

**POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE  
MATERIALES**

**SEDIMENTACIÓN DE ESFERAS CONSECUTIVAS  
EN POLÍMEROS ASOCIATIVOS**

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
**MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA  
DE MATERIALES**

P R E S E N T A

**I.Q. ISAÍAS EMMANUEL GARDUÑO OLVERA**

T U T O R:

**DR. OCTAVIO MANERO BRITO**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **INTEGRANTES DEL JURADO**

<b>Presidente:</b>	Dr. Federico Méndez Lavielle
<b>Primer Vocal:</b>	Dr. Octavio Manero Brito
<b>Segundo Vocal:</b>	Dr. Gabriel Ascanio Gasca
<b>Tercer Vocal:</b>	Dr. Luis Medina Torres
<b>Secretario:</b>	Dr. Enrique Soto Castruita

Esta tesis fue desarrollada en:

Instituto de Investigaciones en Materiales  
Laboratorio de Fluidos y Reología  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Ciudad Universitaria, México D.F.

## **TUTOR DE TESIS**

Dr. Octavio Manero Brito

## **SUSTENTANTE**

I.Q. Isaías Emmanuel Garduño Olvera

# Agradecimientos

Agradezco infinitamente a la Universidad Nacional Autónoma de México por los conocimientos que he adquirido en ella.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales y al PCEIM por su apoyo y facilidades para realizar este trabajo.

Este trabajo no podría haberse realizado sin el apoyo de CONACYT a través de la beca 219722.

Agradezco enormemente por sus consejos, enseñanzas, revisiones, críticas y por permitirme ser parte de su grupo de trabajo a:

Dr. Octavio Manero Brito  
Dr. Roberto Zenit Camacho  
Dr. Raúl Montiel Campos  
Dr. Enrique Soto Castruita  
Dr. Gabriel Ascanio Gasca  
Dr. Federico Méndez Lavielle  
Dr. Luis Medina Torres  
Dr. Baltasar Mena Iniesta  
Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

Gracias especiales para:

Dr. Arturo de Jesús Mendoza Fuentes  
Dra. Guadalupe Sánchez Olivares  
Dr. Fausto Calderas García  
I.M. Diego Sámano  
M. en I. Mireille Bravo Gutiérrez

Sin ellos este trabajo jamás se hubiera realizado.

Un agradecimiento especial a todos mis compañeros de laboratorio, por todos los buenos momentos en el Open Arena y en el fut: Elegido, Papatzul, Pichirilo, Guzmán, Fede, Mijito, Charly, Santos, Natas, Roger, Colocho, Messi, Dr. Juan Hernández Cordero y los que me faltan **ustedes saben quienes son.**

## **Dedicatoria**

A mi familia por apoyarme

Papá, Mamá, Rosa, Ángel, Dulce, Iván, Kenia, Samantha, Grecia, a mis tíos, primos y abuela.

Leticia Donís Castro gracias por toda tu infinita comprensión, paciencia, apoyo y cariño.

*Follow through  
Make your dreams come true  
Don't give up the fight  
You will be alright  
'Cause there's no one like you in the universe*

**Agradecimiento especial a mi tía Beatriz.**

*Black then white are all I see in my infancy  
red and yellow then came to be, reaching out to me  
lets me see  
as below, so above and beyond, I imagine  
drawn beyond the lines of reason  
Push the envelope. Watch it bend*

*Over thinking, over analyzing separates the body from the mind  
Withering my intuition, missing opportunities and I must  
feed my will to feel my moment drawing way outside the lines*

*Black then white are all I see in my infancy  
red and yellow then came to be, reaching out to me  
lets me see there is so much more and  
beckons me to look thru to these infinite possibilities  
as below, so above and beyond, I imagine  
drawn outside the lines of reason  
Push the envelope. Watch it bend*

*Over thinking, over analyzing separates the body from the mind  
Withering my intuition leaving opportunities behind  
feed my will to feel this moment urging me to cross the line  
Reaching out to embrace the random  
Reaching out to embrace whatever may come*

*I embrace my desire to  
feel the rhythm, to feel connected enough to step aside and weep like a widow  
to feel inspired to fathom the power, to witness the beauty  
to bathe in the fountain  
to swing on the spiral of our divinity and still be a human*

*With my feet upon the ground I move myself between the sounds and open wide to suck it in  
I feel it move across my skin  
I'm reaching up and reaching out I'm reaching for the random or whatever will bewilder me  
And following our will and wind we may just go where no one's been  
We'll ride the spiral to the end and may just go where no one's been*

***Spiral out Keep going  
Spiral out Keep going  
Spiral out Keep going  
Spiral out Keep going  
Spiral out Keep going***

---

## ÍNDICE GENERAL

---

<b>Resumen</b>	<b>7</b>	
0.1 Resumen		7
<b>Introducción</b>	<b>9</b>	
1.1 Introducción		9
1.2 Objetivos Generales		11
1.3 Objetivos Particulares		11
1.4 Hipótesis		11
<b>Antecedentes</b>	<b>12</b>	
2.1 Sedimentación de esferas		12
2.2 Interacción entre esferas		12
2.3 Coeficiente de arrastre		19
2.4 Zona de agotamiento		23
2.5 Modelo Bautista-Manero-Puig		26
2.6 Modelo BMP en flujo extensional uniaxial		28
<b>Desarrollo Experimental</b>	<b>30</b>	
3.1 Dispositivo experimental		30
3.2 Dispositivo liberador de esferas		31
3.3 Descripción del experimento		32
3.4 Velocidades de sedimentación		33

3.5 Propiedades de las esferas	34
3.6 Preparación del fluido	34
3.7 Caracterización reológica	35
3.8 Condiciones de referencia	40
<b>Resultados experimentales</b>	<b>43</b>
4.1 Velocidad de sedimentación de esferas individuales	43
4.2 Velocidad de sedimentación de esferas consecutivas	45
4.3 Separación entre los centroides	53
4.4 Velocidad terminal	60
4.5 Coeficiente de arrastre	63
4.6 Factor de corrección por arrastre	67
4.7 Viscosidad extensional	71
<b>Conclusiones</b>	<b>74</b>
Trabajo Futuro	75
<b>Referencias</b>	<b>76</b>
<b>Apéndice</b>	<b>79</b>
A.1 Valores reportados	79
A.2 Valores característicos	80
A.3 Deducción del Modelo BMP unimodal	84
A.4 Lista de símbolos	88

## 0.1 Resumen

El entendimiento del movimiento de partículas suspendidas en fluidos no newtonianos es de gran importancia en muchos procesos industriales. La sedimentación de esferas y la interacción esfera-esfera en dichos fluidos ha atraído la atención desde hace mucho tiempo, para poder evaluar ecuaciones constitutivas y métodos numéricos.

En este trabajo se estudió la interacción entre dos esferas que descienden de manera consecutiva en un polímero asociativo (HASE), con el fin comprender la física involucrada. Para ello se realizaron análisis de imágenes consecutivas, que permiten seguir el movimiento de las esferas en su descenso y así obtener la posición relativa al tubo de sedimentación y el tiempo. Con este análisis es posible calcular la separación entre esferas, la velocidad de sedimentación, el coeficiente de arrastre y la viscosidad extensional. Se estudiaron tres conjuntos de esferas (acero, teflón y acetal) de tres diámetros distintos; cada conjunto se liberó con cuatro diferentes distancias de separación entre sus centroides.

El fluido de prueba, HASE de concentración 1.5% peso, presenta viscosidad constante, en un amplio intervalo de pequeñas a moderadas rapidezces de corte, y adelgazamiento para rapidezces de corte grandes. La reología de corte y la viscoelasticidad lineal del fluido se representan con el modelo Bautista-Manero-Puig, el cual, permite la predicción de la viscosidad extensional como una función de la rapidez de extensión.

Los resultados muestran que cuando la esfera viajera entra a la de la región de la cauda de la esfera líder (la cual está alargada debido a la elasticidad), el arrastre sobre la esfera se reduce debido, principalmente, al comportamiento adelgazante del fluido; provocando que la velocidad de la segunda esfera aumente y que eventualmente, las dos esferas se agreguen y caigan como un doblete.

Al incrementar el número de  $We$ , se establecen fuertes flujos extensionales en la parte trasera de la esfera, por lo que los efectos extensionales en la región de la cauda se vuelven más relevantes y resultan en un incremento en el arrastre debido a la deformación, produciendo que las esferas se repelan, i.e. la distancia entre los centroides de las esferas se incrementa.

Al momento en que la segunda esfera entra en contacto con la elasticidad y conforme avanza, retiene una parte de la orientación en la región de la cauda de la primera esfera. Estos dos efectos competitivos se balancean y se establece una distancia de separación estable.

---

## 1.1 Introducción

La complejidad del flujo en la sedimentación de esferas se manifiesta con interesantes fenómenos resultado de la viscoelasticidad, de las propiedades de superficie y del tiempo del fluido [1]. El entendimiento de los mecanismos físicos de los diversos fenómenos que se presentan en el flujo de fluidos viscoelásticos es de vital importancia para la predicción y diseño de procesos industriales [2].

A pesar de que el problema de sedimentación de esferas en diversos fluidos viscoelásticos ha sido estudiado durante más de dos décadas [3], hay varios fenómenos que no se han estudiado con detalle y requieren un estudio más detallado.

Los experimentos de sedimentación de esferas consecutivas en intervalos de tiempo corto se han realizado para estudiar el fenómeno conocido como región de agotamiento. Tal fenómeno consiste en que después de que es lanzada la primera esfera, la segunda cae con una velocidad mayor que la primera y así sucesivamente, hasta que la velocidad terminal de las esferas liberadas alcanza una asíntota. Lo anterior ha hecho pensar que a medida que se van liberando las esferas, éstas desplazan las moléculas de polímero creando un efecto llamado túnel, por el cual las esferas subsecuentes alcanzan una velocidad terminal mayor que las anteriores.

En este trabajo se estudió la interacción entre dos esferas que caen de manera consecutiva para comprender la física involucrada. Para ello se realizó análisis de imágenes consecutivas, que permite seguir el movimiento de las esferas en su descenso y así obtener la posición relativa al tubo de sedimentación y el tiempo. Con esto es posible calcular la velocidad de sedimentación, observar si existe repulsión, atracción o si no hay cambios en sus posiciones relativas.

Este no es un problema sencillo debido a la complejidad del flujo alrededor de una esfera (Figura 1.1) que se compone de un flujo extensional biaxial en la parte frontal, seguido de un flujo cortante en la parte ecuatorial y de un flujo extensional uniaxial en la parte posterior de la esfera. El flujo en la parte anterior de la esfera es biaxial debido a que a medida que la esfera desciende, forma dos trayectorias extensionales de flujo, mientras que en la parte posterior sólo se forma una y que corresponde a la cauda en la misma dirección del movimiento de la esfera. La

importancia relativa de cada componente de flujo depende del comportamiento reológico del fluido empleado, la velocidad de sedimentación de la esfera y de la relación de radios esfera-tubo.

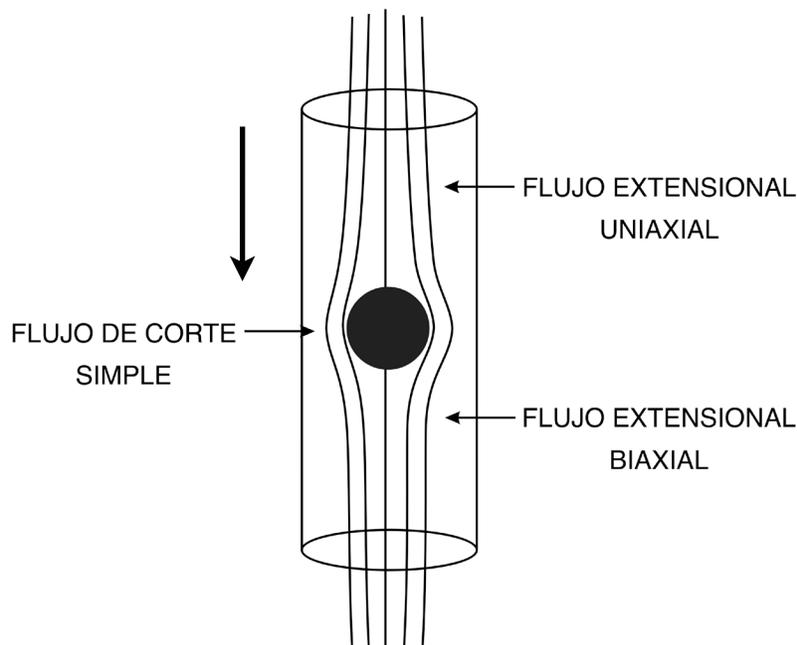


Figura 1.1 Esquema de los diferentes tipos de flujo alrededor de una esfera. La flecha indica la dirección de la gravedad y movimiento de la esfera.

Por otro lado, es necesario emplear un modelo matemático que sea capaz de reproducir el comportamiento reológico cortante y extensional de estos fluidos en los distintos componentes de flujo que se generan en el proceso de sedimentación de esferas. Para el caso de polímeros asociativos y fluidos micelares, se ha observado que el modelo de Bautista-Manero-Puig (BMP) reproduce de manera satisfactoria el comportamiento de estos fluidos, tanto en flujo de corte simple como en flujo extensional [4]. De esta forma, teniendo un conocimiento confiable de las propiedades reológicas de los fluidos, es posible explicar los mecanismos físicos que promueven o generan los diversos fenómenos que se presentan en sedimentación de esferas en fluidos viscoelásticos.

El empleo de un polímero asociativo HASE<sup>1</sup> que dado su comportamiento reológico (es un fluido que comprende una zona newtoniana y una de adelgazamiento en flujo cortante simple y en flujo extensional) lo hace peculiar para el estudio de los diferentes tipos de flujo que se generan, además de que las soluciones resultantes son transparentes lo que las hace idóneas para la determinación por imágenes de partículas [1, 5].

<sup>1</sup> por sus siglas en inglés, Hydrophobically Modified Alkali-Soluble Emulsion.

## 1.2 Objetivos Generales

- Entender los mecanismos físicos involucrados durante la sedimentación de esferas consecutivas en un polímero asociativo.

## 1.3 Objetivos Particulares

- Diseño y construcción del dispositivo liberador de esferas.
- Obtener las velocidades de descenso de cada una de las esferas por medio de análisis de imágenes.
- Analizar los cambios en la rapidez de extensión.
- Analizar los efectos de la cauda negativa sobre la segunda esfera.

## 1.4 Hipótesis

El efecto de la cauda dejada por el movimiento descendente de la primera esfera genera un cambio estructural en el fluido, que tiene repercusiones sobre la velocidad de traslación de la esfera posterior. Esto conlleva a tres casos:

- 1) Atracción debido al aumento en la velocidad de la segunda esfera a causa del desplazamiento del fluido por la primera esfera liberada.
  - 2) Repulsión cuando la cauda negativa es lo suficientemente fuerte para frenar a la esfera posterior.
  - 3) El último caso es cuando la distancia entre esferas alcanza un valor constante durante el experimento, debido a que el fluido se ha recuperado de la perturbación.
-

## 2.1 Sedimentación de esferas

El problema de sedimentación de esferas en medios viscoelásticos es un campo activo de investigación dentro de la reología. Los estudios realizados en sedimentación de esferas han sido motivados por dos intereses diferentes: Primero, porque es necesario un adecuado conocimiento de aspectos globales de mecánica de fluidos tales como la fuerza de arrastre que actúa sobre el movimiento de la partícula en medios viscoelásticos; ya que en distintos procesos de ingeniería (separaciones líquido sólido, fluidización y transporte de sólidos) se presentan este tipo de problemas [6]. Segundo, la velocidad terminal de una partícula depende de un número importante de variables incluyendo: el tamaño, la forma, la densidad de las partículas, su orientación, las propiedades del fluido (densidad, reología), el tamaño y la forma del recipiente de sedimentación.

## 2.2 Interacción entre esferas

La agregación de partículas esféricas en fluidos no newtonianos fue observada por Michele et al. (ver ref. [20]) en experimentos donde una suspensión de esferas de 60-70  $\mu\text{m}$  en una solución acuosa de poliacrilamida al 0.5% fue colocada entre dos placas de vidrio. Posteriormente, se aplicó un esfuerzo cortante rectilíneo y un esfuerzo cortante circular en la placa superior resultando en diferentes tipos de agregación de partículas. Cuando se aplicó un corte rectilíneo moviendo alguna de las placas de vidrio en repetidas ocasiones se observó la formación de dos líneas de esferas que fueron relacionadas por Michele et al. con la formación de esfuerzos normales. De la misma manera, este efecto fue observado en suspensiones de mayor o menor concentración siempre y cuando el fluido tuviera una naturaleza viscoelástica. Otra observación importante concierne a la rotación que presentan las esferas. En el caso de que una esfera se encuentre sola, se observa un movimiento circular con alta velocidad angular, el cual, disminuye si se encuentra cerca de otra esfera y además, no se observa ninguna rotación cuando se forma la cadena de esferas. Cuando se realizan movimientos circulares (sin que haya rotación de la placa) las esferas se arreglan en grupos circulares. Resultados similares de alineación de esferas fueron observados en el flujo dentro de un tubo de 6 mm de diámetro y en flujos elongacionales. De acuerdo con los autores (ver ref. [20]), la observación del fenómeno de alineación de partículas tiene que ver

---

con el cociente entre la primera diferencia de esfuerzos normales y el esfuerzo cortante, usualmente llamado corte recobable. Sin embargo, de acuerdo a los resultados obtenidos, el valor absoluto de los esfuerzos normales no es el factor determinante en la alineación de las esferas.

Para una suspensión de esferas en un aceite de silicón de 17 Pa·s, los esfuerzos normales son mucho mayores que en el caso de una solución de polisobutileno, no obstante, en esta última no se observa la alineación de las partículas, mientras que en un aceite de silicón de mayor viscosidad (560 Pa·s) el efecto de alineación sí se lleva a cabo. Para el aceite, el valor de la viscosidad nuevamente es cercano a 10 Pa·s, dentro del intervalo de corte considerado anteriormente.

Riddle et al. [7] realizaron estudios de interacción entre dos esferas idénticas en diferentes tipos de fluidos no newtonianos. En sus estudios encontraron la existencia de una distancia de separación crítica inicial entre los centros de dos esferas que se asientan a lo largo de la vertical de un tubo, en cuatro diferentes fluidos empleados. Si la distancia inicial de separación entre las esferas es menor que la distancia crítica, ambas esferas se aproximan una a la otra a medida que se asientan en el fluido. Si la separación inicial es mayor que la crítica, las esferas se separan. Posteriormente, sugirieron que la separación de las partículas está asociada con la creación de un flujo en dirección opuesta detrás del descenso de la primera esfera.

Liu y Joseph [8] observaron la agregación de partículas cilíndricas que se sedimentan en soluciones acuosas de óxido de polietileno y poliacrilamida. En los experimentos realizados por esos autores se estudia el ángulo de descenso de varios cilindros en líquidos viscoelásticos. El ángulo de inclinación puede ser controlado cambiando la concentración de las soluciones empleadas o mediante una modificación en el peso de la partícula en descenso. En sus resultados se encontró que a medida que disminuye la concentración, disminuye el ángulo de inclinación del cilindro con respecto al eje vertical del contenedor del fluido. En las soluciones muy diluidas el cilindro descenderá horizontalmente, es decir, de manera perpendicular a la dirección de la gravedad. De manera similar, a medida que aumenta el peso del cilindro y se incrementa la temperatura de la solución, se tiene el mismo efecto que en el caso de la disminución de la concentración de la solución, es decir, se presenta un decremento de ángulo de inclinación. La variación de la longitud del cilindro muestra que los cilindros más largos descienden con un ángulo de inclinación más grande que los cilindros de menor longitud. Sin embargo, en las soluciones menos concentradas los esfuerzos normales son débiles y por lo tanto, los ángulos de inclinación se ven más afectados por el peso de los cilindros que por sus longitudes; cabe mencionar que el ángulo del cilindro también se ve afectado por la forma del mismo. Los cilindros con terminaciones redondas y en forma de cono siempre se alinean mejor con respecto a la fuerza de gravedad que en el caso de terminaciones planas.

---

---

Finalmente, se presenta un estudio de como está relacionado el ángulo de inclinación con el número viscoelástico de Mach, definido como  $M_v = \sqrt{We \cdot Re}$  y el número de Reynolds. El ángulo de inclinación parece tener una transición crítica cuando el cilindro que se sedimenta, de forma vertical o paralela a la trayectoria de caída, lo que ocurre sólo cuando la viscosidad y la viscoelasticidad predominan ( $Re < 1$  y  $M < 1$ ); cuando sedimenta de manera perpendicular a la caída, la fuerza de inercia domina ( $Re > 1$  y  $M > 1$ ). Estos resultados muestran la existencia de un régimen en el cual los esfuerzos viscoelásticos y las fuerzas inerciales compiten. Dicha competencia determina el ángulo de inclinación de la partícula en descenso sin importar cual sea la orientación inicial de la partícula.

Posteriormente, realizaron nuevamente experimentos de descenso de cilindros en líquidos poliméricos con diferentes propiedades reométricas. Para poder aislar el efecto del adelgazamiento al corte y al mismo tiempo, omitir los efectos de elasticidad y de producción de esfuerzos normales, se utilizó una solución de carbopol al 0.4%; y para determinar los efectos de adelgazamiento para un fluido con una alta memoria y sin efectos de producción de esfuerzos normales, se usó una solución de xantana. Para la solución de xantana se observa que se da el cambio en la orientación del cilindro cuando el número de Reynolds y el número de Mach son mayores a 1, independientemente de cual sea el tipo de material, diámetro, longitud y forma del cilindro empleado. Sin embargo, no se puede concluir que este cambio en la orientación se deba únicamente al adelgazamiento; debido a que la solución de xantana presenta un valor alto del módulo de almacenamiento ( $G'$ ), lo que significa que es elástico; por lo tanto, es posible que este fenómeno se pueda atribuir a un efecto no lineal de la elasticidad. La diferencia entre las soluciones acuosas de óxido de polietileno y las de xantana radica principalmente en que las soluciones de óxido de etileno generan esfuerzos normales cuando se ven sometidas a corte, siendo estos últimos los responsables del fenómeno de variación en el ángulo de inclinación. Los cilindros que tienen terminaciones planas descienden con cierto ángulo de inclinación con respecto a la vertical y los cilindros con terminaciones en forma redonda y cónica se alinean con respecto a la gravedad. La inclinación debida a la forma del cilindro no ocurre en el caso de las soluciones de xantana, por lo tanto, como conclusión tentativa, se puede decir que se requieren esfuerzos normales y extensionales para que se lleven a cabo los fenómenos de ángulo de inclinación.

Para la solución de carbopol, el cambio en la orientación del cilindro ocurre cuando el número de Mach es  $M \geq 0.1$  y  $Re > 1$ . En el caso de cilindros que se asientan en fluidos newtonianos siempre se observará que el cilindro desciende de manera perpendicular a la dirección del movimiento, no importando que tan pequeño sea el número de Reynolds. Para estas situaciones, el criterio del número de Mach se hace irrelevante. No obstante, se puede pensar que hay niveles intermedios de efectos no newtonianos en los que algunos efectos pequeños de elasticidad se encuentran presentes junto con los efectos newtonianos, como puede ser el caso de las soluciones de carbopol.

---

De los resultados anteriores [8] propone que la combinación de los efectos de memoria y de los efectos de adelgazamiento es importante para que se lleve a cabo el asentamiento de las partículas de manera paralela a la gravedad y sugiere que la agregación o encadenamiento de partículas se encuentra directamente asociada con la orientación de la sedimentación de cilindros. Cuando los cilindros caen de manera paralela a la gravedad, las esferas tienden a formar cadenas, y cuando éstos tienden a cambiar su orientación de descenso de manera perpendicular a la gravedad, la cadena creada por las esferas es propensa a romperse y a dispersarse en arreglos diferentes.

Estudios posteriores de asentamiento en paralelo de esferas en líquidos viscoelásticos realizadas por Feng [9] muestran que la distancia de separación crítica encontrada por Bird [7] para partículas que se asientan en serie puede no estar relacionada con la creación de una cauda negativa como fue sugerido. En los experimentos realizados por Feng, se liberaron de manera simultánea dos esferas colocadas en paralelo en columnas con diferentes líquidos. En el caso de un fluido newtoniano, las dos esferas nunca se atraen entre sí y por lo tanto, jamás formarán una cadena al momento de descender. Para el caso de descenso de un arreglo de partículas en paralelo en un fluido viscoelástico, la dinámica de agregación y dispersión es más complicada y tiene el siguiente esquema general: al inicio, las dos esferas se atraerán mutuamente hasta que la distancia entre sus centroides se encuentre de manera vertical con respecto a la dirección de la gravedad. Posteriormente, las esferas continuarán su recorrido sin tocarse y entrarán a un régimen de no interacción entre ambas, para posteriormente formar una cadena y finalmente separarse.

En [9] se definen dos distancias claves en el asentamiento de las esferas. La primera distancia  $\delta_c$  es la distancia crítica más grande en la que se puede observar atracción entre las esferas y  $\delta_T$  que es la distancia de contacto crítica. Si  $\delta \leq \delta_T$  las esferas se tocarán para descender en forma de una cadena manteniendo la distancia vertical entre sus centroides. Para valores de  $\delta_T < \delta < \delta_c$  las esferas se atraerán nuevamente al inicio del descenso, cambiarán la distancia entre sus centroides de manera vertical, pero eventualmente se separarán sin que se observe en algún momento la formación de la cadena. Si  $\delta > \delta_c$  entonces las esferas no sufrirán ninguna atracción y se separarán.

Al momento de realizar las mediciones en los diferentes líquidos empleados se observa que, para la solución de óxido de polietileno, la distancia inicial requerida para que las esferas no se toquen es mayor en una solución al 1.25% que en una solución al 1.5%. Este resultado se atribuye a que el cociente de  $N_1 / \tau$  es mayor en soluciones diluidas, indicando un nivel mayor de elasticidad. Para las soluciones de  $S_1$  y STP donde  $S_1$  es la mezcla de poliisobutileno en polibuteno y STP (poliisobutileno en un aceite de petróleo), los resultados obtenidos concuerdan con los realizados en las soluciones de óxido de polietileno; la distancia de contacto

---

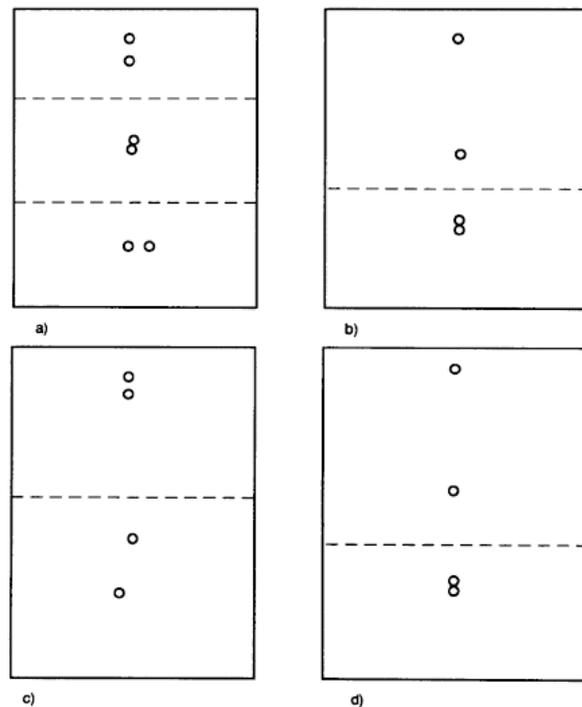
para el fluido  $S_1$  es de 17.5 mm y para el fluido STP es 11 mm. El cociente de la primera diferencia de esfuerzos normales con el esfuerzo cortante es mayor para el fluido de  $S_1$  que para el fluido de STP. Los efectos de adelgazamiento para los fluidos de  $S_1$  y STP son pequeños a baja rapidez de corte y tienen una menor producción de esfuerzos normales; siendo el caso contrario de las soluciones de óxido de etileno, las cuales, sí presentan un efecto de adelgazamiento en el intervalo de las rapideces de corte de los experimentos y una mayor producción de  $N_1$ . En  $S_1$  y STP se observa una atracción lateral de las esferas y la formación de cadenas, lo cual indica que el adelgazamiento no es una condición necesaria para estos efectos. Lo anterior sugiere que los fluidos que tenga el mayor cociente de  $N_1 / \tau$  serán los que manifiesten las mayores fuerzas entre partículas y la formación de cadenas de esferas. No obstante, la solución de xantana exhibe una elasticidad mayor que la solución de carbopol. Finalmente, se observa que la solución de xantana, que tiene efectos de memoria y adelgazamiento, es la que presenta los efectos de interacción y encadenamiento entre partículas.

Un estudio para el asentamiento de esferas en serie fue realizado por van den Brule [10] usando un fluido newtoniano, un fluido de Boger y dos fluidos adelgazantes con diferentes niveles de elasticidad. Para cada fluido se realizaron tres diferentes tipos de experimentos: interacción entre dos esferas idénticas, interacción entre un pequeño grupo de esferas idénticas e interacciones entre un grupo mayor de esferas idénticas. En el caso del fluido newtoniano se observó el clásico comportamiento de descenso consistiendo en una interacción inicial de las esferas al momento del descenso, seguida de un contacto entre ambas para posteriormente apartarse una de la otra sin que exista en ningún momento la formación de una cadena (figura 2.1). La observación más interesante se encuentra en el caso del fluido de Boger, ya que cuando la esfera posterior a la primera se encuentra dentro de la zona de la cauda de la primera, ésta presenta una tendencia a alejarse de la primera. Dado que la única diferencia entre el fluido newtoniano y el fluido de Boger es la elasticidad, el efecto de alejamiento de la segunda esfera se debe a la acción que ejercen las fuerzas elásticas sobre las partículas (figura 2.1 c). En el caso del fluido adelgazante inelástico (fluido tipo gel, Shellflo, figura 2.1 b) se observa un efecto más pronunciado de formación de cadenas que en el caso de la solución adelgazante con un nivel intermedio de elasticidad (solución de poliacrilamida, figura 2.1 d).

Otro punto importante señalado por van den Brule et al. [10] consiste en que todas sus pruebas realizadas con los dos fluidos adelgazantes, las dos esferas siempre tienden a acercarse, inclusive para distancias de separación iniciales grandes (i.e.  $>50 d$ ). Por lo tanto, la distancia de separación crítica mencionada por [7] no es percibida en estos experimentos. Una posible explicación sobre lo anterior es planteada por [10] y consiste en que existen dos zonas o regiones de importancia a considerar: la primera consiste en una zona donde las dos esferas interactúan una con la otra únicamente en un sentido hidrodinámico y la segunda consiste en una región en la que las dos esferas no interactúan. Dicha zona está referida al caso en que la segunda esfera se encuentra viajando por la zona de

---

agotamiento originada por la primera esfera. Lo anterior sugiere que en ausencia de la primera región, las dos esferas se aproximarán una a la otra. La zona en la que las esferas interactúan se encuentra influenciada por las propiedades viscoelásticas del fluido, particularmente por las propiedades elongacionales. Una alta viscosidad extensional puede inducir la creación de una cauda negativa, que estaría en competencia con la formación de la región de agotamiento. El fluido de Boger (PAA) empleado por [10] se considera que tiene un alto engrosamiento extensional, mientras que las soluciones inelásticas de shellflo y poliacrilamida exhiben efectos fuertes en el desarrollo de la zona de agotamiento.



*Figura 2.1 Interacción hidrodinámica entre dos esferas que caen con un arreglo en serie a lo largo del eje vertical de un contenedor cilíndrico conteniendo: (a) fluido newtoniano, (b) fluido adelgazante con poca elasticidad (shellflo), (c) fluido de Boger (PAA), (d) fluido adelgazante con un nivel intermedio de elasticidad (solución de poliacrilamida).*

Las conclusiones obtenidas por Gheissary y van den Brule fueron respaldadas posteriormente por los estudios de Bot et al. [3] utilizando un fluido de Boger con un tiempo de recuperación de tres minutos. En [3] se observa que para distancias de separación iniciales grandes las esferas se atraen y para distancias de separación pequeñas se repelen. Posteriormente, después de cierto periodo de tiempo, la distancia de separación entre ambas, se estabiliza en una distancia que es independiente de la posición inicial de las esferas. Cuando la distancia de separación inicial es grande, la velocidad de la primera esfera aumenta debido al acercamiento de la segunda. Esto ocasiona una disminución en el proceso de acercamiento de las esferas, hasta que se alcanza una distancia estable. Además, la distancia de separación estable crece cuando el número de Deborah

---

( $De = \lambda U/a$ ) incrementa y disminuye con el aumento de la relación de diámetros esfera cilindro  $a/R$ .

Nuevamente, una posible respuesta al comportamiento observado consiste en que los experimentos de atracción son originados por un incremento en la velocidad de la segunda esfera. Cuando la segunda esfera se aproxima a la primera, el desarrollo de la cauda creada por la primera esfera es inhibido. Esto resulta en una disminución del arrastre para la primera esfera y por lo tanto, una mayor velocidad. Entonces, se puede esperar que la distancia de separación final entre las esferas será muy sensible a las propiedades extensionales del fluido.

Como conclusión, estos resultados sugieren que la elasticidad del fluido origina la separación de las esferas, mientras que el fenómeno de agregación de esferas puede ser asociado con efectos de adelgazamiento, aunque algunos resultados numéricos muestran que las esferas siempre se atraerán en líquidos viscoelásticos.

A diferencia de los resultados obtenidos por Joseph [8] y Feng [9], la idea de que un fluido adelgazante con efectos de memoria ocasione la formación de espacios de viscosidad reducida concuerda con la segunda región encontrada en los experimentos de van den Brule [10] para esferas que se asientan en serie. Sin embargo, no queda clara la importancia de la hidrodinámica. Lo anterior implica que en los experimentos de los cilindros no se obtiene información acerca de la presencia de la formación de una cauda negativa, la cual determinaría en un momento dado, si las esferas se atraen o se repelen. De igual manera, la importancia enfatizada en que un valor alto del cociente de esfuerzos elásticos  $N_1 / \tau$  es suficiente para que se lleve a cabo la formación de cadenas no es una evidencia clara, dadas las propiedades materiales de los fluidos empleados; además, las interacciones de esferas con formación en paralelo probablemente tengan un mecanismo de interacción diferente al que toma lugar cuando el arreglo de liberación de las esferas es en serie, lo anterior queda demostrado por experimentos de liberación de esferas con arreglo en serie en una solución de carbopol [10]. Los resultados para la solución inelástica de carbopol, cuando las esferas son liberadas con un arreglo en paralelo, sufren una atracción mutua hasta que ocurre un contacto. Posteriormente, sus centros de línea adoptan una vertical separándose después de alcanzar una distancia de no interacción entre ambas esferas. De esta evidencia experimental, se puede sugerir que la interacción entre esferas con un arreglo en serie es más relevante en el entendimiento de los fenómenos de agregación de partículas, además de que todavía no hay una correlación evidente entre las propiedades reológicas de los fluidos y la hidrodinámica de asentamiento.

---

---

## 2.3 Coeficiente de arrastre

Los líquidos elásticos no newtonianos tienen muchas características que no se encuentran presentes en el caso de los líquidos newtonianos. Por consiguiente, es difícil estimar que el efecto no newtoniano, es el que en particular, tiene la mayor influencia en las características de flujo. Para los líquidos no newtonianos, la viscosidad en un flujo viscométrico varía con la rapidez de corte  $\dot{\gamma}$ , por lo tanto, algunos efectos de viscosidad variable podrían influenciar de manera considerable las mediciones hechas, e.g., en el caso del flujo no viscométrico generado en el problema de sedimentación de esferas [11]. En los trabajos experimentales realizados en cinemática de flujos no viscométricos con soluciones poliméricas que presentan adelgazamiento, un flujo con un alto número de Reynolds ( $Re > 1$ ) es necesario para generar efectos significativos de elasticidad en el campo de flujo; por lo tanto, resulta difícil distinguir entre los efectos de elasticidad y los inerciales.

Un fluido modelo desde el punto de vista experimental, es un fluido que tiene viscosidad constante, es altamente viscoso, altamente elástico a temperatura ambiente y además es ópticamente transparente. Recientemente, una alternativa a éste consiste en realizar los experimentos con los llamados fluidos de Boger, los cuales tienen un intervalo amplio de viscosidad constante  $\eta$ , además, son fluidos altamente elásticos. Con este tipo de fluidos se puede apreciar la cinemática de flujo, importante en ausencia de inercia y de adelgazamiento al corte, distinguir claramente la influencia que tiene la elasticidad en el flujo. Mientras que desde el punto de vista teórico se pueden comparar las soluciones obtenidas con los datos experimentales  $\eta$ , así comprobar la validez de las suposiciones hechas en las relaciones constitutivas.

Los fluidos de Boger utilizados en la literatura pueden ser clasificados en dos grupos: fluidos con poliacrilamida y jarabe de glucosa (PAA/CS) y fluidos de poliisobutileno con diferentes mezclas de polibuteno y keroseno (PIB/PB).

El número de Weissenberg en estos experimentos se define como  $We = \lambda U a$ , donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación del fluido,  $U$  es la velocidad terminal de asentamiento y  $a$  es el diámetro de la partícula. Se ha encontrado que para valores pequeños del número de Weissenberg ( $We < 0.1$ ) no existen desviaciones respecto a la ley de Stokes. Pero existe una región en la cual los fluidos de Boger (PAA/CS) presentan una gran disminución en el coeficiente de arrastre, la cual puede ser de hasta del 25%. Chhabra et. al. [11] encontraron que para valores del número de Weissenberg  $0 < We < 0.1$  no hay una desviación significativa de la ley de Stokes, pero a valores de  $We > 0.1$  se observa una disminución importante del valor de arrastre de Stokes cuando la rapidez de corte promedio de la esfera, se encuentra fuera de la región de comportamiento de segundo orden de las propiedades de corte estacionarias del fluido. Lo anterior quiere decir que la reducción en el arrastre ocurre solamente cuando el módulo de corte depende de la rapidez de deformación. Para la mezcla de glucosa con poliacrilamida utilizada por [11] se

---

encuentra una disminución del coeficiente de arrastre de hasta un 26%, obteniendo un valor asintótico de  $X_e=0.74$  (donde  $X_e = Cd \cdot Re/24$ ) para  $We \geq 0.7$ .

Posteriormente Mena et al. [12] realizaron experimentos utilizando cuatro tipos diferentes de fluidos: (a) fluido newtoniano (glicerol-agua), (b) fluido viscoelástico (solución acuosa de poliacrilamida), (c) fluido inelástico (carbopol con etilenglicol) y (d) fluido de Boger (separan con jarabe de glucosa).

Los experimentos realizados por estos autores muestran que para el caso en que los efectos de pared no son muy notorios,  $0.05 < a/R < 0.067$ , en los fluidos newtonianos, viscoelástico e inelástico se observa que a medida que aumenta la relación  $a/R$ , la fuerza de arrastre crece. Para los fluidos viscoelástico e inelástico se observa que la fuerza de arrastre se aproxima a un mismo valor asintótico cuando las velocidades de descenso de las esferas son grandes, lo que hace pensar que los efectos de adelgazamiento son los factores dominantes y responsables del valor asintótico en la fuerza arrastre. En el caso del fluido de Boger se encuentra una reducción del arrastre cercana al 25%, aunque mencionan que los valores de la rapidez de corte caen dentro del intervalo de dependencia cuadrática con respecto a  $N_1$ , dando como resultado un valor constante del tiempo de relajación. La desviación en el coeficiente de arrastre es cuadrática con respecto al número de Weissenberg y llega a un valor asintótico cercano a la unidad. En el caso del fluido viscoelástico, la desviación del valor del coeficiente de arrastre de Stokes también tiene una dependencia cuadrática con el número de Weissenberg, aunque en este caso, la dependencia cuadrática se extiende a valores más grandes.

Cuando la influencia de los efectos de pared es notoria,  $0.05 < a/R < 0.5$ , en el fluido viscoelástico se tiene que en los efectos de adelgazamiento predichos son más dominantes para valores pequeños del número de Reynolds y para la relación de diámetros  $a/R$ . Para relaciones grandes de  $a/R$  se encuentra que los efectos elásticos no son despreciables a valores pequeños del número de Reynolds. Para el fluido inelástico se observa un comportamiento similar al del fluido viscoelástico para valores altos de  $a/R$  y bajos  $Re$ . Finalmente, se presenta una comparación de los resultados experimentales obtenidos por [11], de la reducción del coeficiente de arrastre en función del número de Weissenberg para el fluido de Boger, donde de la misma forma se observa la disminución del 25% de la fuerza de arrastre hasta alcanzar un valor asintótico de  $X_e$  cuando  $We=1$  para relaciones de diámetros  $a/R \leq 0.184$ .

Evidencia experimental realizada por van den Brule [10] y Jones [2] muestra que para valores grandes del número de Weissenberg el factor de corrección del coeficiente de arrastre debido a la elasticidad del fluido aumenta y puede llegar a ser significativamente mayor que el valor de la fuerza de arrastre predicha por la ley de Stokes.

---

Tirtaatmadja et. al. [13] estudiaron el flujo reptante de esferas en el fluido  $M_1$ , un fluido de Boger preparado a partir de polisobutileno en polibuteno. En sus estudios encontraron que el factor de corrección de pared para este fluido puede ser descrito de manera correcta por el factor de corrección de Faxen para un fluido newtoniano hasta una relación de diámetros  $a/R=0.15$ . La gráfica del factor del coeficiente de arrastre contra el número de Weissenberg muestra que hasta valores de  $We=0.1$  no se encuentra desviación alguna en referencia al valor de Stokes. Por encima de este valor, el arrastre presenta una ligera disminución hasta un valor de 93-95% del valor newtoniano. Posteriormente, el arrastre en la esfera aumenta monótonamente con el valor del  $We$  hasta alcanzar un valor mayor del 20% del valor newtoniano para un  $We>1.6$ . En el caso de la disminución en el coeficiente de arrastre, los autores comentan que la rapidez de corte promedio experimentada por la esfera se localiza dentro de la región cuadrática con respecto a la primera diferencia de esfuerzos normales  $N_1$  y que no es posible alcanzar dicha rapidez de corte sin que se vea violada la suposición de flujo reptante.

van den Brule y Gheissary [10] estudiaron el efecto de la elasticidad en la velocidad de asentamiento estática y dinámica de partículas en un fluido de Boger (PAA/CS) y para un fluido con adelgazamiento. En sus resultados se muestra que la elasticidad del fluido causa una reducción en la velocidad de asentamiento y que este efecto se va incrementado con el aumento de la rapidez de corte. Se recalca que los resultados no muestran una reducción en el coeficiente de arrastre a diferencia de los resultados encontrados por otros autores y que, además, los valores de  $N_1$  no están en el intervalo de dependencia cuadrática con la rapidez de corte. Esto se debe a que los esfuerzos normales encontrados en la caracterización del fluido comienzan a ser significativos a valores de rapidez de deformación por arriba de  $10 \text{ s}^{-1}$ .

En el caso de la velocidad de asentamiento dinámica, un flujo de corte es creado entre dos cilindros concéntricos mientras que la esfera es liberada en el espacio entre los dos cilindros. La velocidad de ambos se controla de manera independiente, de tal forma que es posible hacer girar ambos cilindros en direcciones contrarias y así minimizar el movimiento tangencial de la partícula liberada en el centro de los cilindros. Los resultados muestran que para el fluido de Boger la velocidad de asentamiento de la esfera es reducida cuando el fluido es sometido a corte. Nuevamente, no se registra un incremento en la velocidad (correspondiente al caso en que hay una disminución en el coeficiente de arrastre). Para el fluido viscoelástico, en los dos casos de asentamiento de partículas se observa una disminución en el valor de la velocidad terminal a medida que aumenta la rapidez de corte.

Jones et al. [2] realizaron experimentos con los dos tipos de fluidos de Boger que se presentan en la literatura (PAA/CS) y (PIB/PB). Para el caso del fluido de (PIB/PB) se realizaron experimentos de descenso de esferas en dos diferentes muestras de fluidos, una de las cuales fue añejada durante 8 meses y la otra, fue utilizada inmediatamente después de su preparación. Para el fluido de Boger (PAA/CS) se

---

encontró que el factor de corrección del arrastre aumenta a medida que crece el número de Weissenberg para relaciones de diámetros  $a/R \leq 0.25$ , excepto cuando el valor de  $a/R=0.5$ , donde el comportamiento se considera newtoniano. Para relaciones de  $a/R > 0.5$  se menciona que existe un incremento en el arrastre pero no se muestra una gráfica de los valores medidos de  $K/K_n$  en función del número de Weissenberg. Es importante mencionar que los valores utilizados del tiempo de relajación del fluido de poliacrilamida caen dentro del intervalo de dependencia cuadrática con respecto a  $N_1$ . En las soluciones de (PIB/PB) se observa una ligera disminución en el factor de corrección por arrastre con respecto al valor newtoniano para números de Weissenberg pequeños seguida de un aumento en el factor de corrección para Weissenberg mayores. En el caso de la solución añejada no se observa una reducción del factor de corrección, pero sí se incrementa con el número de Weissenberg y se vuelve independiente de la relación de diámetros esfera-columna para  $a/R \leq 0.15$ . El valor máximo en el factor de corrección para el arrastre aparece cuando el valor de  $a/R=0.2$  y disminuye cuando  $a/R=0.5$ .

Degand et al. [14] hicieron consideraciones para relaciones de diámetros cuando  $a/R \rightarrow 1$  utilizando el mismo fluido de Boger (poliisobutileno en polibuteno) empleado por [2] y una solución adelgazante de poliisobutileno con decalina ( $S_1$ ). Los datos experimentales para el fluido de Boger, muestran que para el caso cuando  $a/R=0.43$  existe muy poca variación del valor de  $K/K_n$  con respecto al número de Weissenberg, al mantener los valores cerca del valor de un fluido newtoniano ( $K/K_n=1$ ). Para la relación  $a/R=0.88$ , en el mismo fluido de Boger, hay una disminución en el arrastre del 17% antes de que se alcance una meseta para  $0.06 < We < 0.1$ . En los datos para el fluido  $S_1$  se alcanza una disminución del 84% en el arrastre para  $We=0.9$  y  $a/R=0.88$ . Debido a que no existe una sustancia con la que se puedan realizar experimentos para números mayores de Weissenberg, los autores realizaron pruebas en un aparato donde se encuentra la esfera fija. Este mecanismo consiste en un flujo generado por presión que pasa por una esfera estacionaria dentro de un tubo cilíndrico. Los resultados muestran una meseta newtoniana para  $We$  pequeños, seguida de una disminución, antes de que se alcance una segunda meseta a valores grandes de  $We$ .

Otros experimentos realizados por Navez [15], para fluidos adelgazantes, muestran que para un valor de  $a/R=0.5$  (fluido al 1% de poliacrilamida) existe una ligera disminución del valor normalizado del factor de corrección  $K/K_n$  a números de  $We$  pequeños que se mantienen cercanos del valor para el caso newtoniano ( $K/K_n=1$ ). Posteriormente, se observa un incremento en el valor de  $K/K_n$  con el crecimiento del número de Weissenberg. Este incremento en el arrastre a medida que aumenta el  $We$  ( $\approx 10$ ) no sólo se debe al propio crecimiento, sino también al aumento de la inercia del fluido. Para el segundo fluido adelgazante (PIB/PB/Decalina) se presenta una meseta inicial seguida de una disminución hasta alcanzar una segunda meseta y finalmente, un aumento en el arrastre para  $We$  grandes.

La reducción del coeficiente de arrastre es una característica peculiar de los fluidos mencionados en la literatura o una característica general de los fluidos elásticos ideales. Una posibilidad consiste en que el valor reportado por Chhabra [11], Mena [12] y Chmielewski [16] esté relacionado con un pequeño, pero no insignificante, nivel de adelgazamiento en los fluidos de Boger preparados a partir de poliacrilamida. Una segunda posibilidad radica en el empleo del solvente utilizado para la preparación del fluido [15]. Por ejemplo, las soluciones de poliacrilamida preparadas con jarabe de maltosa son muy sensibles a cambios en la temperatura y no son muy estables si los experimentos para un fluido dado tienen que realizarse dentro de una escala de tiempo del orden de meses. Asimismo, se puede pensar que la extensibilidad de la poliacrilamida en ciertos solventes sea menor que la de otros polímeros. Se sabe que la poliacrilamida adopta una configuración relativamente extendida con tiempo de relajación pequeño ( $\lambda$ ) en soluciones con concentraciones de sal pequeñas y una configuración enrollada (tiempo de relajación grande), en soluciones con concentraciones altas. Por lo tanto, la extensibilidad de los fluidos de Boger con poliacrilamida es extremadamente sensible a la presencia de iones en los solventes [14].

## 2.4 Zona de agotamiento

Pruebas experimentales demuestran que la velocidad de descenso de esferas que se asientan de manera sucesiva en fluidos elásticos dependen del intervalo de tiempo entre la primera y la siguiente esfera, a menos que el intervalo de tiempo sea lo suficientemente grande como para que se obtengan velocidades terminales constantes. De otra manera, la segunda esfera siempre descenderá más rápido que la primera. Este fenómeno es conocido como la región de agotamiento [12].

Bisgaard (ver ref. [2]) fue probablemente, el primero en reportar que se requiere esperar un tiempo determinado entre cada medición para obtener velocidades de asentamiento reproducibles. En los experimentos realizados en una solución al 1% de poliacrilamida en glicerol (fluido viscoelástico), las esferas son liberadas en intervalos de 10 minutos y su velocidad aumenta cada vez que otra esfera es liberada en el fluido. El incremento en la velocidad terminal de las esferas es igual al 30% de la velocidad de la primera esfera liberada en el fluido. Cuando se liberan en un periodo de 2.5 h la desviación de la velocidad es menor al 2%. Finalmente, el tiempo transcurrido para tener la misma velocidad en cada uno de los experimentos es de 3 h.

Posteriormente, Cho et al. (ver ref. [10]) realizaron experimentos para determinar el tiempo de difusión o el tiempo característico del fluido, que es el intervalo de tiempo entre esferas sucesivas necesario para asegurar que la velocidad terminal de la segunda y las posteriores sea la misma que la de la primera esfera liberada. Los experimentos fueron realizados con una solución de poliacrilamida al 1% (viscoelástico) y para un fluido medianamente viscoelástico de óxido de etileno. Se

---

encontró que la velocidad de asentamiento final en una serie de experimentos con un intervalo de tiempo fijo entre pruebas consecutivas se incrementaba cerca de un 50% cuando el tiempo de liberación entre las esferas subsecuentes disminuía de 30 min a 30 s. Cho sugirió que esta escala temporal es una medida de la difusividad de las moléculas de polímero en el solvente. El efecto de tal difusividad consiste en abrir un camino a través del cual las esferas subsecuentes pasan de manera libre, de tal manera que a medida que se acorta el tiempo entre cada esfera, será más rápido el descenso de las posteriores alcanzando un valor asintótico de la velocidad terminal en estas pruebas. Para el caso de la solución de óxido de etileno, la poca visibilidad de la solución impidió llevar a cabo las observaciones.

Ambeshkar y Mashelkar (ver ref. [10]) investigaron el mismo fenómeno para soluciones acuosas de poliacrilamida. Ellos estuvieron interesados particularmente en la línea de trayectoria de las esferas. Cuando una esfera se mueve a través de un medio viscoelástico se abre o se rompe una estructura local de polímero de alto peso molecular. A medida que la esfera se mueve a través del centro del tubo, el disolvente inmediatamente llena el espacio abierto por la esfera en la región central de tal manera que se forma una concentración relativamente alta de disolvente reduciendo la concentración de polímero en esa región. Entonces, se espera que la baja concentración de moléculas de polímero en el centro del tubo genere gradientes de concentración, lo que provocará que las moléculas de polímero se difundan hacia el centro del tubo. Esencialmente, lo sugerido por Cho es la creación de un gradiente de concentración en el centro del tubo cuando una esfera es liberada. Este gradiente es particularmente nítido en el centro del tubo donde existe una región agotada de moléculas de polímero, mientras que fuera de ésta región, existe otra rica en moléculas. Usando una jeringa colectaron pequeñas muestras del fluido en la cauda de la esfera y posteriormente midieron la concentración de polímero de estas muestras. De acuerdo con sus mediciones no existe un agotamiento de moléculas de polímero en la cauda de la esfera. Como una primera explicación del efecto del tiempo, estos autores mencionan la posibilidad de que exista una pérdida de las interacciones intermoleculares (i.e. enlaces de hidrógeno) en la región de la cauda. Sin embargo, esta explicación fue rechazada posteriormente por ellos mismos cuando observaron el mismo fenómeno tras agregar formamida a la solución, ya que se cree que la adición de formamida destruye los enlaces de hidrógeno [11].

Jones et al. [2] midieron los efectos del tiempo en un fluido de Boger (PIB/PB). Un aumento del 30% en la velocidad terminal se registró para intervalos de tiempo de alrededor de 15 minutos entre cada esfera, tomándole alrededor de 24 horas al fluido para recobrar por completo su estado original. Resulta interesante que los efectos del tiempo únicamente fueron registrados para las soluciones que presentaban cierto añejamiento, mientras que en las soluciones frescas no hubo evidencia de tales efectos. Una posible explicación de este fenómeno se encuentra en la referencia [10], en la cual se comenta que Nieuwkoop midió la viscosidad extensional para una solución similar a la de PIB/PB, encontrando que la viscosidad

---

---

extensional de una solución añejada era considerablemente menor que la de una solución fresca.

En estudios realizados con dos soluciones que presentan un comportamiento parecido al de un gel y que además son consideradas altamente adelgazantes van den Brule y Gheissary muestran que para la primera solución (solución polisacárido) la velocidad de asentamiento aumenta con la frecuencia del número de lanzamientos y le toma alrededor de 30 minutos al fluido recobrar su estado imperturbado. Para la segunda solución (solución de ácido poliacrílico, carbopol) se encuentra que para intervalos de tiempo cortos entre la liberación de esferas (20 s) no hay un cambio significativo en la velocidad de asentamiento de la esfera. Para intervalos de tiempo de 10 minutos entre esferas resultan, en un aumento de la velocidad terminal, alcanzando una meseta después de 6 ó 7 esferas liberadas.

Para intervalos mayores, la velocidad terminal de la esfera se incrementa aún más, mientras que el número de esferas liberadas para alcanzar la meseta disminuye. Posteriormente, realizaron experimentos para observar el efecto que tienen ciertos periodos de tiempo tras arrojar seis esferas y agitar el fluido, para después repetir y comprobar la reproducibilidad del experimento. Observaron que la velocidad de asentamiento de la esfera no disminuye, sino que aumenta en una cantidad considerable. Esto quiere decir que el efecto en la cauda de la esfera no parece amortiguarse y aumenta con el transcurso del tiempo. Los autores lo relacionan con una inestabilidad termodinámica donde las moléculas de polímero se mueven de manera colectiva fuera de la región de la cauda, probablemente por efectos osmóticos. Al fluido le toma cerca de 72 h regresar a su estado imperturbado. Estos resultados dan a pensar que dada la naturaleza de estos fluidos, el tiempo de restauración es más lento debido a que la autodifusión de una molécula de polímero en un gel es extremadamente retardada.

Como se puede ver, el efecto de la zona de agotamiento tiene asociada una escala de tiempo de varios minutos que de ninguna manera se encuentra relacionada con la escala de tiempo de relajación del fluido, que es del orden de segundos. Numerosos mecanismos se han probado para encontrar una explicación a este fenómeno, el más reciente consiste en utilizar la teoría de migración de los dos fluidos. En esta teoría el polímero y el disolvente son considerados como dos medios continuos que se interpenetran entre sí. De esta manera, dos velocidades son introducidas, la velocidad del fluido y la velocidad del disolvente. Sin embargo, algunas de las suposiciones físicas hechas en esta teoría son difíciles de alcanzar.

---

## 2.5 Modelo Bautista-Manero-Puig

El modelo empleado para la predicción de los datos reológicos del polímero asociativo corresponde al modelo Bautista-Manero-Puig (BMP) [22,23], cuyas ecuaciones son las siguientes para la  $i$ ésima contribución al esfuerzo.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^n \underline{\underline{\sigma}}_i \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_i + \lambda_i \left( \underline{\underline{\sigma}}_i, \underline{\underline{D}} \right) \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}} = 2G_{0i} \lambda_i \left( \underline{\underline{\sigma}}_i, \underline{\underline{D}} \right) \underline{\underline{D}} \quad (2.2)$$

$$\lambda_i \left( \underline{\underline{\sigma}}_i, \underline{\underline{D}} \right) = \frac{\eta_i \left( \underline{\underline{\sigma}}_i, \underline{\underline{D}} \right)}{G_{0i}} = A_i^{-1} \lambda_{0i} \quad (2.3)$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{\lambda_i} (1 - A_i) + \frac{1}{G_{0i}} \left( \frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{\infty i}} - A_i \right) \underline{\underline{\sigma}}_i : \underline{\underline{D}} \quad (2.4)$$

donde  $\underline{\underline{\sigma}}$  y  $\underline{\underline{D}}$  son los tensores totales de esfuerzo y de rapidez de deformación respectivamente,  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}$  es la derivada convectiva superior del tensor de esfuerzos y  $\underline{\underline{\sigma}}_i, \lambda_i, \eta_i$  y  $G_{0i}$  representan al tensor de esfuerzos, el tiempo de relajación, la viscosidad y el módulo elástico de corte del modo  $i$  respectivamente.  $A_i$  es un parámetro de estructura y los tiempos  $\lambda_0, \lambda_{\infty}$  y  $\lambda$  son el tiempo de relajación de Maxwell, el tiempo de relajación a altas frecuencias y el tiempo de relajación de estructura respectivamente;  $i$  se refiere al número de modo del espectro de tiempos de relajación.

Cuando  $i$  es igual a 1 el sistema es unimodal y la ecuación (2.2) se convierte en la ecuación convectiva del modelo de Maxwell que a su vez, es una función del escalar  $A$ . Los límites de  $A$  son 1 en flujos lentos y  $\lambda_0/\lambda_{\infty}$  en flujos rápidos,  $k$  es un parámetro de ajuste asociado con la destrucción de la estructura y es interpretado como la constante cinética para el rompimiento de la estructura [17].

La ecuación (2.4) predice los cambios de estructura por consecuencia del flujo, mediante una ecuación cinética que representa los procesos de destrucción y reconstrucción de la estructura polimérica. El primer término de la derecha de la ecuación está relacionado con el proceso de reconstrucción de la estructura, mientras que el segundo se relaciona con el rompimiento de la misma.

Para flujo cortante simple en estado estacionario, la versión unimodal de las ecuaciones (2.2) y (2.4) se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{1 + (\lambda k)(\lambda_0/\lambda_\infty)(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}})}{1 + \lambda k(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}})} \underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \underline{\underline{\sigma}}^\nabla = 2G_0 \lambda_0 \underline{\underline{D}} \quad (2.5)$$

donde la derivada temporal contenida en el término de la derivada convectiva superior es igual a cero. En flujos de pequeña deformación, la ecuación (2.5) se reduce a la ecuación de Maxwell. En flujo oscilatorio de pequeña amplitud, la versión multimodal de la ecuación (2.5) arroja las siguientes expresiones para los módulos de almacenamiento y de pérdida:

$$G' = \sum_{i=1}^n G_{0i} \frac{w \lambda_{0i}}{1 + w^2 \lambda_{0i}} \quad (2.6)$$

$$G'' = \sum_{i=1}^n G_{0i} \frac{w^2 \lambda_{0i}^2}{1 + w^2 \lambda_{0i}} \quad (2.7)$$

La viscosidad de corte cero está expresada por

$$\eta_0 = \sum_{i=1}^n G_i \lambda_i \quad (2.8)$$

En flujo cortante simple el modelo predice, para la versión unimodal, las siguientes expresiones para la fluidez y la primera diferencia de esfuerzos normales:

$$\varphi_{ss} = \frac{1}{2} \left[ - (k \lambda \dot{\gamma}^2 - \varphi_0) + \left( (k \lambda \dot{\gamma}^2 - \varphi_0)^2 + 4 k \lambda \dot{\gamma}^2 \varphi_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.9)$$

$$N_1 = \frac{2 \dot{\gamma} \sigma}{G_0 \varphi_{ss}} \quad (2.10)$$

En flujo cortante simple en estado estacionario, la predicción de la viscosidad multimodal a partir de la ecuación (2.5) es:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \sum_{i=1}^n G_{0i} \frac{[1 + 4 \lambda_{0i}^2 \dot{\gamma}^2]^{1/2}}{2 \lambda_{0i} \dot{\gamma}^2} \quad (2.11)$$

y para la primera diferencia de esfuerzos normales se tiene:

$$N_1 = 2G_i \frac{(1 + \lambda_i^2 \dot{\gamma}^2)^{1/2} - 1}{(1 + \lambda_i^2 \dot{\gamma}^2)^{1/2} + 1} \quad (2.12)$$

## 2.6 Modelo BMP en flujo extensional uniaxial

El modelo consiste en una modificación hecha por Boek et. al. [24] del modelo de Bautista-Manero-Puig en flujo extensional. El modelo se compone de la ecuación general de Maxwell acoplada a una ecuación cinética que toma en cuenta los cambios estructurales ocasionados al flujo en sistemas micelares tipo gusano. El esfuerzo total se compone de la contribución separada del esfuerzo de las moléculas de polímero y del esfuerzo debido al disolvente. Las ecuaciones del modelo BMP son:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_s + \underline{\underline{\sigma}}_p \quad (2.13)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_s = 2\eta_s D \quad (2.14)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_p + \frac{\eta_p}{G_0} \overset{\nabla}{\underline{\underline{\sigma}}}_p = 2\eta_p D \quad (2.15)$$

$$\frac{d\eta_p^{-1}}{dt} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta_p} \right) + \left( \frac{k}{\eta_\infty} \right) \underline{\underline{\sigma}}_p : D \quad (2.16)$$

Al resolver las ecuaciones anteriores para el caso de flujo extensional en estado estacionario, se obtiene la siguiente ecuación:

$$(\phi - \phi_0)(G_0\phi - 2\dot{\epsilon})(G_0\phi + \dot{\epsilon}) = 3\lambda \left( \frac{k}{\eta_\infty} \right) G_0^2 \phi \dot{\epsilon}^2 \quad (2.17)$$

De la que se puede determinar el valor del esfuerzo normal en extensión por medio de la siguiente expresión:

$$N_1 = \frac{\phi - \phi_0}{\lambda(k/\eta_\infty)} + \eta_s \dot{\epsilon} \quad (2.18)$$

Donde

$\phi_0 = \frac{1}{\eta_0}$ ,  $\phi = \frac{1}{\eta_p}$  representa la fluidez del polímero y  $\eta_e = \frac{N_1}{\dot{\epsilon}}$  es la viscosidad extensional.

---

### 3.1 Dispositivo experimental

El dispositivo experimental (Figura 3.1) consiste de un cilindro de vidrio de 120 cm de longitud y 12.7 cm de diámetro interno, que contiene el fluido en el que se harán descender las esferas. Para reducir la distorsión óptica de la imagen, el tubo cilíndrico se encuentra dentro de un tanque rectangular de vidrio de 150 cm de altura y 20.5 cm de longitud en sus caras que contiene un fluido ( $H_2O$ ) con un índice de refracción similar al del material de construcción del tanque (vidrio).

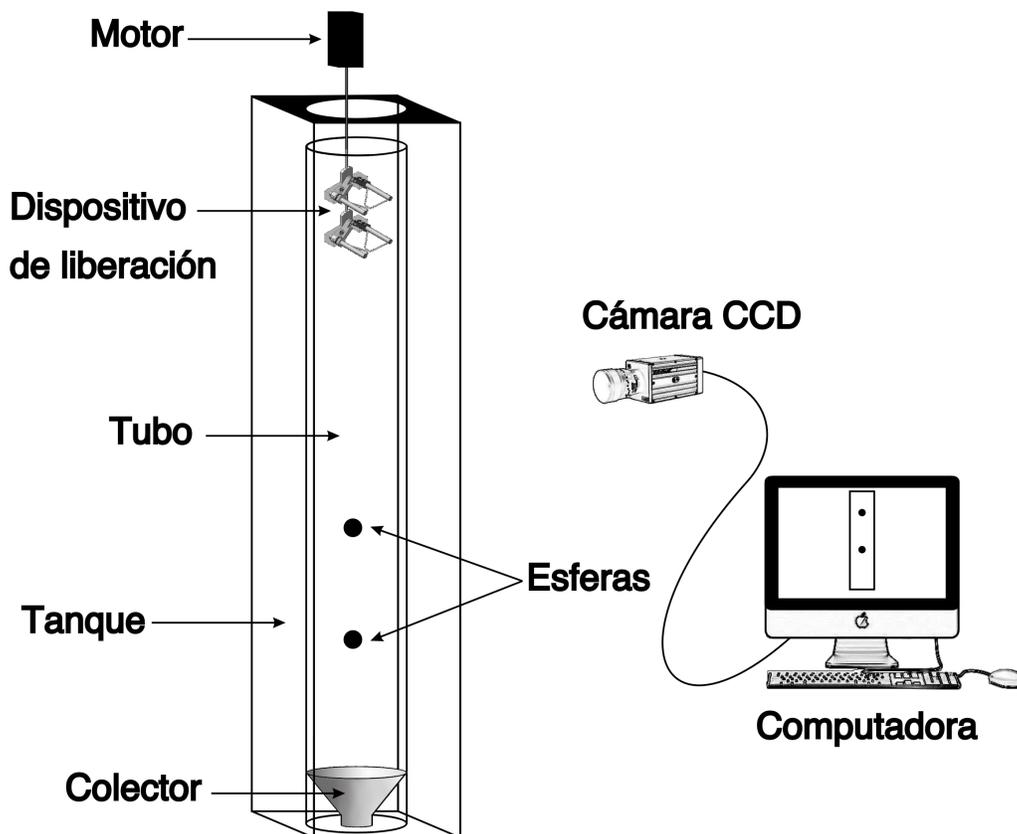


Figura 3.1 Esquema dispositivo experimental.

El liberador de esferas está colocado en la parte superior del tubo cilíndrico y las esferas son soltadas en el centro del tubo por debajo de la superficie del fluido. Para evitar la adhesión de burbujas de aire y de una capa superficial rígida que se forma en la superficie del fluido, se deja que las esferas descendan 20 cm posteriormente se inicia el registro de datos. El fluido se dejó reposar 20 minutos antes de realizar un experimento.

Los experimentos fueron grabados con una cámara de alta velocidad Redlake MotionPro X4 a 60 cuadros por segundo. Las imágenes fueron almacenadas digitalmente en una computadora y analizadas en Matlab® con un programa para seguimiento de imágenes consecutivas, a partir de las cuales se puede ir obteniendo la posición y el tiempo de cada esfera, para posteriormente calcular la velocidad terminal correspondiente.

### 3.2 Dispositivo liberador de esferas

El dispositivo liberador de esferas (Figura 3.2) cuenta con dos pinzas una fija y otra móvil. Cuentan con un tornillo de ajuste para calibrar su apertura; de tal modo que las esferas puedan ser colocadas y el movimiento de la pinza de sujeción provoque la menor perturbación en el fluido y además, evitar así la rotación o desplazamiento de las esferas.

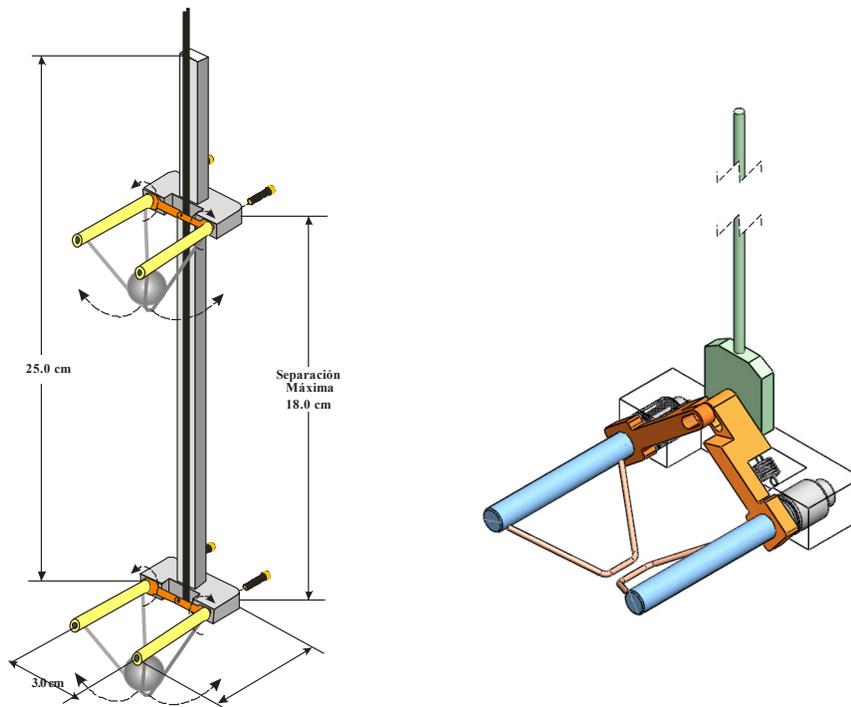


Figura 3.2 Mecanismo de liberación de esferas. Izquierda: Liberador de esferas, derecha: Detalle pinza.

El dispositivo fue diseñado en acero inoxidable ya que el ambiente de trabajo es en medios alcalinos que provocan la formación de sales y por lo tanto, de óxido. También se eligió este material para evitar deformaciones a consecuencia del manejo del dispositivo.

La pinza superior se puede colocar a diferentes alturas, lo que permite tener un tiempo de separación entre esferas suficiente para observar los efectos sobre la esfera posterior. La razón de separación dada por el diseño es desde 0.1 cm hasta 18 cm de separación; para este estudio se utilizó una separación máxima entre centros de esferas de 8 cm.

El sistema trabaja de la siguiente manera: el soporte del dispositivo contiene un eje interior que conecta las dos pinzas por el eje de rotación, el eje interior a su vez está conectado a un motor. Al accionar el motor, éste jala el eje interior hacia arriba, lo que provoca la apertura de las pinzas. Al terminar el experimento se suspende la acción del motor y los resortes colocados en los ejes de rotación se contraen, provocando que el eje interior regrese a su posición y las pinzas se cierren. Todo el mecanismo anterior se encuentra alineado en la parte superior de la columna de liberación con el tubo cilíndrico que contiene al fluido de prueba. Esto es una condición muy importante cuando se emplean fluidos viscoelásticos; ya que si la esfera es liberada en la cercanías de la pared, se ejerce una fuerza horizontal sobre ella en dirección de las paredes del tubo.

### 3.3 Descripción del experimento

El experimento se llevó a cabo de la siguiente manera: se ajusta la pinza superior con la separación deseada respecto a los centros de las esferas, se coloca el aparato dentro del tubo y se alinea con ayuda de los niveles colocados en el liberador de esferas. Se colocan las dos esferas con ayuda de una pinza larga delgada, (construida con ese propósito) con mucho cuidado para evitar la formación de burbujas. A partir de este momento el fluido se deja reposar por 15 minutos. Pasado ese tiempo se inicia el experimento permitiendo que las esferas descendan 20 cm para que alcancen el estado estacionario y se inicia la toma de imágenes. Se obtuvieron imágenes a lo largo de 40 centímetros del tubo, distancias posteriores se descartaron, ya que así, se pueden descartar los efectos causados por el fondo del tubo. Al terminar de sedimentar las esferas se cerraron las pinzas y se colocó un nuevo par de esferas para iniciar nuevamente el reposo y el experimento en sí.

Las primeras pruebas fueron para las esferas individuales, seguidas de los experimentos con las esferas consecutivas empezando con la distancia de separación ( $d_i$ ) más grande (8 cm) hasta la más pequeña (2 cm). Es importante, indicar que las pruebas se realizaron de mayor a menor densidad y de mayor a menor diámetro.

---

### 3.4 Velocidades de sedimentación

Las velocidades de sedimentación  $U(t)$  se obtienen por la diferencia de las posiciones medidas en  $z_i = z(t_i)$ . Para esto se usa la siguiente fórmula para diferencia central:

$$U_i(t) = \sum_{n=1}^m \frac{(z_{i+n} - z_{i-n})}{2n\Delta t} \quad (3.1)$$

Donde  $\Delta t$  es el incremento del tiempo entre datos sucesivos. Para un incremento en el valor del entero  $m$ , la amplificación de ruido experimental se reduce. De cualquier manera, la velocidad obtenida con la fórmula de diferencia central es la velocidad promedio de la esfera entre dos puntos. Como consecuencia, cuando la aceleración de la esfera no es constante, la fórmula de diferencia central provoca un error que se incrementa con el aumento de  $m$  [3].

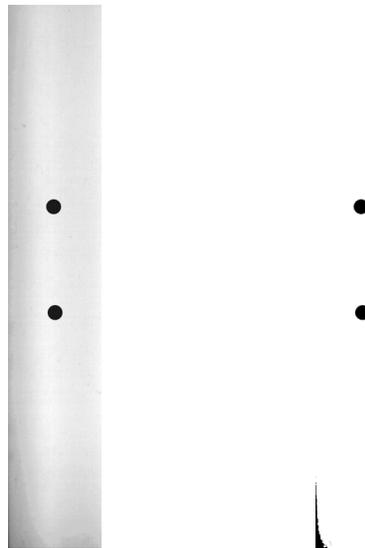


Figura 3.3 Análisis de imágenes. Izquierda: Imagen adquirida con la cámara de alta velocidad, derecha: Imagen analizada por Matlab®.

### 3.5 Propiedades de las esferas

Para obtener un intervalo de velocidades de descenso de esferas y de relaciones de radio esfera-tubo ( $a/R$ ), se utilizaron esferas de tres diferentes tamaños y densidades. Las propiedades físicas de las esferas se muestran en la tabla 3.1.

Tabla 1. Propiedades físicas de las esferas.

Material	Densidad (g/cm <sup>3</sup> )	Diámetro (cm)			$a/R$		
Acero	7.9800	0.7937	0.9525	1.2700	0.0625	0.0750	0.1000
Teflón	2.3000						
Acetal	1.3900						

Los números adimensionales relevantes son el número de Weissenberg ( $We$ ) y el número de Reynolds ( $Re$ ) definidos como:

$$We = \frac{\lambda U}{a} \quad (3.2)$$

$$Re = \frac{aU\rho}{\eta(\dot{\gamma})} \quad (3.3)$$

Se define la rapidez de corte característica del flujo como

$$\dot{\gamma} = \frac{U}{a} \quad (3.4)$$

Donde  $\lambda$  es el tiempo de relajación del fluido que corresponde al inversión de la frecuencia de cruce entre el módulo de almacenamiento ( $G'$ ) y el módulo de pérdida ( $G''$ ),  $a$  es el radio de la esfera,  $U$  es la velocidad terminal,  $\rho$  es la densidad de la esfera y  $\eta(\dot{\gamma})$  es la viscosidad de corte.

### 3.6 Preparación del fluido

HASE (por sus siglas en inglés, Hydrophobic Alkali-Soluble Emulsion) es un polímero asociativo obtenido en una suspensión al 30% en peso y a un pH de 3. A bajos valores de pH el HASE no es soluble en agua; se vuelve soluble a pH mayor a 6. Si el pH se incrementa las interacciones hidrofóbicas a su vez se incrementan.

Como consecuencia la viscosidad aumenta hasta un pH alrededor de 9, que es cuando alcanza su valor máximo. Por encima de este valor de pH la viscosidad decrece.

El fluido asociativo se preparó mezclando 0.950 litros de HASE (Primal TT-935, Rhom and Haas) al 30% en peso en 17 litros de agua destilada, obteniendo una solución al 1.5% concentración en peso. Para ajustar el pH de la solución a 9, se utilizó una disolución alcalina de AMP (2-amino-2-metil-1-propanol, Aldrich) 0.5 M. Posteriormente, se realizó una agitación mecánica suave de la mezcla para evitar la degradación de las cadenas del polímero. Ya que el proceso de agitación llegó a su fin, se dejó reposar durante 48 horas, para después repetir una vez más el proceso de agitación y de reposo, hasta alcanzar la homogeneización de la mezcla.

### 3.7 Caracterización reológica

La caracterización reológica de los fluidos se realizó en un reómetro de esfuerzo controlado AR 1000-N de T.A. Instruments. Este reómetro puede generar rapidez de corte desde  $0.001 \text{ s}^{-1}$  hasta  $10000 \text{ s}^{-1}$ . El esfuerzo normal mínimo que puede detectar el instrumento es de  $10^4 \text{ Pa}$ .

Se realizaron mediciones de flujo cortante simple para obtener las funciones de viscosidad y las de flujo de corte oscilatorio, para determinar los módulos de almacenamiento y de pérdida; tales mediciones fueron llevadas a cabo mediante el empleo de una geometría de cono y plato de 4 cm de diámetro y un ángulo de  $1.5914^\circ$ . Este tipo de geometría es muy útil para estas mediciones ya que sólo se requiere de una pequeña cantidad de muestra. Además, la distancia de separación entre el cono y el plato se encuentra establecida por el ángulo del cono, dando como resultado un flujo homogéneo entre el cono y el plato, a diferencia de otras geometrías como la de platos paralelos.

Antes de realizar cualquier tipo de medición reométrica, se debe garantizar que la muestra de fluido colocada en el plato no contenga burbujas de aire ya que éstas alteran las mediciones de viscosidad. La caracterización reológica de la solución se llevó a cabo con muestras de aproximadamente 0.58 mL del fluido.

Antes de comenzar las pruebas, tanto de flujo cortante simple como oscilatorio, se aplicó al fluido un precorte para garantizar un estado de esfuerzos uniforme. Para confirmar que se alcanza el estado estacionario en este tipo de pruebas y asegurar que los valores de la viscosidad son los correctos en las condiciones de operación del equipo, se establecen dichos valores como parámetros de operación la comparación de tres mediciones de esta propiedad. En ellas, el esfuerzo de corte generado por el equipo se mantiene constante durante un tiempo de medición de 10 segundos para cada una, permitiendo un error máximo de medición del 2%. Una vez obtenidas las tres mediciones, el equipo entrega el valor promedio de las

viscosidades, garantizando así valores confiables de la viscosidad en estado estacionario.

Para las pruebas de flujo oscilatorio se realizó un barrido del porcentaje de deformación de la muestra antes del barrido de frecuencias para obtener los valores de los módulos. Esto se hace para asegurar que posteriormente, en el barrido de frecuencias, se esté trabajando dentro de la zona de deformación lineal del fluido; es decir, el intervalo en el cual los módulos de almacenamiento y de pérdida son independientes de la deformación, ya que los experimentos que no se realicen dentro de esta zona pueden dar lugar a interpretaciones erróneas de los resultados obtenidos.

En la figura 3.4 se muestra la viscosidad de corte y la primera diferencia de esfuerzos normales para HASE 1.5% en peso en función de la rapidez de corte, junto con las predicciones del modelo BMP. En este tipo de fluidos es común encontrar dos diferentes tipos de regiones: para valores pequeños de la rapidez de corte se observa una región de viscosidad constante, este intervalo de rapidez de corte en la figura 3.4 comprende de 0.01 a  $2 \text{ s}^{-1}$ ; rapidezces de corte altas dan pie a una región de adelgazamiento del fluido con respecto a la rapidez de corte, esto se asocia a un rompimiento de las asociaciones formadas ( $\dot{\gamma} > 2 \text{ s}^{-1}$ ).

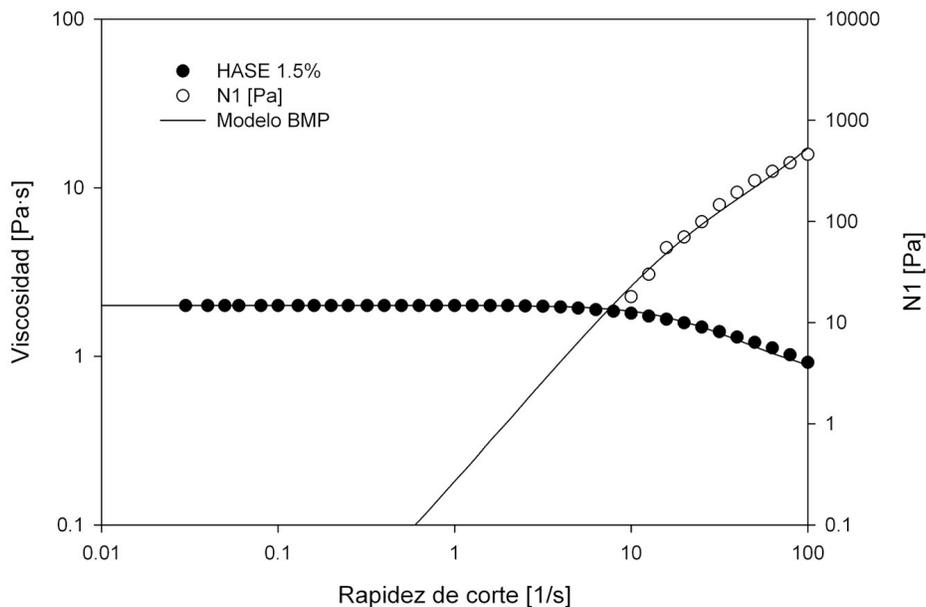


Figura 3.4 Viscosidad de corte, primera diferencia de esfuerzos normales y predicciones del modelo BMP para HASE 1.5%.

En la figura 3.5 se pueden observar los resultados de la prueba de flujo oscilatorio, que se realizó a  $22 \text{ }^{\circ}\text{C}$  en un intervalo de frecuencias de  $0.1\text{-}100 \text{ s}^{-1}$ . En ellos se puede notar que las interacciones intramoleculares predominan en este tipo de sistemas, lo que se interpreta como resultado de que la magnitud de  $G''$  es mayor

que la de  $G'$ . A altas frecuencias, el módulo elástico es proporcional al número de entrecruzamientos físicos que el sistema tiene (una combinación de interacciones intramoleculares e intermoleculares), ya que  $G'$  indica la densidad de uniones entre las cadenas de polímero en la red polimérica. En la misma figura se muestran los resultados del modelo BMP que concuerdan con el comportamiento observado experimentalmente.

Tabla 3.2. Parámetros del modelo BMP en flujo cortante simple.

<i>HASE 1.5 % peso</i>				
$\phi_0$	$\phi_\infty$	$k$	$\lambda$	$G_0$
0.5	1.4	0.005	0.05	30

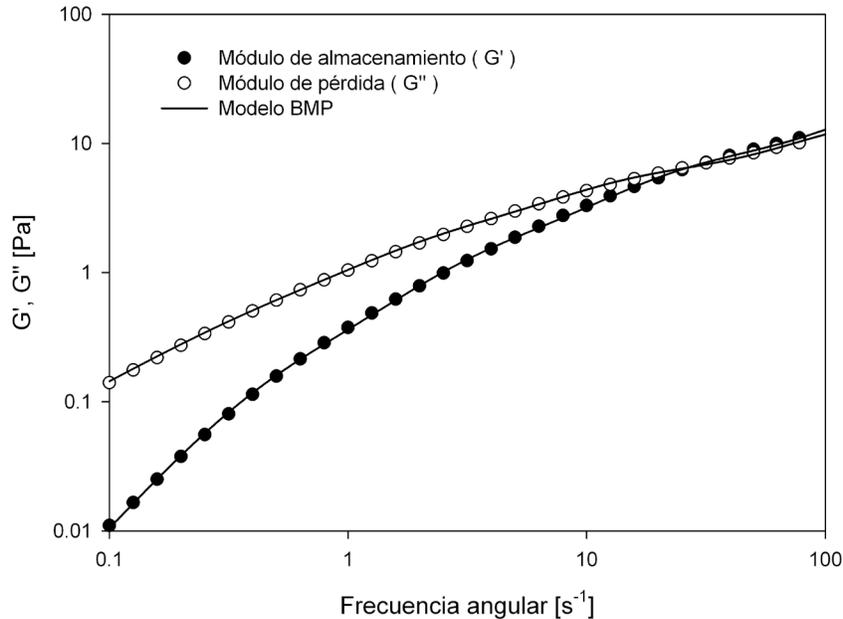


Figura 3.5 Módulos de almacenamiento, pérdida y predicciones del modelo de Maxwell multimodal para HASE 1.5 % peso.

La tabla 3.2 y 3.3 muestran los parámetros del modelo BMP y de Maxwell multimodal utilizados en las ecuaciones 2.7-2.10. El único parámetro de ajuste es la constante  $k$ , el resto de los valores se obtiene del comportamiento reológico del fluido.

Tabla 3.3. Parámetros del modelo de Maxwell multimodal en flujo oscilatorio.

<i>HASE 1.5 % peso</i>		
$i$	$G_0$	$\lambda_i$
1	18.8400	0.01148
2	3.8730	0.10780
3	0.7223	0.44600
4	0.2801	1.20700
5	0.04728	3.41800

Con estos parámetros es posible obtener las gráficas para el comportamiento del fluido en flujo extensional haciendo uso de las ecuaciones 2.17 y 2.18.

En la figura 3.6 se muestran las predicciones hechas con el modelo Bautista-Manero-Puig en flujo cortante simple con las predicciones en flujo extensional uniaxial para el fluido empleado. La viscosidad extensional permanece constante hasta tres décadas de la rapidez de extensión.

Por otro lado, para ciertos valores el aumento en la viscosidad es aproximadamente a la misma rapidez de deformación a la que ocurre el adelgazamiento en flujo cortante simple.

Lo anterior indica que la estructura o red polimérica del HASE sufre una transición. A valores pequeños de la rapidez de extensión predominan las asociaciones intramoleculares; mientras que a valores moderados, son las asociaciones intermoleculares las que se manifiestan en un aumento de la viscosidad de extensión.

Para valores grandes de la rapidez de extensión, la fuerza de deformación rompe los enlaces intermoleculares, dando pie a una disminución de la viscosidad extensional. Se debe recalcar que debido a que el flujo extensional deforma el sistema, de manera más drástica que en flujo cortante simple, el incremento de la viscosidad extensional es muy pronunciado, lo que se puede observar perfectamente en el intervalo de 2 a 50 s<sup>-1</sup> en la figura 3.6.

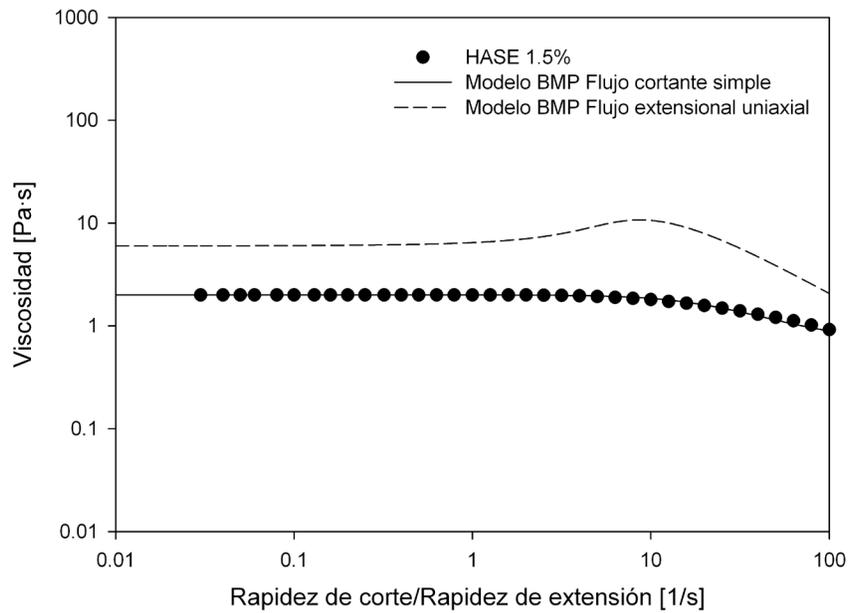


Figura 3.6 Predicciones del modelo BMP en flujo de corte simple y en flujo extensional uniaxial.

Debido a la falta de mediciones de viscosidad extensional y demostrar la validez de las predicciones del modelo BMP en flujo extensional, los resultados del modelo son comparados con datos experimentales tomados de Tan et al. [19] (Figura 3.7).

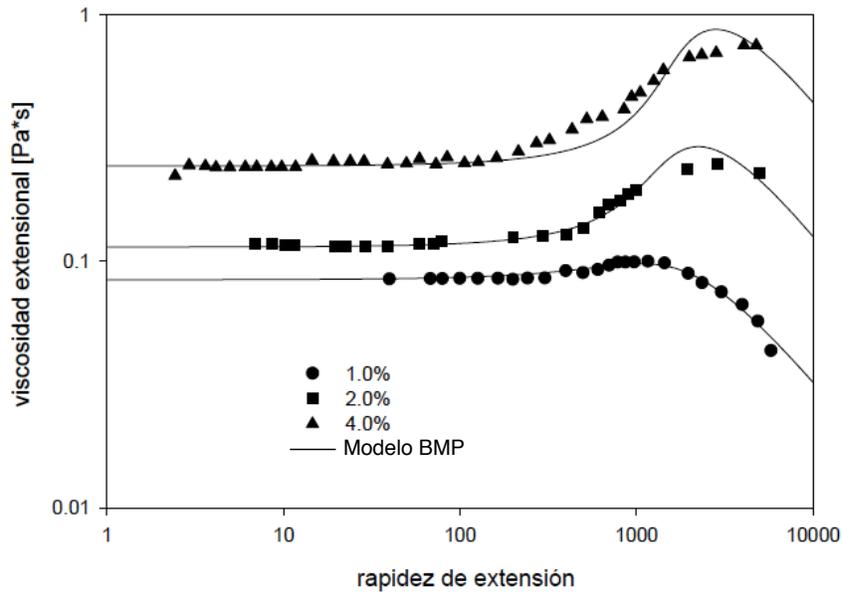


Figura 3.7 Predicciones del modelo BMP en flujo extensional uniaxial y datos experimentales [19].

## 3.8 Condiciones de referencia

En la sección 3.3 se describió el desarrollo experimental, en resumen: las esferas son colocadas en el liberador de esferas, tras 15 minutos, por lo tanto, el tiempo cero ( $t=0$ ) corresponde al momento antes de que las esferas sean liberadas y la distancia inicial ( $d_{ii}$ ) corresponde a la distancia de separación establecida en el dispositivo de liberación.

Sin embargo, en la mayoría de los estudios realizados en sedimentación de esferas se ha reportado que existe una perturbación producida por el aparato de liberación [12, 2, 3, 20, 21] y este estudio no es la excepción. La esfera delantera (primera) está sujeta a la perturbación producida por la pinza inferior, provocando un aumento en la velocidad, después de un tiempo alcanza su estado estacionario. De acuerdo con lo reportado este efecto no repercute en la fiabilidad de los resultados obtenidos. Continuando con el mismo análisis, se puede inferir que la segunda esfera estará sometida a una serie de efectos producidos por el dispositivo de liberación que provocarán cambios tanto en su velocidad como en la distancia de separación inicial entre esferas, esto puede llevar a interpretar de manera errónea los datos.

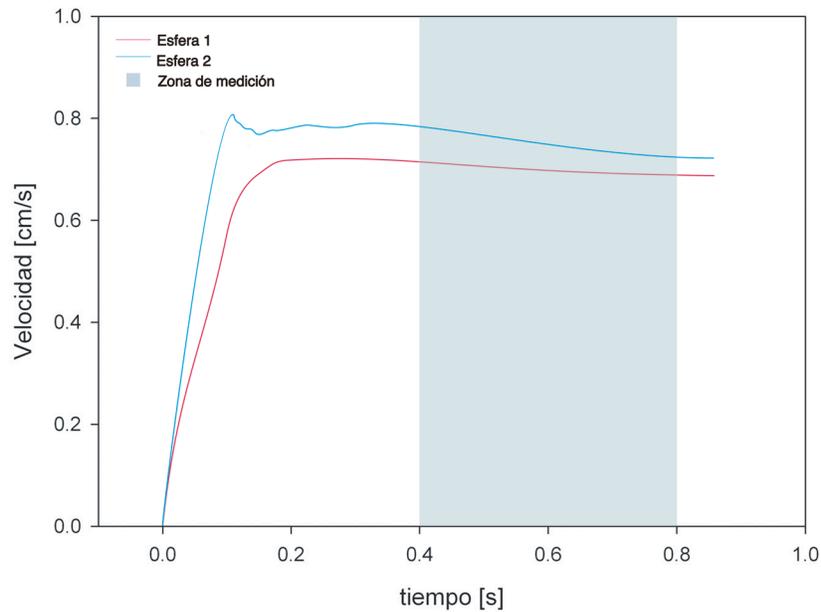
Para la segunda esfera las perturbaciones que afectan su movimiento son:

El desplazamiento del fluido por la pinza provoca un incremento en la velocidad de la esfera, esto es, el movimiento de la primera esfera puede tener influencia sobre la esfera posterior desde el instante en que son liberadas. Finalmente, cuando la segunda esfera pasa a través de la primera pinza, existe el efecto que dejó el movimiento de la pinza. Estas suposiciones se vieron reflejadas en los resultados experimentales donde la distancia inicial a la cual fueron soltadas fue afectada.

Esto lleva a establecer un nuevo tiempo cero donde el efecto del dispositivo ya no sea cuantificable. Daugan et al. [20] le llaman a esta etapa "zona libre de influencias de pared" y ellos establecen el origen del tiempo al primer instante en el cual las partículas están en dicha zona.

En la figura 3.8 se muestran los perfiles de velocidad para las dos esferas que se esperaba se observarían si las mediciones fueran hechas a partir del momento en que se liberan. El efecto provocado por el dispositivo de liberación se muestra en un rápido incremento en la velocidad, seguido de una disminución junto con una serie de inestabilidades, hasta que se alcanza el estado estacionario. De acuerdo al análisis las perturbaciones son más evidentes sobre la segunda esfera donde el incremento inicial en la velocidad es muy grande y las oscilaciones son más notorias. La zona sombreada corresponde a la región donde los datos experimentales fueron obtenidos, por lo tanto al no tener la historia previa de la velocidad, aunado al efecto del dispositivo analizado con anterioridad, fue

necesario definir el tiempo cero para las esferas individuales y para las esferas consecutivas.



*Figura 3.8 Perfil de velocidad típico para esferas sedimentando en un fluido adelgazante. La parte sombreada corresponde a la zona de medición de este estudio.*

Para las esferas individuales el tiempo cero corresponde al momento exacto en el que el primer dato experimental es obtenido, i.e. cuando entra en el campo visual de la cámara (región sombreada), esto se puede ver en la figura 3.9 d.

Por otro lado, en las esferas consecutivas el tiempo cero se establece cuando ambas están dentro de la región sombreada y la separación entre los centros de las esferas se toma como la distancia inicial ( $d_i$ ), ya que ésta es particular de cada experimento, y por ello, se usará la distancia de arranque (Figura 3.10 a) para catalogar los experimentos ( $d_{ii}$ ).

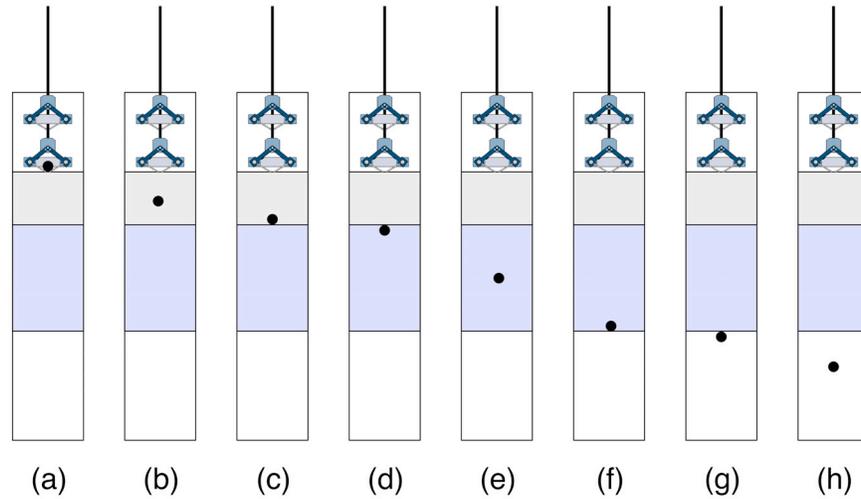


Figura 3.9 (a) esfera individual en la posición inicial, (b) esfera descendiendo en el fluido, (c) esfera un instante antes de iniciar la toma de datos, (d) esfera individual entrando a la zona de medición (área sombreada) este punto es donde se considera  $t=0$  para las esferas individuales, (e) zona de medición, (f) representa el momento donde es tomado el último dato, (g) instante posterior al finalizar la toma de datos, (h) no se toman datos de esta zona.

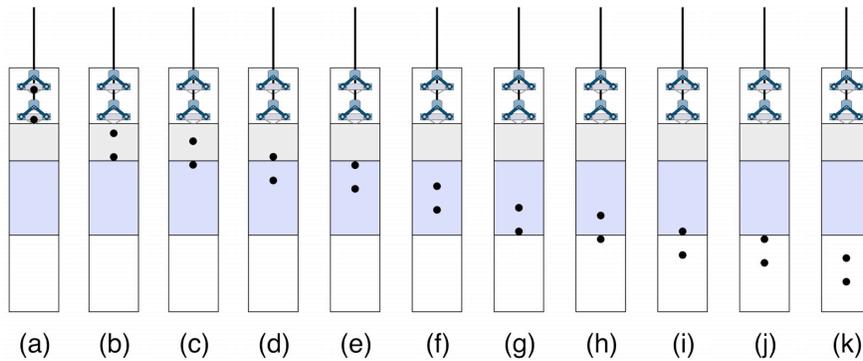


Figura 3.10 (a) Par de esferas en la posición inicial la distancia entre esferas es  $d_{ii}$ , (b) esferas descendiendo en el fluido, (c) inicio de toma de datos de la primera esfera (d) esfera posterior entra a la zona de medición, (e) en este punto es donde se establece  $t=0$  para ambas esferas y se establece la distancia de separación  $d_i$ , (f) esferas en zona de medición, (g) representa el momento donde es tomado el último dato para la esfera líder, (h) instante posterior al finalizar la toma de datos de la primera esfera, (i) representa el momento donde es tomado el último dato para la esfera posterior, (j) instante posterior al finalizar la toma de datos, (k) no se toman datos de esta zona.

## 4.1 Velocidad de sedimentación de esferas individuales

Para poder comparar el comportamiento de las esferas cuando son lanzadas una detrás de otra, primero es necesario analizar el descenso de esferas individuales.

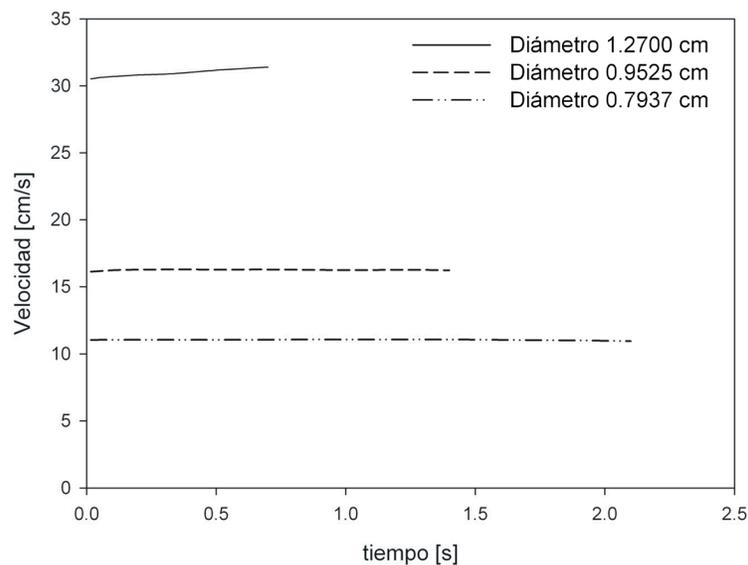


Figura 4.1 Velocidad vs tiempo para esferas de acero ( $\rho_s = 7.98 \text{ g/cm}^3$ ) y los tres diámetros empleados.

En la figura 4.1 se presentan los resultados para las esferas de acero. Se aprecia que no hay efectos con respecto al tiempo en las velocidades para las esferas de 0.9525 cm y 0.7937 cm de diámetro y que alcanzan el estado estacionario. No obstante, para la esfera de diámetro 1.2700 cm es evidente que su velocidad continúa creciendo y no alcanza el estado estacionario, por esta razón es descartada para ser usada en los experimentos de esferas consecutivas.

En las figuras 4.2 y 4.3 se muestran las velocidades para esferas de teflón y acetal respectivamente. La velocidad es constante sin perturbaciones pero debe hacerse notar que para diámetros de 1.2700 cm se aprecia que en el último tercio de su desplazamiento existe una caída en la velocidad esto es debido a las fronteras

físicas del recipiente que están dentro de los últimos 40 cm del tubo de sedimentación.

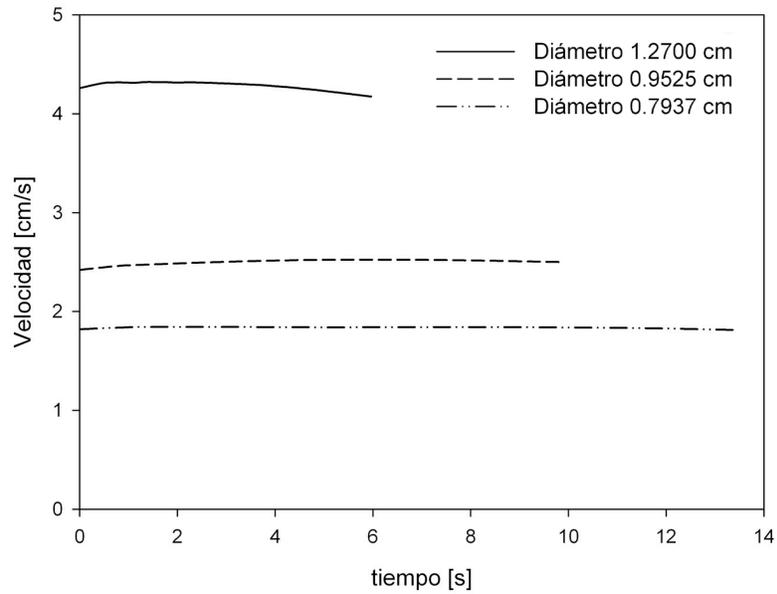


Figura 4.2 Velocidad vs tiempo para esferas de teflón ( $\rho_s = 2.30 \text{ g/cm}^3$ ) y los tres diámetros empleados.

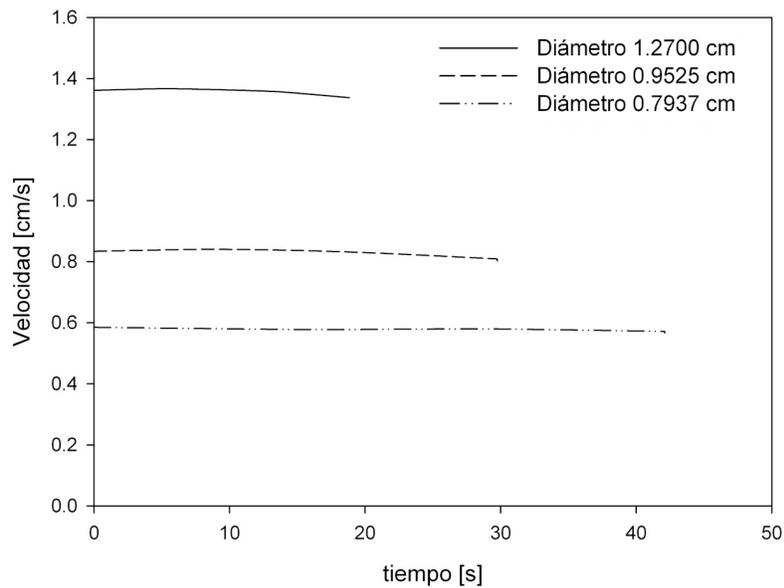
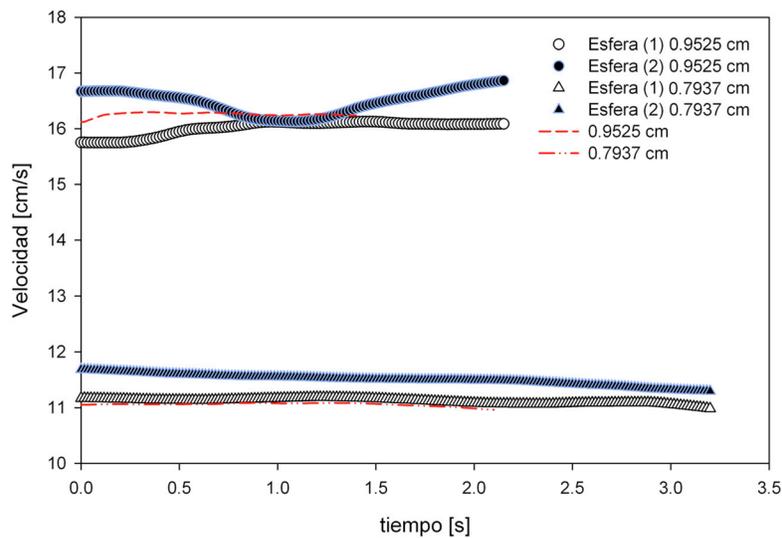


Figura 4.3 Velocidad vs tiempo para esferas de acetone ( $\rho_s = 1.39 \text{ g/cm}^3$ ) y los tres diámetros empleados.

## 4.2 Velocidad de sedimentación de esferas consecutivas

En este apartado se presentan los resultados obtenidos de las velocidades para dos esferas consecutivas en HASE 1.5% peso. El experimento se desarrolló como se explica en el capítulo 2. Los datos presentados en esta sección representan los valores cuando las dos esferas estaban dentro del área de análisis del tubo de sedimentación, por lo tanto, se despreciarán los valores de inicio y final de la prueba, es decir, cuando sólo hay una esfera en la toma inicial y final.



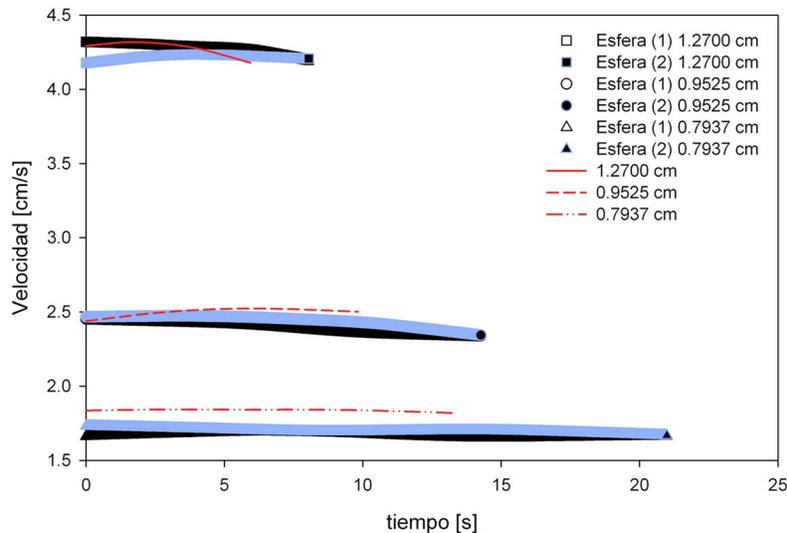
*Figura 4.4 Velocidad de esferas consecutivas de acero, separación inicial 8 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.*

Analizando las esferas de acero y de diámetro 0.9525 cm (figura 4.4) cuando son liberadas a 8 cm de separación entre sus centroides, al inicio se ve una etapa de velocidad constante, siendo la velocidad de la segunda esfera más grande que la de la primera; alrededor de 0.6 segundos de haber iniciado la captura de datos la segunda esfera disminuye su velocidad, mientras la primera esfera acelera hasta alcanzar una etapa donde la velocidad es constante, es decir, aproximadamente tiene el mismo valor para ambas. Esto casi siempre se mantiene por 0.6 segundos y después inicia un nuevo incremento en la velocidad de la segunda esfera, mientras que la primera permanece sin variaciones importantes. Debe decirse también, que la velocidad que alcanzan las dos en ese intervalo de estabilidad es muy cercano a la velocidad de la esfera individual.

Las posiciones de las esferas en ese intervalo de estabilidad relativa al tubo son 19.2941 cm para la primera esfera y la segunda se encuentra a 13.1212 cm. Cuando comienza a incrementarse la velocidad de la segunda esfera, se encuentran a 32.1655 cm y la segunda a 26.0953. Lo anterior es interesante, ya que para el siguiente par de esferas se aprecia que la velocidad de la segunda,

decae lentamente hasta alcanzar el valor más cercano entre sus velocidades, esto a aproximadamente 2.7 segundos. Las posiciones de las esferas respecto a la vertical del tubo son 32.8521 cm y 26.2426 cm, valores muy cercanos en que se observó el cambio de la velocidad en la esferas de diámetro 0.9525 cm, es decir, el final del intervalo de estabilidad.

Lo anterior puede indicar que a dicha distancia se manifiestan los efectos del fondo del tubo de sedimentación, esto ya había sido notado en el análisis para esferas individuales donde se observó una disminución de la velocidad.



*Figura 4.5* Velocidad esferas consecutivas de teflón, separación inicial 8 cm; líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

En el caso del descenso de esferas de teflón, presentadas en la figura 4.5 se obtuvieron velocidades de sedimentación similares para diámetros de 0.9525 y 0.7937 cm. Para este último, no se observa el efecto del fondo, a diferencia de los otros dos diámetros. En el descenso de esferas de teflón con diámetro de 1.27 cm la caída de velocidad y el aumento ocurre a los 4.55 s y a la posición de la primera esfera de 19.0615 cm y para la segunda a 8.4315 cm. Estos valores representan la posición del centro de la esfera, es decir, que respecto a la distancia inicial de separación a la que se liberaron las esferas, éstas se han separado 2.63 cm.

En la figura 4.6 se muestran los resultados para esferas de acetal. En general las velocidades para los tres diámetros empleados están por debajo de la velocidad obtenida para las esferas individuales. Sin embargo, se aprecia que para los diámetros de 0.9525 y 0.7937 cm la velocidad de la segunda es prácticamente igual a la de la primera esfera. No se observan los efectos del fondo del tubo para estos diámetros, no así, para el diámetro más grande cuya velocidad de traslación resultó afectada por los efectos que aparecen cuando la primera esfera está a una posición de 20.5979 cm y la segunda se encuentra a 11.4615 cm. Con estas

evidencias, podemos decir a priori, que el efecto del fondo del tubo se manifiesta conforme aumentan el diámetro y la densidad de la esfera.

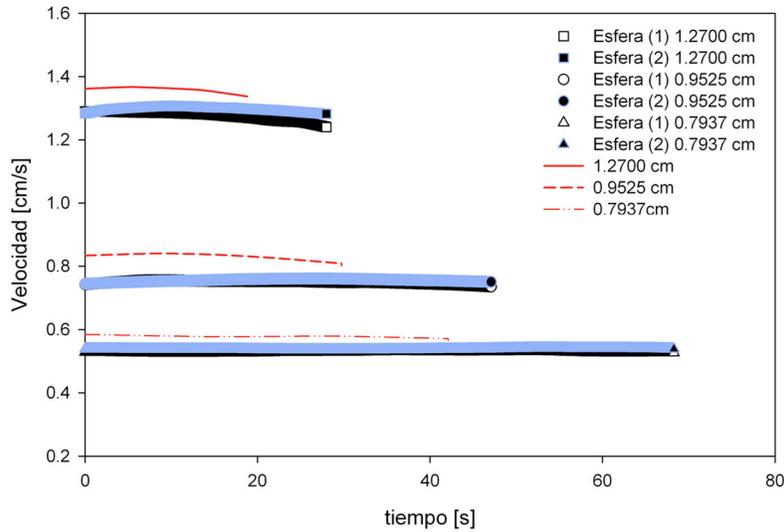


Figura 4.6 Velocidad esferas consecutivas de acetato, separación inicial 8 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

Cuando las esferas se encuentran muy cerca, la esfera posterior comienza a empujar a la delantera produciendo un aumento considerable en la velocidad, esto se observa en la figura 4.7. Contrario a lo que sucede cuando las esferas se sueltan a 8 cm de separación y existe una zona de estabilidad; en esta serie no se presenta y desde las primeras etapas se muestra un incremento en la velocidad de ambas esferas. Se sabe que este tipo de esferas generan cauda negativa [1], así en este momento se podría suponer que la causa de la aceleración de la segunda esfera es porque esta última es atrapada en la cauda de la primera, acelerando y eventualmente alcanzándola. Este resultado ha sido previamente obtenido en soluciones de poliácridamida por Liu y Joseph [8].

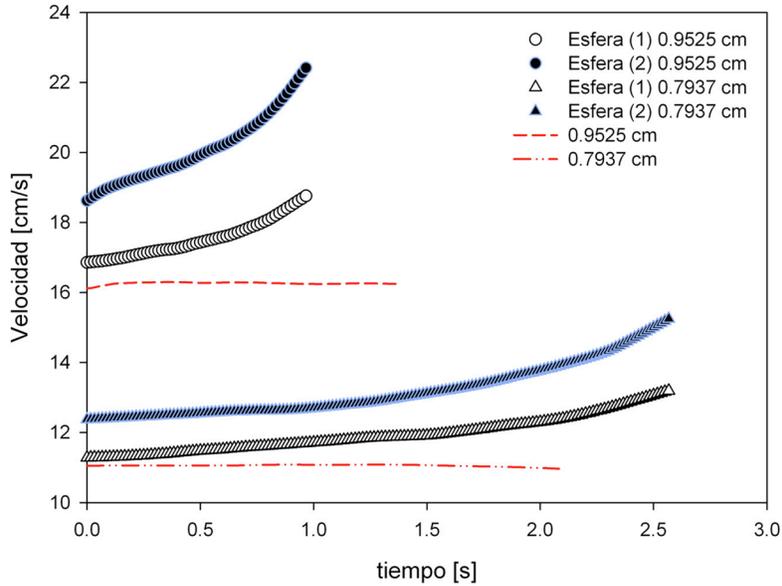


Figura 4.7 Velocidad esferas consecutivas de acero, separación inicial 6 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

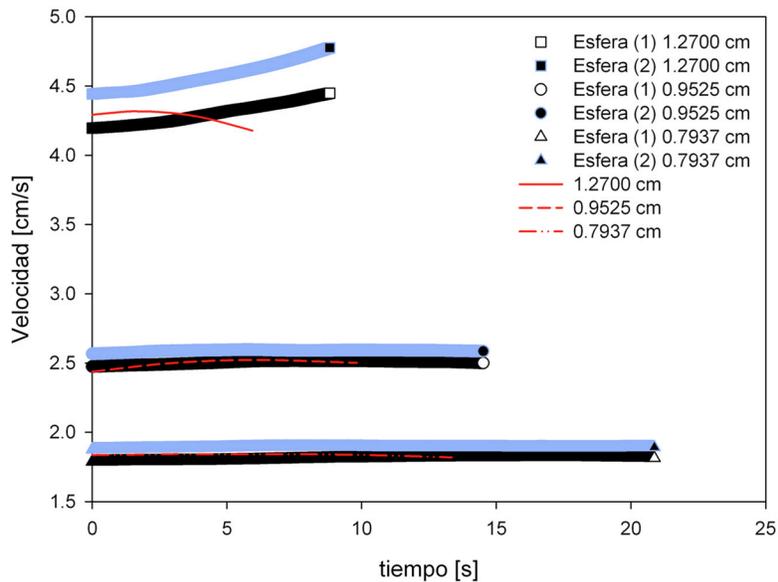
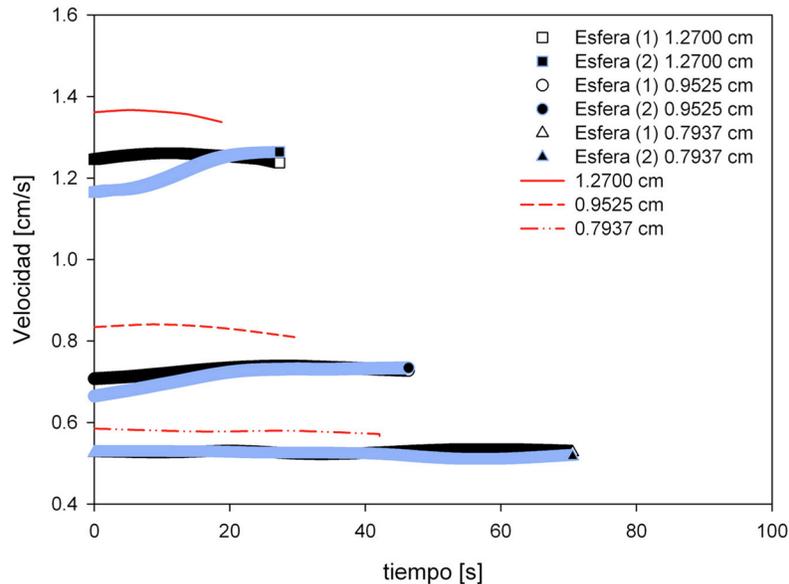


Figura 4.8 Velocidad esferas consecutivas de teflón, separación inicial 6 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

Para las esferas de diámetros menores, presentadas en la figura 4.8, la velocidad de la primera esfera es igual a la velocidad de sedimentación de la esfera individual y la de la segunda es mayor. Esto quiere decir que la hipótesis de que la segunda esfera impulsa a la primera no es válida para este caso, ya que aún no se aprecia tal efecto. Por otro lado, estas esferas no generan cauda de acuerdo al estudio realizado por [1]. Sin embargo, se puede percibir un aumento en la velocidad de la

segunda esfera. En las esferas de 1.27 cm de diámetro hay una enorme interacción entre ellas, que se hace evidente en el rápido crecimiento de la velocidad. Donde se aprecia el incremento de la pendiente de las esferas cuya separación entre centroides es de aproximadamente 5 cm, es decir, su distancia se ha reducido 1 cm.



*Figura 4.9 Velocidad esferas consecutivas de acetal, separación inicial 6 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.*

Las esferas de acetal son las de menor densidad utilizadas en este estudio, por lo tanto, presentan velocidades muy bajas, esto se traduce en que la perturbación sobre el fluido es mínima. Se esperaría que las velocidades de ambas esferas fueran iguales y que la distancia inicial se mantuviera constante hasta que tocaran el fondo del tubo. Todo esto sólo si no hubiera algún otro fenómeno afectando el descenso de las esferas, además de la gravedad. Los resultados mostraron que cuando las esferas fueron soltadas a una distancia inicial de 8 cm no hubo aumento en la velocidad, sin embargo, como se presenta en la figura 4.9, las velocidades sufrieron cambios importantes para los diámetros de 1.27 y 0.9525 cm, que contrario a lo que se observa para densidades mayores, aquí la velocidad de la primera esfera es mayor que la de la segunda; y cuando alcanzan la distancia donde los efectos de fondo son percibidos por las esferas, la primera disminuye su velocidad y en un determinado instante se mantienen a la misma velocidad. Es claro, que si la velocidad de sedimentación de la primera esfera fuera más grande que la de la posterior las esferas se alejarán; hasta este punto no se ha podido generar una hipótesis basada únicamente en la velocidad de descenso. Por otro lado, la esfera de diámetro igual a 0.7937 cm no muestra ningún cambio en su comportamiento. Debe notarse que aproximadamente a 50 s la segunda esfera presenta una caída en la velocidad de descenso, la posición de la primera y de la segunda esfera en ese momento es 26.5633 y 20.0560 cm respectivamente.

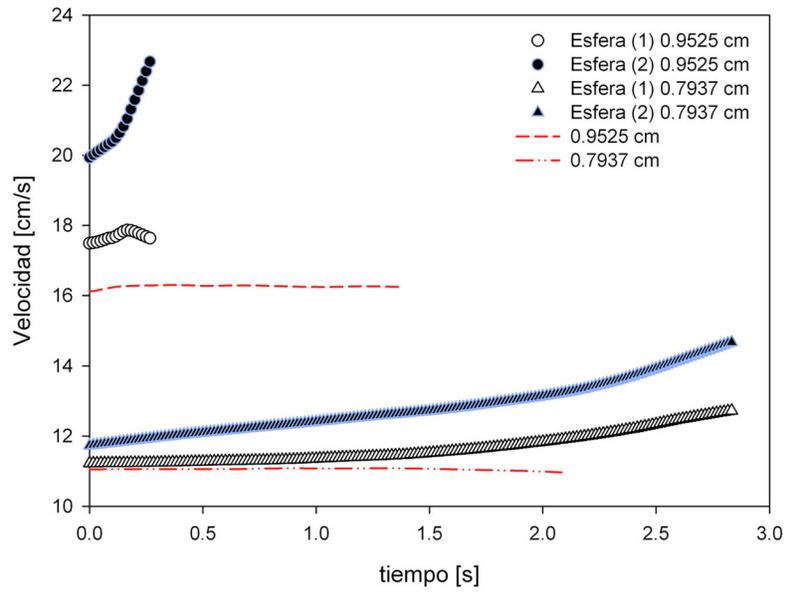


Figura 4.10 Velocidad esferas consecutivas de acero, separación inicial 4 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

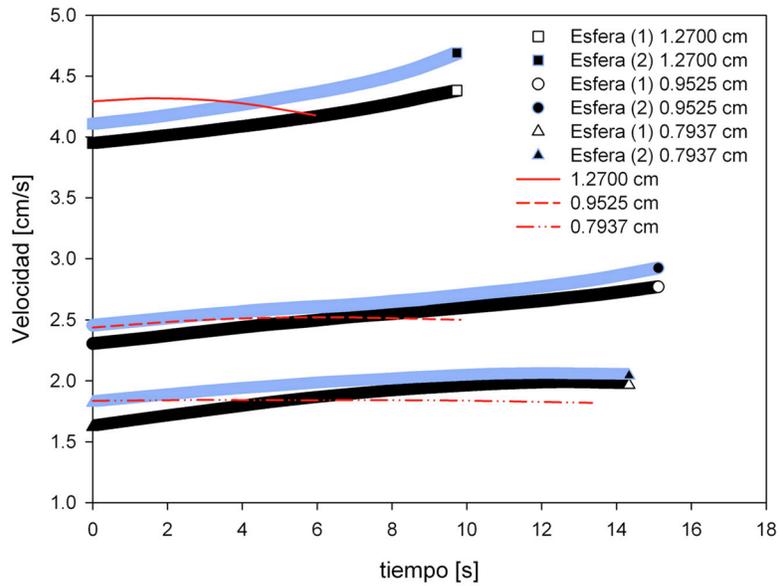


Figura 4.11 Velocidad esferas consecutivas de teflón, separación inicial 4 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

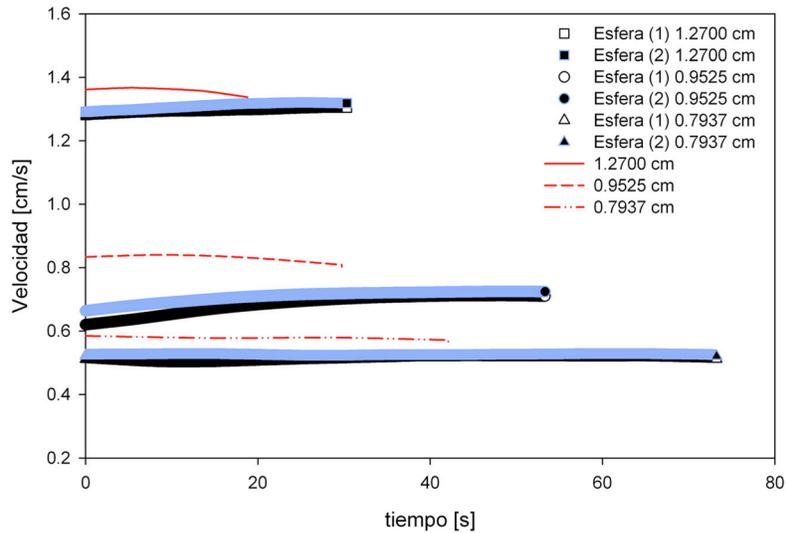


Figura 4.12 Velocidad esferas consecutivas de acetato, separación inicial 4 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

Para las esferas liberadas a 4 cm de separación inicial (figuras 4.10-4.12), se percibe enormemente el efecto de la cercanía entre las esferas indicado porque en ambas la velocidad es creciente. Para esferas de acetato de diámetro 0.7937 cm se puede observar que no sienten ningún efecto.

En las figuras 4.13-4.14 se presentan los resultados de la velocidad con respecto al tiempo para teflón y acetato, a 2 cm de distancia de separación inicial. Las esferas de acero no se utilizaron en este conjunto de pruebas, ya que su velocidad y la interacción entre ellas es muy grande, por lo tanto se atraen demasiado y al llegar al área de medición ya estaban juntas. Para esta sección del estudio, todas las velocidades medidas fueron más grandes que la velocidad para una sola esfera.

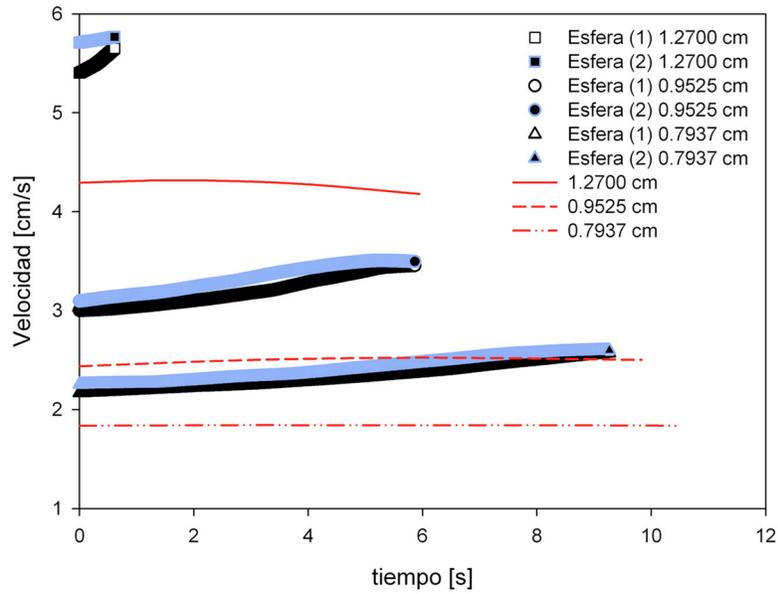


Figura 4.13 Velocidad esferas consecutivas de teflón, separación inicial 2 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

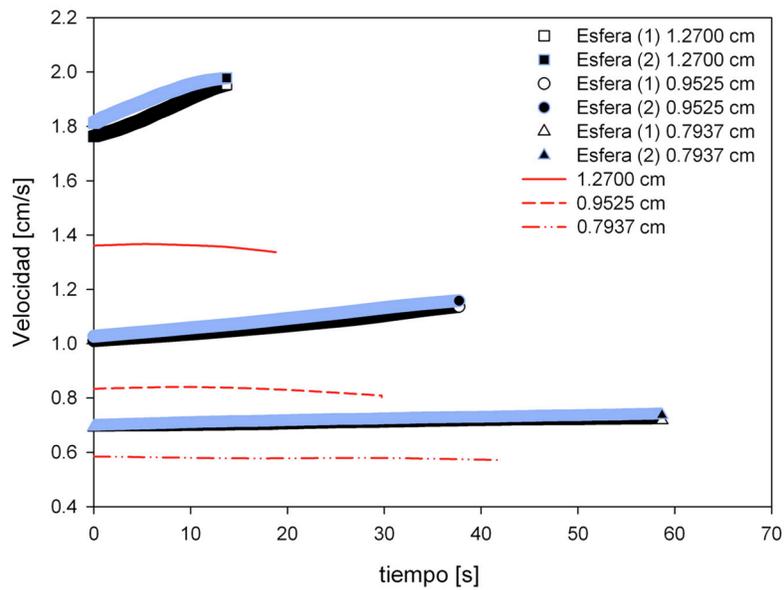


Figura 4.14 Velocidad esferas consecutivas de acetate, separación inicial 2 cm las líneas sólidas corresponden a la velocidad de las esferas individuales.

### 4.3 Separación entre los centroides

Se ha dicho que el incremento de la velocidad de la segunda esfera se debe a que ingresa en la cauda negativa generada por la esfera líder. Riddle et al. [7] concluyeron que existía una distancia crítica donde si la separación era más grande que la distancia crítica, las esferas divergían. En mediciones hechas por [1], se obtuvo el valor del punto de estancamiento, longitud de la cauda negativa y las condiciones para que se presente dicha cauda. Ellos reportan que las esferas de acero de los diámetros usados en este estudio generan cauda negativa y que la cauda disminuye con el diámetro teniendo valores de 40, 25 y 15 cm respectivamente (tabla 4.3).

Lo anterior quiere decir que las distancias que fueron empleadas en este estudio, para ese conjunto de esferas, están comprendidas dentro de la cauda, por lo tanto siempre se esperaría que la segunda esfera fuera más rápida que la primera y de igual modo, se esperaría que se acercarán de manera uniforme. No obstante, como se aprecia en la figura 4.15 para el diámetro de 0.9525 cm, existe una meseta que en la sección anterior se designó como intervalo de estabilidad, en la que las esferas están separadas por aproximadamente 6 cm, que revisando los datos reportados por [1], es el punto de estancamiento, es decir, donde la velocidad es cero y es a partir de ese punto donde nace la cauda negativa, cuando se encuentra a 5 cm de la superficie de la esfera.

Durante los primeros momentos de la medición la esfera posterior incrementa su velocidad y se acerca a la primera debida al desplazamiento de fluido y una disminución en la viscosidad, pero al alcanzar la distancia de separación de aproximadamente 6 cm, la segunda esfera siente el efecto de la cauda negativa, que es tan fuerte que no deja que la esfera posterior se acerque más. Sin embargo, en determinado momento la segunda esfera inhibe la cauda negativa y es cuando se produce el nuevo aumento en la velocidad y el acercamiento, esto se muestra en la figura 4.15. Con la información obtenida en la sección anterior se estableció que este fenómeno era producto del efecto del fondo del tubo, sin embargo, se requiere información adicional para aclarar esto.

Para la esfera de teflón de diámetro 1.27 cm (figura 4.16), el punto de estancamiento reportado en [1] se encuentra a 7.9 cm, sin embargo, esta esfera no presenta cauda negativa. Para teflón de diámetro 0.7937 cm se observa una meseta. En esta meseta la distancia de separación entre esferas es de 7.56 cm y la meseta termina cuando la primera esfera se encuentra a 18.2456 cm. Esto lanza la interrogante que si la longitud del tubo fuera mayor esa meseta se prolongaría.

En la figura 4.17 se hace notar la tendencia de los centroides de las esferas de diámetro 0.9525 cm. Aproximadamente a 10 segundos de iniciar el registro de datos, las esferas se separan y 10 segundos después comienza una atracción. Estas esferas no reportan cauda negativa pero su punto de estancamiento está a 8

cm por encima de su superficie, aunque en términos reales el incremento o separación no es muy grande siendo del orden de 0.006 cm. Sin embargo, la caída coincide con la posición dada en otros experimentos.

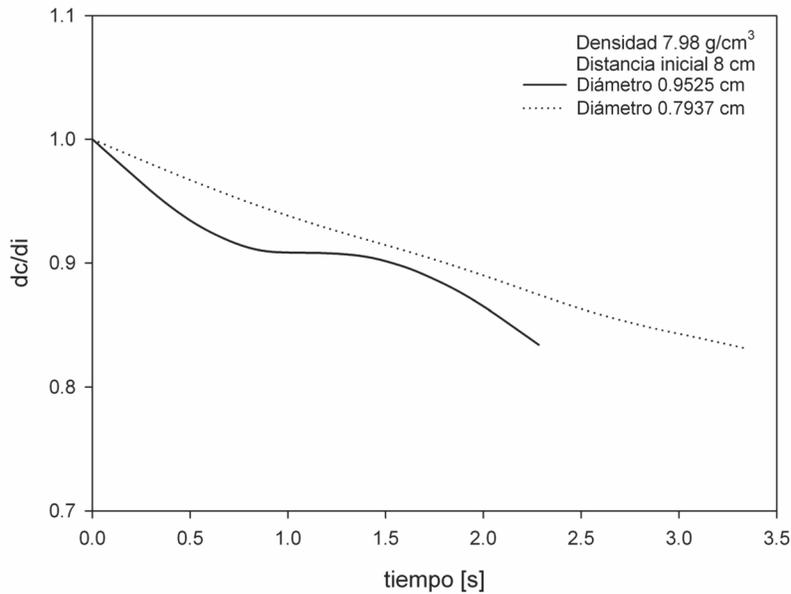


Figura 4.15 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 8 cm separación entre esferas de acero.

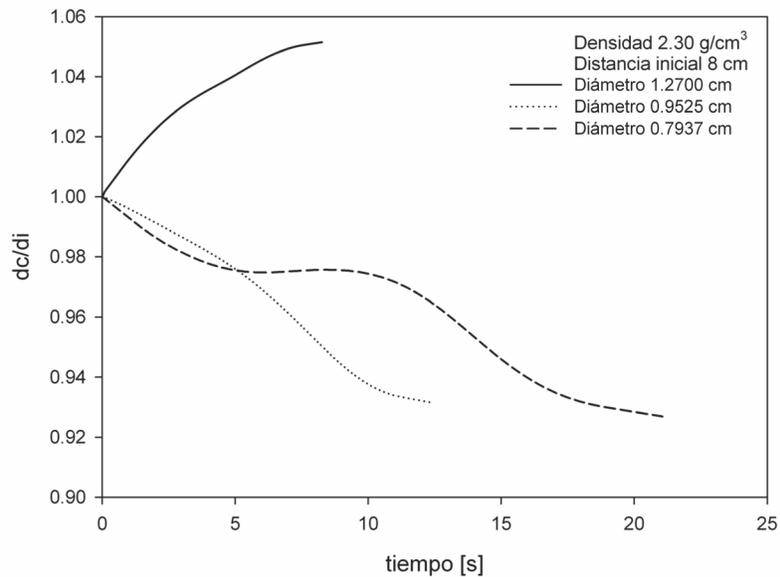
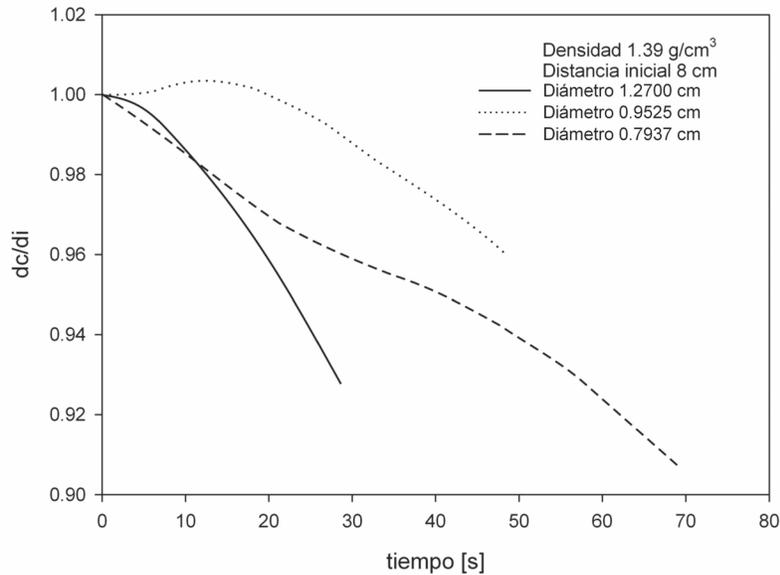
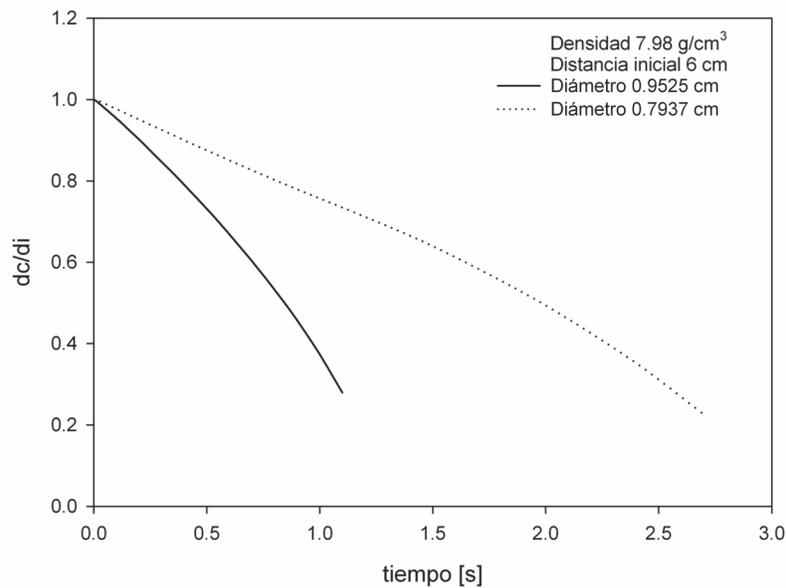


Figura 4.16 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 8 cm separación entre esferas de teflón.



*Figura 4.17 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 8 cm de separación entre esferas de acetato.*

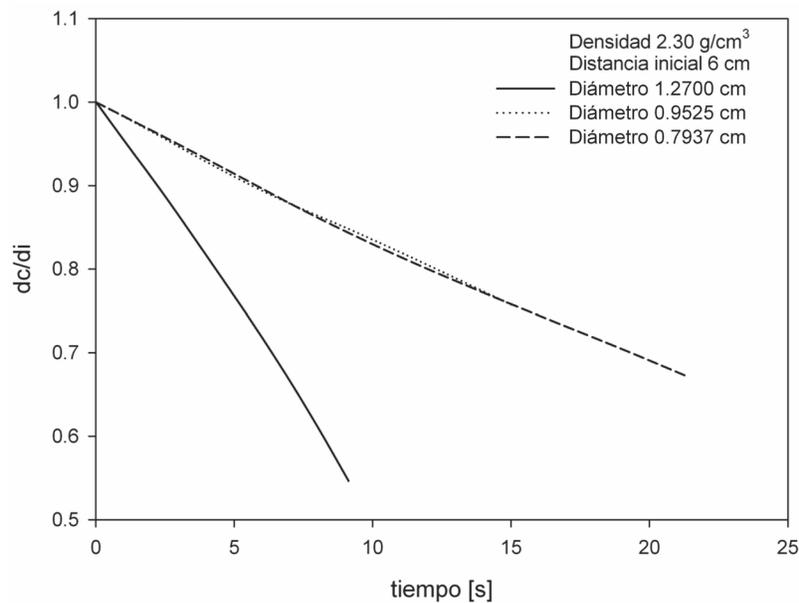


*Figura 4.18 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 6 cm de separación entre esferas de acero.*

Verneuil et al. [21] establecen que el campo de flujo es dependiente de la distancia entre esferas y el patrón de flujo se modifica fuertemente, en el caso donde la esfera líder presentaría cauda negativa ésta no se forma. Ellos a pesar del cambio tan drástico observado en sus patrones de flujo, no notaron ningún cambio significativo en la sedimentación de las esferas. En las gráficas 4.18-4.19 se observa que existe atracción y que ahora el cambio que se produce en la distancia

entre las esferas no presenta las fluctuaciones advertidas cuando fueron liberadas a 8 cm, contrario a lo presentado por Verneuil. De acuerdo con las mediciones realizadas por Mendoza-Fuentes et al. [1] la esfera posterior ya se encuentra dentro de la cauda de la esfera líder, por lo que en este punto la interacción con la cauda o el punto de estancamiento ya fueron superadas.

En la figura 4.20 se puede apreciar que existe repulsión para diámetros de 1.2700 cm y 0.9525 cm. Para el diámetro de 0.7937 cm la separación es prácticamente la inicial y a los 40 segundos siente los efectos del fondo del tubo y se separan. Estas esferas no generan cauda negativa, la cauda mide 8.5, 8 y 5.5 cm respectivamente.



*Figura 4.19 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 6 cm de separación entre esferas de teflón.*

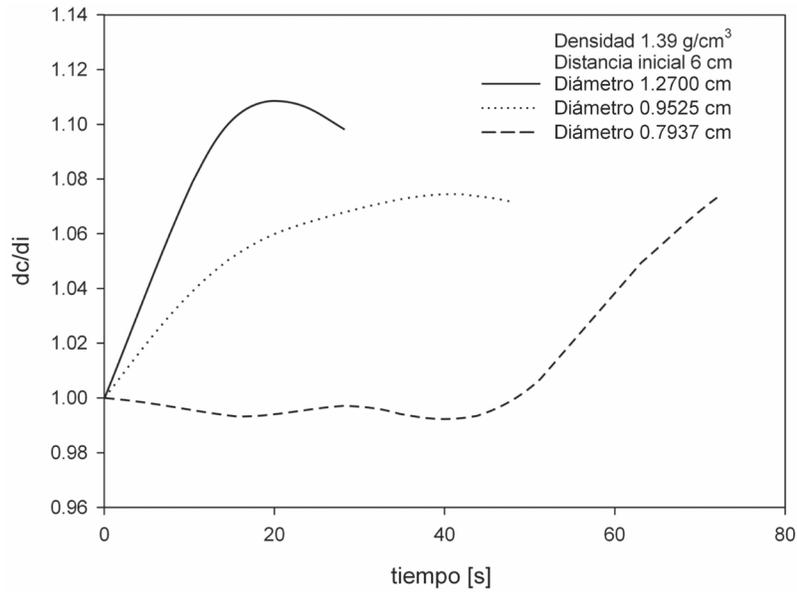


Figura 4.20 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 6 cm de separación entre esferas de acetato.

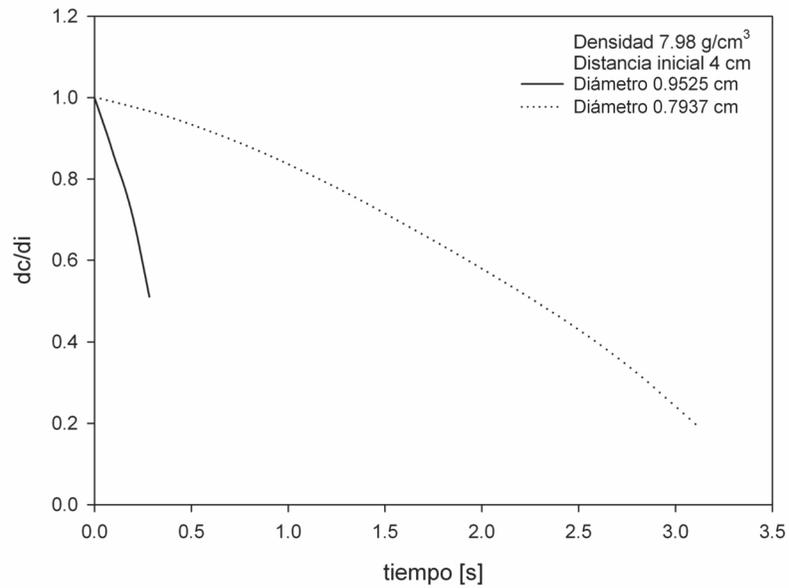


Figura 4.21 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 4 cm de separación entre esferas de acero.

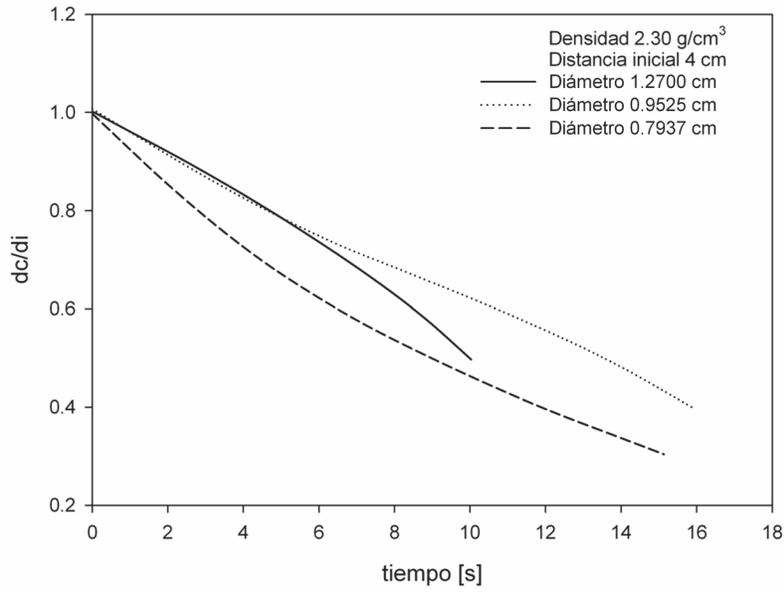


Figura 4.22 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial 4 de cm de separación entre esferas de teflón.

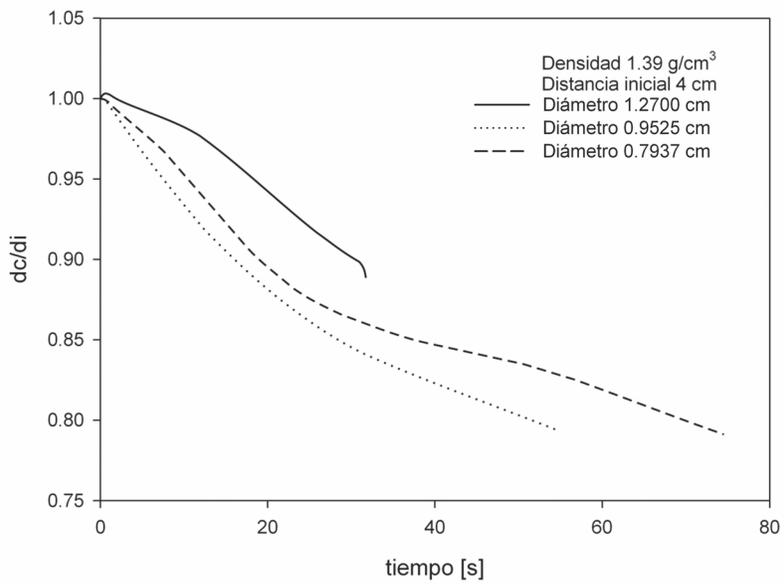


Figura 4.23 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 4 cm de separación entre esferas de acetato.

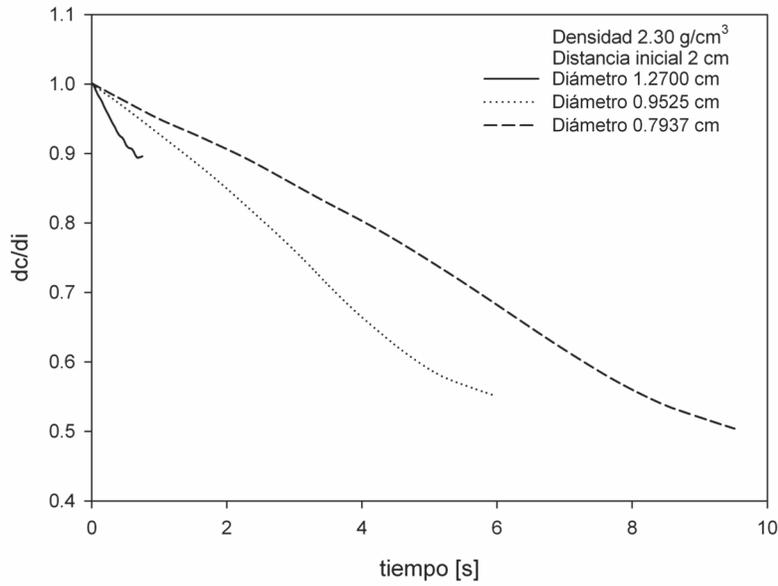


Figura 4.24 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 2 cm de separación entre esferas de teflón.

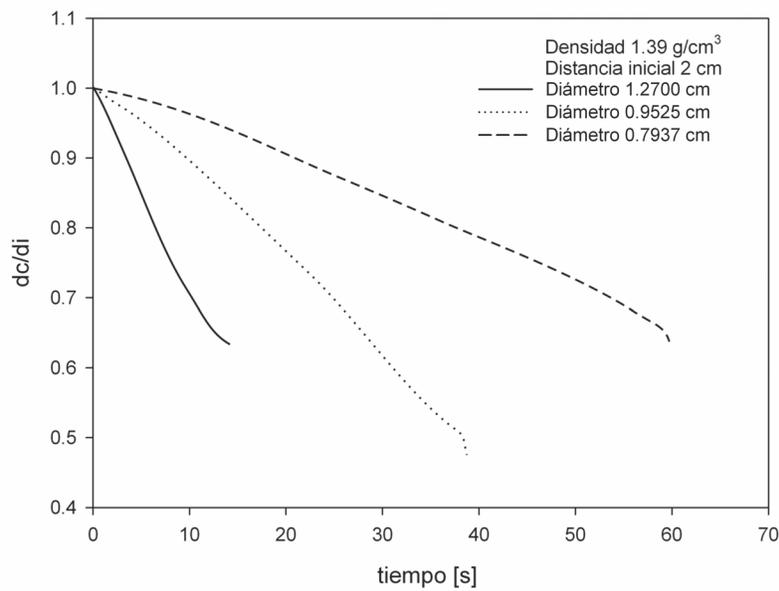


Figura 4.25 Distancia de separación entre los centroides respecto a la distancia inicial de 2 cm de separación entre esferas de acetato.

Los resultados presentados en las figuras 4.21-4.25 muestran atracción para todas las esferas que algunos casos, terminó en un encadenamiento, i.e. se tocaron, esta situación se resume en la tabla 4.1. Para acero, soltadas a 2 cm de separación inicial, ya no se pudieron tomar datos ya que las esferas se encadenaban antes de que estuvieran en la zona de medición.

Tabla 4.1 Experimentos esferas consecutivas encadenamiento.

$d_{ii}$	Acero			Teflón			Acetal		
	1.27	0.953	0.794	1.27	0.953	0.794	1.27	0.953	0.794
8		X	X	X	X	X	X	X	X
6		✓	✓	X	X	X	X	X	X
4		✓	✓	X	X	✓	X	X	X
2				✓	✓	✓	✓	X	X

✓ Encadenamiento; X No encadenamiento

### 4.4 Velocidad terminal

La velocidad terminal de una esfera que desciende en un tubo no es más que el promedio de la velocidad de sedimentación en estado estacionario. De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, para el experimento de esferas consecutivas la velocidad siempre fue creciente, excepto aquellos casos en donde la velocidad de sedimentación fue prácticamente constante. Sabiendo esto es evidente que la esfera posterior no alcanza su velocidad terminal, sin embargo, sirve para examinar si existe un cambio respecto a la velocidad terminal de las esferas individuales.

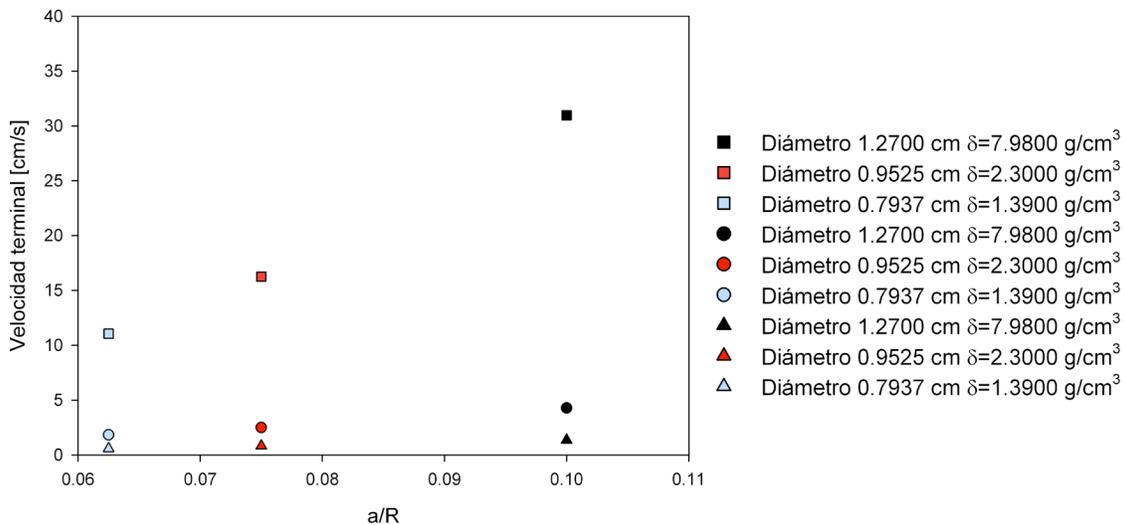


Figura 4.26 Velocidad terminal para las esferas individuales en términos de la relación de radios esfera-tubo.  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

La velocidad terminal de las esferas individuales se muestra en la figura 4.26. Se establece que la velocidad terminal aumenta con el diámetro y la densidad de la esfera. Para esferas consecutivas la velocidad terminal de la esfera posterior fue mayor, excepto en los casos analizados en la sección anterior donde la velocidad de la primera esfera fue más alta. Estos resultados se muestran gráficamente junto con los obtenidos para esferas individuales, figuras 4.27 a la 4.30, conectados por líneas sólidas como referencia.

La velocidad terminal (figura 4.27) obtenida cuando las esferas fueron liberadas a 8 cm de separación inicial. Es, en términos generales, del mismo valor para la esfera líder comparada con la velocidad terminal de la misma, liberada individualmente. En la figura 4.28-4.29 se presentan los resultados para esferas soltadas a 6 y 4 cm respectivamente. Para esferas de teflón y acetal la velocidad terminal obtenida corresponde a su valor cuando fueron liberadas de manera individual, contrario a lo obtenido para esferas de acero donde su velocidad terminal se incrementó, particularmente para la segunda esfera.

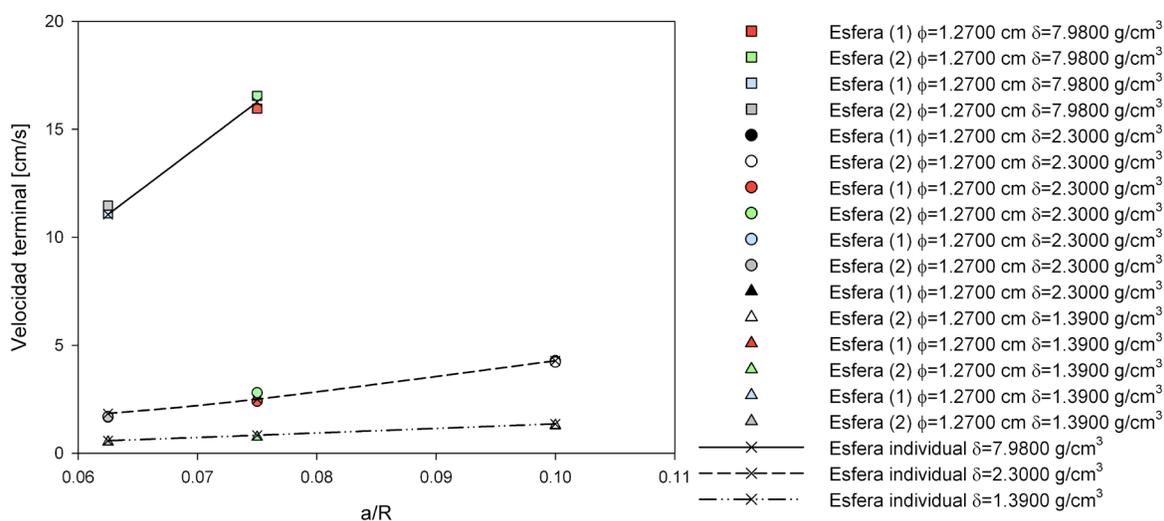


Figura 4.27 Velocidad terminal para esferas consecutivas relativa a la relación de radios esfera-tubo, distancia inicial 8 cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

Cuando la distancia de separación entre las esferas se reduce, la velocidad terminal de las esferas aumenta y la variación para teflón y acetal son más notables cuando fueron liberadas a 2 cm (figura 4.30). Para acetal la velocidad terminal de ambas esferas es similar, contrario al caso de las esferas de teflón donde es apreciable un incremento en la velocidad de ambas respecto a la referencia. Este conjunto de esferas se encadena, es evidente el incremento de la velocidad sobre la segunda esfera, lo que no sucede para el diámetro de 1.27 cm ya que la velocidad terminal es la misma para ambas.

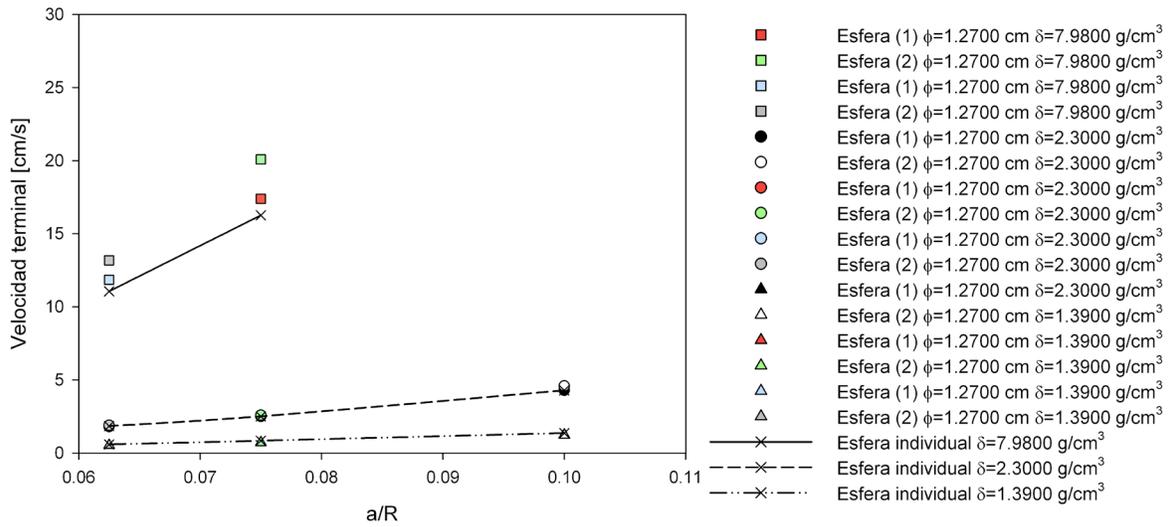


Figura 4.28 Velocidad terminal para esferas consecutivas relativa a la relación de radios esfera-tubo, distancia inicial 6 cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

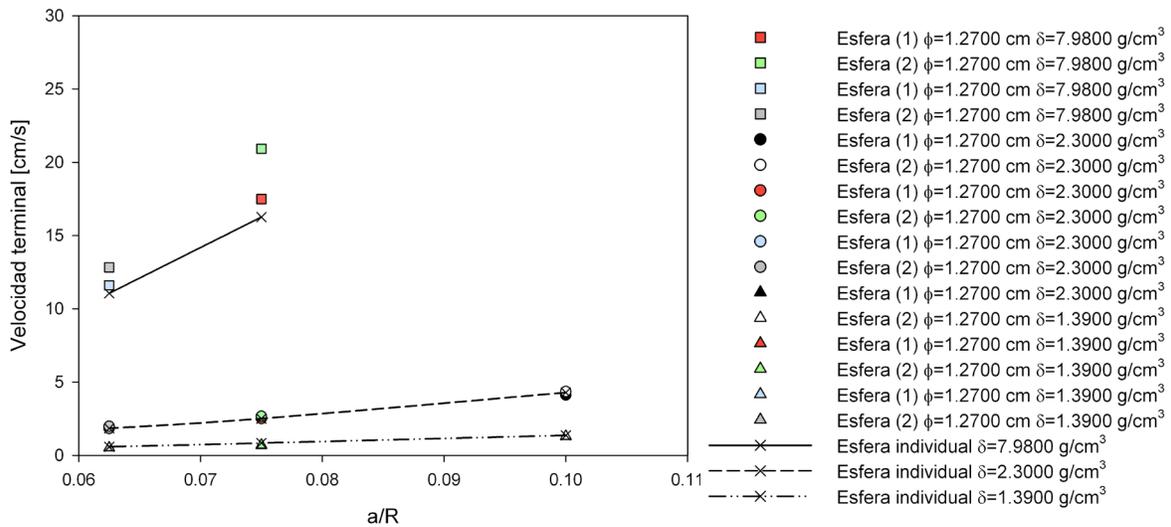


Figura 4.29 Velocidad terminal para esferas consecutivas relativas a la relación de radios esfera-tubo, distancia inicial 4 cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

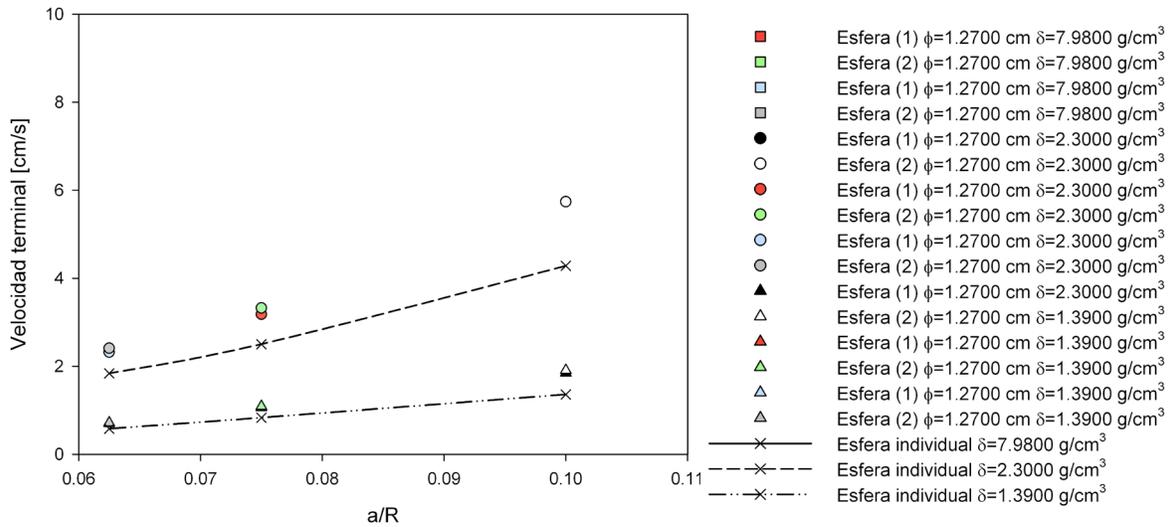


Figura 4.30 Velocidad terminal para esferas consecutivas relativa a la relación de radios esfera-tubo, distancia inicial 2 cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

## 4.5 Coeficiente de arrastre

El coeficiente de arrastre es una cantidad adimensional que permite cuantificar el arrastre o resistencia de un objeto a moverse. En estado estacionario existe un equilibrio de fuerzas, donde la fuerza de arrastre puede calcularse mediante la fuerza de gravitación que actúa sobre la esfera menos la fuerza de flotación, usando el resultado de la ley de Stokes se obtiene:

$$C_D = \frac{4ag}{3U^2} \left( \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right) \quad (4.1)$$

donde  $a$  es el radio de la esfera,  $U$  la velocidad terminal,  $\rho_s$  es la densidad de la esfera,  $\rho_f$  la densidad del fluido y  $g$  la gravedad.

En la figura 4.31 se muestran los resultados del cálculo del coeficiente de arrastre para esferas individuales donde, de acuerdo con la ecuación 4.1, para las esferas con velocidades terminales altas el coeficiente de arrastre disminuye. Todo indica que en los experimentos de esferas consecutivas el coeficiente de arrastre para la segunda esfera será menor. Conclusión que se cumple en términos generales, sin embargo, hay algunos casos que no satisfacen esta condición y es necesario analizarlos con mayor profundidad. Para las esferas de acero, que tienen las velocidades más altas, su comportamiento es coherente con la conclusión expuesta con anterioridad.

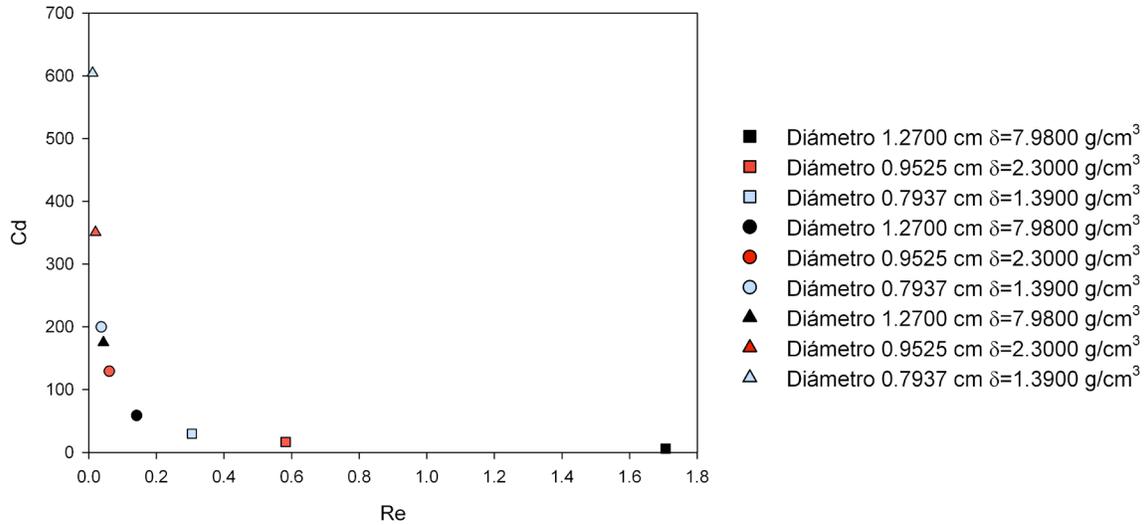


Figura 4.31 Coeficiente de arrastre para la sedimentación de esferas individuales.  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

En las figuras 4.32 se presentan los valores obtenidos del coeficiente de arrastre para las esferas consecutivas comparados con los experimentos de esferas individuales. El coeficiente de arrastre disminuye conforme el diámetro aumento, y en términos generales el arrastre es mayor para la esfera líder. No obstante, los casos donde se presenta repulsión entre esferas el arrastre para la segunda esfera es mayor, acorde a que su velocidad disminuye.

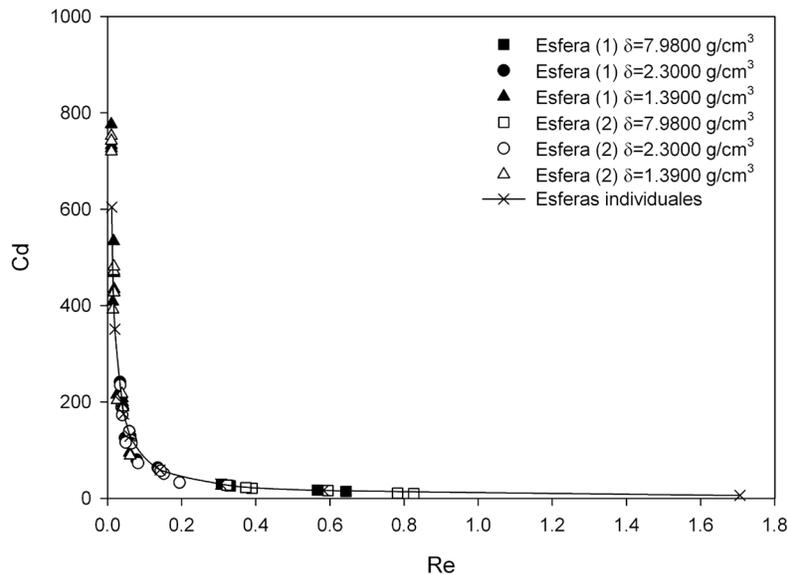


Figura 4.32 Coeficiente de arrastre para la sedimentación de esferas consecutivas.

Tabla 4.2 Simbología para las gráficas 4.33-4.35.<sup>2</sup>

▼	Esfera (1) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=8 \text{ cm}$
▽	Esfera (2) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=8 \text{ cm}$
▲	Esfera (1) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=6 \text{ cm}$
△	Esfera (2) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=6 \text{ cm}$
◆	Esfera (1) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=4 \text{ cm}$
◇	Esfera (2) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=4 \text{ cm}$
■	Esfera (1) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=2 \text{ cm}$
□	Esfera (2) $\delta=7.9800 \text{ g/cm}^3$ $d_i=2 \text{ cm}$
▼	Esfera (1) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=8 \text{ cm}$
▽	Esfera (2) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=8 \text{ cm}$
▲	Esfera (1) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=6 \text{ cm}$
△	Esfera (2) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=6 \text{ cm}$
◆	Esfera (1) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=4 \text{ cm}$
◇	Esfera (2) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=4 \text{ cm}$
■	Esfera (1) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=2 \text{ cm}$
□	Esfera (2) $\delta=2.3000 \text{ g/cm}^3$ $d_i=2 \text{ cm}$
▼	Esfera (1) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=8 \text{ cm}$
▽	Esfera (2) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=8 \text{ cm}$
▲	Esfera (1) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=6 \text{ cm}$
△	Esfera (2) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=6 \text{ cm}$
◆	Esfera (1) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=4 \text{ cm}$
◇	Esfera (2) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=4 \text{ cm}$
■	Esfera (1) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=2 \text{ cm}$
□	Esfera (2) $\delta=1.3900 \text{ g/cm}^3$ $d_i=2 \text{ cm}$

En las esferas de teflón (figura 4.33) de diámetro 1.27 cm, liberadas a 8 cm el valor del coeficiente de arrastre es menor para la esfera líder respecto a la posterior, pese a que su valor es igual al de la esfera individual. El incremento es de aproximadamente el 3% de acuerdo con la sección donde se analizó la separación entre esferas, se puede afirmar que esta esfera en particular presenta repulsión, y además se podría decir que este incremento en el arrastre que parece no ser significativo es un indicio de la repulsión presentada.

Los tres diámetros estudiados para esferas de acetal (figura 4.34-4.35) liberadas con 6 cm entre ellas presentaron repulsión; los resultados muestran un incremento en el valor del coeficiente de arrastre para la segunda esfera del 4.9%, 1.12% y del 3.2% respectivamente de mayor a menor diámetro.

Aparentemente no hay una tendencia clara en los resultados respecto al aumento en el arrastre, pero es importante tener este resultado en mente ya que el incremento es reflejo de que el arrastre causado por el objeto es más importante que el arrastre a causa del fluido; lo que lleva a pensar que la repulsión fue

<sup>2</sup>  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

causada por la interacción entre las esferas y no por alguna propiedad del fluido. Por otro lado, el coeficiente de arrastre disminuye conforme la distancia entre las esferas es menor.

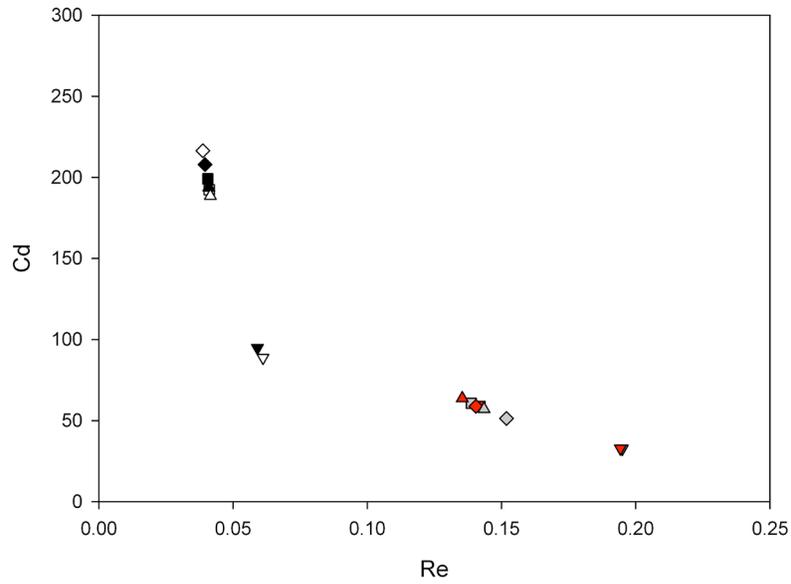


Figura 4.33 Coeficiente de arrastre esferas consecutivas para  $a/R=0.1$ .

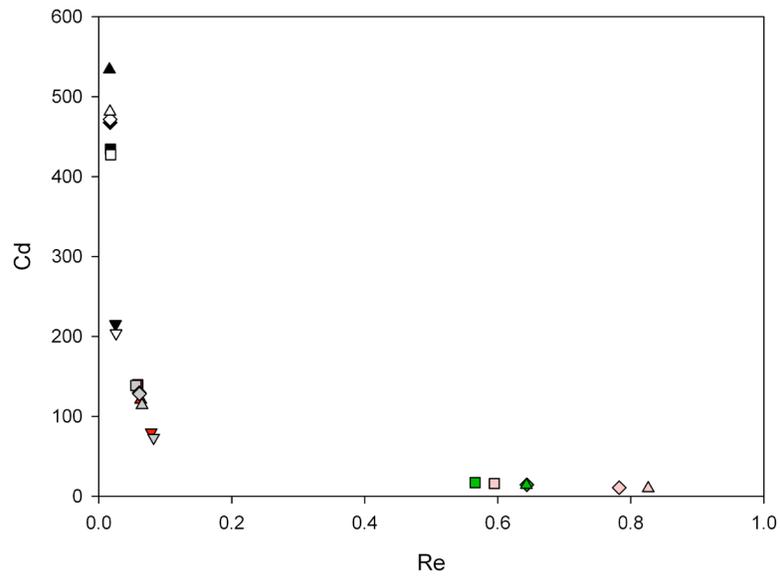


Figura 4.34 Coeficiente de arrastre esferas consecutivas para  $a/R=0.0750$ .



arrastre de la esfera con la misma velocidad en un líquido newtoniano, por la siguiente ecuación

$$\frac{K}{K_N} = \frac{2ga^2(\rho_s - \rho_f)(1 - f(a/R))}{9\eta_0 U_s} \quad (4.4)$$

Con esto, se puede cuantificar la desviación del valor de Stokes debido a la presencia de las paredes y a la viscoelasticidad del fluido. En resumen, el esquema general del comportamiento del factor normalizado, mostrado en la figura 4.36, está compuesto por las siguientes regiones:

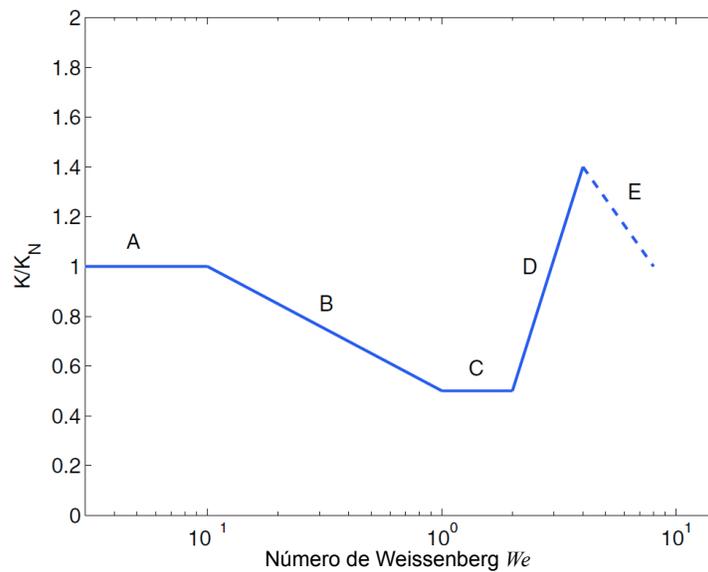


Figura 4.36 Esquema general del comportamiento del factor de corrección por arrastre normalizado respecto al número de Weissenberg [5].

La región A-B que se ha observado en fluidos adelgazantes [5], clase que corresponde a este estudio, la región E que se ha detectado en fluidos tipo gusano [22] y la región completa (A-D) que se muestra en fluidos de Boger.

Los resultados en la figura 4.37 correspondientes a las esferas individuales muestran una reducción en el arrastre conforme aumenta el número de Weissenberg (región B), esta reducción corresponde a la zona de engrosamiento de la viscosidad extensional que coincide con la zona de adelgazamiento en corte. La meseta (región A) a bajos números de Weissenberg corresponde con la región newtoniana de la viscosidad de corte.

El comportamiento en la región B para esferas consecutivas liberadas a las distancias estudiadas, es muy similar a la expuesta para una sola esfera. En la región A hay un crecimiento en el factor de corrección, que corresponde a las esferas de teflón y acetal (figuras 4.38-4.40).

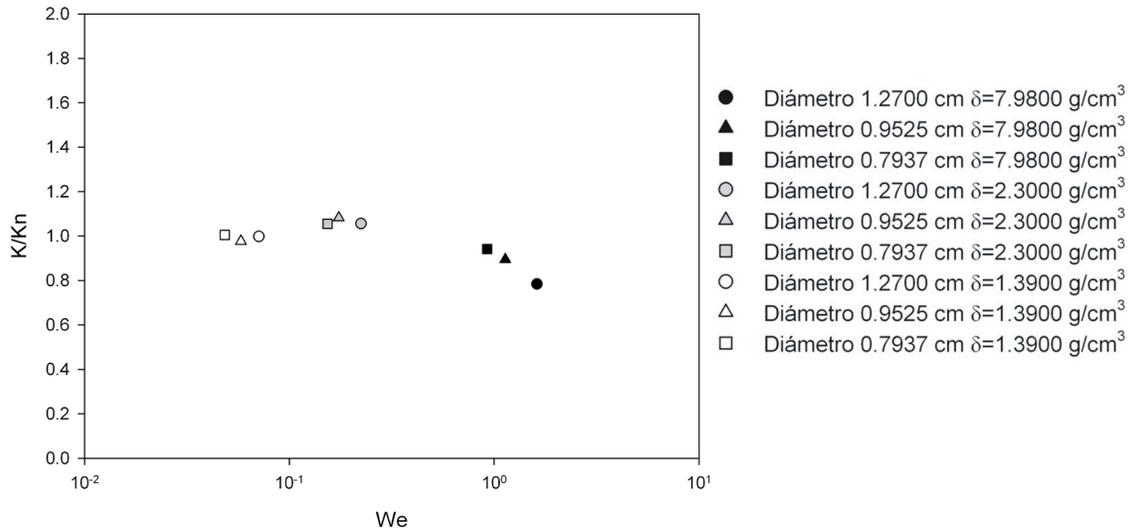


Figura 4.37 Factor normalizado del coeficiente de arrastre como función del número de Weissenberg para esferas individuales.  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

Los incrementos en el factor están relacionados con un aumento en  $K$ , que pone en evidencia que la viscoelasticidad del fluido está dominando. El factor de corrección por arrastre es, en general, más grande para la primera esfera pero para los casos particulares analizados en secciones anteriores, i.e. donde existe repulsión, se aprecia que esa tendencia cambia, es decir, el factor ahora es más grande para la segunda esfera.

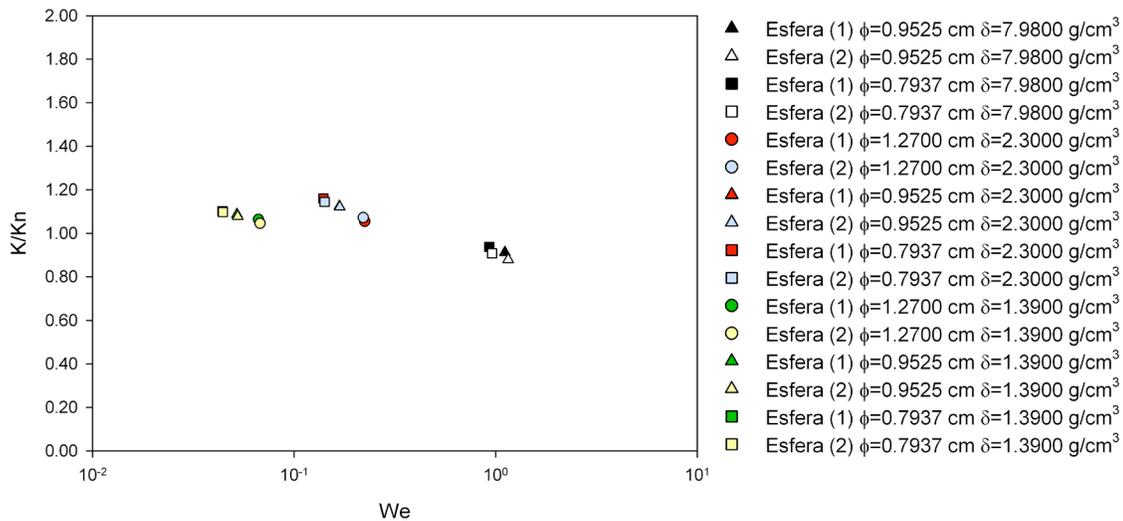


Figura 4.38 Factor normalizado del coeficiente de arrastre como función del número de Weissenberg para esferas consecutivas  $d_{ii}=8$  cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

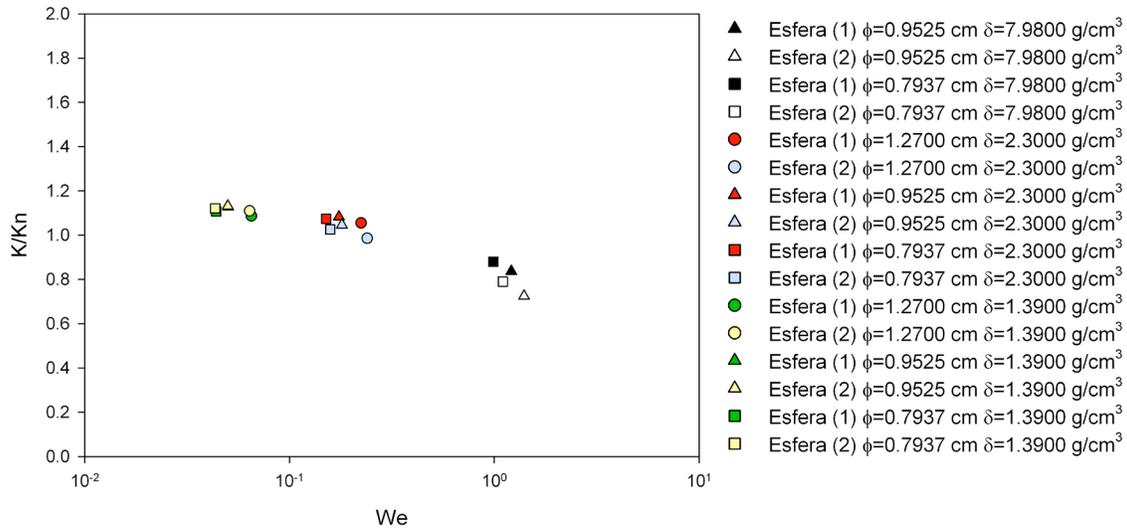


Figura 4.39 Factor normalizado del coeficiente de arrastre como función del número de Weissenberg para esferas consecutivas  $d_{ii}=6$  cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

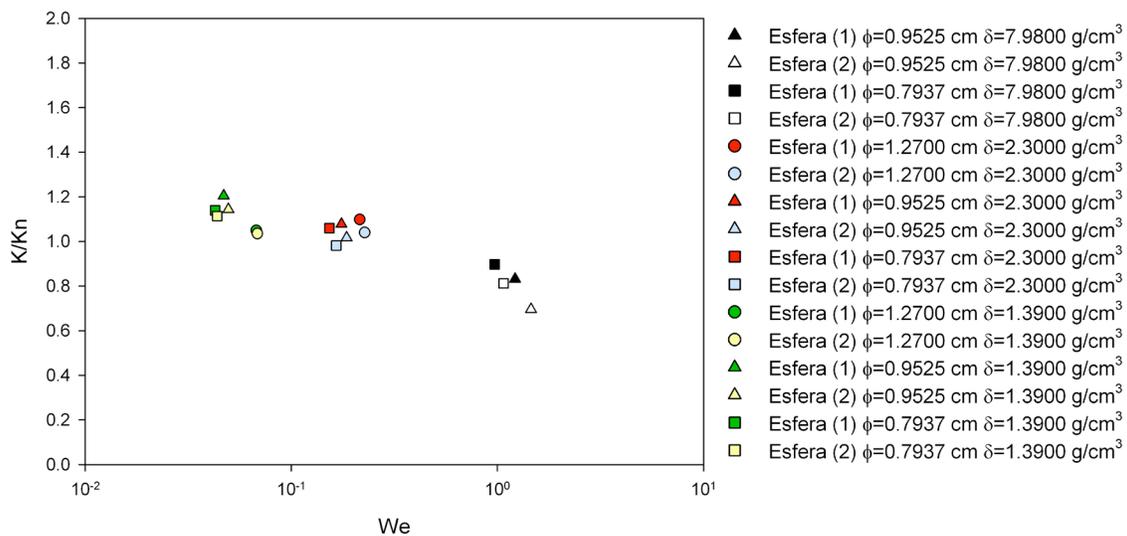


Figura 4.40 Factor normalizado del coeficiente de arrastre como función del número de Weissenberg para esferas consecutivas  $d_{ii}=4$  cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

En la figura 4.41 las esferas presentan una reducción en el arrastre con respecto al valor de Stokes, en este caso las esferas fueron soltadas a 2 cm de separación. Esta reducción significa que el efecto de las paredes es importante, pero si esto no sucedió en los casos anteriores, entonces significa que la interacción entre ellas provocó una competencia entre los efectos inerciales y los viscoelásticos.

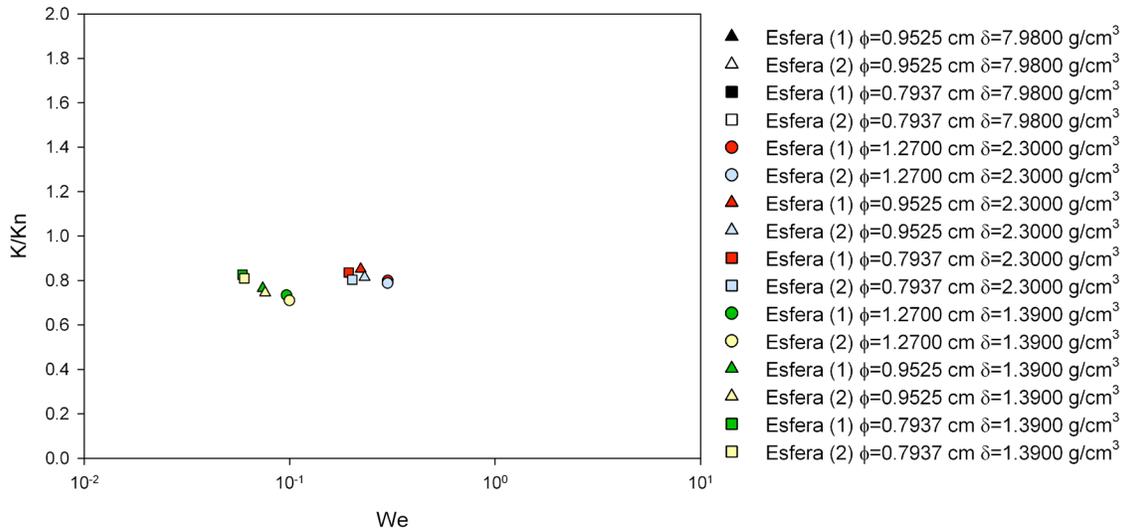


Figura 4.41 Factor normalizado del coeficiente de arrastre como función del número de Weissenberg para esferas consecutivas  $d_{ii}=2$  cm.  $\phi$  diámetro de la esfera,  $\delta$  representa la densidad de la esfera.

## 4.7 Viscosidad extensional

En trabajos anteriores [11] se ha definido la rapidez de extensión característica como:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{3}} \tag{4.5}$$

Mendoza et al. [1] propusieron una rapidez de extensión característica promedio que consiste en dividir la velocidad terminal ( $U$ ) de la esfera entre la distancia ( $d$ ), de la parte de atrás de la esfera hasta el punto de estancamiento donde la velocidad del flujo es cero:

$$\dot{\epsilon} = \frac{U}{d} \tag{4.6}$$

Para esferas individuales se muestran en la figura 4.42 los valores obtenidos (ver apéndice A2) para la viscosidad de corte y extensional comparados contra los resultados del modelo BMP. Las esferas con mayor densidad se encuentran en la zona de incremento de la viscosidad extensional,  $\dot{\epsilon} = 7s^{-1}$ , las esferas de teflón y acetal se encuentran en una zona de viscosidad extensional constante. Para la viscosidad de corte las esferas con mayor densidad (acero) se encuentran en la región adelgazante, mientras que las esferas de teflón y acetal se encuentran en la región newtoniana de la viscosidad.

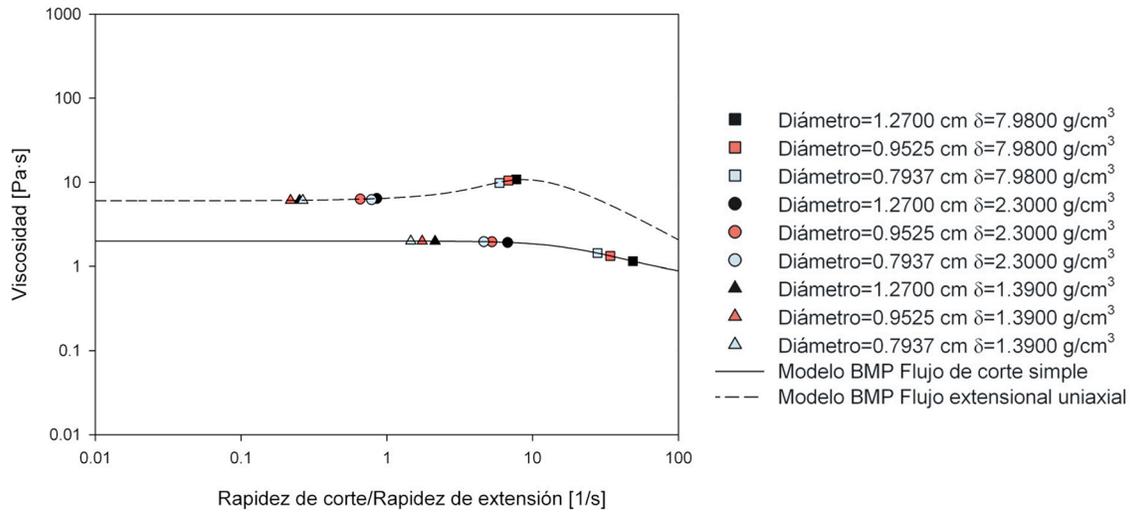


Figura 4.42 Comparación entre el valor de la viscosidad de corte, la viscosidad extensional para HASE 1.5 % peso y el valor calculado para esferas individuales.

Los resultados del cálculo para la rapidez de extensión muestran que en general  $\dot{\epsilon}$  es más grande para la segunda esfera, excepto en los casos donde se produjo repulsión entre las esferas y que no existió cauda negativa. Esto es, que la segunda esfera en su recorrido se encuentra con un obstáculo que se adjudica a la extensión de las cadenas de polímero causada por el paso de la primera esfera, lo que propicia la caída de la velocidad y que finalmente se refleja en un aumento en la separación entre las esferas.

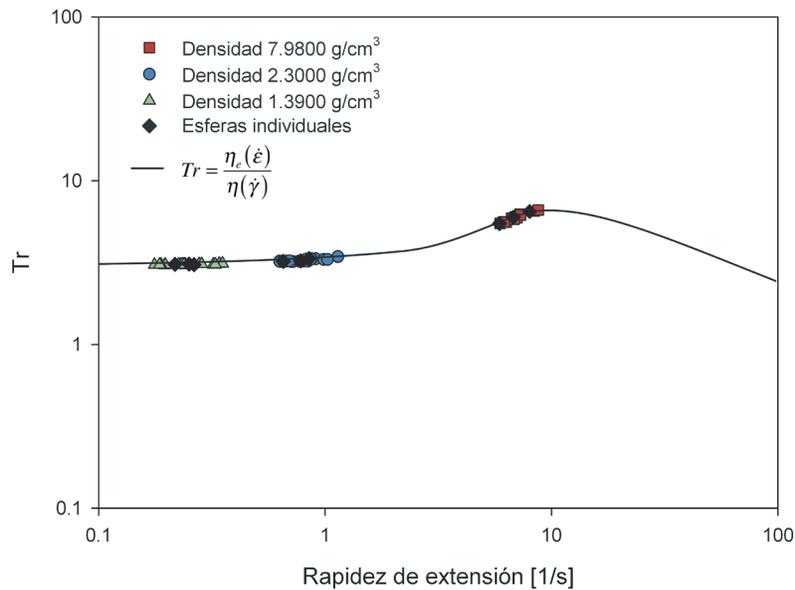
Sin embargo, los valores de  $\dot{\epsilon}$  no son, en términos reales, muy grandes uno respecto al otro. Aunque esto es un indicio de que podría ser la causa de la repulsión de las esferas, en este análisis aún no es un parámetro determinante, pero sí demuestra que para este tipo de fluidos es muy importante tomar en cuenta las propiedades extensionales al momento de tratar de dar una conclusión definitiva acerca de los mecanismos que influyen en la sedimentación de esferas.

La relación entre las propiedades extensionales y de corte, puede discutirse comparando la magnitud de la viscosidad extensional respecto a la viscosidad de corte a través del cociente de Trouton definido como:

$$Tr = \frac{\eta_e(\dot{\epsilon})}{\eta(\dot{\gamma})} \tag{4.7}$$

En la figura 4.43 se presenta el cociente de Trouton junto con los valores calculados de  $Tr$  para las esferas tanto individuales como consecutivas. El cociente de Trouton parte de un valor de  $\sim 3$  a bajas rapidezces de extensión y permanece prácticamente constante; al aumentar la rapidez extensional, el cociente crece

hasta alcanzar un valor máximo cuando la rapidez de extensión es  $\sim 10$  y decrece nuevamente. La región de adelgazamiento extensional ha sido asociada a la construcción y ruptura de la estructura a causa del flujo extensional [1]. Por otro lado, el incremento en el cociente de Trouton con la rapidez de extensión en la literatura se habla acerca de que tiene relación directa con la hidrofobicidad del macromonomero [19]. Por lo tanto la hidrofobicidad y la rapidez de extensión son indicios de la fuerza de la red transitoria del polímero [19]. El comportamiento espesante observado en este tipo de fluidos fue asociado con la formación de la cauda negativa por Mendoza-Fuentes et al. [1].



*Figura 4.43 Cociente de Trouton para HASE 1.5% comparado con el coeficiente de Trouton calculado para las esferas utilizadas. Los símbolos a color representan los experimentos de esferas consecutivas.*

Dos esferas sedimentando en un polímero asociativo, HASE 1.5% peso, pueden encadenarse formando un agregado o doblete, permanecer a una distancia de separación constante o incluso se pueden repeler una a la otra, i.e. la segunda esfera sedimenta mucho más lento que la primera esfera.

La atracción entre esferas observada es consecuencia de la modificación del estado del fluido causada por el paso de la primera esfera. Esto provoca un corredor de viscosidad reducida debido al adelgazamiento y a la relajación del fluido y que por lo tanto, es la principal influencia para la atracción de la segunda esfera. Lo anterior se refleja en el coeficiente de arrastre de la segunda esfera que se reduce principalmente debido al comportamiento adelgazante del fluido. De manera similar, esferas liberadas a distancias cortas son arrastradas en presencia de una cauda negativa.

Cuando la competencia entre la elasticidad y la orientación de las cadenas de polímero en la región de la cauda de la primera esfera alcanzan un equilibrio, la separación entre las esferas toma un valor constante. Esto ocurre cuando la segunda esfera detiene la orientación de las cadenas de polímero que están dentro de la región de la cauda de la primera, la cual se encuentra extendida debido a la elasticidad.

La repulsión entre esferas se presenta cuando la cauda de la primera esfera causa la disminución en la velocidad de la segunda, en el momento en que ésta se encuentra cerca del punto de estancamiento. Si el número de  $We$  aumenta, los efectos extensionales en la región de la cauda son más importantes; lo que provoca un incremento en el arrastre. Este aumento se presenta en la parte frontal de la segunda esfera, donde existe una región con cadenas de polímero altamente extendidas. No obstante, el arrastre sobre la esfera está determinado por la reología de corte y extensional del fluido.

Para los casos donde existe repulsión, los valores calculados de la viscosidad extensional no son muy diferentes para la primera y segunda esfera. Con esto, no se puede afirmar que sea el parámetro definitivo que gobierna el mecanismo para este caso. No obstante, es un buen indicio de que las propiedades extensionales son importantes en la sedimentación de esferas en polímeros asociativos.

Se caracterizó la columna de sedimentación y se encontró que los efectos del fondo de la columna son muy notorios en todas las esferas siendo más sensibles las esferas de mayor diámetro y densidad, lo que deja una longitud de medición de 20 cm, localizada 50 cm por debajo del dispositivo liberador.

## **Trabajo Futuro**

Para futuros trabajos se recomienda realizar experimentos de sedimentación de esferas consecutivas y analizarlos por medio de velocimetría por imágenes de partículas (PIV), ya que con esta técnica se puede obtener el campo de flujo alrededor de las esferas. Lo anterior ayudará a comprender mejor como se modifica el flujo cuando las esferas interactúan y analizar de manera exhaustiva la influencia del punto de estancamiento y de la cauda negativa.

En los experimentos de sedimentación de esferas es posible estudiar el tiempo de reestructuración de la solución. Si el tiempo entre esferas es lo suficientemente largo, la solución se reestructura y el movimiento de una no afectará el de la otra. Por otro lado, si el tiempo es corto, la solución no se reestructura y el efecto de la primera esfera afectará el movimiento de la segunda esfera.

Los experimentos de sedimentación de esferas se pueden comparar con experimentos de esfuerzo controlado, ya que la sedimentación de esferas es de hecho un experimento de esfuerzo controlado, en el sentido que gradualmente se incrementa el esfuerzo aplicado al fluido localizado enfrente de la esfera. Finalmente, en la ecuación cinética del modelo BMP se encuentra un parámetro que corresponde al tiempo de reestructuración del material.

---

1. Mendoza-Fuentes, A. J., Montiel, R., Zenit, R. & Manero, O. On the flow of associative polymers past a sphere: Evaluation of negative wake criteria. *Physics of Fluids* **21**, 033104 (2009).
2. Jones, W. M., Price, A. H. & Walters, K. The motion of a sphere falling under gravity in a constant-viscosity elastic liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **53**, 175-196 (1994).
3. Bot, E. T. G., Hulsen, M. A., van den Brule, B. H. A. The motion of two spheres falling along their line of centres in a Boger fluid<sup>1</sup>. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **79**, 191-212 (1998).
4. Bautista, F., Soltero, J. F. A., Perez-Lopez, J. H., Puig, J. E. & Manero, O. On the shear banding flow of elongated micellar solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **94**, 57-66 (2000).
5. Mendoza-Fuentes, A. J., Manero, O. & Zenit, R. Evaluation of drag correction factor for spheres settling in associative polymers. *Rheologica Acta* **9**, 1-6 (2010).
6. Caswell, B., Manero, O. & Mena, B. Recent developments on the slow viscoelastic flow past spheres and bubbles. *Rheology Reviews, British Society of Rheology* **2**, 197-223 (2004).
7. Riddle, M. J., Narvaez, C. & Bird, R. B. Interactions between two spheres falling along their line of centers in a viscoelastic fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **2**, 23-35 (1977).
8. Liu, Y. J. & Joseph, D. D. Sedimentation of particles in polymer solutions. *Journal of Fluid Mechanics* **255**, 565-595 (1993).
9. Feng, J., Hu, H. H. & Joseph, D. D. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid Part 1. Sedimentation. *Journal of Fluid Mechanics* **261**, 95-134 (1994).

- 
10. Gheissary, G., van den Brule, B. Unexpected phenomena observed in particle settling in non-Newtonian media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **67**, 1-18 (1996).
  11. Chhabra, R. P. *Bubbles, Drops, and Particles In Non-Newtonian Fluids* (Taylor & Francis, 2006).
  12. Mena, B., Manero, O. & Leal, L. G. The influence of rheological properties on the slow flow past spheres. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **26**, 247-275 (1987).
  13. Tirtaatmadja, V., Uhlherr, P. H. T. & Sridhar, T. Creeping motion of spheres in fluid M1. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **35**, 327-337 (1990).
  14. Degand, E. & Walters, K. On the motion of a sphere falling through an elastic liquid contained in a tightly-fitting cylindrical container. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **57**, 103-115 (1995).
  15. Navez, V. & Walters, K. A note on settling in shear-thinning polymer solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **67**, 325-334 (1996).
  16. Chmielewski, C., Nichols, K. L. & Jayaraman, K. A comparison of the drag coefficients of spheres translating in corn-syrup-based and polybutene-based Boger fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **35**, 37-49 (1990).
  17. Bautista, F., De Santos, J. M., Puig, J. E. & Manero, O. Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **80**, 93-113 (1999).
  18. Boek, E. S., Padding, J. T., Anderson, V. J., Tardy, P. M. J., et al. Constitutive equations for extensional flow of wormlike micelles: stability analysis of the Bautista-Manero model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **126**, 39-46 (2005).
  19. Tan, H., Tam, K. C., Tirtaatmadja, V., Jenkins, R. D. & Bassett, D. R. Extensional properties of model hydrophobically modified alkali-soluble associative (HASE) polymer solutions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **92**, 167-185 (2000).
  20. Daugan, S., Talini, L., Herzhaft, B. & Allain, C. Aggregation of particles settling in shear-thinning fluids Part 1. Two-particle aggregation. *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics* **7**, 73-81 (2002).
-

21. Verneuil, E., Phillips, R. J. & Talini, L. Axisymmetric two-sphere sedimentation in a shear thinning viscoelastic fluid: Particle interactions and induced fluid velocity fields. *Journal of Rheology* **51**, 1343 (2007).
  22. Chen, S. & Rothstein, J. P. Flow of a wormlike micelle solution past a falling sphere. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **116**, 205-234 (2004).
-

## A.1 Valores reportados

En este apartado se presentan los resultados reportados por Mendoza et al. [1] para esferas sedimentando en una solución de HASE 1.5% peso.

*Tabla A.1.1 Valores para esferas sedimentando en HASE 1.5% peso [1].*

Material	Cauda Negativa	Diámetro (cm)	Punto de estancamiento (cm)	Longitud de la cauda negativa (cm)
Acero	✓	1.2700	6.3	40
	✓	0.9525	5.0	25
	✓	0.7937	4.7	15
Teflón	✗	1.2700	7.9	-----
	✗	0.9525	8.0	-----
	✗	0.7937	5.9	-----
Acetal	✗	1.2700	6.3	-----
	✗	0.9525	8.0	-----
	✗	0.7937	5.5	-----

## A.2 Valores característicos

En este apéndice se muestran los valores calculados de las variables características para esferas que descienden en una solución de HASE 1.5% peso.

*Tabla A.2.1 Valores característicos para esferas individuales.*

Densidad (g/cm <sup>3</sup> )	Diámetro (cm)	$Re$	$We$	$\dot{\epsilon} = \frac{U}{d}$
7.9800	1.2700	1.7063	1.6178	7.7399
	0.9525	0.5826	1.1329	6.8289
	0.7937	0.3054	0.9243	5.9275
2.3000	1.2700	0.1418	0.2238	0.8537
	0.9525	0.0609	0.1744	0.6570
	0.7937	0.0372	0.1537	0.7850
1.3900	1.2700	0.0434	0.0710	0.2519
	0.9525	0.0199	0.0580	0.2184
	0.7937	0.0115	0.0484	0.2651

Tabla A.2.2 Valores característicos para esferas de acero.

Distancia inicial (cm)	Diámetro (cm)	$Re$	$We$	$\dot{\epsilon} = \frac{U}{d}$
8	1.2700	-----	-----	-----
		-----	-----	-----
	0.9525	0.5660	1.1114	6.6993
		0.5949	1.1530	6.9503
	0.7937	0.3079	0.9289	5.9567
		0.3219	0.9586	6.1475
6	1.2700	-----	-----	-----
		-----	-----	-----
	0.9525	0.6437	1.2115	7.3028
		0.7827	1.3987	8.4314
	0.7937	0.3313	0.9898	6.3477
		0.398	1.1019	7.06664
4	1.2700	-----	-----	-----
		-----	-----	-----
	0.9525	0.6431	1.2183	7.3436
		0.8261	1.4573	8.7843
	0.7937	0.3269	0.9704	6.2228
		0.3731	1.0722	6.8755
2	1.2700	-----	-----	-----
		-----	-----	-----
	0.9525	-----	-----	-----
		-----	-----	-----
	0.7937	-----	-----	-----
		-----	-----	-----

Tabla A.2.3 Valores característicos para esferas de teflón.

Distancia inicial (cm)	Diámetro (cm)	$Re$	$We$	$\dot{\epsilon} = \frac{U}{d}$
8	1.2700	0.1420	0.2241	0.8551*
		0.1388	0.2240	0.8410
	0.9525	0.0587	0.1679	0.6326
		0.0586	0.1683	0.6342
	0.7937	0.0337	0.1397	0.7138
		0.0341	0.1417	0.7238
6	1.2700	0.1405	0.2239	0.8544
		0.1519	0.2397	0.9145
	0.9525	0.0611	0.1743	0.6565
		0.0631	0.1804	0.6797
	0.7937	0.0365	0.1510	0.7715
		0.0381	0.1580	0.8073
4	1.2700	0.1354	0.2151	0.8206
		0.1435	0.2272	0.8669
	0.9525	0.0612	0.1751	0.6597
		0.0651	0.1856	0.6992
	0.7937	0.0370	0.1530	0.7817
		0.0398	0.1651	0.8436
2	1.2700	0.1945	0.3001	1.1448*
		0.1943	0.2998	1.1439
	0.9525	0.0790	0.2217	0.8351
		0.0826	0.2317	0.8728
	0.7937	0.0474	0.1940	0.9909
		0.0491	0.2017	1.0306

Tabla A.2.4 Valores característicos para esferas de acetal.

Distancia inicial (cm)	Diámetro (cm)	$Re$	$We$	$\dot{\epsilon} = \frac{U}{d}$
8	1.2700	0.0406	0.0666	0.2363
		0.0412	0.0678	0.2404
	0.9525	0.0177	0.0521	0.1963
		0.0179	0.0525	0.1979
	0.7937	0.0104	0.0441	0.2418
		0.0105	0.0443	0.2429
6	1.2700	0.0396	0.0652	0.2313*
		0.0388	0.0639	0.2266
	0.9525	0.0172	0.0502	0.1892*
		0.0171	0.0500	0.1884
	0.7937	0.0104	0.0439	0.2408*
		0.0103	0.0434	0.2377
4	1.2700	0.0410	0.0676	0.2395
		0.0416	0.0685	0.2428
	0.9525	0.0161	0.0470	0.1771
		0.0169	0.0495	0.1865
	0.7937	0.0101	0.0427	0.2340
		0.0104	0.0437	0.2393
2	1.2700	0.0591	0.0966	0.3425
		0.0612	0.0998	0.3538
	0.9525	0.0254	0.0740	0.2788
		0.0261	0.0760	0.2865
	0.7937	0.0140	0.0589	0.3226
		0.0143	0.0601	0.3292

### A.3 Deducción del Modelo BMP unimodal

El modelo Bautista-Manero-Puig se puede reducir a la forma unimodal expresada por la expresión:

$$\phi_{ss} = \frac{1}{2} \left[ -(\lambda k \dot{\gamma}^2 - \phi_0) + \left( (\lambda k \dot{\gamma}^2 - \phi_0)^2 + 4 \lambda k \dot{\gamma}^2 \phi_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.9)$$

a partir de la ecuación:

$$\frac{1 + (\lambda k)(\lambda_0/\lambda_\infty)(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}})}{1 + \lambda k(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}})} \underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \underline{\underline{\sigma}}^\nabla = 2G_0 \lambda_0 \underline{\underline{D}} \quad (2.5)$$

Para flujo cortante simple en estado estacionario la ecuación 2.5 se reduce a:

$$\frac{1 + (\lambda k)(\lambda_0/\lambda_\infty) 2\sigma_{12}\dot{\gamma}}{1 + \lambda k 2\sigma_{12}\dot{\gamma}} \sigma_{12} + \lambda_0 \underline{\underline{\sigma}}^\nabla = 2G_0 \lambda_0 \dot{\gamma} \quad (A.1)$$

Acomodando los términos de la ecuación (A.1) se obtiene una ecuación cuadrática para la componente  $\sigma_{12}$  del tensor de esfuerzos

$$\sigma_{12}^2 [2\dot{\gamma}\lambda k(\lambda_0/\lambda_\infty)] + \sigma_{12} [1 - 4\lambda k G_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2] - 2G_0 \lambda_0 \dot{\gamma} = 0 \quad (A.2)$$

Arreglando A.2 en términos del teorema fundamental del álgebra

$$\sigma_{12} = \frac{-[1 - 4\lambda k G_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2] \pm \sqrt{[1 - 4\lambda k G_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2]^2 + 4[2\dot{\gamma}\lambda k(\lambda_0/\lambda_\infty)][2G_0 \lambda_0 \dot{\gamma}]}}{2[2\dot{\gamma}\lambda k(\lambda_0/\lambda_\infty)]} \quad (A.3)$$

Dividiendo entre  $\dot{\gamma}$  la ecuación anterior, elevando al cuadrado, calculando la raíz cuadrada del denominador y desarrollando el cuadrado del primer término de la raíz cuadrada se obtiene:

$$\eta = \frac{-[1 - 4\lambda k G_0 \lambda_0 \dot{\gamma}^2] \pm \sqrt{1 - 8\lambda k \dot{\gamma}^2 (G_0 \lambda_0) + (4\lambda k \dot{\gamma}^2 (G_0 \lambda_0))^2 + 16\lambda k \dot{\gamma}^2 (\lambda_0/\lambda_\infty)(G_0 \lambda_0)}}{2 \sqrt{[2\dot{\gamma}^2 \lambda k (\lambda_0/\lambda_\infty)]^2}} \quad (A.4)$$

Haciendo uso de las relaciones:

$$\eta_0 = G_0 \lambda_0$$

$$\eta_\infty = G_0 \lambda_\infty$$

se puede simplificar la ecuación A.4, para obtener:

$$\eta = \left( \frac{2\eta_0}{\lambda_0/\lambda_\infty} - \frac{1}{2\lambda k \dot{\gamma}^2 \lambda_0/\lambda_\infty} \right) + \left( \frac{1}{(2\lambda k \dot{\gamma}^2 (\lambda_0/\lambda_\infty))^2} - \frac{4\eta_\infty}{2\lambda k \dot{\gamma}^2 (\lambda_0/\lambda_\infty)} + \frac{4\eta_0^2}{(\lambda_0/\lambda_\infty)^2} + \frac{4\eta_\infty}{\lambda k \dot{\gamma}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

$\frac{\lambda_0}{\lambda_\infty} = 1$  esta expresión se puede usar asumiendo que el flujo es lento y sabiendo

que  $\varphi = \frac{1}{\eta}$  se obtiene

$$\varphi_{ss} = 2 \left( \frac{\phi_0}{2} - 2\lambda k \dot{\gamma}^2 \right) + \left( (2\lambda k \dot{\gamma}^2)^2 - \frac{2\lambda k \dot{\gamma}^2 \phi_\infty}{4} + \frac{\phi_0^2}{4} + \frac{\lambda k \dot{\gamma}^2 \phi_\infty}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

Arreglando términos en A.6 se obtiene la expresión unimodal para la fluidez

$$\varphi_{ss} = \frac{1}{2} \left[ -(\lambda k \dot{\gamma}^2 - \phi_0) + \left( (\lambda k \dot{\gamma}^2 - \phi_0)^2 + 4\lambda k \dot{\gamma}^2 \phi_\infty \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Para obtener los módulos de almacenamiento y pérdida se usan las siguientes ecuaciones del modelo BMP:

$$\underline{\underline{\sigma_s}} = 2\underline{\underline{\eta_s}} D$$

$$\underline{\underline{\sigma_i}} + \frac{\underline{\underline{\eta_s}}}{G_0} \underline{\underline{\sigma_i}} = 2\underline{\underline{\eta_p}} D$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{1}{\lambda_i} (1 - A_i) + \frac{1}{G_{0i}} \left( \frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{\infty i}} - A_i \right) \underline{\underline{\sigma_i}} : D$$

Escribiendo las ecuaciones anteriores para flujo dinámico en corte usando

$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$ , se obtienen las siguientes ecuaciones dinámicas para flujo cortante

$$\frac{d\sigma_{12,p}}{dt} = -G_0 \sigma_{12,p} \phi + G_0 \dot{\gamma}$$

$$\frac{d\sigma_{11,p}}{dt} = -G_0\sigma_{11,p}\phi + 2\sigma_{12,p}\dot{\gamma}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores, con las siguientes relaciones

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{\dot{\gamma}}{w} \text{sen}(wt)$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma} \cos(wt)$$

suponiendo que  $\phi = \phi_0$ , se encuentran las siguientes ecuaciones para flujo cortante oscilatorio de baja amplitud:

$$\frac{d\sigma_{12,p}}{dt} = -G_0\phi_0\sigma_{12,p} + G_0\dot{\gamma} \cos(wt)$$

$$\frac{d\sigma_{11,p}}{dt} = -G_0\phi_0\sigma_{11,p} + 2\sigma_{12,p}(t)\dot{\gamma} \text{sen}(wt)$$

$$\sigma_{12,s} = \eta_s \dot{\gamma} \cos(wt)$$

recordando que  $\dot{\gamma} = \sigma/\eta$

$$\sigma = \dot{\gamma}_0 \int_0^\infty G(s) \cos w(t-s) ds$$

usando la relación trigonométrica para  $\cos(x-y)$ , se puede escribir

$$\sigma = \dot{\gamma}_0 \int_0^\infty G(s) \cos(ws) ds \cos(wt) + \dot{\gamma}_0 \int_0^\infty G(s) \text{sen}(ws) ds \text{sen}(wt)$$

se puede notar que

$$\sigma'_0 = \dot{\gamma}_0 \int_0^\infty G(s) \cos(ws) ds \cos(wt)$$

$$\sigma''_0 = \dot{\gamma}_0 \int_0^\infty G(s) \text{sen}(ws) ds \text{sen}(wt)$$

Para la viscosidad dinámica se definen las siguientes relaciones

$$\eta' = \frac{\sigma'_0}{\dot{\gamma}_0} = \frac{G'}{w}$$

$$\eta'' = \frac{\dot{\sigma}_0'}{\dot{\gamma}_0} = \frac{G'}{w}$$

Por lo tanto

$$G'' = w \int_0^{\infty} G(s) \cos(ws) ds$$

$$G' = w \int_0^{\infty} G(s) \operatorname{sen}(ws) ds$$

Se obtienen esas cantidades en términos de los tiempos de relajación exponenciales, escritos en una serie de tiempos de relajación  $\lambda_k$  multiplicados por las constantes de peso  $G_k$

$$G(t) = \sum_{i=1}^n G_i e^{-t/\lambda_i}$$

Módulo de almacenamiento o elástico (ecuación 2.6)

$$G' = \sum_{i=1}^n G_{oi} \frac{w\lambda_{0i}}{1 + w^2\lambda_{0i}^2}$$

Módulo de pérdida (ecuación 2.7)

$$G'' = \sum_{i=1}^n G_{oi} \frac{w^2\lambda_{0i}^2}{1 + w^2\lambda_{0i}^2}$$

---

## A.4 Lista de símbolos

$We$	Número de Weissenberg
$Re$	Número de Reynolds
$De$	Número de Deborah
$M$	Número de Mach
$M_v$	Número viscoelástico de Mach
$Tr$	Cociente de Trouton
$\dot{\gamma}$	Rapidez de corte
$\dot{\epsilon}$	Rapidez de extensión
$\lambda$	Tiempo de relajación
$\eta_e$	Viscosidad extensional
$\eta$	Viscosidad de corte
$\eta_0$	Viscosidad de corte cero
$\eta_\infty$	Viscosidad a altas frecuencias
$\eta_s$	Viscosidad del solvente
$\eta_p$	Viscosidad del polímero
$\sigma_{ext}$	Esfuerzo de extensión
$\sigma_{xy}$	Esfuerzo de corte
$\psi_1$	Primer coeficiente de esfuerzos normales
$N_1$	Primera diferencia de esfuerzos normales

---

---

$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor total de esfuerzo
$\underline{\underline{\sigma}}_i$	i-esima contribución al tensor total de esfuerzos
$\underline{\underline{\nabla}}$	Derivada convectiva superior del tensor de esfuerzos
$\underline{\underline{\sigma}}_s$	Tensor de esfuerzos para el solvente
$\underline{\underline{\sigma}}_p$	Tensor de esfuerzos para el polímero
$\underline{\underline{D}}$	Tensor rapidez de deformación
$A$	Parámetro de estructura
$\lambda_0$	Tiempo de relajación de Maxwell
$\lambda_\infty$	Tiempo de relajación a altas frecuencias
$G_0$	Módulo de elasticidad
$G'$	Módulo de almacenamiento
$G''$	Módulo de pérdida
$w$	Frecuencia de oscilación
$\varphi$	Fluidez
$\varphi_{ss}$	Fluidez en estado estacionario
$\varphi_0$	Fluidez de corte cero
$\varphi_\infty$	Fluidez a altas frecuencias
$\phi$	Fluidez del polímero en flujo extensional
$\phi_0$	Fluidez de corte cero en flujo extensional

---

---

$k$	Constante cinética para el rompimiento de la estructura
$C_D$	Coeficiente de arrastre
$K$	Factor de corrección por arrastre
$K_N$	Factor de corrección por arrastre para un fluido newtoniano
$\phi_s$	Diámetro de la esfera
$\rho$	Densidad
$\rho_s$	Densidad de la esfera
$\rho_f$	Densidad del fluido
$a$	Radio de la esfera
$R$	Radio del tubo
$g$	Gravedad
$U$	Velocidad terminal
$d_i$	Distancia de separación inicial entre las esferas al iniciar la toma de datos
$d_{ii}$	Distancia de separación inicial entre las esferas referente al dispositivo de liberación

---