



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Funciones elípticas y el espacio  
de subgrupos cerrados de  $\mathbb{R}^2$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

NOMBRE DEL ALUMNO  
JULIO ARNOLDO PRADO SAAVEDRA

TUTOR  
DR. ADOLFO GUILLOT SANTIAGO

2011





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Prado

Saavedra

Julio Arnoldo

55 38 10 86

Universidad Nacional Autónoma de  
México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

095615620

2. Datos del tutor

Dr

Adolfo

Guillot

Santiago

3. Datos del sinodal 1

Dr

Javier

Páez

Cárdenas

4. Datos del sinodal 2 Dr

Jacob

Mostovoy

5. Datos del sinodal 3

Dra

Margareta

Boege

von Mentz

6. Datos del sinodal 4

Dr

Guillermo Javier Francisco

Sienra

Loera

7. Datos del trabajo escrito

Funciones elípticas y el espacio  
de subgrupos cerrados de  $\mathbb{R}^2$

126 p

2011

Funciones elípticas y el espacio de subgrupos  
cerrados de  $\mathbb{R}^2$

Julio Arnoldo Prado Saavedra



*A Inés y Belén... con todo mi cariño.*



# Índice general

<b>1. Superficies de Riemann</b>	<b>11</b>
1.1. Superficies de Riemann . . . . .	11
1.2. Generalidades sobre acciones de grupos . . . . .	15
<b>2. Funciones Elípticas</b>	<b>27</b>
2.1. Generalidades de las funciones periódicas . . . . .	27
2.2. Propiedades de las funciones elípticas . . . . .	32
2.3. Construcción de funciones elípticas . . . . .	37
2.4. Descripción topológica de la función $\wp$ . . . . .	52
<b>3. Curvas Elípticas</b>	<b>57</b>
3.1. Retículas, toro y grupo modular . . . . .	57
<b>4. El espacio de los subgrupos cerrados de <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>75</b>
4.1. Una métrica para una topología adecuada . . . . .	75
4.2. $H$ un subespacio familiar . . . . .	77
4.3. Suspensión e involución . . . . .	80
4.4. Los subgrupos isomorfos a $\mathbb{R}$ . . . . .	82
4.5. La involución de la suspensión . . . . .	88
<b>A. Apéndice</b>	<b>91</b>
A.1. Variable compleja . . . . .	91
A.2. Series de funciones . . . . .	101





# Introducción

La tesis central del siguiente trabajo parte de un artículo escrito por Ibrahim Pourezza y John Hubbard [16], publicado en el año de 1978, en el cual elegantemente demuestran una relación geométrica (simple pero contundente) entre dos estructuras matemáticas muy familiares para nosotros, estamos hablando de la esfera  $S^4$  y del conjunto formado por todos los subgrupos aditivos y cerrados del plano real. Dicha relación, como veremos en este trabajo, es un homeomorfismo, que vendrá precedido por resultados aún más inesperados.

El título que hemos elegido es también una referencia obligada a las matemáticas implicadas en la demostración de dichos resultados. De este modo, durante la lectura del presente escrito, y a través de una narración, que esperamos sea fructífera, iremos exponiendo los resultados de la teoría de Weierstrass, del análisis complejo, de topología, teoría de grupos, variable compleja, etc. que serán fundamentales para nuestro trabajo.

En el Capítulo 1 definimos y estudiamos las superficies de Riemann como los dominios naturales entre los que se definen las funciones holomorfas. Posteriormente vemos algunos resultados relevantes sobre acciones de grupos. Finalmente, analizaremos algunos ejemplos interesantes de superficies de Riemann.

En el Capítulo 2 estudiamos a las funciones elípticas, junto con sus características algebraicas y topológicas. Posteriormente vemos con más detalle teoremas importantes y resultados relativos a las funciones elípticas. Como desenlace de este capítulo, nos ocuparemos de la construcción formal de las funciones elípticas. Y cerramos con un breve pero cuidadoso estudio de las propiedades topológicas de las funciones elípticas, y particularmente de la función  $\wp$  de Weierstrass.

En el Capítulo 3 estudiamos la relación de semejanza entre las retículas de períodos generados, vemos como se traduce esta relación a las correspondientes superficies de Riemann asociadas. También estudiamos a detalle una aritmética muy fina dada por la acción del grupo modular en el semiplano superior, derivando en el estudio de la función modular  $J$ . Finalmente, vemos la definición de curva elíptica y cómo se relaciona geoméricamente con el toro.

En el Capítulo 4 estudiamos a detalle el espacio de los subgrupos cerrados de  $\mathbb{R}^2$ , definiendo una métrica adecuada que nos permita generar una estructura topológica en dicho conjunto. Posteriormente todo el trabajo se enfoca en el desarrollo de las técnicas que nos permiten construir, vía homeomorfismos, correspondencias entre objetos geométricos tales como la esfera  $S^2$ , el toro, el nudo trébol, y subconjuntos del espacio de los subgrupos cerrados de  $\mathbb{R}^2$ .

Siendo ésta una tesis de licenciatura, hemos procurado no obviar conclusiones, optando por hacer hincapié en las demostraciones, y sólo en algunos casos estimamos suficiente dar una adecuada referencia. Por último, y también en consideración al lector, hemos incluido un apartado final o apéndice con teoremas clásicos de variable compleja.

# Agradecimientos

Antes que nada quisiera agradecer a las personas, que durante todos estos años me apoyaron con su afecto y su confianza, animándome a seguir y enseñándome a realizar ésta fundamental etapa profesional. Noble circunstancia que me deja gratos recuerdos, gente muy querida y valiosas enseñanzas para la vida. María Luisa, Lucía, Ricardo, Alberto, Adolfo, Margareta, gracias.

Y finalmente, quisiera agradecer a todos aquellos que hicieron y hacen posible nuestra Universidad Nacional Autónoma de México.

*Julio Prado*



# Capítulo 1

## Superficies de Riemann

### 1.1. Superficies de Riemann

Las superficies de Riemann son los dominios naturales entre los que se definen las funciones holomorfas.

Antes de pasar a una definición formal de superficie de Riemann, retomemos el concepto de *variedad*.

Una variedad es un espacio topológico localmente modelado a partir de  $\mathbb{R}^n$ . El significado del modelo depende de las propiedades o patrones de  $\mathbb{R}^n$  que se deseen preservar y estudiar. Y para su generación, se busca cubrir adecuadamente la variedad con piezas que posean dicho patrón. En este sentido, un patrón es descrito operacionalmente en términos de las transformaciones que lo preserven. Finalmente al hacer que pedazos de  $\mathbb{R}^n$  sean pegados entre sí de acuerdo a estas transformaciones nos permite obtener una variedad con el patrón deseado.

El conjunto permitido de funciones o *mapeos de pegado* debe satisfacer algunas propiedades naturales.

**Definición.** *Un pseudogrupo en un espacio topológico  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto  $\mathcal{G}$  de homeomorfismos entre conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , que satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *El dominio de los elementos  $g \in \mathcal{G}$  es una cubierta de  $\mathbb{R}^n$ .*
2. *La restricción de un elemento  $g \in \mathcal{G}$  a cualquier subconjunto abierto contenido en su dominio, también está contenida en  $\mathcal{G}$ .*
3. *Si  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  con  $g_1: U_1 \rightarrow V_1$  y  $g_2: U_2 \rightarrow V_2$ , tales que la intersección  $V_1 \cap U_2$  es distinta del vacío entonces, la siguiente composición restringida*

$$g_2 \circ g_1: g_1^{-1}(V_1 \cap U_2) \rightarrow g_2(V_1 \cap U_2)$$

*pertenece a  $\mathcal{G}$ .*

4. El inverso de un elemento de  $\mathcal{G}$  está en  $\mathcal{G}$ .
5. La propiedad de estar en  $\mathcal{G}$  es local, esto es, si  $g: U \rightarrow V$  es un homeomorfismo entre dos conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , y  $U$  es cubierto por abiertos  $U_\alpha$  tales que cada restricción  $g|_{U_\alpha}$  está en  $\mathcal{G}$ , entonces  $g \in \mathcal{G}$ .

De las condiciones anteriores se observa que todo pseudogrupo contiene la aplicación identidad sobre cualquier conjunto abierto; en este sentido se define al *pseudogrupo trivial* como aquel que solamente contiene a la identidad. A su vez, el mayor pseudogrupo definido en  $\mathbb{R}^n$  es el pseudogrupo  $\text{Top}$  de todos los homeomorfismos entre subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ .

Sean  $\mathcal{G}$  un pseudogrupo en  $\mathbb{R}^n$  y  $M$  un espacio topológico, que sea 2-numerable y de Hausdorff

**Definición.** Una carta de coordenadas o sistema local de coordenadas, es un par  $(U_i, \phi_i)$ , donde  $U_i$  es un abierto en  $M$  y  $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo sobre su imagen.

Decimos que dos cartas  $(U_i, \phi_i)$  y  $(U_j, \phi_j)$  que se intersectan, esto es que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , son  $\mathcal{G}$ -compatibles si el cambio de coordenadas

$$\gamma_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

está en  $\mathcal{G}$ .

**Definición.** Un  $\mathcal{G}$ -atlas es una colección de cartas de coordenadas  $\mathcal{G}$ -compatibles cuyos dominios cubren a  $M$ .

**Definición.** Una  $\mathcal{G}$ -variedad de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$ , 2-numerable de Hausdorff, junto con un  $\mathcal{G}$ -atlas.

Resumiendo, para cualquier pseudogrupo  $\mathcal{G}$  en  $\mathbb{R}^n$ , una  $\mathcal{G}$ -variedad es una variedad para la cual los mapeos de pegado están en  $\mathcal{G}$ .

En particular, una *variedad topológica* es aquella cuyos homeomorfismos de pegado están en  $\text{Top}$ ; un espacio de éste tipo únicamente posee la estructura topológica local de  $\mathbb{R}^n$ , y nada más.

Sea  $\mathcal{C}^r$  con  $r \geq 1$ , el pseudogrupo  $\mathcal{C}^r$  de difeomorfismos entre conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , entendiendo por difeomorfismo un homeomorfismo diferenciable de orden  $r$  cuya inversa es también un homeomorfismo diferenciable de orden  $r$ . Una  $\mathcal{C}^r$ -variedad será una *variedad diferenciable* (de clase  $\mathcal{C}^r$ ). Si  $r = \infty$  una  $\mathcal{C}^\infty$ -variedad también es llamada *variedad suave*.

Si  $n$  es un número par,  $\mathbb{R}^n$  puede identificarse con  $\mathbb{C}^{n/2}$ . Sea  $\text{Hol}$  el pseudogrupo formado por los mapeos biholomorfos entre los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{C}^{n/2}$ . Un biholomorfismo es un holomorfismo cuya inversa es también un holomorfismo. Observe-mos que todo homeomorfismo holomorfo es un biholomorfismo. Una  $\text{Hol}$ -variedad es una *variedad compleja* de dimensión  $n/2$ , que en el caso particular cuando  $n=2$  es llamada *superficie de Riemann*.

Se dice que dos  $\mathcal{G}$ -atlas en un espacio topológico  $M$  definen la misma  $\mathcal{G}$ -estructura si son *compatibles*, esto es que su unión también sea un  $\mathcal{G}$ -atlas. Por otra parte, la compatibilidad entre  $\mathcal{G}$ -atlas es una relación de equivalencia y la unión de todos los  $\mathcal{G}$ -atlas equivalentes (compatibles) en  $M$  determina un único  $\mathcal{G}$ -atlas, maximal por construcción. Si bien algunos autores definen variedad a través de una clase de  $\mathcal{G}$ -atlas o por un  $\mathcal{G}$ -atlas maximal, la elección de un atlas en particular no es una parte esencial para la estructura de una variedad. El hecho importante para las clases de variedades con  $\mathcal{G}$ -estructuras es la clase de mapeos o aplicaciones que preserven dicha estructura.

**Definición.** Una superficie de Riemann, es una 1-variedad compleja  $S$ .

Si  $n=2$ , se puede demostrar que un homeomorfismo es holomorfo si y sólo si es conforme y preserva orientación. Por ejemplo, la proyección estereográfica de la esfera unitaria sobre  $\mathbb{C}$  es un mapeo conforme. La colección de mapeos que se obtienen al rotar la esfera y luego aplicarla sobre  $\mathbb{C}$  mediante la proyección estereográfica, constituye un atlas para la estructura compleja en  $S^2$ ; ésta es la estructura compleja de  $\mathbb{CP}^1$ , la esfera de Riemann o *recta proyectiva compleja*.

Veamos algunos ejemplos de superficies de Riemann.

1. *El plano complejo.* Sean  $\mathbb{C}$  con la topología usual y  $\mathcal{G}$  el pseudogrupo  $\text{Hol}$ . Su estructura compleja está determinada por el atlas cuya única carta es la función identidad  $id: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

2. *Dominios.* Supongamos que  $X$  es una superficie de Riemann y que  $Y \subset X$  es un dominio, es decir un conjunto abierto y conexo. Luego  $Y$  tiene una estructura compleja natural que hace de éste una superficie de Riemann. Usualmente se escoge como atlas el formado por aquellas cartas complejas  $\phi: U \rightarrow V$  en  $X$ , donde  $U \subset Y$ . En particular todo dominio  $Y \subset \mathbb{C}$ , es una superficie de Riemann.

3. *La recta proyectiva compleja.* Sea  $\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con la menor topología tal que los conjuntos abiertos sean los abiertos usuales  $U \subset \mathbb{C}$  y los conjuntos de la forma  $V \cup \{\infty\}$ , donde  $V \subset \mathbb{C}$  es el complemento de un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{C}$ . Con esta topología  $\mathbb{CP}^1$  es un espacio topológico compacto de Hausdorff homeomorfo a la esfera  $S^2$ .

Los conjuntos  $U_1 := \mathbb{CP}^1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$ ,  $U_2 := \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ , definen funciones  $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2$  del siguiente modo:  $\phi_1$  es la función identidad y



$$\phi_2(z) = \begin{cases} 1/z & \text{para } z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{para } z = \infty. \end{cases}$$

Ambas funciones son homeomorfismos por lo que  $\mathbb{CP}^1$  es una variedad conexa, dado que  $U_1$  y  $U_2$  son conexos y su intersección es no vacía.

La estructura compleja en  $\mathbb{CP}^1$  queda definida por el atlas formado por las cartas  $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $i = 1, 2$ .

Dichas cartas son holomórficamente compatibles, ya que

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$$

y  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , dada por  $z \mapsto 1/z$ , es biholomorfa.



Si  $S$  es una superficie de Riemann, diremos que una función  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  es *analítica* u *holomorfa* si para toda carta  $(U, \phi)$  en  $S$ , la función  $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica en  $\mathbb{C}$  en el sentido usual, es decir una función diferenciable de variable compleja. Dado que  $\phi$  es un homeomorfismo, tendremos que  $f$  es continua en  $S$ . Por otra parte, si  $(V, \varphi)$  es una carta en un atlas compatible en  $S$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $\phi \circ \varphi^{-1}$  es analítica en el sentido usual, y dado que

$$f \circ \varphi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \varphi^{-1})$$

es composición de funciones analíticas, también será analítica. Por esta razón, la definición de función analítica  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  sólo depende de la estructura compleja en  $S$  y no de un atlas en particular de la clase. Por último, diremos que la función  $f$  es analítica en un punto  $s \in S$  si es analítica en alguna vecindad abierta de  $s$  en  $S$ .

Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Riemann. Una función continua  $f: S_1 \rightarrow S_2$  se define como *holomorfa* si para todo par de cartas  $(U_1, \phi_1)$ ,  $(U_2, \phi_2)$  en  $S_1$  y  $S_2$  respectivamente, con  $U_1 \cap f^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ , la función

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_2)) \rightarrow \mathbb{C}$$

es analítica.

De manera natural, una función  $f: S_1 \rightarrow S_2$  será llamada *biholomorfismo*, siempre que sea biyectiva y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  sean holomorfas.

Del mismo modo en que las funciones holomorfas  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  son llamadas analíticas, las funciones  $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$  son llamadas *meromorfas*. En éste caso, vimos que  $\mathbb{CP}^1$

posee dos cartas complejas  $(U_i, \phi_i)$  con  $i = 1, 2$ , luego si  $S$  es una superficie de Riemann,  $f: S \rightarrow \mathbb{CP}^1$  es meromorfa si y sólo si las funciones

$$\phi_1 \circ f: S \setminus f^{-1}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ con } s \mapsto f(s)$$

y

$$\phi_2 \circ f: S \setminus f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ con } s \mapsto 1/f(s)$$

son analíticas.

También diremos que dos superficies de Riemann  $S_1$  y  $S_2$  son *isomorfas* si existe un biholomorfismo  $f$  que transforme  $S_1$  en  $S_2$ .

De las definiciones anteriores se desprende que, si dos superficies de Riemann son isomorfas entonces serán homeomorfas como espacios topológicos. La afirmación recíproca no necesariamente es verdadera, pues dos superficies de Riemann pueden ser homeomorfas e inclusive difeomorfas en el sentido real, sin ser equivalentes, como veremos con detalle en el caso del toro bidimensional.

## 1.2. Generalidades sobre acciones de grupos

Sean  $(G, *)$  un grupo con identidad  $e$  y  $X$  un conjunto. Se dice que una función

$$\theta: G \times X \rightarrow X$$

es una *acción de  $G$  en  $X$*  por la izquierda si,

1.  $\theta(e, x) = x$ , para todo  $x \in X$ ,
2.  $\theta(h, \theta(g, x)) = \theta(h * g, x)$ , para todo  $g, h \in G$  y  $x \in X$ .

Por razones prácticas representamos esta acción como  $G \overset{\theta}{\curvearrowright} X$ , mientras que a  $\theta(g, x)$  lo escribimos simplemente como  $gx$ , luego  $ex = x$  y  $h(gx) = (hg)x$ .

La acción  $G \overset{\theta}{\curvearrowright} X$  induce para cada  $g \in G$  una transformación  $\theta_g: X \rightarrow X$ , dada por  $\theta_g(x) = \theta(g, x)$ . Observemos que las propiedades (1) y (2) implican que  $\theta_g$  es una función biyectiva; en efecto, si  $x_1 \neq x_2 \in X$  vamos a demostrar que  $gx_1 \neq gx_2$ , para ello supongamos que  $gx_1 = gx_2$  luego  $\theta(g^{-1}, gx_1) = \theta(g^{-1}, gx_2)$ , pero  $\theta(g^{-1}, gx_1) = g^{-1}(gx_1) = (g^{-1}g)x_1 = x_1$  mientras que  $\theta(g^{-1}, gx_2) = g^{-1}(gx_2) = (g^{-1}g)x_2 = x_2$ , contrario a la hipótesis. Ahora para cualquier  $y \in X$  demostremos que existe  $x \in X$  tal que  $gx = y$ , en efecto sea  $x = g^{-1}y$  luego  $gx = g(g^{-1}y) = (gg^{-1})y = y$ .

Los siguientes términos y notaciones son comunes en el estudio de los grupos de transformaciones.

Sean  $x \in X$  y  $A \subseteq X$ ,

1.  $O_x = \{gx \mid g \in G\}$  es la *órbita* de  $x$ .
2. El *conjunto de órbitas* se denota por  $X/G$ .
3. La *proyección orbital* se define como  $\pi: X \rightarrow X/G$ , con  $x \mapsto O_x$ .
4.  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$  es el *grupo de isotropía* o *estabilizador* de  $x$ .
5.  $G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$  es el *estabilizador* de  $A$ .
6.  $X^G = \{x \in X \mid gx = x \text{ para todo } g \in G\}$  es el conjunto de *puntos fijos* de  $X$ .
7.  $GA = \{ga \mid g \in G \text{ y } a \in A\}$

**Definición.** Decimos que  $A$  es un subconjunto invariante de  $X$  con respecto de  $G \curvearrowright X$  si  $GA = A$ .

**Proposición 1.2.1.** Un subconjunto  $A \subset X$  es invariante si y sólo si  $gA \subseteq A$  para todo  $g \in G$ .

*Demostración.* Claramente si  $A$  es invariante se cumple que  $gA \subseteq A$ . Ahora supongamos ésto último y veamos que  $A$  es invariante, i.e.  $GA = A$ , como  $gA \subseteq A$  para todo  $g \in G$  entonces  $GA \subseteq A$ , en particular  $eA \subseteq GA$  y por lo tanto  $GA = A$ .  $\square$

**Proposición 1.2.2.** Dos órbitas cualesquiera son iguales o ajenas.

*Demostración.* Sean  $x \neq y \in X$  y supongamos que  $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ . Luego sea  $u \in O_x \cap O_y$ . Así  $u = gx = hy$  para algún  $g, h \in G$ . Observemos que  $GO_x = O_x$ , entonces  $h^{-1}u \in O_x$  pero  $h^{-1}u = h^{-1}(hy) = y$ , luego  $O_y \subseteq O_x$  (análogamente  $O_x \subseteq O_y$ ), y por lo tanto  $O_y = O_x$ .  $\square$

Por lo anterior, si definimos una relación  $\sim$  en  $X$  de modo que  $x_1 \sim x_2$  si existe  $g \in G$  tal que  $x_1 = gx_2$ , es en efecto una relación de equivalencia y las clases de equivalencia son precisamente las órbitas de  $X$ . El conjunto de clases de equivalencia  $X/\sim$  es el conjunto de órbitas  $X/G$ .

**Proposición 1.2.3.** El estabilizador  $G_A$  de cualquier subconjunto  $A$  no vacío de  $X$  es un subgrupo de  $G$ .

*Demostración.* Sean  $g, h \in G_A$ . Como  $hA = A$  se cumple que  $gA = g(hA) = (gh)A = A$ , entonces  $gh \in G_A$ . Ahora sea  $g \in G_A$ , como  $gA = A$ , observemos que  $g^{-1}A = g^{-1}(gA) = (g^{-1}g)A = A$ . Luego  $g^{-1} \in G_A$  y por lo tanto  $G_A < G$ .  $\square$

Si  $x \in X$  el estabilizador de  $x$  es un grupo y de hecho es el mayor subgrupo de  $G$  que fija a  $x$ . En particular  $x_0 \in X^G$  si y sólo si  $G_{x_0} = G$ .

**Proposición 1.2.4.** Para todo  $g \in G$  y cada  $x \in X$ ,  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ .

*Demostración.* Sea  $h \in G_{gx}$ . Si  $k = g^{-1}hg$  entonces  $k \in G_x$ , ya que  $(g^{-1}hg)x = g^{-1}(h(gx)) = g^{-1}(gx) = x$ . Luego  $h = gkg^{-1}$ , y así  $G_{gx} \subseteq gG_xg^{-1}$ . Recíprocamente, si  $k \in G_x$  entonces  $gkg^{-1} \in G_{gx}$ , puesto que  $(gkg^{-1})gx = gk(g^{-1}gx) = g(kx) = gx$ , así  $gG_xg^{-1} \subseteq G_{gx}$ . □

De este modo cualquier subgrupo  $H$  de  $G$  conjugado a  $G_x$  es el grupo de isotropía de algún punto de la órbita de  $x$ . Así los grupos de isotropía de puntos en la misma órbita son conjugados y todos ellos constituyen la clase conjugada

$$(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$$

de  $H = G_x$  para algún punto  $x$  de la órbita.

Ahora bien, se dice que una acción de  $G \curvearrowright X$  es

1. *Trivial* si  $G_x = G$  para todo  $x \in X$ .
2. *Libre* si  $G_x = \{e\}$  para todo  $x \in X$ .
3. *Efectiva* o *fiel* si  $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ .
4. *Transitiva* si tiene una sola órbita.

**Definición.** Si  $X$  es un espacio topológico, diremos que  $G \curvearrowright X$  es una acción por homeomorfismos si,  $\theta_g: X \rightarrow X$  es continua para todo  $g \in G$ .

La definición se justifica pues  $\theta_g$  es un homeomorfismo. En efecto, dado que  $g^{-1} \in G$  la transformación  $\theta_{g^{-1}}$  existe, es biyectiva y continua. Luego tiene sentido pensar en el homomorfismo inducido por  $\theta$  como,  $\Theta: G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ , donde  $\text{Homeo}(X)$  es el grupo de todos los homeomorfismos de  $X$  sobre él mismo.

Si la acción  $\theta$  es efectiva,  $\Theta$  será inyectivo por lo que  $G$  es isomorfo a un subgrupo de homeomorfismos de  $X$ . Por otro lado, cuando  $\theta$  es transitiva  $X$  es un *espacio homogéneo*, esto es, para dos puntos arbitrarios  $x_1$  y  $x_2$  de  $X$  existe  $h \in \text{Homeo}(X)$  tal que  $h(x_1) = x_2$ .

Como antes, sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $\pi: X \rightarrow X/G$  la proyección orbital. Podemos caracterizar a la topología cociente  $\sigma$  en  $X/G$  como la topología más fina para la cual  $\pi$  es continua. Explícitamente  $\sigma$  puede describirse como

$$\sigma = \{U \in X/G \mid \pi^{-1}U \in \tau\}.$$

Sin embargo en nuestro caso, no podemos asegurar que la topología  $\sigma$  exista, a menos

de dar como parte de la hipótesis que  $G \overset{\theta}{\curvearrowright} X$  sea una acción por homeomorfismos. A reserva de exhibir un ejemplo concreto, analicemos un poco el porqué de esta dependencia.

Se puede demostrar que para todo subconjunto  $U$  de  $X$ ,  $\pi^{-1}(\pi U) = \bigcup_{g \in G} gU$ . Ahora bien, supongamos que  $\alpha$  es una topología en  $X/G$  tal que  $\pi: (X, \tau) \rightarrow (X/G, \alpha)$  es continua, luego dado  $U \in \tau$  tendremos que  $\pi^{-1}(\pi U) \in \tau$ , si  $V = \pi^{-1}(\pi U)$  es claro que  $\pi V \in \alpha$ , y por la continuidad de  $\pi$  debería ocurrir que  $\pi^{-1}(\pi V) \in \tau$  lo cual es verdad siempre que  $\bigcup_{g \in G} gV \in \tau$ . Pero si cada  $g \in G$  no transforma homeomorficamente a  $X$ , no podemos asegurar que  $\bigcup_{g \in G} gV \in \tau$ ; por ejemplo bastaría un  $g_0 \in G$ , tal que  $g_0 V \subseteq \partial(\pi^{-1}(\pi V))$  para que  $\bigcup_{g \in G} gV \notin \tau$ . Luego no necesariamente se cumple que  $\pi^{-1}(B) \in \tau$  para todo  $B \in \alpha$ , contrario a la suposición de la continuidad de  $\pi$ .

Por lo tanto, es una condición necesaria pedir que  $G \overset{\theta}{\curvearrowright} X$  sea una acción por homeomorfismos si queremos definir bien una topología cociente en  $X/G$ . Por último, notemos que la proyección orbital es abierta. En efecto, ya que para todo subconjunto  $U$  de  $X$  se cumple que  $\pi^{-1}(\pi U) = \bigcup_{g \in G} gU$ , y si  $U \in \tau$  entonces  $gU \in \tau$  por ser  $g$  un homeomorfismo, así  $\pi^{-1}(\pi U)$  es un abierto de  $X$ .

**Proposición 1.2.5.** *Si  $X$  es un espacio topológico y  $G \overset{\theta}{\curvearrowright} X$  es una acción por homeomorfismos, tendremos que*

1. *Si  $X$  es conexo, localmente conexo, compacto o localmente compacto, entonces respectivamente  $X/G$  también lo será.*
2. *Si  $X$  es 2-numerable, entonces  $X/G$  es 2-numerable.*

*Demostración.* En efecto, dado que  $\pi$  es una aplicación abierta, si  $C$  es una vecindad conexa o compacta de  $x$  en  $X$ ,  $\pi(C)$  es una vecindad conexa o compacta de  $\pi(x)$  respectivamente, de donde se sigue el inciso (1). Por otra parte, si  $\mathfrak{B}$  es una base de  $X$ , entonces  $\pi(\mathfrak{B}) = \{\pi(V) \mid V \in \mathfrak{B}\}$  es base de  $X/G$ , justificándose (2). □

**Definición.** *Si  $G \overset{\theta}{\curvearrowright} X$  es una acción efectiva por homeomorfismos y si  $X$  es localmente compacto, se dice que la acción de  $G$  es propiamente discontinua si para todo subconjunto compacto  $K$  de  $X$ , el conjunto de  $g \in G$  tales que  $gK \cap K \neq \emptyset$  es finito.*

**Proposición 1.2.6.** *Sea  $G$  un grupo que actúa por homeomorfismos en una variedad topológica  $X$ . Si la acción de  $G$  es libre y propiamente discontinua entonces, con la topología cociente,  $X/G$  es Hausdorff y admite una estructura de variedad topológica inducida por la aplicación cubriente  $X \rightarrow X/G$ .*

*Demostración.* Supongamos que la acción es libre y propiamente discontinua, dada  $x \in X$  tomemos una vecindad  $U$  de  $x$  que solamente intersecte una cantidad finita de veces sus traslaciones  $gU$ . Usando el hecho de que  $X$  es Hausdorff y que la acción

es libre, seleccionemos una vecindad de  $x$  cuyas traslaciones sean todas disjuntas. Entonces cada traslación aplica homeomorficamente su imagen en el cociente, luego la imagen es cubierta uniformemente. Y dado que  $x$  fue arbitrario, se sigue que el espacio cociente  $X/G$  es una variedad (no necesariamente Hausdorff) y la aplicación cociente es una aplicación cubriente. Recordemos que una función continua  $f: X \rightarrow Y$  es una *función cubriente* si todo  $y \in Y$  tiene una vecindad  $V$  tal que  $f^{-1}(V)$  consiste de abiertos disjuntos que son aplicados homeomorficamente sobre  $V$  por  $f$ , en tal caso  $X$  será un *espacio cubriente* de  $Y$ .

Veamos que el cociente es Hausdorff, en efecto supongamos que  $y$  y  $x$  son puntos de  $X$  en órbitas distintas, sea  $K$  la unión de dos vecindades compactas disjuntas de  $y$  y  $x$ , que no contengan traslaciones de  $y$  ó  $x$ , entonces  $K \setminus \bigcup_{g \neq i_G} gK$  aún es unión de vecindades de  $y$  con vecindades de  $x$  y dichas vecindades se proyectan en vecindades disjuntas en  $X/G$ .

□

Si  $h: X \rightarrow Y$  es una función continua entre dos espacios topológicos; diremos que  $h$  es un *homeomorfismo local* si para cada punto  $x$  de  $X$  existe un abierto  $U$  de  $x$  tal que  $h(U)$  sea un abierto de  $Y$  y  $h|_U: U \rightarrow h(U)$  la restricción de  $h$  en  $U$  sea un homeomorfismo.

**Proposición 1.2.7.** *Si  $G$  es un grupo que actúa en una superficie de Riemann  $S$  mediante homeomorfismos conformes que preserven orientación de forma tal que la acción sea propiamente discontinua y libre, entonces  $S/G$  es una superficie de Riemann.*

*Demostración.* Sea  $K_S$  el atlas que determina la estructura compleja de  $S$ . Como antes, para todo  $g \in G$  definimos el automorfismo  $\theta_g: S \rightarrow S$  dado por  $\theta_g(x) = gx$ , que abreviadamente lo representaremos por  $g$ .

Por hipótesis  $g$  es un biholomorfismo de  $S$  en  $S$ , esto es, que para todo par de cartas  $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$  en  $K_S$  tales que

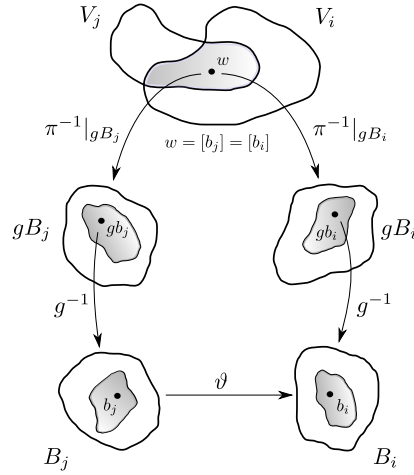
$$U_1 \cap g^{-1}U_2 \neq \emptyset,$$

la función compleja

$$\phi_2 \circ g \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap g^{-1}U_2) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

es biholomorfa.

Vamos a construir un atlas que nos permita determinar la estructura compleja en  $S/G$  inducida por la acción del  $G$  en  $S$ . Sabemos que para toda  $x \in S$  existe  $(U_i, \phi_i) \in K_S$  tal que  $x \in U_i$ , luego como la acción  $G \curvearrowright S$  es propiamente discontinua y libre, podemos encontrar un abierto  $A_x$  en  $S$  que contenga a  $x$  tal, que

Figura 1.1:  $S/G$ 

$g_\alpha A_x \cap g_\beta A_x = \emptyset$  para todo  $g_\alpha, g_\beta \in G$  con  $g_\alpha \neq g_\beta$ . Luego, si  $B_i = A_x \cap U_i$  sea  $V_i = \pi(B_i)$ . Claramente  $V_i$  es un abierto en  $S/G$ .

Proponemos el par  $(V_i, \delta_i)$  con  $g \in G$  y  $\delta_i = \phi_i|_{B_i} \circ g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_i}$ , como una carta en  $S/G$ . Sea entonces  $K_{S/G}$  el conjunto de todas las cartas así obtenidas.

Por construcción,  $K_{S/G}$  es un conjunto de cartas cuyos dominios cubren a  $S/G$ , por otra parte  $\delta_i$  es composición de homeomorfismos; finalmente observemos que  $\delta_i$  no depende de la elección de  $g$ .

Vamos a demostrar que, para todo par de cartas  $(V_i, \delta_i)$  y  $(V_j, \delta_j)$  tales que

$$V_i \cap V_j \neq \emptyset, \quad (1.2)$$

el cambio de coordenadas es holomorficamente compatible. Es decir, la función

$$\delta_i \circ \delta_j^{-1}: \delta_j(V_i \cap V_j) \rightarrow \delta_i(V_i \cap V_j)$$

es un biholomorfismo.

En efecto,

$$\begin{aligned} \delta_i \circ \delta_j^{-1} &= (\phi_i|_{B_i} \circ g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_i}) \circ (\phi_j|_{B_j} \circ g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_j})^{-1} \\ &= (\phi_i|_{B_i} \circ g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_i}) \circ (\pi|_{gB_j} \circ g \circ \phi_j^{-1}|_{B_j}) \\ &= \phi_i|_{B_i} \circ g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_i} \circ \pi|_{gB_j} \circ g \circ \phi_j^{-1}|_{B_j} \\ &= \phi_i|_{B_i} \circ \vartheta \circ \phi_j^{-1}|_{B_j}, \end{aligned}$$

donde

$$\vartheta = g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_i} \circ \pi|_{gB_j} \circ g.$$

Hagamos también,

$$\begin{aligned} \xi_{i,j} &= g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_{i,j}}, \\ N_{i,j} &= \xi_{i,j}(V_i \cap V_j), \end{aligned}$$

claramente  $\vartheta$  transforma homeomorficamente  $N_j$  en  $N_i$ .

Sea  $v \in N_j$ , por (1.2) se cumple  $O_v \cap N_i \neq \emptyset$ , luego existe  $g_* \in G$  tal que  $g_*v \in N_i$ . Si  $g_*N_j \neq N_i$ , entonces uno de los casos siguientes se cumple:

1.  $g_*N_j \subset N_i$
2.  $N_i \subset g_*N_j$
3.  $g_*N_j \setminus g_*N_j \cap N_i \neq \emptyset$  y  $N_i \setminus g_*N_j \cap N_i \neq \emptyset$

Suponiendo el primer caso tomemos  $n \in N_i$  de tal forma que  $n \notin g_*N_j$ , por (1.2) sabemos que existe  $g_k \in G$  tal que  $g_k^{-1}n \in N_j$ . Se sigue entonces que  $g_* \circ g_k^{-1}N_i \cap N_i \neq \emptyset$ ; lo cual contradice la construcción de  $B_i$ . Análogamente, para el segundo caso sea  $p \in g_*N_j$  tal que  $p \notin N_i$ , y como antes por (1.2) sea  $g_h \in G$  tal que  $g_hp \in N_i$ , de donde se sigue que  $g_h^{-1} \circ g_*N_j \cap g_*N_j \neq \emptyset$ ; contrario a la hipótesis de construcción de  $B_j$ . Finalmente para el tercer caso, sea  $n \in N_i$  tal que  $n \in \partial g_*N_j \cap N_i$ , luego por (1.2) sea  $g_s \in G$  tal que  $g_sn \in N_j$ , y dado que  $G$  actúa en  $S$  por homeomorfismos, se sigue que  $g_s^{-1}N_j \cap g_*N_j \neq \emptyset$ , entrando una vez más en contradicción con la hipótesis de construcción de  $B_j$ .

Por lo tanto, existe un único  $g_* \in G$  tal que  $g_*N_j = N_i$ . Y por lo tanto  $\vartheta = g_*$ .

Reescribiendo  $\delta_i \circ \delta_j^{-1}$ , obtenemos

$$\delta_i \circ \delta_j^{-1} = \phi_i|_{B_i} \circ g_* \circ \phi_j^{-1}|_{B_j}$$

en el dominio de su definición.

Como vimos ya,  $(B_i, \phi_i|_{B_i})$  y  $(B_j, \phi_j|_{B_j})$  son dos cartas en  $K_S$  tales que

$$B_j \cap \vartheta^{-1}B_i \neq \emptyset,$$

donde

$$\vartheta^{-1} = g^{-1} \circ \pi^{-1}|_{gB_j} \circ \pi|_{gB_i} \circ g.$$

Luego, por (1.1) sabemos que

$$\phi_i|_{B_i} \circ g_* \circ \phi_j^{-1}|_{B_j} : \phi_j|_{B_j}(B_j \cap g_*^{-1}B_i) \rightarrow \mathbb{C}$$



es un biholomorfismo y por lo tanto

$$\delta_i \circ \delta_j^{-1}: \delta_j(V_i \cap V_j) \rightarrow \delta_i(V_i \cap V_j)$$

es un biholomorfismo. □

Veamos algunos ejemplos.

**1. El Toro  $\mathbb{C}/\Omega$ .** Sean  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  tales que  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$  y

$$\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

la retícula generada por  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Como sabemos,  $\Omega$  es un grupo aditivo. Definimos  $\Omega \overset{\theta}{\curvearrowright} \mathbb{C}$  de la siguiente manera,  $\omega(z) = \omega + z$  donde  $\omega \in \Omega$  y  $z \in \mathbb{C}$ . La acción está bien definida, pues si  $e$  es la identidad en  $\Omega$  entonces  $e(z) = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , a su vez  $\omega_j(\omega_i(z)) = (\omega_j + \omega_i)(z)$  para todo  $\omega_i, \omega_j \in \Omega$  y  $z \in \mathbb{C}$ .

Dicha acción define una relación de equivalencia en  $\mathbb{C}$ , a saber,  $z_1 \sim z_2$  si existe  $\omega \in \Omega$  tal que  $\omega + z_1 = z_2$ , es decir si  $z_1 - z_2 \in \Omega$ . Observemos que las traslaciones en  $\mathbb{C}$  son conformes y preservan orientación, además,  $\omega + z = z$  si y sólo si  $\omega = 0$ , esto implica que la acción es efectiva y libre. Finalmente si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$  claramente es acotado, por otra parte las traslaciones  $\omega + K$  con  $\omega \in \Omega$  únicamente pueden intersectar a  $K$  un número finito de veces, de otro modo  $\Omega$  no podría ser discreto, luego la acción es propiamente discontinua y por lo tanto en virtud de la Proposición 1.2.7,  $\mathbb{C}/\Omega$  es una superficie de Riemann.

Finalmente, sean  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  la proyección canónica y  $V \subset \mathbb{C}$  un abierto tal, que dos puntos cualesquiera de  $V$  no sean equivalentes bajo  $\Omega$ . Entonces  $U := \pi(V)$  es abierto y  $\pi|_V: V \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Su inversa  $\phi: U \rightarrow V$  es una carta compleja en  $\mathbb{C}/\Omega$ . Sea  $\mathfrak{R}$  el conjunto de todas las cartas obtenidas de este modo. Por la Proposición 1.2.7, sabemos que todo par de cartas en  $\mathfrak{R}$  es holomórficamente compatible y que el atlas obtenido es único (salvo equivalencias). Así  $\mathbb{C}/\Omega$  posee la estructura compleja definida por el atlas complejo  $\mathfrak{R}$ .

**2. El cilindro  $\mathbb{C}/\alpha\mathbb{Z}$ .** Sea  $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha n \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ , claramente  $\alpha\mathbb{Z}$  es un grupo, por lo que  $\alpha\mathbb{Z} \overset{\theta}{\curvearrowright} \mathbb{C}$  define una relación de equivalencia en  $\mathbb{C}$ , e.d.  $z_1 \sim z_2$  si existe  $\omega \in \alpha\mathbb{Z}$  tal que  $\omega + z_1 = z_2$ , es decir si  $z_1 - z_2 \in \alpha\mathbb{Z}$ . Las traslaciones en  $\mathbb{C}$  son conformes y preservan la orientación, además:  $\omega + z = z$  si y sólo si  $\omega = 0$ , esto implica que la acción es efectiva y libre. Finalmente si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$  claramente es acotado, por otra parte las traslaciones  $\omega + K$  con  $\omega \in \alpha\mathbb{Z}$  únicamente pueden intersectar a  $K$  un número finito de veces, de otro modo  $\alpha\mathbb{Z}$  no podría ser discreto, luego la acción es propiamente discontinua y por lo tanto  $\mathbb{C}/\alpha\mathbb{Z}$  es una superficie de Riemann.

Finalmente, sean  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\alpha\mathbb{Z}$  la proyección canónica y  $V \subset \mathbb{C}$  un abierto tal que dos puntos cualesquiera de  $V$  no son equivalentes bajo  $\alpha\mathbb{Z}$ . Entonces  $U := \pi(V)$

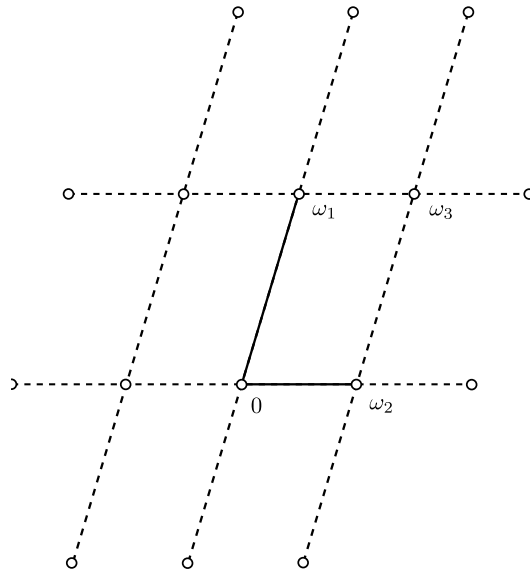


Figura 1.2: El Toro  $X = \mathbb{C}/\Omega$

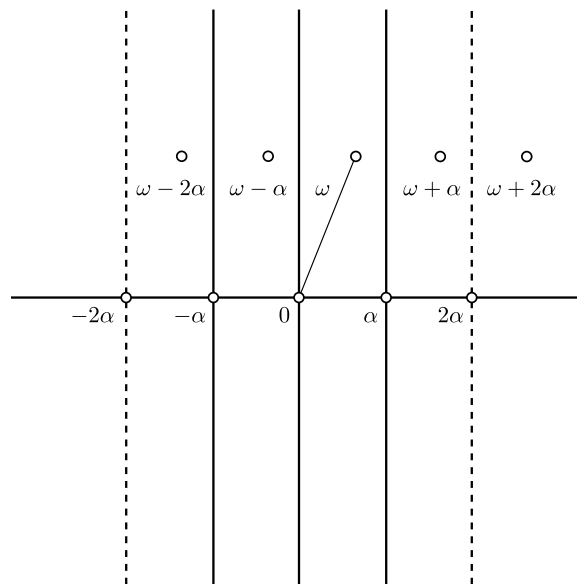


Figura 1.3: El cilindro  $\mathbb{C}/\alpha\mathbb{Z}$

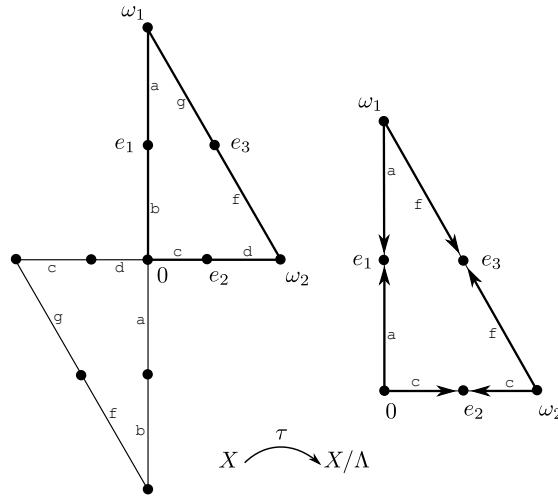


Figura 1.4: El Toro módulo  $\tau: z \rightarrow -z$

es abierto y  $\pi|V \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Su inversa  $\phi: U \rightarrow V$  es una carta compleja en  $\mathbb{C}/\alpha\mathbb{Z}$ . Sea  $\mathfrak{R}$  el conjunto de todas las cartas obtenidas de este modo. Por la Proposición 1.2.7, sabemos que todo par de cartas en  $\mathfrak{R}$  es holomórficamente compatible y que el atlas obtenido es único (salvo equivalencias). Así  $\mathbb{C}/\alpha\mathbb{Z}$  posee la estructura compleja definida por el atlas complejo  $\mathfrak{R}$ .

**3.** *El toro módulo  $\tau: z \rightarrow -z$ .* Sean  $\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$  y la correspondiente superficie de Riemann  $X = \mathbb{C}/\Omega$ . Sea  $\Lambda$  el subgrupo de automorfismos del plano complejo, dado por las funciones  $id: z \rightarrow z$  y  $\tau: z \rightarrow -z$ . Claramente  $\Lambda$  es un grupo. Definimos  $\Lambda \curvearrowright X$  de manera natural, si  $g = \tau$  entonces  $g(w) = -w$  y si  $g = id$  entonces  $g(w) = w$ , con  $w \in X$ . La acción está bien definida, pues si  $e$  es la identidad en  $\Lambda$  entonces  $e(w) = w$  para todo  $w \in X$ , a su vez  $g_i(g_j(w)) = (g_i \circ g_j)(w)$  para todo  $g_i, g_j \in \Lambda$  y  $w \in X$ .

Dicha acción define una relación de equivalencia en  $X$ , a saber,  $w_1 \sim w_2$  si existe  $g \in \Lambda$  tal que  $g(w_1) = w_2$ . Al conjunto de todas las clases de equivalencia lo representamos por  $X/\tau$ . Al identificar el cociente  $X/\tau$  y hacer el pegado correspondiente [Fig.(1.4)], generamos una superficie con cuatro “conos”, homeomorfa a la esfera  $S^2$ .

A diferencia de los ejemplos anteriores,  $\Lambda$  no actúa libremente en  $X$ . En efecto, sean  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  con  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$  tales, que  $\Omega = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ ; haciendo  $e_1 = \omega_1/2$ ,  $e_2 = \omega_2/2$ ,  $e_3 = (\omega_1 + \omega_2)/2$  y  $e_4 = 0$  es claro que  $e_i \sim -e_i$  módulo  $\Omega$  (con  $i \in I_4$ ), luego en  $X$ ,  $g(e_i) = e_i$  para todo  $g \in \Lambda$ .

Veamos como es la acción con los demás puntos. Sea  $z_1$  en el paralelogramo  $P$  formado por  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , si escribimos a  $z_1$  como combinación lineal de dichos períodos, tendremos  $z_1 = a\omega_1 + b\omega_2$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ , notemos que  $|a|, |b| \leq 1$ . Ahora bien, recordemos que  $z_1 \sim z_2$  módulo  $\Omega$  si existe  $\omega \in \Omega$  tal que  $\omega + z_2 = z_1$ , en particular sea  $z_2 = -z_1$ , luego si  $\omega = p\omega_1 + q\omega_2$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$ , entonces  $z_1 \sim z_2$  si

$$(p - a)\omega_1 + (q - b)\omega_2 = a\omega_1 + b\omega_2,$$

(i.e. si  $p = 2a$  y  $q = 2b$ ), luego  $p, q \in \mathbb{Z}$  si y sólo si  $a = m/2$  y  $b = n/2$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$ , pero si  $m, n \neq 0, 1$ , entonces  $|a|, |b| > 1$ , lo cual contradice el hecho de que  $z_1 \in P$ .

De modo que si  $z_1 \neq 0, e_1, e_2, e_3$ , entonces  $z_1$  no es congruente con  $-z_1$  módulo  $\Omega$ , y por lo tanto  $\Lambda_w = \{e\}$  para todo  $w \in X \setminus \{[0], [e_1], [e_2], [e_3]\}$ , es decir únicamente existen cuatro puntos fijos en  $X$  bajo la acción de  $\Lambda$ . Fuera de éstos cuatro puntos la acción es libre y propiamente discontinua, puesto que la cardinalidad de  $\Lambda$  es finita.

No obstante, a pesar de que la acción no es libre, el cociente  $X/\Lambda$  tiene una única estructura de superficie de Riemann, que hace a la proyección una función holomorfa.

Más adelante, vamos a exhibir una estructura compleja para  $X$ .



# Capítulo 2

## Funciones Elípticas

### 2.1. Generalidades de las funciones periódicas

Sea  $f$  una función meromorfa definida en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Un número complejo  $\omega$  se llama *período* de la función  $f$ , si

$$f(z + \omega) = f(z)$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Si existe un período  $\omega \neq 0$  diremos que la función  $f$  es *periódica*.

Por ejemplo, la función exponencial  $e^z$  tiene período  $2\pi i$ . Las funciones trigonométricas  $\sin(z)$  y  $\cos(z)$  tienen período  $2\pi$ . En particular,  $\omega = 0$  es período de cualquier función.

Designemos por  $\Omega_f \subset \mathbb{C}$  al conjunto de todos los períodos de la función  $f$ . A priori destacamos dos propiedades importantes de  $\Omega_f$ , una algebraica válida para toda  $f$  y otra topológica válida para funciones meromorfas  $f$  no constantes

1. El conjunto  $\Omega_f$  es un subgrupo del grupo aditivo  $\mathbb{C}$ .
2. El conjunto  $\Omega_f$ , con  $f$  una función meromorfa no constante definida en  $\mathbb{C}$ , es discreto.

Para la primera propiedad si  $\alpha, \beta \in \Omega_f$ , tendremos que

$$f(z + (\alpha + \beta)) = f((z + \alpha) + \beta) = f(z + \alpha) = f(z),$$

así  $\alpha + \beta \in \Omega_f$ . Además si  $\alpha \in \Omega_f$ , entonces

$$f(z - \alpha) = f((z - \alpha) + \alpha) = f(z)$$

de modo que  $-\alpha \in \Omega_f$ . Finalmente  $f(z + 0) = f(z)$ , luego  $0 \in \Omega_f$ .

Para la segunda propiedad, si  $\Omega_f$  no es discreto, existe  $\omega \in \Omega_f$  tal, que toda vecindad  $U$  de  $\omega$  contiene puntos de  $\Omega_f - \{\omega\}$ . Tomando como vecindades discos con centro

en  $\omega$  y radios que tiendan a cero, obtenemos una sucesión de períodos  $\omega_n \neq \omega$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega$ . Puesto que  $\omega, \omega_n \in \Omega_f$ , se tiene  $f(\omega) = f(0) = f(\omega_n)$ . Ahora bien si  $f(0) = \infty$ , habría una sucesión convergente de polos de  $f$ , sin embargo recordemos que  $f$  es una función meromorfa y por lo tanto se puede expresar como el cociente de  $g$  y  $h$  dos funciones holomorfas, así  $f = g/h$  y dado que  $g(\omega_n)/h(\omega_n) = \infty$  tendremos que  $h(\omega_n)/g(\omega_n) = 0$ , es decir  $h(\omega_n) = 0$ , finalmente del Teorema A.2.5 se sigue que la función  $h$  es idénticamente cero en  $\mathbb{C}$ , y por lo tanto  $f$  es una función constante.

Por otra parte, si  $f(0) \neq \infty$ , la función meromorfa  $g(z) = f(z) - f(0)$  tendría una sucesión convergente de ceros, y por el mismo teorema  $g(z)$  resultaría ser idénticamente cero, y en consecuencia  $f$  sería constante, llegando en ambos casos a una contradicción. □

Sea  $\omega' \neq 0$  algún período de una función meromorfa no constante  $f$ . Por lo que vemos, el disco  $|z| \leq |\omega'|$  tiene una cantidad finita de elementos de  $\Omega_f$ . Ahora, tomemos un período  $\omega_1 \in |z| \leq |\omega'|$  tal que para todo  $\omega \in \Omega_f \setminus \{0\}$ , se cumpla  $|\omega_1| \leq |\omega|$ . Todos los números de la forma  $m\omega_1$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , son períodos de la función. Geométricamente los números  $m\omega_1$  pertenecen a una recta real  $L$  que pasa por el origen de coordenadas y por el punto  $\omega_1$ .

Veamos ahora cómo cualquier período de la función  $f$  ubicado en la recta  $L$ , es de la forma  $n\omega_1$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Suponiendo lo contrario, sea  $\varpi$  un período distinto de cero representado por un punto en la recta, situado estrictamente entre  $n\omega_1$  y  $(n+1)\omega_1$ . Entonces  $0 < |\varpi - n\omega_1| < |\omega_1|$ , pero  $\varpi - n\omega_1$  es un período distinto de cero contenido en  $|z| \leq |\omega_1|$ , lo cual contradice nuestra hipótesis. En este caso,  $\Omega_f \approx \mathbb{Z}$ .

**Definición.** Si todos los períodos de la función  $f$  son de la forma  $n\omega_1$ , decimos que  $f$  es una función simplemente periódica. El período  $\omega_1$  se define como período fundamental de la función  $f$ ; y está bien definido salvo por un signo.

Si la función meromorfa  $f$  tiene períodos  $\omega'$  fuera de la recta  $L$ , éstos no pueden ser múltiplos enteros de  $\omega_1$ . En tal caso, el disco  $|z| \leq |\omega'|$  posee una cantidad finita de elementos de  $\Omega_f \setminus L$ . Sea  $\omega_2 \in |z| \leq |\omega'|$  tal, que  $|\omega_2| \leq |\omega|$  para todo  $\omega \in \Omega_f \setminus L$ , entonces  $\omega_2$  es un período fundamental de la función sobre la recta  $L'$  que pasa por el origen de coordenadas y por el punto  $\omega_2$ . Así, todo período contenido en esta recta es un múltiplo entero del mismo.

Obsérvese que los períodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son linealmente independientes en el campo  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{R}$ , pues al estar contenidos en  $L$  y  $L'$  respectivamente, la razón  $\omega_2/\omega_1$  no es real. Luego cualquier número complejo  $\omega$  puede escribirse como  $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$  con  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .

Mas aún, cualquier período de la función  $f$  es de la forma  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ , con  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . En efecto, sabemos que existen enteros  $m_1, m_2$  tales que

$|\lambda_1 - m_1| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|\lambda_2 - m_2| \leq \frac{1}{2}$ . Si  $\omega$  es un período cualquiera de  $f$ , también lo será  $\tilde{\omega} = \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2$ .

Y puesto que  $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ , se tiene

$$\begin{aligned} |\tilde{\omega}| &= |\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 - m_1\omega_1 - m_2\omega_2| = |(\lambda_1 - m_1)\omega_1 + (\lambda_2 - m_2)\omega_2| < \\ &< |\lambda_1 - m_1||\omega_1| + |\lambda_2 - m_2||\omega_2| \leq \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq \frac{1}{2}|\omega_2| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2|, \end{aligned}$$

puesto que  $|\omega_1| \leq |\omega|$  para todo  $|\omega| \in \Omega_f \setminus \{0\}$ .

De modo que  $|\tilde{\omega}| < \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_2|$ , donde la primera desigualdad es estricta ya que  $\omega_2$  no es un múltiplo real de  $\omega_1$ . Por la manera en que  $\omega_2$  fue escogido, se sigue que  $\tilde{\omega}$  debe ser un múltiplo entero de  $\omega_1$  y por consiguiente  $\omega$  tiene la forma  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$  ( $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ). Por lo tanto, en el caso considerado existen dos períodos tales, que cualquier período de la función  $f$  se expresa en forma única, como una combinación lineal entera de estos dos períodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . En este sentido, decimos que la función es doblemente periódica, notemos que  $\Omega_f \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

**Definición.** Una función es elíptica, si es meromorfa y doblemente periódica.

**Definición.** Diremos que  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un módulo o retícula, si  $\Omega$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{C}$  isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $\Omega$  no está contenido en ninguna recta real.

Dado un módulo  $\Omega$  en  $\mathbb{C}$ , dos números complejos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  serán congruentes ( $z_1 \sim z_2$ ) módulo  $\Omega$  si ocurre que  $z_1 - z_2 \in \Omega$ .

La congruencia módulo  $\Omega$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{C}$ , que induce de forma natural una partición de  $\mathbb{C}$  en clases de equivalencia.

Una manera alternativa de pensar esta partición en clases del plano complejo, es dejando que  $\Omega$  actúe en  $\mathbb{C}$  como un grupo de transformaciones. Así cada  $\omega \in \Omega$  define una traslación  $t_\omega: z \mapsto z + \omega$  de  $\mathbb{C}$ , y puesto que  $t_{\omega_1 + \omega_2} = t_{\omega_1} \circ t_{\omega_2}$ , los grupos  $\Omega$  y  $\{t_\omega \mid \omega \in \Omega\}$  son isomorfos. Por esta razón, dos puntos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  son congruentes módulo  $\Omega$  si y sólo si, están contenidos en la misma órbita bajo la acción del grupo  $\Omega$  en  $\mathbb{C}$ .

**Definición.** Un subconjunto cerrado  $P$  de  $\mathbb{C}$  se define como una región fundamental para  $\Omega$ , si

1. Para cada  $z \in \mathbb{C}$ , existe un punto de  $P$  en la misma  $\Omega$ -órbita que  $z$ , esto es, cada  $z \in \mathbb{C}$  es congruente con algún punto de  $P$ .
2. Dos puntos al interior de  $P$ , siempre están contenidos en  $\Omega$ -órbitas distintas, es decir, ningún par de puntos al interior de  $\Omega$  son congruentes.



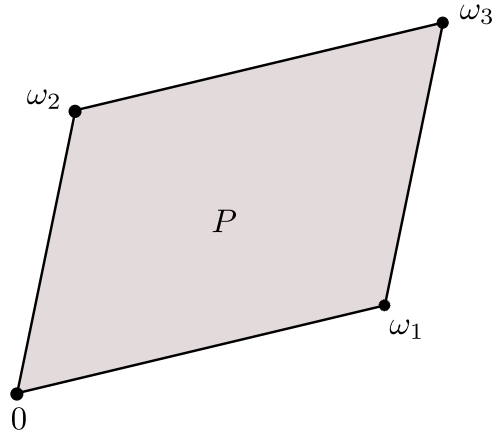


Figura 2.1: Región fundamental  $P$  para  $\Omega$

Por ejemplo, sea  $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$  el módulo generado por  $\{\omega_1, \omega_2\}$  con  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ , podemos ver que el paralelogramo  $P$  formado por los vértices  $0, \omega_1, \omega_2$  y  $\omega_1 + \omega_2$ , es una región fundamental para  $\Omega$ . Al conjunto  $P$  se le conoce como *paralelogramo fundamental* de  $\Omega$ , con respecto a  $\{\omega_1, \omega_2\}$ .

Si  $P$  es cualquier región fundamental de  $\Omega$  y  $t \in \mathbb{C}$ , el conjunto  $P + t = \{z + t \mid z \in P\}$  nuevamente será una región fundamental.

**Definición.** Dos períodos  $\{\omega_1, \omega_2\}$  de una función elíptica no constante  $f$ , constituyen una base para el módulo  $\Omega_f$  si cualquier período  $\omega$  de  $f$  puede expresarse unívocamente como una combinación lineal entera de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ .

Claramente un par de períodos fundamentales  $\{\omega_1, \omega_2\}$  de una función elíptica no constante tales que  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ , son una base para el módulo  $\Omega_f$ .

En general nos referimos a un par de períodos que constituyen una base para  $\Omega_f$  como un par de *períodos básicos*. Notemos que si  $\{\omega_1, \omega_2\}$  es un par de períodos básicos, también lo serán  $\{\omega_1, k\omega_1 + \omega_2\}$  con  $(k \in \mathbb{Z})$ .

Una relación inmediata entre dos bases  $\{\omega_1, \omega_2\}$  y  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  es la siguiente: como  $\{\omega_1, \omega_2\}$  es una base, existen  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , tales que

$$\begin{aligned}\omega'_2 &= a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega'_1 &= c\omega_2 + d\omega_1\end{aligned}$$

matricialmente, esto significa que

$$\begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

Esta relación también es válida para los conjugados complejos

$$\begin{pmatrix} \omega'_2 & \bar{\omega}'_2 \\ \omega'_1 & \bar{\omega}'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Como  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  también es una base, resulta

$$\begin{pmatrix} \omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega'_2 & \bar{\omega}'_2 \\ \omega'_1 & \bar{\omega}'_1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

con  $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ .

De (2.1) y (2.2) tenemos

$$\begin{pmatrix} \omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Notemos que el área del paralelogramo fundamental es distinta de cero, esto es que  $\omega_2\bar{\omega}_1 - \omega_1\bar{\omega}_2 \neq 0$ , pues de otro modo  $\omega_2\bar{\omega}_1 = \omega_1\bar{\omega}_2$  de donde  $\overline{\omega_1/\omega_2} = \omega_1/\omega_2$ . Esto último tiene sentido si y sólo si  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\omega_1 = \lambda\omega_2$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , es decir  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son linealmente dependientes en el campo de los números reales, lo cual es imposible ya que  $\{\omega_1, \omega_2\}$  es una base.

Por la teoría del álgebra de matrices, sabemos que una matriz con determinante distinto de cero tiene inversa. Si multiplicamos (2.3) por la inversa de

$$\begin{pmatrix} \omega_2 & \bar{\omega}_2 \\ \omega_1 & \bar{\omega}_1 \end{pmatrix}$$

obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = 1,$$

lo cual implica

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} = \pm 1$$

Esto demuestra el siguiente resultado.

**Proposición 2.1.1.** *Dos bases cualesquiera del mismo módulo están conectadas por una transformación  $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ , el grupo de matrices  $2 \times 2$  invertibles con entradas enteras.*

## 2.2. Propiedades de las funciones elípticas

Sea  $f(z)$  una función elíptica con módulo de períodos  $\Omega$ , ya mencionamos que  $z_1$  es congruente con  $z_2$ ,  $z_1 \equiv z_2 \pmod{\Omega}$ , si la diferencia  $z_1 - z_2$  está contenida en  $\Omega$ , i.e.  $z_1 = z_2 + n\omega_1 + m\omega_2$ . Evidentemente  $f$  toma los mismos valores en puntos congruentes y puede ser vista como una función sobre clases de equivalencia, o sea una función meromorfa definida en  $\mathbb{C}/\Omega$ .

Por otro lado, si  $f, g$  son dos funciones elípticas tales que su retícula de períodos es  $\Omega$ , diremos que ambas funciones son elípticas respecto de  $\Omega$ . Luego entonces,  $f + g, f - g, fg$  y  $1/g$  (si  $g \neq 0$ ) son funciones elípticas respecto de  $\Omega$ . De modo que el conjunto de todas las funciones elípticas respecto de  $\Omega$  es un campo, mismo que denotaremos por  $E(\Omega)$ .

**Teorema 2.2.1.** *No existe una función elíptica holomorfa no constante.*

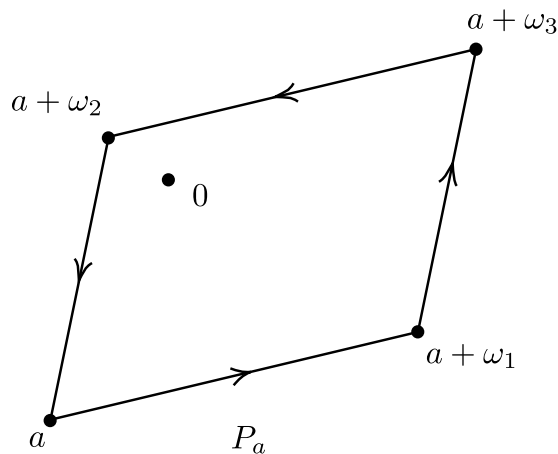
*Demostración.* Supongamos que sí. Sea  $f(z)$  una función elíptica, analítica en el paralelogramo cerrado de períodos  $\bar{P}$  donde sabemos es continua y, por consiguiente estar acotada en valor absoluto  $|f(z)| < C$ , y dado que en cualquier punto del plano  $z$ , la función toma el mismo valor que en su respectivo punto congruente  $z' \in P$ , la desigualdad obtenida debe cumplirse en todos los puntos del plano, luego, en virtud del teorema de Liouville,  $f$  es constante.

□

Un corolario inmediato es el siguiente.

**Corolario 2.2.2.** *Una función elíptica no constante, tiene al menos un polo en cualquier paralelogramo de períodos.*

Notemos que el número de polos pertenecientes a un paralelogramo  $P$  de períodos básicos  $\{\omega_1, \omega_2\}$  de una función elíptica  $f$  es finito, de otro modo habría un punto de acumulación en la cerradura de  $P$ , en consecuencia no sería discreto y una vez más,

Figura 2.2: Traslación por  $a$ 

en virtud del Teorema A.2.5 la función sería constante.

Si consideramos un paralelogramo  $P^*$  a partir de otra pareja de períodos básicos  $\omega_1^* = m\omega_1 + n\omega_2$ ,  $\omega_2^* = p\omega_1 + q\omega_2$ , con  $mq - np = 1$ , a cada polo  $\alpha^* \in P^*$  le corresponde un único polo  $\alpha \in P$  congruente con él y recíprocamente. Efectivamente, dado que  $f$  es periódica, su desarrollo de Laurent en un entorno de  $\alpha$ , se transforma en el desarrollo en un entorno de  $\alpha^*$  mediante la sustitución de  $z - \alpha^*$  por  $z - \alpha$  sin que se alteren los coeficientes. A causa de ello la suma de los órdenes de todos los polos pertenecientes a un mismo paralelogramo de períodos no depende de la elección de la pareja de períodos básicos. Esta suma invariante es llamada el *orden de la función elíptica*.

**Teorema 2.2.3.** *La suma de los residuos de una función elíptica  $f$ , respecto de todos los polos situados en el paralelogramo de períodos  $P$ , es igual a cero.*

*Demostración.* Si en la frontera  $\partial P$  del paralelogramo cerrado  $P$  no hay ningún polo de la función, entonces dado que  $f$  es meromorfa y analítica en  $\partial P$ , tendremos que  $(1/2\pi i) \int_{\partial P} f(z) dz$  es igual a la suma de sus residuos al interior de  $P$ .

Por el contrario, si en  $\partial P$  hay polos de la función no incluyendo los polos situados en el lado derecho y superior de  $P$  ni en el vértice inferior derecho o superior izquierdo de  $P$ . Podemos sustituir  $\partial P$  por la frontera  $\partial P_a$  de un paralelogramo  $P_a$  con lados paralelos e iguales, respectivamente, a los lados del paralelogramo  $P$ , de manera tal que en  $\partial P$  no exista ningún polo de la función  $f$ , y todos los polos pertenecientes a  $P$  estén contenidos en su interior y sólo estos. Para este fin, ver fig.2.2, es suficiente desplazar  $\partial P$  por la diagonal del paralelogramo  $P$  en dirección desde el vértice  $\omega_3$

hacia el vértice  $O$  en una magnitud menor que la distancia desde el conjunto de polos en  $P$ , hasta el conjunto de puntos pertenecientes al lado de la derecha y al lado superior. Si  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ , sean  $a, a + \omega_1, a + \omega_3$  y  $a + \omega_2$ , los vértices del circuito de integración  $\partial P_a$ , ciertamente si  $\partial P_a$  coincide con  $\partial P$ ,  $a = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{a+\omega_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\omega_1}^{a+\omega_3} f(z) dz + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\omega_3}^{a+\omega_2} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\omega_2}^a f(z) dz. \end{aligned}$$

La suma de la primera y tercera integrales del segundo miembro, así como la suma de la segunda y cuarta integrales, es igual a cero. En efecto, si la ecuación del lado que une los vértice  $a$  y  $a + \omega_1$  es  $z = a + \omega_1 t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^{a+\omega_1} f(z) dz = \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_0^1 f(a + \omega_1 t) dt.$$

La ecuación del lado que une los vértices  $a + \omega_2$ ;  $a + \omega_3$ , se puede escribir de la forma  $z = a + \omega_2 + \omega_1 t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Y por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} f(z) dz &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2} f(z) dz \\ &= -\frac{\omega_1}{2\pi i} \int_0^1 f(a + \omega_2 + \omega_1 t) dt \\ &= -\frac{\omega_1}{2\pi i} \int_0^1 f(z + \omega_1 t) dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

Vemos que la suma de las dos integrales calculadas es igual a cero. Análogamente nos convencemos que la suma de las dos integrales restantes del segundo miembro de la igualdad (2.4) es igual a cero, por lo que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} f(z) dz = 0$$

y por lo tanto, la suma de los residuos de la función  $f$  respecto de todos los polos que están situados en el interior de  $\partial P_a$  es igual a cero. □

**Corolario 2.2.4.** *El orden de una función elíptica  $f$  no constante, no puede ser menor que dos.*

*Demostración.* Si en el paralelogramo de períodos de  $f$ , hay un único polo simple  $\alpha$ , entonces la parte principal del desarrollo de Laurent de la función  $f$  en un entorno del punto  $\alpha$  obligadamente es de la forma  $A/(z - \alpha)$ , donde  $A$  es el residuo de la función  $f$  respecto del punto  $\alpha$ . Por lo demostrado en el Teorema 2.2.3,  $A = 0$ , de donde se deduce que  $f$  no tiene polos en el paralelogramo de períodos, finalmente por el Teorema 2.2.1 concluimos que  $f$  es constante.  $\square$

**Teorema 2.2.5.** *Sea  $f$  una función elíptica no constante, entonces la cantidad de raíces de la ecuación  $f(z) = c$  pertenecientes al paralelogramo de períodos, no depende de  $c$  y es igual al orden  $N$  de la función elíptica, contando multiplicidad.*

*Demostración.* Para  $c = \infty$ , el Teorema se deduce de la definición de orden de la función elíptica, por lo que supondremos  $c \in \mathbb{C}$ . Sea  $P$  uno de los paralelogramos de períodos de  $f$  tal, que contenga en su interior a todos los polos y a todas las preimágenes de  $c$  bajo  $f$ . Entonces  $f'/(f - c)$  es meromorfa y como  $\partial P$  no contiene polos ni ceros de  $f$ , se sigue que  $f'/(f - c)$  será analítica en  $\partial P$ . Luego podemos integrar a  $f'/(f - c)$  a lo largo de  $\partial P$ . Observemos que la función  $f'/(f - c)$ , siendo una combinación racional de las funciones elípticas  $f'$  y  $f$ , es también una función elíptica con los mismos períodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Por ello, le podemos aplicar el argumento del Teorema 2.2.3 y por consiguiente:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P} \frac{f'(z) dz}{f(z) - c} = 0.$$

Los únicos polos de  $f'/(f - c)$  son los ceros de  $(f - c)$  y los polos de  $f'$ . Ahora, supongamos que  $(f - c)$  tiene un cero en  $z = a$  de multiplicidad  $k$ , por lo tanto para valores cercanos de  $a$ , tendremos  $f(z) - c = (z - a)^k g(z)$ , donde  $g$  es analítica y  $g(a) \neq 0$ . Entonces, para valores cercanos de  $a$  se tiene,  $f'(z) = k(z - a)^{k-1} g(z) + (z - a)^k g'(z)$  y por ello

$$\frac{f'(z)}{f(z) - c} = \frac{k}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

para valores cercanos de  $a$ , por lo tanto  $f'/(f - c)$  tiene un residuo  $k$  en  $z = a$ . Análogamente  $f(z) - c = (z - a)^{-k} g(z)$ , nos dice que  $f'/(f - c)$  tiene un residuo  $-k$  en cada polo de multiplicidad  $k$  de  $(f - c)$ . Y dado que la suma de los residuos de  $f'/(f - c)$  es cero, el número de ceros de  $(f - c)$  está obligado a ser igual al número de polos, contando multiplicidades, por lo tanto la ecuación  $f(z) = c$  tiene  $N$  soluciones.  $\square$

**Teorema 2.2.6.** *La suma de todas las preimágenes de  $c$  bajo una función elíptica  $f$  no constante, pertenecientes a un paralelogramo de períodos, es congruente a la suma de todos los polos, pertenecientes también a un paralelogramo de períodos.*

*Demostración.* Para  $c = \infty$  es inmediato; supongamos que  $c \neq \infty$ . Consideremos el circuito  $\partial P_a$  utilizado en la demostración del Teorema 2.2.3, formemos la integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz$ . Esta integral es igual a la diferencia entre la suma de todas las preimágenes de  $c$  situadas en el interior de  $\partial P_a$  y la suma de todos los polos situados también en el interior de  $\partial P_a$ . Por esta razón, es suficiente ver que la integral es igual a algún período de la función  $f(z)$ . Representando, para abreviar, los lados del circuito  $\partial P_a$  por  $L_1, L_2, L_3$ , y  $L_4$  de modo que sus puntos iniciales y finales sean:  $a$  y  $a + \omega_1$  para el segmento  $L_1$ ,  $a + \omega_1$  y  $a + \omega_1 + \omega_2$  para el segmento  $L_2$ ,  $a + \omega_2$  y  $a + \omega_1 + \omega_2$  para el segmento  $L_3$ ,  $a$  y  $a + \omega_2$  para el segmento  $L_4$ , a su vez tendremos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial P_a} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz + \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_4} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz \end{aligned}$$

La suma de la primera y tercera integrales del segundo miembro, así como la suma de la segunda y cuarta integrales, representan períodos de la función  $f$ . En efecto, el segmento  $L_1$  tiene la ecuación  $z = a + \omega_1 t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz = \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_0^1 (a + \omega_1 t) \frac{f'(a + \omega_1 t)}{f(a + \omega_1 t) - c} dt$$

La ecuación del segmento  $L_3$  se puede expresar en la forma  $z = a + \omega_2 + \omega_1 t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , de donde:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz &= - \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_0^1 (a + \omega_2 + \omega_1 t) \frac{f'(a + \omega_2 + \omega_1 t)}{f(a + \omega_2 + \omega_1 t) - c} dt = \\ &= - \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_0^1 (a + \omega_2 + \omega_1 t) \frac{f'(a + \omega_1 t)}{(f + \omega_1 t) - c} dt \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_3} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz &= \\ &= - \frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f'(a + \omega_1 t)}{f(a + \omega_1 t) - c} dt = - \frac{\omega_3}{2\pi i} [\ln \{f(a + \omega_1 t) - c\}]_0^1 = \\ &= - \frac{\omega_2}{2\pi i} \ln \frac{f(a + \omega_1 t) - c}{f(z_0) - c} = - \frac{\omega_2}{2\pi i} \ln 1 = - \frac{\omega_2}{2\pi i} k\pi i = -k\omega_3 \end{aligned}$$

que es un período de  $f$ . Análogamente encontramos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_4} z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz = l\omega_1$$

es un período de  $f$ . Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi i} \int z \frac{f'(z)}{f(z)-c} dz = l\omega_1 + k\omega_2 = \omega$$

□

**Teorema 2.2.7.** Sean  $f$  y  $g$  funciones elípticas respecto a la retícula de períodos  $\Omega$ , con polos en los mismos puntos en  $\mathbb{C}$ , y con mismas partes principales en dichos puntos. Entonces  $f(z) = g(z) + c$ , para alguna constante  $c$ .

*Demostración.* La función  $f - g$  es elíptica, y tiene orden 0, ya que no posee polos, luego  $f - g$  será constante en virtud del Corolario 2.2.2. □

**Teorema 2.2.8.** Sean  $f$  y  $g$  funciones elípticas respecto a la retícula de períodos  $\Omega$ , con ceros y polos del mismo orden, en los mismos puntos en  $\mathbb{C}$ . Entonces  $f(z) = cg(z)$  para alguna constante  $c \neq 0$ .

*Demostración.* En efecto, basta con reemplazar  $f - g$  por  $f/g$  en la demostración del Teorema 2.2.7. □

## 2.3. Construcción de funciones elípticas

A priori no hay nada que garantice la existencia de funciones elípticas. Para ello, a partir de un módulo  $\Omega$  vamos a construir una función  $f$  no constante que sea elíptica con respecto a  $\Omega$ . Vamos a introducir la función  $\wp$  de Weierstrass, que es una función elíptica con respecto a  $\Omega$  de orden 2. Está será nuestra función elíptica básica, en el sentido de que cualquier otra función elíptica con respecto a  $\Omega$  será una función racional de  $\wp$  y su derivada  $\wp'$ .

*Observación:* Estaremos tomando sumas o productos indexados por elementos de la retícula, esto se puede ya que el conjunto  $\Omega$  es numerable y cada elemento del mismo representa un índice. Por otro lado, puesto que la mayoría de series y productos con los que vamos a trabajar serán absolutamente convergentes, no importará el orden con que se indexe. De cualquier forma, se indexará del mismo modo en que numeremos a  $\Omega$ . A continuación exhibimos dicha numeración.

*Nota:*  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  y  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$

Los conjuntos

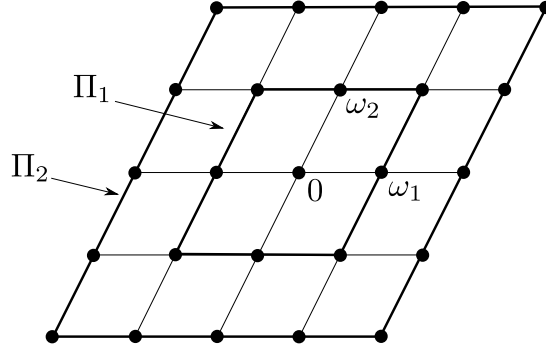
$$\Pi_r = \{a\omega_1 + b\omega_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } \max(|a|, |b|) = r, \text{ con } r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

son los paralelogramos con centro en 0 y lados paralelos a  $\omega_1$  y  $\omega_2$  respectivamente, ver fig.2.3.

Sea  $\Omega_r = \Omega \cap \Pi_r$ , luego

$$\Omega_r = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ y } \max(|m|, |n|) = r\}.$$



Figura 2.3: Conjuntos  $\Pi_r$ 

Ahora bien,  $\Omega$  puede expresarse como unión disjunta  $\Omega = \{0\} \cup \{\Omega_1\} \cup \{\Omega_2\} \cup \dots$ , y para cada  $r \geq 1$  se tiene que  $|\Omega_r| = 8r$ .

Una forma de numerar los elementos de  $\Omega$  es comenzando en 0, continuando con los elementos de  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ , contando en cada  $\Omega_r$  a partir de  $r\omega_1$  luego el siguiente elemento  $r\omega_1 + \omega_2$  y así sucesivamente, recorriendo cada paralelogramo en sentido contrario a las manecillas del reloj, ver fig.2.4. Escribamos este ordenamiento mediante:  $\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots$ , donde  $\omega^{(0)} = 0$ ,  $\omega^{(1)} = \omega_1$ ,  $\omega^{(2)} = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega^{(3)} = \omega_2, \dots$ , claramente  $|\omega^{(k)}| \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

*Observación:* Con  $\sum_{\omega \in \Omega}$  y  $\sum'_{\omega \in \Omega}$ , estaremos indicando la suma sobre todos los puntos del módulo (respectivamente distintos de cero) tomados en el orden antes dicho. Análogamente los productos  $\prod_{\omega \in \Omega}$  y  $\prod'_{\omega \in \Omega}$  serán tomados sobre todos los puntos de la retícula (respectivamente distintos de cero) en el mismo orden.

**Teorema 2.3.1.** Si  $s \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sum'_{\omega \in \Omega} |\omega|^{-s}$  converge si y sólo si  $s > 2$ .

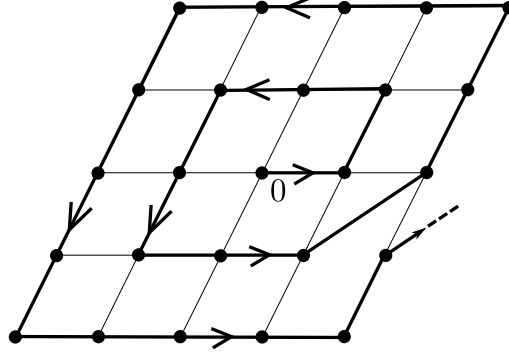
*Demostración.* Si  $D$  y  $d$  representan el módulo mayor y menor de los elementos del paralelogramo  $\Pi_1$ , que a su vez contiene a  $\Omega_1$ ; entonces dado que

$$\Omega_r \subseteq \Pi_r = \{rz \mid z \in \Pi_1\}$$

tendremos  $rD \geq |\omega| \geq rd$  para todo  $\omega \in \Omega_r$ .

Definiendo

$$\sigma_{r,s} = \sum_{\omega \in \Omega_r} |\omega|^{-s}$$

Figura 2.4: Numerando los elementos de  $\Omega$ 

podemos ver que  $\sigma_{r,s}$  está localizado entre  $8r(rD)^{-s} = 8r^{1-s}D^{-s}$  y  $8r(rd)^{-s} = 8r^{1-s}d^{-s}$ , pues sabemos que  $|\Omega_r| = 8r$ . Luego  $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r,s}$  converge si y sólo si  $\sum_{r=1}^{\infty} r^{1-s}$  converge, ésto último sucede si y sólo si  $s > 2$ . Los términos de  $\sum'_{\omega \in \Omega} |\omega|^{-s}$  son positivos y pueden agruparse entre sí a modo de obtener  $\sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{r,s}$ , de aquí se sigue que  $\sum'_{\omega \in \Omega} |\omega|^{-s}$  converge si y solo si  $s > 2$ . □

**Teorema 2.3.2.** *Para todo número entero  $N \geq 3$ , la función  $F_N(z) = \sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-N}$  es elíptica y de orden  $N$  con respecto a  $\Omega$ .*

*Demostración.* Si  $K$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ , los términos  $(z - \omega)^{-N}$  son funciones analíticas en  $K$  y, por lo mismo, acotadas en  $K$ . El conjunto  $K$  es acotado, lo cual significa también que (salvo un número finito de elementos  $\omega_{i \in I_n}$  de  $\Omega$ ):  $|\omega| \geq 2|z|$  para  $z \in K$  y casi todo  $\omega \in \Omega$ . Esto implica que  $|z - \omega| \geq |\omega| - |z| \geq \frac{1}{2}|\omega|$  para todo  $\omega$  en  $\Phi = \Omega \setminus \{\omega_{i \in I_n}\}$ , y por lo tanto  $\|(z - \omega)^{-N}\|_K \leq |\omega|^{-N}$  para todo  $\omega$  en  $\Phi$ . Si  $N \geq 3$ , por el teorema anterior y por criterios de comparación, resulta que  $\sum_{\omega \in \Omega} \|(z - \omega)^{-N}\|_K$  converge, luego entonces  $\sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-N}$  es normalmente convergente en  $K$  (ver definición en apéndice pg. 104). Como cada término  $(z - \omega)^{-N}$  es analítico en  $K$ , resulta que  $F_N(z)$  es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \Omega$ , y razonando según la Observación A.2.1 del apéndice, resulta que  $F_N(z)$  es meromorfa en cada  $\omega \in \Omega$ , con un polo de orden  $N$  correspondiente al término  $(z - \omega)^{-N}$ . Por lo tanto  $F_N(z)$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$ .

Finalmente, podemos reordenar los términos de la serie que define a  $F_N(z)$ , pues la convergencia normal implica que la serie sea absolutamente convergente. De modo

que si  $\omega_0 \in \Omega$  tendremos

$$\begin{aligned} F_N(z + \omega_0) &= \sum_{\omega \in \Omega} (z + \omega_0 - \omega)^{-N} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (z - \tilde{\omega})^{-N} \\ &= F_N(z) \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\omega} = \omega_0 - \omega$  varía sobre  $\Omega$  al igual que  $\omega$ . Luego  $F_N(z)$  es periódica con respecto a  $\Omega$  y, por lo tanto, es una función elíptica de orden  $N$ . □

En particular si  $N = 3$  la función  $F_N(z)$  es impar, en efecto

$$\begin{aligned} F_3(-z) &= \sum \frac{1}{(-z - \omega)^3} \\ &= - \sum \frac{1}{[z - (\omega)]^3} \\ &= -F_3(z), \end{aligned}$$

con  $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ .

Sea  $z_0$  un punto en el plano distinto de aquellos que son polos de  $F_3(z)$ . Integremos la serie  $\sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-3}$  a lo largo de una curva rectificable  $L \subset \mathbb{C}$ , ajena al conjunto de polos de la función y que una  $z_0$  con un punto  $z$  que no sea polo.

Recordemos que la suma de los residuos de una función elíptica, respecto de todos los polos situados en el paralelogramo fundamental de períodos, es igual a cero.

Los polos de  $F_3(z)$  son todos los elementos de  $\Omega$ , y cada uno es de orden tres. Siempre podemos escoger un paralelogramo fundamental que contenga en su interior a todos los polos de la función y tal que en su frontera no existan polos. Por esta razón, el valor de la integral de  $F_3(z)$  no depende de la curva  $L$  en  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  sobre la cual se efectúe la integración, sino que depende solo de los puntos inicial y final de la misma.

Dado que el punto inicial es fijo, esta integral representa una función uniforme de  $z$ . Notacionalmente tenemos

$$G(z) = \int_{z_0}^z F_3(z) dz,$$

donde  $G(z)$  es una función primitiva de  $F_3(z)$  en  $\mathbb{C}/\Omega$ . Se puede demostrar que su derivada es igual a la función antiderivada,

$$G'(z) = F_3(z).$$

Sabemos que cualquier primitiva de  $F_3(z)$  en  $\mathbb{C}/\Omega$ , puede expresarse en la forma

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z F_3(z) dz + C,$$

con  $C$  una constante compleja arbitraria, en particular  $C = \Phi(z_0)$ .

Por consiguiente

$$\int_{z_0}^z F_3(z) dz = \Phi(z) - \Phi(z_0).$$

Finalmente, como los términos  $1/(z - \omega)^3$  son funciones continuas en  $\mathbb{C}/\Omega$ , y la serie  $\sum_{\omega \in \Omega} 1/(z - \omega)^3$  es uniformemente convergente en cualquier subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{C}/\Omega$ , ésta puede integrarse término a término a lo largo de cualquier curva rectificable  $L \subset \mathbb{C}/\Omega$ .

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= C + \int_{z_0}^z F_3(z) dz = C + \sum_{\omega \in \Omega} \left[ \int_{z_0}^z \frac{1}{(z - \omega)^3} \right] \\ &= C - \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

La serie (2.5) se obtiene al integrar una serie uniformemente convergente, por lo que (2.5) es uniformemente convergente en cualquier región  $R \subset \mathbb{C}$  acotada, despreciando un número finito de términos de la serie que tengan polos en  $R$ . Por lo que (2.5) es una función meromorfa con un polo de segundo orden en cada  $\omega \in \Omega$ .

Viendo a  $\varphi(z)$  como

$$\varphi(z) = C - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right] \quad (2.6)$$

inferimos que  $\varphi(z) + (1/2z^2)$  es también una función meromorfa, para la cual el origen es un punto regular, siendo su valor en  $z = 0$  igual a

$$\left[ \varphi(z) + \frac{1}{2z^2} \right]_{z=0} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right] \quad (2.7)$$

Busquemos la constante de integración  $C$  de forma tal que éste valor sea igual a cero. Restando (2.6) de (2.7) tendremos

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \right\}.$$

Observemos que la función entre corchetes:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \quad (2.8)$$

se diferencia de  $\wp(z)$  por un factor constante.

**Definición.**  $\wp(z)$  es la llamada Función de Weierstrass asociada a la retícula  $\Omega$ .

Por la construcción de (2.8), observamos que es una función meromorfa con polos de segundo orden en cada  $\omega \in \Omega$  (incluido el origen). La parte principal correspondiente al polo  $\omega$  tiene la forma  $1/(z - \omega)^2$ . Para demostrar que la serie (2.8) es absolutamente convergente, tomemos sólo aquellos términos de la serie para los cuales  $|\omega| > 2|z|$ , luego

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{(2\omega - z)z}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{2|\omega| \left(1 + \frac{|z|}{2|\omega|}\right) |z|}{|\omega|^4 \left(1 - \frac{|z|}{|\omega|}\right)^2} < \frac{10|z|}{|\omega|^3}$$

finalmente por el Teorema 2.3.1 deducimos la convergencia absoluta de la serie (2.8).

Afirmamos que  $\wp(z)$  es una función par. En efecto

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{1}{[z - (-\omega)]^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right]$$

la última serie difiere de (2.8) solo por el orden de los términos, por lo que su suma es  $\wp(z)$ .

Derivando  $\wp(z)$  obtenemos

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{\omega \neq 0} \frac{2}{(z - \omega)^3} = -2 \sum \frac{1}{(z - \omega)^3} = -2F_3(z),$$

es decir,  $\wp'(z)$  difiere en un factor constante de la anterior función elíptica  $F_3(z)$ , por lo que la derivada es una función elíptica con respecto a  $\Omega$ . Se sigue que  $\wp'(z + \omega) - \wp'(z) = 0$ . Integrando resulta  $\wp(z + \omega) - \wp(z) = C_\omega$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Haciendo  $z = -\omega/2$ , tendremos  $\wp(\omega/2) - \wp(-\omega/2) = C_\omega$ , como  $\wp(z)$  es una función par  $C_\omega = 0$ . Se deduce  $\wp(z + \omega) = \wp(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \in \Omega$ , y así  $\Omega \subseteq \Omega_\wp$ . Ya que 0 es un polo de  $\wp(z)$  cualquier elemento de  $\Omega_\wp$  también es un polo, y como  $\wp(z)$  no tiene polos en  $\mathbb{C} \setminus \Omega$  resulta claro  $\Omega_\wp \subseteq \Omega$ , luego entonces  $\Omega = \Omega_\wp$ . Justificándose así el siguiente

**Teorema 2.3.3.** La función  $\wp(z)$  es elíptica y tiene a  $\Omega$  por retícula ( $\Omega_\wp$ ).

□

**Corolario 2.3.4.**  $\wp(z)$  es de orden 2 y  $\wp'(z)$  de orden 3.

*Demostración.* Vimos que la derivada de  $\wp(z)$

$$\wp'(z) = -2 \sum \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

es una función elíptica con períodos fundamentales  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , impar de tercer orden con polos de multiplicidad tres en  $\omega \in \Omega_\wp$ .

Por esta razón para todos los valores posibles  $A \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la función posee tres puntos preimagen de  $A$  contenidos en el paralelogramo de períodos. Si  $A = \infty$ , entonces los tres puntos son uno mismo, es decir un polo triple de la función. Para calcular los ceros de  $\wp'(z)$  observemos que  $\wp'(-z) = -\wp'(z)$ , de esta manera (con  $i = 1, 2, 3$ ),  $\wp'(\omega_i - z) = -\wp'(z)$ . Sea  $z = \omega_i/2$ , sustituyendo tenemos  $\wp'(\omega_i/2) = -\wp'(\omega_i/2)$ , y como  $\wp'(\omega_i/2) \neq \infty$ , concluimos que  $\wp'(\omega_i/2) = 0$ .

Sabemos que  $\wp(z)$  es de orden dos. Por lo mismo la ecuación  $\wp(z) = A$  tiene dos raíces y si  $A = \infty$  la raíz es doble. Sea  $\wp(\omega_i/2) = e_i$ , luego cada  $\omega_i/2$  es una raíz doble, puesto que  $\wp'(\omega_i/2) = 0$ ; mientras que  $\wp''(\omega_i/2) \neq 0$ . En cambio si  $A \neq (\infty, e_i)$ , las raíces de  $\wp(z) = A$  son simples, o de otro modo en el paralelogramo de períodos habría ceros de  $\wp'(z)$  distintos a  $\omega_i/2$  y por el orden de la función esto no puede ser.

Al interior del paralelogramo fundamental los puntos preimagen de  $A$  son simétricos con respecto de  $\omega_3/2$  (donde  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ); y sobre los lados son simétricos a  $\omega_1/2$  y  $\omega_2/2$ , respectivamente. En general, sobre el módulo extendido cualquier par de puntos preimagen de  $A$  bajo  $\wp(z)$  es simétrico uno del otro, respecto a cualquier  $\omega_i/2$ . La explicación es la siguiente:  $\wp(-z) = \wp(z)$  lo cual implica que  $\wp(\omega_i - z) = \wp(z)$ , esto es,  $\wp(z)$  toma valores iguales en los puntos  $z$  y  $\omega_i - z$  que son simétricos con respecto de  $\omega_i/2$ .

Ahora vamos a generar una importante ecuación que relaciona  $\wp(z)$  y  $\wp'(z)$ , a partir de las series de Laurent (A.2.23) para  $\wp(z)$  en un entorno de  $z = 0$ .

En efecto, de  $\wp(z) = z^{-2} + \sum_{\omega \neq 0} [(z - \omega)^{-2} - \omega^{-2}]$  podemos obtener el desarrollo de  $\wp(z)$  en serie de Laurent en un entorno del origen de coordenadas. Para lo cual, primero desarrollamos la función  $1/(z - \omega)^2 - 1/\omega^2$ , con  $\omega \neq 0$ , en series de potencias de  $z$

$$\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \left[ \left(1 - \frac{z}{\omega}\right)^{-2} - 1 \right] = \sum_1^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n$$

la última serie es convergente en el disco  $|z| < |\omega|$ . Luego, para  $\wp(z)$  obtenemos el

siguiente desarrollo, también en serie de potencias de  $z$

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[ \frac{2z}{\omega^3} + \frac{3z^2}{\omega^4} + \cdots + \frac{(n+1)z^n}{\omega^{n+2}} + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + 2 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^3} z + 3 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4} z^2 + \cdots + (n+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{n+2}} z^n + \cdots\end{aligned}$$

convergente en el anillo  $0 < |z| < \delta$ , donde  $\delta = \min |\omega|_{\omega \neq 0}$ .

La función  $\wp(z)$  es par, de modo que los coeficientes de las potencias impares de  $z$  son iguales a cero. Entonces:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots + a_{2m} z^{2m} + \cdots \quad (2.9)$$

donde

$$a_{2m} = (2m+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{2m+2}} \quad (2.10)$$

Derivando término a término llegamos a:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \cdots + 2ma_{2m} z^{2m-1} + \cdots \quad (2.11)$$

Con las igualdades anteriores vamos a encontrar una relación algebraica entre las funciones  $\wp(z)$  y  $\wp'(z)$ .

Notemos que la parte principal del desarrollo de  $\wp'(z)$  es  $-\frac{2}{z^3}$  y que la parte principal del desarrollo de  $\wp(z)$  es  $\frac{1}{z^2}$ . Sea  $[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3$ . Sustituyendo  $\wp(z)$  y  $\wp'(z)$  por (2.9) y (2.11), y elevando a las potencias indicadas las series absolutamente convergentes respectivas, tendremos que:

$$\begin{aligned}[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 &= \left( \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \cdots \right) - 4 \left( \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \cdots \right) \\ &= -\frac{20a_2}{z^2} - 28a_4 - \cdots\end{aligned}$$

(aquellos términos no escritos tienen potencias no negativas de  $z$ ).

Anexando a la igualdad anterior, el término  $20a_2\wp(z)$  obtenemos:

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 20a_2\wp(z) = -28a_4 + \cdots,$$

la combinación buscada.

El primer miembro es una función elíptica sin polos en el paralelogramo fundamental, por lo que es constante, en virtud del Teorema de Liouville (A.2.19). A su

vez en el segundo miembro vemos que para  $z = 0$  el valor de la función es  $-28a_4$ . De manera que

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - 20a_2\wp(z) - 28a_4.$$

Abreviando, sean  $20a_2 = g_2$  y  $28a_4 = g_3$ , observemos que la igualdad anterior es una ecuación diferencial de primer orden que tiene a  $\wp(z)$  como una solución.

Es muy importante hacer notar que  $g_2$  y  $g_3$  no dependen de cómo se escojan los períodos básicos de  $\Omega_\wp$ , por esta razón serán llamados *invariantes de la función  $\wp$* .

En efecto, de la igualdad (2.10) se sigue que

$$g_2 = 20a_2 = 60 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 28a_4 = 140 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6},$$

éstas son expresiones en forma de sumas de series absolutamente convergentes sobre el conjunto de los períodos de  $\wp(z)$  distintos de cero; asimismo el módulo  $\Omega_\wp$  es el mismo sin importar la base de períodos de  $\wp(z)$ .

Una forma convencional de escribir dicha ecuación diferencial es:

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 \quad (2.12)$$

que en términos de  $w = \wp(z)$  equivale a:

$$\left[ \frac{dw}{dz} \right]^2 = 4w^3 - g_2w - g_3 \quad (2.13)$$

Como sabemos  $\wp'(\omega_i/2) = 0$ , de modo que el polinomio

$$p(w) = 4w^3 - g_2w - g_3 \quad (2.14)$$

debe anularse para  $w_i = \wp(\omega_i/2) = e_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , por lo que

$$4w^3 - g_2w - g_3 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3).$$

Y (2.14) puede escribirse como

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3].$$

**Definición.** Si  $e_1, e_2, e_3$  son las raíces del polinomio  $p$  en (2.14), definimos al discriminante de  $p$  como

$$\Delta_p = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.$$

Naturalmente las raíces son distintas si y sólo si  $\Delta_p \neq 0$ .

**Teorema 2.3.5.** Para el polinomio de Weierstrass,  $\Delta_p = g_2^3 - 27g_3^2$ .



*Demostración.* Escribiendo

$$p(w) = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3), \quad (2.15)$$

e igualando con (2.14) tendremos que

$$\begin{aligned} p(w) &= 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3) \\ &= 4w^3 - w^2(4e_1 + 4e_2 + 4e_3) + w(4e_1e_2 + 4e_1e_3 + 4e_2e_3) - 4e_1e_2e_3 \\ &= 4w^3 - g_2w - g_3 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0 \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 &= -\frac{1}{4}g_2 \\ e_1e_2e_3 &= \frac{1}{4}g_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Diferenciando (2.14) y (2.15), evaluando en  $w = e_1$  y posteriormente igualando, obtendremos respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(w)}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3)) \\ &= 4e_1e_2 - 8we_2 - 8we_3 - 8we_1 + 4e_1e_3 + 4e_2e_3 + 12w^2 \\ \left[ \frac{\partial p(w)}{\partial w} \right]_{w=e_1} &= 4e_2e_3 - 4e_1e_3 - 4e_1e_2 + 4e_1^2 \\ &= 4(e_2e_3 - e_1e_3 - e_1e_2 + e_1^2) \\ &= 4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(w)}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w} (4w^3 - g_2w - g_3) \\ &= 12w^2 - g_2, \\ [12w^2 - g_2]_{w=e_1} &= 12e_1^2 - g_2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} 4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) &= p'(e_1) \\ &= 12e_1^2 - g_2 \end{aligned}$$

Análogamente expresamos  $p'(e_2)$  y  $p'(e_3)$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_p &= -\frac{1}{4}p'(e_1)p'(e_2)p'(e_3) \\
&= -\frac{1}{4}\prod_{i=1}^3(12e_i^2 - g_2) \\
&= -\frac{1}{4}(12e_1^2g_2^2 - g_2^3 + 12e_2^2g_2^2 + 12e_3^2g_2^2 - 144e_1^2e_2^2g_2 - 144e_1^2e_3^2g_2 - 144e_2^2e_3^2g_2 + 1728e_1^2e_2^2e_3^2) \\
&= -\frac{1}{4}(1728(e_1e_2e_3)^2 - 144g_2(e_1^2e_2^2 + e_1^2e_3^2 + e_2^2e_3^2) + 12g_2^2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - g_2^3) \\
&= -\frac{1}{4}(108g_3^2 - 9g_2^3 + 6g_2^3 - g_2^3) \\
&= g_2^3 - 27g_3^2.
\end{aligned}$$

□

Obteniendose el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.6.**  $p(w)$  tiene raíces distintas si y sólo si  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ .

Para cada  $w$ , la ecuación (2.13) determina dos valores que difieren por un signo. En cambio  $\wp(z)$  no varía al substituir  $z$  por  $-z$ , mientras que en la función uniforme impar  $\wp'(z)$ , el signo si cambia. Por ello en

$$\wp'(z) = \sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3} \quad (2.17)$$

escogemos entre los dos valores de la raíz al que coincide con  $\wp'(z)$ . Sea  $\gamma$  una curva rectificable que una  $z_0$  con  $z$  sin pasar por los polos de  $\wp(z)$ . Expresando (2.17) como

$$dz = \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3}}$$

e integrando a lo largo de  $\gamma$ , por el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea, tendremos que

$$\int_{\gamma} dz = z - z_0$$

luego entonces

$$z - z_0 = \int_{\gamma} \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3}}.$$

Sea  $\wp(\gamma) = \Gamma$  la imagen de la curva  $\gamma$  en el plano  $w$ ;  $\Gamma$  une los puntos  $w_0 = \wp(z_0)$  y  $w = \wp(z)$ , con esto podemos representar la igualdad anterior como

$$z - z_0 = \int_{w_0}^w \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$$

la integral a lo largo de  $\Gamma$ . La cual determina una función multivaluada de  $w$ .

Si calculamos la integral a lo largo de distintos caminos  $\Gamma$  que estén contenidos en un mismo conjunto abierto conexo, cuya frontera sea también conexa y que no contenga a los puntos singulares  $e_1, e_2, e_3$ , de la función subintegral

$$\frac{1}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

el valor de la integral siempre será el mismo. En cambio, si tomamos dos caminos entre los cuales esté situado uno o más puntos  $e_i$ , no podemos asegurar que el valor de las integrales a lo largo de cada uno de estos dos caminos será igual; pues a un mismo valor  $w = \wp(z)$  le corresponde un conjunto infinito de valores diferentes de  $z$ , expresados por  $z = \pm z' + m\omega_1 + n\omega_2$ , donde  $z'$  es alguna de las preimágenes de  $w$  bajo  $\wp(z)$  y  $m, n$  son enteros arbitrarios. Ahora bien, si unimos  $z_0$  con uno de estos puntos  $z$  de la curva rectificable  $\gamma$ , tomando la integral desde  $(\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3})^{-1}$  a lo largo de la imagen  $\wp(\gamma) = \Gamma$ , obtendremos como valor de la integral al número  $z - z_0$ . Si  $z_0 \rightarrow 0$  entonces  $w_0 = \wp(z_0) \rightarrow \infty$ , y dado que la integral impropia

$$\int_{\infty}^w \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$$

es convergente, resulta

$$z = \int_{\infty}^w \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} \quad (2.18)$$

Mediante la igualdad anterior, se deduce que la función  $\wp(z)$  es inversa respecto de la integral (2.18).

Esta última se llama *integral elíptica de primera especie en la forma normal de Weierstrass*.

Si en (2.18) sustituimos  $z = \omega_i$ , observando que  $w = \wp(\omega_i) = e_i$ , tendremos que:

$$w_i = \int_{\infty}^{e_i} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}; \text{ con } i = 1, 2, 3,$$

(optando por caminos de integración, a las imágenes de curvas rectificables que unan el punto  $z = 0$  con los puntos  $\omega_i$  respectivamente). Si en la igualdad anterior se emplean caminos de integración arbitrarios que unan el punto  $\infty$  con el punto  $e_i$ , entonces en el primer miembro resultarán distintos semiperíodos de la forma  $w_i + m\omega_1 + n\omega_2$ , donde  $n, m$  son enteros arbitrarios. Tomar uno u otro valor de la raíz cuadrada no es esencial, pues esto solamente influye en el signo del semiperíodo.

Habiendo visto que cada función  $w = \wp(z)$  es solución de la ecuación diferencial, vamos a demostrar que los invariantes  $g_2$  y  $g_3$  determinan unívocamente a la función  $\wp(z)$ , por lo que no pueden existir dos funciones distintas  $\wp(z)$  con invariantes

iguales. Para esto, es suficiente comprobar la unicidad de la solución analítica de la ecuación dada que satisface la condición inicial  $\rho(0) = \infty$ .

En efecto, sea  $z_0$  un punto del plano diferente a los semiperíodos de  $\wp(z)$  y sea  $\rho(z)$  una función analítica en un entorno de  $z_0$  que sea solución de la ecuación diferencial y que cumple la condición  $\rho(0) = \infty$ . Entonces podemos representarla como  $\rho(z) = \wp[h(z)]$ , donde  $h(z) = (\wp^{-1} \circ \rho)(z)$  es una función analítica en un entorno de  $z_0$ .

Por una parte,  $\wp(z)$  es una solución de la ecuación diferencial y se cumple

$$\left[ \frac{d\wp(h)}{dh} \right]^2 = 4[\wp(h)]^3 - g_2\wp(h) - g_3 \quad (2.19)$$

a la par, sabemos que

$$\frac{d\wp[h(z)]}{dz} = \frac{d\wp(h)}{dh} \cdot \frac{dh}{dz},$$

de modo que

$$\left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 = \left[ \frac{d\wp(h)}{dh} \right]^2 \cdot \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 = 4[\wp(h)]^3 - g_2\wp(h) - g_3. \quad (2.20)$$

Igualando (2.19) y (2.20) tenemos que

$$\left( \frac{dh}{dz} \right)^2 = 1,$$

esto implica  $h = \pm z + C'$ , y en consecuencia

$$\rho(z) = \wp(\pm z + C') = \wp(z + C),$$

si además pedimos que la solución  $\rho(z)$  cumpla la condición  $\rho(0) = \infty$ , tendremos que  $C$  debe ser un período de  $\wp(z)$ . De donde se sigue que  $\rho(z)$  es idénticamente igual a  $\wp(z)$ . □

Responder a la cuestión de si dados cualesquier  $a_2$  y  $a_3$  números complejos, la ecuación

$$\left[ \frac{dw}{dz} \right]^2 = 4w^3 - a_2w - a_3$$

siempre tiene como solución una función elíptica de Weierstrass  $w = \wp(z)$ ; es el llamado *problema de la inversión de una integral elíptica*. En el cual se intenta demostrar que la función inversa de la integral elíptica

$$z = \int_{\infty}^{\omega} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$$

es una función elíptica  $w = \wp(z)$ .

De inicio, para aproximarnos a una respuesta afirmativa, debemos restringir los números  $a_2$  y  $a_3$  por aquellos que cumplan la condición:  $(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \neq 0$ . El problema de la inversión quedaría resuelto si se demuestra la existencia de dos números complejos  $\omega'$  y  $\omega''$ , con  $\text{Im} \frac{\omega''}{\omega'} \neq 0$ , que satisfagan las ecuaciones:

$$a_2 = 60 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{(m\omega' + n\omega'')^4}, \quad a_3 = 140 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{(m\omega' + n\omega'')^6},$$

así, construyendo una función  $\wp(z)$  con períodos fundamentales  $\omega'$  y  $\omega''$ , podríamos afirmar que sus invariantes son iguales a  $a_2$  y  $a_3$ , de tal modo que la función construida sería solución de la ecuación diferencial señalada.

Para concluir esta sección, estudiaremos un teorema que exhibe la relación entre una función elíptica  $f$  con retícula de períodos  $\Omega$  y la función  $\wp$  de Weierstrass obtenida a partir de ésta retícula.

Consideremos el campo  $E(\Omega)$  de funciones elípticas respecto de  $\Omega$ . Dicho campo contiene al subcampo  $E_1(\Omega)$  formado por las funciones elípticas pares. A su vez, las funciones constantes son un subcampo de  $E_1(\Omega)$  isomorfo a  $\mathbb{C}$  (en éste sentido podemos ver a  $E(\Omega)$  y  $E_1(\Omega)$  como campos de extensión de  $\mathbb{C}$ ). Ahora bien, claramente  $E_1(\Omega)$  contiene a  $\wp(z) = \wp_\Omega(z)$ , de modo que también contiene a todas las funciones racionales de  $\wp$ , con coeficientes en los complejos. Estas funciones racionales forman un campo  $\mathbb{C}(\wp)$ , el cual es el mínimo campo que contiene a  $\wp$  y a las funciones constantes  $\mathbb{C}$ . Análogamente,  $E(\Omega)$  contiene a  $\wp$  y  $\wp'$ , luego contiene al campo  $\mathbb{C}(\wp, \wp')$  de las funciones racionales de  $\wp$  y  $\wp'$ ; el cuál a su vez será el mínimo campo que contiene a  $\wp$ ,  $\wp'$  y  $\mathbb{C}$ .

### Teorema 2.3.7.

1. Si  $f$  es una función elíptica par, entonces  $f = R_1(\wp)$  para alguna función racional  $R_1$ ; así mismo tendremos  $E_1(\Omega) = \mathbb{C}(\wp)$ .
2. Si  $f$  es cualquier función elíptica, entonces

$$f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp),$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son funciones racionales; así mismo tendremos que  $E(\Omega) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ .

*Demostración.* (1) Sea  $f$  una función elíptica par. Evidentemente la proposición se cumple para las funciones constantes, de modo que supondremos que  $f$  es de orden  $N > 0$ . Si  $k \in \mathbb{C}$ , tendremos que  $f(z) = k$  posee raíces múltiples solo cuando  $f'(z) = 0$ , y ésto sucede en un número finito de clases de equivalencia de puntos  $z$ ,

luego entonces para  $f(z) = k$  todas sus raíces son simples, salvo para un número finito de valores de  $k$ . Por lo cual, podemos elegir dos números complejos  $c$  y  $d$ , tales que las raíces de  $f(z) = c$  y  $f(z) = d$  sean todas simples, y ninguna de ellas sea congruente a 0 y  $\omega_i/2$ , con  $i = 1, 2, 3$ . Dado que  $f$  es par, el conjunto completo de raíces de  $f(z) = c$ , será de la forma  $a_1, -a_1, a_2, -a_2, \dots, a_n, -a_n$  dichas raíces son simples no congruentes mutuamente, análogamente las raíces  $b_1, -b_1, b_2, -b_2, \dots, b_n, -b_n$  de  $f(z) = d$ . Se infiere entonces, que la función elíptica

$$g(x) = \frac{f(z) - c}{f(z) - d}$$

tiene ceros simples en  $a_1, -a_1, a_2, -a_2, \dots, a_n, -a_n$ . Y polos simples en  $b_1, -b_1, b_2, -b_2, \dots, b_n, -b_n$ .

Ahora bien, en la demostración del Corolario 2.3.4, vimos que las ecuaciones  $\wp(z) = \wp(a_i)$  y  $\wp(z) = \wp(b_i)$  tienen respectivamente, como raíces simples a  $z = \pm a_i$  y  $z = \pm b_i$ , con  $1 \leq i \leq n$ . De modo que la función elíptica

$$h(z) = \frac{((\wp(z) - \wp(a_1))(\wp(z) - \wp(a_2)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n)))}{((\wp(z) - \wp(b_1))(\wp(z) - \wp(b_2)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n)))}$$

tiene los mismos ceros y polos que  $g$ , y de las mismas multiplicidades, simples todas ellas. Así, por el Teorema 2.2.8, se sigue que  $g = \lambda h$  para alguna constante  $\lambda \neq 0$ . Luego, resolviendo

$$\frac{f(z) - c}{f(z) - d} = \lambda \frac{((\wp(z) - \wp(a_1))(\wp(z) - \wp(a_2)) \dots (\wp(z) - \wp(a_n)))}{((\wp(z) - \wp(b_1))(\wp(z) - \wp(b_2)) \dots (\wp(z) - \wp(b_n)))}$$

para  $f(z)$ , obtendremos que  $f$  es una función racional  $R_1(\wp)$  de  $\wp$ , con coeficientes complejos.

(2) Si  $f$  es impar, el cociente  $f/\wp'$  será par, luego entonces en virtud del inciso anterior (1), tendremos que  $f = \wp' R_2(\wp)$  para cierta función racional  $R_2$ . En general, si  $f$  es cualquier tipo de función elíptica tendremos que

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$$

donde  $1/2(f(z) + f(-z))$  es una función elíptica par, mientras que  $1/2(f(z) - f(-z))$  es una función elíptica impar; luego por lo ya expuesto, tendremos que

$$f = R_1(\wp) + \wp' R_2(\wp),$$

donde  $R_1$  y  $R_2$  son funciones racionales.

□

## 2.4. Descripción topológica de la función $\wp$

Si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$  es una función elíptica de orden  $N$ , respecto del módulo  $\Omega$ , observemos que  $f$  induce de manera natural una función  $F_f: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \Sigma$  tal que  $F_f([z]) = f(z)$  para cada  $[z] \in \mathbb{C}/\Omega$ . Dicha función  $F_f$  está bien definida, pues  $f$  lo está y todas las clases en  $\mathbb{C}/\Omega$  son ajenas, lo cual implica que para todo  $[z] \in \mathbb{C}/\Omega$  existe un único  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $[z] \xrightarrow{F_f} w$ .

Estudiemos algunas propiedades topológicas asociadas a la función  $F_f$ , que son de interés para nosotros.

**Definición.** Sea  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$  una función meromorfa. Decimos que  $f$  es  $k$  a uno si, dados  $a, c$  complejos tales que  $f(a) = c$  con multiplicidad  $k$  y dado un abierto  $U$  de  $a$  suficientemente pequeño, existe un abierto  $V$  de  $c$  tal que para cada  $c' \in V - \{c\}$ , la ecuación  $f(z) = c'$  posee exactamente  $k$  soluciones en  $U$ .

**Lema 2.4.1.** Si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$  es una función elíptica de orden  $N$ , respecto del módulo  $\Omega$ , entonces  $f$  es abierta y localmente  $k$  a uno.

*Demostración.* Si  $f(a) = c$  con orden multiplicidad  $k$ , entonces se consideran dos casos.

1.  $c \neq \infty$ . Recordemos que si la función elíptica  $f$  no es idénticamente  $c$ , entonces el conjunto de soluciones de  $f(a) = c$  es discreto, y cada solución posee un orden de multiplicidad finito, y naturalmente soluciones congruentes tendrán el mismo orden de multiplicidad. Por ello cualquier paralelogramo fundamental  $P$  de  $\Omega$ , contiene un número finito de soluciones y, reemplazando  $P$  por  $P + t$  ( $t \in \mathbb{C}$ ) si es necesario, podremos suponer que  $f^{-1}(c) \cap \partial P = \emptyset$ , es decir no hay soluciones de la ecuación en la frontera  $\partial P$  de  $P$ .

Sea  $B = \{\rho \in P \mid f(\rho) = \infty\}$ , luego  $f$  es analítica en la región  $R = \overset{\circ}{P} - B$ , luego en virtud del teorema (A.2.6) si  $a \in U$  es un abierto lo suficientemente pequeño, entonces existe un abierto  $c \in V$  tal, que para cada  $c' \in V - \{c\}$  la ecuación:  $f(z) = c'$ , tiene exactamente  $k$  soluciones en  $U$  todas simples, y por lo tanto  $f$  es localmente  $k$  a uno en los puntos cercanos de  $a$ .

2.  $c = \infty$ . Sea  $A = \{\eta \in \mathbb{C} \mid f(\eta) = 0\}$ , y el conjunto  $B$  como en el caso anterior, luego sea  $P$  un paralelogramo fundamental de  $\Omega$  tal, que  $B \cap \partial P = \emptyset$ . Entonces la función  $1/f(z)$  es analítica en la región  $R = \overset{\circ}{P} - A$ . Digamos que  $f(a) = c = \infty$ , luego en virtud del teorema (A.2.6) si  $a \in U$  es un abierto en  $\mathbb{C}$  lo suficientemente pequeño, entonces existe un abierto de  $1/c \in V$  en  $\Sigma$  tal, que para cada  $w \in V - \{1/c\}$  la ecuación:  $1/f(z) = w$ , tiene exactamente  $k$  soluciones en  $U$ , todas simples, i.e.  $1/f(z)$  es localmente  $k$  a uno en los puntos cercanos de  $a$ .

Notemos que si  $a'$  es solución de la ecuación  $1/f(z) = w$  ( $w \in V - \{1/c\}$ ), entonces también será solución de  $f(z) = 1/w$ , donde  $1/w \in \tilde{V} = \{\tilde{w} \in \Sigma \mid \tilde{w} = 1/w \text{ con } w \in V - \{1/c\}\}$ ; naturalmente  $\infty \notin \tilde{V}$ . Así, invirtiendo  $V$  generamos un nuevo abierto tal, que para cada  $\tilde{w} \in \tilde{V}$  la ecuación:  $f(z) = \tilde{w}$  tiene exactamente  $k$  soluciones en  $U$ , todas simples, de modo que  $f(z)$  es localmente  $k$  a uno en los puntos cercanos de  $a$ .

Finalmente, sea  $X \subseteq \mathbb{C}$  un subconjunto abierto, luego si  $c \in f(X)$  entonces  $f(a) = c$  para algún  $a \in X$ , ahora por (A.2.6) sabemos que si  $a \in U$  es un abierto lo suficientemente pequeño, existe un abierto  $c \in V$  tal que  $V \subseteq f(U)$ . Observemos que siempre podemos escoger un abierto  $a \in U \subseteq X$  tan pequeño como se quiera, por lo que  $a \in V \subseteq f(U) \subseteq f(X)$ . Por lo tanto  $f$  es una función abierta.

□

Ahora bien, supongamos que  $a \in \mathbb{C}$  y  $f(a) = c \in \Sigma$  con multiplicidad  $k$ . Si  $U$  es una vecindad de  $a$ , lo suficientemente pequeña como para que cualquier par de puntos de  $U$  no sean congruentes módulo  $\Omega$ , entonces la proyección  $p$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\xrightarrow{p} \mathbb{C}/\Omega \\ z &\mapsto [z] \end{aligned}$$

transforma  $U$  homeomorfamente en una vecindad  $\tilde{U}$  de  $[a]$  en  $\mathbb{C}/\Omega$ . El homeomorfismo  $U \xrightarrow{p} \tilde{U}$  permite comprobar de nuevo, que  $F_f$  es una función abierta y localmente  $k$  a uno en  $[a]$ .

**Lema 2.4.2.** *Si  $f: \mathbb{C} \rightarrow \Sigma$  es una función elíptica de orden  $N$  respecto del módulo  $\Omega$  entonces la función  $F_f: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \Sigma$  con  $F_f([z]) = f(z)$  y  $[z] \in \mathbb{C}/\Omega$ , es abierta, continua y localmente  $k$  a uno.*

*Demostración.* Las demostraciones anteriores, dada la periodicidad de la función, restringen el dominio de  $f$  a paralelogramos fundamentales de  $\Omega$ , ésto nos dice que la función  $F_f: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \Sigma$  definida como  $F_f([z]) = f(z)$  para cada  $[z] \in \mathbb{C}/\Omega$ , es localmente  $k$  a uno, y siempre podemos escoger un abierto  $X$  totalmente contenido en un dominio fundamental de  $\Omega$  para argumentar, como en el caso de  $f$ , que la función  $F_f$  es abierta.

Si  $V$  es abierto en  $\Sigma$ , entonces  $f^{-1}(V)$  será abierto, puesto que  $f$  es continua. Ahora bien, sea  $A \subseteq \mathbb{C}/\Omega$  tal que  $A$  es congruente con  $f^{-1}(V)$  módulo  $\Omega$ . Afirmamos que  $A$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}/\Omega$ . En efecto si  $[a] \in A$ , existe  $a_0 \in [a]$  tal que  $a_0 \in f^{-1}(V)$ ; además siempre podemos encontrar una vecindad de  $V(a_0)$  lo suficientemente pequeña como para estar contenida en  $f^{-1}(V)$  y que ningún par de puntos de  $V(a_0)$  sean congruentes entre sí módulo  $\Omega$ , por lo que  $V(a_0)$  también es una vecindad de  $[a_0]$  contenida en  $A$ . Entonces  $F_f$  es continua, pues  $A = F_f^{-1}(V)$ .



□

Recordemos que una función no constante  $f$  holomorfa en una región  $R$  y con  $f(a) = c$ , puede expresarse en un entorno del punto  $a$ , mediante su desarrollo en series de potencias de  $(z - a)$ , esto es

$$f(z) = c + f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \cdots,$$

lo cual implica,

$$f(z) - c = f'(a)(z - a) + \frac{f''(a)}{2!}(z - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \cdots \quad (2.21)$$

Como  $f$  no es constante, entre los coeficientes del segundo miembro de (2.21), habrá algunos distintos de cero. Entonces sea  $(z - a)^k$  la potencia inferior de  $(z - a)$  cuyo coeficiente es distinto de cero.

Esto implica,

$$f(z) - c = (z - a)^k \left[ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(z - a) + \cdots + \frac{f^{(k+m)}(a)}{(k+m)!}(z - a)^m + \cdots \right] \quad (2.22)$$

donde  $f^{(k)}(a) \neq 0$ . Así el número  $k$  se define cómo la multiplicidad de  $a$ . Nótese que por hipótesis  $f(a) = c$ ,  $f'(a) = 0$ ,  $\dots$ ,  $f^{(k-1)}(a) = 0$  y  $f^{(k)}(a) \neq 0$ .

Mientras tanto, de (2.22) se desprende que  $f(z) = (z - a)^k g(z) + c$  con  $g(a) \neq 0$ , luego  $f'(z) = (z - a)^k g'(z) + k(z - a)^{k-1} g(z)$  y  $f'(a) = 0$ .

De modo que los puntos de  $F_f$  con orden de multiplicidad  $k > 1$ , son los ceros de la función derivada  $F'_f$  y los posibles polos múltiples. A su vez, como  $F'_f$  es elíptica, sabemos que el conjunto de ceros es finito.

Como ejemplo, sea la función elíptica  $\wp$  de Weierstrass. Luego  $N = 2$  (por lo que  $F_\wp$  es una cubierta ramificada con 2-hojas de  $\Sigma$ ), y por el Corolario 2.3.4, sabemos que  $\wp'$  posee tres clases de congruencia de ceros, a saber:  $[\frac{1}{2}\omega_1]$ ,  $[\frac{1}{2}\omega_2]$  y  $[\frac{1}{2}\omega_3]$ , donde  $\{\omega_1, \omega_2\}$  es una base para  $\Omega$  y  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . El orden de multiplicidad  $k$  en cada uno de estos ceros satisface  $1 < k \leq N$ , luego  $k = 2$ , y como los polos de  $\wp$  tienen orden de multiplicidad 2, concluimos que la función  $F_\wp : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \Sigma$  tiene cuatro puntos (de ramificación) de orden  $k - 1 = 1$ : las clases  $[\frac{1}{2}\omega]$  con  $\omega \in \Omega$ .

Sea  $P$  el paralelogramo fundamental de  $\Omega$  con vértices  $\frac{1}{2}(\pm\omega_1 \pm \omega_2)$ , así el punto 0 es el centro de  $P$ . Ahora bien,  $\wp$  es par y de orden  $N = 2$  entonces si  $z_1, z_2$  son dos puntos distintos en  $\dot{P}$ , tendremos  $\wp(z_1) = \wp(z_2)$  si y sólo si  $z_1 = -z_2$ ; en efecto si  $\wp(z_1) = \wp(z_2) = c$ , claramente  $\wp^{-1}(c) = \{z_1, z_2, -z_1\}$  pero  $|\wp^{-1}(c)| \leq N = 2$ , luego  $z_2 = -z_1$ . Análogamente para los puntos de  $\partial P$  se tiene, que  $\wp(z_1) = \wp(z_2)$  si y

solamente si  $z_1 \sim \pm z_2$ , figura (F.2.5).

Observemos que la función  $\tau : z \rightarrow -z$ , la cual es una rotación de  $P$  entorno de 0 por un ángulo  $\pi$ , aplica pares de puntos congruentes de  $\partial P$  en pares de puntos congruentes. A su vez  $\tau$  induce una nueva función  $\tilde{\tau} : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  dada por  $\tilde{\tau}([z]) = [\tau(z)] = [-z]$ , cuyos puntos fijos son las clases  $[z] = [-z]$ , es decir aquellas clases que satisfacen  $[2z] = [0] = \Omega$ : exactamente los cuatro puntos  $[\frac{1}{2}\omega]$  de ramificación de  $F_\wp$ .

Retornando a la función  $F_\wp$ , vemos que identifica cada clase  $[z]$  con  $[-z]$ . De modo que la imagen  $F_\wp(\mathbb{C}/\Omega) = \wp(\mathbb{C}) = \wp(P)$  puede obtenerse a partir de  $P$  identificando cada punto  $z \in \overset{\circ}{P}$  con  $-z$ , y cada punto  $z \in \partial P$  con los puntos  $[\pm z] \cap \partial P$ . Es decir, como la rotación  $\tilde{\tau}$  tiene el mismo efecto en  $\mathbb{C}/\Omega$  que  $F_\wp$ , la imagen  $F_\wp(\mathbb{C}/\Omega)$  es precisamente el espacio cociente bajo la acción de  $\tau$ , figura (F.2.5), el cual resulta homeomorfo a una esfera, comprobándose así que  $F_\wp(\mathbb{C}/\Omega)$  es la esfera de Riemann.

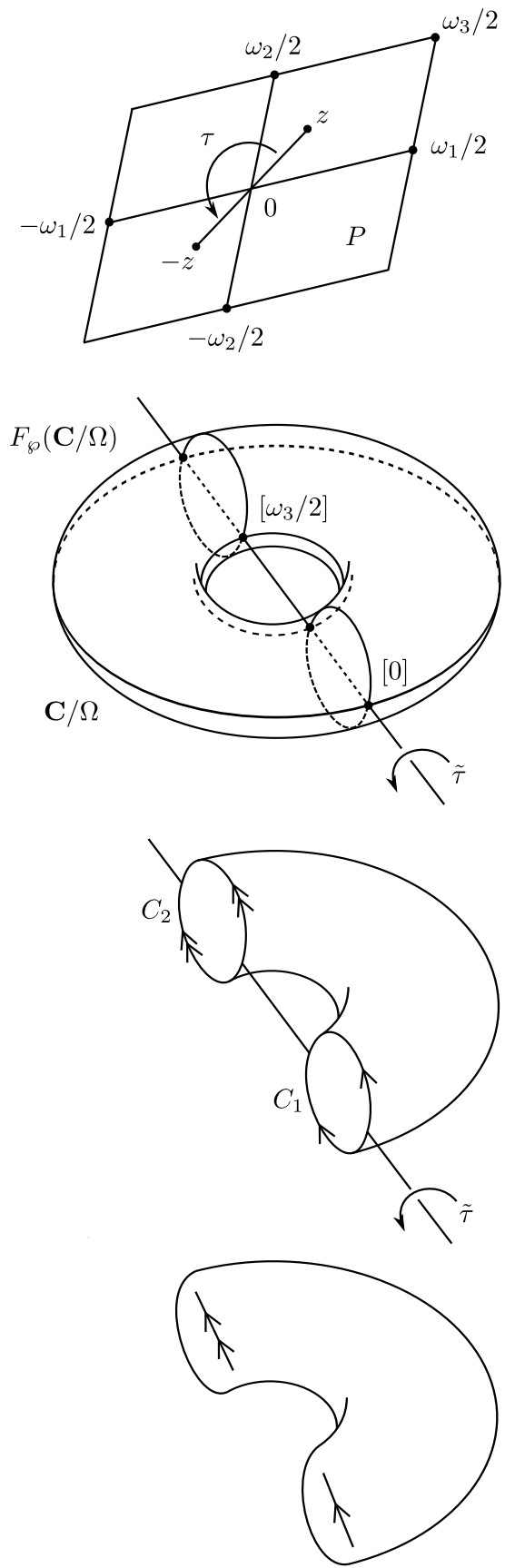


Figura 2.5: El Toro módulo  $\tau: z \rightarrow -z$

# Capítulo 3

## Curvas Elípticas

### 3.1. Retículas, toro y grupo modular

Sean las retículas de periodos generados,  $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$  y  $\Omega' = \Omega(\omega'_1, \omega'_2)$ .

Decimos que dos retículas  $\Omega$  y  $\Omega'$  son *semejantes* si existe  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\Omega' = \mu\Omega$ , donde  $\mu\Omega = \{\mu\omega \mid \omega \in \Omega\}$ .

Vamos a demostrar que si  $\Omega$  y  $\Omega'$  son semejantes, entonces  $\mathbb{C}/\Omega$  y  $\mathbb{C}/\Omega'$  son superficies de Riemann isomorfas, i.e. *conformemente equivalentes*. Para ello vamos a construir el biholomorfismo entre  $\mathbb{C}/\Omega$  y  $\mathbb{C}/\Omega'$ . Sin pérdida de generalidad sea  $\Omega' = \alpha\Omega$ , con  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Luego sea

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C} \\
 z & \mapsto & \alpha z \\
 p \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow p' \\
 \mathbb{C}/\Omega & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{C}/\alpha\Omega \\
 [z]_\Omega & \mapsto & [\alpha z]_{\alpha\Omega}
 \end{array}$$

donde  $p$  y  $p'$  son las proyecciones naturales  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  y  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\alpha\Omega$ , respectivamente. Así mismo  $f_\alpha$  está bien definida como función del toro en el toro, ya que si  $h \in \mathbb{C}$ , entonces  $f_\alpha([z+h]) = [\alpha z + \alpha h]_{\alpha\Omega} = [\alpha(z+h)]_{\alpha\Omega}$ , claramente  $\alpha$  es una función lineal compleja, por lo que es holomorfa, luego  $f_\alpha \circ p$  es holomorfa. Análogamente obtenemos la función inversa al multiplicar por  $1/\alpha$ . Por lo tanto  $f_\alpha \circ p$  es biholomorfa.

Anteriormente vimos que si  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \omega'_2 &= a\omega_2 + b\omega_1 \\
 \omega'_1 &= c\omega_2 + d\omega_1
 \end{aligned}$$

definen una base  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  para  $\Omega(\omega_1, \omega_2)$  si y sólo si  $ad - bc = \pm 1$ .

Por ésta razón si  $\{\omega_1, \omega_2\}$  y  $\{\omega'_1, \omega'_2\}$  son bases de  $\Omega$  y  $\Omega'$ , la relación de semejanza entre ambas retículas se expresa como

$$\begin{aligned}\omega'_2 &= \mu(a\omega_2 + b\omega_1) \\ \omega'_1 &= \mu(c\omega_2 + d\omega_1)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ,  $ad - bc = \pm 1$  y  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Como  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , se cumple  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ . Sí  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) < 0$ , podemos intercambiar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  para que  $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ . Considerando esto, definimos el *módulo* de la base  $\{\omega_1, \omega_2\}$  como

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \text{ con } \text{Im}(\tau) > 0,$$

así los módulos  $\tau$  pertenecen al semiplano superior complejo

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Cada retícula  $\Omega$  determina un conjunto de módulos a partir de sus diversas bases. Y puesto que

$$\frac{\mu\omega_2}{\mu\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

retículas similares determinan los mismos conjuntos de módulos.

Escribiendo  $\tau = \omega_2/\omega_1$  y  $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$ , por (3.1) vemos que  $\Omega$  y  $\Omega'$  son semejantes si, y sólo si

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = T(\tau)\tag{3.2}$$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $ad - bc = \pm 1$ .

Haciendo  $w = T(z) = (az + b)/(cz + d)$ , podemos ver que

$$w = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2},$$

por lo que  $\text{Im}(w) = (ad - bc) \text{Im}(z)/|cz + d|^2$ , de modo que si  $z$  pertenece al semiplano superior  $\mathcal{U}$ ,  $T(z) \in \mathcal{U}$  si y sólo si  $ad - bc > 0$ , de aquí se deduce que en (3.2),  $ad - bc = 1$ .

Sea  $\Gamma$  el conjunto de transformaciones de Möbius de la forma

$$T: z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

tales que  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  y  $ad - bc = 1$ .

Este conjunto es un subgrupo discreto del grupo  $PSL(2, \mathbb{R})$ , y es conocido como el *grupo modular*  $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ .

**Corolario 3.1.1.** *Si  $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$  y  $\Omega' = \Omega(\omega'_1, \omega'_2)$  son retículas en  $\mathbb{C}$  con módulos  $\tau = \omega_2/\omega_1$  y  $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$  donde  $\tau, \tau' \in \mathcal{U}$  entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes*

1.  $\Omega \sim \Omega'$
2.  $\tau' = T(\tau)$  para algún  $T \in \Gamma$ .

□

Lo antes dicho sugiere que podemos obtener información sobre las retículas y los toros  $\mathbb{C}/\Omega$ , estudiando la acción del grupo modular  $\Gamma$  en el semiplano superior  $\mathcal{U}$ .

De ahora en adelante, cuándo hablemos del producto de elementos del grupo  $\Gamma$ , entiéndase como la composición de las respectivas transformaciones de Möbius. Dicho producto es equivalente al producto de las representaciones matriciales de los elementos de  $\Gamma$ .

Analicemos algunas propiedades importantes del grupo modular  $\Gamma$ .

**Teorema 3.1.2.**  *$\Gamma$  es generado por las transformaciones,*

$$A : z \rightarrow z + 1 \text{ y } B : z \rightarrow -\frac{1}{z}.$$

Para esto, veamos que cualquier transformación  $T \in \Gamma$  puede expresarse como producto de potencias de  $A$  y  $B$ . En efecto, sea  $m = \min(|c|, |d|)$ . Si  $|c| > |d|$  en  $T$ , donde  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , entonces la transformación  $TB : z \rightarrow \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'}$  tiene la propiedad,  $|c'| < |d'|$ , para  $TB(z) = \frac{-\frac{a}{z} + b}{-\frac{c}{z} + d} = \frac{bz - a}{dz - c}$ . Por lo que es suficiente considerar una transformación en  $\Gamma$  con la restricción,  $|c| \leq |d|$ .

Sea  $|c| \leq |d|$  y  $m = 0$ . Entonces  $c = 0$ , por lo que  $ad = 1$ . Luego  $Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a^2z + ba$ , pero  $1 = \det Tz = \det \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2$ , i.e.  $a = \pm 1$ . Por lo que  $T$  está dada por,  $z \rightarrow z \pm b$ . Es decir  $T = A^{\pm b}$ .

Finalmente haciendo inducción sobre  $m$ , supongamos que cualquier  $T$ , para la cual  $m \leq n - 1$ ,  $n \geq 1$ , es generada por  $A$  y  $B$ ; demostraremos que también ocurre para  $m = n$ . Por la definición de  $m$  y por la hipótesis  $|c| \leq |d|$ , tenemos que  $m = |c|$ . Bien podemos suponer que  $c > 0$ , de otro modo al multiplicar los coeficientes enteros de  $T$  por  $-1$ , permanece invariante  $T$  y obtenemos la igualdad requerida. Entonces si  $m = c$ , hay que demostrar que  $M$  es generada por  $A$  y  $B$ , cuando  $c = n$ . Sea pues,

$$TA^k : z \rightarrow \frac{az + (ak + b)}{cz + (ck + d)}, \text{ donde } k \in \mathbf{Z} \text{ tal que } 0 \leq ck + d < c$$

Con ello tenemos que,  $\min(c, ck + d) \leq n - 1$ , si  $c = n$ , puesto que  $ck + d < c$ . Por la hipótesis de inducción  $TA^k$  es generada por  $A$  y  $B$ , luego  $T$  también lo es.  $\square$

**Definición.** Una región fundamental para la acción del grupo  $\Gamma$  en el semiplano superior  $\mathcal{U}$ , se define tal cual lo hicimos para un módulo  $\Omega$ . Así, diremos que  $F$  es una región fundamental para  $\Gamma$  si  $F$  es un conjunto cerrado tal, que

- i)  $\bigcup_{T \in \Gamma} T(F) = \mathcal{U}$
- ii)  $\overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \emptyset$  para todo  $T \in \Gamma \setminus \{I\}$ , donde  $\overset{\circ}{F}$  es el interior de  $F$ .

Antes de poder exhibir una región fundamental para  $\Gamma$ , observemos los siguientes resultados.

**Teorema 3.1.3.** Dado  $z$ , con  $\text{Im}(z) > 0$ , existe una transformación  $M^* \in \Gamma$  tal, que  $\text{Im}(M^*z)$  es un máximo, esto es  $\text{Im}(M^*z) \geq \text{Im}(Mz)$  para toda  $M \in \Gamma$ . Además, si  $M^*z = z^*$ , entonces  $|z^*| \geq 1$

*Demostración.* Si  $M^*z = z^* = \frac{az + b}{cz + d}$ , y  $z = x + iy$ ,  $z^* = x^* + iy^*$  entonces  $y^* = \frac{y}{|cz + d|^2} > 0$ . Ahora bien, dado un real arbitrario  $K > 0$ , el número de pares  $(c, d)$  que cumplen  $|cz + d| < K < \infty$  es finito, puesto que  $c$  y  $d$  son enteros. En efecto, para un  $z$  fijo pensemos en el conjunto de puntos de la forma  $cz + d$  que se obtiene al variar  $c$  y  $d$ , dicho conjunto claramente es discreto, por lo cual el disco de radio  $K$  con centro en 0 contiene una cantidad finita de dichos puntos. Por otro lado, mientras menor sea  $|cz + d|^2$  mayor será  $y^*$ , así por lo que hemos visto podemos concluir que existe una transformación  $M^*$  tal que  $\text{Im}(M^*z)$  es un máximo. En tal caso  $|z^*| \geq 1$ , de otro modo  $|z^*| < 1$ , esto implicaría  $\text{Im}(-1/z^*) = y^*/(x^{*2} + y^{*2}) > y^*$  lo cual es imposible.  $\square$

**Teorema 3.1.4.** Dado  $z$ , con  $\text{Im}(z) > 0$  existe una transformación  $M \in \Gamma$  tal que  $Mz \in F$ . Donde,  $F = \{z \mid \text{Im}(z) > 0, |z| \geq 1, |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.1.3, sabemos que existe  $M^* \in \Gamma$  tal, que si  $\text{Im}(z) > 0$ , entonces  $|Mz| \geq 1$ , luego  $A^k Mz \in F$ , para algún número entero  $k$ .  $\square$

Diremos que dos puntos  $z_1, z_2$  en el semiplano superior  $\mathcal{U}$ , son *congruentes*, con respecto al grupo modular  $\Gamma$ , si ambos puntos se encuentran en la misma órbita bajo la acción del grupo  $\Gamma$ .

**Teorema 3.1.5.** Si  $z_1, z_2 \in F$ ,  $z_1 \neq z_2$  y  $z_1 \sim z_2$ , entonces  $z_1$  y  $z_2$  están contenidos en la frontera de  $F$ , y son simétricos con respecto al eje imaginario  $iy$ .

*Demostración.* Sea  $M \in \Gamma$  tal que  $Mz_1 = z_2 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}$ , con  $a, b, c, d$  enteros y  $ad - bc = 1$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\text{Im}(z_2) \geq \text{Im}(z_1)$ , i.e.  $|cz_1 + d| \leq 1$ . Se sigue que,  $1 \geq |cz_1 + d|^2 \geq c^2 (\text{Im}(z_1))^2 \geq c^2 \cdot \frac{3}{4}$ , puesto que  $z_1 \in F$ ; i.e.,  $|z_1| \geq 1$ ,  $|\text{Re}(z_1)| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\text{Im}(z_1) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ . De donde  $|c| < 2$ . Luego  $c = 0$  ó  $\pm 1$ .

Si  $c = -1$ , podemos multiplicar  $a, b, c, d$  por  $-1$ , quedando invariante  $M$ , y por consiguiente considerar el caso  $c = 1$ . Por lo que es suficiente analizar los casos  $c = 0, 1$ .

Ya que los enteros  $a, b, c, d$  y  $-a, -b, -c, -d$ , definen la misma transformación  $M$ , podemos suponer, que  $c \geq 0$  y que  $d > 0$  si  $c = 0$ .

Si  $c = 0$ , y  $d = \pm 1$ , tendremos que  $a = \pm 1$  (particularmente si  $d > 0$ , ent.  $a > 0$ ), y  $z_2 = Mz_1 = z_1 \pm b = A^{\pm b}$ .

Ahora, siempre ocurre,  $|\text{Re}(z_1)| \leq \frac{1}{2}$ , y  $|\text{Re}(z_2)| \leq \frac{1}{2}$ . Entonces,  $b = 0$  y  $M$  es la identidad (lo cual se excluye dada la hipótesis  $z_1 \neq z_2$ ), ó  $|b| = 1$ . Si  $b = 1$ , entonces  $\text{Re}(z_1) = -\frac{1}{2}$ , y  $\text{Re}(z_2) = \frac{1}{2}$ ; inversamente si  $b = -1$ . Por lo tanto  $z_2 = z_1 \pm 1$ .

Si  $c = 1$ , entonces igual que al comienzo,  $|cz_1 + d| \leq 1$ , esto es  $|z_1 + d| \leq 1$ . Pero  $|z_1| \geq 1$ , e.d.  $z_1 \in F$ , así que  $|d| \leq 1$ .

1. Si  $d = 0$ , entonces  $|z_1| \leq 1$ , luego  $|z_1| = 1$  y  $b = -1$ , (puesto que  $d = 0$  y  $c = 1$ ), por lo que  $z_2 = Mz_1 = a - \frac{1}{z}$ , de donde  $z_2 + \frac{1}{z} = a$ ,  $\text{Re}(z_2) + \text{Re}(\frac{1}{z}) = a$ ,  $|a| \leq |\text{Re}(z_2)| + |\text{Re}(z_1)| \leq 1$ , por ello  $a = 0$  ó  $|a| = 1$ . Si  $a = 0$ , tenemos que  $z_2 = -\frac{1}{z}$ ; en cambio si  $|a| = 1$ , tendremos que  $z_2 = 1 - \frac{1}{z}$ , con  $|z_1| = 1$ , por ello  $\text{Re}(z_2) = 1 - \text{Re}(z_1)$ , entonces  $\text{Re}(z_1) = \frac{1}{2} = \text{Re}(z_2)$ , lo cual implica que  $z_1 = e^{\pi i/3} = z_2$ , contrario a la hipótesis de que  $z_1 \neq z_2$ . En caso de que  $a = -1$ , tenemos que  $z_2 = -1 - \frac{1}{z}$ , y  $z_1 = e^{2\pi i/3} = z_2$ , e igualmente queda excluido.
2. Si  $d = 1$ , entonces  $|z_1 - (-d)| \leq 1$ , el cual define un disco de radio 1, con centro en  $-d$ , y si  $z_1 \in F$ , entonces  $z_1 = e^{2\pi i/3}$ . Puesto que  $c = 1$ ,  $d = 1$ , y  $ad - bc = 1$ , tenemos que  $a - b = 1$ , por ello

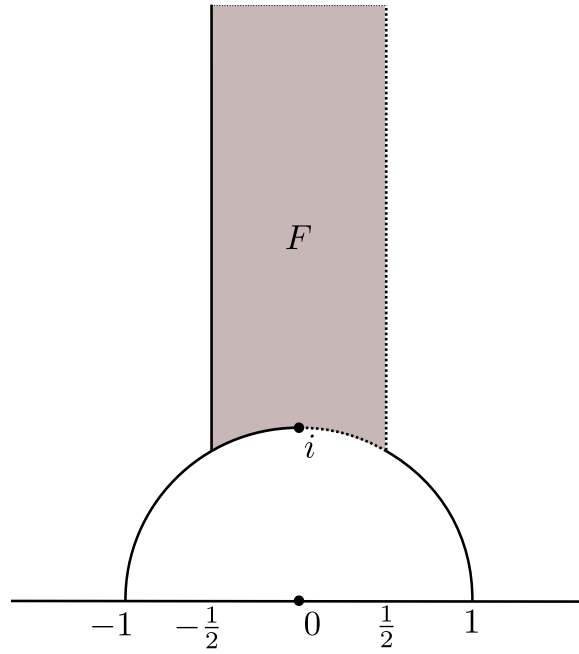
$$z_2 = \frac{az_1 + z - 1}{z_1 + 1} = \frac{a(z_1 + 1) - 1}{z_1 + 1} = a - \frac{1}{z_1 + 1} = a + z_1$$

Como  $|\text{Re}(z_1)| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|\text{Re}(z_2)| \leq \frac{1}{2}$ , puede ocurrir que  $a = 0$ , lo cual está excluido porque  $z_1 \neq z_2$ ; ó  $a = 1$  y  $z_2 = z_1 + 1$ .

3. Si  $d = -1$ , se sigue, como en (i), que  $a = -1$ , y  $z_2 = z_1 - 1$ .

□



Figura 3.1: Región fundamental  $F$  para  $\Gamma$ 

Finalmente y como una consecuencia, *cualquier punto del semiplano superior  $\mathcal{U}$  es congruente a uno y solo un punto en el interior del conjunto  $F$*  (ver Figura 3.1), donde

$$F = \left\{ z \in \mathcal{U} \mid |z| \geq 1 \mid \operatorname{Re}(z) \mid \leq \frac{1}{2} \right\}$$

Por lo tanto  $F$  es una región fundamental para  $\Gamma$ .

□

Consideremos el semiplano superior  $\mathcal{U}$ , y sea  $\mathcal{U}_B$  el conjunto de complejos  $z$  tales que  $\operatorname{Im}(z) > B$ . El mapeo

$$z \mapsto e^{2\pi iz} = q_z,$$

define un holomorfismo de  $\mathcal{U}_B$  al disco (abierto)  $D_r - \{0\}$  de radio  $r = e^{-2\pi B}$ . Representemos por  $\mathcal{U}_B/T$  al espacio cociente de  $\mathcal{U}_B$  módulo las traslaciones por un entero, topológicamente este espacio es el cilindro; de modo que  $q$  induce un biholomorfismo entre  $\mathcal{U}_B/T$  y  $D_r - \{0\}$ .

Consecuentemente una función meromorfa en  $\mathcal{U}_B$  de período 1, i.e. invariante bajo la acción de  $T$ , induce una función meromorfa  $f^*$  en  $D_r - \{0\}$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $f^*$  también sea meromorfa en 0 es que exista algún entero positivo  $N$  tal que  $f^*(q) \cdot q^N$  esté acotado cerca de 0. Si tal fuera el caso,

entonces  $f^*$  posee una expansión en series de potencias de la forma

$$f^*(q) = \sum_{-N}^{\infty} C_n q^n.$$

Diremos entonces que  $f$  es meromorfa (respectivamente holomorfa) en el infinito si  $f^*$  es meromorfa (respectivamente holomorfa) en 0. Abusando de la notación, en este caso también diremos que

$$f = \sum_{-N}^{\infty} C_n q^n,$$

y la llamaremos la  $q$ -expansión de  $f$  al infinito. Los coeficientes  $C_n$  son llamados *coeficientes de Fourier de  $f$* . Si  $C_{-N} \neq 0$  llamaremos a  $-N$  *el orden de  $f$  al infinito*, y lo denotaremos por  $v_{\infty}(f)$ . Para cualquier  $z$  en  $\mathcal{U}$ , el orden de  $f$  en  $z$  lo denotamos por  $v_z(f)$ .

Denotemos por  $\mathcal{M}$  al campo de las funciones meromorfas en  $\mathcal{U}$ , y sea  $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  un elemento del grupo modular  $\Gamma$ . Para  $f$  en  $\mathcal{M}$  y un entero  $k \geq 0$ , definimos  $(T_k(\alpha)f)(z) = f(\alpha(z))(cz + d)^{-2k}$ , podemos ver que esto define una acción de  $\Gamma$  en  $\mathcal{M}$ .

Diremos que  $f$  es un automorfismo de *peso  $2k$*  o de *grado  $2k$*  si  $T_k(\alpha)f = f$  para todo  $\alpha$  en  $\Gamma$  y si  $f$  también es meromorfa en el infinito. Notemos que nuestra definición tiene sentido, puesto que las traslaciones por 1 dejan a  $f$  invariante. A su vez, la condición  $T_k(\alpha)f = f$  equivale a decir que

$$f(\alpha(z)) = (cz + d)^{2k} f(z).$$

**Teorema 3.1.6.** *Sea  $f$  un automorfismo de peso  $2k$ , con  $f \neq 0$ . Entonces*

$$v_{\infty}(f) + \frac{1}{3}v_{\rho}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_{P \neq i, \rho} v_P(f) = \frac{k}{6}. \quad (3.3)$$

*La suma es tomada sobre todos los puntos  $P$  de  $\mathcal{U}$  módulo  $\Gamma$ , excepto en la órbita de  $\rho = e^{2\pi i/3}$  (la raíz cúbica de la unidad) y de  $i$ .*

*Demostración.* Vamos a integrar el cociente  $f'/f$  a lo largo del contorno de la figura (F.3.2), pero con algunas modificaciones pues tomaremos arcos pequeños alrededor de aquellos polos que pudiera haber en la frontera, como se ve en la figura (F.3.3).

Por simplicidad, podemos suponer que la función  $f$  no tiene en los lados, otros polos ni ceros que no sean  $\rho$  e  $i$ , que son los casos más sensibles pero que si los consideramos veremos que cualquier otro caso se demuestra análogamente. Tenemos

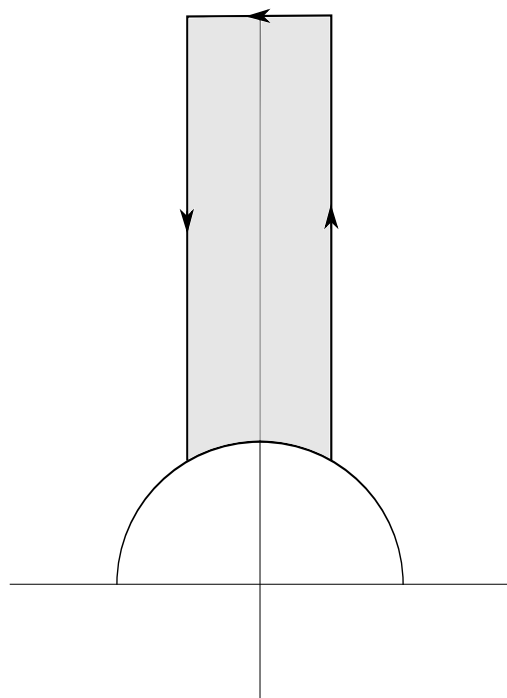


Figura 3.2: Integramos a lo largo del contorno de la región sombreada

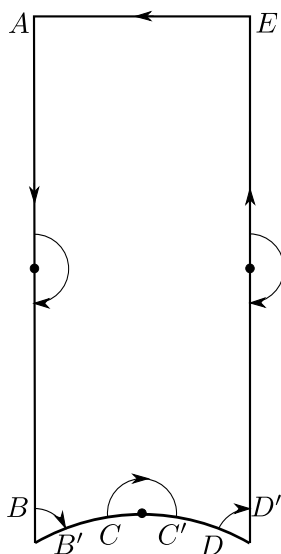


Figura 3.3: Integramos a lo largo del contorno modificado

entonces que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'}{f} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int d \log f \\ &= \sum \text{Residuos} \\ &= \sum_{P \neq i, \rho} v_P(f). \end{aligned}$$

Calculemos la integral a lo largo de la parte superior, los lados, los arcos alrededor de las esquinas, el arco alrededor de  $i$  y los arcos pertenecientes al círculo principal.

Bajo las representaciones de  $q$  y sus respectivos cambios de variable, el segmento de la parte superior (que está entre  $E$  y  $A$ ) se aplica en el círculo con centro en el origen, con una orientación contraria a las manecillas del reloj. De modo que la integral sobre dicho segmento nos da  $-v_\infty(f)$ . Mientras que la integral sobre el segmento vertical izquierdo nos da 0 por la periodicidad de  $f$ . A su vez la integral al rededor de  $\rho$  sobre el arco pequeño es igual a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_B^{B'} d \log f.$$

Efectuemos una traslación que aplique  $\rho$  en 0, y suponiendo que consideramos una función que cerca del origen se denote también por  $f$ , la escribimos como una expansión en series de potencias

$$f(z) = cz(1 + \dots).$$

De modo que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \text{términos holomorfos.}$$

Notemos que mientras el radio del círculo pequeño tiende a cero, la integral de los términos holomorfos también tiende a cero. Luego, integrando sobre un arco cuyo ángulo tienda a  $\pi/3$  en sentido contrario a las agujas del reloj, y tomando el límite cuando el radio tiende a cero, obtenemos  $-m/6$ . Finalmente, un valor similar se obtiene del círculo pequeño al rededor de  $-\rho$ , y a partir de ambos cálculos obtenemos

$$-\frac{1}{3}v_\rho(f).$$

Posteriormente, un razonamiento análogo en el arco pequeño al rededor de  $i$  llegamos a

$$-\frac{1}{2}v_i(f).$$

Ahora, solo falta efectuar los cálculos de las integrales sobre los arcos restantes

$$\int_{B'}^C + \int_{C'}^D$$

Sea  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , notemos que  $\beta$  aplica los arcos  $B'C$  en los arcos  $DC'$ . Por definición  $f(\beta z) = z^{2k} f(z)$ , luego

$$\frac{df(\beta z)}{dz} = f'(\beta z) \frac{1}{z^2} = z^{2k} f'(z) + 2kz^{2k-1} f(z).$$

Se sigue entonces que

$$\int_{C'}^D \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \int_C^{B'} \frac{f'(\beta z)}{f(\beta z)} dz,$$

y

$$\frac{1}{z^2} \frac{f'(\beta z)}{f(\beta z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{2k}{z}.$$

Podemos observar como la integral sobre el segundo arco posee un término que cancela a la integral sobre el primer arco y, también tiene otro término que es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B'}^C \frac{2k}{z} dz,$$

quien a su vez converge a  $2k/12 = k/6$ . Finalmente, reuniendo todos los cálculos anteriores obtenemos la demostración del teorema [11].  $\square$



Anteriormente vimos que la función de Weierstrass satisface una ecuación diferencial ordinaria  $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$ , donde  $p$  es un polinomio cúbico de la forma

$$p(z) = 4z^3 - c_2z - c_3 \tag{3.4}$$

Para cualquier polinomio escrito así, diremos que está en la *forma normal de Weierstrass*.

Ahora bien, sería interesante poder obtener alguna información sobre las retículas y el toro, si estudiamos la acción del grupo modular  $\Gamma$  en el semiplano superior  $\mathcal{U}$ . Para ello, vamos a construir una función  $J: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ , analítica e invariante bajo la acción de  $\Gamma$ . Con la propiedad  $J(\tau') = J(\tau)$ , si y sólo si  $\tau' = T(\tau)$ , para algún  $T \in \Gamma$ . Dicho de otro modo, la función  $J$  podrá distinguir entre las diferentes clases

de retículas similares.

Sabemos que la función  $\wp$  de Weierstrass asociada a la retícula  $\Omega$  satisface  $\wp' = \sqrt{p(\wp)}$ , donde  $p$  es un polinomio en la forma normal de Weierstrass

$$p(z) = 4z^3 - g_2z - g_3 \quad (3.5)$$

con

$$g_2 = g_2(\Omega) = 60 \sum'_{\omega \in \Omega} \omega^{-4}$$

y

$$g_3 = g_3(\Omega) = 140 \sum'_{\omega \in \Omega} \omega^{-6}.$$

Ahora bien, representando como  $\Delta(\Omega)$  al discriminante  $\Delta_p$  de  $p$ , por el Teorema 2.3.5 tendremos que

$$\Delta(\Omega) = g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2$$

y puesto que las tres raíces de  $p$  son distintas,  $\Delta(\Omega) \neq 0$ .

Definimos la *función modular*  $J(\Omega)$ , como

$$J(\Omega) = \frac{g_2(\Omega)^3}{\Delta(\Omega)} = \frac{g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2} \quad (3.6)$$

Para una retícula similar  $\mu\Omega$  ( $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) tendremos

$$g_2(\mu\Omega) = 60 \sum'_{\omega \in \Omega} (\mu\omega)^{-4} = \mu^{-4} 60 \sum'_{\omega \in \Omega} \omega^{-4} = \mu^{-4} g_2(\Omega),$$

y

$$g_3(\mu\Omega) = 140 \sum'_{\omega \in \Omega} (\mu\omega)^{-6} = \mu^{-6} 140 \sum'_{\omega \in \Omega} \omega^{-6} = \mu^{-6} g_3(\Omega),$$

lo cual implica que

$$\Delta(\mu\Omega) = g_2(\mu\Omega)^3 - 27g_3(\mu\Omega)^2 = \mu^{-12} \Delta(\Omega),$$

y por lo tanto

$$J(\mu\Omega) = J(\Omega),$$

para todo  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Luego entonces retículas similares determinan el mismo valor de  $J$ .

También, podemos ver a  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $\Delta$  y  $J$ , como funciones de  $\tau \in \mathcal{U}$ , al evaluarlas en la retícula  $\Omega = \Omega(1, \tau)$ , misma que tiene a  $\tau$  como uno de sus módulos. Entonces

$$\begin{aligned} g_2(\tau) &= 60 \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-4} \\ g_3(\tau) &= 140 \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-6} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\sum'_{m,n}$  denota la suma sobre  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$ .

Así

$$\begin{aligned}\Delta(\tau) &= g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 \\ J(\tau) &= \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Si  $\tau' = T(\tau)$  para algún  $T \in \Gamma$ , por el Corolario 3.1.1, las retículas  $\Omega = \Omega(1, \tau)$  y  $\Omega' = \Omega(1, \tau')$  son similares, luego entonces  $J(\tau') = J(\tau)$ .

Quedando demostrado el siguiente Teorema,

**Teorema 3.1.7.**  $J(T(\tau)) = J(\tau)$ , para todo  $\tau \in \mathcal{U}$  y  $T \in \Gamma$ .

Por lo tanto  $J(\tau)$  es invariante bajo la acción del grupo modular  $\Gamma$ .

En este sentido diremos que la función  $J(\tau)$  está asociada a la familia de curvas elípticas  $E_\tau = \{\mathbb{C}/\Omega_\tau \mid \Omega_\tau \sim \Omega(1, \tau)\}$ .

Notemos que, si  $T: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma$ , entonces

$$\begin{aligned}g_2(T(z)) &= 60 \sum'_{m,n} \left( m + n \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) \right)^{-4} \\ &= 60 \sum'_{m,n} \left( \frac{m(cz+d) + n(az+b)}{(cz+d)} \right)^{-4} \\ &= 60 (cz+d)^{-4} \sum'_{m,n} (m(cz+d) + n(az+b))^{-4} \\ &= 60 (cz+d)^{-4} \sum'_{m,n} (bn + dm + (an + cm)z)^{-4}\end{aligned}$$

como  $ad - bc = 1$ , la transformación  $(m, n) \mapsto (bn + dm, az + cm)$ , solamente permuta los elementos del conjunto de índices  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$ . Luego, por el teorema de cambio de base mediante transformaciones unimodulares, y por la convergencia absoluta de la serie la cual nos dice que el límite de convergencia es invariante bajo permutaciones en los términos de la serie, resulta entonces que

$$g_2(T(\tau)) = 60 (c\tau + d)^{-4} \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-4} = (c\tau + d)^{-4} g_2(\tau)$$

y

$$g_3(T(\tau)) = 140 (c\tau + d)^{-6} \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-6} = (c\tau + d)^{-6} g_3(\tau)$$

así

$$\Delta(T(\tau)) = (c\tau + d)^{-12} \Delta(\tau),$$

que alternativamente es una demostración del teorema anterior. Si en especial consideramos  $a = b = d = 1$  y  $c = 0$ , tendremos  $T(\tau) = \tau + 1$ .

Por lo anterior,

**Teorema 3.1.8.** *Las funciones  $g_2(\tau)$ ,  $g_3(\tau)$ ,  $\Delta(\tau)$  y  $J(\tau)$  son periódicas con respecto de  $\mathbb{Z}$ .*

□

Consideremos la siguiente transformación de la región  $\mathcal{U}$ ,

$$T(\tau) = \frac{a\bar{\tau} + b}{c\bar{\tau} + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc = -1). \quad (3.9)$$

Dicha transformación aplica el semiplano superior en él mismo, invirtiendo la orientación. Cálculos similares a los anteriores, generan las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} g_2(T(\tau)) &= (c\bar{\tau} + d)^{-4} \overline{g_2(\tau)} \\ g_3(T(\tau)) &= (c\bar{\tau} + d)^{-6} \overline{g_3(\tau)} \\ \Delta(T(\tau)) &= (c\bar{\tau} + d)^{-12} \overline{\Delta(\tau)} \\ J(T(\tau)) &= \overline{J(\tau)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Teorema 3.1.9.** *Las funciones  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $\Delta\tau$  y  $J: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  son analíticas en  $\mathcal{U}$ .*

*Demostración.* En el teorema (A.2.6.) del anexo, vimos que si  $\sum f_n$  es una serie de funciones analíticas en una región  $R \subseteq \mathbb{C}$ , uniformemente convergente a  $f(z)$  en todo subconjunto compacto de  $R$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $R$ . Esta convergencia, que algunos libros definen convergencia uniforme al interior del recinto  $R$ , es equivalente a pedir que para todo  $z_0 \in R$  exista un entorno de  $z_0$  en  $R$  en el cual la serie converja uniformemente. Es decir, existe  $\rho > 0$  tal que la serie converge uniformemente en el subconjunto compacto  $|z - z_0| \leq \rho$  de  $R$ .

Si  $\tau_0 \in \mathcal{U}$  tomemos  $\rho = \frac{1}{2}\text{Im}(\tau_0)$  y, sea el disco compacto  $K(\tau_0) = \{\tau \in \mathcal{U} \mid |\tau - \tau_0| \leq \rho\}$ . Como las funciones  $(m + n\tau)^{-4}$  y  $(m + n\tau)^{-6}$  son analíticas en  $\mathcal{U}$  para todo  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$ , resta demostrar que las series que en (3.7) definen a  $g_2$  y  $g_3$ , son uniformemente convergentes en cada  $K(\tau_0)$  con  $\tau_0 \in \mathcal{U}$ , para lo cual vamos a recurrir a la prueba- $M$  de Weierstrass, justificada en (A.2.12).

Sean  $m, n \in \mathbb{Z}$ , con  $n \neq 0$ , entonces

$$\left| \frac{m}{n} + \tau_0 \right| \geq \text{Im}(\tau_0) = 2\rho.$$

Si  $\tau \in K(\tau_0)$ , se cumple

$$|(m + n\tau) - (m + n\tau_0)| = |n| |\tau - \tau_0| \leq |n| \rho \leq \frac{1}{2} |m + n\tau_0|,$$

ésto último es debido a

$$2\rho \leq \left| \frac{m + n\tau_0}{n} \right|,$$



de donde se desprende

$$|n|\rho \leq \frac{1}{2} |m + n\tau_0|.$$

Por otro lado, para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$  incluido  $n = 0$ , resulta

$$|m + n\tau| = |(m + n\tau_0) - [(m + n\tau) - (m + n\tau_0)]|$$

y por la desigualdad del triángulo

$$|m + n\tau| \geq |m + n\tau_0| - |(m + n\tau) - (m + n\tau_0)|.$$

Ahora, observemos que

$$|m + n\tau_0| \geq \frac{1}{2} |m + n\tau_0| \geq |n|\rho \geq |(m + n\tau) - (m + n\tau_0)|,$$

luego

$$|m + n\tau_0| - |(m + n\tau) - (m + n\tau_0)| \geq \frac{1}{2} |m + n\tau_0|,$$

y por lo tanto

$$|m + n\tau| \geq \frac{1}{2} |m + n\tau_0|.$$

Luego entonces,

$$2|m + n\tau_0|^{-1} \geq |m + n\tau|^{-1},$$

lo cual implica que para todo  $r > 0$ , se cumple

$$(2|m + n\tau_0|^{-1})^{2r} \geq (|m + n\tau|^{-1})^{2r},$$

y equivalentemente

$$2^{2r} |m + n\tau_0|^{-2r} \geq |m + n\tau|^{-2r}$$

para todo  $\tau \in K(\tau_0)$  y  $(m, n) \neq (0, 0)$ .

Así cada término de las series en (3.7) es acotado superiormente por  $2^4 |m + n\tau_0|^{-4}$  y  $2^6 |m + n\tau_0|^{-6}$ , respectivamente.

Por (2.1.1), las series  $\sum'_{m,n} |m + n\tau_0|^{-2r}$  convergen en  $K(\tau_0)$ , para cada  $r > 1$ , luego en virtud de (A.2.12) las series  $\sum'_{m,n} |m + n\tau|^{-2r}$  convergen uniformemente en  $K(\tau_0)$ , para cada  $r > 1$ . Haciendo  $r = 2$  y  $r = 3$ , veremos que  $g_2(\tau)$  y  $g_3(\tau)$  son analíticas en  $\mathcal{U}$ . Por último, de (3.7) se sigue que  $\Delta(\tau)$  es analítica en  $\mathcal{U}$ , y puesto que  $\Delta(\tau) \neq 0$  en  $\mathcal{U}$ , se deduce que  $J(\tau)$  es analítica en  $\mathcal{U}$ . □

### Lema 3.1.10.

1. Si  $2\operatorname{Re}(\tau) \in \mathbb{Z}$  entonces  $g_2(\tau)$ ,  $g_3(\tau)$ ,  $\Delta(\tau)$  y  $J(\tau)$  son reales.

2. Si  $|\tau| = 1$  entonces  $g_2(\tau) = \tau^4 \overline{g_2(\tau)}$ ,  $g_3(\tau) = \tau^6 \overline{g_3(\tau)}$ ,  $\Delta(\tau) = \tau^{12} \overline{\Delta(\tau)}$  y  $J(\tau) = \overline{J(\tau)}$ .

*Demostración.* Si  $2\operatorname{Re}(\tau) = n \in \mathbb{Z}$ ,  $\tau$  permanece fijo bajo la acción de  $T: \tau \rightarrow n - \bar{\tau}$ , la cual es del tipo (3.9), con  $a = -1$ ,  $b = n$ ,  $c = 0$  y  $d = 0$ , y en virtud de (3.10), tendremos

$$g_2(\tau) = g_2(n - \bar{\tau}) = (c\bar{\tau} + d)^{-4} \overline{g_2(\tau)} = \overline{g_2(\tau)}$$

por lo tanto  $g_2(\tau) \in \mathbb{R}$ , análogamente  $g_3(\tau)$ . Si  $|\tau| = 1$ ,  $\tau$  queda fijo bajo la inversión  $T: \tau \rightarrow 1/\bar{\tau}$  en el círculo unitario, la cual es del tipo (3.9), con  $a = d = 0$  y  $b = c = 1$ . Por lo que tenemos,

$$g_2(\tau) = g_2(1/\bar{\tau}) = (\bar{\tau})^{-4} \overline{g_2(\tau)} = \tau^4 \overline{g_2(\tau)}.$$

□

Recordemos que el conjunto  $F = \{\tau \in \mathcal{U} \mid |z| \geq 1, \text{ y } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$  es una región fundamental del grupo  $\Gamma$

Una consecuencia inmediata es que la función  $J(\tau)$  es real siempre que  $\tau$  se encuentre en el eje imaginario o en la frontera  $\partial F$  de  $F$ .

**Corolario 3.1.11.**  $g_2(\rho) = g_3(i) = J(\rho) = 0$  y  $J(i) = 1$ , donde  $\rho = e^{2\pi i/3}$ .

*Demostración* La parte (1) del Lema 3.1.10, nos dice que  $g_2$  y  $g_3$  toman valores reales en  $i$  y  $\rho$ , a su vez en la parte(2) se prueba que  $g_2(\rho) = \rho g_2(\rho)$  y que  $g_3(i) = -\overline{g_3(i)}$ . Luego  $g_2(\rho) = g_3(i) = 0$ , y por (3.8) se sigue que  $J(\rho) = 0$  y  $J(i) = 1$ .

□

Consideremos los siguientes subconjuntos del semiplano superior,

$$\begin{aligned} L_1 &= \{\tau \in \mathcal{U} : |\tau| \geq 1 \text{ y } \operatorname{Re}(\tau) = -1/2\} \\ L_2 &= \{\tau \in \mathcal{U} : |\tau| = 1 \text{ y } -1/2 \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq 0\} \\ L_3 &= \{\tau \in \mathcal{U} : |\tau| \geq 1 \text{ y } \operatorname{Re}(\tau) = 0\}. \end{aligned}$$

Y sea  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ . Por el Corolario 3.1.11, vemos que  $J(L) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.1.12.**  $J$  aplica  $L$  sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.* Si  $\tau \in L_3$ , tendremos que  $\tau = iy$  con  $y \geq 1$ . De modo, que  $q = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi y}$ , y cuando  $y \rightarrow +\infty$  tendremos que  $q \rightarrow 0$  a través de valores reales positivos,

**Teorema 3.1.13.** Para cada  $c \in \mathbb{C}$  existe exactamente una órbita de  $\Gamma$  en  $\mathcal{U}$ , en la que  $J$  toma el valor  $c$ , esto es  $J$  es una biyección entre  $\mathcal{U}/\Gamma$  y  $\mathbb{C}$ .

*Demostración.* Básicamente, vamos a aplicar la relación

$$v_\infty(f) + \frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_{P \neq i, \rho} v_P(f) = \frac{k}{6}$$

del Teorema 3.1.6 con  $k = 0$ . Luego, si  $f = J - c$  con  $c \in \mathbb{C}$ , notemos que el lado derecho de la relación es igual a 0. Luego entonces la función  $f$  tiene un polo al infinito y

$$\frac{1}{3}v_\rho(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \sum_{P \neq i, \rho} v_P(f) = 1.$$

Los términos del lado izquierdo son todos mayores o iguales a cero. Lo cual es posible si y sólo si el orden de  $J - c$ , en un único  $z$  en  $\mathcal{U}/\Gamma$  es distinto de cero. La multiplicidad es 1 si  $z$  no está en la órbita de  $\rho$  ni de  $i$ ; de otro modo será igual a 2 en  $i$  y 3 en  $\rho$ . En todo caso, el teorema queda demostrado.  $\square$

**Corolario 3.1.14.** Sean las retículas  $\Omega$  y  $\Omega'$  con módulos  $\tau, \tau'$  en  $\mathcal{U}$ , entonces  $\Omega$  y  $\Omega'$  son similares si y sólo si  $J(\tau) = J(\tau')$ .

$\square$

**Teorema 3.1.15.** Si  $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$  satisfacen  $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$  entonces existe una retícula  $\Omega \subset \mathbb{C}$  tal que  $g_k(\Omega) = c_k$ , para  $k = 2, 3$ .

*Demostración.* Vamos a suponer que  $c_2 = 0$ , luego necesariamente  $c_3 \neq 0$ . A su vez por el Corolario 3.1.11, sabemos que  $g_2(\rho) = 0$ , de modo que  $g_3(\rho) \neq 0$  ya que  $g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = \Delta(\tau)$  siempre es distinto de cero en  $\mathcal{U}$ . De modo que podemos elegir un complejo  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\lambda^{-6}g_3(\rho) = c_3$ , luego haciendo  $\Omega = \lambda\Omega(1, \rho) = \Omega(\lambda, \lambda\rho)$  vemos que  $g_2(\Omega) = \lambda^{-4}g_2(\rho) = c_2$  y  $g_3(\Omega) = \lambda^{-6}g_3(\rho) = c_3$ , tal y cómo se quería comprobar.

Análogamente si  $c_3 = 0$ , entonces  $c_2 \neq 0$ , de modo que  $g_3(i) = 0$  y  $g_2(i) \neq 0$ . Luego, podemos encontrar un  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  que satisfaga la igualdad  $\lambda^{-4}g_2(i) = c_2$ , a partir de donde tendremos que la retícula  $\Omega = \Omega(\lambda, \lambda i)$  cumple  $g_2(\Omega) = \lambda^{-4}g_2(i) = c_2$  y  $g_3(\Omega) = 0 = c_3$ .

Por último, consideraremos el caso general  $c_2 \neq 0 \neq c_3$ . Por el Teorema 3.1.13, sabemos que existe  $\tau \in \mathcal{U}$  tal que

$$J(\tau) = \frac{c_2^3}{c_3^3 - 27c_3^2}. \quad (3.11)$$

Observemos que para todo  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  la retícula  $\Omega = \Omega(\lambda, \lambda\tau)$  satisface  $g_2(\Omega) = \lambda^{-4}g_2(\tau)$  y  $g_3(\Omega) = \lambda^{-6}g_3(\tau)$ , donde  $g_2(\Omega) \neq 0 \neq g_3(\Omega)$  puesto que

$$\begin{aligned} \frac{g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2} &= J(\Omega) \\ &= J(\tau) \end{aligned} \quad (3.12)$$

es distinto de cero o de uno, en virtud de (3.11) y de nuestra hipótesis  $c_2 \neq 0 \neq c_3$ . Luego, podemos encontrar un  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  que satisfaga la igualdad

$$\lambda^2 = \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{g_3(\tau)}{g_2(\tau)}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{g_3(\Omega)}{g_2(\Omega)} &= \frac{\lambda^{-4} g_3(\tau)}{\lambda^{-6} g_2(\tau)} \\ &= \frac{c_2}{c_3}. \end{aligned}$$

De modo que  $g_j = \beta c_j$ , con  $j = 2, 3$  para algún  $\beta \neq 0$ , luego entonces substituyendo en (3.12) y ocupando la igualdad (3.11) tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27c_3^2} &= J(\Omega) \\ &= \frac{\beta^3 c_2^3}{\beta^3 c_2^3 - 27\beta^2 c_3^2} \\ &= \frac{c_2^3}{c_2^3 - 27\beta^{-1} c_3^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\beta = 1$  y entonces  $g_j(\Omega) = c_j$ , con  $j = 2, 3$ , cómo se quería demostrar.  $\square$

**Corolario 3.1.16.** *Si  $\Omega, \Omega'$  cumplen que  $g_k(\Omega) = g_k(\Omega')$  (para  $k = 2, 3$ ), entonces  $\Omega = \Omega'$*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, consideremos respectivamente  $\Omega$  y  $\Omega'$  en términos de una base  $(\omega_1, \omega_2)$  y  $(\omega'_1, \omega'_2)$  tal que  $\tau = \omega_2/\omega_1$  y  $\tau' = \omega'_2/\omega'_1$  pertenezcan a  $\mathcal{U}$ . Claramente  $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$  es similar a  $\Omega(1, \tau)$ ; y  $\Omega' = \Omega'(\omega'_1, \omega'_2)$  es similar a  $\Omega'(1, \tau')$ , equivalentemente  $\omega_1 \Omega(1, \tau) = \Omega(\omega_1, \omega_2)$  y  $\omega'_1 \Omega'(1, \tau') = \Omega'(\omega'_1, \omega'_2)$ .

De la hipótesis del Corolario y de la definición de la función  $J$ , se sigue que

$$J(\omega_1 \Omega(1, \tau)) = J(\omega'_1 \Omega'(1, \tau')), \quad (3.13)$$

y puesto que retículas similares determinan un mismo valor para  $J$ , en particular  $J(\omega_1 \Omega(1, \tau)) = J(\Omega(1, \tau))$  y  $J(\omega'_1 \Omega'(1, \tau')) = J(\Omega'(1, \tau'))$ ; por esta razón y por (3.13), se cumple que  $J(\Omega(1, \tau)) = J(\Omega'(1, \tau'))$  es decir  $J(\tau) = J(\tau')$ , luego por el Corolario 3.1.14 vemos que  $\Omega$  y  $\Omega'$  son similares, y por lo tanto  $\Omega' = \mu \Omega$  para algún complejo  $\mu$  distinto de cero.

Pero  $g_k(\lambda \Omega) = \lambda^{-2k} g_k(\Omega)$  (con  $k = 2, 3$ ) para todo complejo  $\lambda$  distinto de cero, y en particular tendremos que  $g_k(\Omega') = g_k(\mu \Omega) = \mu^{-2k} g_k(\Omega)$  de donde concluimos que  $\mu = 1$  y por lo tanto  $\Omega = \Omega'$   $\square$



Sabemos que  $\wp$  satisface la ecuación diferencial  $(\wp')^2 = p(\wp)$ , donde  $p(x)$  es el polinomio cúbico  $4x^3 - g_2x - g_3$ . Así todo punto  $t \in \mathbb{C}/\Omega$  determina un punto  $(\wp(t), \wp'(t))$  en el conjunto

$$E = \{(x, y) \in \Sigma \times \Sigma \mid y^2 = p(x), \Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}.$$

El conjunto  $E$  es una *curva elíptica*, en el sentido de que podemos pensar a  $E$  como la gráfica de la ecuación  $y^2 = p(x)$ , para  $x, y \in \Sigma$ . Como un subconjunto de  $\Sigma \times \Sigma$ ,  $E$  tiene una topología natural. Vamos a demostrar que  $E$  es homeomorfo a un toro.

**Lema 3.1.17.** *La función  $\theta : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow E$ ,  $t \mapsto (\wp(t), \wp'(t))$  es un homeomorfismo sobre su imagen.*

*Demostración.* Los puntos  $t = [0], [\frac{1}{2}\omega_j]$ , son aplicados por  $\theta$  en  $(\infty, \infty)$  y  $(e_j, 0)$  respectivamente, con  $j = 1, 2, 3$ . Y para cada punto restante  $(x, y) \in E$ , tendremos que  $x \neq \infty, e_j$  y  $y \neq \infty, 0$ ; por otra parte como  $\wp$  es par y de orden 2, con puntos simples en cada  $t \neq [0], [\frac{1}{2}\omega_j]$ , se sigue que para cada  $x \neq \infty, e_j$  hay dos soluciones distintas  $t = \pm t_1$  de  $\wp(t) = x$ . Ahora bien,  $\wp'(t_1) = -\wp'(-t_1) \neq \wp'(-t_1)$ , luego  $\wp'(t_1)$  y  $\wp'(-t_1)$  son los dos valores de  $\sqrt{p(\wp(t))} = \sqrt{p(x)}$ , y uno de éstos valores debe ser  $y$ . Por lo tanto hay un único  $t$  (igual a  $t_1$  ó  $-t_1$ ) en  $\mathbb{C}/\Omega$  que satisface  $\theta(t) = (x, y)$ , luego  $\theta$  es una biyección.

Finalmente dado que  $\wp$  y  $\wp'$  son funciones meromorfas no constantes, son funciones abiertas y continuas; por lo que  $\theta$  también lo es, luego entonces  $\theta$  es un homeomorfismo.  $\square$

# Capítulo 4

## El espacio de los subgrupos cerrados de $\mathbb{R}^2$

En este capítulo demostramos cómo el espacio de todos los subgrupos aditivos cerrados del plano real es homeomorfo a la esfera  $S^4$ . Veremos también que si a dicho espacio le removemos todas las copias isomorfas al producto cartesiano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , el subespacio resultante será homeomorfo a la esfera  $S^2$ . Y que dichos espacios son, respectivamente, homeomorfos a la suspensión de la esfera  $S^3$  y a la suspensión del nudo trébol. Lo anterior, es el resultado central que Ibrahim Pourezza y John Hubbard exponen en su artículo [16]. Mismo que trataremos de hacer más accesible en lo que a su lectura y argumentación se refiere.

### 4.1. Una métrica para una topología adecuada

Sea  $G$  el conjunto de los subgrupos aditivos cerrados de  $\mathbb{R}^2$ . Afirmamos que cualquiera de los elementos de  $G$  es isomorfo a uno de los siguientes:  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ .

En efecto sea  $N \in G$ . Si dicho subgrupo tiene solamente un elemento, evidentemente es isomorfo a  $\{0\}$ . Ahora bien, consideremos un subgrupo aditivo  $N$  con al menos un elemento  $a \neq 0$ , luego entonces  $N$  contiene al subgrupo cíclico  $\langle a \rangle$  generado por  $a$ , esto es  $\langle a \rangle = \{n \cdot a \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq N$ , sí  $\langle a \rangle = N$  claramente  $N \simeq \mathbb{Z}$ .

De otro modo, observemos que el subgrupo  $\langle a \rangle$  está contenido en el subespacio vectorial unidimensional de  $\mathbb{R}^2$  generado por  $a$ . Sea pues  $L_1 \subset \mathbb{R}^2$  la recta que contiene a  $\langle a \rangle$ . Supongamos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in L_1 \cap N$  tal que  $0 < d(na, u) \leq \varepsilon$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , si ésto no se cumple entonces el subgrupo  $L_1 \cap N$  es unión numerable de subgrupos isomorfos a  $\mathbb{Z}$ , pero dicha unión es también un conjunto numerable y por lo tanto el subgrupo  $L_1 \cap N$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , este caso lo abordaremos más adelante.

Ahora bien, si  $k$  es cualquier punto en  $L_1$  entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in L_1 \cap N$  tal que  $0 < d(k, u) \leq \varepsilon$ , esto sucede en virtud de la suposición anterior y de la estructura de grupo en  $N$ , la cual nos permite trasladar sobre  $L_1$  de manera iterada cualquier elemento de  $L_1 \cap N$ , pudiendo escoger como módulo de traslación un elemento cualquiera de  $L_1 \cap N$ ; por esta razón podemos aproximarnos tanto como queramos a cualquier  $k$  de  $L_1$  con elementos de  $L_1 \cap N$ , deduciéndose así que  $N$  contiene un subconjunto denso. Ahora bien, por hipótesis sabemos que  $N$  es cerrado, luego contiene a todos sus puntos de acumulación, lo cual implica que  $L_1 \subset N$ .

Si  $L_1 = N$  claramente  $N \simeq \mathbb{R}$ ; por el contrario supongamos que  $N \subsetneq L_1$  entonces existe  $v \in N$  tal que  $v \notin L_1$ , con  $\langle v \rangle \subset N$ . Si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $u \in N - L_1$  tal que  $0 < d_{\mathbb{R}}(n \cdot v, u) \leq \varepsilon$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , tendremos que el subgrupo  $\langle v \rangle \simeq \mathbb{R}$  y por lo tanto  $N \simeq \mathbb{R}^2$ , puesto que  $\langle v \rangle + L_1 \subseteq N$ .

De otro modo, sea  $L_2 \subset \mathbb{R}^2$  la recta tal que  $\langle v \rangle \subset L_2$ , si  $\langle v \rangle \subset L_2 \cap N$ , se deduce que  $L_2 \cap N \simeq \mathbb{Z}$ ; y por lo tanto  $N \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ .

Por último, si  $L_1 \cap N \simeq \mathbb{Z}$  y  $L_2 \cap N \simeq \mathbb{Z}$  claramente  $N \simeq \mathbb{Z}^2$ . □

A continuación queremos determinar una métrica adecuada para  $G$  y estudiar la topología generada por ésta.

Empezaremos definiendo una función distancia que haga de  $G$  un espacio métrico. Para ello observemos que hay elementos de  $G$  que no son acotados en  $\mathbb{R}^2$  sin embargo, considerando que  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong S^2$ , podemos extender cada elemento  $\Gamma \in G$  a su correspondiente  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{\infty\}$  en  $S^2$ , así todo elemento de  $\bar{G} = \{\Gamma \cup \{\infty\} \mid \Gamma \in G\}$  es un subconjunto compacto de  $S^2$  (a su vez  $S^2$  es un subespacio compacto de  $\mathbb{R}^3$ ).

Dado  $(X, d)$  un espacio métrico, para  $r > 0$  definimos una  $r$ -vecindad  $S_r$  de un subconjunto cerrado  $S$  de  $X$ , como el conjunto de todos los puntos en  $X$  tales que disten de  $S$  una cantidad menor que  $r$ . De manera equivalente,  $S_r$  es la unión de todas las bolas de radio  $r$  centradas en algún punto de  $S$ .

Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos compactos en  $X$ , diremos que su *distancia* es el mínimo número real  $r$ , para el cual existe una  $r$ -vecindad cerrada  $\bar{V}_r$  de  $A$  que contiene a  $B$ ; y otra  $r$ -vecindad cerrada  $\bar{U}_r$  de  $B$  que contiene a  $A$ .

Es decir, si  $A$  y  $B$  son dos compactos no vacíos en  $X$ , definimos su distancia como

$$d_H(A, B) = \max \left( \max_{x \in A} d(x, B), \max_{y \in B} d(y, A) \right).$$

A  $d_H$  se le conoce como *métrica de Hausdorff* en el conjunto de los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ , la cual nos dice qué tan lejos se encuentran entre sí dos

subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico.

Comprobemos que la distancia de Hausdorff está bien definida, esto es:

1.  $d_H(A, B) \geq 0$ ,
2.  $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ ,
3.  $d_H(A, B) = 0$  si y sólo si  $A = B$ ,
4.  $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$ .

En efecto, dado que  $\max(a, b) \geq 0$  y  $\max(a, b) = \max(b, a)$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , se cumplen 1 y 2. Luego claramente si  $A = B$  entonces  $d_H(A, B) = 0$  pues  $d(x, B) = d(y, A) = 0$  para todo  $y \in B$  y  $x \in A$ . Por otro lado si  $d_H(A, B) = 0$ , entonces,  $d(x, B) = 0$  para toda  $x \in A$ , pero  $d(x, B) = 0$  si y solo si  $x \in B$ , por lo tanto  $A \subseteq B$ , análogamente tendremos que  $B \subseteq A$ , luego  $A = B$ .

Finalmente la desigualdad del triángulo para  $d_H$  es consecuencia de la desigualdad del triángulo para  $d$ .

Con ésta métrica,  $\overline{G}$  es un subespacio métrico del espacio de los subconjuntos compactos de  $S^2$ . De forma natural  $G$  hereda una métrica  $d_G$  dada por  $d_G(A, B) = d_H(\overline{A}, \overline{B})$ .

Sea  $T_G$  la topología en  $G$  inducida por  $d_G$ , en particular si

$$B_{d_G}^\varepsilon(A) = \{B \in G \mid d_G(A, B) < \varepsilon, \text{ con } A \in G \text{ y } \varepsilon > 0\}$$

entonces  $\beta = \{B_{d_G}^\varepsilon(A) \mid A \in G \text{ y } \varepsilon > 0\}$  es una base para  $T_G$ .

Más adelante demostraremos que el espacio  $G$  es homeomorfo a  $S^4$ .

## 4.2. $H$ un subespacio familiar

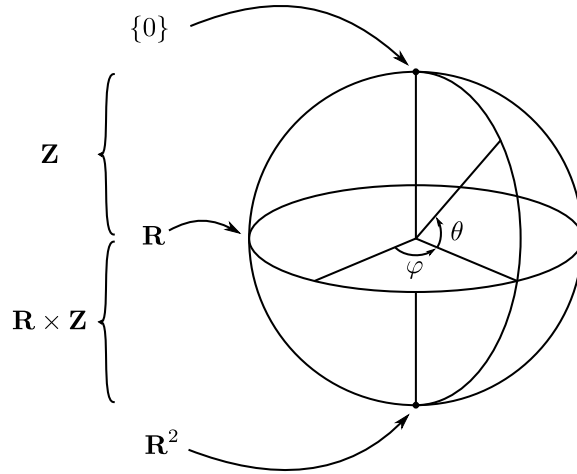
Consideremos el siguiente subconjunto  $H \subset G$  formado por aquellos elementos de  $G$  no isomorfos a  $\mathbb{Z}^2$ . Claramente  $H$  hereda una estructura de subespacio topológico, esto es

$$T_H = \{A \cap H \mid A \in T_G\}.$$

Afirmamos que  $H \cong S^2$  y para su demostración daremos de manera explícita el homeomorfismo.

Primero, identificamos  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  del modo usual. Luego, sea la parametrización de  $S^2$  por  $(\varphi, \theta)$ , donde  $0 \leq \varphi < 2\pi$  y  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Y sean  $P_1, P_2$  el polo Norte



Figura 4.1: Esfera parametrizada por  $(\varphi, \theta)$ 

y el polo Sur de  $S^2$  respectivamente.

Ahora, apliquemos  $S^2$  en  $H$  mediante la siguiente correspondencia  $\Psi$ ,

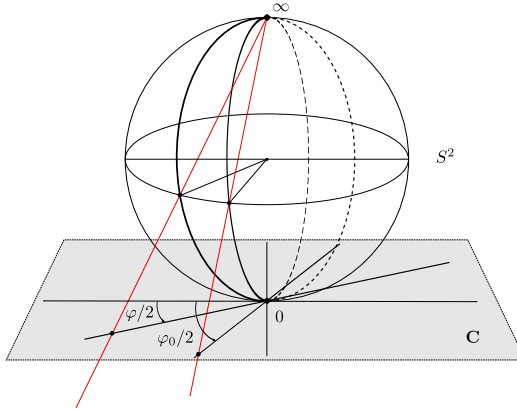
$S^2$	$\xrightarrow{\Psi}$	$H$
$P_1$	se aplica en	$\{0\}$
$(\varphi, \theta), 0 < \theta < \pi/2$	se aplica en	$\mathbb{Z}(\tan \theta) e^{i\varphi/2}$
$(\varphi, 0)$	se aplica en	$\mathbb{R} e^{i\varphi/2}$
$(\varphi, \theta), -\pi/2 < \theta < 0$	se aplica en	$\mathbb{R} e^{i\varphi/2} \times \mathbb{Z}(\cot \theta) e^{i(\varphi+\pi)/2}$
$P_2$	se aplica en	$\mathbb{R}^2$

Vamos a justificar caso por caso la continuidad de la función  $\Psi$ .

Si  $z_0 \in S^2$  y para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|z_0 - z\| < \delta$  con  $z \in S^2$ , entonces queremos demostrar que  $d_H(\Psi(z_0), \Psi(z)) < \varepsilon$ .

Son cinco los casos posibles a considerar, de los cuales demostramos los dos primeros:

1. Sea  $z_0 = P_1$ . Como  $d_H(\{0\}, \Gamma) = 0$ , para todo  $\Gamma \in H$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$  y cualquier  $\delta$ , se cumple  $d_H(\{0\}, \Gamma) < \varepsilon$ .
2. Sea  $z_0 = (\varphi_0, \theta_0)$  tal, que  $0 < \theta_0 < \pi/2$ . Consideremos una vecindad  $B_\delta(z_0)$  de  $z_0$  y radio  $\delta$  en  $S^2$  tal, que para toda  $z \in B_\delta(z_0)$  si  $z = (\varphi, \theta)$  entonces  $0 < \theta < \pi/2$ . Si  $w_0 = \Psi(z_0)$ , sea  $D_{w_0} = \Psi(B_\delta(z_0))$ ; y si  $(\varphi, \theta) \in B_\delta(z_0)$  sea

Figura 4.2:  $w(\varphi, \theta)$  y  $w(\varphi_0, \theta_0)$  vistos en  $S^2$ 

$w(\varphi_k, \theta_k) = \tan \theta_k e^{i\varphi_k/2}$ . Ahora bien, vamos a expresar los siguientes valores

$$\begin{aligned}\varphi_M &= \sup\{\varphi \mid (\varphi, \theta_0) \in \overline{B}_\delta(z_0)\} \\ \varphi_m &= \inf\{\varphi \mid (\varphi, \theta_0) \in \overline{B}_\delta(z_0)\} \\ \theta_M &= \sup\{\theta \mid (\varphi_0, \theta) \in \overline{B}_\delta(z_0)\} \\ \theta_m &= \inf\{\theta \mid (\varphi_0, \theta) \in \overline{B}_\delta(z_0)\}\end{aligned}$$

Por la simetría de  $B_\delta(z_0)$ , notemos que

$$|\varphi_0 - \varphi_M| = |\varphi_0 - \varphi_m| = |\theta_0 - \theta_m| = |\theta_0 - \theta_M|.$$

Observemos que en  $H$

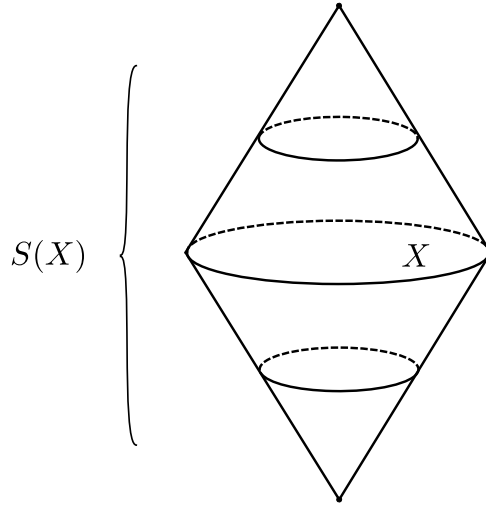
$$d_G(\mathbb{Z}(\tan \theta_j) e^{i\varphi_j/2}, \mathbb{Z}(\tan \theta_k) e^{i\varphi_k/2}) \leq \|w(\varphi_j, \theta_j) - w(\varphi_k, \theta_k)\|,$$

luego, si  $\varepsilon = \|w(\varphi_0, \theta_0) - w(\varphi_M, \theta_M)\|$  entonces para todo  $\Psi(z)$  en  $D_{w_0}$  se cumple que  $d_G(\Psi(z_0), \Psi(z)) < \varepsilon$ .

Finalmente, para cualquier  $z_0 = (\varphi_0, \theta_0)$  en  $S^2$  con  $0 < \theta_0 < \pi/2$  y para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos determinar algún  $w(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  tal que  $\|w(\varphi_0, \theta_0) - w(\varphi_\varepsilon, \theta_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$  y que  $|\varphi_0 - \varphi_\varepsilon| = |\theta_0 - \theta_\varepsilon|$ . Luego, si tomamos  $\delta = \|z_0 - z_\varepsilon\|$  vemos que para todo  $z \in S^2$  con  $\|z - z_0\| < \delta$  se cumple que  $d_G(\Psi(z), \Psi(z_0)) < \varepsilon$ .

Los tres restantes casos: Si  $z_0 = (\varphi_0, 0)$ . Si  $z_0 = (\varphi_0, \theta_0)$  tal que  $-\pi/2 < \theta < 0$ . Si  $z_0 = P_2$ . Se sugieren como ejercicios al lector.

La  $\delta$  mínima de los cinco casos anteriores será la que resuelva el caso general. Así  $\Psi$  es continua y claramente biyectiva, más aún es abierta, pues vimos que  $\Psi$

Figura 4.3: Suspensión de  $X$ 

manda básicos en básicos, es decir, cada bola (básico) de  $S^2$  se aplica en una bola de  $H$ . Por lo tanto  $\Psi$  es un homeomorfismo. □

### 4.3. Suspensión e involución

Para cualquier espacio  $X$  definimos la *suspensión* de  $X$ , y la denotamos por  $S(X)$ , como el espacio cociente de  $X \times I$  que se obtiene al identificar cada uno de los subconjuntos  $X \times \{0\}$  y  $X \times \{1\}$  con un punto respectivamente; obteniéndose así un «cono doble» sobre  $X$ .

$$S(X) = (X \times I) / \{(x_1, 0) \sim (x_2, 0) \text{ y } (x_1, 1) \sim (x_2, 1) \forall x_1, x_2 \in X\}.$$

Similarmente, si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua entre dos espacios, definimos  $S(f) : S(X) \rightarrow S(Y)$  como la aplicación inducida en el espacio cociente, por la aplicación de  $X \times I$  en  $Y \times I$  la cual manda  $(x, t)$  en  $(f(x), t)$ .

**Proposición 4.3.1.**  $S(S^n)$  es homeomorfo a  $S^{n+1}$ .

*Demostración.* Como  $[0, 1] \cong [-\pi/2, \pi/2]$ , resulta claro que  $S(S^n) \cong S^n \times [-\pi/2, \pi/2] / \{(x_1, -\pi/2) \sim (x_2, -\pi/2) \text{ y } (x_1, \pi/2) \sim (x_2, \pi/2) \forall x_1, x_2 \in S^n\}$ .

Generemos la siguiente correspondencia entre  $S^n \times [-\pi/2, \pi/2]$  y  $S^{n+1}$ .

Dado  $\rho = (x_1, \dots, x_{n+1}, \theta) \in S^n \times [-\pi/2, \pi/2]$ , definimos  $\nu = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$  y  $h = (0, \dots, 0, 1)$  dos vectores ortogonales en  $S^{n+1}$ , luego la rotación de cualquier vector contenido en este plano, por un ángulo  $\theta$  debe preservar su norma. Sea pues  $\lambda = \nu \cdot \cos \theta + h \cdot \sin \theta$ , notemos que  $\lambda \in S^{n+1}$ , en efecto  $\lambda = (x_1 \cdot \cos \theta, \dots, x_{n+1} \cdot \cos \theta, \sin \theta)$  luego,  $|\lambda|^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ . La función que a cada  $(x_1, \dots, x_{n+1}, \theta) \in S^n \times [-\pi/2, \pi/2]$  le asigna  $\lambda$  es biyectiva y continua, salvo para  $\theta = -\pi/2, \pi/2$ . Pero si extendemos la función al cociente  $S^n \times [-\pi/2, \pi/2] / \sim$ , tendremos una función bicontinua.  $\square$

El cono  $CX$  de un espacio topológico  $X$  se define como el espacio cociente

$$CX = (X \times I) / (X \times \{0\})$$

del producto de  $X$  con el intervalo unitario  $I = [0, 1]$ . Intuitivamente lo que hacemos es colapsar una de las tapas del cilindro de  $X$  en un punto.

Si  $X$  está contenido en un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , el cono de  $X$  es homeomorfo a la unión de todas las líneas que van de puntos en  $X$  a un punto exterior, de modo que el cono topológico coincide en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con el cono geométrico.

Algo importante es que todos los conos son conexos por trayectorias, más aún todo cono es contraíble al vértice por la homotopía  $h_t = (x, (1-t)s)$ .

En general, cuando  $X$  es un espacio de Hausdorff,  $CX$  puede visualizarse como la colección de líneas que unen todo punto de  $X$  con un punto externo (el vértice).

Una *involución* es una función  $f$  biyectiva de un espacio  $X$  en si mismo la cual es su propia inversa, es decir  $f(f(x)) = x$  para toda  $x$  en el dominio de  $f$ .

En este sentido vamos a definir la *involución canónica de la suspensión* como

$$\begin{array}{ccc} S(X) & \xrightarrow{f} & S(X) \\ X \times I / \sim & \rightarrow & X \times I / \sim \\ (x, t) / \sim & \mapsto & (x, 1-t) / \sim \end{array}$$

Claramente si  $E = \{(x, 1/2) / \sim\}$  entonces  $f(E) = E$ , es decir  $E$  es invariante bajo  $f$  y  $f$  fija puntualmente cada elemento de  $E$ ; más aún  $E$  es el conjunto de puntos fijos de la involución.

**Proposición 4.3.2.** *Si  $X$  es un espacio con involución, y  $Y, E \subset X$  son dos subconjuntos tales que  $Y \cup f(Y) \cup E = X$ ,  $Y \cap E$  es vacío y  $Y \cup E$  es un cono sobre  $E$ , entonces si  $E$  es el conjunto invariante por la involución se cumple que  $X \cong S(E)$ .*

*Demostración.* En efecto, por una parte tenemos que  $S(E)$  es homeomorfa a la unión por su frontera de dos conos de  $E$ , además si  $Y \cup E$  es un cono entonces

$f(Y) \cup E$  es un cono también y dado que  $Y \cup E$  y  $f(Y) \cup E$  se intersectan en  $E$ , la unión de ambos por su frontera es homeomorfa a  $S(E)$ , finalmente de  $X = (Y \cup E) \cup (f(Y) \cup E)$  se sigue que  $X \cong S(E)$ .  $\square$

Sean  $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$  y  $S^n = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 1\}$ , la  $n$ -bola y la  $n$ -esfera, respectivamente. Vamos a demostrar que la suspensión de  $S^{n-1}$  equivale a unir adecuadamente, dos  $n$ -bolas por su frontera.

Sean  $\phi_+$  y  $\phi_-$  funciones entre  $B^n$  y  $S^n$ , dadas por

$$\phi_+ : B^n \rightarrow S^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( x_1, \dots, x_n, +\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

$$\phi_- : B^n \rightarrow S^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( x_1, \dots, x_n, -\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

Observemos que  $\partial B^n \cong S^{n-1}$ , y que  $\phi_+$  y  $\phi_-$  son biyecciones continuas entre una copia de  $B^n$  y la correspondiente mitad de la  $S^n$  esfera. Así las funciones anteriores, además de realizar el pegado de las dos copias de  $B^n$  por su frontera, identifican continuamente el interior de la respectiva copia de  $B^n$  con una mitad o casquete de la esfera  $S^n$ . En resumen, el espacio que resulta de unir o pegar (mediante  $\phi_+$  y  $\phi_-$ ) dos copias de  $B^n$  por su frontera, es homeomorfo a  $S^n$  y a  $S(S^{n-1})$ .  $\square$

## 4.4. Los subgrupos isomorfos a $\mathbb{R}$

El siguiente teorema es el resultado central a exponer, y nuestro objetivo será probarlo.

**Teorema 4.4.1.** *El espacio  $G$  es homeomorfo a  $S^4$  y  $H$  es homeomorfo a  $S^2$ . El par  $(G, H)$  es homeomorfo a  $(S(S^3), S(K))$ , donde  $S$  denota suspensión y  $K \subset S^3$  es el nudo trébol.*

Sea  $\Delta \subset \mathbb{C}^2$  la superficie de la ecuación  $a^3 - 27b^2 = 0$ . Para cada  $(a, b) \in \mathbb{C}^2 - \Delta$ , sea  $X_{(a,b)}$  la curva de la ecuación  $y^2 = 4x^3 - ax - b$ . Por la teoría de Weierstrass, ver Corolario 3.1.16, sabemos que para cada  $(a, b)$  fuera del discriminante, existe una única retícula  $\Omega_{(a,b)}$  tal que  $a = 60 \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \omega^{-4}$  y  $b = 140 \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \omega^{-6}$ . Sea  $F$  la transformación que a cada  $(a, b) \in \mathbb{C}^2 - \Delta$  le asigna su correspondiente  $\Omega_{(a,b)}$ .

**Proposición 4.4.2.** *La transformación  $F$  es un homeomorfismo sobre el subespacio de los subgrupos isomorfos a  $\mathbb{Z}^2$ .*

*Demostración.* En efecto, la función inversa

$$F^{-1}(\Omega) = (g_2, g_3),$$

está definida a partir de los invariantes  $g_2 = 60 \sum_{z \in \Omega'} z^{-4}$  y  $g_3 = 140 \sum_{z \in \Omega'} z^{-6}$ , de los cuales sabemos por la teoría de Weierstrass (capítulo 2.3), no dependen de la

elección de los períodos fundamentales de la retícula  $\Omega$ . Dichos invariantes expresados en series de Eisenstein, son continuos en el dominio de su definición, tal y como se demostró (capítulo 2.3). Por lo tanto  $F^{-1}$  al ser composición de dos funciones continuas es a su vez una función continua.

Por último, la función  $F$  esta dada a partir de

$$z - z_0 = \int_{\gamma} \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3}},$$

la cuál integramos a lo largo de una curva rectificable  $\gamma$  que une a los puntos  $z$  y  $z_0$  sin pasar por los polos de  $\wp(z)$ . Esto nos permite recuperar los períodos de la retícula, en efecto recordemos que si  $\wp(\gamma) = \Gamma$  es la imagen de la curva  $\gamma$  en el plano  $w$ ,  $\Gamma$  une los puntos  $w_0 = \wp(z_0)$  y  $w = \wp(z)$  por lo que la igualdad anterior se representa como

$$z - z_0 = \int_{w_0}^w \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

y si  $z_0 \rightarrow 0$  entonces  $w_0 = \wp(z_0) \rightarrow \infty$ , y como la integral impropia es convergente, tendremos que

$$z = \int_{\infty}^w \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}};$$

de esta forma recuperamos los períodos de la retícula.

Claramente las variaciones sobre los caminos de integración son continuas, siempre y cuando las curvas no contengan polos de la función  $\wp(z)$  de Weierstrass, por lo tanto la función  $F$  es continua en el dominio de su definición.  $\square$

**Lema 4.4.3.** Para todo  $t \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $\Omega_{(t^2a, t^3b)} = t^{-1/2}\Omega_{(a,b)}$

*Demostración.* Sabemos que

$$g_2(\Omega) = 60 \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \omega^{-4}$$

y

$$g_3(\Omega) = 140 \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \omega^{-6}.$$

Anteriormente vimos que para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , se cumple

$$\begin{aligned} g_2(\lambda\Omega) &= \lambda^{-4}g_2(\Omega) \\ g_3(\lambda\Omega) &= \lambda^{-6}g_3(\Omega) \end{aligned}$$

entonces, dado  $t \in \mathbb{C} - \{0\}$ , los  $g_2$  y  $g_3$  generados a partir de  $t^{-1/2}\Omega_{(a,b)}$  son

$$\begin{aligned} g_2(t^{-1/2}\Omega_{(a,b)}) &= t^2g_2(\Omega_{(a,b)}) \\ g_3(t^{-1/2}\Omega_{(a,b)}) &= t^3g_3(\Omega_{(a,b)}) \end{aligned}$$

lo cual significa que  $\Omega_{(t^2g_2, t^3g_3)} = t^{-1/2}\Omega_{(g_2, g_3)}$ .  $\square$

**Proposición 4.4.4.** *Si hacemos converger  $(a, b)$  a  $(3t^2, -t^3)$ , un punto en  $\Delta$ , entonces si  $t \neq 0$ ,  $\Omega_{(a, b)}$  converge en  $G$  al grupo generado por  $\pi i \sqrt{(2/3t)}$  y si  $t = 0$  entonces a  $\{0\}$ .*

*Demostración.* En general, sea el polinomio cúbico  $p(z) = 4z^3 - az - b$ , con  $\Delta_p \neq 0$ , y  $\{e_1, e_2, e_3\}$  las raíces de  $p(z)$ . Sea  $\gamma_1$  una curva cerrada de Jordan rectificable en  $\mathbb{C}$  tal que  $e_2, e_3$  estén contenidas en  $A$  la región interior delimitada por  $\gamma_1$ , y  $e_1$  esté contenida en el interior de  $B$ , que es la región exterior generada por  $\gamma_1$ .

Consideremos la siguiente uno-forma sobre  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

$$f = \frac{dz}{\sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}},$$

si hacemos tender  $e_2$  a  $e_3$ , en el límite  $p(z) = 4(z - e_1)(z - e_3)^2$ ; por lo que la uno-forma anterior resulta ser equivalente a

$$\frac{dz}{(z - e_3)\sqrt{4(z - e_1)}}$$

siendo  $e_3$  la única singularidad contenida en  $A$ , por lo que ahora es posible integrar a lo largo de  $\gamma_1$  mediante la formula del residuo.

Para lo cual, recordemos que si  $U \subset \mathbb{C}$  es un abierto simplemente conexo,  $a_1, \dots, a_n$  es un conjunto de puntos en  $U$  y  $f$  es una función holomorfa en  $U - \{a_1, \dots, a_n\}$ ; entonces si  $\gamma$  es una curva rectificable de Jordan que no pasa por ninguno de los puntos  $a_i$  de  $U$  pero, se encuentran totalmente contenidos en su "interior", se cumple la siguiente igualdad

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_k^n \text{Res}(f, a_k),$$

y si  $a_k$  es un polo simple

$$\text{Res}(f, a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} (z - a_k) f(z)$$

Conforme con lo anterior, tendremos que

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z - e_3)\sqrt{4(z - e_1)}} = 2\pi i \text{Res}(f, e_3),$$

y dado que  $e_3$  es un polo simple de  $f$ , resulta

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z - e_3)\sqrt{4(z - e_1)}} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow e_3} (z - e_3) f(z)$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow e_3} \frac{(z - e_3)}{(z - e_3)\sqrt{4(z - e_1)}} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow e_3} \frac{1}{\sqrt{4(z - e_1)}} = \frac{\pi i}{\sqrt{(e_3 - e_1)}}$$

Podemos observar que uno de los períodos de la retícula  $\Omega_{(a,b)}$  es de la forma  $\pi i / (\sqrt{(e_3 - e_1)})$ , cuando  $e_2 \rightarrow e_3$ .

En particular por el Lema 4.4.3, podemos suponer que  $t = 1$ . Sea  $\varepsilon < 1/2$  si  $(a, b)$  se encuentra suficientemente cerca de  $(3, -1)$ , entonces

$$p(z) = (2z - 2z_1)(z_1 - 2z_2)(z - z_1 + z_2),$$

si  $|z_1 - 1/2| < \varepsilon/2$  y  $|z_2 - 1/2| < \varepsilon/2$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\operatorname{Re}(z_1) \leq \operatorname{Re}(z_2)$ . Si hacemos tender  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces  $f(z) \rightarrow dz / (2(z - 1/2)\sqrt{(z + 1)})$ , la cual posee un polo simple en  $1/2$ , calculando los residuos obtenemos

$$\int_{\gamma_1} f = \pi i \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Por último, sea  $\gamma_2$  una curva que une a  $-z_1 - z_2$  con  $z_1$ , y con  $z_2 \in \mathbb{C} - \gamma_2$ , luego

$$I = 2 \int_{\gamma_2} \frac{dz}{\sqrt{(2z - 2z_1)(z_1 - 2z_2)(z + z_1 + z_2)}}$$

el otro período de generador de  $\Omega_{(a,b)}$ . Vamos a probar que  $\operatorname{Re}(I) \rightarrow \infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Parametrizando  $\gamma_2$  por  $\gamma(t) = (t - 1)(x_1 + x_2) + tx_1$ , se obtiene

$$I = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)dt}{\sqrt{(\gamma(t) - z_1)(\gamma(t) - z_2)(\gamma(t) + z_1 + z_2)}}$$

Los argumentos de los términos bajo la integral se escogen entre una de las dos opciones continuas de la raíz cuadrada, a su vez la integral siempre estará contenida en un sector angular de  $\pi/4$  alrededor del eje real positivo. De modo que

$$\operatorname{Re}(I) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left| \frac{\gamma'(t)}{\sqrt{(\gamma(t) - z_1)(\gamma(t) - z_2)(\gamma(t) + z_1 + z_2)}} \right| dt,$$

Para estimar la integral anterior, observemos que  $|\gamma(t) + z_1 + z_2| \leq 2$  y que  $|\gamma(t) - z_2| \leq |\gamma(t) - z_1| + \varepsilon$ , haciendo  $m = |\gamma(t) - z_1|$ , tendremos

$$\operatorname{Re}(I) \geq \frac{1}{2} \int_0^{|2z_1+z_2|} \frac{dm}{\sqrt{m(m+\varepsilon)}} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + 0 \cdot (1)$$

□

De la Proposición 4.4.4, sabemos que  $\Omega_{(3t^2, -t^3)} = \mathbb{Z}(\pi i \sqrt{(2/3t)})$  si  $t \neq 0$  y,  $\Omega_{(0,0)} = \{0\}$  si  $t = 0$ . Que junto a la Proposición 4.4.2, nos permite concluir que la función  $(a, b) \rightarrow \Omega_{(a,b)}$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{C}^2$  sobre el subconjunto de  $G$  formado por los subgrupos discretos.



**Proposición 4.4.5.** *La intersección entre la esfera  $S_{r_\varepsilon}^3$  y la curva  $\Delta \subset \mathbb{C}^2$  es un nudo trébol contenido en un toro  $T$ .*

*Demostración.* En efecto, sea  $\varepsilon > 0$  y

$$S_{r_\varepsilon}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = r_\varepsilon, \text{ donde } r_\varepsilon = \varepsilon^4(9 + \varepsilon^2)\},$$

$\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^3 - 27b^2 = 0\}$ . Puesto que  $S_{r_\varepsilon}^3$  es de codimensión real 1 y  $\Delta$  es de codimensión real 2, se espera que  $S_{r_\varepsilon}^3 \cap \Delta$  sea de codimensión real 3.

Más aún, observemos que la función  $\tau : e^{i\theta} \rightarrow (3\varepsilon^2 e^{i2\theta}, \varepsilon^3 e^{i3\theta})$  con  $\theta \in [0, 2\pi]$ , es una curva cerrada en el toro  $T = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |t_1|^2 = 9\varepsilon^4 \text{ y } |t_2|^2 = \varepsilon^6\}$ , por otro lado  $(3\varepsilon^2 e^{i2\theta})^3 - 27(\varepsilon^3 e^{i3\theta})^2 = 0$  y  $|3\varepsilon^2 e^{i2\theta}|^2 + |\varepsilon^3 e^{i3\theta}|^2 = \varepsilon^4(9 + \varepsilon^2)$ , de modo que  $\tau \subset S_{r_\varepsilon}^3 \cap \Delta$ .

Ahora, todo punto en  $\Delta$  admite una parametrización de la forma  $(3t^2, t^3)$  con  $t \in \mathbb{C}$ . Sumemos los cuadrados de los módulos de  $3t^2$  y  $t^3$ , haciendo  $t = re^{i\theta}$  con  $r, \theta \in \mathbb{R}$

$$|3t^2|^2 + |t^3|^2 = 9r^4 + r^6,$$

nótese que si  $r$  es un valor constante, la ecuación anterior nos dice que los puntos  $(3t^2, t^3)$  considerados son también puntos de la esfera  $S_r^3$  de radio  $9r^4 + r^6$ , más aún, como  $\theta$  varía libremente en el intervalo  $[0, 2\pi]$  entonces  $t = re^{i\theta}$  se mueve continuamente en un círculo de radio  $r$ , de modo que los puntos  $(3t^2, t^3)$ , para un  $r$  fijo, están contenidos en el toro dado por el producto de dos círculos de radio  $9r^4$  y  $r^6$  respectivamente. Finalmente, la reparametrización dada por  $t = re^{i\theta}$  nos permite observar que al variar  $r$ , obtenemos círculos únicos sobre los cuales se mueve  $t$ , de modo que si  $t$  sale de del círculo dado por  $r_1$ , caemos en otro círculo dependiente de un  $r_2$  ( $\neq r_1$ ) y en consecuencia el punto correspondiente  $(3t^2, t^3)$  estará contenido en la esfera de radio  $9r_1^4 + r_1^6$ , que es distinta a la de radio  $9r_2^4 + r_2^6$ . En efecto, derivando el término derecho de la igualdad,

$$\frac{d(9r^4 + r^6)}{dr} = 6r^3(6 + r^2) \quad (4.1)$$

vemos que la derivada (4.1) es positiva, luego existe un único  $r$  tal que  $r = \varepsilon^4(9 + \varepsilon^2)$ , es decir, tal que la esfera tenga un radio dado.

Y con esto concluimos que  $\tau = S_{r_\varepsilon}^3 \cap \Delta$ .

La curva  $\tau$  es cerrada en el siguiente sentido: mientras que para valores de  $\theta \in (0, 2\pi)$  la función  $\tau$  es inyectiva, cuando  $\theta = 0, 2\pi$  los valores de  $\tau$  coinciden. Observemos que la curva  $\tau : e^{i\theta} \rightarrow (3\varepsilon^2 e^{i2\theta}, \varepsilon^3 e^{i3\theta})$  tiene el siguiente comportamiento en el toro: cuando  $\theta$  varía en  $[0, 2\pi]$ , la curva  $\tau$  rodea dos veces los meridianos del toro (que son los círculos homotópicos a  $S^1$  de longitud mínima en  $T$ ), mientras que rodea tres veces a los círculos paralelos del toro. Todo esto, sin auto intersectarse, (si así fuera tendríamos  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 2\pi)$  con  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  tales que  $\tau(e^{i\alpha_1}) = \tau(e^{i\alpha_2})$ ), lo cual

vimos no sucede). A una curva en el toro, con estas características se le define como *nudo trébol*, o simplemente nudo (2,3).  $\square$

Ahora, vamos a unir con  $\mathbb{C}^2$  un círculo en el infinito, a lo largo de  $\Delta$ , correspondiente a los subgrupos de  $G$  isomorfos con  $\mathbb{R}$ .

Para ello veamos las siguientes funciones, sea  $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow (0, \infty]$  definida como  $A(a, b) = \text{área}(\mathbb{C}/\Omega_{(a,b)})$ ; notemos que si  $A(a, b) = \infty$  entonces  $(a, b) \in \Delta$ .

Luego para todo  $A \in (0, \infty]$ , sea  $\varphi_A : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  dada por  $\varphi_A(t) = t/(1 - t + A^{-1})$ . Claramente  $\varphi_A$  es un homeomorfismo entre  $[0, 1]$  y  $[0, \infty]$ .

Sea  $B = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid |z| \leq 1\}$  la bola unitaria en  $\mathbb{C}^2$ , por la Proposición 4.4.5, sabemos que la intersección de la frontera de  $B$  con  $\Delta$  es un nudo trébol  $K$ , esto es  $S^3 \cap \Delta = K$ .

Aplicamos  $B - K$  en  $\mathbb{C}^2$  mediante la siguiente fórmula

$$F : z = (z_1, z_2) \mapsto \left( \left( \varphi_{A(\frac{z}{|z|})}(|z|) \right)^2 \cdot \frac{z_1}{|z|}, \left( \varphi_{A(\frac{z}{|z|})}(|z|) \right)^3 \cdot \frac{z_2}{|z|} \right)$$

#### Proposición 4.4.6.

1. La función  $F$  es un homeomorfismo de  $B - K$  sobre  $\{(a, b) \mid A(a, b) \geq 1\}$ ,
2. Si  $(3t^2, -t^3) \in K$  (i.e.  $9|t|^4 + |t|^6 = 1$ ), entonces  $F$  transforma el interior del cono sobre  $K$  en  $\Delta$ . Y en  $G$ ,  $\lim_{z \rightarrow (3t^2, -t^3)} \Omega_{F(z)} = \mathbb{R}(i\pi\sqrt{(2/3t)})$ .

*Demostración.* Consideremos una sucesión de puntos  $\{z_n\}$  en  $S^3 - K$  tales que converjan a  $(3t^2, -t^3)$ , entonces el área de las retículas  $\Omega_{F(z_n)}$  siempre es igual a 1 para toda  $n$ . En efecto, si  $z = (z_1, z_2)$  y  $|z| = 1$ , tendremos que  $\varphi_{A(\frac{z}{|z|})}(|z|) = \varphi_{A(z)}(1) = A(z)$ , de modo que  $F(z) = (A(z)^2 \cdot z_1, A(z)^3 \cdot z_2)$ . Como sabemos  $\Omega_{(t^2 a, t^3 b)} = t^{-1/2} \Omega_{(a,b)}$  para todo  $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , y haciendo  $t = A(z)$  tendremos que  $\Omega_{F(z)} = A(z)^{-1/2} \Omega_{(z)}$ . Por otro lado, si  $\alpha \in \mathbb{R}$  es fácil probar que  $A(\alpha\Omega) = \alpha^2 A(\Omega)$ , luego entonces

$$A(\Omega_{F(z)}) = A(A(z)^{-1/2} \Omega_{(z)}) = A(z)^{-1} A(\Omega_{(z)}) = 1.$$

Veamos qué sucede al interior de  $B - K$ , sean  $z \in B - K$  con  $|z| < 1$  y el rayo  $\{\lambda z \mid \lambda \in [0, \frac{1}{|z|}]\}$  al interior de  $B - K$  generado por  $z$ . Calculando  $F(\lambda z)$  obtenemos

$$F(\lambda z) = \left( \left( \varphi_{A(\frac{z}{|z|})}(\lambda|z|) \right)^2 \cdot \frac{z_1}{|z|}, \left( \varphi_{A(\frac{z}{|z|})}(\lambda|z|) \right)^3 \cdot \frac{z_2}{|z|} \right).$$

Haciendo  $A(\frac{z}{|z|}) = \delta$ , vemos que  $\varphi_\delta(\lambda|z|) = \lambda|z|/(1 - \lambda|z| + \delta^{-1}) = t$ , luego  $F(\lambda z) = (t^2 z_1/|z|, t^3 z_2/|z|)$ , de modo que  $A(\Omega_{F(\lambda z)}) = A(\Omega_{(t^2 z_1/|z|, t^3 z_2/|z|)})$  y si hacemos  $t = \tau^2$  resultara que  $A(\tau^{-1}\Omega_{(z/|z|)}) = \tau^{-2}A(\Omega_{(z/|z|)}) = \tau^{-2}\delta$ , hay que subrayar el hecho de que el área es monótona a lo largo del rayo. Por lo tanto, si  $z \in B - K$  el área de  $\Omega_{F(\lambda z)}$  tiende a infinito cuando  $\lambda$  tiende a cero, mientras que en el otro extremo del rayo si  $\lambda$  tiende a uno el área tiende a uno.

El cono sobre  $K$  es homeomorfo a  $\{\lambda z_i \mid z_i \in K \text{ y } \lambda \in [0, 1]\}$ . De modo que si  $z = (3t^2, -t^3) \in K$  entonces  $\{\lambda z \mid \lambda \in [0, 1]\}$  es un rayo al interior del cono sobre  $K$ . Vamos a demostrar que  $F(\lambda z) \in \Delta$ , sabemos que  $F(\lambda z) = (t^2 z_1, t^3 z_2)$  pues  $|z| = 1$ , además  $z_1^3 - 27z_2^2 = 0$ , finalmente si  $F(\lambda z) = (\alpha_1, \alpha_2)$  claramente  $\alpha_1^3 - 27\alpha_2^2 = 0$ , puesto que

$$\alpha_1^3 - 27\alpha_2^2 = t^6 z_1^3 - 27t^6 z_2^2 = t^6(z_1^3 - 27z_2^2) = 0.$$

Finalmente, como antes sea  $z_n$  una sucesión en  $B - K$  convergente a  $(3t^2, -t^3)$  y sea  $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$  tal que el área de  $F(\alpha_n z_n)$  sea igual a 1, evidentemente  $\alpha_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  ya que conforme  $n \rightarrow \infty$  los puntos  $z_n$  estarán cada vez más próximos a la frontera de  $B - K$ , y por lo tanto más próximos de aquellos puntos  $z$  tales que  $A(\Omega_{F(z)}) = 1$ . Por el Lema 4.4.3 y la Proposición 4.4.4,  $\Omega_{F(z_n)}$  es un grupo con un solo generador muy cercano a  $i\pi\sqrt{(2\alpha_n/3t)}$  y puesto que  $A(\Omega_{F(z_n)}) \geq 1$  cualquier otro generador de  $\Omega_{F(z_n)}$  debe de aproximarse a  $\infty$  para valores grandes de  $n$ .  $\square$

Podemos resumir estos resultados en la siguiente proposición.

**Proposición 4.4.7.** *La transformación  $z \rightarrow \Omega_{F(z)}$  se extiende a un homeomorfismo de  $B$  sobre la parte de  $G$  formada por los grupos isomorfos a  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  y todas las retículas  $\Omega$  tales que  $\text{área}(\mathbb{C}/\Omega) \geq 1$ . Además,  $K \subset S^3$  corresponde a los subgrupos isomorfos con  $\mathbb{R}$ , el interior del cono sobre  $K$  corresponde a los grupos isomorfos con  $\mathbb{Z}$ , junto con el 0 que se corresponde con  $\{0\}$ , y finalmente  $S^3 - K$  corresponde a las retículas  $\Omega$  tales que  $\text{área}(\mathbb{C}/\Omega) = 1$ .*

$\square$

## 4.5. La involución de la suspensión

A continuación vamos a construir una involución del espacio  $G$ , correspondiente a la involución canónica de la suspensión.

Para cualquier  $\Gamma \in G$ , sea  $\Gamma'$  el conjunto de todos los vectores  $z$  en  $\mathbb{C}$  tales que el paralelogramo  $(z, \omega)$  con  $\omega \in \Gamma$  tenga área entera. Es decir,

$$\Gamma' = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\bar{z}\omega) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \omega \in \Gamma\}.$$

En efecto, si  $z = (a + ib)$  y  $\omega = (u + iv)$  claramente  $\bar{z}\omega = (a - ib)(u + iv) = (au + bv) + i(av - bu)$ , de donde  $\text{Im}\bar{z}\omega = (av - bu) = \det(z, \omega)$ .

**Proposición 4.5.1.** *Para todo  $w \in \mathbb{C} - \{0\}$*

$$\begin{array}{llll}
 i) & \text{si} & \Gamma = \{0\} & \text{entonces} & \Gamma' = \mathbb{R}^2 \\
 ii) & \text{si} & \Gamma = \mathbb{Z}w & \text{entonces} & \Gamma' = \mathbb{R}w + \mathbb{Z}(i/\bar{w}) \\
 iii) & \text{si} & \Gamma = \mathbb{R}w & \text{entonces} & \Gamma' = \Gamma = \mathbb{R}w \\
 iv) & \text{si} & \Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 & \text{entonces} & \Gamma' = \mathbb{Z}\frac{w_1}{\text{Im}(\bar{w}_1w_2)} + \mathbb{Z}\frac{w_2}{\text{Im}(\bar{w}_1w_2)}
 \end{array}$$

*Demostración.*

1. En efecto, cuando  $\Gamma = \{0\}$  vemos que para todo  $z \in \mathbb{C}$  se cumple que  $\det(z, 0) \in \mathbb{Z}$ , luego  $\Gamma' = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , y claramente  $(\Gamma')' = \{0\}$ .
2. Si  $\Gamma = \mathbb{Z}w$ , una condición necesaria y suficiente para que  $\text{Im}(\bar{z}_0\omega) \in \mathbb{Z}$  para todo  $\omega \in \Gamma$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$ , es que la altura del paralelogramo formado por los vectores  $z_0$  y  $w$  sea un número de la forma  $m \cdot \frac{1}{|w|}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , tomando como base al módulo de  $w$ . Dicha condición es necesaria, puesto que si  $\text{Im}(\bar{z}_0w) \in \mathbb{Z}$  el área del paralelogramo es un número entero  $A$ , entonces sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  la altura, luego  $A = |w| \cdot \alpha$  de modo que  $\alpha = A \cdot \frac{1}{|w|}$ . Recíprocamente, veamos que la condición es suficiente; si la altura del paralelogramo es de la forma  $\alpha = m \cdot \frac{1}{|w|}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces para todo  $\omega \in \Gamma$  sabemos que  $\omega = nw$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , luego  $A = |\omega| \cdot \alpha = |nw| \cdot \alpha = |n| |w| \cdot \frac{m}{|w|} = |n| m$ , de donde se sigue que  $A \in \mathbb{Z}$ . De la condición demostrada se desprende que dado un entero  $m_0$ , el conjunto de todos los  $z \in \mathbb{C}$  que forman paralelogramos con  $w$  de altura  $m_0 \cdot \frac{1}{|w|}$ , es igual a dos rectas paralelas  $L_0$  y  $L'_0$ , (con  $L = L'$  si  $m_0 = 0$ ) cuya distancia al origen es de  $|m_0| \cdot \frac{1}{|w|}$ , (podemos convenir definir para  $m_0$  la recta  $L_0$  y para  $-m_0$  la recta  $L'_0$ ), respectivamente. Por lo tanto el conjunto generado que se obtiene al variar  $m \in \mathbb{Z}$ , es isomorfo a  $\mathbb{R} + \mathbb{Z}$ . Y precisamente todos los  $z \in \mathbb{C}$  ortogonales a  $w$  con módulo igual a  $|m| \cdot \frac{1}{|w|}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), es el conjunto  $\mathbb{Z}(i/\bar{w})$ ; porque  $|1/w| = |i/\bar{w}|$  y claramente  $i/\bar{w}$  es ortogonal a  $w$ . Finalmente, todas rectas  $L$  ya descritas son paralelas a  $w$ , es decir son de la forma  $\mathbb{R}w$ , trasladadas por un complejo de la forma  $m \cdot (i/\bar{w})$ . Por lo tanto  $\Gamma' = \mathbb{R}w + \mathbb{Z}(i/\bar{w})$ .
3. Si  $\Gamma = \mathbb{R}w$ , para que  $z_0 \in \mathbb{C}$  sea tal que  $\text{Im}(\bar{z}_0\omega) \in \mathbb{Z} \ \forall \omega \in \Gamma$ , la altura  $\alpha$  del paralelogramo formado por  $z_0$  y  $\omega = rw$ , debe cumplir que  $\alpha \cdot rw \in \mathbb{Z}$  para todo  $r \in \mathbb{R}$ ; lo cual sucede si y sólo si  $\alpha = 0$ . Por lo tanto  $\Gamma' = \Gamma = \mathbb{R}w$ .
4. Finalmente sea  $\Gamma = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ , con  $w_1$  y  $w_2 \in \mathbb{C}$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ . Observemos que  $z_0 \in \Gamma'$  si y solo si  $\text{Im}(\bar{z}_0 \cdot (nw_1 + mw_2)) \in \mathbb{Z}$  para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$ ; es decir, si y sólo si  $n \cdot \text{Im}(\bar{z}_0w_1)$  y  $m \cdot \text{Im}(\bar{z}_0w_2) \in \mathbb{Z}$  para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$ . En particular  $z_0 \in \Gamma'$  si y solo si  $\text{Im}(\bar{z}_0w_1)$  y  $\text{Im}(\bar{z}_0w_2) \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto para determinar  $\Gamma'$  únicamente necesitamos restringirnos a  $w_1$  y  $w_2$ .

Una condición necesaria y suficiente para que  $\text{Im}(\bar{z}w_i) \in \mathbb{Z}$  (con  $i = 1, 2$  respectivamente), es que la altura del paralelogramo formado por  $z$  y  $w_i$ , sea un número de la forma  $a_i = k/|w_i|$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , tomado por base a  $|w_i|$ .

Conforme con lo anterior, el conjunto de los  $z$  en  $\mathbb{C}$  que cumplen dicha condición son las rectas  $L_{w_i}(k)$  paralelas a  $w_i$ , mismas que distan del origen una cantidad de  $a_i = |k|/|w_i|$ , evidentemente si  $k = 0$ , entonces  $L_{w_i}(0) = \{\lambda \cdot w_i \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Como  $w_1$  y  $w_2$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , el conjunto de las rectas paralelas a  $w_1$  es ajeno al conjunto de las rectas paralelas a  $w_2$ . Ahora bien, es muy importante recordar que si bien todos los  $z \in L_{w_1}(k_r)$  cumplen que  $\text{Im}(\bar{z}w_1) \in \mathbb{Z}$ , no necesariamente  $\text{Im}(\bar{z}w_2) \in \mathbb{Z}$ , de hecho para cada  $k_s \in \mathbb{Z}$  existe un único  $z \in L_{w_1}(k_r)$  tal que  $\text{Im}(\bar{z}w_2) \in \mathbb{Z}$ , dicho  $z$  es precisamente la intersección de  $L_{w_1}(k_r)$  con  $L_{w_2}(k_s)$ .

Para cualesquiera dos enteros consecutivos  $k_1$  y  $k_2$ , la distancia de cualquier punto de  $L_{w_i}(k_1)$  a  $L_{w_i}(k_2)$  es igual a  $1/|w_i|$ , es decir  $\{L_{w_i}(k) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\mathbb{R}w_i + \mathbb{Z}(i/\bar{w}_i)\}$ , por lo tanto

$$\Gamma' = \{\mathbb{R}w_1 + \mathbb{Z}(i/\bar{w}_1)\} \cap \{\mathbb{R}w_2 + \mathbb{Z}(i/\bar{w}_2)\}$$

geométricamente el conjunto  $\Gamma'$  es la retícula generada por  $\rho_1 = L_{w_1}(0) \cap L_{w_2}(1)$  y  $\rho_2 = L_{w_1}(1) \cap L_{w_2}(0)$ .

Vamos a calcular explícitamente a  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Como antes sean  $a_1 = 1/|w_1|$ ,  $a_2 = 1/|w_2|$ ,  $w_1 = a_1 + ib_1$  y  $w_2 = a_2 + ib_2$ ; ahora bien, calcular  $\rho_2$  equivale a calcular un  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $\det(w_1, \lambda_2 w_2) = |w_1| \cdot \alpha_1 = 1$ , concluyéndose que  $\rho_2 = \lambda_2 w_2$ ; en efecto

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ \lambda_2 a_2 & \lambda_2 b_2 \end{vmatrix} = 1 \iff a_1 \lambda_2 b_2 - b_1 \lambda_2 a_2 = 1 \iff \lambda_2 = \frac{1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = \frac{1}{\text{Im}(\bar{w}_1 w_2)}$$

y por lo tanto  $\rho_2 = w_2/\text{Im}(\bar{w}_1 w_2)$ , análogamente obtenemos  $\rho_1 = w_1/\text{Im}(\bar{w}_1 w_2)$ , de donde se sigue que

$$\Gamma' = \mathbb{Z}\rho_1 + \mathbb{Z}\rho_2 = \mathbb{Z}\frac{w_1}{\text{Im}(\bar{w}_1 w_2)} + \mathbb{Z}\frac{w_2}{\text{Im}(\bar{w}_1 w_2)}.$$

En particular, esta involución corresponde a  $(\varphi, \theta) \rightarrow (\varphi, -\theta)$  en la parametrización de  $H$ , anteriormente descrita.  $\square$

Sabemos ya que  $\text{Im}(\bar{w}_1 w_2) = \text{área}(\mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2)$ , entonces los conjuntos de puntos que permanecen invariantes bajo la involución son justamente los isomorfos a  $\mathbb{R}$  y todas las retículas  $\Omega$  tales que  $\text{área}(\mathbb{C}/\Omega) = 1$ . Todo esto, sumado a los hechos resumidos en la Proposición 4.4.7, nos demuestra que  $G$  es homeomorfo a la unión de dos copias de  $B$ , pegadas por la identidad, a lo largo de su frontera común  $S^3$ . Además, el nudo trébol  $K \subset S^3$  corresponde a los subgrupos isomorfos con  $\mathbb{R}$  y el cono sobre  $K$  en una de las copias de  $B$  corresponde a los grupos isomorfos a  $\mathbb{Z}$ , con 0 en el vértice; por otra parte el cono sobre  $K$  de la otra copia de  $B$  corresponde a los grupos isomorfos a  $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , con  $\mathbb{R}^2$  en el vértice. Demostrandose así el Teorema 4.4.1.

# Apéndice A

## Apéndice

### A.1. Variable compleja

**Teorema A.1.1.** (Teorema de la integral de Cauchy). *Si  $G$  es un recinto simplemente conexo del plano finito y  $f$  es una función uniforme y analítica en este recinto, entonces para cualquier curva rectificable y cerrada  $L$  perteneciente a  $G$ , la integral  $\int_L f(z) dz$  es igual a cero.*

**Lema A.1.2.** *Si  $F(z)$  es una función continua en un recinto  $G$ , y  $\Gamma$  es alguna curva rectificable contenida en el recinto, entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para cada partición de la curva  $\Gamma$  en arcos de longitud menor que  $\delta$ , la poligonal respectiva inscrita  $\gamma$  estará contenida en el recinto  $G$ , y*

$$\left| \int_L F(z) dz - \int_\gamma F(z) dz \right| < \varepsilon.$$

*Demostración.* En efecto, como  $\mathbb{C}$  es un espacio métrico, podemos señalar en  $G$  un conjunto acotado y cerrado  $E$ , para el cual todos los puntos de la curva  $\Gamma$  sean interiores; además, existe un número real  $\rho > 0$ , tal que para todo  $z \in \Gamma$  se tiene  $B_\rho(z) \subset E$ . Fijando el conjunto  $E$  y tomando un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, (si  $F(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ ), sabemos por el análisis real que  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son funciones uniformemente continuas en  $E$ , luego  $F(z)$  es uniformemente continua en  $E$ , determinemos un  $\delta_1 > 0$  tal que para cualquier par de puntos  $z, z' \in E$  con  $|z - z'| < \delta_1$ , se cumpla

$$|F(z) - F(z')| < \frac{\varepsilon}{2l}, \tag{A.1}$$

donde  $l$  es la longitud de la curva  $\Gamma$ .

Tomando un número positivo  $\delta < \min(\delta_1, \rho)$ . Fijemos una partición cualquiera de la curva  $\Gamma$  cuya máxima longitud de los arcos  $\sigma_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ), sea menor que el  $\delta$  indicado, y sean  $\zeta_k$  los puntos que realizan la partición, y  $\gamma_k$  las cuerdas de los arcos  $\sigma_k$  ( $\zeta_k$  es el origen y  $\zeta_{k+1}$  es el extremo de  $\gamma_k$ ). Designando con  $\gamma$  la poligonal cuyos lados sucesivos son  $\gamma_k$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} F(z) dz - \int_{\gamma} F(z) dz \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right| \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Observando que

$$\int_{\sigma_k} F(\zeta_k) dz = \int_{\gamma_k} F(\zeta_k) dz = F(\zeta_k) (\zeta_{k+1} - \zeta_k),$$

tendremos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right| &= \left| \int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz - \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz \right| \\ &\leq \left| \int_{\sigma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz \right| + \left| \int_{\gamma_k} [F(z) - F(\zeta_k)] dz \right| \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Las diferencias bajo los signos de las integrales pueden acotarse según (A.1), ya que la distancia entre cualquier punto de  $\sigma_k$  o de  $\gamma_k$  y el punto  $\zeta_k$  es menor que  $\delta_1$ . Por esta razón

$$\left| \int_{\sigma_k} F(z) dz - \int_{\gamma_k} F(z) dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{2l} \cdot l_{\sigma_k} + \frac{\varepsilon}{2l} \cdot l_{\gamma_k} < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l_{\sigma_k}. \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, de la desigualdad (A.3) obtenemos

$$\left| \int_{\Gamma} F(z) dz - \int_{\gamma} F(z) dz \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l} \cdot l_{\sigma_k} = \varepsilon. \quad (\text{A.5})$$

□

Ahora, vamos a demostrar propiamente el teorema de la integral de Cauchy.

I) Sea  $L$  un segmento rectilíneo  $\gamma$ , recorrido dos veces en direcciones opuestas. Entonces

$$\int_L f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{-\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

En este caso no recurrimos a la derivabilidad de  $f$ .

II) Ahora, sea  $L$  el contorno de un triángulo situado en el recinto  $G$ , recorrido una vez en una dirección determinada, por ejemplo en sentido opuesto a las agujas del reloj.

Haciendo

$$\left| \int_L f(z) dz \right| = M$$

Queremos demostrar que  $M = 0$ . Dividamos el triángulo mediante segmentos rectilíneos que unan los puntos medios de sus lados, en cuatro triángulos iguales con los contornos  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4$ , y formemos la suma de las integrales tomada sobre  $L_1, L_2, L_3$  y  $L_4$ , en sentido opuesto a las manecillas del reloj,

$$\int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz + \int_{L_3} f(z) dz + \int_{L_4} f(z) dz. \quad (\text{A.6})$$

Cada una de estas cuatro integrales puede sustituirse por la suma de tres integrales, tomadas a lo largo de los lados de los triángulos. Seis de estas integrales, tomadas sobre los segmentos situados sobre  $L$ , darán al sumarlas la integral  $\int_L f(z) dz$ .

Las otras seis se dividirán en tres pares de integrales, cada par de las cuales se toman sobre un mismo segmento, pero recorridos en direcciones opuestas. Por lo que la suma de cada par de éstas es igual a cero, luego entonces toda la suma (A.6) es igual a una sola integral, y como el módulo de la suma no supera a la suma de los módulos de los términos, tendremos que

$$\begin{aligned} M &= \left| \int_{L_1} f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{L_1} f(z) dz \right| + \left| \int_{L_2} f(z) dz \right| + \left| \int_{L_3} f(z) dz \right| + \left| \int_{L_4} f(z) dz \right| \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De la última desigualdad se concluye que al menos uno de los términos del segundo miembro tiene que ser no menor que  $\frac{M}{4}$ . Designando el circuito correspondiente con  $L^1$  (éste coincide con  $L_1, L_2, L_3$  ó  $L_4$ ), tendremos

$$\left| \int_{L^1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Ahora, haciendo con  $L^1$  de igual manera que con el triángulo  $L$ ; obtenemos cuatro triángulos iguales:  $L_1^1, L_2^1, L_3^1$  y  $L_4^1$ . Observemos que la integral sobre  $L^1$  es igual a la



suma de las cuatro integrales sobre  $L_1^1, L_2^1, L_3^1$  y  $L_4^1$  (tomadas en un mismo sentido, contrario a las manecillas del reloj), finalmente sacamos la conclusión de que el módulo de una de estas últimas será no menor que  $\frac{1}{4} \frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}$ . Sea ésta la integral a lo largo de  $L^2$  ( $L^2$  coincide con  $L_1^1, L_2^1, L_3^1$  ó  $L_4^1$ ). De modo que

$$\left| \int_{L^2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}$$

Continuando estos razonamientos, se obtiene una sucesión de triángulos con los contornos  $L^1, L^2, \dots, L^n, \dots$ , que satisfacen las siguientes condiciones,

1.  $L_n \subset L_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$ . A su vez,  $L_n$  se obtiene de  $L_{n-1}$  al unir los puntos medios de sus lados. De aquí se desprende que la longitud  $l_n$  de  $L_n$ , es dos veces menor que  $l_{n-1}$ , y por consiguiente,  $l_n = \frac{l}{2^n}$ .
2.  $L_n \subset G$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  puesto que  $L \subset G$ .
3.  $\left| \int_{L_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . ( $\star$ )

De *i*) se deduce que los triángulos tienen un punto  $\zeta$  en común, ubicado al interior de  $L_n$  o en su frontera. Por *ii*) se deduce que  $\zeta \in G$ . Y según la hipótesis del teorema, la función  $f(z)$  posee derivada  $f'(\zeta)$  en el punto  $\zeta$ , y para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que, cuando  $|z - \zeta| < \delta$ , entonces se cumple la desigualdad,

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon. \quad (\text{A.8})$$

Como  $\zeta \in L_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $l_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ; tendremos que a partir de cierta  $n > N$ ,  $L_n \subset \{z \mid \delta > |z - \zeta|\}$ . De modo, que para todo  $z \in L_n$  se cumple la desigualdad (A.8).

Es decir,

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon |z - \zeta|.$$

Ahora bien, como  $|z - \zeta| < \frac{l}{2^n}$  para todo  $z, \zeta \in L_n$ , donde  $\frac{l}{2^2} = l_n$  es el perímetro de  $L_n$ . Obtenemos

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon \frac{l}{2^2}, \quad z \in L_n, \quad n > N. \quad (\text{A.9})$$

Calculando la integral de la función  $f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)$ , a lo largo de la curva cerrada  $L_n$ , vemos que

$$\begin{aligned}
\int_{L_n} [f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)] dz &= \int_{L_n} f(z) dz - f(\zeta) \int_{L_n} dz - f'(\zeta) \int_{L_n} z dz - \zeta f'(\zeta) \int_{L_n} dz \\
&= \int_{L_n} f(z) dz
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Dado que  $\int_{L_n} dz = \int_{L_n} z dz = 0$ .

Por otra parte, de (A.9) y (A.10) se desprende,

$$\left| \int_{L_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{L_n} [f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)] dz \right| < \varepsilon \frac{l}{2^n} l_n = \varepsilon \frac{l}{2^n} \frac{l}{2^n} = \varepsilon \frac{l^2}{4^n} \tag{A.11}$$

Recordemos que en la igualdad (\*), los números  $\frac{M}{4^n}$  se acotan superiormente por el módulo de la integral sobre  $L_n$ , a su vez en (A.11), dicho módulo es acotado superiormente por los números  $\varepsilon \frac{l^2}{4^n}$ , resultando la siguiente desigualdad,

$$\frac{M}{4^n} < \varepsilon \frac{l^2}{4^n} \rightarrow M < \varepsilon l^2;$$

finalmente, haciendo que  $\varepsilon \rightarrow 0$  tendremos  $M \leq 0$ . Se sigue entonces, que

$$M = \left| \int_{L_n} f(z) dz \right| = 0.$$

Quedando demostrado el teorema para el caso triangular.

III) Sea  $L$  una poligonal arbitraria cerrada situada en el recinto  $G$ . El problema consiste ahora en descomponer  $L$  en triángulos, para los cuales ya fue demostrado el teorema. Una vez hecha la triangulación, calculamos la integral sobre todos los triángulos recorridos en un mismo sentido (contrario al reloj), veremos entonces que al descomponer cada integral «triangular» en tres integrales sobre sus lados respectivos, y efectuar la suma de todas las integrales, se cancelan todas, excepto las correspondientes a los lados de los triángulos contenidos en  $L$ . En conclusión:  $\int_L f(z) dz = 0$ .

IV) Finalmente, consideremos el caso más general de una curva rectificable y cerrada arbitraria  $L$ , perteneciente a un recinto  $G$ . Por el lema ya demostrado, para cualquier  $\varepsilon > 0$  se puede señalar una poligonal cerrada  $\gamma$ , inscrita en  $L$  y contenida en  $G$  de forma tal que las integrales  $\int_L f(z) dz$  y  $\int_\gamma f(z) dz$  satisfacen la condición

$$\left| \int_L f(z) dz - \int_\gamma f(z) dz \right| < \varepsilon$$

Como ya demostramos que  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , claramente  $|\int_L f(z) dz| < \varepsilon$ , y dado que  $\varepsilon$  es un número positivo arbitrariamente pequeño, concluimos que

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

□

La demostración del siguiente teorema, es relativamente simple y se desprende del teorema anterior, por lo que solo lo enunciamos.

**Teorema A.1.3.** (Teorema de la integral para un sistema de circuitos). *Sea  $f(z)$  una función uniforme y analítica en un recinto arbitrario  $G$  y sea  $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , un sistema de curvas de Jordan rectificables y cerradas, contenidas en  $G$  tales que:*

1. *Las curvas  $\gamma_k \subset \text{int}(\Gamma)$ , para toda  $k$  en  $I_n$ , donde  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .*
2. *Si  $k_0 \in I_n$  entonces para todo  $k \in I_n$ ,  $\gamma_k \cap \text{int}(\gamma_{k_0}) = \emptyset$ , siempre que  $k \neq k_0$ .*
3. *Al excluir del interior de  $\Gamma$  todos los recintos cerrados limitados por las curvas  $\gamma_k$ , generamos un recinto múltiplemente conexo  $g \subset G$ .*

Entonces,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

□

**Teorema A.1.4.** (Formula, integral de Cauchy). *Sea  $f(z)$  una función uniforme y analítica en el recinto  $G$  y sea  $L$  una curva rectificable de Jordan cerrada, perteneciente a este recinto junto con su interior  $g$ . Entonces se verifica la siguiente formula:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in g.$$

*Demostración.* Sea  $\gamma_{\rho}$  una circunferencia de radio  $\rho$  y centro en  $z$ , contenida al interior de  $L$ . Tomando a la función  $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  como una función de  $\zeta$  en el recinto  $G' = G - \{z\}$ . La función  $\varphi(\zeta)$  está bien definida y es derivable, por ser cociente de dos funciones derivables.

Luego por el teorema integral para un sistema de circuitos, se tiene:

$$\int_L \varphi(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_{\rho}} \varphi(\zeta) d\zeta$$

i.e.

$$\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\text{A.12})$$

Nos restaría demostrar, que

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z)$$

Así, para demostrar la igualdad del teorema, en lugar de la curva dada  $L$ , tomemos una circunferencia de radio  $\rho$  arbitrariamente pequeño con centro en  $z$ .

De la igualdad (A.12) se deduce que el valor de la integral  $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  no cambia al disminuir el radio, entonces

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Luego es suficiente demostrar, que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

es decir, demostrar que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal que para  $\rho < \delta(\varepsilon)$ , se cumple

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| < \varepsilon$$

Sabiendo que  $\int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ , podemos escribir al primer término de la desigualdad anterior, como

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\gamma_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| = \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

Notemos que siempre es posible hacer  $|f(\zeta) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ , si  $|\zeta - z| = \rho < \delta(\varepsilon)$ , por ser  $f(z)$  continua.

En tal caso, tendremos

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon$$

lo que se quería demostrar.  $\square$

Observación: Con las hipótesis del teorema, sean  $z \in G$  y  $\gamma_\rho$  una circunferencia de radio  $\rho$  y centro en  $z$ , contenida con su interior en  $G$ . Por lo demostrado tendremos, que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

La circunferencia  $\gamma_\rho$  tiene por ecuación

$$\zeta = z + \rho e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

y la identidad del teorema nos dice que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \rho e^{i\theta}) \cdot \rho e^{i\theta} \cdot i d\theta}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{i\theta}) d\theta, \quad (\text{A.13})$$

Luego, *el valor de una función analítica en cualquier punto del recinto  $G$  es la media aritmética o promedio de sus valores, tomados sobre cualquier circunferencia  $\gamma_\rho$  con centro en  $z$ .*

Si  $\zeta \in \gamma_\rho$ , sea  $\max |f(\zeta)| = M(\rho)$ , utilizando la igualdad (A.12), obtenemos

$$|f(z)| \leq M(\rho).$$

Como  $f(\zeta)$  es continua en  $\gamma_\rho$ , el valor  $M(\rho)$  se alcanza en algún punto de esta circunferencia. Y dado que su radio puede tomarse tan pequeño como queramos, se deduce que en cualquier entorno de  $z \in G$  existen otros puntos en los cuales el módulo de la función no será menor que su módulo en el punto  $z$ . Por lo tanto, *el módulo de una función analítica en el recinto  $G$  no puede tener un máximo estricto en ningún punto del recinto.* Esto es en esencia, el denominado *principio del módulo máximo*.

**Teorema A.1.5.** (Integral de tipo Cauchy). *La expresión*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

*donde  $\Gamma$  es una curva rectificable,  $\varphi(\zeta)$  una función continua en  $\Gamma$  y  $z \notin \Gamma$ ; determina una función uniforme  $F(z)$  en todo recinto  $G$  que no contenga ningún punto de la curva  $\Gamma$ .*

A su vez,  $F(z)$  resulta ser infinitamente derivable en el recinto  $G$ , y su derivada de cualquier orden  $n$  se obtiene derivando  $n$  veces la función subintegral respecto de  $z$

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (\text{A.14})$$

*Demostración.* En efecto, haciendo inducción sobre  $n$  vemos que:  $F(z) = F^{(0)}(z)$ , y suponemos valido el resultado para  $n$ , ahora vamos a demostrarlo para  $n+1$  calculando directamente la derivada de  $F^{(n)}(z)$ , i.e. determinando el límite

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{F^{(n)}(z') - F^{(n)}(z)}{z' - z}.$$

Tómese el disco cerrado  $k : |z' - z| \leq \rho$ , perteneciente al recinto  $G$  sea  $\delta = d(k, \Gamma)$  y  $K = \{|z| < R\}$  de forma que  $\Gamma, k \subset K$ . Luego si  $z' \in k$ , tendremos

$$F^{(n)}(z') - F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \frac{(\zeta - z)^{n+1} - (\zeta - z')^{n+1}}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - z')^{n+1}} d\zeta,$$

haciendo  $\zeta - z = t$  y  $z' - z = h$  resulta  $\zeta - z' = t - h$ . Sustituyendo equivale a

$$\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \frac{(t-h)^n + t(t-h)^{n-1} + \dots + t^n}{t^{n+1}(t-h)^{n+1}} d\zeta.$$

Por demostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} &= \Psi(z) \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \frac{1}{t^{n+2}} d\zeta. \end{aligned}$$

En efecto, observemos que

$$\begin{aligned} &\frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \Psi(z) = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \frac{t(t-h)^n + t^2(t-h)^{n-1} + \dots + t^{n+1} - (n+1)(t-h)^{n+1}}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}} d\zeta = \end{aligned}$$

$$= \frac{n! h}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \frac{(t-h)^n + [t + (t-h)](t-h)^{n-1} + \cdots + [t^n + t^{n-1}(t-h) + \cdots + (t-h)^n]}{t^{n+2}(t-h)^{n+1}} d\zeta. \quad (\text{A.15})$$

Sabemos que  $2R > |t| = |\zeta - z| > \delta$ ,  $2R > |t-h| = |\zeta - z'| \geq \delta$ .

Ahora suponiendo que  $\mu = \max_{\Gamma} |\varphi(\zeta)|$  y que  $\lambda$  es la longitud de  $\Gamma$ ; de (A.16) resulta

$$\left| \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} - \Psi(z) \right| \leq \frac{n! |h|}{2\pi} \mu \frac{(2R)^n + 2(2R)^n + 3(2R)^n + \cdots + (n+1)(2R)^n}{\delta^{2n+3}} \lambda$$

y, puesto que el segundo miembro tiende a cero cuando  $h \rightarrow 0$ , resulta

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F^{(n)}(z+h) - F^{(n)}(z)}{h} &= F^{(n+1)}(z) \\ &= \Psi(z) \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{t^{n+2}} d\zeta. \end{aligned}$$

□

Consecuencias importantes:

*i) Toda función de variable compleja, analítica en un recinto  $G$ , es infinitamente derivable en  $G$ .*

Sea  $f(z)$  una función analítica en  $G$ , y  $\gamma$  una circunferencia, con centro en  $z_0 \in G$ , contenida junto con su interior en el recinto.

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Luego  $f(z)$  se representa al interior de  $\gamma$  por la integral de Cauchy, un caso de la integral de tipo Cauchy, por lo que  $f(z)$  es infinitamente derivable al interior de  $\gamma$ , y

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (\text{A.16})$$

*ii) Las derivadas de cualquier orden de una función  $f(z)$  analítica en un recinto  $G$ , también serán analíticas en  $G$ .*

Efectivamente, puesto que cada función  $f^{(n)}(z)$  es derivable en  $G$ .

*iii)* (Teorema de Morera). *Toda función  $f(z)$ , uniforme y continua en un recinto simplemente conexo  $G$ , tal que la integral tomada sobre cualquier circuito triangular  $\Delta \subset G$  sea igual a cero, es analítica en  $G$ .*

Este es el recíproco del teorema integral de Cauchy. En efecto, observemos que la integral

$$\int_{z_0}^z f(z) dz = F(z),$$

representa una función uniforme en  $G$ , y por los razonamientos expuestos,  $F(z)$  es una función analítica, cuya derivada coincide con  $f(z)$ , e.d.

$$F'(z) = f(z).$$

Pero, justamente se vio que la derivada de una función analítica es analítica. Por lo tanto  $f(z)$  es analítica. Con lo cual terminamos la demostración.

*iv)* Analizando la igualdad (A.16), y haciendo  $z = z_0$ . Si el radio de  $\gamma$  es  $\rho$ , y  $M(\rho) = |f(z)|$ , entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(\rho)}{2\pi \rho^{n+1}} 2\pi \rho = \frac{n! M(\rho)}{\rho^n}$$

es válido también para  $n = 0$ .

Así  $\forall z \in G$ , se cumple

$$|f^{(n)}(z)| \leq n! \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.17})$$

donde  $\rho$  es el radio de una circunferencia  $\gamma$  arbitraria contenida en  $G$ , y  $M(\rho)$  es el máximo del módulo de la función en  $\gamma$ .

Las desigualdades (A.17), son conocidas como *desigualdades de Cauchy*.

## A.2. Series de funciones

**Definición.** *Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones  $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas en algún conjunto  $E$ ; entonces la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente a una función  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  para todo  $n > N(\varepsilon)$  y para todo  $z \in E$ .*

**Definición.** *Una serie de funciones complejas*

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_0^{\infty} f_n(z), \quad (\text{A.18})$$



definidas en un conjunto infinito de puntos  $E$ , es uniformemente convergente (u.c.) en  $E$ , si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal, que para  $n > N(\varepsilon)$  y para todo  $p \in \mathbb{N}$ , se cumple la desigualdad

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

en todos los puntos de  $E$ . Aquí,  $S_n(z)$  representa la suma parcial de los primeros  $n+1$  términos de la serie.

De la definición se desprende que una serie u.c. en  $E$ , es convergente en cada punto del mismo. En general no se tiene el resultado recíproco.

**Proposición A.2.1.** *Escribamos la suma de la serie (A.18) como  $f(z)$ ,*

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z).$$

Entonces, la serie converge uniformemente si, y sólo si para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un  $N(\varepsilon)$  tal, que

$$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

para todo  $z \in E$  y  $n > N(\varepsilon)$ .

*Demostración.* En efecto, supongamos que la serie u.c., luego existe  $N_1(\varepsilon)$  tal, que para  $n > N_1(\varepsilon)$  y para cualesquier  $z \in E$  y  $p \in \mathbb{N}$ , se cumple

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y haciendo que  $p \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$|f(z) - S_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo  $z \in E$  y  $n > N_1(\varepsilon)$ .

Inversamente, si la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

se cumple para  $n > N_2(\varepsilon)$  y para todo  $z \in E$ , entonces, para todo  $p \in \mathbb{N}$ , tendremos

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(z) - S_n(z)| &= |f(z) - S_n(z) - [f(z) - S_{n+p}(z)]| \\ &\leq |f(z) - S_n(z)| + |f(z) - S_{n+p}(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Supongamos ahora que  $E$  es un conjunto denso.

**Lema A.2.2.** *Si cada término de la serie (A.18), u.c. en  $E$ , es una función continua en  $E$ , la suma de la serie será una función continua en  $E$ .*

*Demostración.* Acotemos  $|f(z) - f(z_0)|$  para cualesquier  $z, z_0 \in E$ ,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |[f(z) - S_n(z)] + [S_n(z) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)]| \\ &\leq |f(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - f(z_0)|. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A partir de la convergencia uniforme de la serie, sabemos que existe un  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal, que para  $n > N(\varepsilon)$  y  $\forall z \in E$ , se verifica la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particular

$$|f(z_0) - S_n(z_0)| < \varepsilon.$$

Como la función  $S_n(z)$  es continua en el punto  $z_0$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ ; si fijamos arbitrariamente  $n_0 > N(\varepsilon)$  podemos encontrar un  $\delta(\varepsilon) > 0$  tal, que para  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ , con  $z, z_0 \in E$ , se cumpla la desigualdad

$$|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Escribiendo  $n = n_0$  en (A.19), tomando  $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ , y observando las últimas tres desigualdades, obtenemos

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Concluyendo que la función  $f(z)$  es continua en cualquier punto  $z_0$  de  $E$ .

□

Supongamos ahora que  $E$  es una curva rectificable  $L$ .

**Lema A.2.3.** *Si los términos de la serie (A.18) son funciones continuas en  $L$  y la serie es u.c. en  $L$ , entonces ésta puede integrarse término a término a lo largo de  $L$ , e.d.*

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \\ &= \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz + \cdots + \int_L f_n(z) dz + \cdots \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

*Demostración.* Dado que los elementos de la serie son funciones continuas y la serie es u.c. en  $L$ , del lema anterior se deduce que  $f(z)$  es continua. Escribiendo  $l$  como la longitud de la curva  $L$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , si  $N(\varepsilon)$  es tal, que para  $n > N(\varepsilon)$  en todos los puntos de la curva  $L$ , se verifica la desigualdad

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l},$$

entonces, para  $n > N(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \int_L f(z) dz - \left[ \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz + \cdots + \int_L f_n(z) dz \right] \right| &= \\ &= \left| \int_L [f(z) - S_n(z)] dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Sea  $G$  un *recinto* (región), esto es un conjunto abierto y conexo por trayectorias.

Cuando una serie de funciones es uniformemente convergente en todo subconjunto cerrado y acotado (i.e. compacto) de  $G$ , decimos que converge uniformemente al interior del recinto  $G$ . Esto equivale a pedir, que para todo  $z_0$  de  $G$ , exista un entorno  $z_0$  en el cual la serie converja uniformemente.

Así, toda serie que converge uniformemente en el recinto  $G$ , es u.c. en el interior de  $G$ . El resultado recíproco generalmente no sucede.

**Teorema A.2.4.** (Teorema de Weierstrass, sobre las series u.c. de funciones analíticas). *Si los términos de una serie*

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, \quad (\text{A.21})$$

*u.c. en el interior de  $G$ , son funciones analíticas en este recinto, entonces la suma de la serie  $f(z)$  también es analítica en  $G$ .*

*Además, las series*

$$f_0^{(k)}(z) + f_1^{(k)}(z) + f_2^{(k)}(z) + \cdots + f_n^{(k)}(z) + \cdots, \quad (\text{A.22})$$

que se obtienen de la primera, derivando término a término  $k$  veces, también convergen uniformemente en el interior del recinto  $G$ , y representan en  $G$  las derivadas de  $k$ -ésimo orden de la suma de la serie  $f(z)$ .

*Demostración.* Sea  $z_0$  un punto cualquiera de  $G$ , y sea  $\gamma$  una circunferencia de radio  $\rho$  con centro en  $z_0$  contenida en  $G$  con todo su interior. Es suficiente demostrar el teorema para los puntos del entorno  $U : |z - z_0| < \frac{\rho}{2}$ , de  $z_0$ .

Sean  $\nu \in \gamma$  y  $z \in U$ , puntos arbitrarios. Sustituyendo  $z$  por  $\nu$  en la serie (A.21) y multiplicando todos los términos de la serie por  $\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(\nu)}{(\nu - z)^{k+1}}$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , tendremos

$$\frac{k!}{2\pi i} \frac{f(\nu)}{(\nu - z)^{k+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(\nu)}{(\nu - z)^{k+1}}. \quad (\text{A.23})$$

Puesto que la serie (A.21) es *u.c.* en  $\gamma$  y dado que  $|\nu - z| < \frac{\rho}{2}$ , se tiene

$$\left| \frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{(\nu - z)^{k+1}} \right| \leq \frac{k!}{2\pi \left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}},$$

la serie (A.23) también es *u.c.* en  $\gamma$ , entonces podemos integrarla término a término, de donde

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}}. \quad (\text{A.24})$$

Dado que las funciones  $f_n(z)$  son analíticas en el recinto  $G$ , sabemos que

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}} = f_n^{(k)}(z).$$

En (A.24) si  $k = 0$ , resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) d\nu}{\nu - z} = \sum_0^{\infty} f_n(z) = f(z),$$

luego  $f(z)$  representa en  $U$  una integral de tipo Cauchy, i.e. una función analítica en  $U$ .

Si  $k > 0$ , de (A.24) resulta

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}} = \sum_0^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Ahora bien, el primer miembro de esta igualdad representa la derivada de orden  $k$  de la integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) d\nu}{\nu - z}$ , que es de tipo Cauchy, de modo que es igual a  $f^{(k)}(z)$ . Luego en el entorno  $U$  de  $z_0$ , vemos que

$$f^{(k)}(z) = \sum_0^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Por último, hay que demostrar la convergencia uniforme de ésta serie, i.e., de la serie (A.24) en el mismo entorno.

Si en  $\gamma$  se cumple que

$$|f(\nu) - S_n(\nu)| < \varepsilon, \quad \text{para } n > N(\varepsilon),$$

entonces  $\forall z \in U$  y para los mismos  $n$ , tendremos

$$\begin{aligned} \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}} - \sum_0^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_j(\nu) d\nu}{(\nu - z)^{k+1}} \right| &= \\ &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu) - S_n(\nu)}{(\nu - z)^{k+1}} d\nu \right| \\ &< \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^{k+1}} 2\pi\rho, \end{aligned}$$

podemos notar que el segundo miembro puede hacerse tan pequeño, a la par de  $\varepsilon$ , como se quiera. Escribiéndose así la convergencia uniforme de la series (A.24) y (A.22) en  $U$ .  $\square$

**Teorema A.2.5.** *Sea  $f$  una función analítica en un recinto  $R$  y sea  $\{z_i\}$  una sucesión de ceros de la función que converge a  $z^* \in R$ . Entonces,  $f$  es idénticamente cero en  $R$ .*

*Demostración.* Puesto que  $f$  es continua,  $f(z^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(z_i) = 0$ . Si  $f$  no es idénticamente cero, podemos expresarla como una serie de potencias alrededor de  $z^*$ ,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z^*)^n$$

tal que no todos los coeficientes  $a_n$  sean cero. Sea  $a_m$  el primer coeficiente distinto de cero, entonces

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z^*)^n = \\
&= a_m (z - z^*)^m + a_{m+1} (z - z^*)^{m+1} + \dots \\
&= (z - z^*)^m \left[ a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z^*)^{n-m} \right] \\
&= (z - z^*)^m g(z),
\end{aligned}$$

con  $g(z)$  analítica en  $R$  y  $g(z^*) = a_m \neq 0$ .

Supongamos que  $|g(z^*)| = 2\varepsilon$ . Además, puesto que  $g(z)$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|z - z^*| < \delta$ , entonces  $|g(z) - g(z^*)| < \varepsilon$ . Luego en el disco  $|z - z^*| < \delta$ , tenemos

$$||g(z)| - 2\varepsilon| = ||g(z)| - |g(z^*)|| \leq |g(z) - g(z^*)| < \varepsilon$$

lo cual implica que en el mismo disco,  $|g(z)| > \varepsilon$ . Entonces  $f(z) \neq 0$  en un disco con centro en  $z^*$ , lo que contradice la hipótesis de que  $z^*$  es un punto límite del conjunto de ceros de  $f$ . Por lo tanto  $f$  es idénticamente cero en  $R$ .  $\square$

### Teorema A.2.6.

1. Sea  $R \subseteq \mathbb{C}$  una región, y sea  $f$  una función analítica, no constante, definida en  $R$ . Entonces  $f: R \rightarrow \mathbb{C}$  es una función abierta.
2. Si  $z_0 \in R$ , y si  $f(z_0) = w_0$  con multiplicidad  $m$ , entonces existe una vecindad  $N$  de  $z_0$  tal que para cada  $w \in f(N) - \{w_0\}$  el conjunto  $f^{-1}(w)$  contiene  $m$  puntos en  $N$ .

**Definición.** Sea  $R$  una región en  $\mathbb{C}$  y sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones  $f_n: R \rightarrow \mathbb{C}$ , decimos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en todo subconjunto compacto de  $R$  si, para cada compacto  $K \subseteq R$ , la sucesión formada por las restricciones  $\{f_n | K\}$  converge uniformemente en  $K$ .

**Teorema A.2.7.** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones analíticas en una región  $R \subseteq \mathbb{C}$ , uniformemente convergente a una función  $f(z)$  en todo subconjunto compacto de  $R$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $R$ , y la sucesión de derivadas  $\{f'_n\}$  converge uniformemente a  $f'(z)$  en todo subconjunto compacto de  $R$ .

*Demostración.* Únicamente es necesario demostrar el resultado para un disco cerrado  $D \subseteq R$ , el cuál supondremos tiene centro en  $z_0$  y radio  $r$ . Por resultados anteriores, observemos que el límite de la función  $f(z)$  es continuo en  $D$ , y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f$ , para cualquier curva cerrada  $\gamma$  en  $D$ .

Ahora bien, puesto que  $f_n$  es analítica, por el teorema de Cauchy se sigue que  $\int_{\gamma} f_n = 0$  para toda curva cerrada  $\gamma \in D$ . Y por lo tanto, en virtud del teorema de Morera,  $f$  es analítica en  $D$ .

Para ver que  $f'_n \rightarrow f'$  utilizamos la expresión de la integral de tipo Cauchy (A.A.1.5), la cual implica que si  $\Delta$  es un círculo con centro en  $z_0$  y radio  $\rho > 0$ , cuyo interior esté contenido en  $R$ , entonces

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2} dw \right|$$

y mediante una estimación convencional, podemos ver que  $f'_n$  converge a  $f'$ . □

**Corolario A.2.8.** *Sea  $f_n$  una serie de funciones analíticas en una región  $R \subseteq \mathbb{C}$ ; si  $\sum_{n=0}^m f_n$  converge uniformemente a  $f(z)$  en todo subconjunto compacto de  $R$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $R$  y  $\sum_{n=0}^m f'_n$  es uniformemente convergente a  $f'(z)$  en todo subconjunto compacto de  $R$ .* □

**Teorema A.2.9.** (prueba-M de Weierstrass). *Sea  $\{f_n\}$  una serie de funciones  $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ , definidas en algún conjunto  $E$ , tal que*

- i) *para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $M_n \in \mathbb{R}$  que satisface  $|f_n(z)| \leq M_n$  para todo  $z \in E$ ,*
- ii)  *$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  converge.*

*Entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge uniformemente en  $E$ , y converge absolutamente para cada  $z \in E$ .*

*Demostración.* La convergencia absoluta se sigue inmediatamente de i) y ii), por el criterio de comparación. Para la convergencia uniforme, sean  $L_r = \sum_{n=0}^r M_n$ ,  $V_r = \sum_{n=0}^r |f_n(z)|$  y  $S_r = \sum_{n=0}^r f_n(z)$ . Por i) y ii) se cumplen respectivamente,  $V_r \leq L_r$  y para todo  $\varepsilon > 0$ , existe un  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal, que para  $r > N(\varepsilon)$  y para todo  $p \in \mathbb{N}$ , se satisface la desigualdad,  $|L_{r+p} - L_r| < \varepsilon$ . Luego entonces también  $|V_{r+p} - V_r| \leq |L_{r+p} - L_r| < \varepsilon$  para  $\forall z \in E$ , pero  $|S_{r+p} - S_r| \leq |V_{r+p} - V_r|$ , y por lo tanto  $|S_{r+p} - S_r| < \varepsilon$ , e.d. la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  converge uniformemente en  $E$ . □

**Definición.** *La norma  $\|f\| = \|f\|_E$  de una función  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ , la definimos como  $\sup_{z \in E} |f(z)|$ , siempre que  $f$  sea acotada. Diremos también, que la serie de funciones  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  será normalmente convergente si*

1. *cada  $f_n$  es acotada en  $E$ ,*

2. la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$  converge.

Por el teorema anterior, al hacer  $M_n = \|f_n\|$ , observamos que la convergencia normal implica que la serie  $\sum f_n$  sea, tanto uniforme como absolutamente convergente en  $E$ .

**Observación A.2.1.** Cuando las funciones a estudiar son meromorfas, hay que considerar lo siguiente. Supongamos que  $\{f_n\}$  es una serie de funciones meromorfas en una región  $R \subseteq \mathbb{C}$ , tales que para cada subconjunto compacto  $K \subseteq R$  existe  $N_K \in \mathbb{N}$ , tal que

i)  $f_n(z)$  no tiene polos (y por ello es analítica) en  $K$  para  $n > N_K$ ,

ii)  $\sum_{n>N_K}^{\infty} f_n(z)$  es uniformemente convergente en  $K$ .

En tal caso decimos que la serie de funciones meromorfas  $\sum f_n$ , converge uniformemente en todo subconjunto compacto de  $R$ .

Como  $\sum_{n \leq N_K}^{\infty} f_n(z)$  es meromorfa al interior  $\overset{\circ}{K}$  de  $K$ , por ser una suma finita de funciones meromorfas, y dado que  $\sum_{n>N_K}^{\infty} f_n(z)$  es analítica en  $\overset{\circ}{K}$  (por i), la función

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n \leq N_K}^{\infty} f_n(z) + \sum_{n > N_K}^{\infty} f_n(z),$$

es meromorfa en  $\overset{\circ}{K}$  y sus polos son justamente los polos de las funciones  $f_n$ , donde  $n \leq N_K$ . Todo  $z \in R$  tiene una vecindad cuya cerradura es un compacto contenido en  $R$ , por lo cual  $\sum f_n$  es meromorfa en  $R$ .

Series de la forma

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots, \quad (\text{A.25})$$

con  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, z, z_0$  números complejos dados, son llamadas *series de potencias*.

**Teorema A.2.10.** de Cauchy-Hadamard. *Sea*

$$\Lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

*Entonces,*

- i) si  $\Lambda = \infty$ , la serie (A.25) es absolutamente convergente únicamente en  $z = z_0$ ,
- ii) si  $0 < \Lambda < \infty$ , la serie es absolutamente convergente en el círculo  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ , y es divergente en el exterior del mismo,



iii) si  $\Lambda = 0$ , la serie es absolutamente convergente en todo el plano.

*Demostración.*

*Caso 1.* Sea  $\Lambda = \infty$ . Luego por la definición de límite infinito, para cualquier número  $M > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  que depende de la sucesión  $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ , tal que  $\left| \sqrt[n]{|a_n|} \right| > N$ , si  $n > N$ . Así que para cualquier  $z \neq z_0$  existe un conjunto infinito de valores  $n = n_k$ , tales que

$$\left| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right| > \frac{1}{|z - z_0|},$$

de donde resulta  $|a_{n_k} (z - z_0)^{n_k}| > 1$ . Lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z - z_0) \neq 0$ , e.d. la serie no es convergente. Por lo que si  $\Lambda = \infty$  la serie converge únicamente en el punto  $z = z_0$ .

*Caso 2.* Sea  $0 < \Lambda < \infty$ . Para un punto  $w$  en el círculo  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ , podemos encontrar un número positivo  $0 < \delta < 1$  tal, que  $|w - z_0| = \frac{\delta^2}{\Lambda}$ . Ya que  $\Lambda < \frac{\Lambda}{\delta} = \frac{\delta}{|w - z_0|}$ , todos los valores de  $\left| \sqrt[n]{|a_n|} \right|$ , a partir de uno en adelante, deben ser menores que  $\frac{\delta}{|w - z_0|}$ . Por esto, a partir de cierta  $n$ , los términos de la serie (A.25), satisfacen

$$|a_n (w - z_0)^n| < \delta^n$$

pero la serie geométrica  $1 + \delta + \delta^2 + \dots + \delta^n + \dots$ , es convergente, luego la serie (A.25) es absolutamente convergente en todo punto  $w$  ubicado en  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ .

Ahora, tomando  $w$  en el exterior del círculo  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ , resulta  $\frac{1}{|w - z_0|} < \Lambda$ . Entonces existe un conjunto infinito de valores  $n = n_k$ , para los cuales

$$\left| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right| > \frac{1}{|z - z_0|},$$

de donde resulta  $|a_{n_k} (w - z_0)^{n_k}| > 1$ . Lo cual implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (w - z_0) \neq 0$ , es decir, la serie no es convergente en ningún punto  $w$  ubicado al exterior del círculo  $|z - z_0| < \frac{1}{\Lambda}$ .

*Caso 3.* Sea  $\Lambda = 0$ . Para cualquier  $z \neq z_0$  y  $0 < \delta < 1$ , se cumple

$$\left| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right| < \frac{\delta}{|z - z_0|},$$

a partir de valores  $n$  suficientemente grandes. Por lo tanto, comenzando desde cierto  $n$ , los términos de la serie (A.25) satisfacen:

$$|a_n (z - z_0)^n| < \delta^n.$$

De aquí deducimos la convergencia absoluta de la serie en todo punto del plano.  $\square$

**Lema A.2.11.** *La serie de potencias (A.25) es uniformemente convergente en el interior de su círculo de convergencia  $|z - z_0| < \Lambda^{-1}$ .*

*Demostración.* Para ello, basta con ver que la serie es uniformemente convergente en todo círculo cerrado  $|z - z_0| \leq r < \Lambda^{-1}$ . Notemos que para cualquier subconjunto compacto  $K \subset |z - z_0| < \Lambda^{-1}$ , existe un  $0 < r_k < \Lambda^{-1}$  tal que  $K \subset |z - z_0| \leq r_k$ . Sea  $w$  un punto del círculo de convergencia, ubicado en el exterior de la circunferencia  $|z - z_0| = r_k$ . Claramente  $r_k < |w - z_0| = \rho \leq \Lambda^{-1}$ , y por hipótesis la serie (A.25) es absolutamente convergente en el punto  $w$ , por lo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |w - z_0|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty,$$

Además, en cada punto del círculo cerrado  $|z - z_0| \leq r_k$ , se cumple la desigualdad  $|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| \rho^n$ . Por último, mediante el criterio de comparación de las series, deducimos que la serie (A.25) es uniformemente convergente en cada círculo  $|z - z_0| \leq r < \Lambda^{-1}$ .  $\square$

La serie de potencias

$$a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \cdots, \quad (\text{A.26})$$

es una serie, de funciones analíticas, uniformemente convergente al interior del recinto  $D : |z - z_0| < \Lambda^{-1}$ , con  $\Lambda^{-1} \neq 0$ . Por los razonamientos del Teorema de Weierstrass A.2.4, la suma  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  es una función analítica en el disco  $D$  y su derivada de cualquier orden  $k$ , se puede obtener derivando término a término, la serie (A.26)

$$f^{(k)}(z) = k! a_k + (k+1)k \dots 2a_{k+1} (z - z_0) + \dots + n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} + \dots \quad (\text{A.27})$$

Si hacemos  $z = z_0$ , tendremos

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k$$

despejando, nos resulta

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \quad (\text{A.28})$$

Si sustituimos los valores encontrados de  $a_k$  en (A.26), tendremos

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

La serie del segundo miembro, es justamente *la Serie de Taylor* de la función  $f(z)$ .

Por lo tanto, toda serie de potencias es la serie de Taylor para su suma  $f(z)$ .

A continuación, supongamos que la sumas de dos series de potencias

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

y

$$b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

con radios positivos de convergencia  $R_1$  y  $R_2$ , coinciden en un entorno  $V_{z_0} : |z - z_0| < r$  del punto  $z_0$ , es decir

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \equiv b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Cuando  $z \in V_{z_0}$ . Si  $F(z)$  representa el valor común de dichas series, mediante las identidades (A.28), tendremos que

$$a_0 = b_0 = F(z_0), \quad a_1 = b_1 = \frac{F'(z_0)}{1!}, \quad \dots, \quad a_n = b_n = \frac{F^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \dots$$

Es decir, los coeficientes correspondientes de las series, y por ende sus radios de convergencia  $R_1$  y  $R_2$ , coinciden. Por lo tanto las series son idénticas. Por lo que solamente puede existir una serie de potencias de  $(z - z_0)$  que tenga una suma dada en un entorno del punto  $z_0$ .

**Teorema A.2.12.** *Si las sumas de dos series de potencias de  $z - z_0$ , coinciden en un entorno del punto  $z_0$ , entonces los coeficientes de las mismas potencias de  $z - z_0$  son iguales.*

□

**Lema A.2.13.** *Si las sumas de dos series de potencias*

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

y

$$b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

*coinciden en un conjunto de puntos  $E$  tal, que  $z_0$  sea un punto de acumulación de  $E$ , entonces*

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n, \quad \dots,$$

*es decir, los coeficientes de las series son iguales entre sí*

□

**Teorema A.2.14.** *Sea  $f$  una función uniforme y analítica en un recinto  $G$ , sea  $z_0$  un punto (finito) arbitrario de  $G$ , y  $\Delta = d(z_0, \partial G)$  la distancia de  $z_0$  a la frontera del recinto. Entonces existe una serie de potencias de  $z - z_0$  convergente en el disco  $D: |z - z_0| < \Delta$  que representa en  $D$  a la función  $f(z)$ , esto es, si  $z \in D$*

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (\text{A.29})$$

*Demostración.* En efecto, sea un punto arbitrario  $z \in D$ , y  $\gamma: |\zeta - z_0| = \rho$  una circunferencia con centro en  $z_0$ , de forma que  $0 \leq |z - z_0| < \rho < \Delta$ . Por (A.24) tendremos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \text{si } z \in |z - z_0| < \rho. \quad (\text{A.30})$$

Ahora, representaremos a  $1/(\zeta - z)$  como la suma de una serie geométrica de la razón  $(z - z_0)/(\zeta - z_0)$ , y módulo

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} = \delta < 1.$$

Para lo cual expresamos a  $1/(\zeta - z)$  en la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z_0)^2} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} + \cdots + \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}} + \cdots \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Observemos que para todos los puntos  $\zeta \in \gamma$ , el módulo del término general de la última serie es

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{\rho} \delta^n, \quad \text{con } 0 < \delta < 1,$$

por lo que la serie (A.31) es uniformemente convergente en  $\gamma$ .

Así también ha de ser uniformemente convergente la serie que se obtiene a partir de multiplicar a (A.31) por la función  $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ , la cual está acotada en valor absoluto en  $\gamma$ . Esto es, la serie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} f(\zeta) \cdot \left( \frac{1}{\zeta - z} \right) &= \frac{1}{2\pi i} f(\zeta) \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Por lo tanto, dicha serie (A.32), puede integrarse término a término en  $\gamma$ . Haciendo la integración, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Notemos que el desarrollo de la función en series de potencias, fué obtenido a partir de un punto arbitrario del disco  $D$ , por lo tanto, ésta serie es convergente en cualquier otro punto del disco  $D$ .

□

Sea  $f(z)$  una función entera y  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots, \quad (\text{A.35})$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\ &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

Dicha serie, converge a  $f(z)$  en todo el plano. Empleando las acotaciones de Cauchy, los coeficientes de la serie están acotados del siguiente modo

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \text{ con } n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.36})$$

donde

$$M(\rho) = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|.$$

En nuestro caso, podemos tomar un radio  $\rho$  arbitrariamente grande. Por lo tanto, sí el módulo de una función entera  $f(z)$  permanece acotado en todo el plano, e.d.  $M(\rho) \leq M < \infty$  para todo  $\rho$ , la función  $f(z)$  es constante.

**Teorema A.2.15.** (de Liouville). *Si  $f$  es analítica en  $\mathbb{C}$  y existe un número real  $M$  tal que  $|f(z)| \leq M$ , entonces  $f$  es constante.*

*Demostración.* En efecto, si en las desigualdades (A.36) sustituimos  $M(\rho)$  por  $M$  y escribimos las desigualdades para los valores naturales del índice  $n$ , tendremos

$$|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Para un  $n$  fijo, hagamos crecer a  $\rho$  indefinidamente, por lo que resultaría  $|a_n| \leq 0$ , y  $a_n = 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Luego entonces, por (A.35), resultaría que  $f(z) = a_0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Es decir, la función  $f$  es constante. □

**Teorema A.2.16.** (del módulo máximo). *Si  $f(z)$  es una función no constante y analítica en una región  $R$ , entonces  $|f(z)|$  no alcanza su valor máximo en  $R$ .*

*Demostración.* En efecto, si  $z_0 \in R$  entonces  $f(z_0)$  es un punto interior de  $f(R)$ , ya que  $f(R)$  es un conjunto abierto. Por lo tanto existe un disco  $\Delta$  con centro en  $f(z_0)$  contenido en  $f(R)$ . Claramente hay puntos en  $\Delta$ , de la forma  $f(z)$  (con  $z \in R$ ) cuyos módulos son mayores que  $|f(z_0)|$ . Entonces  $|f(z)|$  no alcanza su valor máximo en  $z_0$ . Y dado que  $z_0$  es un punto arbitrario de  $R$ , se sigue que  $|f(z)|$  no alcanza su máximo en  $R$ . □

**Definición.** *A continuación vamos a definir una clase de series de funciones analíticas, dispuestas según las potencias enteras negativas de  $z - z_0$*

$$a_0 + a_1(z - z_0)^{-1} + a_2(z - z_0)^{-2} + \cdots + a_n(z - z_0)^{-n} + \cdots \quad (\text{A.37})$$

Haciendo  $\xi = 1/(z - z_0)$ , llevemos (A.37) a la forma

$$a_0 + a_1(\xi) + a_2(\xi)^2 + \cdots + a_n(\xi)^n + \cdots \quad (\text{A.38})$$

Observemos que su radio de convergencia es  $R = 1/\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ; si  $R = 0$  la serie (A.38) solo converge en el punto  $\xi = 0$ ; si  $0 < R < \infty$ , la serie es absolutamente convergente en el círculo  $|\xi| < R$  y es divergente fuera de dicho círculo; por último, si  $R = \infty$ , la serie es absolutamente convergente en todo punto finito del plano.

Como  $|\xi| = 1/|z - z_0|$ , se deduce que, si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$  entonces la serie (A.37) es divergente en todo punto finito; si  $0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ , la serie es absolutamente convergente para  $|z - z_0| > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  y es divergente para  $|z - z_0| < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ; por último, si  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , la serie es absolutamente convergente en todos los puntos del plano, con excepción del punto  $z = z_0$ . En resumen, el campo de convergencia de la serie (A.37) es el exterior del círculo de radio  $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  con centro en  $z_0$ , mismo que, para  $r = \infty$  degenera en el punto del infinito, para  $0 < r < \infty$  es el exterior del círculo, y para  $r = 0$  resulta en todo el plano menos el punto  $z = z_0$ .

A continuación, estaremos suponiendo que  $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ , con lo cual tendremos efectivamente un convergencia para la serie (A.37), al mismo  $|z - z_0| > r$  lo designaremos mediante  $K$ .

Dado que la serie (A.38) es uniformemente convergente en todo conjunto cerrado de puntos del círculo  $k = |\xi| < R$  y la transformación lineal  $\xi = 1/(z - z_0)$  aplica cualquier conjunto cerrado de puntos de  $k$  en un conjunto de puntos cerrados del recinto  $K$  y viceversa, tendremos que la serie (A.37) converge uniformemente en el interior de  $K$ . Observemos que en  $K$  está determinada la siguiente función

$$F(z) = a_0 + a_1(z - z_0)^{-1} + a_2(z - z_0)^{-2} + \cdots + a_n(z - z_0)^{-n} + \cdots \quad (\text{A.39})$$

misma que en virtud del teorema de Weierstrass, es analítica en todos los puntos finitos de  $K$ . En el punto del infinito,  $F(z)$  toma el valor  $a_0$ , esto es  $F(\infty) = a_0$ . En este sentido diremos que la función  $F(z)$  es analítica en el punto del infinito. Por lo tanto la condición, para la función, de ser analítica en el punto del infinito se caracteriza también por la existencia de un desarrollo de la forma (A.39), que es convergente en un entorno del punto al infinito.

**Definición.** *Una serie que generaliza los conceptos anteriores, es la llamada serie de Laurent. La cual es de la forma*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (\text{A.40})$$

Esta serie representa la suma de dos series

$$\sum_0^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_1^{\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m} \quad (\text{A.41})$$

Misma que consideramos convergente sólo cuando son convergentes ambas series (A.41). De modo que hemos establecido la siguiente igualdad

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \sum_0^{\eta} a_n(z - z_0)^n + \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_1^v a_{-m}(z - z_0)^{-m}$$

y equivalentemente

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \lim_{\substack{\eta \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} \sum_{-v}^{\eta} a_n(z - z_0)^n \quad (\text{A.42})$$

En la igualdad anterior  $\eta$  y  $v$  tienden a infinito de manera independiente. Así mismo, el sentido de (A.42) es el siguiente, para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $N(\varepsilon)$  tal que, para  $\eta > N(\varepsilon)$  y  $v > N(\varepsilon)$  se cumple que

$$\left| \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n - \sum_{-v}^{\eta} a_n(z - z_0)^n \right| < \varepsilon$$

Es muy importante notar que las propiedades de convergencia absoluta y uniforme de la serie de Laurent coinciden con las propiedades correspondientes de las series (A.41).

Sea  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  y  $r = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$ . La primera de la series (A.41) converge absoluta y uniformemente al interior  $G$  de la curva  $\Gamma : |z - z_0| = R = 1/\lambda$ , y es divergente en el exterior de  $\Gamma$ . Mientras que la segunda de las series (A.41), converge absoluta y uniformemente en el exterior  $g$  de la curva  $\gamma : |z - z_0| = r$ , y es divergente en el interior de dicha circunferencia.

Los recintos  $G$  y  $g$  tienen puntos en común si y sólo si  $r < R$ . En tal caso, la parte común representa un anillo circular

$$D : r < |z - z_0| < R \quad (\text{A.43})$$

Así, en el interior del anillo  $D$  ambas series convergen absoluta y uniformemente. Por lo tanto, en  $D$  converge también la serie de Laurent (A.40), la cual representa en  $D$  la siguiente función analítica

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n; \quad \text{con } r < |z - z_0| < R \quad (\text{A.44})$$



Notemos que fuera del anillo  $D$ , una de las dos series (A.41) será divergente, mientras que la otra converge; por esta razón la serie de Laurent es divergente fuera del anillo  $D$ . Por lo tanto el campo de convergencia de la serie de Laurent es un anillo circular, siempre que se cumpla  $r < R$ , de otro modo no existe tal campo.

En particular si  $r < \delta < R$ , la serie (A.44) es uniformemente convergente en la circunferencia  $\gamma : |z - z_0| = \delta$ , misma que también será uniformemente convergente si multiplicamos todos sus términos por  $\frac{1}{2\pi i}(z - z_0)^{-k-1}$ , con  $k$  un entero arbitrario. Al integrar la nueva serie sobre  $\gamma$ , tendremos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n-k-1}} dz$$

Fácilmente, podemos comprobar que todas las integrales del segundo miembro son iguales a cero salvo la correspondiente a  $n = k$ , la cual es igual a  $2\pi i$ . Luego entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = a_k; \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.45})$$

Con ello, logramos obtener los coeficientes de la serie de Laurent a través de la suma de dicha serie. Luego, si las sumas de de dos series de Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k \text{ y } g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k(z - z_0)^k$$

convergentes en los anillos  $D$  y  $\Delta$ , tales que contengan una misma circunferencia  $\rho = |z - z_0|$ , y si dichas series coinciden en los puntos de  $\rho$ , entonces los coeficientes de ambas series serán iguales dos a dos, esto es

$$a_k = b_k; \text{ con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

es decir, las series son idénticas. Naturalmente, las series resultan idénticas si los anillos coinciden entre si y  $f(z) = g(z)$  en todos los puntos del anillo  $D$ .

**Teorema A.2.17.** *Toda función  $f(z)$ , uniforme y analítica en un anillo circular  $D : r < |z - z_0| < R$ , se expresa en este anillo por una serie de Laurent convergente*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

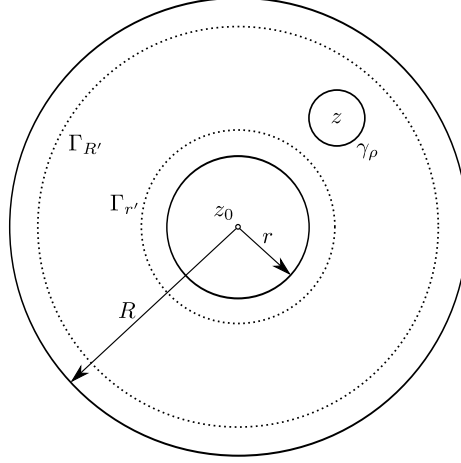


Figura A.1: Anillodeconvergencia

*Demostración.* Sea  $z$  un punto en  $D$  y consideremos el siguiente anillo

$$D' : r' < |\zeta - z_0| < R'$$

ubicado interior del primer anillo y que contiene al punto  $z$ . Para poderlo construir es suficiente tomar

$$r < r' < |\zeta - z_0| < R' < R.$$

Vamos a suponer que  $\rho = |\zeta - z|$  es una circunferencia con centro en  $z$ , ubicada al interior de  $D'$ . Dado que

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

es una función analítica de  $\zeta$  en el recinto  $D$ , salvo en el punto  $\zeta = z$ ; en virtud del Teorema A.1.3, tendremos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta; \quad (\text{A.46})$$

aquí  $\Gamma_{R'}$ ,  $\Gamma_{r'}$ , y  $\gamma_\rho$  representan respectivas circunferencias  $|\zeta - z_0| = R'$ ,  $|\zeta - z_0| = r'$ , y  $|\zeta - z_0| = \rho$ , mismas que al integrar las recorreremos en sentido contrario al reloj.

Notemos que la última integral de (A.46), es la integral de Cauchy, y por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta; \quad (\text{A.47})$$

Representando  $1/(\zeta - z)$  bajo el signo de la primera integral (con  $\zeta \in \Gamma_{R'}$ ), como una serie geométrica de razón  $(z - z_0)/(\zeta - z_0)$ , cuyo modulo satisface la siguiente relación

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R'} = \theta < 1.$$

De donde, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Observemos que, para todo  $\zeta \in \Gamma_{R'}$ , el módulo del término general de la última serie es

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{R'} \theta^n, \text{ con } 0 < \theta < 1,$$

luego entonces, la serie (A.48) es, con respecto de  $\zeta$ , uniformemente convergente en  $\Gamma_{R'}$ . A su vez, la serie que se obtiene al multiplicar (A.48) por  $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ , la cual está acotada en valor absoluto en  $\Gamma_{R'}$ , será

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Esta serie puede integrarse término a término sobre  $\Gamma_{R'}$ , así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (\text{A.49})$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.50})$$

Notemos que la primera de las integrales del segundo miembro de la igualdad (A.47), ha sido desarrollada como una serie convergente de potencias no negativas de  $z - z_0$ .

Ahora bien, para la segunda integral del segundo miembro de la igualdad (A.47), vamos a escribir a  $-1/(\zeta - z)$  con  $\zeta \in \Gamma_{r'}$ , como una serie geométrica de razón  $(\zeta - z_0)/(z - z_0)$ , cuyo modulo satisface la siguiente relación

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r'}{|z - z_0|} = \vartheta < 1.$$

De donde, tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Esta serie, es uniformemente convergente en  $\Gamma_{r'}$ . Multiplicando todos sus términos por  $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$  y luego, integrando término a término, encontramos

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_1^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad (\text{A.52})$$

donde

$$a_{-n} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.53})$$

Una vez más, observemos que la segunda integral en el segundo miembro de la igualdad (A.47), a sido desarrollado como una serie convergente de potencias negativas de  $z - z_0$ .

Al substituir los desarrollos (A.49) y (A.52) en el segundo miembro de la igualdad (A.47), hallaremos el desarrollo de la función  $f(z)$  en serie de Laurent para un punto arbitrario  $z \in D$ , esto es

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_0^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Sus coeficientes pueden ser calculados respectivamente con las formulas (A.50) y (A.53). Mientras que, si consideramos una circunferencia arbitraria  $\Gamma : |z - z_0| = \mu$ , con  $r < \mu < R$ ; a través del Teorema A.1.3 nos cercioramos que cada uno de los coeficientes anteriores, se puede calcular efectuando la integración sobre la circunferencia  $\Gamma$ , es decir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{con } n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

□







# Bibliografía

- [1] Lars V. Ahlfors, 1979. *Complex Analysis*, Third Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo.
- [2] K. Chandrasekharan, 1985. *Elliptic Functions*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [3] James Dugundji, 1978. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc. Boston, London, Sydney, Toronto.
- [4] Otto Forster, 1980. *Lectures on Riemann Surfaces*, Translated by Bruce Gilligan. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [5] John B. Fraleigh, 1982. *Álgebra Abstracta*. Addison-Wesley Iberoamericana, E.U.A.
- [6] R. C. Gunning, 1962. *Lectures on Modular Forms*. Annals of Mathematics Studies, Number 48. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- [7] Gareth A. Jones & David Singerman, 1997. *Complex Functions*, Cambridge, University Press.
- [8] Jürgen Jost, 2000. *Compact Riemann Surfaces*, Second Edition. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [9] Elon Lages Lima, 1997. *Análisis Real*, Vol. 1, Traducido por Lorenzo Díaz. IMCA, Perú.
- [10] Serge Lang, 1992. *Complex Analysis*, Third Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [11] Serge Lang, 1973. *Elliptic Functions*, Yale University, New Haven, Connecticut. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. London.
- [12] A. Markushevich, 1970. *Teoría de las Funciones Analíticas*, Tomos I,II. Traducción de Emiliano Aparicio Bernardo. Editorial Mir, Moscu.
- [13] William S. Massey, 1991. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [14] Henry McKean & Victor Mol, 1999. *Elliptic Curves*. Cambridge, University Press



- [15] John Milnor, 1968. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, Number 61. Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- [16] Ibrahim Poureza & John Hubbard, 1978. *The space of Closed Subgroups of  $\mathbb{R}^2$* . Topology, Vol. 18, pp. 143-146, Pergamon Press Ltd., Great Britain.
- [17] Zeev Nehari, 1952. *Conformal Mapping*. Dover Publications, Inc. New York.
- [18] Sylvia de Neymet, 2005. *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana.
- [19] William P. Thurston, 1997. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Volume 1. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.