



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HACES FIBRADOS Y ESPACIOS DE
CONFIGURACIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
BERNARDO VILLARREAL HERRERA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARCELO ALBERTO AGUILAR GONZÁLEZ DE LA VEGA



2011



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Villarreal

Herrera

Bernardo

55 94 90 84

Universidad Nacional Autónoma de
México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

303502533

2. Datos del tutor

Dr.

Marcelo Alberto

Aguilar

González de la Vega

3. Datos del sinodal 1

Dra.

Laura

Ortiz

Bobadilla

4. Datos del sinodal 2

Dr.

Carlos

Prieto

de Castro

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Gabriel

Ruiz

Hernández

6. Datos del sinodal 4

Dr.

Pablo

Suárez

Serrato

7. Datos del trabajo escrito

Haces Fibrados y Espacios de Configuración

73 p

2011

Haces Fibrados y Espacios de Configuración

Bernardo Villarreal Herrera

Índice General

| | |
|--|------------|
| Introducción | III |
| 1 Haces Fibrados | 1 |
| 1.1 El Pullback de Haces Fibrados | 1 |
| 1.2 Mapeos de Haces | 8 |
| 2 Espacios de Configuración | 19 |
| 2.1 Grupos de Homotopía | 19 |
| 2.2 El Espacio de Subconjuntos de Cardinalidad n | 33 |
| 2.3 Clasificación de Cubrientes de n -hojas | 41 |
| 3 Aplicaciones Cubrientes | 53 |
| 3.1 Acciones y Homomorfismos | 53 |
| 3.2 La Clasificación Usual | 66 |
| Bibliografía | 73 |

Introducción

Un concepto muy importante en la topología algebraica es el de *haz fibrado*, que esencialmente es una función continua y suprayectiva $p: E \rightarrow X$ que localmente se ve como una proyección $U \times F \rightarrow U$, donde F es un espacio fijo que es homeomorfo a la fibra sobre cualquier punto x en X . Hay dos ejemplos especiales de haces fibrados que incluso son utilizados en otras áreas de las matemáticas como es la Geometría Diferencial. Uno de estos es el *haz vectorial*, que como su nombre indica, son los haces cuya fibra es un espacio vectorial de dimensión finita. Un resultado muy utilizado en topología es la clasificación de haces vectoriales reales de dimensión n sobre un espacio paracompacto, por ejemplo, una *variedad diferenciable* o un *complejo CW* arbitrario. Esta clasificación está dada en términos de las clases de homotopía de funciones continuas $f: X \rightarrow BO_n$, donde BO_n es el *espacio clasificante* de haces vectoriales reales de dimensión n . El modelo estándar de BO_n es $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ que es el espacio de subespacios de dimensión n de \mathbb{R}^∞ .

El otro ejemplo de haz fibrado es una *aplicación cubriente*. En este caso, la fibra F es un espacio con la topología discreta. En [1] se da una clasificación de aplicaciones cubrientes de n -hojas (fibra $F = \{1, 2, \dots, n\}$) sobre espacios paracompactos haciendo una analogía con la clasificación de haces vectoriales. Esta clasificación es el objetivo central de este trabajo. Para esto, presentaremos primero algunos resultados básicos de haces fibrados que utilizaremos más adelante. De manera análoga a la clasificación de haces vectoriales, tenemos el espacio clasificante de aplicaciones cubrientes de n -hojas, que en este caso, es *el espacio de subconjuntos de cardinalidad n de \mathbb{R}^∞* que denotaremos como $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$. Para darle una topología a este espacio, necesitaremos a los *espacios de configuración*. También mostraremos que con esta topología, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ es un espacio *Eilenberg Mac Lane* de tipo $(\Sigma_n, 1)$, donde Σ_n es el grupo de permutaciones de n elementos. El espacio $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ resulta ser un espacio clasificante del grupo Σ_n los cuales se denotan $B\Sigma_n$, y son únicos salvo homotopía.

En el último capítulo del trabajo, daremos otra clasificación de aplicaciones cubrientes de n -hojas sobre un espacio X con ciertas propiedades. Para esto, utilizamos la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en la fibra sobre un punto x_0 . Así, obtendremos una biyección entre clases de isomorfismo de aplicaciones cubrientes de n -hojas y clases de conjugación de *homomorfismos* $f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$. Con estas dos clasificaciones, podemos probar que hay una biyección entre las clases de homotopía $[X, B\Sigma_n]$ y las clases de conjugación $Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)$ sin usar *teoría de obstrucciones*.

Finalmente, como corolario del teorema de clasificación, obtendremos la clasificación usual de aplicaciones cubrientes con espacio total conexo por trayectorias, que está dada en términos de los subgrupos del grupo $\pi_1(X, x_0)$.

Capítulo 1

Haces Fibrados

En este capítulo definimos los haces fibrados y daremos algunas de sus propiedades. Como algunas propiedades de las aplicaciones cubrientes las satisfacen los haces fibrados, preferimos probarlas en el caso general.

1.1 El Pullback de Haces Fibrados

Definición 1.1.1. Sea $p: E \rightarrow B$ una función continua. Decimos que p es un haz fibrado con fibra F si para cada b en B existe U vecindad abierta de b y un homeomorfismo $\varphi_U: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi_U} & p^{-1}(U) \\ \pi \searrow & & \swarrow p|_{p^{-1}(U)} \\ & U & \end{array}$$

donde $\pi: U \times F \rightarrow U$ es la proyección en la primera coordenada. A la familia de abiertos $\{U\}$ la llamaremos cubierta trivializadora del haz y a los homeomorfismos φ_U mapeos trivializadores.

Tomemos b en B y su correspondiente vecindad U . Ahora $\pi^{-1}(b) = \{b\} \times F$ y de la definición se sigue que $\varphi_U|_{\pi^{-1}(b)}: \{b\} \times F \rightarrow p^{-1}(b)$ es un homeomorfismo y obtenemos que $p^{-1}(b) \cong F$. Por esto decimos que el haz tiene fibra F .

Ejemplo 1.1.2. Si B y F son espacios, la proyección $p: B \times F \rightarrow B$ es un haz fibrado, llamado el haz producto sobre B .

Ejemplo 1.1.3. Si $p: E \rightarrow B$ es un haz fibrado donde su fibra F es un espacio discreto, entonces p es una aplicación cubriente.

Ejemplo 1.1.4. (Haz Tangente) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y x en M . Consideremos el espacio vectorial real

$$T_x M = \{v: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es lineal, } v(fg) = v(f)g(x) + v(g)f(x)\}$$

Para ver que es de dimensión n , consideremos una carta (U_α, ξ_α) tal que x está en U_α . Definimos

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)$$

como $(\partial/\partial x_i)(x) = (\partial(f \circ \xi_\alpha^{-1})/\partial x_i)\xi(x)$. Se puede probar que este conjunto es una base de $T_x M$ (véase [7]). Sea $p: TM = \bigsqcup_x T_x M \rightarrow M$ dada por $p(v) = x$ si v está en $T_x M$. Definimos $\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ como $\varphi_\alpha(v) = (p(v), \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ donde

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p(v)).$$

φ_α es una biyección ya que $\varphi_\alpha|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo lineal para cada x en U . Ahora, denotemos por ψ_α a la composición

$$p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\xi_\alpha \times Id} \xi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

Tomando un atlas maximal de M se tiene que el conjunto $\{\psi_\alpha^{-1}(A) \mid A \subset \mathbb{R}^{2n} \text{ es abierto, } \alpha \in \Lambda\}$ es una base de una topología para TM . En particular, φ_α se vuelve homeomorfismo, y como el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi & \\ & & U_\alpha \end{array}$$

se sigue que $p: TM \rightarrow M$ es un haz fibrado con fibra \mathbb{R}^n . En este caso decimos que p es un haz vectorial real de dimensión n .

Definición 1.1.5. Sean $p: E \rightarrow B$ y $q: E' \rightarrow B$ haces fibrados con fibra F y $\varphi: E' \rightarrow E$ una función continua. Decimos que φ es un morfismo de haces fibrados si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\varphi} & E \\ & \searrow q \quad \swarrow p & \\ & & B \end{array}$$

Además, si existe una función continua $\psi: E \rightarrow E'$ tal que $\varphi \circ \psi = Id_E$ y $\psi \circ \varphi = Id_{E'}$ decimos que φ es un isomorfismo de haces fibrados.

Ejemplo 1.1.6. 1) Consideremos el haz producto $\text{proy}_{S^1}: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$. Parametrizando a S^1 de manera que si x está en S^1 , x es de la forma $x = (\cos\theta, \text{sen}\theta)$, tenemos que $T_x S^1$ está generado por $\{(-\text{sen}\theta, \cos\theta)\}$ como subespacio de \mathbb{R}^2 . Se puede probar que proy_{S^1} es isomorfo al haz tangente $p: TS^1 \rightarrow S^1$, donde el isomorfismo φ restringido a las fibras $\varphi_x: \{x\} \times \mathbb{R} \rightarrow T_x S^1$ está dado por $\varphi_x(x, \lambda) = \lambda(-\text{sen}\theta, \cos\theta)$.

2) Consideremos la banda de Moebius M definida como el espacio que resulta de identificar en $I \times I$ un punto de la forma $(0, t)$ con el punto $(1, 1 - t)$. Consideremos S^1 como el espacio que resulta de identificar en I al punto 0 con el punto 1. Definamos $p: M \rightarrow S^1$ como $p[(x, y)] = [x]$. Así, p es un haz fibrado sobre S^1 con fibra I , el cual no es isomorfo al haz producto $S^1 \times I \rightarrow S^1$, ya que $\partial(S^1 \times I) = S^1 \times \{0, 1\}$ que no es conexo y por otro lado $\partial M \cong S^1$ que es conexo, lo que implica que $S^1 \times I \not\cong M$.

Nota 1.1.7. Si $p: E \rightarrow B$ es un haz fibrado entonces Id_E es un isomorfismo de haces fibrados.

A continuación daremos una herramienta muy utilizada en el estudio de haces, pues nos permite obtener nuevos *haces fibrados* a partir de uno dado.

Definición 1.1.8. Un cuadrado conmutativo de espacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g} & E \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

es llamado *pullback* si dados W un espacio topológico, $g': W \rightarrow E$ y $q': W \rightarrow B'$ funciones continuas tales que $p \circ g' = f \circ q'$ entonces existe una única función continua $\psi: W \rightarrow E'$ tal que $g \circ \psi = g'$ y $q \circ \psi = q'$.

Nota 1.1.9. De la conmutatividad del diagrama obtenemos que g manda fibras en fibras es decir dado b' en B' , $g|_{q^{-1}(b')}: q^{-1}(b') \rightarrow p^{-1}(f(b'))$.

Proposición 1.1.10. Sean E, B, B' espacios y $p: E \rightarrow B, f: B' \rightarrow B$ fun-

ciones continuas. Consideremos el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde $f^*E = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = p(e)\}$ tiene la topología producto inducida por $B' \times E$, $\bar{p}(b', e) = b'$ y $\bar{f}(b', e) = e$. Entonces el cuadrado es un pullback.

Demostración. Las funciones \bar{p} y \bar{f} son continuas pues son restricciones de proyecciones. Sea (b', e) en f^*E , entonces $f(\bar{p}(b', e)) = f(b') = p(e) = p(\bar{f}(b', e))$ y por lo tanto el cuadrado conmuta. Sea W un espacio topológico y supongamos que existen $g: W \rightarrow E$ y $q: W \rightarrow B'$ funciones continuas tales que $p \circ g = f \circ q$. De esto se sigue que $(g(w), q(w))$ está en f^*E para cada w en W . Definimos $\psi: W \rightarrow f^*E$ como $\psi(w) = (q(w), g(w))$. Entonces

$$(\bar{f} \circ \psi)(w) = \bar{f}(q(w), g(w)) = g(w) \quad \text{y} \quad (\bar{p} \circ \psi)(w) = \bar{p}(q(w), g(w)) = q(w)$$

lo cual nos da la primera condición para que sea un pullback. Para ver la unicidad supongamos que existe $\psi': W \rightarrow f^*E$ tal que $\bar{f} \circ \psi' = g$ y $\bar{p} \circ \psi' = q$. Ahora, tomemos w en W y supongamos que $\psi'(w) = (b', e)$ con (b', e) en f^*E . Entonces

$$g(w) = (\bar{f} \circ \psi')(w) = \bar{f}(b', e) = e \quad \text{y} \quad q(w) = (\bar{p} \circ \psi')(w) = \bar{p}(b', e) = b'.$$

Por lo tanto $\psi'(w) = (q(w), g(w)) = \psi(w)$ para cada $w \in W$.

□

Definición 1.1.11. A la construcción de la Proposición 1.1.10 la llamaremos el pullback de p inducido por f y diremos que $\bar{p}: f^*E \rightarrow B'$ y $\bar{f}: f^*E \rightarrow E'$ son las funciones inducidas por p y f respectivamente.

Proposición 1.1.12. Sean $p: E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra F y $f: B' \rightarrow B$ una función continua. Entonces la función $\bar{p}: f^*E \rightarrow B'$ inducida por p es un haz fibrado con fibra F .

Demostración. Fijemos b' en B' . Consideremos un abierto U en la cubierta trivializadora de p correspondiente a $f(b')$ y su mapeo trivializador φ_U que

hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\varphi_U} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \pi & \swarrow p|_{p^{-1}(U)} \\ & & U \end{array}$$

Tomemos $U' = f^{-1}(U)$ que es una vecindad abierta de b' . Ahora, definamos la función $\varphi_{U'}: U' \times F \rightarrow (\bar{p})^{-1}(U')$ como $\varphi_{U'}(x', y) = (x', \varphi_U(f(x'), y))$ con (x', y) en $U' \times F$. Como φ_U es un mapeo trivializador, $p(\varphi_U(f(x'), y)) = f(x')$ y tenemos que $(x', \varphi_U(f(x'), y))$ está en f^*E . Por lo tanto $\varphi_{U'}$ está bien definida. Además, es continua porque es composición de las funciones $(Id_{U'}, \varphi_U) \circ (\pi, (f|_{U'} \times Id_F))$ las cuales son continuas. Así, obtenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U' \times F & \xrightarrow{\varphi_{U'}} & (\bar{p})^{-1}(U') \\ & \searrow \pi & \swarrow \bar{p}|_{(\bar{p})^{-1}(U')} \\ & & U' \end{array}$$

conmuta. Para probar que $\varphi_{U'}$ es homeomorfismo veremos que tiene inversa continua. Definimos $\psi: (\bar{p})^{-1}(U') \rightarrow U' \times F$ como

$$\psi(x', e) = (x', \text{proy}_F(\varphi_U^{-1}(e)))$$

con (x', e) en $(\bar{p})^{-1}(U')$, que es composición de funciones continuas. Tomemos e en $p^{-1}(U)$ y supongamos que $\varphi_U^{-1}(e) = (x, y)$ para algún (x, y) en $U \times F$. Esto nos dice que $p(e) = x$ y obtenemos $e = (p(e), \text{proy}_F(\varphi_U^{-1}(e)))$. Sea (x', e) en $(\bar{p})^{-1}(U')$, entonces $f(x') = p(e)$ y así, $\varphi_{U'}(\psi(x', e)) =$

$$\varphi_{U'}(x', \text{proy}_F(\varphi_U^{-1}(e))) = (x', \varphi_U(f(x'), \text{proy}_F(\varphi_U^{-1}(e))) = (x', e).$$

Por lo tanto $\varphi_{U'} \circ \psi = Id_{(\bar{p})^{-1}(U')}$. Ahora, sea (x', y) en $U' \times F$ entonces

$$\psi(\varphi_{U'}(x', y)) = \psi(x', \varphi_U(f(x'), y)) = (x', \text{proy}_F(\varphi_U^{-1}(\varphi_U(f(x'), y)))) = (x', y)$$

Por lo tanto $\psi \circ \varphi_U = Id_{U \times F}$. Claramente $(\bar{p})^{-1}(b') \cong F$.

□

Definición 1.1.13. Denotamos por $\mathcal{Bun}_F(B)$ a la categoría de haces fibrados con fibra F y espacio base B .

Definición 1.1.14. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua . Definimos

$$P: \mathcal{Bun}_F(Y) \rightarrow \mathcal{Bun}_F(X)$$

de la siguiente manera: si $p: E \rightarrow Y$ es un haz fibrado con fibra F , entonces $P(p) := \bar{p}: f^*E \rightarrow X$ es la función inducida por p .

Proposición 1.1.15. Sea $f: B' \rightarrow B$ una función continua. Consideremos $q: E' \rightarrow B$ y $p: E \rightarrow B$ haces fibrados con fibra F y $\varphi: E' \rightarrow E$ un morfismo de haces. Entonces existe un morfismo de haces entre $\bar{q}: f^*E' \rightarrow B$ y $\bar{p}: f^*E \rightarrow B$.

Demostración. Consideremos los pullbacks de p con respecto a f , de q con respecto a f y el morfismo φ tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\bar{f}_1} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f^*E' & \xrightarrow{\bar{f}_2} & E' \xrightarrow{\varphi} E \\ \bar{q} \downarrow & & \downarrow q \swarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmutan. Por el segundo diagrama tenemos que $f \circ \bar{q} = p \circ (\varphi \circ \bar{f}_2)$ y usando que el primer diagrama es un pullback obtenemos que existe $\Phi: f^*E' \rightarrow f^*E$ función continua tal que $\bar{p} \circ \Phi = \bar{q}$ y $\bar{f}_1 \circ \Phi = \varphi \circ \bar{f}_2$, donde la primera igualdad nos da el resultado. □

Definición 1.1.16. Por la demostración en la Proposición 1.1.10 sabemos que la función $\Phi: f^*E' \rightarrow f^*E$ es de la forma

$$\Phi(b', e') = (\bar{q}(b', e'), (\varphi \circ \bar{f}_2)(b', e')) = (b', \varphi(e')).$$

Con esto definimos $P(\varphi): f^*E' \rightarrow f^*E$ como $P(\varphi)(b', e') = (b', \varphi(e'))$ para cada (b', e') en f^*E' .

Proposición 1.1.17. Sea $f: B' \rightarrow B$ una función continua. Consideremos $r: E'' \rightarrow B$, $q: E' \rightarrow B$ y $p: E \rightarrow B$ haces fibrados con fibra F y los morfismos de haces $\psi: E'' \rightarrow E'$ entre r y q y $\varphi: E' \rightarrow E$ entre q y p . Entonces

i) $P(\text{Id}_E) = \text{Id}_{f^*E}$

ii) $P(\varphi \circ \psi) = P(\varphi) \circ P(\psi)$ y por lo tanto P es un funtor covariante.

Demostración. i) Sea (b', e) en f^*E entonces

$$P(\text{Id}_E)(b', e) = (b', e) = \text{Id}_{f^*E}(b', e).$$

ii) Sea (b', e'') en f^*E'' entonces

$$P(\varphi) \circ P(\psi)(b', e'') = P(\varphi)(b', \psi(e'')) = (b', (\varphi \circ \psi)(e'')) = P(\varphi \circ \psi)(b', e'').$$

□

Proposición 1.1.18. Sean $p: E \rightarrow B$, $f: B' \rightarrow B$ y $g: B'' \rightarrow B'$ funciones continuas. Entonces

i) Si $f = \text{Id}_B$, $\text{Id}_B^*E \cong E$

ii) $g^*f^*E \cong (f \circ g)^*E$

Demostración. i) Consideremos el pullback de p inducido por Id_B

$$\begin{array}{ccc} \text{Id}_B^*E & \xrightarrow{\text{Id}_B} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{\text{Id}_B} & B \end{array}$$

Como $\text{Id}_B \circ p = p \circ \text{Id}_E$ entonces existe $\psi: E \rightarrow \text{Id}_B^*E$ función continua tal que $\text{Id}_B \circ \psi = \text{Id}_E$ y $\psi(e) = (p(e), e)$. Basta ver que $\psi \circ \text{Id}_B = \text{Id}_{\text{Id}_B^*E}$. Sea (b, e) en Id_B^*E entonces $p(e) = b$. Así tenemos que $\psi(\text{Id}_B(b, e)) = \psi(\text{Id}_B(p(e), e)) = \psi(e) = (p(e), e) = (b, e)$ para cada e en E . Por lo tanto Id_B es homeomorfismo y $\text{Id}_B^*E \cong E$.

ii) Sea $\bar{p}: f^*E \rightarrow B'$ la función inducida por p y f . Consideremos los pullbacks de \bar{p} inducido por g y de p inducido por $f \circ g$

$$\begin{array}{ccc} g^*f^*E & \xrightarrow{\bar{g}} & f^*E & & (f \circ g)^*E & \xrightarrow{f \circ g} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow \bar{p} & & q \downarrow & & \downarrow p \\ B'' & \xrightarrow{g} & B' & & B'' & \xrightarrow{f \circ g} & B \end{array}$$

Definimos $h: (f \circ g)^*E \rightarrow f^*E$ tal que $h(b'', e) = (g(b''), e)$ la cual está bien definida pues si (b'', e) está en $(f \circ g)^*E$ tenemos que $f(g(b'')) = p(e)$ entonces $(g(b''), e)$ está en f^*E y además es continua porque g es continua. Sea (b'', e) en $(f \circ g)^*E$. Entonces

$$\bar{p}(h(b'', e)) = \bar{p}(g(b''), e) = g(b'') = g(q(b''))$$

Por lo tanto $\bar{p} \circ h = g \circ q$ y existe $\psi: (f \circ g)^*E \rightarrow g^*f^*E$ función continua tal que

$$\psi(b'', e) = (q(b'', e), h(b'', e)) = (b'', (g(b''), e))$$

para cada (b'', e) en $(f \circ g)^*E$. Ahora, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} g^*f^*E & \xrightarrow{\bar{g}} & f^*E & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ B'' & \xrightarrow{g} & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Como los dos cuadrados son conmutativos, el cuadrado de afuera lo es, de aquí obtenemos que $p \circ (\bar{f} \circ \bar{g}) = (f \circ g) \circ \bar{p}$. Entonces existe $\psi': g^*f^*E \rightarrow (f \circ g)^*E$ función continua tal que

$$\psi'(b'', (b', e)) = (\bar{p}(b'', (b', e)), \bar{f}(\bar{g}(b'', (b', e)))) = (b'', \bar{f}(b', e)) = (b'', e)$$

para cada $(b'', (b', e))$ en g^*f^*E . Entonces

$$\psi'(\psi(b'', e)) = \psi'(b'', (g(b''), e)) = (b'', e) \text{ para cada } (b'', e) \text{ en } (f \circ g)^*E.$$

Por lo tanto $\psi' \circ \psi = Id_{(f \circ g)^*E}$. También

$$\psi(\psi'(b'', (b', e))) = \psi(b'', e) = (b'', (g(b''), e)) \text{ para cada } (b'', (b', e)) \text{ en } g^*f^*E.$$

Pero si $(b'', (b', e))$ está en g^*f^*E , esto dice que $g(b'') = \bar{p}(b', e) = b'$. Por lo tanto $\psi \circ \psi' = Id_{g^*f^*E}$ y obtenemos $(f \circ g)^*E \cong g^*f^*E$.

□

1.2 Mapeos de Haces

Esta sección se centra en probar que si dos funciones continuas $f, g: X \rightarrow Y$ son homotópicas entonces sus pull-backs inducidos son isomorfos. Para esto necesitamos comparar haces fibrados isomorfos con el pull-back.

Denotaremos como $Map(X, Y)$ al espacio de las funciones continuas de X en Y . Una topología para este espacio es la *topología compacto-abierta* donde los subbásicos son de la forma $U^K = \{f \in Map(X, Y) | f(K) \subset U\}$ donde K es un compacto en X y U es un abierto en Y .

Recordemos que un grupo G es un grupo topológico si la operación en el grupo y la función que manda a cada g en G a su inverso son continuas.

Lema 1.2.1. *Sea $\text{Homeo}(X, X)$ el grupo de homeomorfismos de X en X con la topología compacto-abierta. Si X es un espacio regular y localmente compacto entonces $\Phi: \text{Homeo}(X, X) \times \text{Homeo}(X, X) \rightarrow \text{Homeo}(X, X)$ la función composición es continua.*

Demostración. Sean φ, ψ en $\text{Homeo}(X, X)$. Supongamos que $(\varphi \circ \psi)$ está en U^K con U abierto y K compacto. Entonces $(\varphi \circ \psi)(K) \subset U$ y de aquí que $\psi(K) \subset \varphi^{-1}(U)$. Ahora, como X es regular y localmente compacto, existe V abierto en X tal que $\psi(K) \subset V \subset \bar{V} \subset \varphi^{-1}(U)$ y \bar{V} es compacto.

Consideremos φ', ψ' en $\text{Homeo}(X, X)$ tales que φ' está en $U^{\bar{V}}$ y ψ' está en V^K . Entonces $\varphi'(\bar{V}) \subset U$ y $\psi'(K) \subset V$ de lo cual se sigue que $(\varphi' \circ \psi')(K) \subset U$ y por lo tanto $(\varphi' \circ \psi')$ está en U^K . Así, $U^{\bar{V}} \times V^K \subset \Phi^{-1}(U^K)$ lo cual nos dice que Φ es continua. □

Lema 1.2.2. *Sea X un espacio compacto y Hausdorff y $\text{Homeo}(X, X)$ con la topología compacto-abierta. Entonces $\Psi: \text{Homeo}(X, X) \rightarrow \text{Homeo}(X, X)$ que manda a cada φ en $\text{Homeo}(X, X)$ a su inverso φ^{-1} es continua.*

Demostración. Sea φ en $\text{Homeo}(X, X)$. Supongamos que φ^{-1} está en U^K con U abierto y K compacto. Entonces $K \subset \varphi(U)$ lo cual nos dice que $X - K \supset X - \varphi(U) = \varphi(X - U)$. Por hipótesis $X - U$ es compacto y $X - K$ es abierto, de aquí tenemos que φ está en $(X - K)^{(X - U)}$. Consideremos ψ en $(X - K)^{(X - U)}$. Entonces $\psi(X - U) \subset X - K$ de lo cual se sigue que $K \subset \psi(U)$ y por lo tanto ψ^{-1} está en U^K . Así, $(X - K)^{(X - U)} \subset \Psi^{-1}(U^K)$ y por lo tanto Ψ es continua. □

En particular un espacio compacto y Hausdorff es regular y localmente compacto entonces podemos concluir lo siguiente.

Proposición 1.2.3. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Entonces $\text{Homeo}(X, X)$ es un grupo topológico con la topología compacto abierta.* □

Esto será de gran uso, así que a lo largo de la sección asumiremos que los haces fibrados tienen fibra compacta y Hausdorff a menos que se especifique

lo contrario.

Proposición 1.2.4. Sean $p: E \rightarrow B$, $q: E' \rightarrow B$ haces fibrados con fibra F y $\varphi: E' \rightarrow E$ un morfismo de haces fibrados entre q y p . Entonces φ es un isomorfismo si y sólo si $\varphi|_{q^{-1}(b)}: q^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(b)$ es un homeomorfismo para cada b en B .

Demostración. Si φ es un isomorfismo, entonces es homeomorfismo y por lo tanto la restricción a las fibras también. Supongamos que $\varphi|_{p^{-1}(b)}$ es un homeomorfismo para cada b en B , y denotémoslo por φ_b . Primero veamos que φ es biyectiva. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\varphi} & E \\ & \searrow q & \swarrow p \\ & & B \end{array}$$

Sea e en E . Entonces existe b en B tal que e está en $p^{-1}(b)$ y como φ_b es suprayectiva, existe e' en E' tal que $e = \varphi_b(e') = \varphi(e')$. Ahora, sean e_1', e_2' en E' tal que $\varphi(e_1') = \varphi(e_2')$. Entonces $q(e_1') = q(e_2')$ y obtenemos que e_1', e_2' están en $q^{-1}(p(e))$. Así, $\varphi_{p(e)}(e_1') = \varphi_{p(e)}(e_2')$ y como $\varphi_{p(e)}$ es inyectiva, $e_1' = e_2'$, por lo tanto φ es biyectiva y existe $\varphi^{-1}: E \rightarrow E'$. Para ver que φ^{-1} es continua basta ver que su restricción a los abiertos de una cubierta abierta de E sea continua. Tomemos b en B . Entonces existen U, V abiertos en las cubiertas trivializadoras y φ_U, φ_V mapeos trivializadores de p y q respectivamente, tales que b está en $U \cap V$ y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} U \cap V \times F & \xrightarrow{\varphi_V|} & q^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi|} & p^{-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\varphi_U^{-1}|} & U \cap V \times F \\ & \searrow \pi & \searrow q| & & \swarrow p| & \swarrow \pi & \\ & & & & & & U \cap V \end{array}$$

Esto nos dice que si (x, y) está en $U \cap V \times F$ entonces $\varphi_U^{-1}| \circ \varphi| \circ \varphi_V|(x, y) = (x, \alpha(x, y))$, donde $\alpha: U \cap V \times F \rightarrow F$ es continua. Ahora, como F es compacto y Hausdorff podemos utilizar la biyección de la ley exponencial (véase [1]) y asociarle a α su función adjunta $\tilde{\alpha}: U \cap V \rightarrow \text{Map}(F, F)$, que está dada por $\tilde{\alpha}(x)(y) = \alpha(x, y)$ para cada (x, y) en $U \cap V \times F$, y es continua. Además,

$$(\varphi_U^{-1}|_{p^{-1}(x)}) \circ \varphi_x \circ (\varphi_V|_{q^{-1}(x)}): \{x\} \times F \rightarrow \{x\} \times F$$

es un homeomorfismo para cada x en $U \cap V$ y esto nos dice que $\tilde{\alpha}: U \cap V \rightarrow \text{Homeo}(F, F)$. Como F es compacto y Hausdorff, por la Proposición 1.2.3,

tenemos que el grupo $Homeo(F, F)$ es un grupo topológico con la topología compacto abierta. Entonces la función $\psi: Homeo(F, F) \rightarrow Homeo(F, F)$ que manda cada elemento a su inverso es continua. Así, la composición $\psi \circ \tilde{\alpha}: U \cap V \rightarrow Homeo(F, F)$ es continua y por lo tanto su función adjunta $\psi \circ \tilde{\alpha}: U \cap V \times F \rightarrow F$ es también continua. Tomando la composición

$$U \cap V \times F \xrightarrow{\varphi_U|} p^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi^{-1}|} q^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_V^{-1}|} U \cap V \times F$$

obtenemos que $\varphi_V^{-1}| \circ \varphi^{-1}| \circ \varphi_U| = (Id_{U \cap V}, \psi \circ \tilde{\alpha})$.

Así, $\varphi^{-1}| = \varphi_V| \circ (Id_{U \cap V}, \psi \circ \tilde{\alpha}) \circ \varphi_U^{-1}|$ y por lo tanto φ^{-1} es continua, de lo que se sigue $E' \cong E$.

□

Definición 1.2.5. Sean $p': E' \rightarrow B'$ y $p: E \rightarrow B$ haces fibrados con fibra F . Decimos que una pareja de funciones continuas (f, \tilde{f}) es un mapeo de haces si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

conmuta y $\tilde{f}|_{(p')^{-1}(b')}: (p')^{-1}(b') \rightarrow p^{-1}(f(b'))$ es un homeomorfismo para cada b' en B' . Diremos que (f, \tilde{f}) es un mapeo de haces entre p' y p y en algunos casos lo denotaremos por $(f, \tilde{f})_{p', p}$.

Ejemplo 1.2.6. Si consideramos el pullback de p inducido por f

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

entonces la pareja (f, \tilde{f}) es un mapeo de haces ya que si tomamos b' en B' y definimos la inclusión $i_{b'}: p^{-1}(f(b')) \rightarrow (\bar{p})^{-1}(b')$ como $i_{b'}(e) = (b', e)$ para cada e en $p^{-1}(f(b'))$. $i_{b'}$ resulta continua y claramente es la inversa de $\tilde{f}|_{(\bar{p})^{-1}(b')}: (\bar{p})^{-1}(b') \rightarrow p^{-1}(f(b'))$, pues es la proyección en la fibra.

Proposición 1.2.7. Sea (f, \tilde{f}) un mapeo de haces entre $p': E' \rightarrow B'$ y $p: E \rightarrow B$. Entonces $f^*E \cong E'$.

Demostración. Consideremos el pullback de p inducido por f y el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Como (f, \tilde{f}) es un mapeo de haces entonces $p' \circ f = \tilde{f} \circ p$ y por lo tanto existe $\psi: E' \rightarrow f^*E$ función continua tal que $\tilde{f} \circ \psi = \tilde{f}$ y $\bar{p} \circ \psi = p'$, en donde la segunda igualdad nos dice que ψ es un morfismo de haces fibrados entre p' y \bar{p} , entonces por la Proposición 1.2.4 basta ver que

$$\psi|_{(p')^{-1}(b')} : (p')^{-1}(b') \rightarrow (\bar{p})^{-1}(b')$$

es homeomorfismo para cada b' en B' . Ahora, como \tilde{f} y \bar{f} son homeomorfismo restringidos a las fibras, tenemos por la primera igualdad que

$$((\tilde{f})^{-1}|_{p^{-1}(f(b'))}) \circ (\bar{f}|_{(\bar{p})^{-1}(b')}) \circ (\psi|_{(p')^{-1}(b')}) = Id_{(p')^{-1}(b')}$$

$$(\psi|_{(p')^{-1}(b')}) \circ ((\tilde{f})^{-1}|_{p^{-1}(f(b'))}) \circ (\bar{f}|_{(\bar{p})^{-1}(b')}) = Id_{(\bar{p})^{-1}(b')}.$$

Por lo tanto $E' \cong f^*E$. □

Lema 1.2.8. *Sea $p: E \rightarrow B \times I$ un haz fibrado con fibra F tal que sus restricciones a $B \times [0, a]$ y $B \times [a, 1]$ son triviales para algún a en I . Entonces $p: E \rightarrow B \times I$ es un haz fibrado trivial.*

Demostración. Lo que queremos probar es que $E \cong B \times I \times F$. Como las restricciones a $B \times [0, a]$ y $B \times [a, 1]$ son triviales para algún a en I entonces existen mapeos trivializadores

$$\begin{aligned} \varphi_1: (B \times [0, a]) \times F &\rightarrow p^{-1}(B \times [0, a]) \quad \text{y} \\ \varphi_2: (B \times [a, 1]) \times F &\rightarrow p^{-1}(B \times [a, 1]) \end{aligned}$$

tales que si tomamos su restricción a $(B \times \{a\}) \times F$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} (B \times \{a\}) \times F & \xrightarrow{\varphi_1|} & p^{-1}(B \times \{a\}) & \xrightarrow{\varphi_2^{-1}|} & (B \times \{a\}) \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow p| & \swarrow \pi & \\ & & B \times \{a\} & & \end{array}$$

De esto se sigue que $(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(x, a, y) = (x, a, \alpha(x, y))$ donde $\alpha: B \times F \rightarrow F$ es continua.

Tomando $\tilde{\alpha}: B \rightarrow \text{Homeo}(F, F)$ y $\psi: \text{Homeo}(F, F) \rightarrow \text{Homeo}(F, F)$ donde $\tilde{\alpha}$ es la adjunta de α y ψ es la función que manda a cada homeomorfismo a su inverso, obtenemos que $\psi \circ \tilde{\alpha}: B \rightarrow \text{Homeo}(F, F)$ es continua. Con esto definimos $\varphi: B \times I \times F \rightarrow E$ como

$$\varphi(x, t, y) = \begin{cases} \varphi_1(x, t, y) & \text{si } t \leq a \\ \varphi_2(x, t, \tilde{\alpha}(x)y) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

la cual está bien definida por lo anterior y además es continua. Definimos su inversa $\varphi^{-1}: E \rightarrow B \times I \times F$ como

$$\varphi^{-1}(e) = \begin{cases} \varphi_1^{-1}(e) & \text{si } e \in p^{-1}(B \times [0, a]) \\ (Id_{B \times I}, \psi \circ \tilde{\alpha}(x)) \circ \varphi_2^{-1}(e) & \text{si } e \in p^{-1}(B \times [a, 1]) \end{cases}$$

donde $x = \text{proy}_B(\varphi_2^{-1}(e))$. Para ver que está bien definida tomemos e en $p^{-1}(B \times \{a\})$, entonces existe (x, a, y) en $B \times \{a\} \times F$ tal que $e = \varphi_1(x, t, y)$. Así, tenemos que $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x, t, y) = (x, a, \tilde{\alpha}(x)y)$. Entonces

$$(Id_{B \times I}, \psi \circ \tilde{\alpha}(x)) \circ (x, a, \tilde{\alpha}(x)y) = (x, a, y) = \varphi^{-1}(e)$$

y por lo tanto está bien definida y es continua. □

Lema 1.2.9. *Sea $p: E \rightarrow B \times I$ un haz fibrado con fibra F . Entonces existe una cubierta abierta $\{U\}$ de B tal que $p^{-1}(U \times I) \cong U \times I \times F$.*

Demostración. Sea b en B . Entonces para cada t en I existe una vecindad abierta U_t de b en B y una vecindad abierta V_t de t en I tal que $U_t \times V_t \times F \cong p^{-1}(U_t \times V_t)$. Ahora, $\{V_t\}_{t \in I}$ es una cubierta abierta de I y como es compacto existe una subcubierta finita $\{V_{t_r}\}_{r=1, \dots, m}$. Definamos $U_b = \bigcap_{r=1}^m U_{t_r}$ y escojamos $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ tales que las diferencias $s_i - s_{i-1}$ sean menores que el número de Lebesgue de la cubierta $\{V_{t_r}\}$. Ahora como $[s_{i-1}, s_i] \subset V_{t_r}$ y $U_b \subset U_{t_r}$ para cada r en $\{1, \dots, m\}$ tenemos que

$$\varphi_{(U_{t_r} \times V_{t_r})}|_{U_b \times [s_{i-1}, s_i] \times F}: U_b \times [s_{i-1}, s_i] \times F \rightarrow p^{-1}(U_b \times [s_{i-1}, s_i])$$

es homeomorfismo para cada i en $\{1, \dots, m\}$. Aplicando el Lema 1.2.8 a las restricciones $U_b \times [s_{i-1}, s_i]$ y $U_b \times [s_i, s_{i+1}]$ tenemos que

$$U_b \times [s_{i-1}, s_{i+1}] \times F \cong p^{-1}(U_b \times [s_{i-1}, s_{i+1}]).$$

Iterando el proceso obtenemos $U_b \times I \times F \cong p^{-1}(U_b \times I)$, donde $\{U_b\}_{b \in B}$ es la cubierta deseada.

□

Definición 1.2.10. Sea X un espacio topológico. Decimos que una familia $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de funciones continuas $\eta_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$, es una partición de la unidad si $\eta_\alpha(x) \neq 0$ sólo para una cantidad finita de α en Λ y $\sum_{\alpha \in \Lambda} \eta_\alpha(x) = 1$. Para cada α en Λ definimos el soporte de η_α como la cerradura de

$$\{x \in X \mid \eta_\alpha(x) \neq 0\}$$

y lo denotaremos por $\text{sop}(\eta_\alpha)$. Decimos que $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ está subordinada a una cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, si $\text{sop}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$ para cada α en Λ .

Las Particiones de la Unidad son una herramienta muy útil sobre todo en los campos de la topología y geometría diferencial. La siguiente Proposición nos dice cuando podemos utilizar esta herramienta, pero la prueba no es de interés en este trabajo. Ésta se puede consultar en [2].

Proposición 1.2.11. Un espacio topológico X de Hausdorff es paracompacto si y sólo si para cada cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X existe una partición de la unidad $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ subordinada a la cubierta.

En adelante asumiremos que los espacios paracompactos son de Hausdorff.

Proposición 1.2.12. Sea $p: E \rightarrow B \times I$ un haz fibrado con fibra F , con B un espacio paracompacto. Sea $r: B \times I \rightarrow B \times I$ el retracts dado por $r(b, t) = (b, 1)$ para cada b en B . Entonces existe un mapeo de haces

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ B \times I & \xrightarrow{r} & B \times I \end{array}$$

y por lo tanto $r^*E \cong E$.

Demostración. Usando el Lema 1.2.9 y el hecho de que B es paracompacto, existe una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y una partición de la unidad $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ subordinada a la cubierta tal que $U_\alpha \times I \times F \cong p^{-1}(U_\alpha \times I)$. Para cada α en Λ definimos $\mu_\alpha: B \rightarrow I$ de la siguiente manera:

$$\mu_\alpha(x) = \frac{\eta_\alpha(x)}{\max\{\eta_\beta(x) \mid \beta \in \Lambda\}}$$

Como $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es partición de la unidad, $\eta_\alpha(x) \neq 0$ sólo para un número finito de α en Λ entonces $\max\{\eta_\beta(x) \mid \beta \in \Lambda\}$ está bien definido y es no cero pues $\sum_{\alpha \in \Lambda} \eta_\alpha(x) = 1$. La continuidad de μ_α se sigue de que η_α es continua para cada α en Λ . Además por la definición de μ_α , $\max\{\mu_\alpha(x) \mid \alpha \in \Lambda\} = 1$. Sea $\varphi_\alpha: U_\alpha \times I \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha \times I)$ el mapeo trivializador de U_α . Para cada α en Λ definimos

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f_\alpha} & E \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ B \times I & \xrightarrow{r_\alpha} & B \times I \end{array}$$

donde $r_\alpha(b, t) = (b, \max\{\mu_\alpha(b), t\})$ con (b, t) en $B \times I$ y

$$f_\alpha(e) = \begin{cases} e & \text{si } e \notin p^{-1}(U_\alpha \times I) \\ \varphi_\alpha(x, \max\{\mu_\alpha(b), t\}, y) & \text{si } e \in p^{-1}(U_\alpha \times I) \end{cases}$$

con $e = \varphi_\alpha(b, t, y)$ para algún (b, t, y) en $U_\alpha \times I \times F$ en el segundo caso. Para ver que f_α está bien definida y es continua, consideremos los abiertos $p^{-1}(U_\alpha \times I)$ y $p^{-1}((B - \text{sop}(\eta_\alpha)) \times I)$ y tomemos un e en la intersección. Entonces $e = \varphi_\alpha(b, t, y)$ para algún (b, t, y) en $U_\alpha \cap (B - \text{sop}(\eta_\alpha)) \times I \times F$ y por lo tanto $\mu_\alpha(b) = 0$, lo cual nos dice que $\varphi_\alpha(x, \max\{\mu_\alpha(b), t\}, y) = \varphi_\alpha(b, t, y) = e$. Afirmamos que (r_α, f_α) es un mapeo de haces.

Primero veamos que el diagrama conmuta. Si e no está en $p^{-1}(U_\alpha \times I)$, entonces $p(f_\alpha(e)) = p(e)$. Supongamos que $p(e) = (b, t)$ para algún (b, t) en $B \times I$. Por hipótesis tenemos que b está en $(B - \text{sop}(\eta_\alpha))$ y así $r_\alpha(b, t) = (b, \max\{\mu_\alpha(b), t\}) = (b, t)$. Ahora, si e está en $p^{-1}(U_\alpha \times I)$, entonces $e = \varphi_\alpha(b, t, y)$ para algún (b, t, y) en $U_\alpha \times I \times F$. Usando el hecho de que $p \circ \varphi_\alpha = \pi$ donde π en este caso es la proyección en $U_\alpha \times I$, tenemos que $p(f_\alpha(e)) = p(\varphi_\alpha(b, \max\{\mu_\alpha(b), t\}, y)) = (b, \max\{\mu_\alpha(b), t\}) = r_\alpha(b, t) = r_\alpha(p(e))$ y por lo tanto el diagrama conmuta.

Tomemos b en B . Si b no está en U_α entonces f_α y r_α son la identidad y claramente $f_\alpha|_{p^{-1}(b, t)}$ es homeomorfismo para cada (b, t) en $B - U_\alpha \times I$. Si b está en U_α entonces $f_\alpha(p^{-1}(b, t)) = f_\alpha(\varphi_\alpha(b, t, F)) = \varphi_\alpha(b, \max\{\mu_\alpha(b), t\}, F) = p^{-1}(b, \max\{\mu_\alpha(b), t\}) = p^{-1}(r_\alpha(b, t))$ y como $\varphi_\alpha|_{\{b\} \times \{t\} \times F}$ es homeomorfismo, $f_\alpha|_{p^{-1}(b, t)}$ también lo es y por lo tanto se tiene la afirmación.

Para definir f y r escojamos un buen orden \prec para Λ . Dado que B es paracompacto, para cada b en B existe una vecindad abierta W_b en B tal que $W_b \cap U_\alpha \neq \emptyset$ sólo para un número finito de α en Λ digamos $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = \Lambda_b$ donde $\alpha_1 \prec \alpha_2 \prec \dots \prec \alpha_m$. Así definimos $r: B \times I \rightarrow B \times I$ y $f: E \rightarrow E$ como la composición de todas las r_α y f_α con α en Λ , es decir:

$$r = \circ_{\alpha \in \Lambda} r_\alpha \quad y \quad f = \circ_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha.$$

Éstas están bien definidas por lo visto anteriormente, pues r_α y f_α son la identidad para casi toda α en Λ . Más aún, para las cubiertas abiertas $\{W_b \times I\}_{b \in B}$ de $B \times I$ y $\{p^{-1}(W_b \times I)\}_{b \in B}$ de E , tenemos que

$$r|_{W_b \times I} = r_{\alpha_m} \circ r_{\alpha_{m-1}} \circ \cdots \circ r_{\alpha_1} \quad y \quad f|_{p^{-1}(W_b \times I)} = f_{\alpha_m} \circ f_{\alpha_{m-1}} \circ \cdots \circ f_{\alpha_1}$$

que cumplen lo que buscamos por como tomamos W_b . □

Teorema 1.2.13. *Sean $p': E' \rightarrow B'$ un haz fibrado con fibra F , B un espacio paracompacto y $f, g: B \rightarrow B'$ dos funciones continuas homotópicas. Entonces existe un isomorfismo de haces tal que $f^*E' \cong g^*E'$.*

Demostración. Sean $H: B \times I \rightarrow B'$ la homotopía de f a g y $i_v: B \rightarrow B \times I$ las inclusiones $i_v(b) = (b, v)$ con b en B y $v = 0, 1$. Así obtenemos $f = H \circ i_0$ y $g = H \circ i_1$. Sea $r: B \times I \rightarrow B \times I$ el retracto definido por $r(b, t) = (b, 1)$ con (b, t) en $B \times I$. Entonces aplicando las Proposiciones 1.1.18 y 1.2.12 y usando que $r \circ i_0 = i_1$, tenemos que:

$$f^*E' = (H \circ i_0)^*E' \cong i_0^*H^*E' \cong i_0^*r^*H^*E' \cong i_1^*H^*E' \cong (H \circ i_1)^*E' = g^*E'.$$

□

El siguiente Lema será usado hasta la última parte del segundo capítulo, pero como es un resultado general para haces fibrados sobre espacios paracompactos lo enunciamos y demostramos ahora. En este caso la fibra F es cualquier espacio topológico.

Lema 1.2.14. *Sea $p: E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra F y B un espacio paracompacto. Entonces existe una cubierta abierta numerable $\{W_n\}$ tal que $p^{-1}(W_n) \cong W_n \times F$, con $n \geq 1$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una cubierta abierta tal que para cada α en Λ , el haz es trivial en U_α . Como B es paracompacto existe una partición de la unidad $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ subordinada a la cubierta. Para cada b en B definimos $S(b)$ como el conjunto finito de α en Λ tales que $\eta_\alpha(b) > 0$. También para cada subconjunto finito $S \subset \Lambda$ definimos

$$W(S) = \{b \in B \mid \eta_\alpha(b) > \eta_\beta(b), \forall \alpha \in S \text{ y } \forall \beta \notin S\}.$$

A continuación probaremos que $W(S)$ es abierto de B .

Sea $B_{\alpha,\beta} = \{b \in B \mid \eta_\alpha(b) > \eta_\beta(b)\}$. Si $\eta_\alpha(b) > \eta_\beta(b)$ entonces $\eta_\alpha(b) - \eta_\beta(b) > 0$ y obtenemos que $B_{\alpha,\beta} = (\eta_\alpha - \eta_\beta)^{-1}(0, 1]$ y por la continuidad de η_α y η_β , $B_{\alpha,\beta}$ es abierto para toda α, β en Λ . Tomemos b_0 en $W(S)$. Por ser B paracompacto existe $V(b_0)$ vecindad abierta de b_0 tal que $V(b_0) \cap U_\alpha \neq \emptyset$ sólo para un número finito de α en Λ donde el conjunto de estos índices es $S(b_0)$. Notemos que si b está en $W(S)$ entonces $\eta_\alpha(b) > 0$ para toda α en S y por lo tanto $S \subset S(b)$. Denotemos como $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ al subconjunto de índices en $S(b_0)$ tales que β_i no está en S y así b_0 está en B_{α,β_i} para cada i en $\{1, \dots, r\}$. Sea $N = \bigcap_{\alpha \in S} (B_{\alpha,\beta_1} \cap B_{\alpha,\beta_2} \cap \dots \cap B_{\alpha,\beta_r})$, este conjunto es no vacío por lo anterior y es abierto por ser intersección finita de abiertos. Tomemos b en $V(b_0) \cap N$ y supongamos que β no está en S . Si β está en $S(b_0)$ entonces $\beta = \beta_i$ para alguna i en $\{1, \dots, r\}$ y $\eta_\alpha(b) > \eta_{\beta_i}(b)$ para cada α en S . Ahora si β no está en $S(b_0)$ entonces $\eta_\alpha(b) > \eta_\beta(b) = 0$ para cada α en S . Por lo tanto $V(b_0) \cap N \subset W(S)$ y es abierto.

Si S y S' son dos subconjuntos distintos de m elementos entonces, la intersección $W(S) \cap W(S') = \emptyset$, en efecto, si suponemos que $S \neq S'$ entonces existen α en S y β en S' tales que α no está en S' y β no está en S . Si b está en $W(S) \cap W(S')$ entonces $\eta_\alpha(b) > \eta_\beta(b)$ y $\eta_\beta(b) > \eta_\alpha(b)$ lo cual es una contradicción. Definimos para cada entero positivo n , $W_n = \bigcup \{W(S(b)) \mid |S(b)| = n\}$ donde $|\cdot|$ denota la cardinalidad de un conjunto.

Sea α en $S(b)$ y tomemos $\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ el mapeo trivializador de U_α . Entonces $W(S(b)) \subset \eta_\alpha^{-1}(0, 1] \subset U_\alpha$ y por lo tanto $W(S(b)) \times F \cong p^{-1}(W(S(b)))$ donde el homeomorfismo está dado por $\varphi_\alpha|_{W(S(b)) \times F}$. Ahora, W_n es una unión ajena de abiertos de la forma $W(S(b))$ de esto se sigue que $\psi_n: W_n \times F \rightarrow p^{-1}(W_n)$ definido por $\psi_n|_{W(S(b)) \times F} = \varphi_\alpha|_{W(S(b)) \times F}$, con α en $S(b)$, es homeomorfismo y por lo tanto se tiene el resultado.

□

Capítulo 2

Espacios de Configuración

En este capítulo calcularemos los grupos de homotopía de los espacios de configuración de \mathbb{R}^k con $0 \leq k \leq \infty$. También, construiremos un cubriente sobre el espacio de todos los subconjuntos de cardinalidad n de un espacio X . En el caso $X = \mathbb{R}^\infty$, este cubriente nos permitirá dar una biyección entre aplicaciones cubrientes de n -hojas sobre un espacio paracompacto X y las clases de homotopía de funciones de X en dicho espacio de subconjuntos de cardinalidad n .

2.1 Grupos de Homotopía

Lema 2.1.1. *Sea D^k el disco unitario de dimensión k . Entonces para cada x en \mathring{D}^k , existe un homeomorfismo $\theta_x: D^k \rightarrow D^k$ tal que $\theta_x(0) = x$ y para todo z en la frontera de D^k , $\theta_x(z) = z$.*

Demostración. Tomemos x_0 en \mathring{D}^k . Consideremos la función $\theta_{x_0}: D^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $\theta_{x_0}(x) = (1 - \|x\|)x_0 + x$ que es continua. Además, $\theta_{x_0}(0) = x_0$.

Notemos que si z está en la frontera de D^k , entonces $\theta_{x_0}(z) = (1 - \|z\|)x_0 + z = z$. Ahora, usando que $\|x_0\| < 1$ y que $1 - \|x\| > 0$ para cualquier x en \mathring{D}^k tenemos que

$$\begin{aligned} \|(1 - \|x\|)x_0 + x\| &\leq \|(1 - \|x\|)x_0\| + \|x\| = \\ (1 - \|x\|)\|x_0\| + \|x\| &< (1 - \|x\|) + \|x\| = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\theta_{x_0}: D^k \rightarrow D^k$. Veamos que θ_{x_0} es inyectiva. Sean x, y en D^k y supongamos que $\theta_{x_0}(x) = \theta_{x_0}(y)$. Entonces

$$(1 - \|x\|)x_0 + x = (1 - \|y\|)x_0 + y$$

de lo que se sigue $(\|y\| - \|x\|)x_0 = y - x$.

Si $\|x\| \neq \|y\|$ entonces $\|x_0\| = \|y - x\| / |(\|y\| - \|x\|)|$, pero $\|y - x\| \geq |(\|y\| - \|x\|)|$ y tenemos que $\|x_0\| \geq 1$, que contradice la elección de x_0 . Por lo tanto θ_{x_0} es inyectiva.

Consideremos z en S^{k-1} y el rayo que empieza en 0 y termina en z el cual está dado por tz con $0 \leq t \leq 1$. Entonces

$$\theta_{x_0}(tz) = (1 - \|tz\|)x_0 + tz = (1 - t)x_0 + tz$$

y tenemos que $\theta_{x_0}(tz)$ es el rayo que comienza en x_0 y termina en z . Así, para ver que θ_{x_0} es suprayectiva, basta ver que para cualquier x en \mathring{D}^k , x está en algún rayo que comienza en x_0 y termina en algún punto en S^{k-1} . En efecto, si consideramos la recta $(1 - s)x_0 + sx$, con $s \geq 0$, ésta corta a S^{k-1} en un punto, digamos y . Entonces x está en el rayo $\theta_{x_0}(ty)$ con $0 \leq t \leq 1$.

Como D^k es compacto y Hausdorff y también θ_{x_0} es continua, tenemos que θ_{x_0} es cerrada. Por lo tanto, θ_{x_0} es un homeomorfismo.

□

Diremos que un espacio M es una *variedad*, si es un espacio de Hausdorff, 2-numerable y *localmente euclidiano*. Recordemos que un espacio X es un espacio *homogéneo* si para cualquier x, y en X , existe un homeomorfismo $\phi: X \rightarrow X$ tal que $\phi(x) = y$

Proposición 2.1.2. *Sea M una variedad conexa. Entonces M es un espacio homogéneo. Más aún, si $\dim M \geq 2$ y consideramos $Q \subset M$ un subconjunto finito, entonces para cualquier x, y en $M - Q$, existe un homeomorfismo $\phi: M \rightarrow M$ tal que $\phi(y) = x$ y $\phi(q) = q$ para cualquier q en Q .*

Demostración. Tomemos x_0 en M y consideremos U una vecindad euclidiana de x_0 en M . Como U es un abierto euclidiano, tenemos que existe un abierto $V \subset U$ tal que x_0 está en V y si \bar{V} denota la cerradura de V en U , entonces existe un homeomorfismo $h: D^k \rightarrow \bar{V} \subset M$. Usando que D^k es compacto y M es de Hausdorff, tenemos que \bar{V} es cerrado en M .

Por el Lema 2.1.1, para cada x en V existe un homeomorfismo $\phi_x: \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ tal que para cualquier z en la frontera de V , $\phi_x(z) = z$ y $\phi_x(x_0) = x$. Podemos extender ϕ_x a M de la siguiente manera. Definimos $\bar{\phi}_x: M \rightarrow M$ como

$$\bar{\phi}_x(y) = \begin{cases} \phi_x(y) & \text{si } y \in \bar{V} \\ y & \text{si } y \notin \bar{V}. \end{cases}$$

Como \bar{V} y $M - V$ son cerrados de M cuya intersección es la frontera de V , tenemos que $\bar{\phi}_x$ está bien definida y es continua, pues ϕ_x fija a la frontera de V . Más aún, como $\bar{\phi}_x|_{\bar{V}}$ y $\bar{\phi}_x|_{M-V}$ son homeomorfismos se sigue que $\bar{\phi}_x$ es homeomorfismo.

Por el argumento anterior, tenemos que para cualquier y en M , existe un abierto V_y de M tal que para cualquier x en V_y existe un homeomorfismo $\bar{\phi}_x: M \rightarrow M$ con $\bar{\phi}_x(y) = x$. Consideremos el conjunto

$$B_{x_0} = \{y \in M \mid \text{existe un homeomorfismo } \phi: M \rightarrow M \text{ con } \phi(x_0) = y\}$$

que es no vacío pues x_0 está en B_{x_0} , ya que $Id_M(x_0) = x_0$. Si y está en B_{x_0} , entonces existe un homeomorfismo $\phi: M \rightarrow M$ tal que $\phi(x_0) = y$. Así, $\bar{\phi}_x \circ \phi: M \rightarrow M$ es un homeomorfismo que cumple $\bar{\phi}_x(\phi(x_0)) = x$. Por lo tanto $V_y \subset B_{x_0}$ y B_{x_0} es abierto.

Tomemos y en $M - B_{x_0}$. Si $V_y \cap B_{x_0} \neq \emptyset$, tendríamos un homeomorfismo de M en M que manda a x_0 a y que contradice la elección de y . Por lo tanto $V_y \subset M - B_{x_0}$ y tenemos que B_{x_0} es abierto y cerrado. Como M es conexa, $B_{x_0} = M$ y se tiene que M es un espacio homogéneo.

Para la segunda parte, notemos que si $\dim M \geq 2$, tenemos que $M - Q$ es conexo. Como M es de Hausdorff, para cada y en M , podemos encontrar una vecindad euclidiana $V_y \subset M$ de y tal que $V_y \cap Q = \emptyset$. Ahora, el homeomorfismo $\bar{\phi}_x$ correspondiente a los puntos x en la vecindad V_y , fija al conjunto Q . Si x_0 está en $M - Q$, en forma similar a como se probó que B_{x_0} es abierto y cerrado, se tiene que el conjunto

$$B'_{x_0} = \{y \in M - Q \mid \text{existe } \phi: M \rightarrow M \text{ con } \phi(y) = x_0 \text{ y } \phi(q) = q \text{ si } q \in Q\}$$

con ϕ un homeomorfismo, es abierto y cerrado. Por lo tanto $B'_{x_0} = M - Q$.

□

Esta propiedad será muy útil, así que en adelante, asumiremos que las variedades son conexas de dimensión mayor o igual a 2.

Definición 2.1.3. Sea M una variedad y consideremos $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$ un conjunto fijo de m puntos distintos de M . Definimos los espacios de configuración $F_{m,n}(M) \subset M^n \equiv M \times \dots \times M$ (n factores) como

$$F_{m,n}(M) = \{(x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid x_i \in M - Q_m, x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j\}$$

donde $F_{m,n}(M)$ tiene la topología inducida por M^n .

Veamos que salvo homeomorfismo, los espacios de configuración $F_{m,n}(M)$ no dependen de los conjuntos finitos Q_m .

Proposición 2.1.4. Sea M una variedad. Consideremos $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$ y $Q'_m = \{q'_1, \dots, q'_m\}$ conjuntos de m puntos distintos de M . Si $F_{m,n}(M)$ y $F'_{m,n}(M)$ denotan a los espacios de configuración de M para Q_m y Q'_m respectivamente, entonces $F_{m,n}(M) \cong F'_{m,n}(M)$.

Demostración. La Proposición 2.1.2 nos permite construir los siguientes homeomorfismos: Sea $\phi_i: M \rightarrow M$ tal que $\phi_i(q_i) = q'_i$ y ϕ_i fija a cada punto del conjunto

$$\{q'_1, \dots, q'_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_m\}$$

con $1 \leq i \leq m$. Definimos $\phi: M \rightarrow M$ como $\phi = \phi_m \circ \dots \circ \phi_1$ que también es un homeomorfismo. Claramente $\phi(Q_m) = Q'_m$. Consideremos

$$\phi^n = \phi \times \dots \times \phi: M^n \rightarrow M^n.$$

Así, $\phi^n|_{F_{m,n}(M)}$ es un homeomorfismo y $\phi^n(F_{m,n}(M)) = F'_{m,n}(M)$.

□

Lema 2.1.5. Consideremos la función θ_x definida en el Lema 2.1.1. Entonces la función $\bar{\theta}: D^k \rightarrow \text{Map}(D^k, D^k)$ dada por $\bar{\theta}(x) = \theta_x$ es continua.

Demostración. D^k es un espacio métrico, así, para ver que θ es continua, basta ver que dada una sucesión convergente $\{x_n\} \rightarrow x_0$ en D^k , entonces la sucesión de funciones $\{\theta_{x_n}\}$ converge uniformemente a θ_{x_0} (véase [5]).

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe N tal que para cada $n > N$, $\|x_n - x_0\| < \varepsilon$. Ahora, usando que para todo x en D^k , $0 \leq 1 - \|x\| \leq 1$ tenemos que

$$\|\theta_{x_n}(x) - \theta_{x_0}(x)\| = \|(1 - \|x\|)x_n + x - (1 - \|x\|)x_0 - x\| =$$

$$\|(1 - \|x\|)(x_n - x_0)\| = (1 - \|x\|)\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

para toda x en D^k y para toda $n > N$. Por lo tanto $\bar{\theta}$ es continua.

□

Lema 2.1.6. $\theta \equiv \bar{\theta}|_{\mathring{D}^k}: \mathring{D}^k \rightarrow \text{Homeo}(D^k, D^k)$.

Demostración. Por el Lema 2.1.1, si x está en \mathring{D}^k , entonces θ_x es un homeomorfismo y se tiene el resultado. \square

Recordemos que una sección de un haz fibrado $p: E \rightarrow X$, es una función continua $s: X \rightarrow E$ tal que $p \circ s = Id$.

Proposición 2.1.7. *Sea M una variedad y consideremos un conjunto de m puntos distintos $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\} \subset M$. Entonces la función $\pi: F_{m,n}(M) \rightarrow M - Q_m$ dada por $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_1$ es un haz fibrado con fibra $F_{m+1,n-1}(M)$. Además, si $m \geq 1$ entonces π admite una sección.*

Demostración. Para ver que π es un haz fibrado, tomemos un punto q_{m+1} en $M - Q_m$ para formar $Q_{m+1} = \{q_1, \dots, q_{m+1}\}$. Fijemos x_0 en $M - Q_m$. Por la Proposición 2.1.2 existe un homeomorfismo $\alpha: M \rightarrow M$ que fija a cada punto del conjunto Q_m y $\alpha(q_{m+1}) = x_0$. Consideremos U un abierto euclidiano de M tal que x_0 está en U y $U \cap Q_m = \emptyset$. El Lema 2.1.6 nos garantiza la existencia de una función continua

$$\theta: U \rightarrow \text{Homeo}(\bar{U}, \bar{U})$$

que cumple lo siguiente. Para cada x en U , denotando $\theta(x) \equiv \theta_x: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$, θ_x es un homeomorfismo que fija a la frontera de U y $\theta_x(x) = x_0$. Como \bar{U} es compacto y Hausdorff, por la Proposición 1.2.3 tenemos que $\text{Homeo}(\bar{U}, \bar{U})$ es un grupo topológico. Así, la función $\theta': U \rightarrow \text{Homeo}(\bar{U}, \bar{U})$ dada por $\theta'(x) = \theta_x^{-1}$ es continua.

Ahora, \bar{U} es localmente compacto, entonces las funciones adjuntas

$$\tilde{\theta}, \tilde{\theta}': U \times \bar{U} \rightarrow \bar{U}$$

de θ y θ' respectivamente, son continuas. También, para cada x en U , θ_x y θ_x^{-1} fijan a la frontera de U , entonces podemos extender $\tilde{\theta}$ y $\tilde{\theta}'$ de manera continua definiendo $\tilde{\theta}, \tilde{\theta}': U \times M \rightarrow M$ como $\tilde{\theta}(x, y) = \tilde{\theta}'(x, y) = y$, si y no está en U .

Consideremos

$$F_{m+1,n-1}(M) \subset M - Q_{m+1} \times \dots \times M - Q_{m+1} \text{ (} n - 1 \text{ factores).}$$

Definimos $\varphi_U: U \times F_{m+1,n-1}(M) \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset F_{m,n}(M)$ como

$$\varphi_U(x, p_2, \dots, p_n) = (x, \tilde{\theta}'(x, \alpha(p_2)), \dots, \tilde{\theta}'(x, \alpha(p_n))).$$

Tomemos (p_2, \dots, p_n) en $F_{m+1, n-1}(M)$. Por construcción de $\tilde{\theta}'$ tenemos que $\tilde{\theta}'(x, p_i) = \theta_x^{-1}(\alpha(p_i))$ con $2 \leq i \leq n$. Como θ_x^{-1} y α son homeomorfismos, tenemos que $\theta_x^{-1}(\alpha(p_i)) \neq \theta_x^{-1}(\alpha(p_j))$ si $i \neq j$. Además, como p_i está en $M - Q_{m+1}$, $p_i \neq q_{m+1}$. Por lo tanto $\alpha(p_i) \neq x_0$ y de esto se sigue que $\theta_x^{-1}(\alpha(p_i)) \neq x$. Por lo anterior φ_U está bien definida y claramente es continua pues α y $\tilde{\theta}'$ son continuas. Así, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} U \times F_{m+1, n-1}(M) & \xrightarrow{\varphi_U} & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow \text{proy}_U & \swarrow \pi| \\ & & U \end{array}$$

Ahora definimos $\tilde{\varphi}_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F_{m+1, n-1}(M)$ como

$$\tilde{\varphi}_U(x, p_2, \dots, p_n) = (x, \alpha^{-1}(\tilde{\theta}'(x, p_2)), \dots, \alpha^{-1}(\tilde{\theta}'(x, p_n))).$$

En forma similar a como se probó que φ_U está bien definida tenemos que $\tilde{\varphi}_U$ está bien definida y es continua. Claramente $\tilde{\varphi}_U$ es la inversa de φ_U y por lo tanto φ_U es un homeomorfismo y π es localmente trivial.

Supongamos que $m \geq 1$. Para ver que π admite una sección, consideremos una vecindad euclidiana $V \subset M$ de q_1 tal que q_i no está en V si $i \geq 2$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe un homeomorfismo $h: \bar{V} \rightarrow D^k$ tal que $h(q_1) = 0$. Sea W un básico euclidiano centrado en el origen de radio $1/2$ y consideremos y_1, \dots, y_n puntos distintos de la frontera de W . Definimos $f_1 = Id_{M-Q_m}$ y para $i \geq 2$ definimos $f_i: M - Q_m \rightarrow M$ como

$$f_i(x) = \begin{cases} h^{-1}(\|h(x)\|y_i) & \text{si } x \in \bar{V} - q_1 \\ h^{-1}(y_i) & \text{si } x \notin V \end{cases}$$

Como $\bar{V} - q_1$ es cerrado en $M - Q_m$ y $f_i(x) = h^{-1}(y_i)$ si x está en la frontera de $\bar{V} - q_1$, tenemos que f_i es continua para $1 \leq i \leq n$. Además, por construcción, si x está en $M - Q_m$, $f_i(x) \neq x$ si $i \geq 2$ y $f_i(x) \neq f_j(x)$ si $i \neq j$. Por lo tanto $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ está en $F_{m, n}(M)$ para cada x en $M - Q_m$.

Ahora, como $f_1(x) = x$ para x en $M - Q_m$, es claro que

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

es continua y $\pi(f(x)) = x$. Por lo tanto f es la sección requerida.

□

Proposición 2.1.8. Sean M una variedad y $Q_{n-1} = \{q_1, \dots, q_{n-1}\} \subset M$ un conjunto de $n - 1$ puntos distintos. Consideremos los subconjuntos $Q_i = \{q_1, \dots, q_i\} \subset Q_{n-1}$. Entonces, para $q \geq 2$

$$\pi_q(F_{1,n-1}(M)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} \pi_q(M - Q_i),$$

donde $\pi_q(-)$ denota al q -ésimo grupo de homotopía. Si $\pi: F_{0,n}(M) \rightarrow M$ admite una sección entonces

$$\pi_q(F_{0,n}(M)) \cong \pi_q(M) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \pi_q(M - Q_i).$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.7 y el hecho de que cualquier haz fibrado $p: E \rightarrow X$ es una *fibración de Serre* (véase [1]), tenemos que el haz $\pi: F_{m,n}(M) \rightarrow M - Q_m$ es fibración de Serre para cada $m, n \geq 0$. Así, obtenemos la siguiente sucesión de fibraciones de Serre:

$$\begin{array}{ccccccc} F_{1,n-1}(M) & F_{2,n-2}(M) & \cdots & F_{n-2,2}(M) & F_{n-1,1}(M) & & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ F_{0,n}(M) & F_{1,n-1}(M) & \cdots & F_{n-3,3}(M) & F_{n-2,2}(M) & & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ M & M - Q_1 & \cdots & M - Q_{n-3} & M - Q_{n-2} & & \end{array}$$

Notemos que $F_{n-1,1}(M) = M - Q_{n-1}$. Con la existencia de secciones para π en los casos $m \geq 1$ y usando la sucesión exacta de homotopía (véase [1]), obtenemos que para $q \geq 2$, la sucesión

$$\pi_q(F_{i+1,n-i-1}(M)) \longrightarrow \pi_q(F_{i,n-i}(M)) \longrightarrow \pi_q(M - Q_i)$$

se escinde y por lo tanto $\pi_q(F_{i,n-i}(M)) \cong \pi_q(F_{i+1,n-i-1}(M)) \oplus \pi_q(M - Q_i)$ para $i \geq 1$ y $q \geq 2$. Procediendo de derecha a izquierda en la sucesión de fibraciones de Serre y usando que $\pi_q(F_{n-1,1}(M)) = \pi_q(M - Q_{n-1})$ se tiene el resultado. □

Recordemos que una función continua $f: X \rightarrow Y$ es una *equivalencia homotópica débil* si el morfismo inducido $f_*: \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$ es un isomorfismo para toda $q \geq 0$ y para cada x en X . La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [4].

Proposición 2.1.9. Sean $X_1, X_2 \subset X$ y $Y_1, Y_2 \subset Y$ tales que $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$ y $Y = \overset{\circ}{Y}_1 \cup \overset{\circ}{Y}_2$. Sea $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(X_1) \subset Y_1$ y $f(X_2) \subset Y_2$. Si $f|_{X_1}$, $f|_{X_2}$ y $f|_{X_1 \cap X_2}$ son equivalencias homotópicas débiles, entonces f es una equivalencia homotópica débil.

Lema 2.1.10. Sea $S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1}$ la cuña de i esferas de dimensión $k-1$. Entonces para toda $q \geq 0$

$$\pi_q(\mathbb{R}^k - Q_i) \cong \pi_q(S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1}).$$

Demostración. La prueba es por inducción en el número de cuñas. S^{k-1} es un retracto fuerte por deformación de $\mathbb{R}^k - \{*\}$, lo que implica que son del mismo tipo de homotopía, en particular $\pi_q(\mathbb{R}^k - \{*\}) \cong \pi_q(S^{k-1})$ para cada $q \geq 0$.

Para el paso inductivo mostraremos el caso $i = 2$, el caso general es análogo. Sean $a = (-1, 0, \dots, 0)$ y $b = (1, 0, \dots, 0)$ en \mathbb{R}^k . Consideremos

$$S^{k-1} \vee S^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x = y + a \text{ ó } x = y + b, y \in S^{k-1}\}$$

con punto base el $\bar{0}$. Sea $\iota: S^{k-1} \vee S^{k-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^k - \{a, b\}$ la inclusión. Consideremos los subespacios

$$X_1 = \{(x_1, \dots, x_k) \in S^{k-1} \vee S^{k-1} \mid x_1 < 1/3\}$$

$$X_2 = \{(x_1, \dots, x_k) \in S^{k-1} \vee S^{k-1} \mid x_1 > -1/3\}$$

$$Y_1 = \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k \mid y_1 < 1/2\}$$

$$Y_2 = \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k \mid y_1 > -1/2\}.$$

Estos son abiertos y además $S^{k-1} \vee S^{k-1} = X_1 \cup X_2$ y $\mathbb{R}^k = Y_1 \cup Y_2$. Notemos que $\iota(X_1) \subset Y_1$ y $\iota(X_2) \subset Y_2$. Ahora, S^{k-1} es un retracto fuerte por deformación de Y_i con $i = 1, 2$. Entonces la inclusión

$$S^{k-1} \hookrightarrow X_i \xrightarrow{\iota|_{X_i}} Y_i$$

es una equivalencia homotópica débil. También, S^{k-1} es un retracto fuerte por deformación de X_i , lo que implica que la inclusión $S^{k-1} \hookrightarrow X_i$ es una equivalencia homotópica débil para $i = 1, 2$. Por lo tanto $\iota|_{X_1}: X_1 \rightarrow Y_1$, $\iota|_{X_2}: X_2 \rightarrow Y_2$ son equivalencias homotópicas débiles.

Ahora, $X_1 \cap X_2 \cong \overset{\circ}{D}^{k-1} \vee \overset{\circ}{D}^{k-1}$ y $Y_1 \cap Y_2 \cong \mathbb{R}^k$ lo que nos dice que son contraíbles y por lo tanto $\iota|_{X_1 \cap X_2}: X_1 \cap X_2 \rightarrow Y_1 \cap Y_2$ es una equivalencia

homotópica débil. Por la Proposición 2.1.9 tenemos que la inclusión ι es una equivalencia homotópica débil. Más aún, como $S^{k-1} \vee S^{k-1}$ y \mathbb{R}^k son complejos-CW, tenemos que ι es una equivalencia homotópica y se sigue que para toda $q \geq 0$

$$\pi_q(\mathbb{R}^k - \{a, b\}) \cong \pi_q(S^{k-1} \vee S^{k-1}).$$

□

Proposición 2.1.11. *Para $k \geq 2$ y $q \geq 2$*

$$\pi_q(F_{0,n}(\mathbb{R}^k)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} \pi_q(S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1}).$$

Demostración. Consideremos las funciones continuas $f_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ dadas por

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1 + i - 1, x_2, \dots, x_k)$$

para $1 \leq i \leq n$. Ahora, $f_1 = Id_{\mathbb{R}^k}$. Para $i \geq 2$ tenemos lo siguiente.

Si x está en \mathbb{R}^k , entonces

$$f_i(x) \neq x \quad \text{para cada } i \quad \text{y} \quad f_j(x) \neq f_i(x) \quad \text{si } i \neq j.$$

Así, $f: \mathbb{R}^k \rightarrow F_{0,n}(\mathbb{R}^k)$ dada por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ está bien definida y es continua y es una sección del haz fibrado $\pi: F_{0,n}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}^k$. Si $Q_i = \{q_1, \dots, q_i\} \subset \mathbb{R}^k$ son conjuntos finitos de i puntos distintos, por la Proposición 2.1.8 tenemos que

$$\pi_q(F_{0,n}(\mathbb{R}^k)) \cong \pi_q(\mathbb{R}^k) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-1} \pi_q(\mathbb{R}^k - Q_i).$$

Usando que $\pi_q(\mathbb{R}^k) = 0$ para toda $q \geq 0$ y el Lema 2.1.10 se tiene el resultado.

□

De aquí en adelante llamaremos a $F_{0,n}(X)$ *el espacio de configuración de n puntos de X* y lo denotaremos por $F_n(X)$.

Lema 2.1.12. *Sea X de Hausdorff. Entonces $F_n(X) \subset X^n$ es abierto y Hausdorff.*

Demostración. Como X es Hausdorff, se tiene que X^n también lo es y como $F_n(X) \subset X^n$, se sigue que $F_n(X)$ es Hausdorff. Para ver que es abierto, tomemos (x_1, \dots, x_n) en $F_n(X)$. Como X es Hausdorff, existen abiertos $V_1, \dots, V_n \subset X$ tales que x_i está en V_i y $V_i \cap V_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

Tomemos $V = V_1 \times \dots \times V_n$. Si $V \not\subset F_n(X)$ existiría (y_1, \dots, y_n) en V tal que $y_i = y_j$ con $i \neq j$, lo que contradice que $V_i \cap V_j = \emptyset$. Por lo tanto $V \subset F_n(X)$ y se tiene el resultado. □

Nota 2.1.13. Como $F_n(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^{nk}$ es abierto y \mathbb{R}^{nk} es una variedad diferenciable, tenemos que $F_n(\mathbb{R}^k)$ es una variedad diferenciable y por lo tanto un complejo CW.

También, consideraremos el espacio \mathbb{R}^∞ que definimos como $\text{colim}_k \mathbb{R}^k$ (la definición de colímite y sistemas dirigidos se puede consultar en [1]).

Lema 2.1.14. $F_n(\mathbb{R}^\infty) \cong \text{colim}_k F_n(\mathbb{R}^k)$.

Demostración. Veamos que $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ cumple la propiedad universal del colímite. Dado que $\mathbb{R}^\infty = \text{colim}_k \mathbb{R}^k$, tenemos inclusiones $\iota_k: \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ y $\alpha_k: \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ que inducen las funciones $j_k: F_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^{k+1})$ y $\beta_k: F_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)$ tales que para cada (x_1, \dots, x_n) en $F_n(\mathbb{R}^k)$

$$\beta_k(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_k(x_1), \alpha_k(x_2), \dots, \alpha_k(x_n)) \quad y$$

$$j_k(x_1, \dots, x_n) = (\iota_k(x_1), \iota_k(x_2), \dots, \iota_k(x_n))$$

que son continuas para cada $k \geq 1$. Además, usando que $\alpha_{k+1} \circ \iota_k = \alpha_k$ para cada $k \geq 1$, tenemos que $\beta_{k+1} \circ j_k(x_1, \dots, x_n) =$

$$\beta_{k+1}(\iota_k(x_1), \dots, \iota_k(x_n)) = (\alpha_{k+1} \circ \iota_k(x_1), \dots, \alpha_{k+1} \circ \iota_k(x_n)) = (\alpha_k(x_1), \dots, \alpha_k(x_n)).$$

Por lo tanto $\beta_{k+1} \circ j_k = \beta_k$ para toda $k \geq 1$. Ahora, supongamos que existen funciones continuas $g_k: F_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow Y$ con Y un espacio arbitrario, tales que para cada $k \geq 1$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_n(\mathbb{R}^k) & \xrightarrow{j_k} & F_n(\mathbb{R}^{k+1}) \\ & \searrow g_k & \downarrow g_{k+1} \\ & & Y. \end{array}$$

Notemos que cualquier z en $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ es de la forma

$$z = (\alpha_{k_1}(x_1), \alpha_{k_2}(x_2), \dots, \alpha_{k_n}(x_n))$$

donde x_i está en \mathbb{R}^{k_i} . Más aún, si $r = \max\{k_i \mid x_i \in \mathbb{R}^{k_i}\}$, tenemos que $z = (\alpha_r \circ \iota_{k_1}^r(x_1), \alpha_r \circ \iota_{k_2}^r(x_2), \dots, \alpha_r \circ \iota_{k_n}^r(x_n))$. Definimos $g: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow Y$ como

$$g(z) = g(\alpha_r \circ \iota_{k_1}^r(x_1), \dots, \alpha_r \circ \iota_{k_n}^r(x_n)) = g_r(\iota_{k_1}^r(x_1), \dots, \iota_{k_n}^r(x_n)).$$

Recordemos que $F_n(\mathbb{R}^\infty) \subset \mathbb{R}^\infty \times \dots \times \mathbb{R}^\infty$ (n factores) y un subespacio $U_1 \times \dots \times U_n$ es abierto en $\mathbb{R}^\infty \times \dots \times \mathbb{R}^\infty$ si y sólo si $U_i \cap \mathbb{R}^k$ es abierto para cada k , con $1 \leq i \leq n$. Como cualquier z en $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ está en algún $F_n(\mathbb{R}^r)$, con r suficientemente grande, se sigue que un subespacio V de $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ es abierto si y sólo si $V \cap F_n(\mathbb{R}^k)$ es abierto en $F_n(\mathbb{R}^k)$ para cada k . Es decir, $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ tiene la topología coherente con los subespacios $F_n(\mathbb{R}^k)$.

Así, para ver que g es continua, basta ver que $g|_{F_n(\mathbb{R}^k)}$ es continua para cada k , pero por definición de g tenemos que $g|_{F_n(\mathbb{R}^k)} = g_k$. Por lo tanto g es continua. Además, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_n(\mathbb{R}^k) & \xrightarrow{\beta_k} & F_n(\mathbb{R}^\infty) \\ & \searrow g_k & \downarrow g \\ & & Y. \end{array}$$

Por lo tanto $F_n(\mathbb{R}^\infty) \cong \text{colim}_k F_n(\mathbb{R}^k)$.

□

Lema 2.1.15. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios topológicos contraíbles. Entonces el espacio $(X \vee Y, \{x_0, y_0\})$ es contraíble.

Demostración. Consideremos las homotopías $H_1: (X \times I, \{x_0\} \times I) \rightarrow (X, x_0)$, $H_2: (Y \times I, \{y_0\} \times I) \rightarrow (Y, y_0)$ de las identidades a las respectivas funciones constantes. Definimos $H: (X \vee Y \times I, \{x_0, y_0\} \times I) \rightarrow (X \vee Y, \{x_0, y_0\})$ como

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (H_1(x, t), y) & \text{si } y = y_0 \\ (x, H_2(y, t)) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Como $X \times \{y_0\}$ y $Y \times \{x_0\}$ son cerrados cuya intersección es $\{x_0, y_0\}$ y la unión es $X \vee Y$, se sigue que H es continua, pues es continua en los cerrados $X \times \{y_0\} \times I$, $Y \times \{x_0\} \times I$ y

$$H((x_0, y_0), t) = (H_1(x_0, t), y_0) = (x_0, y_0) = (x_0, H_2(y_0, t))$$

para cada $t \in I$. Además $H(x, y, 0) = (x_0, y_0)$ y

$$H((x, y), 1) = \begin{cases} (H_1(x, 1), y) = (x, y) & \text{si } y = y_0 \\ (x, H_2(y, 1)) = (x, y) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

que es la identidad en $X \vee Y$.

□

Lema 2.1.16. Sean $f_k: (X_k, x_k) \rightarrow (X_{k+1}, x_{k+1})$ y $g_k: (Y_k, y_k) \rightarrow (Y_{k+1}, y_{k+1})$ con $k \geq 1$ sistemas dirigidos de espacios topológicos basados. Entonces

$$\text{colim}_k(X_k \vee Y_k) \cong \text{colim}_k X_k \vee \text{colim}_k Y_k.$$

Demostración. Sean $\alpha_k: X_k \rightarrow \text{colim}_k X_k$ y $\beta_k: Y_k \rightarrow \text{colim}_k Y_k$ las funciones correspondientes al colímite. Consideremos las funciones inducidas por la cuña

$$f_k \vee g_k: X_k \vee Y_k \rightarrow X_{k+1} \vee Y_{k+1} \quad \text{y} \quad \alpha_k \vee \beta_k: X_k \vee Y_k \rightarrow \text{colim}_k X_k \vee \text{colim}_k Y_k$$

dadas por $(f_k \vee g_k)(x, y) = (f_k(x), g_k(y))$ y $(\alpha_k \vee \beta_k)(x, y) = (\alpha_k(x), \beta_k(y))$. Así,

$$\begin{aligned} (\alpha_{k+1} \vee \beta_{k+1}) \circ (f_k \vee g_k)(x, y) &= (\alpha_{k+1} \vee \beta_{k+1})(f_k(x), g_k(y)) = \\ &= (\alpha_{k+1} \circ f_k(x), \beta_{k+1} \circ g_k(y)) = (\alpha_k(x), \beta_k(y)) = (\alpha_k \vee \beta_k)(x, y). \end{aligned}$$

Supongamos que existen funciones continuas $h_k: X_k \vee Y_k \rightarrow Z$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X_k \vee Y_k & \xrightarrow{f_k \vee g_k} & X_{k+1} \vee Y_{k+1} \\ h_k \downarrow & \swarrow h_{k+1} & \\ & Z & \end{array}$$

para cada k . Consideremos las funciones $s_k: X_k \rightarrow X_k \vee Y_k$ y $l_k: Y_k \rightarrow X_k \vee Y_k$ dadas por $s_k(x) = (x, y_k)$ y $l_k(y) = (x_k, y)$. Entonces

$$h_{k+1} s_{k+1} f_k(x) = h_{k+1}(f_k(x), y_{k+1}) = h_{k+1}(f_k \vee g_k)(x, y_k) = h_k(x, y_k) = h_k s_k(x)$$

$$h_{k+1} l_{k+1} g_k(y) = h_{k+1}(x_{k+1}, g_k(y)) = h_{k+1}(f_k \vee g_k)(x_k, y) = h_k(x_k, y) = h_k l_k(y).$$

Por lo tanto las composiciones $s_k \circ h_k$ y $l_k \circ h_k$ inducen funciones continuas $s: \text{colim}_k X_k \rightarrow Z$ y $l: \text{colim}_k Y_k \rightarrow Z$ tales que $s \circ \alpha_k = h_k \circ s_k$ y $l \circ \beta_k =$

$h_k \circ l_k$. s y l inducen otra función continua $h: \text{colim}_k X_k \vee \text{colim}_k Y_k \rightarrow Z$ dada por

$$h([x], [y]) = \begin{cases} s([x]) & \text{si } [y] = [y_1] \\ l([y]) & \text{si } [x] = [x_1]. \end{cases}$$

Ahora, si (x, y) está en $X_k \vee Y_k$, $h(\alpha_k \vee \beta_k)(x, y) = h(\alpha_k(x), \beta_k(y)) =$

$$\begin{cases} s(\alpha_k(x)) = h_k(s_k(x)) = h_k(x, y_k) & \text{si } \beta_k(y) = [y_1] \\ l(\beta_k(y)) = h_k(l_k(y)) = h_k(x_k, y) & \text{si } \alpha_k(x) = [x_1] \end{cases}$$

que es $h_k(x, y)$. Por lo tanto $\text{colim}_k X_k \vee \text{colim}_k Y_k$ tiene la propiedad universal del colímite y se tiene el resultado. \square

Proposición 2.1.17. $\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) = 0$, para $q \geq 2$.

Demostración. Por el Lema 2.1.14, $\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \cong \pi_q(\text{colim}_k F_n(\mathbb{R}^k))$. Usando que el colímite conmuta con los grupos de homotopía (véase [4]), tenemos que

$$\pi_q(\text{colim}_k F_n(\mathbb{R}^k)) \cong \text{colim}_k \pi_q(F_n(\mathbb{R}^k)).$$

Por la Proposición 2.1.11 se tiene para $q \geq 2$ que $\text{colim}_k \pi_q(F_n(\mathbb{R}^k)) \cong$

$$\text{colim}_k \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_q(S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1}) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_q(\text{colim}_k (S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1})).$$

Usando el Lema 2.1.16 y procediendo por inducción en el número de esferas tenemos que

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_q(\text{colim}_k (S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1})) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_q(\text{colim}_k S_1^{k-1} \vee \dots \vee \text{colim}_k S_i^{k-1}).$$

Ahora, $\text{colim}_n S^n = S^\infty$ es un complejo-CW y $\pi_q(S^\infty) \cong \text{colim}_n \pi_q(S^n) = 0$ para toda $q \geq 0$. Por el Teorema de *Whitehead* (vease [1]), tenemos que S^∞ es contraíble.

Procediendo por inducción en el número de cuñas y por el Lema 2.1.15, obtenemos que $S_1^\infty \vee \dots \vee S_i^\infty$ es contraíble. Por lo tanto

$$\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_q(S_1^\infty \vee \dots \vee S_i^\infty) = 0$$

para $q \geq 2$. \square

El argumento de la Proposición 2.1.8 no funciona para calcular $\pi_0(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ y $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty))$, pues no necesariamente son grupos abelianos. Para esto veamos lo siguiente.

Lema 2.1.18. $\pi_q(S_1^n \vee \dots \vee S_i^n) = 0$ para $n \geq 2$, $q = 0, 1$.

Demostración. $S^n \vee S^n = (S^n \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times S^n)$ donde x_0 es el punto base y como $S^n \times \{x_0\}$ es conexo por trayectorias para $n > 0$, y $\{x_0, x_0\}$ es un punto en común, se tiene que $S^n \vee S^n$ es conexo por trayectorias. Por inducción sobre i obtenemos que $S_1^n \vee \dots \vee S_i^n$ también lo es. Por lo tanto $\pi_0(S_1^n \vee \dots \vee S_i^n) = 0$ para $n > 0$.

Ahora $S^n \vee S^n = (S^n \vee (S^n - \{x_1\})) \cup ((S^n - \{x_1\}) \vee S^n)$ que son abiertos en $S^n \vee S^n$. $(S^n \vee (S^n - \{x_1\})) \cap ((S^n - \{x_1\}) \vee S^n)$ es del mismo tipo de homotopía que $\mathbb{R}^{n-1} \vee \mathbb{R}^{n-1}$ y por lo tanto es contraíble. Por el Teorema de Seifert-Van Kampen se sigue que

$$\pi_1(S^n \vee S^n) \cong \pi_1(S^n \vee (S^n - \{x_1\})) * \pi_1((S^n - \{x_1\}) \vee S^n)$$

para toda $n \geq 1$. También, $(S^n - \{x_1\})$ es contraíble y tenemos que $S^n \vee (S^n - \{x_1\})$ es del mismo tipo de homotopía que S^n , pero $\pi_1(S^n) = 0$ para toda $n \geq 2$. Por lo tanto $\pi_1(S^n \vee S^n) = 0$. Por inducción se sigue que $\pi_1(S_1^n \vee \dots \vee S_i^n) = 0$ para $n \geq 2$.

□

Proposición 2.1.19. $\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) = 0$ para $q = 0, 1$

Demostración. Sabemos que $\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) = \text{colim}_k \pi_q(F_n(\mathbb{R}^k))$. Consideremos $Q_i = \{q_1, \dots, q_i\} \subset \mathbb{R}^k$ conjuntos de i puntos distintos, con $1 \leq i \leq n-1$. Tomando la sucesión exacta de homotopía de las fibraciones $\pi: F_{i,n-i}(\mathbb{R}^k) \rightarrow (\mathbb{R}^k - Q_i)$ para $k \geq 2$, obtenemos

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_q(F_{1,n-1}(\mathbb{R}^k)) & \pi_q(F_{2,n-2}(\mathbb{R}^k)) & \cdots & \pi_q(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^k)) & \pi_q(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^k)) & & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ \pi_q(F_n(\mathbb{R}^k)) & \pi_q(F_{1,n-1}(\mathbb{R}^k)) & \cdots & \pi_q(F_{n-3,3}(\mathbb{R}^k)) & \pi_q(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^k)) & & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \\ \pi_q(\mathbb{R}^k) & \pi_q(\mathbb{R}^k - Q_1) & \cdots & \pi_q(\mathbb{R}^k - Q_{n-3}) & \pi_q(\mathbb{R}^k - Q_{n-2}) & & \end{array}$$

Por el Lema 2.1.18 $\pi_q(\mathbb{R}^k - Q_i) \cong \pi_q(S_1^{k-1} \vee \dots \vee S_i^{k-1}) = 0$ para toda $1 \leq i \leq n-1$ y $q = 0, 1$. Procediendo de derecha a izquierda usando

que las sucesiones son exactas y que $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k - Q_{n-1}$ se sigue que $\pi_0(F_n(\mathbb{R}^k)) = 0$ para toda $k \geq 2$ y que $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^k)) = 0$ para toda $k \geq 3$. Por lo tanto $\text{colim}_k \pi_q(F_n(\mathbb{R}^k)) = 0$ para $q = 0, 1$ y se tiene el resultado. \square

Corolario 2.1.20. *El espacio $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ es contraíble.*

Demostración. Por el Lema 2.1.14, $F_n(\mathbb{R}^\infty) = \text{colim}_k F_n(\mathbb{R}^k)$ y por lo tanto es un complejo-CW. Por las Proposiciones 2.1.17 y 2.1.19, $\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) = 0$ para toda $q \geq 0$. Por el Teorema de *Whitehead*, $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ es contraíble. \square

2.2 El Espacio de Subconjuntos de Cardinalidad n de un Espacio X

En esta sección construiremos una aplicación cubriente de n -hojas sobre el espacio de subconjuntos de \mathbb{R}^∞ de cardinalidad n . Para esta nueva construcción necesitaremos algunos resultados sobre *acciones* los cuales enunciaremos y demostraremos a continuación. De aquí en adelante trabajaremos con la noción de aplicación cubriente que dimos en el Ejemplo 1.1.3.

Recordemos que si X un espacio topológico y G un grupo, una función continua $h: X \times G \rightarrow X$ cuyo valor denotamos como $h(x, g) = xg$ es una acción derecha si

i) $(xg)g' = x(gg')$ para cada g, g' en G .

ii) $xe = x$ para cada x en X , donde e es el idéntico en G .

Además, para cada g en G la función $h_g: X \rightarrow X$ dada por $h_g(x) = xg$ es un homeomorfismo.

Definición 2.2.1. *Decimos que una acción es libre si dado g en G tal que $g \neq e$ entonces $xg \neq x$ para cada x en X . También, decimos que la acción es propiamente discontinua si para cada x en X existe V vecindad de x tal que $V \cap Vg = \emptyset$ para cada g en $G \setminus \{e\}$, donde $Vg = \{xg | x \in V\}$.*

Lema 2.2.2. *Sean G un grupo discreto y X un espacio topológico. Sea $h: X \times G \rightarrow X$ una acción propiamente discontinua. Entonces el mapeo cociente $q: X \rightarrow X/G$ que manda a cada elemento a su órbita es una aplicación cubriente.*

Demostración. Como la acción es propiamente discontinua, para cada x en X existe V vecindad de x tal que $V \cap Vg = \emptyset$ para toda g en $G \setminus \{e\}$. Ahora $q^{-1}(q(V)) = \{Vg | g \in G\}$ es una unión ajena de abiertos en X por tanto $q(V)$ es abierto. Definimos

$$\varphi_{q(V)}: q(V) \times G \rightarrow q^{-1}(q(V))$$

como $\varphi_{q(V)}(q(x), g) = xg$, que está bien definida pues si $q(x) = q(x')$ entonces $x' = xg'$ con g' en G pero $V \cap Vg' = \emptyset$ para cada g' en $G \setminus \{e\}$, lo que implica $g' = e$. Fijando g en G , la función $\varphi_{q(V)}$ está dada por el homeomorfismo $h_g: X \rightarrow X$ inducido por la acción $h(x, g) = xg$. Entonces $\varphi_{q(V)}(q(V), g) = Vg$ para cada g en G y como $q^{-1}(q(V)) = \bigsqcup_{g \in G} Vg$ y el grupo G es discreto, tenemos que $\varphi_{q(V)}: q(V) \times G \rightarrow q^{-1}(q(V))$ es homeomorfismo.

Así, para cada órbita $q(x)$ en X/G tenemos una vecindad abierta $q(V)$ de $q(x)$ y un homeomorfismo $\varphi_{q(V)}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} q(V) \times G & \xrightarrow{\varphi_{q(V)}} & q^{-1}(q(V)) \\ \text{proy}_X \searrow & & \swarrow q \\ & & q(V) \end{array}$$

Por lo tanto se tiene el resultado. \square

Ejemplo 2.2.3. Consideremos la acción $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(n, x) \mapsto n + x$ que es continua. Ahora, sea x en \mathbb{R} y consideremos el intervalo abierto $(x - 1/2, x + 1/2)$. Para cada n en \mathbb{Z} , con $n \neq 0$, se tiene que

$$(x - 1/2, x + 1/2) \cap (x + n - 1/2, x + n + 1/2) = \emptyset.$$

Como \mathbb{Z} es discreto y la acción es propiamente discontinua, obtenemos que el mapeo cociente $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ es una aplicación cubriente con fibra \mathbb{Z} .

Lema 2.2.4. Sean G un grupo finito, X un espacio de Hausdorff. Sea $h: X \times G \rightarrow X$ una acción libre. Entonces h es una acción propiamente discontinua.

Demostración. Denotemos $G = \{e = g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Sea x en X y tomemos g_i en $G \setminus \{e\}$. Entonces $xg_i \neq x$ pues $i \neq 1$. Como X es Hausdorff existen V_{x_i} y U_{x_i} abiertos ajenos en X tales que x está en V_{x_i} y xg_i está en U_{x_i} . Consideremos el homeomorfismo $h_{g_i}: X \rightarrow X$ tal que $h_{g_i}(x) = xg_i$ inducido

por la acción h . Entonces $h_{g_i}(V_{x_i}) = V_{x_i}g_i$ es abierto en X y xg_i está en $V_{x_i}g_i \cap U_{x_i}$. Sea

$$V = \bigcap_{i=1}^n h_{g_i}^{-1}(V_{x_i}g_i \cap U_{x_i}).$$

Este conjunto es un abierto no vacío pues x está en V . Ahora $V \subseteq V_{x_i}$ y $V_{g_i} \subseteq U_{x_i}$ para cada i en $\{1, \dots, n\}$ por lo tanto $V \cap V_{g_i} = \emptyset$ para cada i en $\{1, \dots, n\}$.

□

Por los dos Lemas anteriores, podemos concluir lo siguiente:

Proposición 2.2.5. *Sean G un grupo finito, X un espacio topológico de Hausdorff y $h: X \times G \rightarrow X$ una acción libre. Entonces el mapeo cociente $q: X \rightarrow X/G$ que mapea a cada elemento a su órbita es una aplicación cubriente.*

□

Ejemplo 2.2.6. *Consideremos S^n y la acción $\mathbb{Z}_2 \times S^n \rightarrow S^n$ dada por $t \cdot x = -x$, donde t es el generador en \mathbb{Z}_2 . Esta acción es libre y como S^n es de Hausdorff y \mathbb{Z}_2 es finito, tenemos que el mapeo cociente $p: S^n \rightarrow S^n/\mathbb{Z}_2$ es una aplicación cubriente de 2 hojas, donde $S^n/\mathbb{Z}_2 \equiv \mathbb{RP}^n$ es el espacio proyectivo real de dimensión n .*

Definición 2.2.7. *Consideremos el espacio de configuración de n puntos de X :*

$$F_n(X) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ con } i \neq j\}.$$

Sea X de Hausdorff. Denotemos como Σ_n al grupo simétrico del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y consideramos la acción $F_n(X) \times \Sigma_n \rightarrow F_n(X)$ dada por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)\sigma = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Esta acción es libre. Por el Lema 2.1.12, $F_n(X)$ es Hausdorff y como Σ_n es finito, de la Proposición 2.2.5 obtenemos que el mapeo cociente

$$p_n: F_n(X) \rightarrow F_n(X)/\Sigma_n$$

es una aplicación cubriente cuya multiplicidad de la fibra es $|\Sigma_n| = n!$.

Recordemos que Z es un espacio *Eilenberg Mac Lane de tipo* (L, n) , donde L es un grupo, si

$$\pi_q(Z) \cong \begin{cases} L & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n \end{cases}$$

Teorema 2.2.8. $F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ es un espacio *Eilenberg Mac Lane de tipo* $(\Sigma_n, 1)$.

Demostración. Por lo que mencionamos arriba, tomando $X = \mathbb{R}^\infty$ tenemos una aplicación cubriente $p_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ cuya fibra es Σ_n (y en particular es un cubriente universal pues $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)) = 0$).

Ahora, tomemos la sucesión exacta de homotopía de p_n

$$\cdots \longrightarrow \pi_q(\Sigma_n) \longrightarrow \pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow \pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n) \longrightarrow \pi_{q-1}(\Sigma_n) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\Sigma_n) \longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n) \longrightarrow \pi_0(\Sigma_n) \longrightarrow \cdots$$

Por las Proposiciones 2.1.17 y 2.1.19 obtenemos que

$$\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n) \rightarrow \pi_{q-1}(\Sigma_n)$$

es un isomorfismo para toda $q \geq 0$. Por lo tanto

$$\pi_q(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n) = \begin{cases} \Sigma_n & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

□

A partir de ahora será de nuestro interés construir *aplicaciones cubrientes de n hojas* sobre $F_n(X)$, es decir que la multiplicidad de la fibra sea n .

Definición 2.2.9. Sea $\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$. Consideremos la acción

$$(F_n(X) \times \bar{n}) \times \Sigma_n \rightarrow F_n(X) \times \bar{n}$$

dada por $((x_1, \dots, x_n), i)\sigma = ((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma^{-1}(i))$. Denotemos al espacio cociente $(F_n(X) \times \bar{n})/\Sigma_n$ como $F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. Definimos $q_n: F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \rightarrow F_n(X)/\Sigma_n$ como

$$q_n[((x_1, \dots, x_n), i)] = [(x_1, \dots, x_n)].$$

Proposición 2.2.10. $q_n: F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \rightarrow F_n(X)/\Sigma_n$ es una aplicación cubriente de n -hojas.

Demostración. Consideremos una cubierta trivializadora $\{U_\alpha\}$ correspondiente a p_n (Definición 2.2.7) y los mapeos trivializadores $\varphi_\alpha: U_\alpha \times \Sigma_n \rightarrow p_n^{-1}(U_\alpha)$. Sea $[(x_1, \dots, x_n)]$ en $F_n(X)/\Sigma_n$. Entonces $[(x_1, \dots, x_n)]$ está en U_α para alguna α y supongamos que (x_1, \dots, x_n) es el representante canónico, es decir, $(x_1, \dots, x_n) = \varphi_\alpha([(x_1, \dots, x_n)], e)$ donde e es el idéntico en Σ_n . Definimos $\psi_\alpha: U_\alpha \times \bar{n} \rightarrow q_n^{-1}(U_\alpha)$ de la siguiente manera.

Para cada (y_1, \dots, y_n) en $[(x_1, \dots, x_n)]$ tenemos que $(y_1, \dots, y_n) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ para alguna σ en Σ_n . Definimos $\psi_\alpha([(y_1, \dots, y_n)], i) = [(y_1, \dots, y_n), \sigma^{-1}(i)]$. Para ver que está bien definida, tomemos (y_1, \dots, y_n) en $[(x_1, \dots, x_n)]$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi_\alpha([(x_1, \dots, x_n)], i) &= [(x_1, \dots, x_n), i] \quad \text{y} \\ \psi_\alpha([(y_1, \dots, y_n)], i) &= [(y_1, \dots, y_n), \sigma^{-1}(i)]\end{aligned}$$

y como $((y_1, \dots, y_n), \sigma^{-1}(i)) = ((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma^{-1}(i))$, obtenemos que

$$[(y_1, \dots, y_n), \sigma^{-1}(i)] = [(x_1, \dots, x_n), i].$$

También definimos $\tilde{\psi}_\alpha: q_n^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \bar{n}$ como

$$\tilde{\psi}_\alpha([(y_1, \dots, y_n), j]) = [(y_1, \dots, y_n), \sigma(j)]$$

que está bien definida pues si $((y_1, \dots, y_n), j)$ está en $[(x_1, \dots, x_n), i]$ entonces

$$((y_1, \dots, y_n), j) = ((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma^{-1}(i))$$

para alguna σ en Σ_n . Usando el hecho de que $\sigma(j) = \sigma(\sigma^{-1}(i))$ tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\alpha([(y_1, \dots, y_n), j]) &= [(y_1, \dots, y_n), \sigma(j)] = \\ &= [(x_1, \dots, x_n), i] = \tilde{\psi}_\alpha([(x_1, \dots, x_n), i]).\end{aligned}$$

Claramente $\tilde{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^{-1}$ y tenemos que ψ_α es biyectiva. Para ver que ψ_α es homeomorfismo, primero veamos que $q_n^{-1}(U_\alpha) = p_n^{-1}(U_\alpha) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. Tomemos $[(x_1, \dots, x_n), i]$ en $q_n^{-1}(U_\alpha)$. Entonces $[(x_1, \dots, x_n)]$ está en U_α y por lo tanto existe (y_1, \dots, y_n) en $p_n^{-1}(U_\alpha)$ tal que $p_n(y_1, \dots, y_n) = [(x_1, \dots, x_n)]$, es decir, existe σ en Σ_n tal que $((y_1, \dots, y_n), \sigma(\sigma^{-1}(i))) = ((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), i)$.

Así, $[(x_1, \dots, x_n), i] = [(y_1, \dots, y_n), \sigma^{-1}(i)]$ que está en $p_n^{-1}(U_\alpha) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. Ahora, $q_n(p_n^{-1}(U_\alpha) \times_{\Sigma_n} \bar{n}) = U_\alpha$ y por lo tanto $p_n^{-1}(U_\alpha) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \subset q_n^{-1}(U_\alpha)$ y se tiene lo anterior. Con esto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p_n^{-1}(U_\alpha) \times \bar{n} & \xrightarrow{p_n \times Id} & U_\alpha \times \bar{n} \\ & \searrow \tilde{q} & \swarrow \psi_\alpha \\ & & q_n^{-1}(U_\alpha) \end{array}$$

donde \tilde{q} es el mapeo cociente. Como $p_n| \times Id$ es abierta y suprayectiva se sigue que ψ_α y ψ_α^{-1} son continuas. Así, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \bar{n} & \xrightarrow{\psi_\alpha} & q_n^{-1}(U_\alpha) \\ \text{proy} \searrow & & \swarrow q_n \\ & & U_\alpha \end{array}$$

conmuta y q_n es una aplicación cubriente de n -hojas. \square

La aplicación cubriente $q_n: F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \rightarrow F_n(X)/\Sigma_n$ se puede describir de una manera más sencilla.

Definición 2.2.11. Definimos $\mathcal{P}_n(X)$ como el espacio de todos los subconjuntos de X de cardinalidad n . Consideremos la función $\rho_n: F_n(X) \rightarrow \mathcal{P}_n(X)$ dada por

$$\rho_n((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Esta función es suprayectiva, de manera que le podemos dar a $\mathcal{P}_n(X)$ la topología cociente. También definimos

$$E_n(X) = \{(C, x) \in \mathcal{P}_n(X) \times X \mid x \in C\}.$$

Proposición 2.2.12.

$$a) \mathcal{P}_n(X) \cong F_n(X)/\Sigma_n.$$

$$b) E_n(X) \cong F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}.$$

Demostración. a) Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ en $F_n(X)$ tales que

$$\rho_n((x_1, \dots, x_n)) = \rho_n((y_1, \dots, y_n)).$$

Entonces $\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\}$ y tenemos que existe σ en Σ_n tal que $(x_1, \dots, x_n) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)})$ y por lo tanto $p_n(x_1, \dots, x_n) = p_n(y_1, \dots, y_n)$. En forma similar, si $p_n(x_1, \dots, x_n) = p_n(y_1, \dots, y_n)$ entonces $\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\}$. Es decir, las identificaciones p_n y ρ_n son compatibles e inducen un homeomorfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) & \xrightarrow{\rho_n} & \mathcal{P}_n(X) \\ p_n \downarrow & \nearrow h & \\ F_n(X)/\Sigma_n & & \end{array}$$

b) Consideremos la función $H: F_n(X) \times \bar{n} \rightarrow \mathcal{P}_n(X) \times X$ dada por

$$H((x_1, \dots, x_n), i) = (\rho_n(x_1, \dots, x_n), x_i)$$

Para ver que es continua, consideremos

$$p_1: \mathcal{P}_n(X) \times X \rightarrow \mathcal{P}_n(X) \quad y \quad p_2: \mathcal{P}_n(X) \times X \rightarrow X$$

las proyecciones en la primera y segunda coordenada respectivamente. Entonces para cada i fija en \bar{n} , $p_1 \circ H|_{F_n(X) \times \{i\}} = \rho_n$ y $p_2 \circ H|_{F_n(X) \times \{i\}} = \text{proy}_i|_{F_n(X)}$, donde $\text{proy}_i|_{F_n(X)}$ es la restricción a $F_n(X)$ de la i -ésima proyección $X^n \rightarrow X$. Esto nos dice que H es continua en $F_n(X) \times \{i\}$ para cada i , pues ρ_n y $\text{proy}_i|_{F_n(X)}$ son continuas. Pero \bar{n} tiene la topología discreta, entonces $\{F_n(X) \times \{i\}\}_{i \in \bar{n}}$ es una cubierta de abiertos ajenos en $F_n(X) \times \bar{n}$. Por lo tanto H es continua. Más aún, H es abierta pues ρ_n y $\text{proy}_i|_{F_n(X)}$ lo son.

Ahora, para cada $((x_1, \dots, x_n), i)$ en $F_n(X) \times \bar{n}$, tenemos que x_i está en $\{x_1, \dots, x_n\} = \rho_n(x_1, \dots, x_n)$. Entonces $H((x_1, \dots, x_n), i)$ está en $E_n(X)$ y por lo tanto

$$H: F_n(X) \times \bar{n} \rightarrow E_n(X).$$

Sean $((x_1, \dots, x_n), i), ((y_1, \dots, y_n), j)$ en $F_n(X) \times \bar{n}$. Supongamos que

$$((y_1, \dots, y_n), j) = ((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma^{-1}(i))$$

para alguna σ en Σ_n . Por la prueba en a) tenemos que $p_n(x_1, \dots, x_n) = p_n(y_1, \dots, y_n)$ y $\sigma(j) = i$, si y sólo si $\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \rho_n(y_1, \dots, y_n)$ y $y_j = x_{\sigma(j)} = x_i$. Es decir, $H((y_1, \dots, y_n), j) = H((x_1, \dots, x_n), i)$ si y sólo si

$$[((x_1, \dots, x_n), i)] = [((y_1, \dots, y_n), j)] \text{ en } F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}.$$

Por lo tanto H induce una única función continua \bar{H} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) \times \bar{n} & \xrightarrow{H} & E_n(X) \\ q \downarrow & \nearrow \bar{H} & \\ F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n} & & \end{array}$$

donde q es el mapeo cociente. Además, de la conmutatividad del diagrama y de que H es abierta, se sigue que \bar{H} es abierta. Veamos que \bar{H} es biyectiva.

Sean $[((x_1, \dots, x_n), i)], [((z_1, \dots, z_n), j)]$ en $F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. Supongamos que

$$(\rho_n(x_1, \dots, x_n), x_i) = (\rho_n(z_1, \dots, z_n), z_j).$$

De esto se sigue que $\{x_1, \dots, x_n\} = \{z_1, \dots, z_n\}$ y por lo tanto existe σ en Σ_n tal que $(x_1, \dots, x_n)\sigma = (z_1, \dots, z_n)$. Así $z_j = x_{\sigma(j)}$, pero por hipótesis tenemos que $z_j = x_i$, es decir, $\sigma(j) = i$, de aquí se sigue que $((x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma^{-1}(i)) = ((z_1, \dots, z_n), j)$. Por lo tanto $[((x_1, \dots, x_n), i)] = [((z_1, \dots, z_n), j)]$ y \bar{H} es inyectiva.

Sea (C, x) en $E_n(X)$ y tomemos $d: \bar{n} \rightarrow C$ una biyección. Entonces

$$((d(1), \dots, d(n)), d^{-1}(x)) \text{ está en } F_n(X) \times \bar{n}.$$

Así, $H((d(1), \dots, d(n)), d^{-1}(x)) = (\rho_n(d(1), \dots, d(n)), d(d^{-1}(x))) = (C, x)$. De esto se sigue que \bar{H} es suprayectiva. Por lo tanto \bar{H} es un homeomorfismo. \square

Corolario 2.2.13. $\rho_n: F_n(X) \rightarrow \mathcal{P}_n(X)$ es una aplicación cubriente y la proyección

$$\pi_n: E_n(X) \rightarrow \mathcal{P}_n(X)$$

dada por $\pi_n(C, x) = C$ para cada (C, x) en $E_n(X)$ es una aplicación cubriente de n -hojas. Más aún, $h^*E_n(X) \cong F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$, donde h es el homeomorfismo de la parte a) de la proposición anterior.

Demostración. Consideremos $p_n: F_n(X) \rightarrow F_n(X)/\Sigma_n$. Por la parte a) de la proposición anterior, tenemos que $\rho_n = h \circ p_n$ y como p_n es aplicación cubriente y h es un homeomorfismo, ρ_n es una aplicación cubriente.

Para la segunda parte, consideremos el homeomorfismo $\bar{H}: F_n(X) \times \bar{n} \rightarrow E_n(X)$ de la parte b) de la Proposición anterior. Tomemos $[((x_1, \dots, x_n), i)]$ en $F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. Entonces $\pi_n \circ \bar{H}[((x_1, \dots, x_n), i)] =$

$$\pi_n(\rho_n(x_1, \dots, x_n), x_i) = \rho_n(x_1, \dots, x_n) = hp_n(x_1, \dots, x_n) = hq_n[((x_1, \dots, x_n), i)].$$

Con esto, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n} & \xrightarrow{\bar{H}} & E_n(X) \\ q_n \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ F_n(X)/\Sigma_n & \xrightarrow{h} & \mathcal{P}_n(X) \end{array}$$

y dado que \bar{H} y h son homeomorfismos, $\pi_n: E_n(X) \rightarrow \mathcal{P}_n(X)$ es una aplicación cubriente de n -hojas. Así, (\bar{H}, h) es un mapeo de haces y por la Proposición 1.2.7 se sigue que $h^*E_n(X) \cong F_n(X) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. \square

2.3 Clasificación de Aplicaciones Cubrientes de n -hojas sobre Espacios Paracompactos

Definición 2.3.1. Sean $p: E \rightarrow B$ y $q: E' \rightarrow B$ aplicaciones cubrientes. Decimos que p y q son equivalentes si existe un homeomorfismo $\varphi: E \rightarrow E'$ tal que $q \circ \varphi = p$.

Nota 2.3.2. Por la Proposición 1.2.4 tenemos que p y q son equivalentes si y sólo si existe una función continua $\varphi: E \rightarrow E'$ tal que $q \circ \varphi = p$ y φ restringida a las fibras es biyectiva.

Proposición 2.3.3. Sean $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B'$ aplicaciones cubrientes. Supongamos que existen funciones continuas $\tilde{f}: E \rightarrow E'$ y $f: B \rightarrow B'$ tales que

i) $p' \circ \tilde{f} = f \circ p$

ii) \tilde{f} restringida a las fibras es biyectiva

entonces $E \cong f^*E'$.

Demostración. Este resultado es un caso especial de la Proposición 1.2.7, ya que las fibras $p^{-1}(x)$ y $(p')^{-1}(f(x))$ tienen la topología discreta para cualquier x en B y por lo tanto \tilde{f} restringida a las fibras es un homeomorfismo. □

A la pareja de funciones (\tilde{f}, f) le llamaremos *mapeo entre aplicaciones cubrientes*.

Definición 2.3.4. Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación cubriente de n hojas. Decimos que una función continua $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $0 \leq k \leq \infty$ es una aplicación de Gauss de p si $g|_{p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva para cada b en B .

Proposición 2.3.5. Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación cubriente de n hojas. Entonces existe una aplicación de Gauss $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ de p si y sólo si existe una función continua $f: B \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ tal que $E \cong f^*E_n(\mathbb{R}^k)$. A la función $f: B \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ le llamaremos *función clasificante*.

Demostración. Supongamos que existe $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicación de Gauss de p . Para cada x en B definimos $f: B \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ como $f(x) = g(p^{-1}(x))$. Veamos que está bien definida. Tomemos x en B . Entonces $|p^{-1}(x)| = n$ y

como $g|_{p^{-1}(x)}$ es inyectiva tenemos que $|g(p^{-1}(x))| = n$. Por lo tanto $g(p^{-1}(x))$ está en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$.

Para ver que es continua, consideremos $\{U\}$ una cubierta trivializadora de p y $\varphi_U: U \times \bar{n} \rightarrow p^{-1}(U)$ los mapeos trivializadores correspondientes. Ahora, para cada x en U , $p^{-1}(x) = \{\varphi_U(x, 1), \dots, \varphi_U(x, n)\}$ y como φ_U es un homeomorfismo, $\varphi_U(x, i) \neq \varphi_U(x, j)$ si $i \neq j$. Así obtenemos que

$$(g(\varphi_U(x, 1)), g(\varphi_U(x, 2)), \dots, g(\varphi_U(x, n)))$$

está en $F_n(\mathbb{R}^k)$. Consideremos la identificación $\rho_n: F_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ definida en la sección anterior. Entonces para cada x en U

$$f(x) = \rho_n(g(\varphi_U(x, 1)), g(\varphi_U(x, 2)), \dots, g(\varphi_U(x, n)))$$

y por lo tanto f es continua.

Ahora definamos $F: E \rightarrow E_n(\mathbb{R}^k)$ como $F(e) = (f(p(e)), g(e))$ con e en E . Para ver que está bien definida recordemos que (A, t) está en $E_n(\mathbb{R}^k)$ si A está en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ y t está en A . Claramente $(f(p(e)), g(e))$ está en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$ y por definición de f , tenemos que $g(e)$ está en $g(p^{-1}(p(e))) = f(p(e))$. La continuidad de F se sigue de que las proyecciones en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ y \mathbb{R}^k son funciones continuas. Veamos que la pareja (F, f) es un mapeo entre aplicaciones cubrientes.

Sea e en E . Entonces

$$\pi_n(F(e)) = \pi_n(f(p(e)), g(e)) = f(p(e))$$

y por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{F} & E_n(\mathbb{R}^k) \\ p \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ B & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

Sea x en B . Entonces $F|_{p^{-1}(x)} = (f \circ p|_{p^{-1}(x)}, g|_{p^{-1}(x)})$ es una biyección con el conjunto

$$f(x) \times \{g(e_1), \dots, g(e_n)\} = (\pi_n)^{-1}f(x)$$

donde $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$ y por la Proposición 2.3.3 concluimos que $E \cong f^*E_n(\mathbb{R}^k)$.

Para el regreso supongamos que existe una función clasificante $f: B \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$ y una equivalencia de aplicaciones cubrientes $h: E \rightarrow f^*E_n(\mathbb{R}^k)$. Consideremos el pullback de π_n con respecto a f , entonces tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{h} & f^*E_n(\mathbb{R}^k) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_n(\mathbb{R}^k) \\ & \searrow p & \downarrow \tilde{\pi}_n & & \downarrow \pi_n \\ & & B & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

conmuta y $h \circ \tilde{f}$ es biyectiva en fibras. Definimos $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} f^*E_n(\mathbb{R}^k) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_n(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \\ \uparrow h & & \downarrow \text{proj}_{\mathbb{R}^k} \\ E & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^k \end{array}$$

Así g es composición de funciones continuas y es inyectiva en fibras. Por lo tanto $g: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una aplicación de Gauss de p .

□

La construcción del mapeo entre aplicaciones cubrientes (F, f) en la ida y la aplicación de Gauss g del regreso nos motiva a las siguiente proposición.

Proposición 2.3.6. *Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación cubriente de n -hojas. Entonces existe una biyección entre el conjunto de los mapeos de aplicaciones cubrientes:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_n(\mathbb{R}^k) \\ p \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ B & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

y el conjunto de las aplicaciones de Gauss de p .

Demostración. Sea (\tilde{f}, f) un mapeo entre las aplicaciones cubrientes p y π_n . Consideremos la composición

$$E \xrightarrow{\tilde{f}} E_n(\mathbb{R}^k) \hookrightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\text{proj}_{\mathbb{R}^k}} \mathbb{R}^k$$

donde p_2 es la proyección en la segunda coordenada. Sea b en B , entonces

$$\tilde{f}|_{p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \rightarrow (\pi_n)^{-1}f(b)$$

es biyectiva donde $(\pi_n)^{-1}f(b) = \{f(b)\} \times \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in f(b)\}$.

Además $p_2|_{\{C\} \times \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in C\}}$ es inyectiva para cada C en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k)$, por lo tanto $p_2 \circ \tilde{f}$ es aplicación de Gauss de p .

Denotemos como $BM(p, \pi_n)$ a los mapeos entre las aplicaciones cubrientes p y π_n y como $Gauss(p)$ a las aplicaciones de Gauss de p . Definimos

$$\varphi: BM(p, \pi_n) \rightarrow Gauss(p)$$

como $\varphi(\tilde{f}, f) = p_2 \circ \tilde{f}$, que está bien definida por lo anterior. También definimos $\psi: Gauss(p) \rightarrow BM(p, \pi_n)$ como $\psi(g) = (\tilde{h}, h)$, donde $h(b) = g(p^{-1}(b))$ y $\tilde{h}(e) = (h(p(e)), g(e))$, que está bien definida por la construcción en la Proposición 2.3.5. Veamos que ψ es la inversa de φ .

Sea (\tilde{f}, f) en $BM(p, \pi_n)$. Entonces $\psi \circ \varphi(\tilde{f}, f) = \psi(p_2 \circ \tilde{f}) = (\tilde{h}, h)$, donde

$$h(b) = p_2 \circ \tilde{f}(p^{-1}(b)) = p_2(\{f(b)\} \times \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in f(b)\}) = \\ \{x \in \mathbb{R}^k \mid x \in f(b)\} = f(b) \quad y$$

$$\tilde{h}(e) = (p_2 \circ \tilde{f}(p^{-1}(p(e))), p_2 \circ \tilde{f}(e)) = (f(p(e)), p_2 \circ \tilde{f}(e)) = \tilde{f}(e)$$

para cada b en B y e en E . Por lo tanto $(\tilde{h}, h) = (\tilde{f}, f)$. Sea g en $Gauss(p)$. Entonces $\varphi \circ \psi(g) = \varphi(\tilde{h}, h) = p_2 \circ \tilde{h}$. Sea e en E , entonces $p_2 \circ \tilde{h}(e) = p_2(h(p(e)), g(e)) = g(e)$. Por lo tanto $p_2 \circ \tilde{h} = g$ y φ es biyectiva.

□

Definición 2.3.7. Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación cubriente de n -hojas.

1) Sean g_0 y g_1 en $Gauss(p)$. Decimos que una función continua $G: E \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una homotopía entre g_0 y g_1 si es homotopía de funciones continuas y además, para cada t en I ,

$$G_t: E \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad \text{donde } G_t(e) = G(e, t)$$

es una aplicación de Gauss de p .

2) Sean $(\tilde{f}_0, f_0), (\tilde{f}_1, f_1)$ en $BM(p, \pi_n)$. Decimos que una pareja de funciones continuas (\tilde{F}, F) tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & E_n(\mathbb{R}^k) \\ p \times Id_I \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ B \times I & \xrightarrow{F} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

conmuta es una homotopía entre (\tilde{f}_0, f_0) y (\tilde{f}_1, f_1) , si para cada b en B , e en E se satisfacen:

i) $\tilde{F}(e, 0) = \tilde{f}_0(e)$ y $F(b, 0) = f_0(b)$

ii) $\tilde{F}(e, 1) = \tilde{f}_1(e)$ y $F(b, 1) = f_1(b)$

iii) para cada t en I se tiene que $(\tilde{F}|_{E \times \{t\}}, F|_{E \times \{t\}})$ está en $BM(p, \pi_n)$.

Proposición 2.3.8. Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación cubriente de n -hojas. Entonces la biyección $Gauss(p) \rightarrow BM(p, \pi_n)$ pasa a clases de homotopía.

Demostración. Sean g_0 y g_1 en $Gauss(p)$ y $G: E \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ una homotopía entre ellas. Ahora, notemos que $p \times Id_I: E \times I \rightarrow B \times I$ es una aplicación cubriente de n -hojas y que G está en $Gauss(p \times Id_I)$. Entonces existe un mapeo entre aplicaciones cubrientes

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & E_n(\mathbb{R}^k) \\ p \times Id_I \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ B \times I & \xrightarrow{F} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

tal que $p_2 \circ \tilde{F} = G$ y para cada t en I el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E \times \{t\} & \xrightarrow{\tilde{F}|} & E_n(\mathbb{R}^k) \\ (p \times Id_I)| \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ B \times \{t\} & \xrightarrow{F|} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^k) \end{array}$$

$\tilde{F}|$ es biyectiva en fibras, entonces $(\tilde{F}|, F|)$ es un mapeo entre aplicaciones cubrientes. Ahora, la pareja (\tilde{F}, F) es una homotopía entre $(\tilde{F}|_{E \times \{0\}}, F|_{E \times \{0\}})$ y $(\tilde{F}|_{E \times \{1\}}, F|_{E \times \{1\}})$ y dado que

$$p_2 \circ \tilde{F}|_{E \times \{v\}} = G|_{E \times \{v\}} = g_v \text{ con } v = 0, 1$$

se tiene que ψ pasa a clases de homotopía.

Sean $(\tilde{f}_0, f_0), (\tilde{f}_1, f_1)$ en $BM(p, \pi_n)$ y (\tilde{F}, F) una homotopía entre ellas. Entonces $(\tilde{F}|_{E \times \{t\}}, F|_{E \times \{t\}})$ es un mapeo entre aplicaciones cubrientes para cada t y por lo tanto $p_2 \circ \tilde{F}|_{E \times \{t\}}$ es una aplicación de Gauss de p para cada t .

Así tenemos que $p_2 \circ \tilde{F}: E \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una homotopía de aplicaciones de Gauss entre $p_2 \circ \tilde{F}|_{E \times \{0\}} = p_2 \circ \tilde{f}_0$ y $p_2 \circ \tilde{F}|_{E \times \{1\}} = p_2 \circ \tilde{f}_1$. Por lo tanto φ pasa a clases de homotopía. \square

Proposición 2.3.9. *Sea $p: E \rightarrow B$ una aplicación cubriente de n -hojas y B paracompacto. Entonces existe una aplicación de Gauss $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ de p .*

Demostración. Por el Lema 1.2.14 existe una cubierta trivializadora numerable $\{W_i\}_{i=1}^\infty$ de B y mapeos trivializadores $\varphi_i: W_i \times \bar{n} \rightarrow p^{-1}(W_i)$. Además como B es paracompacto existe una partición de la unidad $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ subordinada a la cubierta $\{W_i\}_{i=1}^\infty$. Definimos para cada i , $g_i: E \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g_i(e) = \begin{cases} \eta_i(p(e)) \cdot \text{proy} \circ \varphi_i^{-1}(e) & \text{si } e \in p^{-1}(W_i) \\ 0 & \text{si } e \notin p^{-1}(W_i) \end{cases}$$

donde $\text{proy}: W_i \times \bar{n} \rightarrow \bar{n} \subset \mathbb{R}$ es la proyección. Para ver que g_i esta bien definida y es continua para cada i , consideremos los abiertos de E dados por $p^{-1}(W_i)$ y $p^{-1}(B - \text{sop}(\eta_i))$ y tomemos e en $p^{-1}(W_i) \cap p^{-1}(B - \text{sop}(\eta_i))$. Entonces $g_i(e) = \eta_i(p(e)) \cdot \text{proy} \circ \varphi_i^{-1}(e)$ y como $p(e)$ está en $(B - \text{sop}(\eta_i))$, entonces $\eta_i(p(e)) = 0$ y de aquí se sigue que $g_i(e) = 0$.

Ahora, definimos $g: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ como $g(e) = (g_1(e), \dots, g_i(e), \dots)$. Para ver que es inyectiva en fibras consideremos x_0 en B y e_1, e_2 en $p^{-1}(x_0)$. Supongamos que $e_1 \neq e_2$. Para cada x en B tenemos que $\sum_{i \geq 1} \eta_i(x) = 1$, en particular, para x_0 , existe i_0 tal que $\eta_{i_0}(x_0) > 0$. Ahora,

$$g_{i_0}(e_1) = \eta_{i_0}(x_0) \cdot \text{proy} \circ \varphi_{i_0}^{-1}(e_1) \quad \text{y} \quad g_{i_0}(e_2) = \eta_{i_0}(x_0) \cdot \text{proy} \circ \varphi_{i_0}^{-1}(e_2)$$

y como φ_{i_0} es homeomorfismo, tenemos que $\varphi_{i_0}^{-1}(e_1) \neq \varphi_{i_0}^{-1}(e_2)$. Pero, e_1 y e_2 están en la fibra sobre x_0 , entonces $\varphi_{i_0}^{-1}(e_1) = (x_0, i)$ y $\varphi_{i_0}^{-1}(e_2) = (x_0, j)$ y por lo tanto $i \neq j$.

Así, $\text{proy} \circ \varphi_{i_0}^{-1}(e_1) \neq \text{proy} \circ \varphi_{i_0}^{-1}(e_2)$ y de aquí se sigue que $g_{i_0}(e_1) \neq g_{i_0}(e_2)$. Por lo tanto $g(e_1) \neq g(e_2)$.

□

Definición 2.3.10. *Sea X un espacio paracompacto. Denotamos por $\text{Cov}_n(X)$ al conjunto de clases de equivalencia de aplicaciones cubrientes de n -hojas sobre X y como $[X, Y]$ a las clases de homotopía de funciones continuas de X en cualquier espacio Y .*

Teorema 2.3.11. *Sea X un espacio paracompacto. Entonces existe una biyección*

$$[X, \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)] \rightarrow \text{Cov}_n(X)$$

dada por $[f] \mapsto [f^* E_n(\mathbb{R}^\infty)]$.

Demostración. Por el Teorema 1.2.13 la función está bien definida. Las Proposiciones 2.3.5 y 2.3.9 muestran que la función es suprayectiva.

Para ver que es inyectiva primero definamos unas homotopías. Consideremos los espacios $\mathbb{R}_1^\infty = \{(t_i) \in \mathbb{R}^\infty \mid t_{2i} = 0, i = 1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{R}_2^\infty = \{(t_i) \in \mathbb{R}^\infty \mid t_{2i+1} = 0, i = 1, 2, 3, \dots\}$ tales que $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}_1^\infty \oplus \mathbb{R}_2^\infty$. Definimos $h^1, h^2: \mathbb{R}^\infty \times I \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ como

$$h^1((t_1, t_2, t_3, \dots), t) = (1-t)(t_1, t_2, t_3, \dots) + t(t_1, 0, t_2, 0, t_3, \dots)$$

$$h^2((t_1, t_2, t_3, \dots), t) = (1-t)(t_1, t_2, t_3, \dots) + t(0, t_1, 0, t_2, 0, t_3, \dots)$$

donde (t_1, t_2, t_3, \dots) está en \mathbb{R}^∞ y t está en I . Notemos que para cada t en I , la restricción $h^v|_{\mathbb{R}^\infty \times \{t\}}$ con $v = 1, 2$ es inyectiva. Las homotopías comienzan con la identidad y terminan con las funciones continuas que denotamos por

$$h_1^1: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}_1^\infty \subset \mathbb{R}^\infty \quad \text{y} \quad h_1^2: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}_2^\infty \subset \mathbb{R}^\infty.$$

Si $p_2: E_n(\mathbb{R}^\infty) \subset (\mathbb{R}^\infty)_n \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ denota a la proyección entonces las composiciones

$$h_1^v \circ p_2: E_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow \mathbb{R}^\infty \quad \text{con} \quad v = 1, 2$$

son aplicaciones de Gauss de π_n , pues si C está en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ entonces

$$(\pi_n)^{-1}(C) = \{C\} \times \{(t_i) \in \mathbb{R}^\infty \mid (t_i) \in C\}$$

por lo que $p_2(\pi_n)^{-1}(C) = \{(t_i) \in \mathbb{R}^\infty \mid (t_i) \in C\}$ y como h_1^v es inyectiva, se tiene que $h_1^v \circ p_2$ es inyectiva en fibras.

Por la Proposición 2.3.6 tenemos que las funciones $h_1^v \circ p_2$ inducen un mapeo entre aplicaciones cubrientes

$$\begin{array}{ccc} E_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_v} & E_n(\mathbb{R}^\infty) \\ \pi_n \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\varphi_v} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

con $v = 1, 2$. Consideremos las composiciones $h^v \circ (p_2 \times Id): E_n(\mathbb{R}^\infty) \times I \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ para $v = 1, 2$. Estas son homotopías que empiezan en p_2 , pues si e está en $E_n(\mathbb{R}^\infty)$ entonces

$$h^v(p_2 \times Id)(e, 0) = h^v(p_2(e), 0) = p_2(e)$$

y que terminan en $h_1^v \circ p_2$. Ahora, como $p_2|_{(\pi_n)^{-1}(C)}$ con C en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ es inyectiva y para cada t en I se tiene que la función

$$h^v \circ (p_2 \times Id)|_{(\pi_n)^{-1}(C) \times \{t\}}$$

es también inyectiva, entonces $h^v \circ (p_2 \times Id)$ es una homotopía de aplicaciones de Gauss de π_n entre p_2 y $h_1^v \circ p_2$.

Por la Proposición 2.3.8 $(\tilde{\varphi}_v, \varphi_v)$ es homotópico al mapeo entre aplicaciones cubrientes inducido por p_2 , digamos $(\tilde{\psi}, \psi)$. Tomemos C en $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$. Entonces $\psi(C) = p_2(\pi_n)^{-1}(C) = C$ de lo cual se sigue que $\psi = Id$ y por lo tanto $\varphi_v \simeq Id$.

Estamos preparados para probar la inyectividad. Sean $f_1, f_2: X \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ tales que $f_1^*E_n(\mathbb{R}^\infty) \cong f_2^*E_n(\mathbb{R}^\infty)$, hay que mostrar que f_1 y f_2 son homotópicas. Consideremos los pullbacks de π_n inducidos por f_1 y f_2

$$\begin{array}{ccccc} f_1^*E_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & E_n(\mathbb{R}^\infty) & & f_1^*E_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{h} & f_2^*E_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\tilde{f}_2} & E_n(\mathbb{R}^\infty) \\ (\pi_n)_1 \downarrow & & \downarrow \pi_n & & \searrow (\pi_n)_1 & & \downarrow (\pi_n)_2 & & \downarrow \pi_n \\ X & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) & & X & \xrightarrow{f_2} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

donde h es el homeomorfismo dado por hipótesis. Si denotamos por $E \equiv f_1^*E_n(\mathbb{R}^\infty)$ entonces obtenemos los mapeos entre aplicaciones cubrientes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}_v} & E_n(\mathbb{R}^\infty) \\ (\pi_n)_1 \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ X & \xrightarrow{f_v} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

con $v = 1, 2$, donde $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_1$ y $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2 \circ h$.

Sea $g_v: E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ la aplicación de Gauss de π_n inducida por (\tilde{f}_v, f_v) , es decir, $g_v = p_2 \circ \tilde{f}_v$. Como h_1^v es inyectiva entonces $h_1^v \circ g_v$ es una aplicación de Gauss de π_n y éstas inducen dos nuevos mapeos entre aplicaciones cubrientes

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{\psi}_v} & E_n(\mathbb{R}^\infty) \\ (\pi_n)_1 \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ X & \xrightarrow{\psi_v} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

tales que $p_2 \circ \tilde{\psi}_v = h_1^v \circ g_v = h_1^v \circ p_2 \circ \tilde{f}_v = p_2 \circ (\tilde{\varphi}_v \circ \tilde{f}_v)$ y como la relación es biyectiva tenemos que el mapeo de aplicaciones cubrientes $(\tilde{\psi}_v, \psi_v)$ es igual al mapeo

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f_v} & E_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_v} & E_n(\mathbb{R}^\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_n & & \downarrow \pi_n \\ X & \xrightarrow{f_v} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{\varphi_v} & \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty) \end{array}$$

con $v = 1, 2$.

Definimos $G: E \times I \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ como $G(e, t) = (1-t)h_1^1 g_1(e) + th_1^2 g_2(e)$ para (e, t) en $E \times I$. Esta resulta una homotopía entre $h_1^1 \circ g_1$ y $h_1^2 \circ g_2$. Fijemos t en $(0, 1)$. Sean e, e' en E tales que

$$(1-t)h_1^1 g_1(e) + th_1^2 g_2(e) = (1-t)h_1^1 g_1(e') + th_1^2 g_2(e')$$

Como h_1^v abre sumas tenemos que

$$((1-t)/t)(h_1^1(g_1(e) - g_1(e'))) = (h_1^2(g_2(e) - g_2(e')))$$

Pero $h_1^1(\mathbb{R}^\infty) \cap h_1^2(\mathbb{R}^\infty) = 0$ por definición, entonces

$$g_1(e) - g_1(e') = 0 \quad \text{y} \quad g_2(e) - g_2(e') = 0$$

y como g_v es inyectiva se tiene que $e = e'$. Por lo tanto $G: E \times I \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ es una homotopía de aplicaciones de Gauss de π_n entre $h_1^1 \circ g_1$ y $h_1^2 \circ g_2$. Por lo tanto, los mapeos entre aplicaciones cubrientes inducidos por éstas, $(\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{f}_1, \varphi_1 \circ f_1)$ y $(\tilde{\varphi}_2 \circ \tilde{f}_2, \varphi_2 \circ f_2)$ son homotópicos. De esto se sigue que $\varphi_1 \circ f_1 \simeq \varphi_2 \circ f_2$ y por lo demostrado en la primera parte concluimos que $f_1 \simeq f_2$.

□

Corolario 2.3.12. *Sea X un espacio paracompacto. Entonces la función*

$$[X, F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n] \rightarrow \text{Cov}_n(X)$$

dada por $[f] \mapsto [f^ F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n}]$ es biyectiva.*

Demostración. Consideremos el homeomorfismo $h: F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ de la Proposición 2.2.12. Entonces h induce una biyección

$$[X, F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n] \xrightarrow{\bar{h}} [X, \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)]$$

dada por $\bar{h}[f] = [h \circ f]$. Por el Teorema 2.3.11, la composición

$$[X, F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n] \rightarrow [X, \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)] \rightarrow \text{Cov}_n(X)$$

dada por $[f] \mapsto [(h \circ f)^* E_n(\mathbb{R}^\infty)]$ es una biyección. Por el Corolario 2.2.13 tenemos que $(h \circ f)^* E_n(\mathbb{R}^\infty) \cong f^* h^* E_n(\mathbb{R}^\infty) \cong f^* F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$. Por lo tanto $[(h \circ f)^* E_n(\mathbb{R}^\infty)] = [f^* F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n}]$.

□

Proposición 2.3.13. *Sea E un espacio de Hausdorff y $p: E \rightarrow X$ una aplicación cubriente de n -hojas. Entonces X es de Hausdorff.*

Demostración. Sean x, y en X puntos distintos. Entonces las fibras $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$ son ajenas. Fijemos \tilde{y}_0 en $p^{-1}(y)$. Como E es de Hausdorff y $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_n\}$ es finita, existen $V_{e_1}, \dots, V_{e_n}, V_{\tilde{y}_0} \subset E$ abiertos ajenos tales que e_i está en V_{e_i} para cada e_i en $p^{-1}(x)$ y \tilde{y}_0 está en $V_{\tilde{y}_0}$.

Sea U un abierto en la cubierta trivializadora de p tal que x está en U . Tomemos $U_1, \dots, U_n \subset E$ las n -hojas ajenas tales que $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$ es un homeomorfismo y e_i está en U_i para cada i . Definimos

$$V = \bigcap_{i=1}^n p(V_{e_i} \cap U_i) \quad \text{y} \quad W = p(V_{\tilde{y}_0})$$

Claramente x está en V y y está en W . Supongamos que existe z en $V \cap W$. Entonces, denotando como z_i a los puntos en la fibra $p^{-1}(z)$, donde z_i está en $V_{e_i} \cap U_i$, tenemos que $p^{-1}(z) = \{z_1, \dots, z_n\}$. Pero, z está en W entonces existe z_i en $V_{\tilde{y}_0}$ lo cual implica que $(V_{e_i} \cap U_i) \cap V_{\tilde{y}_0} \neq \emptyset$ que es una contradicción, pues V_{e_i} y $V_{\tilde{y}_0}$ son ajenos. Por lo tanto $V \cap W = \emptyset$ y se tiene el resultado.

□

Corolario 2.3.14. $F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ son de Hausdorff.

Demostración. Por 2.1.12, tenemos que $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ es de Hausdorff. Por la Proposición 2.2.7 y el Corolario 2.2.13, las funciones $p_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ y $\rho_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ son aplicaciones cubrientes de $n!$ -hojas. De la Proposición 2.3.13 se sigue el resultado.

□

Nota 2.3.15. *Dado que $F_n(\mathbb{R}^\infty) \cong \text{colim}_k F_n(\mathbb{R}^k)$ es un complejo CW, entonces es paracompacto. Más aún, por el Corolario 2.3.14 $F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ son de Hausdorff y como*

$$p_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n \text{ y } \rho_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$$

son cerradas, $F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ son paracompactos. Así, obtenemos que p_n y ρ_n son Σ_n haces universales y los espacios $F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ son espacios clasificantes para el grupo Σ_n ; estos espacios se denotan por $B\Sigma_n$. De manera que si X es un espacio paracompacto entonces existe una biyección

$$[X, B\Sigma_n] \rightarrow \text{Cov}_n(X).$$

Capítulo 3

Aplicaciones Cubrientes

En este capítulo daremos una biyección entre clases de equivalencia de aplicaciones cubrientes de n -hojas sobre un espacio X con ciertas propiedades y clases de conjugación de homomorfismos del grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ en el grupo simétrico Σ_n . Como consecuencia de esta biyección obtendremos la clasificación usual de aplicaciones cubrientes con espacio total conexo por trayectorias. Para esto, vamos a necesitar algunos resultados de aplicaciones cubrientes que no se demostrarán, pero son conceptos comunes en un curso básico de topología algebraica.

3.1 Acciones y Homomorfismos

Consideremos $p: E \rightarrow X$ una aplicación cubriente y x_0 en X . Usando el *Teorema de Levantamiento de trayectorias* y el *Teorema de Levantamiento de homotopías* se prueba que el grupo $\pi_1(X, x_0)$ actúa por la derecha en la fibra $p^{-1}(x_0)$. La acción está dada para cada e en $p^{-1}(x_0)$ por $e \cdot [\omega] = \omega'(1)$, donde ω' es el levantamiento de algún representante de la clase de ω tal que $\omega'(0) = e$.

Lema 3.1.1. *Sea $p: E \rightarrow X$ una aplicación cubriente de n -hojas y x_0 en X . Entonces para cada U en una cubierta trivializadora de p tal que x_0 está en U , p induce un homomorfismo $f_U^p: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$.*

Demostración. Consideremos la acción $p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ descrita anteriormente. Para cada $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$, la función $e \mapsto e \cdot [\omega]^{-1}$ es una biyección de $p^{-1}(x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$, digamos $h_{[\omega]}$. Sea U en la cubierta

trivializadora de p tal que x_0 está en U y tomemos la restricción del mapeo trivializador φ_U a la fibra $p^{-1}(x_0)$, es decir, $\varphi_{U_{x_0}}: p^{-1}(x_0) \rightarrow \bar{n}$, que es una biyección.

Así, para cada $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$, la composición $\varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\omega]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}: \bar{n} \rightarrow \bar{n}$ es una permutación en Σ_n .

Definimos $f_U^p: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$ como $f_U^p[\omega] = \varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\omega]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}$, que está bien definido por lo anterior.

Dado que $h_{[\omega]}$ esta inducida por la acción, tenemos que para cada e en $p^{-1}(x_0)$ y $[\alpha], [\beta]$ en $\pi_1(X, x_0)$ la biyección $h_{[\alpha][\beta]}$ cumple que

$$h_{[\alpha][\beta]}(e) = e \cdot (([\alpha][\beta])^{-1}) = e \cdot ([\beta]^{-1}[\alpha]^{-1}) = (e \cdot [\beta]^{-1})[\alpha]^{-1} = h_{[\alpha]} \circ h_{[\beta]}(e)$$

y de esto se sigue que f_U^p es un homomorfismo pues

$$\begin{aligned} f_U^p([\alpha][\beta]) &= \varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\alpha][\beta]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1} = \varphi_{U_{x_0}} \circ (h_{[\alpha]} \circ h_{[\beta]}) \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1} = \\ &= (\varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\alpha]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}) \circ (\varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\beta]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}) = f_U^p[\alpha] f_U^p[\beta]. \end{aligned}$$

□

Nota 3.1.2. Si U, V son abiertos en una cubierta trivializadora de p tales que x_0 está en $U \cap V$ entonces los homomorfismos inducidos f_U^p y f_V^p son conjugados. En efecto, $\varphi_{U_{x_0}} \circ \varphi_{V_{x_0}}^{-1}$ es una permutación en Σ_n y se sigue que para cada $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tenemos que $(\varphi_{U_{x_0}} \circ \varphi_{V_{x_0}}^{-1}) \circ f_V^p[\omega] \circ (\varphi_{V_{x_0}} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}) = \varphi_{U_{x_0}} \circ (\varphi_{V_{x_0}}^{-1} \circ \varphi_{V_{x_0}}) \circ h_{[\omega]} \circ (\varphi_{V_{x_0}}^{-1} \circ \varphi_{V_{x_0}}) \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1} = \varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\omega]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1} = f_U^p[\omega]$.

Proposición 3.1.3. Sean $p: E \rightarrow X$ y $q: E' \rightarrow X$ aplicaciones cubrientes equivalentes de n -hojas y x_0 en X . Entonces $f_U^p = f_U^q$ para algún U en la cubierta trivializadora de q tal que x_0 está en U .

Demostración. Sea $F: E \rightarrow E'$ una equivalencia entre p y q . Tomemos e en $p^{-1}(x_0)$ y consideremos $\alpha: I \rightarrow X$ un lazo basado en x_0 y α' su levantamiento en E tal que $\alpha'(0) = e$. Así, Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & E & \xrightarrow{F} E' \\ & \nearrow \alpha' & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\alpha} X & \nwarrow q \end{array}$$

Ahora, $q(F(\alpha'(t))) = p(\alpha'(t)) = \alpha(t)$ para cada t en I , entonces $F \circ \alpha'$ es el levantamiento de α en E' tal que $(F \circ \alpha')(0) = F(e)$. Consideremos la

biyección $h'_{[\alpha]}: q^{-1}(x_0) \rightarrow q^{-1}(x_0)$ tal que $h'_{[\alpha]}(e') = e' \cdot [\alpha]^{-1}$. Como F es una equivalencia de aplicaciones cubrientes, tenemos que la restricción a la fibra $p^{-1}(x_0)$ que denotamos por $F_{x_0}: p^{-1}(x_0) \rightarrow q^{-1}(x_0)$, es una biyección. Así, para cada e en $p^{-1}(x_0)$

$$h'_{[\alpha]}(F_{x_0}(e)) = F_{x_0}(e) \cdot [\alpha]^{-1} = F_{x_0} \circ (\alpha^{-1})'(1) = F_{x_0}(e \cdot [\alpha]^{-1}) = F_{x_0}(h_{[\alpha]}(e)).$$

Tomemos φ_U un mapeo trivializador de q tal que x_0 está en U . Como F es una equivalencia, tenemos que $\varphi_U \circ F|_{p^{-1}(U)}$ es un mapeo trivializador de p .

Sea $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned} f_U^p[\omega] &= (\varphi_{U_{x_0}} \circ F_{x_0}) \circ h_{[\omega]}(F_{x_0}^{-1} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}) = \varphi_{U_{x_0}} \circ h'_{[\omega]} \circ F_{x_0} \circ F_{x_0}^{-1} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1} = \\ & \varphi_{U_{x_0}} \circ h'_{[\omega]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1} = f_U^q[\omega] \end{aligned}$$

□

Otra pregunta importante sobre aplicaciones cubrientes es cuándo un espacio topológico X tiene un espacio cubriente. Tomemos el *haz producto* $p: X \times F \rightarrow X$ con F un espacio discreto. En la clasificación usual de aplicaciones cubrientes, se estudian únicamente los cubrientes con espacio total *conexo por trayectorias* y dado que $X \times F$ es disconexo, éste no entra en esa clasificación. Sin embargo, en la clasificación del capítulo anterior, si X un espacio paracompacto y $f: X \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}^\infty)$ la función constante, entonces $f^*E_n(\mathbb{R}^\infty) \cong X \times \bar{n}$.

Para ver cuándo existe dicho cubriente conexo por trayectorias, daremos algunas definiciones. Generalizando la definición del producto en $\pi_1(X, x_0)$, consideremos $\alpha, \beta: I \rightarrow X$ trayectorias tales que $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos $\alpha * \beta: I \rightarrow X$ como

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definición 3.1.4. *Sea (X, x_0) un espacio topológico basado, conexo y localmente conexo por trayectorias. Consideremos $P(X, x_0)$ el conjunto de trayectorias en X tales que tienen punto inicial x_0 . Sean α_1, α_2 en $P(X, x_0)$, decimos que $\alpha_1 \sim \alpha_2$ si*

i) $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$

ii) $[\alpha_1 * \bar{\alpha}_2] = [c_{x_0}]$ el idéntico en $\pi_1(X, x_0)$,

donde c_{x_0} denota la constante x_0 y $\bar{\alpha}_2(t) = \alpha_2(1-t)$ para cada t en I . \sim es una relación de equivalencia, denotamos a la clase de una trayectoria α en $P(X, x_0)$ como $\langle \alpha \rangle$. Definimos

$$\tilde{X} = \{\langle \alpha \rangle \mid \alpha \in P(X, x_0)\}.$$

Al conjunto \tilde{X} se le da la siguiente topología:

Sea $\{U_i\}_{i \in A}$ una base para la topología de X y tomemos $\langle \alpha \rangle$ en \tilde{X} . Definimos un abierto básico en \tilde{X} que contiene a $\langle \alpha \rangle$ como

$$(U_i, \langle \alpha \rangle) = \{\langle \alpha * \lambda \rangle \mid \lambda: I \rightarrow X, \lambda(0) = \alpha(1) \text{ y } \lambda(I) \subset U_i\}.$$

En [8] se prueba que la función $u: \tilde{X} \rightarrow X$ definida como $u(\langle \alpha \rangle) = \alpha(1)$ es continua con esta topología.

Nota 3.1.5. Consideremos $\langle \alpha \rangle$ en \tilde{X} y la clase de la constante x_0 , que denotamos por $\langle c_{x_0} \rangle$. Para cada s en I definimos $\alpha_s: I \rightarrow X$ como $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ y $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$ como $\tilde{\alpha}(s) = \langle \alpha_s \rangle$. En [8] se prueba que esta función $\tilde{\alpha}$ es continua con la topología de \tilde{X} . Ahora, $\alpha_0(t) = x_0$ y $\alpha_1(t) = \alpha(t)$ para cada t en I y tenemos que $\tilde{\alpha}$ es una trayectoria en \tilde{X} de $\langle c_{x_0} \rangle$ a $\langle \alpha \rangle$. Como $\langle \alpha \rangle$ era arbitrario, tenemos que todo punto de \tilde{X} se conecta con $\langle c_{x_0} \rangle$ y por lo tanto \tilde{X} es conexo por trayectorias.

Lema 3.1.6. Sean (X, x_0) un espacio basado, conexo y localmente conexo por trayectorias y α un lazo basado en x_0 . Entonces la función $\alpha*: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ dada por $\alpha*(\langle \beta \rangle) = \langle \alpha * \beta \rangle$ para cada $\langle \beta \rangle$ en \tilde{X} , es continua.

Demostración. Sea $(U, \langle \beta \rangle)$ un abierto básico en \tilde{X} . Veamos que $(\alpha*)^{-1}(U, \langle \beta \rangle)$ es un básico en \tilde{X} . Tomemos $\langle \gamma \rangle$ en $(\alpha*)^{-1}(U, \langle \beta \rangle)$. Entonces existe una trayectoria $\lambda: I \rightarrow X$ tal que $\lambda(1) = \gamma(1)$, $\lambda(I) \subset U$ y $\langle \beta * \lambda \rangle = \langle \alpha * \gamma \rangle$. Esto nos dice que $\bar{\gamma} * \bar{\alpha} * \beta * \lambda \simeq c_{x_0}$, de lo cual se sigue que $\langle \bar{\alpha} * \beta * \lambda \rangle = \langle \gamma \rangle$. Por lo tanto $\langle \gamma \rangle$ está en $(U, \langle \bar{\alpha} * \beta \rangle)$.

Supongamos que $\langle \gamma' \rangle$ está en $(U, \langle \bar{\alpha} * \beta \rangle)$, entonces existe $\lambda': I \rightarrow X$ tal que $\lambda'(1) = \gamma'(1)$, $\lambda'(I) \subset U$ y $\langle \bar{\alpha} * \beta * \lambda' \rangle = \langle \gamma' \rangle$ y por lo tanto $\langle \beta * \lambda' \rangle = \langle \alpha * \gamma' \rangle$, es decir, $\langle \gamma' \rangle$ está en $(\alpha*)^{-1}(U, \langle \beta \rangle)$. Así $(\alpha*)^{-1}(U, \langle \beta \rangle) = (U, \langle \bar{\alpha} * \beta \rangle)$ el cual es también un básico en \tilde{X} .

□

Recordemos que un espacio X es *semilocalmente 1-conexo* si para cada x en X existe una vecindad U de x tal que cada lazo en U es homotópico a la

constante. El siguiente resultado nos dice cuándo \tilde{X} es un cubriente universal de X . La prueba se puede consultar en [8].

Proposición 3.1.7. *Sea (X, x_0) un espacio basado. Si X es conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo, entonces $u: \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación cubriente y $\pi_1(\tilde{X}, \langle c_{x_0} \rangle) = 0$ con $u(\langle c_{x_0} \rangle) = x_0$.*

Nota 3.1.8. *Si (X, x_0) es un complejo-CW basado y conexo, entonces (X, x_0) cumple todas las condiciones de la Proposición 3.1.7.*

Lema 3.1.9. *Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Tomemos x_0 en X . Entonces*

- a) *el grupo $\pi_1(X, x_0)$ actúa por la izquierda en \tilde{X}*
- b) *$\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) \cong X$.*

Demostración. a) Sea $\langle \alpha \rangle$ en \tilde{X} y tomemos $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$. Definimos $[\omega] \cdot \langle \alpha \rangle = \langle \omega * \alpha \rangle$. Si ω' y α' son otros representantes de las clases respectivas tenemos que

$$\omega' * \bar{\omega} \simeq x_0 \text{ y } \alpha' * \bar{\alpha} \simeq x_0.$$

Entonces

$$(\omega' * \alpha') * (\omega * \bar{\alpha}) = \omega' * (\alpha' * \bar{\alpha}) * \bar{\omega} \simeq \omega' * \bar{\omega} \simeq x_0$$

Por lo tanto $\langle \omega * \alpha \rangle = \langle \omega' * \alpha' \rangle$ y está bien definida.

Veamos que es una acción. $[x_0] \cdot \langle \alpha \rangle = \langle x_0 * \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$ para cualquier $\langle \alpha \rangle$ en \tilde{X} . Si $[\omega], [\beta]$ están en $\pi_1(X, x_0)$ entonces

$$([\omega][\beta]) \cdot \langle \alpha \rangle = [\omega * \beta] \cdot \langle \alpha \rangle = \langle \omega * \beta * \alpha \rangle = [\omega] \cdot \langle \beta * \alpha \rangle = [\omega]([\beta] \cdot \langle \alpha \rangle).$$

b) Ahora $u: \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación cubriente y en particular es una identificación. Entonces si definimos $\langle \alpha \rangle \sim \langle \beta \rangle$ si y sólo si $u(\langle \alpha \rangle) = u(\langle \beta \rangle)$, tenemos que $X \cong \tilde{X}/\sim$. Pero $\alpha(1) = \beta(1)$ si y sólo si $[\alpha * \bar{\beta}]$ está en $\pi_1(X, x_0)$ de lo cual se sigue que $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) \cong X$.

□

Nota 3.1.10. *Recordemos que si G es un grupo, es equivalente tener una acción $G \times \bar{n} \rightarrow n$ a tener un homomorfismo $f: G \rightarrow \Sigma_n$. En efecto si $f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \bar{n}$ es un homomorfismo tenemos una acción $\pi_1(X, x_0) \times \bar{n} \rightarrow \bar{n}$ dada por*

$$([\omega], i) \mapsto [\omega] \cdot i = f[\omega](i).$$

En forma similar, si tenemos una acción, definimos el homomorfismo como $[\omega] \mapsto f[\omega]$ que está en Σ_n , donde $f[\omega](i) = [\omega] \cdot i$ para cada i en \bar{n} .

Proposición 3.1.11. *Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo y x_0 en X . Sea $f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$ un homomorfismo. Entonces f y el cubriente universal $u: \tilde{X} \rightarrow X$ inducen una aplicación cubriente de n -hojas que denotamos por $u_f: \tilde{X} \times_f \bar{n} \rightarrow X$.*

Demostración. Por la parte a) del Lema 3.1.9 y la Nota 3.1.10, tenemos una acción

$$\pi_1(X, x_0) \times (\tilde{X} \times \bar{n}) \rightarrow \tilde{X} \times \bar{n}$$

dada por $[\omega] \cdot (\langle \alpha \rangle, i) = ([\omega] \cdot \langle \alpha \rangle, [\omega] \cdot i) = (\langle \omega * \alpha \rangle, f[\omega](i))$. Por la Proposición 3.1.7 la función $u: \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación cubriente y por la parte b) del Lema 3.1.9, tenemos que el mapeo cociente

$$q: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\pi_1(X, x_0)$$

es una aplicación cubriente. En forma similar a la prueba de la Proposición 2.2.10, tenemos que la función

$$\tilde{X} \times_{\pi_1(X, x_0)} \bar{n} \rightarrow \tilde{X}/\pi_1(X, x_0)$$

dada por $[\langle \alpha \rangle, i] \mapsto [\langle \alpha \rangle]$ es una aplicación cubriente de n -hojas. Así, podemos definir

$$u_f: \tilde{X} \times_f \bar{n} \rightarrow X$$

como $u_f[\langle \alpha \rangle, i] = u(\langle \alpha \rangle) = \alpha(1)$, donde $\tilde{X} \times_f \bar{n}$ denota al espacio $\tilde{X} \times_{\pi_1(X, x_0)} \bar{n}$ cuando la acción depende del homomorfismo f . Por lo anterior u_f es una aplicación cubriente de n -hojas.

□

Proposición 3.1.12. *Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo y x_0 en X . Sea $f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$ un homomorfismo. Entonces*

$$u_f^{-1}(x_0) = \{[\langle c_{x_0} \rangle, 1], [\langle c_{x_0} \rangle, 2], \dots, [\langle c_{x_0} \rangle, n]\}$$

y la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en $u_f^{-1}(x_0)$ está dada por

$$[\langle c_{x_0} \rangle, i] \cdot [\omega] = [\langle c_{x_0} \rangle, f[\omega]^{-1}(i)].$$

Demostración. Como u_f es una aplicación cubriente de n -hojas, tenemos que $|u_f^{-1}(x_0)| = n$. Ahora, para cualquier i en \bar{n} tenemos que $u_f[\langle c_{x_0} \rangle, i] = x_0$ y además, si $i \neq j$, se tiene que $[\langle c_{x_0} \rangle, i] \neq [\langle c_{x_0} \rangle, j]$ pues de lo contrario existiría $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que $[\omega] = [c_{x_0}]$ y $f[\omega](i) = j$, que no puede pasar pues f es homomorfismo. Por lo tanto $u_f^{-1}(x_0) = \{[\langle c_{x_0} \rangle, 1], [\langle c_{x_0} \rangle, 2], \dots, [\langle c_{x_0} \rangle, n]\}$.

Para la segunda parte, consideremos $u: \tilde{X} \rightarrow X$ el cubriente universal de X y ω un lazo basado en x_0 . Sea $\tilde{\omega}: I \rightarrow \tilde{X}$ la trayectoria que empieza en $\langle c_{x_0} \rangle$ y termina en $\langle \omega \rangle$ como en la Nota 3.1.5 y tomemos $\langle \alpha \rangle$ en $u^{-1}(x_0)$. Por el Lema 3.1.6 tenemos que $\hat{\omega}: I \rightarrow \tilde{X}$ definida como la composición

$$I \xrightarrow{\tilde{\omega}} \tilde{X} \xrightarrow{\alpha^*} \tilde{X}$$

es continua, donde $\hat{\omega}(0) = \alpha * (\langle \omega_0 \rangle) = \langle \alpha * c_{x_0} \rangle = \langle \alpha \rangle$ y $\hat{\omega}(1) = \alpha * (\langle \omega_1 \rangle) = \langle \alpha * \omega \rangle$. Además, para cada s en I , $u(\hat{\omega}(s)) = u(\langle \alpha * \omega_s \rangle) = \alpha * \omega_s(1) = \omega(s)$ y por lo tanto $\hat{\omega}$ es el levantamiento de ω en \tilde{X} que empieza en $\langle \alpha \rangle$ y termina en $\langle \alpha * \omega \rangle$.

Sean $q_f: \tilde{X} \times \bar{n} \rightarrow \tilde{X} \times_f \bar{n}$ el mapeo cociente y $(Id, i): \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \times \bar{n}$ la inclusión dada por $(Id, i)(\langle \beta \rangle) = (\langle \beta \rangle, i)$. Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{X} & \xrightarrow{(Id, i)} & \tilde{X} \times \bar{n} & \xrightarrow{q_f} & \tilde{X} \times_f \bar{n} \\ & \nearrow \hat{\omega} & \downarrow u & & \swarrow u_f & & \\ I & \xrightarrow{\omega} & X & & & & \end{array}$$

Ahora, $q_f \circ (Id, i) \circ \hat{\omega}$ es una trayectoria en $\tilde{X} \times_f \bar{n}$ que empieza en $[\langle \alpha \rangle, i]$ y termina en $[\langle \alpha * \omega \rangle, i]$. Dado que $\tilde{u}_f \circ q_f \circ (Id, i) \circ \hat{\omega} = u \circ \hat{\omega} = \omega$, se tiene que $q_f \circ (Id, i) \circ \hat{\omega}$ es el levantamiento de ω en $\tilde{X} \times_f \bar{n}$ que empieza en $[\langle \alpha \rangle, i]$.

Por lo anterior tenemos que la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en $u_f^{-1}(x_0)$ esta dada por $[\langle c_{x_0} \rangle, i] \cdot [\omega] = [\langle c_{x_0} * \omega \rangle, i] = [\langle \omega \rangle, i]$. Entonces existe j en \bar{n} tal que $[\langle \omega \rangle, i] = [\langle c_{x_0} \rangle, j]$ y esto pasa si y sólo si $f[\omega]^{-1}(i) = j$.

□

Proposición 3.1.13. *Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo y x_0 en X . Supongamos que $f, g: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$ son homomorfismos conjugados. Entonces $u_f: \tilde{X} \times_f \bar{n} \rightarrow X$ y $u_g: \tilde{X} \times_g \bar{n} \rightarrow X$ son equivalentes.*

Demostración. Sea σ en Σ_n tal que $\sigma f[\omega] \sigma^{-1} = g[\omega]$ para cada $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$. Consideremos $Id \times \sigma^{-1}: \tilde{X} \times \bar{n} \rightarrow \tilde{X} \times \bar{n}$, que resulta un homeomorfismo, pues σ^{-1} es biyectiva. Ahora, sean $(\langle \alpha \rangle, i), (\langle \beta \rangle, j)$ en $\tilde{X} \times \bar{n}$ tales

que sus clases en $\tilde{X} \times_g \bar{n}$ son iguales. Entonces existe $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que

$$(\langle \omega * \alpha \rangle, i) = (\langle \beta \rangle, g[\omega]^{-1}(j))$$

pero por hipótesis tenemos que $(\langle \beta \rangle, g[\omega]^{-1}(j)) = (\langle \beta \rangle, \sigma f[\omega]^{-1} \sigma^{-1}(j))$ y de esto se sigue que $(\langle \omega * \alpha \rangle, \sigma^{-1}(i)) = (\langle \beta \rangle, f[\omega]^{-1} \sigma^{-1}(j))$. Es decir, $Id \times \sigma^{-1}$ pasa al cociente y llamémosle H . Así, obtenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times \bar{n} & \xrightarrow{Id \times \sigma^{-1}} & \tilde{X} \times \bar{n} \\ q_g \downarrow & & \downarrow q_f \\ \tilde{X} \times_g \bar{n} & \xrightarrow{H} & \tilde{X} \times_f \bar{n} \end{array}$$

conmuta, donde q_f y q_g son los mapeos cocientes lo que implica que H es continua. Análogamente $Id \times \sigma$ pasa al cociente y ésta induce H^{-1} .

Ahora, si $u_f: \tilde{X} \times_f \bar{n} \rightarrow X$ y $u_g: \tilde{X} \times_g \bar{n} \rightarrow X$ son las aplicaciones cubrientes de n -hojas inducidas por f y g , tenemos que $u_f H[\langle \alpha \rangle, i] = u_f[\langle \alpha \rangle, \sigma^{-1}(i)] = \alpha(1) = u_g[\langle \alpha \rangle, (i)]$ para cada $[\langle \alpha \rangle, i]$ en $\tilde{X} \times_g \bar{n}$. Por lo tanto H es una equivalencia de aplicaciones cubrientes.

□

Teorema 3.1.14. *Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo y x_0 en X . Entonces la función*

$$Cov_n(X) \rightarrow Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)$$

dada por $[p] \mapsto [f_U^p]$ es una biyección.

Demostración. Denotemos como $\Phi: Cov_n(X) \rightarrow Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)$ a esta función. Por el Lema 3.1.1, f_U^p es un homomorfismo, la Nota 3.1.2 nos dice que no depende de la trivialización que se tome salvo conjugación y por la Proposición 3.1.3, la función pasa de clases de equivalencia de aplicaciones cubrientes a clases de conjugación de homomorfismos. Por lo tanto Φ está bien definida.

Ahora, definimos $\Psi: Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n) \rightarrow Cov_n(X)$ como $\Psi[f] = [u_f]$. La Proposición 3.1.11 afirma que u_f es una aplicación cubriente de n -hojas y la Proposición 3.1.13 nos dice que Ψ esta bien definida.

La idea de la prueba es ver que Ψ y Φ son inversa una de la otra. Primero veamos que $\Phi \circ \Psi = Id$. Tomemos $\Phi \circ \Psi[f] = \Phi[u_f]$. Por la primera parte de la Proposición 3.1.12 tenemos que la fibra $u_f^{-1}(x_0)$ es un conjunto ordenado. Por

construcción de u_f tenemos que existe $W \subset X$ en una cubierta trivializadora de u_f tal que x_0 está en W y ψ_W cumple que $\psi_{W_{x_0}}[\langle c_{x_0} \rangle, i] = i$ para cada i .

Entonces, usando la segunda parte de la Proposición 3.1.12, el homomorfismo inducido por u_f para el abierto W , $f_W^{u_f}$, es la composición

$$i \mapsto [\langle c_{x_0} \rangle, i] \mapsto [\langle c_{x_0} \rangle, i] \cdot [\omega]^{-1} = [\langle c_{x_0} \rangle, f[\omega](i)] \mapsto f[\omega](i).$$

Por lo tanto $\Phi[u_f] = [f_W^{u_f}] = [f]$ y se tiene que $\Psi \circ \Phi = Id$.

Veamos que $\Psi \circ \Phi = Id$. Sea $p: E \rightarrow X$ una aplicación cubriente de n -hojas. Consideremos U en una cubierta trivializadora de p y φ_U el mapeo trivializador. Tomemos el representante $f_U^p: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \Sigma_n$ de $\Phi[p]$ y denotemos por $\tilde{p}: \tilde{E} \rightarrow X$ al cubriente inducido por el homomorfismo f_U^p .

Sea e en E . Como X es un complejo-CW conexo, tenemos que X es conexo por trayectorias, entonces existe una trayectoria $\alpha_e: I \rightarrow X$ de x_0 a $p(e)$. Además, existe una única trayectoria $\beta_e: I \rightarrow E$ tal que $\beta_e(0) = e$, $\beta_e(1)$ está en $p^{-1}(x_0)$ y $p \circ \beta_e = \alpha_e$. Definimos $H: E \rightarrow \tilde{E}$ como

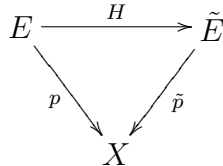
$$H(e) = [\langle \alpha_e \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_e(1)].$$

Para ver que está bien definida tenemos que ver que no depende de la elección de α_e . Sea α'_e otra trayectoria de x_0 a e y β'_e el levantamiento tal que $\beta'_e(0) = e$ y $\beta'_e(1)$ está en $p^{-1}(x_0)$. Entonces $\alpha'_e * \bar{\alpha}_e$ es un lazo basado en x_0 cuyo levantamiento que empieza en $\beta'_e(1)$ y termina en $\beta_e(1)$ es $(\beta'_e) * \beta_e$, pues $p((\beta'_e) * \beta_e) = \alpha'_e * \bar{\alpha}_e$ y la acción del $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$ para este lazo es $\beta'_e(1) \cdot [\alpha'_e * \bar{\alpha}_e] = \beta_e(1)$. Así

$$\begin{aligned} [\alpha'_e * \bar{\alpha}_e] \cdot (\langle \alpha_e \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_e(1)) &= (\langle \alpha'_e * \bar{\alpha}_e * \alpha_e \rangle, f_U^p[\alpha'_e * \bar{\alpha}_e](\varphi_{U_{x_0}} \beta_e(1))) = \\ (\langle \alpha'_e \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \circ h_{[\alpha'_e * \bar{\alpha}_e]} \circ \varphi_{U_{x_0}}^{-1}(\varphi_{U_{x_0}} \beta_e(1))) &= (\langle \alpha'_e \rangle, \varphi_{U_{x_0}}(\beta_e(1) \cdot [\alpha'_e * \bar{\alpha}_e]^{-1})) \end{aligned}$$

que por lo anterior esto es $(\langle \alpha'_e \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta'_e(1))$ y por lo tanto las clases son iguales y está bien definida.

Ahora, $\tilde{p} \circ H(e) = \tilde{p}([\langle \alpha_e \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_e(1)]) = u(\alpha_e(1)) = p(e)$ y tenemos que el siguiente diagrama conmuta



Así, para ver que H es una equivalencia de aplicaciones cubrientes, basta ver que es continua y biyectiva en fibras.

Primero veamos la continuidad. Para esto, recordemos que los abiertos en \tilde{X} son $(U, \langle \alpha \rangle)$ con U un abierto en X entonces un abierto en $\tilde{X} \times \bar{n}$ es $(U, \langle \alpha \rangle) \times \{i\}$ y así un abierto en \tilde{E} es de la forma $[(U, \langle \alpha \rangle), i]$. Probaremos que $H^{-1}[(U, \langle \alpha \rangle), i]$ es abierto en E .

Sea y en $H^{-1}[(U, \langle \alpha \rangle), i]$. Entonces existe $\lambda: I \rightarrow X$ con $\lambda(I) \subset U$ y $\lambda(1) = \alpha_y(1)$ tal que $[\langle \alpha_y \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_y(1)] = [\langle \alpha * \lambda \rangle, i]$ y por lo tanto existe $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que $[\omega] \cdot \varphi_{U_{x_0}} \beta_y(1) = i$. También $\langle \omega * \alpha_y \rangle = \langle \alpha * \lambda \rangle$. Ahora, $p(y)$ está en U , entonces y está en $p^{-1}(U)$ que es un abierto en E . Como E es localmente conexo por trayectorias, existe C_y abierto conexo por trayectorias tal que y está en C_y y $C_y \subset p^{-1}(U)$. Tomemos z en C_y . Entonces existe una trayectoria $\gamma: I \rightarrow E$ tal que $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = z$ y $\gamma(I) \subset C_y$. Así, tenemos que $\bar{\beta}_y * \gamma$ es una trayectoria de $\beta_y(1)$ a z y por lo tanto $p \circ (\bar{\beta}_y * \gamma) = \alpha_y * p \circ \gamma$ es una trayectoria de x_0 a $p(z)$. También, $p(\gamma(1)) = p(y)$ y $p(\gamma(I)) \subset U$, entonces $(\lambda * p \circ \gamma)(I) \subset U$ y por lo tanto $\langle \alpha * \lambda * p \circ \gamma \rangle$ está en $(U, \langle \alpha \rangle)$.

Con esto tenemos que $H(z) = [\langle \alpha_y * p \circ \gamma \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_y(1)]$ y además

$$[\omega] \cdot (\langle \alpha_y * p \circ \gamma \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_y(1)) = (\langle \omega * \alpha_y * p \circ \gamma \rangle, [\omega] \cdot \varphi_{U_{x_0}} \beta_y(1)) = (\langle \alpha * \lambda * p \circ \gamma \rangle, i)$$

y por lo anterior $[\langle \alpha * \lambda * p \circ \gamma \rangle, i]$ está en $[(U, \langle \alpha \rangle), i]$. Por lo tanto $C_y \subset H^{-1}[(U, \langle \alpha \rangle), i]$ y es abierto.

Para ver que H es biyectiva en fibras, basta ver que es inyectiva en fibras, pues las fibras son finitas y de la misma cardinalidad. Sea x en X y tomemos e_1, e_2 en $p^{-1}(x)$ tales que $[\langle \alpha_{e_1} \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_{e_1}(1)] = [\langle \alpha_{e_2} \rangle, \varphi_{U_{x_0}} \beta_{e_2}(1)]$. Entonces, existe $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que $\langle \omega * \alpha_{e_1} \rangle = \langle \alpha_{e_2} \rangle$ y $[\omega] \cdot \varphi_{U_{x_0}} \beta_{e_1}(1) = \varphi_{U_{x_0}} \beta_{e_2}(1)$. De esto se sigue que $\alpha_{e_2} * \bar{\alpha}_{e_1}$ es un representante de $[\omega]$.

Supongamos que γ es el levantamiento de $\alpha_{e_2} * \bar{\alpha}_{e_1}$ que empieza en $\beta_{e_2}(1)$. Por lo anterior, γ termina en $\beta_{e_1}(1)$. Si γ_2 denota a la restricción de γ de $\beta_{e_2}(1)$ a la fibra $p^{-1}(x)$, tenemos que $p \circ \gamma_2 = \alpha_{e_2} = p \circ \bar{\beta}_{e_2}$ por la unicidad del levantamiento. Análogamente, si γ_1 denota la restricción de γ de $p^{-1}(x)$ a $\beta_{e_1}(1)$, tenemos que $p \circ \gamma_1 = \alpha_{e_1}^{-1} = p \circ \beta_{e_1}$. Ahora, como γ es una trayectoria, entonces existe una trayectoria $\lambda: I \rightarrow E$ tal que $\lambda(0) = \beta_{e_2}(0) = e_2$, $\lambda(1) = \beta_{e_1}(0) = e_1$ y

$$\gamma_2 * \lambda * \gamma_1 = \gamma.$$

Pero $\alpha_{e_2} * \bar{\alpha}_{e_1} = p \circ \gamma = p \circ (\gamma_2 * \lambda * \gamma_1) = p \circ \gamma_2 * p \circ \lambda * p \circ \gamma_1 = \alpha_{e_2} * p \circ \lambda * \bar{\alpha}_{e_1}$ y tenemos que $p \circ \lambda$ es la constante x y al ser p un homeomorfismo local tenemos que λ es también una constante. Por lo tanto $e_2 = \lambda(0) = \lambda(1) = e_1$ y se tiene el resultado.

□

Proposición 3.1.15. *Consideremos la aplicación cubriente de n -hojas*

$$q_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n.$$

Tomemos $[(t_1, \dots, t_n)]$ en $F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$. Entonces la acción

$$q_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)] \times \pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)]) \rightarrow q_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)]$$

está dada por $[(t_1, \dots, t_n), i] \cdot [\alpha] = [(t_1, \dots, t_n), [\alpha]^{-1}(i)]$ para cada i en \bar{n} y $[\alpha]$ en $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)])$.

Demostración. Consideremos $p_n: F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$. Recordemos que dado un representante (t_1, \dots, t_n) de la clase $[(t_1, \dots, t_n)]$, la fibra $p_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)]$ es de la forma $\{(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in \Sigma_n\}$. Como la acción es libre, tenemos una biyección $p_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)] \rightarrow \Sigma_n$ dada por $(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) \mapsto \sigma$.

De lo anterior y la sucesión exacta de homotopía de p_n obtenemos un isomorfismo

$$\pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty), [(t_1, \dots, t_n)]) \rightarrow \pi_0(p_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)], (t_1, \dots, t_n)) \rightarrow \Sigma_n,$$

donde la primera flecha está dada por la propiedad de levantamiento de trayectorias del cubriente p_n . Así, tenemos que la clase $[\alpha]$ representa una permutación en Σ_n tal que $(t_1, \dots, t_n) \cdot [\alpha] = (t_{[\alpha](1)}, \dots, t_{[\alpha](n)})$ para cada $[\alpha]$ en $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)])$.

Sea $\alpha: I \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ un lazo basado en $[(t_1, \dots, t_n)]$ y $\tilde{\alpha}$ el levantamiento de α que empieza en (t_1, \dots, t_n) en $p_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)]$. Considremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & F_n(\mathbb{R}^\infty) & \xrightarrow{(Id, i)} & F_n(\mathbb{R}^\infty) \times \bar{n} & \xrightarrow{q} & F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \\ & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p_n & & \swarrow q_n & & \\ I & \xrightarrow{\alpha} & F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n & & & & \end{array}$$

donde (Id, i) es la inclusión en la coordenada i , q es el mapeo cociente. Así, $\hat{\alpha} = q \circ (Id, i) \circ \tilde{\alpha}$ es el levantamiento a $F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$ del lazo α . Ahora,

$$\hat{\alpha}(0) = q((Id, i)\tilde{\alpha}(0)) = q(Id, i)(t_1, \dots, t_n) = [(t_1, \dots, t_n), i] \quad y$$

$$\hat{\alpha}(1) = q((Id, i)\tilde{\alpha}(1)) = [(t_{[\alpha](1)}, \dots, t_{[\alpha](n)}), i] = [(t_1, \dots, t_n), [\alpha]^{-1}(i)].$$

Por lo anterior, la acción del grupo $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)])$ en la fibra $q_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)]$ está dada por $[(t_1, \dots, t_n), i] \cdot [\alpha] = [(t_1, \dots, t_n), [\alpha]^{-1}(i)]$.

□

Corolario 3.1.16. *El homomorfismo inducido por q_n*

$$f_U^{q_n} : \pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)]) \rightarrow \Sigma_n$$

está dado por $f_U^{q_n}[\alpha](i) = [\alpha](i)$, para algún U en la cubierta trivializadora de q_n .

Demostración. Consideremos $[(t_1, \dots, t_n)]$ en el abierto U tal que el mapeo trivializador $\varphi_U : q_n^{-1}(U) \rightarrow U \times \bar{n}$ restringido a las fibras está dado como

$$\varphi_{U_{[(t_1, \dots, t_n)]}}[(t_1, \dots, t_n), i] = ([t_1, \dots, t_n], i).$$

Así, tenemos que el homomorfismo $f_U^{q_n}$ es de la forma

$$f_U^{q_n}[\alpha](i) = \varphi_{U_{[(t_1, \dots, t_n)]}} h_{[\alpha]} \varphi_{U_{[(t_1, \dots, t_n)]}}^{-1}(i) = \varphi_{U_{[(t_1, \dots, t_n)]}}[(t_1, \dots, t_n), [\alpha](i)] = [\alpha](i).$$

□

Recordemos que si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una función continua, el homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ está dado por $f_*[\omega] = [f \circ \omega]$ para cada $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$.

Corolario 3.1.17. *Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)])$ una función continua. Entonces f_* está determinado por la acción*

$$q_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)] \times \pi_1(F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n, [(t_1, \dots, t_n)]) \rightarrow q_n^{-1}[(t_1, \dots, t_n)]$$

es decir, $f_*[\omega](i) = j$, si $[(t_1, \dots, t_n), j] \cdot [f \circ \omega] = [(t_1, \dots, t_n), i]$.

Demostración. Sea $\omega : I \rightarrow X$ un lazo en x_0 . Supongamos que

$$[(t_1, \dots, t_n), j] \cdot [f \circ \omega] = [(t_1, \dots, t_n), i].$$

Por la Proposición 3.1.15, tenemos que

$$[(t_1, \dots, t_n), j] \cdot [f \circ \omega] = [(t_1, \dots, t_n), [f \circ \omega]^{-1}(j)].$$

Por lo tanto $j = [f \circ \omega](i) = f_*[\omega](i)$.

□

Una aplicación de los Teoremas 2.3.11 y 3.1.14 es el siguiente resultado.

Teorema 3.1.18. *Sea X un espacio paracompacto, conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo y x_0 en X . Consideremos $B\Sigma_n$ el espacio clasificante del grupo Σ_n mencionado en la Nota 2.3.15. Entonces la función*

$$[X, B\Sigma_n] \rightarrow \text{Hom}^{\text{conj}}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)$$

dada por $[f] \mapsto [f_*]$ es biyectiva.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n$ una función continua. Consideremos el pullback de q_n con respecto a f y la función inducida por q_n , $p: f^*F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \rightarrow X$ que es una aplicación cubriente de n -hojas. Sea x_0 en X . Recordemos que si (t_1, \dots, t_n) es un representante de la clase $f(x_0) = [(t_1, \dots, t_n)]$ entonces la fibra

$$p^{-1}(x_0) = \{[(t_1, \dots, t_n), i], x_0\} \in F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \times X \mid i \in \bar{n}\}.$$

Sea $\omega: I \rightarrow X$ un lazo en x_0 . Fijemos i_0 en \bar{n} . Entonces existe una única trayectoria $\tilde{\omega}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & f^*F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n} & \xrightarrow{\bar{f}} F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n} \\ & \nearrow \tilde{\omega} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\omega} & X \xrightarrow{f} F_n(\mathbb{R}^\infty)/\Sigma_n \\ & & \downarrow q_n \end{array}$$

conmuta, $\tilde{\omega}(0) = [(t_1, \dots, t_n), i_0], x_0$ y $\tilde{\omega}(1)$ está en $p^{-1}(x_0)$. De la conmutatividad del diagrama, tenemos que la trayectoria $\bar{f} \circ \tilde{\omega}$ es el levantamiento de $f \circ \omega$ a $F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n}$ que empieza en $\bar{f} \circ \tilde{\omega}(0) = [(t_1, \dots, t_n), i_0]$ y termina en $\bar{f} \circ \tilde{\omega}(1) = [(t_1, \dots, t_n), i]$ para alguna i en \bar{n} . Por lo tanto $\tilde{\omega}(1) = [(t_1, \dots, t_n), i], x_0$. Así, la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$ está dada por

$$([(t_1, \dots, t_n), j], x_0) \cdot [\omega] = ([f \circ \omega], x_0)$$

Sea U en una cubierta trivializadora de q_n tal que $f(x_0)$ está en U y φ_U el mapeo trivializador. Ahora, para $U' = f^{-1}(U)$, tenemos que x_0 está en U' y el mapeo trivializador $\psi'_{U'}$ cumple que $\psi'_{U'_x_0} = \varphi_{U_{f(x_0)}} \times \{x_0\}$. Sean

$$h'_{[\omega]}: p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0) \quad \text{y} \quad h'_{[f \circ \omega]}: q_n^{-1}(f(x_0)) \rightarrow q_n^{-1}(f(x_0))$$

las biyecciones inducidas por las clases $[\omega]$ y $[f \circ \omega]$ en p y q_n respectivamente. Entonces, tenemos que el homomorfismo inducido por p es de la forma

$$f'^p_{U'}[\omega](i) = \psi'_{U'_x_0} h'_{[\omega]} \psi'^{-1}_{U'_x_0}(i) = (\varphi_{U_{f(x_0)}} \times \{x_0\})(h'_{[f \circ \omega]} \times \{x_0\})(\varphi_{U_{f(x_0)}} \times \{x_0\})^{-1}(i)$$

$$= f_U^{q_n} [f \circ \omega](i).$$

Pero, por el Corolario 3.1.16, tenemos que

$$f_U^{q_n} [f \circ \omega](i) = [f \circ \omega](i) = f_*[\omega](i).$$

Por lo tanto $f_U^p = f_*$. Consideremos las biyecciones Ψ del Corolario 2.3.12 y Φ del Teorema 3.1.14 tales que $\Psi[f] = [f^* F_n(\mathbb{R}^\infty) \times_{\Sigma_n} \bar{n}]$ y $\Phi[p] = [f_U^p]$. Así, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} [X, B\Sigma_n] & \xrightarrow{[f] \mapsto [f_*]} & Hom^{conj}(\pi_n(X, x_0), \Sigma_n) \\ & \searrow \Psi & \nearrow \Phi \\ & Cov_n(X) & \end{array}$$

y como Ψ y Φ son biyecciones, se tiene el resultado. □

3.2 La Clasificación Usual

Proposición 3.2.1. Sean $p: E \rightarrow X$ una aplicación cubriente con X conexo por trayectorias y x_0 en X . Entonces E es conexo por trayectorias si y sólo si la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en la fibra $p^{-1}(x_0)$ es transitiva.

Demostración. Sean e_1, e_2 en $p^{-1}(x_0)$. Como E es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $\beta: I \rightarrow E$ tal que $\beta(0) = e_1$ y $\beta(1) = e_2$. Ahora, $p(e_1) = p(e_2) = x_0$, entonces $p \circ \beta: I \rightarrow X$ es un lazo basado en x_0 cuyo levantamiento que empieza en e_1 es β . Por lo tanto $e_1 \cdot [p \circ \beta] = \beta(1) = e_2$ y la acción es transitiva.

Para el regreso tomemos e, e' en E . Como X es conexo por trayectorias, existen $\alpha, \alpha': I \rightarrow X$ trayectorias que empiezan en $p(e)$ y $p(e')$ respectivamente y terminan en x_0 . Entonces existen levantamientos $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}': I \rightarrow E$ de α y α' que empiezan en e y e' respectivamente y también $\tilde{\alpha}(1), \tilde{\alpha}'(1)$ están en $p^{-1}(x_0)$. Ahora, la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en $p^{-1}(x_0)$ es transitiva, entonces para $\tilde{\alpha}(1)$ y $\tilde{\alpha}'(1)$ existe $[\omega]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{\alpha}(1) \cdot [\omega] = \tilde{\alpha}'(1)$, es decir, existe un levantamiento $\tilde{\omega}$ de un representante de la clase $[\omega]$ tal que $\tilde{\omega}(0) = \tilde{\alpha}(1)$ y $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. Si denotamos por $\gamma(t) = \tilde{\alpha}'(1 - t)$, obtenemos que $\tilde{\alpha} * \tilde{\omega} * \gamma$ es una trayectoria de e a e' . □

Definición 3.2.2. Denotemos por $Cov_n^c(X)$ a las clases de equivalencia de aplicaciones cubrientes de n -hojas con espacio total conexo por trayectorias y por $Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)^T$ a las clases de conjugación de homomorfismos cuya acción inducida es transitiva.

Proposición 3.2.3. Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Tomemos x_0 en X . Entonces la función

$$Cov_n^c(X) \rightarrow Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)^T.$$

dada por $[p] \mapsto [f_U^p]$ es biyectiva.

Demostración. Consideremos las funciones Φ y Ψ de la prueba del Teorema 3.1.14. Por la Proposición 3.2.1 tenemos que

$$\Phi|_{Cov_n^c(X)}: Cov_n^c(X) \rightarrow Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)^T \quad y$$

$$\Psi|_{Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)^T}: Hom^{conj}(\pi_1(X, x_0), \Sigma_n)^T \rightarrow Cov_n^c(X).$$

Como una es inversa de la otra se tiene el resultado. \square

Sea G un grupo y X un conjunto. Diremos que X es un G -conjunto transitivo si existe una acción $G \times X \rightarrow X$ transitiva. Consideremos $H \leq G$. Entonces G/H es un G -conjunto transitivo, pues G actúa por traslación en G/H y además, esta acción es transitiva. También recordemos que dos G -conjuntos X y Y son G -isomorfos si existe una biyección $\varphi: X \rightarrow Y$ tal que $g \cdot \varphi(x) = \varphi(g \cdot x)$ para cada g en G y x en X . De esto se sigue que $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X$ es también un G -isomorfismo, pues si y está en Y , entonces $y = \varphi(x)$ para algún x en X . Así, $\varphi^{-1}(g \cdot y) = \varphi^{-1}(g \cdot \varphi(x)) = g \cdot x = g \cdot \varphi^{-1}(y)$, para cada g en G .

Lema 3.2.4. Sea G un grupo y $H, K \leq G$.

i) Si X es un G -conjunto transitivo, entonces para cada $x \in X$, G/G_x y X son G -isomorfos, donde G_x denota al subgrupo de isotropía de x .

ii) H y K son conjugados si y sólo si G/H y G/K son G -isomorfos.

Demostración. i) Sea x_0 en X . Denotemos como $O(x_0)$ a la órbita de x_0 . Definimos $\delta_{x_0}: G \rightarrow O(x_0)$ como $\delta_{x_0}(g) = g \cdot x_0$. Ahora, $\delta_{x_0}(g) = x_0$ si y sólo

si g está en G_{x_0} . Entonces δ_{x_0} pasa al cociente

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta_{x_0}} & O(x_0) \\ \downarrow & \nearrow \bar{\delta}_{x_0} & \\ G/G_{x_0} & & \end{array}$$

donde $\bar{\delta}_{x_0}[g] = \delta_{x_0}(g) = g \cdot x_0$. Veamos que $\bar{\delta}_{x_0}$ es un G -isomorfismo.

Claramente δ_{x_0} es suprayectiva, de lo cual se sigue que $\bar{\delta}_{x_0}$ también lo es. Sean $[g], [g']$ en G/G_{x_0} tales que $\bar{\delta}_{x_0}[g] = \bar{\delta}_{x_0}[g']$. Entonces $g \cdot x_0 = g' \cdot x_0$ y tenemos que $g^{-1}g'$ está en G_{x_0} . Por lo tanto $[g] = [g']$ y es inyectiva. Sea g en G . Entonces

$$\bar{\delta}_{x_0}(g \cdot [g']) = \bar{\delta}_{x_0}[gg'] = \delta_{x_0}(gg') = (gg') \cdot x_0 = g \cdot (g' \cdot x_0) = g \cdot \delta_{x_0}(g') = g \cdot \bar{\delta}_{x_0}[g']$$

para cada $[g']$ en G/G_{x_0} . Por lo tanto es G -isomorfismo. Ahora, como la acción es transitiva tenemos que para cualquier x en X existe g en G tal que $x = g \cdot x_0$. Así $O(x_0) = X$ y se tiene el resultado.

ii) Supongamos que $H = aKa^{-1}$ para alguna a en G . Definimos $\varphi: G/H \rightarrow G/K$ como $\varphi([g]_H) = [ga]_K$. Sean g y g' en G . Entonces son equivalentes: $[g]_H = [g']_H$; $g^{-1}g'$ está en H ; $a^{-1}g^{-1}g'a$ está en K y $[g'a]_K = [ga]_K$. Por lo tanto, φ está bien definida y es inyectiva. Sea $[b]_K$ en G/K . Entonces $\varphi([ba^{-1}]_H) = [ba^{-1}a]_K = [b]_K$, por lo cual φ es suprayectiva. Veamos que φ es G -isomorfismo. Sea g en G . Entonces

$$\varphi(g \cdot [g']_H) = \varphi([gg']_H) = [(gg')a]_K = [g(g'a)]_K = g \cdot [g'a]_K = g \cdot \varphi([g']_H).$$

Para el regreso supongamos que $\theta: G/H \rightarrow G/K$ es un G -isomorfismo. Sea a en G tal que $\theta([e]_H) = [a]_K$. Entonces para cualquier h en H tenemos que

$$[a]_K = \theta([e]_H) = \theta([h]_H) = \theta(h \cdot [e]_H) = h \cdot \theta([e]_H) = h \cdot [a]_K = [ha]_K.$$

Entonces $a^{-1}ha$ está en K y por lo tanto $a^{-1}Ha \subset K$. Ahora $\theta^{-1}([e]_K) = [a^{-1}]_H$ y análogamente al argumento anterior, se sigue que $aKa^{-1} \subset H$ si y sólo si $K \subset a^{-1}Ha$. Por lo tanto $K = a^{-1}Ha$.

□

Nota 3.2.5. En la prueba del Lema 3.1.1 se vió una forma de asociar un homomorfismo de $\pi_1(X, x_0)$ en Σ_n a la acción del grupo $\pi_1(X, x_0)$ en la fibra sobre x_0 . Esto se puede generalizar a cualquier conjunto finito X . Consideremos una acción $G \times X \rightarrow X$ y una biyección $h: \bar{n} \rightarrow X$. Definimos

$f: G \rightarrow \Sigma_n$ como $f(g)(i) = h^{-1}(g \cdot h(i))$ para cada i en \bar{n} . Además, si $h': \bar{n} \rightarrow X$ es otra biyección y $f': G \rightarrow \Sigma_n$ denota al homomorfismo inducido, tenemos que $h^{-1} \circ h'$ es una permutación en Σ_n y para cada g en G

$$(h^{-1} \circ h')^{-1} \circ f(g) \circ (h^{-1} \circ h') = f'(g)$$

y por lo tanto la clase de conjugación del homomorfismo f no depende de la elección de la biyección.

Lema 3.2.6. *Sea G un grupo y $H, K \leq G$ de índice n . Si H y K son conjugados entonces los homomorfismos inducidos por la acción por traslación de G en G/H y G/K son conjugados.*

Demostración. Como H y K tienen índice n , tenemos biyecciones $h_1: \bar{n} \rightarrow G/H$ y $h_2: \bar{n} \rightarrow G/K$. Entonces los homomorfismos inducidos $f_H, f_K: G \rightarrow \Sigma_n$ están dados por $f_H(g)(i) = h_1^{-1}(g \cdot h_1(i))$ y $f_K(g)(i) = h_2^{-1}(g \cdot h_2(i))$. Por el segundo inciso del Lema 3.2.4 existe un G -isomorfismo $\varphi: G/H \rightarrow G/K$. Entonces la composición

$$\bar{n} \xrightarrow{h_1} G/H \xrightarrow{\varphi} G/K \xrightarrow{h_2^{-1}} \bar{n}$$

es una permutación en Σ_n . Así, para cada i en \bar{n} y g en G , tenemos que

$$(h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1)(f_H(g)(i)) = (h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1)(h_1^{-1}(g \cdot h_1(i))) = h_2^{-1}(\varphi(g \cdot h_1(i))).$$

Pero φ es un G -isomorfismo entonces $h_2^{-1}(\varphi(g \cdot h_1(i))) = h_2^{-1}(g \cdot \varphi(h_1(i)))$. Por otro lado

$$f_K(g)((h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1)(i)) = h_2^{-1}(g \cdot (h_2(h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1)(i))) = h_2^{-1}(g \cdot \varphi(h_1(i)))$$

y por lo tanto $(h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1)(f_H(g))(h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1)^{-1} = f_K(g)$ para cada g en G .

□

Lema 3.2.7. *Sean G un grupo y $f, f': G \rightarrow \Sigma_n$ homomorfismos conjugados cuyas acciones inducidas son transitivas. Entonces los subgrupos de isotropía de i , G_i y G'_i respectivamente, son conjugados para cada i en \bar{n} .*

Demostración. Supongamos que existe σ en Σ_n tal que $\sigma f'(g) \sigma^{-1} = f(g)$ para cada g en G . Por hipótesis \bar{n} es un G -conjunto transitivo y por el primer inciso del Lema 3.2.4 tenemos G -isomorfismos $\delta_i: G/G_i \rightarrow \bar{n}$ y $\delta'_i: G/G'_i \rightarrow \bar{n}$ para cada i en \bar{n} . De esto se sigue que la composición

$$G/G'_i \xrightarrow{\delta'_i} \bar{n} \xrightarrow{\sigma} \bar{n} \xrightarrow{\delta_i^{-1}} G/G_i$$

es una biyección. Veamos que es un G -isomorfismo. Sea $[a]$ en G/G'_i y g en G . Entonces

$$\begin{aligned} \delta_i^{-1}(\sigma(\delta'_i(g \cdot [a]))) &= \delta_i^{-1}(\sigma(g \cdot \delta'_i[a])) = \delta_i^{-1}(\sigma(f'(g)(\delta'_i[a]))) = \delta_i^{-1}(f(g)(\sigma(\delta'_i[a]))) = \\ &= \delta_i^{-1}(g \cdot (\sigma(\delta'_i[a]))) = g \cdot \delta_i^{-1}(\sigma(\delta'_i[a])) \end{aligned}$$

Por lo tanto G'_i y G_i son G -isomorfos. Por el segundo inciso del Lema 3.2.4 son conjugados. □

Proposición 3.2.8. *Sea G un grupo. Denotemos por $\{H \leq G\}_n^{conj}$ al conjunto de clases de conjugación de subgrupos de G de índice n . Entonces la función*

$$Hom^{conj}(G, \Sigma_n)^T \rightarrow \{H \leq G\}_n^{conj}$$

dada por $[f] \mapsto [G_i]$ es una biyección, donde G_i es el subgrupo de isotropía de la acción inducida por f para alguna i .

Demostración. Para cada homomorfismo $f: G \rightarrow \Sigma_n$, tenemos que los subgrupos de isotropía dados por la acción transitiva inducida por f , son de índice n y también son conjugados.

Definimos $\Phi: Hom^{conj}(G, \Sigma_n)^T \rightarrow \{H \leq G\}_n^{conj}$ como $\Phi[f] = [G_i^f]$, donde G_i^f es el subgrupo de isotropía de la acción inducida por f para alguna i . El Lema 3.2.7 muestra que Φ no depende de la clase de conjugación y por lo tanto esta bien definida.

Para ver que Φ es biyectiva, definimos $\Psi: \{H \leq G\}_n^{conj} \rightarrow Hom^{conj}(G, \Sigma_n)^T$ como $\Psi[H] = [f_H]$, donde f_H es como en la prueba del Lema 3.2.6 que también nos dice Ψ esta bien definida.

Sea $f: G \rightarrow \Sigma_n$ un homomorfismo cuya acción inducida es transitiva. Entonces tenemos un G -isomorfismo $\varphi: G/G'_i \rightarrow \bar{n}$ para alguna i , que en particular es una biyección. Así, tenemos que un representante de la clase de conjugación de $\Psi[G_i^f]$ está dado por $f_{G_i^f}: G \rightarrow \Sigma_n$ donde $f_{G_i^f}(g)(j) = \varphi(g \cdot \varphi^{-1}(j)) = g \cdot j = f(g)(j)$, para cada g en G y j en \bar{n} . Por lo tanto $\Psi \circ \Phi[f] = [f]$.

Sea $H \leq G$ de índice n . Consideremos una biyección $h: \bar{n} \rightarrow G/H$. Entonces la acción $G \times \bar{n} \rightarrow \bar{n}$ inducida por f_H , está dada por

$$g \cdot i = f_H(g)(i) = h^{-1}(g \cdot h(i)).$$

Ahora, para cada i en \bar{n} , tenemos que $i = g \cdot i = h^{-1}(g \cdot h(i))$ si y sólo si $h(i) = g \cdot h(i)$. Por lo tanto, si $G_{h(i)}$ denota al subgrupo de isotropía de $h(i)$ para la acción por traslación $G \times G/H \rightarrow G/H$, entonces $G_i^{f_H} = G_{h(i)}$. Pero $G_{h(i)}$ es conjugado de H , de aquí se sigue que $\Phi \circ \Psi[H] = \Phi[f_H] = [G_i^{f_H}] = [H]$.

□

De las Proposiciones 3.2.3 y 3.2.8 obtenemos la clasificación usual de aplicaciones cubrientes:

Teorema 3.2.9. *Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente 1-conexo. Tomemos x_0 en X . Entonces la función*

$$\text{Cov}_n^c(X) \rightarrow \{H \leq \pi_1(X, x_0)\}_n^{\text{conj}}$$

dada por $[p] \mapsto [p_*\pi_1(E, e)]$ es una biyección, donde E es el espacio total del cubriente p y e está en $p^{-1}(x_0)$.

Demostración. Por las Proposiciones 3.2.3 y 3.2.8 tenemos que la composición

$$\text{Cov}_n^c(X) \rightarrow \text{Hom}^{\text{conj}}(\pi_1(X, x_0)^T, \Sigma_n) \rightarrow \{H \leq \pi_1(X, x_0)\}_n^{\text{conj}}$$

dada por $[p] \mapsto [f^p] \mapsto [\pi_1(X, x_0)_e]$ es una biyección, donde $\pi_1(X, x_0)_e$ es el subgrupo de isotropía de e correspondiente a la acción inducida por el homomorfismo f^p y e en $p^{-1}(x_0)$. Ahora, la acción inducida por f^p está dada por la acción

$$p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0).$$

Veamos que $\pi_1(X, x_0)_e = p_*\pi_1(E, e)$. Sea $[\alpha]$ en $\pi_1(X, x_0)$ tal que $[\alpha] \cdot e = e$. Entonces existe una trayectoria $\tilde{\alpha}: I \rightarrow E$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}(1) = e$ y $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$. Esto implica que $\tilde{\alpha}$ es un lazo en e y $p_*[\tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\alpha}] = [\alpha]$. Por lo tanto $\pi_1(X, x_0)_e \leq p_*\pi_1(E, e)$.

Supongamos que β es un lazo en e . Entonces $p \circ \beta$ es un lazo en x_0 cuyo levantamiento que empieza en e es β . Además, $[\beta] \cdot e = e$ y por lo tanto $[p \circ \beta] = p_*[\beta]$ está en $\pi_1(X, x_0)_e$. Así, $p_*\pi_1(E, e)$ es el subgrupo de isotropía de e y tenemos que $[p] \mapsto [p_*\pi_1(E, e)]$ es una biyección.

□

Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, “*Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*”, Springer, 2002.
- [2] J. Dugundji, “*Topology*”, Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [3] E. Fadell, L. Neuwirth, “*Configuration Spaces*” Math. Scand. 10, pp. 111-118, 1962.
- [4] B. Gray, “*Homotopy Theory, An Introduction to Algebraic Topology*”, Academic Press Inc., 1975
- [5] S. T. Hu, “*Elements of General Topology*”, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.
- [6] J. Milnor, “*Topology from the Differentiable Viewpoint*”, University Press of Virginia, 1972.
- [7] B. O’Neill, “*Semi-Riemannian Geometry*”, Academic Press, 1983
- [8] J. J. Rotman, “*An Introduction to Algebraic Topology*”, Springer-Verlag New York Inc., 1988.
- [9] N. Steenrod, “*The Topology of Fibre Bundles*”, Princeton University Press, 1951.

