\max})$*). Entonces*

$$C_\alpha = \lim_{i\in I} f_\alpha(x_i)$$

existe para todo $\alpha \in \Lambda$ *y* $C_\alpha = 0$*, excepto para un número finito de índices* α*.*

Demostración. La existencia del límite C_α se sigue de la continuidad de f_α y la completez de $\mathbb{F}$. Supongamos que $C_\alpha \neq 0$ para una infinidad de índices. Escojamos una sucesión $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, ...$ tal que $C_{\alpha_k} \neq 0$ para toda $k \geq 1$, y definamos

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,|f_{\alpha_k}(x)|}{|C_{\alpha_k}|}\right)^p$$

(con $q < p$ en el caso de la topología $\tau^{q+}_{\max}$).

Observemos que para cada $x \in X$ se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\left|f_{\alpha_k}(x)\right|}{\left|C_{\alpha_k}\right|}$ es un real no negativo, pues excepto para un un número finito de subíndices k se tiene que $f_{\alpha_k}(x) = 0$ y el resto son no negativos. Es fácil ver que $|\cdot|$ es una $p-$seminorma en X.

Entonces, existe $i_0 \in I$ tal que

$$|x_i| < 1 + |x_{i_0}| \tag{2.20}$$

si $i_0 < i$.

Dado $n \geq 1$ existe $i_n > i_0$ tal que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,|f_{\alpha_k}(x_{i_n})|}{|C_{\alpha_k}|}\right| < 1$$

ya que $C_{\alpha_k} = \lim_{i\in I} f_{\alpha_k}(x_i)$; de donde,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k\right| - 1 < \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,|f_{\alpha_k}(x_{i_n})|}{|C_{\alpha_k}|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,|f_{\alpha_k}(x_{i_n})|}{|C_{\alpha_k}|} = |x_{i_n}|^{\frac{1}{p}}\,.$$

Para n suficientemente grande tenemos

$$(1 + |x_{i_0}|)^{\frac{1}{p}} < |x_{i_n}|^{\frac{1}{p}}$$

con $i_n > i_0$, lo que contradice (2.20). ∎

Definición 2.5.12 *Sean $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una base de Hamel para el espacio X, a una función no negativa definida en Λ y $0 < p \leq 1$. Para $x = \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x) h_\alpha$ definimos*

$$\|x\|_{(p,a)} = \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(x)|^p \, a(\alpha) = \sum_{\alpha \in sop(x)} |f_\alpha(x)|^p \, a(\alpha).$$

Si $a(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in \Lambda$ escribimos simplemente $\|x\|_p$ en vez de $\|x\|_{(p,a)}$. En tanto que si $p = 1$, entonces escribimos $\|x\|_a$ en vez de $\|x\|_{(p,a)}$.

Lema 2.5.13 *Las función $\|\cdot\|_{(p,a)}$ es una $p-$seminorma en X.*

Demostración. La suma $\sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(x)|^p \, a(\alpha)$ es un número no negativo, pues todos los sumandos, excepto un número finito, son 0 y el resto son valores no negativos.

Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$.

(i)

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{(p,a)} &= \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(x+y)|^p \, a(\alpha) \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} (|f_\alpha(x)| + |f_\alpha(y)|)^p \, a(\alpha) \\ &\leq \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(x)|^p \, a(\alpha) + \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(y)|^p \, a(\alpha) = \|x\|_{(p,a)} + \|y\|_{(p,a)}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_{(p,a)} &= \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(\lambda x)|^p \, a(\alpha) = \sum_{\alpha \in \Lambda} |\lambda f_\alpha(x)|^p \, a(\alpha) \\ &= |\lambda|^p \sum_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha(x)|^p \, a(\alpha) = |\lambda|^p \|x\|_{(p,a)}. \end{aligned}$$

∎

Lema 2.5.14 *La condición $sop \; x \cap sop \; y = \phi$ implica $\|x+y\|_{(p,a)} = \|x\|_{(p,a)} + \|y\|_{(p,a)}$ para cualquier seminorma $\|\cdot\|_{(p,a)}$.*

Demostración. La afirmación es obvia si x o y es el vector 0. Supongamos que ambos son no nulos.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_{(p,a)} &= \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x+y)|^p\, a(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha\in sop(x)} |f_\alpha(x)+f_\alpha(y)|^p\, a(\alpha) + \sum_{\alpha\in sop(y)} |f_\alpha(x)+f_\alpha(y)|^p\, a(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha\in sop\ (x)} |f_\alpha(x)|^p\, a(\alpha) + \sum_{\alpha\in sop\ (y)} |f_\alpha(y)|^p\, a(\alpha) \\
&= \|x\|_{(p,a)} + \|y\|_{(p,a)}\,.
\end{aligned}$$

■

Lema 2.5.15 *Sean y un vector fijo de X y P la proyección en X dada por la fórmula*

$$P\,(x) = \sum_{\alpha\in sop\ (\ y)} f_\alpha(x)h_\alpha$$

Entonces, $sop\,(Px)\cap sop\ ((\mathcal{I}-P)\,x) = \phi$ y $sop\,(y)\ \cap sop\ ((\mathcal{I}-P)\,x) = \phi$ para todo $x\in X$ donde $\mathcal{I}$ es el operador identidad en X.

Demostración. *Es claro que* $P^2\,(x) = P\,(x)$ para todo $x\in X$. Entonces P es una proyección.

Para $x\in X$ tenemos: $f_\alpha(x)\neq 0$ para $\alpha\in sop\ (y)$ si y sólo si $\alpha\in sop\ (y)$. De donde, $sop\ P\,(x) = sop\,(x)\cap sop\,(y)\,.$

Por otra parte $(\mathcal{I}-P)\,x = \sum_{\alpha\in sop\ (\ x)} f_\alpha(x)h_\alpha - \sum_{\alpha\in sop\ (y)} f_\alpha(x)h$ de donde, $sop\ ((\mathcal{I}-P)\,x) = sop\,(x)\diagdown sop\,(y)\,.$ ■

Teorema 2.5.16 *Sean X un espacio vectorial, $0<p\leq 1$ y $0\leq q<1$. Entonces, $(X,\tau^p_{\max})$ y $(X,\tau^{q+}_{\max})$ son espacios localmente pseudoconvexos de Hausdorff y completos. En particular, $\left(X,\tau^{LC}_{\max}\right)$ es localmente convexo de Hausdorff y completo.*

Demostración. Veamos primero que son de Hausdorff usando la Proposición 2.1.32 Sea $x\in X$ distinto de 0. Entonces, por ser $\{x\}$ un conjunto linealmente independiente en X, existe una transformación lineal f definida en X tal que $f\,(x)\neq 0$. Por la Proposición 2.5.8 la transformación f es continua, de donde $\|x\| = |f\,(x)|^{p'}$ es una p'−seminorma , que no se anula en x, para cualquier $0<p'\leq 1$. Al escoger $p'=p$ o $p'>q$ obtenemos que $(X,\tau^p_{\max})$ y $(X,\tau^{q+}_{\max})$ son espacios vectoriales topológicos de Hausdorff.

Sea $(h_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una base de Hamel para X. Cada cada $x \in X$ tiene una representación única de la forma

$$x = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x) h_\alpha,$$

donde excepto un número finito de los coeficientes $f_\alpha(x)$ son cero.

Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una red de Cauchy en $(X, \tau^p_{\max})$ (*respectivamente* $(X, \tau^{q+}_{\max})$). Por el Lema 2.5.11 se tiene que

$$C_\alpha = \lim_{i\in I} f_\alpha(x_i)$$

existen para todo $\alpha \in A$ y excepto un número finito de los C_α son cero. Si todos los límites son 0 definimos $x_0 = 0$. En caso contrario si $C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_k}$ son todos los límites diferentes de 0, definamos $x_0 = C_{\alpha_1} h_{\alpha_1} + ... + C_{\alpha_k} h_{\alpha_k}$.

La red $\{y_i = x_i - x_0\}_{i\in I}$ es de Cauchy por serlo $\{x_i\}_{i\in I}$ y entonces la sucesión imagen $\{|y_i|\}_{i\in I}$ bajo cualquier $p-$serminorma ($p > q$ en el caso de $\tau^{q+}_{\max}$) $|\cdot|$ converge, ya que es de Cauchy en $\mathbb{F}$, puesto que

$$||y_i| - |y_j|| \leq |y_i - y_j|$$

Para demostrar que $(X, \tau^p_{\max})$ (*respectivamente* $(X, \tau^{q+}_{\max})$) es completo, debemos probar que $\{|y_i|\}_{i\in I}$ tiende a 0. Si suponemos que esto no sucede, entonces existe $|\cdot|$ una $p-$seminorma en X ($p > q$ en el caso de $\tau^{q+}_{\max}$) tal que $\lim\limits_{i\in I} |y_i| > 0$. Sea $r_\alpha = |h_\alpha|_1$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y definamos

$$\|x\| = \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x)|^p \, r_\alpha$$

para cada $x \in X$. Por la Proposición 2.5.13, al tomar $a(\alpha) = r_\alpha$, se tiene que $\|\cdot\|$ es una $p-$seminorma en X.

Además, la desigualdad del triángulo y la $p-$ homogeneidad de $|\cdot|$ implican

$$|x| = \left| \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x) h_\alpha \right| \leq \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x) h_\alpha| = \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x)|^p \, |h_\alpha| = \|x\| \, .$$

Así, se cumple $M = \lim\limits_{i\in I} \|y_i\| > 0$. Como $\{|y_i|\}_{i\in I}$ es de Cauchy, existe un índice $i_0 \in I$ tal que $\|y_i - y_{i_0}\| < \frac{M}{2}$ para todo $i \succ i_0$.

Sea P la proyección en X dada por la fórmula

$$Px = \sum_{\alpha \in sop\ y_{i_0}} f_\alpha(x) h_\alpha$$

Sabemos que $sop\,(Py_i - y_{i_0}) \subset sop\,(Py)_i \cup sop\,(y_{i_0})$ y por el Lema 2.5.15 que: $sop\,(P\,(y_i)) \cap sop\,((\mathcal{I} - P)\,y_i) = \phi$, $sop\,(y_{i_0}) \cap sop\,((\mathcal{I} - P)\,y_i) = \phi$. También sabemos que

$$sop\,(Py_i - y_{i_0}) \subset sop\,(Py_i) \cup sop\,(y_{i_0})$$

y entonces,

$$sop\,(Py_i - y_{i_0}) \cap sop\,((\mathcal{I} - P)\,y_i) = \emptyset.$$

Al aplicar el Lema 2.5.14 a los elementos$Py_i - y_{i_0}$,$(\mathcal{I} - P)\,y_i$ y a la $p-$seminorma $\|\cdot\|$ obtenemos:

$$\|y_i - y_{i_0}\| = \|Py_i - y_{i_0} + (\mathcal{I} - P)\,y_i\| = \|Py_i - y_{i_0}\| + \|(\mathcal{I} - P)\,y_i\|\,.$$

De donde,

$$\|(\mathcal{I} - P)\,y_i\| < \frac{M}{2}$$

para todo $i \succ i_0$.

Por la definición de x_0 se tiene que

$$\lim_{i \in I} f_\alpha\,(y_i) = \lim_{i \in I} f_\alpha\,(x_i - x_0) = \lim_{i \in I} f_\alpha\,(x_i) - f_\alpha\,(x_0) = 0$$

Como $sop\,(y_{i_0})$ es finito, entonces en $(X, \tau^p_{\max})$ (*respectivamente* $(X, \tau^{q+}_{\max})$) se cumple que

$$\lim_{i \in I} Py_i = \lim_{i \in I} \sum_{\alpha \in sop\ y_{i_0}} f_\alpha(y_i) h_\alpha = \sum_{\alpha \in sop\ y_{i_0}} \lim_{i \in I} f_\alpha(y_i) h_\alpha = 0,$$

de donde $\lim\limits_{i \in I} \|Py_i\| = 0$. Así,

$$M = \lim_{i \in I} \|y_i\| = \lim_{i \in I} \|Py_i + (\mathcal{I} - P)\,y_i\| = \lim_{i \in I} \|Py_i\| + \lim_{i \in I} \|(\mathcal{I} - P)\,y_i\| \leq \frac{M}{2}$$

lo que es imposible ya que $M > 0$. Esto prueba que $x_i \to x_0$ en $(X, \tau^p_{\max})$ y $(X, \tau^{q+}_{\max})$ y estos son espacios son localmente pseudoconvexos completos. ∎

Definición 2.5.17 *Decimos que X es de dimensión a lo más numerable (respectivamente, de dimensión no numerable) si tiene una base de Hamel a lo más numerable (respectivamente no numerable).*

Proposición 2.5.18 *Sea X un espacio vectorial de dimensión no numerable. Entonces todas las topologías $\tau_{\max}^{p}$ $(0 < p \leq 1)$ y $\tau_{\max}^{q+}$ $(0 \leq q < 1)$ son diferentes, dos a dos, en X.*

Demostración. Por la Proposición 2.5.7 basta probar que dado $0 < p < 1$ existe una $p-$seminorma en X que no es continua en la topología $\tau_{\max}^{r}$ para todo $p < r \leq 1$ o lo que es lo mismo que para cada tal r no se satisface la condición (2.7) del Corolario 2.1.35, misma que aparece abajo en 2.21.

Sea $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una base de X. Definimos

$$\|x\|_p = \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x)|^p .$$

la cual es, como ya vimos una $p-$seminorma en X.

Sea $p < r \leq 1$, afirmamos que $\|x\|_p$ no es continua en la topología $\tau_{\max}^{r}$. Supongamos, lo contrario lo que quiere decir que se satisface la condición (2.7); es decir, existen una $r-$seminorma $\|\cdot\|$ en X y $M > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple:

$$\|x\|_p \leq M \|x\|^{\frac{p}{r}} \tag{2.21}$$

Por otro lado

$$\|x\| = \left\|\sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x)h_\alpha\right\| \leq \sum_{\alpha\in\Lambda} \|f_\alpha(x)h_\alpha\| = \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x)|^r \|h_\alpha\| .$$

Si hacemos $a(\alpha) = \|h_\alpha\|$, entonces $\|x\|_{(r,a)} = \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x)|^r \|h_\alpha\|$ y

$$\|x\| \leq \|x\|_{(r,a)} ,$$

de donde para todo $x \in X$ se cumple:

$$\|x\|_p \leq M \|x\|_{(r,a)}^{\frac{p}{r}}$$

Para cada natural m sea $a_m = \{\alpha \in \Lambda : a(\alpha) = \|h_\alpha\| \leq m\}$. Entonces,

$$\Lambda = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} a_m$$

y como Λ es no numerable, entonces $A_n = \{\alpha \in \Lambda : a(\alpha) \leq n\}$ es infinito para algún $n_0 \geq 1$.

Tomemos un elemento x_0 tal que $f_\alpha(x_0) = \frac{1}{k}$ para α en un subconjunto B de A_{n_0} de cardinalidad k y $f_\alpha(x_0) = 0$ para las α restantes. Tomar un elemento con estas características siempre es posible pues $f_\alpha(x_0)$ representa los escalares por los que hay que multiplicar a los elementos de la base de Hamel para obtener x_0.

Por lo anterior, se cumple

$$\|x_0\|_p \leq M \|x_0\|_{(r,a)}^{\frac{p}{r}}.$$

Por otra parte,

$$\|x_0\|_p = \sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x_0)|^p = \sum_{\alpha\in B} |f_\alpha(x_0)|^p = \sum_{\alpha\in B} \left|\frac{1}{k}\right|^p = k\frac{1}{k^p} = k^{1-p}$$

y

$$\begin{aligned} M \|x_0\|_{(r,a)}^{\frac{p}{r}} &= M\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} |f_\alpha(x_0)|^p \|h_\alpha\|\right)^{\frac{p}{r}} = \\ &= M\left(\sum_{\alpha\in B}\left|\frac{1}{k}\right|^p \|h_\alpha\|\right)^{\frac{p}{r}} \leq M\left(\sum_{\alpha\in B}\left|\frac{1}{k}\right|^p n\right)^{\frac{p}{r}} \\ &= M\left(k^{1-p}n\right)^{\frac{p}{r}} = M\left(k^{1-p}\right)^{\frac{p}{r}} n^{\frac{p}{r}}. \end{aligned}$$

De donde

$$k^{1-p} \leq M\left(k^{1-p}\right)^{\frac{p}{r}} n^{\frac{p}{r}}$$

que implica

$$\left(k^{1-p}\right)^{1-\frac{p}{r}} \leq Mn^{\frac{p}{r}}$$

para todo número natural k; pero esto es imposible pues $Mn^{\frac{p}{r}}$ es un número fijo y $\lim_{k\to\infty} k^{1-\frac{p}{r}} = \infty$ pues $p, \frac{p}{r} < 1$. Por lo que se sigue la conclusión deseada: $\|x\|_p$ no es continua en la topología $\tau_{\max}^r$. ∎

Ahora veremos que la proposición anterior no es verdadera cuando la dimensión de X es a lo más numerable. Es decir, en este caso las topologías $\tau_{\max}^p$ y $\tau_{\max}^{q+}$ coinciden entre sí para los distintos valores de $0 < p \leq 1$ y $0 \leq q < 1$.

En el caso de que X tenga dimensión finita sabemos, por lo visto en el Capítulo 1, que hay una única topología vectorial de Hausdorff para X. En particular, todas las topologías $\tau_{\max}^{p}$ y $\tau_{\max}^{q+}$ coinciden entre sí.

Para el caso en que X tiene una base numerable, basta hacer ver que se cumple la condición

$$\text{toda } p-\text{seminorma en } X \text{ es } \tau_{\max}^{r}-\text{continua, si } 0<p\leq r\leq 1. \tag{2.22}$$

En efecto, si esto se cumple, entonces $\tau_{\max}^{p}\preceq\tau_{\max}^{r}$ y por (2.19) se tiene $\tau_{\max}^{r}=\tau_{\max}^{p}$. Por otra parte, si $0\leq q<r\leq 1$ y $q<p\leq 1$ entonces, toda $p-$seminorma en X es $\tau_{\max}^{r}-$continua, ya sea que $p\leq r$ (condición (2.22)) o que $r<p$ (ver (2.19)); así, $\tau_{\max}^{q+}\preceq\tau_{\max}^{r}$ y como $\tau_{\max}^{r}\preceq\tau_{\max}^{q+}$ por (2.19) se tiene $\tau_{\max}^{r}=\tau_{\max}^{q+}$.

Lema 2.5.19 *Sean X un espacio vectorial de dimensión numerable, con base $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ y $0<p\leq 1$. La condición (2.22) se satisface si dada una $p-$seminorma $\|\cdot\|$ existe una sucesión $a=(a_k)$ de reales no negativos tal que*

$$\|x\|\leq\|x\|_a^p \tag{2.23}$$

para todo $x\in X$. donde recordamos que $\|x\|_a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k(x_0)|\,a_k$ si $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x_0)h_k$.

Demostración. Supongamos que $0<p\leq r\leq 1$ y sea $\|\cdot\|$ una $p-$seminorma. Por hipótesis existe una sucesión a tal que se cumple (2.23) y por tanto,

$$\|x\|\leq\left(\|x\|_a^r\right)^{\frac{p}{r}}$$

para todo $x\in X$. Y como $\|x\|_a^r$ es una $r-$ seminorma se concluye que la $p-$seminorma $\|\cdot\|$ es $\tau_{\max}^{r}-$continua. ∎

Lema 2.5.20 *Sean X un espacio vectorial de dimensión numerable, con base $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ y $0<p\leq 1$. Si $\|\cdot\|$ es una $p-$ seminorma en X, entonces la sucesión $a=(a_k)$ de reales no negativos satisface (2.23) si para la sucesión $(b_k)=(\max(1,\|h_k\|))$ se cumple que*

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k t_k^p\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k t_k\right)^p \tag{2.24}$$

para toda sucesión (t_k) de reales no negativos.

Demostración. Para $x \in X$ tenemos

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^p \|h_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|^p b_k.$$

Por tanto, si para a se satisface la condición (2.24), concluimos que

$$\|x\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k |f_k(x)|\right)^p = (\|x\|_a)^p.$$

■

De acuerdo a lo anterior el resultado anunciado quedará probado si para cada $p-$ seminorma en X existe una sucesión $a = (a_k)$ de reales no negativos para la que se satisface (2.24). Para ver esto necesitamos el siguiente teorema que utiliza la desigualdad de Hölder.

Teorema 2.5.21 *Si X es un espacio de probabilidad, $f \geq 0$ es una función medible y $0 < p \leq 1$ entonces*

$$\int_X f^p d\mu \leq \left(\int_X f d\mu\right)^p$$

Demostración. Los casos en que $p = 1$, $\int_X f d\mu = 0$ y $\int_X f d\mu = \infty$ se siguen inmediatamente, así que que podemos suponer $0 < p < 1$ y $0 < \int_X f d\mu < \infty$.

Hacemos $h = \left(\frac{f}{\int_X f d\mu}\right)^p$, g la función constante 1 y s el exponente conjugado de $\frac{1}{p}$; entonces $h \in L^{\frac{1}{p}}, g \in L^s$, ya que

$$\begin{aligned} \int_X h^{\frac{1}{p}} d\mu &= \int_X \frac{f}{\int_X f d\mu} d\mu = 1 \text{ y} \\ \int_X g^s d\mu &= \int_X d\mu = \mu(X) = 1 \end{aligned}$$

La desigualdad de Holder se reduce en este caso a

$$\int_X \left(\frac{f}{\int_X f d\mu} d\mu\right)^p \leq \left(\int_X h^{\frac{1}{p}} d\mu\right)^p \left(\int_X g^s d\mu\right)^{\frac{1}{s}} = 1$$

lo cual implica

$$\int_X f^p d\mu \leq \left(\int_X f d\mu\right)^p$$

■

Corolario 2.5.22 *Si* $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ *es una sucesión de reales no negativos y* $0 < p \leq 1$*, entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} r_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} r_k \right)^p$$

Demostración. Considérese el espacio de probabilidad $\left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu\right)$ donde $\mu(k) = \frac{1}{2^k}$ para cada $k \geq 1$. ∎

Proposición 2.5.23 *Sea* X *un espacio vectorial de dimensión a lo más numerable. Entonces todas las topologías* $\tau_{\max}^p$ $(0 < p \leq 1)$ *y* $\tau_{\max}^{q+}$ $(0 \leq q < 1)$ *coinciden en* X*.*

Demostración. Supongamos que X es de dimensión numerable y sea $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ una base de Hamel de X. Por lo antes dicho, debemos probar que dada una $p-$seminorma $\|\cdot\|$ existe una sucesión $a = (a_k)$ de reales no negativos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k t_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k t_k \right)^p \tag{2.25}$$

y toda sucesión (t_k) de reales no negativos, donde $b_k = \max(1, \|h_k\|)$ para cada $k \geq 1$.

Del Corolario 2.5.22 se sigue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} r_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} r_k \right)^p$$

donde $r_k = b_k^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{k}{p}} t_k$ para cada k y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} b_k t_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} b_k^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{k}{p}} t_k \right)^p = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k} \right)^{1-\frac{1}{p}} b_k^{\frac{1}{p}} t_k \right)^p$$

y (2.25) se cumple con $a_k = \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1-\frac{1}{p}} b_k^{\frac{1}{p}}$. ∎

Lema 2.5.24 *Si* $T : X \to Y$ *es una transformación lineal entre los espacios vectoriales* X *y* Y*, y* $\|\cdot\|$ *es una* $p-$*seminorma en* Y*, entonces* $\|T(\cdot)\|$ *es una* $p-$*seminorma en* X*.*

Demostración. Sean λ un escalar y $x, y \in X$, entonces:
(a) $\|T(\lambda x)\| = \|\lambda T(x)\| = |\lambda|^p \|T(x)\|$.
(b) $\|T(x+y)\| = \|T(x) + T(y)\| \leq \|T(x)\| + \|T(y)\|$. ∎

Proposición 2.5.25 *Consideremos* $(X, \tau^p_{\max})$*con* $0 < p \leq 1$ *y* X_0 *un subespacio de* X. *Entonces, la topología de* X *restringida a* X_0 *coincide con la topología* $\tau^p_{\max}$.

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ es una $p-$seminorma en X_0. Consideramos la proyección $P : X \rightarrow X_0$. Esta es una transformación lineal tal que $P|X_0 = I$. Por el lema anterior, $\|P(\cdot)\|$ es una seminorma en X y es tal que restringida a X_0 coincide con $\|\cdot\|$. ∎

Teorema 2.5.26 *Existe un espacio pseudoconvexo y completo* X *que no es localmente convexo, pero cumple que todos sus subespacios separables son localmente convexos.*

Demostración. Sea X un espacio de dimensión no numerable equipado con la topología $\tau^p_{\max}$ con $0 < p < 1$. Por el Teorema 2.5.16 el espacio $(X, \tau^p_{\max})$ es localmente pseudoconvexo y completo y por la Proposición 2.5.18 ese mismo espacio no es localmente convexo, pues en caso contrario $\tau^p_{\max} = \tau^{LC}_{\max}$, lo que sabemos que es falso en este caso. Sea X_0 un subespacio separable de X. Por la Proposición 2.5.25, la topología de X restringida a X_0 coincide con la topología $\tau^p_{\max}$. Sea S un subconjunto numerable y denso de X_0 y sea $Y = span(S)$. Ya que todos los subespacios de X son cerrados, tenemos que $X_0 = Y$. De esta manera, Y es de dimensión a lo más numerable, y por lo Proposición 2.5.23 se sigue la conclusión. ∎

Para finalizar este capítulo, damos un ejemplo de un espacio vectorial localmente pseudoconvexo que no es $p-$ convexo para ninguna $0 < p \leq 1$.

Ejemplo 2.5.27 *Si* X *es un e.v. de dimensión no numerable, entonces* $(X, \tau^{0+}_{\max})$ *es un espacio localmente pseudoconvexo que no es* $p-$ *convexo para ninguna* $0 < p \leq 1$.

En efecto, sabemos que por su definición $(X, \tau^{0+}_{\max})$ *es un espacio localmente pseudoconvexo. Si* $(X, \tau^{0+}_{\max})$ *fuera un espacio localmente* $p-$*convexo para alguna* $0 < p \leq 1$, *entonces existiría un conjunto saturado de* $p-$*seminormas* P_0 *tal que la topología* $\tau(P_0)$ *que genera coincidiría con* $\tau^{0+}_{\max}$*; es decir,* $\tau^{0+}_{\max} = \tau(P_0)$ *y como* $\tau(P_0) \preceq \tau^p_{\max}$, *tenemos que*

$$\tau^{0+}_{\max} = \tau(P_0) \preceq \tau^p_{\max} \preceq \tau^{0+}_{\max}$$

Así, $\tau^{0+}_{\max} = \tau^p_{\max}$, *lo que no es posible por la Proposición 2.5.18 .*

Capítulo 3

Álgebras semitopológicas y topológicas

3.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 3.1.1 *Un espacio vectorial A sobre $\mathbb{F}$ con una operación binaria adicional llamada producto*

$$\begin{array}{cccc} \cdot & A \times A & \longmapsto & A \\ & (x,y) & \longmapsto & x \cdot y \end{array}$$

es un álgebra sobre $\mathbb{F}$ si las siguientes identidades se cumplen para cualesquiera tres elementos x, y, z de A y escalares λ, γ de $\mathbb{F}$:

(a) $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

(b) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

(c) $(\lambda x) \cdot (\gamma y) = (\lambda \gamma)(x \cdot y)$

Estos tres axiomas son otra forma de decir que la operación producto es bilineal.

Si A tiene elemento idéntico (unidad), es decir, un elemento e que es distinto de 0 y cumple que $xe = ex = x$ para todo $x \in A$, entonces se dice que A es unitaria.

Cuando además de (a),(b) y (c) se satisface

(d) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

entonces se dice que A es asociativa

Y si se cumple

(e) $x \cdot y = y \cdot x$,

entonces A es llamada un álgebra conmutativa.

Si B es un álgebra y $A \subset B$ lo es también con las mismas operaciones definidas en B, entonces A es llamada una subálgebra de B.

Por simplicidad, escribiremos xy en lugar de $x \cdot y$.
En lo que sigue toda álgebra se supondrá asociativa, pero en general no se supondrá que es conmutativa ni unitaria.

Definición 3.1.2 *Sea A un álgebra y $B, C \subset A$. Definimos*

$$BC = \{xy : x \in B, y \in C\};$$

Si B o C consta de un solo punto x, entonces escribimos xC o Bx en lugar de BC, respectivamente; es decir,

$$\begin{aligned} xC &= \{xy : y \in C\}. \\ Bx &= \{yx : y \in B\}. \end{aligned}$$

Definición 3.1.3 *Dos álgebras A y B son isomorfas si existe un homomorfismo biyectivo $\varphi : A \to B$; es decir φ es lineal, biyectivo y multiplicativo; o sea $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$ si $a, a' \in A$.*

Proposición 3.1.4 *Sea A un álgebra. Si en el conjunto*

$$A(1) = A \times \mathbb{F}$$

definimos las operaciones
(a) $(a_1, \lambda_1) + (a_2, \lambda_2) = (a_1 + a_2, \lambda_1 + \lambda_2)$.
(b) $\lambda(a_1, \lambda_1) = (\lambda a_1, \lambda\lambda_1)$.
(c) $(a_1, \lambda_1)(a_2, \lambda_2) = (\lambda_2 a_1 + \lambda_1 a_2 + a_1 a_2, \lambda_1\lambda_2)$.
entonces B es un álgebra con idéntico $e = (0, 1)$. Si A es conmutativa, entonces $A(1)$ también lo es.
La subálgebra $A' = \{(a, 0) : a \in A\}$ de $A(1)$ es isomorfa a A.

Definición 3.1.5 *Un álgebra A con una topología τ es llamada álgebra semitopológica (a.s.t.) si (A, τ) es un espacio vectorial topológico y se satisface que la función producto $(x, y) \to x \cdot y$ de $A \times A$ en A es separadamente continua; es decir, en cada variable.*

La última condición de la definición anterior se puede expresar en términos de la convergencia de redes en A como:

$$x_\alpha \to x, \Rightarrow x_\alpha \cdot a \to x \cdot a \text{ y } a \cdot x_\alpha \to a \cdot x.$$

para cada $a \in A$ y toda red (x_α) en A convergente a $x \in A$.

Definición 3.1.6 *Un álgebra semitopológica A es llamada álgebra topológica (a.t.) si el producto es continuo.*

La última condición de esta definición se expresa en términos de la convergencia de redes en A como:

$$x_\alpha \to x, y_\alpha \to y \Rightarrow x_\alpha \cdot y_\alpha \to x \cdot y.$$

siempre que las redes (x_α) y (y_α) converjan a $x, y \in A$.

Ejemplo 3.1.7 *Toda álgebra A sobre $\mathbb{F}$ es un álgebra topológica bajo la topología indiscreta. La continuidad de las operaciones se sigue del hecho de que $A + A \subset A; \lambda A \subset A$ y $AA \subset A$ sin importar la definiciones particulares de estas operaciones.*

Muchos autores llaman álgebras topológicas a las que satisfacen la Definición 3.1.5, en tanto que a las que satisfacen la Definición 3.1.6 las denominan álgebras topológicas con producto continuo. En este trabajo no adoptamos esa nomenclatura.

Proposición 3.1.8 *Sea A un álgebra con una topología vectorial τ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*
(a) El álgebra (A, τ) es topológica.
(b) El producto es continuo en 0.

Demostración. Sólo es necesario probar que (b) implica (a). Sean V una vecindad de 0 en A y $x_0, y_0 \in A$. Existe vecindades balanceadas U, W de 0 en A tales que

$$\begin{aligned} W + W + W &\subset V \\ UU &\subset W \end{aligned}$$

Por la continuidad del producto por un escalar existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\lambda x_0, \lambda y_0 \in U$; de donde,

$$\begin{aligned} (x_0 + \lambda U)(y_0 + \lambda U) &\subset x_0 y_0 + \lambda x_0 U + U \lambda y_0 + \lambda^2 UU \\ &\subset x_0 y_0 + W + W + W \subset V. \end{aligned}$$

Como λU es una vecindad de 0, se tiene que el producto es continuo en (x_0, y_0). ∎

Teorema 3.1.9 *En un álgebra semitopológica A existe un sistema fundamental $\mathfrak{N}$ de vecindades de 0 tal que*

(a) Todo $V \in \mathfrak{N}$ es absorbente.

(b) Todo $V \in \mathfrak{N}$ es balanceado.

(c) Para cada $V \in \mathfrak{N}$ existe un $U \in \mathfrak{N}$ tal que $U + U \subset V$.

(d) Para cada $V \in \mathfrak{N}$ y $x \in A$ existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $xU \subset V$ y $Ux \subset V$.

Si A es de Hausdorff, entonces

(e) dado $x \neq 0$ existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $x \notin U$.

Inversamente, sea A un álgebra y $\mathfrak{N}$ una base de filtro en A que satisface las condiciones (a)-(d). Entonces, existe una única topología vectorial que hace a A un álgebra semitopológica y para la cual $\mathfrak{N}$ es un sistema fundamental de vecindades del 0. Si $\mathfrak{N}$ también satisface (e), entonces A es de Hausdorff.

Demostración. Si A es un álgebra semitopológica, por el Teorema 1.4.9 sabemos que existe un sistema fundamental $\mathfrak{N}$ de vecindades de 0 tal que se satisfacen (a)-(c) y si A es de Hausdorff, también se cumple (e). Por la continuidad del producto en cada variable se sigue que se cumple (d). Si A es de Hausdorff es claro que todo sistema fundamental de vecindades del 0 satisface (e).

Por el mismo teorema, si $\mathfrak{N}$ es una base de filtro en A que satisface las condiciones (a)-(c), entonces existe una única topología vectorial en A que tiene a $\mathfrak{N}$ como un sistema fundamental de vecindades del 0 y ésta es de Hausdorff si se cumple (e). Sólo resta probar la continuidad del producto en cada variable.

Sean $V \in \mathfrak{N}, x \in A$. Por (d) existe $U \in \mathfrak{N}$ tales que

$$xU \subset V.$$

Entonces,

$$x\,(y + U) \subset xy + xU \subset xy + V$$

para todo $y \in A$. Por tanto, el producto es continuo en la primera variable. Del mismo modo se sigue la continuidad en la segunda variable. ∎

Teorema 3.1.10 *En un álgebra topológica A existe un sistema fundamental $\mathfrak{N}$ de vecindades de 0 tal que*

(a) Todo $V \in \mathfrak{N}$ es absorbente.

(b) Todo $V \in \mathfrak{N}$ es balanceado.

(c) Para cada $V \in \mathfrak{N}$ existe un $U \in \mathfrak{N}$ tal que $U + U \subset V$.

(d) Para cada $V \in \mathfrak{N}$ existe un $U \in \mathfrak{N}$ tal que $UU \subset V$.

Si A es de Hausdorff, entonces

(e) dado $x \neq 0$ existe $U \in \mathfrak{N}$ tal que $x \notin U$.

Inversamente, sea A un álgebra y $\mathfrak{N}$ una base de filtro en A que satisface las condiciones (a)-(d). Entonces, existe una única topología vectorial que hace a A un álgebra topológica y para la cual $\mathfrak{N}$ es un sistema fundamental de vecindades del 0. Si $\mathfrak{N}$ también satisface (e), entonces A es de Hausdorff.

Demostración. Sólo se probará la segunda parte. Sea $\mathfrak{N}$ una base de filtro en A que satisface las condiciones (a)-(c), entonces por el Teorema 1.4.9 existe una única topología vectorial τ en A que tiene a $\mathfrak{N}$ como un sistema fundamental de vecindades del 0. La condición (d) implica que el producto es continuo en 0 para la topología τ. Por la Proposición 3.1.8 se tiene que (A, τ) es un álgebra topológica.

Definición 3.1.11 *Dos álgebras semitopológicas A y B son isomorfas si existe un homomorfismo $T : A \to B$ biyectivo y bicontinuo.*

Proposición 3.1.12 *Sea A un álgebra topológica (respectivamente, semitopológica). El álgebra $A(1) = A \times \mathbb{F}$ es también topológica (respectivamente, semitopológica) cuando en ella se considera la topología producto y A es isomorfa a $A' = \{(a, 0) : a \in A\}$.*

Proposición 3.1.13 *Sea A un álgebra topológica (respectivamente, semitopológica) y J un ideal bilateral de A. Entonces, el álgebra cociente A/J es un álgebra topológica (respectivamente, semitopológica) con la topología cociente y es de Hausdorff si y sólo si J es cerrado*

Demostración. Sólo probaremos el caso en que A es a.t.. Por ser J un ideal bilateral la multiplicación $[x][y] = [xy]$ está bien definida en el cociente y con ella y las operaciones lineales del cociente se tiene que éste es un álgebra y que *la* función cociente $\varphi : A \to A/J$ es un homomorfismo entre álgebras. En vista de la Proposición 1.7.3 sólo resta probar que la multiplicación en A/J es continua. Sea U una vecindad abierta de $[x][y] = [xy]$. Entonces $\varphi^{-1}(U)$, donde φ es el homomorfismo canónico, es una vecindad abierta de xy. Podemos escoger vecindades abiertas V, W de x, y respectivamente tales que $VW \subset \varphi^{-1}(U)$. Entonces, ya que φ es abierta, $\varphi(V)$ y $\varphi(W)$ son vecindades abiertas de $[x]$ y $[y]$, respectivamente que cumplen $\varphi(V)\varphi(W) \subset U$, lo que prueba la continuidad de la multiplicación en A/J.

∎

3.2 Algunos tipos de álgebras topológicas y semitopológicas

Definición 3.2.1 *Una topología de álgebra es toda aquella que está definida en un álgebra y que hace a ésta una álgebra semitopológica, en particular, si la hace álgebra topológica.*

3.2.1 Álgebras normadas

Definición 3.2.2 *Un álgebra normada* (A, τ) *es un álgebra topológica cuya topología* τ *está definida por un norma.*

Definición 3.2.3 *Una norma* $\|\cdot\|$ *en un álgebra* A *es submultiplicativa si satisface:*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

para todo $x, y \in A$. *Es claro que el producto es continuo en* 0 *para la topología* τ *dada por una norma submultiplicativa y por tanto* (A, τ) *es un álgebra topológica, en este caso denotamos al álgebra normada* (A, τ) *por* $(A, \|\cdot\|)$.

Ejemplo 3.2.4 *El espacio* $C_b(X)$ *de funciones escalares continuas y acotadas definidas en un espacio topológico* X *es un álgebra normada cuando en él se consideran las operaciones usuales de funciones y la norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Sólo comprobaremos que $\|\cdot\|_\infty$ *es submultiplicativa. De la desigualdad*

$$|f(x) g(x)| \leq |f(x)| \, |g(x)|$$

para todo $x \in X$ *se sigue que* $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

El siguiente resultado nos llevará a otro de los ejemplos clásicos de álgebra normada.

Proposición 3.2.5 *Sean* $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ *dos espacios vectoriales normados y* $T \in B(X, Y)$, *entonces*

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = \min \{M \geq 0 : \|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \ \text{ si } x \in X\}$$

Al valor común de estas expresiones se le denota por $\|T\|$. *La asignación* $\|\cdot\| : B(X,Y) \to [0,\infty)$ *define una norma.*

Si $X \neq \{0\}$ *entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Demostración. Por el inciso (d) la Proposición 1.5.8 se tiene que

$$\mathcal{M} = \{M \geq 0 : \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ si } x \in X\} \neq \varnothing.$$

Además, $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \leq M$ para todo $M \in \mathcal{M}$ y es claro que $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \in \mathcal{M}$ por lo que

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = \min\{M \geq 0 : \|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ si } x \in X\}$$

La función $\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y$ es positiva, pues $\|\cdot\|_Y$ es una norma, además para $S, T \in B(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\|S+T\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|(S+T)(x)\|_Y \\
&\leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|S(x)\|_Y + \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \\
&\leq \|S\| + \|T\|
\end{aligned}$$

y

$$\|\lambda T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|\lambda T(x)\|_Y = |\lambda| \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y = |\lambda| \|T\|.$$

Por otro lado, si T es la función idénticamente cero, claramente $\|T\| = 0$ y si T no es la función idénticamente cero existe $x \in X$ que cumple $\|T(x)\|_Y \neq 0$; en particular, $x \neq 0$ y entonces

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y \geq \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_Y > 0.$$

Así, $\|\cdot\|$ es una norma en $B(X,Y)$.

Supongamos $X \neq \{0\}$. Claramente

$$\sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y.$$

Si $0 \neq \|z\|_X \leq 1$ entonces $\|z\|_X \|T(z)\|_Y \leq \|T(z)\|_Y$ y por consiguiente, $\|T(z)\|_Y \leq \left\|T\left(\frac{z}{\|z\|_X}\right)\right\|_Y$ y así

$$\|T(z)\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y .$$

Está desigualdad también es válida cuando $z = 0$ y por tanto,

$$\sup_{\|x\|_X\leq 1} \|T(x)\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y ,$$

y se da la igualdad.

Finalmente, es obvio que

$$\sup_{\|x\|_X\neq 0} \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y .$$

■

Proposición 3.2.6 *En el álgebra $B(X)$ de endomorfismos continuos en X, con $(X, \|\cdot\|)$ espacio normado y donde el producto es la composición de los operadores, la norma recién definida $\|\cdot\|$ es submultiplicativa y por tanto, $(B(X,X), \|\cdot\|)$ es un álgebra topológica. Además, $\|\mathcal{I}\| = 1$, si $\mathcal{I}$ es el operador idéntico en X y $X \neq \{0\}$.*

Demostración. Sean $S, T \in B(X,X)$. Escribimos ST para denotar la composición. $S \circ T$

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

para todo $x \in X$; de donde $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Finalmente, sea $X \neq \{0\}$.

$$\|\mathcal{I}\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\mathcal{I}(x)\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|x\| = 1.$$

■

El álgebra $B(X)$, con $(X, \|\cdot\|)$ espacio normado, nos servirá para probar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.7 *(A, τ) es un álgebra normada si y sólo τ puede definirse por una norma $\|\cdot\|$ en A que es submultiplicativa. Más aún, si A tiene idéntico e, se puede lograr que $\|e\| = 1$.*

Demostración. Ya hicimos notar que si τ está definida por una norma $\|\cdot\|$ submultiplicativa, entonces (A, τ) es un álgebra topológica.

Inversamente, supongamos que A tiene idéntico y que $\|\cdot\|'$ es una norma que define la topología τ para la cual el producto en A es continuo. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|xy\|' \leq 1 \text{ si } \|x\|' \leq \delta \text{ y } \|y\|' \leq \delta$$

Por consiguiente,

$$\|xy\|' \leq \frac{1}{\delta^2} \|x\|' \|y\|'$$

para todo $x, y \in A$.

Para cada $x \in X$, definimos el operador lineal $T_x : A \to A$ como $T_x(y) = xy$. Por la desigualdad anterior tenemos

$$\|T_x y\|' \leq \frac{1}{\delta^2} \|x\|' \|y\|'$$

y por tanto, el operador lineal T_x es continuo; es decir, pertenece a $B(A)$, y su norma $\|T_x\|'$ satisface:

$$\frac{1}{\|e\|'} \|x\|' \leq \|T_x\|' \leq \frac{1}{\delta^2} \|x\|' \tag{3.1}$$

para todo $x \in A$, donde la primera desigualdad se obtiene a partir de la siguiente:

$$\|x\|' = \|xe\|' = \|T_x e\|' \leq \|T_x\|' \|e\|'.$$

Definimos

$$\|x\| = \|T_x\|'$$

Es fácil probar que $\|x\|$ es una norma en A, en vista de que: $T_{\lambda x} = \lambda T_x, T_{(x+y)} = T_x + T_y$ y $T_x = 0$ implica $x = xe = 0$. Además, por las desigualdades (3.1), $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son normas equivalentes pues satisfacen

$$\frac{1}{\|e\|'} \|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{\delta^2} \|x\|'$$

(condición (2.13) página 45) y por tanto, definen la misma topología τ.

Además,

$$\|xy\| = \|T_{xy}\|' = \|T_x \circ T_y\|' \leq \|T_x\|' \|T_y\|' = \|x\| \|y\|$$

y

$$\|e\| = \|T_e\|' = 1$$

Si A no tiene idéntico, entonces consideramos el álgebra $A(1) = A \times \mathbb{F}$ y en ella la norma $\|(x, \lambda)\|' = \|x\|' + |\lambda|$. Por lo anterior hay una norma submultiplicativa $\|\cdot\|$ en $A(1)$ equivalente a $\|(a, \lambda)\|'$; es decir, existen $k, K > 0$ tales que

$$k \|(x, \lambda)\|' \leq \|(x, \lambda)\| \leq K \|(x, \lambda)\|' \tag{3.2}$$

para todo $(x, \lambda) \in A(1)$

En A definimos

$$\|x\| = \|(x, 0)\| .$$

Esta es una norma submultiplicativa en A equivalente a $\|\cdot\|'$ya que si $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ entonces:

$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \|(x, 0)\| = 0 \Leftrightarrow (x, 0) = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0$

$\|x + y\| = \|(x, 0) + (y, 0)\| \leq \|(x, 0)\| + \|(y, 0)\| = \|x\| + \|y\|$

$\|\lambda x\| = \|(\lambda x, 0)\| = \|\lambda (x, 0)\| = |\lambda| \|(x, 0)\| = |\lambda| \|x\|$

Además,

$$\|xy\| = \|(xy, 0)\| = \|(x, 0) \cdot (y, 0)\| \leq \|(x, 0)\| \|(y, 0)\| = \|x\| \|y\|$$

y finalmente, de (3.2) se tiene

$$k \|x\|' = k \|(x, 0)\|' \leq \|(x, 0)\| = \|x\| \leq K \|(x, 0)\|' = K \|x\|'$$

para todo $x \in A$. ∎

En vista de la proposición anterior, es costumbre definir álgebra normada como toda aquella álgebra a la que se le ha dado una topología que está definida por una norma submultiplicativa.

3.2.2 Álgebras localmente convexas y m-convexas

Definición 3.2.8 *Un álgebra topológica (A, τ) es un álgebra localmente convexa (a.l.c.) si (A, τ) es un espacio localmente convexo. En particular, τ puede definirse por medio de una familia de seminormas.*

Proposición 3.2.9 *Sea A un álgebra y τ una topología definida en A. (A, τ) es un a.l.c. si y sólo si la topología τ está definida por una familia $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ saturada de seminormas que satisface que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Lambda$ tal que*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta . \tag{3.3}$$

Demostración. Supongamos que τ está definida por una familia $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ saturada de seminormas con la propiedad descrita. Entonces (A,τ) es un espacio localmente convexo. Resta probar que (A,τ) es un álgebra topológica. Como τ es una topología vectorial sólo necesitamos probar que el producto es continuo en 0.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces por (3.3) se tiene

$$\|xy\|_\alpha < \varepsilon \text{ si } \|x\|_\beta < \sqrt{\varepsilon} \text{ y } \|y\|_\beta < \sqrt{\varepsilon}\,,$$

de donde, el producto es continuo en 0.

Inversamente, sea (A,τ) un a.l.c. Sea $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ la familia de todas las seminormas $\tau-$continuas definidas en A. Por el Corolario 2.1.34 la familia $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ está saturada y genera la topología τ.

Para cada $\alpha \in \Lambda$ existen $\beta = \beta(\alpha) \in \Lambda$ y $\delta = \delta_\alpha > 0$ tales que

$$\|xy\|_\alpha \leq 1 \text{ si } \|x\|_\beta \leq \delta \text{ y } \|y\|_\beta \leq \delta. \tag{3.4}$$

Sean $x, y \in A$. Si $\|x\|_\beta \neq 0$ y $\|y\|_\beta \neq 0$, entonces

$$\|xy\|_\alpha \leq \frac{1}{\delta^2}\|x\|_\beta \;\; \|y\|_\beta$$

Ahora supongamos que $\|x\|_\beta = 0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\left\|\frac{1}{\varepsilon}x\right\|_\beta \leq \delta$, entonces

$$\left\|x\left(\delta\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|_\alpha < \varepsilon.$$

Por tanto, $\|xy\|_\alpha = 0$. Lo mismo sucede si cambiamos la suposición $\|x\|_\beta = 0$ por $\|y\|_\beta = 0$.

En resumen,

$$\|xy\|_\alpha \leq \frac{1}{\delta^2}\|x\|_\beta \;\; \|y\|_\beta$$

si $x, y \in A$, con lo que se satisface (3.3). Es claro que la seminorma $\frac{1}{\delta}\|\cdot\|_\beta$ es $\tau-$continua y para esta seminorma se cumple (3.3). ∎

Ejemplo 3.2.10 *Sea $C_b(\mathbb{R})$ el álgebra de las funciones reales, continuas y acotadas en $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales y con la topología estricta β, la cual está definida por las seminormas*

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x\in X}|\varphi(x)\, f(x)|$$

donde φ pertenece al espacio C_0 de las funciones reales continuas en $\mathbb{R}$ y que se anulan en ∞.

$(C_b(\mathbb{R}), \beta)$ *es un álgebra localmente convexa. Sólo comprobamos que esta familia de seminormas satisface la condición (3.3).*

Sea $\varphi \in C_0$, *entonces*

$$|\varphi(x) f(x) g(x)| = \left|\sqrt{|\varphi(x)|} f(x)\right| \left|\sqrt{|\varphi(x)|} g(x)\right|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. *Tenemos que* $\sqrt{|\varphi(x)|} \in C_0$ *y que se satisface:*

$$\|fg\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\sqrt{\varphi}} \|g\|_{\sqrt{\varphi}}.$$

Definición 3.2.11 *Un a.l.c.* (A, τ) *es llamada localmente multiplicativamente convexa, o de forma breve* $m-$*convexa, si la topología* τ *está definida por una familia* $(\|\cdot\|_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ *de seminormas submultiplicativas.*

Es claro que toda álgebra normada es un álgebra $m-$ convexa. No toda álgebra localmente convexa es $m-$convexa. Por ejemplo, en la página 133 se prueba que el álgebra $(C_b(\mathbb{R}), \beta)$ del ejemplo anterior no es m-convexa y por tanto, tampoco es normada.

Ejemplo 3.2.12 *El álgebra* $A = \mathbb{F}^X$ *de todas las funciones escalares con dominio en el conjunto* X *es un álgebra* $m-$*convexa bajo la topología fuerte s; es decir de la convergencia puntual. Esta topología está definida por las seminormas*

$$\|f\|_x = |f(x)|$$

para $x \in X$ *y* $f \in \mathbb{F}^X$. *Dado* $x \in X$ *se cumple*

$$\|fg\|_x = \|f\|_x \|g\|_x$$

Ejemplo 3.2.13 *Sea* $C(\mathbb{R})$ *el espacio de funciones continuas con la topología compacto abierta* κ *definida por las seminormas*

$$\|f\|_n = \sup_{x \in [-n,n]} |f(x)|$$

es un álgebra $m-$*convexa y no es normada.*

Sean f *y* g *funciones continuas en* $\mathbb{R}$, *entonces:*

$$\|fg\|_n = \sup_{x \in [-n,n]} |f(x) g(x)| \leq \left(\sup_{x \in [-n,n]} |f(x)|\right) \left(\sup_{x \in [-n,n]} |g(x)|\right) = \|f\|_n \|g\|_n$$

esto quiere decir que $C(\mathbb{R})$ *es un álgebra* $m-$*convexa.*

Tenemos que $n < m$ *implica* $\|f\|_n \leq \|f\|_m$ *para todo* $f \in C(\mathbb{R})$, *por tanto* $(\|f\|_n)$ *es una familia saturada de seminormas.*

Supongamos que $\left(C(\mathbb{R}), (\|\cdot\|_n)_{n=1}^{\infty}\right)$ *es normado , entonces su bola abierta unitaria es un* $\kappa-$*acotado y por tanto,*

$$V = \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_n \leq \varepsilon\}$$

es $\kappa-$ *acotado para algún* $n \geq 1$ *y algún* $\varepsilon > 0$. *Definamos*

$$f_m(x) = \begin{cases} \varepsilon & si\ x \in [-n, n] \\ m & x \notin (-(n+1), n+1) \\ lineal & en\ el\ resto \end{cases}$$

Entonces, $f_m \in V$ *para todo* $m \geq 1$ *y* $\|f_m\|_{n+1} = m$, *lo que contradice que* V *es* $\kappa-$*acotado (Proposición 2.1.36).*

3.2.3 Álgebras semitopológicas localmente pseudoconvexas

Generalizamos la noción de álgebra topológica localmente convexa vista en el apartado anterior.

Definición 3.2.14 *Un álgebra semitopológica* (A, τ) *es localmente pseudoconvexa si* (A, τ) *es un espacio localmente pseudoconvexo. En particular,* τ *puede definirse por medio de una familia saturada* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* $p(\alpha)-$*seminormas.*

Cuando se tiene que $p_\alpha = p$ *para todo* $\alpha \in \Lambda$, *entonces* (A, τ) *es llamada un álgebra semitopológica localmente* $p-$*convexa y cuando* $p = 1$, *entonces* (A, τ) *es un álgebra semitopológica localmente convexa.*

Si (A, τ) *es álgebra topológica, entonces simplemente decimos que es una álgebra localmente pseudoconvexa,* $p-$*convexa o localmente convexa, respectivamente.*

Con base en el Corolario 2.1.34 y siguiendo la demostración de la Proposición 3.2.9 , con las modificaciones pertinentes, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.15 *Sea* A *un álgebra y* τ *una topología definida en* A. (A, τ) *es un álgebra localmente pseudoconvexa si y sólo si* τ *está definida por una familia* $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *saturada de pseudoseminormas que satisface que para cada* $\alpha \in \Lambda$ *existen* $\beta \in \Lambda$ *tal que*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta .$$

3.2.4 Algebras localmente $\mathcal{A}$-convexas

Definición 3.2.16 *Decimos que la seminorma $\|\cdot\|$ definida en un álgebra A es $\mathcal{A}$-convexa, o que es una $\mathcal{A}-$seminorma, si para cada $x \in A$ existe $M(x) > 0$ tal que se cumple*

$$\begin{aligned} \|xy\| &\leq M(x)\|y\| \;\; y \\ \|yx\| &\leq M(x)\|y\| \end{aligned}$$

para todo $y \in A$.

Es claro que si A es conmutativa, entonces si una de las dos condiciones se cumple, la otra también.

Definición 3.2.17 *Sea A un álgebra y τ la topología en A definida por una familia de $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathcal{A}-$seminormas. Entonces, (A,τ) es llamada un álgebra localmente absorbente o de manera breve localmente $\mathcal{A}-$convexa o simplemente $\mathcal{A}-$convexa.*

Si $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de $\mathcal{A}-$ seminormas que definen la topología de un álgebra $\mathcal{A}$-convexa A, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ y $x \in A$ existe $M(x,\alpha) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|xy\|_\alpha &\leq M(x,\alpha)\|y\|_\alpha \text{ y} \\ \|yx\|_\alpha &\leq M(x,\alpha)\|y\|_\alpha \end{aligned}$$

para todo $y \in A$.

Toda álgebra $m-$convexa es $\mathcal{A}-$ convexa.

Si las constantes M no depende de α; es decir, $\|xy\|_\alpha \leq M(x)\|y\|_\alpha$ y $\|yx\|_\alpha \leq M(x)\|y\|_\alpha$ para todo $x, y \in A$ y $\alpha \in \Lambda$, entonces decimos que el A es un *álgebra uniformemente $\mathcal{A}-$ convexa.*

Si (A,τ) es una álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa, entonces A es semitopológica, ya que si τ está definida por la familia de $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\mathcal{A}-$seminormas, entonces dados $x, y \in A$ y $\alpha \in \Lambda$ se cumple que $xy_i \to y$ y $y_i x \to y$ en A para cualquier red (y_i) que converge a y, ya que

$$\begin{aligned} \|x(y_i - y)\|_\alpha &\leq M(x,\alpha)\|(y_i - y)\|_\alpha \text{ y} \\ \|(y_i - y)x\|_\alpha &\leq M(x,\alpha)\|(y_i - y)\|_\alpha \end{aligned}$$

para todo i (Proposición 2.1.37).

Ejemplo 3.2.18 *Sea* $\left(C([0,1]), \{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^{\infty}\right)$ *el álgebra unitaria y conmutativa de las funciones continuas en* $[0,1]$ *con la topología* τ *definida por las seminormas*

$$\|f\|_i = \left(\int_0^1 (|f(x)|)^i \, dx\right)^{\frac{1}{i}},$$

con $i \geq 1$.

Para cualquier $i \geq 1$ *se tiene*

$$\|fg\|_i = \left(\int_0^1 |f(x)\, g(x)|^i \, dx\right)^{\frac{1}{i}} \leq \|f\|_\infty \left(\int_0^1 |g(x)|^i \, dx\right)^{\frac{1}{i}} = \|f\|_\infty \|g\|_i \tag{3.5}$$

para todo $f, g \in C([0,1])$, *donde* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. *Así, esta álgebra es localmente uniformemente* $\mathcal{A}-$*convexa. En la parte final de la penúltima sección (Corolario 3.4.23) se prueba que no es* $m-$*convexa.*

Proposición 3.2.19 *Si la familia* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de* $\mathcal{A}-$ *seminormas define la topología de un álgebra* $\mathcal{A}-$ *convexa, entonces su saturación* $\left\{\|\cdot\|_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ *es una familia equivalente de* $\mathcal{A}-$ *seminormas. Por consiguiente, siempre podemos suponer que la topología de un álgebra* $\mathcal{A}-$ *convexa está definida por una familia saturada de* $\mathcal{A}-$ *seminormas.*

Demostración. Sea $\beta \in \Gamma$ entonces existen $n \geq 1$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$ tales que $\|\cdot\|_\beta = \max_{1\leq i\leq n} \|\cdot\|_{\alpha_i}$. Así dado $x \in A$ existen $M(x,i) > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \|xy\|_\beta &= \max_{1\leq i\leq n} \|xy\|_{\alpha_i} \leq \max_{1\leq i\leq n} M(x,i)\, \|y\|_{\alpha_i} \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} M(x,i) \max_{1\leq i\leq n} \|y\|_{\alpha_i} = \max_{1\leq i\leq n} M(x,i)\, \|y\|_\beta . \end{aligned}$$

para todo $y \in A$.

Como $\max_{1\leq i\leq n} M(x,i)$ es una constante positiva que depende de x y de β, podemos escribir $\max_{1\leq i\leq n} M(x,i) = M(x,\beta)$ y obtenemos

$$\|xy\|_\beta \leq M(x,\beta)\, \|y\|_\beta$$

para todo $y \in A$. Es decir, $\|\cdot\|_\beta$ es una $\mathcal{A}-$ seminorma.

De modo similar se prueba que

$$\|yx\|_\beta \leq M(x,\beta)\, \|y\|_\beta .$$

Que $\left\{\|\cdot\|_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ define la misma topología que $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es consecuencia de la Proposición 2.1.30. ∎

Del manera semejante se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 3.2.20 *Si (A,τ) es un álgebra $m-$ convexa, con τ definida por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas submultiplicativas, entonces su saturación $\left\{\|\cdot\|_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ es una familia equivalente de seminormas submultiplicativas. Por consiguiente, siempre podemos suponer que la topología de un álgebra $m-$ convexa está definida por una familia saturada de seminormas submultiplicativas.*

Conjuntos $\mathcal{A}-$ convexos e idempotentes

Definición 3.2.21 *Un subconjunto V de un álgebra A es llamado $\mathcal{A}-$ convexo si es un disco y para todo $x\in V$ existe $M(x,V)>0$ tal que $xV\cup Vx\subset M(x,V)V$. El subconjunto V se dice que es idempotente si $VV\subset V$.*

Es obvio que todo disco idempotente es $\mathcal{A}-$ convexo.

Si (A,τ) es un álgebra semitopológica y $V\subset A$ es $\mathcal{A}-$ convexo, entonces $\overline{V}$ es también $\mathcal{A}-$ convexo, ya que sabemos que $\overline{V}$ es un disco si V lo es y la condición $xV\cup Vx\subset M(x,V)V$ implica $x\overline{V}\cup\overline{V}x\subset M(x,V)\overline{V}$ gracias a que el producto es separadamente continuo.

Si (A,τ) es un álgebra topológica y $V\subset A$ es idempotente, entonces $\overline{V}$ es también idempotente, ya que la condición $VV\subset V$ implica $\overline{V}\,\overline{V}\subset\overline{V}$, gracias a que el producto es continuo.

Proposición 3.2.22 *Sean A y B dos álgebras sobre $\mathbb{F}$, $\varphi: A\to B$ un homomorfismo de álgebras y $V\subset B$ un conjunto $\mathcal{A}-$ convexo en B, entonces $\varphi^{-1}(V)$ es $\mathcal{A}-$ convexo en A.*

Demostración. Por lo visto en los capítulos anteriores $\varphi^{-1}(V)$ es un disco por serlo V y porque φ es una transformación lineal.

Sean $x\in\varphi^{-1}(V)$. Tomamos $M(\varphi(x),V)>0$ tal que $\varphi(x)V\cup V\varphi(x)\subset M(\varphi(x),V)V$. Entonces

$$x\varphi^{-1}(V)\cup\varphi^{-1}(V)x\subset M(\varphi(x),V)\varphi^{-1}(V).$$

∎

Proposición 3.2.23 *Un álgebra (A,τ) es $\mathcal{A}-$ convexa si y sólo si τ tiene un sistema fundamental de vecindades de cero formado por conjuntos $\mathcal{A}-$ convexos (y cerrados).*

Demostración. Sea (A, τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de $\mathcal{A}-$seminormas. Por tanto, un sistema fundamental de vecindades del cero esta formado por los conjuntos

$$V_{\alpha,\varepsilon} = \{x \in X : \|x\|_\alpha \leq \varepsilon\}$$

donde $\alpha \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$. Cada uno de estos conjuntos es un disco cerrado.

Veamos que cada $V_{\alpha,\varepsilon}$ es $\mathcal{A}-$ convexo. Sean $\alpha \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ y $x \in V_{\alpha,\varepsilon}$; entonces existe $M(x, \alpha) > 0$ tal que $\|xy\|_\alpha \leq M(x, \alpha)\|y\|_\alpha$ para todo y; en particular si $y \in V_{\alpha,\varepsilon}$ se tiene que $\|y\|_\alpha \leq \varepsilon$ y por tanto, $\|xy\|_\alpha \leq M(x, \alpha)\varepsilon$, lo que que implica que $xV \subset M(x, \alpha)V$ para todo $x \in V$. Se prueba de manera análoga que $Vx \subset M(x, \alpha)V$ para todo $x \in V$. Entonces, $xV \cup Vx \subset M(x, V)V$, con $M(x, V) = M(x, \alpha)$.

Supongamos ahora que (A, τ) admite un sistema fundamental $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de vecindades del cero formado por conjuntos $\mathcal{A}-$ convexos. Consideremos $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ donde $\|\cdot\|_\alpha$ es el funcional de Minkowski de V_α. Probaremos que $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de seminormas $\mathcal{A}-$ convexas y que generan a τ. Por la Proposición 2.1.23 y el Teorema 2.1.26 sabemos que cada $\|\cdot\|_\alpha$ es una seminorma y que la familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ generan a τ. Sólo falta ver que cada $\|\cdot\|_\alpha$ es $\mathcal{A}-$ convexa. Sean $x, y \in A$ y $\alpha \in \Lambda$; existen $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ tales que $\frac{x}{\lambda_0} \in V_\alpha$ y $\frac{y}{\lambda_1} \in V_\alpha$ lo que quiere decir

$$\frac{x}{\lambda_0} \cdot \frac{y}{\lambda_1} \in M\left(\frac{x}{\lambda_0}, V_\alpha\right)V_\alpha$$

por lo que

$$\left\|\frac{x}{\lambda_0}\frac{y}{\lambda_1}\right\|_\alpha \leq M\left(\frac{x}{\lambda_0}, V_\alpha\right),$$

o sea,

$$\|xy\|_\alpha \leq M\left(\frac{x}{\lambda_0}, V\right)V_\alpha\lambda_0\lambda_1$$

Ya que $M\left(\frac{x}{\lambda_0}, V_\alpha\right)\lambda_0$ es un número que depende únicamente de x y de V_α podemos escribir $M(x, V_\alpha) = M\left(\frac{x}{\lambda_0}, V_\alpha\right)\lambda_0$; de donde;

$$\|xy\|_\alpha \leq M(x, V_\alpha)\lambda_1.$$

Como esto pasa para todo $\lambda_1 > 0$ que cumple que $y \in \lambda_1 V_\alpha$ se sigue

$$\|xy\|_\alpha \leq M(x, V_\alpha)\|y\|_\alpha$$

y se tiene el resultado. Igual se muestra que también se satisface

$$\|yx\|_\alpha \leq M(x, V_\alpha) \|y\|_\alpha .$$

para todo $x, y \in A$. ∎

Al seguir la demostración anterior cuando (A, τ) es un álgebra $m-$ convexa se llega al siguiente resultado.

Proposición 3.2.24 *Decir que (A, τ) es un álgebra $m-$ convexa es equivalente a decir que el origen admite un sistema fundamental de vecindades formado por discos idempotentes (respectivamente cerrados).*

Por la ultima parte de la demostración de la Proposición 3.2.23 obtenemos:

Corolario 3.2.25 *Sea V un disco absorbente en un álgebra A. Entonces, el funcional de Minkowski $\|\cdot\|_V$ de V es una seminorma $\mathcal{A}-$ convexa si V es $\mathcal{A}-$ convexo. Y $\|\cdot\|_V$ es una seminorma $m-$ convexa si V es idempotente.*

3.3 Topologización de álgebras

En esta sección se estudia cómo y cuándo puede darse a una álgebra una topología que la vuelva semitopológica localmente convexa o bien un álgebra topológica ya sea localmente convexa o $m-$convexa. En los dos primeros tipos, las topologías que se exhiben son extremas: máximas en ciertas familias de topologías. En el tercero se trabaja con una topología que en ciertas ocasiones es la mínima dentro de una familia de topologías $m-$convexas; es decir a veces es también extrema.

3.3.1 Topología para un álgebra arbitraria que la hace semitopológica localmente pseudoconvexa

Aquí veremos, usando la parte final del Capítulo 2, que toda álgebra admite una topología que la hace semitopológica localmente pseudoconvexa, de Hausdorff y completa. Más aún, puede suceder que admita una infinidad de tales topologías.

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de la Proposiciones 2.5.9 y 2.5.16.

Proposición 3.3.1 *Sea A un álgebra. Entonces, para $0 < p \leq 1$ y $0 \leq q < 1$, las álgebras $(A, \tau_{\max}^{p})$ y $(A, \tau_{\max}^{q+})$ son álgebras de Hausdorff semitopológicas completas.*

Demostración. Para cada $a \in A$ las funciones $b \to ab$ y $b \to ba$ son endomorfismos en A y por tanto, continuos. ∎

Definición 3.3.2 *Decimos que un álgebra A es a lo más numerablemente generada si existe $S \subset A$ a lo más numerable tal que A es la mínima de sus subálgebras que contienen a S. En otro caso, decimos que A es no numerablemente generada.*

Proposición 3.3.3 *Si A es un álgebra no numerablemente generada, entonces A tiene una base de Hamel no numerable.*

Demostración. Si $\{x_n\}_{n \in N}$, con N numerable, es una base de Hamel de A, entonces es también un sistema de generadores de A, lo que contradice la hipótesis. ∎

El siguiente resultado es consecuencia de la proposición anterior y de la 2.5.18

Proposición 3.3.4 *Sea A un álgebra no numerablemente generada, entonces existe un continuo de topologías que hacen a A un álgebra semitopológica de Hausdorff y completa.*

Se sigue que para que haya una sola topología que haga a un álgebra A semitopológica, de Hausdorff y completa, dicha álgebra debe ser a lo más numerablemente generada.

En la siguiente sección se probará que si un álgebra A es a lo más numerablemente generada, entonces $\left(A, \tau_{\max}^{LC}\right)$ es un álgebra topológica, este resultado junto con la proposición anterior implican el siguiente resultado.

Corolario 3.3.5 *Supongamos que un álgebra A tiene una única topología τ que la convierte en un álgebra semitopológica de Hausdorff y completa. Entonces esta topología hace a A un álgebra topológica localmente convexa.*

Demostración. Todas las topologías $(A, \tau_{\max}^{p})$ y $(A, \tau_{\max}^{q+})$ hacen a A un álgebra semitopológica completa; se sigue que éstas deben coincidir con τ. En particular, $\tau = \tau_{\max}^{LC}$ y como, por la proposición anterior, el álgebra A debe ser a lo más numerablemente generada se sigue del Teorema 3.3.11 que $\left(A, \tau_{\max}^{LC}\right)$ es un álgebra topológica localmente convexa. ∎

Corolario 3.3.6 *Sea A un álgebra de dimensión finita. Hay una única topología que la convierte en un álgebra semitopológica de Hausdorff. Más aún, con esa topología A es un álgebra topológica completa.*

Demostración. Sabemos que hay una única topología τ_0 que hace a A un espacio vectorial topológico de Hausdorff y que con ella A es completa. Esa topología está inducida por una norma y por el Teorema 1.6.8 dada $a \in A$ los operadores lineales

$$\begin{aligned} b &\to ab \\ b &\to ba \end{aligned}$$

de A en A son continuos y por tanto, (A, τ_0) es semitopológica. Del corolario anterior se sigue que (A, τ_0) es un álgebra topológica. ∎

3.3.2 Una topología localmente convexa para cualquier álgebra numerablemente generada.

Se demostró antes que toda álgebra es topologizable como álgebra semitopológica, de Hausdorff y completa. En esta parte se prueba que cualquier álgebra numerablemente generada tiene una topología que la hace localmente convexa, de Hausdorff y completa. También se da un ejemplo de un álgebra semitopológica que no es topológica y tal que cualquiera de sus subálgebras conmutativas es topológica.

Como a toda álgebra podemos sumergirla en un álgebra con una unidad, no perdemos generalidad al considerar en varias de las pruebas de esta sección que las álgebras son unitarias.

Sea $t = \{t_i\}_{i \in I}$, con I no vacío, una familia de variables. Llamaremos *álgebra libre* sobre $\mathbb{F}$ en las variables no conmutativas de la familia t y con idéntico e_0, al álgebra $\mathbb{F}(t)$ de todos los polinomios, con término independiente, en las variables de la familia t, con coeficientes en $\mathbb{F}$ y con las operaciones lineales usuales y el producto de Cauchy. A continuación describimos los elementos de esta álgebra, la igualdad entre sus elementos y sus operaciones.

Sea $I^{(\infty)} = \cup_{n=0}^{\infty} I^n$, donde $I^0 = (0)$ y 0 no es un elemento de I. Para $\bar{i} \in I^{(n)}$, $\bar{i} = (i_1, ..., i_n)$ con $n > 0$, ó $\bar{i} = 0$ si $i = 0$, escribimos $t^{\bar{i}} = t_{i_1}, ..., t_{i_k}$, o $t^0 = 1$, respectivamente. Con esta notación, cada elemento $x \in \mathbb{F}(t)$ se puede escribir en la forma

$$x = \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} \xi_{\bar{i}} t^{\bar{i}},$$

donde cada ξ_i pertenece a $\mathbb{F}$ y sólo un número finito de ellos son diferentes de cero.

Dos elementos $x = \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \xi_{\overline{i}} t^{\overline{i}}$, $y = \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \eta_{\overline{i}} t^{\overline{i}}$ son iguales si y sólo si $\xi_{\overline{i}} = \eta_{\overline{i}}$ para todo $\overline{i} \in I^{(\infty)}$. En particular, si $s, r, s', r' \in I$, entonces $t_s t_r = t_{s'} t_{r'}$ sí y sólo sí $s = s', r = r'$.

Para $\overline{i}, \overline{j} \in I^{(\infty)}$ definimos $\overline{ij} = (i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l)$ si $\overline{i} = (i_1, ..., i_k)$, $\overline{j} = (j_1, ..., j_l)$, con $k, l > 0$ en tanto que $\overline{i}0 = 0\overline{i} = \overline{i}$. Observemos que

$$t^{\overline{i}} t^{\overline{j}} = t^{\overline{ij}}.$$

Por otro lado, si $x = \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \xi_{\overline{i}} t^{\overline{i}}$, $y = \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \eta_{\overline{i}} t^{\overline{i}}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces:

$$\begin{aligned} x + y &= \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \left(\xi_{\overline{i}} + \eta_{\overline{i}}\right) t^{\overline{i}} \\ \lambda x &= \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \lambda \xi_{\overline{i}} t^{\overline{i}} \\ xy &= \sum_{\overline{k}\in I^{(\infty)}} \left(\sum_{\overline{ij}=\overline{k}} \xi_{\overline{i}} \eta_{\overline{j}} \right) t^{\overline{k}} \end{aligned}$$

De acuerdo a lo anterior, el conjunto $\{t_s t_r\}_{s,r\in I}$ es linealmente independiente.

Proposición 3.3.7 *Toda álgebra A con idéntico e es isomorfa al álgebra cociente de un álgebra libre $\mathbb{F}(t)$, en un conjunto de variables con la misma cardinalidad que la de un conjunto de generadores del álgebra A, respecto a un ideal bilateral J. Identificamos a A con dicho cociente.*

Demostración. Sea $x = \{x_i\}_{i\in I}$ un conjunto de generadores del álgebra A y $t = \{t_i\}_{i\in I}$ un conjunto de variables no conmutativas con la misma cardinalidad que x. Consideramos el álgebra libre $\mathbb{F}(t)$ y consideramos para cada $f \in \mathbb{F}(t)$ al elemento $f(x) \in A$ definido como la evaluación de f en x; es decir, si

$$f = \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \xi_{\overline{i}} t^{\overline{i}},$$

entonces

$$f(x) = \sum_{\overline{i}\in I^{(\infty)}} \xi_{\overline{i}} x^{\overline{i}}$$

en donde $x^{\bar{i}} = x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ si $t^{\bar{i}} = t_{i_1}, ..., t_{i_k}$ si $k > 0$ y $x^0 = e$.

Hagamos $J = \{f \in \mathbb{F}(t) : \ f(x) = 0\}$. Entonces J es un ideal bilateral de $\mathbb{F}(t)$. Afirmamos que la función $h : \mathbb{F}(t) \diagup J \to A$ definida como $h([f]) = f(x)$ es un isomorfismo de álgebras. Está bien definido, ya que $f_1(x) = f_2(x)$ si y sólo si $f_1 - f_2 \in J$. Por la definición de la operaciones en el cociente, h conserva las operaciones de álgebra. Es suprayectiva ya que x es un conjunto de generadores y $\ker h = \{0\}$ pues si $h([f]) = 0$ entonces $f(x) = 0$ y por consiguiente $[f] = [0]$. ∎

De Lema 2.5.13 se sigue el siguiente.

Lema 3.3.8 *Sea $\bar{i} \to a_{\bar{i}}$ una función positiva definida en $I^{(\infty)}$. Entonces la función definida en $\mathbb{F}(t)$ como*

$$|x|_a = \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} a_{\bar{i}} |\xi_{\bar{i}}| .$$

si $x = \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} \xi_{\bar{i}} t^{\bar{i}}$ es una seminorma en $\mathbb{F}(t)$.

Lema 3.3.9 *Supongamos que el conjunto de índices I es a lo más numerable. Sea $\bar{i} \to a_{\bar{i}}$ una función positiva definida en $I^{(\infty)}$ tal que $a_0 = 1$. Entonces, existe una función positiva b en $I^{(\infty)}$ con $b_0 = 1$ tal que para toda $\bar{i}, \bar{j} \in I^{(\infty)}$ se cumple*

$$a_{\bar{i}\bar{j}} \leq b_{\bar{i}} b_{\bar{j}} \tag{3.6}$$

Demostración. Claramente $I^{(\infty)}$ es numerable (es la unión numerable de conjuntos numerables), así que podemos dar una numeración de sus elementos: $\bar{i}_1, \bar{i}_2, ...$ con $\bar{i}_1 = 0$. La desigualdad (3.6) es equivalente a la siguiente:

$$a_{\bar{i}_i \bar{i}_j} \leq b_{\bar{i}_i} b_{\bar{i}_j} \tag{3.7}$$

para $i, j = 1, 2, ...$

Construiremos inductivamente la sucesión $\left(b_{\bar{i}_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. Tenemos por definición que $a_{\bar{i}_1 \bar{i}_1} = a_0 = 1$. Definimos $b_{\bar{i}_1} = b_0 = 1$ por lo que

$$a_{\bar{i}_1 \bar{i}_1} = b_{\bar{i}_1} b_{\bar{i}_1}.$$

Suponemos que hemos definido $b_{\bar{i}_i}, ..., b_{\bar{i}_k}$ de manera que se cumple (3.7) para $i, j \leq k$.

Ahora definimos

$$b_{\bar{i}_{k+1}} = \max\left\{\left(a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}, \max_{1\leq j\leq k}\left(\frac{a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_j}}{b_{\bar{i}_j}}, \frac{a_{\bar{i}_j\bar{i}_{k+1}}}{b_{\bar{i}_j}}\right)\right\}.$$

Afirmamos que con $b_{\bar{i}_{k+1}}$ definido de esta manera, la desigualdad (3.7) se cumple para toda $i, j \leq k+1$.

Si $i, j \leq k$, entonces tenemos $a_{\bar{i}_i\bar{i}_j} \leq b_{\bar{i}_i}b_{\bar{i}_j}$ por la hipótesis de inducción; por lo que para probar la afirmación, hay que ver 3 casos

(i) $i = k+1$, $j \leq k$. En este caso tenemos

$$b_{\bar{i}_{k+1}}b_{\bar{i}_j} \geq \frac{a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_j}}{b_{\bar{i}_j}}b_{\bar{i}_j} = a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_j}$$

(ii) $i \leq k$, $j = k+1$. Este caso es similar al anterior:

$$b_{\bar{i}_i}b_{\bar{i}_{k+1}} = b_{\bar{i}_i}\left(\frac{a_{\bar{i}_j\bar{i}_{k+1}}}{b_{\bar{i}_j}}\right) = a_{\bar{i}_i\bar{i}_{k+1}}$$

(iii) $i = k+1, j = k+1$. En este caso tenemos

$$b_{\bar{i}_{k+1}}b_{\bar{i}_{k+1}} \geq \left(a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = a_{\bar{i}_{k+1}\bar{i}_{k+1}}$$

■

Teorema 3.3.10 *El álgebra semitopológica localmente convexa, de Hausdorff y completa $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ es topológica si y sólo sí el conjunto I es a lo más numerable.*

Demostración. Por lo visto en el Capítulo 2, la topología $\tau_{\max}^{LC}$ hace a $\mathbb{F}(t)$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, de Hausdorff y completo. Supongamos que I es a lo más numerable. Sólo falta mostrar que la multiplicación en $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ es continua en ambas variables . Para ello probaremos que dada una seminorma $|x|$ en $\mathbb{F}(t)$, existen una seminorma $\|x\|$ y $M > 0$ tales que

$$|xy| \leq M\,\|x\|\,\|y\| \tag{3.8}$$

para todo x y y en $\mathbb{F}(t)$.

Podemos suponer $|e_0| \leq 1$, en otro caso sustituimos $|\cdot|$ por $\frac{|\cdot|}{|e_0|}$.

Haciendo $a_{\bar{i}} = \max\left(1, \left|t^{\bar{i}}\right|\right)$ obtenemos una función positiva en $I^{(\infty)}$ que satisface $a_0 = 1$. Para $x = \sum_{\bar{i}\in I^{(\infty)}}\xi_{\bar{i}}t^{\bar{i}}$ en $\mathbb{F}(t)$ definimos

$$|x|_a = \sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} |\xi_{\bar{i}}| .$$

Debido a que

$$|x| \leq \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} |\xi_{\bar{i}}| \left| t^{\bar{i}} \right| .$$

si $x = \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} \xi_{\bar{i}} t^{\bar{i}}$, tenemos que

$$|x| \leq |x|_a$$

para todo x en $\mathbb{F}(t)$.

Sea $b = (b_{\bar{i}})$ la función del Lema 3.3.9 correspondiente a la función $a = (a_{\bar{i}})$. Así,

$$a_{\overline{ij}} \leq b_{\bar{i}} b_{\bar{j}}$$

Definimos la seminorma

$$|x|_b = \sum_{\bar{i}} b_{\bar{i}} |\xi_{\bar{i}}| .$$

Entonces,

$$|xy| \leq |xy|_a = \sum_{\bar{k} \in I^{(\infty)}} a_{\bar{k}} \left| \sum_{\overline{ij} = \bar{k}} \xi_{\bar{i}} \eta_{\bar{j}} \right| \leq \sum_{\bar{k} \in I^{(\infty)}} a_{\bar{k}} \sum_{\overline{ij} = \bar{k}} |\xi_{\bar{i}}| \left| \eta_{\bar{j}} \right|$$

si $x = \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} \xi_{\bar{i}} t^{\bar{i}}$, $y = \sum_{\bar{i} \in I^{(\infty)}} \eta_{\bar{i}} t^{\bar{i}}$.

Por otra parte,

$$\sum_{\bar{k} \in I^{(\infty)}} a_{\bar{k}} \sum_{\overline{ij} = \bar{k}} |\xi_{\bar{i}}| \left| \eta_{\bar{j}} \right| = \sum_{\bar{k} \in I^{(\infty)}} \sum_{\overline{ij} = \bar{k}} a_{\overline{ij}} |\xi_{\bar{i}}| \left| \eta_{\bar{j}} \right| \leq \sum_{\bar{k} \in I^{(\infty)}} \sum_{\overline{ij} = \bar{k}} b_{\bar{i}} b_{\bar{j}} |\xi_{\bar{i}}| \left| \eta_{\bar{j}} \right|$$

y

$$\sum_{k} \sum_{ij = k} b_i b_j |\xi_i| \left| \eta_j \right| = \sum_{i \in I^{(\infty)}} b_i |\xi_i| \sum_{j \in I^{(\infty)}} b_j \left| \eta_j \right| = |x|_b |y|_b$$

De las desigualdades anteriores se sigue

$$|xy| \leq |x|_b |y|_b .$$

Por lo que la desigualdad (3.8) se cumple con $\|x\| = |x|_b$ M igual a 1 o $|e|$ según que $|e| \leq 1$ o $|e| > 1$ respectivamente. Así que $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ es un álgebra topológica.

Ahora mostramos que $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ no es un álgebra topológica cuando I es no numerable. Si $card\,(I) \geq c$ (cardinalidad del continuo), entonces podemos suponer que el intervalo $[0,1]$ es un subconjunto de I, ya que existe una inyección de $[0,1]$ en I y hacemos $I_0 = [0,1]$. Si $card\,(I) \leq c$, lo cual puede suceder si no se acepta la hipótesis del continuo, entonces podemos suponer que $I \subset [0,1]$ y hacemos $I_0 = I$. En ambos casos I_0 es un subconjunto no numerable del intervalo $[0,1]$.

Supongamos que $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ es topológica. En vista de que el conjunto $\{t_s t_r\}_{s,r \in I_0}$ es linealmente independiente, lo podemos incluir en una base de Hamel $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $\mathbb{F}(t)$ y para esta base y cualquier función no negativa $\alpha \to a_\alpha$, la fórmula

$$\left|\sum_\alpha \xi_\alpha h_\alpha\right| = \sum_\alpha a_\alpha |\xi_\alpha|$$

define en $\mathbb{F}(t)$ una seminorma que en cada h_α toma el valor no negativo a_α. Podemos definir dicha función de manera que si $h_\alpha = t_s t_r$, para algún $s, r \in I_0$, entonces $a_\alpha = 1$ cuando $r = s$ y $a_\alpha = |r - s|^{-1}$ en otro caso.

En resumen, existe una seminorma $|x|$ en $\mathbb{F}(t)$ tal que para $s, r \in I_0$ se satisface

$$|t_s t_r| = 1 \text{ si } r = s \text{ y } |t_s t_r| = |r - s|^{-1} \text{ en otro caso.}$$

Por haber supuesto que $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ no es álgebra topológica, existen $M > 0$ y una seminorma $\|\cdot\|$ tales que (3.8) se cumple. Así,

$$|t_s t_r| = |r - s|^{-1} \leq \varphi(r)\,\varphi(s)\,, \text{ si } r, s \in I_0 \text{ con } r \neq s$$

donde $\varphi(q) = \sqrt{M}\,\|t_q\|$ para $q \in I_0$.

Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $J_n = \{q \in I_0 : \varphi(q) < n\}$ tiene cardinalidad infinita. Como $A \subset [0,1]$, entonces A tiene un punto de acumulación en $[0,1]$; lo cual a su vez implica que existe una sucesión (q_k) en A de puntos distintos entre sí que es convergente, y en especial de Cauchy. Existe un índice $K > 0$ tal que si $k, k' > K$ entonces $|q_k - q_{k'}| < \frac{1}{n^2}$; lo cual nos lleva a la siguiente contradicción

$$n^2 < |q_k - q_{k'}|^{-1} \leq \varphi(q_k)\,\varphi(q_{k'}) < n^2.$$

Por consiguiente, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $card(J_n) < \infty$ y entonces

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

es a lo más numerable; lo que contradice lo supuesto sobre I_0. Por consiguiente $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ no es álgebra topológica. ∎

Una consecuencia de este teorema es el siguiente resultado.

Teorema 3.3.11 *Si A es un álgebra a lo más numerablemente generada, entonces A puede ser topologizada como álgebra localmente convexa, de Hausdorff y completa. De hecho, con la topología $\tau_{\max}^{LC}$ en A se logra lo anterior.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que A es unitaria. Por el Teorema 3.3.7, tenemos que $A = \mathbb{F}(t) \diagup J$, donde $\mathbb{F}(t)$ es un álgebra libre con un conjunto de variables con la misma cardinalidad que la del conjunto de generadores de A y J es un ideal bilateral de $\mathbb{F}(t)$. Por la Proposición 2.5.10 cualquier subespacio lineal de $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ es cerrado, por lo que el ideal J es cerrado. Por el Teorema 3.3.10 el álgebra $\left(\mathbb{F}(t), \tau_{\max}^{LC}\right)$ es localmente convexa y de Hausdorff; de donde $A = \mathbb{F}(t) \diagup J$ es un álgebra localmente convexa y de Hausdorff (Teorema 2.3.2) con la topología cociente. Para ver que es completa y probar la última afirmación sólo falta mostrar que la topología cociente $\tau_{\mathbb{F}(t) \diagup J}$ en $A = \mathbb{F}(t) \diagup J$ coincide con su topología $\tau_{\max}^{LC}$. Denotemos los elementos de $\mathbb{F}(t) \diagup J$ por $[x]$, con $x \in \mathbb{F}(t)$ y por φ al homomorfismo canónico de $\mathbb{F}(t)$ en $\mathbb{F}(t) \diagup J$. Tomemos una base de Hamel $([h_\alpha])_{\alpha \in \Lambda}$ en $\mathbb{F}(t) \diagup J$. Veamos que los elementos (h_α) son linealmente independientes en $\mathbb{F}(t)$.

Sea $\sum_{\alpha \in A} \xi_\alpha h_\alpha = 0$ una combinación lineal finta de elementos de (h_α). Aplicando φ obtenemos:

$$[0] = \varphi\left(0\right) = \varphi\left(\sum_{\alpha} \xi_\alpha h_\alpha\right) = \sum_{\alpha} \xi_\alpha \varphi\left(h_\alpha\right) = \sum_{\alpha} \xi_\alpha \left[h_\alpha\right]$$

Por ser $([h_\alpha])_{\alpha \in \Lambda}$ una base de Hamel, se sigue que todos los escalares ξ_α son iguales a cero. Por tanto, se cumple que $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{F}(t)$.

Por consiguiente, los elementos (h_α) se pueden incluir en una base de Hamel (l_β) para $\mathbb{F}(t)$ que se obtiene añadiendo a $(h_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ cualquier base de Hamel para el ideal J.

Sea $|\cdot|$ cualquier seminorma en A. Consideremos la seminorma en $\mathbb{F}(t)\diagup J$ definida como

$$|[x]|_a = \sum_\alpha a_\alpha |\xi_\alpha|$$

si $[x] = \sum_\alpha \xi_\alpha [h_\alpha]$, donde $a_\alpha = |[h_\alpha]|$ para cada α y $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Tenemos que si $[x] = \sum_\alpha \xi_\alpha [h_\alpha]$, entonces

$$|[x]| \leq |[x]|_a$$

Así, $|\cdot|$ está dominada por la seminorma $|\cdot|_a$ que como veremos es la seminorma cociente correspondiente a la seminorma $|x|_b$ en $\mathbb{F}(t)$ definida como

$$|x|_b = \sum_\beta b_\beta |\xi_\alpha|$$

si $x = \sum_\beta \xi_\beta l_\beta$ y donde

$$b_\beta = \begin{cases} a_\alpha & \text{si } l_\beta = h_\alpha \text{ para algún } \alpha \\ b_\beta = 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces,

$$|[x]|_b = \inf_{z\in J} |x+z|_b = \sum_\alpha a_\alpha |\xi_\alpha| = |[x]|_a$$

si $x = \sum_\beta \xi_\beta l_\beta$, y que cada $z \in J$ se expresa como combinación lineal de l_β con $l_\beta \neq h_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

De donde $|[\cdot]|_a$ es la seminorma cociente correspondiente a la seminorma $|\cdot|_b$ en $\mathbb{F}(t)$.

Esto implica que la seminorma $|\cdot|$ es continua en A con la topología cociente. Así, $\tau_{\max}^{LC}$ es más débil que la topología cociente. Como la afirmación inversa es obvia, se sigue que las dos coinciden. ∎

Si se acepta la hipótesis del continuo, el Teorema 3.3.11 no puede extenderse en términos de la cardinalidad del conjunto de generadores, ya que, por ejemplo, en [11] se construye un álgebra conmutativa con un sistema de generadores de cardinalidad c y que no admite siquiera una topología que la haga álgebra topológica de Hausdorff. A continuación presentamos dicho ejemplo.

Sea $\mathcal{F} = \{s\}$ la colección de todas las sucesiones de números naturales. Por s_n denotamos al término n de s. Tomemos el conjunto de índices $I = \mathcal{F} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$, que tiene cardinalidad c, y consideremos una familia $t = \{t_i\}_{i\in I}$ de variables.

Para simplificar la exposición, para $i \in I$ hacemos los siguientes cambios de nombre

$$\begin{aligned} t_i &= x_i \text{ si } i \in \mathbb{N}, \\ t_i &= a_s \text{ si } i = s \text{ con } s \in \mathcal{F}, \\ t_0 &= c \end{aligned}$$

Sea A el espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de todas las combinaciones lineales formales z de los elementos $\{t_i\}_{i \in I}$. En A definimos el producto a través de las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} cz &= zc = 0 \text{ para todo } z \in A, \\ x_i x_j &= 0 \text{ si } i, j \in \mathbb{N}, \\ a_s a_{s'} &= 0 \text{ si } s, s' \in \mathcal{F} \\ x_i a_s &= a_s x_i = s_i c \text{ si } i \in \mathbb{N} \text{ y } s \in \mathcal{F} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es decir cada elemento en $z \in A$ es de la forma

$$z = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_s a_s + \gamma c$$

donde $\alpha_i, \beta_s, \gamma \in \mathbb{F}$, $i \in \mathbb{N}$, $s \in \mathcal{F}$ y $\alpha_i = 0$ y $\beta_s = 0$ excepto para un número finito de $i \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathcal{F}$. Y la multiplicación de $z = \sum \alpha_i x_i + \sum \beta_s a_s + \gamma c$ y $z' = \sum \alpha'_i x_i + \sum \beta'_s a_s + \gamma' c$, está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} zz' &= \sum \left(\alpha_i \beta'_s + \alpha'_i \beta_s\right) x_i a_s \\ &= \left(\sum \left(\alpha_i \beta'_s + \alpha'_i \beta_s\right) s_i\right) c \end{aligned}$$

De esto y (3.9) se sigue que el producto es asociativo, pues el producto de cualesquiera tres elementos es 0. Claramente, también es conmutativo y satisface el resto de las propiedades necesarias para que A sea un álgebra.

Supongamos que A se le puede dar una topología que la haga un álgebra topológica de Hausdorff. Entonces existe un sistema fundamental $\mathfrak{N}$ de vecindades de 0 que satisface las condiciones del Teorema 3.1.10.

Sean $V, W \in \mathfrak{N}$ tales $c \notin V$ y $WW \subset V$. Para $n \geq 1$ escojamos un natural t_n tal que $x_n \in t_n W$ y una sucesión s de naturales tal que $s_n > n t_n$. Existe $r > 0$ tal que $a_s \in rW$. Entonces,

$$c = \frac{1}{s_n}\left(x_n a_s\right) = \frac{r t_n}{s_n}\left(\frac{x_n}{t_n}\frac{a_s}{r}\right) \in \frac{r t_n}{s_n} WW \subset \frac{r t_n}{s_n} V$$

para todo $n \geq 1$.

Puesto que $c \notin V$ y V es balanceado se sigue que $\frac{rt_n}{s_n} > 1$; de donde $r > \frac{s_n}{t_n} > n$ para todo $n \geq 1$, lo que es imposible.

Lema 3.3.12 *Sean A el álgebra $\mathbb{F}(t)$ con un conjunto de variables $t = \{t_i\}_{i \in I}$ de cardinalidad c y $x \in A$. Si $x \in \mathbb{F}(t_{i_1}, ..., t_{i_k})$ para algún $k \geq 1$ y $t_{i_1}, ..., t_{i_k} \in t$, entonces el conmutante de x en A :*

$$(x)' = \{y \in A : xy = yx\}$$

está contenido en $\mathbb{F}(t_{i_1}, ..., t_{i_k})$.

Demostración. Observamos que $y \in (x)'$ si y sólo si $y \in (x - a_0 e_0)'$, donde $a_0 e_0$ es el término independiente de x. Entonces, podemos suponer que x no tiene término independiente. Supongamos que el desarrollo de un elemento y aparece un monomio distinto de cero en que se usa una variable t_j para $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$. Existe el primer natural n para el que $y$tiene un monomio $\xi t^{\overline{i}}$, con $\xi \neq 0$, y tal que la componente n de $\overline{i}$ es una variable t_j, con $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$ y las componentes anteriores están en $\{i_1, ..., i_k\}$. Veremos que $y \notin (x)'$ por inducción sobre n.

Si $n = 1$, entonces $\xi t^{\overline{i}} = t^j t^{\overline{j_0}}$ para algún multi-índice $\overline{j_0}$. Al factorizar $t^j t^{\overline{j_0}}$ obtenemos que

$$y = t^j t^{\overline{j_0}} y_1 + y_2$$

donde $y_1 \neq 0$ y en ningún monomio no nulo de y_2 se puede factorizar por la izquierda a $t^j t^{\overline{i_0}}$. Entonces

$$yx = t^j t^{\overline{j_0}} y_1 x + y_2 x$$

por lo que en yx hay al menos un monomio distinto de 0 de la forma $\xi' t^j t^{\overline{j_1}}$; en tanto que en xy todos los monomios no nulos son de la forma $\xi'' t^{\overline{l}}$ donde la primera componente del multi-índice $\overline{l}$ está en $\{i_1, ..., i_k\}$; de donde $yx \neq xy$.

Supongamos cierta la afirmación para $1 \leq n < m$ y probémosla para m. En este caso tenemos que

$$y = t^{\overline{j_0}} t^j y_1 + y_2$$

y el multi-índice $\overline{j_0}$ tiene longitud $m - 1$ y todas sus componentes están $\{i_1, ..., i_k\}$, $y_1 \neq 0$ y en ningún monomio no nulo de y_2 se puede factorizar por la izquierda a $t^{\overline{j_0'}} t^j t^{\overline{j_0}}$. Entonces

$$yx = t^{\overline{j_0}} t^j y_1 x + y_2 x$$

por lo que en yx hay al menos un monomio distinto de 0 de la forma $\xi' t^{\overline{j_0}} t^j t^{\overline{j_0'}}$; en tanto que en xy todos los monomios no nulos son de la forma $\xi'' t^{\bar{l}}$, donde al menos las primeras m componentes del multi-índice $\bar{l}$ está en $\{i_1, ..., i_k\}$; de donde $yx \neq xy$. ■

Teorema 3.3.13 *Existe un álgebra semitopológica localmente convexa de Hausdorff y completa que no es álgebra topológica y tal que cualquiera de sus subálgebras conmutativas propias es topológica.*

Demostración. Sea A el álgebra $\mathbb{F}(t)$ con un conjunto de variables $t = \{t_i\}_{i \in I}$ de cardinalidad c, provista con la topología $\tau_{\max}^{LC}$. Por la Proposición 3.3.1 $\mathbb{F}(t)$ es un álgebra semitopológica localmente convexa de Hausdorff y completa y no es topológica (Teorema 3.3.10).

Sea B una subálgebra conmutativa propia de A. Si B es de dimensión finita, entonces por el Corolario 3.3.6 $\left(B, \tau_{\max}^{LC}\right)$ es un álgebra topológica.

Supongamos ahora que B tiene dimensión infinita. Sea $x \in B$, con $x \neq \lambda e_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces B está contenido en el conmutante de x:

$$(x)' = \{y \in A : xy = yx\}$$

y $x \in \mathbb{F}\left(t_{i_1}, ..., t_{i_k}\right)$ para algún $k \geq 1$ y $t_{i_1}, ..., t_{i_k} \in t$. Por el lema anterior $B \subset \mathbb{F}\left(t_{i_1}, ..., t_{i_k}\right)$ y por la Proposición 2.5.25 la topología $\tau = \tau_{\max}^{LC}$ de $\mathbb{F}\left(t\right)$ restringida a $\mathbb{F}\left(t_1, ..., t_k\right)$ es la topología $\tau_{\max}^{LC}$ de $\mathbb{F}\left(t_1, ..., t_k\right)$. A partir del Teorema 3.3.10, el álgebra $\left(\mathbb{F}\left(t_1, ..., t_k\right), \tau\right)$ y por tanto (B, τ), es un álgebra topológica. ■

3.3.3 Una topología m-convexa para cualquier álgebra $\mathcal{A}$-convexa. La topología de Oudadess

En esta parte equipamos a cualquier álgebra localmente $\mathcal{A}$-convexa (A, τ) con una topología localmente $m-$convexa τ^{op} más fuerte que τ. Mostramos que no es cierto en general que la colección de todas las topologías $m-$convexas más fuertes que τ tiene un elemento mínimo. Cuando tal elemento existe es llamado la *topología de Oudadess* y la denotamos como $m\left(\tau\right)$.

Al final del capítulo damos condiciones suficientes para la existencia de la topología de Oudadess y con base en ellas mostramos ejemplos en que dicha topología existe.

Definición 3.3.14 *Sea V un conjunto $\mathcal{A}-$ convexo en un álgebra A. El núcleo idempotente de V se define como*

$$V' = \{x \in V : xV \subset V\}.$$

Proposición 3.3.15 *El núcleo idempotente V' de cualquier conjunto $\mathcal{A}-$ convexo y absorbente (respectivamente cerrado) V está contenido en V y es un disco idempotente y absorbente (respectivamente cerrado). Se cumple $V = V'$ si y sólo si V es idempotente.*

Demostración. Es claro que $V' \subset V$ y que V' es idempotente.

Sean λ un escalar con $|\lambda| \leq 1$ y $x \in V'$. Como V es un conjunto balanceado y $V' \subset V$, se cumple que $\lambda x \in V$ y $\lambda xV \subset \lambda V \subset V$ de donde $\lambda x \in V'$ y se tiene que V' es un conjunto balanceado.

Sean $x, y \in V'$ y $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ sabemos que $\alpha x + \beta y \in V$ por ser V' un subconjunto del conjunto convexo V. Para $v \in V$ se tiene que $(\alpha x + \beta y) v = \alpha xv + \beta yv$ y $xv, yv \in V$ pues $x, y \in V'$; de donde $(\alpha x + \beta y) v \in V$ por ser V convexo; por consiguiente, V' es un conjunto convexo.

Veamos ahora que V' es un conjunto absorbente. Sea $z \in A$, por ser V un conjunto absorbente y $\mathcal{A}-$ convexo existen $\lambda > 0$ y $M(\lambda z, V) > 0$ tales que

$$\lambda z \in V \text{ y } \lambda zV \cup V\lambda z \subset M(\lambda z, V) V.$$

Como V es balanceado, entonces

$$\lambda z \in MV \text{ y } \lambda zV \subset MV$$

si $M > \max(M(\lambda z, V), 1)$. Entonces

$$\frac{\lambda}{M} z \in V$$

y

$$\frac{\lambda}{M} zV \subset MV;$$

o sea, $\frac{\lambda}{M} z \in V'$ y así, V' es un conjunto absorbente.

Supongamos que V es idempotente y sea $x \in V$. Entonces $xV \subset VV \subset V$; es decir, $V \subset V'$ y de hecho estos conjuntos coinciden pues como ya vimos la otra contención siempre se tiene.

Supongamos que V es cerrado y sea $\{x_i\}_{i \in I}$ una red en V' tal que $x_i \to x$, con $x \in A$. Por ser V cerrado se tiene que $x \in V$. Para $v \in V$, se tiene que $x_i v \to xv$ por la continuidad de la multiplicación por la izquierda y además

$x_i v \in V$ para toda $i \in I$ puesto que $x_i \in V'$ para todo $i \in I$. Por ser V cerrado se tiene que $xv \in V$; de donde $x \in V'$ y V' es entonces un conjunto cerrado. ■

A continuación se presentan algunas propiedades de los núcleos idempotentes de conjuntos $\mathcal{A}-$ convexos.

Proposición 3.3.16 *Sean U y V subconjuntos $\mathcal{A}-$ convexos de A y α, β escalares distintos de cero. Entonces:*

(1) $(\alpha U)' \subset \max\,(1, |\alpha|)\, U'$ y $U' \subset \max\left(1, \frac{1}{|\alpha|}\right)(\alpha U)'$.

(2) Si $\alpha U \subset V \subset \beta U$, entonces $\frac{\alpha}{\max(1,|\beta|)} U' \subset V' \subset \max\left(|\beta|, \frac{|\beta|}{|\alpha|}\right) U'$.

(3) Si $UV \cup VU \subset MU$ para alguna $M > 0$, entonces $U + V$ es un conjunto $A-$ convexo y

$$U' + V' \subset (2M + 1)\,(U + V)'.$$

(4) Si E es un álgebra y $\varphi : E \to A$ es un homomorfismo de álgebras suprayectivo, entonces $\left(\varphi^{-1}(U)\right)' \subset \varphi^{-1}(U')$.

Demostración.

(1) Sea $x \in (\alpha U)'$. Entonces, $x \in \alpha U$ y $x\alpha U \subset \alpha U$. De la última contención obtenemos que $xU \subset U$. Por ser U un conjunto balanceado se cumple que $\alpha U \subset \max\,(1, |\alpha|)\, U$ y $U \subset \max\,(1, |\alpha|)\, U$. Por tanto,

$$\frac{1}{\max(1, |\alpha|)} x \in U \text{ y } \frac{1}{\max(1, |\alpha|)} xU \subset U \;;$$

es decir, $\frac{1}{\max(1,|\alpha|)} x \in U'$, lo que prueba la primera contención.

Sean $V = (\alpha U)$ y $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ por lo que acabamos de demostrar se tiene que

$$(\lambda V)' \subset \max(1, |\lambda|)\, V'$$

lo que quiere decir:

$$U' = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha U\right)' \subset \max\left(1, \frac{1}{|\alpha|}\right)(\alpha U)'$$

que es lo que se quería demostrar.

(2) Sea $x \in U'$. Entonces, $x \in U$ y $xU \subset U$. De donde, $\alpha x \in V$, y por ser V balanceado tenemos $\frac{\alpha}{\max(|\beta|,1)} x \in V$. Además,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\max\left(\left|\beta\right|,1\right)}xV &\subset \frac{\alpha\beta}{\max\left(\left|\beta\right|,1\right)}xU \subset \frac{\alpha\beta}{\max\left(\left|\beta\right|,1\right)}U \\ &\subset \frac{\beta}{\max\left(\left|\beta\right|,1\right)}V \subset V.\end{aligned}$$

Por lo que $\frac{\alpha}{\max(|\beta|,1)}x \in V'$ y queda probada la primer contención de (2).
De la hipótesis se sigue

$$\frac{1}{\beta}V \subset U \subset \frac{1}{\alpha}V$$

y de la contención recién probada

$$\frac{\frac{1}{\beta}}{\max\left(1,\frac{1}{|\alpha|}\right)}V' \subset U',$$

lo que implica

$$V' \subset \beta\max\left(1,\frac{1}{|\alpha|}\right)U' \subset \max\left(\left|\beta\right|,\frac{|\beta|}{|\alpha|}\right)U'.$$

(3) Es claro que $U+V$ es un disco. Sean $M_u, M_v > 0$ tales que $uU \cup Uu \subset M_uU$ y $vV \cup Vv \subset M_vV$, si $u \in U$ y $v \in V$. Entonces,

$$\left(u+v\right)\left(U+V\right) \subset \max\left(M_u+2M, M_v\right)\left(U+V\right) \tag{3.10}$$

ya que,

$$\begin{aligned}\left(u+v\right)\left(U+V\right) &\subset uU+uV+vU+vV \subset M_uU+MU+MU+M_vV \\ &\subset \left(M_u+2M\right)U+M_vV \subset \max\left(M_u+2M,M_v\right)\left(U+V\right).\end{aligned}$$

De manera similar se comprueba que

$$\left(U+V\right)\left(u+v\right) \subset \max\left(M_u+2M,M_v\right)\left(U+V\right).$$

Por tanto, $(U+V)$ es un conjunto $\mathcal{A}-$ convexo.
En particular, si $u \in U'$ y $v \in V'$, entonces la contención en (3.10) es válida para $M_u = M_v = 1$, por tanto,

$$\left(u+v\right)\left(U+V\right) \subset \left(1+2M\right)\left(U+V\right).$$

Esto junto con que $(u+v) \in (1+2M)(U+V)$ por ser $(U+V)$ balanceado, nos da como consecuencia

$$U' + V' \subset (2M+1)(U+V)'.$$

(4) Sabemos que $\varphi^{-1}(U)$ es un conjunto $\mathcal{A}-$ convexo. Sea $x \in (\varphi^{-1}(U))'$. Entonces, $\varphi(x) \in U$ y $xz \in \varphi^{-1}(U)$ para cada $z \in \varphi^{-1}(U)$. Sea $y \in U$. Como φ es suprayectiva existe $z \in E$ tal que $\varphi(z) = y$. Por tanto, $xz \in \varphi^{-1}(U)$; o sea, $\varphi(x)y \in U$ y entonces $\varphi(x) \in U'$. De donde, $(\varphi^{-1}(U))' \subset \varphi^{-1}(U')$. ∎

En la siguiente definición se hacen afirmaciones que se siguen de la Proposición 2.1.10, la observación que sigue a ésta y los siguientes dos hechos: si V es un subconjunto idempotente y balanceado de un álgebra A y $0 < \lambda \leq 1$, entonces λV es idempotente, y la intersección de subconjuntos idempotentes de A es también idempotente. Que $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ es más fina que τ se sigue de que $U' \subset U$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

Definición 3.3.17 *Sean (A,τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa, $\mathcal{U}$ un sistema fundamental de vecindades del cero formado por conjuntos $\mathcal{A}-$convexos (respectivamente cerrados) y $\mathfrak{N}$ la colección de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\lambda U'$ con $0 < \lambda \leq 1$ y $U \in \mathcal{U}$, donde U' es el núcleo idempotente de U. Definimos $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ como la topología vectorial en A que tiene a $\mathfrak{N}$ por sistema fundamental de vecindades del cero. Como $\mathfrak{N}$ está formada por conjuntos idempotentes (respectivamente $\tau-$cerrados) tenemos que la topología $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ es $m-$ convexa y es más fina que τ. Cuando $\mathcal{U}$ es el sistema de vecindades del cero formado todos los discos $\mathcal{A}-$convexos, entonces denotamos a $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ por $M(\tau)$.*

Con motivo de la siguiente proposición recordamos la siguiente definición: un barril en un e.v.t. X es un disco absorbente y cerrado.

Proposición 3.3.18 *Sean (A,τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa, $\mathcal{U}$ un sistema fundamental de vecindades del cero formado por conjuntos $\mathcal{A}-$convexos cerrados, entonces $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ admite una base de vecindades de 0 formada por barriles idempotentes.*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{N}$ de la definición anterior es un sistema fundamental de vecindades de cero de $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ que está formado por discos $\tau-$ cerrados idempotentes, por tanto por $\tau-$ barriles idempotentes. ∎

Proposición 3.3.19 *Dos sistemas fundamentales de vecindades del cero $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ para una topología $\mathcal{A}-$convexa τ, formados por conjuntos $\mathcal{A}-$ convexos cumplen que $M_{\mathcal{V}}(\tau) \subset M_{\mathcal{U}}(\tau)$ si para todo $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ y $\alpha, \beta \geq 1$ tales que $\alpha U \subset V \subset \beta U$.*

Demostración. El resultado se sigue de que $\alpha U \subset V \subset \beta U$ implica $\frac{\alpha}{\max(1,|\beta|)} U' \subset V'$ (Proposición 3.3.16). ∎

Proposición 3.3.20 *Sean $\mathcal{U}$ un sistema fundamental de vecindades del cero formado por conjuntos $\mathcal{A}-$convexos de un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa (A, τ) y $\overline{\mathcal{U}}$ el conjunto de las cerraduras de todos los elementos de $\mathcal{U}$, entonces $M_{\mathcal{U}}(\tau) = M_{\overline{\mathcal{U}}}(\tau)$.*

Demostración. El resultado se sigue de que $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U} + \mathcal{U} \subset 2\mathcal{U}$ y de que $\alpha U \subset V \subset \beta U$ implica $\frac{\alpha}{\max(1,|\beta|)} U' \subset V'$ (Proposición 3.3.16). ∎

Sea $\|\cdot\|$ una seminorma $\mathcal{A}-$ convexa definida en un álgebra A. Para cada $x \in X$ existe $M(x) > 0$ tal que

$$\|xy\| \leq M(x) \|y\| \tag{3.11}$$

Por tanto, obtenemos una función real al definir

$$\|x\|^{op} = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\|$$

para cada $x \in A$, la cual tiene la siguiente propiedad

$$\|xy\| \leq \|x\|^{op} \|y\| . \tag{3.12}$$

para todo $x, y \in A$.

En efecto, si $\|y\| \neq 0$, entonces $\left\| x \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|x\|^{op}$ y se sigue que $\|xy\| \leq \|x\|^{op} \|y\|$; la cual es también cierta cuando $\|y\| = 0$ por (3.11).

Lema 3.3.21 *Sea $\|\cdot\|$ una seminorma $\mathcal{A}-$ convexa definida en un álgebra A. Entonces $\|\cdot\|^{op}$ es una seminorma $m-$convexa con la siguientes propiedades:*

(a) Si A tiene idéntico e, entonces

$$\|x\| \leq \|x\|^{op} \|e\| . \tag{3.13}$$

para todo $x \in A$. En este caso la seminorma $\|\cdot\|^{op}$ define una topología más fuerte que la que define $\|\cdot\|$.

(b)

$$\|x\|^{op} = 0 si \; \|x\| = 0.$$

(c)

$$\|x^n\| \leq (\|x\|^{op})^{n-1} \|x\|$$

si $x \in A$ *y* $n \geq 1$, *donde convenimos en que* $0^0 = 1$.

Demostración. Por (3.11) tenemos que

$$\|x\|^{op} \leq M(x)$$

.

La función $\|\cdot\|_\alpha^{op}$ es no negativa. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in A$. Como consecuencia de que $\|\cdot\|$ es una seminorma tenemos:

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|^{op} &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|\lambda x y\| = |\lambda| \|x\|^{op} \\ \|x + z\|^{op} &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|(x + z) y\| \leq \|x\|^{op} + \|z\|^{op} \end{aligned}$$

Así, $\|\cdot\|_\alpha^{op}$ es una seminorma.

Sea $\|z\| \leq 1$. Por (3.12) tenemos:

$$\|xyz\| \leq \|x\|^{op} \|yz\| \leq \|x\|^{op} \|y\|^{op}$$

y entonces,

$$\|xy\|^{op} \leq \|x\|^{op} \|y\|^{op}.$$

O sea $\|\cdot\|^{op}$ es $m-$convexa.

(a) Se sigue de (3.12)

(b) Supongamos que $\|x\| = 0$. Como $\|xy\| \leq M(y) \|x\|$ para alguna $M(y) \geq 0$, concluimos que $\|x\|^{op} = 0$.

(c) Se obtiene por inducción a partir de (a). ∎

Lema 3.3.22 *Sea* $\|\cdot\|$ *una seminorma* $\mathcal{A}-$ *convexa definida en un álgebra* A*. La función*

$$q(x) = \max(\|x\|, \|x\|^{op})$$

es una seminorma $m-$*convexa que define una topología más fuerte que* $\|\cdot\|$.

Además, $q(x) = 0$ *si y sólo si* $\|x\| = 0$.

Si X *tiene idéntico* e, *entonces*

$$q(x) \leq \max(\|e\|, 1) \|x\|^{op} \tag{3.14}$$

para todo $x \in X$ *y* $\|\cdot\|^{op}$ *y* q *definen la misma topología .*

Demostración. Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in A$. Como consecuencia de que $\|\cdot\|$ y $\|x\|^{op}$ son seminormas tenemos que q lo es.

Si $q(xy) = \|xy\|$, entonces

$$q(xy) \leq \|x\|^{op} \|y\| \leq q(x)\, q(y).$$

Si $q(xy) = \|xy\|^{op}$, entonces

$$q(xy) \leq \|x\|^{op} \|y\|^{op} \leq q(x)\, q(y).$$

O sea, q es $m-$convexa. Es obvio que $\|x\| \leq q(x)$ para todo $x \in A$, por lo que q define una topología más fuerte que $\|\cdot\|$ y $q(x) = 0$ implica $\|x\| = 0$. La implicación contraria se sigue de (b) del lema anterior.

Si e es el idéntico de X, entonces

$$\|x\| = \|xe\| \leq \|e\| \|x\|^{op}$$

de donde se sigue (3.14). ∎

Como consecuencia del lema anterior obtenemos una topología que hace $m-$convexa a un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa y que es más fuerte que la topología original.

Proposición 3.3.23 *Sea (A, τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa cuya topología está definida por la familia de seminormas $\mathcal{A}-$ convexas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ consideramos la seminorma $m-$convexa $q_\alpha(\cdot) = \max\{\|\cdot\|_\alpha, \|\cdot\|_\alpha^{op}\}$. La topología $m-$convexa $Q(\tau)$ generada por la familia de seminormas $Q = \{q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es más fina que τ. La topología $Q(\tau)$ es de Hausdorff si y sólo si τ es de Hausdorff. Si A tiene idéntico, entonces $Q(\tau) = op(\tau)$, donde esta última es la generada por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha^{op}\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

Proposición 3.3.24 *Sea (A, τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un sistema fundamental de vecindades del cero formado por conjuntos $\mathcal{A}-$convexos cerrados. Si $\|\cdot\|_\alpha$ es la funcional de Minkowski de U_α, para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ está definida por la familia de seminormas $Q = \{q_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ donde $q_\alpha(x) = \max\{\|x\|_\alpha, \|x\|_\alpha^{op}\}$. Si A tiene idéntico, entonces $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ está definida por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha^{op}\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demostración. De la prueba de la Proposición 3.2.23 sabemos que la familia de $\mathcal{A}-$ seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ genera la topología τ.

Sea $U_\alpha \in \mathcal{U}$, entonces $U_\alpha = \{x \in A : \|x\|_\alpha \leq 1\}$; observemos que

$$\{x \in A : q_\alpha(x) \leq 1\} = \{x \in A : \|x\|_\alpha \leq 1 \text{ y } \|x\|_\alpha^{op} \leq 1\}.$$

Primero mostraremos que

$$\{x \in A : \|x\|_\alpha \leq 1 \text{ y } \|x\|_\alpha^{op} \leq 1\} = (U_\alpha)'.$$

Supongamos que $\|x\|_\alpha \leq 1$ y $\|x\|_\alpha^{op} \leq 1$, entonces $x \in U_\alpha$ y si $y \in U_\alpha$ entonces $\|y\|_\alpha \leq 1$ y $\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha^{op} \|y\|_\alpha \leq 1$; de donde $xy \in U_\alpha$ y se tiene que $x \in (U_\alpha)'$. Inversamente, sea $x \in (U_\alpha)'$, entonces $x \in U_\alpha$ lo que implica que $\|x\|_\alpha \leq 1$, además, si $y \in U_\alpha$, entonces se cumple que $\|y\|_\alpha \leq 1$ y por estar $x \in (U_\alpha)'$ se tiene que $xy \in U_\alpha$, es decir $\|xy\|_\alpha \leq 1$; de donde $\|x\|_\alpha^{op} \leq 1$.

Dado $0 < \lambda \leq 1$ se cumple $\{x \in A : q_\alpha(x) \leq \lambda\} = \lambda \{x \in A : q_\alpha(x) \leq 1\} = \lambda (U_\alpha)'$, de donde se sigue el resultado buscado.

■

Corolario 3.3.25 *Sea (A, τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ la la familia de todas las seminormas $\mathcal{A}-$ convexas que son contunias en (A, τ), entonces $M(\tau)$ está definida por la familia de seminormas $Q = \{q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ donde $q_\alpha(x) = \max\{\|x\|_\alpha, \|x\|_\alpha^{op}\}$. Si A tiene idéntico, entonces $M(\tau)$ está definida por la familia $\{\|\cdot\|_\alpha^{op}\}_{\alpha \in \Lambda}$.*

Corolario 3.3.26 *La topología $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ es Hausdorff si y solamente si τ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de seminormas que genera a la topología τ y $\{q_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ la familia de seminormas asociada que genera a $M_{\mathcal{U}}(\tau)$. La afirmación se sigue de que $q_\alpha(x) = 0$ si y sólo si $\|x\|_\alpha = 0$, según el Lema 3.3.22. ■

Observación 3.3.27 *A partir de las definiciones de $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ y de $M(\tau)$ surgen las siguientes preguntas:*

1. ¿Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos sistemas fundamentales de vecindades del cero, distintos entre sí, formados por conjuntos $\mathcal{A}-$ convexos de un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa (A, τ), entonces se cumple que $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ coincide con $M_{\mathcal{V}}(\tau)$?

2. ¿Es $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ la topología de Oudadess para algún sistema fundamental $\mathcal{U}$?

En el artículo [13] implícitamente se daba por hecho que estas preguntas tenían respuestas afirmativas. Sin embargo, esto no es así como veremos más adelante.

El mismo autor, L. Oubbi, en un artículo posterior [12] prueba que no siempre existe la topología de Oudadess, por lo que la pregunta dos tiene respuesta negativa. El ejemplo de Oubbi lo veremos en la siguiente sección. Para llegar a él necesitamos resultados que también se ven ahí y que nos permiten responder negativamente la pregunta 1.

3.4 Sobre la existencia de la topología de Oudadess

3.4.1 El álgebra $\mathcal{A}-$convexa A_0 y los discos U y V

Consideramos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ una sucesión de símbolos etiquetada en los enteros. Sea A_0 el espacio vectorial generado por todos estos símbolos. Entonces, todo $x \in A_0$ es de la forma

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$$

Donde $a_n = 0$ excepto para un número finito de índices n. Denotamos por Z_x al subconjunto finito de los enteros n tales que $a_n \neq 0$.

Definimos una multiplicación en A_0 como

$$e_n e_m = \begin{cases} 0 & \text{si } mn \geq 0 \\ |n|\,\delta_{n,-m} e_0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad 0$$

donde $\delta_{n,-m}$ es la delta de Kronecker: $\delta_{n,-m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = -m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Es decir, si

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \text{ y } y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n,$$

entonces

$$xy = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\,(a_n b_{-n} + b_n a_{-n}) \right) e_0.$$

Claramente A_0 con este producto es un álgebra conmutativa y es también asociativa ya que el producto de cualesquiera dos elementos de A_0 es de la forma $c_0 e_0$ para algún escalar c_0; y por la definición de la multiplicación se tiene que $x\,(c_0 e_0) = (c_0 e_0)\,z = 0$, si $x, z \in A_0$; de donde, $x\,(yz) = (xy)\,z = 0$ siempre que $x, y, z \in A_0$.

Definimos

$$U = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0 : |a_n| \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \right\}$$

y

$$V=\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne_n\in A_0:|a_0|+\sum_{n\geq 1}\left(n\left|a_n\right|+\left|a_{-n}\right|\right)\leq 1\right\}.$$

Proposición 3.4.1 *El conjunto U es $\mathcal{A}-$ convexo y V es un disco idempotente. Ambos conjuntos son absorbentes.*

Demostración. Veamos primero que U y V son discos, es decir son absolutamente convexos.

Tomemos escalares $|\alpha|+|\beta|\leq 1$ y sean $x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne_n$ y $x'=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n'e_n$ en U, y $y=\sum_{-\infty}^{\infty}b_ne_n$ y $y'=\sum_{-\infty}^{\infty}b_n'e_n$ en V. Tenemos

$$\alpha x+\beta x'=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\alpha a_n+\beta a_n'\right)e_n$$

y

$$\alpha y+\beta y'=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\alpha b_n+\beta b_n'\right)e_n.$$

Además:

$$|\alpha a_n+\beta a_n'|\leq|\alpha a_n|+|\beta a_n'|\leq|\alpha|+|\beta|\leq 1,$$

ya que $|a_n|\leq 1$ y $|a_n'|\leq 1$, para todo $n\in\mathbb{Z}$, por lo que $\alpha x+\beta x'\in U$.

Por otra parte,

$$|\alpha b_0+\beta b_0'|+\sum_{n\geq 1}(n\left|\alpha b_n+\beta b_n'\right|+\left|\alpha b_{-n}+\beta b_{-n}'\right|)\leq|\alpha|+|\beta|\leq 1,$$

ya que

$$\begin{aligned}|\alpha b_0|+\sum_{n\geq 1}(n\left|\alpha b_n\right|+\left|\alpha b_{-n}\right|)\ &\leq\ |\alpha|\ \text{ y}\\ |\beta b_0'|+\sum_{n\geq 1}(n\left|\beta b_n'\right|+\left|\beta b_{-n}'\right|)\ &\leq\ |\beta|\,,\end{aligned}$$

por lo que $\alpha y+\beta y'\in V$.

Veamos que U es $\mathcal{A}-$ convexo. Sea $x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne_n$ en U con $a_n\neq 0$ para algún $n\neq 0$ y denotemos por m_x al entero no negativo más pequeño tal que $a_n=a_{-n}=0$ para todo $n>m_x$. Como $e_0\in U$, tenemos que para todo $x' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a'_n e_n$ en U se cumple $xx' = \left(\sum_{n=1}^{m_x} n\left(a_n a'_{-n} + a'_n a_{-n}\right)\right) e_0$ pertenece a $\left(\sum_{n=1}^{m_x} n\left|a_n a'_{-n} + a'_n a_{-n}\right|\right) U$ y

$$\left(\sum_{n=1}^{m_x} n\left|a_n a'_{-n} + a'_n a_{-n}\right|\right) U \subset \left(\sum_{n=1}^{m_x} n\left(|a_n| + |a_{-n}|\right)\right) U$$
$$\subset 2\left(\sum_{n=1}^{m_x} n\right) U \subset m_x\left(m_x+1\right) U.$$

O sea $xx' \in m_x\left(m_x+1\right) U$. Si x es de la forma $a_0 e_0$ entonces $xx' = 0$ y también se cumple que $xx' \in m_x\left(m_x+1\right) U$. Por consiguiente, U es $\mathcal{A}-$ convexo.

Finalmente, comprobemos que V es idempotente. Si $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n$ y $y' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b'_n e_n$ pertenecen a V, entonces, $yy' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n b'_{-n} + b'_n b_{-n}\right)\right) e_0$ y como para todo $n \geq 1$, se cumple $n\left|b'_n\right| \leq 1$ y $\left|b'_{-n}\right| \leq 1$ tenemos que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n b'_{-n} + b'_n b_{-n}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left|b_n\right| + \left|b_{-n}\right|\right) \leq 1.$$

O sea, $yy' \in V$.

Los conjuntos U y V son absorbentes, ya que si $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0$, entonces $x \in \alpha U$ siempre que $\alpha > \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$ y $x \in \beta V$ si $\beta > |a_0| + \sum_{n\geq 1}\left(n\left|a_n\right| + \left|a_{-n}\right|\right)$. ∎

Proposición 3.4.2 *El núcleo idempotente U' de U se puede describir como:*

$$U' = \left\{x \in A_0 : \max\left(|a_0|, \sum_{n\geq 1} n\left(|a_n| + |a_{-n}|\right)\right) \leq 1 \text{ si } x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n\right\}.$$

Demostración. Primero probamos la contención de izquierda a derecha. Si $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in U'$, entonces $|a_0| \leq 1$ y $xy \in U$ para todo $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n$ en U. En particular, se tendrá

$$\left|\sum_{n\geq 1} n\left(a_n b_{-n} + b_n a_{-n}\right)\right| \leq 1. \tag{3.15}$$

para todo $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n$ en U.

Definamos $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n \in U$, con $b_n = sgn\left(a_{-n}\right)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Claramente $|b_n| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ y entonces $y \in U$ y $a_n b_{-n} = |a_n|$ y $b_n a_{-n} = |a_{-n}|$.

De (3.15) se sigue que$\sum_{n\geq 1} n\left(|a_n| + |a_{-n}|\right) \leq 1$ y por tanto,

$$\max\left(|a_0|, \sum_{n\geq 1} n\left(|a_n| + |a_{-n}|\right)\right) \leq 1.$$

La contención contraria se sigue de manera inmediata. ∎

Proposición 3.4.3 *El conjunto $\mathcal{A}-$ convexo U y el disco idempotente V de A_0 satisfacen que $\frac{1}{n}V \subset \left(\frac{1}{n}V\right)'$, $V \subset U$ y U' no absorbe a V.*

Demostración. Sea $x \in \frac{1}{n}V$, entonces

$$x\left(\frac{1}{n}V\right) \subset \frac{1}{n^2}V^2 \subset \frac{1}{n^2}V \subset \frac{1}{n}V$$

por ser V un disco idempotente. De donde, $\frac{1}{n}V \subset \left(\frac{1}{n}V\right)'$.

Es obvio que $V \subset U$. Supongamos U' absorbe a V y sea $r > 0$ tal que $V \subset rU'$. Entonces,

$$e_{-n}e_n \in VU \subset rU'U \subset rU$$

siempre que $n \geq 1$, pero

$$e_{-n}e_n = ne_0.$$

Así, $\frac{n}{r}e_0 \in U$ para todo $n \geq 1$. Como $\frac{n}{r} > 1$ para algún $n \geq 1$, para este natural no puede tenerse que $\frac{n}{r}e_0 \in U$. Se sigue que U' no absorbe a V. ∎

Lema 3.4.4 *Sea $|\cdot|_U$ la funcional de Minkowski asociada a U en A_0. Entonces $|\cdot|_U$ es una norma $\mathcal{A}-$ convexa que está definida como*

$$|x|_U = \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \tag{3.16}$$

para todo $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0$. De donde, U es la bola unitaria cerrada según esta norma.

Demostración. Tenemos, $x \in \lambda U$, con $\lambda > 0$, si y sólo si $\frac{|a_n|}{\lambda} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ o sea $x \in \lambda U$ si y sólo si $\lambda \geq \max_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$. Por tanto, es válida la fórmula (3.16). Es claro que $|x|_U$ es entonces una norma y es $\mathcal{A}-$ convexa por la Proposición 3.4.1 y el Corolario 3.2.25. ∎

Lema 3.4.5 *Sea* $|\cdot|_V$ *la funcional de Minkowski asociada a* V *en* A_0*. Entonces* $|\cdot|_V$ *es una norma* $m-$ *convexa que está definida como*

$$|x|_V = \left|\sum a_n e_n\right|_V = |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (n\,|a_n| + |a_{-n}|) \tag{3.17}$$

para todo $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0$*. De donde,* V *es la bola unitaria cerrada según esta norma.*

Demostración. Tenemos, $x \in \lambda V$, con $\lambda > 0$, si y sólo si

$$\frac{|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (n\,|a_n| + |a_{-n}|)}{\lambda} \leq 1$$

o sea, $x \in \lambda V$ si y sólo si $\lambda \geq |a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (n\,|a_n| + |a_{-n}|)$. Por tanto, es válida la fórmula (3.17). Es claro entonces que $|x|_V$ es una norma y es $m-$convexa por la Proposición 3.4.1 y el Corolario 3.2.25. ■

Proposición 3.4.6 *Existe un álgebra localmente* $\mathcal{A}-$ *convexa* (A,τ)*, con un sistema fundamental* $\mathcal{U}$ *de vecindades del cero formado por conjuntos* $\mathcal{A}-$ *convexos tal que* τ *y* $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ *no tienen los mismos conjuntos acotados.*

Demostración. Siempre se tendrá que los acotados según $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ lo son según τ, ya que $\tau \subset M_{\mathcal{U}}(\tau)$. Si equipamos al álgebra A_0, con la que hemos trabajado arriba, con la norma $\mathcal{A}-$ convexa $|\cdot|_U$ y consideramos el sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vecindades del cero formado por las bolas cerradas con centro en 0, entonces (A,τ) es un álgebra localmente $\mathcal{A}-$ convexa, de hecho es $\mathcal{A}-$normada, y en ella V es acotado pues es un subconjunto de la bola unitaria (Proposición 3.4.3 y Lema 3.4.4). Sin embargo, V no es acotado para $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ pues U' no absorbe a V (Proposición 3.4.3) y U' es una vecindad del cero en $M_{\mathcal{U}}(\tau)$. ■

Ahora respondemos de manera negativa la pregunta 1 de la Observación 3.3.27.

Proposición 3.4.7 *Si* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{V}$ *son dos diferentes sistemas de vecindades del cero formado por conjuntos* $\mathcal{A}-$ *convexos de un álgebra* $\mathcal{A}-$ *convexa* (A,τ)*, entonces, no necesariamente tenemos que* $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ *es equivalente a* $M_{\mathcal{V}}(\tau)$*.*

Demostración. Consideremos nuevamente el subconjunto V de A_0 y demos a esta álgebra la topología $\tau = \tau(|\cdot|_V)$ inducida por la norma $m-$convexa $|\cdot|_V$. Consideremos en esta topología el sistema fundamental de vecindades del cero $\mathcal{V} = \left\{\frac{1}{n}V, n \geq 1\right\}$. Debido a que $|\cdot|_V$ es $m-$convexa tenemos que (A_0, τ) es un álgebra normada. Por la Proposición 3.4.3, $V \subset U$ y V es acotado para la topología $M_{\mathcal{V}}(\tau)$. Entonces, la colección $\mathcal{U} = \left\{\frac{1}{n}V, n \geq 1\right\} \cup \left\{\frac{1}{n}U, n \geq 1\right\}$ es también un sistema fundamental de vecindades del 0 para τ y tenemos que $M_{\mathcal{V}}(\tau) \subset M_{\mathcal{U}}(\tau)$. Si suponemos que $M_{\mathcal{V}}(\tau)$ y $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ son equivalentes, entonces el conjunto U' es una vecindad del cero en $(A_0, M_{\mathcal{V}}(\tau))$ y por tanto, U' absorbe a V, pero esto no es cierto por la misma Proposición 3.4.3. ∎

Observación 3.4.8 *El álgebra $(A_0, \tau = \tau(|\cdot|_V))$ usada en la prueba anterior, es un álgebra $m-$ convexa en la cual la $\tau \neq M_{\mathcal{U}}(\tau)$, pues en caso contrario, como τ es un topología $m-$ convexa para la cual V es acotado, entonces la vecindad U' del cero en la topología $M_{\mathcal{U}}(\tau)$ absorbería a V, lo que sabemos que no es cierto. Así, puede suceder que para un sistema fundamental $\mathcal{U}$ de vecindades del 0 de una topología $m-$convexa τ se tenga $M_{\mathcal{U}}(\tau) \neq \tau$, contra lo que se afirma en [13, 6) Remarque 2.3].*

3.4.2 La topología de Oudadess puede no existir

En [12] se da un ejemplo de una álgebra $\mathcal{A}-$ convexa (A, τ) para la que no existe la topología de Oudadess, es decir, no hay una topología $m-$convexa σ más fina que τ y que sea más gruesa que cualquiera otra con esas dos propiedades. Esto contesta negativamente la pregunta 2 de la Observación 3.3.27. A continuación presentamos dicho ejemplo.

En el álgebra A_0 consideremos una vez más la norma $\mathcal{A}-$ convexa definida como

$$|x|_U = \max |a_n|$$

para todo $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0$. Entonces $(A_0, \tau = \tau(|\cdot|_U))$ es un álgebra $\mathcal{A}-$normada; en particular, de Hausdorff.

Recordamos que

$$U = \left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0 : |a_n| \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\right\}$$

es la bola unitaria cerrada según esta norma y $\mathcal{U} = \left\{\frac{1}{n}U, n \geq 1\right\}$ es un sistema fundamental de vecindades del cero para τ.

Mostraremos que hay familia $\mathfrak{T} = \{\tau_p : p \text{ es primo}\}$ de topologías $m-$convexas, incomparables 2 a 2, más finas que τ y que no existe una topología que haga a A_0 un álgebra topológica y sea más fuerte que τ y más débil que cada $\tau_p \in \mathfrak{T}$. En particular, para (A_0, τ) no puede existir la topología de Oudadess.

Para cada número primo p, definimos $P_p = \{p^r : r \in \mathbb{N}\}$. Por el teorema fundamental del álgebra se tiene que

$$P_p \cap P_q = \emptyset$$

si $p \neq q$ son primos.

Consideramos el conjunto:

$$V_p = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n \in A_0 : |a_0| + \sum_{n \in P_p} (n\,|a_n| + |a_{-n}|) + \sum_{0<n \notin P_p} (|a_n| + n\,|a_{-n}|) \leq 1 \right\}.$$

que es claramente un disco que satisface que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n \in V_p$, entonces

$$\max\left(|b_n|, |b_{-n}|, |b_m|, |b_{-m}|\right) \leq 1 \tag{3.18}$$

para todo $m, n \geq 1$, con $n \in P_p$ y $m \notin P_p$. Observamos que $e_{-p^n} \in V_p$.

Usamos (3.18) para ver que V_p es idempotente, ya que si $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e_n$ y $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n e_n$ están en V_p, entonces

$$xy = \left(\sum_{n \geq 1} n\left(a_n b_{-n} + b_n a_{-n}\right) \right) e_0$$

es un elemento de V_p, pues

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n\geq 1} n\left(a_n b_{-n} + b_n a_{-n}\right) \right| &\leq \sum_{n \in P_p} n\left(|a_n b_{-n}| + |b_n a_{-n}|\right) \\
&\quad + \sum_{0<n \notin P_p} n\left(|a_n b_{-n}| + |b_n a_{-n}|\right) \\
&\leq \sum_{n \in P_p} (n\,|a_n| + |a_{-n}|) + \sum_{n \notin P_p} (|a_n| + n\,|a_{-n}|) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

De manera similar a como se hizo en Lema 3.4.4 se puede mostrar que el funcional de Minkowski $|\cdot|_p$ de V_p es una norma $m-$ convexa que satisface

$$|x|_p = |a_0| + \sum_{n \in P_p} (n\,|a_n| + |a_{-n}|) + \sum_{0<n \notin P_p} (|a_n| + n\,|a_{-n}|)$$

si $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$. Además.

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n \right|_U = \max_{n \in \mathbb{Z}} (|a_n|) \leq \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n \right|_p ,$$

por lo que la topología τ_p generada por $|\cdot|_p$ es $m-$ convexa y más fuerte que τ.

Tenemos que V_p es la bola unitaria según la norma $|\cdot|_p$ y por tanto es una vecindad acotada en la topología τ_p.

Veremos que τ_p y τ_q son incomparables siempre que $p \neq q$. Si suponemos que V_p es una vecindad del cero en (A_0, τ_q), entonces existe una constante $r > 0$ tal que $V_q \subset rV_p$.

Sea $n \geq 1$, entonces $q^n \in P_q$. Como vimos $e_{-q^n} \in V_q$y ya que $V_q \subset rV_p$, concluimos que $e_{-q^n} \in rV_p$ para todo $n \geq 1$.

Por otra parte, $|e_{-q^n}|_p = n$, ya que $q^n \notin P_p$ para todo $n \geq 1$. Entonces, $\left|\frac{1}{r} e_{-q^n}\right|_p = \frac{n}{r}$ para todo $n \geq 1$ y $\left|\frac{1}{r} e_{-q^n}\right|_p > 1$ para n suficientemente grande, con lo que se contradice que $e_{-q^n} \in rV_p$.

De manera similar se puede ver que V_p no puede ser absorbido por V_q y queda probado que τ_p y τ_q son incomparables siempre que $p \neq q$. Así ninguna de ellas puede ser la topología de Oudadess.

Supongamos que (A_0, σ) es un álgebra topológica para alguna topología σ tal que $\tau \preceq \sigma \preceq \tau_p$ para cada primo p. En especial, (A_0, σ) es de Hausdorff y todo conjunto τ_p-acotado es $\sigma-$acotado, así cada conjunto V_p es $\sigma-$acotado.

Sea W una vecindad balanceada del cero en el álgebra topológica (A_0, σ) que no contenga a e_0. Existe una vecindad del cero W_0 en (A_0, σ) tal que $W_0^2 \subset W$. Como W_0 absorbe a cada V_p, entonces para cualesquiera dos números primos distintos entre sí p, q, existen $r_p > 0$ y $r_q > 0$ tales que $V_p \subset r_p W_0$ y $V_q \subset r_q W_0$ y se sigue que $V_p V_q \subset r_p r_q W_0^2 \subset r_p r_q W$.

Para cada potencia p^n de p tenemos que $e_{-p^n} \in V_p$ y e_{p^n} por lo que $e_{-p^n} e_{p^n} = p^n e_0$ pertenece a $r_p r_q W$ para todo $n \geq 1$, o lo que es lo mismo $e_0 \in \frac{r_p r_q}{p^n} W$. Esto es imposible pues para n suficientemente grande $0 < \frac{r_p r_q}{p^n} < 1$ y entonces $e_0 \in W$. Así, (A_0, σ) no es un álgebra topológica ∎

Nota 3.4.9 *Para finalizar esta sección, mostramos la demostración incorrecta que fué dada por buena durante varios años y que asegura que la topología $M(\tau)$ es la más gruesa de las topologías $m-$convexas más finas que una topología $\mathcal{A}-$ convexa dada τ, haciendo notar donde se encuuentra el error en la argumentación; para este fin, presentamos primero a la siguiente proposición pues ésta es escencial para la "demostración" del teorema.*

Proposición 3.4.10 *Sean (A,τ) y (B,σ) dos álgebras $\mathcal{A}-$ convexas f un homomorfismo continuo y suprayectivo de álgebras de A en B. Entonces, f es $M(\tau)-M(\sigma)$ continuo.*

Demostración. Sean θ y μ las colecciones de todas las vecindades del 0 que son conjuntos $\mathcal{A}-$convexos en (A,τ) y (B,σ), respectivamente. Es suficiente mostrar que para todo $V\in\mu$, existe $U\in\theta$ tal que $f(U')\subset V'$. Como f es $\tau-\sigma$ continuo, $f^{-1}(V)\in\theta$. Definamos $U=f^{-1}(V)$ y mostremos que $f(U')$ está contenido en V'. Sea $x\in U'$, entonces $f(x)\in V$ y

$$\begin{aligned} f(x)V &= f(x)f\left(f^{-1}(V)\right) \\ &= f\left(xf^{-1}(V)\right) \\ &= f(xU)\subset f(U)=V. \end{aligned}$$

por lo que $f(x)$ pertenece a V'. ∎

Teorema 3.4.11 *Sea (A,τ) un álgebra $\mathcal{A}-$ convexa, entonces la topología $M(\tau)$ es la más grues de las topologías $m-$convexas más finas que τ.*

Demostración. Sea σ una topología $m-$convexa más fina que τ. Se tiene que la aplicación identidad $Id:(A,\sigma)\to(A,\tau)$ es continua y suprayectiva, por la proposición anterior esta aplicación se mantiene contínua de $(A,M(\sigma))$ a $(A,M(\tau))$. Pero σ es igual a $M(\sigma)$ y se sigue que σ es más fina que $M(\tau)$. ∎

El error en la argumentación está al asegurar que si (A,σ) es un álgebra localmente $m-$convexa entonces se tiene la igualdad $\sigma=M(\sigma)$. De hecho, en 3.4.8 se hace notar que existen un álgebra τ que es $m-$convexa y un sistema fundamental de vecindades del cero $\mathcal{U}$ tales que $\tau\neq M_{\mathcal{U}}(\tau)$, sinembargo, se tiene que $\tau\subset M_{\mathcal{U}}(\tau)\subset M(\tau)$ por lo que en este caso se tiene que $\tau\neq M(\tau)$.

3.4.3 Condiciones suficientes para la existencia de la topología de Oudadess.

Cerramos este trabajo con la presentación de condiciones que hemos obtenido en [3] para garantizar la existencia de la topología de Oudadess y con base en ellas damos ejemplos de álgebras unitarias en las que existe la topología de Oudadess, la que en todos los casos coincide con la topología $op(\tau)$ correspondiente a una familia de seminormas que genera la topología original τ. Para ello serán esenciales las seminormas $\|\cdot\|^{op}$ y $q(\cdot)$ vistas en la Subsección 3.3.3. En la siguiente proposición recordamos propiedades antes vistas y agregamos tres más:

Proposición 3.4.12 *Siempre que $\|\cdot\|$ es una seminorma $\mathcal{A}$-convexa en un álgebra A, se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) $\|\cdot\|^{op}$ y $q(x) = \max(\|x\|, \|x\|^{op})$ son seminormas $m-$convexas en A.

(b) $\|xy\| \leq \|x\|^{op}\|y\|$ si $x, y \in A$.

(c) $\|x\| = 0$ implica $\|x\|^{op} = 0$

(d) $\|x^n\| \leq (\|x\|^{op})^{n-1}\|x\|$ si $x \in A$ y $n \geq 1$.

(e) $\overline{\lim}(\|x^n\|)^{\frac{1}{n}} \leq \|x\|^{op}$ si $x \in A$.

En el caso de que X sea un álgebra con idéntico e, entonces $\|\cdot\|^{op}$ cumple además:

(f) $\|x\| \leq \|x\|^{op}\|e\|$

(g) $\|x^n\| \leq (\|x\|^{op})^n\|e\|$

Demostración.

(e) Como $\|x^n\| \leq (\|x\|^{op})^{n-1}\|x\|$, tenemos

$$\overline{\lim}(\|x^n\|)^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}(\|x\|^{op})^{\frac{n-1}{n}}\|x\|^{\frac{n-1}{n}} = \|x\|^{op}$$

si $\|x\| \neq 0$. Si $\|x\| = 0$ se da la igualdad ya que por (c) y (d) se tiene que $\|x^n\| = 0 = \|x\|^{op}$.

(g) Es consecuencia inmediata de (d) y (f). ∎.

Teorema 3.4.13 *Sea (A, τ) un álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa cuya topología está dada por una familia $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$-seminormas. Si $F = \left\{|\cdot|_j\right\}_{j\in J}$ es una familia de seminormas $m-$convexas que generan una topología $\tau(F)$ más fuerte que τ y tal que para cada $j \in J$ existen $i \in I$ y $M > 0$ para los que se satisface*

$$|x|_j \leq M\,\overline{\lim_n}(\|x^n\|_i)^{\frac{1}{n}}$$

para todo $x \in A$, entonces la topología de Oudadess $m(\tau)$ existe para (A, τ) y coincide con la topología $\tau(F)$.

Demostración. Supongamos que σ es una topología $m-$convexa en A más fuerte que τ y sea $S = \left\{|\cdot|'_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de seminormas submultiplicativas que generan a la topología σ.

Para cada $j \in J$ existen $i \in I$ y $M_j > 0$ tales que

$$|x|_j \leq M\,\overline{\lim_n}(\|x^n\|_i)^{\frac{1}{n}}$$

para todo $x \in A$. También existen $\alpha \in \Lambda$ y $K > 0$ tales que

$$\|x\|_i \leq K\ |x|'_\alpha$$

para todo $x \in A$. Entonces,

$$\|x^n\|_i \leq K\ |x^n|'_\alpha = K\left(|x|'_\alpha\right)^n$$

y así,

$$|x|_j \leq M\,\overline{\lim_n}\left(\|x^n\|_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq M\,\overline{\lim_n} K^{\frac{1}{n}}\ |x|'_\alpha = M\ |x|'_\alpha$$

para todo $x \in A$. Por tanto, $\tau(F) \subset \sigma$ y entonces la topología de Oudadess es $\tau(F)$. ∎

Teorema 3.4.14 *Sea (A, τ) un álgebra localmente $\mathcal{A}$-convexa cuya topología está dada por una familia $\{\|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$-seminormas. Sean $op(\tau)$ y $Q(\tau)$ las topologías generadas por las familias de seminormas $\{\|\cdot\|_i^{op}\}_{i\in I}$ y $\{q_i\}_{i\in I}$, respectivamente, donde y $q_i(\cdot) = \max\left(\|\cdot\|_i, \|\cdot\|_i^{op}\right)$ para todo i. Si para cada $j \in I$ existen $i \in I$ y $M > 0$ tales que*

$$\|x\|_j^{op} \leq M\,\overline{\lim_n}\left(\|x^n\|_i\right)^{\frac{1}{n}} \tag{3.19}$$

para todo $x \in A$, entonces la topología de Oudadess $m(\tau)$ existe para (A, τ) y coincide con $Q(\tau)$. Si además A tiene idéntico, entonces $m(\tau) = op(\tau)$.

Demostración. Tenemos que $Q(\tau)$ es una topología $m-$convexa más fuerte que τ (Lema 3.3.22). Supongamos que σ es una topología $m-$convexa en A más fuerte que τ y sea $S = \{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de $m-$seminormas que generan la topología σ.

Dado $j \in I$ tomamos $i \in I$ y $M > 0$ que satisfagan (3.19). Existen $\alpha \in \Lambda$ y $K > M$ tales que

$$\|x\|_i, \|x\|_j \leq K\,|x|_\alpha$$

para todo $x \in A$.

Entonces,

$$\|x\|_j^{op} \leq M\overline{\lim_n}\left(\|x^n\|_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq M\,|x|_\alpha$$

para todo $x \in A$. Así,

$$q_j(x) \leq K\,|x|_\alpha$$

para todo $x \in A$. Por tanto $Q(\tau) \subset \sigma$ y entonces la topología de Oudadess es $Q(\tau)$.

Si A tiene idéntico e, entonces sabemos por la Proposición 3.3.23 que $Q(\tau) = op(\tau)$. ∎

3.4.4 Ejemplos de álgebras en las que existe la topología de Oudadess

A continuación veremos ejemplos de álgebras $\mathcal{A}-$convexas que no son $m-$convexas y en las que es aplicable alguno de los dos teoremas anteriores y por consiguiente, en ellas existe la topología de Oudadess.

Las Algebras de Funciones Continuas con Pesos

Una familia de Nachbin para un espacio completamente regular X es una familia V de funciones reales definidas en X, no negativas, ninguna de ellas nula, y tales que satisfacen las siguientes propiedades:

(a) Cada $u \in V$ es acotada.

(b) Si $\lambda \geq 0$ y $u, v \in V$, entonces existe $w \in V$ tal que $\lambda u, \lambda v \leq w$.

(c) Para cada $x \in X$ existe $u \in V$ tal que $u(x) \neq 0$.

(d) Dado $w \in V$ existen u, $v \in V$ tales que $w \leq uv$.

El conjunto $CV(X)$ está formado por todas las funciones escalares y continuas f definidas en X tales que $|f|\, u$ es una función acotada para toda función $u \in V$.

Con las operaciones usuales entre funciones, $CV(X)$ es una álgebra unitaria y conmutativa y con la topología τ_V generada por las seminormas definidas como

$$\|f\|_u = \sup_{x \in X} |f(x)|\, u(x)$$

para $f \in CV(X)$ y $u \in V$, es localmente convexa ya que dado $w \in V$ tenemos que por la propiedad (d) de V existen $u, v \in V$ tales que

$$\|fg\|_w \leq \|f\|_u \|g\|_v$$

si $f, g \in CV(X)$. Por la propiedad (c) esta topología es de Hausdorff.

Definimos el *presoporte* o *conjunto cozero* de una función no nula $u : X \to \mathbb{R}$ y lo denotamos por $co(u)$ como:

$$co(u) = \{x \in X : u(x) \neq 0\}.$$

Sea $A \subset CV(X)$ una subálgebra y $u \in V$. Si

$$\|f\|_{co(u)} = \sup_{x \in co(u)} |f(x)| < \infty$$

para todo $f \in A$, entonces $\|\cdot\|_{co(u)}$ es una seminorma $m-$convexa en A.

Lema 3.4.15 *Sea $A \subset CV(X)$ una subálgebra. Si $\|f\|_{co(u)} < \infty$ para todo $f \in A$ y $u \in V$, entonces la familia de seminormas $\left\{\|\cdot\|_{co(u)}\right\}_{u \in V}$ genera en $CV(X)$ una topología $m-$convexa $\tau_{co(V)}$ más fuerte que la inducida por τ_V y cada seminorma $\|\cdot\|_u$ es $\mathcal{A}-$convexa en A; o sea, A es un álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa con la topología τ_V. Además,*

$$\|f\|_u^{op} \leq \|f\|_{co(u)}$$

para todo $f \in A$.

Demostración. Ya señalamos que cada seminorma $\|\cdot\|_{co(u)}$ es $m-$convexa. Por otra parte, por la propiedad (a) de la familia V se tiene que existe $M > 0$ tal que $u(x) \leq M$ para toda x; de donde,

$$\|f\|_u = \sup_{x \in X} |f(x)| u(x) = \sup_{x \in co(u)} |f(x)| u(x) \leq \sup_{x \in co(u)} |f(x)| M = M \|f\|_{co(u)}$$

para todo $f \in A$. Por consiguiente, τ_V en A es más débil que la topología dada $\tau_{co(V)}$, y como

$$\|fg\|_u = \sup_{x \in co(u)} |f(x)| |g(x)| u(x) \leq \|f\|_{co(u)} \|g\|_u$$

si $f, g \in A$, entonces $\|\cdot\|_u$ es $\mathcal{A}-$convexa en A. Además,

$$\|f\|_u^{op} \leq \|f\|_{co(u)}$$

para todo $f \in A$. ∎

Proposición 3.4.16 *Sea $A \subset CV(X)$ una subálgebra. Esta subálgebra es $\mathcal{A}-$convexa con la topología inducida por τ_V si y sólo si $\|f\|_{co(u)} < \infty$ para todo $f \in A$ y $u \in V$. En cualquiera de estos casos, las seminormas $\|\cdot\|_u$ son $\mathcal{A}-$convexas en A y $\|f\|_{co(u)} = \|f\|_u^{op}$ todo $u \in V$ y $f \in A$.*

Demostración. La parte "si" es el lema anterior. Para probar la otra parte, supongamos que A es $\mathcal{A}-$convexa. Existe una familia saturada $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ de seminormas $\mathcal{A}-$convexas en A que generan la topología inducida por τ_V. Así, para cada α está definida $\|\cdot\|_\alpha^{op}$ y se cumple, por la propiedad (e) de la Proposición 3.4.12, que

$$\overline{\lim}\,\|f^n\|_\alpha^{\frac{1}{n}} \leq \|f\|_\alpha^{op}$$

si $f \in A$.

Sean $u \in V$ y $x \in co\,(u)$. Existen $M > 0$ y $\alpha = \alpha\,(u)$ tales que

$$|f\,(x)|\,u\,(x) \leq \|f\|_u \leq M\,\|f\|_\alpha\,; \tag{3.20}$$

de donde,

$$|f\,(x)| \leq \frac{M}{u\,(x)}\,\|f\|_\alpha$$

para todo $f \in A$, por lo que

$$|f\,(x)| = (|f^n\,(x)|)^{\frac{1}{n}} \leq \overline{\lim}\left(\frac{M}{u\,(x)}\right)^{\frac{1}{n}}\|f^n\|_\alpha^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}\,\|f^n\|_\alpha^{\frac{1}{n}} \leq \|f\|_\alpha^{op}$$

y

$$\|f\|_{co(u)} \leq \|f\|_\alpha^{op} < \infty$$

para todo $f \in A$.

Por el lema anterior se sigue que cada seminorma $\|\cdot\|_u$ es $\mathcal{A}-$convexa y $\|f\|_u^{op} \leq \|f\|_{co(u)}$. Podemos entonces aplicar lo anterior para $\{\|\cdot\|_\alpha\} = \{\|\cdot\|_u\}$ y así, tomar en (3.20) $M = 1$ y $\alpha\,(u) = u$, con lo que obtenemos $\|f\|_{co(u)} \leq \|f\|_u^{op}$ y por consiguiente $\|f\|_{co(u)} = \|f\|_u^{op}$ para todo $f \in A$. ∎

Proposición 3.4.17 *Si la subálgebra $A \subset CV\,(X)$ es $\mathcal{A}-$convexa para la topología inducida en A por τ_V, entonces la topología de Oudadess $m\,(\tau)$ de A coincide con las topologías $\tau_{co(V)}$ y las inducidas en A por $op\,(\tau)$ y la topología τ_{V_0} dada en $CV\,(X)$ por la familia de Nachbin*

$$V_0 = \left\{\lambda_{\chi_{co(u)}} : \lambda > 0 \ y \ u \in V\right\}.$$

Demostración. Por el Teorema 3.4.14 para la primera afirmación basta probar que para todo $f \in A$ se satisface

$$\|f\|_u^{op} \leq \overline{\lim} \left(\|f^n\|_u\right)^{\frac{1}{n}},$$

lo cual es obvio si $\|f\|_u^{op} = 0$. Por otra parte, si $\|f\|_u^{op} \neq 0$, entonces, dado $0 < \varepsilon < \|f\|_u^{op}$ escogemos $\|g\|_u \leq 1$ y $x_0 \in co\,(u)$ tales que

$$\|fg\|_u = \sup_{x \in co(u)} |f(x)|\,|h(x)|\,u(x) > \|f\|_u^{op} - \varepsilon$$

y

$$|f(x_0)|\,|g(x_0)|\,u(x_0) > \|f\|_u^{op} - \varepsilon.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \left(\|f^n\|_u\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\sup_{x \in X} |f^n(x)|\,u(x)\right)^{\frac{1}{n}} \geq |f(x_0)|\,u(x_0)^{\frac{1}{n}} \\ &\geq u(x_0)^{\frac{1}{n}}\,|f(x_0)|\,|g(x_0)|\,u(x_0) \\ &\geq u(x_0)^{\frac{1}{n}}\left(\|f\|_u^{op} - \varepsilon\right), \end{aligned}$$

la segunda desigualdad es cierta pues $\|g\|_u \leq 1$. Se sigue que

$$\overline{\lim} \left(\|f^n\|_u\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\|f\|_u^{op} - \varepsilon\right)$$

Así,

$$\overline{\lim} \left(\|f^n\|_u\right)^{\frac{1}{n}} \geq \|f\|_u^{op}.$$

y entonces, $m(\tau) = op(\tau)$.

La familia $V_0 = \left\{\lambda\chi_{co(u)} : \lambda > 0 \text{ y } u \in V\right\}$ es de Nachbin ya que: cada $\lambda\chi_{co(u)}$ es acotada; $\alpha\lambda\chi_{co(u)}, \alpha\lambda\chi_{co(v)} \leq \alpha\lambda\chi_{co(w)}$, si $\alpha > 0$, donde $w \in V$ es tal que $\lambda u, \lambda v \leq w$; para cada $x \in X$ se tiene que $\chi_{co(u)}(x) \neq 0$ si $u \in V$ es tal que $u(x) \neq 0$ y, finalmente, dado $\lambda\chi_{co(w)}$, se tiene que $\lambda\chi_{co(w)} \leq \lambda\chi_{co(u)}\lambda\chi_{co(v)}$ si $u, v \in V$ y $w \leq uv$.

Además,

$$\|f\|_{co(u)} = \|f\|_{\chi_{co(u)}}$$

para todo $u \in V$. Así, la $m(\tau)$ en $CV(X)$ coincide con la topología inducida por la familia de Nachbin $V_0 = \left\{\lambda_{\chi_{co(u)}} : \lambda > 0 \text{ y } u \in V\right\}$. ∎

El álgebra $C_b(X)$ con la topología estricta β

Sea $C_b(X)$ el espacio de funciones reales continuas y acotadas en un espacio completamente regular X. Se define la topología estricta β en $C_b(X)$ como aquella que está definida por las seminormas

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x\in X} |\varphi(x) f(x)| \tag{3.21}$$

donde φ pertenece al espacio B_0 de las funciones reales acotadas en X que se anulan en ∞.

En el caso en que X es localmente compacto, como por ejemplo cuando $X = \mathbb{R}$, entonces se obtiene la misma topología si φ varía en el subespacio C_0 de B_0. Por tanto, lo aquí dicho vale para el Ejemplo ejemplo3.2.10 (página 89).

Con las operaciones usuales entre funciones $(C_b(X), \beta)$ es un álgebra conmutativa y unitaria. Además es localmente convexa y uniformemente $\mathcal{A}-$convexa.

Para ver que es localmente convexa sólo comprobamos que las seminormas definidas como en (3.21) satisfacen la condición (3.3).

Sea $\varphi \in B_0$, entonces

$$|\varphi(x) f(x) g(x)| = \left|\sqrt{|\varphi(x)|} f(x)\right| \left|\sqrt{|\varphi(x)|} g(x)\right|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que $\sqrt{|\varphi(x)|} \in B_0$ y que se satisface:

$$\|fg\|_\varphi \leq \|f\|_{\sqrt{\varphi}} \|g\|_{\sqrt{\varphi}}.$$

Por otra parte,

$$\|fg\|_\varphi \leq \|f\|_\infty \|g\|_\varphi.$$

para cualquier $\varphi \in B_0$ y todo $f, g \in C_b(X)$, donde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Por consiguiente, $(C_b(X), \beta)$ es uniformemente $\mathcal{A}-$convexa.

Es obvio que se obtiene la misma topología si φ corre sólo por $B_0^+(X) = \{\varphi \in B_0(X) : \varphi > 0\}$.

Proposición 3.4.18 *En el álgebra $(C_b(X), \beta)$ la topología de Oudadess $m(\beta)$ es la topología $op(\beta)$ que coincide con la topología dada por las seminormas $\|f\|_{co(\varphi)} = \sup_{x\in co(\varphi)} |f(x)|$ donde $\varphi \in B_0^+(X)$. En particular, esta topología es más fuerte que β.*

Demostración. Es fácil probar que $V = B_0^+(X)$ es una familia de Nachbin y que $(C_b(X), \beta) = CV(X)$. De la Proposición 3.4.17 se sigue el resultado. ∎

Corolario 3.4.19 *El álgebra* $(C_b(X), \beta)$ *es* $m-$*convexa si y sólo si* β *coincide con su topología de Oudadess; es decir, si y sólo si* $\left\{\|f\|_{co(\varphi)} : B_0^+(X)\right\}$ *genera la topología* β. *Esta última condición equivale a que para cada* $\varphi \in B_0^+(X)$ *existen* $\psi \in B_0^+(X)$ *y* $M > 0$ *tales que*

$$\|f\|_{co(\varphi)} \leq M \|f\|_{\psi}$$

para todo $f \in C_b(X)$. ∎

Demostración. La familia de seminormas definidas por la fórmula (3.21) está saturada. ∎

Como ya lo habíamos anticipado el álgebra $C_b(\mathbb{R})$ del Ejemplo 3.2.10 (página 89) no es $m-$convexa. Ahora lo probaremos. Supongamos que si es $m-$convexa y sea $\{\|\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de seminormas $m-$convexas que generan la topología β.

Dado $\varphi \in C_0^+(\mathbb{R})$ existen $\alpha \in \Lambda$ y $\psi \in C_0^+(\mathbb{R})$ tales que

$$V_\psi \subset V_\alpha \subset V_\varphi \tag{3.22}$$

donde: $V_\varphi = \left\{f \in C_b(\mathbb{R}) : \|f\|_{_\psi} \leq 1\right\}, V_\alpha = \{f \in C_b(\mathbb{R}) : \|f\|_\alpha \leq 1\}$ y $V_\psi = \left\{f \in C_b(\mathbb{R}) : \|f\|_\psi \leq 1\right\}$.

Afirmamos que $\varphi(x) \leq \psi(x)$ para todo x. Si esto no es así, entonces existe un intervalo abierto (a,b) tal que $\varphi(x) > \psi(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$. Sea $[c,d] \subset (a,b)$ y definamos la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi(x)} & \text{si } x \in [c,d] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \diagdown (a,b) \\ \text{lineal} & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Entonces, $h \in V_\psi$ y $h \notin V_\varphi$ lo que contradice una de las contenciones en (3.22).

Sea $0 < r < \min(1, \|\psi\|_\infty)$, donde $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \psi(x)$. Por la continuidad de ψ, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(x_0) = r$. Entonces $r \geq \varphi(x_0)$ y para n suficientemente grande se tiene que $r^n < \varphi(x_0)$.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-x_0+1}{\psi(x_0)} & \text{si } x \in [x_0-1, x_0] \\ \frac{-x+x_0+1}{\psi(x_0)} & \text{si } x \in (x_0, x_0+1] \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

es continua y acotada. Además, satisface $\|f\|_{\psi} = 1$, por ser $x - x_0 + 1$ creciente en el primer intervalo y $-x + x_0 + 1$ decreciente en el segundo. Entonces, $\|f^n\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha^n \leq 1$ y así, $f^n \in V_\alpha$; en tanto que como $\|f^n\|_\varphi \geq f^n(x_0)\varphi(x_0) = \frac{1}{r^n}\varphi(x_0) > 1$ tenemos que $f^n \notin V_\varphi$, lo que nuevamente contradice una de las contenciones en (3.22). Por consiguiente, $C_b(\mathbb{R})$ no es $m-$ convexa.

Otra manera de ver que $C_b(\mathbb{R})$ no es $m-$ convexa es mediante un resultado de S.S. Khurana quien en [9] prueba lo siguiente:

Teorema 3.4.20 *El álgebra $(C_b(X), \beta)$, con X completamente regular, es $m-$convexa si y sólo si X es aparentemente compacto. (sham compact).*

Se dice que X es aparentemente compacto si toda sucesión en X está contenida en un compacto de X. Si X es un espacio métrico, entonces X es aparentemente compacto equivale a X es compacto. Así, $\mathbb{R}$ con la topología usual no es aparentemente compacto y por tanto, $C_b(\mathbb{R})$ no es $m-$convexo.

En [1] se da otra condición necesaria y suficiente para que $(C_b(X), \beta)$ sea $m-$convexa. La condición dada en el Corolario 3.4.19 es una nueva en tal sentido.

El álgebra $C(\mathbb{R})$ con las seminormas $\|f\|_i = \int_{-i}^{i} |f(x)|\, dx$.

Sea $\left(C(\mathbb{R}), \{\|\cdot\|\}_{i=1}^{\infty}\right)$ el álgebra unitaria y conmutativa de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales y la topología τ dada por las seminormas

$$\|f\|_i = \int_{-i}^{i} |f(x)|\, dx$$

Cada una de estas seminormas es $\mathcal{A}-$convexa ya que si $f, g \in C(\mathbb{R})$, entonces

$$\|fg\|_i \leq \|f\|_{[-i,i]} \|fg\|_i$$

donde $\|f\|_{[-i,i]} = \sup\limits_{x \in [-i,i]} |f(x)|$.

Al tomar $g(x) = 1$ en $\mathbb{R}$, obtenemos que

$$\|f\|_i \leq (2i) \|f\|_{[-i,i]}$$

para todo $f \in C(\mathbb{R})$.

Afirmamos que la topología de Oudadess $m(\tau)$ es la topología $op(\tau)$ y para cada $i \geq 1$ se cumple $\|\cdot\|_i^{op} = \|\cdot\|_{[-i,i]}$. Para probar la primera parte, es suficiente mostrar, de acuerdo con el Teorema 3.4.14, que

$$\|f\|_i^{op} \leq \overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}}$$

para $i \geq 1$ y $f \in C(\mathbb{R})$, y esto es consecuencia de las siguientes dos proposiciones, pues a partir de ellas obtenemos

$$\|f\|_i^{op} = \overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} = \|f\|_{[-i,i]}$$

Proposición 3.4.21 *Para $i \geq 1$ y $f \in C(\mathbb{R})$ se satisfacen las siguientes igualdades*

$$\overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} = \|f\|_{[-i,i]}.$$

Demostración. Basta analizar el caso en que $\|f\|_{[-i,i]} \neq 0$. Para $n \geq 1$ se cumple

$$\|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} \leq \|f^n\|_{[-i,i]}^{\frac{1}{n}} (2i)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_{[-i,i]} (2i)^{\frac{1}{n}}.$$

De donde,

$$\overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} \leq \|f\|_{[-i,i]}.$$

Inversamente, sean $0 < r < s < \|f\|_{[-i,i]}$. Existe $x_1 \in [-i,i]$ tal que $|f(x_1)| > s$ y por consiguiente hay un intervalo $[a,b] \subset [-i,i]$ de longitud positiva tal que $x_1 \in [a,b]$ y $|f(x)| > s$ si $x \in [a,b]$. Así,

$$\left(\int_{-i}^{i} |f^n(x)|\, dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_{a}^{b} |f^n(x)|\, dx\right)^{\frac{1}{n}} \geq s(b-a)^{\frac{1}{n}} \geq s\frac{r}{s} = r$$

si n es suficientemente grande. Por tanto,

$$\underline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} \geq \|f\|_{[-i,i]}.$$

Entonces, $\lim_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} = \|f\|_{[-i,i]}$. ∎

Proposición 3.4.22 *Para $i \geq 1$ se cumple que $\|\cdot\|_i^{op} = \|\cdot\|_{[-i,i]}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.4.12 tenemos que

$$\|f\|_i^{op} \geq \overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} = \|f\|_{[-i,i]}$$

si $i \geq 1$ y $f \in C(\mathbb{R})$.

Inversamente, sea $g \in C(\mathbb{R})$ tal que $\|g\|_i \leq 1$,entonces

$$\|fg\|_i = \int_{-i}^{i} |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \|f\|_{[-i,i]} \int_{-i}^{i} |g(x)|\, dx \leq \|f\|_{[-i,i]}$$

Así, $\|f\|_i^{op} \leq \|f\|_{[-i,i]}$. ∎

Corolario 3.4.23 *El álgebra conmutativa, unitaria $(C(\mathbb{R}), \{\|\cdot\|\}_{i=1}^{\infty})$ es localmente $\mathcal{A}-$convexa, pero no m-convexa.*

Demostración. Ya vimos que $\left(C(\mathbb{R}), \{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^{\infty}\right)$ es un álgebra localmente $\mathcal{A}-$convexa. Si suponemos que es $m-$convexa, entonces su topología τ dada por las seminormas $\|\cdot\|_i$ debe coincidir con su topología de Oudadess, y ya que esta última está dada por la familia saturada de seminormas $\left(\|f\|_{[-i,i]}\right)_{i=1}^{\infty}$, deben existir $M > 0$ e $i \geq 1$ tales que

$$\|f\|_{[-1,1]} \leq M \int_{-i}^{i} |f(x)|\, dx \tag{3.23}$$

para todo $f \in C(\mathbb{R})$, pero esto no es posible ya que para cada $n \geq 1$ tenemos que la función

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x = 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \diagdown \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ \text{lineal} & \text{en el resto} \end{cases}$$

pertenece a $C(\mathbb{R})$ y se tiene que $\int_{-i}^{i} |f(x)|\, dx = 1$ y $\|f_n\|_{[-1,1]} = n$ por lo que no se puede satisfacer 3.23. ∎

El álgebra $C([0,1])$ con las seminormas $\|f\|_i = \left(\int_0^1 |f(x)|^i\, dx\right)^{\frac{1}{i}}$

El álgebra $(C[0,1], \{\|\cdot\|\}_{i=1}^{\infty})$ de las funciones continuas en $[0,1]$ con las operaciones usuales y la topología τ definida por las seminormas

$$\|f\|_i = \left(\int_0^1 |f(x)|^i\, dx\right)^{\frac{1}{i}}.$$

es unitaria, conmutativa y uniformemente $\mathcal{A}-$convexa, ya que para cualquier $i \in I$ se tiene

$$\|fg\|_i \leq \|f\|_\infty \|g\|_i \tag{3.24}$$

para todo $f, g \in C([0,1])$, donde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Por lo anterior, se cumple que

$$\|f\|_i \leq \|f\|_\infty$$

para todo $f \in C([0,1])$; por tanto, la topología τ_∞ inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$ es más fuerte que la topología τ.

Se probará que

$$\|f^n\|_i^{op} \leq \|f\|_\infty \leq \overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}}$$

para todo $i \geq 1$ y $f \in C([0,1])$. De acuerdo con los Teoremas 3.4.13 y 3.4.14 esto implica que existe la topología de Oudadess $m(\tau)$ y $m(\tau) = op(\tau) = \tau_\infty$.

Proposición 3.4.24 *Para $i \geq 1$ y $f \in C([0,1])$ se satisface la desigualdad*

$$\|f\|_\infty \leq \overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}}$$

Demostración. Sean $0 < r < s < \|f\|_\infty$. Existe $x_1 \in [0,1]$ tal que $|f(x_1)| > s$ y por consiguiente, hay un intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ de longitud positiva tal que $x_1 \in [a,b]$ y $|f(x)| > s$ si $x \in [a,b]$. Así,

$$\left(\int_0^1 |f^n(x)|^i \, dx\right)^{\frac{1}{ni}} \geq \left(\int_a^b |f^n(x)|^i \, dx\right)^{\frac{1}{ni}} \geq s(b-a)^{\frac{1}{ni}} \geq s\frac{r}{s} = r$$

si n es suficientemente grande. Por tanto,

$$\overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} \geq \underline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}} \geq \|f\|_\infty .$$

■

Proposición 3.4.25 *Para $i \geq 1$ se cumple que $\|\cdot\|_i^{op} = \|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. De la desigualdad 3.24 se sigue que $\|f\|_i^{op} \leq \|f\|_\infty$ para $i \geq 1$ y $f \in C(\mathbb{R})$. Inversamente, sabemos que $\|f\|_i^{op} \geq \overline{\lim}_n \|f^n\|_i^{\frac{1}{n}}$ para todo $f \in C(\mathbb{R})$. De esto y la proposición anterior obtenemos $\|f\|_i^{op} \geq \|f\|_\infty$ para todo $f \in C(\mathbb{R})$. ■.

3.5 Preguntas

Terminamos este trabajo con las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es una condición necesaria para que exista la topología de Oudadess?

2. ¿Si (A, τ) es un álgebra localmente $\mathcal{A}-$ convexa que no es $m-$ convexa y existe la topología de Oudadess $m(\tau)$, entonces $m(\tau) = M(\tau)$? o de forma más general: Si (A, τ) es un álgebra localmente $\mathcal{A}-$ convexa que no es $m-$ convexa y existe la topología de Oudadess $m(\tau)$, entonces ¿Existe un sistema fundamental de vecindades del origen $\mathcal{U}$ de discos $\mathcal{A}-$ convexos tal que se cumple $M_{\mathcal{U}}(\tau) = m(\tau)$?

3. ¿Si (A, τ) es un álgebra localmente $\mathcal{A}-$ convexa, entonces $M(\tau) = M(M(\tau))$?

4. ¿Si (A, σ) es un álgebra localmente $m-$ convexa, entonces existe una topología τ localmente $\mathcal{A}-$ convexa en A que cumple que $M(\tau) = \sigma$?

   Más en general que en 3.

5. ¿Si (A, σ) es un álgebra localmente $m-$ convexa, entonces existe en A una topología τ con un sistema fundamental de vecindades del origen $\mathcal{U}$ de discos $\mathcal{A}-$ convexos tal que se cumple $M_{\mathcal{U}}(\tau) = \sigma$?

Bibliografía

[1] H. Arizmendi-Peimbert and A. Carrillo-Hoyo, *On the $m-$convexity of* $C_b(X)$, Publ. Math. Debrecen **63**, 3, (2003), 379-388.

[2] H. Arizmendi Peimbert, R.M. Pérez Tiscareño and J. Roa Fajardo, *On the spectral radii in* $(C_b(X), \beta)$ and the $m(\beta)$ topology.

[3] H. Arizmendi Peimbert, A. Carrillo Hoyo, A. García Martínez y P. Tejada Bassols, *Sobre la existencia de la topología de Oudadess,* Manuscrito.

[4] V.K. Balachandran, *Topological algebras*, Elsevier, 2000.

[5] O. H. Cheikh, *Sur la topologie $m-$convex d'une algèbre localment $A-$convexe*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, **XLIX** (2000), 307-312.

[6] A. C. Cochran, R. Keown and C. R. Williams, *On a class of topological algebras*, Pacific Journal of Mathematics 34, 1 (1970). 17-25.

[7] W. Govaerts, *Homomorphisms of weighted algebras of continuous functions*, Ann. Mat. Pura Appl., 116 (4), (1978), 151-158.

[8] J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions Volume I,* Adisson Weasly Publishing Company, 1966.

[9] S.S. Khurana, *Strict topologies as topological algebras, Czech. Math. J.* **51** (2001), 433-437.

[10] A. Kokk y W. Żelazko, *On vector spaces and algebras with maximal locally pseudoconvex topologies*, Studia Math. **112,** 2, (1995),195-201.

[11] V. Müller, *On topologizable algebras*, Studia Math. **99** (1991), 149-153.

[12] L. Oubbi, *The weakest M-convex topology stronger than an A-convex topology need not exist*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, **LIV** (2005), 451-462.

[13] ——*Topologies m-convexes dans les algebres A-convexes*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, **XLI** (1992), 397-406

[14] M. Oudadess, *Unité et semi-normes dans les algèbres localment convexes*, Rev. Colombiana Mat. XVI (1982) 141-150.

[15] S. Rolewicz, *On a certain class of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. 5 (1957), 471-473.

[16] ——, *Metric linear spaces*, D. Reidel Publishing Company, 1985.

[17] M. de la Rosa Penilla, Tesis de Licenciatura: *Topologías estrictas*, 2004.

[18] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw Hill Book Company, 1991.

[19] W. Żelazko, *On topologization of countably generated algebras*, Studia Math. **112** (1994), 83-88.