



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

INFLUENCIA DE LOS EFECTOS
ELECTROMAGNÉTICOS Y MECÁNICOS SOBRE LA
TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN CONDUCTOR
ELÉCTRICO DE ALTA TENSIÓN

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

P R E S E N T A :

M. EN I. OSCAR ARTURO CHÁVEZ LÓPEZ



TUTOR:

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari

Secretario: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

Vocal: Dr. Federico Méndez Lavielle

1er Suplente: Dr. Jorge Carrera Bolaños

2do Suplente: Dr. Oscar Eladio Bautista Godinez

Lugar donde se realizó la tesis:

DEPARTAMENTO DE TERMOFLUIDOS, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE



FIRMA

Mis más sinceros agradecimientos:

A mis padres y hermanos por haberme apoyado todos estos años.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle por su amistad, además de su apoyo en la dirección de esta tesis.

Al Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental de la Facultad de Ingeniería, UNAM por brindarme los recursos necesarios para la realización de este trabajo.

A Najil por su gran amistad y apoyo incondicional.

A mis amigos, en especial a Israel, Jorge y Rafael, por sus buenos consejos y su amistad que me brindaron.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por proporcionar recursos para el desarrollo del proyecto "ANÁLISIS TEÓRICO DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN CONDUCTORES ELÉCTRICOS SOMETIDOS A ALTA TENSIÓN BAJO LA INFLUENCIA DE LOS EFECTOS ELECTROMAGNÉTICOS PELICULAR Y DE PROXIMIDAD" con número de referencia 79811.

A CEP- UNAM por la beca proporcionada para el desarrollo de mis estudios de doctorado.

Índice

Capítulo 1

Introducción	1
1.1 Generalidades.....	1
1.2 Antecedentes.....	3

Capítulo 2

Conductores Mono-metálicos	6
2.1 Fenómeno físico.....	6
2.2 Modelo matemático.....	7
2.2.1 Modelo eléctrico.....	7
2.2.2 Modelo térmico.....	8
2.2.3 Análisis de órdenes de magnitud y variables adimensionales.....	11
2.2.4 Modelo eléctrico adimensional.....	13
2.2.5 Modelo térmico adimensional.....	14
2.3 Efecto pelicular fuerte.....	14
2.3.1 Influencia del parámetro pelicular ε	18
2.3.2 Influencia del número de Biot Bi	21
2.4 Solución del modelo termo-eléctrico.....	24
2.4.1 Influencia del parámetro pelicular ε	25
2.4.2 Influencia del parámetro de acoplamiento κ	29
2.4.3 Influencia de la fuerza de tensión F	33
2.5 Análisis de resultados.....	37

Capítulo 3

Conductores Bi-metálicos	39
3.1 Fenómeno físico.....	39
3.2 Modelo matemático.....	40
3.2.1 Modelo eléctrico.....	40
3.2.2 Modelo térmico.....	42
3.2.3 Análisis de órdenes de magnitud y variables adimensionales.....	45
3.2.4 Modelo eléctrico adimensional.....	47
3.2.5 Modelo térmico adimensional.....	48

3.3 Solución del modelo termo-eléctrico.....	49
3.3.1 Influencia del parámetro pelicular ε	50
3.3.2 Influencia del parámetro de acoplamiento κ	54
3.3.3 Influencia del número de Biot Bi	59
3.4 Análisis de resultados.....	62
Capítulo 4	
Eficiencia eléctrica.....	65
4.1 Caso mono-metálico.....	65
4.2 Caso bi-metálico.....	67
4.3 Análisis de resultados.....	70
Capítulo 5	
Conclusiones y Trabajo a Futuro.....	72
Apéndices.....	75
A Obtención del modelo eléctrico.....	75
B Método de solución del problema.....	79
C Propiedades físicas.....	86
D Código Numérico.....	88
Referencias.....	112

Resumen

En el presente trabajo se analiza teóricamente la transferencia de calor por conducción que se origina por una corriente eléctrica alterna que fluye continuamente en conductores eléctricos circulares, considerando que la resistividad eléctrica es una función lineal de la temperatura. El efecto anterior conduce a la necesidad de analizar de manera simultánea los efectos eléctricos y los térmicos. De esta manera se obtiene un modelo termo-eléctrico acoplado no previsto anteriormente en la literatura especializada.

A la formulación anterior, se añade la presencia del efecto pelicular que provoca diferencias de temperatura radiales considerables en regiones próximas a la superficie del conductor, ya que para altas frecuencias la corriente eléctrica tiende a fluir por la superficie del conductor y esto ocasiona que la generación de calor por el efecto joule no sea uniforme. La situación anterior conduce a que en una primera aproximación, las ecuaciones que describen el fenómeno físico se analicen para un estado transitorio con variaciones solamente en la dirección radial del conductor.

En este trabajo se llevó a cabo en particular, el análisis de transferencia de calor tanto para conductores mono-metálicos como para conductores bi-metálicos; es decir, conductores de aluminio reforzado de acero ACSR (por sus siglas en inglés). En total se presentan tres casos principales, dos de los cuales corresponden al caso mono-metálico, y uno bi-metálico. El primer caso de estudio mono-metálico consiste en considerar que se presenta un efecto pelicular fuerte, lo que significa que la totalidad de la densidad de corriente fluye a través de la superficie del conductor, por esta razón es posible realizar un análisis de capa límite. En este caso se considera que la resistividad eléctrica permanece constante, lo que permite resolver la ecuación correspondiente al fenómeno eléctrico sin tomar en cuenta el modelo térmico; es decir, las ecuaciones correspondientes quedan desacopladas. El segundo caso de estudio de conductores mono-metálicos, consiste en considerar que la resistividad eléctrica varía linealmente con la temperatura, esta hipótesis trae consigo un efecto conjugado por lo que el sistema de ecuaciones correspondiente al modelo térmico y eléctrico se debe resolver de manera simultánea.

El caso de estudio bi-metálico consiste en modelar tanto el proceso de transferencia de calor en el acero, así como en el aluminio, de tal forma que sea necesario determinar la distribución de densidad de corriente en ambos medios. Además al considerar que la resistividad varía con la temperatura, origina que el modelo eléctrico se encuentre acoplado con el modelo térmico, por esta razón el modelo resultante tiene una gran complejidad matemática. Como se demostrará detalladamente, la densidad de corriente alterna se describe por una ecuación de onda no lineal, que resulta de la dependencia que tiene la resistividad eléctrica sobre la temperatura. La presencia de los términos no lineales sobre la ecuación de onda dificulta la solución de la misma ya que estos términos son dependientes de la temperatura. De esta manera y mediante la solución numérica simultánea de las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de difusión de calor, es posible determinar tanto la distribución de densidad de corriente, así como el campo y los gradientes de temperatura en estado transitorio.

El esquema numérico empleado toma en cuenta que para cada instante de tiempo es indispensable realizar un proceso de iteración espacial en virtud del carácter de simultaneidad de las ecuaciones de gobierno. En particular, para la formulación en diferencias finitas de la ecuación de onda se utiliza el método de eliminación de Gauss, mientras que para la ecuación de conducción de calor se utiliza el algoritmo de Thomas.

Los resultados se presentan en forma adimensional con el fin de reducir el número de variables físicas involucradas. Además, la adimensionalización posee otras bondades, ya que es posible hacer uso de los resultados adimensionales para cualquier conductor mono-metálico de cualquier radio; sin embargo, para el caso bi-metálico los resultados pueden aplicarse únicamente para conductores ACSR, ya que los modelos adimensionales poseen cocientes de propiedades y en este caso se usaron las propiedades del acero y del aluminio. Sin embargo, existen una gran variedad de conductores ACSR, por lo que dichos resultados son igualmente importantes. En particular se analiza la influencia del número de Biot, el parámetro pelicular y el parámetro de acoplamiento en la distribución de densidad de corriente y los gradientes de temperatura en estado transitorio.

Nomenclatura

- D Densidad de flujo eléctrico $\left[\frac{C}{m^2} \right]$
- B Densidad de flujo magnético $[T]$, $\left[\frac{Wb}{m^2} \right]$ ó $\left[\frac{J}{A \cdot m^2} \right]$
- E Intensidad de campo eléctrico $\left[\frac{V}{m} \right]$ ó $\left[\frac{J}{C \cdot m} \right]$
- H Intensidad de campo magnético $\left[\frac{A}{m} \right]$
- J Densidad de corriente $\left[\frac{A}{m^2} \right]$
- r Coordenada radial $[m]$
- R Radio del conductor mono-metálico $[m]$
- T Temperatura $[^{\circ}C]$
- t Tiempo $[s]$
- i Número imaginario $\sqrt{-1}$
- k Conductividad térmica $\left[\frac{W}{m^{\circ}C} \right]$
- h Coeficiente de convección $\left[\frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$
- c Calor específico $\left[\frac{J}{Kg^{\circ}C} \right]$
- Bi Número de Biot $Bi = \frac{hR}{k_{ef}}$
- L Longitud de los alambres $[m]$
- A Área $[m^2]$
- V Volumen $[m^3]$

n Número de alambres del conductor

F Fuerza de tensión $[Klb_f]$

a Radio del núcleo de acero $[m]$

b Radio total del conductor bi-metálico $[m]$

Griegos

α Parámetro adimensional $\alpha = \frac{k_{al,ef} (\rho c)_{ac,ef}}{k_{ac,ef} (\rho c)_{al,ef}}$

Λ Parámetro adimensional $\Lambda = \frac{\lambda_{\infty,ac} k_{al,ef}}{\lambda_{\infty,al} k_{ac,ef}}$

K Parámetro adimensional $K = \frac{k_{ac,ef}}{k_{al,ef}}$

μ Permeabilidad magnética $\left[\frac{H}{m} \right]$ ó $\left[\frac{J}{A^2 m} \right]$

γ Permitividad eléctrica $\left[\frac{F}{m} \right]$ ó $\left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right]$

σ Factor de porosidad $\left[\frac{V_{air}}{V_T} \right]$

λ Resistividad eléctrica $[\Omega \cdot m]$ ó $\left[\frac{W \cdot m}{A^2} \right]$

ω Frecuencia angular $\left[\frac{rad}{s} \right]$

ρ Densidad $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$

δ Profundidad de película $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\mu}} \quad [m]$

φ Densidad de corriente adimensional

η Coordenada radial adimensional para el aluminio

θ Temperatura adimensional

- τ Tiempo adimensional
- β Eficiencia eléctrica
- ϕ Coeficiente de temperatura para la resistividad
- ζ Variable interna
- ξ Coordenada radial
- κ Parámetro de acoplamiento
- ε Parámetro pelicular

Subíndices

- T Total
- s Depende únicamente de la coordenada espacial
- ∞ Condiciones ambientales
- c Característica
- ef Efectiva
- R Evaluada en la superficie del conductor mono-metálico
- b Evaluada en la superficie del conductor bi-metálico
- al Referente al aluminio
- ac Referente al acero
- air Referente al aire
- CA Corriente alterna
- CD Corriente directa

Capítulo 1

Introducción

1.1 Generalidades

En la actualidad el estudio del comportamiento térmico de los conductores eléctricos tiene una gran importancia debido a que cada día hay un incremento en las necesidades energéticas; sin embargo, debido a restricciones económicas, es más rentable utilizar a su máxima capacidad los conductores ya instalados que instalar nuevas líneas de transmisión eléctrica.

La carga máxima de corriente que puede ser transportada por un conductor es denominada como ampacidad del conductor [1], y está determinada por una temperatura máxima de operación. Por lo que el análisis de la ampacidad de conductores eléctricos es de suma importancia para la completa utilización del conductor, especialmente en situaciones de sobrecarga y cortocircuitos.

En general, existen dos factores físicos que determinan directamente la vida útil de un conductor eléctrico: estos son la dilatación y el tratamiento térmico de recocido, ya que al calentarse el conductor este puede deformarse elásticamente y de manera crítica puede presentarse el caso de una deformación plástica y no poder recuperar su forma original. Bajo estas circunstancias y si se llega a temperaturas lo suficientemente altas, se vuelve inevitable el tratamiento térmico de recocido, que puede afectar de manera directa las propiedades mecánicas del conductor; así como propiedades eléctricas como la resistividad, ya que suele presentarse una recristalización y un proceso de nucleación y crecimiento de nuevos granos [2]. Con el fin de preservar la vida útil de un conductor, es indispensable imponer los niveles de ampacidad óptimos para asegurar que los límites de temperatura sean satisfechos.

La cantidad de corriente eléctrica que puede ser transportada por un conductor puede ser seriamente afectada por las condiciones climáticas, como son la velocidad del viento y temperatura ambiental y también de manera relevante por el calor generado por el efecto Joule. Que tanto se caliente el material conductor por conducción de calor, así como que porcentaje del calor generado se disipa de manera convectiva hacia el medio ambiente, incide directamente en una operación adecuada para el transporte de la corriente eléctrica.

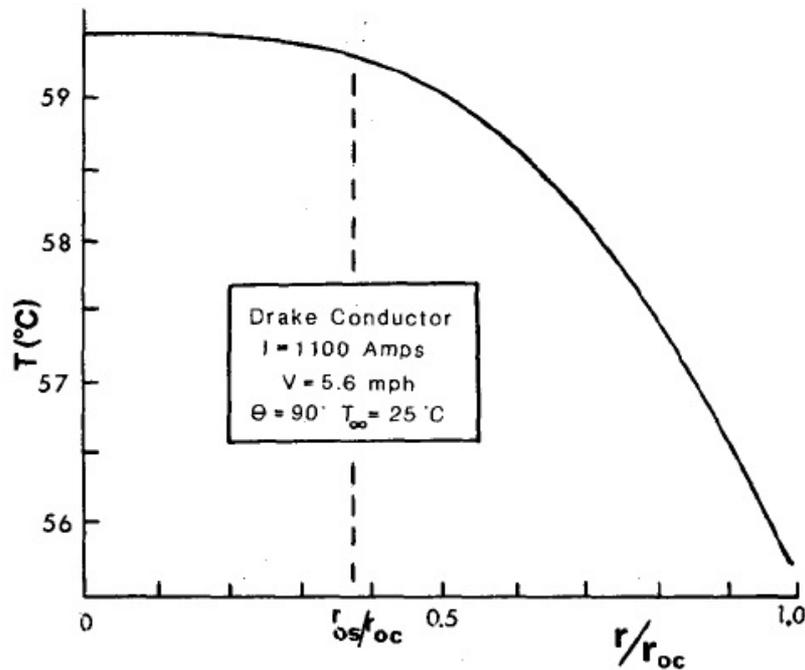


Figura 1. Perfil de temperatura de un conductor eléctrico ACSR Drake [3].

Como se puede apreciar en la Fig. 1, Black *et al.* [3] ilustraron el perfil típico de temperatura para un conductor eléctrico del tipo ACSR Drake. Es posible apreciar que la temperatura en el centro del conductor es superior a la temperatura en la superficie del conductor, por lo que es de gran importancia el estudio de la diferencia de temperatura en dirección radial con el objetivo de no sobrecargar la línea de transmisión eléctrica, ya que posiblemente la temperatura exterior se encuentre por debajo de la temperatura de operación; sin embargo, se puede presentar el caso que la temperatura del centro sobrepase dicho límite, de aquí la importancia de un análisis térmico en dirección radial.

Vakil, *et al.* [4] demostraron de manera esquemática que el conocimiento de los gradientes de temperatura en estado permanente no es suficiente para conocer el estado real de operación y transmisión de la corriente eléctrica, sino que es indispensable conocer el comportamiento térmico en estado transitorio. Un análisis de este tipo es gran utilidad en situaciones de sobrecarga, ya que como se observa en la Fig. 2 es posible sobrecargar la línea de transmisión muy por encima de su capacidad máxima, aprovechando el tiempo que tarda el conductor en llegar a su temperatura máxima de operación, o si bien ocurre que la corriente eléctrica está por debajo de la capacidad del conductor nunca se va a sobrepasar la temperatura máxima de operación.

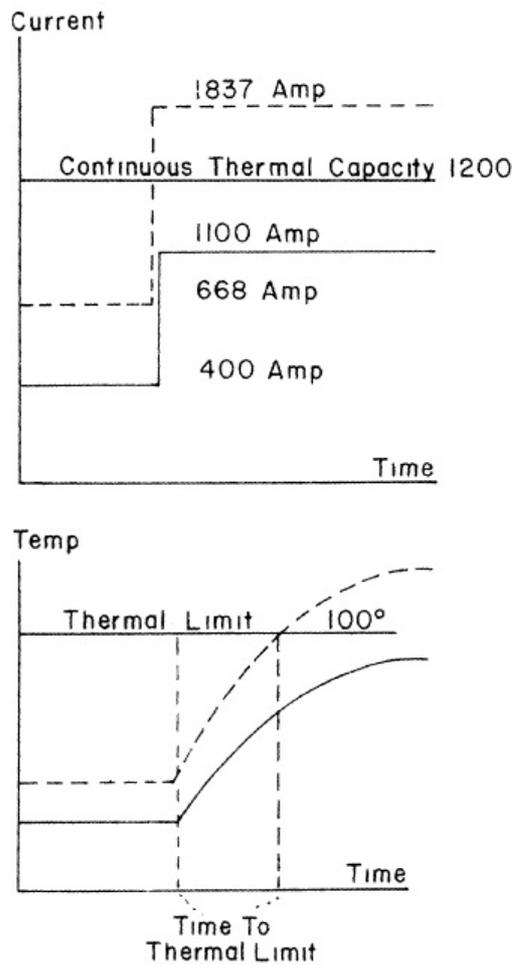


Figura 2. Comportamiento térmico en estado transitorio a causa de un incremento súbito de la corriente eléctrica [4].

Por las razones anteriormente mencionadas es necesario realizar un análisis de la transferencia de calor en la dirección radial así como en estado transitorio, con el propósito de obtener una mejor descripción del fenómeno físico. Para llevar a cabo lo anterior, es indispensable al menos tomar en cuenta los efectos siguientes que gobiernan el fenómeno termo-eléctrico: las condiciones ambientales, el efecto pelicular, la fuerza de tensión y la variación de la resistividad con la temperatura.

1.2 Antecedentes

El estudio del comportamiento térmico de conductores eléctricos inicialmente tomó gran importancia debido a la pérdida de tensión mecánica que se origina por la dilatación volumétrica que se presenta al calentarse el conductor. De igual forma cuando el conductor eléctrico se sobrecarga de corriente eléctrica se presenta el tratamiento térmico de recocido, lo que ocasiona una pérdida de sus propiedades tanto mecánicas así como eléctricas, lo que origina una mayor pérdida de energía en forma de calor. Se observó que la distribución de temperatura en los conductores eléctricos es una restricción muy fuerte que impide o

facilita, según sea el caso, el transporte de la energía eléctrica; por esta razón el estudio térmico de los conductores eléctricos es de vital importancia para las líneas de transmisión. En un principio el estudio térmico se llevó a cabo mediante sistemas que calculaban la temperatura del cable en tiempo real; dicho sistema incluía ecuaciones de transferencia de calor por convección forzada y natural, tomando en cuenta el régimen y dirección del viento. Los sistemas no contaban con representaciones matemáticas rigurosas, y las temperaturas calculadas eran generalmente superiores a las reales, puede apreciarse en los trabajos de Davis [5] y [6], lo que impedía la completa utilización del conductor.

De manera paralela, en el pasado se llevaron a cabo estudios sobre la pérdida de tensión mecánica debido a la dilatación volumétrica del conductor [7-8]; dichos estudios realizados experimentalmente dieron una serie de relaciones empíricas, que siendo de enorme interés práctico solo cubren ciertos rangos de temperatura y solo pueden aplicarse a determinados conductores.

Posteriormente y debido a la fuerte influencia que tienen las condiciones climáticas en la temperatura que alcanza el conductor eléctrico, se desarrollaron algunos estudios teóricos y experimentales, cuyo objetivo principal era optimizar el proceso de traducir los datos meteorológicos y de corriente eléctrica en una temperatura en estado transitorio con ayuda de modelos térmicos simplificados y con la finalidad de poder determinar la mayor cantidad de corriente eléctrica que puede ser transportada. Foss y Fernandes [9-10] desarrollaron un algoritmo dinámico de ampacidad combinado con mediciones meteorológicas y de temperatura del cable en tiempo real, mostrando además un modelo para determinar la conductividad térmica efectiva en dirección radial. Al mismo tiempo, Black y Byrd [11] formularon un modelo térmico en parámetros concentrados; es decir, despreciando la existencia de gradientes de temperatura. Dicho modelo consiste en un balance de energía entre el calor generado por efecto joule y la transferencia de calor hacia el ambiente, tanto en estado transitorio como en estado permanente.

Más tarde se observó que los gradientes de temperatura en los cables trenzados son mucho mayores que los gradientes de temperatura de los cables sólidos, debido al aire atrapado entre los alambres que conforman al cable. Black *et al.* [3] hicieron una comparación de los gradientes de temperatura en estado permanente con los resultados obtenidos bajo la suposición de que la temperatura en el conductor es uniforme, mostrando que la temperatura en el centro del conductor es siempre superior a la temperatura calculada bajo la suposición de temperatura constante. Morgan [12] mostró la función de la distribución de temperaturas en estado permanente de cables mono-metálicos, sólidos y trenzados, con densidad de corriente uniforme. Además presentó un nuevo análisis para el cálculo de la conductividad térmica equivalente en conductores trenzados.

En la actualidad con el avance computacional es posible obtener de manera sencilla la solución de las ecuaciones de transferencia de calor en estado transitorio y de esta manera obtener los perfiles de temperatura durante el estado transitorio. Miñambres *et al.* [13] realizaron un modelo basado en la técnica de elemento finito para la transferencia de calor en un cable trenzado. De esta manera, la tendencia actual es observar el efecto que tiene el calor generado en el aluminio sobre el acero durante el estado transitorio.

La presente tesis propone un modelo que combina simultáneamente los efectos termo-eléctricos con el fin obtener los perfiles de temperatura y densidad de corriente para los conductores eléctricos mono-metálicos y bi-metálicos en estado transitorio. La idea principal de tal estudio es observar la interacción de ambos modelos; así como la influencia del núcleo de acero en el caso bi-metálico. Además en el presente trabajo se hace un análisis de una gran cantidad de casos, en los cuales se observa el comportamiento térmico para diferentes condiciones ambientales; así como el efecto pelicular y su influencia en el proceso de transferencia de calor, por lo que es posible obtener un mejor aprovechamiento de las líneas de transmisión ya instaladas, o incluso determinar el radio óptimo.

Capítulo 2

Conductores Mono-metálicos

2.1 Fenómeno Físico

El caso de estudio consiste en un incremento repentino de la corriente eléctrica en un conductor cilíndrico mono-metálico que se encuentra inicialmente a temperatura ambiente. Debido a que fluye corriente alterna se presenta una redistribución de la densidad de corriente eléctrica, de tal forma que la corriente tiende a fluir por la superficie del conductor, a éste fenómeno se le conoce como efecto pelicular [14]. En el conductor se presenta un incremento de temperatura debido al efecto Joule. El calor generado por dicho efecto es significativamente mayor en la superficie del conductor; es decir, la generación de calor se presenta de manera no uniforme. Por lo que durante el estado transitorio el calor generado se transfiere hacia el centro del conductor por difusión de calor, mientras que se transfiere calor hacia el ambiente por convección térmica y el incremento de temperatura que sufre el conductor está directamente relacionado con la cantidad de calor que se transfiere al ambiente.



Figura 3. Conductor eléctrico AAC (All Aluminum Conductor).

Al presentarse un incremento en la temperatura, provoca de la misma forma un incremento en la resistividad eléctrica lo que origina a su vez una redistribución en la densidad de corriente, y por lo tanto de la misma generación de calor; es por esta razón que se debe tomar en cuenta la influencia que existe entre los modelos eléctrico y térmico.

Además la distribución de temperatura radial se ve afectada por la fuerza de tensión mecánica, ya que a que al aumentar la fuerza de tensión, los alambres que conforman al conductor eléctrico se deforman de tal manera que aumenta el área de contacto entre dichos alambres y por lo tanto aumenta la transferencia de calor por difusión, por esta razón es de gran importancia observar como la fuerza de tensión modifica los gradientes de temperatura.

2.2 Modelo Matemático

Con el fin de tener un modelo matemático que represente de mejor manera al fenómeno físico, es necesario obtener tanto un modelo térmico que modele los gradientes de temperatura durante el estado transitorio; así como un modelo electromagnético que indique la distribución de densidad corriente. De la interacción térmica y dinámica entre ambos modelos ocasionada por la influencia de la resistividad eléctrica como función de la temperatura; se tomará además en cuenta la influencia que tiene la fuerza de tensión en el comportamiento térmico del conductor.

2.2.1 Modelo eléctrico

A partir de las ecuaciones necesarias para describir la propagación de las ondas electromagnéticas originalmente derivadas por Maxwell [15], es posible obtener una ecuación de onda (véase los detalles que aparecen en el apéndice A para la obtención de dicha ecuación)

$$\nabla^2 \lambda \bar{J} = \mu \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \lambda \bar{J}}{\partial t^2} \right) , \quad (1)$$

en la ecuación anterior, λ representa la resistividad eléctrica, \bar{J} es la densidad de corriente, μ es la permeabilidad magnética, γ es la permitividad eléctrica y t es el tiempo en unidades físicas. Es importante mencionar que la resistividad eléctrica λ es función de la temperatura y esta dependencia es más relevante según el material que se esté tomando en cuenta. Cabe mencionar que resulta inevitable el cambio de la resistividad conforme varía la temperatura, dicho cambio en el valor de la resistividad se traduce en un aumento de energía disipada en forma de calor. Por lo que es conveniente tomar en cuenta este aumento de generación de calor con el fin de obtener una mejor descripción del fenómeno físico.

En nuestro caso sólo se considera que existen variaciones de la densidad de corriente en la dirección radial y que la corriente alterna se comporta de manera sinusoidal. Por lo que la densidad de corriente puede escribirse como $\bar{J} = J_s(r)e^{i\omega t}$. Por otro lado, la resistividad eléctrica tiene una variación lineal con respecto a la temperatura y puede ser escrita como $\lambda = \lambda_\infty [1 + \phi(T - T_\infty)]$, introduciendo las expresiones anteriores en la ec. (1) obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(\frac{2\phi}{1 + \phi(T - T_\infty)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \frac{\phi}{1 + \phi(T - T_\infty)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \\ = \left\{ \frac{\mu\omega}{\lambda} \left[i + \gamma\omega\lambda_\infty \left(\frac{\phi}{\omega^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i \cdot \phi}{\omega} \frac{\partial T}{\partial t} - (1 + \phi(T - T_\infty)) \right) \right] \right\} J_s , \end{aligned} \quad (2)$$

En las suposiciones y ecuaciones anteriores se considera que ω es la frecuencia de la señal eléctrica, r es la coordenada radial, T es la temperatura, T_∞ es la temperatura ambiental, J_s es la función de densidad de corriente dependiente sólo de la coordenada radial, ϕ es el coeficiente de temperatura para la resistividad e i es el número imaginario $\sqrt{-1}$.

Es posible introducir el parámetro de profundidad de película en el conductor, δ definido por $\delta = (2\lambda / \omega\mu)^{1/2}$; de esta forma la ec. (2) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(\frac{2\phi}{1+\phi(T-T_\infty)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \frac{\phi}{1+\phi(T-T_\infty)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \\ = \left\{ \frac{2}{\delta^2} \left[i + \gamma\omega\lambda_\infty \left(\frac{\phi}{\omega^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i \cdot \phi}{\omega} \frac{\partial T}{\partial t} - (1+\phi(T-T_\infty)) \right) \right] \right\} J_s \quad , \end{aligned} \quad (3)$$

La ecuación anterior deberá resolverse con las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{en } r = 0: \quad \frac{dJ_s}{dr} = 0 \quad , \quad (4)$$

$$\text{en } r = R: \quad J = J_R \quad . \quad (5)$$

Aquí R representa el radio del conductor y J_R es la densidad de corriente en la superficie del conductor cuyo valor deberá determinarse mediante la siguiente restricción:

$$I = \int_S J_s \cdot dA \quad , \quad (6)$$

donde A es el área de la sección transversal, I es la corriente eléctrica total que circula a través del conductor y la integral anterior representa una integral de superficie. En nuestro caso, el valor de la corriente total I se supone que es conocida y por consiguiente el valor de J_R representa un auto-valor ya que para valor diferente de la corriente total I se tiene un único valor de J_R .

Como se puede observar en la ec. (3), la distribución de la densidad de corriente depende de los gradientes de temperatura en el conductor eléctrico, lo que indica un acoplamiento con el modelo térmico que se describe a continuación.

2.2.2 Modelo Térmico

El modelo térmico parte de la ecuación de difusión de calor en estado transitorio incluyendo el término de generación de calor que define el efecto Joule. En este modelo térmico es necesario hacer algunas consideraciones con el fin de simplificarlo. En primer lugar se considera que el conductor eléctrico se encuentra a temperatura ambiente al inicio

del estado transitorio, y que solo existe variación en dirección radial; además, se considera que la única ganancia de calor es por el efecto Joule y de la misma forma solamente existe transferencia de calor del conductor al ambiente por convección.

Además, se toma en cuenta que para el modelo térmico, el proceso de difusión de calor se lleva a cabo a través de un medio poroso. Esta última consideración se desprende del hecho de que los cables reales de conducción eléctrica son un sistema a su vez constituido por varios cables trenzados de tal forma que dejan pequeñas cavidades o espacios libres ocupados generalmente por aire. De esta manera, una representación sencilla para los valores de las propiedades físicas del conductor parte de considerar que el conductor se pueda representar como un medio poroso homogéneo con propiedades que asumen valores efectivos. Por otro lado, una característica de los conductores trenzados es que su conductividad térmica radial es relativamente pequeña, debido a que la conductividad térmica del aire que se encuentra entre los alambres es muy baja, por lo que es considerado como un excelente aislante térmico, mientras que la conductividad térmica de los conductores sólidos es significativamente mayor, por esta razón las propiedades efectivas tienen un papel primordial en el modelo matemático, ya que al obtener dichas propiedades efectivas se puede considerar al medio poroso como un medio continuo y de esta forma se puede trabajar con los correspondientes modelos matemáticos pero con valores promediados de las propiedades involucradas.

La cuestión principal en la teoría de los medios porosos homogéneos es saber de que forma se ven afectadas las propiedades físicas como la conductividad térmica, densidad y capacidad térmica específica, debido a que dependen directamente de la cantidad de aire atrapado en el conductor; así como de la forma de la cavidad que contiene al fluido, y además es necesario saber el tipo de transferencia de calor que se lleva dentro de la cavidad; es decir, es necesario saber si el fluido alcanza a transferir calor por convección, o exclusivamente se transfiere el calor por difusión. Morgan [12] mostró que para conductores trenzados la transferencia de calor en los espacios ocupados por el aire, la transferencia de calor se da principalmente por difusión, lo que simplifica en gran medida el modelo matemático. Por lo que es necesario determinar como primer paso al factor de porosidad de la siguiente manera [12,16-18].

El factor de porosidad, σ_{al} , se define como el porcentaje de volumen del fluido contenido en el sólido y se puede determinar de la siguiente forma:

$$\sigma_{al} = 1 - \frac{V_{al}}{V_{T,al}} \quad , \quad (7)$$

donde σ es el factor de porosidad, V_{al} representa al volumen ocupado por los alambres de aluminio, mientras que $V_{T,al}$ representa al volumen total del conductor eléctrico y quedan definidos de la siguiente manera:

$$V_{al} = n_{al} \times \pi \times r_{al}^2 \times L \quad , \quad (8)$$

$$V_{T,al} = \pi \times R^2 \times L \quad . \quad (9)$$

En la ec. (8), n_{al} es el número de alambres que forman al conductor, r_{al} es el radio de cada alambre y L es la longitud del conductor eléctrico.

Una vez definido el factor de porosidad, este puede utilizarse con la finalidad de determinar las propiedades efectivas [16. Por ejemplo, para determinar el producto ρc del aluminio conductor poroso, se utiliza la siguiente expresión:

$$(\rho c)_{al,ef} = \sigma_{al} (\rho c)_{air} + (1 - \sigma_{al}) (\rho c)_{al} \quad . \quad (10)$$

Donde ρ es la densidad y c es el calor específico y de esta manera se obtiene un promediado de las propiedades, de tal forma que ahora este valor promediado puede ser utilizado en la ecuación de difusión de calor.

De manera equivalente, para la conductividad térmica efectiva se puede seguir un procedimiento análogo. A continuación se muestra este modelo de la conductividad térmica para utilizarse en la ecuación de difusión en estado transitorio (para mayores detalles se pueden consultar las referencias [9,16]):

$$k_{al,ef} = \sigma_{al} k_{air} + (1 - \sigma_{al}) K_{al} \quad . \quad (11)$$

En la ecuación anterior, k_{al} representa a la conductividad térmica del aluminio, mientras que k_{air} es la conductividad térmica del aire y el subíndice ef se refiere a las propiedades efectivas. Esta formulación de las propiedades surge de considerar que en el medio continuo se encuentran intercaladas capas concéntricas de material sólido y de fluido. Es importante mencionar que existen estudios rigurosos para determinar una conductividad equivalente. Morgan y Findlay [19] demostraron de manera experimental, que la conductividad térmica equivalente o efectiva depende de manera significativa de la fuerza de tensión con la que el conductor se encuentra sujeto, debido a una deformación interna que aumenta el área de contacto entre los alambres. Además, estos autores, demostraron que la conductividad térmica se comporta de forma lineal con respecto a la fuerza de tensión, como se puede apreciar de la siguiente correlación experimental:

$$k_{ef} = k_{ef,ref} (0.1438 \cdot F + 0.8562) \quad . \quad (12)$$

La ecuación anterior se obtuvo en base a los resultados experimentales reportados en [19], donde $k_{ef,ref}$ es la conductividad térmica de referencia, en este caso $k_{ef,ref} = 0.73 [W/m^{\circ}C]$, donde F es la fuerza de tensión (en libras fuerza). Es de gran importancia hacer notar que esta expresión solo puede aplicarse en el rango de 1000 a 5000 lbf, ya que esta expresión se obtuvo solo para ciertos parámetros experimentales, por lo que no es posible predecir el comportamiento más allá del rango especificado. De esta forma se observa que una variación sobre la fuerza mecánica puede tener influencia en el

comportamiento térmico de los conductores eléctricos.

Con la finalidad de poder determinar los gradientes de temperatura generados por el efecto Joule, debemos resolver la ecuación de difusión de calor en estado transitorio, tomando en cuenta variaciones de la temperatura solo en la dirección radial, Özisik [20]:

$$k_{ef} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda_{\infty} (1 + \phi(T - T_{\infty})) |J_s|^2 = (\rho c)_{ef} \frac{\partial T}{\partial t} \quad , \quad (13)$$

sujeta a las siguientes condiciones de frontera y condición inicial:

$$r = 0: \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad , \quad (14)$$

$$r = R: \quad -k_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_{\infty}) \quad , \quad (15)$$

$$t = 0: \quad T = T_{\infty} \quad . \quad (16)$$

En las ecuaciones anteriores h representa el coeficiente convectivo de transferencia de calor. En el presente trabajo se considera que para todo fin práctico este coeficiente asume valores constantes. De otra manera, si el coeficiente es desconocido es indispensable hacer uso de una formulación conjugada de la transferencia de calor entre el conductor y el medio ambiente. Dicha formulación esta fuera de los alcances del presente trabajo.

2.2.3 Análisis de Órdenes de Magnitud y Variables Adimensionales

En los problemas de transferencia de calor; así como en los problemas eléctricos existen una gran cantidad de variables y propiedades físicas involucradas, que dan como resultado la posibilidad de obtener una amplia gama de soluciones. Por esta razón es recomendable que antes de resolver las ecuaciones que modelan un problema físico, se realice un análisis de órdenes de magnitud con el fin de obtener parámetros adimensionales. El objetivo de introducir los parámetros adimensionales. Es que ellos engloban un conjunto de dichas variables y propiedades físicas, y de esta manera es posible hacer un comparativo de los términos dominantes de la ecuación, así como para agrupar una gran cantidad de soluciones en una sola gráfica.

En este punto es importante realizar un análisis de de órdenes de magnitud en la ecuación de onda electromagnética ec. (3). Con el fin de simplificar la ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(\frac{2\phi}{1+\phi(T-T_\infty)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \frac{\phi}{1+\phi(T-T_\infty)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \\ = \left\{ \frac{2}{\delta^2} \left[i + \gamma\omega\lambda_\infty \left(\frac{\phi}{\omega^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i \cdot \phi}{\omega} \frac{\partial T}{\partial t} - (1+\phi(T-T_\infty)) \right) \right] \right\} J_s \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

Se aprecia que el término i es de orden unidad $i \sim O(1)$, mientras que el término $\gamma\omega\lambda_\infty$ es de orden $O(10^{-13})$, tomando en cuenta que la frecuencia angular es del orden $\omega \sim O(10^3)$, es decir el límite superior de frecuencia en el cual se encuentra el caso de estudio de acuerdo a la Tabla. C2, por otro lado, los datos de la permitividad eléctrica; así como, de la resistividad eléctrica fueron tomados de la Tabla C1. Por lo que la ecuación de onda (3) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(\frac{2\phi}{1+\phi(T-T_\infty)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \frac{\phi}{1+\phi(T-T_\infty)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \frac{2i}{\delta^2} J_s \quad . \quad (3')$$

Como primer paso para adimensionalizar las ecuaciones, se debe identificar las distintas escalas características del problema. Por ejemplo, la escala espacial característica corresponde directamente al radio del conductor, i. e., $r \sim R$. Por otra parte, el tiempo convectivo característico se obtiene a partir del balance del término transitorio con el término difusivo, como se muestra a continuación:

$$k_{ef} \frac{\Delta T}{R^2} \sim (\rho c)_{ef} \frac{\Delta T}{t_c},$$

además es necesario realizar un balance de la condición de frontera en la superficie del conductor, es decir:

$$k_{ef} \frac{\Delta T}{R} \sim h\Delta T,$$

de donde se tiene que:

$$k_{ef} \sim hR.$$

Finalmente, se obtiene la relación para el tiempo convectivo.

$$t_c \sim \frac{(\rho c)_{ef} R}{h};$$

Además, es necesario definir el incremento característico de la temperatura ΔT_c , el cual se puede obtener mediante un balance de energía entre el término de generación de calor y

el término transitorio; es decir:

$$\frac{\Delta T_c h}{R} \sim \lambda_\infty J_R^2 ,$$

Entonces ΔT_c puede escribirse como,

$$\Delta T_c \sim \frac{\lambda_\infty R^2 J_R^2}{k_{ef} \cdot Bi} ,$$

donde obviamente se considera que al presentarse el efecto pelicular en la superficie del conductor, la mayor cantidad de la densidad de corriente eléctrica se presenta en la superficie del mismo y por consiguiente en orden de magnitud, se tiene que $J_s \sim J_R$. Además, el parámetro adimensional Bi en la relación anterior corresponde al número de Biot y se define como,

$$Bi = \frac{hR}{k_{ef}} . \quad (17)$$

Con el conjunto de las escalas características anteriores, los modelos electromagnético y térmico pueden ser simplificados considerablemente introduciendo las siguientes variables adimensionales

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T_c}, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{t \cdot h}{\rho c R}, \quad \Delta T_c = \frac{\lambda_\infty R^2 J_R^2}{k_{ef} \cdot Bi}, \quad \kappa = \phi \Delta T_c \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{J_s}{J_R} . \quad (18)$$

2.2.4 Modelo Eléctrico Adimensional

Sustituyendo las variables adimensionales (17) y (18) en las ecs. (3)-(5), el sistema se transforma en el siguiente:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \left(2 \frac{\kappa}{(1 + \kappa\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{\kappa}{(1 + \kappa\theta)} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \varphi = \frac{2i}{(1 + \kappa\theta) \varepsilon^2} \varphi , \quad (19)$$

junto con las condiciones de frontera,

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 , \quad (20)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi = 1 . \quad (21)$$

En el anterior sistema de ecuaciones, ε es un parámetro adimensional relacionado

directamente con la intensidad del efecto pelicular y esta dado por $\varepsilon = (\delta / R)$. Se puede anticipar que para valores muy pequeños de este parámetro, la ec. (19) representa un problema de capa límite eléctrica ya que la derivada de mayor orden estaría multiplicada por el cuadrado de este parámetro. En las secciones siguientes se hará uso de esta observación ya que permite simplificar y entender de manera más clara los resultados esperados sobre el efecto pelicular.

2.2.5 Modelo Térmico Adimensional

De la misma forma podemos hacer uso de las variables adimensionales para obtener el siguiente modelo térmico adimensional,

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + Bi (1 + \kappa \theta) |\varphi|^2 = Bi \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad ; \quad (22)$$

junto con sus respectivas condiciones de frontera e inicial:

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad (23)$$

$$\eta = 1: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -Bi \cdot \theta \quad , \quad (24)$$

$$\tau = 0: \quad \theta = 0 \quad . \quad (25)$$

En el sistema de ecs. (19)-(25) se observa que tres parámetros gobiernan al fenómeno físico, dichos parámetros son: el parámetro pelicular ε , el parámetro de acoplamiento κ y el número de Biot Bi . Estos parámetros describen respectivamente, el porcentaje de penetración de la onda electromagnética respecto al radio del conductor, la intensidad con la que se encuentra acoplado el modelo térmico con el eléctrico, y finalmente la calidad de la transferencia de calor por convección comparada con la transferencia de calor por conducción. En las siguientes secciones y dependiendo de los valores que pueden asumir estos parámetros presentamos los límites más relevantes del problema.

2.3 Efecto Pelicular Fuerte

Un caso especial del estudio térmico de los conductores eléctricos se presenta cuando el efecto pelicular es muy fuerte. Lo anterior generalmente se presenta cuando el valor de la frecuencia ω asume valores muy grandes, situación que por cierto corresponde a la mayoría de las situaciones prácticas de señales eléctricas alternas de alta frecuencia como ocurre en los sistemas de alta tensión. Para dicho caso y recordando la definición del parámetro pelicular ε se puede apreciar que $\varepsilon \sim \omega^{-1/2}$ y por consiguiente para altas frecuencias ε será muy pequeño. De esta manera, casi la totalidad de la corriente eléctrica

fluye en una región muy pequeña y próxima a la superficie del conductor. Como primera aproximación para este caso, se considera que la resistividad no varía con la temperatura. Lo anterior es equivalente a que el parámetro de acoplamiento κ es igual a cero, lo que significa que la ecuación eléctrica puede resolverse de forma independiente de la ecuación de difusión de calor y de esta manera la ec. (19) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\varepsilon^2 \left[\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} \right] = 2i\varphi \quad , \quad (26)$$

las condiciones de frontera no se ven afectadas y se pueden escribir como,

$$\eta = 0: \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \quad , \quad (27)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi = 1 \quad . \quad (28)$$

El hecho de que exista un efecto pelicular fuerte significa que el parámetro pelicular ε es muy pequeño. Como se aprecia en la ec. (26) las derivadas de la ecuación diferencial quedan multiplicadas por dicho parámetro pequeño y esto puede interpretarse de la siguiente manera: para que el término del lado izquierdo sea importante a pesar de que el parámetro ε es muy pequeño, se debe tener variaciones muy grandes de las derivadas en una distancia muy pequeña, por esta razón resulta fundamental en este caso, hacer uso de la teoría de la Capa Límite [21].

Como primer paso para aplicar correctamente la teoría anterior, es indispensable hacer un cambio de variable que permite escalar correctamente las variaciones pronunciadas de la derivada de mayor orden. Este nuevo escalamiento que rescata la importancia de las derivadas de mayor orden, se le denota como variable interna. Mediante este cambio de variable se analiza la región donde existe una variación de gran magnitud.

De esta forma, el cambio de variable queda definido de la siguiente manera:

$$\zeta = \frac{1-\eta}{\varepsilon} \quad \text{ó} \quad \eta = 1 - \varepsilon\zeta \quad . \quad (29)$$

Introduciendo el cambio anterior de variable en la ec. (26), se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon\zeta)} \frac{d\varphi}{d\zeta} = 2i\varphi \quad , \quad (30)$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$\zeta = 0: \quad \varphi = 1 \quad , \quad (31)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \quad \frac{d\varphi}{d\zeta} = 0 \quad . \quad (32)$$

Una vez realizado el cambio de variable, se propone una expansión de la siguiente forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \dots, \quad (33)$$

posteriormente la expansión se introduce en la ecuación diferencial (30) y las condiciones de frontera (31)-(32) de la siguiente manera:

$$\frac{d^2(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1)}{d\zeta^2} - \frac{\varepsilon}{(1 - \varepsilon\zeta)} \frac{d(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1)}{d\zeta} = 2i(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1) \quad , \quad (34)$$

$$\zeta = 0: \quad \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 = 1 \quad , \quad (35)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \quad \frac{d(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1)}{\partial\zeta} = 0 \quad ; \quad (36)$$

lo que resulta en un conjunto de dos ecuaciones diferenciales, una de orden cero y una de orden uno, sin embargo, debido a la naturaleza del problema la aproximación de orden cero es suficiente para este problema.

Ecuación diferencial de orden cero:

$$\frac{d^2\varphi_0}{d\zeta^2} = 2i\varphi_0 \quad , \quad (37)$$

$$\zeta = 0: \quad \varphi_0 = 1, \quad (38)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: \quad \frac{d\varphi_0}{\partial\zeta} = 0 \quad . \quad (39)$$

Como puede observarse en la ecuación anterior, una vez realizado el cambio de variable y tomando en cuenta solo la ecuación de orden cero, se obtiene un modelo en coordenadas cartesianas, esto es debido a que se trabaja en una zona tan cercana a la superficie del conductor que se pierde la apreciación de la curvatura del cilindro.

El sistema de ecs. (37)-(39) puede resolverse fácilmente y la solución viene dada por la siguiente expresión:

$$\varphi_0 = e^{-\zeta} [\cos(\zeta) - i \cdot \text{sen}(\zeta)] \quad , \quad (40)$$

y el módulo de la función compleja anterior se puede obtener fácilmente y escribirse como,

$$|\varphi_0| = e^{-\zeta} = e^{(\eta-1/\varepsilon)} \quad . \quad (41)$$

La Fig. 4 muestra el comportamiento de la densidad de corriente para tres diferentes valores de ε . Es importante señalar que estos valores deben ser pequeños con el fin de que pueda ser aplicada la teoría de capa límite.

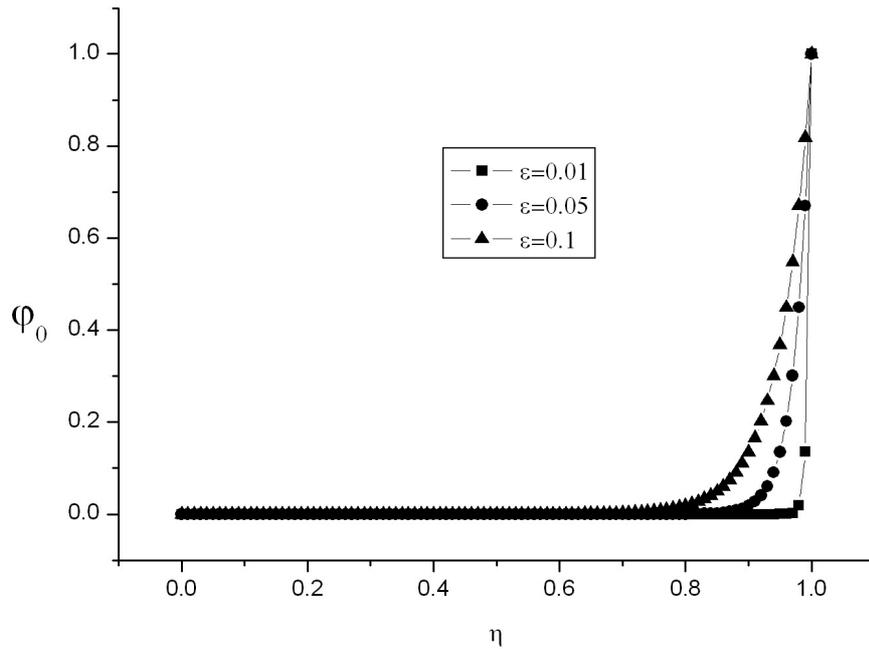


Figura 4. Variación de la densidad de corriente adimensional, φ_0 , para diferentes valores de ε

Una vez obtenida la solución analítica del modelo electromagnético se sustituye en el término de generación de calor, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + Bi \cdot e^{2(\eta-1/\varepsilon)} = Bi \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad , \quad (42)$$

con sus respectivas condiciones de frontera:

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad (43)$$

$$\eta = 1: \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -Bi \cdot \theta \quad ; \quad (44)$$

$$\tau = 0: \quad \theta = 0 \quad . \quad (45)$$

En el modelo anterior se observa que para poder obtener los perfiles de temperatura es necesario definir el valor de los parámetros Bi y ε , con la finalidad de poder apreciar la influencia que tiene cada uno de estos parámetros en el comportamiento térmico del conductor eléctrico bajo la consideración de efecto pelicular fuerte. La ecuación de difusión de calor se resolvió por diferencias finitas, bajo el esquema Crank-Nicholson [22]. Para mayor detalle acerca del método numérico empleado para la solución de este problema se puede consultar detenidamente el Apéndice B al final de este trabajo.

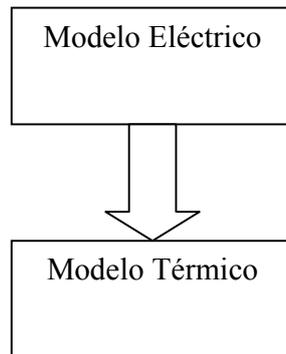


Figura 5. Representación del acoplamiento de los modelos matemáticos.

La Fig. 5 muestra de manera representativa la forma en que se presenta el acoplamiento del modelo eléctrico con el térmico. El acoplamiento se presenta solo en una dirección, ya que el modelo eléctrico se resuelve independientemente del modelo térmico, y por otro lado el modelo térmico requiere la solución del modelo eléctrico.

2.3.1 Influencia del Parámetro Pelicular ε

A continuación se muestra la evolución del perfil de temperaturas durante su estado transitorio para tres diferentes valores del parámetro pelicular ε ($=0.01, 0.05$ y 0.1) y manteniendo constante el valor del número de Biot, i. e. $Bi = 1.0$. Con el propósito de observar la evolución del perfil de temperaturas durante el estado transitorio se escogieron cuatro tiempos adimensionales τ ($=0.1, 0.25, 1.0$ y 5.0).

Como se aprecia en la Fig. 6 el incremento de temperatura adimensional se da principalmente en la superficie del conductor, debido a que en esa región es donde se presenta el calentamiento por efecto joule. Posteriormente la transferencia de calor hacia el centro se da por difusión hasta llegar al estado permanente de la Fig. 9, donde se observa que bajo el efecto pelicular fuerte, el perfil de temperatura tiende a ser uniforme; es decir, el conductor se vuelve muy adiabático y dificulta el paso de la corriente eléctrica.

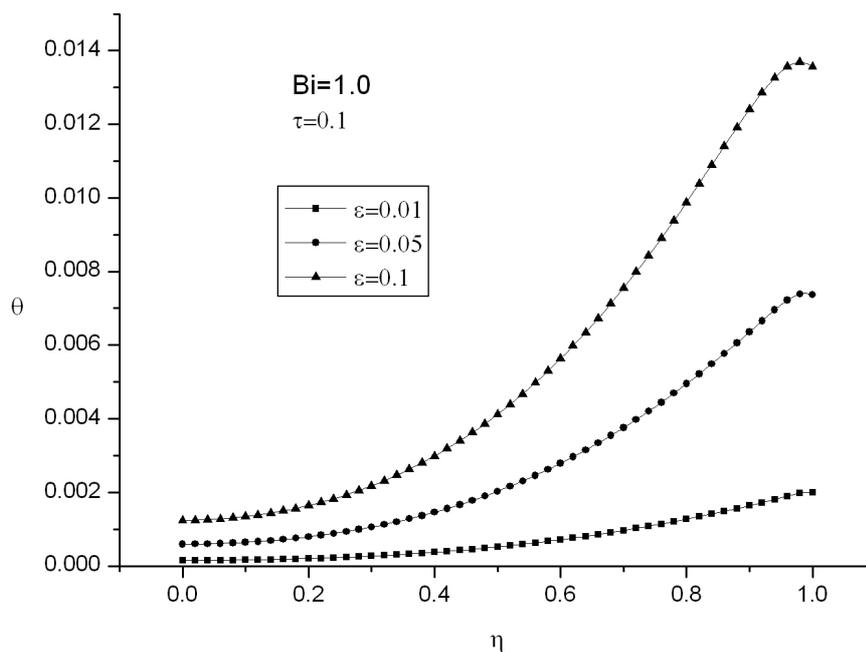


Figura 6. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ε y $\tau=0.1$

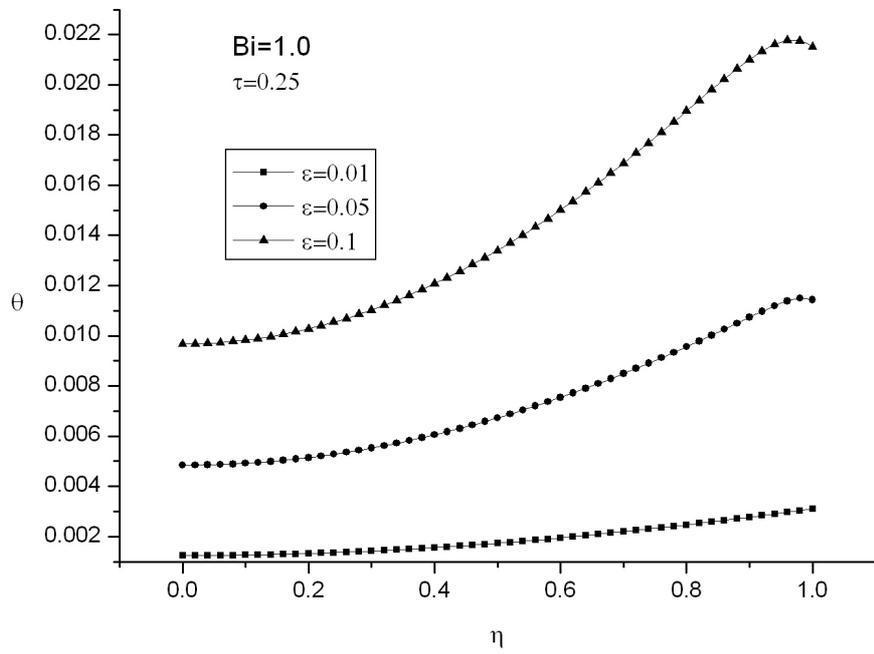


Figura 7. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=0.25$

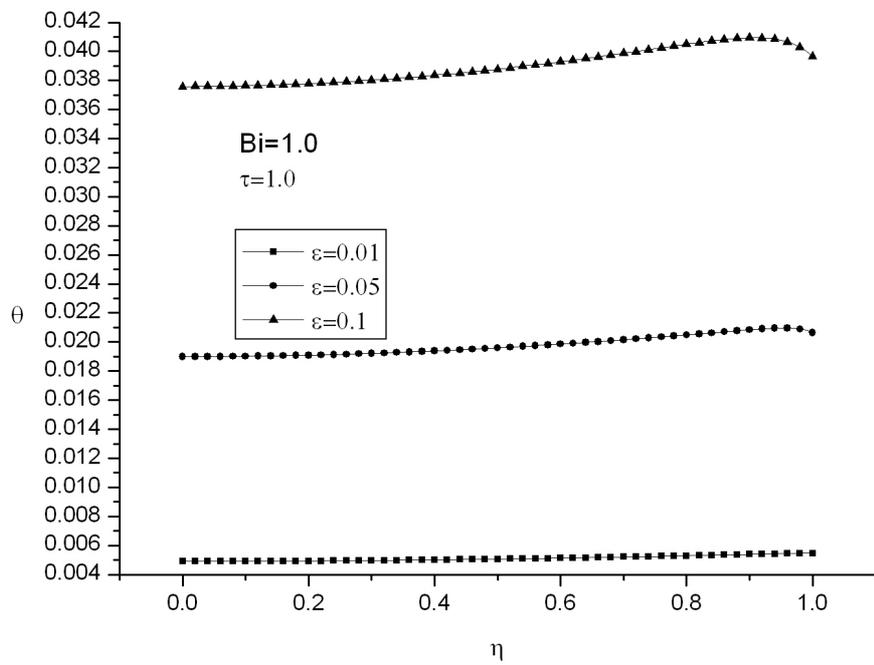


Figura 8. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=1.0$

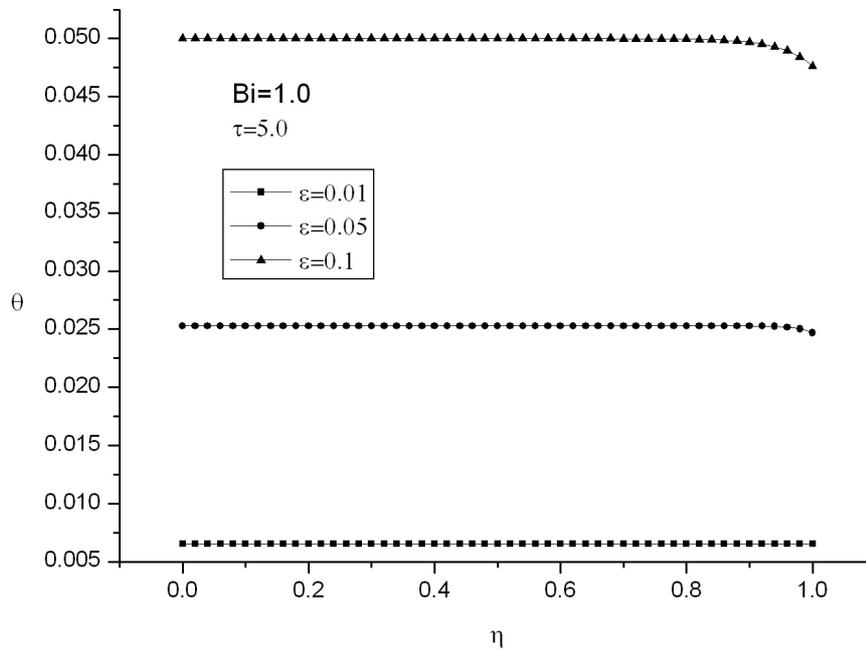


Figura 9. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ε y $\tau=5.0$

2.3.2 Influencia del Número de Biot Bi

De la misma forma y con el fin de observar la influencia que tienen las condiciones climáticas en los perfiles de temperatura, en el siguiente conjunto de resultados mantendremos constante el valor del parámetro pelicular ε , con $\varepsilon = 0.1$. Al igual que en el caso anterior, en el conjunto de las Figs. 10-13 se observa el comportamiento térmico en estado transitorio, considerando también los mismos tiempos adimensionales τ ($=0.1, 0.25, 1.0$ y 5.0) y en este caso se varía el número de Biot con tres diferentes valores Bi ($=0.01, 0.1$ y 1.0), considerando de esta manera desde el caso de una situación crítica donde la transferencia de calor al ambiente es deficiente (número de Biot pequeño), hasta una buena transferencia hacia el ambiente (número de Biot grande), pasando también por una situación intermedia.

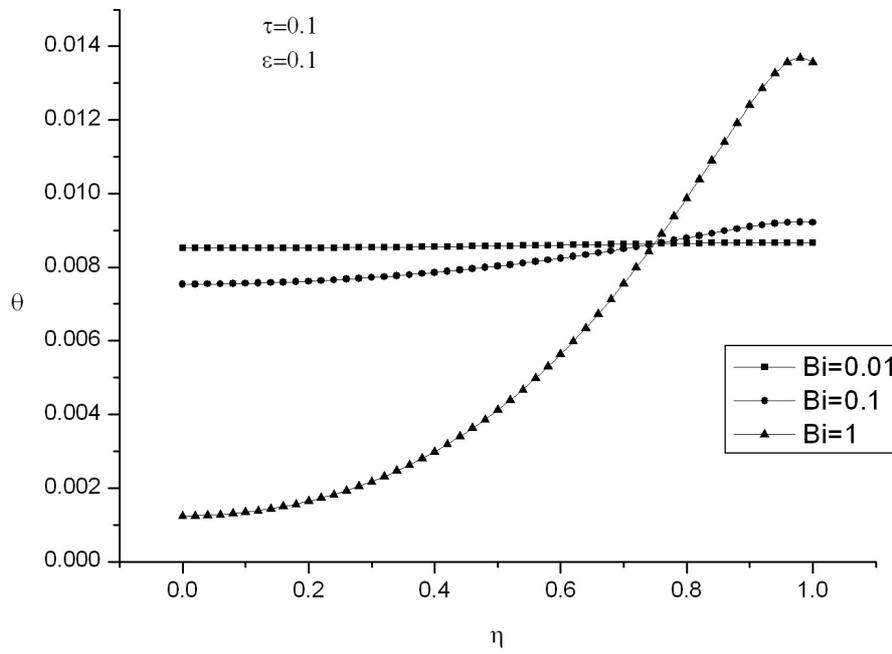


Figura 10. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=0.1$

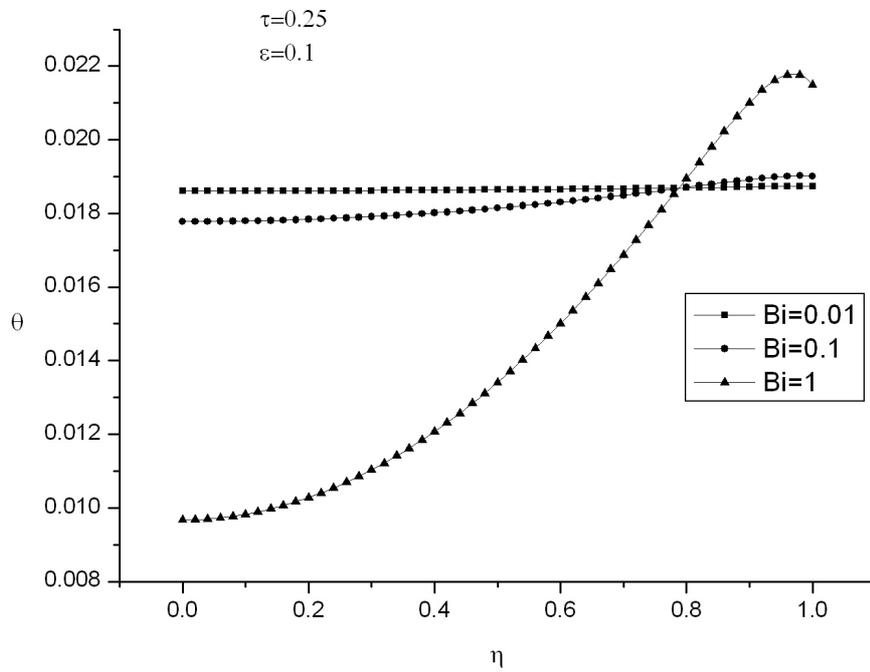


Figura 11. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=0.25$

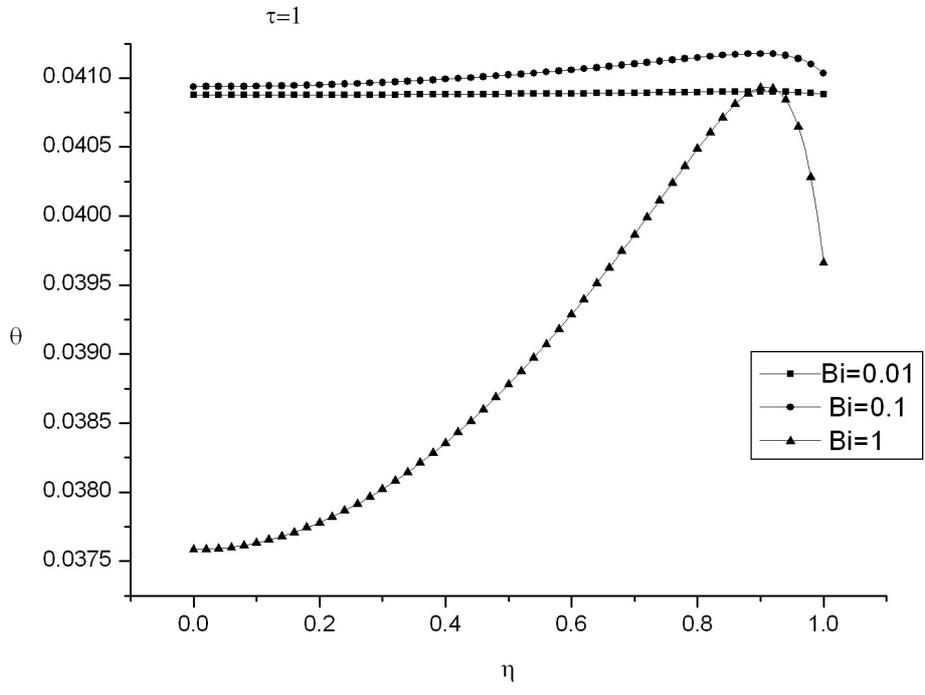


Figura 12. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=1.0$

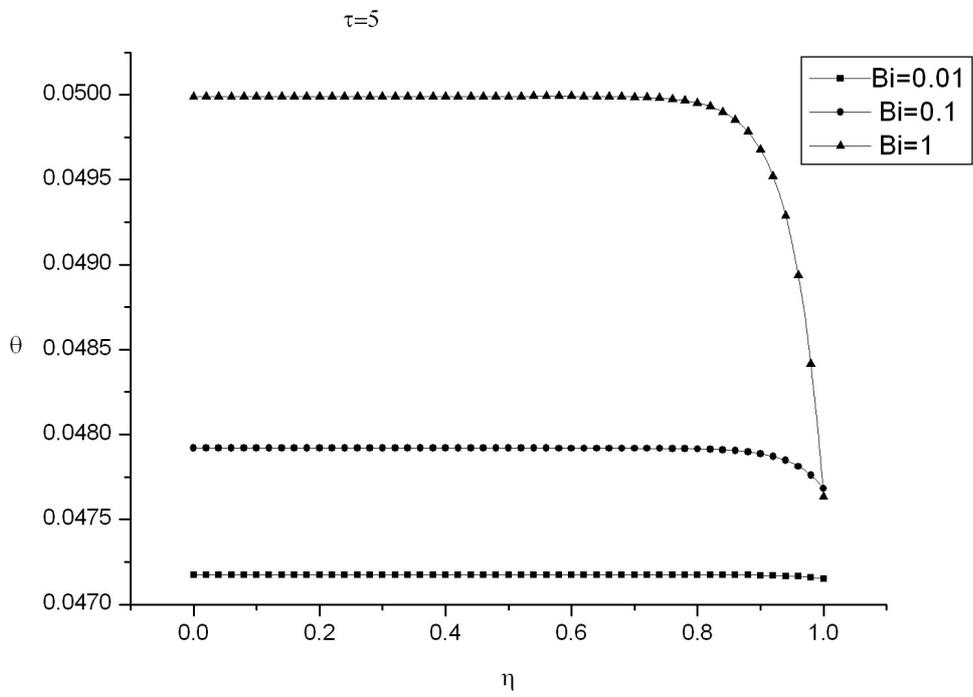


Figura 13. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=5.0$

2.4 Solución del Modelo Termo-Eléctrico

El análisis anterior solo se puede aplicar cuando se presenta un efecto pelicular fuerte ($\varepsilon \ll 1$); sin embargo, para completar el grupo de soluciones y dado el interés práctico que despierta el estudio del comportamiento térmico para diferentes espesores de película; así como la influencia que tiene el modelo térmico en el modelo electromagnético y viceversa, junto con la importancia que tiene la fuerza de tensión en los gradientes de temperatura, a continuación se presentan el análisis para el modelo fuertemente acoplado; es decir, aquella situación donde para predecir el campo de la densidad de corriente es indispensable el conocimiento previo de la distribución de temperatura.

Modelo eléctrico

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \left(2 \frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) \varphi = \frac{2i}{(1+\kappa\theta)\varepsilon^2} \varphi \quad , \quad (19)$$

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 \quad , \quad (20)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi = 1 \quad . \quad (21)$$

Modelo térmico

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\eta \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) + Bi(1+\kappa\theta)|\varphi|^2 = Bi \frac{\partial\theta}{\partial\tau} \quad ; \quad (22)$$

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 \quad , \quad (23)$$

$$\eta = 1: \quad \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = -Bi \cdot \theta \quad , \quad (24)$$

$$\tau = 0: \quad \theta = 0 \quad . \quad (25)$$

En el sistema anterior de ecuaciones se puede claramente observar que para poder obtener la distribución de densidad de corriente, es indispensable conocer el perfil de temperaturas, pero a su vez para poder obtener dicho perfil térmico, el término de generación de calor incluye la función de densidad de corriente, por lo que este sistema se encuentra completamente acoplado y su solución completa deberá entonces resolverse simultáneamente.

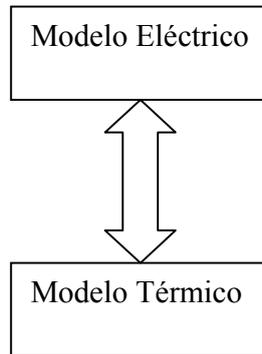


Figura 14. Representación del acoplamiento de los modelos matemáticos.

En la Fig. 14 se muestra de manera representativa la forma en que están relacionados ambos modelos. En este caso los modelos se encuentran completamente acoplados, ya que para obtener la solución de un modelo es necesario conocer la solución del otro. Debido a la naturaleza del problema resulta apropiado hacer uso de los métodos numéricos, específicamente, el método de diferencias finitas (Apéndice B).

2.4.1 Influencia del Parámetro Pelicular ε

El parámetro de espesor de película o pelicular, ε , afecta de manera significativa la distribución de densidad de corriente; así como el perfil de temperaturas. En la Fig. 15 se muestra la distribución adimensional de la densidad de corriente, φ , para distintos valores de ε ($=0.01, 0.2$ y 0.5), con un número de Biot $Bi=1.0$, el parámetro de acoplamiento $\kappa=0.5$ y un tiempo adimensional $\tau=7.0$. Para dicho tiempo adimensional se puede considerar que el sistema ha llegado al estado permanente. Como puede observarse el efecto pelicular es más notorio cuando el valor del parámetro ε es más pequeño lo que significa una mayor concentración de densidad de corriente en la superficie del conductor, y por el contrario cuando el valor de dicho parámetro es mayor, la densidad de corriente tiende a distribuirse de una forma más uniforme.

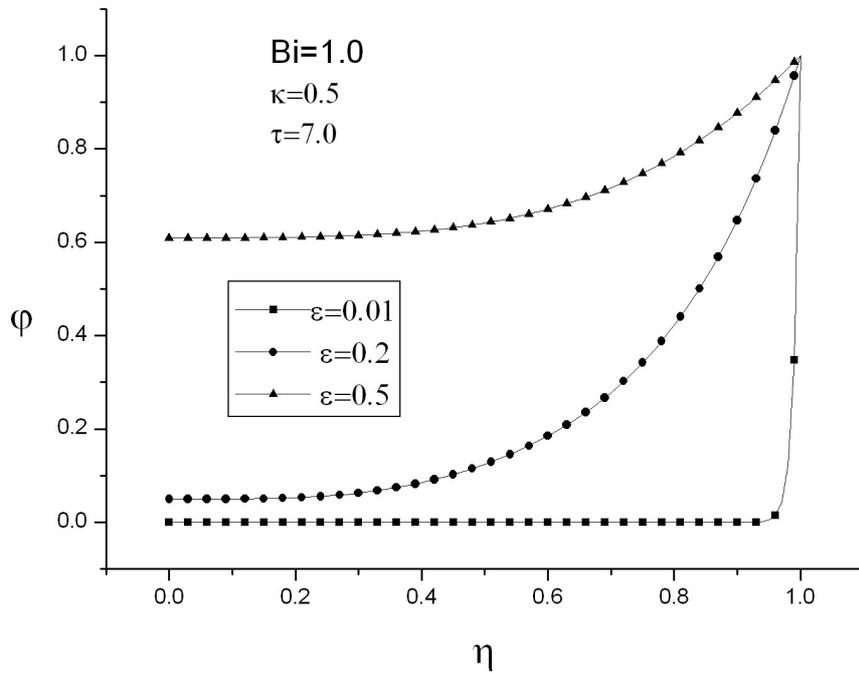


Figura 15. Variación de la densidad de corriente adimensional, ϕ , para diferentes valores de ε

En las siguientes Figs. 16-19 se muestran los perfiles de temperatura adimensionales en función de la coordenada radial adimensional durante el estado transitorio, para distintos valores de ε ($=0.01, 0.2$ y 0.5). Con el fin de poder observar el efecto que tiene ε en los perfiles de temperatura se deben de mantener fijos los valores del número de Biot que en este caso es $Bi = 1.0$ y del parámetro de acoplamiento κ que en este caso es $\kappa = 0.5$, para cuatro tiempos adimensionales representativos del estado transitorio τ ($=0.1, 0.4, 1.0$ y 7.0).

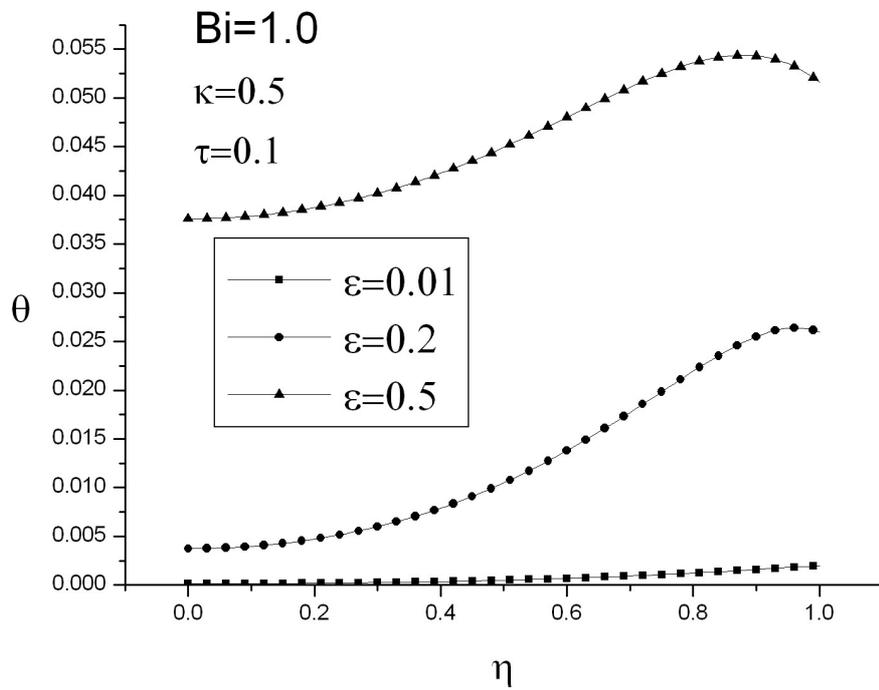


Figura 16. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=0.1$

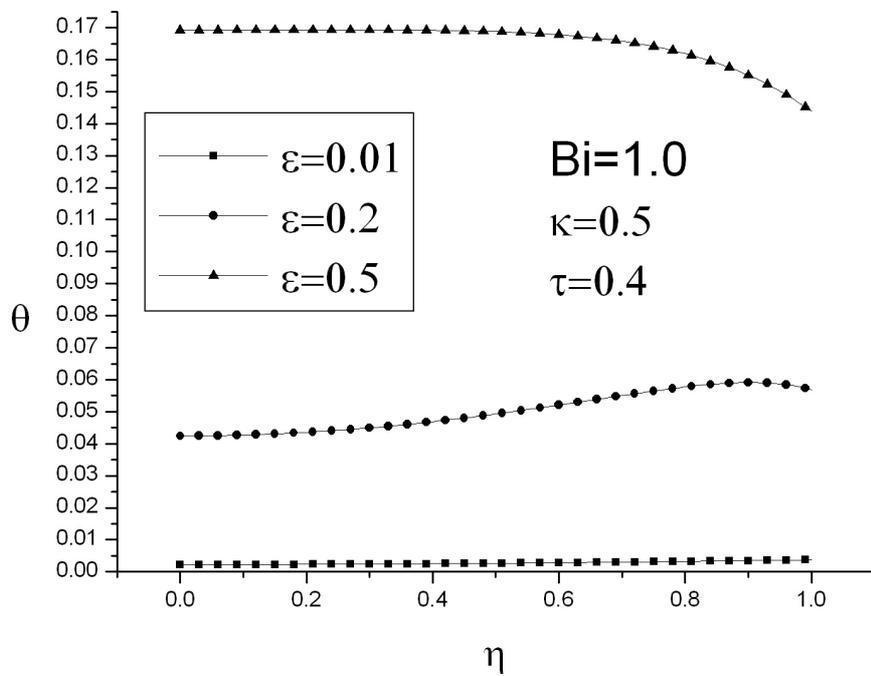


Figura 17. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=0.4$

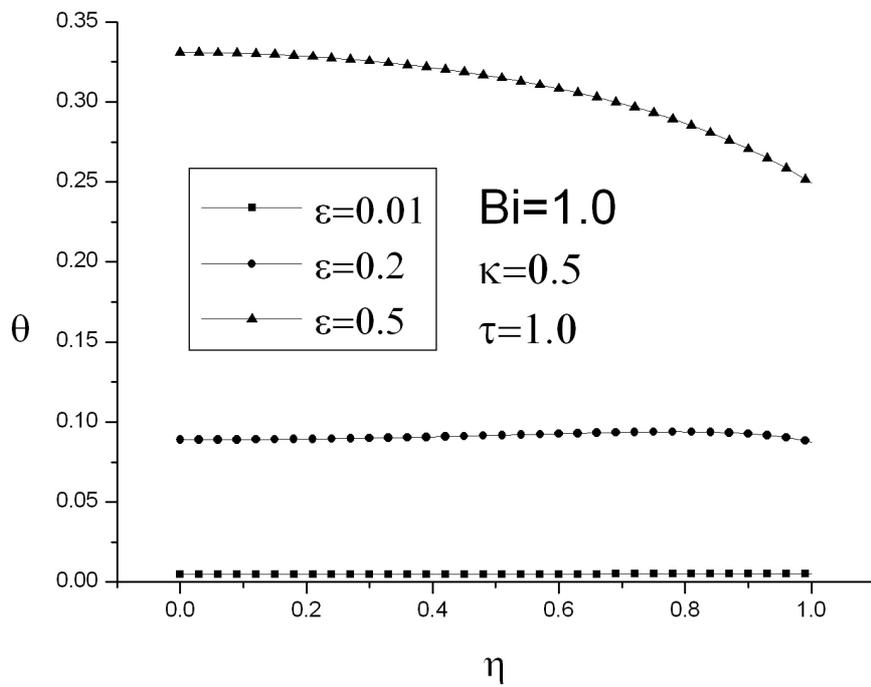


Figura 18. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=1.0$

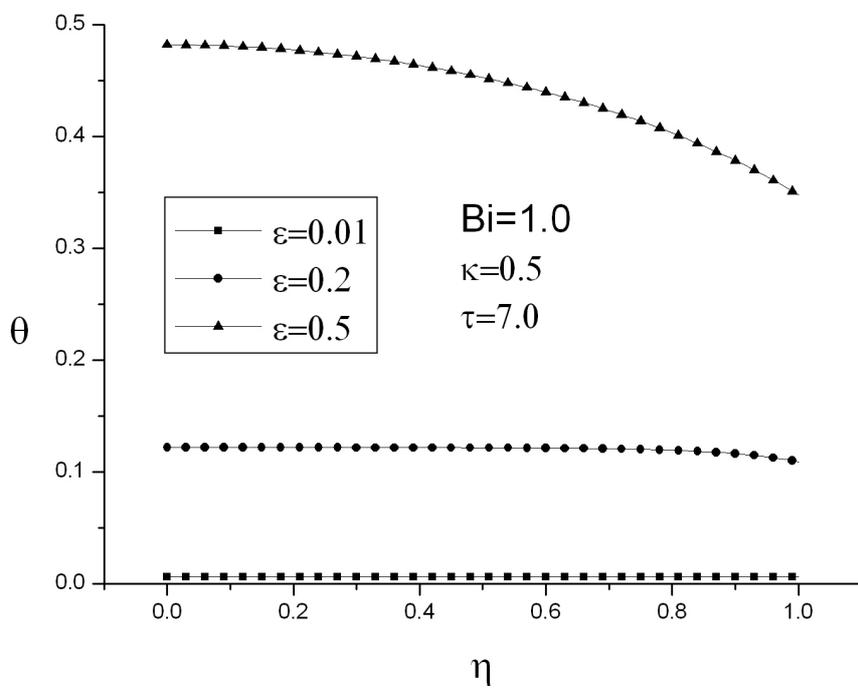


Figura 19. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=7.0$

2.4.2 Influencia de Parámetro de Acoplamiento κ

Al considerar que la resistividad eléctrica varía con la temperatura, aparece inevitablemente el parámetro de acoplamiento, κ , el cual indica el grado de acoplamiento que existe entre los modelos térmico y eléctrico. Como se pudo apreciar para el caso de efecto pelicular fuerte, el modelo clásico se obtuvo para el estudio de conductores eléctricos cuando el valor de $\kappa=0$; sin embargo, en casos prácticos la situación anterior no refleja totalmente las características físicas del problema ya que generalmente la resistividad eléctrica aumenta con la temperatura de manera lineal, y dependiendo de la magnitud de la variación es la magnitud del acoplamiento de ambos modelos.

En la Fig. 20 se muestra la distribución de la densidad de corriente en el estado permanente para distintos valores de κ ($=0.01, 0.2$ y 0.5) y valores fijos $Bi=1.0$, $\varepsilon=0.5$ y $\tau=7.0$. Se observa que a pesar de que las tres curvas tienen el mismo valor de espesor de película existe una notoria diferencia debido a que los perfiles de temperatura influyen en el perfil de densidad de corriente, y entre más grande es el valor del parámetro de acoplamiento más se modifica la distribución de la densidad de corriente.

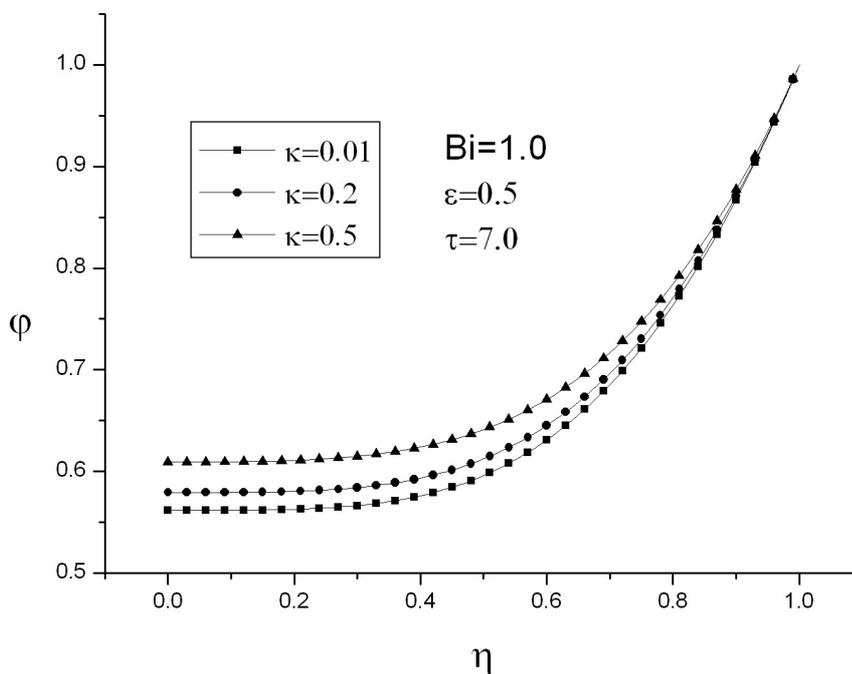


Figura 20. Variación de la densidad de corriente adimensional, φ , para diferentes valores de κ

En la Fig. 21 se muestra la evolución del perfil de densidad de corriente para distintos tiempos adimensionales, en donde se observa que conforme se va calentando el conductor, va modificando su distribución de la densidad de corriente.

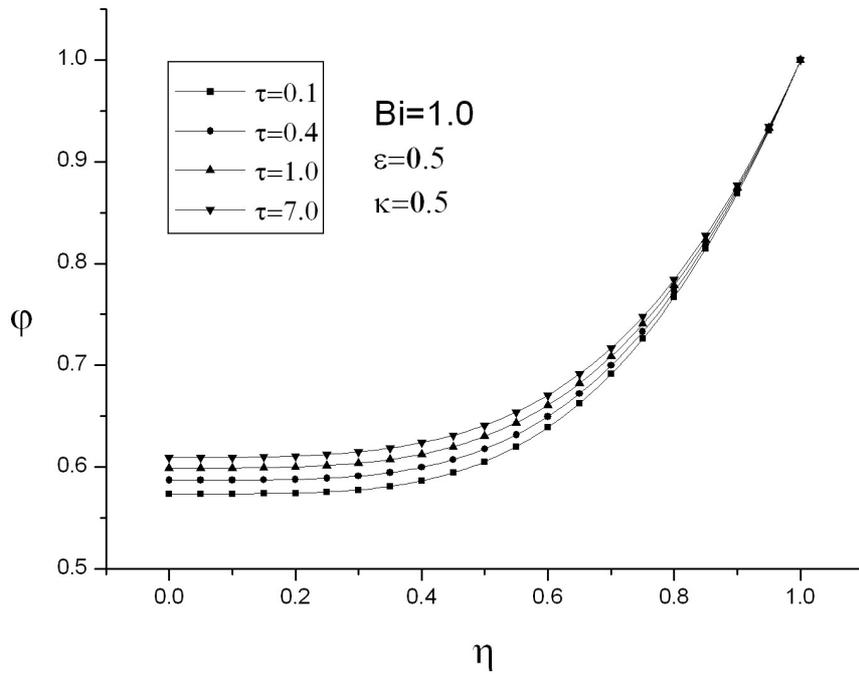


Figura 21. Variación de la densidad de corriente adimensional, ϕ , para diferentes tiempos adimensionales τ

En las siguientes Figs. 22-25 se muestra el estado transitorio de los perfiles de temperatura para distintos valores del parámetro de acoplamiento, con el objetivo de poder apreciar la influencia que tiene la resistividad variable con la temperatura. Para este fin es necesario mantener fijos los valores del número de Biot, $Bi=1.0$ y el parámetro de espesor de película, $\varepsilon=0.5$, para distintos tiempos adimensionales τ ($=0.1, 0.4, 1.0$ y 7.0).

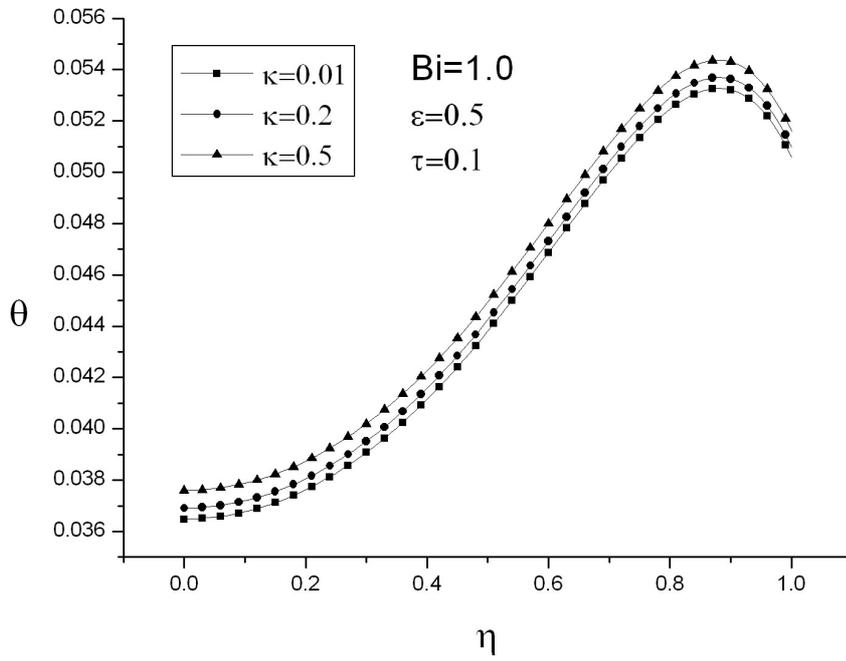


Figura 22. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=0.1$

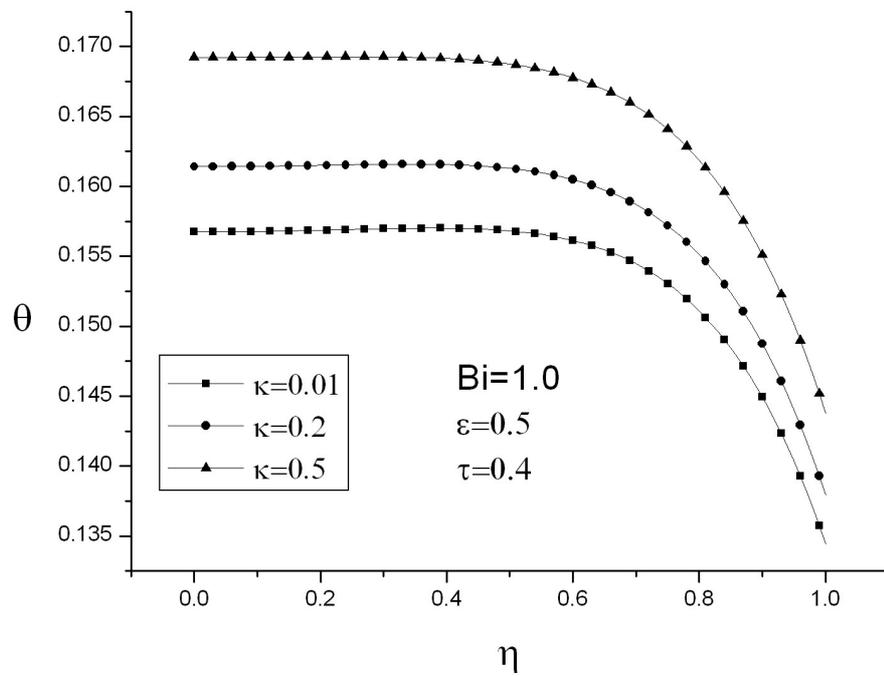


Figura 23. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=0.4$

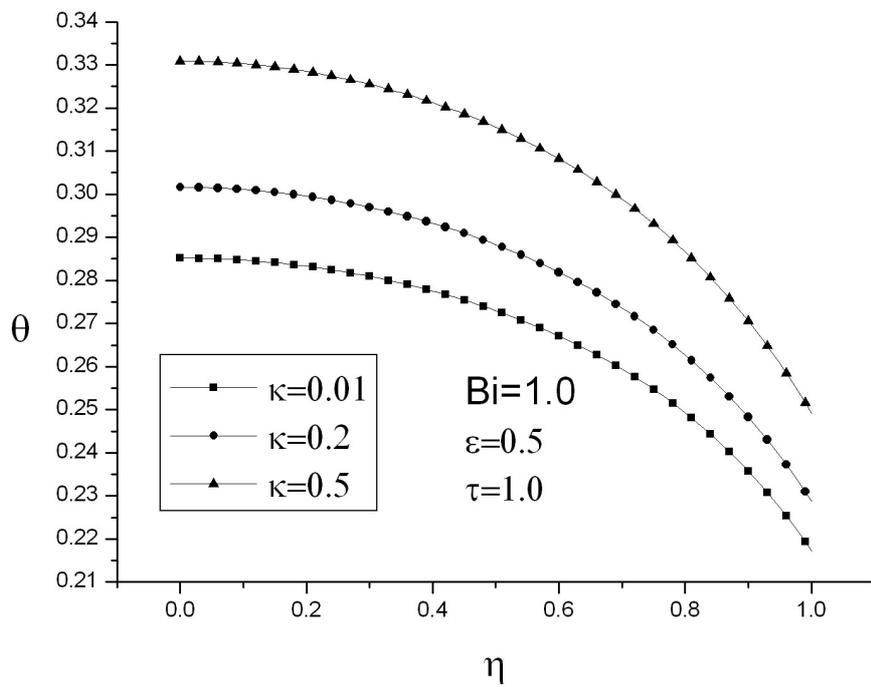


Figura 24. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=1.0$

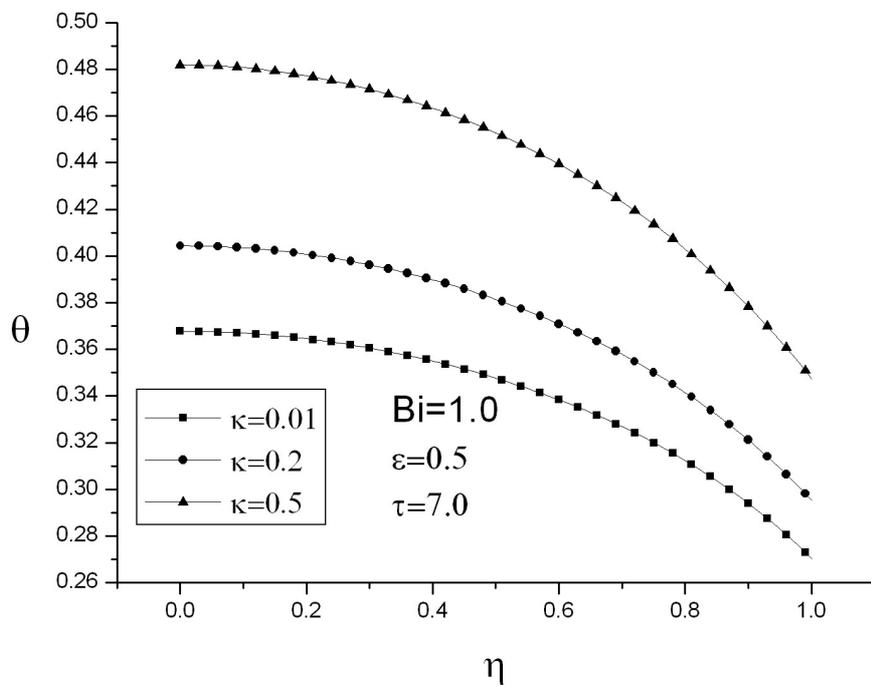


Figura 25. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=7.0$

2.4.3 Influencia de la Fuerza de Tensión

Como se mencionó anteriormente, el principal efecto que tiene la fuerza de tensión en los conductores eléctricos es modificar la conductividad térmica; sin embargo, en las ecuaciones adimensionales esta dependencia se refleja en el número de Biot. De la definición misma del número de Biot dado por la ec. (17)

$$Bi = \frac{hR}{k_{ef}} ,$$

el valor del número de Biot se puede asignar sin importar que valor tenga la conductividad térmica, ya que dicho número de Biot depende también del coeficiente convectivo y del radio del conductor. Considerando entonces la ec. (12) para escribir el número de Biot en términos de la fuerza de tensión, se tiene que

$$Bi = \frac{hR}{k_{ef,ref} (0.1438 \cdot F + 0.8562)} = \frac{hR}{k_{ef,ref}} \left(\frac{1}{0.1438 \cdot F + 0.8562} \right) . \quad (46)$$

En esta última ecuación se puede apreciar que el número de Biot es solamente función de la fuerza de tensión, ya que al tener una conductividad térmica de referencia es posible suponer un número de Biot de referencia,

$$Bi_{ref} = \frac{hR}{k_{ef,ref}} = 1.0 ,$$

el cual está definido para una fuerza de tensión de 1000 lbf, mientras que el término encerrado entre paréntesis de la ec. (46) modela de que forma se ve afectado el número el número Biot debido a la fuerza de tensión. Dado que la conductividad térmica equivalente fue obtenida para conductores de aluminio, las siguientes gráficas solo pueden emplearse para conductores hechos de este material. Además es importante mencionar que si asignamos un valor arbitrario al número de Biot, como por ejemplo $Bi = 1.0$ para cuando la fuerza de tensión son 1000 lbf ($F = 1$), es posible escribir la ec. (46) de la siguiente manera:

$$Bi = \frac{1}{0.1438 \cdot F + 0.8562} \quad (47)$$

Se usaron tres valores para la fuerza de tensión con la finalidad de poder observar su influencia en el comportamiento térmico del conductor eléctrico, F (=1000, 3000 y 5000 lbf), por lo que los números de Biot correspondientes son: Bi (=1.0, 0.7766 y 0.6348). Como se aprecia de la ec. (47) conforme aumenta la fuerza de tensión el número de Biot decrece, esto no forzosamente significa que la transferencia de calor hacia el ambiente sea más deficiente o se vuelva más adiabática, sino que el material se vuelve más vulnerable a la conducción de calor. Aparentemente esto podría resultar benéfico sino fuera por el límite

que tienen los materiales a las deformaciones plásticas no deseadas.

En la Fig. 26 se observa que la fuerza de tensión no tiene prácticamente ningún efecto en la distribución de densidad de corriente adimensional, para un parámetro pelicular $\varepsilon = 0.5$, parámetro de acoplamiento $\kappa = 0.5$ y el tiempo adimensional $\tau = 7.0$.

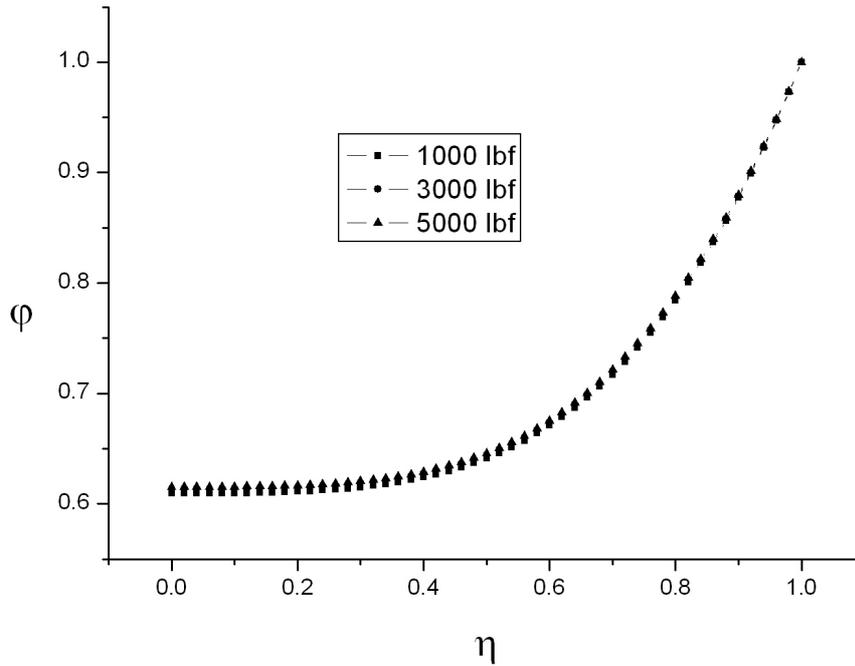


Figura 26. Variación de la densidad de corriente adimensional, ϕ , para diferentes valores de la fuerza de tensión F .

En las Figs. 27-30 se muestra el estado transitorio de los perfiles de temperatura adimensionales en función de la coordenada radial para distintos valores de la fuerza de tensión. Para este fin es necesario mantener fijos los valores del parámetro de acoplamiento, $\kappa = 0.5$ y el parámetro de espesor de película, $\varepsilon = 0.5$, para distintos tiempos adimensionales τ ($=0.1, 0.4, 1.0$ y 7.0) y para tres valores de la fuerza de tensión F ($=1000, 3000$ y 5000 lbf).

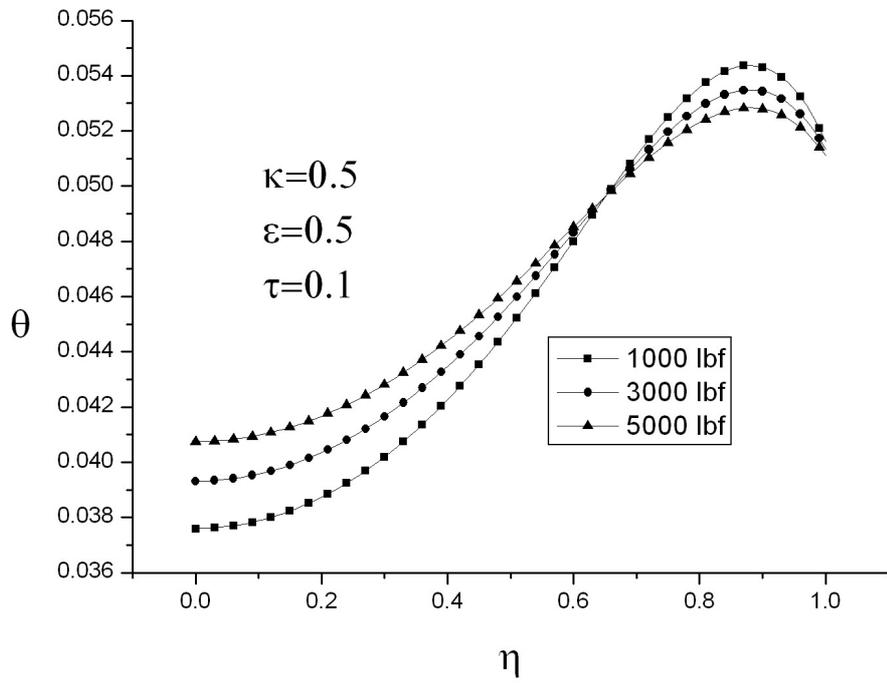


Figura 27. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de F y $\tau=0.1$

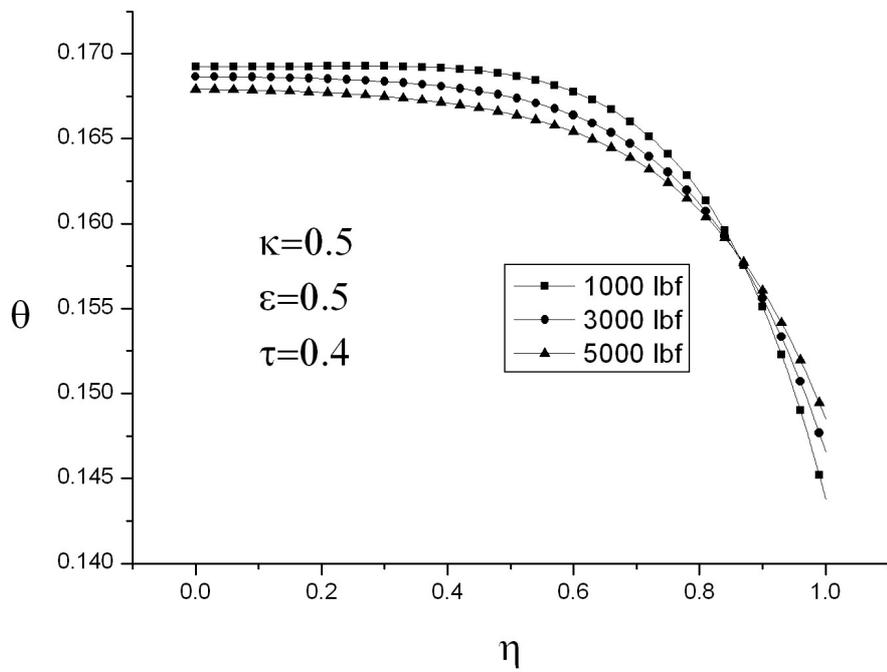


Figura 28. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de F y $\tau=0.4$

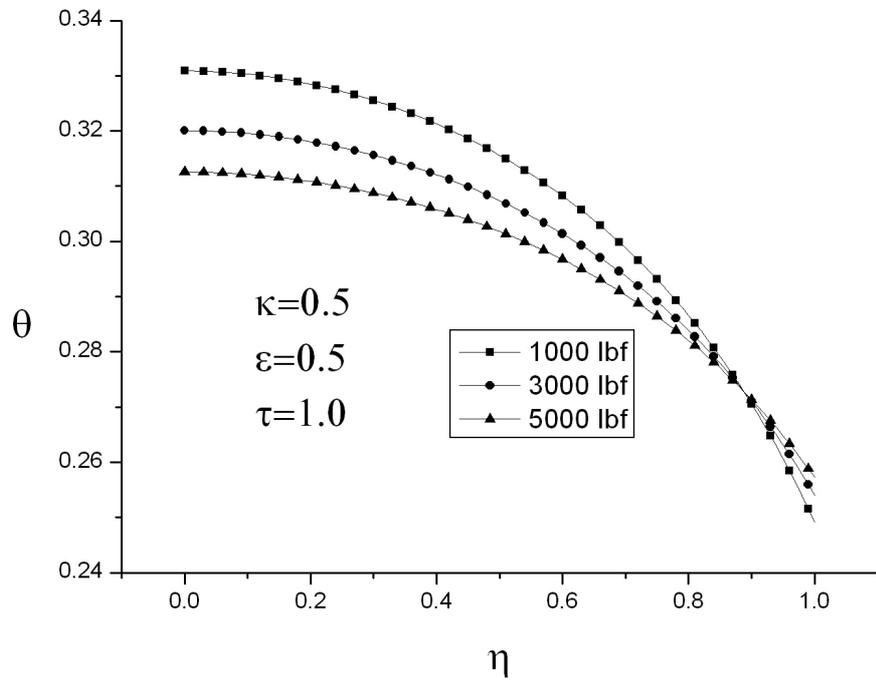


Figura 29. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de F y $\tau=1.0$

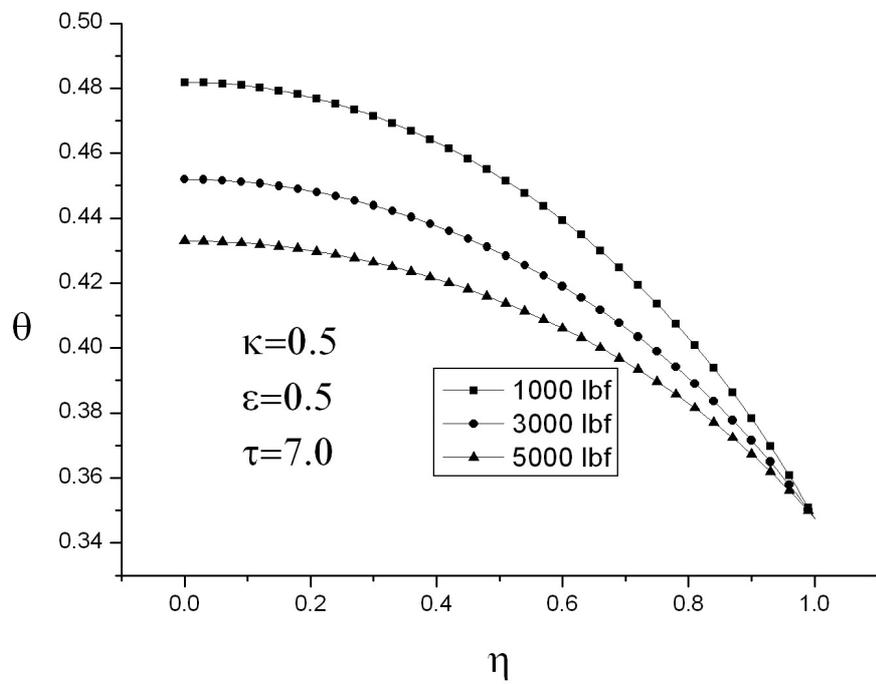


Figura 30. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de F y $\tau=7.0$

2.5 Análisis de Resultados

En este capítulo se mostró un análisis bastante detallado del fenómeno termo-eléctrico en un conductor mono-metálico. Reconociendo la naturaleza multifactorial del problema considerado, resulta inevitable estudiar los fenómenos eléctrico y térmico de manera simultánea ya que aún cuando se considera en una primera aproximación que la resistividad eléctrica puede permanecer constante, se tiene entonces un modelo conjugado en una dirección, ya que la distribución de densidad de corriente afecta de manera directa al término de generación de calor. Este último caso fue particularmente ilustrativo para analizar el estudio del efecto pelicular fuerte, en el cual se consideró que la resistividad eléctrica permanece constante durante el desarrollo del fenómeno físico; sin embargo, se observa que la distribución de corriente tiene un papel fundamental en los gradientes de temperatura, como se pudo apreciar en la Fig. 4: conforme decrece el parámetro pelicular la densidad de corriente tiende a fluir en su totalidad en regiones más cercanas a la superficie del conductor. En lo que concierne a los gradientes de temperatura se observa en las Figs. 6-9 que conforme el parámetro pelicular decrece provoca que el perfil de temperatura sea más uniforme, incluso puede tratarse al problema con modelos matemáticos de parámetros concentrados. Por otro lado con diferentes condiciones ambientales, aquí representadas por el número de Biot se observa que cuando hay una buena transferencia de calor hacia el ambiente; es decir, el número de Biot es grande, los gradientes de temperatura adimensionales son más relevantes en comparación a aquellos que tienen una mala transferencia de calor al ambiente, como se observa en las Figs. 10-13, que reflejan el estado transitorio de la difusión de calor.

Con el afán de tener un mejor entendimiento del fenómeno físico, es necesario tomar en cuenta que la resistividad eléctrica varía con la temperatura; sin embargo, existen ciertos factores externos que modifican el comportamiento térmico, como son la profundidad de película y la fuerza de tensión.

La Fig. 15 muestra como el parámetro pelicular afecta directamente a la distribución de densidad de corriente y conforme el valor de dicho parámetro se incrementa la distribución de densidad de corriente tiende a ser más uniforme y por el contrario cuando el parámetro pelicular decrece la densidad de corriente tiende a concentrarse en una pequeña región próxima a la superficie del conductor.

Aunque el parámetro pelicular es puramente eléctrico afecta de manera significativa a los perfiles de temperatura, debido al acoplamiento inherente que existe entre ambos modelos. Las Figs. 16-19 muestran el estado transitorio de los perfiles de temperaturas para tres diferentes valores del parámetro pelicular, en donde se observa que al igual que en el caso del efecto pelicular fuerte, mientras el valor de dicho parámetro disminuye, los perfiles de temperatura son más uniformes. Sin embargo, es posible apreciar que ya no son lo suficientemente uniformes como para considerar modelarlos con parámetros concentrados, debido a que se observa que para estos casos la temperatura del centro es mayor que en la superficie.

En este punto es importante recordar que los resultados obtenidos se encuentran en

variables adimensionales, por lo que los resultados referentes al parámetro pelicular deben ser interpretados correctamente; es decir, de las Figs. 6-9 y 16-19 se puede concluir que la temperatura física del conductor es aproximadamente la temperatura ambiente conforme el parámetro pelicular disminuya su valor. De esta manera, se puede conseguir que el parámetro pelicular sea pequeño, mediante las restricciones siguientes: que el radio del conductor sea muy grande y la onda electromagnética solo alcanza a penetrar en una pequeña sección, o bien que el radio del conductor no varíe significativamente, sino que la profundidad pelicular sea muy pequeña, lo que en este caso significa que la densidad de corriente en la superficie sea muy grande y por lo tanto genere una mayor cantidad de calor por el efecto joule. En ambos casos se obtiene la misma gráfica, solo es necesario saber en que caso se está trabajando con el fin de tener una idea más clara del fenómeno físico.

El parámetro de acoplamiento κ nos dice que tanto se afectan entre si los modelos eléctrico y térmico. Dicho parámetro toma gran relevancia en los análisis de ampacidad, ya que permite describir tanto la redistribución de la densidad de corriente adimensional debido a la variación de la resistividad; así como el incremento en la temperatura adimensional, tomando en cuenta que dicho fenómeno permite obtener una mejor aproximación a la temperatura real y por lo tanto un mejor aprovechamiento del conductor eléctrico. En la Fig. 20 se observa que conforme se aumenta el valor del parámetro de acoplamiento también se afecta en mayor medida la redistribución de densidad de corriente. Por otro lado, la Fig. 21 muestra como el perfil de densidad de corriente va evolucionando conforme el perfil de temperaturas alcanza el estado permanente. Lo anterior se debe a que conforme el conductor se va calentando, va aumentando la resistividad eléctrica en algunas regiones del conductor, lo que origina la redistribución de la densidad de corriente. En las Figs 22-25 se muestra la evolución del perfil de temperaturas en su estado transitorio para diferentes valores del parámetro adimensional. Vale la pena mencionar que entre mayor es el valor del parámetro de acoplamiento más fácilmente se presenta un incremento en la temperatura adimensional.

Finalmente, se analiza la fuerza de tensión mecánica que sujeta al conductor eléctrico. Esta fuerza tiene un papel fundamental en el proceso de transferencia de calor, no así en el fenómeno eléctrico, como se observa en la Fig. 26. En esta Figura, la fuerza de tensión no afecta la distribución de densidad de corriente; sin embargo, si afecta el comportamiento térmico del conductor eléctrico, debido a que dicha fuerza de tensión modifica principalmente a la conductividad térmica, que a su vez modifica al número de Biot en el modelo adimensional: a mayores valores de la fuerza de tensión mayor es la conductividad, lo que quiere decir que la transferencia de calor por conducción se ve mejorada, como se observa en las Figs. 27-30, para una misma condición atmosférica el perfil se modifica tendiendo a ser más uniforme conforme aumenta la fuerza de tensión. Al aumentar la fuerza de tensión aumenta la conductividad térmica, lo que significa una mejor comunicación entre los puntos que conforman al dominio del conductor, de esta forma un punto en el centro del conductor reacciona de manera más rápida y eficaz a las condiciones de frontera.

Capítulo 3

Conductores Bi-metálicos

Un caso especial del estudio de los conductores eléctricos son aquellos que están conformados por dos materiales metálicos distintos; esto es con la finalidad de aprovechar lo mejor posible sus propiedades físicas. Dicho tipo de arreglo compuesto de al menos dos conductores eléctricos se constituyen generalmente por un material de baja resistencia eléctrica y un material de alta resistencia mecánica. Como ocurre frecuentemente en la literatura técnica especializada, el arreglo más popular que suele estudiarse lo conforma un conductor de aluminio reforzado de acero (ACSR por sus siglas en inglés). Sin embargo, es de gran importancia estudiar de manera teórica las repercusiones que tiene el hecho de que el conductor este conformado de dos materiales distintos con diferentes propiedades; reconociendo principalmente el efecto que tiene el acero en el comportamiento térmico; así como en el comportamiento electromagnético.

3.1 Fenómeno Físico

Al igual que el material mono-metálico, el caso de estudio consiste en un incremento repentino en el flujo de corriente alterna a través de un conductor bi-metálico. De igual forma al caso anterior, dicho conductor presenta una oposición al flujo de corriente eléctrica originando un efecto de calentamiento en el sistema debido al efecto Joule. Además por la naturaleza de la corriente alterna que circula en el sistema bi-metálico, también se puede presentar el efecto pelicular, donde la corriente tiende a fluir por la superficie del conductor. Sin embargo, para el sistema presente la existencia del efecto pelicular puede aparecer en cada conductor como se podrá notar más adelante. El calor generado por efecto joule modifica el valor de la resistividad eléctrica de ambos materiales que conforman al conductor eléctrico, lo que origina una redistribución en la densidad de corriente y a su vez modifica el término de la generación de calor. Lo anterior, origina un modelo acoplado entre las ecuaciones que describen el fenómeno eléctrico y las ecuaciones de difusión de calor. Por otro lado se puede anticipar la existencia de una compleja interacción eléctrica y térmica entre ambos medios (acero-aluminio).

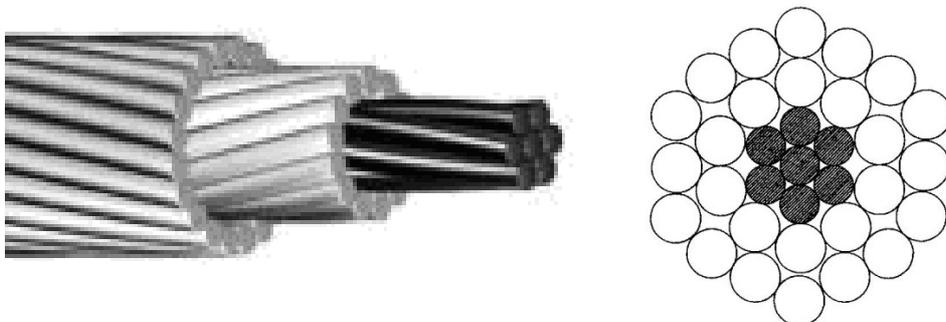


Figura 31. Conductor eléctrico ACSR (Aluminum Conductor, Steel Reinforced).

3.2 Modelo matemático

3.2.1 Modelo Eléctrico

Al igual que en el caso mono-metálico es posible obtener una ecuación diferencial que describe la distribución de densidad de corriente para cada material que conforma al conductor eléctrico. De la misma forma se considera que solo existe variación de la corriente en la dirección radial y que la corriente alterna se comporta de manera sinusoidal. Por lo que la densidad de corriente puede escribirse como $\bar{J} = J_{s,(al,ac)}(r)e^{i\omega t}$. Además, la resistividad eléctrica tiene una variación lineal con respecto a la temperatura y puede ser escrita como $\lambda_{(al,ac)} = \lambda_{\infty,(al,ac)} \left[1 + \phi_{(al,ac)} (T_{(al,ac)} - T_{\infty}) \right]$. Entonces la ecuación (3') se debe usar para modelar el comportamiento eléctrico de ambos medios.

Por lo anterior para el caso del acero se obtiene que,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_{s,ac}}{dr^2} + \left(\frac{2\phi_{ac}}{1 + \phi_{ac}(T_{ac} - T_{\infty})} \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_{s,ac}}{dr} + \frac{\phi_{ac}}{1 + \phi_{ac}(T_{ac} - T_{\infty})} \left[\frac{\partial^2 T_{ac}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right] J_{s,ac} = \\ = \frac{2i}{\delta_{ac}^2 (1 + \phi_{ac}(T_{ac} - T_{\infty}))} J_{s,ac} \end{aligned} \quad (48)$$

y para el aluminio,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_{s,al}}{dr^2} + \left(\frac{2\phi_{al}}{1 + \phi_{al}(T_{al} - T_{\infty})} \frac{\partial T_{al}}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_{s,al}}{dr} + \frac{\phi_{al}}{1 + \phi_{al}(T_{al} - T_{\infty})} \left[\frac{\partial^2 T_{al}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right] J_{s,al} = \\ = \frac{2i}{\delta_{al}^2 (1 + \phi_{al}(T_{al} - T_{\infty}))} J_{s,al} \end{aligned} \quad (49)$$

En las ecuaciones anteriores, $\delta_{al(ac)}$ es el espesor de película para cada medio conductor y definido por la expresión $\delta_{al,ac} = (2\lambda_{\infty,al(ac)} / \omega\mu_{al(ac)})^{1/2}$, J_s es la función de densidad de corriente dependiente sólo de la coordenada radial, ϕ es el coeficiente de temperatura para la resistividad e i es el número imaginario $\sqrt{-1}$, μ es la permeabilidad magnética, y t es el tiempo, mientras que los subíndices al y ac se refieren al dominio del aluminio y el acero, respectivamente.

Las ecuaciones anteriores están sujetas a las siguientes condiciones en la frontera:

Físicamente las condiciones anteriores reflejan varios efectos: en el centro del conductor se tiene la condición de simetría,

$$r = 0 : \quad \frac{dJ_{s,ac}}{dr} = 0, \quad (50)$$

en la referencia [23] muestra que para un conductor conformado de dos metales diferentes se debe cumplir que en la intercara entre ambos medios conductores, se tiene la continuidad en el campo eléctrico,

$$r = a : \quad E_{ac} = E_{al},$$

es decir:

$$r = a : \quad \lambda_{\infty,ac} [1 + \phi_{ac} (T_{ac} - T_{\infty})] J_{s,ac} = \lambda_{\infty,al} [1 + \phi_{al} (T_{al} - T_{\infty})] J_{s,al}; \quad (51)$$

De la misma forma se presenta continuidad en el campo magnético en la intercara [23]:

$$r = a : \quad H_{ac} = H_{al},$$

a partir de la ley de Faraday ec. (A8), se tiene que:

$$r = a : \quad \frac{1}{i\omega\mu_{ac}} \frac{d\lambda_{ac} J_{ac}}{dr} = H_{ac} = H_{al} = \frac{1}{i\omega\mu_{al}} \frac{d\lambda_{al} J_{al}}{dr},$$

tomando en cuenta que la resistividad varía con la temperatura, la condición de continuidad en el campo magnético queda de la siguiente manera:

$$r = a : \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\mu_{ac}} \left(\lambda_{\infty,ac} [1 + \phi_{ac} (T_{ac} - T_{\infty})] \frac{dJ_{s,ac}}{dr} + \lambda_{\infty,ac} \phi_{ac} J_{s,ac} \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{1}{\mu_{al}} \left(\lambda_{\infty,al} [1 + \phi_{al} (T_{al} - T_{\infty})] \frac{dJ_{s,al}}{dr} + \lambda_{\infty,al} \phi_{al} J_{s,al} \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (52)$$

mientras que en la superficie del conductor se tiene la mayor cantidad de corriente eléctrica J_b , debido al efecto pelicular.

$$r = b : \quad J_{s,al} = J_b. \quad (53)$$

El valor de la densidad de corriente en la superficie puede determinarse mediante la siguiente expresión:

$$I_{Tot} = 2\pi \left(\int_0^a J_{s,ac} r dr + \int_a^b J_{s,al} r dr \right). \quad (54)$$

Donde I_{Tot} es la corriente eléctrica total que circula a través del conductor, a es el radio

del alma de acero y b es el radio total del conductor bi-metálico.

Como se puede apreciar del sistema de ecs. (48)-(53), la distribución de densidad de corriente eléctrica depende al igual que el caso mono-metálico, de los gradientes de temperatura existentes en cada medio conductor. Por consiguiente, en la sección siguiente se presenta la ecuación de la energía para cada medio con el fin de completar el sistema de ecuaciones necesarias para resolver el problema completo.

3.2.2 Modelo Térmico

Al igual que en el caso mono-metálico, el modelo térmico parte de la ecuación de difusión de calor tanto para el acero como para el aluminio, solo que aquí es indispensable tomar en cuenta la transferencia de calor que existe entre ambos medios, mediante una formulación conjugada de la transferencia de calor como podrá apreciarse en las líneas siguientes. También en el presente caso, se puede considerar que la transferencia de calor es a través de un medio poroso, solo que en este caso es necesario obtener el factor de porosidad para cada uno de los medios que componen al conductor, ya que el radio de los alambres de aluminio es diferente al radio de los alambres de acero.

Como primer paso es necesario determinar el parámetro de porosidad en el acero y en el aluminio mediante el siguiente análisis.

Para el acero,

$$\sigma_{ac} = 1 - \frac{V_{ac}}{V_{T,ac}} \quad , \quad (55)$$

donde el volumen V_{ac} representa al volumen ocupado por los alambres de acero, mientras que $V_{T,ac}$ representa al volumen total del núcleo de acero. Ambo se definen de la siguiente manera,

$$V_{ac} = n_{ac} \times \pi \times r_{ac}^2 \times L \quad , \quad (56)$$

$$V_{T,ac} = \pi \times a^2 \times L \quad . \quad (57)$$

De igual forma para el aluminio, se tiene que

$$\sigma_{al} = 1 - \frac{V_{al}}{V_{T,al}} \quad , \quad (58)$$

donde V_{al} es el volumen ocupado por los alambres de aluminio y V_T es el volumen total que ocupan los alambres de aluminio que envuelven al núcleo de acero. Considerando que el aluminio forma un anillo alrededor del acero, los volúmenes anteriores se pueden escribir

como,

$$V_{al} = n_{al} \times \pi \times r_{al}^2 \times L \quad , \quad (59)$$

$$V_{T,al} = \pi \times (b^2 - a^2) \times L \quad . \quad (60)$$

Una vez obtenido el parámetro de porosidad es posible determinar las propiedades equivalentes o efectivas de los materiales que forman al conductor eléctrico de la siguiente manera [16]:

$$(\rho c)_{ac,ef} = \sigma_{ac} \times (\rho c)_{air} + (1 - \sigma_{ac}) (\rho c)_{ac} \quad , \quad (61a)$$

$$(\rho c)_{al,ef} = \sigma_{al} \times (\rho c)_{air} + (1 - \sigma_{al}) (\rho c)_{al} \quad . \quad (61b)$$

Donde ρ es la densidad y c es el calor específico. En el apéndice C se muestran los valores de la densidad y calor específico correspondientes a cada material que conforman al conductor.

El problema principal en el estudio de transferencia de calor en un medio poroso en estado transitorio es determinar la conductividad térmica equivalente. Debido a la falta de estudios relacionados a este tema sobre conductores bi-metálicos, la conductividad equivalente se obtiene a partir del método de conductividad equivalente en capas, que consiste básicamente en suponer que el medio poroso se encuentra compuesto por capas concéntricas de material sólido y fluido. A continuación se muestra el modelo de la conductividad térmica equivalente mostrado en la referencia [16]:

$$k_{ac,ef} = \sigma_{ac} \times k_{air} + (1 - \sigma_{ac}) k_{ac} \quad , \quad (62a)$$

$$k_{al,ef} = \sigma_{al} \times k_{air} + (1 - \sigma_{al}) k_{al} \quad . \quad (62b)$$

Con el cálculo de las propiedades equivalentes se considera al medio poroso como un sólido pero con las propiedades afectadas debido al aire atrapado entre los alambres. De esta manera, el modelo físico del conductor se puede apreciar en la Fig. 32.

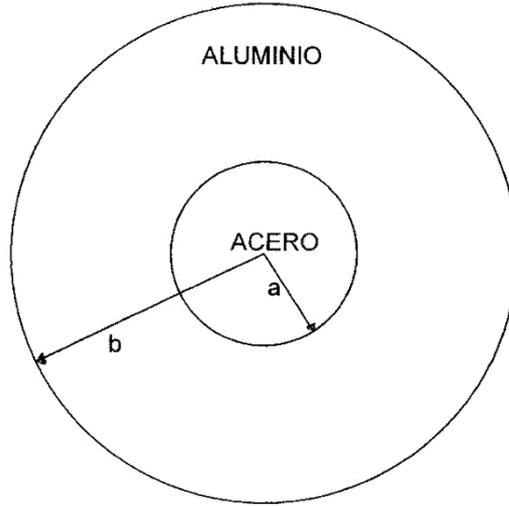


Figura 32. Representación de un conductor eléctrico ACSR como un medio continuo.

Para el caso del aluminio, la ecuación de conducción de calor en coordenadas cilíndricas, se reduce a la siguiente expresión,

$$\frac{k_{al,ef}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right) + \lambda_{\infty,al} [1 + \phi_{al} (T_{al} - T_{\infty})] |J_{s,al}|^2 = (\rho c)_{al,ef} \frac{\partial T_{al}}{\partial t}, \quad (63)$$

y la correspondiente ecuación de conducción de calor para el acero en coordenadas cilíndricas sería,

$$\frac{k_{ac,ef}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right) + \lambda_{\infty,ac} [1 + \phi_{ac} (T_{ac} - T_{\infty})] |J_{s,ac}|^2 = (\rho c)_{ac,ef} \frac{\partial T_{ac}}{\partial t}. \quad (64)$$

La distribución de temperaturas se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales sujeto a las siguientes condiciones de frontera.

En el centro del conductor, existe simetría en la distribución de temperaturas debido a que se considera que no hay gradiente de temperaturas en la dirección angular.

$$r = 0: \quad \left. \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (65)$$

Las condiciones de frontera en la intercara existente entre ambos medios conductores tienen una gran importancia, ya que dichas condiciones de frontera dan la información de la tasa de transferencia de calor entre el aluminio y el acero. En este caso existe continuidad en el flujo de calor entre ambos materiales; además se considera que el acero y el aluminio tienen buen contacto, y de este modo la temperatura en la intercara debe ser la misma. Estas condiciones de frontera acoplan las ecuaciones de difusión de calor del aluminio y del acero, por lo que se tienen que resolver simultáneamente. El esquema anterior constituye

por sí mismo un problema conjugado de la transferencia de calor. Sin embargo, en el presente caso aparece una dificultad adicional que involucra la predicción de las densidades de corriente para ambos medios. De esta manera, el sentido de una formulación conjugada se complica y sin ninguna pérdida de generalidad se puede considerar que la solución del presente problema constituye una forma más acabada de los problemas conjugados: transferencia simultánea del calor y de la densidad de corriente conjugadas. Esta formulación teórica no tiene precedentes en la literatura técnica especializada y por lo mismo, constituye un nuevo tipo de problema conjugado. Por lo comentado previamente entonces podemos escribir las condiciones de compatibilidad o condiciones de continuidad como,

$$r = a : \quad T_{al} = T_{ac}, \quad -k_{al,e} \left. \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right|_{r=a} = -k_{ac,e} \left. \frac{\partial T_{ac}}{\partial r} \right|_{r=a}. \quad (66)$$

La condición de frontera en el exterior del conductor depende directamente de las condiciones atmosféricas como la velocidad del viento y su temperatura, ya que nos dice la tasa de transferencia de calor del conductor al ambiente.

$$r = b : \quad -k_{al,e} \left. \frac{\partial T_{al}}{\partial r} \right|_{r=b} = h(T_{al} - T_{\infty}). \quad (67)$$

Además de las condiciones de frontera es necesaria una condición inicial. Para esta condición inicial se supone que el conductor se encuentra inicialmente a temperatura ambiente, condición que se expresa de la siguiente manera:

$$t = 0 : \quad T_{al} = T_{ac} = T_{\infty}. \quad (68)$$

3.2.3 Análisis de Órdenes de Magnitud y Variables Adimensionales

En esta sección, se analizan los órdenes de magnitud del proceso de transferencia de calor; así como del fenómeno eléctrico, con el fin de obtener los parámetros adimensionales que relacionen las propiedades físicas del fenómeno.

Debido a que la región del aluminio es la que favorece preferentemente el transporte eléctrico por ser mejor conductor, la longitud característica corresponde directamente al espesor que tiene la sección del aluminio. De igual forma, el tiempo convectivo adimensional viene dado por la relación, $t_c \sim (\rho c)_{al,e} (b-a)/h$ y la distancia característica es precisamente el espesor de la cubierta de aluminio. Por otro lado la escala espacial correspondiente al núcleo de acero corresponde directamente al radio del núcleo; entonces $r_{ac} \sim a$, mientras que la escala espacial correspondiente al aluminio es el espesor que esta conformado por el trenzado de alambres de dicho material que recubre al núcleo de acero, por lo tanto $r_{al} \sim b-a$. Además, el aumento característico de temperatura ΔT_c del sistema, se obtiene de la misma forma que el caso mono-metálico mediante un balance de energía entre el término de generación interna de calor y el término transitorio, esto se puede

expresar fácilmente como,

$$\Delta T_c \sim \frac{\lambda_{\infty,al} J_b^2 (b-a)^2}{k_{al,ef} Bi}, \quad (69)$$

donde Bi es el número de Biot, que en este caso se define mediante la expresión,

$$Bi = \frac{h(b-a)}{k_{al,ef}}. \quad (70)$$

En la ec. (70) se puede apreciar que además de la distancia característica que corresponde al aluminio, se tiene la conductividad térmica efectiva del aluminio; en consecuencia, el número de Biot se define de esta forma debido a que es el aluminio el que se encuentra en contacto con el ambiente.

Una vez obtenido el análisis de órdenes de magnitud que define las escalas físicas relevantes del problema, este se puede usar para definir una serie de variables adimensionales; así como parámetros adimensionales. Además es indispensable definir un parámetro que da la relación del radio del acero con el radio del conductor,

$$\chi = \frac{a}{b}. \quad (71)$$

Con el fin de adimensionalizar tanto el modelo térmico y el eléctrico, mediante el uso de las escalas obtenidas anteriormente es posible determinar las variables adimensionales, como se muestran a continuación.

$$\tau = \frac{t}{\left[(\rho c)_{al,e} (b-a)/h \right]}, \quad \theta_{al,ac} = \frac{T_{al,ac} - T_{\infty}}{\Delta T_c}, \quad \xi = \frac{r}{a}, \quad \varphi_{al,ac} = \frac{J_{s,(al,ac)}}{J_b}, \quad (72)$$

$$\kappa_{al,ac} = \phi_{al,ac} \Delta T_c, \quad \varepsilon_{ac} = \frac{\delta_{ac}}{a}, \quad \varepsilon_{al} = \frac{\delta_{al}}{b-a}, \quad \delta_{al,ac} = \sqrt{\frac{2\lambda_{\infty,(al,ac)}}{\mu_{al,ac} \omega}}; \quad (73)$$

$$\eta = \frac{r-a}{b-a}. \quad (74)$$

3.2.4 Modelo Eléctrico Adimensional

Sustituyendo las correspondientes variables y parámetros adimensionales dadas por las ecs. (70)-(74) en el modelo eléctrico, se obtiene la siguiente ecuación adimensional para el acero:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{ac}}{d\xi^2} + \left(2 \frac{\kappa_{ac}}{(1 + \kappa_{ac} \theta_{ac})} \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \right) \frac{d\varphi_{ac}}{d\xi} + \frac{\kappa_{ac}}{(1 + \kappa_{ac} \theta_{ac})} \left(\frac{\partial^2 \theta_{ac}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \xi} \right) \varphi_{ac} = \\ = \frac{2i}{(1 + \kappa_{ac} \theta_{ac}) \varepsilon_{ac}^2} \varphi_{ac} \quad , \end{aligned} \quad (75)$$

y de la misma forma se obtiene la ecuación adimensional para el aluminio:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{al}}{d\eta^2} + \left(2 \frac{\kappa_{al}}{(1 + \kappa_{al} \theta_{al})} \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta + \frac{\chi}{1-\chi}} \right) \frac{d\varphi_{al}}{d\eta} + \\ + \frac{\kappa_{al}}{(1 + \kappa_{al} \theta_{al})} \left(\frac{\partial^2 \theta_{al}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta + \frac{\chi}{1-\chi}} \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \eta} \right) \varphi_{al} = \frac{2i}{(1 + \kappa_{al} \theta_{al}) \varepsilon_{al}^2} \varphi_{al} \quad , \end{aligned} \quad (76)$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\xi = 0: \quad \frac{d\varphi_{ac}}{d\xi} = 0 \quad , \quad (77)$$

$$\xi - 1 = \eta = 0: \quad \varphi_{ac} = \frac{\lambda_{\infty,al} [1 + \kappa_{al} \theta_{al}]}{\lambda_{\infty,ac} [1 + \kappa_{ac} \theta_{ac}]} \varphi_{al} \quad , \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{al}}{\mu_{ac}} \frac{\lambda_{\infty,ac} (1 + \kappa_{ac} \theta_{ac})}{\lambda_{\infty,al} (1 + \kappa_{al} \theta_{al})} \left(\frac{d\varphi_{ac}}{d\xi} + \frac{\kappa_{ac}}{1 + \kappa_{ac} \theta_{ac}} \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \xi} \varphi_{ac} \right) = \\ = \left(\frac{d\varphi_{al}}{d\eta} + \frac{\kappa_{al}}{1 + \kappa_{al} \theta_{al}} \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \eta} \varphi_{al} \right) \left(\frac{\chi}{1-\chi} \right) \quad ; \end{aligned} \quad (79)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi_{al} = 1 \quad . \quad (80)$$

3.2.5 Modelo Térmico Adimensional

Introduciendo las variables adimensionales, ecs. (70)-(74), la ecuación de difusión de calor en el acero puede adimensionalizarse de la misma forma que el caso anterior; para la región del acero se tiene que,

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \xi} \right) + \Lambda \left(\frac{\chi}{1-\chi} \right)^2 (1 + \kappa_{ac} \theta_{ac}) Bi |\varphi_{ac}|^2 = \alpha \left(\frac{\chi}{1-\chi} \right)^2 Bi \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \tau} , \quad (81)$$

y para el aluminio:

$$\frac{1}{\eta + \frac{\chi}{1-\chi}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\eta + \frac{\chi}{1-\chi} \right) \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \eta} \right] + Bi (1 + \kappa_{al} \theta_{al}) |\varphi_{al}|^2 = Bi \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \tau} . \quad (82)$$

Con las siguientes condiciones de frontera adimensionales:

$$\xi = 0: \quad \left. \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 , \quad (83)$$

$$\xi - 1 = \eta = 0: \quad K \left(\frac{1-\chi}{\chi} \right) \left. \frac{\partial \theta_{ac}}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \left. \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} , \quad (84)$$

$$\theta_{ac} = \theta_{al} , \quad (85)$$

$$\eta = 1: \quad \left. \frac{\partial \theta_{al}}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = -Bi \theta_{al} ; \quad (86)$$

y la condición inicial:

$$\tau = 0: \quad \theta_{ac} = \theta_{al} = 0 . \quad (87)$$

donde $\alpha = \frac{k_{al,ef}}{k_{ac,ef}} \frac{(\rho c)_{ac,ef}}{(\rho c)_{al,ef}}$, $\Lambda = \frac{\lambda_{\infty,ac}}{\lambda_{\infty,al}} \frac{k_{al,ef}}{k_{ac,ef}}$ y $K = \frac{k_{ac,ef}}{k_{al,ef}}$.

3.3 Solución del Modelo Termo-Eléctrico

Como se puede apreciar del sistema de ecs. (75)-(87), hay cinco parámetros adimensionales principales (ε_{al} , ε_{ac} , κ_{al} , κ_{ac} , Bi); sin embargo, es posible reducir el número de parámetros debido a que existe dependencia entre ellos. Se observa que hay dos parámetros de espesor de película, uno para el acero y otro para el aluminio. Sin embargo, estos son dependientes entre sí, por lo que al considerar valores de espesor de película para el aluminio, se obtiene de manera directa el valor del espesor de película del acero y la dependencia se presenta debido a que la frecuencia es la misma para ambos medios. La expresión para determinar el parámetro de profundidad de película del acero en función del parámetro del aluminio se muestra a continuación:

$$\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{al} \left(\frac{1-\chi}{\chi} \right) \sqrt{\frac{\lambda_{\infty,ac} \mu_{al}}{\lambda_{\infty,al} \mu_{ac}}} \quad (88)$$

Por lo que solo es necesario asignar valores del parámetro de espesor de película correspondiente al aluminio.

Al igual que el parámetro de espesor de película, aquí también se tienen dos parámetros de acoplamiento, uno para el aluminio y otro para el acero; sin embargo, es suficiente con proporcionar uno de los dos, ya que la dependencia proviene del hecho de que ambos parámetros poseen el mismo incremento de temperatura característico ΔT_c , por lo que en este caso es suficiente con proporcionar el valor del parámetro de acoplamiento para el aluminio. La siguiente expresión muestra la relación que existe entre ambos parámetros:

$$\kappa_{ac} = \kappa_{al} \frac{\phi_{ac}}{\phi_{al}} \quad (89)$$

Por las razones anteriormente mencionadas es posible reducir el número de parámetros que gobiernan al sistema a solo tres parámetros principales (ε_{al} , κ_{al} y Bi), por lo que de ahora en adelante dichos parámetros serán nombrados simplemente como ε , κ y Bi . De esta forma se estudiará el efecto que tiene cada uno de estos parámetros en los perfiles de temperatura y densidad de corriente.

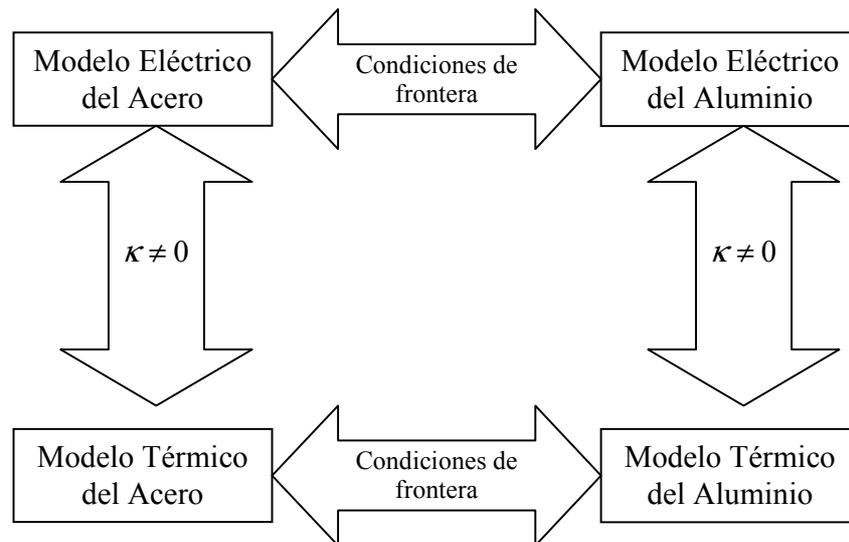


Figura 33. Representación del acoplamiento de los modelos matemáticos.

La Fig. 33 muestra de forma representativa el acoplamiento que existe entre los modelos matemáticos. Se puede apreciar que es un sistema de ecuaciones completamente acoplado, el acoplamiento entre el acero y el aluminio se da por las condiciones de frontera en la intercara, mientras que el acoplamiento entre el modelo eléctrico y térmico lo da el parámetro de acoplamiento κ .

3.3.1 Influencia del Parámetro Pelicular \mathcal{E}

La Fig. 34 muestra la distribución de densidad de corriente adimensional para tres distintos valores del parámetro de película \mathcal{E} ($=0.1, 0.2$ y 0.5), y con el afán de poder observar su influencia en el comportamiento eléctrico se mantienen constantes los valores de los parámetros $\kappa=0.5$ y $Bi=1.0$. La parte izquierda muestra la solución correspondiente al acero en función de su coordenada radial, mientras que el lado derecho muestra la solución del aluminio en función su respectiva coordenada radial.

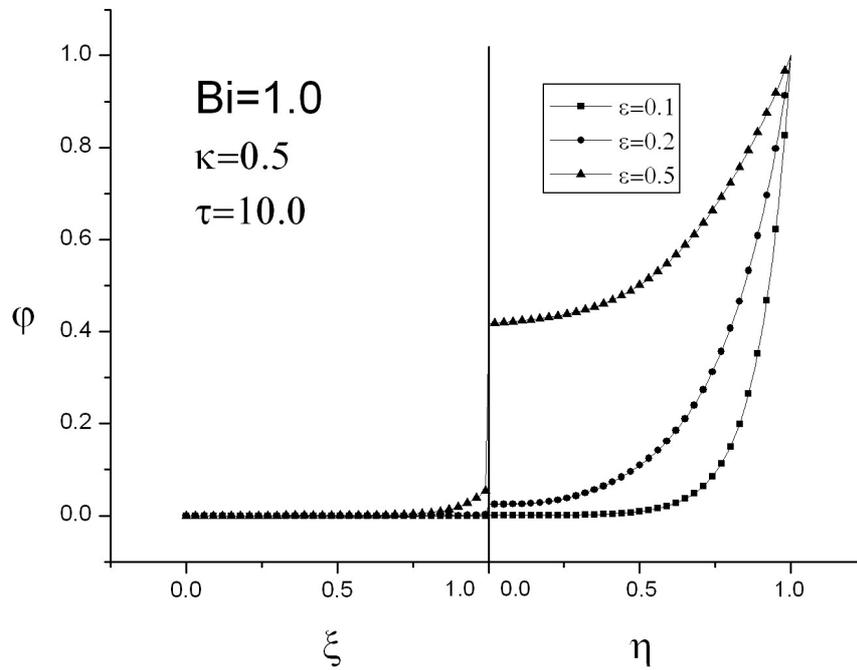


Figura 34. Variación de la densidad de corriente adimensional, ϕ , para diferentes valores de ϵ

En las Figs. 35-39 se muestra el estado transitorio de los perfiles de temperatura adimensional para distintos valores de ϵ ($=0.1, 0.2$ y 0.5) manteniendo constantes los valores de los parámetros $\kappa=0.5$ y $Bi=1.0$, y para cinco tiempos adimensionales: τ ($=0.1, 1.0, 2.0, 4.0$ y 10.0). La parte izquierda es la solución de la ecuación de difusión de calor correspondiente al acero, mientras que la parte derecha es solución del modelo térmico del aluminio.

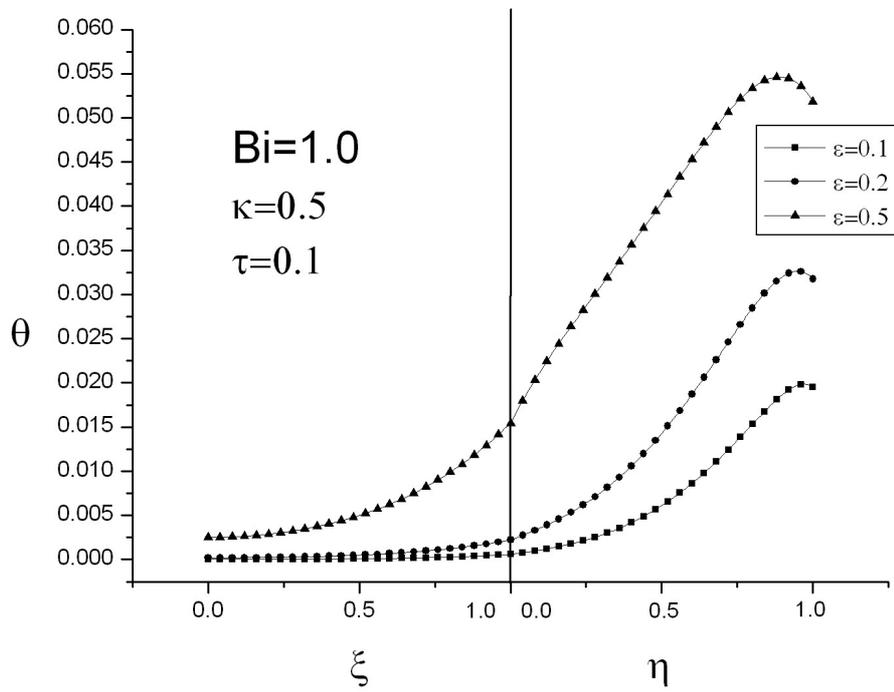


Figura 35. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=0.1$

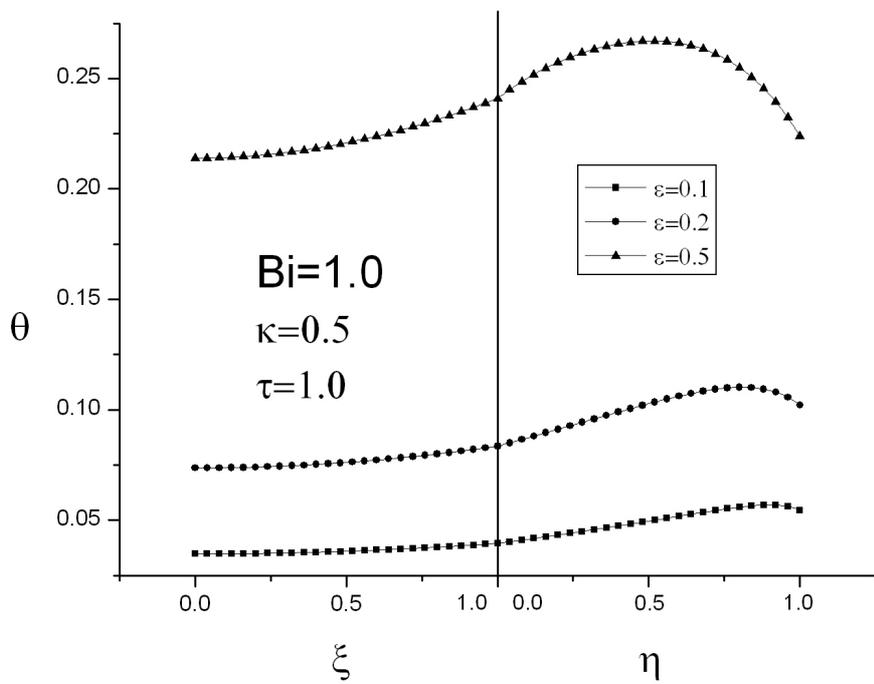


Figura 36. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ϵ y $\tau=1.0$

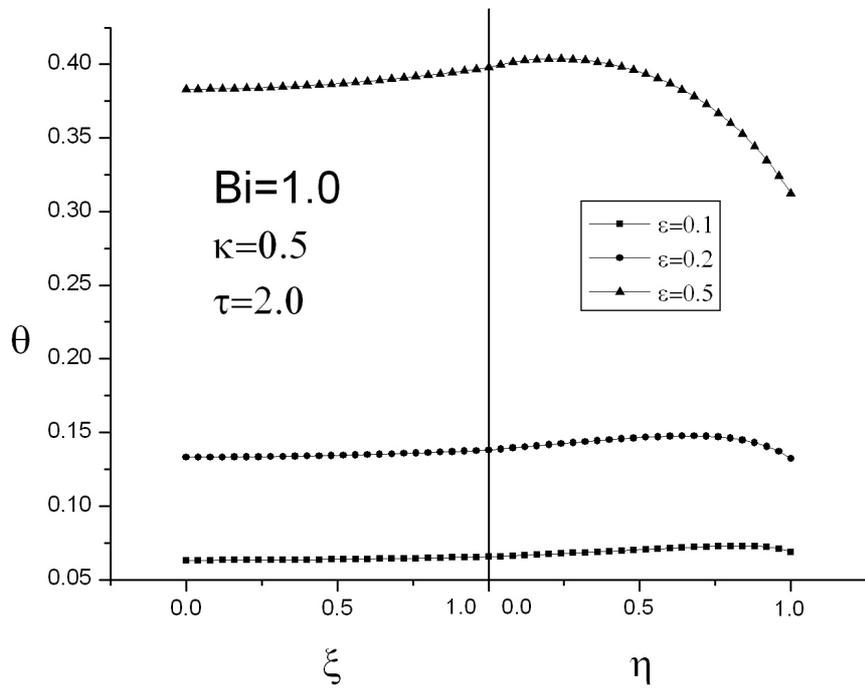


Figura 37. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ε y $\tau=2.0$

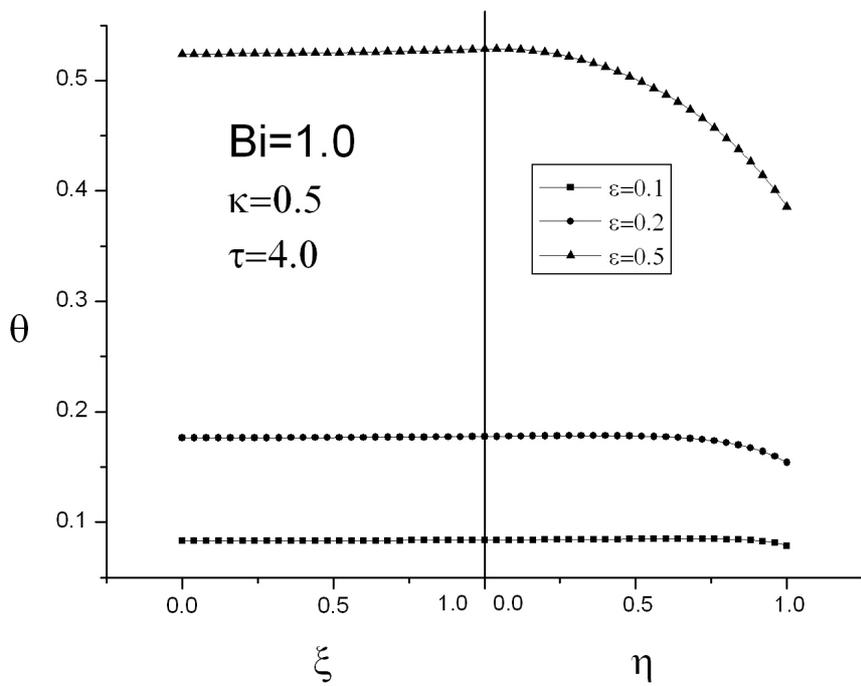


Figura 38. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ε y $\tau=4.0$

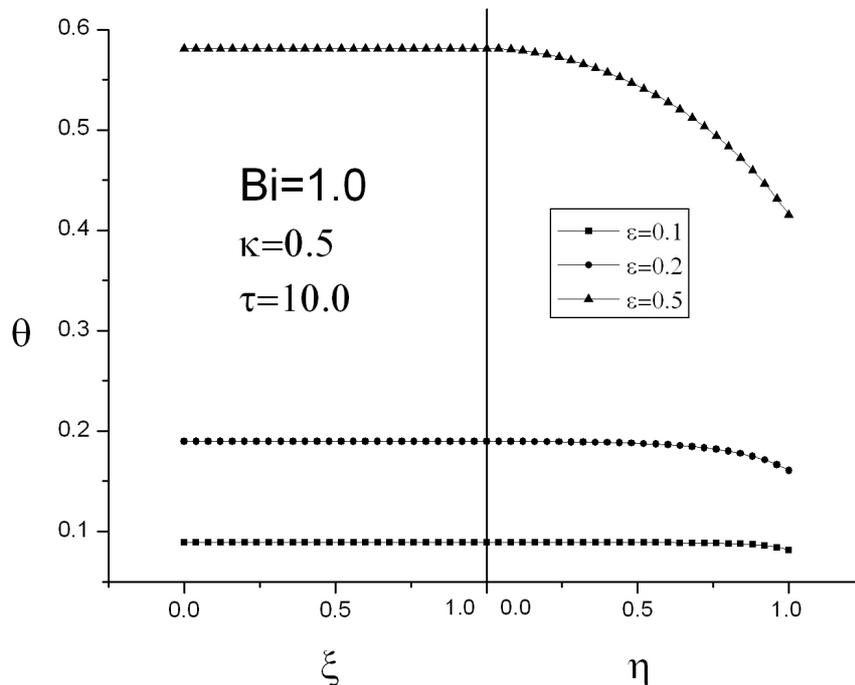


Figura 39. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de ε y $\tau=10.0$

3.4 Influencia del Parámetro de Acoplamiento κ

El parámetro de acoplamiento κ indica que tanto interactúan entre si los modelos eléctrico y térmico, de tal forma que entre mayor sea el valor de dicho parámetro mayor dependencia existe entre ellos. Es de gran importancia tomar en cuenta la variación de la resistividad con la temperatura, ya que provoca un mayor incremento de la temperatura, a diferencia de cuando se considera a la resistividad como constante, lo que podría originar grandes diferencias entre la temperatura real y la teórica.

La Fig. 40 muestra la evolución de la distribución de densidad de corriente adimensional para cuatro tiempos adimensionales distintos τ ($=0.0, 0.1, 1.0$ y 10.0), con el fin de poder apreciar como mientras el conductor eléctrico se calienta va cambiando la distribución de densidad de corriente adimensional, manteniendo constantes los valores de los parámetros $\varepsilon = 0.5$, $\kappa = 0.5$ y $Bi = 1.0$. Por otro lado la Fig. 41 muestra la distribución de densidad de corriente para tres distintos valores del parámetro de acoplamiento κ ($=0.0, 0.2$ y 0.5), para un tiempo adimensional $\tau = 10.0$. En ambas Figuras la parte izquierda corresponde a la solución del modelo eléctrico del acero, mientras que la parte derecha es la solución del modelo eléctrico del aluminio.

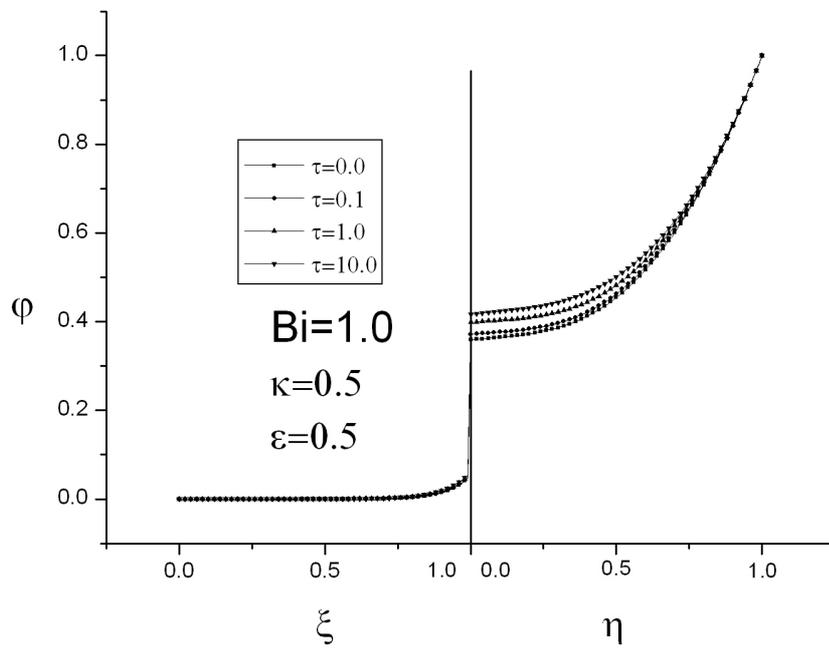


Figura 40. Variación de la densidad de corriente adimensional, ϕ , para diferentes valores del tiempo adimensional τ

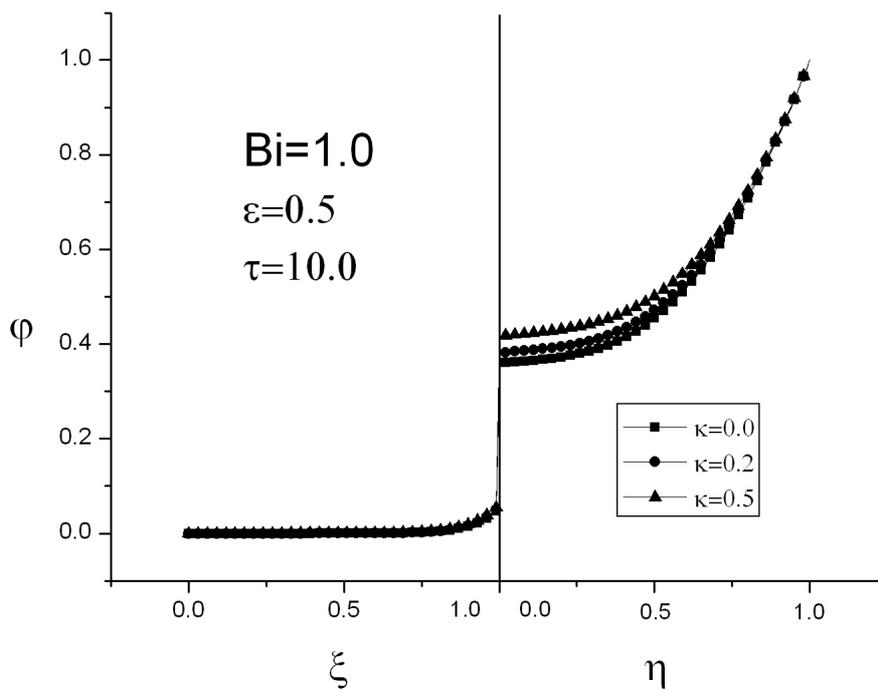


Figura 41. Variación de la densidad de corriente adimensional, ϕ , para diferentes valores de κ

Las Figs. 42-46 muestran el estado transitorio de los perfiles de temperatura adimensional para distintos valores del parámetro de acoplamiento κ ($=0.0, 0.2$ y 0.5) manteniendo constantes los valores de los parámetros $\varepsilon=0.5$ y $Bi=1.0$, para cinco tiempos adimensionales τ ($=0.1, 1.0, 2.0, 4.0$ y 10.0). La parte izquierda es la solución de la ecuación de difusión de calor correspondiente al acero, mientras que la parte derecha es solución del modelo térmico del aluminio.

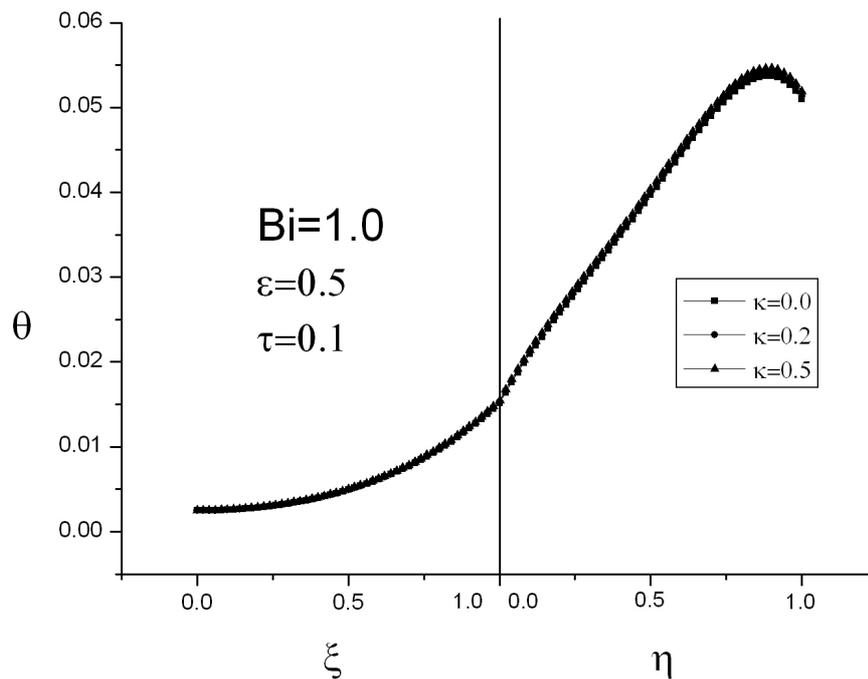


Figura 42. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=0.1$

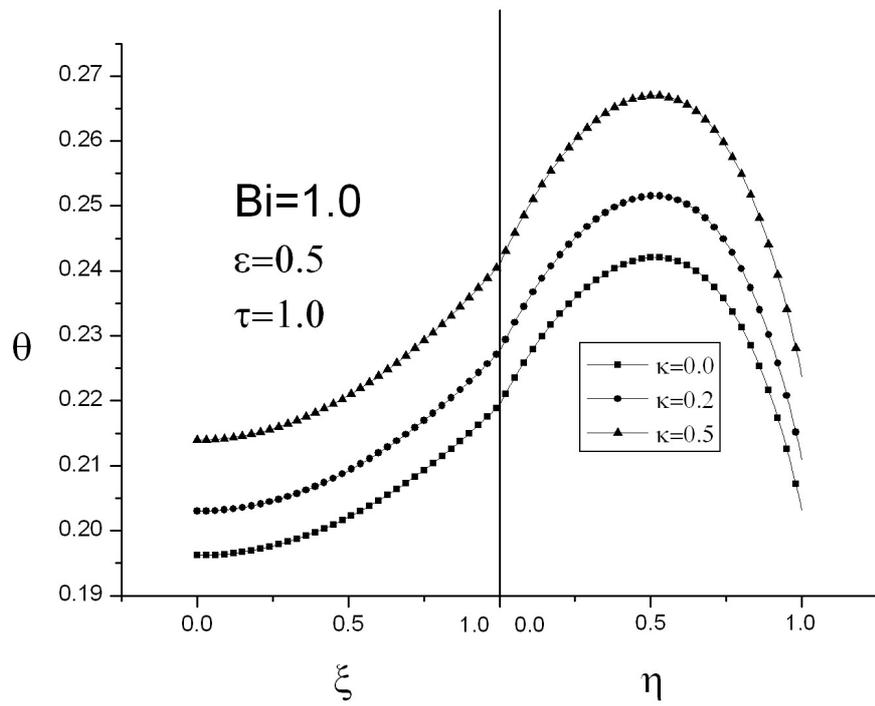


Figura 43. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=1.0$

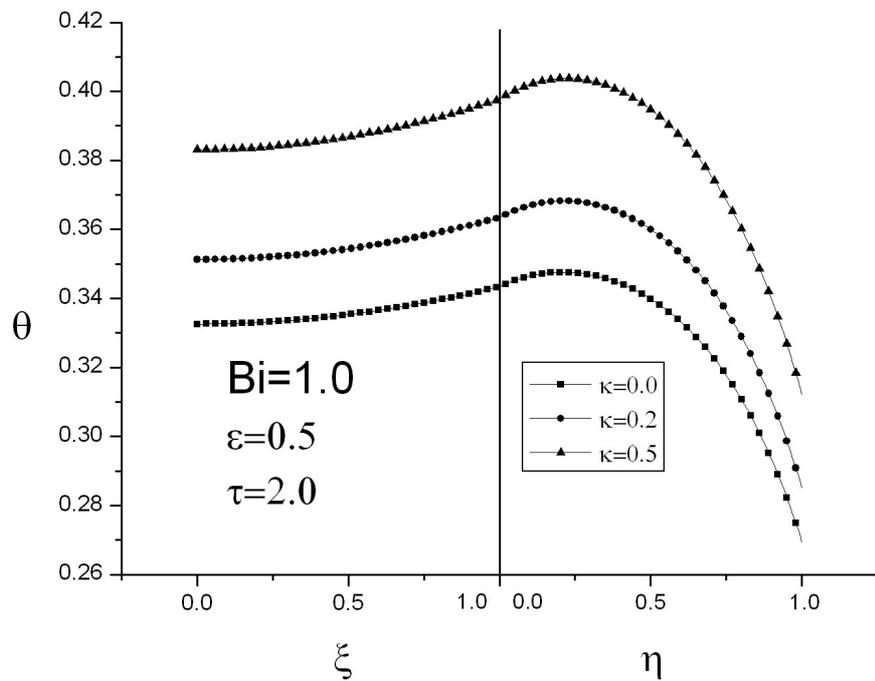


Figura 44. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=2.0$

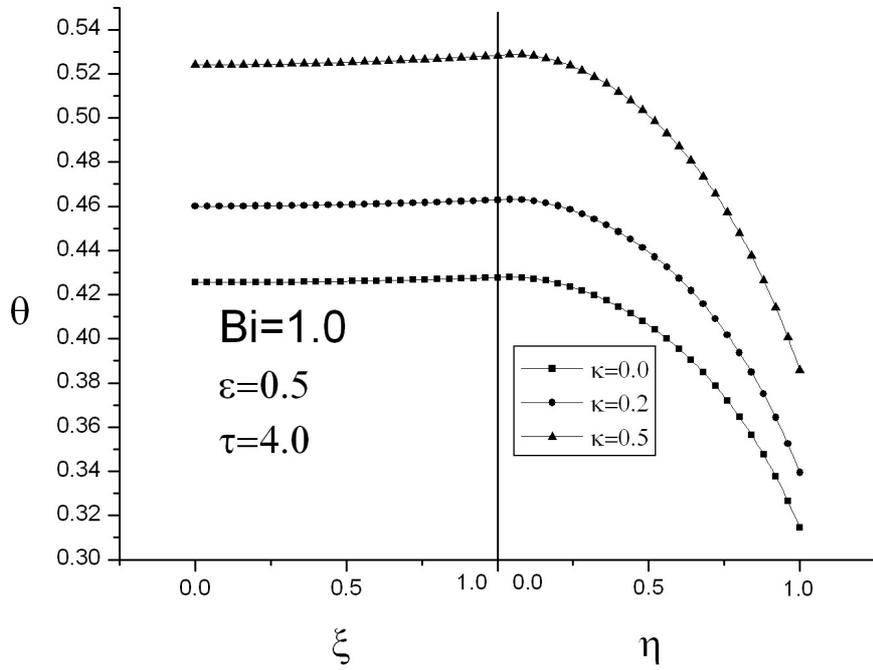


Figura 45. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=4.0$

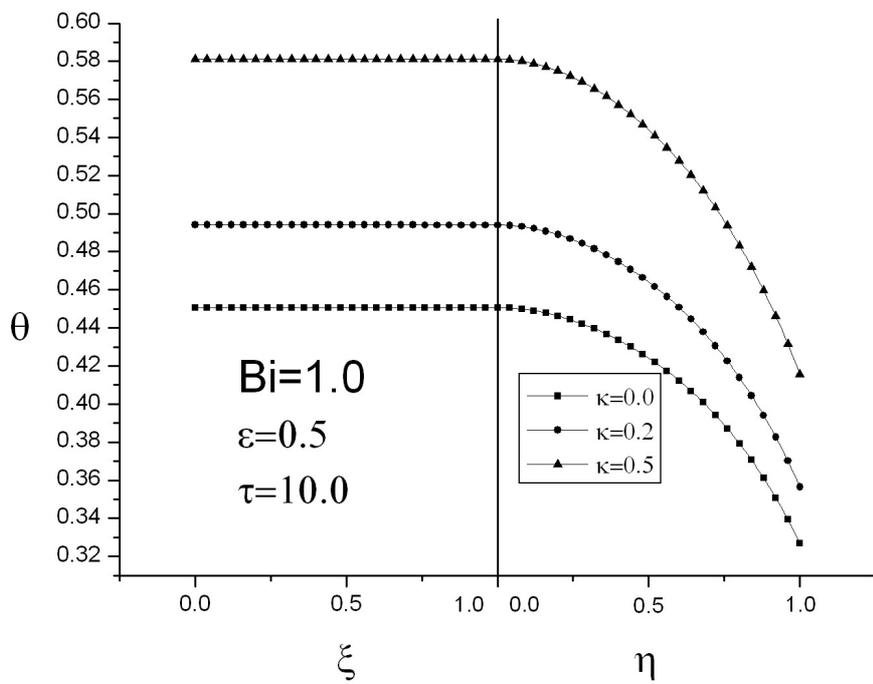


Figura 46. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de κ y $\tau=10.0$

3.3.3 Influencia del Número de Biot Bi

El número de Biot es la competencia entre el proceso de transferencia de calor por conducción y convección y considerando que la conductividad térmica permanece constante, al variar el número de Biot implica variar el coeficiente convectivo; es decir, las condiciones ambientales. Por lo que un número de Biot pequeño significa una deficiente transferencia de calor hacia el ambiente y un número de Biot grande significa una buena transferencia de calor hacia el ambiente.

La Fig. 47 muestra la distribución de densidad de corriente para tres diferentes números de Biot ($Bi=0.1, 0.5$ y 1.0), manteniendo constantes el valor de los parámetros $\varepsilon=0.5$ y $\kappa=0.5$.

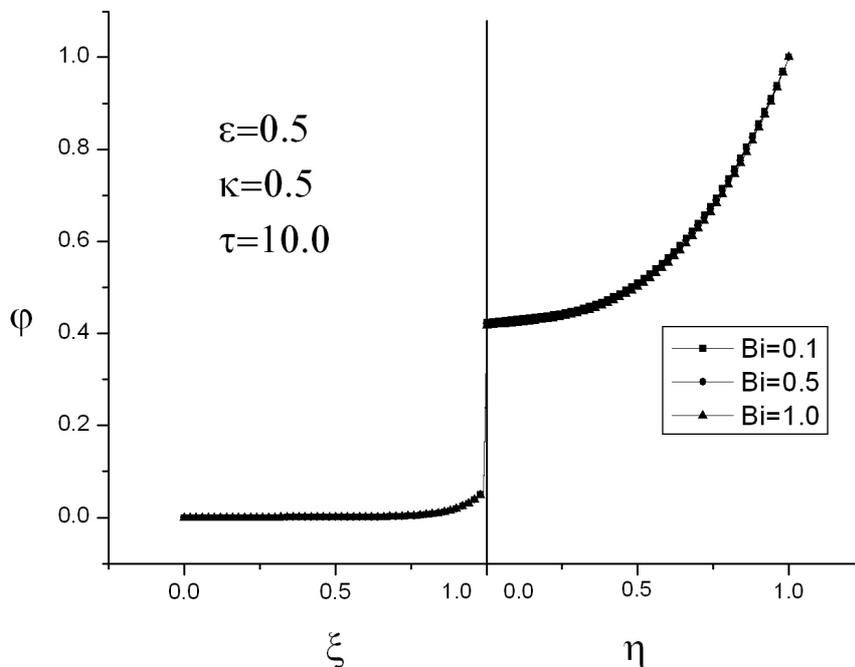


Figura 47. Variación de la densidad de corriente adimensional, φ , para diferentes valores de Bi

En las Figs. 48-52 se muestra el estado transitorio de los perfiles de temperatura dimensional para distintos valores de Bi ($=0.1, 0.2$ y 0.5) manteniendo constantes los valores de los parámetros $\kappa=0.5$ y $\varepsilon=0.5$, para cinco tiempos adimensionales τ ($=0.1, 1.0, 2.0, 4.0$ y 10.0). La parte izquierda es la solución de la ecuación de difusión de calor correspondiente al acero, mientras que la parte derecha es solución del modelo térmico del aluminio.

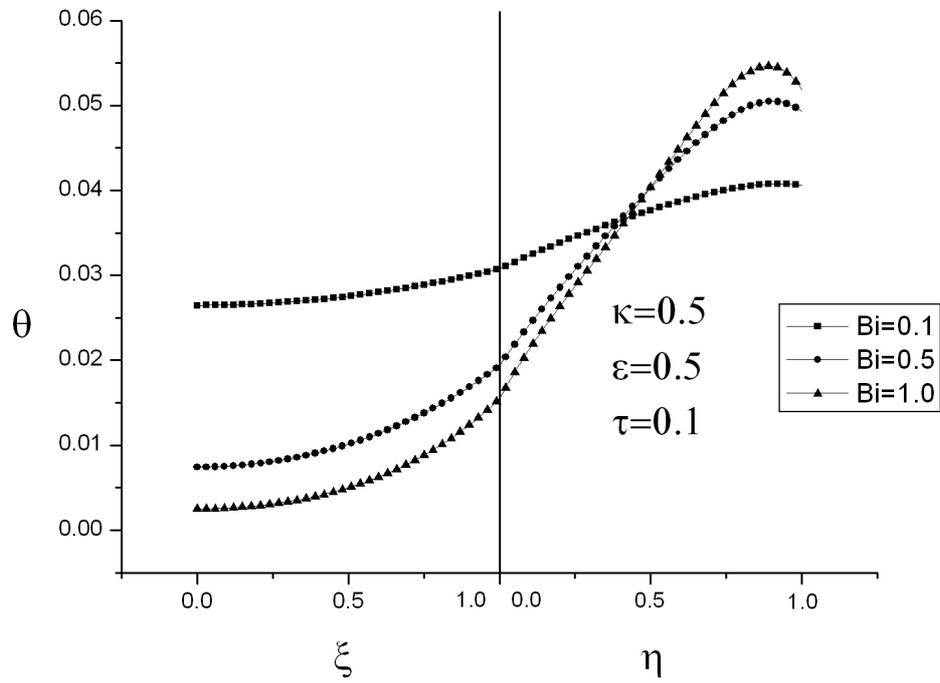


Figura 48. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=0.1$

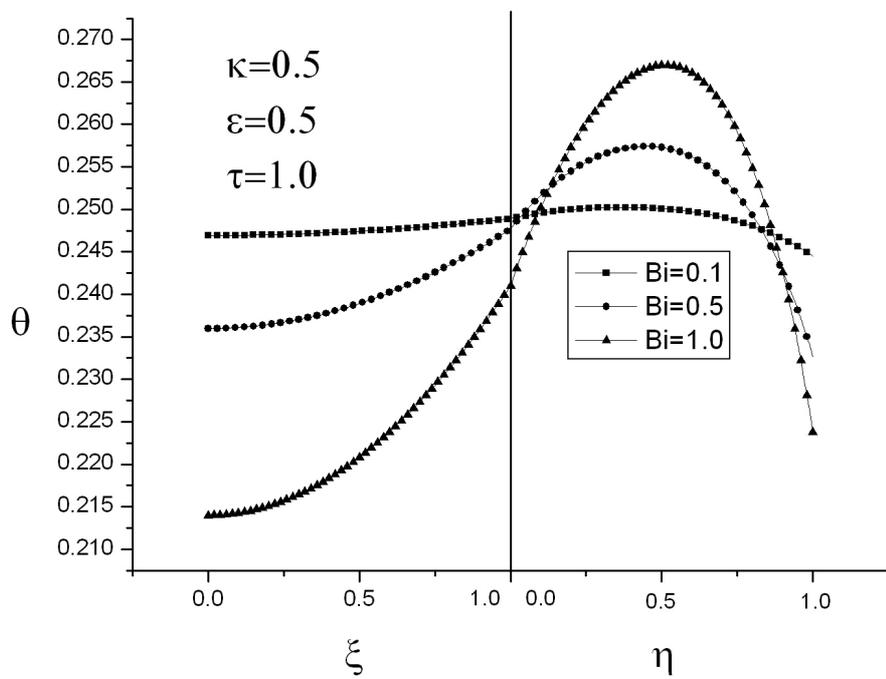


Figura 49. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=1.0$

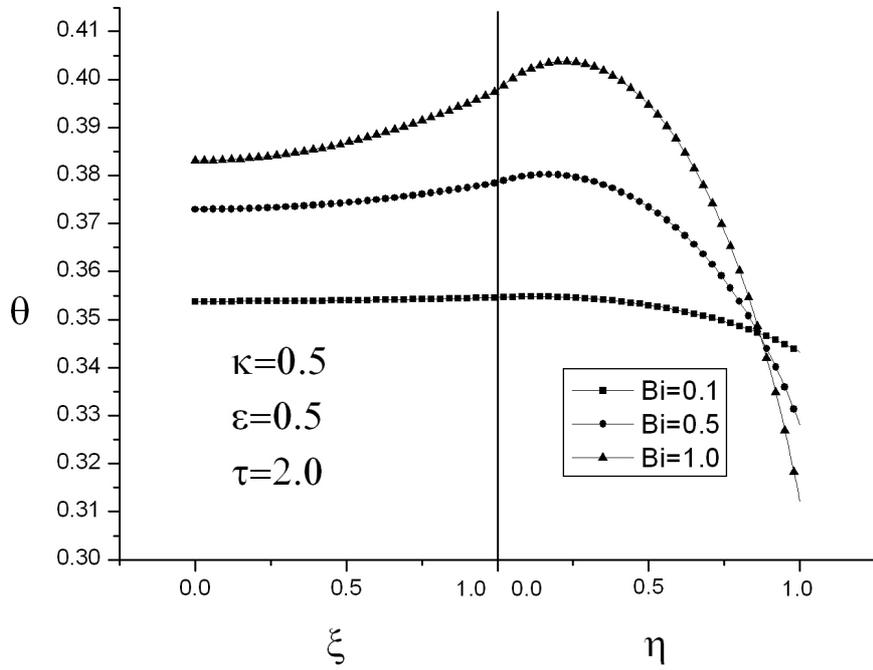


Figura 50. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=2.0$

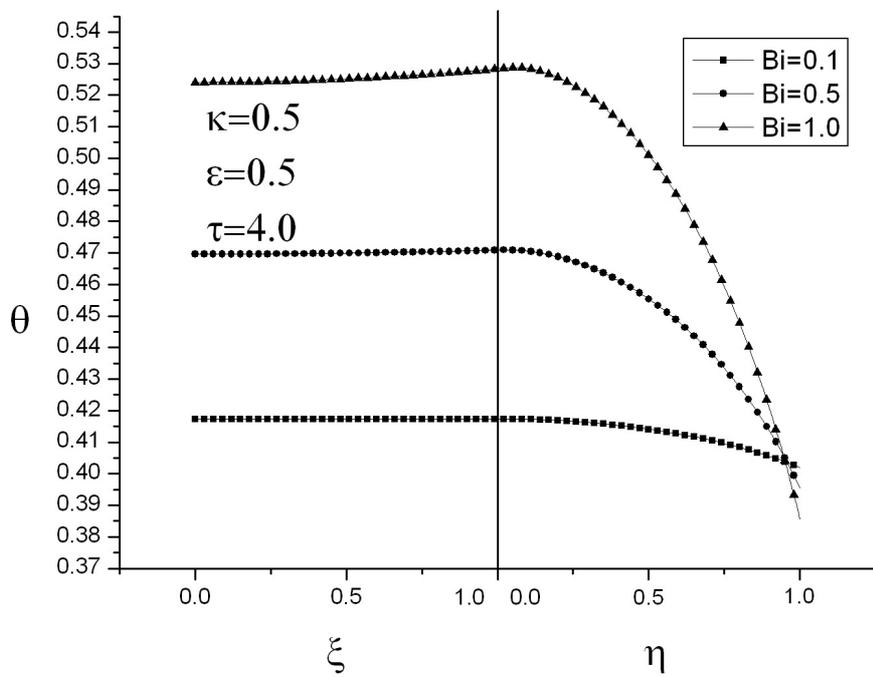


Figura 51. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=4.0$

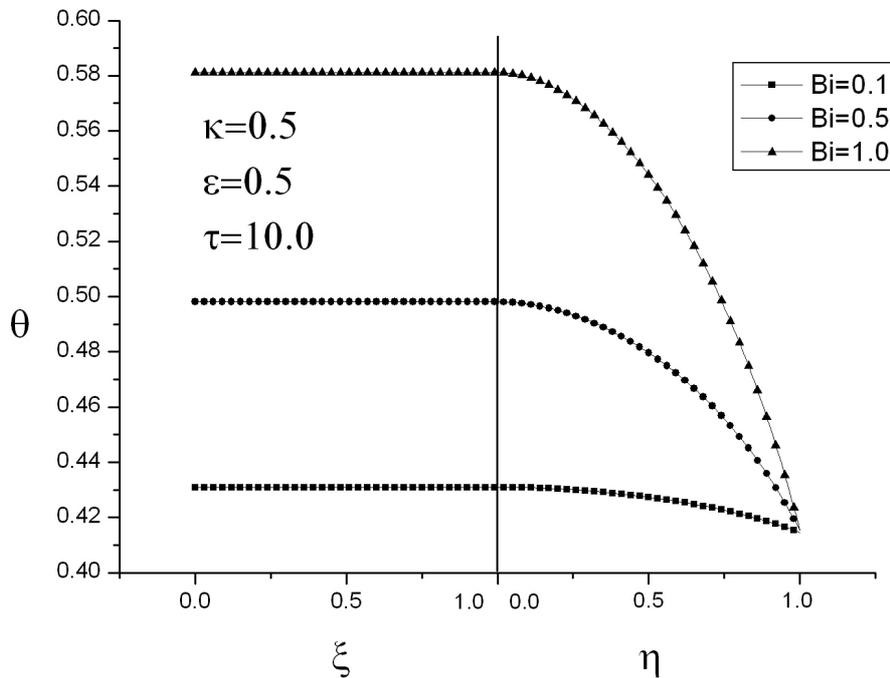


Figura 52. Perfil de temperatura adimensional, θ , para diferentes valores de Bi y $\tau=10.0$

3.4 Análisis de Resultados

En este capítulo se desarrolló un modelo termo-eléctrico para un conductor bi-metálico que conduce corriente alterna. Dicho modelo se encuentra doblemente acoplado (Fig. 33): en primer lugar se da el acoplamiento del modelo térmico con el modelo eléctrico por el parámetro de acoplamiento y el segundo acoplamiento de las ecuaciones se presenta en la frontera entre el acero y el aluminio, por lo que el conjunto de ecuaciones diferenciales se debe de resolver simultáneamente.

Es posible apreciar de las ecuaciones diferenciales que se tienen cinco parámetros que gobiernan al fenómeno físico; sin embargo, es posible reducirlos a tres parámetros debido a que existe dependencia entre los parámetros del modelo correspondiente al acero y los del aluminio, por lo que basta con definir valores para estos parámetros: el parámetro pelicular ε , el cual indica la región cercana a la superficie por donde fluye la corriente eléctrica; el parámetro de acoplamiento κ , como su nombre lo indica, este parámetro nos dice el nivel de dependencia en que se encuentran los modelos térmico y eléctrico; finalmente el número de Biot Bi , que nos indica la cantidad de transferencia de calor hacia el ambiente por convección.

En la Fig. 34 se observa que la densidad de corriente se concentra en su mayoría en el aluminio, lo que significa que la función del acero es solamente la de soportar la tensión

mecánica. Además es posible observar que cuando el efecto pelicular se intensifica la totalidad de la corriente eléctrica fluye por el aluminio, por lo que el acero no tiene ningún efecto en la distribución de densidad de corriente.

Respecto al efecto del parámetro pelicular ε sobre los perfiles de temperatura durante el estado transitorio, las Figs. 35-39 muestran que conforme el parámetro pelicular ε decrece, el perfil de temperaturas tiende a ser más uniforme, debido a que la generación de calor se presenta en una región muy estrecha, y la transferencia de calor tanto al núcleo de acero; así como la parte de aluminio del conductor que no transporta corriente eléctrica se da por conducción. De esta forma la sección del conductor que no genera calor solo puede tener una distribución uniforme al llegar a su estado permanente. Por lo que un análisis de parámetros concentrados puede ser una buena aproximación solo en el caso de efecto pelicular fuerte, ya que como se observa para un valor del parámetro pelicular ε grande; es decir, para un efecto pelicular débil, los gradientes de temperatura son de mayor magnitud, por lo que se debe tomar en cuenta el incremento de temperatura en dirección radial.

Del mismo modo que en el caso mono-metálico, el parámetro κ nos indica el grado de acoplamiento entre los modelos eléctrico y térmico. La Fig. 40 muestra como va evolucionando el perfil de la densidad de corriente con el tiempo como resultado del calentamiento del conductor. Además, se observa que la parte correspondiente al acero también presenta un efecto pelicular, aunque permanece invariante. De la misma forma la Fig. 41 muestra una comparación de la distribución de la densidad de corriente con respecto a la distribución del modelo desacoplado $\kappa=0.0$, en donde se observa que conforme aumenta el valor del parámetro de acoplamiento, origina una mayor redistribución en la densidad de corriente; así como en los perfiles de temperatura del estado transitorio. Es importante mencionar que las distribuciones de densidad de corriente mostradas en la Fig. 41 se encuentran en estado permanente, ya que todas parten de la misma distribución y con $\kappa=0.0$. La distribución de densidad de corriente en el acero permanece prácticamente invariable sin importar el valor del parámetro de acoplamiento. Así mismo los perfiles de temperatura se ven afectados por este acoplamiento. En la Fig. 42 se observa que en un principio los perfiles de temperatura se encuentran distribuidos de la misma forma, esto se debe que al inicio del estado transitorio el conductor no ha tenido un aumento de temperatura importante; sin embargo, en los tiempos posteriores (Figs. 43-46) ya es posible observar una notable diferencia entre los perfiles con distintos valores del parámetro de acoplamiento, lo que proporciona una mejor descripción del fenómeno físico, y por lo tanto un mejor aprovechamiento del conductor eléctrico.

Un factor importante en el estudio del comportamiento térmico es el medio ambiente, debido a que las condiciones ambientales modifican de manera importante la distribución de temperaturas, como ya se mencionó anteriormente. Las condiciones ambientales se encuentran representadas por el número de Biot. En la Fig. 47 se observa que el perfil de densidad de corriente permanece invariable para diferentes condiciones ambientales; sin embargo, los perfiles de temperatura se ven afectados de forma importante, como se observa en las Figs. 48-52: las mayores diferencias de temperatura entre el centro del conductor y la superficie se da para números de Biot grandes, por otro lado para números de Biot pequeños se observa que la diferencia de temperaturas entre el centro y la superficie

es significativamente menor, por lo que se puede usar el método de parámetros concentrados.

Para números de Biot pequeños el incremento de temperatura característico ΔT_c es grande, ya que dicho incremento de temperatura se encuentra escalado por el número de Biot ec. (69), lo cual va acorde con la teoría, ya que un número de Biot pequeño implica una mala transferencia de calor al ambiente por convección, por lo que el calor generado se acumula en el conductor aumentando su temperatura. Sin embargo, la temperatura adimensional se encuentra escalada con respecto al incremento de temperatura característico, ec. (72), lo que significa una temperatura adimensional pequeña. Es por esta razón que en las Figs. 48-52, se observa un menor valor de temperatura adimensional para números de Biot pequeños, no obstante que se presenta un mayor calentamiento en la temperatura real.

Capítulo 4

Eficiencia Eléctrica

4.1 Caso mono-metálico

En el presente trabajo se considera como eficiencia eléctrica al comportamiento que tiene la distribución de densidad de corriente alterna en comparación con la distribución de corriente uniforme, la cual se presenta cuando fluye corriente directa a través de un conductor.

La Fig. 53 muestra una distribución de densidad de corriente uniforme para el caso mono-metálico, en dicha figura la densidad de corriente que hay en la superficie del conductor es la misma que hay en el centro, a diferencia de las distribuciones de densidad de corriente bajo la influencia del efecto pelicular (Fig. 15). De lo anterior se puede definir a la eficiencia eléctrica como la comparación que hay entre la densidad de corriente que hay en el centro del conductor sujeto al efecto pelicular con respecto a la distribución de densidad de corriente uniforme. La misma Fig. 53 muestra que en el caso de corriente uniforme el valor de la densidad de corriente adimensional en el centro del conductor es el mismo que hay en la superficie y su valor es 1.0, por lo que directamente se puede expresar a la eficiencia eléctrica de la siguiente manera:

$$\beta = \varphi_{CA}(0) / \varphi_{CD}(0) = \varphi_{CA}(0) \quad . \quad (90)$$

En la expresión anterior, los subíndices *CA* y *CD* corresponden a corriente alterna y corriente directa, respectivamente.

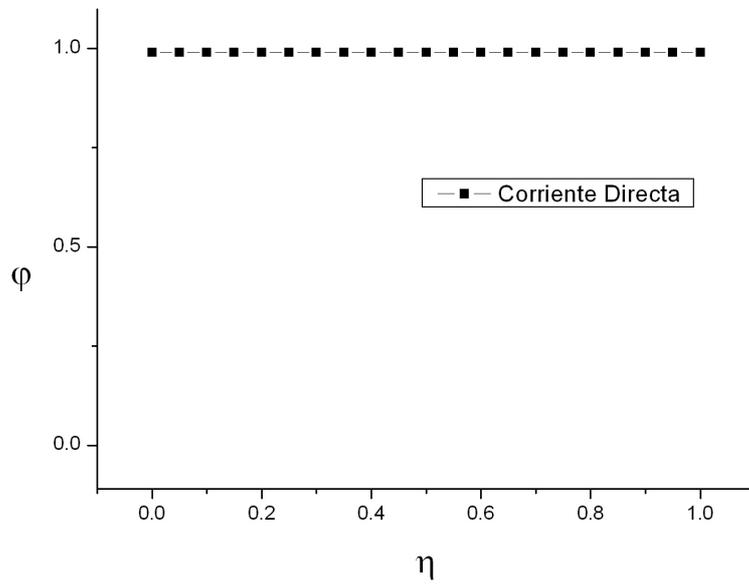


Figura 53. Distribución de corriente uniforme.

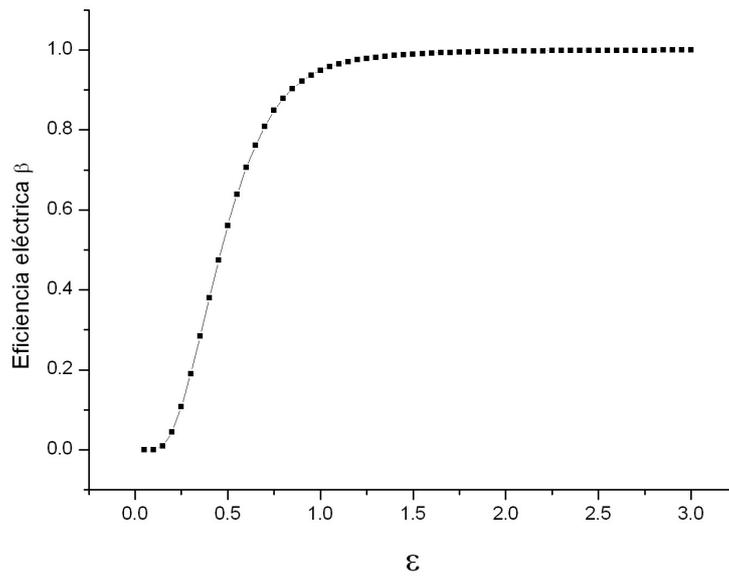


Figura 54. Eficiencia eléctrica β en función de ε .

La Fig. 54 muestra la eficiencia eléctrica en función del parámetro pelicular ε . En dicha figura se aprecia que a partir de que $\varepsilon \sim 1$ el comportamiento eléctrico es muy similar a un conductor con distribución de corriente uniforme.

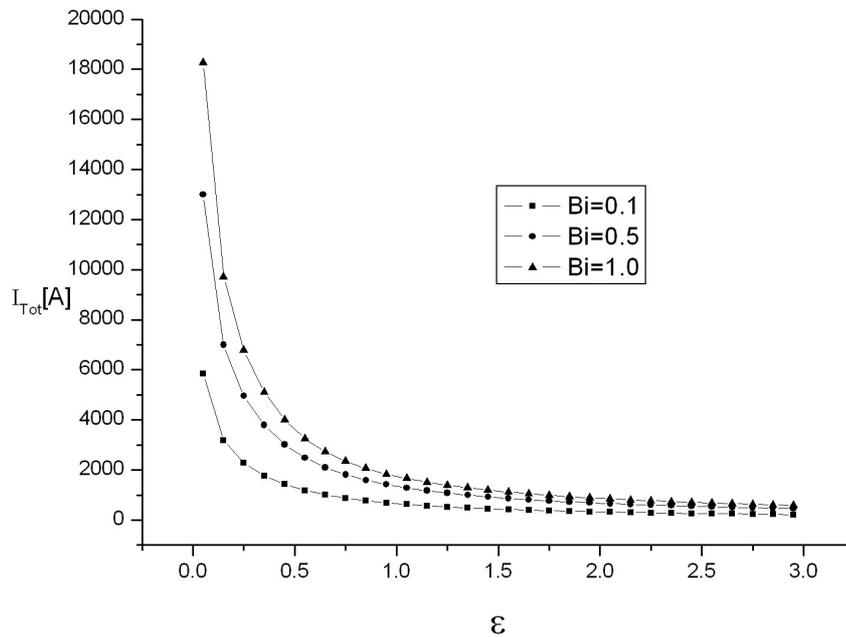


Figura 55. Corriente total I en función de ε .

La Fig. 55 muestra la mayor cantidad de corriente eléctrica en amperes en función del parámetro pelicular ε , para tres diferentes números de Biot. La corriente total se determinó bajo la consideración de que la mayor temperatura que alcanza el conductor eléctrico es de 100°C , la temperatura ambiente es de 25°C y viene dada por la expresión siguiente:

$$I_{Tot} = 2\pi \sqrt{\frac{(T - T_{\infty}) k_{ef} Bi}{\theta(0) \lambda_{\infty}}} \frac{\delta}{\varepsilon} \int_0^1 \varphi \eta d\eta \quad (91)$$

La ec. (91) toma en cuenta los resultados adimensionales, tanto de la temperatura; así como de la densidad de corriente. Es importante mencionar que los resultados adimensionales pueden ser usados, ya sea para obtener un perfil de temperaturas para una corriente dada, o bien es posible fijar una temperatura máxima y de este modo determinar la mayor cantidad de corriente eléctrica que puede fluir a través del conductor.

4.2 Caso bi-metálico

Al igual que el caso mono-metálico, es posible determinar una eficiencia eléctrica. Como se muestra en la Fig. 30 para diferentes valores del parámetro pelicular ε el salto que existe en la intercara puede variar de manera importante. Por lo que la eficiencia eléctrica queda definida como la razón ó cociente entre las siguientes dos diferencias: el salto de la densidad de corriente alterna en la intercara y el salto de la densidad de corriente directa en la intercara. Lo anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{[\varphi_{al}(0) - \varphi_{ac}(1)]_{CA}}{[\varphi_{al}(0) - \varphi_{ac}(1)]_{CD}} \quad (92)$$

Para el caso de densidad de corriente uniforme resulta muy sencillo determinar el valor del salto, ya que al estar adimensionalizada la densidad de corriente con respecto a la densidad de corriente del aluminio se obtiene el valor uniforme de 1.0, mientras que el valor de la densidad de corriente para el acero se obtiene directamente de la razón que existe entre las resistividades eléctricas como se muestra a continuación (como se puede apreciar en la Fig. 56):

$$\varphi_{ac,CD} = \frac{\lambda_{al}}{\lambda_{ac}} \quad (93)$$

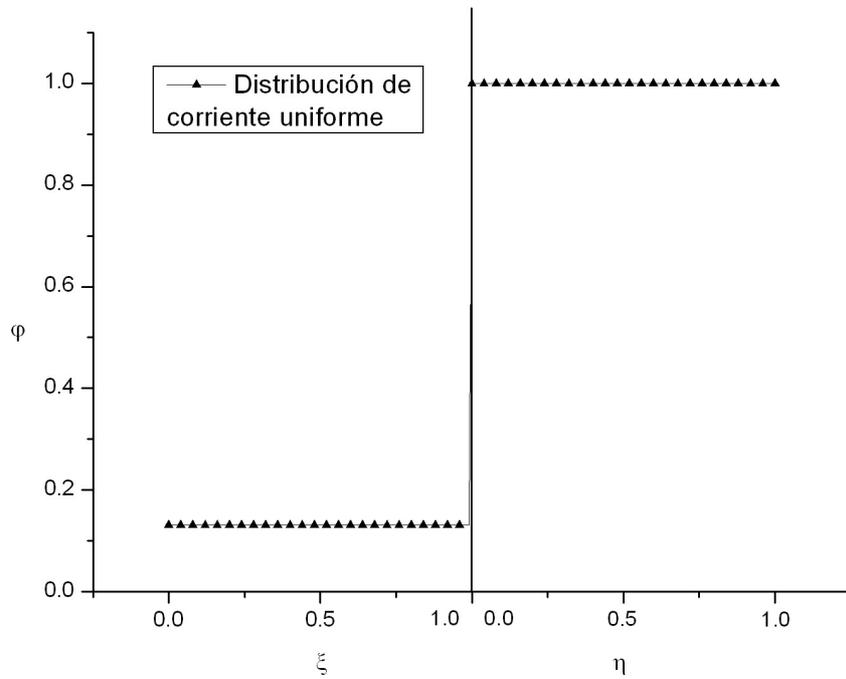


Figura 56. Distribución de corriente uniforme.

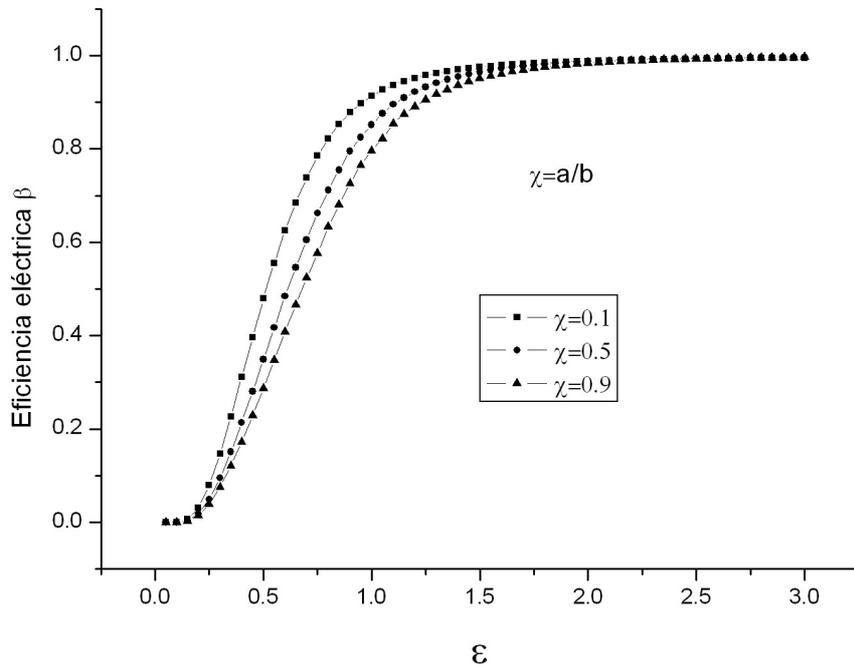


Figura 57. Eficiencia eléctrica β en función de ε .

La Fig. 57 muestra la eficiencia eléctrica para valores crecientes del parámetro pelicular; así como para distintas relaciones de aspecto χ . Es importante notar que la interpretación correcta de la Fig. 57 es de gran importancia, ya que como se aprecia el comportamiento eléctrico tiende a ser el correspondiente a una distribución de corriente constante conforme aumenta el valor del parámetro pelicular. A partir de la ec. (73)

$$\varepsilon_{al} = \frac{\delta_{al}}{b-a} ,$$

se puede deducir que el parámetro pelicular solo puede ser grande, ya sea que la profundidad de película, δ_{al} , sea grande, o que la diferencia de radios, $(b-a)$, sea muy pequeña o ambas. Cualquiera que sea el caso, el sistema se comporta eléctricamente como distribución de corriente constante; sin embargo, si se reduce de manera significativa la sección del aluminio, se reduce de la misma forma el volumen de dicho conductor, lo que se traduce en una generación de calor por unidad de volumen mayor. Por lo que se puede decir que cuando el espesor del aluminio tiende al valor de la profundidad de película, es decir, $\varepsilon \sim 1$, el conductor se comporta como distribución de corriente uniforme.

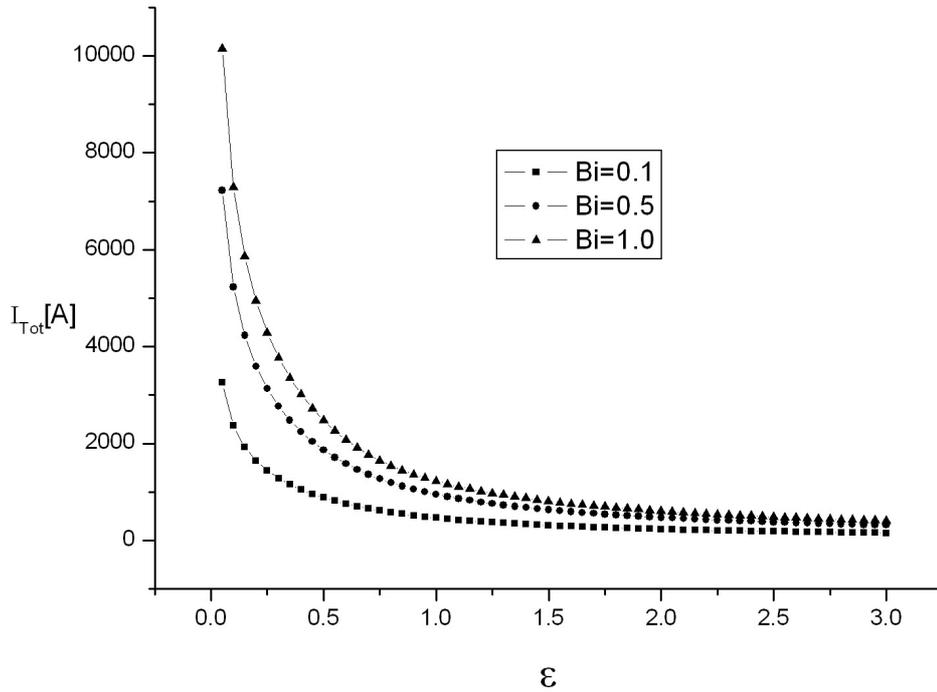


Figura 58. Corriente total I en función de ε .

La Fig. 58 muestra la mayor cantidad de corriente eléctrica que puede fluir a través de un conductor bi-metálico sin que éste sobrepase los 100 °C en función del parámetro pelicular ε , para diferentes valores del número de Biot, y que se define mediante la siguiente expresión,

$$I_{Tot} = 2\pi \sqrt{\frac{75^{\circ}\text{C} \cdot k_{al,ef} Bi}{\theta(0) \lambda_{al}}} \frac{\delta}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\chi}{1-\chi} \right)^2 \int_0^1 \varphi_{ac} \xi d\xi + \int_0^1 \varphi_{al} \left(\eta + \frac{\chi}{1-\chi} \right) d\eta \right]. \quad (94)$$

4.3 Análisis de Resultados

La eficiencia eléctrica se definió en el presente trabajo como la comparación de la distribución de densidad de corriente bajo la influencia del efecto pelicular con respecto a la distribución de corriente uniforme, tanto para el caso mono-metálico; como para el caso bi-metálico. En las Figs. 54 y 57 se aprecia que conforme aumenta el parámetro pelicular ε , el comportamiento eléctrico tiende a ser el de distribución de corriente uniforme; sin embargo, para aumentar el valor del parámetro pelicular es necesario, ya sea el aumento del espesor de película o la reducción del radio del conductor. El espesor de película depende de las propiedades del material y de la frecuencia, lo que origina que sea más factible variar el radio del conductor. Lo anterior implica que se tiene que reducir el radio del conductor

para aumentar el valor del parámetro pelicular, lo cual sería benéfico; ya que significa un ahorro de material.

Por otro lado, las Figs. 56 y 58 muestran la corriente total que puede ser transportada por un conductor eléctrico conforme aumenta el valor del parámetro pelicular ε . De tales figuras se puede concluir que conforme aumenta el valor del parámetro pelicular; es decir se reduce el radio del conductor, se transporta una menor cantidad de corriente eléctrica. Lo anterior se debe principalmente a que al reducir el radio del conductor aumenta la densidad de corriente eléctrica y de la misma forma el calor generado por efecto joule.

De los resultados anteriores es posible apreciar que la mayor cantidad de corriente se presenta cuando el parámetro pelicular es muy pequeño $\varepsilon \ll 1$; sin embargo, también se tiene la menor eficiencia eléctrica, además de que un valor pequeño del parámetro pelicular implica un conductor de radio grande, lo que significa un gasto importante de material. Por otro lado, cuando el parámetro pelicular es muy grande $\varepsilon \gg 1$, el radio del conductor es muy pequeño, lo que se traduce en un ahorro de material, no obstante la cantidad de corriente eléctrica disminuye de manera significativa, por lo que se debe tomar en cuenta la cantidad de corriente eléctrica que se requiere transferir para la selección de un conductor.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

El principal problema de los análisis de ampacidad es la obtención de modelos matemáticos que describan lo mejor posible el fenómeno físico, ya que dicho fenómeno posee una gran cantidad de variables, que modifican el comportamiento térmico de los conductores eléctricos.

Con el fin de obtener teóricamente una temperatura del conductor lo más parecida posible a la temperatura real, en el pasado se han llevado a cabo una parte importante de trabajos y modelos matemáticos; sin embargo, las temperaturas obtenidas mostraban, en general, una diferencia notable entre la temperatura teórica y la real. Entender la discrepancia anterior tenía una motivación relevante debido a que era indispensable aumentar la necesidad de aprovechar al máximo el transporte en las redes eléctricas debido a la demanda. Esto obligo de la misma forma a que los modelos matemáticos se modificaran, tomando en cuenta efectos adicionales que influyen en el comportamiento térmico. Es por esta razón que el modelo matemático obtenido en el presente trabajo, además de considerar que la generación de calor es no uniforme debido a la distribución de densidad de corriente por el efecto pelicular, considera que la resistividad de eléctrica varía con la temperatura, lo que origina un acoplamiento entre el modelo eléctrico y el térmico; y por lo tanto una mejor aproximación de la temperatura del conductor.

Uno de los objetivos principales del presente trabajo fue destacar la importancia del estudio de la transferencia de calor en conductores eléctricos; en este caso, tanto para conductores mono-metálicos; así como bi-metálicos. Para ello fue formulado un modelo térmico y un modelo electromagnético, que al ser adimensionalizados sirven no solo para un caso de estudio, sino que los resultados adimensionales pueden aplicarse a cualquier conductor mono-metálico, mientras que para el caso bi-metálico, los resultados solo exponen el comportamiento de los cables ACSR, debido a que en el modelo adimensional del acero quedan cocientes de propiedades, además de la dependencia que existe entre los parámetros peliculares (ϵ_{al} y ϵ_{ac}) y de acoplamiento (κ_{al} y κ_{ac}); sin embargo, existe una gran variedad de conductores ACSR, por lo que estos resultados son de gran relevancia.

Debido al carácter matemático del problema, fue necesario el uso de técnicas numéricas, con el fin de obtener una solución aproximada del sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales, excepto en el caso de efecto pelicular fuerte, donde el modelo electromagnético fue resuelto analíticamente mediante el método de capa límite. Con el fin de obtener buenas soluciones aproximadas se desarrolló un programa computacional en Fortran 90, el cuál calcula la distribución de temperaturas en cualquier instante bajo el esquema de discretización en diferencias finitas Crank-Nicholson, debido a que es un método siempre estable, además de que en estados transitorios tiene una exactitud del orden $O(\Delta t^2)$, y gracias a que se forma una matriz tridiagonal, es posible ahorrar una gran cantidad de cálculos, y por lo tanto de tiempo computacional, resolviendo el sistema con el

algoritmo de Thomas. Por otro lado, el modelo electromagnético fue discretizado en diferencias finitas, sin embargo debido al carácter de la ecuación, la solución se obtuvo con el bien conocido método de eliminación de Gauss, ya que no fue posible obtener una matriz tridiagonal. Finalmente el acoplamiento entre ambos modelos se obtuvo de manera iterativa.

Los resultados obtenidos muestran claramente que los perfiles de temperatura poseen una gran sensibilidad a diversos factores, como son: la distribución de densidad de corriente, la variación de la resistividad con la temperatura, las condiciones ambientales o incluso la fuerza de tensión. Por el contrario la distribución de densidad de corriente posee una forma muy consistente, es decir; que a pesar de las grandes variaciones de la temperatura, la densidad de corriente no sufre grandes cambios en su forma.

En todos los casos presentados es posible observar que el efecto del número de Biot es de gran importancia en los gradientes de temperatura; para números de Biot pequeños el efecto que provoca es el de hacer más uniformes los gradientes de temperaturas, y en estos casos es posible usar el método de parámetros concentrados. Por otro lado, un número de Biot grande significa que los gradientes de temperatura son relevantes. Conviene mencionar que los resultados mostrados están en variables adimensionales, por lo que es necesario volver a las variables originales, ya que de otro modo sería incorrecto interpretar los resultados que entre mayor sea el número de Biot, mayor temperatura alcanza. Un caso especial del número de Biot es el efecto que tiene la fuerza de tensión, ya que dicha fuerza modifica la conductividad térmica, haciendo al medio poroso más conductivo, en este caso se considera que las condiciones ambientales permanecen constantes para las diferentes fuerzas de tensión.

El efecto pelicular tiene una gran importancia no solo en la distribución de densidad de corriente, sino también en los perfiles de temperatura, ya que la ecuación de difusión de calor depende de la distribución de densidad de corriente en su término de generación de calor. Además, es posible observar que conforme el parámetro pelicular disminuye su valor, el perfil de temperaturas se vuelve más uniforme, esto es debido a que la corriente eléctrica tiende a fluir por la superficie en una pequeña región, y la transferencia de calor hacia el centro se da por conducción; incluso es posible observar en el caso bi-metálico, que casi la totalidad de la corriente fluye por el aluminio, dependiendo del parámetro pelicular, ya que si es muy pequeño, toda la corriente eléctrica fluye en la superficie del conductor. Por otro lado, cuando el parámetro pelicular es grande, es posible observar que en el acero se forma un pequeño efecto pelicular, aun así es muy poca la cantidad de corriente eléctrica, por lo que el calor generado por efecto joule resulta irrelevante en la ecuación de difusión de calor del acero.

El hecho de considerar a la resistividad eléctrica variable con la temperatura, conlleva a un modelo termo-eléctrico, por lo que tanto la distribución de temperatura; así como la densidad de corriente, tienen una mejor aproximación a las distribuciones reales, y es posible ahora tomar en cuenta el sobrecalentamiento que sufre en el conductor y de esta forma darle un mejor uso a los conductores ya instalados.

Aunque en el presente trabajo se obtuvo un modelo acoplado, que aproxima de mejor

manera la temperatura teórica con la real, aún quedan fenómenos que deben de tomarse en cuenta con el fin de obtener una mejor aproximación y a su vez un mejor entendimiento del fenómeno físico. En cuanto a fenómenos eléctricos es necesario tomar en cuenta que la onda electromagnética que se transmite por el conductor no es perfectamente sinusoidal, sino que es una onda deformada por el efecto de las armónicas, que pueden provocar una generación de calor extra por efecto Joule.

Por otro lado, el modelo térmico debe de tomar en cuenta que la transferencia de calor al ambiente, ya sea por convección natural o forzada, es dependiente del ángulo de incidencia del viento, además de que siempre se genera una capa límite térmica alrededor del conductor eléctrico, y con el afán de tener un modelo lo suficientemente aproximado, también se debe de tomar en cuenta tanto las ganancias; así como las pérdidas debidas a la transferencia de calor por radiación. Tomando lo anterior en cuenta originaría un modelo no solo dependiente de la dirección radial, sino también de la dirección angular, lo que complicaría significativamente tanto la obtención del modelo; así como su solución.

Otro gran tema de interés en el estudio térmico de los conductores eléctricos, es la obtención de las propiedades efectivas, como son la conductividad, la densidad y el calor específico de los materiales que conforman a los conductores eléctricos.

APENDICE A

Obtención del Modelo Eléctrico

En el presente apartado se muestra el procedimiento matemático para la obtención del modelo matemático.

Las ecuaciones de Maxwell [15] necesarias para estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en medios continuos se escriben en forma vectorial, mediante las siguientes relaciones,

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0, \quad \text{Ley de Gauss} \quad (\text{A1})$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0, \quad \text{Bipolo magnético} \quad (\text{A2})$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \text{Ley de Faraday} \quad (\text{A3})$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \quad \text{Ley de Ampere} \quad (\text{A4})$$

Donde \bar{E} es la intensidad del campo eléctrico, \bar{D} es la densidad del campo eléctrico, \bar{H} es la intensidad del campo magnético, \bar{B} es la densidad del campo magnético; \bar{J} es la densidad de corriente y t es el tiempo.

Al considerar que el conductor eléctrico se encuentra conformado por un material isotrópico y homogéneo es posible reducir el número de variables mediante la sustitución de las siguientes relaciones:

$$\bar{D} = \gamma \bar{E} \quad \text{y} \quad \bar{B} = \mu \bar{H} \quad (\text{A5})$$

Por lo que el sistema ahora queda expresado en función de la intensidad del campo eléctrico y la intensidad del campo magnético; donde μ es la permeabilidad magnética, mientras que γ es la permitividad eléctrica.

El sistema resultante se muestra a continuación:

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0, \quad (\text{A6})$$

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0, \quad (\text{A7})$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \quad (\text{A8})$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (\text{A9})$$

Si se toma el rotacional de la ec. (A8), se puede demostrar fácilmente que,

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{H}) . \quad (\text{A10})$$

Ahora sustituyendo la ec. (A9) en la ec. (A10) se obtiene la siguiente expresión:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{J} + \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) , \quad (\text{A11})$$

y derivando respecto al tiempo

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\mu \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \right) . \quad (\text{A12})$$

Haciendo uso de la siguiente identidad de cálculo vectorial,

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} , \quad (\text{A13})$$

Se puede fácilmente demostrar que la ec. (A12) se puede reescribir como,

$$\nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\mu \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \right) . \quad (\text{A14})$$

De la ec. (A6) se observa que la divergencia de la intensidad del campo eléctrico es cero, por lo que la ecuación resultante es una ecuación de onda y queda expresada de la siguiente manera

$$-\nabla^2 \bar{E} = -\mu \left(\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \right) \quad (\text{A15})$$

Al considerar que solo existe variación en dirección radial de los campos eléctricos anteriores, entonces el laplaciano se puede reducir considerablemente y en coordenadas cilíndricas la ec. (A15) se puede escribir mediante la siguiente expresión,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = \mu \left(\frac{\partial J_z}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right) . \quad (\text{A16})$$

Usando la ley de Ohm $\bar{E} = \lambda \bar{J}$ y además tomando en cuenta que la resistividad λ es

una función de la temperatura y esta a su vez es función de la posición y del tiempo, es decir $\lambda(T(r,t))$.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \lambda J_z}{\partial r} \right) = \mu \left(\frac{\partial J_z}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \lambda J_z}{\partial t^2} \right), \quad (\text{A17})$$

derivando respecto a r :

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial^2 J_z}{\partial r^2} + \left(2 \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \right) \frac{\partial J_z}{\partial r} + \left[\frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{d^2 \lambda}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_z = \\ & = \mu \left(\frac{\partial J_z}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \lambda J_z}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Donde es T la temperatura.

Sustituyendo una onda del tipo $e^{i\omega t}$, la densidad de corriente queda de la siguiente manera:

$$J_z(r,t) = J_s(r) e^{i\omega t}. \quad (\text{A19})$$

Debido a la separación de variables definida en la ec. (A19), ahora se tiene la densidad de corriente J_s dependiente solamente de la coordenada radial.

Sustituyendo esta separación de variables en la ec. (A18) se tiene que,

$$\begin{aligned} & e^{i\omega t} \left\{ \lambda \frac{\partial^2 J_s}{\partial r^2} + \left(2 \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \right) \frac{\partial J_s}{\partial r} + \left[\frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{d^2 \lambda}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s \right\} = \\ & = \mu \left(\frac{\partial J_s e^{i\omega t}}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \lambda J_s e^{i\omega t}}{\partial t^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

además derivando respecto al tiempo se obtiene la siguiente ec. (A21):

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(2 \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \left[\frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{d^2 \lambda}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \\ & = \mu \left[i\omega + \gamma \left(\frac{d^2 \lambda}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2\omega i \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} - \lambda \omega^2 \right) \right] J_s. \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Normalizando la ec. (A21) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(\frac{2}{\lambda} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{d^2 \lambda}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \\ & = \left\{ \frac{\mu\omega}{\lambda} \left[i + \gamma\omega \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 \lambda}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\omega^2} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i}{\omega} \frac{d\lambda}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \right) \right] \right\} J_s . \end{aligned} \quad (\text{A22})$$

Debido al hecho de que se considera que la variación de la resistividad eléctrica tiene un comportamiento lineal con respecto a la temperatura de la siguiente forma:

$$\lambda = \lambda_\infty [1 + \phi(T - T_\infty)] , \quad (\text{A23})$$

las segundas derivadas de las resistividad son iguales a cero por lo que la ecuación resultante queda:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left(\frac{2\phi}{1 + \phi(T - T_\infty)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} + \frac{\phi}{1 + \phi(T - T_\infty)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s = \\ & = \left\{ \frac{\mu\omega}{\lambda} \left[i + \gamma\omega\lambda_\infty \left(\frac{\phi}{\omega^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i \cdot \phi}{\omega} \frac{\partial T}{\partial t} - (1 + \phi(T - T_\infty)) \right) \right] \right\} J_s . \end{aligned} \quad (\text{A24})$$

Apéndice B

Método de Solución del Problema

Con el aumento de la capacidad computacional y velocidad de procesos, el interés en los métodos numéricos ha aumentado considerablemente para resolver problemas gobernados por ecuaciones diferenciales. Por lo que la solución de problemas de ingeniería puede ahora obtenerse con ayuda de computadoras en un tiempo muy corto y a muy bajo costo.

En esta sección solo se mostrará la discretización y método de solución del sistema acoplado del caso mono-metálico, ya que el caso bi-metálico es una extensión del problema.

Para discretizar una ecuación diferencial es necesario conocer primero la representación de las derivadas en diferencias finitas. A continuación se muestra la representación de las primeras derivadas parciales espaciales en diferencias finitas [22-24].

En la representación de la primera derivada hacia adelante se ocupa un punto posterior y el punto de análisis, generando un error de orden $\Delta\eta$,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta\eta} + O(\Delta\eta) \quad . \quad (B1)$$

Donde f es la función que se desea obtener de la ecuación diferencial.

En la representación de la primera derivada hacia atrás se ocupa un punto anterior y el punto de análisis, generando un error de orden $\Delta\eta$,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta\eta} + O(\Delta\eta) \quad . \quad (B2)$$

Cuando se ocupa un punto posterior y un punto anterior al punto de análisis se le llama representación central y genera un error de orden $\Delta\eta^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot \Delta\eta} + O(\Delta\eta^2) \quad . \quad (B3)$$

A pesar que las representaciones hacia delante y hacia atrás generan un error mayor, son de gran utilidad en la discretización de las condiciones de frontera.

La representación de las segundas derivadas parciales espaciales en diferencias finitas procede de la siguiente manera. En la representación central se usa el punto de análisis, un

punto anterior y un punto posterior, dando un error de orden $\Delta\eta^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta\eta)^2} + O(\Delta\eta^2) \quad . \quad (B4)$$

En este caso solo se muestra la discretización central, ya que es la que se emplea para obtener la solución de ambos modelos (térmico y eléctrico), debido a su mayor exactitud.

La representación de la derivada temporal queda de la siguiente manera,

$$\frac{\partial f_{al}}{\partial \tau} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta\tau} \quad . \quad (B5)$$

El dominio de la variable η es de cero a uno, mientras que τ va de cero a infinito y quedan definidas de la siguiente forma:

$$\eta = i \cdot \Delta\eta, \quad (B6)$$

$$\tau = n \cdot \Delta\tau. \quad (B7)$$

El esquema seleccionado para resolver el problema de difusión de calor en estado transitorio es el método de Cranck-Nicolson, debido a que no tiene restricción en cuanto al tamaño del paso temporal. Este método propuesto por Cranck y Nicolson, mantiene la discretización del transitorio, mientras que hace un promedio aritmético temporal del término difusivo y el término de generación de calor del tiempo actual n y del tiempo siguiente $n+1$.

A continuación se muestra la ec. (22) discretizada en diferencias finitas, se tiene que:

$$\begin{aligned} & A \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \theta_{i-1}^{n+1} - \left(2A + 2Bi - \Delta\tau \cdot Bi \cdot \kappa |\varphi_i^{n+1}|^2\right) \theta_i^{n+1} - A \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \theta_{i+1}^{n+1} = \\ & = -A \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \theta_{i-1}^n - \left(-2A + 2Bi + \Delta\tau \cdot Bi \cdot \kappa |\varphi_i^n|^2\right) \theta_i^n - A \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \theta_{i+1}^n - \\ & - \Delta\tau Bi \left(|\varphi_i^n|^2 + |\varphi_i^{n+1}|^2\right) \quad , \end{aligned} \quad (B8)$$

donde $A = \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta^2}$.

La discretizaciones en el centro para el tiempo n , así como para el tiempo $n+1$, quedan de la siguiente manera:

$$i = 0: \quad \theta_1^n - \theta_0^n = 0 \quad , \quad (B9a)$$

$$\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1} = 0 . \quad (\text{B9b})$$

De la misma forma se hace para la condición de frontera en la superficie del conductor

$$i = M : \quad (1 + Bi \cdot \Delta\eta) \theta_M^n - \theta_{M-1}^n = 0 \quad , \quad (\text{B10a})$$

$$(1 + Bi \cdot \Delta\eta) \theta_M^{n+1} - \theta_{M-1}^{n+1} = 0 \quad . \quad (\text{B10b})$$

Donde el subíndice M representa al número total de segmentos en que fue dividido el dominio espacial, mientras que $\Delta\tau$ no tiene restricción alguna en cuanto a su magnitud, debido al esquema seleccionado para discretizar las ecuaciones y las condiciones de frontera, por lo que decidió dar un paso temporal de $\Delta\tau = 0.01$. Ya que no existe variación en la dirección angular, la discretización del dominio queda en forma de círculos concéntricos, y entre mayor sea el número de divisiones, los segmentos $\Delta\eta$ son de menor longitud y por lo tanto generan un menor error.

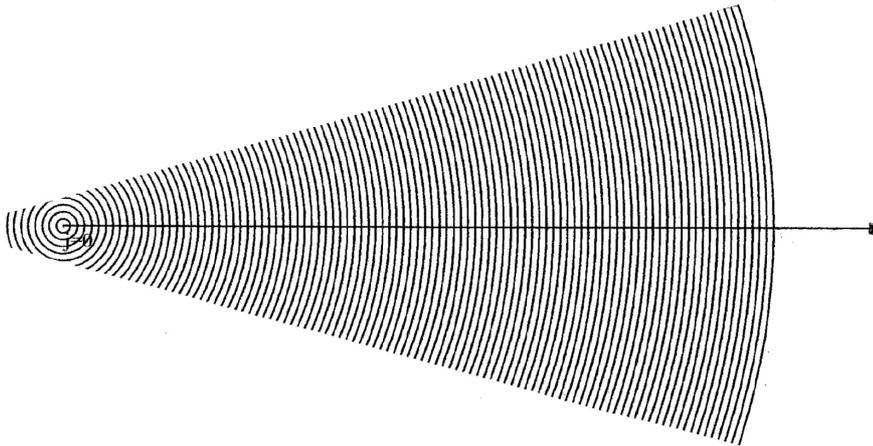


Figura B1. Discretización en dirección radial.

A continuación se reacomodan los términos de las ecuaciones en matrices con el fin de representar el sistema de ecuaciones de la siguiente forma matricial:

$$[A][\theta] = [B] \quad .$$

Colocando los coeficientes en la matriz A se obtiene una matriz tridiagonal, que se puede escribir como,

$$\begin{bmatrix}
a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{i,i-1} & a_{ii} & a_{i,i+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & a_{i+1,i+2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-2,M-3} & a_{M-2,M-2} & c_{M-2,M-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1,M-2} & a_{M-1,M-1} & a_{M-1,M} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M,M-1} & a_{MM}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\theta_0^{n+1} \\
\theta_1^{n+1} \\
\theta_2^{n+1} \\
\vdots \\
\theta_i^{n+1} \\
\theta_{i+1}^{n+1} \\
\vdots \\
\theta_{M-2}^{n+1} \\
\theta_{M-1}^{n+1} \\
\theta_M^{n+1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
b_0 \\
b_1 \\
b_2 \\
\vdots \\
b_i \\
b_{i+1} \\
\vdots \\
b_{M-2} \\
b_{M-1} \\
b_M
\end{bmatrix}
\quad (B11)$$

De esta forma la ecuación diferencial queda representada por un sistema algebraico de ecuaciones lineales. Dicho sistema de ecuaciones fue resuelto haciendo uso del algoritmo de Thomas.

A continuación se muestra el sistema de ecuaciones que describen el comportamiento eléctrico, con el fin de mostrar el procedimiento para obtener la discretización en diferencias finitas. Estas ecuaciones fueron inicialmente presentadas en el capítulo 2 y vienen dadas por las expresiones siguientes,

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \left(2 \frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{d\varphi}{d\eta} + \frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)} \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) \varphi = \frac{2i}{(1+\kappa\theta)\varepsilon^2} \varphi \quad , (19)$$

junto con las condiciones de frontera,

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 \quad , (20)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi = 1 \quad . (21)$$

Como se observa en el sistema anterior, la ecuación esta en el plano complejo ya que el término de la derecha contiene al numero imaginario $i = \sqrt{-1}$, lo que significa que la solución de la ecuación diferencial es una función compleja, por esta razón se separa la función en una función real y una función imaginaria, como se muestra a continuación:

$$\varphi = \varphi^R + i\varphi^I \quad . \quad (B12)$$

Donde los superíndices R e I significa que se trata de la función real e imaginaria, respectivamente. Al sustituir la expresión (B12) en el sistema (19)-(21), se obtiene ahora un conjunto de dos ecuaciones diferenciales acopladas, con sus respectivas condiciones de frontera. Dicho sistema se muestra a continuación:

$$\frac{\partial^2 \varphi^R}{\partial \eta^2} + \left(\frac{2\kappa}{1+\kappa\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial \varphi^R}{\partial \eta} + \frac{\kappa}{1+\kappa\theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \varphi^R = -\frac{2}{\varepsilon^2 (1+\kappa\theta)} \varphi^I \quad (B13)$$

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial \varphi^R}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad (B14)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi^R = 1 \quad . \quad (B15)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial \eta^2} + \left(\frac{2\kappa}{1+\kappa\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial \varphi^I}{\partial \eta} + \frac{\kappa}{1+\kappa\theta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \varphi^I = \frac{2}{\varepsilon^2 (1+\kappa\theta)} \varphi^R \quad (B16)$$

$$\eta = 0: \quad \frac{\partial \varphi^I}{\partial \eta} = 0 \quad , \quad (B17)$$

$$\eta = 1: \quad \varphi^I = 0 \quad . \quad (B18)$$

De la misma forma que se realizó la discretización de la ecuación de difusión de calor, se realiza la discretización de las ecuaciones de la densidad de corriente, mediante las relaciones siguientes,

$$\left(1 - \frac{1}{2i} - D \right) \varphi_{i-1}^R + (-2 + B) \varphi_i^R + \left(1 + \frac{1}{2i} + D \right) \varphi_{i+1}^R = -C \varphi_i^I \quad , \quad (B19)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2i} - D \right) \varphi_{i-1}^I + (-2 + B) \varphi_i^I + \left(1 + \frac{1}{2i} + D \right) \varphi_{i+1}^I = C \varphi_i^R \quad ; \quad (B20)$$

donde

$$B = \frac{\kappa}{1 + \kappa\theta_i^n} \left(\left(1 - \frac{1}{2i}\right)\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)\theta_{i+1}^n \right) , \quad (\text{B21})$$

$$C = \frac{2\Delta z^2}{\varepsilon^2 (1 + \kappa\theta_i^n)} , \quad (\text{B22})$$

$$D = \frac{\kappa}{1 + \kappa\theta_i^n} \left(\frac{\theta_{i+1}^n - \theta_{i-1}^n}{2} \right) . \quad (\text{B23})$$

De esta forma, ahora es posible representar al sistema de forma matricial, como se muestra a continuación. Cabe mencionar que al discretizar las ecuaciones se obtiene un sistema acoplado donde para obtener la solución de un sistema, es necesaria la solución del otro sistema; el sistema queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-3M-2} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^R \\ \varphi_1^R \\ \varphi_2^R \\ \varphi_3^R \\ \vdots \\ \varphi_i^R \\ \vdots \\ \varphi_{M-2}^R \\ \varphi_{M-1}^R \\ \varphi_M^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_1\varphi_1^I \\ -c_2\varphi_2^I \\ -c_3\varphi_3^I \\ \vdots \\ -c_i\varphi_i^I \\ \vdots \\ -c_{M-2}\varphi_{M-2}^I \\ -c_{M-1}\varphi_{M-1}^I \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-3M-2} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0^I \\ \varphi_1^I \\ \varphi_2^I \\ \varphi_3^I \\ \vdots \\ \varphi_i^I \\ \vdots \\ \varphi_{M-2}^I \\ \varphi_{M-1}^I \\ \varphi_M^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1\varphi_1^R \\ c_2\varphi_2^R \\ c_3\varphi_3^R \\ \vdots \\ c_i\varphi_i^R \\ \vdots \\ c_{M-2}\varphi_{M-2}^R \\ c_{M-1}\varphi_{M-1}^R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Apéndice C

Valores de las propiedades físicas

La tabla C1 muestra los valores de las propiedades de los materiales que conforman al los conductores eléctricos ACSR, dichos valores son necesarios en caso de que se requieran los valores de la temperatura y densidad de corriente dimensionales.

Tabla C1. Propiedades físicas de los materiales.

	Aluminio	Acero	Aire
Densidad $[Kg/m^3]^1$	2702	8055	1.1614
Calor específico $[J/Kg^{\circ}C]^1$	903	480	1007
Conductividad térmica $[W/m^{\circ}C]^1$	237	15.1	0.0263
Resistividad eléctrica $[\Omega m]^2$	2.817e-6	2.15e-5	
Permeabilidad magnética relativa ³ μ/μ_0	1	1000	
Coefficiente de temperatura $[1/^{\circ}C]^2$	4.04e-3	3.2e-3	
Permitividad eléctrica $[F/m]^5$	8.8542e-12	8.8542e-12	
Número de alambres ⁴	26	7	
Radio de cada alambre $[m]^4$	0.002223	0.001735	
Radio total $[m]^4$	0.014072	0.005182	

$$\mu_0 = 4\pi e - 7 [N/A^2]$$

- ¹ Referencia [25]
- ² Referencia [3]
- ³ Referencia [26]
- ⁴ Referencia [27]
- ⁵ Referencia [15]

Tabla C2. Designaciones usadas para diferentes rangos de frecuencias [28].

Designación	Rango de frecuencias
ELF (extremely low frequency)	30-3000 Hz
VLF (very low frequency)	3-30 kHz
LF (low frequency)	30-300 kHz
MF (medium frequency)	300-3000 MHz
HF (high frequency)	3-30 MHz
VHF (very high frequency)	30-300 MHz
UHF (ultrahigh frequency)	300-3000 MHz
MICROONDAS	1-30 GHz
ONDAS MILIMÉTRICAS	30-300 GHz

El caso de estudio corresponde a la situación de frecuencias extremadamente bajas (ELF); es decir, de 30-3000 Hz.

APENDICE D

Código Numérico del Caso Mono-metálico

```
! propvaria.f90
!  
! FUNCTIONS:  
!   propvaria   - Entry point of console application.  
!  
  
!*****  
*****  
!  
! PROGRAM: propvaria  
!  
! PURPOSE: Entry point for the console application.  
!  
!*****  
*****  
  
program propvaria  
  
implicit none  
  
! Variables  
real dz, ep,cont2,i,f,b,c3,c2,kappa,bi,c0,maxdif1,delta  
real l,p,c1,cont3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c14  
real c15,c17,i2,i3,eff,lal,mual,int,itot, cont1,sum,icd  
parameter m=100  
parameter tol=0.0001  
real d,r,j,k,q,s,i1,n  
real, dimension(0:2*m+1,0:2*m+1) :: a  
parameter t=700  
parameter dt=0.01  
  
real, dimension(0:m,0:t) :: temp  
real, dimension(0:m,0:t) :: temp1  
real, dimension(0:2*m+1) :: vs  
  
real, dimension(0:2*m+1) :: phi  
  
real, dimension(0:m,0:t) :: modphi
```

```
real, dimension(0:m) :: gamma
```

```
real, dimension(0:m) :: psi
```

```
real, dimension(0:m) :: omega
```

```
real, dimension(0:m,0:m) :: c
```

```
real, dimension(0:m) :: be
```

```
real, dimension(0:m) :: dif
```

```
real, dimension(0:m,0:m) :: c111
```

```
real, dimension(0:m) :: be1
```

```
bi=0.5
```

```
ep=0.05
```

```
kappa=0.0
```

```
lal=2.81e-6
```

```
mual=4*3.1416*1e-7
```

```
delta=(2.0*lal/(2*3.1416*60*mual))**0.5
```

```
do while (ep.le.3.0)
```

```
dz=1.0/m
```

```
r=dt/dz**2
```

```
! Body of propvaria
```

```
k=0
```

```
do while(k.le.m)
```

```
temp(k,0)=0
```

```
! write(*,*) temp(k,0)
```

```
k=k+1
```

```
end do
```

```
n=0
```

```

gamma(0)=0.0
psi(0)=kappa*(-2.0*temp(0,n)+2.0*temp(1,n))/(1+kappa*temp(0,n))
omega(0)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(0,n)))

```

```

c0=1
do while(c0.lt.m)
gamma(c0)=2.0*kappa*(temp(c0+1,n)-temp(c0-1,n))/(4.0*(1.0+kappa*temp(c0,n)))
psi(c0)=kappa*((1.0-1.0/(2.0*c0))*temp(c0-1,n)-2.0*temp(c0,n)+(1.0+1.0/&
(2.0*c0))*temp(c0+1,n))/(1.0+kappa*temp(c0,n))
omega(c0)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(c0,n)))
c0=c0+1
end do

```

```

gamma(m)=kappa*(-bi*temp(m,n))/(1+kappa*temp(m,n))
psi(m)=kappa*(2.0*temp(m-1,n)+(-2.0-2.0*bi*(1+1/(2.0*m)))*temp(m,n))/&
(1.0+kappa*temp(m,n))

```

```

omega(m)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(m,n)))

```

```

c1=0
do while(c1.le.2*m+1)
c2=0
do while(c2.le.2*m+1)
a(c1,c2)=0.0
c2=c2+1
end do
c1=c1+1
end do

```

```

a(0,0)=1.0
a(m+1,m+1)=1.0
a(0,1)=-1.0
a(m+1,m+2)=-1.0

```

```

a(m,m)=1.0
a(2*m+1,2*m+1)=1.0

```

```

c3=1
do while(c3 < m)
a(c3,c3)=-2.0+psi(c3)

```

```

a(c3,c3-1)=1-1/(2*c3)-gamma(c3)
a(c3,c3+1)=1+1/(2*c3)+gamma(c3)

a(c3,m+1+c3)=-omega(c3)

a(m+1+c3,m+1+c3)=-2.0+psi(c3)
a(m+1+c3,m+1+c3-1)=1-1/(2*c3)-gamma(c3)
a(m+1+c3,m+1+c3+1)=1+1/(2*c3)+gamma(c3)

a(m+1+c3,c3)=omega(c3)

c3=c3+1
end do

! c4=0
! do while(c4.le.2*m+1)
! write(*,*) a(c4,4),a(c4,5),a(c4,6),a(c4,7),a(c4,8)
! c4=c4+1
! end do

c5=0
do while(c5 < 2*m+1)

vs(c5)=0.0
c5=c5+1

end do

vs(2*m+1)=1.0

c6=0
do while(c6.le.2*m)
  c7=c6+1
  do while(c7.le.2*m+1)
    c8=c6+1
    do while(c8.le.2*m+1)
      a(c7,c8)=a(c7,c8)-a(c7,c6)*a(c6,c8)/a(c6,c6)
      c8=c8+1
    end do

    vs(c7)=vs(c7)-a(c7,c6)*vs(c6)/a(c6,c6)
    c7=c7+1
  end do
  c6=c6+1
end do

```

```

phi(2*m+1)=vs(2*m+1)/a(2*m+1,2*m+1)

c9=2*m

do while(c9.ge.0)
phi(c9)=vs(c9)
c10=c9+1
do while(c10.le.2*m+1)
phi(c9)=phi(c9)-a(c9,c10)*phi(c10)
c10=c10+1
end do
phi(c9)=phi(c9)/a(c9,c9)
c9=c9-1
end do

c12=0
do while(c12.le.m)
modphi(c12,0)=sqrt(phi(c12)**2+phi(m+1+c12)**2)
c12=c12+1
end do
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

do while(n.le.t-1)

maxdif1=5.0

do while(maxdif1.ge.tol)

gamma(0)=0.0
psi(0)=kappa*(-2.0*temp(0,n+1)+2.0*temp(1,n+1))/(1+kappa*temp(0,n+1))
omega(0)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(0,n+1)))

gamma(0)=0.0
psi(0)=kappa*(-2.0*temp(0,n+1)+2.0*temp(1,n+1))/(1+kappa*temp(0,n+1))
omega(0)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(0,n+1)))

c0=1
do while(c0.lt.m)
gamma(c0)=2.0*kappa*(temp(c0+1,n+1)-temp(c0-
1,n+1))/(4.0*(1.0+kappa*temp(c0,n+1)))

```

```

psi(c0)=kappa*((1.0-1.0/(2.0*c0))*temp(c0-1,n+1)-2.0*temp(c0,n+1)+(1.0+1.0/&
(2.0*c0))*temp(c0+1,n+1))/(1.0+kappa*temp(c0,n+1))
omega(c0)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(c0,n+1)))
c0=c0+1
end do

```

```

gamma(m)=kappa*(-bi*temp(m,n+1))/(1+kappa*temp(m,n+1))
psi(m)=kappa*(2.0*temp(m-1,n+1)+(-2.0-2.0*bi*(1+1/(2.0*m)))*temp(m,n+1))/&
(1.0+kappa*temp(m,n+1))

```

```

omega(m)=2.0*dz**2/(ep**2*(1.0+kappa*temp(m,n+1)))

```

```

c1=0
do while(c1.le.2*m+1)
c2=0
do while(c2.le.2*m+1)
a(c1,c2)=0.0
c2=c2+1
end do
c1=c1+1
end do

```

```

a(0,0)=1.0
a(m+1,m+1)=1.0
a(0,1)=-1.0
a(m+1,m+2)=-1.0

```

```

a(m,m)=1.0
a(2*m+1,2*m+1)=1.0

```

```

c3=1
do while(c3 < m)
a(c3,c3)=-2.0+psi(c3)
a(c3,c3-1)=1-1/(2*c3)-gamma(c3)
a(c3,c3+1)=1+1/(2*c3)+gamma(c3)

```

```

a(c3,m+1+c3)=-omega(c3)

```

```

a(m+1+c3,m+1+c3)=-2.0+psi(c3)
a(m+1+c3,m+1+c3-1)=1-1/(2*c3)-gamma(c3)
a(m+1+c3,m+1+c3+1)=1+1/(2*c3)+gamma(c3)

```

```

a(m+1+c3,c3)=omega(c3)

```

```

c3=c3+1
end do

! c4=0
! do while(c4.le.2*m+1)
! write(*,*) a(c4,4),a(c4,5),a(c4,6),a(c4,7),a(c4,8)
! c4=c4+1
! end do

c5=0
do while(c5 < 2*m+1)

vs(c5)=0.0
c5=c5+1

end do

vs(2*m+1)=1.0

c6=0
do while(c6.le.2*m)
  c7=c6+1
  do while(c7.le.2*m+1)
    c8=c6+1
    do while(c8.le.2*m+1)
      a(c7,c8)=a(c7,c8)-a(c7,c6)*a(c6,c8)/a(c6,c6)
      c8=c8+1
    end do

    vs(c7)=vs(c7)-a(c7,c6)*vs(c6)/a(c6,c6)
    c7=c7+1
  end do
  c6=c6+1
end do

phi(2*m+1)=vs(2*m+1)/a(2*m+1,2*m+1)

c9=2*m

do while(c9.ge.0)
phi(c9)=vs(c9)
c10=c9+1
do while(c10.le.2*m+1)
phi(c9)=phi(c9)-a(c9,c10)*phi(c10)
c10=c10+1

```

```

end do
phi(c9)=phi(c9)/a(c9,c9)
c9=c9-1
end do

c12=0
do while(c12.le.m)
modphi(c12,n+1)=sqrt(phi(c12)**2+phi(m+1+c12)**2)
c12=c12+1
end do

!formando la matriz tridiagonal
!centro

c(0,0)=-2.*bi-2.*r+bi*kappa*r*modphi(0,n+1)**2*dz**2
c(0,1)=2*r

!parte interna

i=1
do while(i.le.m-1)
c(i,i-1)=r*(1-(1/(2*i)))
c(i,i)=-2*bi-2*r+bi*kappa*r*modphi(i,n+1)**2*dz**2
c(i,i+1)=r*(1+(1/(2*i)))

! write(*,*) c(i,i-1), c(i,i), c(i,i+1), r
i=i+1

end do

!exterior

c(m,m-1)=2*r
c(m,m)=-2*bi-2*r-
2*dz*bi*r*(1+(1/(2*m)))+bi*kappa*r*modphi(m,n+1)**2*dz**2

!!transformando la matriz tridiagonal

l=1
c111(0,0)=c(0,0)
do while(l.le.m)
c111(l,l)=c(l,l)-c(l,l-1)*c(l-1,l)/c111(l-1,l-1)
! write(*,*) l, c1(l,l)
l=l+1

end do

```



```

!!!resolviendo el sistema
q=m-1

temp1(m,n+1)=be1(m)/c111(m,m)
! write(*,*) temp(m,n), temp(m,n+1)
do while(q.ge.0)
temp1(q,n+1)=(be1(q)-c(q,q+1)*temp1(q+1,n+1))/c111(q,q)
! write(*,*) q, temp(q,n), temp(q,n+1)
q=q-1

end do

c14=0
do while(c14.le.m)
dif(c14)=temp1(c14,n+1)-temp(c14,n+1)
c14=c14+1
end do

maxdif1=dif(0)

c15=1
do while(c15.le.m)
if(abs(maxdif1).lt.abs(dif(c15))) then
maxdif1=abs(dif(c15))
else
end if

c15=c15+1
end do

! write(*,*) maxdif1,temp1(m,n+1),temp(m,n+1)

c17=0
do while(c17.le.m)
temp(c17,n+1)=temp1(c17,n+1)
c17=c17+1
end do
enddo

write(*,*) n, maxdif1, temp(0,n)
n=n+1

```

```

end do

eff=modphi(0,t)

sum=0.0
cont1=1.0
do while(cont1.le.m-1)
sum=sum+modphi(cont1,t)*cont1*dz
cont1=cont1+1.0
end do

int=dz*(modphi(m,t)*m*dz+2.0*sum)/2.0

itot=(2.0*3.1416*((75.0*0.73*bi)/(temp(0,t)*lal)**0.5)*(delta/ep)*int

icd=(3.1416*delta*((75.0*2.0*0.73*2.0*bi)/(lal*(2.0-bi)))**0.5)/ep
open (unit=10,file='efelect.dat')

write(10,110) ep, itot, eff;110 format(7e18.8)

write(*,*) eff,delta,ep,itot/icd

ep=ep+0.1

end do
close (unit=10)

! open (unit=10,file='temp.dat')

! i1=0
! do while(i1.le.m)
! write(10,102) i1*dz, temp(i1,10),temp(i1,40),temp(i1,100),temp(i1,700);102
format(5e18.8)
!! write(10,102) i1/100, exp(2*(i1*d-1)/(ep)); 102 format(5e18.8)

!! write(*,*) i1
! i1=i1+1
! end do
! close (unit=10)
!
! open (unit=10,file='modphi.dat')
!
! i2=0
! do while(i2.le.m)
! write(10,110)

```

```

i2/100,modphi(i2,10),modphi(i2,40),modphi(i2,100),modphi(i2,700);110 format(5e18.8)
!! write(10,102) i1/100, exp(2*(i1*d-1)/(ep)); 102 format(5e18.8)
!
!! write(*,*) i1
! i2=i2+1
! end do
! close (unit=10)

! open (unit=10,file='trans.dat')
!
! i3=0
! do while(i3.le.t)
!! write(10,110) i3*dt, temp(0,i3),modphi(0,i3);120 format(5e18.8)
!! write(10,102) i1/100, exp(2*(i1*d-1)/(ep)); 102 format(5e18.8)

!! write(*,*) i1
! i3=i3+1
! end do
! close (unit=10)

end program propvaria

```

Código Numérico del Caso Bi-metálico

```

! distribucion corriente acsr.f90
!
! FUNCTIONS:
! distribucion corriente acsr - Entry point of console application.
!

!*****
*****
!
! PROGRAM: distribucion corriente acsr
!
! PURPOSE: Entry point for the console application.
!
!*****
*****

program distribucioncorrienteacsr

implicit none

```

```

! Variables
real d1,d2,ji,g,dz,dh,lac,lal,c,i,a1,b1,epac,epal,mual,muac,k,c1,c2,omega
real c6,c7,c8,c9,c10,c11,c12,c13,c4,sal,sac,i1,i2,i3,intal,intac,const,j3,j4,j5
real kac,kal,c14,j1,j2,alfaal,alfaac,bi,gammaac,r1,r2,dt,n,beta,rhocpeac,rhocpeal
real kapaac,kapaal,gp,hp, ip,jp,maxdif1,c16,c15,c17,tol,phial,phiac
parameter m=100
parameter t=1000
real, dimension(0:4*m+3,0:4*m+3) :: a
real, dimension(0:2*m,0:2*m) :: b

real, dimension(0:4*m+3) :: vs
real, dimension(0:2*m) :: vstem
real, dimension(0:4*m+3) :: phi

real, dimension(0:2*m,0:t) :: modphi
real, dimension(0:2*m,0:t) :: temp
real, dimension(0:2*m,0:t) :: temp1
real, dimension(0:m) :: ap
real, dimension(0:m) :: bp
real, dimension(0:m) :: cp
real, dimension(0:m) :: dp
real, dimension(0:m) :: ep
real, dimension(0:m) :: fp
real, dimension(0:2*m) :: dif

bi=1.0
epal=0.5
kapaal=0.0

phial=4.04e-3
phiac=3.2e-3

kapaac=phiac*kapaal/phial

tol=0.0001
kac=0.1213831
kal=0.1054332
rhocpeac=3034206
rhocpeal=1831773

alfaal=kal/rhocpeal
alfaac=kac/rhocpeac

```

```

dt=0.01

a1=0.005182
b1=0.014072
! c=0.0006125
lal=2.817e-8
lac=2.15e-7
muac=1000.0
mual=1.00002
ji=a1/b1

omega=2.0*lal/(mual*(b1-a1)**2*epal**2)
epac=(sqrt(2.0*lac/(muac*omega)))/a1
dz=1.0/m
dh=1.0/m
d1=dz**2*2.0/epac**2
d2=dh**2*2.0/epal**2
g=ji/(1.0-ji)
jp=(2.0*(g**2)*alfaal*bi*dz**2)/(dt*alfaac)
ip=(lac*kal*bi*dz*dz*g**2)/(lal*kac)
r2=(2.0*bi*dh**2)/dt

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

! Body of distribucion corriente acsr

j3=0.0

do while (j3.le.2*m)
temp(j3,0)=0.0

j3=j3+1
end do

n=0

gp=(lal*(1.0+kapaal*temp(m,n)))/(lac*(1.0+kapaal*temp(m,n)))
hp=mual/(muac*g)

ap(0)=0.0
ap(m)=kapaac*(temp(m,n)-temp(m-1,n))/(1+kapaac*temp(m,n))
bp(0)=kapaac*(temp(0,n)-2.0*temp(1,n)+temp(2,n))/(1.0+kapaac*temp(0,n))
bp(m)=kapaac*((1.0+1.0/m)*temp(m,n)+(-2.0-1.0/m)*temp(m-1,n)+temp(m-2,n))/(1.0+kapaac*temp(m,n))

```

```

cp(0)=(2.0*dz**2)/(epac**2*(1.0+kapaac*temp(0,n)))
cp(m)=(2.0*dz**2)/(epac**2*(1.0+kapaac*temp(m,n)))
dp(0)=kapaal*(temp(m+1,n)-temp(m,n))/(1+kapaac*temp(m,n))
dp(m)=kapaal*(temp(2*m,n)-temp(2*m-1,n))/(1+kapaac*temp(2*m,n))
ep(0)=kapaal*((1.0-1.0/g)*temp(m,n)+(-
2.0+1.0/g)*temp(m+1,n)+temp(m+2,n))/(1.0+kapaal*temp(m,n))
ep(m)=kapaal*((1.0-1.0/(m+g/dh))*temp(2*m,n)+(-2.0-1.0/(m+g/dh))*temp(2*m-
1,n)+temp(2*m-2,n))/(1.0+kapaal*temp(2*m,n))
fp(0)=(2.0*dh**2)/(epal**2*(1.0+kapaal*temp(m,n)))
fp(m)=(2.0*dh**2)/(epal**2*(1.0+kapaal*temp(2*m,n)))

j5=1
do while(j5.le.m-1)

ap(j5)=kapaac*(temp(j5+1,n)-temp(j5-1,n))/(2.0*(1+kapaac*temp(j5,n)))
bp(j5)=kapaac*((1.0-1.0/(2.0*j5))*temp(j5-1,n)-
2.0*temp(j5,n)+(1.0+1.0/(2.0*j5))*temp(j5+1,n))
cp(j5)=(2.0*dz**2)/(epac**2*(1.0+kapaac*temp(j5,n)))
dp(j5)=kapaal*(temp(j5+m+1,n)-temp(j5-1+m,n))/(2.0*(1+kapaac*temp(j5+m,n)))
ep(j5)=kapaac*((1.0-1.0/(2.0*(j5+g/dh)))*temp(j5-1+m,n)-
2.0*temp(j5+m,n)+(1.0+1.0/(2.0*(j5+g/dh)))*temp(j5+1+m,n))
fp(j5)=(2.0*dh**2)/(epal**2*(1.0+kapaal*temp(j5+m,n)))

j5=j5+1
end do

c1=0
do while(c1.le.4*m+3)
c2=0
do while(c2.le.4*m+3)
a(c1,c2)=0.0
c2=c2+1
end do
vs(c1)=0.0

c1=c1+1
end do

a(0,0)=-1.0
a(0,1)=1.0
a(m,m)=1.0
a(m,m+1)=-gp

```

$a(m+1,m+1)=-dp(0)-1.0$
 $a(m+1,m+2)=-1.0$
 $a(m+1,m)=(1.0+ap(m))*hp*dh/(dz*gp)$
 $a(m+1,m-1)=-hp*dh/(dz*gp)$

$a(2*m+1,2*m+1)=1.0$
 $a(2*m+2,2*m+2)=-1.0$
 $a(2*m+2,2*m+3)=1.0$

$a(3*m+2,3*m+2)=1.0$
 $a(3*m+2,3*m+3)=-gp$
 $a(3*m+3,3*m+3)=-dp(0)-1.0$
 $a(3*m+3,3*m+4)=-1.0$
 $a(3*m+3,3*m+2)=(1.0+ap(m))*hp*dh/(gp*dz)$
 $a(3*m+3,3*m+1)=-hp*dh/(gp*dz)$

$a(4*m+3,4*m+3)=1.0$
! $vs(3*m+3)=c$
! $vs(3*m+4)=c*lac/lal$
 $vs(4*m+3)=1.0$

$i=1.0$
do while(i.le.m-1)
 $a(i,i)=-2.0+bp(i)$
 $a(i,i-1)=1.0-1.0/(2.0*i)-ap(i)$
 $a(i,i+1)=1.0+1.0/(2.0*i)+ap(i)$

$a(2*m+2+i,2*m+2+i)=-2.0+bp(i)$
 $a(2*m+2+i,2*m+1+i)=1.0-1.0/(2.0*i)-ap(i)$
 $a(2*m+2+i,2*m+3+i)=1.0+1.0/(2.0*i)+ap(i)$

$a(m+1+i,m+1+i)=-2.0+ep(i)$
 $a(m+1+i,m+i)=1.0-1.0/(2.0*(i+g/dh))-dp(i)$
 $a(m+1+i,m+i+2)=1.0+1.0/(2.0*(i+g/dh))+dp(i)$

$a(3*m+3+i,3*m+3+i)=-2.0+ep(i)$
 $a(3*m+3+i,3*m+2+i)=1.0-1.0/(2.0*(i+g/dh))-dp(i)$
 $a(3*m+3+i,3*m+4+i)=1.0+1.0/(2.0*(i+g/dh))+dp(i)$

$a(i,2*m+2+i)=-cp(i)$
 $a(2*m+2+i,i)=cp(i)$
 $a(m+1+i,3*m+3+i)=-fp(i)$
 $a(3*m+3+i,m+1+i)=fp(i)$

$i=i+1$

```

end do

! c4=1
! do while(c4.le.4*m+4)

! c4=c4+1
! end do

c6=0
do while(c6.le.4*m+2)
  c7=c6+1
  do while(c7.le.4*m+3)
    c8=c6+1
    do while(c8.le.4*m+3)
      a(c7,c8)=a(c7,c8)-a(c7,c6)*a(c6,c8)/a(c6,c6)
      c8=c8+1
    end do

    vs(c7)=vs(c7)-a(c7,c6)*vs(c6)/a(c6,c6)
    c7=c7+1
  end do
  c6=c6+1
end do

phi(4*m+3)=vs(4*m+3)/a(4*m+3,4*m+3)

c9=4*m+2

do while(c9.ge.0)
  phi(c9)=vs(c9)
  c10=c9+1
  do while(c10.le.4*m+3)
    phi(c9)=phi(c9)-a(c9,c10)*phi(c10)
    c10=c10+1
  end do
  phi(c9)=phi(c9)/a(c9,c9)
  c9=c9-1
end do

c12=2*m+1

do while(c12.ge.1)

```

```

modphi(c12-1,0)=sqrt(phi(c12)**2+phi(c12+2*m+2)**2)
c12=c12-1
end do

```

!!

```

do while(n.le.t-1)

```

```

maxdif1=5.0

```

```

do while(maxdif1.ge.tol)

```

```

gp=(lal*(1.0+kapaal*temp(m,n+1)))/(lac*(1.0+kapaal*temp(m,n+1)))
hp=mual/(muac*g)

```

```

ap(0)=0.0

```

```

ap(m)=kapaac*(temp(m,n+1)-temp(m-1,n+1))/(1+kapaac*temp(m,n+1))

```

```

bp(0)=kapaac*(temp(0,n+1)-

```

```

2.0*temp(1,n+1)+temp(2,n+1))/(1.0+kapaac*temp(0,n+1))

```

```

bp(m)=kapaac*((1.0+1.0/m)*temp(m,n+1)+(-2.0-1.0/m)*temp(m-1,n+1)+temp(m-
2,n+1))/(1.0+kapaac*temp(m,n+1))

```

```

cp(0)=(2.0*dz**2)/(epac**2*(1.0+kapaac*temp(0,n+1)))

```

```

cp(m)=(2.0*dz**2)/(epac**2*(1.0+kapaac*temp(m,n+1)))

```

```

dp(0)=kapaal*(temp(m+1,n+1)-temp(m,n+1))/(1+kapaac*temp(m,n+1))

```

```

dp(m)=kapaal*(temp(2*m,n+1)-temp(2*m-1,n+1))/(1+kapaac*temp(2*m,n+1))

```

```

ep(0)=kapaal*((1.0-1.0/g)*temp(m,n+1)+(-
2.0+1.0/g)*temp(m+1,n+1)+temp(m+2,n+1))/(1.0+kapaal*temp(m,n+1))

```

```

ep(m)=kapaal*((1.0-1.0/(m+g/dh))*temp(2*m,n+1)+(-2.0-
1.0/(m+g/dh))*temp(2*m-1,n+1)+temp(2*m-2,n+1))/(1.0+kapaal*temp(2*m,n+1))

```

```

fp(0)=(2.0*dh**2)/(epal**2*(1.0+kapaal*temp(m,n+1)))

```

```

fp(m)=(2.0*dh**2)/(epal**2*(1.0+kapaal*temp(2*m,n+1)))

```

```

j5=1

```

```

do while(j5.le.m-1)

```

```

ap(j5)=kapaac*(temp(j5+1,n+1)-temp(j5-1,n+1))/(2.0*(1+kapaac*temp(j5,n+1)))

```

```

bp(j5)=kapaac*((1.0-1.0/(2.0*j5))*temp(j5-1,n+1)-
2.0*temp(j5,n+1)+(1.0+1.0/(2.0*j5))*temp(j5+1,n+1))

```

```

cp(j5)=(2.0*dz**2)/(epac**2*(1.0+kapaac*temp(j5,n+1)))

```

```

dp(j5)=kapaal*(temp(j5+m+1,n+1)-temp(j5-

```

```

1+m,n+1))/(2.0*(1+kapaac*temp(j5+m,n+1)))
ep(j5)=kapaac*((1.0-1.0/(2.0*(j5+g/dh)))*temp(j5-1+m,n+1)-
2.0*temp(j5+m,n+1)+(1.0+1.0/(2.0*(j5+g/dh)))*temp(j5+1+m,n+1))
fp(j5)=(2.0*dh**2)/(epal**2*(1.0+kapaal*temp(j5+m,n+1)))

```

```

j5=j5+1
end do

```

```

c1=0
do while(c1.le.4*m+3)
c2=0
do while(c2.le.4*m+3)
a(c1,c2)=0.0
c2=c2+1
end do
vs(c1)=0.0

```

```

c1=c1+1
end do

```

```

a(0,0)=-1.0
a(0,1)=1.0
a(m,m)=1.0
a(m,m+1)=-gp
a(m+1,m+1)=-dp(0)-1.0
a(m+1,m+2)=-1.0
a(m+1,m)=(1.0+ap(m))*hp*dh/(dz*gp)
a(m+1,m-1)=-hp*dh/(dz*gp)

```

```

a(2*m+1,2*m+1)=1.0
a(2*m+2,2*m+2)=-1.0
a(2*m+2,2*m+3)=1.0

```

```

a(3*m+2,3*m+2)=1.0
a(3*m+2,3*m+3)=-gp
a(3*m+3,3*m+3)=-dp(0)-1.0
a(3*m+3,3*m+4)=-1.0
a(3*m+3,3*m+2)=(1.0+ap(m))*hp*dh/(gp*dz)
a(3*m+3,3*m+1)=-hp*dh/(gp*dz)

```

```

a(4*m+3,4*m+3)=1.0
! vs(3*m+3)=c

```

```

!   vs(3*m+4)=c*lac/lal
    vs(4*m+3)=1.0

    i=1.0
    do while(i.le.m-1)
      a(i,i)=-2.0+bp(i)
      a(i,i-1)=1.0-1.0/(2.0*i)-ap(i)
      a(i,i+1)=1.0+1.0/(2.0*i)+ap(i)
!
      a(2*m+2+i,2*m+2+i)=-2.0+bp(i)
      a(2*m+2+i,2*m+1+i)=1.0-1.0/(2.0*i)-ap(i)
      a(2*m+2+i,2*m+3+i)=1.0+1.0/(2.0*i)+ap(i)

      a(m+1+i,m+1+i)=-2.0+ep(i)
      a(m+1+i,m+i)=1.0-1.0/(2.0*(i+g/dh))-dp(i)
      a(m+1+i,m+i+2)=1.0+1.0/(2.0*(i+g/dh))+dp(i)

      a(3*m+3+i,3*m+3+i)=-2.0+ep(i)
      a(3*m+3+i,3*m+2+i)=1.0-1.0/(2.0*(i+g/dh))-dp(i)
      a(3*m+3+i,3*m+4+i)=1.0+1.0/(2.0*(i+g/dh))+dp(i)

      a(i,2*m+2+i)=-cp(i)
      a(2*m+2+i,i)=cp(i)
      a(m+1+i,3*m+3+i)=-fp(i)
      a(3*m+3+i,m+1+i)=fp(i)

      i=i+1
    end do

!   c4=1
!   do while(c4.le.4*m+4)
!
!   c4=c4+1
!   end do

c6=0
do while(c6.le.4*m+2)
  c7=c6+1
  do while(c7.le.4*m+3)
    c8=c6+1
    do while(c8.le.4*m+3)
      a(c7,c8)=a(c7,c8)-a(c7,c6)*a(c6,c8)/a(c6,c6)
      c8=c8+1
    end do
  end do
end do

```

```

        vs(c7)=vs(c7)-a(c7,c6)*vs(c6)/a(c6,c6)
        c7=c7+1
    end do
c6=c6+1
end do

phi(4*m+3)=vs(4*m+3)/a(4*m+3,4*m+3)

c9=4*m+2

do while(c9.ge.0)
phi(c9)=vs(c9)
c10=c9+1
do while(c10.le.4*m+3)
phi(c9)=phi(c9)-a(c9,c10)*phi(c10)
c10=c10+1
end do
phi(c9)=phi(c9)/a(c9,c9)
c9=c9-1
end do

c12=2*m+1

do while(c12.ge.1)
modphi(c12-1,n+1)=sqrt(phi(c12)**2+phi(c12+2*m+2)**2)
c12=c12-1
end do

!

b(0,0)=-1.0
b(0,1)=1.0

b(m,m-1)=-kac*dh/(kal*g*dz)
b(m,m)=1.0+kac*dh/(kal*g*dz)
b(m,m+1)=-1.0

b(2*m,2*m)=1.0+bi*dh
b(2*m,2*m-1)=-1.0

```

```

vstem(0)=0.0
vstem(m)=0.0
vstem(2*m)=0.0

c14=1.0

do while (c14.le.m-1)

b(c14,c14-1)=1.0-(1.0/(2.0*c14))
b(c14,c14)=-2.0-jp+kapaac*ip*(modphi(c14,n+1))**2
b(c14,c14+1)=1.0+(1.0/(2.0*c14))

b(m+c14,m+c14-1)=1.0-(1.0/(2.0*(c14+g/dh)))
b(m+c14,m+c14)=-2.0-r2+bi*kapaal*modphi(m+c14,n+1)**2*dh**2
b(m+c14,m+1+c14)=1.0+(1.0/(2.0*(c14+g/dh)))

vstem(c14)=-(-1.0-(1.0/(2.0*c14)))*temp(c14-1,n)-(-
2.0+jp+kapaac*ip*(modphi(c14,n))**2)*temp(c14,n)+&
&-(1.0+(1.0/(2.0*c14)))*temp(c14+1,n)-
ip*(modphi(c14,n+1))**2+modphi(c14,n)**2)

vstem(m+c14)=-(-1.0-(1.0/(2.0*(c14+g/dh))))*temp(m-1+c14,n)+&
&-(-2.0+r2+bi*kapaal*modphi(m+c14,n))**2*dh**2)*temp(m+c14,n)-
(1.0+(1.0/(2.0*(c14+g/dh))))*temp(m+1+c14,n)+&
&-bi*(dh**2)*(modphi(m+1+c14,n+1))**2+modphi(m+1+c14,n)**2)

c14=c14+1

end do
!
! resolviendo

j1=1
do while(j1.le.2*m)
b(j1,j1)=b(j1,j1)-b(j1,j1-1)*b(j1-1,j1)/b(j1-1,j1-1)
vstem(j1)=vstem(j1)-b(j1,j1-1)*vstem(j1-1)/b(j1-1,j1-1)

```

```

j1=j1+1
end do

temp1(2*m,n+1)=vstem(2*m)/b(2*m,2*m)

j2=2*m-1

do while(j2.ge.0)

temp1(j2,n+1)=(vstem(j2)-b(j2,j2+1)*temp1(j2+1,n+1))/b(j2,j2)
j2=j2-1

end do

c16=0
do while(c16.le.2*m)
dif(c16)=temp1(c16,n+1)-temp(c16,n+1)
c16=c16+1
end do

maxdif1=dif(0)

c15=1
do while(c15.le.m)
if(abs(maxdif1).lt.abs(dif(c15))) then
maxdif1=abs(dif(c15))
else
end if

c15=c15+1
end do

write(*,*) maxdif1, n
c17=0
do while(c17.le.2*m)
temp(c17,n+1)=temp1(c17,n+1)
c17=c17+1
end do
enddo
write(*,*) n

```

```

n=n+1
end do
write(*,*) (g+0.5)/(g+1),bi*(1+2*g-
2*g**2*log(1.0+g)+2*g**2*log(g))/4.0+(g+0.5)/(g+1)

open (unit=10,file='temp.dat')

i1=0
do while(i1.le.2*m)
write(10,102) i1*dz,
temp(i1,10),temp(i1,100),temp(i1,200),temp(i1,400),temp(i1,1000);102 format(7e18.8)
! write(10,102) i1/100, exp(2*(i1*d-1)/(ep)); 102 format(5e18.8)

! write(*,*) i1
i1=i1+1
end do
close (unit=10)

open (unit=10,file='modphi.dat')

i2=0
do while(i2.le.2*m)
write(10,110)
i2/100,modphi(i2,0),modphi(i2,10),modphi(i2,100),modphi(i2,200),modphi(i2,400),modph
i(i2,1000);110 format(7e18.8)
! write(10,102) i1/100, exp(2*(i1*d-1)/(ep)); 102 format(5e18.8)

! write(*,*) i1
i2=i2+1
end do
close (unit=10)

open (unit=10,file='trans.dat')

i3=0
do while(i3.le.t)
write(10,110) i3*dt, temp(0,i3),modphi(0,i3);120 format(7e18.8)
! write(10,102) i1/100, exp(2*(i1*d-1)/(ep)); 102 format(5e18.8)

! write(*,*) i1
i3=i3+1
end do
close (unit=10)

end program distribucioncorrienteacsr

```

Referencias

- [1] Koval, D. O. y Billinton, R. "Determination of transmission line ampacities by probability and numerical methods". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-89, No. 7, pp 1485-1492 (1970).
- [2] Morgan, V. T. "Effect of elevated temperature operation on tensile strength of overhead conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-11, No 1, pp 345-352 (1996).
- [3] Black, W. Z., Collins, S. S. y Hall, J. F. "Theoretical model for temperature gradients within bare overhead conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-3, No 2, pp 707-715 (1988).
- [4] Vakili, F., Viles, M., Reding, J., y Sherry, N., "Dynamic thermal line loading monitor". IEEE Trans on Power Systems. Vol.1, No. 2, pp 62-66 (1986).
- [5] Davis, M.W. "A new thermal rating approach: the real time thermal rating system for strategic overhead conductor transmission lines. Part I. General description and justification of the real thermal rating system". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-96, No 3, pp 803-809 (1977).
- [6] Davis, M.W. "A new thermal rating approach: the real time thermal rating system for strategic overhead conductor transmission lines. Part II. Steady state thermal rating program". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-96, No 3, pp 810-821 (1977).
- [7] Havey, J. R. "Effect of elevated temperature operation on the strength of aluminum conductors". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-91, pp 1769-1772 (1972).
- [8] Morgan, V. T. "The loss of tensile strength of hard-drawn conductors by annealing in service". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-98, No. 3, pp 700-7009 (1979).
- [9] Foss, S. D., Lin, S. H. y Fernandes, R. A. "Dynamic thermal line ratings: Part I. Dynamic ampacity rating algorithm". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 6, pp 1858-1864 (1983).
- [10] Foss, S. D., Lin, S. H. y Fernandes, R. A. "Dynamic thermal line ratings: Part II. Conductor temperature sensor and laboratory field test evaluation". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 6, pp 1865-1873 (1983).
- [11] Black, W. Z., y Byrd, W. R. "Real-time ampacity model for overhead lines". IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. Vol PAS-102, No 7, pp 2289-2293 (1983).

[12] Morgan, V. T. "The radial temperature distribution and effective radial thermal conductivity in bare solid and stranded conductors". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-5, pp 1443-1452 (1990).

[13] Miñambres, J. F., Barandiarán, J.J., Alvarez-Isasi, Zorroza, M. A., Zamora, I. y Mazón, A. J. "Radial temperature distribution in ACSR conductors applying finite elements". IEEE Trans. on Power Delivery. Vol PWRD-14, No 2, pp 472-478 (1999).

[14] Ghandakly, A., y Carrant, R., "A model to predict current distributions in bundled cables for electric glass melters". IEEE Trans on Industry Applications, Vol 26, No. 6, pp 1043-1048 (1990).

[15] Jackson, T. Classical electrodynamics. John Wiley & sons, USA.

[16] Vafai, K. Handbook of porous media. Dekker, New York. (2000).

[17] Kaviany, M. Principles of heat transfer in porous media. Springer, New York, (1995).

[18] Morgan, V. T. Thermal behaviour of electrical conductors: Steady, dynamic and fault-current ratings. Wiley, Inglaterra, (1991).

[19] Morgan, V. T. y Findlay, R., "Effects of axial tension and reduced pressure on the radial thermal conductivity of a stranded conductor". IEEE Trans on Power Delivery. Vol 8, No. 2 pp553-558 (1993).

[20] Ozisik, M. Heat conduction. John Wiley & sons, USA.

[21] Bender, C. y Orszag, S. Advanced mathematical methods for scientist and engineers. Mc Graw-Hill, USA.

[22] Ozisik, M. N. Finite difference methods in heat transfer. CRC, Boca Raton (1994).

[23] Maksiejewski, J., "Thermal response of bimetallic conductors under surge current taking the skin effect into account" IEE Proceedings. Vol 140, No. 4, pp 338-344 (1993).

[24] Fosythe, G. E. y Wasow, W. R. Finite difference methods for partial differential equations. Wiley, New York, (1960).

[25] Incropera, F. P. y Dewitt, D. P. Fundamentals of heat and mass transfer, Wiley, New York, (1990).

[26] Zunec, M. y Ticar, I., "Determination of current and temperature distribution in overhead conductors by using electromagnetic-field analysis tools" IEEE Trans on Power Delivery, Vol 21, No. 3, pp 1524-1529 (2006).

[27] Lin, S. "Heat transfer in a overhead electrical conductor", Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 35, No. 4. pp 795-801 (1992).

[28] Rao, Nannapaneni N. Elements of Engineering Electromagnetics, PEARSON Prentice-Hall, New Jersey, (2004).