

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales

**Estudio Numérico de Segregación en  
Medios Granulares**

**T E S I S**

*que para obtener el grado de*

**Maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales**

*presenta*

**José Federico Hernández Sánchez**

Asesor: Dr. Roberto Zenit Camacho

## **Jurado asignado:**

PRESIDENTE	Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz
VOCAL	Dr. Roberto Zenit Camacho
SECRETARIO	Dr. Pablo Padilla Longoria
1ER SUPLENTE	Dr. Catalina Elizabeth Stern Forgach
2DO SUPLENTE	M. en C. María del Rocío Chicharro Serra

## **Lugares donde se realizó esta tesis:**

Las simulaciones numéricas de este trabajo se realizaron en el Laboratorio de Reología del Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. J. Roberto Zenit Camacho

SUSTENTANTE

José Federico Hernández Sánchez

“...there comes a time when a man has to ask himself whether he wants a life of happiness or a life of meaning”

*D. Linderman*

# Agradecimientos

Una de las desventajas de escribir nuevamente agradecimientos para una segunda tesis, es que las buenas ideas de una mente limitada ya están tomadas, sin embargo, una de las ventajas es que los formalismos y otras cosas ruidosas también pueden ser ignorados, dejando bajo la luz aquello realmente valioso.

A mis padres, no tengo forma de agradecer su apoyo y amor incondicionales a lo largo de todo el trayecto, sin ustedes ninguno de mis éxitos hubiera sido posible. A Ely, por su paciencia en las incontables veces que se ha encontrado atrapada en uno de mis eternos monólogos, que siempre parecen buscar lo peor por muy escondido que se encuentre. A Fede, por ser el viajero experto y guía imprescindible en este enramado de caminos ambiguos que algunos llamamos vida. Gracias por no bajarte de árbol del romanticismo empedernido con las duras pedradas de mi dialéctica pragmática. De no ser por tu óptica idealista, la mía sería muy opaca.

A Roberto Zenit, por las burlas en momentos inapropiados, por el servidor de las 2 de la tarde, por los consejos amorosos no solicitados, pero más importante, por tu apoyo en los momentos más oscuros, por el impulso en tiempos mejores, por las críticas constructivas y por ser pieza clave en mí formación profesional y personal.

A la Dra. Catalina Stern, por darme la oportunidad de participar en sus clases, aprendí mucho de esa experiencia.

A Rene, compartir el último periodo fue un regalo inmerecido e inesperado, pero igual de grato. Gracias por tu amistad en ambos lados del atlántico.

A Guada, la persona que soy no se entiende sin este último par de años y este periodo no lo entiendo sin ti. Danke für alles (*alles bist du!*).

A Aide, por las largas conversaciones, los vistazos a escondidas en la psique femenina, el europazo y su intrínseco vocabulario decadente, los helados del domingo y lo que aún falta por venir.

A Ernesto, por compartir una visión que muchos juzgan *a priori* sombría, sin saber que dentro yace una inagotable capacidad de sorprenderse de las cosas más sutiles y reírse de todas las demás.

A Caltech, por obligar a Mónica y a mí a inaugurar el horario de atención de amigos de 1 a 4 am. Al Jako, por ser la guía en el español chilango más decadente que jamás he hablado y a su familia por recibirme con los brazos abiertos.

A Itze, por ser la euroguía que, sin clemencia, me despertaba temprano cuando estaba en lo peor del *jetlag*, por morir de miedo cuando creyó que no llegaría ni a la esquina y mucho menos que cruzaría el país. Porque a pesar de las expectativas, después de varios años aprendimos a compartir el mismo espacio, sin tratar de matarnos.

A Iskra, por arriesgarse y hacer que las últimas semanas fueran divertidas y memorables.

A Humberto y Richie, los compañeros de las materias del posgrado, los amigos que hicieron posible que las noches de resolución de exámenes fueran alegres.

A Oscar y Daniela, por adoptarme en mi estancia en un lugar que, en principio, parecía lejano y que terminó siendo agradable y muy familiar. Sin ustedes la experiencia no hubiera sido tan grata, ¡gracias!

A todos los del labo, Santos, Diego, Sand-oval, Mijito, Charly, Adriana, Biobarbara, Roger-sama, Julian-solo, Gúzman, Horacio y Colocho, por los años que se hicieron como días gracias a su inmejorable compañía.

A los sinodales, por las correcciones, críticas, comentarios, e ideas que ayudaron a mejorar este trabajo. Agradezco especialmente a la M. en C. Roció Chicharro por compartir fotos de sus experimentos.

A la UNAM, porque desde los 4 años me ha acogido en sus filas, dándome la mejor educación, los mejores profesores y amigos que se pueden tener.

Y finalmente, a la infinidad de personas que mi decadente memoria olvida, o a los que mi mente sacrifica para no hacer los agradecimientos interminables, por las cosas valiosas que me han dado hasta el día de hoy.

Este proyecto fue realizado en las instalaciones del Instituto de Investigaciones en Materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se contó con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).



# ÍNDICE GENERAL

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Materia granular . . . . .	3
1.1.1. Conceptos básicos . . . . .	4
1.2. Modelado de materiales granulares . . . . .	6
1.2.1. Modelos continuos . . . . .	7
1.2.2. Modelos discretos . . . . .	12
1.2.3. Ejemplos del modelado discreto en la literatura . . . . .	17
1.3. Segregación . . . . .	18
1.3.1. Tambores girados . . . . .	19
1.3.2. Vertederos . . . . .	21
1.3.3. Formación de pilas . . . . .	22
1.3.4. Camas vibradas . . . . .	27
<b>2. Simulación Numérica</b>	<b>29</b>
2.1. Avalanchas . . . . .	31
2.2. Segregación . . . . .	33
2.3. Adimensionalización . . . . .	36
<b>3. Resultados</b>	<b>39</b>
3.1. Ángulo de inclinación del inicio del flujo . . . . .	39
3.1.1. Observaciones . . . . .	44
3.2. Rugosidad macroscópica y segregación . . . . .	46



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

3.3. Segregación . . . . .	51
3.3.1. Segregación por densidades . . . . .	53
3.3.2. Segregación por tamaños . . . . .	57
3.3.3. Comparación con experimentos . . . . .	59
3.4. Análisis de fuerzas . . . . .	61
3.4.1. Otras teorías acerca de la segregación que fueron descartadas . . . . .	67
<b>4. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>73</b>
4.1. Avalanchas . . . . .	74
4.2. Rugosidad macroscópica . . . . .	74
4.3. Segregación . . . . .	75
4.4. Sobre las fuerzas . . . . .	75
4.5. Trabajo Futuro . . . . .	76
<b>A. Número de coordinación en 2D y 3D</b>	<b>77</b>
A.1. Número de coordinación en 2D . . . . .	77
A.2. Número de coordinación en 3D . . . . .	78
<b>Índice de Figuras</b>	<b>81</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>



## Resumen

Los materiales granulares son de gran importancia porque están presentes en muchos procesos naturales como el movimiento de dunas, avalanchas y hasta en los anillos de Saturno. También son ubicuos en la industria, ya que pastillas, cemento, cereales y minerales se suelen encontrar en esta forma. Sin embargo, es paradójico que sean tan comunes en la naturaleza y que en cambio, su comportamiento sea excepcional y de difícil explicación.

En esta tesis se usó un modelo de partícula suave en dos dimensiones para caracterizar a un flujo en un plano inclinado y experimentos de segregación. El arreglo numérico consiste en dos paredes verticales y dos horizontales, dentro de las cuales se colocaron 1500 partículas, soportadas por una cama de partículas estáticas en la base de la pared inferior. El código coloca a las partículas en posiciones y con velocidades aleatorias dentro de las 4 paredes y después impone las condiciones físicas, tales como la gravedad, para lograr que se asienten en la base. Con las partículas asentadas, las paredes verticales se definieron periódicas y la gravedad se inclinó a diferentes ángulos, con el fin de generar un flujo de partículas. Dicho flujo se caracterizó obteniendo información como la energía cinética como función del tiempo, campos de velocidad, mapas escalares de fluctuaciones de velocidad, temperatura granular y densidad de partículas; así como perfiles verticales de velocidad, de temperatura granular y densidad. Estos resultados se compararon cualitativamente con los presentados por Pouliquen[1]. Para el estudio de segregación se introdujo un intruso de diferente tamaño y densidad dentro del flujo, manteniendo el área total de las partículas constante. Dentro de este estudio se midió la posición vertical del intruso como función del tiempo.

Con estas medidas se estableció el tiempo necesario para alcanzar el estado permanente, mismo que se usó para determinar la posición final del intruso. Se trazaron diagramas de la posición vertical final del intruso como función de la relación de tamaños y de densidades entre el intruso y las partículas del grueso. Además se obtuvieron mapas de densidades, temperatura granular, perfiles de velocidades, etc. Se utilizaron los datos reportados por Thomas[2] y usando el número de coordinación ( $Z$ ) se encontró una forma de escalar nuestros datos con los datos de un experimento con un tambor giratorio.

# CAPÍTULO

## 1

# Introducción

Como primera parte del proyecto de tesis se hizo una revisión bibliográfica sobre el estado del arte de los materiales granulares. En este capítulo se presentan algunos conceptos básicos sobre el tema.

## 1.1. Materia granular

Un material granular es una colección de partículas sólidas o granos, tales que la mayoría están en contacto con al menos algunas de sus partículas vecinas[3]. Los medios granulares son ubicuos<sup>1</sup> en la naturaleza y de ellos existen abundantes ejemplos, como son: pastillas, cereales, avalanchas, dunas, cinturones de asteroides, erosión, sedimentación, erupciones volcánicas, etc. Algunos ejemplos se muestran en la Figura 1.1. Son tan importantes que el 75 % de las materias primas del mundo están en forma de materia granular[4].

Sin embargo, es paradójico que los materiales granulares sean tan comunes en la naturaleza y que en cambio, su comportamiento sea excepcional y de difícil explicación. Estos materiales están constituidos de granos sólidos, pero al estudiar el conjunto se observa que en algunas ocasiones exhiben propiedades de sólidos y en otras de fluidos. Por ejemplo, pueden tomar la forma del recipiente que los contiene o tomar una variedad de formas cuando carecen de soporte. Tal es el caso del ángulo observado entre las pilas de arena y el plano horizontal que las sostiene, llamado *ángulo de reposo*. Otro fenómeno interesante, llamado *dilatancia de Reynolds* que consiste en la expansión del material para poder deformarse o fluir. Esto ocurre debido a que deben aparecer huecos para permitir que los granos fluyan a través del material[5]. Otra consecuencia de este inusual comportamiento se refleja en las propuestas de los modelos hidrodinámicos de flujos granulares densos, en los que se asume que el material se comportara elásticamente bajo un esfuerzo

---

<sup>1</sup>“Que está presente a un mismo tiempo en todas partes.” *Vid.* Diccionario de la real academia de la lengua, [www.rae.es](http://www.rae.es), junio, 2010

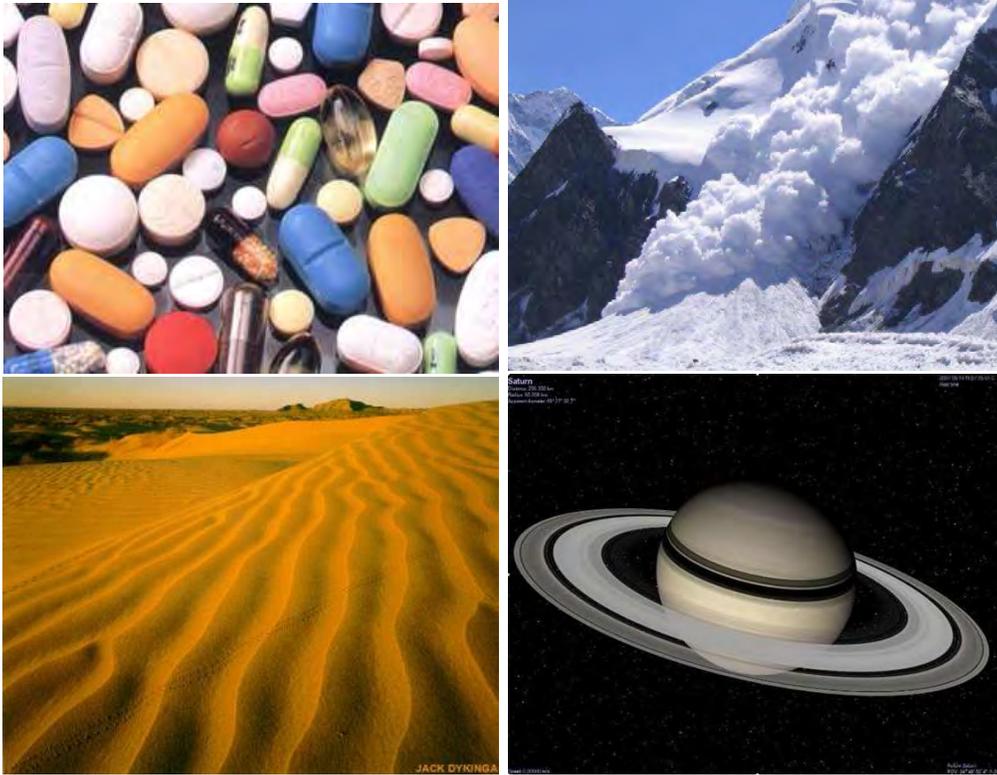


Figura 1.1: Ejemplos de flujos granulares en la naturaleza y en la industria. De izquierda a derecha y de arriba a abajo. Manejo de medicamentos en la industria farmacéutica (transportación, envasamiento, etc.). Avalancha de nieve. Movimiento de dunas en el desierto. Los anillos de saturno, compuestos por asteroides que colisionan continuamente.

pequeño y que fluirá después de que alguna componente de los esfuerzos exceda un valor umbral (esfuerzo de cedencia  $\sigma_0$ )[6]. Estos son sólo algunos ejemplos del inusual comportamiento de materiales granulares. Como se observa, experimentan variaciones en su densidad (compresibilidad), esfuerzos de cedencia, elasticidad y otros fenómenos de descripción compleja o poco estudiada y por ello su estudio desde el punto de vista físico es atractivo.

### 1.1.1. Conceptos básicos

En esta sección se describirán algunos conceptos básicos que permitirán abordar el tema de los materiales granulares con facilidad.

#### Densidad

La densidad de un material granular es la masa por unidad de volumen y la expresión es:

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s}, \quad (1.1)$$

donde  $\rho_s$  es la densidad granular en  $kg/m^3$ ;  $m_s$  es la masa granular en  $kg$  y  $V_s$  es el volumen granular en  $m^3$ . De acuerdo con diferentes condiciones al formarse la pila de material, la densidad granular puede ser dividida en densidad libre y densidad de compactación dinámica de la pila. El cociente entre la densidad de



compactación y la densidad libre es llamado coeficiente de compacidad y se expresa

$$K_m = \frac{\rho_m}{\rho_d}, \quad (1.2)$$

donde  $K_m$  es el coeficiente de compacidad,  $\rho_m$  es la densidad de compactación de la pila y  $\rho_d$  es la densidad libre de la pila.

### Estructura granular

La estructura granular que trata sobre el arreglo de gránulos y poros. Por su tamaño, la estructura granular se puede dividir en dos:

- **Microestructura:** La que sólo puede ser observada con ayuda de un microscopio óptico o electrónico.
- **Macroestructura:** La estructura que se observa a simple vista o por una lupa, como estratificaciones, fracturas, grandes poros, gránulos, etc.

Sobre la base de su organización y acoplamiento, la estructura granular puede ser dividida en los siguientes tres tipos:

- **Un sólo tipo de grano.** Son estructuras de fragmentos minerales o arenas, que carecen de fuerza de acoplamiento entre partículas o en los que ésta es despreciable. Entre menos uniforme es la distribución de las partículas, más compacta es la estructura. La estructura granular que se forma rápidamente es menos densa que la que se forma lentamente.
- **Estructura apanalada.** Los granos que están acoplados unos a otros de forma *lado-lado* o *cara-lado* son conocidos por tener una estructura apanalada (a veces llamada estructura celular o estructura floculante), que hace que los granos tengan algunas propiedades especiales estrechamente relacionadas con la intensión y la distorsión, tales como la porosidad celular, la viscosidad y la elasticidad.
- **Textura glomerogranular.** Algunos ensambles de granos de aparente forma *cara-cara*, cuando una gran pila de granos se manifiesta.

Con el cambio de condiciones externas tales como la carga y la temperatura, la estructura granular se alterará. La fuerza de acoplamiento de los gránulos se incrementará, si el medio granular se deshidrata. Impulsado por la presión y el corte, la estructura apanalada puede transformarse en una estructura de dirección en paralelo y la estructura granular y la compresibilidad también pueden cambiar.

### Factor de porosidad, cociente de porosidad y grado de compactación

El factor de porosidad de un material granular es el cociente del volumen de poros y el volumen total del medio granular en condición libre. Se define como:

$$n_p = \frac{V_s - V_z}{V_s} \times 100, \quad \%, \quad (1.3)$$

donde  $n_p$  es la porosidad del material granular, %;  $V_s$  es el volumen total del material granular, incluido el volumen de aire y  $V_z$  es el volumen de las partículas sólidas.



La porosidad de un material granular también puede ser medida con el cociente de porosidad. El cociente de porosidad es la razón entre el volumen de los poros y el volumen de los granos en condición libre. Se define como:

$$e_P = \frac{V_s - V_z}{V_z} \times 100, \% \quad (1.4)$$

donde  $e_P$  es el cociente de porosidad del medio granular, %.

La relación entre el factor de porosidad  $n_P$  y el cociente de porosidad  $e_P$  es

$$n_P = \frac{e_P}{1 + e_P} \quad \text{o} \quad e_P = \frac{n_P}{1 - n_P}. \quad (1.5)$$

Una característica importante de los materiales granulares es que entre los granos existen muchos poros. El factor de porosidad en un medio granular es independiente de su estructura granular, porque ambos conceptos miden características diferentes. El factor de porosidad es grande para materiales granulares con irregularidades angulosas y pequeñas para medios regulares con partículas redondeadas. También es grande para estructuras con un sólo grano y pequeña para estructuras floculantes y texturas glomerogranulares.

Las propiedades de materiales granulares que tienen la misma porosidad, pero que tienen diferente distribución de formas y tamaños, son diferentes. Lo que significa que no es suficiente con solo saber el factor de porosidad y el cociente de porosidad. El grado de compactación también debe ser conocido, de manera que la holgura, la compactación y la estabilidad de la estructura puedan ser deducidas.

El grado de compactación de un medio granular es el grado con el que se puede compactar al material granular bajo la acción de una fuerza externa. En general, el cociente del volumen granular después de la compactación y el volumen en su estado original libre, se define como el grado de compactación de un material granular y se expresa como:

$$K_{ys} = \frac{V_{ys}}{V_s}, \quad (1.6)$$

donde  $K_{ys}$  es el grado de compactación de un material granular;  $V_{ys}$  es el volumen granular después de ser compactado. También se puede expresar el grado de compactación en términos del cociente de porosidad:

$$K_{ys} = \frac{e_{Pmax} - e_P}{e_{Pmax} - e_{Pmin}}, \quad (1.7)$$

donde  $e_{Pmax}$  es el máximo cociente de porosidad del material en estado absolutamente laxo y libre;  $e_{Pmin}$  es el cociente de porosidad mínimo que se toma en estado completamente compactado;  $e_P$  es el cociente de porosidad natural.

Existen otras propiedades de los materiales granulares, pero sólo se presentan estas por considerarse las más importantes. Para una discusión completa se puede consultar a Wu *et al.*[7].

## 1.2. Modelado de materiales granulares

Para poder estudiar a los materiales granulares se han usado diversas aproximaciones en distintas investigaciones. Éstas pueden ser clasificadas en dos grupos: (i) modelos continuos y (ii) modelos discretos[3]. La primera de ellas usa el enfoque de sistemas, considera al material granular como un continuo con ciertas características. Por ello lo modela como un *todo* usando modelos hidrodinámicos, que pueden ser derivados formalmente de principios básicos de física estadística[8]. No obstante, los resultados de esta estrategia suelen ser cuestionados por tener limitaciones en la descripción del flujo granular. Esto último suele explicarse al



observar que la separación de la longitud macroscópica y las escalas de tiempo de las longitudes y escalas macroscópicas son mucho menos pronunciadas de lo que se desearía en una descripción continua[9]. El segundo grupo de modelos consiste en tomar en cuenta el balance individual de fuerzas de cada partícula dentro del flujo. A estos modelos también se les llama modelos de partícula y su mayor aplicación es en simulaciones numéricas. Para los rangos típicos de tamaños de partícula (0.1 - 10 mm), los materiales suelen parecer discretos a simple vista. Lo que hace pensar que los modelos discretos son más apropiados que los modelos continuos. Sin embargo, un conocimiento imperfecto de las fuerzas de contacto entre partículas y limitaciones prácticas en el tiempo de cómputo, limitan a los modelos discretos. A pesar de este inconveniente, muchos de los atributos tales como la forma, distribución de tamaños y características de la deformación pueden ser incorporados más fácilmente en este tipo de modelos que en los modelos continuos. Además, los sistemas fluidos con complicadas geometrías se pueden examinar fácilmente. Por otro lado la simulación de sistemas de partículas sólidas, que usualmente suelen tener un gran número de partículas, hoy en día está más allá del alcance de los modelos discretos. En contraste con los modelos continuos, es difícil construir soluciones analíticas aproximadas para modelos discretos de problemas de flujos. Así, ninguna clase de modelos es superior a la otra en todos los aspectos. Ambos tipos de modelos se describen brevemente a continuación.

### 1.2.1. Modelos continuos

Modelos continuos han sido usados extensamente para problemas tanto estáticos como dinámicos. En estos modelos las partículas son reemplazadas por un medio continuo y se supone que cantidades como la velocidad y la densidad son funciones suaves de la posición y el tiempo. Como los materiales granulares son discretos a simple vista, puede sorprender el uso de modelos continuos. Además, algunas de las escalas de longitud de los aparatos usados en experimentos de laboratorio pocas veces exceden 50 - 100 diámetros de partícula[10, 11, 12]. A pesar de estas características los modelos continuos han sido usados con distintos grados de éxito en muchas situaciones. La motivación para usar estos modelos ha sido elocuentemente descrita por Truesdell y Muncaster[13].

“A pesar de lo discreta que pueda ser la naturaleza en sí, las matemáticas de un sistema discreto muy numeroso permanece hoy en día más allá de la capacidad de cualquiera. Para analizar lo *grande*, lo reemplazamos con lo infinito, porque las propiedades de lo infinito son más simples y sencillas de manejar. La matemática de sistemas grandes es el cálculo infinitesimal, el análisis de funciones que están definidas en arreglos infinitos y cuyos valores oscilan entre infinidad de arreglos. Necesitamos diferenciar e integrar las funciones. De otra forma estamos paralizados si deseamos lidiar efectiva y precisamente con más de algunas docenas de objetos capaces de interactuar mutuamente. Así, de alguna manera debemos introducir la continuidad.”

La anterior discusión no indica las condiciones bajo las cuales es razonable usar modelos continuos para materiales granulares. Hoy en día no existe una respuesta correcta. Con referencia a fluidos, muchos autores[12, 14, 15, 16, 17] creen que estos modelos son válidos si la escala de longitud característica del sistema es mucho más grande que el espacio medio entre las moléculas constituyentes o partículas. En el contexto de materiales granulares el espaciado debería ser tomado como la distancia entre los centros de las partículas, sabiendo que en muchos casos el hueco entre las superficies de las partículas puede ser mucho



menor que el tamaño de partícula[3]. Por razones intuitivas, pareciera que las escalas de tiempo deben ser también importantes en los problemas de flujo. De hecho, con referencia a gases, Chapman y Cowling[18], sugieren que (i) un elemento de volumen infinitesimal  $dV$  correspondiente al modelo macroscópico o continuo debería contener un número grande de moléculas y (ii) en un intervalo de tiempo infinitesimal debería ser largo comparado con el tiempo medio requerido por las moléculas para cruzar  $\Delta V$ , si no son deflectadas por las colisiones. Se sabe que la condición (i) es violada en flujos granulares típicos, sin embargo (ii) se mantiene. Un pequeño elemento de volumen  $\Delta V$  puede efectivamente contener un número grande de partículas. Por ejemplo, considérese un medio que consiste de partículas de diámetro 1mm y que  $\Delta V$  es un cubo de 1mm de lado. Entonces, en cualquier momento,  $\Delta V$  contiene menos de dos partículas. Sin embargo, si las partículas atraviesan el volumen con una velocidad media de  $0.2 \text{ m s}^{-1}$  (que es comparable con las velocidades verticales típicas alcanzadas en la región de salida de tolvas de laboratorio), alrededor de 200 partículas pasaran a través de  $\Delta V$  en un segundo. Mientras sólo se preste atención a fenómenos que sólo ocurren en escalas de tiempo que son mucho mayores a un segundo,  $\Delta V$  definitivamente contendrá un número grande de partículas. Tal vez esto proporciona una pista sobre el aparente éxito de los modelos continuos, incluso en los casos en que las escalas de longitud no son mucho más grandes que el tamaño de las partículas.

Una vez que el material granular es idealizado como un continuo, éste se puede someter a las leyes de balance de la mecánica del medio continuo. Estas ecuaciones contienen demasiadas variables y por ello debe complementarse con ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento del material. En la actualidad, la falta de ecuaciones constitutivas válidas para un amplio rango de densidades y velocidades de esfuerzo de corte, plantea un obstáculo importante. Además, como señaló Truesdell y Muncaster[13], es difícil de incorporar información de la naturaleza de las partículas en ecuaciones continuas, a menos que se haga de manera heurística. A pesar de estas deficiencias, se han producido numerosos intentos de utilizar modelos continuos para los materiales granulares. Algunos de estos modelos se describirán más adelante.

### Leyes de balance para modelos continuos

Una ley de equilibrio se postula para cada una de las siguientes cantidades: (i) masa, (ii) cantidad de movimiento, (iii) momentum angular, (iv) energía y (v) entropía. Si hay una discrepancia entre la teoría y los experimentos, las ecuaciones constitutivas se modifican, pero las leyes de equilibrio por lo general permanecen sin cambios. A menos que se indique lo contrario, el material granular será tratado como un continuo de una sola fase, ignorando la presencia del líquido intersticial. Por ello, la densidad del material granular será denotada por

$$\rho = \rho_p \nu, \quad (1.8)$$

donde  $\rho_p$  es la densidad de la partícula y  $\nu$  es la fracción de sólidos. Se supone que  $\rho_p$  es una constante, pero  $\nu$  puede variar. Algunas observaciones sobre las leyes de equilibrio específicas son pertinentes. El balance de masa expresa la ley de conservación de masa. El balance de momentum lineal establece que la tasa de cambio del momentum lineal de un *cuerpo* es igual a la suma de fuerzas de contacto y de cuerpo que actúan sobre él. Para materiales como el aire y el agua, no hay pares localizados. En tales casos puede demostrarse[14, 16, 17] que el balance de momentum angular se satisface idénticamente al considerar que el tensor de esfuerzos es simétrico. Aunque se puede demostrar que las colisiones entre partículas rugosas llevan a tensores de esfuerzos asimétricos[3]. El balance de entropía se usa raramente de forma directa, pero



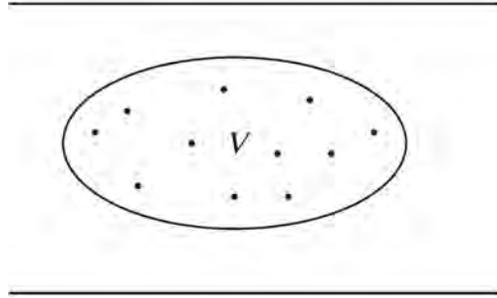


Figura 1.2: Un volumen  $V$ , que representa la configuración de un cuerpo en un tiempo  $t$ . Los puntos indican los puntos materiales.

junto con el balance de energía puede ser usado para obtener una expresión para la tasa de producción de entropía  $\dot{S}$  en términos de los gradientes de campos variables, tales como la velocidad y la temperatura. La desigualdad de Clausius-Duhem, que representa la segunda ley de la termodinámica para un proceso continuo, establece que  $S \geq 0$ . Como se muestra en los libros de la termodinámica irreversible y mecánica del medio continuo, esta desigualdad se puede utilizar para suponer las formas de las ecuaciones constitutivas y poner restricciones a los parámetros que aparecen en ellas. Por ejemplo, se puede demostrar que la viscosidad de corte de un fluido newtoniano debe ser no-negativa, como también el módulo de Young de un sólido elástico[3].

Lo primero a definir en un flujo que se considera continuo es la velocidad del medio. Como se está lidiando con un continuo, no hay partículas. Por lo tanto las velocidades están definidas en términos del movimiento de puntos materiales, que son los análogos a las partículas dentro del continuo. Considere el flujo de un material granular a través de una tubería. Suponiendo que el material puede ser tratado como un continuo, en el que para cualquier tiempo  $t$  se considera un volumen  $V$ , como se muestra en la Figura 1.2. Además, se supone que el continuo está compuesto por entidades primitivas llamadas puntos materiales, que son representados por los puntos de la Figura 1.2. Los puntos materiales contenidos en  $V$  constituyen un cuerpo y la región del espacio físico ocupado por el cuerpo recibe el nombre de configuración. El movimiento del cuerpo consiste en la secuencia de configuraciones en distintos momentos, por ejemplo: el volumen  $V$  de la Figura 1.2 es la configuración del cuerpo en el tiempo  $t$ . Si  $t$  es el tiempo actual, el nombre que recibe dicha configuración es configuración actual. En ausencia de cambios de fase y reacciones químicas, cada configuración de un cuerpo contiene el mismo conjunto de puntos materiales. El volumen correspondiente a cada una de estas configuraciones se llama volumen material y se denota por  $V_m(t)$ . Así, la forma y el tamaño de un volumen material se puede cambiar con el tiempo, pero siempre contiene el mismo conjunto de puntos materiales. Para seguir adelante, el concepto de marco de referencia debe ser definido. Un marco de referencia consiste en un sistema de coordenadas espaciales y un reloj. Para muchas aplicaciones, es conveniente elegir un marco de referencia que esté en reposo. Tal estructura es llamada marco de laboratorio[3]. Se podría hablar mucho más acerca del concepto de puntos materiales, puntos espaciales y en general de teoría del continuo, pero una revisión profunda de estos conceptos se puede encontrar en Mase *et al.*[19].

Existen dos formas de presentar los distintos tipos de balances continuos: forma diferencial, e integral. La forma elegida depende de la aplicación que se dará. Los balances integrales proveen estimados de cantidades globales tales como el flujo total de masa en una tolva y la fuerza total ejercida sobre la pared de la tolva. Mientras que los balances diferenciales proveen información detallada acerca de la densidad, esfuerzo y campos de velocidad en todos los puntos del dominio de interés. Obtener información del balance diferencial



suele requerir mucho más trabajo que el de los balances integrales. Los balances de masa y de momentum son los más comunes y se discuten a continuación junto con otros balances.

El balance de masa se puede expresar en forma diferencial e integral. Si se considera un volumen material  $V_m(t)$ , el balance integral de masa fue dado por Fung[17] y por Slattery[20].

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0, \quad (1.9)$$

donde  $\rho = \rho_p \nu$  es la densidad del material granular.

El balance diferencial de masa o ecuación de continuidad toma la forma de (Batchelor[14]; Whitaker[16]; Fung[17]; Bird *et al.*[21])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.10)$$

La ecuación 1.10 puede ser obtenida de la ecuación 1.9 si se usan el teorema de la divergencia y los teoremas de transporte. La ecuación 1.10 también se puede expresar de forma alternativa como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1.11)$$

donde  $D/Dt$  es la derivada material.

Dentro del marco de laboratorio, el balance integral de momento lineal dado por Fung[17]; Slattery[20]; Bird *et al.*[21], es.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{S_m(t)} \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} dS + \int_{V_m(t)} \rho \mathbf{b} dV, \quad (1.12)$$

donde  $V_m(t)$  es el volumen material con una superficie  $S_m(t)$  que lo limita;  $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$  es el vector de esfuerzo o la fuerza por unidad de área ejercida a través  $S_m(t)$  sobre el material en  $V_m(t)$  debido al material de fuera;  $\mathbf{b}$  es la fuerza de cuerpo por unidad de masa; y  $\mathbf{n}$  es el vector normal unitario que apunta hacia dentro de  $S_m(t)$ . A partir de aquí, suponemos que la fuerza de cuerpo surge solamente por la atracción del campo gravitacional de tierra. Para la mayoría de las aplicaciones relacionadas con flujos terrestres, la fuerza de cuerpo por unidad de masa  $\mathbf{b}$  puede ser aproximada por  $\mathbf{g}$ , la aceleración de la gravedad. De forma general, también puede haber otros tipos de fuerzas del cuerpo, como la fuerza ejercida sobre un material cargado por un campo eléctrico externo.

La ecuación 1.12 también puede ser usada en marcos de referencia en movimiento relativo con el marco de laboratorio, pero la expresión para las fuerzas de cuerpo involucraría muchos más términos.

El balance diferencial de momento lineal esta dado por

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}, \quad (1.13)$$

donde  $D/Dt$  representa a la derivada material. Igual que en el caso del balance de masa, la ecuación 1.13 puede ser obtenida de la ecuación 1.12 usando los teoremas de transporte y de la divergencia. En algunos problemas, la ecuación 1.13 puede no ser adecuada para describir el movimiento relativo al marco de laboratorio, si  $\mathbf{b}$  es tomado como la aceleración de la gravedad  $\mathbf{g}$ . La fuerza de cuerpo tiene que ser modificada mediante la inclusión de términos adicionales provenientes de varias fuentes, como la rotación de la Tierra sobre su eje o el movimiento de la la misma alrededor del sol. Como sería el caso de flujos oceánicos o en tuberías muy



largas o en general donde las escalas de tiempo y espacio obligan a tomar en cuenta fuerzas centrífugas o de coriolis, que pueden ser resultado de la rotación de la tierra sobre su propio eje[3].

La ecuación 1.13 puede ser combinada con el balance de masa de la ecuación 1.10 y ser reescrita como

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b}, \quad (1.14)$$

Para el caso del balance de momentum angular, se supone que los flujos granulares carecen de torques localizados[3] y por lo tanto el balance de momentum angular se satisface idénticamente al definir al tensor de esfuerzos como un tensor simétrico, *i.e.*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \quad (1.15)$$

donde el superíndice  $T$  denota la transpuesta del tensor. Existen situaciones en las cuales el tensor se debe considerar asimétrico. Para una revisión completa se recomienda leer el capítulo 9 de Rao *et. al.*[3]. También es posible hacer el balance de energía para flujos granulares. Si se considera despreciable la transferencia de energía por radiación, se puede tomar el balance de energía de Whitaker[16] o Malvern[22];

$$\rho \frac{D}{Dt} (\hat{U} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (1.16)$$

donde  $\hat{U}$  es la energía interna por unidad de masa,  $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$  es la energía cinética por unidad de masa y  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de energía. Los términos  $-\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v})$  y  $\rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ , representan la tasa de trabajo por unidad de volumen del material debido a los esfuerzos y las fuerzas de cuerpo, respectivamente. Y el término  $-\nabla \cdot \mathbf{q}$  representa la tasa de transferencia de energía por unidad de volumen del material, debido a la conducción. La ecuación anterior se puede reexpresar usando el balance de masa como

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\hat{U} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2)] + \nabla \cdot [\rho\mathbf{v}(\hat{U} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2)] = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (1.17)$$

Existen otras formas del balance de energía que se encuentran en la literatura, ésta sólo es una de ellas.

El uso de modelos continuos para la predicción del comportamiento de medios granulares es muy amplio en la literatura. En la siguiente sección se muestran algunos ejemplos de casos recientes.

### Ejemplos de modelos continuos de materiales granulares

Esta categoría de modelos considera que las partículas forman parte de un fluido y por lo tanto para conocer las características del flujo, es necesario obtener la solución de las ecuaciones de conservación. Esta solución puede obtenerse de forma teórica como en el trabajo de Eshuis *et al.*[9] o numérica como en el trabajo de Bertrand *et al.*[8]. Este tipo de aproximación pasa por alto el comportamiento individual de cada partícula y por ende, los sistemas que consisten en un número pequeño de partículas no pueden ser modelados con esta técnica. Sin embargo, los sistemas que comprenden partículas que están igualmente distribuidas y con las mismas propiedades del material, de tal manera que se pueda pensar que forman un continuo, pueden ser tratadas con esta técnica y los resultados obtenidos pueden ser cualitativamente comparables con datos experimentales. Algunos ejemplos de trabajos en los que esta aproximación ha sido aplicable, se recapitulan en el trabajo de Bertrand[8]. Uno de estos ejemplos es el modelado del transporte de polvos en un reactor de polimerización continua, provisto con un impulsor de aspas. En dicho trabajo el dominio computacional se dividió en celdas y se calculó el desplazamiento del material granular por medio de un balance de masa no estacionario; éste tomó en cuenta a la gravedad y al movimiento del impulsor. Esto puede observarse, hasta



cierto punto, como un método de solución en elemento de volumen finito de la ecuación de conservación:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(C\vec{v}) = S, \quad (1.18)$$

donde  $C$  representa la fracción de volumen de sólidos;  $\vec{v}$  la velocidad y  $S$  representa una fuente que puede ser cero. En este modelo,  $\vec{v}$  tiene en cuenta la fuerza de la gravedad a través de la velocidad de sedimentación dada por

$$\vec{v}_{sedimentacion} = \frac{D^2 g (\rho_s - \rho_{aire})}{18 \mu_{aire}}, \quad (1.19)$$

donde  $D$  representa el diámetro de la partícula;  $g$  la aceleración de la gravedad;  $\rho_s$  y  $\rho_{aire}$  son la densidad del aire y de las partículas, respectivamente; y  $\mu_{aire}$  es la viscosidad dinámica del aire. En este caso se usó la teoría hidrodinámica para predecir el empaquetamiento de cierto material dentro del tanque en un momento dado y el resultado estuvo en concordancia cualitativa con lo observado en los experimentos. Existen otros ejemplos de trabajos en los que la concordancia se da al menos de forma cualitativa. Claro que los modelos basados en la mecánica del medio continuo pasan por alto el comportamiento de las partículas individuales, aunque suele ocurrir que las ecuaciones constitutivas son derivadas de relaciones obtenidas de la mecánica estadística clásica, que en un principio toma en cuenta el comportamiento individual. En el ejemplo anterior se muestra que una ecuación de balance típica puede usarse para tratar de predecir el comportamiento de un flujo granular, sin tomar en cuenta el comportamiento individual de cada partícula. Aunque existen otro tipo de modelos que toman en cuenta dicho comportamiento.

### 1.2.2. Modelos discretos

El segundo tipo de modelos simula el movimiento individual de cada partícula, con un tratamiento especial para las colisiones eventuales. En este caso los ejemplos más socorridos están relacionados con simulaciones numéricas de sistemas de partículas, en las cuales se calcula la trayectoria de dichas partículas en cada instante de tiempo, de acuerdo con las leyes de la mecánica clásica. Las partículas en el vacío siguen trayectorias balísticas bien conocidas, pero el uso de modelos para las colisiones eventuales en simulaciones numéricas es mucho más reciente. Esta técnica fue iniciada por Cundall *et al.*[23]. En este método las leyes de Newton se aplican a cada partícula y su movimiento se sigue en el tiempo. La propuesta anterior fue denominada *método de los elementos separados (distinct element method)* por Cundall; En la literatura comúnmente se le denomina *método de elementos discretos (discrete element method)*. Existen diversas aproximaciones para modelar el contacto entre partículas, la más sencilla es suponer que las colisiones son instantáneas. Para ello se supone que existen coeficientes de restitución y de fricción asociados a las colisiones entre partículas. De manera que, sabiendo el estado inicial de ambas partículas antes de la colisión, se obtiene el estado final un instante después. A este tipo de modelos se les conoce como modelos de esfera dura. Estos modelos son limitados porque suponen que las colisiones son instantáneas, lo que es cierto para flujos poco densos, como gases granulares; pero es falso para flujos más densos o con velocidades pequeñas. Existe otro tipo de modelos que suponen que las colisiones duran cierto tiempo, el método de esfera suave. Con este tipo de metodología se permite que las partículas se traslapen, pero a este traslape se oponen fuerzas normales y de corte que dependen de la extensión del traslape. Así el material se idealiza como una colección de partículas suaves con un núcleo repulsivo. Considerando a las partículas esféricas, el balance de fuerzas del momento lineal y angular para la  $i$ -ésima partícula está dado por



$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = m_i \mathbf{b} + \sum_{j=1}^{k_i} \mathbf{F}_{ij}, \quad (1.20)$$

y

$$I_i' \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{k_i} (\mathbf{T}_{ij} + \mathbf{M}_{ij}), \quad (1.21)$$

donde  $m_i$ ,  $\mathbf{v}_i$ ,  $I_i'$  y  $\boldsymbol{\omega}_i$  son respectivamente, la masa, la velocidad lineal del centro de masa, momento de inercia y velocidad angular de la partícula  $i$ ;  $\mathbf{b}$  es la fuerza de cuerpo por unidad de masa;  $\mathbf{F}_{ij}$  es la fuerza ejercida sobre la partícula  $i$  por la partícula  $j$ , que está en contacto con ella;  $k_i$  es el número de partículas en contacto con la partícula  $i$ ;  $\mathbf{T}_{ij}$  es el torque ejercido sobre la partícula  $i$ , debido a la componente tangencial de la fuerza de contacto entre las partículas  $i$  y  $j$ ; y  $\mathbf{M}_{ij}$  es el torque de la fricción de rozamiento ejercida por la partícula  $i$  sobre la partícula  $j$ . Los paréntesis alrededor de los índices  $i$  y  $j$  indican que no aplica la convención de la suma. El torque  $\mathbf{T}_{ij}$  esta dado por

$$\mathbf{T}_{ij} = (R_{(i)} \mathbf{n}) \times F_{(i)j}, \quad (1.22)$$

donde  $R_i$  es el radio de la esfera  $i$  y  $\times$  denota el producto cruz entre dos vectores.

La velocidad lineal se mide con respecto al sistema coordenado que está en reposo relativo. Por otro lado, la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}_i$  se mide con respecto al sistema coordenado cuyo origen siempre coincide con el centro de masa de la partícula  $i$  y cuya orientación siempre depende del tiempo. Aún cuando  $\boldsymbol{\omega}_i$  se denota con una flecha curva en la Figura 1.3, es de hecho un vector en dirección del eje de rotación. Siguiendo la convención usual[24], el vector se dirige hacia afuera del plano para la rotación en dirección antihoraria. Esta convención se refiere a la *regla de la mano derecha*.

Se cree que el torque de fricción de rodamiento  $\mathbf{M}_{ij}$  surge principalmente por las pérdidas de histéresis asociadas con la deformación de las partículas durante el rodamiento[25]. La necesidad de incluir este efecto fue mostrada por Zhou *et al.*[26]. Supongamos que se deja caer una esfera sobre una superficie plana con cero velocidad angular y velocidad lineal paralela a la superficie. Si el torque del coeficiente de fricción se omitiera en la ecuación 1.21, los cálculos muestran que la esfera se mueve indefinidamente. Por ello es importante incluir este término en problemas tales como la formación de pilas. Expresiones para  $\mathbf{M}_{ij}$  están dadas en Zhou *et al.*, 1999.

Para completar el modelo, las expresiones para la fuerza de contacto en las direcciones normal y tangencial, deben de ser especificadas dependiendo del modelo que sea más apropiado o el que se tenga disponible. Como ya se mencionó estos modelos pueden ser los correspondientes a partícula dura o suave. Ambos métodos se explicarán a continuación.

### Método de esfera dura

En el marco del modelo de esfera dura, se supone que las partículas son perfectamente rígidas y que siguen un movimiento inalterado hasta una colisión. Debido a lo rígido de la interacción, las colisiones se producen de forma instantánea, de modo que lo más apropiado es usar un método de simulación con un tiempo de paso



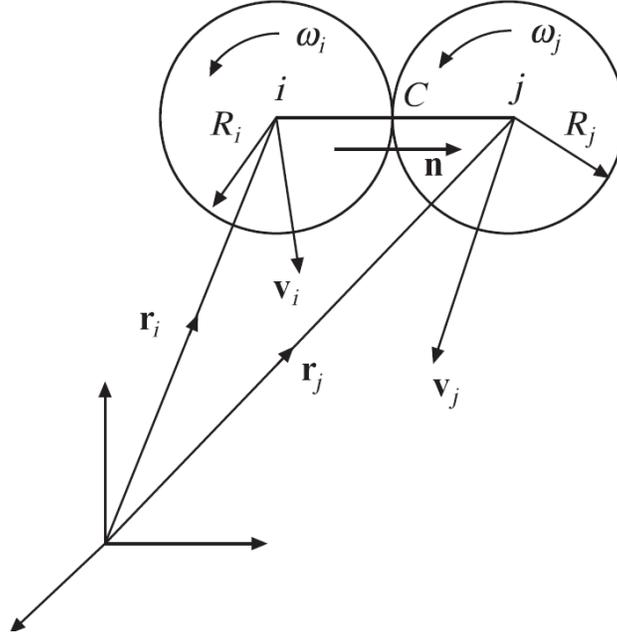


Figura 1.3: Dos partículas esféricas  $i$  y  $j$  en contacto en un punto  $C$ . Aquí  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad del centro de masa de la partícula  $i$ ,  $\omega_i$  es la velocidad angular y  $\mathbf{n}$  es el vector unidad dirigido sobre la línea que une a los centros de masa de las partículas.

controlado por eventos. La naturaleza instantánea de las colisiones entre esferas duras es artificial, aunque es un límite válido en muchas circunstancias. Aunque los detalles del contacto (el comportamiento de colisión) se pasan por alto, el modelo de esfera dura es válido cuando las colisiones binarias dominan y los contactos de varias partículas son raros. La falta de información física en el modelo permite un tratamiento muy simple de las colisiones. Sólo es necesario el uso de una matriz de colisión que incluye la conservación del momentum y las normas de la pérdida de energía[6].

Entre colisiones, las esferas rígidas viajan en forma independiente una de otra. Un cambio en la velocidad (y por lo tanto un cambio en la energía) puede ocurrir solamente en una colisión. Se define un modelo para la interacción de partículas idénticas en colisión instantánea. Sabiendo que éstas tienen un radio  $a$  y una masa  $m$ . Las velocidades postcolisionales  $\mathbf{v}'$  de dos compañeros de colisión en el sistema de referencia de su centro de masa se dan en términos de velocidades precolisionales  $\mathbf{v}$  de la siguiente manera

$$\mathbf{v}'_{1,2} = \mathbf{v}_{1,2} \mp (1+r)\mathbf{v}_n/2, \quad (1.23)$$

con  $\mathbf{v}_n = [(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n}]\mathbf{n}$ , donde la componente normal de la velocidad relativa  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ , paralela a  $\mathbf{n}$  y el vector unitario apuntando a lo largo de la línea que conecta los centros de las partículas que chocan. En el modelo de esfera dura, si dos partículas chocan, sus velocidades son cambiadas de acuerdo a la ecuación anterior. El cambio de la energía translacional en una colisión esta dado por  $\Delta E = -m_{12}(1-r^2)\mathbf{v}_n^2/2$  con la disipación por el coeficiente de restitución  $r < 1$ .

Dado que estamos interesados en el comportamiento de partículas granulares, que podrían evolucionar a lo largo de varias décadas en el tiempo, es posible usar un método controlado por eventos (ED) que discretiza la secuencia de eventos con un tiempo de paso variable adaptado al problema. Esto es diferente de



simulaciones MD clásicas, donde el paso de tiempo suele ser fijo.

En las simulaciones ED, las partículas siguen un movimiento de traslación no perturbado hasta que un evento ocurre. Un evento es la colisión entre dos partículas o la colisión de una partícula con una frontera o la colisión de una partícula con el límite de una celda (en la estructura unida por celdas). Aquí las celdas no tienen efecto sobre el movimiento de las partículas, sino que se introduce exclusivamente para acelerar la búsqueda de vecinos de colisión futuros en el algoritmo.

Simple algoritmos ED actualizan al sistema completo después de cada evento, un método que es sencillo, pero ineficiente para un gran número de partículas. En este tipo de algoritmos, la información manejada es el *antiguo* y el *nuevo* estado del sistema. Cada uno de estos contiene como mínimo el tiempo del evento, las posiciones, las velocidades y los vecinos en el evento. Cuando una colisión ocurre, el estado *antiguo* y el *nuevo* son intercambiados. Así el que fue el nuevo estado, se convierte en el antiguo estado actual, mientras que el que fue el viejo estado se convierte en el nuevo y así el nuevo estado está libre para el cálculo y el almacenamiento de eventos posteriores. Este aparente intercambio de información es llevado a cabo de forma muy sencilla y rápida al sólo intercambiar las etiquetas del estado nuevo y antiguo, respectivamente. Nótese que con el fin de actualizar el tiempo del siguiente contacto  $t_{ij}$ , de la partícula  $i$  con cualquier otro objeto  $j$ , si este cambia de estado independiente, debido a una colisión con otra partícula. Durante la simulación tales actualizaciones pueden ser necesarias varias veces para que el nuevo estado predicho tenga que ser modificado.

Como observación final sobre las simulaciones ED, se deben notar las desventajas relacionadas con las suposiciones hechas; las mismas que permiten la utilización de un algoritmo controlado por eventos, limitan la aplicabilidad del método. Dentro de su rango de aplicabilidad, las simulaciones ED suelen ser mucho más rápidas que las simulaciones MD, ya que con el método recién comentado, se usa una sola operación básica en una sola colisión (colisión matriz), mientras que el segundo requiere alrededor de cien pasos básicos (integración del tiempo de paso). Tómese en cuenta que lo anterior también es cierto en un régimen denso. En un régimen diluido, ambos métodos proporcionan resultados equivalentes, porque las colisiones son en su mayoría binarias[6]. Cuando el sistema se vuelve más denso, las colisiones múltiples de partículas pueden ocurrir y la suposición rígida hecha con las simulaciones ED de esfera dura deja de ser válida. La diferencia más notable entre las esferas duras y las suaves es el hecho de que las partículas blandas disipan menos energía cuando están en contacto con muchas otras de su tipo. A continuación se discutirá más sobre el método de esfera suave.

### Método de esfera suave

Con este tipo de metodología se modela el contacto entre esferas, suponiendo un traslape entre éstas, como ya se explicó anteriormente. Los traslapes entre las partículas y sus velocidades relativas en estas direcciones son evaluadas y luego relacionadas a las fuerzas a través de un modelo adecuado. Por simplicidad se consideran dos partículas  $i$  y  $j$  en contacto, como en la Figura 1.3. Si  $\mathbf{n}$  se considera el vector unidad a lo largo de la línea que une a los centros de masa de las partículas y que va dirigido de  $i$  a  $j$ . La velocidad de  $i$  relativa a  $j$  en el punto de contacto  $C$  está dado por

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j + (R_{(i)}\boldsymbol{\omega}_{(i)} + R_{(j)}\boldsymbol{\omega}_{(j)}) \times \mathbf{n}, \quad (1.24)$$



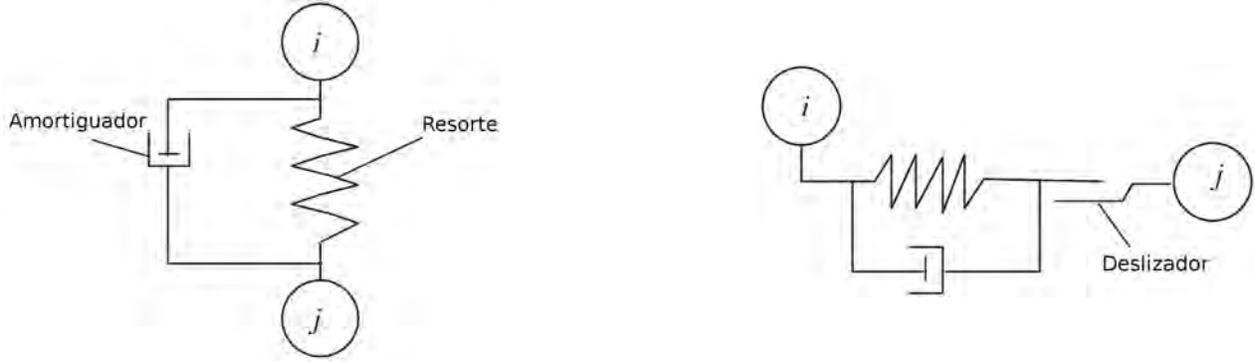


Figura 1.4: Modelos para las fuerzas de contacto entre dos partículas en la dirección normal (a la izquierda) y (a la derecha) la dirección tangencial. Tomado de Tsuji *et al.* 1992.

donde  $R_i$  es el radio de la partícula  $i$ ,  $\times$  es el producto cruz y los paréntesis alrededor de los índices  $i$  y  $j$  indican que la convención de la suma no aplica. Así la velocidad relativa en la dirección normal, *i.e.*, en la dirección  $\mathbf{n}$ , esta dada por

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (1.25)$$

donde  $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}$  denota el producto escalar o producto punto entre los vectores  $\mathbf{v}_{ij}$  y  $\mathbf{n}$ . Por lo tanto en el punto  $C$  de la Figura 1.3, la velocidad  $i$  relativa a  $j$  en la dirección tangencial esta dada por

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_n = (\mathbf{n} \times \mathbf{v}_{ij}) \times \mathbf{n}. \quad (1.26)$$

El traslape entre las partículas en la dirección normal esta dado por

$$\xi_n = R_i + R_j - (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.27)$$

donde  $\mathbf{r}_j$  es el vector posición correspondiente a la partícula  $j$ . Debido a que los sistemas de interés generalmente contienen un gran número de partículas, el tiempo de cálculo para resolver la deformación de las partículas sería muy grande. En lugar de eso se puede suponer que las fuerzas de contacto pueden ser calculadas usando modelos de resorte y amortiguador, donde las fuerzas ejercidas por el resorte y el amortiguador dependen del traslape y de la velocidad relativa, respectivamente. Por ejemplo Tsuji *et al.*[27], usa un resorte elástico y un amortiguador viscoso en paralelo, como el que se muestra en la Figura 1.4, para calcular la fuerza normal  $\mathbf{F}_n$  ejercida sobre la partícula  $i$  en la dirección de  $\mathbf{n}$  por la partícula  $j$ , de forma que

$$\mathbf{F}_n = -(k_n \xi_n \mathbf{n} + C_n \mathbf{v}_n), \quad (1.28)$$

donde  $k_n$  y  $C_n$  son la rigidez o la *constante del resorte* y el coeficiente de amortiguación en la dirección normal, respectivamente. Para dos esferas elásticas en contacto bajo la acción de fuerzas normales, *i.e.*, fuerzas dirigidas en  $\mathbf{n}$ , la solución de Hertz[28], muestra que  $k_n \propto \sqrt{\xi_n}$  y la constante de proporcionalidad puede ser expresada en términos de las propiedades elásticas y el radio equivalente de las esferas.

Para calcular la fuerza tangencial, la dirección tangencial esta definida por el vector unitario  $\mathbf{t}$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|}, \quad (1.29)$$



donde  $\mathbf{v}_t$  es la velocidad relativa en la dirección tangencial, dada por la ecuación 1.26 y  $|\mathbf{v}_t|$  denota la magnitud de  $\mathbf{v}_t$ ; si la colisión actual comienza en el tiempo  $t_0$ , el traslape en la dirección tangencial en el tiempo  $t$  esta dado por

$$\xi_t = \int_{t_0}^t |\mathbf{v}_t| dt. \quad (1.30)$$

Finalmente, usando un resorte y un amortiguador en paralelo (Figura 1.4 derecha), la fuerza tangencial  $\mathbf{F}_t$  ejercida sobre la partícula  $i$  por la partícula  $j$  en la dirección de  $\mathbf{t}$  esta dada por

$$\mathbf{F}_t = -(k_t \xi_t \mathbf{t} + C_t \mathbf{v}_t), \quad (1.31)$$

donde  $k_t$ ,  $C_t$  y  $\xi_t$  son la rigidez, el coeficiente de amortiguamiento y el traslape en la dirección tangencial, respectivamente. Para dos esferas elásticas que están presionadas en contacto por fuerzas normales y luego están sujetas a fuerzas tangenciales, la solución mostrada por Cattaneo[29] y Mindlin[30], muestra que  $k_t \xi_t$ , la fuerza tangencial producto de la deformación de las esferas depende de la fuerza normal, de las propiedades elásticas y el radio de las esferas y del coeficiente de fricción deslizando  $\mu$  entre las superficies de las esferas. Expresiones para la rigidez y el coeficiente de amortiguamiento están dados en Tsuji *et al.*, Brilliantov *et al.*[31], Cleary[32] y Zhou *et al.*[33].

La fricción entre las partículas se incorpora de acuerdo al modelo de Cundall y Strack (1979). Si la fuerza tangencial  $|\mathbf{F}_t|$  sobrepasa a  $\mu |\mathbf{F}_n|$ , donde  $\mathbf{F}_n$  es la fuerza normal y  $\mu$  es el coeficiente de fricción, la ecuación 1.31 es remplazada por

$$\mathbf{F}_t = -(\mu |\mathbf{F}_n| \mathbf{t}). \quad (1.32)$$

En la literatura existen muchos ejemplos de simulaciones numéricas distintas, donde este tipo de modelos son usados. Con la disponibilidad creciente de computadoras más poderosas y rápidas es más probable que este tipo de modelado se vuelva más popular. El día de hoy están limitadas por el número de partículas que pueden ser manejadas y por complejidades asociadas con (i) una descripción apropiada de las fuerzas de contacto para las fuerzas entre partículas y las fuerzas entre paredes y partículas y (ii) las formas de las partículas no esféricas.

### 1.2.3. Ejemplos del modelado discreto en la literatura

Muchos métodos de este tipo han sido desarrollados durante años y se pueden dividir en dos categorías. La primera categoría comprende los métodos probabilísticos, que se basan en un generador de números aleatorios para desplazar a las partículas en el dominio de simulación. Ejemplos de este tipo de métodos son mostrados en Bertrand *et al.*[8] y comprenden simulaciones numéricas de fenómenos de segregación como el de la nuez de Brasil. Un ejemplo de estos métodos consiste en desplazar las partículas de un sistema en forma escalonada y de recurrir a un procedimiento tipo caminante aleatorio para aceptar o rechazar un desplazamiento dado de acuerdo a un principio de energía definido previamente. La principal ventaja de estos métodos, también llamados de Monte-Carlo, es que son rápidos. Su mayor limitación esta unida al hecho que no permite colisiones entre partículas, lo que sin duda juega un papel muy importante en dichos sistemas. En la práctica, se ha utilizado principalmente para simular la sedimentación de las partículas de todas formas y tamaños. En particular, ha demostrado su eficacia para proporcionar aproximaciones de la porosidad de empaquetamientos polidispersos con una tendencia a sobrestimar su valor, un fenómeno que se debe al hecho de que las colisiones entre las partículas no se contabilizan[8]. El segundo tipo de modelos cuenta con métodos



deterministas, como el método de Dinámica de Stokes (o simplemente Stokesian Dynamics, SD) de Brady y Bossis (1985) y el DEM, introducido por primera vez en Cundall y Strack (1979). SD no es más que un método de gran alcance para el cálculo de las trayectorias de partículas que interactúan en un fluido de suspensión. Se basa en la ecuación de Langevin de N-cuerpos de movimiento:

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = F_{total}. \quad (1.33)$$

En esta ecuación,  $M$  es una matriz que contiene la masa de las partículas;  $\vec{v}$  es un vector que representa la velocidad de las partículas que interactúan; y  $F_{total}$  es una fuerza neta que puede contener términos hidrodinámicos, así como términos no hidrodinámicos para tener en cuenta a otras interacciones, como pueden ser las fuerzas coloidales y el movimiento browniano. El principal inconveniente de este método reside en el hecho de que requiere la solución de un sistema completo de la matriz, que restringe en el orden de 1000 el tamaño de las suspensiones que pueden ser estudiadas[8]. Ambos modelos (esfera dura y suave) suelen ser usados tanto para desarrollar teoría, como simulaciones numéricas.

### 1.3. Segregación

Es bien sabido que cuando diferentes partículas son puestas en movimiento relativo (sometidas a corte, flujo o vibración), no se mezclan y tienen la tendencia a reagruparse en algunas áreas[2]. Esta segregación aparece tan pronto como hay diferencias en el tamaño[34, 35, 36], densidad[37], forma, rugosidad[38] o ángulo de reposo[39, 40]. Por ejemplo, en una mezcla de cuentas grandes y pequeñas del mismo material, las cuentas grandes comúnmente son encontradas en la superficie de la cama después de que el material granular se ha movido o vibrado o en la periferia si el arreglo es un tambor giratorio[41]. Para partículas de la misma composición la segregación de partículas grandes y pequeñas ha sido investigada en numerosos estudios y generalmente las partículas grandes se encuentran en la superficie de un medio compuesto de partículas pequeñas (al contrario de las pequeñas que suelen encontrarse al fondo de un grupo de partículas grandes). En ambos casos las cuentas grandes o pequeñas son expulsadas fuera de la cama principal, ya sea en la superficie o en el fondo. Y la segregación parece ser independiente del volumen relativo de la fracción en volumen de las 2 especies en la mezcla[2]. Esta segregación ha sido explicada por efectos geométricos; mientras las partículas fluyen juntas es más probable que una partícula pequeña encuentre un hueco lo suficientemente grande en el cual caer, a que una partícula grande lo haga. Las partículas pequeñas se mueven hacia abajo y en consecuencia las partículas grandes van hacia arriba. Este proceso ha sido llamado *tamizado dinámico* (dynamic percolation). Pero esta interpretación geométrica no toma en cuenta el hecho de que algunas partículas tal vez empujen a sus vecinos para crear algo de espacio y moverse hacia abajo[42]. Esta suposición supone que la capa de cuentas pequeñas es lo suficientemente fuerte para soportar el peso de una cuenta grande y que las cuentas grandes no pueden apartar a las cuentas de la cama para ir hacia el interior. Además se ha sostenido que las partículas que giran en la superficie ven a la rugosidad de pequeña escala de la cama de las partículas pequeñas, lo que puede llevar a un movimiento relativo adicional. Esto puede ser observado en la formación de pilas de material granular[43, 44, 45, 46], donde las partículas grandes giran sobre los taludes y se acumulan en la base de la pila o en un tambor giratorio medio lleno[35], donde las partículas grandes van más allá de las pequeñas y se detienen en la periferia del cilindro. De la misma manera partículas pequeñas están atrapadas en la rugosidad de una cama compuesta por partículas grandes, lo que lleva a un núcleo



central cilíndrico dentro de una pila de material granular[47] o un núcleo central de partículas pequeñas en un tambor giratorio[36].

Existe una gran variedad de experimentos en los que se puede estudiar el fenómeno de segregación, pero sólo algunos de ellos son los más recurrentes en la literatura. Anteriormente se han mencionado a los 3 arreglos más comunes en los que se ha observado segregación en materia granular. Estos son:

- Planos inclinados
- Tambores giratorios
- Formación de pilas

De forma experimental, la segregación en estos casos ha sido estudiada por Thomas[2] y la siguiente sección se presentan algunos de sus resultados.

### 1.3.1. Tambores girados

Considérese un cilindro horizontal parcialmente lleno de una mezcla de arena fina y gruesa, como se muestra en la Figura 1.5a. Sorprendentemente, la rotación del cilindro causa la formación de bandas en la dirección axial (Figuras 1.5b y 1.5c). Las bandas claras y oscuras contienen más arena gruesa y arena fina, respectivamente. Este fenómeno de segregación axial fue reportado primero por Oyama[48]. Los experimentos sugieren que la segregación radial o estratificación de la mezcla en la dirección radial es un precursor de la segregación axial[49, 50, 51]. Donald y Roseman[49], sugirieron el siguiente mecanismo para la segregación radial. En cualquier sección transversal del cilindro, hay una capa delgada de corte adyacente a la superficie libre de la cama de material granular. Por debajo de esta capa, el movimiento del material se puede aproximar por la rotación de cuerpo rígido[52]. En la capa de corte, las partículas más pequeñas o más pesadas se pueden filtrar hacia abajo a través de los huecos entre las partículas más grandes o más ligeras, lo que lleva a la formación de un núcleo del primer tipo de partículas. Los experimentos de Thomas[2] muestran que la segregación radial no siempre ocurre. En un experimento con partículas que tienen la misma relación de tamaños, se encontró que las partículas gruesas se encontraron uniformemente distribuidas a lo largo de la sección transversal de la cama. Si la segregación radial ocurre, la rotación del cilindro puede ocasionar que este patrón se vuelva inestable, llevando a la formación de bandas en la dirección axial. Das Gupta *et al.*[50] sugirieron que la inclinación de la superficie libre de la cama giratoria debe diferir para partículas finas y gruesas si las bandas van a formarse. Sobretodo, hace falta una simple explicación cualitativa para la segregación axial. Los anteriores ejemplos proveen chispazos de la amplia variedad de comportamientos del flujo que se pueden encontrar en la práctica. En la Figura 1.6 se muestra un ejemplo a color de bandas de segregación en tambores girados. En éstas, las bandas de segregación se observan de manera más clara, e incluso que después de tiempos largos (2 meses) las partículas se separan por completo.

Un arreglo similar fue usado por Thomas[41], aquí se buscó estudiar la segregación radial y por ello el disco giratorio es delgado, ya que buscaba emular un arreglo 2D. En la Figura 1.7 se muestra una fotografía de este arreglo experimental.

En el trabajo de Thomas (2004), se midió la posición radial media de los intrusos. Los resultados se presentan en la Figura 1.8, donde el eje horizontal es la razón de densidades y el vertical representa a la



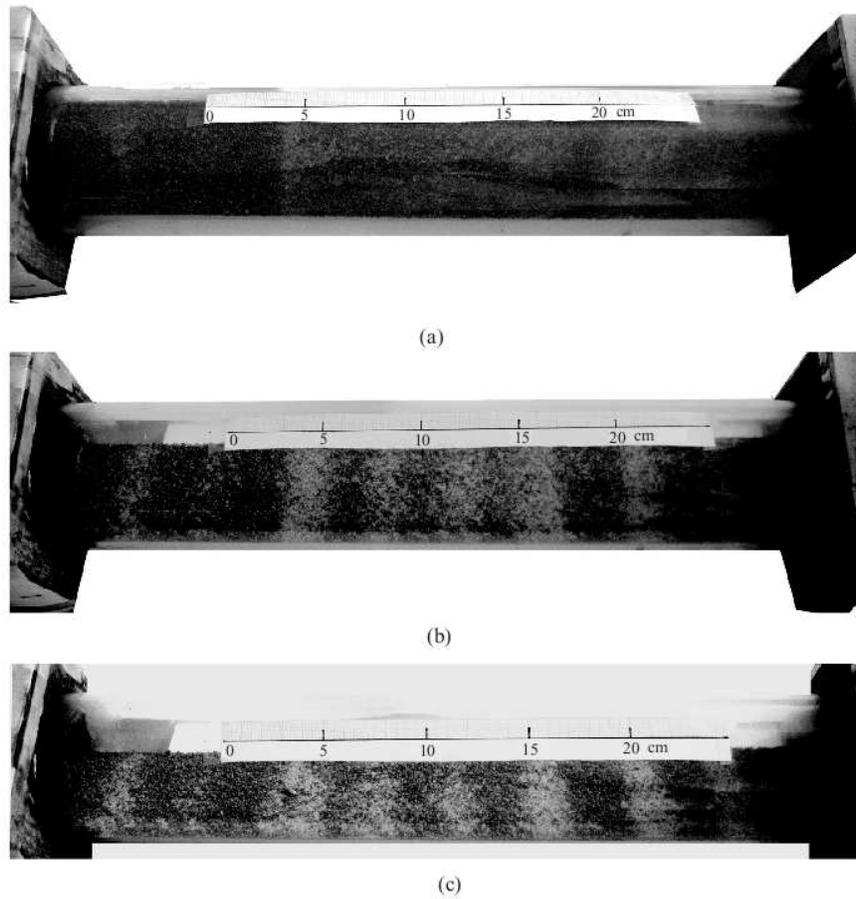


Figura 1.5: Formación de bandas en un cilindro horizontal de vidrio, con un diámetro interno de 75mm y longitud de 550mm. El cilindro está parcialmente lleno de arena fina (diámetro de partícula entre 1.0 y 1.6  $mm$ , fracción de peso = 0.58 ) y arena gruesa (diámetro de partícula entre 0.2 y 0.5  $mm$ ), de tal manera que la masa total de arena es 0.885  $kg$ . Las fotografías fueron tomadas después de que el cilindro fue rotado a mano al rededor de su eje después de  $n$  revoluciones en un tiempo  $t_r$  y luego detenida. (a)  $n = 89$ ,  $t_r = 74s$ ; (b)  $n = 93$ ,  $t_r = 44s$ ; (c)  $n = 52$ ,  $t_r = 33s$ , la velocidad angular del cilindro estuvo aproximadamente en el rango de  $6 - 13rad s^{-1}$  (1 a 2 revoluciones por segundo). Este experimento fue montado por Mr. P. T. Raghuram. Tomado de K. K. Rao *et al.*[3].

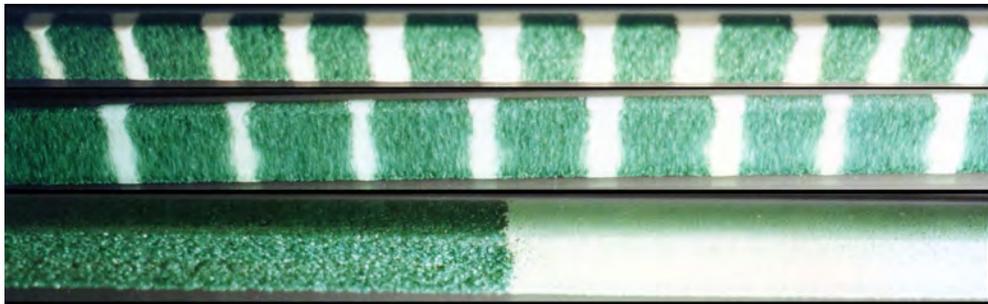


Figura 1.6: Formación de bandas en un cilindro horizontal de vidrio a color. Una serie de fotografías que muestran más claramente la formación de bandas axiales en cilindros girados. Las partículas verdes son de mayor tamaño que las blancas. Después de tiempos largos (2 meses) las partículas se separan por completo, como se muestra en la imagen inferior. Cortesía de la M. en C. Rocío Chicharro Serra, Laboratorio de fluidos, Facultad de ciencias, UNAM.

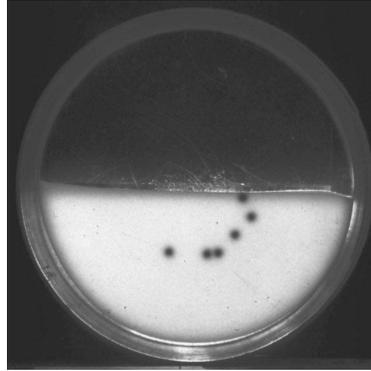


Figura 1.7: Arreglo experimental de Thomas[41]. Un disco giratorio delgado medio lleno de partículas. Las partículas claras son más pequeñas que las partículas oscuras. El anillo de segregación formado por partículas oscuras de 1.5 mm de diámetro (vidrio) en una cama de 90 μm de partículas de vidrio pequeñas en un tambor cuasi 2D. La localización radial de los trazadores está definida precisamente (nótese que la cuenta superior continúa en la capa fluida). La posición es muy sensible al valor de la razón de tamaños y de densidades. La variación del radio del anillo es de gran ayuda para estudiar el efecto geométrico de la segregación al hacer una equivalencia con la variación de la posición inducida por un cambio de densidad.

posición radial adimensional. Se presentan varias curvas que muestran cambios en la razón de tamaños. Los puntos del eje vertical cercanos a 1 son los casos en los que se observó segregación “normal”, donde las partículas grandes están por arriba de la cama de partículas pequeñas. Y los puntos del eje vertical cercanos a cero son segregación “inversa”. En éstos, el intruso más grande se mueve hacia abajo de la cama de partículas. Estos resultados son importantes porque presentan un estudio de segregación en un arreglo cuasi-bidimensional, por lo que en principio son comparables con los resultados de este trabajo.

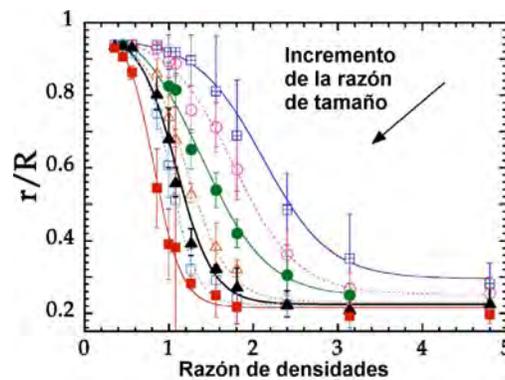


Figura 1.8: Resultado tomado de Thomas[41]. Posiciones radiales medias de los trazadores para distintas razones de tamaños: (⊞) 2 (y algunos cocientes comprendidos entre 1.98 - 2.11); (○) 3 (2.94 - 3.175); (●) 4.23(4 - 4.47); (△) 6 (6 - 6.67); (▲) 7.5 (7.5 - 8.33); (□) 10 (9.92-10.58); (■) 20 (19.85 - 21.17) (datos promediados cuando hay muchos experimentos.)

### 1.3.2. Vertederos

Un vertedero es usado para transportar material de flujo por gravedad de un punto a otro de menor nivel. Un esquema de esto se muestra en la Figura 1.9a). Algunas características del flujo en vertederos pueden ser ilustradas considerando los experimentos de Johnson *et al.*[12] (1990). El vertedero está conectado a un suministro que contiene partículas de vidrio por una cámara con válvulas en cada extremo. Al ajustar las válvulas apropiadamente, es posible regular el caudal de partículas y permitir dos tipos de condiciones de entrada en el vertedero. Éstas son llamadas (i) la condición de entrada densa y (ii) la condición de entrada libre. En el caso (i), el material entra al vertedero como una cama densa que se mueve lentamente, mientras



en el caso (ii) este entra como una *nube* de baja densidad de partículas rebotando. En regiones que no son cercanas a los extremos del vertedero, se ha encontrado que las cantidades no varían significativamente en la dirección del flujo, *i.e.*, el flujo esta completamente desarrollado. Esto ocurre para un rango de inclinaciones del vertedero.

Para flujos completamente desarrollados existe una discusión amplia en Rao[3], donde la Figura 1.9b muestra la variación del caudal adimensional por unidad de anchura  $\dot{m}^*$  con el estancamiento adimensional de masa  $m_T^*$ . Dicho estancamiento es la masa de material contenida entre dos planos  $T$  normales a la dirección de flujo (véanse las líneas quebradas de la Figura 1.9a), divididas por el área de la base. Para valores bajos del caudal, se ha encontrado que el estancamiento es independiente de la condición de entrada. Mientras el caudal se incrementa desde el punto 1, la densidad de la capa fluida se incrementa. Para caudales por arriba del punto 3, el estancamiento para la entrada libre es mucho menor que el de la entrada densa y los perfiles de velocidad también son cualitativamente diferentes en ambos casos. La flecha horizontal en la gráfica de  $\dot{m}^* - m_T^*$  en la Figura 1.9b indica una abrupta transición desde la rama de la entrada libre hacia la entrada densa mientras el caudal se incrementa. Esto pasa para ciertos valores de inclinación  $\theta$ . Considerando los perfiles de velocidad, se ha observado que la velocidad de deslizamiento en la base del vertedero puede ser bastante grande en algunos casos, en contraste con el comportamiento de líquidos. Además para entradas de flujo densas (ver los puntos 4' y 5' en la Figura 1.9b), sólo una parte del material por arriba de la base se cizalla y el resto aparenta moverse como un tapón. Así los flujos en vertederos revelan muchas características interesantes, tales como múltiples estados estacionarios, velocidad de deslizamiento en paredes sólidas y la ocurrencia de muchos tipos de perfiles de densidad y velocidad.

En el estudio de Thomas[2] uno de los experimentos consistió en estudiar la segregación en un vertedero. Aquí, dos tipos de patrones de segregación fueron encontrados dependiendo solamente de la razón de tamaños: (i) las partículas grandes cubren la superficie; y (ii) las partículas grandes no están en la superficie, sino dentro de la cama compuesta por partículas pequeñas: hay una *segregación inversa*. El caso (i) aparece para  $d_2/d_1 < 4$ : partículas pequeñas bajan y las partículas grandes suben al fluir. En este caso las partículas grandes cubren la superficie. Trabajando con un 90% de partículas grandes se llega a que las partículas finas forman una capa en el fondo de las secciones cruzadas. Para flujos que contienen el 10% de partículas grandes, el depósito exhibe una capa superficial que está compuesta de partículas grandes. Para las razones de tamaños más pequeñas (pero aún por encima de 1), la segregación es muy eficiente y ni una sola partícula se encontró por debajo de la capa superficial. Para razones de tamaño mayores (aún por debajo de 4), algunas partículas grandes se encontraron dentro de la cama y la gran mayoría de ellas en la superficie.

El caso (ii) es aún más sorprendente. Éste aparece para grandes razones de tamaños ( $d_2/d_1 > 4$ ). En este caso no hay partículas grandes en la superficie de la cama. Las secciones transversales en el depósito muestran que las partículas grandes están distribuidas de forma aleatoria en todo el espesor, excepto en el área cerca de la superficie. Esto fue llamado por Thomas segregación inversa.

### 1.3.3. Formación de pilas

Considérese una pila cónica de material granular descansando sobre una superficie horizontal. Muchos trabajos han medido el esfuerzo normal  $N$  ejercido por el material sobre la base de la pila como una función radial de la distancia  $r$  medida desde el centro de la base. A continuación se discutirán los resultados de Vanel *et al.*[53] para pilas de arena. La pila fue construida al verter arena de un embudo sobre una placa



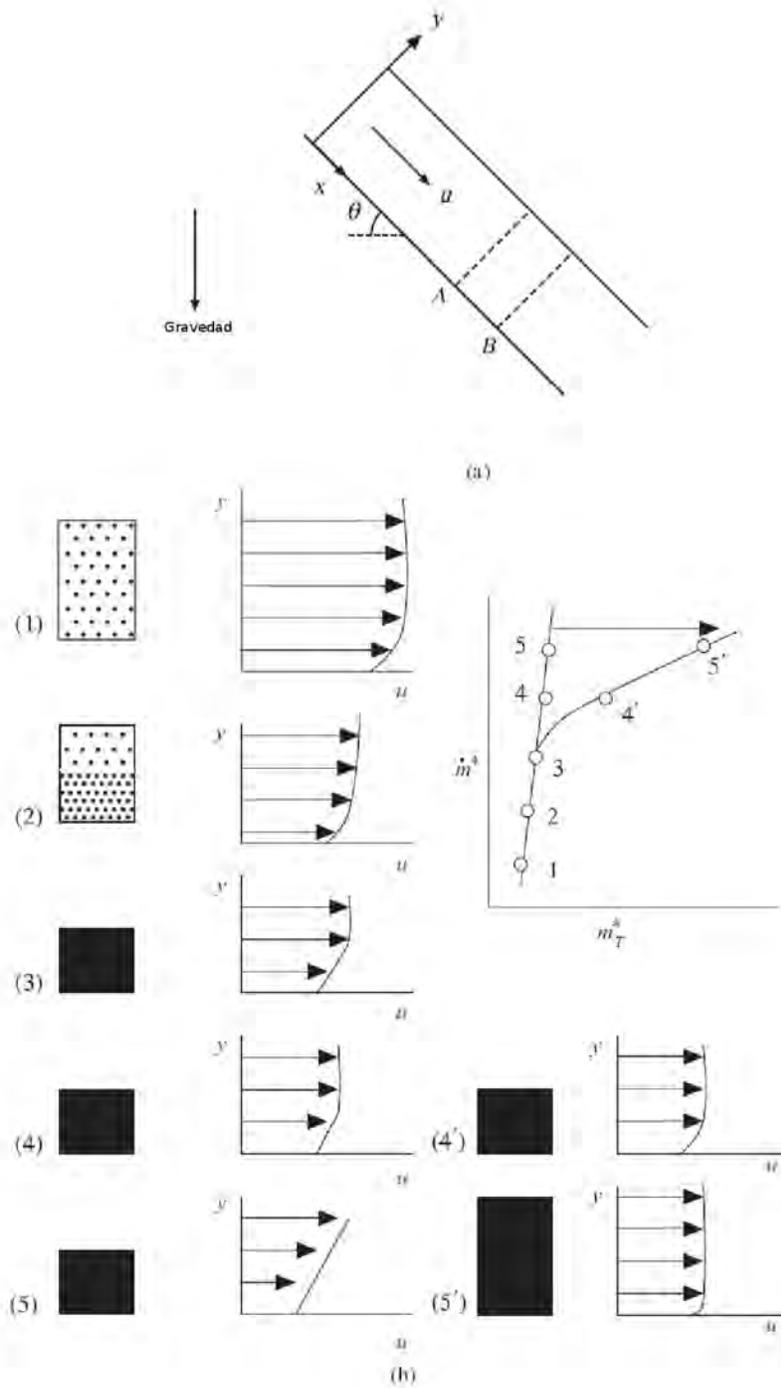


Figura 1.9: (a) Flujo descendente por un vertedero. (b) Variación del caudal de masa adimensional por unidad de anchura ( $\dot{m}^*$ ) con el estancamiento de masa adimensional  $m_T^*$  para el flujo de cuentas de vidrio[12]. El caudal está escalado por  $\rho_P d_P \sqrt{g d_P}$  y el estancamiento por  $\rho_P d_P$  donde  $\rho_P$  es la densidad de partícula,  $d_P$  es el diámetro de partícula y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Puntos 4 y 5 corresponden a la entrada de flujo libre y puntos 4' y 5' a la condición de entrada compacta. Para puntos del 1 al 3, el estancamiento es independiente de la condición de entrada. Los perfiles de la componente  $x$  de la velocidad  $u$  también se muestran. Los cuadros sombreados indican la distribución de la fracción de sólidos en la dirección  $y$ . Los diámetros de partícula son  $1 \pm 0.1mm$ . Figura tomada de Rao[3].



base, mostrada en la Figura 1.10a, con el embudo siendo movido hacia arriba, de tal manera que su punta esta siempre un poco por encima del vértice de la pila. El perfil de esfuerzos muestra un mínimo en el centro de la base (Figura 1.10b), contrario a la expectativa intuitiva que el esfuerzo normal debería ser máximo en esta zona. Esto es llamado esfuerzo por inmersión y varios modelos han sido propuestos para explicar tales perfiles[54, 55]. Debe ser notado que el esfuerzo por inmersión no es una característica universal. Por ejemplo, cuando una pila fue construida al verterse material a través de un tamiz que fue levantado lentamente, como se muestra en la Figura 1.11a, el esfuerzo por inmersión no fue observado (Figura 1.11b). De forma similar en los experimentos de Brockbank, *et al.*[56], el esfuerzo por inmersión ocurrió, para pequeñas cuentas de vidrio (diámetro medio =  $0.18mm$ , desviación estándar =  $0.02mm$ ), pero para cuentas de vidrio más grandes (diámetro medio =  $0.56mm$ , desviación estándar =  $0.05$ ). Dado un material granular y un procedimiento para la formación de la pila, todavía no es posible predecir si el esfuerzo por inmersión se va a producir. Del mismo modo, no está disponible una explicación física simple para la inmersión.



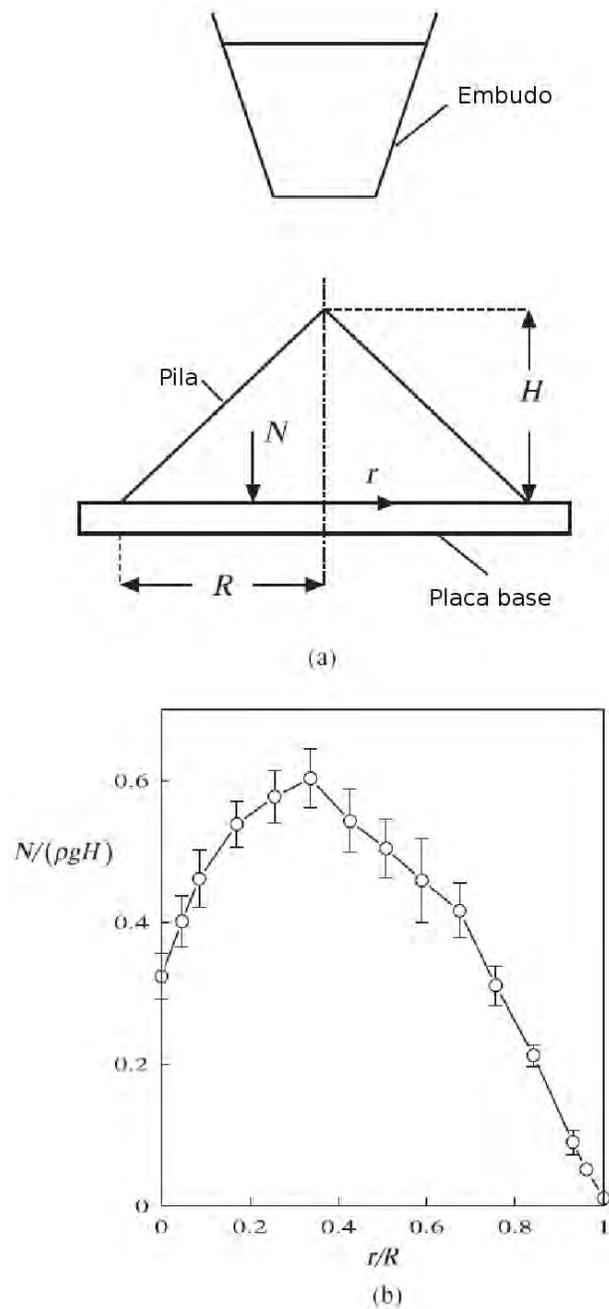


Figura 1.10: (a) Una pila formada al verter material de un embudo en una placa circular de metal. El embudo es levantado de tal manera que su punta siempre está ligeramente por encima del vértice de la pila. (b) Perfil del esfuerzo normal  $N$  ejercido por la pila. Los símbolos representan los datos de Vanel *et al.*[53], para arena con las líneas verticales representando la desviación estándar de muchos (típicamente 10 - 12) experimentos independientes. La curva formada por segmentos de rectas está dibujada para guiar al ojo. Aquí  $\rho$  es la densidad y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Las longitudes  $H$ ,  $R$  y  $r$  son medidas como se muestra en (a). Tomado de Rao *et al.*[3].



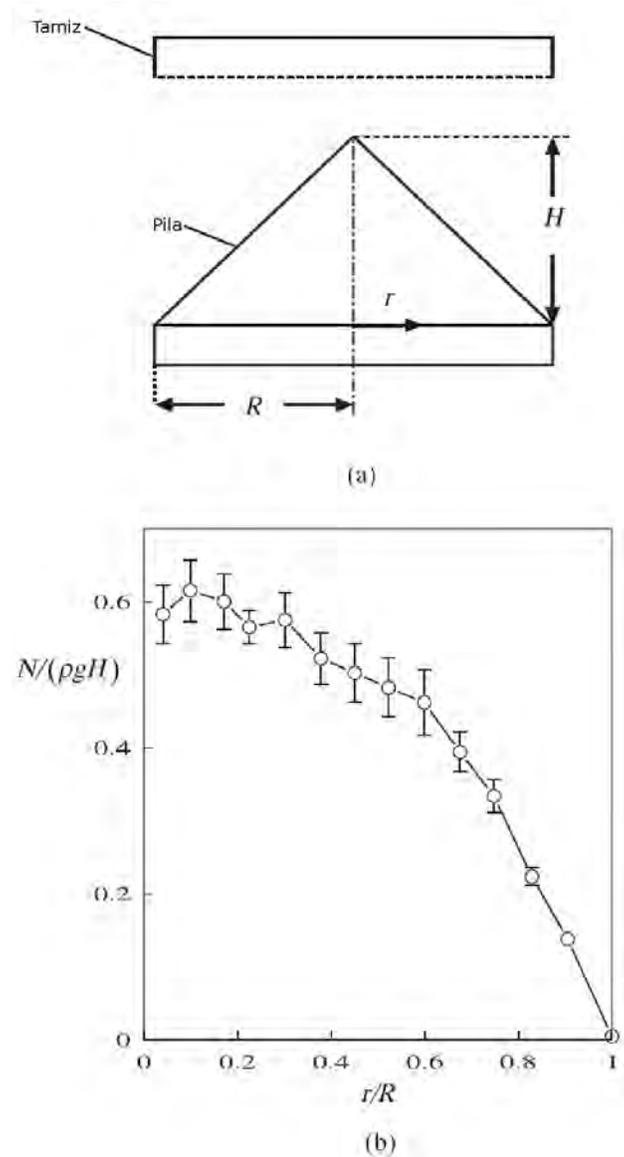


Figura 1.11: (a) Una pila formada al verter material de un tamiz en una placa circular de metal. El tamiz es levantado de tal manera que su punta siempre está ligeramente por encima del vértice de la pila. (b) Perfil del esfuerzo normal  $N$  ejercido por la pila. Los símbolos representan los datos de Vanel *et al.*[53], para arena con las líneas verticales representando la desviación estándar de muchos (típicamente 10 - 12) experimentos independientes. La curva formada por segmentos de rectas está dibujada para guiar al ojo. Aquí  $\rho$  es la densidad y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Las longitudes  $H$ ,  $R$  y  $r$  son medidas como se muestra en (a). Tomado de Rao *et al.*[3].

### 1.3.4. Camas vibradas

Los experimentos más conocidos de segregación se han realizado en camas vibradas. El fenómeno de segregación por tamaño en el caso de un sistema granular vibrado que contiene una partícula más grande (el intruso), que bajo las condiciones apropiadas, se eleva a la superficie. Este fenómeno es conocido como el efecto de la *nuez de Brasil*[57], término acuñado por Rosato *et al.*[58]. Nuevamente existe una gran variedad de estudios que hablan de este tema, tanto experimentales como simulaciones numéricas. En estos trabajos, los autores atribuyen esta segregación por tamaño a una variedad de mecanismos tales como el llenado de huecos, formación de arcos, percolación, condensación, flotación, inercia, convección y competencia entre flotación y fuerzas geométricas[57]. En el estudio de Schröter *et al.*[59], los autores tabulan siete posibles mecanismos para el caso cuando ambos tipos de granos tienen la misma masa.

Los mecanismos anteriores son válidos el menos para el caso cuando no hay fluido intersticial, de otra forma otros mecanismos aparecen[60]. Todos estos procesos están dominados por la dinámica individual de partícula y son más efectivos separando partículas con grandes diferencias de tamaño (*i.e. razones de tamaño*  $\gg 1$ ). Sin embargo aquí se está lidiando con segregación inducida por agitación, que es el proceso de segregación dominante durante la manipulación de muchas operaciones y procesos con materiales granulares. Esto ocasiona que las partículas grandes se eleven a través de la cama agitada de partículas pequeñas, mientras que las partículas pequeñas caen a través de la cama agitada de partículas más grandes. Para este mecanismo, grandes razones de tamaños no son primordiales y una de sus principales aplicaciones concierne de hecho, a la separación de partículas con tamaños similares[5]. Esta segregación es generada mayormente por una dinámica de contacto colectiva y a menudo, la intensidad de excitación juega el rol de un parámetro de control apropiado. Ilustraciones de este proceso son muy abundantes en la literatura.





## CAPÍTULO

# 2

## Simulación Numérica

En esta tesis se estudiará de forma numérica la segregación en un plano inclinado a  $21^\circ$ . Para ello se usará el método de elemento discreto (DEM) propuesto por Cundall[23], donde se modela a cada partícula como a una esfera suave. Esta metodología se describió en Capítulo 1. Los resultados se obtuvieron usando el programa de Wassgren[61], el cual consiste en un código en C que simula haciendo uso de técnicas de elemento discreto bidimensional. Dicho código es capaz de modelar partículas y paredes al variar las propiedades (*e.g.* diámetros, densidades, propiedades de contacto). Las paredes en la simulación consisten en segmentos de línea que pueden ser del tipo sólido o periódico. Además, una característica importante es que dicho paquete es software libre, por lo que su código es abierto y es posible modificarlo y redistribuirlo bajo los términos de la licencia GPL. Este programa simula flujos granulares bidimensionales y consiste en tres programas que se usan en secuencia. Los nombres de estos programas así como los archivos de entrada y salida de cada uno se muestran en la Tabla 2.1.

El primer programa, llamado `setup`, toma los valores guardados en el archivo `setup.in` y los convierte a un formato que el segundo programa (llamado `setup.out`) puede leer. El usuario modifica el archivo `setup.in` para diseñar el experimento que desea, definiendo las dimensiones y la localización de las paredes del experimento, el número de partículas, las propiedades de ambas y las propiedades de contacto entre ellas también se definen aquí. Las propiedades definidas son el coeficiente de restitución ( $e$ ), el coeficiente de fricción ( $\mu$ ), la razón entre propiedades normales y tangenciales, etc. El archivo de salida de `setup`, se renombra y se usa como archivo de entrada del segundo programa. El segundo programa (`DEsim2D_init`) toma los datos guardados en `DEsim2D_init.in` e inicia la simulación, colocando las partículas dentro de las paredes definidas. Este programa guarda en su primer archivo de salida (`.out`) los valores de velocidad y posición en cada instante de tiempo, por lo que el archivo de salida incrementa su tamaño cada vez que un nuevo estado se guarda. Pasado el tiempo de simulación definido, la simulación se detiene y escribe el segundo archivo de salida (`DEsim2D_final_state`). El nombre del primer archivo de salida se elige al iniciar el programa y en este se guardan los valores de radio, masa, velocidad y posición en cada instante de tiempo.

Tabla 2.1: Nombre de los programas del método de Wassgren. También se muestran los archivos de entrada y salida de cada uno.

Nombre del programa	Archivo de entrada	Archivo(s) de salida
setup	setup.in	setup.out
DEsim2D_init	DEsim2D_init.in	(nombre elegido).out, DEsim2D.final_state
DEsim2D	Desim2D.in	(nombre elegido).out, DEsim2D.final_state, (Fuerzas).out

El segundo archivo de salida guarda el estado final del sistema, o sea las posiciones y las velocidades del ultimo instante de tiempo, las masas y los radios. El nombre de este archivo no se elige y siempre es el mismo (DEsim2D.final\_state). Finalmente el archivo de salida que contiene al estado final del sistema se renombra y se modifica para poder iniciar la simulación. Estas modificaciones pueden ser el retirar alguna pared, el cambiar sus propiedades para hacerla periódica o modificar la dirección de la gravedad o alguno de los tiempos. El archivo DEsim2D.final\_state se debe renombrar para convertirse en el archivo de entrada del programa DEsim2D y también debe de modificarse para asignar el tiempo total que se va a simular y otras modificaciones que se quieran. Igual que DEsim2D\_init.in, Desim2D.in toma los valores guardados en el archivo de entrada y escribe dos archivos de salida, uno que aumenta de tamaño con cada paso de tiempo y otro que se escribe al terminar la simulación. En este programa se tiene una opción alternativa, que consiste en poner un segundo argumento en la línea de comando al iniciar el programa. Este segundo argumento es un segundo nombre para un tercer archivo de salida, el cual contiene a todas las fuerzas entre partículas del estado final.

El arreglo experimental consiste en una caja rectangular, definida por cuatro paredes, dos horizontales y dos verticales. Dentro de ella se colocan partículas con posición y momentum aleatorio. Al activarse las condiciones de gravedad y de contacto, las partículas se sedimentan en la base del arreglo como se muestra en la Figura 2.1.

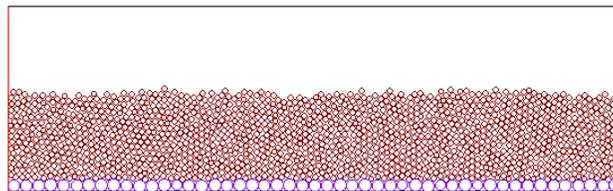


Figura 2.1: Arreglo numérico al inicio de la simulación. Se muestran un conjunto de 1500 partículas depositadas por la influencia de la gravedad. La gravedad tiene dirección vertical.

El estado final de las partículas se guarda y a éste se le modifica el ángulo de la gravedad, que originalmente está en dirección vertical, con el fin de emular la inclinación del plano. Las propiedades de las paredes verticales se modifican para volverlas periódicas, de tal manera que estén “conectadas” una con la



otra. Con estas modificaciones se ejecuta el programa de simulación principal (DEsim2D), que guarda las masas, radios, posiciones y velocidades de las partículas en distintos instantes de tiempo.

Se hicieron dos tipos de experimentos. El primero se hizo para caracterizar el comportamiento de las avalanchas granulares. Esto es, saber el rango de ángulos de inclinación en el que el material granular no fluye, en el que existe una avalancha en estado estacionario y en el que la avalancha se acelera continuamente. El estudio de avalanchas se realiza para poder usar los resultados del ángulo de inclinación en el estudio de segregación. En el segundo tipo de experimentos se hizo el estudio de segregación de un sólo intruso en un flujo estacionario. Para ello se variaron parámetros como el diámetro y densidad del intruso. A continuación se explican las condiciones en las que se realizaron ambos tipos de experimentos, empezando por los experimentos con avalanchas.

## 2.1. Avalanchas

Como se mencionó anteriormente, en nuestro estudio de avalanchas se desea conocer el rango de ángulos de inclinación en los que se observa un flujo estacionario de materia granular. Para simular al material granular se usaron algunas de las propiedades de partículas de vidrio, tales como su densidad y módulo de Poisson. En este caso el número de partículas se mantuvo constante (1500). Es importante mencionar que el diámetro de las partículas esta distribuido alrededor de un valor medio. Esto se hizo con el fin de evitar la formación de cristales que le dieran al material una resistencia adicional a fluir, debida a la anisotropía del sistema. Otro factor importante es el uso de una capa de partículas de mayor tamaño en la base del contenedor, mostradas en la Figura 2.1. Esta cama de partículas es estática, lo que significa que estas partículas no cambian su posición por la interacción con las partículas de flujo. Su función es la de provocar fluctuaciones de velocidad en la dirección vertical para favorecer la aparición de huecos y así favorecer la segregación. La importancia del uso de esta cama se discute en el Capítulo 3. A continuación, en la Tabla 2.2 se muestra una lista de los parámetros que se usaron en estas simulaciones.

Los parámetros mencionados en la Tabla 2.2 se mantuvieron constantes para todos los casos estudiados de avalanchas. La gravedad que se usó es el valor típico al nivel del mar. El diámetro medio de las partículas en la cama inferior fue del doble del de las partículas del material. Este diámetro de la cama de partículas se eligió similar al tamaño del resto de las partículas y el coeficiente de fricción de las partículas se eligió dentro de un rango marcado por diferentes estudios, como un caso de estudio. Además, para el estudio de avalanchas se variaron ciertos parámetros, tales como el coeficiente de fricción y los ángulos de inclinación. Los parámetros a variar se muestran en la Tabla 2.3; En ésta se observa que se eligieron dos coeficientes de fricción para hacer el estudio y en cada caso se observó el resultado de cambiar el ángulo de inclinación de la gravedad. Los resultados de los diferentes ángulos se pueden clasificar en tres casos, que son:

- **No hay flujo.** En estos casos el ángulo de inclinación no es capaz de provocar un gradiente de energía potencial lo suficientemente grande como para iniciar y/o mantener un flujo constante.
- **Flujo que alcanza el estado estacionario.** En estos casos el flujo se inicia y se mantiene hasta que después de cierto tiempo transcurrido el flujo alcanza un valor de energía cinética promedio.
- **Flujo que se acelera continuamente.** En estos casos el flujo continúa aumentando su energía cinética. Para estos casos el código numérico se vuelve inestable después de cierto tiempo.



Tabla 2.2: Parámetros físicos constantes de las simulaciones para el estudio en planos inclinados.

Variable	Valor(es)
Número de partículas ( $N$ )	1500
Densidad ( $\rho$ )	$2500 \text{ kg m}^{-3}$
Diámetro de partícula ( $d_1$ )	$1 \text{ mm}$
Módulo elástico ( $E$ )	$9 \times 10^9 \text{ MPa}$
Módulo de Poisson ( $\nu$ )	0.244
Coefficiente de restitución ( $e$ )	0.5
Diámetro cama de partículas ( $d_3$ )	$2 \text{ mm}$
(estáticas y adheridas a la base)	
Desviación estándar de la distribución de partículas (de los tres tipos)	$0.1 \text{ mm}$
Gravedad	$9.81 \text{ m s}^{-1}$
Razón entre los coeficientes elásticos de los resortes normal y tangencial de cada partícula	1

Tabla 2.3: Variables físicas que se cambiaron para el estudio de avalanchas.

Variable	Valor(es)
Coefficientes de fricción ( $\mu$ )	0.1, 0.2
Ángulos de inclinación ( $\theta$ )	$\mu = 0.1; 10 - 25^\circ$ $\mu = 0.2; 10 - 28^\circ$



Los casos mencionados anteriormente son relevantes porque para el estudio de segregación es importante tener un flujo estacionario y sin inestabilidades numéricas. Ambas condiciones se pueden satisfacer si se elige el rango de ángulos apropiado y para ello se propone el estudio numérico de los casos mostrados en la Tabla 2.3. Una vez que se tienen estos resultados es posible realizar el estudio centrado de segregación.

## 2.2. Segregación

Para el estudio de segregación, el inicio de la simulación es similar al del caso de las avalanchas; la única diferencia es que el intruso (tamaño mayor y diferente densidad), se coloca por encima del resto de partículas al generarse las partículas en posición y velocidades aleatorias y así tiene una probabilidad alta de asentarse por encima de las demás. De manera que, al inicio de la simulación el intruso está en una posición vertical por encima de las demás. Esto deja de ser cierto para los intrusos con masas muy grandes relativas a las demás. Como se mencionó anteriormente, el estudio de segregación se hizo usando las condiciones anteriores, esto es con el mismo número de partículas, mismas propiedades de las partículas y mismas características físicas. Estas condiciones se muestran en la Tabla 2.4.

Se puede observar en la Tabla 2.4, que en la parte del estudio de segregación se mantendrá a un ángulo de inclinación constante ( $21^\circ$ ). También es necesario mencionar que el estudio de segregación se hizo agregando un sólo intruso al flujo. Este intruso tiene características diferentes a las del resto de partículas del material, *i.e.* diferente diámetro y densidad. El estudio de segregación se hizo usando un sólo coeficiente de fricción ( $\mu = 0.1$ ). En esta parte del trabajo se cambió el diámetro de la cama de partículas, la densidad y el diámetro medio del intruso. La Tabla 2.5 muestra como se exploró el espacio paramétrico. También es importante mencionar que para el caso de segregación se mantuvo el área total de las partículas constante, a manera de tener un área de control. El área de control es un análogo del volumen de control, debido a que en el caso 2D es el equivalente del volumen en el caso 3D. Para mantener constante el área total con un intruso de distinto tamaño se retiró el número de partículas equivalente al área del intruso. El número de partículas para cada caso se calculó de la siguiente manera

$$N_1 = 1500 - S^2, \quad (2.1)$$

donde  $N_1$  es el número de partículas de diámetro  $d_2$  en la simulación y  $S$  es la relación de tamaños. En la Tabla 2.6 se muestran el número de partículas como función del diámetro del intruso en los casos estudiados.



Tabla 2.4: Parámetros físicos constantes de las simulaciones en el estudio de segregación.

Variable	Valor(es)
Número de partículas ( $N$ )	1500
Densidad ( $\rho_1$ )	$2500 \text{ kg m}^{-3}$
Diámetro de partícula ( $d_1$ )	$1 \text{ mm}$
Módulo elástico ( $E$ )	$9 \times 10^9 \text{ MPa}$
Módulo de Poisson ( $\nu$ )	$1 \text{ mm}$
Coefficiente de fricción ( $\mu$ )	0.1
Coefficiente de restitución ( $e$ )	0.5
Diámetro cama de partículas ( $d_3$ )	$2 \text{ mm}$
(estáticas y adheridas a la base) Desviación estándar de la distribución de partículas (de los tres tipos)	$0.1 \text{ mm}$
Gravedad	$9.81 \text{ m s}^{-1}$
Razón entre los coeficientes elásticos de los resortes normal y tangencial de cada partícula	1
Ángulo de inclinación ( $\theta$ )	$21^\circ$



Tabla 2.5: Variables físicas usadas para el estudio de segregación. Se estudiaron todas las combinaciones de diámetros de la cama de partículas e intruso, además de las distintas densidades.

Variable	Valor(es)
Diámetro cama de partículas ( $d_3$ )	$1d, 2d, 3d$
Diámetro del intruso ( $d_2$ )	$2d, 3d, 4d, 8d$
Densidad del intruso ( $\rho_2 \text{ kg m}^{-3}$ )	10, 50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2500, 5000

Tabla 2.6: Número de partículas usadas en cada caso estudiado en el estudio de segregación. El número de partículas se eligió para mantenerse el área total constante.

Diámetro del intruso $d_2$	Número de partículas de diámetro $d_1$
$2 \text{ mm}$	1496
$3 \text{ mm}$	1491
$4 \text{ mm}$	1484
$8 \text{ mm}$	1436



## 2.3. Adimensionalización

Las variables del problema pueden ser presentadas en forma adimensional. El código de Wassgren presenta la opción de adimensionalizar los resultados de los archivos de salida o dejarlos en forma adimensional. Para hacer esto, el programa usa las siguientes escalas características. Primero se define el tiempo característico del sistema  $t_c$

$$t_c = \sqrt{\frac{d_1}{g}}, \quad (2.2)$$

donde  $d_1$  es el diámetro de la primera partícula definida y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Es importante notar que el tiempo característico del sistema cambia dependiendo del diámetro de partícula elegido; esto significa que experimentos con el mismo diámetro de partícula se escalarán igual en el tiempo. Para adimensionalizar las demás escalas, las distintas propiedades se dividen por la propiedad correspondiente primeramente definida, por ejemplo la gravedad adimensional es

$$g^* = \frac{g}{g} = 1, \quad (2.3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Además está la densidad adimensional

$$\rho_n^* = \frac{\rho_n}{\rho_1}, \quad (2.4)$$

donde  $\rho_n^*$  es la densidad adimensional del tipo de partícula  $n$ ;  $\rho_n$  es la densidad del tipo de partícula  $n$ ;  $\rho_1$  es la densidad del primer tipo de partícula definido en el programa. También se define al diámetro de partícula adimensional para cada tipo de partícula.

$$d_n^* = \frac{d_n}{d_1}, \quad (2.5)$$

donde  $d_n$  es el diámetro del tipo de partícula  $n$ ;  $d_1$  es el diámetro del primer tipo de partícula definido en el programa. Las velocidades también se presentan de forma adimensional de la siguiente forma

$$v^* = \frac{v t_c}{d_1}, \quad (2.6)$$

donde  $v^*$  es la velocidad adimensional. Y la velocidad angular adimensional es

$$\omega^* = \omega t_c. \quad (2.7)$$

De igual manera, la masa de cada partícula se presenta de forma adimensional de la siguiente manera

$$m^* = \frac{m}{\bar{m}} = \frac{m}{\rho_1 \frac{\pi d_1^2}{4} (1)}, \quad (2.8)$$

donde  $m^*$  es la masa adimensional,  $m$  es la masa de cualquier partícula,  $\frac{\pi d_1^2}{4} (1)$ , es el volumen de las partículas calculado, suponiendo que son discos bidimensionales con espesor unitario. Esta medida de volumen se usa para el cálculo del momento de inercia, lo que repercute directamente en los cálculos de aceleración angular. Esta medida es importante debido a que no se tiene un sólo tamaño de partícula, sino una distribución de tamaños alrededor de un valor medio. Así se sabe de antemano que la masa adimensional de las partículas



tendrá un valor alrededor de uno. Esto tiene consecuencia directa en la forma como se calculan valores como el momentum lineal ( $m\mathbf{v}$ ). En este trabajo todos los resultados se presentan en forma adimensional.



## CAPÍTULO

### 3

# Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de los experimentos numéricos realizados. Lo primero que se discutirá, son las condiciones bajo las cuales un flujo granular con fronteras periódicas, alcanza un estado estacionario. Después se mostrarán los resultados obtenidos de la segregación de un intruso bajo diferentes relaciones de tamaños y densidades. Finalmente, con un análisis geométrico se escalaron los resultados para ser comparados con los experimentos de Thomas (2004).

En los experimentos de segregación, se desea tener un flujo continuo de partículas a velocidad constante. Por ello es importante conocer el ángulo que el plano inclinado necesita para producir un flujo continuo. Sin embargo, es poco deseable que la velocidad de las partículas aumente sin límite, como sería el caso del plano inclinado a  $90^\circ$ , en el que se tendría a las partículas en caída libre. Por ello se diseñó una serie de experimentos para conocer el rango de ángulos de inclinación en los que se alcanza un estado permanente.

### 3.1. Ángulo de inclinación del inicio del flujo

Las condiciones en las que se hicieron estos experimentos se explicaron en el capítulo anterior, una imagen de ello se presenta en la Figura 2.1. Una de las formas de entender como el ángulo de inclinación afecta este arreglo periódico, es pensar que se cambia la energía potencial de las partículas como función de la posición horizontal, o sea se tiene un gradiente de energía potencial. Una de las formas de medir si el sistema alcanza un estado estacionario dinámico, es midiendo la energía cinética del sistema como función del tiempo. La energía cinética ( $E_c$ ) del sistema se obtiene como la suma de las energías cinéticas de cada partícula. Ésta no es la única forma de hacerlo, también se puede calcular el *momentum* ( $\vec{p} = m\vec{v}$ ) o la velocidad promedio. Al medir la energía cinética como función del tiempo de avalanchas periódicas para distintos ángulos, se pueden tener 3 casos de comportamiento:

1. El ángulo de inclinación es muy pequeño, por lo que algunas partículas pueden re-acomodarse, pero no fluyen.
2. El ángulo es lo suficientemente grande para que el reacomodo inicie una reacción en cadena que termina con el movimiento continuo de todas las partículas. Sin embargo, existe un equilibrio en la energía disipada por los contactos y el ángulo de inclinación, por lo que después de un tiempo, se alcanza un estado estacionario, en promedio.
3. El ángulo es demasiado grande, de manera que la disipación de energía por contacto no es suficiente para estabilizar al sistema y las partículas se aceleran continuamente (caída libre). Este caso es indeseable desde el punto de vista numérico, ya que si las partículas experimentan deformaciones grandes en un tiempo del mismo orden de magnitud que el tiempo de paso, aparecen inestabilidades numéricas.

Un ejemplo del primer caso se muestra en la Figura 3.1 y se presenta cuando el ángulo de inclinación es  $\theta = 13^\circ$ , con las condiciones mostradas en la Tabla 2.2

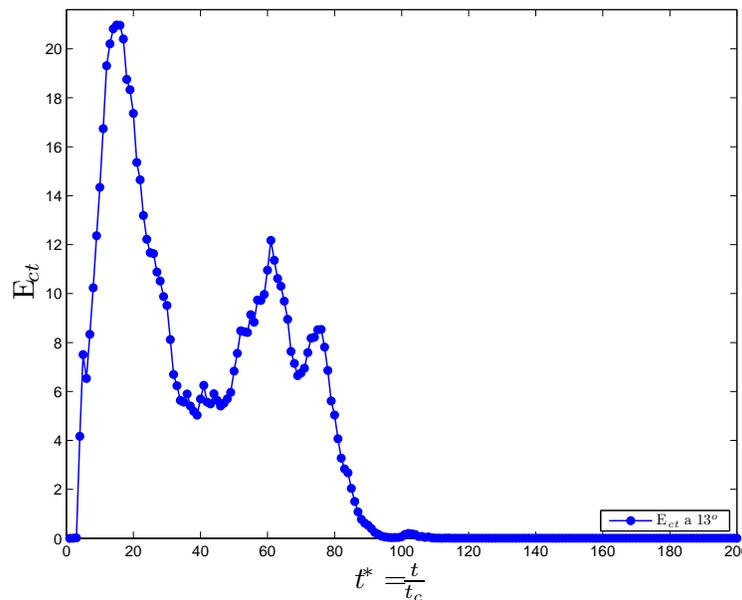


Figura 3.1: Energía cinética de traslación como función del tiempo para un ángulo de inclinación  $\theta = 13^\circ$ . Se observa un reacomodo de partículas, pero no se llega a un flujo continuo.

Se observa que al inicio de la simulación las partículas se aceleran, pero el gradiente de energía potencial no es suficiente para poner en movimiento al arreglo, esto es romper la estructura cuasi-cristalina que las partículas tienen. Para romper esta estructura, es necesario que cada partícula tenga suficiente potencial para deslizarse o rodar por encima de las que están debajo de ella; esto se traduce en fluctuaciones locales de la posición vertical de las partículas o energía potencial local. Dicho de otra manera, el potencial global inducido por el ángulo de inclinación debe ser mayor que el potencial local necesario para que cada partícula pueda escalar a los vecinos de capas inferiores. Para ángulos pequeños se observa una respuesta de tipo impulsivo como la que se muestra en la Figura 3.1; esta se debe a la aparición instantánea de una fuerza de campo en dirección horizontal al inicio de la simulación (cuando la gravedad se cambia de dirección). Este tipo de respuestas son importantes porque muestran un ángulo límite en el que el material pasa de comportarse



como un sólido a un fluido. Al final de esta sección se discute la transición entre comportamiento sólido y fluido con más detalle. Sin embargo este caso es de poco interés por no poderse estudiar segregación. Para nuestro estudio es más importante el caso siguiente. En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de cuando una avalancha periódica alcanza el estado permanente.

En la Figura 3.2 se muestra la energía cinética como función del tiempo para un caso donde la avalancha

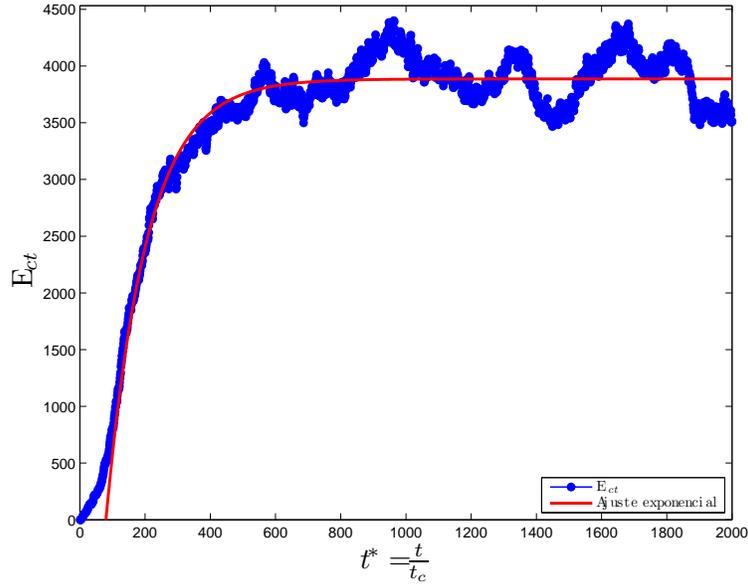


Figura 3.2: Energía cinética de traslación como función del tiempo para un ángulo de inclinación  $\theta = 17^\circ$ . Se observa el estado permanente deseado para el estudio de segregación.

alcanza una energía cinética constante después de la respuesta transitoria inicial, a este estado se le denomina estado estacionario. Se observa que una vez en el estado estacionario la energía cinética tiene fluctuaciones de alrededor del 10% del valor promedio final, por lo que las fluctuaciones son un orden de magnitud inferior al de la energía cinética permanente. Es sencillo pensar que este sistema puede ser idealizado como un sistema dinámico de primer orden y por ello es posible hacer un ajuste exponencial. En este caso la curva roja de la Figura 3.2 es un ajuste a una curva exponencial de la forma

$$E_{ct}(t^*) = A(1 - \exp(-B(t^* - C))), \quad (3.1)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros de ajuste de la ecuación y cada uno tiene diferentes significados:

- $A$  es la energía cinética en estado permanente del sistema y se puede medir calculando el promedio del sistema después de  $4\tau$ , donde  $\tau$  es el tiempo característico del sistema.
- $\frac{1}{B}$  es el tiempo adimensional ( $\tau$ ) característico del sistema.
- $C$  es el tiempo de fase adimensional.

La curva exponencial aparece como respuesta a la fuerza horizontal escalón con la que se excita al sistema al inicio de la simulación. Y con ángulos de inclinación por debajo del ángulo crítico, la respuesta que se obtiene es similar a un impulso y conforme este ángulo crece la duración del impulso aumenta. Después de que se pasa el ángulo de inclinación crítico, el comportamiento cambia pasando a un comportamiento fluido,



que primero alcanza el estado permanente. Este estado es resultado de un equilibrio entre la disipación de energía en los contactos y la energía potencial de cada partícula; con ángulos de inclinación grandes este equilibrio no se alcanza, como se muestra en la Figura 3.3. Aquí el flujo se acelera continuamente y por ello ya no se admite una regresión exponencial, sino que la más apropiada es una parabólica de la forma

$$E_{ct}(t^*) = A(t^* - B)^2 + C, \quad (3.2)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros de ajuste de la ecuación. Este ajuste es el más apropiado debido a un claro cambio en la concavidad de las curvas. La Figura 3.3 muestra a la energía cinética como función del tiempo para un ángulo de inclinación de  $25^\circ$ .

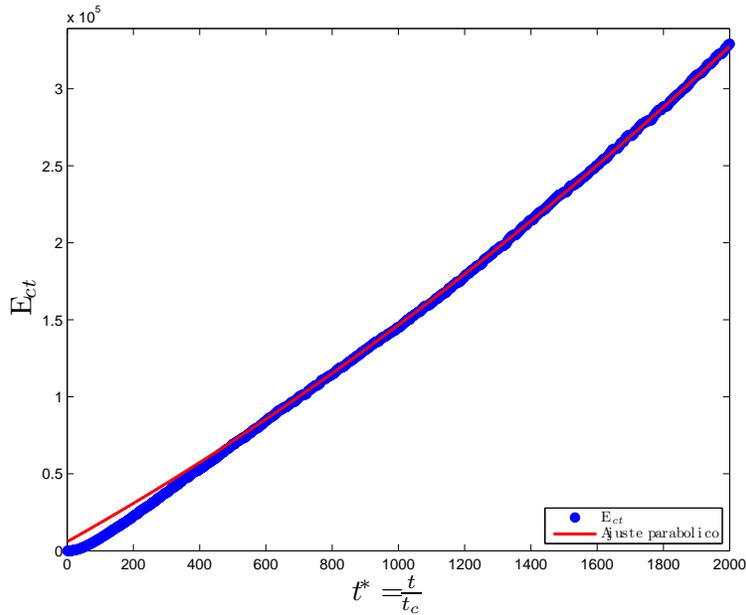


Figura 3.3: Energía cinética de traslación como función del tiempo para un ángulo de inclinación  $\theta = 25^\circ$ . Las partículas se aceleran continuamente, como en una caída libre.

Las Figuras 3.2 y 3.3 contrastan mucho, debido a que muestran que con un pequeño cambio del ángulo de inclinación, el comportamiento de la avalancha cambia de completamente. Este cambio ocurre cuando el gradiente de energía potencial

$$\nabla E_p = M g \frac{dh}{dx} = M g \sin(\theta), \quad (3.3)$$

excede a la energía que se puede disipar por contactos; entonces la mayor contribución a la energía total se vuelve la aceleración de la gravedad. Sabiendo que la aceleración que afecta a cada partícula es la componente de la horizontal de la gravedad, la velocidad de una partícula en caída libre será  $v = g t \sin(\theta)$ . Por este motivo la contribución de energía cuando los contactos son poco frecuentes se puede idealizar como

$$E_{cg}(t) = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M g t \sin(\theta)^2, \quad (3.4)$$

donde  $E_{cg}$  es energía cinética de la avalancha en caída libre como función del tiempo,  $M$  es la masa total de las partículas, de la avalancha,  $g$  y  $t$  son la aceleración de la gravedad y el tiempo, respectivamente. Esta contribución es responsable de la forma parabólica de la curva. Es importante aclarar que las gráficas de las



figuras 3.1 a 3.3 muestran resultados de energía cinética de traslación, aunque también se pueden calcular energías cinéticas rotacionales. Los resultados de este cálculo no se presentan por ser muy similares a los anteriores.

Una forma de resumir la información de estos resultados es graficar la energía cinética en estado estacionario como función del ángulo de inclinación del plano, esto se muestra en la Figura 3.4.

La Figura 3.4 muestra a la energía cinética en estado permanente como función del ángulo de inclinación

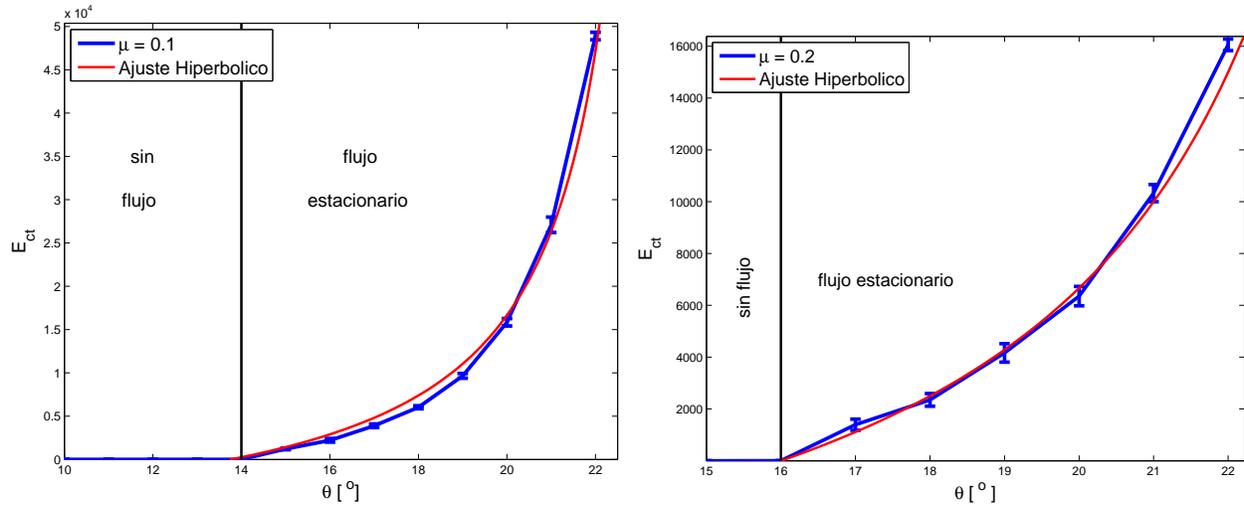


Figura 3.4: Energía cinética en estado permanente como función del ángulo de inclinación del plano. A la derecha se muestra el caso para un coeficiente de fricción  $\mu = 0.2$  y a la izquierda el coeficiente de fricción es  $\mu = 0.1$ . En ambas figuras la curva roja representa un ajuste a una hipérbola rotada  $45^\circ$ .

del plano para 2 coeficientes de fricción. Las curvas rojas son ajustes a una hipérbola rotada  $45^\circ$ , de ecuación general

$$E_{ct}(\theta) = \frac{A}{\theta - B} - C, \tag{3.5}$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son parámetros de ajuste de la ecuación. La única diferencia entre las curvas de ajuste hiperbólicas es una traslación sobre el eje horizontal ( $B$ ), ambas se ajustan de forma aproximada a la curva en cuestión. Esto es importante porque se puede decir que la única diferencia entre tener coeficientes de fricción grandes, es el ángulo de inclinación en el que las partículas empiezan a fluir. Sabiendo que el coeficiente de fricción se obtiene de calcular la tangente del ángulo de reposo de una pila de partículas, se puede concluir que un cambio en el coeficiente de fricción sólo cambiará el ángulo en el que la avalancha inicia. Otro aspecto importante es que para un coeficiente de fricción pequeño ( $\mu = 0.1$ ) el ángulo crítico es  $\theta_{crit} = 14^\circ$ , mientras que para un coeficiente de fricción mayor ( $\mu = 0.2$ ) el ángulo que marca la transición entre el comportamiento sólido y fluido es  $\theta_{crit} = 16^\circ$ . Este ángulo crítico se hace crece como función del coeficiente de fricción, o sea  $\theta = \theta(\mu)$ . De acuerdo a la ecuación 1.15 de Wu[7], la relación funcional es de la forma

$$\theta = \arctan \mu, \tag{3.6}$$

donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación del plano y  $\mu$  es el coeficiente de fricción.



### 3.1.1. Observaciones

Las distintas curvas de energía cinética como función del tiempo pueden ser vistas desde la óptica de dinámica de sistemas físicos. Lo primero a notar es que existe un rango de ángulos, por debajo del ángulo crítico, en los cuales no existe flujo de partículas; en estos casos la respuesta del sistema es muy parecida a una función impulso, que con el aumento de la fuerza de campo se mantiene por más tiempo hasta ser un pulso. Una comparación entre tiempos de duración de la respuesta se muestra en la Figura 3.5.

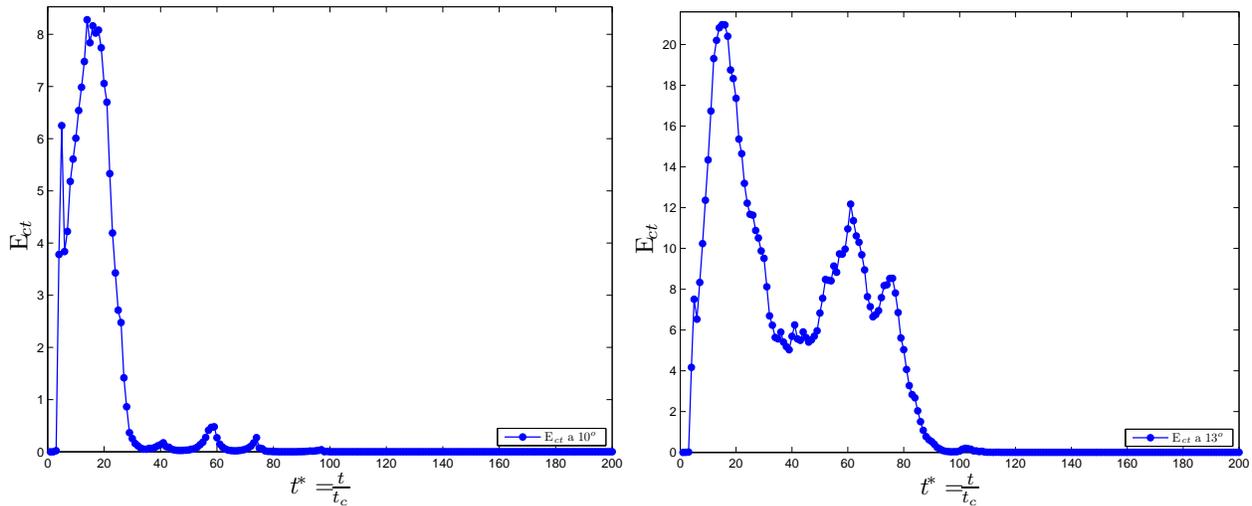


Figura 3.5: La energía cinética como función del tiempo para 2 ángulos pequeños diferentes; a la izquierda  $\theta = 10^\circ$  y a la derecha  $\theta = 13^\circ$ . Se observa un cambio abrupto en la energía cinética, que dura por un tiempo corto.

Este comportamiento se puede idealizar como se muestra en el esquema de la Figura 3.6.

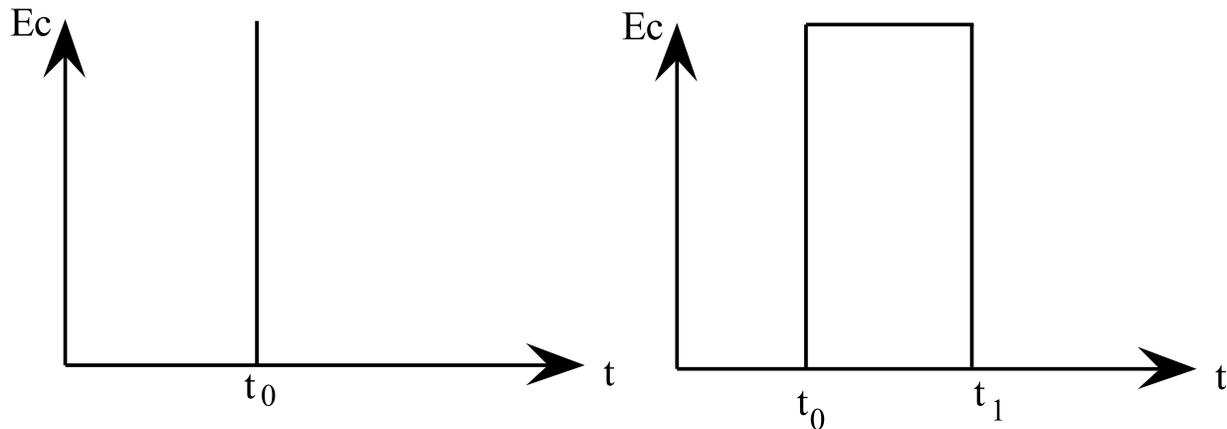


Figura 3.6: Bosquejo de impulso como función del tiempo (a la izquierda) que ocurre en  $t_0$  y un pulso (a la derecha) que empieza en  $t_0$  y termina en  $t_1$ .

Existen claras diferencias entre los casos mostrados; El inicio del movimiento se debe a una fuerza constante que aparece al inicio de la simulación, o sea la componente horizontal de la gravedad en el plano inclinado. El retraso en el crecimiento de la curva se debe a la inercia de las partículas y el cese del movimiento se debe a la disipación de energía por contacto entre partículas. Sin embargo, esto es importante porque la curva de energía cinética es la que se mostraría en el caso del deslizamiento de un bloque sólido. Al momento



de inclinar el plano, el bloque se acelera y comienza a deslizarse y al chocar con la pared se desacelera rápidamente. Conforme el ángulo de inclinación se acerca al crítico, la nula cohesión entre las partículas se hace patente, por lo que empiezan a fluir, rompiendo el comportamiento sólido. La transición entre ambos comportamientos se da cerca del ángulo crítico; sin embargo, cerca de la transición ambos comportamientos se manifiestan con energías cinéticas del mismo orden de magnitud, como se muestra en la Figura 3.7. Esto da como resultado que el comportamiento exponencial típico de un sistema de primer orden, cerca de esta transición cambie para parecerse más a un sistema de segundo orden sub-amortiguado, como se muestra en la Figura 3.7.

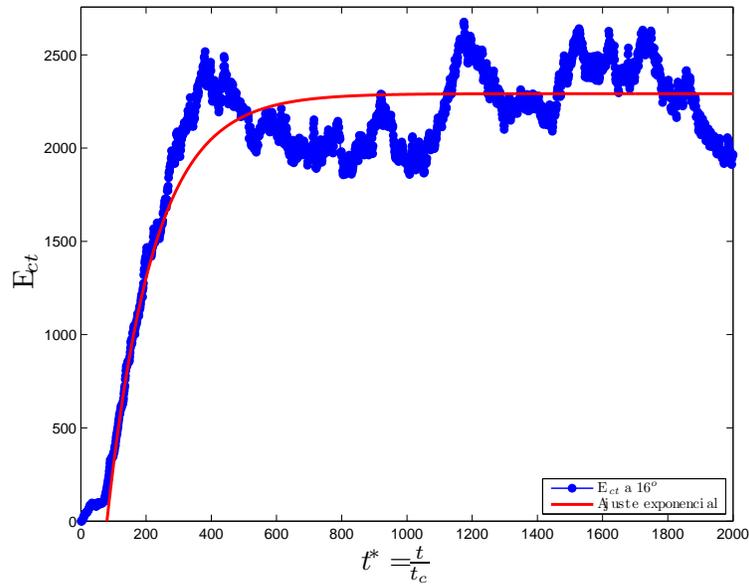


Figura 3.7: Energía cinética como función del tiempo para un ángulo  $\theta = 16^\circ$ . Es claro que el ajuste exponencial correspondiente a un sistema de primer orden no corresponde al comportamiento del sistema. Sin embargo un sistema de segundo orden sub-amortiguado el comportamiento es adecuado.

Es claro que el comportamiento mostrado en la Figura 3.7 no es únicamente de un sistema de primer o segundo orden. Existen fluctuaciones que son resultado de que el sistema esté compuesto por muchas partículas, cada una gobernada por un par de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, como todo sistema de orden superior, este puede ser caracterizado de forma estadística por envolventes resultado del análisis como un sistema de segundo orden, al menos en la región donde el comportamiento es fluido. Antes del ángulo crítico, el comportamiento global admite otro ajuste. Incluso cuando se observa la respuesta exponencial que se satura, el sistema puede analizarse como uno de segundo orden que está amortiguado críticamente. En estos sistemas es común que una de las exponenciales esté multiplicada por un coeficiente de orden de magnitud menor que el principal, por lo que el ajuste a un sistema de primer orden es aceptable. Los casos que pertenecen a un comportamiento fluido desde la transición se muestran en la Figura 3.8.



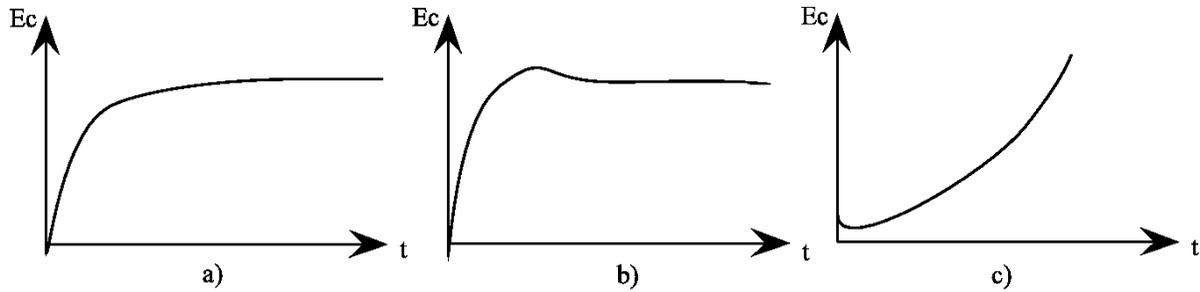


Figura 3.8: Energía cinética como función del tiempo para a) un sistema de primer orden, b) un sistema de segundo orden sub-amortiguado, c) Una avalancha dominada por una caída libre.

En la Figura 3.8 se muestran casos típicos de respuestas cuando la avalancha es fluida. En (a) se muestra curva de respuesta exponencial saturada de un sistema de primer orden o uno de segundo orden críticamente amortiguado, en (b) la respuesta de un sistema sub-amortiguado y finalmente en (c) se muestra un esquema del sistema gobernado por la caída libre.

Existe un aspecto importante en el estudio de avalanchas que sólo se mencionó brevemente, éste es el uso de una cama inmóvil de partículas en el fondo del experimento; este aspecto se discute en la siguiente sección.

### 3.2. Rugosidad macroscópica y segregación

En la Figura 2.1 se muestra una cama de partículas en el fondo del plano inclinado, éstas están inmóviles y se les denomina rugosidad macroscópica. Estas partículas garantizan la segregación del intruso de diferente tamaño y/o densidad, por lo que los resultados se pueden usar para predecir condiciones en los experimentos de segregación. En la siguiente sección se explican las implicaciones que tiene la rugosidad macroscópica en el flujo.

El concepto de rugosidad macroscópica surgió de la observación de dos fenómenos distintos en los flujos de partículas en planos inclinados. Dicho concepto es importante porque marca una pauta entre un comportamiento sólido y uno fluido. En los flujos granulares en planos inclinados el coeficiente de fricción juega un papel muy importante. En esta sección se muestran 2 casos en los que se busca la segregación de un intruso, la única diferencia entre ellos es el coeficiente de fricción. Ambos casos tienen las características comunes mostradas en las Tablas 2.2 y 3.1.



Tabla 3.1: Parámetros usados en la comparativa entre coeficientes de fricción, en el flujo en planos inclinados.

Parámetro	Valor
Número de partículas ( $N$ )	1484
Diámetro adimensional del intruso $d^*_2$	4
Densidad adimensional del intruso $\rho^*_2$	0.24
Ángulo de inclinación ( $\theta$ )	$21^\circ$

Con las características de la Tabla 3.1 se comparó el comportamiento entre dos coeficientes de fricción ( $\mu = 0.1$  y  $0.3$ ), uno alto y uno bajo. Esto se hizo porque se observaron dos comportamientos diferentes en los campos de velocidades. Para evidenciar esta diferencia se calculó la velocidad de cada partícula como función del tiempo de ambos casos y el resultado se muestra en la Figura 3.9.

Los colores de los vectores representan a la magnitud de la velocidad, siendo los colores cálidos y fríos velocidades altas y bajas, respectivamente. Es de notar que todos los vectores de velocidad de la imagen superior de la Figura 3.9, correspondiente a un coeficiente de fricción  $\mu = 0.1$  tienen la misma magnitud (movimiento de cuerpo rígido), mientras que en la imagen inferior de la misma figura ( $\mu = 0.3$ ), es evidente un gradiente vertical de velocidades. La diferencia entre ambos casos es fundamental, debido a que en el primer caso, el conjunto de partículas se comporta como un bloque sólido que se desliza sobre un plano inclinado, mientras que el segundo caso el gradiente vertical de velocidades recuerda a un fluido viscoso en una pendiente. Esto demuestra que en un arreglo con condiciones equivalentes, una propiedad de contacto entre las partículas, tiene repercusiones importantes en el comportamiento global.

El gradiente de velocidades, cuando se tienen coeficientes de fricción altos, es resultado de que las partículas en el fondo del arreglo ruedan sin deslizar, debido al peso de las demás; al contrario de las partículas en la superficie, que se pueden mover libremente al no tener carga. Este fenómeno, aunado a que se tiene un flujo denso, tiene otra consecuencia importante: el flujo que se observa no es “laminar”. Las partículas por encima de la capa inferior van deslizando/rodando sobre las demás y por ello, existen cambios en las posiciones verticales de cada partícula; esos cambios se traducen en fluctuaciones de velocidad vertical, como las mostradas en la Figura 3.10.

La Figura 3.10 se obtuvo de transformar las velocidades de cada partícula en cada posición, en velocidades de puntos materiales. De manera que se pasa de una descripción discreta, a una continua. Las imágenes muestran el campo de velocidades instantáneo. En la parte superior e inferior de la Figura 3.10 se muestran las fluctuaciones de velocidad vertical para un coeficiente de fricción bajo y uno alto, respectivamente. La aparición de las fluctuaciones marca la transición entre el deslizamiento de un bloque sólido y un comporta-



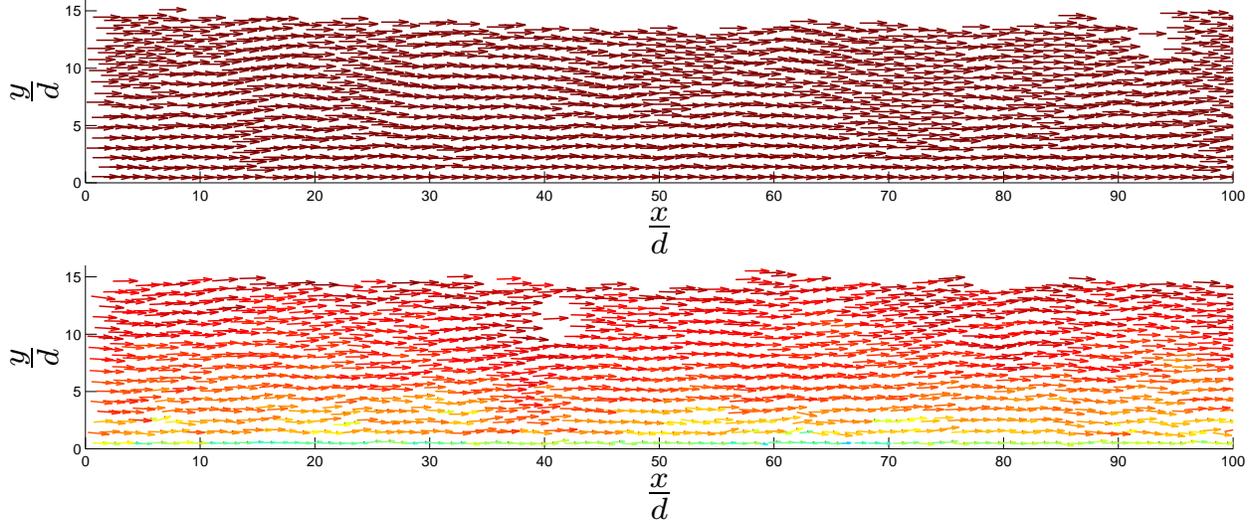


Figura 3.9: Campo de velocidades instantáneo para dos avalanchas con condiciones similares, pero con coeficiente de fricción diferente. Los vectores velocidad corresponden a la posición de las partículas en un instante arbitrario de tiempo. Los colores cálidos y fríos representan una magnitud del vector velocidad alta y baja, respectivamente. En la parte superior e inferior se muestran los resultados para coeficientes de fricción  $\mu = 0.1$  y  $\mu = 0.3$ , respectivamente. Los ejes muestran la posición horizontal y vertical adimensionalizada con el diámetro de las partículas. La imagen superior muestra todos los colores en café, porque todos los vectores velocidad tienen la misma magnitud. En la imagen inferior se muestra que los vectores en la base tienen colores más fríos, debido al gradiente de velocidades.

miento fluido. Una de las posibles interpretaciones de la aparición de fluctuaciones temporales y espaciales en los campos de velocidades puede encontrarse en la descomposición de Reynolds. Por ello este fenómeno es análogo a la intensidad de turbulencia en fluidos y es importante porque nos dice que en la transición del comportamiento sólido al fluido de este material, no hay un régimen laminar intermedio; lo que significa que la segregación de partículas se da sólo en un régimen tipo turbulento.

Una forma de garantizar que siempre haya segregación, es crear fluctuaciones de velocidad vertical de forma artificial. Para ello, en los experimentos de segregación se agregó una capa de partículas inmóviles en el fondo. De esta manera, se puede hacer un estudio de segregación usando un coeficiente de fricción bajo. Y así, se puede estudiar la importancia de tener distintos tamaños de partícula en esta cama.

El flujo en las condiciones mostradas en la Tabla 3.1 tiene distintas características, debido a su comportamiento fluido tiene un perfil de velocidades. Este perfil se puede obtener promediando la velocidad en bandas verticales a diferentes alturas. Esto se hizo una vez alcanzado el estado estacionario. En la Figura 3.11 se muestra dicho análisis.

En la Figura 3.11 se muestran 2 curvas, la azul (gruesa) es la curva principal y representa al perfil de velocidades medido a través del promedio en bandas verticales y la curva roja (delgada) es una recta que muestra una comparación con un perfil lineal de velocidades. Por arriba de  $y/d = 19$  el perfil de velocidades cae drásticamente a cero por la ausencia de partículas, por ello es que la parte válida del perfil está en el rango  $0 \leq y/d \leq 19$ . Todo lo anterior es relevante porque nos permite aproximar al perfil de velocidades de manera lineal:

$$v_x = k_1 \cdot \left(\frac{y}{d}\right) + k_2. \quad (3.7)$$

A pesar de tenerse cierta incertidumbre en la superficie del flujo con este ajuste, es válido para la mayor parte del flujo. Así, es posible caracterizar al flujo con una rapidez de deformación constante, de la siguiente



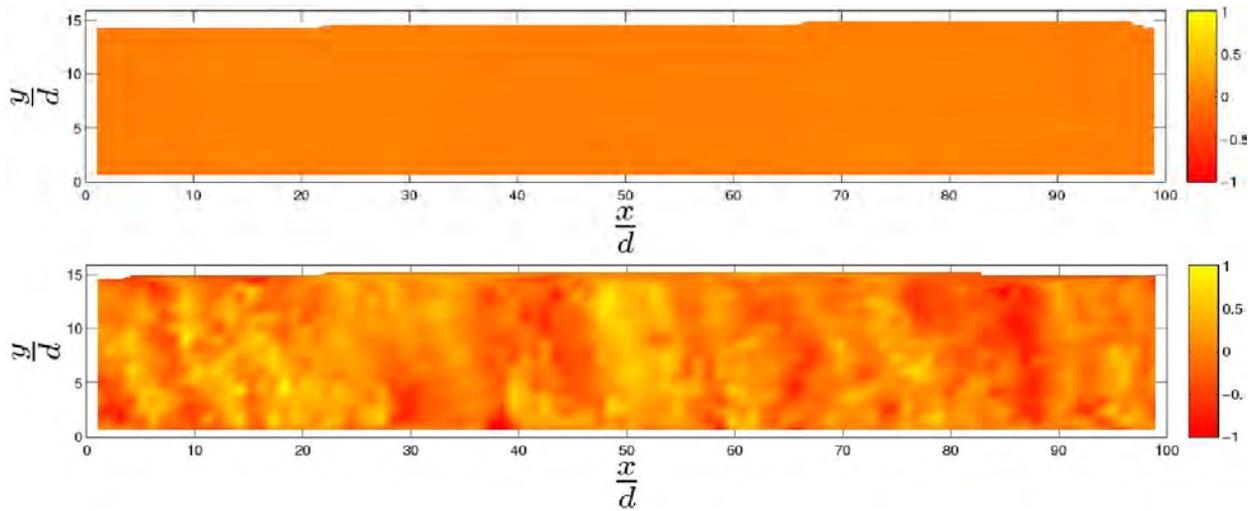


Figura 3.10: Fluctuaciones de velocidad en dirección vertical en un instante de tiempo. En la parte superior e inferior se muestran dichas componentes cuando  $\mu = 0.1$  y  $\mu = 0.2$ , respectivamente. La escala que se muestra es adimensional.

manera:

$$\dot{\gamma} = \frac{d}{dy^*} (v_x) = k_1. \tag{3.8}$$

La rapidez de deformación es un parámetro importante, ya que puede ser entendida como un tiempo característico del flujo. Este tiempo característico está relacionado directamente con el tiempo que a un intruso de distinto tamaño y/o densidad le toma llegar a su posición de equilibrio. Otra característica de los flujos granulares es que en ciertas zonas existen zonas donde se acumulan partículas, o sea zonas de mayor densidad. Caracterizar estas zonas es importante como parte del análisis del sistema como un flujo. En la Figura 3.12 se muestra un mapa escalar donde las zonas con colores cálidos son las que tienen mayor densidad de partículas; estas zonas se calcularon definiendo una malla fija de ancho y largo igual al diámetro de una partícula y midiendo el promedio de partículas que están en esa zona por unidad de tiempo.

En la Figura 3.12 los ejes horizontal y vertical son ejes espaciales y están adimensionalizados con el diámetro de partícula. La escala de densidad varía entre 0 y 1.2 partículas por diámetro de partícula al cuadrado. Se observa que en la base del plano inclinado existe una región con una gran densidad de partículas y que en el resto del arreglo existe una densidad prácticamente uniforme, con excepción de una reducción súbita en la superficie del flujo. Debido a que se observa que esta densidad tiene un cambio más profundo con la posición vertical, que con la posición horizontal, se obtuvo un perfil vertical de densidad de partículas, éste se muestra en la Figura 3.13

En la Figura 3.13,  $n$  es el número de partículas en cada banda vertical con ancho del diámetro de partícula promedio, mientras que en la Figura 3.12 la escala es el número de partículas promedio por unidad de área. Donde la unidad de área es el cuadrado del diámetro promedio de partícula. En ambas figuras se muestra un promedio temporal de la densidad de partículas. En la Figura 3.13 se muestra que el cambio súbito de densidad que ocurre entre  $y/d = 15$  y  $y/d = 20$ , mismo que se observa en la Figura 3.12. En ésta, se aprecia que el cambio en la distribución de partículas ocurre rápidamente, pero sin discontinuidades. Además se observa un cambio más drástico en la base del plano inclinado, entre  $y/d = 0$  y  $y/d = 5$ . En número de partículas  $n$  se puede calcular como función de la altura vertical  $n = n(y^*)$ . Se puede observar que la distribución de partículas así calculada admite un ajuste a una función error complemento, con origen en donde comienza el plano superficial de las partículas ( $y/d \approx 18$ ). Esta caracterización es importante porque



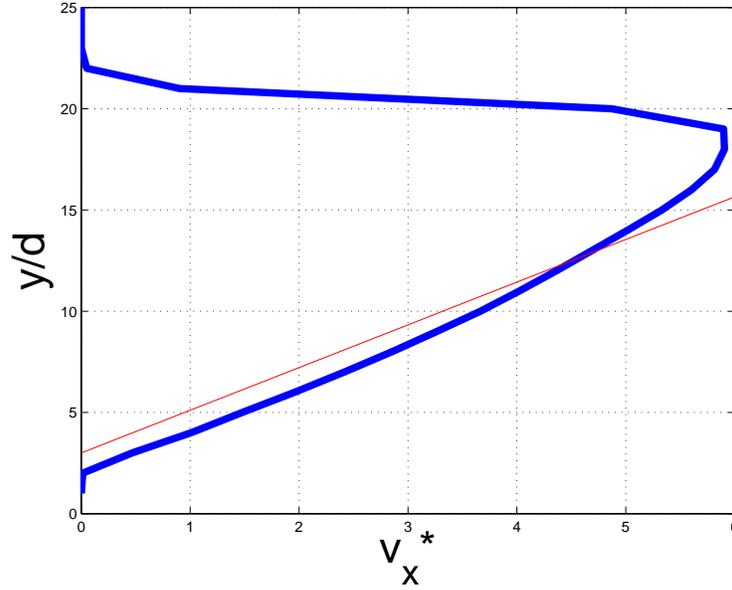


Figura 3.11: Perfil de velocidades del plano inclinado. En el eje horizontal está la velocidad promedio en dirección  $x$  en forma adimensional y en el vertical la posición vertical adimensional. De manera que el perfil de velocidad mostrado es  $v_x = v_x(y/d)$ . La línea roja es una recta con la que se compara la pendiente real del perfil de velocidades.

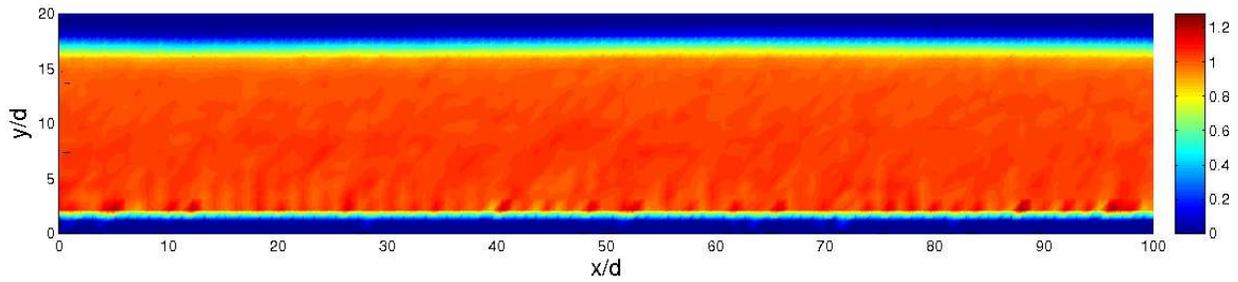


Figura 3.12: Mapa escalar de densidad de una avalancha. Las zonas con colores cálidos son las que tienen mayor densidad de partículas. Las condiciones en las que se observó fueron las de la Tabla 3.1. Los ejes vertical y horizontal representan la posición adimensional dentro del plano inclinado. Todas las longitudes se escalaron con el diámetro promedio. En esta gráfica la densidad se midió como el número de partículas por unidad de área y la unidad de área es el diámetro de partícula promedio al cuadrado.

en una zona más compacta, una partícula estará expuesta a fuerzas repulsivas mayores que en zonas menos densas, de manera que un intruso de distinto tamaño estará afectado por este campo. Otra característica importante, que podría influenciar la segregación, es la temperatura granular; la cual se define como

$$T = \langle v'^2 \rangle, \quad (3.9)$$

donde  $\langle v'^2 \rangle$  es la velocidad media cuadrática. Esta definición está tomada de Ippolito[62] y es una medida de las fluctuaciones medias del sistema. Un mapa escalar de la temperatura granular se muestra en la Figura 3.14. Nuevamente los colores cálidos representan fluctuaciones promedio mayores que colores fríos, las unidades de la barra son de velocidad adimensional al cuadrado. Este mapa escalar se obtuvo con una malla con segmentos de ancho y alto del diámetro de partícula  $d$ , como en el caso del mapa escalar de la densidad de partículas.

Se observa que en la Figura 3.14 la temperatura granular aumenta cerca de la superficie y disminuye cerca de la base del plano inclinado. Además no existen fluctuaciones del mismo orden de magnitud en



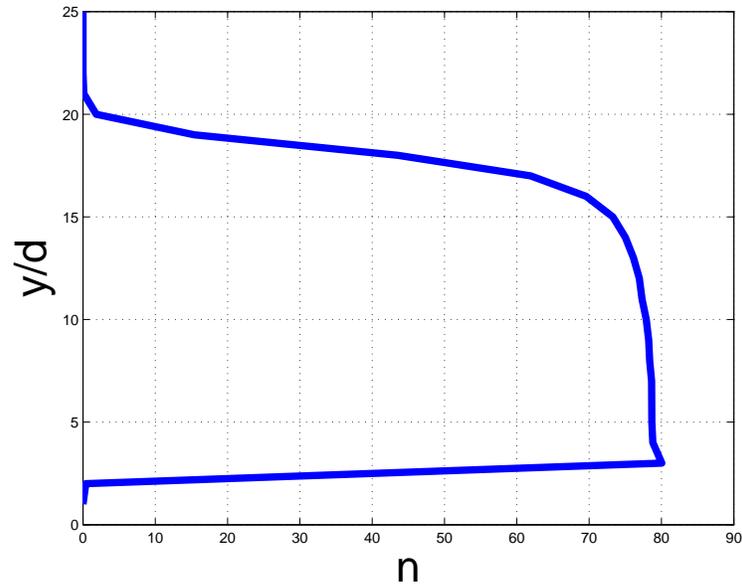


Figura 3.13: Distribución vertical de partículas en el plano inclinado. En el eje horizontal se muestra al número de partículas  $n$  en cada banda vertical con diámetro de una partícula y en el vertical a la posición vertical adimensional  $y/d$ . La densidad de partículas se midió a través de bandas verticales; esto es promediando al número de partículas en cada banda vertical con ancho de un diámetro de partícula.

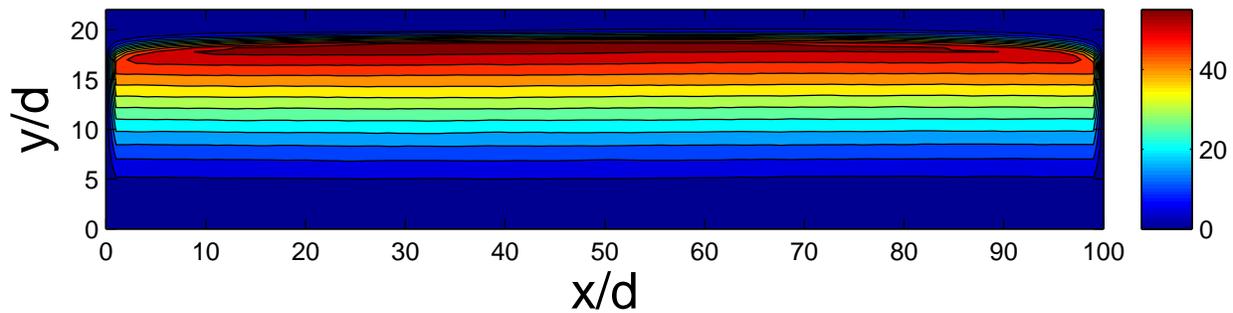


Figura 3.14: Mapa escalar de temperatura granular en el plano inclinado. Ejes adimensionalizados con el diámetro de partícula y barra con unidades de velocidad adimensionalizada al cuadrado.

dirección horizontal, nuevamente la componente vertical es la más importante. Por ello se obtuvo el perfil de temperatura granular en dirección vertical y se muestra en la Figura 3.15.

Se observa que el perfil de temperatura granular de la Figura 3.15 es aproximadamente lineal. Esta es una conclusión importante, porque la temperatura granular puede interpretarse como una medida del tamaño de los huecos que aparecen a través del tiempo en el flujo. Un intruso de cierto tamaño se alojará en la posición vertical en la que la temperatura granular abra intersticios de tamaño cercano al diámetro del intruso. De manera que la temperatura granular es un parámetro que puede influir en el comportamiento de la segregación. En la siguiente sección se describen los resultados obtenidos para el caso de segregación.

### 3.3. Segregación

Como parte del estudio de segregación se midió la posición vertical de un intruso agregado al inicio de la simulación como función del tiempo, de su tamaño y de su densidad. El primero de estos resultados se



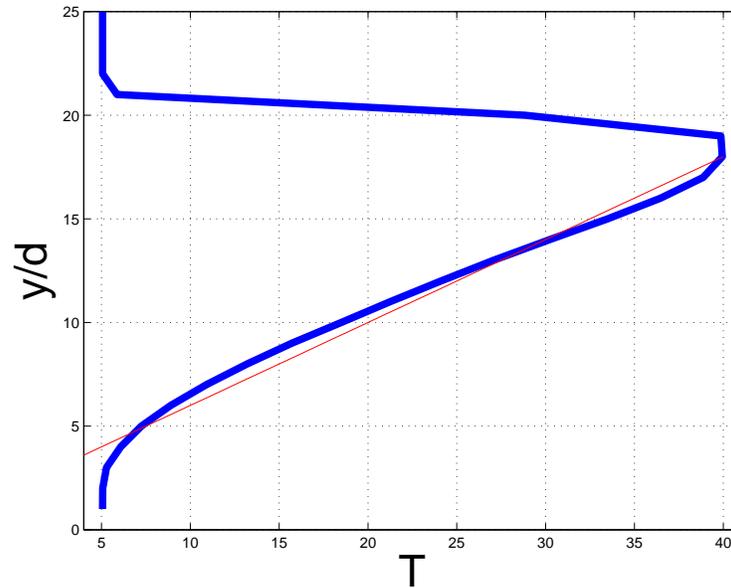


Figura 3.15: Distribución vertical de temperatura granular en el plano inclinado. La curva azul (gruesa) muestra el perfil de temperatura granular calculado, mientras que la curva roja (delgada) muestra un ajuste de éste a una línea recta. El eje horizontal es la temperatura granular adimensional y el eje vertical la posición vertical adimensional.

muestra en la Figura 3.16; para el caso de un intruso con diámetro  $d_2^* = 4$ , sobre una cama de  $d_3^* = 1$  y de densidad  $\rho^* = 0.32$ .

La Figura 3.16 muestra que la posición como función del tiempo parte de una posición vertical inicial alta y conforme el flujo se acelera ésta alcanza una posición de equilibrio promedio. La gráfica muestra dos líneas de distinto color, la línea azul es la posición vertical medida de las simulaciones y la línea roja es un ajuste a función error complemento, donde la recta horizontal coincide con la posición promedio final. También se observa que dicha posición de equilibrio muestra variaciones grandes con respecto a la media, mismas que se explican por el hecho de tener un sistema con grandes discontinuidades. El tiempo que les tomó a partículas con distinto tamaño y densidad llegar a la posición de equilibrio, se tomó como referencia para hacer el promedio de posición estacionaria media y todas las posiciones medias se midieron en tiempos posteriores al tiempo del transitorio.

Debido a que cada intruso alcanza una posición vertical promedio final como función de la densidad y del tamaño es posible trazar mapas con posiciones finales de intrusos en diferentes condiciones; éstas se pueden trazar de 2 formas:

- Posición final como función de la densidad para distintas razones de tamaños
- Posición final como función del tamaño para distintas razones de densidades

Ambas formas de trazar dichos mapas se muestran a continuación, empezando por la posición como función de la razón de densidades, para diferentes razones de tamaños.



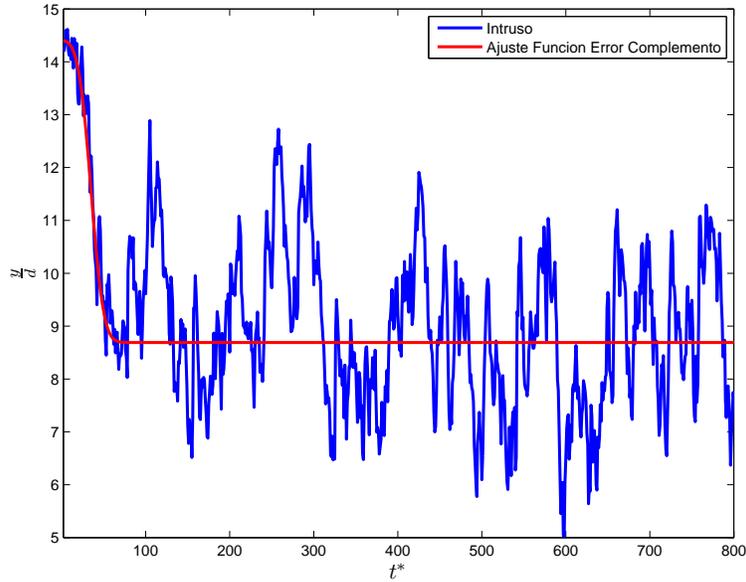


Figura 3.16: Posición vertical de un intruso como función del tiempo. El tamaño del intruso es de  $d_2^* = 4$  y el tamaño de las partículas de la cama inferior es  $d_3^* = 1$ . Los parámetros de este flujo corresponden a los discutidos en la Tabla 3.1

### 3.3.1. Segregación por densidades

Al graficar a la posición vertical como función de la razón de densidades, para una razón de tamaños dada, se obtiene un resultado como el de la Figura 3.17.

En la Figura 3.17 se observa que cuando la razón de densidades es pequeña ( $0 \leq \rho^* \leq 0.4$ ) el peso del intruso no es suficiente para atravesar las capas de material granular y por ello se queda en la superficie. Mientras que para razones de densidad grandes ( $1 \leq \rho^* \leq \infty$ ) el intruso se sedimenta en el fondo. A esta figura se le hizo un ajuste a una función error complemento, que se ajusta a todos los valores medidos dentro del error. Para distintas razones de tamaños se pueden hacer gráficas similares, en la que la rapidez con la que cae el intruso aumenta, tal como se muestra en la Figura 3.18.

En la Figura 3.18 se muestra una comparación entre las posiciones verticales como función de la densidad adimensional para dos tamaños de intruso diferentes. En ambas gráficas, cuando la razón de densidades es la más pequeña, las posiciones iniciales son ligeramente diferentes. Esto se explica por la diferencia en los diámetros  $d_3$  y  $d_2$ , ya que ambos son mayores en el caso de la gráfica a la izquierda. De manera similar la posición mínima en ambas gráficas depende del tamaño del intruso. También se observa que ambas curvas ajustan muy bien a funciones error con la única diferencia de tener caídas más rápidas. Otra cosa que es de llamar la atención, es que para razones de densidad altas ( $\rho^* = 2$ ), la fluctuación que se mide en las posiciones estacionarias es grande. Esto se puede explicar de la siguiente manera: una partícula muy pesada llega a la base del plano inclinado interactúa con una cama de partículas estáticas. El intruso está siendo arrastrado todo el tiempo por un flujo de partículas y al chocar continuamente con esta superficie irregular rebota, lo que introduce dispersión en la medición de la posición vertical del intruso. Se verá más adelante que el único efecto observado del cambio en el tamaño de la cama inferior de partículas, es la introducción de “ruido” en la medición de la posición de intrusos con alta densidad relativa.

Curvas distintas en las que se observó el cambio en la posición como función de la densidad para diferentes



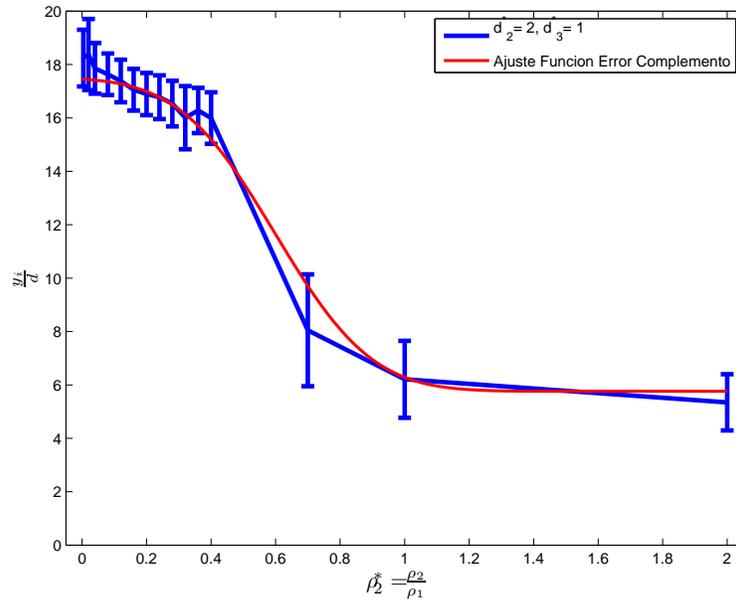


Figura 3.17: Posición adimensional  $y_i^*$  como función de la razón de densidades  $r^*$  para una razón de tamaños de  $d_2^* = 2$  y de  $d_3^* = 1$ . Se muestran 2 curvas, la azul es el cambio en la posición medida y la roja es un ajuste a una función error complemento.

razones de tamaño se muestran en las Figuras 3.19 a 3.21. La diferencia entre las gráficas es que cada una tiene una cama de partículas de diferente tamaño. En todos los casos se observa un comportamiento similar.



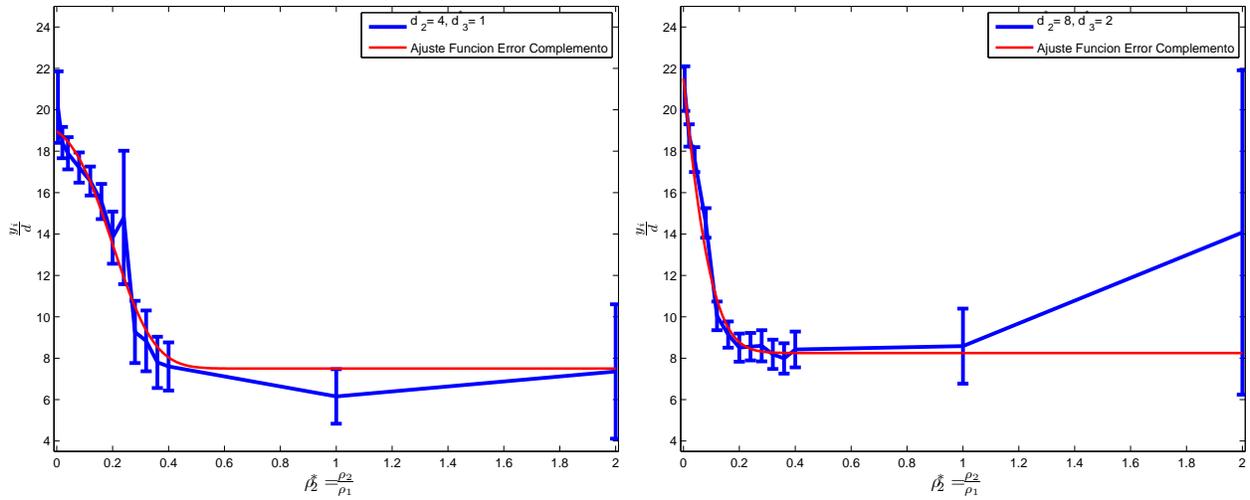


Figura 3.18: Comparación entre posiciones finales adimensionales para distintas razones de tamaño  $d_2^*$ . El eje horizontal es la razón de densidades entre el intruso y el grueso de las partículas ( $\rho^*$ ), previamente definido. El eje vertical es la posición vertical adimensional ( $y/d$ ). Se observa que en el ajuste a funciones error la de mayor razón de tamaños cae más rápido.

Se observa que la posición vertical de los intrusos cambia de forma similar en los 3 casos. Cuando la relación de diámetros entre las partículas y el intruso es pequeña, el descenso de la posición vertical final es lenta, mientras que para intrusos más grandes dicha caída ocurre antes. De igual manera, las partículas con mayor relación de tamaños y densidades, se encuentran en posiciones por arriba de la posición mínima esperada y con fluctuaciones grandes (curvas negras). Esto se debe al fenómeno de rebote mencionado anteriormente. Este fenómeno es más marcado cuando el diámetro de la cama de partículas es mayor. Otra cosa que se puede observar es que las partículas que tienen distintos tamaños, siempre y cuando no sean muy masivas, tienden a posiciones finales distintas; esto ocurre porque las partículas más pequeñas toman posiciones más bajas en los huecos que hay entre la cama de partículas.



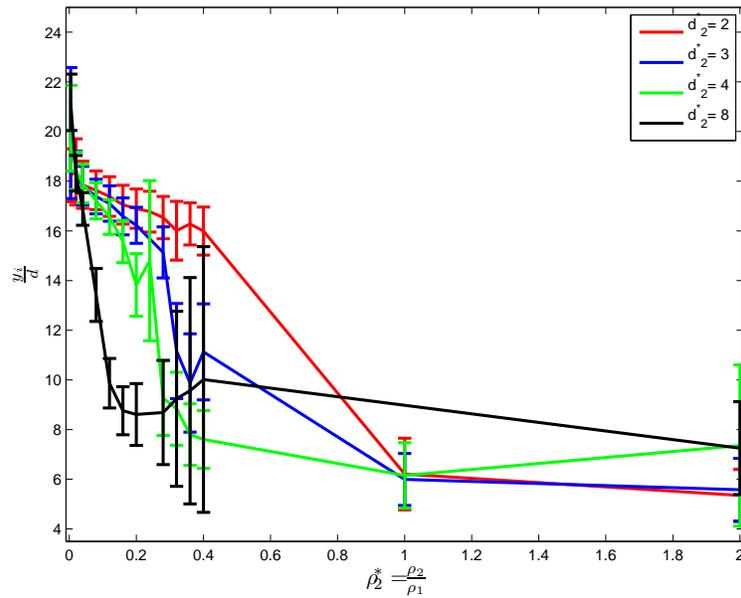


Figura 3.19: Posiciones verticales del intruso como función de la densidad adimensional, para las razones de tamaño estudiadas y una cama de partículas  $d_3^* = 1$ . El eje horizontal es la razón de densidades entre el intruso y el grueso de las partículas ( $\rho^*$ ), previamente definido. El eje vertical es la posición vertical adimensional ( $y/d$ ).

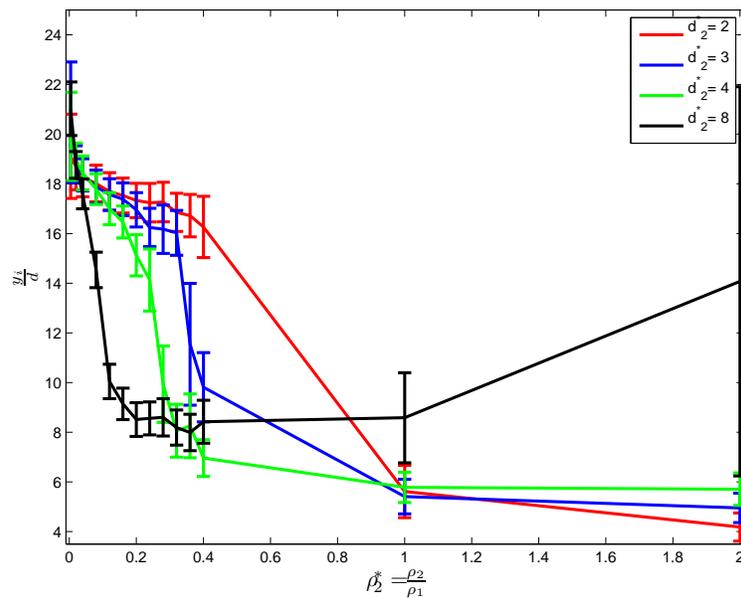


Figura 3.20: Posiciones verticales del intruso como función de la densidad adimensional, para las razones de tamaño estudiadas y una cama de partículas  $d_3^* = 2$ . El eje horizontal es la razón de densidades entre el intruso y el grueso de las partículas ( $\rho^*$ ), previamente definido. El eje vertical es la posición vertical adimensional ( $y/d$ ).



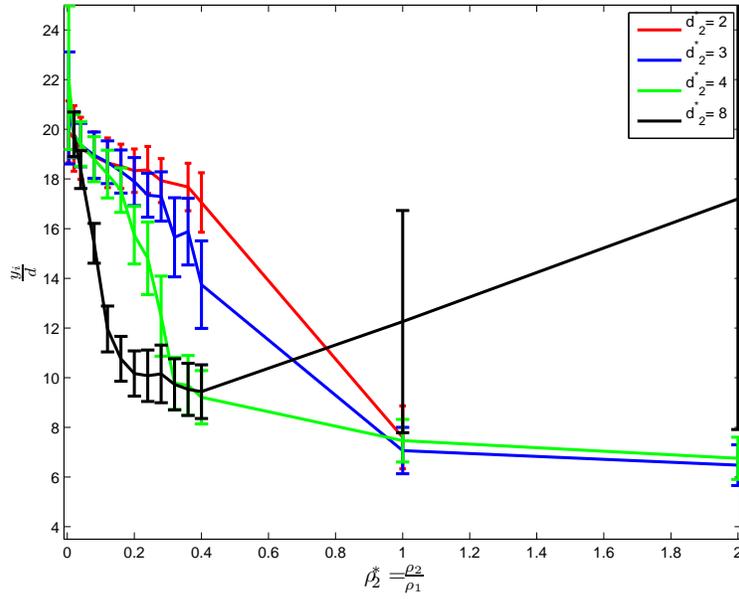


Figura 3.21: Posiciones verticales del intruso como función de la densidad adimensional, para las razones de tamaño estudiadas y una cama de partículas  $d_3^* = 3$ . El eje horizontal es la razón de densidades entre el intruso y el grueso de las partículas ( $\rho^*$ ), previamente definido. El eje vertical es la posición vertical adimensional ( $y/d$ ).

### 3.3.2. Segregación por tamaños

Los mismos datos pueden ser presentados en forma diferente, *i.e.*, la posición vertical como función de la razón de tamaños, para una densidad dada. Las gráficas de las Figuras 3.22 a 3.24 muestran a la posición vertical como función de la razón de tamaños y cada una de las figuras se obtuvo para un diámetro promedio de la cama de partículas.



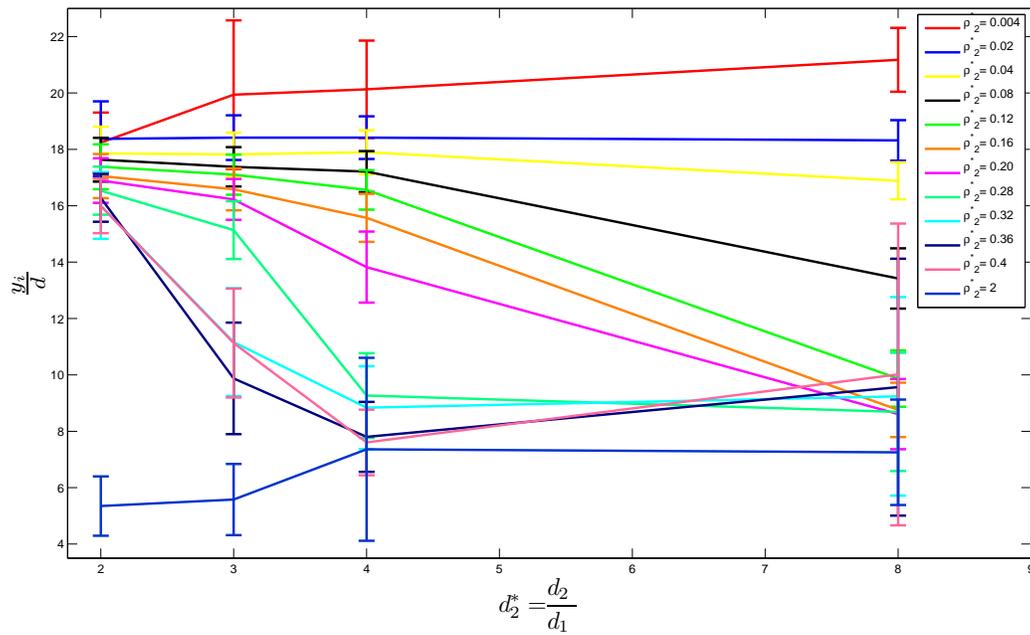


Figura 3.22: Posiciones verticales finales del intruso vs  $d_2^*$ , para  $0.004 \leq \rho^* \leq 2$  y  $d_3^* = 1$ .

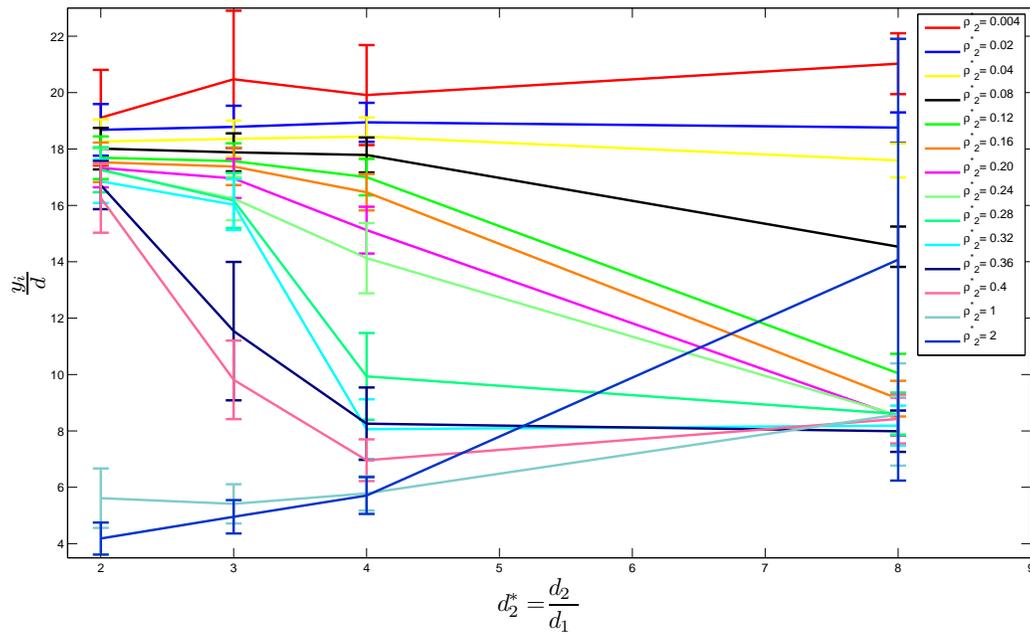


Figura 3.23: Posiciones verticales finales del intruso vs  $d_2^*$ , para  $0.004 \leq \rho^* \leq 2$  y  $d_3^* = 2$ .



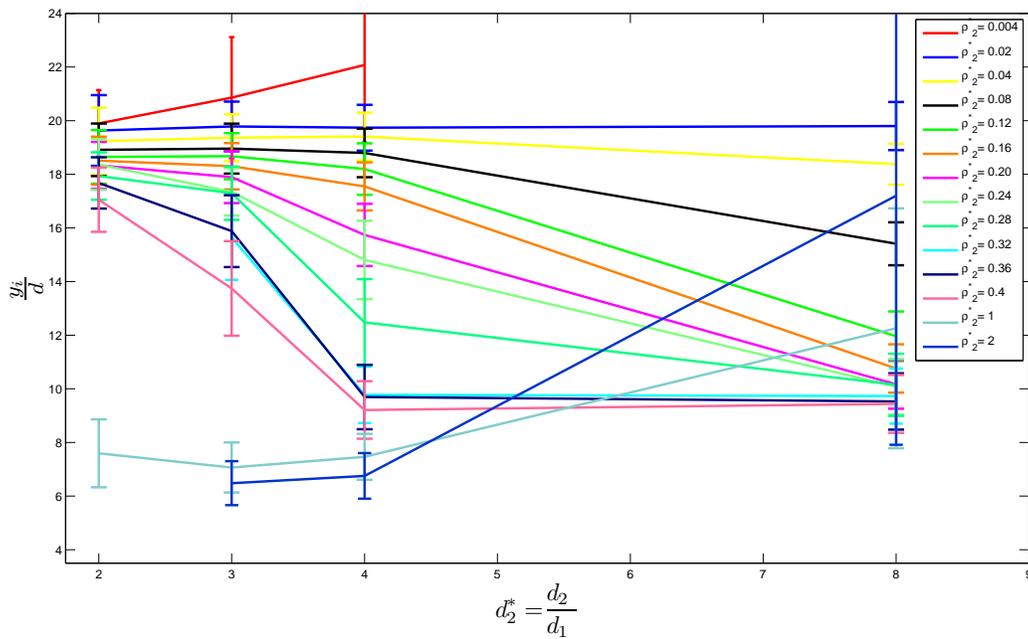


Figura 3.24: Posiciones verticales finales del intruso vs  $d_2^*$ , para  $0.004 \leq \rho^* \leq 2$  y  $d_3^* = 3$ .

De nuevo se observa que las gráficas no cambian sustancialmente para los distintos diámetros de cama, pero algunas observaciones pueden hacerse. Una de ellas es que en principio las partículas con densidad menor tienden a depositarse en posiciones superiores cuando su tamaño aumenta. Esto ocurre porque partículas más grandes hacen contacto en la superficie a la misma altura que las pequeñas, pero su centro de masa está por arriba del de intrusos más pequeños. Esto es un dato importante porque indica que cada diámetro de partícula con densidad cercana a cero tendrá una posición en estado estacionario fija, pero que corresponde a su tamaño. Nuevamente las partículas más grandes y pesadas rebotan con el fondo, lo que introduce fluctuaciones en la medición de la posición vertical, lo que resulta en barras de error muy grandes.

Otro aspecto que también se puede observar es que las curvas de la posición vertical por tamaños se agrupan por diámetros; esto significa que partículas más grandes penetran dentro del grueso de partículas que tienen densidades pequeñas.

Resultados similares fueron reportados por Thomas[2], para tambores girados. Los resultados de posición vertical como función de la densidad pueden compararse entre sí. Para ello sólo es necesario normalizar la posición vertical con la posición vertical máxima del intruso, lo que ocurre cuando éste tiene la menor densidad. Un ejemplo de esto se presenta en la siguiente sección.

### 3.3.3. Comparación con experimentos

El experimento de segregación mostrado en este estudio se realizó bajo condiciones controladas, que son posibles sólo en una simulación numérica. Algunas de las consecuencias que mejoran el control de los experimentos son las siguientes. Al definir a la distribución de partículas de forma numérica, no existen partículas de distinto tamaño al deseado. Las fronteras periódicas permiten hacer un estudio en tiempos muy largos, lo



que permite tener flujo en estado estacionario, sin re-circulaciones en el frente y en la cola del flujo, lo que se traduce en líneas de corriente rectas, evitando efectos de convección, que podrían afectar a los resultados de segregación. El simple hecho de tener los datos de forma numérica da como resultado la obtención de datos de posición y velocidad exactos. Y por último, sólo en un arreglo numérico es posible tener un experimento en 2D.

Sin embargo, es importante utilizar estos resultados a través de comparación con resultados experimentales. En el Capítulo 1 se presentó un proceso de segregación dentro de un disco rotado a velocidad constante (N. Thomas, 2000) y de este trabajo experimental se presentaron resultados similares a los aquí presentados. En esta sección se hace una comparación cualitativa entre ambos resultados y un ejemplo de esta comparación se presenta en la Figura 3.25.

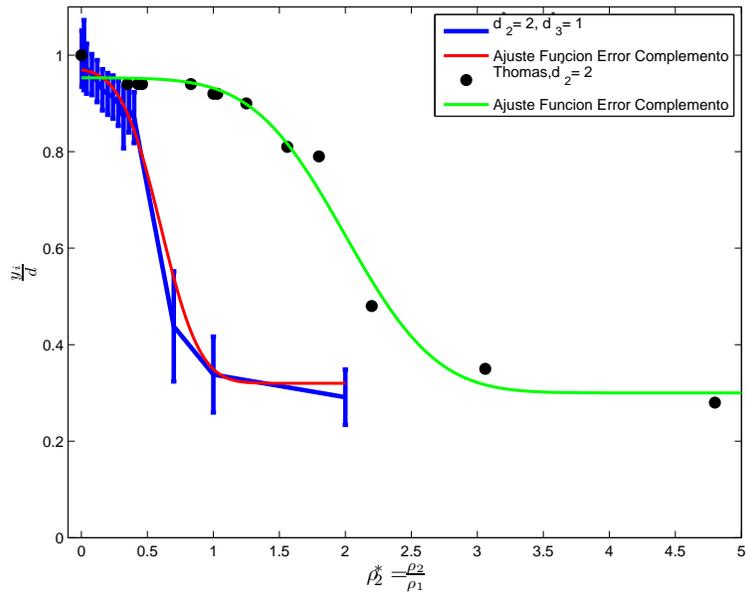


Figura 3.25: Comparación entre posiciones verticales en un arreglo numérico 2D y posiciones radiales experimentales medidas por Thomas (2000).



En la Figura 3.25 se presentan los valores de posición vertical normalizados con la posición máxima en barras de error azules y un ajuste a una función error complemento de los puntos azules. Los puntos negros son los valores medios reportados por N. Thomas y la curva verde es el ajuste a función error de dichos puntos. La primera cosa que salta a la vista es que los ajustes son cualitativamente similares, pero en escalas diferentes; La curva roja cae mucho más rápido que la verde, además de que si se observa con detalle se verá que la curva verde esta desplazada sobre el eje horizontal.

Esta diferencia en las curvas se puede explicar considerando al número de coordinación  $Z$ . Un intruso atrapado en un flujo granular está en contacto con un número de partículas a su alrededor, que le dan una fuerza de red hacia arriba. Si el intruso es un disco rodeado de otros discos en un arreglo 2D, estará en contacto con un número menor de partículas que un intruso esférico rodeado de partículas en arreglo 3D. El intruso esférico está siempre en contacto con más partículas que un intruso circular. El número de partículas que pueden colocarse alrededor de una esfera o una circunferencia, se le denomina número de coordinación ( $Z$ ) y puede ser calculado con un análisis geométrico. Este parámetro es relevante para intentar escalar los resultados numéricos obtenidos con los resultados experimentales de Thomas (2008).

### 3.4. Análisis de fuerzas

Una forma de estudiar este problema de forma muy simplificada es suponer que para cada intruso existe una competencia entre 2 fuerzas en dirección vertical. Una de ellas es el peso que empuja constantemente hacia abajo al intruso y otra de ellas es una fuerza indefinida producto del contacto con las partículas del flujo. Un diagrama de cuerpo libre se muestra en la Figura 3.26.

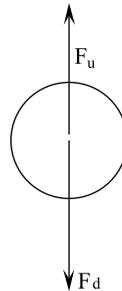


Figura 3.26: Diagrama simplificado de cuerpo libre de un intruso.

Con base a la Figura 3.26 se puede escribir la suma de fuerzas en dirección vertical, la que queda de la siguiente manera:

$$\sum F_y = F_u - F_d = m \frac{dv_y}{dt}, \tag{3.10}$$

donde  $F_u$  es la fuerza hacia arriba, cuya expresión obtuvo por análisis dimensional,  $F_d$  es el peso que se escribe  $F_d = \rho_i V_i g$ . Aquí es importante notar que en el caso 2D,  $V_i$  es el área de la partícula circular, mientras que en el caso 3D,  $V_i$  es el volumen de la esfera. Cabe notar que este análisis simplificado se hizo para un intruso que se encuentra en la posición vertical de equilibrio, por lo que la velocidad vertical no es función del tiempo,  $v_y \neq v_y(t)$ . De manera que la ecuación 3.10 se reduce a:



$$F_u - \rho_i V_i g = 0. \quad (3.11)$$

En este momento se puede proponer una forma de  $F_u$ , por ejemplo se propone que esta fuerza es proporcional a una potencia del gradiente de velocidades  $\dot{\gamma}$ ; lo que se propone debido a la observación que se hizo en la Sección 3.2: Sin gradiente de velocidades vertical no existe segregación. De igual manera se puede decir que esta fuerza depende del número de partículas en contacto con el intruso, o sea el número de coordinación  $Z$ . Por ello la fuerza  $F_u \sim Z(\dot{\gamma})^2$ . Completando las dimensiones y usando la constante de proporcionalidad, la fuerza propuesta queda:

$$F_u = C_1 \cdot Z \cdot (\dot{\gamma})^2 \cdot L/g. \quad (3.12)$$

Usando el tiempo adimensional propuesto del Capítulo 2,  $F_u$  se puede expresar como función de la rapidez de deformación adimensional  $\dot{\gamma}^*$ , lo que queda

$$F_u = C_1 \cdot Z \cdot (\dot{\gamma}^*)^2 \cdot \frac{L}{d}. \quad (3.13)$$

En esta propuesta de la forma de  $F_u$ ,  $C_1$  es una constante de proporcionalidad,  $L/d$  es una longitud característica adimensional. Finalmente, la ecuación 3.11, puede dividirse por el peso de una de las partículas del grueso ( $\rho_p V_p g$ ). Esto es útil porque permite presentar al peso del intruso de forma adimensional. También es importante mencionar que el volumen de cualquier partícula dependerá de si ésta se encuentra en dos o tres dimensiones. En el caso bidimensional, el volumen  $V$  se calcula como el área de una circunferencia, mientras que en tres dimensiones,  $V = 4/3\pi R^3$ . Por ello el peso adimensional del intruso se calcula como  $\rho^* S^n$ , donde  $n$  puede tomar el valor de 2 o 3, con las consideraciones anteriores. Al dividir toda la ecuación 3.11 también se altera el valor de  $C_1$ , por ello dicha ecuación queda

$$C \cdot Z \cdot (\dot{\gamma}^*)^2 \cdot \frac{L}{d} = \rho^* \cdot S^n, \quad (3.14)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad dividida por la masa de una partícula del flujo,  $\rho^*$  y  $S$  son la razón de densidades y diámetros entre intruso y partículas del flujo.  $S$  se define como  $S = d_2/d_1$  y  $n$  puede valer 2 o 3 dependiendo de si la partícula se considera como una circunferencia o una esfera, respectivamente. Dependiendo de la fuerza dominante, el intruso encontrará posiciones de equilibrio en la superficie o en el fondo del plano inclinado. La fuerza del peso irá aumentando como función de la masa del intruso, mientras que la fuerza hacia arriba será constante. Esta última observación se corroboró con simulaciones numéricas en las que se registraron las fuerzas de cada partícula y se muestra en la Figura 3.27.

En la Figura 3.27 se muestra que en los puntos medidos, la fuerza de empuje  $F_u$  es constante. De manera que cuando el peso pasa cierto límite, se observa la sedimentación del intruso. Debido a las fluctuaciones de la fuerza de empuje  $F_u$  es que el intruso se sitúa en diferentes posiciones. En las Figuras 3.28 a 3.31 se muestra el valor del punto para el cual las fuerzas de empuje y el peso se intersecan; esta línea vertical se usa para marcar la diferencia que hay entre los casos en los que el intruso está en la superficie o por debajo de ella.



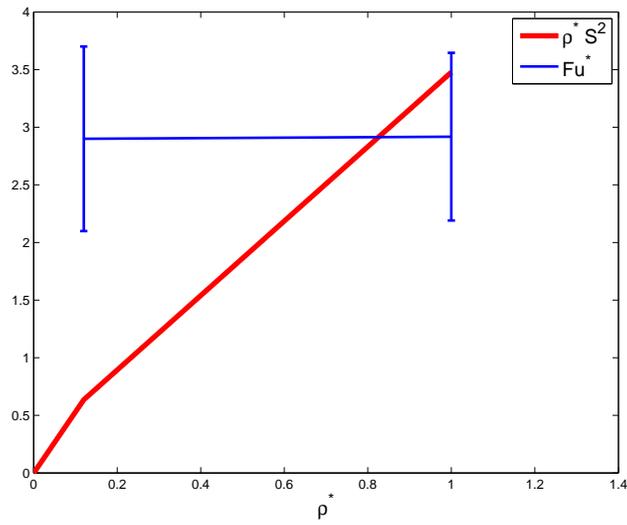


Figura 3.27: Peso adimensional del intruso y Fuerza adimensional de empuje como función de la razón de densidades ( $\rho^*$ ). El peso adimensional está medido como  $\rho^* S^2$  y la fuerza de empuje  $F_u$  está tomada de las simulaciones numéricas. Se presentan 2 puntos de comparación, cuando  $\rho^*$  es 0.12 y 1.

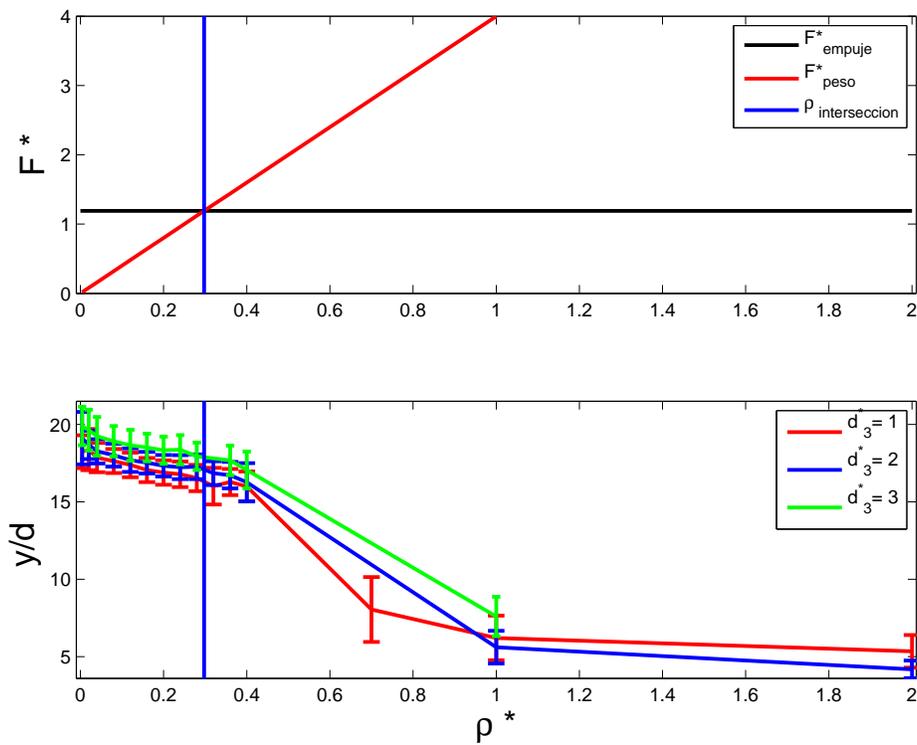


Figura 3.28: Arriba: competencia entre fuerzas verticales para  $S = 2$ , en todos los tamaños de cama estudiados. Abajo: posición vertical como función de la densidad adimensional. La línea vertical azul es la intersección entre fuerzas que separa a partículas en la superficie de las demás. Las condiciones de estas simulaciones están en la Tabla 2.4



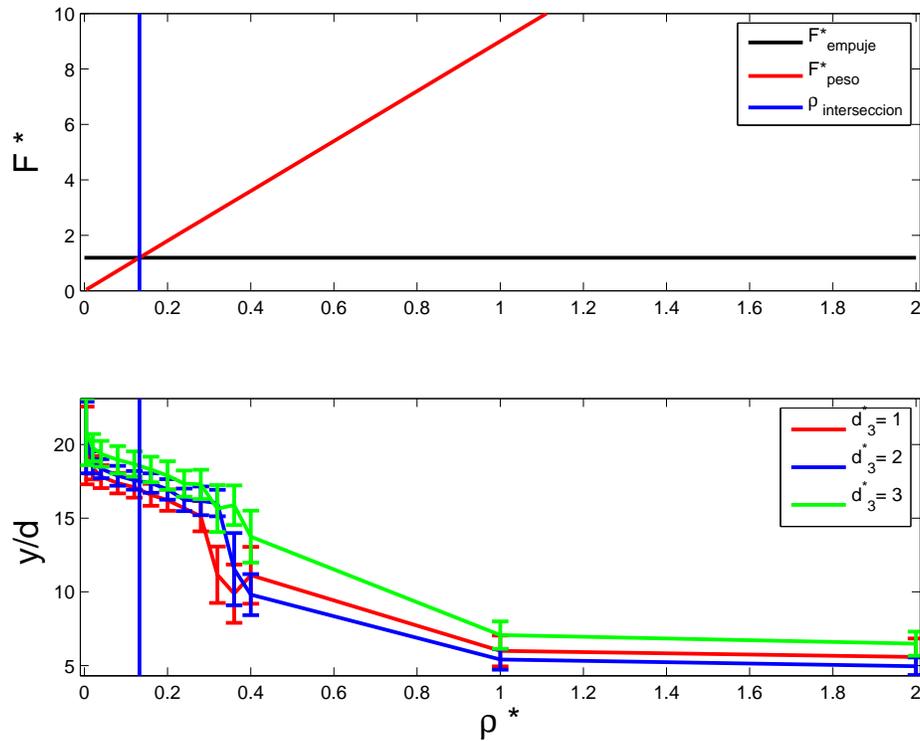


Figura 3.29: Arriba: competencia entre fuerzas verticales para  $S = 3$ , en todos los tamaños de cama estudiados. Abajo: posición vertical como función de la densidad adimensional. La línea vertical azul es la intersección entre fuerzas que separa partículas en la superficie de las demás. Las condiciones de estas simulaciones están en la Tabla 2.4

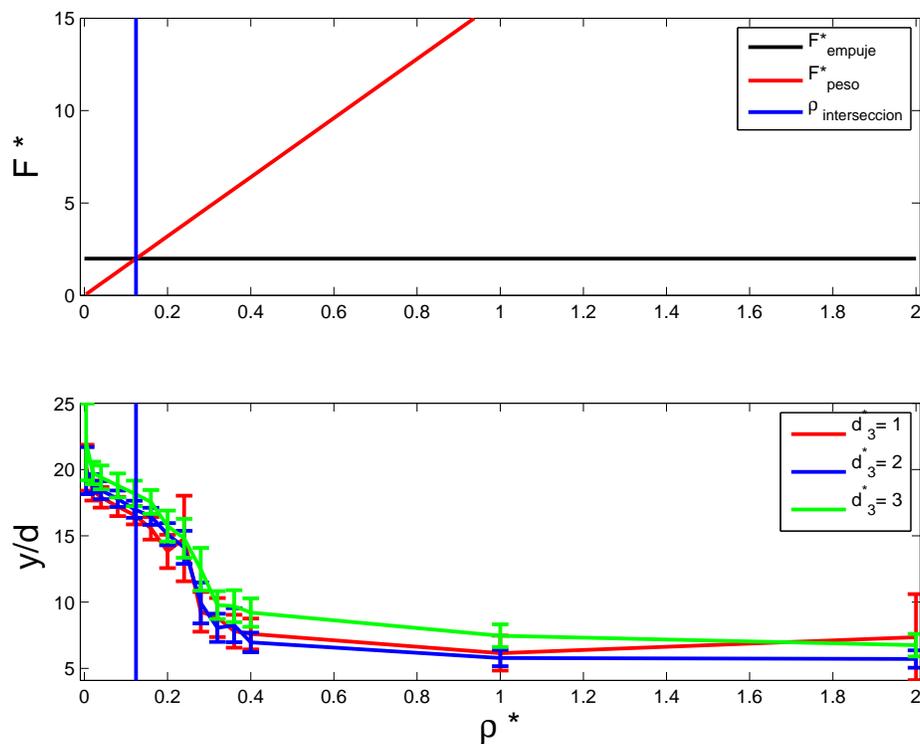


Figura 3.30: Arriba: competencia entre fuerzas verticales para  $S = 4$ , en todos los tamaños de cama estudiados. Abajo: posición vertical como función de la densidad adimensional. La línea vertical azul es la intersección entre fuerzas que separa partículas en la superficie de las demás. Las condiciones de estas simulaciones están en la Tabla 2.4



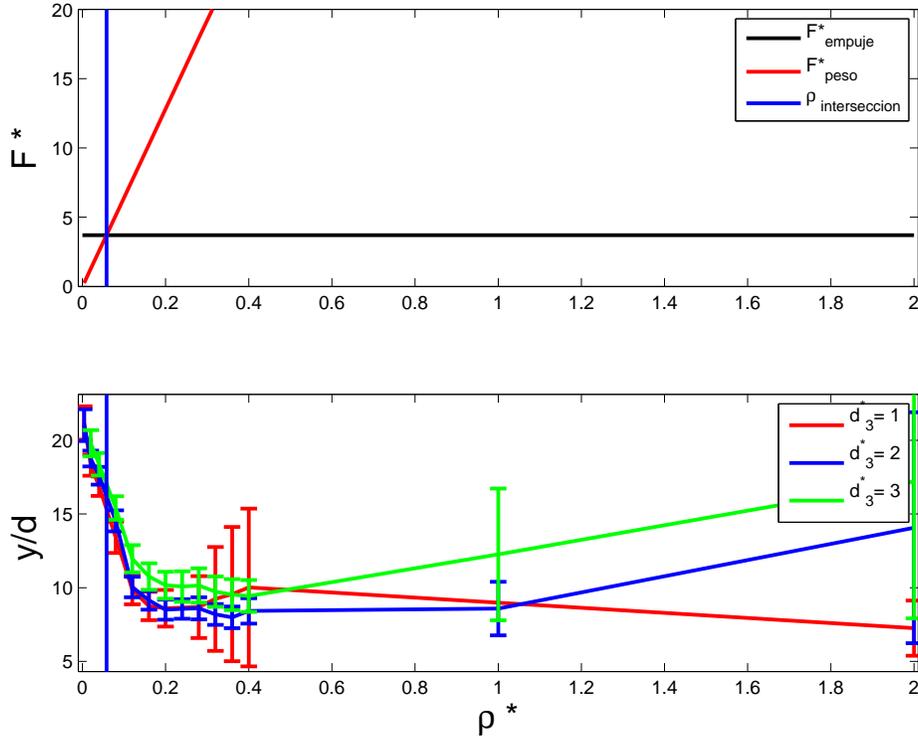


Figura 3.31: Arriba: competencia entre fuerzas verticales para  $S = 8$ , en todos los tamaños de cama estudiados. Abajo: posición vertical como función de la densidad adimensional. La línea vertical azul es la intersección entre fuerzas que separa partículas en la superficie de las demás. Las condiciones de estas simulaciones están en la Tabla 2.4

De igual manera, usando el número de coordinación para esferas en 3D, se escalaron los resultados para los experimentos de Thomas y el resultado se presenta en las Figuras 3.32 a 3.34. Para poder escalar estos resultados es necesario considerar que los arreglos son muy diferentes. El arreglo experimental es un arreglo cuasi-bidimensional, mientras que el nuestro es bidimensional. El arreglo numérico consiste en un plano inclinado con fronteras periódicas, mientras que el experimental es un tambor giratorio. A pesar de estas diferencias, la física que gobierna ambos mecanismos de segregación deberá de ser la misma, por lo que con las consideraciones apropiadas la descripción deberá ser igualmente apropiada.

Una de las consideraciones más importantes tiene que ver con el hecho de que en un plano inclinado la variable física responsable del movimiento es el ángulo de inclinación, mientras que en el tambor giratorio, el movimiento se debe a una velocidad angular constante  $\omega$ . Mientras que en el plano inclinado el perfil de velocidades es resultado de la física de las partículas que lo componen, en el tambor el perfil de velocidades radial es inducido por el giro, por lo que el perfil tiene la siguiente forma

$$v_{\theta}(r) = \omega \cdot r, \tag{3.15}$$

donde  $v_{\theta}(r)$  es la velocidad del tangencial del disco,  $\omega$  es la velocidad angular del disco y  $r$  es la posición radial. De manera que en este caso, la rapidez de deformación  $\dot{\gamma}$  es la velocidad angular  $\omega$  y se usó para escalar al arreglo experimental. Otra diferencia importante es que en este caso el número de partículas que rodean al intruso es mayor, a pesar de tenerse un arreglo cuasi-bidimensional, por lo que el número de coordinación  $Z$  que se debe de usar, es el que corresponde a un arreglo en 3D.



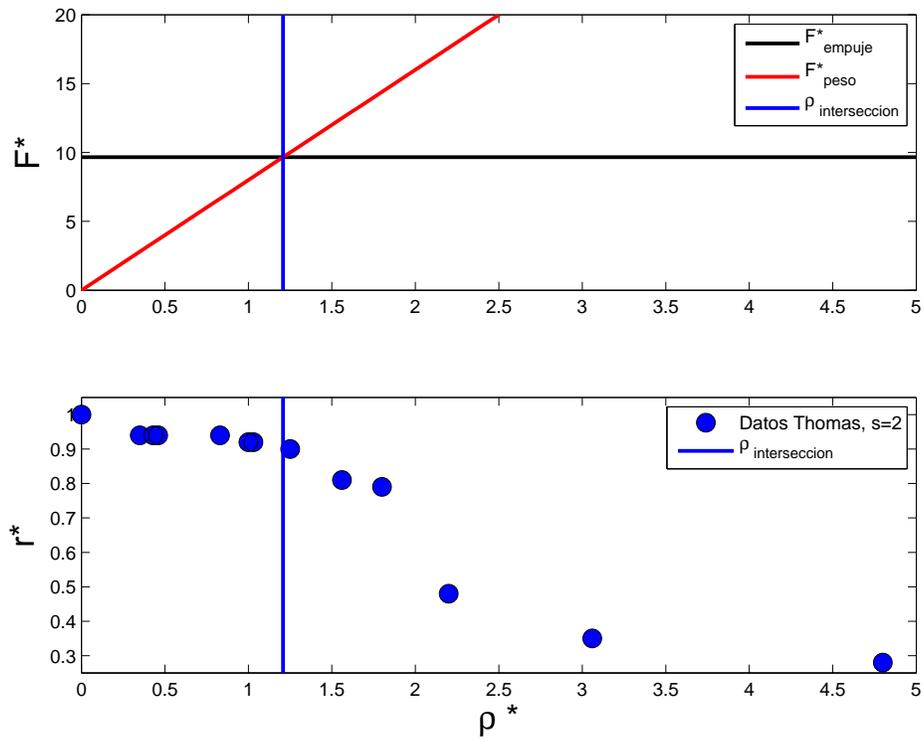


Figura 3.32: Escalamiento de fuerzas verticales de Thomas para  $d_2^* = 2$ . Resultados en 3D.

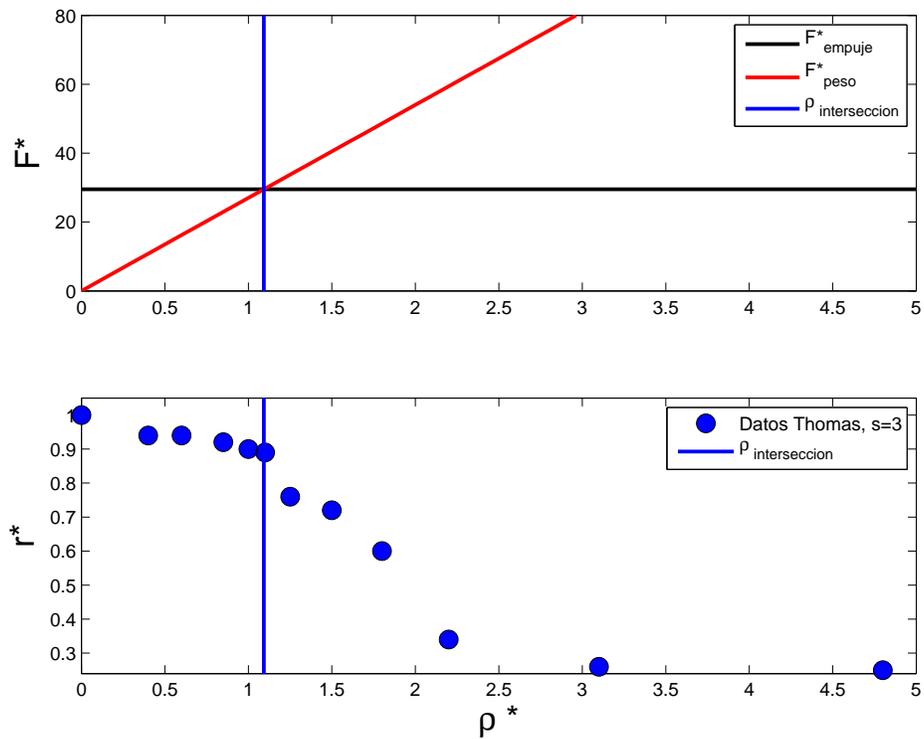


Figura 3.33: Escalamiento de fuerzas verticales de Thomas para  $d_2^* = 3$ . Resultados en 3D.



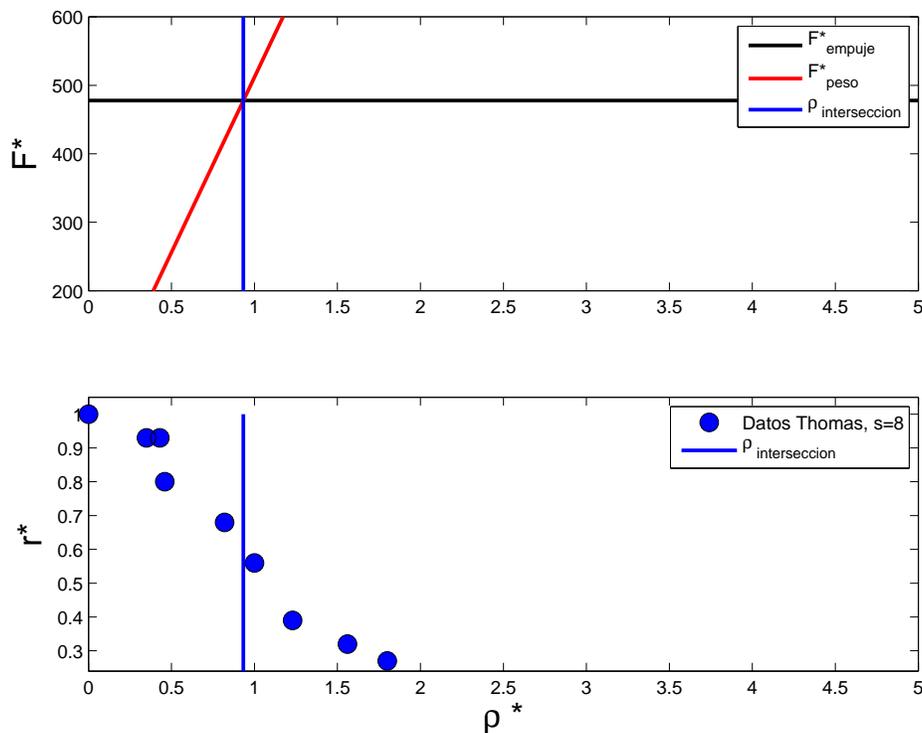


Figura 3.34: Escalamiento de fuerzas verticales de Thomas para  $d_2^* = 8$ . Resultados en 3D.

Una de las cosas que se pueden notar es que los resultados escalan de forma muy similar en los dos arreglos, a pesar de las grandes diferencias que existen entre ellos; tan grandes como un arreglo en forma de tambor girado, comparado con un plano inclinado con fronteras periódicas. Es importante mencionar que la constante de proporcionalidad usada fue la misma para todos los valores mostrados, tanto para los experimentos numéricos, como los experimentales.

En casos en 2 y 3 dimensiones el número de coordinación  $Z$  juega un papel fundamental, este es una medida de la cantidad de partículas que se encuentran alrededor de una esfera o una circunferencia de radio  $R$ . Por ello, la fuerza que aporta en promedio una sola partícula al intruso de mayor tamaño, tiene que multiplicarse por el número de partículas alrededor del mismo. En el Apéndice A, se resuelve el problema geométrico de calcular el número de coordinación para una partícula grande rodeada de partículas más pequeñas de diámetro igual. Esto se hizo para 2 y 3 dimensiones y se calculó la razón de números de coordinación, que ayudaron a escalar el problema. En el desarrollo de este trabajo se buscaron distintas explicaciones posibles al fenómeno de segregación, se usó ésta por ser una explicación simple y apropiada.

### 3.4.1. Otras teorías acerca de la segregación que fueron descartadas

En la búsqueda de una explicación simple al fenómeno de segregación, se ensayaron algunas otras. Estas teorías se descartaron por ser inapropiadas, o insuficientes. A continuación se da una explicación breve de cada una.



### Flotación de Bernoulli para un objeto sumergido en un fluido con densidad estratificada

Supongamos que se tiene un objeto sumergido en un líquido con densidad estratificada linealmente como se muestra en la Figura 3.35 de manera que la densidad aumenta como función de la profundidad de forma

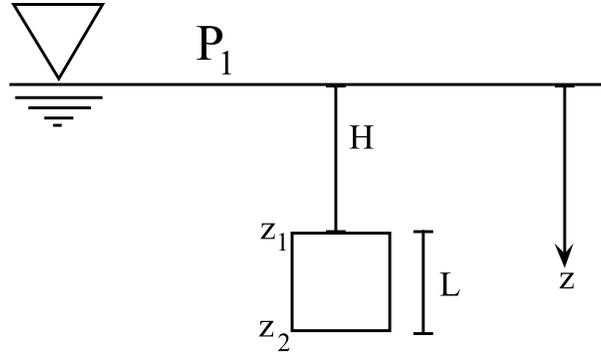


Figura 3.35: Teoría con densidad estratificada

que  $\rho = \rho_0 + k \cdot z$ . Si esto es cierto la diferencia de densidades en  $z_1$  y  $z_2$  deberá adicionar empuje adicional a la fuerza de Arquímedes convencional. De manera que planteando que  $dP = \rho \cdot g \cdot dz$ , e integrando desde  $z_1$  a  $z_2$  se obtiene la expresión para diferencia de presiones y para la fuerza de empuje, que se muestran a continuación.

$$P_2 - P_1 = \rho_0 \cdot g \cdot L + g \cdot k \cdot H \cdot L + \frac{1}{2} \cdot g \cdot k \cdot L^2, \quad (3.16)$$

y

$$F_v = g \cdot L^3(\rho_0 + k \cdot H) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot k \cdot L^4. \quad (3.17)$$

En la ecuación anterior si la constante  $k$  se hace cero y se considera que el volumen es  $L^3$ , se recupera la fuerza de empuje de Arquímedes a densidad constante. Esta teoría es interesante porque propone una fuerza de empuje que aumentaría conforme el fluido se vuelve más denso en capas inferiores, lo que en principio se podría pensar explica las diferentes posiciones verticales que un intruso toma dentro del flujo de partículas. Sin embargo, recordando la Figura 3.13, la densidad tiene un cambio súbito sólo cerca de la superficie y después de dicho cambio, la densidad está cerca de ser constante.

Esta idea se corroboró usando al perfil de densidades mostrado dentro de la teoría y el resultado es que se necesita un perfil de densidades con un cambio más grande para que este efecto sea importante.

### Flotación de Arquímedes para un objeto parcialmente sumergido

Después de observar el cambio drástico que ocurre en la densidad del flujo, se pensó que una partícula parcialmente sumergida en un fluido con densidad constante podría explicar el problema, como se ilustra en la Figura 3.36.

En dicha figura se muestra un esquema de lo que puede ser una esfera (o un círculo) de radio  $R$ , sumergida una altura  $H$  en un líquido de densidad constante. Entre más profundo se sumerge la esfera, más volumen de líquido desplaza y por ello la fuerza de empuje es mayor. El volumen sumergido de la esfera se calcula  $V_s = \pi \cdot H^2 \cdot (R - \frac{H}{3})$ . La fuerza de empuje se define como  $F_B = \rho_l \cdot V_s \cdot g$ . Además se puede argumentar



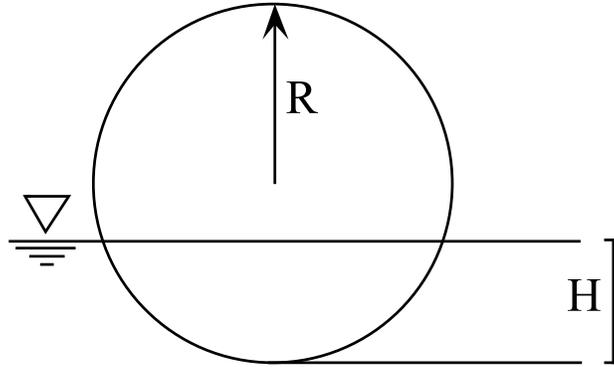


Figura 3.36: Esfera parcialmente sumergida en un fluido.

que  $0 \leq H \leq 2 \cdot R$ , por lo que  $H$  sólo es una fracción de  $R$ ; por ello se puede escribir a  $H = k \cdot R$ , donde  $0 \leq k \leq 2$ . Hecho esto se puede desarrollar una fuerza adimensional que queda de la forma

$$\frac{\Delta F}{\rho_f \cdot \pi \cdot R^3 \cdot g} = \frac{1}{3}k^3 - k^2 + \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad (3.18)$$

donde  $\rho_f$  es la densidad del fluido y  $\rho_p$  es la densidad de la partícula. Este mismo desarrollo se hizo para circunferencias sumergidas. El inconveniente principal de esta teoría es que, después de que el intruso está completamente sumergido, la fuerza de empuje se hace constante, por lo que la posición del intruso queda limitado a posiciones en la superficie. Por lo tanto, los resultados numéricos o experimentales no coinciden con las observaciones.

### Peso del intruso incrementado por las partículas encima de él

Otra de las posibles explicaciones que se encuentran en la literatura es que los intrusos al sumergirse en el flujo de partículas soportan el peso adicional por las partículas sobre ellos, incrementando su peso aparente. De manera que, dependiendo de la profundidad, el balance de fuerzas cambiará. La principal complicación de esta teoría es el plantear una función que modele el peso aparente del intruso. Esto es complicado porque muchas partículas pueden estar por encima del intruso, pero no todas proyectan su peso verticalmente sobre el intruso. Una forma que se consideró fue una fuerza relacionada con el arreglo que se muestra en la Figura 3.37, muestra como una partícula a diferentes profundidades dentro de un flujo, soporta a otras. Se supuso esta forma piramidal considerando que sólo dos partículas en esta zona contribuyen de manera considerable al peso añadido. Al introducir esta fuerza en el balance vertical  $\sum F_y = F_B - W - F(y) = 0$ , la posición resulta:

$$y \sim \frac{\rho_i}{\rho_f}^{1/2}. \quad (3.19)$$

Esta relación no pudo representar al fenómeno como se pensaba, debido a que en algunas situaciones la curvatura no correspondía con la observada y por ello se descartó. Una de las razones para esto puede ser que, no se tomó la forma apropiada del peso de las partículas sobre el intruso. Para varias formas del peso añadido propuesto el resultado no se ajustó a lo observado.



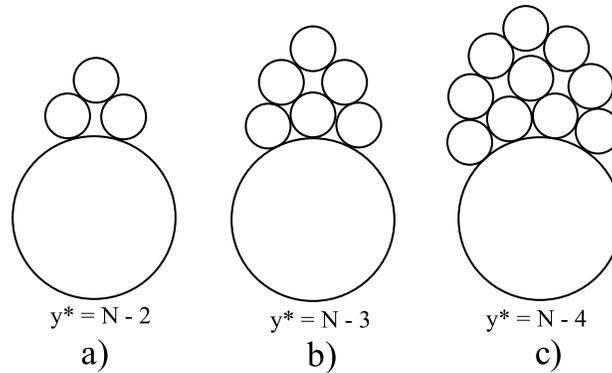


Figura 3.37: Partículas sobre un intruso a diferente altura.  $N$  es la capa de partículas más alta.

### Temperatura granular: huecos en el tiempo y en el espacio

La temperatura granular se puede interpretar como una medida de la vibración que las partículas experimentan. La vibración hace que se abran huecos en el material. Considerando el perfil de temperatura granular calculado en secciones anteriores, se puede evaluar la migración de un intruso en este campo.

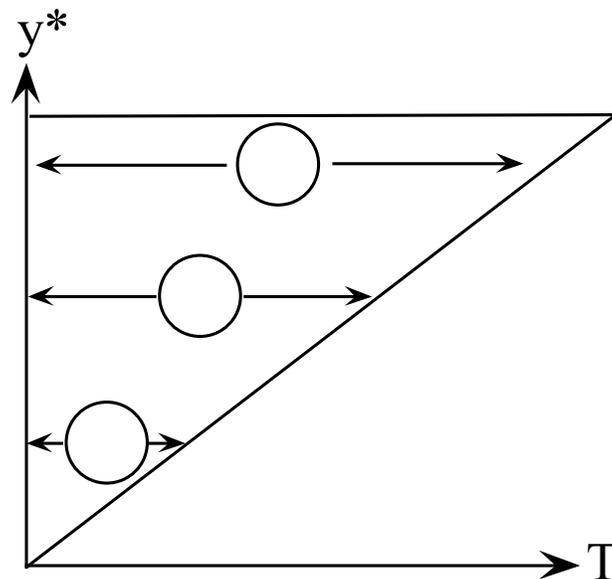


Figura 3.38: Ilustración del tamaño de los huecos temporales que se abren en el material debido al perfil de temperaturas.

La Figura 3.38 ilustra una de las interpretaciones que tiene la temperatura granular. Las partículas a cierta altura tienen fluctuaciones de velocidad, las cuales se pueden entender como una incertidumbre de la posición de cada partícula, lo que significa que en un instante dado, un par de partículas abrirán un hueco. Si el hueco es de igual tamaño o mayor que el intruso, éste podrá desplazarse. Lo único que detiene al intruso en su avance es que los huecos que se abran sean pequeños y que éste con su peso no los pueda forzar a abrirse. Esta es una teoría interesante, pero no explica por qué partículas ligeras y de diámetro pequeño son incapaces de entrar en el flujo. En este caso, la teoría no explica la importancia que tiene la masa de la partícula y sólo importa su tamaño. Una teoría que tomando como base al gradiente de temperatura, pero

que incluyera la importancia de la masa, podría explicar correctamente la posición vertical del intruso.

Es posible que las teorías individuales expliquen la posición del intruso por zonas. Se observa que la teoría del flujo con densidad estratificada y la fuerza de Arquímedes en un objeto parcialmente sumergido, explican lo que ocurre en la superficie del flujo de material granular. Con una función apropiada para el peso añadido por partículas encima del intruso, podría explicarse lo que ocurre por debajo de la parte superior de las curvas  $y^* = y^*(\rho^*)$ , pero no se explicarían las interacciones cerca de la superficie y del fondo del plano inclinado, donde el intruso llega a una posición mínima absoluta. Finalmente la temperatura granular, es una teoría interesante, pero incompleta, ya que por sí misma no incluye la importancia de la masa del intruso.

Muy posiblemente algunos de los efectos anteriores jueguen un papel; sin embargo, existen otros efectos que no se consideraron y que podrían ser relevantes; como las cadenas de fuerza resultado de los contactos normales entre partículas. Finalmente, es posible proponer un ajuste empírico para calcular las posiciones finales de intrusos de diferente tamaño en un flujo de partículas. Siempre y cuando se consideren las condiciones usadas en este trabajo. La relación empírica es

$$\frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}} = \text{erfc}(\lambda \cdot \rho^*), \quad (3.20)$$

donde  $y$  es la posición vertical del intruso,  $y_{min}$  y  $y_{max}$  son las posiciones máximas y mínimas del sistema,  $\lambda$  es una constante que es función de la razón de tamaños  $S$  y del número de coordinación  $Z$ , o sea  $\lambda = \lambda(S, Z)$  y  $\rho^*$  es la razón de densidades entre el intruso y las partículas. Se puede argumentar que la constante  $\lambda$  también es función del algún tiempo característico del sistema, como lo puede ser  $\dot{\gamma}$ . De manera que la relación empírica propuesta tiene la forma de una solución a la segunda Ley de Fick unidimensional para difusión en un sólido semi-infinito o a una ecuación de calor de Fourier, por lo que la relación empírica está relacionada con la física del fenómeno.

Una de las condiciones que no se han mencionado hasta ahora y que se deben tomar en cuenta para un trabajo futuro, es que esta relación empírica sólo es válida con un sólo intruso. En caso de tener concentraciones mayores, es muy probable que los intrusos interactúen entre ellos o que al cambiar la densidad del flujo a su alrededor afecten las posiciones de equilibrio. Para poder saber lo que ocurre cuando las concentraciones son altas, es necesario hacer un estudio mucho más amplio.





## CAPÍTULO

### 4

# Conclusiones y Trabajo Futuro

Se diseñó un experimento numérico en el que se puede estudiar una avalancha granular bidimensional de forma controlada, *i.e.*, una avalancha sin zonas de recirculación en el frente y la cola. Esto es importante porque en los experimentos estas zonas suelen tener zonas de convección que afectan en los estudios del material granular como fluido y en particular los estudios de segregación. De igual manera el hecho de que la avalancha fuera bidimensional es importante, porque permite observar el flujo de manera directa, lo cual es imposible en estudios experimentales.

Se realizó un análisis de los parámetros involucrados en el flujo monodisperso de un plano inclinado de partículas circulares y posteriormente se extendió dicho análisis para el estudio de un proceso de segregación en dos dimensiones.

Se estudiaron de manera cualitativa los efectos de tener un flujo de material granular con un coeficiente de fricción bajo y uno alto. Se observó deslizamiento del material granular análogo a un sólido, con un coeficiente de fricción bajo  $\mu = 0.1$ , en contraste con el gradiente de velocidades observado en el caso de un coeficiente de fricción mayor  $\mu = 0.2$ . De este análisis también se observó que el gradiente de velocidades es resultado de fluctuaciones verticales de velocidad, que no se observan en el caso del deslizamiento. Estas fluctuaciones de velocidad se interpretan de manera análoga a la intensidad de turbulencia que se observa en flujos newtonianos a un alto número de Reynolds, en los cuales las capas de fluido dejan de moverse en laminas para mezclarse entre si. En este caso las líneas de trayectoria de las partículas se mezclan en longitudes mayores al largo de la caja y por ello ocurre la segregación en los tiempos observados. Es interesante notar que en este análisis el comportamiento del material granular pasa de ser un sólido a un fluido “turbulento”. Una conclusión importante de este análisis es que no existe un solo modelo para representar las propiedades que los flujos granulares pueden mostrar (pueden comportarse como sólidos o como fluidos, dependiendo de

las características que tenga el sistema). Estas características pueden ser de las partículas que componen el sistema, como en este caso el coeficiente de fricción; pero también pueden depender de las fronteras del sistema o de alguna entrada externa de energía.

## 4.1. Avalanchas

El estado de agitación del flujo de una avalancha en el plano inclinado, depende de la condición en la base. Si es lisa, la avalancha puede deslizarse como un bloque sólido; si es rugosa, se pueden introducir fluctuaciones que resultan en un gradiente de velocidad. Así se usó una capa de partículas fijas en la base del flujo. Se observaron tres comportamientos:

- El ángulo de inclinación es demasiado pequeño para provocar que el material fluya.
- Pasado el límite anterior, existe un movimiento del material como fluido y el conjunto alcanza un estado estacionario (alcanzó un valor promedio constante de energía cinética).
- Para cierto ángulo de inclinación crítico, que es función del coeficiente de fricción, el conjunto no alcanza el estado permanente y por ello se acelera indefinidamente.

En los tres casos mostrados anteriormente se usó una noción de dinámica de sistemas físicos para interpretar los resultados observados. Se hizo notar que las respuestas a dichos sistemas encajan con lo que se esperaría de sistemas de segundo orden, con parte masiva, elástica y disipadora. Cuando el ángulo de inclinación es pequeño se observa algo parecido a una respuesta al impulso. Para ángulos intermedios y grandes se observa una respuesta estable y una inestable respectivamente. Las fluctuaciones en los valores medidos son producto de que el sistema sea discreto. También se caracterizó a la energía cinética en estado permanente como función del ángulo de inclinación y se observó que la relación funcional es del tipo

$$E_{ct} \sim \frac{1}{\theta - B}, \quad (4.1)$$

donde  $B$  depende del coeficiente de fricción. Esta relación es importante porque es válida para los dos coeficientes de fricción estudiados. Sin embargo, para validar esto será necesario estudiar casos con coeficientes de fricción  $\mu$  más altos.

Los resultados obtenidos de la energía cinética como función del ángulo de inclinación se usaron para diseñar las simulaciones en las que se estudió a la posición de un intruso dentro del flujo como función de la razón de tamaños  $S$ , de la razón de densidades  $\rho^*$  y el tiempo  $t$ . Todos los casos de segregación se estudiaron con un ángulo de inclinación de  $21^\circ$ , debido a que con éste se asegura un flujo estacionario (con energía cinética promedio).

## 4.2. Rugosidad macroscópica

Usando la cama de partículas adherida al plano inclinado se hicieron mediciones para caracterizar al material como un fluido. Se midió el perfil vertical de velocidades  $v_x = v_x(y^*)$ , se hicieron mapas escalares



de densidad, de temperatura granular y se obtuvieron perfiles verticales de densidad y de temperatura. Los perfiles de velocidad y temperatura granular aumentan con la profundidad  $y$  y en ambos casos son aproximadamente lineales.

La cama de partículas adherida al plano inclinado cumplió con su objetivo, que era insertar fluctuaciones de velocidad verticales que favorecieran los gradientes de velocidad horizontal. Esto dio como resultado los perfiles de velocidad, densidad y temperatura mencionados.

### 4.3. Segregación

Manteniendo el área total de las partículas constante (que en 3 dimensiones equivaldría a decir que a volumen constante), se agregó un intruso de diferente tamaño y densidad y se estudió su posición vertical como función del tiempo, densidad y tamaño.

Se midieron posiciones verticales del intruso como función del tiempo, densidad y tamaño. En el caso de las mediciones de posición vertical como función del tiempo, se encontró que todos los intrusos sin importar su tamaño o densidad alcanzan una posición de equilibrio media. Esta posición tiene fluctuaciones importantes que suelen ubicar a la partícula en posiciones instantáneas varios diámetros por arriba de la posición media. Además, se obtuvieron gráficas de la posición como función de la densidad adimensional  $\rho^*$  para distintas razones de tamaño y viceversa. Para una  $\rho^*$  dada las partículas con  $S$  más grande se segregaron más rápidamente. Estas gráficas mostraron que con una cama de partículas grande en el fondo las partículas muy masivas rebotan, induciendo incertidumbres grandes en la medición de la posición vertical.

También se notó que intrusos de distinto diámetro tienen distintas posiciones de equilibrio, debido a que los centros de masa de partículas grandes y densidades pequeñas suelen establecerse en posiciones superiores a las de tamaño pequeño. Este dato aunque es evidente, es importante cuando se trata de adimensionalizar la posición de equilibrio con las posiciones máximas y mínimas definidas en la relación empírica de la función error complemento.

Se encontró que el número de coordinación  $Z$  es muy importante para escalar los resultados de dos a tres dimensiones.

### 4.4. Sobre las fuerzas

Con base en análisis dimensional se propuso una fuerza de empuje que depende de la rapidez de deformación y que en conjunto con el número de coordinación es capaz de escalar datos numéricos con los resultados experimentales.

Se evaluaron distintas teorías para explicar el fenómeno de segregación, sin embargo no se encontró una explicación completa. Es claro que aún es necesaria una explicación más detallada de este fenómeno.



## 4.5. Trabajo Futuro

Para poder asegurar que la curva de  $E_{ct} = E_{ct}(\theta)$  (Eqn. 4.1) es una curva maestra, es necesario hacer experimentos para un rango mayor de parámetros, debido a que solo se consideraron dos valores del coeficiente de fricción.

Se debe estudiar el efecto del coeficiente de tener camas de partículas en la base del plano inclinado con tamaños mucho mayores a los estudiados aquí y observar su efecto en la segregación.

Sería deseable medir las implicaciones de tener más intrusos dentro del flujo. Sería interesante hacer experimentos de segregación en los que el espesor de la capa de partículas sea por lo menos un orden de magnitud mayor que el diámetro mayor de partícula.



## APÉNDICE

### A

# Número de coordinación en 2D y 3D

Una de las conclusiones más importantes de este trabajo es que la fuerza vertical que experimentan los intrusos dentro de un flujo de partículas se puede escalar, pasando de un arreglo bidimensional a uno tridimensional, a través del número de coordinación  $Z$ . El número de coordinación es una medida de la cantidad de partículas que pueden colocarse alrededor de otra partícula. Esta medida es un número entero y depende de la relación de diámetros entre la partícula central y las que le rodean; así como si de la geometría es en 2 o 3 dimensiones. Para obtener el número de coordinación máximo en 2 y 3 dimensiones, es necesario resolver un problema geométrico; ambos casos se plantean y se resuelven a continuación.

### A.1. Número de coordinación en 2D

En la Figura A.1 se muestra un esquema en donde una circunferencia de tamaño mayor está rodeada de otras circunferencias y sólo se tocan entre si en un sólo punto. La figura muestra las relaciones geométricas que se tienen en la medida del número de coordinación.

De las relaciones observadas en la Figura A.1b se puede decir que:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{l}{d + D}. \quad (\text{A.1})$$

Además sabiendo que  $l = d$  y proponiendo que  $\theta = \frac{2\pi}{Z}$ , se puede obtener al número de coordinación  $Z$  como función de la razón de tamaños  $S = D/d$ ; lo que queda de la siguiente manera:

$$Z_{2D} = \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{1}{S+1}\right)}. \quad (\text{A.2})$$

De Igual manera, se pueden usar relaciones trigonométricas para encontrar otra forma del número de coor-

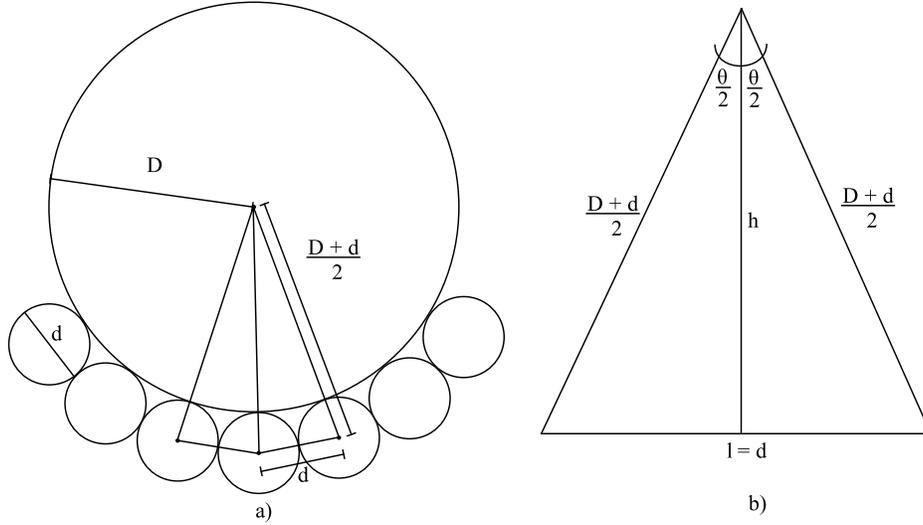


Figura A.1: Número de coordinación en 2D. a) Circunferencia rodeada de circunferencias de tamaño menor. b) Muestra las relaciones geométricas de un triángulo que se forma con el centro de la circunferencia mayor y 2 de los centros de las circunferencias pequeñas.

dinación, de manera que

$$(R + r)^2 = r^2 + h^2. \quad (\text{A.3})$$

Por lo que la ecuación queda:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{r}{\sqrt{R^2 + 2rR}}, \quad (\text{A.4})$$

simplificando la ecuación anterior, el ángulo con el que se abre el cono queda como

$$\theta = 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{s(s+2)}} \quad (\text{A.5})$$

Sabiendo que el perímetro total de la circunferencia es  $2\pi R$ , finalmente el número de coordinación queda:

$$Z_{2D} = \frac{\pi}{\arctan \frac{1}{\sqrt{s(s+2)}}}, \quad (\text{A.6})$$

donde las expresiones de A.2 y A.6 son equivalentes. Los valores del número de coordinación para diferentes relaciones de tamaño  $S$  se presentan en la Tabla A.1.

Y como se observa cuando la relación de tamaños es  $S = 1$ , el número de coordinación es 6; lo que es dato conocido de sistemas cristalinos. Es importante mencionar que el número de coordinación  $Z$  es un número entero, de manera que el resultado obtenido de la ecuación tiene que truncarse para que represente al número de esferas que pueden colocarse en el perímetro de la esfera mayor. De igual manera, se puede hacer un análisis semejante para obtener el máximo número de coordinación entre esferas, mismo que se muestra en la siguiente sección.

## A.2. Número de coordinación en 3D

Para obtener el número de coordinación entre esferas se eligió calcular el ángulo del cono que es resultado la unión entre el centro de una esfera y las tangentes de una esfera menor. Ambas esferas están en contacto



Tabla A.1: Valores del número de coordinación en 2D

$\frac{D}{d}$	$Z_{2D}$
1	6
2	9.2
3	12.4
4	15.6
8	28.2

en un punto, tal como se muestra en la Figura A.2

En la Figura A.2 se observa que hay 3 curvas:  $C_1$  es una esfera de radio  $R$ ,  $C_2$  es una esfera de radio  $r$  que es tangente a  $C_1$  y finalmente  $l$  es una línea recta que parte del centro de  $C_1$  y que esta tangente a  $C_2$ . La línea recta  $l$  representa a un cono que definido por las 2 esferas. El contorno del cono marca un área proyectada sobre la esfera mayor. Existe un número finito de áreas que se pueden proyectar sobre la superficie de la esfera mayor y ese número será el de coordinación  $Z_{3D}$ . Para hacer el cálculo, lo primero es conocer el valor de la abscisa  $x_c$ , con el cual se puede saber la pendiente  $m$  de la recta  $l$ . Para obtener esta pendiente se puede pensar que las curvas  $C_1$  y  $C_2$  están definidas por las ecuaciones

$$C_1 : x^2 + y^2 = R^2 \tag{A.7}$$

y

$$C_2 : (x - r - R)^2 + y^2 = r^2, \tag{A.8}$$

de manera que la pendiente de  $l$  será la derivada de  $C_2$  evaluada en  $x_c$ . La derivada de  $C_2$  queda de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x - r - R}{\sqrt{r^2 - (x - r - R)^2}}. \tag{A.9}$$

La recta  $l$  queda de la forma

$$y = mx = \frac{dy}{dx} \cdot x = \pm \frac{(x - r - R)x}{\sqrt{r^2 - (x - r - R)^2}}. \tag{A.10}$$

El punto  $x_c$  se encuentra en la intersección entre  $l$  y  $C_2$ , de manera que resolviendo

$$(x_c - r - R)^2 + \frac{((x_c - r - R)^2 x_c^2)}{r^2 - (x_c - r - R)^2} = r^2, \tag{A.11}$$

se puede encontrar el valor de abscisa en el que la recta delimita a la proyección con el cono. Despejando  $x_c$



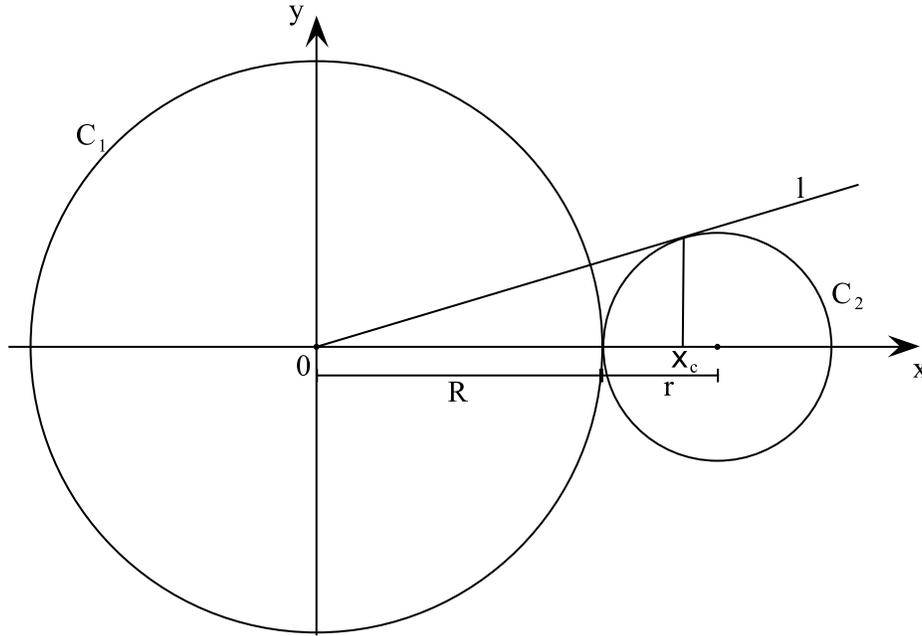


Figura A.2: Figura que ilustra como se proyecta el área de una esfera sobre una esfera mayor. La longitud proyectada se usa para calcular el número de esferas que se pueden poner alrededor de otra.

se obtiene que

$$x_c = \frac{R \frac{R}{r} + 2}{r \frac{R}{r} + 1}, \quad (\text{A.12})$$

de donde se observa que  $x_c$  queda sólo como una función de la razón de tamaños  $S$ . Este resultado se puede sustituir en la ecuación de la pendiente  $dy/dx$  y tomando en cuenta que  $m = \arctan \theta$ , se puede obtener una función para el ángulo, de manera que

$$\theta = \arctan \frac{1}{\sqrt{S(S+2)}}, \quad (\text{A.13})$$

donde  $S$  es la relación de tamaños y  $\theta$  es el ángulo con el que el cono se abre desde el origen. Para conocer cual es el número de veces que el área del cono que resulta de la línea tangente a  $C_2$  se puede proyectar en la esfera de tamaño mayor, se usó una integral doble de un diferencial de área normal a la superficie de la esfera. Esta área  $A_{cs}$  esta definida por

$$A_{cs} = r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{\phi^*} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (\text{A.14})$$

donde los límites de integración están dados para sólo tomar en cuenta el área proyectada de uno de los lados del cono. Desarrollando la expresión anterior se llega a que  $A_{cs} = 2\phi^* r^2$ . Además, el área total  $A_T$  es  $4\pi R^2$ . De manera que el número de coordinación se puede calcular como  $Z = A_T/A_{cs}$ , expresión que desarrollada queda de la forma

$$Z = \frac{2\pi}{\phi^*} S^2, \quad (\text{A.15})$$

donde  $\phi^*$  es el ángulo en el que se abre el cono que parte del origen,  $S$  es la razón de tamaños. Para finalizar, es necesario decir que el ángulo  $\phi$  es el ángulo con el que se abre el cono proyectado desde el origen de la



esfera central y es el mismo que el ángulo  $\theta$  de la sección anterior. Por lo tanto, el número de coordinación para esferas queda

$$Z_{3D} = \frac{2\pi S^2}{\arctan \frac{1}{\sqrt{S(S+2)}}}. \quad (\text{A.16})$$

Finalmente se puede comparar el número de coordinación en 2 y 3 dimensiones, para diferentes razones de tamaños. Esta comparación se muestra en la Tabla A.2. Es importante mencionar que se sabe que el número

Tabla A.2: Valores del número de coordinación en 2D

$\frac{D}{d}$	$Z_{2D}$	$Z_{3D}$
1	6	12
2	9	73
3	12	223
4	15	499
8	28	3611

de coordinación es  $Z_{3D} = 12$  cuando  $S = 1$ , por lo que el resultado se considera correcto. Y también hay que aclarar que el resultado de la ecuación es un número irracional que se tiene que truncar para hacerlo un número entero. Finalmente es posible obtener una razón entre los números de coordinación en 2 y 3 dimensiones. Si llamamos a esta razón  $N$ , se puede decir que

$$N = 2S^2, \quad (\text{A.17})$$

donde  $S$  es la relación de tamaño. Esta cantidad es importante porque tanto en simulaciones como en experimentos, existe una fuerza de contacto promedio que aporta cada partícula al intruso con el que está en contacto. Pero la fuerza total que afecta al intruso, está en función del número de partículas con las que está en contacto. Una esfera siempre estará en contacto con más partículas que una circunferencia. En otras palabras, el valor denominado como  $N$  puede escalar a la fuerza de contacto promedio y así permite extrapolar los resultados de las simulaciones a los experimentos.





# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Ejemplos de flujos granulares en la naturaleza y en la industria. . . . .	4
1.2. Volumen material. . . . .	9
1.3. Dos partículas esféricas en contacto . . . . .	14
1.4. Modelos para las fuerzas de contacto entre dos partículas. . . . .	16
1.5. Formación de bandas en un cilindro horizontal de vidrio . . . . .	20
1.6. Formación de bandas en un cilindro horizontal de vidrio a color . . . . .	20
1.7. Arreglo experimental de Thomas. . . . .	21
1.8. Resultado de Thomas. . . . .	21
1.9. Flujo en vertederos . . . . .	23
1.10. Pila granular formada por un embudo. . . . .	25
1.11. Pila granular formada por un tamiz. . . . .	26
2.1. Arreglo numérico al inicio de la simulación. . . . .	30
3.1. Energía cinética vs tiempo, $13^\circ$ . . . . .	40
3.2. Energía cinética vs tiempo, $17^\circ$ . . . . .	41
3.3. Energía cinética vs tiempo, $25^\circ$ . . . . .	42
3.4. Energía cinética permanente vs $\theta$ . . . . .	43
3.5. Respuestas impulsivas del material como sólido . . . . .	44
3.6. Bosquejo impulso y pulso . . . . .	44
3.7. Energía cinética vs tiempo a $16^\circ$ . . . . .	45
3.8. Energía cinética vs tiempo para fluidos . . . . .	46
3.9. Vectores de velocidad de las partículas. . . . .	48
3.10. Fluctuaciones de velocidad vertical . . . . .	49
3.11. Perfil de velocidades del plano inclinado. . . . .	50

3.12. Mapa escalar de densidad de una avalancha. . . . .	50
3.13. Distribución vertical de densidad de partículas . . . . .	51
3.14. Mapa escalar de temperatura granular . . . . .	51
3.15. Distribución vertical de densidad de partículas . . . . .	52
3.16. Posición vertical del intruso vs tiempo . . . . .	53
3.17. Posición vs densidad, para $d_2^* = 2$ y $d_3^* = 1$ . . . . .	54
3.18. Comparación entre posiciones para distintas $d_2^*$ . . . . .	55
3.19. Posiciones del intruso vs $\rho^*$ , para $d_2^* = 2, 3, 4, 8$ y $d_3^* = 1$ . . . . .	56
3.20. Posiciones del intruso vs $\rho^*$ , para $d_2^* = 2, 3, 4, 8$ y $d_3^* = 2$ . . . . .	56
3.21. Posiciones del intruso vs $\rho^*$ , para $d_2^* = 2, 3, 4, 8$ y $d_3^* = 3$ . . . . .	57
3.22. Posiciones del intruso vs $d_2^*$ , para $0.004 \leq \rho^* \leq 2$ y $d_3^* = 1$ . . . . .	58
3.23. Posiciones del intruso vs $d_2^*$ , para $0.004 \leq \rho^* \leq 2$ y $d_3^* = 2$ . . . . .	58
3.24. Posiciones del intruso vs $d_2^*$ , para $0.004 \leq \rho^* \leq 2$ y $d_3^* = 3$ . . . . .	59
3.25. Comparación entre posiciones numéricas y experimentales. . . . .	60
3.26. Diagrama simplificado de cuerpo libre de un intruso. . . . .	61
3.27. Peso y empuje adimensional vs $\rho^*$ . . . . .	63
3.28. Competencia entre fuerzas verticales para $S = 2$ . . . . .	63
3.29. Competencia entre fuerzas verticales para $S = 3$ . . . . .	64
3.30. Competencia entre fuerzas verticales para $S = 4$ . . . . .	64
3.31. Competencia entre fuerzas verticales para $S = 8$ . . . . .	65
3.32. Escalamiento de fuerzas verticales de Thomas para $d_2^* = 2$ . . . . .	66
3.33. Escalamiento de fuerzas verticales de Thomas para $d_2^* = 3$ . . . . .	66
3.34. Escalamiento de fuerzas verticales de Thomas para $d_2^* = 8$ . . . . .	67
3.35. Teoría con densidad estratificada . . . . .	68
3.36. Esfera parcialmente sumergida en un fluido. . . . .	69
3.37. Partículas sobre un intruso a diferente altura. . . . .	70
3.38. Huecos que se abren en el material debido al perfil de temperaturas. . . . .	70
A.1. Número de coordinación en 2D . . . . .	78
A.2. Número de coordinación en 3D . . . . .	80



# ÍNDICE DE CUADROS

2.1. Nombre de los programas del método de Wassgren. . . . .	30
2.2. Parámetros físicos constantes del estudio en planos inclinados. . . . .	32
2.3. Variables físicas en el estudio de avalanchas. . . . .	32
2.4. Parámetros físicos en el estudio de segregación. . . . .	34
2.5. Variables físicas usadas para el estudio de segregación. . . . .	35
2.6. Número de partículas usadas en el estudio de segregación. . . . .	35
3.1. Parámetros de la comparativa entre coeficientes de fricción. . . . .	47
A.1. Valores del número de coordinación en 2D . . . . .	79
A.2. Valores del número de coordinación en 2D . . . . .	81



# BIBLIOGRAFÍA

- [1] O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids*, 11(3):542–548, 1999.
- [2] N. Thomas. Reverse and intermediate segregation of large beads in dry granular media. *Phys. Rev. E*, 62(1):961–974, Jul 2000.
- [3] K. K. Rao and P. R. Nott. *An Introduction to Granular Flow*. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [4] R. M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press, New York, second edition, 1992.
- [5] A. Mehta. *Granular Physics*. Cambridge University Press, New York, 2002.
- [6] H. Hinrichsen and D. E. Wolf. *The Physics of Granular Media*. Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2004.
- [7] A. Wu and Y. Sun. *Granular Dynamic Theory and Its Applications*. Springer, Berlin, 2002.
- [8] F. Bertrand, L.-A. Leclaire, and G. Levecque. DEM-based models for the mixing of granular materials. *Chem. Eng. Sci.*, 60(8-9):2517 – 2531, 2005. 5th International Symposium on Mixing in Industrial Processes (ISMIP5).
- [9] P. Eshuis, D. van der Meer, M. Alam, H. J. van Gerner, K. van der Weele, and D. Lohse. Onset of convection in strongly shaken granular matter. *Phys. Rev. Lett.*, 104(3):038001, Jan 2010.
- [10] R. Brown and J. C. Richards. *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1970.
- [11] C. Brennen and J.C. Pearce. Granular media flow in two-dimensional hoppers. *ASME J. Appl. Mech.*, 45(1):43–50, 1978.

- [12] P. C. Johnson, P. R. Nott, and R. Jackson. Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes. *J. Fluid Mech.*, (210):501–535, 1990.
- [13] C. Truesdell and R.G. Muncaster. *Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of a Simple Monoatomic Gas*. Academic Press, New York, 1980.
- [14] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [15] E. U. Condon. *Kinematics and dynamics*. In *Handbook of Phys.* McGraw-Hill, New York, 1967.
- [16] S. Whitaker. *Introduction to Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
- [17] Y. C. Fung. *A First Course in Continuum Mechanics*. Second edition.
- [18] S. Chapman and T. G. Cowling. *The Mathematical Theory of Nonuniform Gases*. Second edition.
- [19] G. T. Mase and G. E. Mase. *Continuum Mechanics for Engineers*. Second edition.
- [20] J. C. Slattery. *Advanced Transport Phenomena*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [21] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. John Wiley, New York, 2002.
- [22] L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [23] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. The development of constitutive laws for soil using the distinct element method. *Numerical Methods in Geomechanics*, 1:289–317, 1979.
- [24] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fundamentals of Physics*. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey, 1966.
- [25] K. R. Eldredge and D. Tabor. The mechanism of rolling friction. i. the plastic range. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Phys. Sciences*, 229(1177):181–198, 1955.
- [26] Y. C. Zhou, B. D. Wright, R. Y. Yang, B. H. Xu, and A. B. Yu. Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation. *Phys. A: Statistical Mechanics and its Applications*, 269(2-4):536 – 553, 1999.
- [27] Y. Tsuji, T. Tanaka, and T. Ishida. Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder Tech.*, 71(3):239 – 250, 1992.
- [28] H. Hertz. Miscellaneous papers by h. hertz: On the contact of elastic solids., 1886.
- [29] C. Cattaneo. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi. *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, 27(1938):342 – 348, 1938.
- [30] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *Trans.*, Asme 71 (1949):A–259.
- [31] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Pöschel. Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 53(5):5382–5392, 1996.
- [32] P. W. Cleary. Predicting charge motion, power draw, segregation and wear in ball mills using discrete element methods. *Minerals Eng.*, 11(11):1061 – 1080, 1998.



- [33] Y. C. Zhou, B. H. Xu, A. B. Yu, and P. Zulli. An experimental and numerical study of the angle of repose of coarse spheres. *Powder Tech.*, 125(1):45 – 54, 2002.
- [34] S. B. Savage. Streaming motions in a bed of vibrationally fluidized dry granular material. *J. Fluid Mech.*, (194):457–478, 1988.
- [35] E. Clément, J. Rajchenbach, and J. Duran. Mixing of a granular material in a bidimensional rotating drum. *Eur. Phys. Lett.*, 30(1):7, 1995.
- [36] F. Cantelaube and D. Bideau. Radial segregation in a 2D drum: An experimental analysis. *Eur. Phys. Lett.*, 30(3):133, 1995.
- [37] M. Alonso, M. Satoh, K. Miyanami, K. Higashi, and T. Ito. Regular electroconductive networks made from metal-coated plastic powders: Effect of plastic particle size on conductivity. *Powder Tech.*, 67(1):11 – 13, 1991.
- [38] Y. Grasselli and H. J. Herrmann. Experimental study of granular stratification. *Granular Matter 1*, pages 43–47, 1998.
- [39] H. A. Makse, P. Cizeau, and H. E. Stanley. Possible stratification mechanism in granular mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 78(17):3298–3301, 1997.
- [40] T. Boutreux, H.A. Makse, and P.-G. de Gennes. Surface flows of granular mixtures: III. canonical model. *Eur. Phys. J. B*, 9(1):105–115, May 1999.
- [41] G. Félix and N. Thomas. Evidence of two effects in the size segregation process in dry granular media. *Phys. Rev. E*, 70(5):051307, Nov 2004.
- [42] T. Tanaka. Segregation models of solid mixtures composed of different densities and particle sizes. *Industrial and Eng. Chemistry Process Design and Development*, 10(3):332–340, 1971.
- [43] J. A. Drahn and J. Bridgwater. The mechanisms of free surface segregation. *Powder Tech.*, 36(1):39 – 53, 1983.
- [44] P. Meakin. A simple two-dimensional model for particle segregation. *Phys. A: Statistical Mechanics and its Applications*, 163(3):733 – 746, 1990.
- [45] N. Vandewalle, R. D’hulst, and M. Ausloos. Phase segregation in binary sandpiles on fractal bases. *Phys. Rev. E*, 59(1):631–635, Jan 1999.
- [46] T. Boutreux. Surface flows of granular mixtures: II. segregation with grains of different size. *Eur. Phys. J. B*, 6(3):419–424, 1998.
- [47] H. Matthée. Segregation phenomena relating to bunkering of bulk materials: Theoretical considerations and experimental investigations. *Powder Tech.*, 1(5):265 – 271, 1968.
- [48] Y. Oyama. Studies on mixing of solids. mixing of binary system of two sizes by ball mill motion. *The 179th Report from Okochi Research Laboratory I.P.C.R.*, 37(951):17–29, 1939.
- [49] M. B. Donald and B. Roseman. Mixing and demixing of solid particles. i. mechanisms in a horizontal drum mixer. *British Chem. Eng.*, (7):749–753, 1962.



- [50] S. Das Gupta, D. V. Khakhar, and S. K. Bhatia. Axial segregation of particles in a horizontal rotating cylinder. *Chem. Eng. Sci.*, (46):1513–1517, 1991.
- [51] M. Nakagawa, S. A. Altobelli, A. Caprihan, and E. Fukushima. NMRI study: axial migration of radially segregated core of granular mixtures in a horizontal rotating cylinder. *Chem. Eng. Sci.*, (52):4423–4428, 1997.
- [52] D. V. Khakhar, J. J. McCarthy, T. Shinbrot, and J. M. Ottino. Transverse flow and mixing of granular materials in a rotating cylinder. *Phys. Fluids*, (9):31–43, 1997.
- [53] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R. P. Behringer, and E. Clement. Memories in sand: experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles. *Phys. Rev. E*, (60):R5040–R5043, 1999.
- [54] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin. Development of stresses in cohesionless poured sand. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, (356):2535–2560, 1998.
- [55] A. K. Didwania, F. Cantelaube, and J. D. Goddard. Static multiplicity of stress states in granular heaps. *Proceedings of the Royal Society of London A*, (456):2569–2588, 2000.
- [56] R. Brockbank, J. M. Huntley, and R. C. Ball. Contact force distribution beneath a three-dimensional granular pile. *J. Phys. II France*, (7):1521–1532, 1997.
- [57] S. Godoy, D. Risso, R. Soto, and P. Cordero. Rise of a brazil nut: A transition line. *Phys. Rev. E*, 78(3):031301, Sep 2008.
- [58] A. Rosato, K. J. Strandburg, F. Prinz, and R. H. Swendsen. Why the brazil nuts are on top: Size segregation of particulate matter by shaking. *Phys. Rev. Lett.*, 58(10):1038–1040, Mar 1987.
- [59] M. Schröter, S. Ulrich, J. Kreft, J. B. Swift, and H. L. Swinney. Mechanisms in the size segregation of a binary granular mixture. *Phys. Rev. E*, 74(1):011307, Jul 2006.
- [60] A. Kudrolli. Size separation in vibrated granular matter. *Reports on Progress in Phys.*, 67(3):209, 2004.
- [61] C. R. Wassgren. *Vibration of Granular Materials*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1997.
- [62] I. Ippolito, C. Annic, J. Lemaître, L. Oger, and D. Bideau. Granular temperature: Experimental analysis. *Phys. Rev. E*, 52(2):2072–2075, Aug 1995.

