UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ÓRDENES LINEALES Y SUS CONDENSACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

P R E S E N T A :

Astrid Jaimen Lamas

DIRECTOR DE TESIS:
Dra. Gabriela Campero Arena
2011

1.Datos del alumno.
Jaimen
Lamas
Astrid
56040025
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
302501447

2.Datos del tutor.
Dra
Gabriela
Campero
Arena

3.Datos del sinodal 1.
Dr
José Alfredo
Amor
y Montaño

4.Datos del sinodal 2.
M en C
Rafael
Rojas
Babachano

4.Datos del sinodal 3.
Dr
David
Meza
Alcántara

5.Datos del sinodal 4.
Mat
José Gabriel
Ocampo
Márquez

5.Datos del trabajo escrito.
Órdenes lineales y sus condensaciones
119p
2011

Índice general

Introducción

El trabajo de esta tesis plantea el estudio de los órdenes lineales desde los diferentes tipos de orden que los caracterizan. Haremos esto por medio de una herramienta llamada condensación que actúa sobre los órdenes lineales para posteriormente caracterizarlos respecto de su tipo de orden.

El capítulo 1 es una introducción al concepto de orden lineal basado en la construcción de ciertas estructuras numéricas. Varias características de los distintos órdenes lineales son motivadas por las principales estructuras numéricas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ vistas como tales. Algunas de estas características son las que distinguen a un orden de otro, como el ser *denso, disperso, buen orden, etc.*

La tricotomía de los órdenes nos permite hablar de funciones que mantienen el orden entre cualesquiera dos elementos. Estas funciones las llamamos *isomorfismos* y cuando dos órdenes son isomorfos decimos que tienen el mismo *tipo de orden*. Para estudiar a los órdenes lineales nos interesamos en el tipo de orden, más que en los elementos en sí del conjunto, pues el tipo de orden es el que caracteriza a una clase de órdenes lineales isomorfos. Por ejemplo, en el primer capítulo, damos la construcción de los órdenes $\mathscr{Z}$ y de $\mathscr{Q}$ y en el apéndice B recuperamos la construcción usual de $\mathbb{Z}$ y de $\mathbb{Q}$ para probar, usando los resultados del segundo capítulo, que $\mathscr{Z}$ y $\mathbb{Z}$ son isomorfos y que $\mathscr{Q}$ y $\mathbb{Q}$ son isomorfos, por tanto, tienen el mismo tipo de orden. De esto trataremos en el capítulo 2. A partir de éste, podremos trabajar con representantes de conjuntos de órdenes isomorfos, a los que llamamos *tipo de orden*, de los cuales justificamos su existencia en el apéndice A por medio del truco de Scott.

De los tipos de buenos órdenes parte la construción de los naturales y de los ordinales. Es por esto que dedicaremos todo el capítulo 3 a estudiar a los *ordinales*. Aquí definiremos a los ordinales como tipos de buenos órdenes y estudiaremos la aritmética ordinal de forma alternativa, a partir del estudio de buenos órdenes. De los ordinales obtenemos, no sólo un estudio de los buenos órdenes, sino dos teoremas muy útiles, el Teorema de Inducción y el Teorema de Recursión para ordinales. Aunque nosotros consideramos a los ordinales como tipos de orden, usualmente los ordinales se definen como conjuntos transitivos bien ordenados por la pertenencia, esto se hace en el apéndice A y se prueba un resultado muy importante, el Teorema de Enumeración, que justifica la definición de ordinal que damos en esta tesis.

Los capítulos y 5 de la tesis constan del estudio de los órdenes lineales a partir de las *condensaciones*. Las condensaciones son particiones de un orden lineal en intervalos. Éstas son a su vez órdenes lineales, de las cuales cada elemento corresponde a un intervalo y éstos se ordenan respecto al orden original. Una representación del hecho de hacer una condensación sería aplastar (o condensar, como lo dice su propio nombre) los intervalos de una partición del orden lineal. En la primera parte del capítulo definiremos varias condensaciones, como lo son la *condensación finita, contable, dispersa y la del buen orden*. De cada una daremos algunos resultados interesantes, sin embargo, posteriormente nos restringimos a estudiar la condensación finita.

Como las condensaciones son asimismo órdenes lineales es natural pensar en las condensaciones de las condensaciones. Así que, en la segunda parte del capítulo definiremos el concepto de *condensación iterada* por recursión para ordinales. En particular daremos un resultado importante respecto de las condensaciones iteradas de buenos órdenes, del cual deducimos que basta analizar los *puntos límites* de un buen orden para conocer el tipo de orden de cualquiera de sus condensaciones.

En el capítulo 5 introduciremos la noción de *rango finito* que es el límite de la condensaciones iteradas, es decir, el ordinal a partir del cual no hay cambio en el tipo de orden de las condensaciones posteriores a él. El resultado final que damos es un gran ejemplo de la utilidad del rango finito, ya que nos dice por medio del rango de un orden lineal cuál es la condición para que el orden sea encajable en una *potencia de* $\mathbb{Z}$.

Aunque el último tema que se toca en el trabajo sea el de la caracterización de órdenes dispersos por medio del rango de su condensación finita, este también se pueden calcular para cualquier orden lineal, obtiendo una clasificación más general (véase [Ros82]).

Intentamos que los temas que abarcamos sean vistos desde la mirada de los órdenes, pues algunos de ellos se pueden observar de la manera común. Los únicos conceptos que necesitamos como preliminares son el de conjunto, relación, función y partición.

Capítulo 1

Orden

1.1. Orden Lineal

En este capítulo veremos qué son los órdenes lineales. Un *orden lineal* es un conjunto con una relación binaria sobre éste, donde se cumple que la relación es antirreflexiva, transitiva y tricotómica. Como lo dice su nombre, a los elementos de un orden lineal los podemos representar sobre una sola línea. Es por esto que los números naturales los consideramos un buen punto de partida para estudiar los órdenes lineales pues tienen una de las estructuras más sencillas. Otras estructuras númericas, como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, también son órdenes lineales y cumplen propiedades interesantes respecto a éstos.

Podemos pensar que el estudio de los órdenes lineales parte de reconocer la forma del conjunto de los números naturales. Este conjunto surge de una manera muy intuitiva y todos lo reconocemos, pues los usamos para contar y enumerar algunos conjuntos, para lo cual estamos dando un orden a sus elementos.

Considerando las estructuras numéricas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, construiremos órdenes lineales similares a éstos e iremos desarrollando sus características. Daremos las definiciones generales para responder a la necesidad particular de definir estos órdenes tan importantes, pues en capítulos posteriores estudiaremos órdenes lineales en general.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times X$ una relación binaria. R es un *orden lineal de* X si y sólo si cumple lo siguiente:

1. para cualquier $x \in X$, $\langle x, x\rangle \notin R$ (R es antirreflexiva);

2. para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces $\langle x, y\rangle \in R$ ó $\langle y, x\rangle \in R$ (R es tricotómica); y

3. para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $\langle x, y\rangle \in R$ y $\langle y, z\rangle \in R$, entonces $\langle x, z\rangle \in R$ (R es transitiva).

Llamaremos a la pareja $\langle X, R\rangle$ un orden lineal, si R es un orden lineal de X. En otros contextos también se le llama orden total o cadena. A veces diremos simplemente que X es un orden lineal para decir que existe una relación que ordena linealmente a X. Al hecho de que $\langle x, y\rangle \in R$ también lo denotaremos como xRy, o como $x <_X y$; esto último se lee como "x es menor que y". Si no se están considerando distintas relaciones, entonces $x <_X y$ se escribirá simplemente como $x < y$.

De la definición de que $\langle X, R\rangle$ sea orden lineal se puede deducir que para cualesquiera $x, y \in X$ sucede una y sólo una de las opciones xRy, yRx o $x = y$.

Abreviamos con $x \leq_X y$, que se lee "x es menor o igual que y", al hecho de que $x <_X y$ ó $x = y$. Decimos que una relación R sobre un conjunto X es *reflexiva* si cumple que para todo $x \in X$, xRx; y si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que xRy y yRx, se tiene que $x = y$, decimos que R es *antisimétrica* (es el concepto para órdenes reflexivos análogo a la tricotomía).

Si $\langle X, R\rangle$ es un orden lineal, entonces $\leq_X$ es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva X.

De hecho, hay una manera similar de definir el concepto de orden lineal. En algunos libros se dice que $\langle X, R\rangle$ es un orden lineal si y sólo si R es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva sobre X. Esta definición, a la que podemos llamar de un *orden lineal reflexivo*, es equivalente a la nuestra en el sentido siguiente. Si R es un orden lineal reflexivo sobre X, $R' = R \setminus \{\langle x, x\rangle : x \in X\}$ es un orden lineal según nuestra definición; y si S es un orden lineal sobre X según nuestra definición, $S' = S \cup \{\langle x, x\rangle : x \in X\} =\leq_X$ es un orden lineal reflexivo.

Aunque nosotros nos apegamos a la definición de orden lineal dada en 1.1.1, es muy útil saber de esta otra definición no sólo para abreviar que un elemento sea menor o igual que otro, sino para saber que podemos seguir hablando de un orden cuando recurrimos a la relación $\leq_X$ sobre el conjunto X.

El nombre de orden lineal se desprende del hecho de que las características de una relación que ordena linealmente a un conjunto implican que podemos colocar a los elementos del conjunto sobre una línea. La tricotomía (o la antisimetría, para órdenes reflexivos) es lo que hace a un orden lineal, pues con esta están totalmente ordenados, es decir, todos sus elementos son comparables bajo la relación de orden. Generalmente los órdenes se leen de izquierda a derecha; es decir, que x está antes que y sobre la línea que representa al orden, significa que $x < y$. Para un conjunto puede haber distintas relaciones que lo ordenen linealmente. Como se representa en la figura 1.1, el conjunto $\{a, b, c\}$ se puede ordenar por dos relaciones distintas, R_1 y R_2. Pero cuando un conjunto lo ordenamos con dos relaciones distintas no necesariamente cambia su "aspecto".

Otro ejemplo es la relación que ordena inversamente a cualquier conjunto.

Definición 1.1.2. Sea $\langle X, R\rangle$ un orden lineal. $\langle X, R^*\rangle$ es el *orden lineal inverso de* X, definido por:

$$\langle x, y\rangle \in R^* \text{ si y sólo si } \langle y, x\rangle \in R.$$

También podríamos decir que $\langle X, R\rangle^*$ o X^* es el orden inverso, si no hay

Figura 1.1: Distintas relaciones ordenan un conjunto.

duda sobre cuál es el orden de X.

Al igual que a un conjunto se le pueden dar varios órdenes distintos, una relación se puede restringir para ordenar conjuntos distintos, como en el caso de los subórdenes.

Definición 1.1.3. Sean $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$ órdenes lineales tales que $X \subseteq Y$. $\langle X, R\rangle$ es un *suborden* de $\langle Y, S\rangle$ si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$

$$x <_R y \text{ si y sólo si } x <_S y.$$

La relación R sobre el subconjunto X de Y es la restricción de S a X, es decir, $R = S \cap (X \times X)$.

A partir de ahora daremos varios ejemplos de órdenes lineales. Hay órdenes lineales que ya conocemos pero que son generalmente estudiados más como estructuras algebraicas que como órdenes. Son las estructuras numéricas $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Justamente el objetivo de este estudio no es analizar las características de las operaciones algebraicas sino el orden que tienen sus elementos y algunas caracterizaciones de estos órdenes. Por esto, los construiremos desde el principio como órdenes lineales, y aunque esto haga que los percibamos de manera un poco diferente, veremos en el Apéndice B, que para el análisis de sus órdenes (los fines de nuestro estudio), es lo mismo tratar con las definiciones que tratamos aquí que con las que damos allá que son las más usadas. Entonces por ahora, a cada uno le daremos un nombre distinto, para distinguir entre el orden lineal y la estructura numérica, haciéndonos los ingenuos como si no los conociéramos.

1.2. $\mathbb{N}$

La definición conjuntista de los números naturales está basada en la idea intuitiva de que los números naturales deben servir para contar. Es decir, debe haber una correspondencia de cada número natural n con los conjuntos que tienen n elementos. Entonces un número natural es un conjunto con ciertas características de forma que coincida con nuestras ideas preconcebidas de cómo es un número natural.

Al contar los elementos de un conjunto requerimos de un primer elemento del cual partir. Las siguientes definiciones nos sirven para esto.

Definición 1.2.1. Un orden lineal $\langle X, R\rangle$ tiene un elemento *R-mínimo*, o *primer elemento*, o *extremo izquierdo*, si hay $a \in X$ tal que $a \leq_R x$ para todo $x \in X$; y tiene un elemento *R-máximo*, o *último elemento*, o *extremo derecho*, si hay $b \in X$ tal que $x \leq_R b$ para todo $x \in X$.

Se puede demostrar que el elemento a y el elemento b son únicos si existen; en este caso a a se le llama el R-mínimo, el primer elemento o el extremo izquierdo de X y a b se le llama el R-máximo, el último elemento o el extremo derecho de X.

Números naturales

Para dar la definición de número natural, primero necesitamos dar las siguientes dos definiciones.

Definición 1.2.2. Un par ordenado $\langle X, R\rangle$ es un *buen orden* si y sólo si $\langle X, R\rangle$ es un orden lineal[1] y todo subconjunto de X no vacío tiene un elemento R-mínimo; es decir, si $y \subseteq X$ y $y \neq \emptyset$, hay $a \in y$ tal que para todo $w \in y$, $a \leq_R w$.

La definición de buen orden tiene un uso más extenso y un interés mayor, así que volveremos a ella constantemente en este trabajo, de hecho el tercer capítulo está dedicado a los buenos órdenes.

Definición 1.2.3. Se dice que x es un *conjunto transitivo* si y sólo si para todo $y \in x$, se tiene que $y \subseteq x$.

Es importante notar que es distinto hablar de relaciones transitivas que de conjuntos transitivos.

Definición 1.2.4. Un conjunto x es un *número natural* si y sólo si

1. x es un conjunto transitivo;
2. $\langle x, \in\rangle$ es un buen orden;
3. todo subconjunto no vacío de x tiene un elemento $\in$-máximo, es decir, si $y \subseteq x$ y $y \neq \emptyset$, hay $b \in y$ tal que para todo $w \in y$, $w \in b$ o $w = b$.

Definición 1.2.5. El conjunto de los números naturales es

$$\mathbb{N} = \{n : n \text{ es un número natural}\}.$$

Primero, el conjunto vacío es un número natural. Entonces son números naturales $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ... Ahora nos enfocamos en ver que $\langle \mathbb{N}, \in\rangle$ es un orden lineal.

[1] Basta pedir que R sea una relación antirreflexiva y transitiva, ya que la tricotomía se desprende de pedir que todo subconjunto no vacío tenga un mínimo.

$\mathbb{N}$ es un orden lineal

Supongamos n es un natural tal que $n \in n$. Como $n \in n$ hay un elemento de n, n mismo, que se pertenece a si mismo, contradiciendo la antirreflexividad de la pertenencia en n. Por tanto, $n \notin n$. Concluimos que $\in$ es antirreflexiva en $\mathbb{N}$.

Sean x, y, z números naturales tales que $x \in y$ y $y \in z$. Como z es un conjunto transitivo, $y \subseteq z$, por lo que $x \in z$. Por tanto, $\in$ es una relación transitiva en $\mathbb{N}$.

Todavía nos falta ver que la pertenencia es una relación tricotómica en $\mathbb{N}$ para probar que $\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ es un orden lineal. Para esto es indispensable mostrar que dado cualquier número natural, hay otro número natural al que pertenece y tal que no hay ninguno otro entre ellos.

Definición 1.2.6. Sea $\langle X, R \rangle$ un orden lineal y $x \in X$. Llamamos *sucesor de* x a cualquier $a \in X$ tal que $x <_R a$ y *predecesor de* x a cualquier $b \in X$ tal que $b <_R x$.

Llamamos a $s(x)$ un *sucesor inmediato de* x si $x <_R s(x)$ y no hay $a \in X$ tal que $x <_R a <_R s(x)$; y a $p(x)$ un *predecesor inmediato de* x si $p(x) <_R x$ y no hay $a \in X$ tal que $p(x) <_R a <_R x$.

Un sucesor inmediato, o predecesor inmediato, de algún elemento (si lo tiene) es único, por lo que las notaciones $s(x)$ y $p(x)$ están bien justificadas. Una vez que demostremos que $\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ es un orden lineal, podremos ver que todo natural n tiene un sucesor inmediato que es $n \cup \{n\}$, como se demuestra en el siguiente lema.

Lema 1.2.7. *1. Todo elemento de un número natural es un número natural.*

2. Si n es un número natural, $n \cup \{n\}$ es un número natural. Además, no existe un natural m tal que $n \in m \in n \cup \{n\}$.

Demostración.

1. Sea n un número natural y $m \in n$. Como n es un conjunto transitivo, $m \subseteq n$, entonces las propiedades de ser un orden lineal se tienen para $\langle m, \in \rangle$ inmediatamente porque podemos considerar a m como un suborden de n. Además, todo subconjunto no vacío de m es un subconjunto no vacío de n. Por esto, m es un buen orden y todo subconjunto no vacío de m tiene un máximo.

La relación $\in$ es transitiva en n, porque es un orden lineal. De aquí que si $y \in m$ y $z \in y$, $z \in m$. Por tanto, m es un conjunto transitivo.

2. Sea n un número natural. Veremos que $n \cup \{n\}$ es un número natural.

Sea $x \in n \cup \{n\}$. Los casos posibles para x son $x \in n$ ó $x = n$. En cualquier caso, $x \subseteq n \cup \{n\}$, si $x \in n$, porque n es un conjunto transitivo, y si $x = n$, es obvio. Por tanto $n \cup \{n\}$ es un conjunto transitivo.

Sea $x \subseteq n \cup \{n\}$ no vacío. Si $x = \{n\}$, entonces n es el $\in$-mínimo de x. En caso contrario tomamos x_0 el $\in$-mínimo de $x \setminus \{n\}$. Como $x_0 \in n$, también es el $\in$-mínimo de x, pues si $y = n$ (suponiendo que $n \in x$), se tiene que $x_0 \in y$; y si $y \in x$, pero $y \neq n$, $x_0 \in y$ por la minimalidad de x_0. Por tanto, $\langle n \cup \{n\}, \in \rangle$ es un buen orden.

Sea $y \subseteq n \cup \{n\}$ no vacío. Si $n \in y$, entonces n es el $\in$-máximo de y. Si $n \notin y$, $y \subseteq n$ y entonces tiene un $\in$-máximo porque n es un número natural. Por tanto, todo subconjunto no vacío de $n \cup \{n\}$ tiene un $\in$-máximo.

Entonces $n \cup \{n\}$ es un número natural.

Es claro que $n \in n \cup \{n\}$. Supongamos que hay un natural m tal que $n \in m \in n \cup \{n\}$. Como todo natural es transitivo, entonces $n \subseteq m$ y $m \subseteq n \cup \{n\}$. De que $n \subseteq m$, se sigue inmediatamente que $n \cup \{n\} \subseteq m$. Entonces $n \cup \{n\} \subseteq m$, y así tenemos que $m = n \cup \{n\}$, contradicieno la antirreflexividad de los naturales. ■

Una vez que demostremos que $\langle \mathbb{N} \in \rangle$ es un orden lineal, será claro por el lema anterior que todo número natural n tiene un sucesor inmediato $s(n)$ y que $n \cup \{n\} = s(n)$.

Requerimos de una herramienta fundamental para probar resultados respectivos a todos los números naturales. Éste es el *Prinicipio de Inducción*, dice, básciamente, que si una propiedad se cumple para un número natural n_0 y, cada vez que un elemento tiene la propiedad se tiene que su sucesor inmediato la tiene, entonces todos los números naturales mayores o iguales que n_0 tienen la propiedad.

Definición 1.2.8. A es un *conjunto inductivo* si y sólo si $\emptyset \in A$ y siempre que $y \in A$, se tiene que $y \cup \{y\} \in A$.

Teorema 1.2.9. *Todo número natural pertenece a*

$$\bigcap \{A : A \textit{ es un conjunto inductivo}\}.$$

Es decir, $\mathbb{N} \subseteq \bigcap \{A : A \textit{ es un conjunto inductivo}\}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{N}$ y supongamos que hay un conjunto inductivo A tal que $x \notin A$. Como x es un natural, por el 1.2.7, $x \cup \{x\}$ es un natural. Sea y el mínimo del conjunto $x \cup \{x\} \setminus A$, que existe porque $x \cup \{x\} \setminus A \subseteq x \cup \{x\}$ y $x \cup \{x\} \setminus A$ es no vacío porque tienen a x. Por la transitividad de $x \cup \{x\}$, $y \subseteq x \cup \{x\}$ y, además, por el lema 1.2.7, $y \in \mathbb{N}$. Ahora, $y \subseteq A$, pues al ser el mínimo de $x \cup \{x\} \setminus A$, si $w \in y$, entonces $w \notin x \cup \{x\} \setminus A$.

No puede ser que $y = \emptyset$, pues $y \notin A$ y A es inductivo. De aquí que $y \neq \emptyset$. Sea z el máximo de y, entonces $z \in A$ y, como A es inductivo, $z \cup \{z\} \in A$. Afirmamos que $y = z \cup \{z\}$.

Sea $u \in y$. Si $u \notin z \cup \{z\}$, entonces $u \notin z$ y $u \neq z$. Por la tricotomía de la pertenencia en y, $z \in u$, pero esto contradice que z sea el máximo de y. Por tanto, $y \subseteq z \cup \{z\}$.

Por la transitividad de y, $z \subseteq y$, entonces $z \cup \{z\} \subseteq y$.

Ya tenemos que $y = z \cup \{z\} \in A$, pero esto contradice que $y \notin A$. ■

Por el Lema 1.2.7 y el lema 1.2.9, $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo[2], entonces la intersección de los conjuntos inductivos está contenido en $\mathbb{N}$, es decir,

$$\bigcap\{A : A \text{ es un conjunto inductivo}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

De este resultado obtenemos que $\mathbb{N} = \bigcap\{A : A \text{ es un conjunto inductivo}\}$. Esto quiere decir que $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto inductivo con respecto a la contención de conjuntos.

Obtenemos también como corolario el Principio de Inducción. Gracias a este importante resultado basta probar que un conjunto, definido por una propiedad, es inductivo para obtener que todo número natural cumple la propiedad.

Corolario 1.2.10 (*Prinicpio de Inducción*)**.** *Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto tal que $\emptyset \in A$ y $n \cup \{n\} \in A$ para todo $n \in A$, entonces $A = \mathbb{N}$.*

Demostración. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ cumple que $\emptyset \in A$ y $n \cup \{n\} \in A$ para todo $n \in A$, entonces A es inductivo y $A \subseteq \mathbb{N}$, por lo que acabamos de mostrar. ∎

El Prinicipio de Inducción es equivalente a que si $A \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, entonces $A = \mathbb{N}$. Al probar que A es inductivo, suponemos que $n \in A$ para probar que $s(n) \in A$, así que a esta suposición la llamamos *hipótesis inductiva*.

Con el principio de inducción probaremos que la relación $\in$ es tricotómica sobre $\mathbb{N}$. Observemos antes que como ningún número natural se pertenece a sí mismo, entonces pasa una y a lo más una de las siguientes afirmaciones: $n \in m$, $m \in n$ y $m = n$.

Lema 1.2.11. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $n \in m$, entonces $n \cup \{n\} \in m \cup \{m\}$.*

Demostración. Sea

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ (si } m \in n\text{, entonces } m \cup \{m\} \in n \cup \{n\})\}.$$

Veamos que A es un conjunto inductivo. Como no hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in 0$, entonces $0 \in A$.

Supongamos que $n \in A$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \in n \cup \{n\}$. Recordemos que para cualquier natural k, se cumple que $k \in k \cup \{k\}$ y $k \subseteq k \cup \{k\}$. Si $m \in n$, se tiene que $m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}$ por la hipótesis inductiva y, entonces, $m \cup \{m\} \in (n \cup \{n\}) \cup \{n \cup \{n\}\}$. Si $m = n$, entonces $m \cup \{m\} = n \cup \{n\} \subseteq (n \cup \{n\}) \cup \{n \cup \{n\}\}$. Por lo tanto, $n \cup \{n\} \in A$.

Como A es un conjunto inductivo, concluimos que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, si $n \in m$, entonces $n \cup \{n\} \in m \cup \{m\}$. ∎

[2] No es trivial asegurar que $\mathbb{N}$ es un conjunto. Para probar esto, en primer lugar, por el Axioma de Infinito, sabemos que existe un conjunto inductivo y, por tanto, $\bigcap\{A : A \text{ es un conjunto inductivo}\}$ es la unión de una clase no vacía de conjuntos, haciendo que $\bigcap\{A : A \text{ es un conjunto inductivo}\}$ sea un conjunto (véase [AMn05]). En segundo lugar, como $\bigcap\{A : A \text{ es un conjunto inductivo}\}$ es un conjunto, por el lema 1.2.9 y el Axioma de Separación, $\mathbb{N}$ es un conjunto.

Lema 1.2.12. *Sea*

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \textit{para todo } m \in \mathbb{N}, m \in n \textit{ o } n \in m \textit{ o } m = n\}.$$

Entonces A es un conjunto inductivo.

Demostración. Sea $B = \{m \in \mathbb{N} : m = \emptyset \text{ o } \emptyset \in m\}$. Veamos que B es un conjunto inductivo. Obviamente $\emptyset \in B$. Supongamos que $m \in B$. Si $\emptyset \in m$, entonces $\emptyset \in m \cup \{m\}$, por la transitividad de la pertenencia en $\mathbb{N}$. Si $m = \emptyset$, entonces $m \cup \{m\} = \{\emptyset\}$, por lo que $\emptyset \in m \cup \{m\}$. Así, B es inductivo y concluimos que $B = \mathbb{N}$ y tenemos que $\emptyset \in A$.

Ahora supongamos que $n \in A$ y sea $m \in \mathbb{N}$.

Si $m \in n$, entonces $m \in n \cup \{n\}$ por la transitividad; si $m = n$, entonces $m = n \in n \cup \{n\}$; si $n \in m$, entonces $n \cup \{n\} \in m \cup \{m\}$. Se sigue que $n \cup \{n\} \in m$ o $n \cup \{n\} = m$.

Concluimos que $n \cup \{n\} \in A$. Por tanto, A es un conjunto inductivo. ■

Corolario 1.2.13. *La relación $\in$ sobre $\mathbb{N}$ es tricotómica.*

Demostración. Por el teorema anterior, A es inductivo y, por el Teorema de Inducción, $A = \mathbb{N}$. ■

Ahora sí, juntando este hecho con las observaciones que hicimos después del lema 1.2.7, $\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ es un orden lineal. Además, gracias al lema 1.2.7, tenemos que el sucesor inmediato de un natural n es $n \cup \{n\}$, es decir $s(n) = n \cup \{n\}$. También denotamos con $n + 1$ al sucesor inmediato y con $n - 1$ al predecedor inmediato de un número natural n.

Más aún, $\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ es un buen orden.

Teorema 1.2.14. *$\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Sean $X \subseteq \mathbb{N}$ no vacío y $n \in X$. Consideremos el conjunto $(n \cup \{n\}) \cap X$. Tenemos que $(n \cup \{n\}) \cap X \subseteq n \cup \{n\}$ y es no vacío, pues $n \in (n \cup \{n\}) \cap X$. Como $n \cup \{n\} \in \mathbb{N}$, hay $k \in \mathbb{N}$, el cual es el $\in$-mínimo de $(n \cup \{n\}) \cap X$.

Veamos que k también es el $\in$-mínimo de X. Sea $m \in X$. Hay tres casos por la tricotomía de la pertenencia en $\mathbb{N}$: si $m \in n \cup \{n\}$, entonces $m \in n \cup \{n\} \cap X$ y, por tanto, $k \in m$ o $k = m$; si $n \cup \{n\} \in m$, entonces $k \in m$, pues $k \in n \cup \{n\}$; y si $m = n \cup \{n\}$, entonces $k \in m$, pues $k \in n \cup \{n\}$.

En cualquier caso $k = m$ o $k \in m$. Por tanto, k es el $\in$-mínimo de X. ■

Por inducción se nos facilita probar una de las propiedades importantes de $\mathbb{N}$. El orden lineal $\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ tiene un elemento mínimo que es el conjunto vacío, ya que para cualquier número natural n no vacío, $\emptyset \in n$. El primer paso es que $\emptyset \in \{\emptyset\}$. El paso inductivo es trivial, pues la hipótesis inductiva es que $\emptyset \in n$, pero $n \subseteq n \cup \{n\}$. Al elemento mínimo lo denotamos con 0.

Y, si nos fijamos en la representación del orden inverso de $\mathbb{N}$, vemos que el orden lineal $\mathbb{N}^*$ tiene un elemento máximo, a saber, 0.

Además del Principio de Inducción tenemos el Teorema de Recursión sobre el conjunto de los números naturales. El Teorema de Recursión es como la otra cara del Principio de Inducción. Con este Teorema podemos definir una función sobre $\mathbb{N}$ definiéndola en el 0 y, teniendo definida la función en un número natural, definiéndola en el sucesor.

Teorema 1.2.15 (*de Recursión*)**.** *Sean A un conjunto, $a \in A$ y una función $f : A \to A$. Entonces hay una única función $h : \mathbb{N} \to A$ tal que:*

$$\begin{aligned} h(0) &= a \\ h(n \cup \{n\}) &= f(h(n)). \end{aligned}$$

No vamos a probar este resultado porque hay una generalización de este teorema, el *Esquema General de Recursión*, y otras versiones del *Teorema de Recursión para buenos órdenes* que por su utilidad en una amplia gama de estudios, y en nuestro estudio en particular, enunciaremos y probaremos en el capítulo 3. El enunciado de las otras versiones de recursión de ese capítulo abarca este teorema de recursión para el conjunto de los naturales.

Para finalizar esta sección, comentamos la cuestión del tamaño de los conjuntos, es decir, definimos la cardinalidad de ciertos conjuntos, utilizando el concepto de número natural.

Si n es un número natural y hay una biyección entre n y un conjunto A, entonces decimos que A es *finito* y es de *cardinalidad* n (es decir, tiene n elementos). Es importante considerar órdenes lineales finitos, porque veremos que, incluso cuando un conjunto finito esté ordenado por dos relaciones diferentes, en esencia estos órdenes lineales tienen el mismo “aspecto”(o tipo de orden, definición 2.1.1)[3].

Decimos que un conjunto A es *numerable* si y sólo si hay una biyección entre A y $\mathbb{N}$; y, decimos que A es *contable* si y sólo si A es numerable o finito.

De hecho, si $f : \mathbb{N} \to A$ es biyectiva, gracias a que $\langle \mathbb{N}, \in \rangle$ es un buen orden, podemos dar una enumeración de A. De manera que $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$, donde $f(n) = a_n$.

Utilizaremos también que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. Para más detalles respecto de la cardinalidad de conjunto contables, véase el apéndice A.

1.3. $\mathscr{Z}$

Ya vimos que $\mathbb{N}$ es un orden lineal con extremo izquierdo y $\mathbb{N}^*$ tiene extremo derecho. Nos gustaría construir un orden lineal que se parezca a $\mathbb{N}$ pero que no tenga extremos, para llegar a estudiar a la estructura que se conoce como $\mathbb{Z}$, la de los números enteros.

[3]Daremos la definición de tipo de orden en el siguiente capítulo.

Daremos una forma de combinar dos órdenes lineales obteniendo un orden lineal. De hecho, en la siguiente definición, el orden restringido a uno solo de los conjuntos es el mismo orden original de conjunto.

Definición 1.3.1. Sean $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$ órdenes lineales ajenos. Definimos la *suma* de órdenes lineales

$$\langle X, R\rangle + \langle Y, S\rangle = \langle Z, T\rangle$$

de manera que $Z = X \cup Y$ y

$$\begin{aligned} x <_T y \Leftrightarrow\ & x \in X \text{ y } y \in Y;\ \text{o} \\ & x, y \in X \text{ y } x <_R y;\ \text{o} \\ & x, y \in Y \text{ y } x <_S y. \end{aligned}$$

Más generalmente, si $\langle I, R\rangle$ es un orden lineal y para toda $i \in I$, $\langle A_i, R_i\rangle$ son órdenes lineales ajenos dos a dos, se define el orden lineal $\sum\{A_i : i \in I\} = \langle C, T\rangle$, donde $C = \bigcup_{i\in I} A_i$ y

$$\begin{aligned} x <_T y \Leftrightarrow\ & x \in A_i,\ y \in A_j \text{ y } i <_R j \\ & \text{o hay } i \in I \text{ tal que } x, y \in A_i \text{ y } x <_{R_i} y. \end{aligned}$$

Damos el orden lineal $\langle \mathbb{N} \times \{0\}, <\rangle$, donde el orden $<$ está definido por:

$$(n, 0) < (m, 0) \text{ si y sólo si } n \in m.$$

Definición 1.3.2. Definimos

$$\langle \mathscr{Z}, <_{\mathscr{Z}}\rangle = \langle \mathbb{N} \times \{0\}, <\rangle^* + \langle \mathbb{N}, \in\rangle$$

con el orden definido por la suma de órdenes lineales.

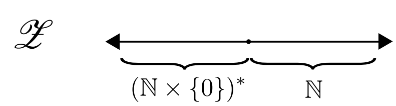

Figura 1.2: $\mathscr{Z}$ es la suma de los órdenes $\mathbb{N} \times \{0\}^*$ y $\mathbb{N}$.

Claramente $\mathscr{Z}$ no tiene extremos.

1.4. $\mathscr{Q}$

Vamos a construir el orden lineal $\langle \mathscr{Q}, <_{\mathscr{Q}}\rangle$, de manera que no tenga extremos y que entre cualesquiera dos elementos de $\mathscr{Q}$ haya otro elemento de $\mathscr{Q}$. A un orden de este tipo se le llama denso.

Sea $\langle L, <\rangle$ un orden lineal.

Definición 1.4.1. $\langle L, <\rangle$ es un orden *denso* si y sólo si $L \neq \emptyset$ y para todo $x, y \in L$ tales que $x < y$, hay $a \in L$ tal que $x < a < y$.

Más adelante, veremos que cualesquiera órdenes densos numerables y sin extremos tienen el mismo "aspecto".

Para observar cómo son los órdenes densos, primero vamos a notar cómo son los órdenes que no son densos. Esto nos interesa, porque los órdenes que construimos anteriormente no son densos.

Definición 1.4.2. L es un *orden disperso* si y sólo si no tiene ningún subconjunto denso infinito.

Si L es un buen orden, entonces es disperso. Si tuviera un subconjunto denso A, tomamos el mínimo de A, digamos a. Entonces para todo $b \in A$ existe un $x \in A$ tal que $a < x < b$. Por tanto, $A \setminus \{a\}$ es un conjunto no vacío sin mínimo, contradiciendo que L es un buen orden. De aqui que $\mathbb{N}$ es disperso.

Un ejemplo en el que podemos observar como se representa un conjunto disperso es notando lo que ya hemos visto, un número natural n siempre tiene un sucesor inmediato, $n \cup \{n\}$. Por tanto, $\mathbb{N}$ es disperso. Y sabiendo esto, es fácil ver que $\mathbb{N}^*$ es disperso.

Lema 1.4.3. *La suma de órdenes dispersos, es disperso.*

Demostración. Sean $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$ órdenes dispersos. Si A es un suborden de $X + Y$, en los casos en que $A \subseteq X$ o $A \subseteq Y$ es trivial notar que A no es denso. El caso interesante es cuando A intersecta a X y a Y. Pero también es muy fácil, pues $X \cap A$ y $Y \cap A$ no son densos, entonces $(X \cap A) \cup (Y \cap A) = A$ no es denso. Por tanto, $X + Y$ es disperso. ■

Concluimos que $\mathscr{Z}$ es disperso.

También de este lema, obtenemos que cualquier suma finita de órdenes dispersos es disperso. Más generalmente, probaremos en el capítulo 5 que una suma dispersa de órdenes dispersos es disperso. Pero no es cierto que toda suma de órdenes dispersos sea disperso. De hecho, ponemos el ejemplo de la suma densa de órdenes dispersos, es decir $\sum\{X_i : i \in A\}$, donde X_i es un orden disperso para cada $i \in A$ y A es denso. Sea B un subconjunto que tiene a uno y sólo un elemento de cada X_i. Entonces, $B \subseteq \sum\{X_i : i \in A\}$ y B es denso. Asimismo, es claro respecto de la suma dispersa de órdenes densos que no es cierto que sea un orden denso ni que sea un orden disperso. Por esto, tampoco es cierto que la suma de órdenes densos es denso.

Construcción

Una motivación para construir el orden $\mathscr{Q}$ es la contraposición con los órdenes que ya tenemos.

Si tenemos una relación que no es transitiva podemos completarla construyendo una nueva que contenga a la anterior pero que sí cumpla con la transitividad. Lo que haremos es relacionar elementos que estén conectados por una cadena de elementos relacionados.

Definición 1.4.4. Sean A un conjunto y $r \subseteq A \times A$ una relación. Definimos la *cerradura transitiva de* r, $R = tr(r) \subseteq A \times A$, de la siguiente manera: $x <_R y$ si y sólo si hay $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $x = a_0 <_r a_1 <_r \ldots <_r a_n = y$.

Para ver que la cerradura transitiva de una relación r sobre a A sí es una relación transitiva, tomemos x, y y z en A tales que $x <_R y <_R z$. Entonces hay $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in A$ tales que $x = a_0 <_r \ldots <_r a_n = y = b_0 <_r \ldots <_r b_m = z$. Por tanto, $x <_R z$ y R es una relación transitiva en A.

Además tenemos que si r es cualquier relación, $r \subseteq tr(r)$.

La manera en la que vamos a construir a $\mathscr{Q}$ es en el límite de una cantidad numerable de subconjuntos, o niveles que definiremos por recursión[4].

Como lo que queremos es que el conjunto sea denso con cierto orden, cada nivel es un conjunto finito y vamos a intercalar un elemento nuevo entre dos de los del nivel anterior. Finalmente, tomamos la unión de todos y veremos que el resultado es un orden denso.

Definiremos $\langle A_n, <_n \rangle$ para toda $n \in \mathbb{N}$ por recursión. Para que sirvan a nuestros propósitos posteriores como primer paso definimos $\langle A_0, <_0 \rangle$ y $\langle A_1, <_1 \rangle$ al mismo tiempo:

$A_0 = \{0\}$, $<_0 = \emptyset$ y $A_1 = \{0, 1, 2\}$, $<_1 = \{(1,0), (0,2), (1,2)\}$.

Supongamos que tenemos definido el orden lineal $\langle A_n, <_n \rangle$. Sea $m = |A_n|$ y tomamos la enumeración de A_n, digamos $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ que cumple que $a_0 <_n a_1 <_n \ldots <_n a_{m-1}$. Ahora elegimos un conjunto $A'_{n+1} = \{a_m, a_{m+1} \ldots, a_{2m}\}$ con $m+1$ elementos de $\mathbb{N} \setminus A_n$ los cuales vamos a intercalar entre los elementos de A_n.

Definimos $A_{n+1} = A_n \cup A'_{n+1}$.

Para intercalar los nuevos elementos primero definimos la relación

$$\begin{aligned} <'_{n+1} = \{ & (a_m, a_0), (a_0, a_{m+1}), (a_{m+1}, a_1), \\ & \ldots, (a_{m+i}, a_i), (a_i, a_{m+i+1}), (a_{m+1+1}, a_{i+1}), \\ & \ldots, (a_{2m-1}, a_{m-1}), (a_{m-1}, a_{2m})\}. \end{aligned}$$

Pero ésta no es transitiva, así que definimos $<_{n+1} = tr(<'_{n+1} \cup <_n)$. Se ve que $<_{n+1}$ es tricotómica por la construcción de $<'_{n+1}$, ya que incluimos todas las cadenas y, es antirreflexiva porque no incluimos parejas de elementos iguales.

Entonces, $\langle A_{n+1}, <_{n+1} \rangle$ es un orden lineal y obsérvese que por la construcción, siempre que $i < j$, se tiene que $A_i \subseteq A_j$ y $<_i \subseteq <_j$ y, para cada $x, y \in A_n$

[4]La construcción de estos niveles está justificada por el Teorema de Recursión más general, al que nos referimos en el Capítulo 3

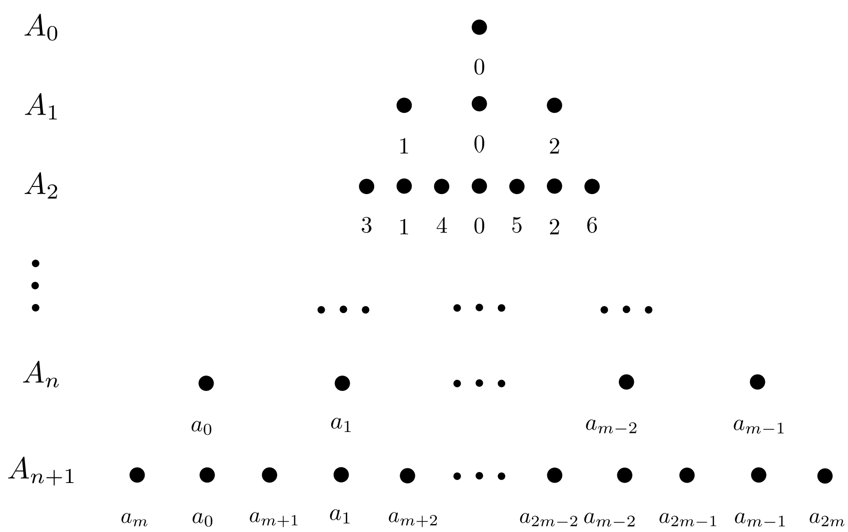

Figura 1.3: Los primeros $n+1$ niveles para la construcción de $\mathscr{Q}$.

hay $z \in A_{n+1}$ tal que $x <_{n+1} z <_{n+1} y$. En la figura 1.3 se muestran los primeros niveles y la construcción del paso sucesor $\langle A_{n+1}, <_{n+1}\rangle$.

Definición 1.4.5.

$$\mathscr{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Se define el orden $<_{\mathscr{Q}}$ de la siguiente manera. Dados $x, y \in \mathscr{Q}$, entonces hay $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in A_n$ y $y \in A_m$, y sin pérdida de la generalidad supongamos que $n \leq m$. Entonces, como $A_n \subseteq A_m$,

$$x <_{\mathscr{Q}} y \text{ si y sólo si } x <_m y.$$

Teorema 1.4.6. *$\langle \mathscr{Q}, <_{\mathscr{Q}}\rangle$ es un orden lineal numerable denso y sin extremos.*

Demostración. $\langle \mathscr{Q}, <_{\mathscr{Q}}\rangle$ es un orden lineal y está bien definido porque cada $\langle A_n, <_n\rangle$ es un orden lineal y $<_i \subseteq <_j$ si $i < j$.

Sea $x \in \mathscr{Q}$, entonces hay n tal que $x \in A_n$. Pero A_n es antirreflexivo, así que $x \not<_n x$ y $x \not<_{\mathscr{Q}} x$.

Sean $x, y \in \mathscr{Q}$. Sea n el máximo tal que $x, y \in A_n$. Por la tricotomía de A_n, sucede una única de las siguientes: $x = y$ o $x <_n y$ o $y <_n$. Por tanto, $x = y$ o $x <_{\mathscr{Q}} y$ o $y <_{\mathscr{Q}}$.

Sean x, y y z en $\mathscr{Q}$, tales que $x <_{\mathscr{Q}} y$ y $y <_{\mathscr{Q}} z$, y n el máximo tal que $x, y, z \in A_n$. Tenemos por la definición que $x <_n y$ y $y <_n z$, pues sin importar para que n se cumple el orden, como los órdenes se contienen, tomamos el máximo. Por la transitividad en A_n, $x <_n z$ y así $x <_{\mathscr{Q}} z$.

Además, $\mathscr{Q}$ es un conjunto numerable, pues cada A_n es finito y $A_i \subseteq A_j$ siempre que $i < j$.

Sean $x, y \in \mathscr{Q}$ tales que $x <_{\mathscr{Q}} y$. Como vimos arriba, hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $x <_m y$. Si tomamos una enumeración de $A_m = \{a_0, \ldots, a_{t-1}\}$ de tal forma que $a_0 <_n a_1 <_n \ldots <_n a_{t-1}$, entones hay $i < j \leq t-1$ tales que $x = a_i$ y $y = a_j$. Ahora vemos que si $A'_{m+1} = \{a_t, \ldots, a_{2t}\}$, entonces $a_i <_{m+1} a_{m+i+1} <_{m+1} a_{i+1}$. Pero $a_{i+1} = a_j$ o $a_{i+1} <_{m+1} a_j$, obteniendo que $z = a_{m+i+1}$. Ya tenemos que existe $z \in \mathscr{Q}$ tal que $x <_{\mathscr{Q}} z <_{\mathscr{Q}} y$.

Para probar que $\mathscr{Q}$ no tiene extremos, basta probar que todo elemento tiene uno mayor y uno menor que él.

Sea $q \in \mathscr{Q}$, n tal que $q \in A_n$ y una enumeración de A_n, digamos $\{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$ tal que $a_0 <_n a_1 <_n \ldots <_n a_{m-1}$. Si $q = a_i$, con $0 < i < m-1$, entonces $a_{i-1} <_n q <_n a_{i+1}$, donde a_{i-1} y a_{i+1} pertenecen a A_n.

Si $q = a_0$, en el siguiente nivel se eligió a_m tal que $a_m <_{n+1} q$. De la misma manera, suponiendo que $q = a_{m-1}$, entonces $q <_{n+1} a_{2m}$.

Por tanto, $\langle \mathscr{Q}, <_{\mathscr{Q}} \rangle$ es un orden lineal numerable denso sin extremos. ■

1.5. $\mathscr{R}$

La construcción del siguiente orden lineal se basa en "completar"$\langle \mathscr{Q}, < \rangle$; esto quiere decir elmimar lo agujeros que hay en $\langle \mathscr{Q}, < \rangle$.

Por otro lado, los órdenes que hemos construido hasta ahora tienen todos el mismo número de elementos, son todos numerables. Pero $\mathscr{R}$ no será numerable ni finito. Entonces tenemos un nuevo caso interesante.

Completar un orden

Primero veamos qué queremos decir con un agujero o hueco de un orden lineal, para después rellenarlo.

Definición 1.5.1. Si $\langle X, R \rangle$ es un orden lineal, $A \subseteq X$ es un *intervalo* de X si y sólo si para cualesquiera $a, b \in A$, si $a <_R x <_R b$, entonces $x \in A$.

Si $a, b \in X$, los conjuntos $\{x \in X : a <_R x <_R b\}$, $\{x \in X : a \leq_R x <_R b\}$, $\{x \in X : a <_R x \leq_R b\}$ y $\{x \in X : a \leq_R x \leq_R b\}$ son intervalos de X. Se denotan (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ y $[a, b]$ respectivamente.

Sea $\langle X, R \rangle$ un orden lineal.

Definición 1.5.2. Sean $A, B \subseteq X$ no vacíos tales que $A \cup B = X$ y si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $a <_R b$. Decimos entonces que (A, B) es una *cortadura de* X.

Las cortaduras de un orden lineal X se pueden ver como en la figura 1.4.

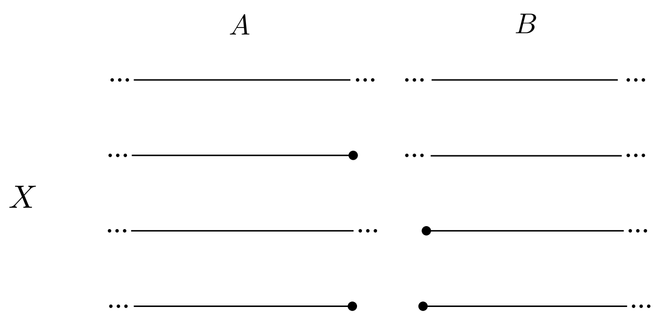

Figura 1.4: Cortaduras de un orden X.

Lo que mostramos con este diagrama son las posibilidades de que A tenga máximo y/o B tenga mínimo. De las cortaduras, la última, en la que A tiene máximo y B tiene mínimo, no es posible en $\mathscr{Q}$, ya que es un orden denso y habría un elemento entre los extremos. El segundo y el tercer caso son equivalentes, pues a partir del segundo caso se puede hacer una partición similar a una del tercer caso considerando al máximo de A como el mínimo de B.

Definición 1.5.3. Sea (A, B) una cortadura de X. Decimos que (A, B) es un *hueco en* X si y sólo si A no tiene máximo y B no tiene mínimo. Decimos que $\langle X, R\rangle$ es *Dedekind completo* si y sólo si X no tiene huecos.

Números Reales

Ahora nos concentramos específicamente en $\mathscr{Q}$.

Definición 1.5.4. I es un *segmento inicial de* $\mathscr{Q}$ si y sólo si

1. $I \neq \emptyset$ y $I \subsetneq \mathscr{Q}$;
2. para todo $a \in I$ y $b \in \mathscr{Q}$, si $b < a$, entonces $b \in I$;
3. I no tiene elemento máximo.

Si I es un segmento inicial de $\mathscr{Q}$, a la cortadura $(I, \mathscr{Q} \setminus I)$ de $\mathscr{Q}$ se le llama *cortadura de Dedekind*. Los subconjuntos $I_r = \{q \in \mathscr{Q} : q < r\}$ con $r \in \mathscr{Q}$, son segmentos iniciales de $\mathscr{Q}$. Justamente la cortadura $(I_r, \mathscr{Q} \setminus I_r)$ se ve como en el segundo caso posible de las cortaduras de $\mathscr{Q}$, pues $\mathscr{Q} \setminus I_r$ tiene a r como mínimo, entonces $(I_r, \mathscr{Q} \setminus I_r)$ no es un hueco para ningún $r \in \mathscr{Q}$.

Definición 1.5.5.

$$\mathscr{R} = \{I : I \text{ es segmento inical de } \mathscr{Q}\}.$$

Definimos el orden en $\mathscr{R}$ como la contención propia entre conjuntos, es decir, dados $I, J \in \mathscr{R}$, $I <_{\mathscr{R}} J$ si y sólo si $I \subsetneq J$.

Tenemos que hay un suborden de $\mathscr{R}$ con el mismo "aspecto"que $\mathscr{Q}$. Este es

$$\mathscr{Q}' = \{I_r : r \in \mathscr{Q}\}$$

y se puede probar que es un orden lineal denso numerable sin extremos, al igual que $\mathscr{Q}$. Pero queremos rellenar los huecos de $\mathscr{Q}$ agregando las cortaduras de Dedekind que son huecos, así que veamos que efectivamente $\mathscr{R}$ no tiene huecos.

Definición 1.5.6. Sea $\langle X, R\rangle$ un orden lineal y A un suborden de X. Decimos que $x \in X$ es una *cota superior de A* (*cota inferior de A*) si y sólo si $a \leq x$ para todo $a \in A$ ($x \leq a$ para todo $a \in A$). Si hay una cota superior de A (cota inferior de A), entonces decimos que A es *acotado por arriba en X* (*acotado por abajo en X*).

Si x es la mínima cota superior de A (es decir $x \leq y$ si $y \in X$ es cota superior de A), entonces x es el *supremo* de A; si x es la máxima cota inferior de A (es decir $y \leq x$ si $y \in X$ es cota inferior de A), entonces x es el *ínfimo* de A.

La diferencia de esta última definición con la de máximo y mínimo de un suborden es que el ínfimo y el supremo no necesariamente pertenecen al suborden, pero el mínimo y el máximo sí. Esto hace la diferencia a la hora de considerar las cortaduras, porque en $\mathscr{R}$ ya rellenamos los huecos, entonces aunque no hay un máximo o un mínimo de $\mathscr{Q}$, sí hay un supremo o un ínfimo que pretenecen a $\mathscr{R}$.

Si A no es acotado por arriba en X (acotado por abajo en X), también se dice que *A es cofinal con X*(*A es coinicial con X*). Esta forma de hablar nos da una idea de qué quiere decir que un conjunto no sea acotado por arriba en otro, esto es que A termina como X.

Definición 1.5.7. Sea $\langle X, R\rangle$ un orden lineal. Decimos que $\langle X, R\rangle$ es un *orden completo* si y sólo si todo suborden no vacío A de X acotado por arriba en X, tiene supremo.

La condición de esta última definición es equivalente a que todo suborden no vacío A de X acotado por abajo en X, tiene ínfimo. Observar esto nos da una mejor idea de cómo son los órdenes completos.

Lema 1.5.8. *Un orden lineal $\langle X, R\rangle$ es completo si y sólo si $\langle X, R\rangle$ es Dedekind completo.*

Demostración. Supongamos que $\langle X, R\rangle$ es completo y sea (A, B) una cortadura. Para ver que (A, B) no es un hueco, basta mostrar que A tiene máximo o que B tiene mínimo. Como $\langle X, R\rangle$ es completo, existe el supremo de A, digamos a_0. Si $a_0 \in A$, entonces a_0 es máximo de A. En el otro caso, si $a_0 \notin A$, entonces, como (A, B) es una cortadura, $a_0 \in B$. Además, para todo $b \in B$, $a_0 \leq b$, pues si $b < a_0$ habría $a \in A$ tal que $b < a < a_0$, pero esto no es posible. Es decir, a_0 es el mínimo de B.

Recíprocamente, supongamos que $\langle X, R\rangle$ es Dedekind completo y sea A un suborden de X acotado por arriba en X. Supongamos que A no tiene supremo en X. Tenemos que $A' = \{x \in X :\ \text{hay } a \in A \text{ tal que } x \leq a\}$ es un suborden de X tal que $(A', X \setminus A')$ es una cortadura de X. Como A no tiene supremo, A' no tiene supremo y $X \setminus A'$ no tiene ínfimo, ya que éste sería el supremo de A'. De aquí que esta cortadura es un hueco. Pero esto contradice que $\langle X, R\rangle$ sea Dedekind completo. Por tanto, A tiene supremo y así $\langle X, R\rangle$ es completo. ■

Teorema 1.5.9. *$\mathscr{R}$ es un orden completo.*

Demostración. Sea (A, B) una cortadura de $\mathscr{R}$. Por la definición, para todo $J \in A$, $J \subseteq \bigcup A$. Veamos que $\bigcup A$ es un segmento inicial de $\mathscr{Q}$. Como los elementos de A son segmentos iniciales de $\mathscr{Q}$, se ve que $\bigcup A \neq \emptyset$ y que $\bigcup A \subsetneq \mathscr{Q}$.

Sean $a \in \bigcup A$ y $b \in \mathscr{Q}$ tales que $b < a$. Hay $J \in A$ segmento inicial de $\mathscr{Q}$ tal que $a \in J$, por tanto $b \in J \subseteq \bigcup A$.

Sea $x \in \bigcup A$. Hay $J \in A$ tal que $x \in J$. Entonces, hay $y \in J \subseteq \bigcup A$ tal que $x < y$. Es decir, $\bigcup A$ no tiene elemento máximo.

Al cumplir estas tres condiciones, $\bigcup A$ es un segmento inicial de $\mathscr{Q}$, es decir $\bigcup A \in \mathscr{R}$. De aqui tenemos dos casos posibles, pues (A, B) es un cortadura de $\mathscr{R}$: $\bigcup A \in A$ o $\bigcup A \in B$. Si $\bigcup A \in A$, $\bigcup A$ es máximo de A. Si $\bigcup A \in B$, tomamos $J \in B$. Como (A, B) es una cortadura, para todo $K \in A$, $K \subseteq J$, entonces, por propiedades de la unión de conjuntos, $\bigcup A \subseteq J$. Por tanto, $\bigcup A$ es el mínimo de B.

En cualquiera de los casos estamos mostrando que la cortadura (A, B) no es un hueco de $\mathscr{R}$. Por tanto, $\mathscr{R}$ es un orden Dedekind completo y, por el Lema 1.5.8, es un orden completo. ■

Otras características de $\mathscr{R}$

Ahora vamos a descubrir qué otras características tiene el nuevo orden que acabamos de construir a diferencia de los anteriores. Primero, vamos a probar que $\mathscr{R}$ es no numerable y, despúes, analizaremos a $\mathscr{R}$ dando un resultado sobre $\mathscr{Q}'$ como suborden de $\mathscr{R}$.

Teorema 1.5.10. *$\mathscr{R}$ es no numerable.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{R}$ es numerable. Entonces, habría una enumeración de $\mathscr{R}$, digamos $\{c_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathscr{R}$. Vamos a encontrar $a \in \mathscr{R}$ tal que $a \notin \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Construiremos simultáneamente por recursión dos conjuntos, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, de la siguiente manera.

1. $a_0 = c_0$ y $b_0 = c_k$, donde k es el mínimo número natural tal que $c_0 < c_k$, que existe porque $\mathscr{R}$ no tiene elemento máximo.

2. $a_{n+1} = c_k$, donde k es el mínimo número natural que $a_n < c_k < b_n$, que existe porque $\mathscr{R}$ es denso.

   $b_{n+1} = c_k$, donde k es el mínimo número natural tal que $a_{n+1} < c_k < b_n$, que existe porque $\mathscr{R}$ es denso.

Observemos que, por la definición,

$$a_0 < a_1 < a_2 \dots \text{ y } \dots b_2 \dots b_1 < b_0.$$

De esto se sigue que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene máximo y $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene mínimo. Además, $a_n < b_m$ para cualesqueira $n, m \in \mathbb{N}$; es decir $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado por b_m para toda $m \in \mathbb{N}$.

Sea a el supremo de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$; $a \in \mathscr{R}$, pues $\mathscr{R}$ es completo. Como a es cota superior de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $a_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y como a es la mínimo cota superior y b_m son cotas superiores, $a < b_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n < a < b_n$.

Probaremos que $a \notin \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $c_i \in \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $c_i \leq a_{i+1}$ o $c_i \geq b_{i+1}$. Si $a_{i+1} < c_i$, entonces hay dos casos: i es el mínimo natural tal que $a_{i+1} < c_i < b_i$, en cuyo caso, $c_i = b_{i+1}$; o hay un número natural k tal que $a_{i+1} < c_k < c_i$ y $b_{i+1} = c_k$, en cuyo caso $b_{i+1} < c_i$. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ hay $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_i \leq a_n$ o $b_n \leq c_i$, es decir, ningún c_i cumple la afirmación anterior de que para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n < c_i < b_n$. Por tanto, $a \notin \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$.
■

Respecto de $\mathscr{Q}'$ veamos que no solo es un orden denso sino que al verlo como un suborden de $\mathscr{R}$, cumple más cosas sobre densidad.

Definición 1.5.11. Sea A un suborden de un orden lineal X. Decimos que A es *denso en* X si y sólo si para cualesquiera $a, b \in X$, si $a <_X b$ hay $c \in A$ tal que $a <_X c <_X b$.

Lema 1.5.12. *$\mathscr{Q}'$ es denso en $\mathscr{R}$.*

Demostración. Si $I, J \in \mathscr{R}$ con $I \subsetneq J$, entonces hay $p \in \mathscr{Q}$ tal que $p \in J \setminus I$.

Veamos que $I \subseteq I_p \subsetneq J$. Claramente $I_p \neq J$, pues $p \in J \setminus I_p$. Como $p \in J$, para todo $x \in \mathscr{Q}$ tal que $x < p$, $x \in J$, entonces $I_p \subsetneq J$. Si hubiera $x \in I$ tal que $x \notin I_p$, entonces $p \leq x$ y así, tendríamos que $p \in I$, contradiciendo la elección de p. Por tanto, $I \subseteq I_p$.

Como J no tiene máximo, hay $q \in J$ tal que $p < q$ y, como $\mathscr{Q}$ es denso, hay $r \in \mathscr{Q}$ tal que $p < r < q$. Tenemos que $I_p \subsetneq I_r \subsetneq J$. Por tanto, concluimos que hay $I_r \in \mathscr{Q}'$ tal que $I \subsetneq I_r \subsetneq J$. ■

Definición 1.5.13. Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal no finito. L es un *orden separable* si y sólo si hay un suborden numerable de L que es denso en L.

Concluyendo, tenemos que $\mathscr{R}$ es un orden completo separable sin extremos.

Capítulo 2

Tipos de orden

Al principio de esta tesis mencionamos que puede haber varias relaciones distintas que ordenen linealmente a un conjunto. Estas distintas relaciones que existen para un mismo conjunto, pueden cambiar esencialmente el orden, de manera que cambie su "aspecto". De cierta manera, lo que vamos a estudiar en este capítulo es cuándo las relaciones que ordenan linealmente a un conjunto mantienen cierta estructura y las podemos considerar como la misma.

Hicimos una observación en el capítulo anterior respecto a los órdenes lineales finitos. Cualquier orden lineal finito se ve esencialmente igual a cualquier otro con la misma cardinalidad, sin importar cuál es la relación que lo ordena. En cambio, a $\mathbb{N}$ sí le podemos dar un orden que le da un "aspecto"diferente al usual. Por ejemplo, entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^*$ hay diferencias importantes, entre las que podemos mencionar que un orden tiene mínimo y no tiene máximo, y el otro viceversa. En este capítulo, formalizamos lo que queremos decir con el "aspecto"de un orden lineal.

2.1. Tipos de orden

Definición 2.1.1. Dados dos órdenes lineales $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$ y una función $f : X \to Y$, decimos que f es una función *monótona* si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$

$$x <_R y \text{ implica que } f(x) <_S f(y);$$

decimos que f es una función que *preserva orden* si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$

$$x <_R y \text{ si y sólo si } f(x) <_S f(y).$$

Si f preserva orden y además es una función sobre, decimos que f es un *isomorfismo* entre X y Y y que X y Y son *isomorfos*. Si hay un isomorfismo entre X y Y, lo denotamos como $X \simeq Y$. Al hecho de que f es un isomorfismo entre X y Y, lo denotamos como $X \simeq_f Y$.

Decimos que X es *encajable* en Y si y sólo si hay una función de X en Y que preserva orden. Esto lo denotamos como $X \preceq Y$.

En la figura 2.1 se muestran tres funciones de $\mathbb{N}$. La primera función, f_1, sí es un isomorfismo, mientras que las otras no, pues f_2 no preserva el orden de $\mathbb{N}$ y f_3 no es una función biyectiva.

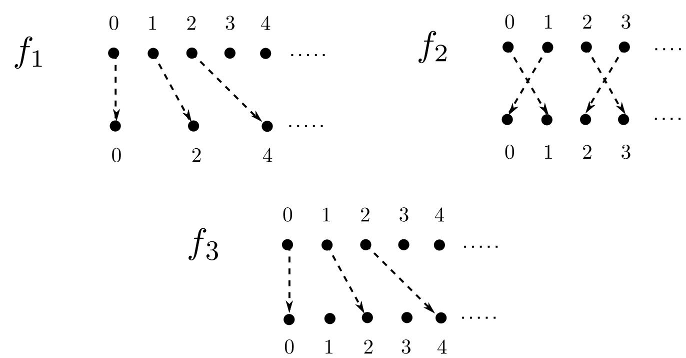

Figura 2.1: f_2 no preserva orden; f_3 no es sobre.

Definición 2.1.2. Sean X, Y órdenes lineales. Decimos que X y Y *tienen el mismo tipo de orden* si X y Y son isomorfos.

Esta definición es sumamente importante para este trabajo y es precisamente la que formaliza el concepto de que dos órdenes lineales tengan el mismo "aspecto".

Gracias a esta definición queda justificada nuestra discusión de que los órdenes lineales construidos en el primer capítulo tienen el mismo aspecto que las estructuras numéricas usuales. Por ejemplo, en el apéndice B probamos que $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathscr{Z}$, así que tienen el mismo tipo de orden. Así, de ahora en adelante podremos hablar del tipo de orden, en vez de mencionar el conjunto con la relación que lo ordena.

Como las funciones con las que trabajaremos son funciones entre órdenes lineales, el resultado siguiente es muy importante y justifica porqué en la definición de isomorfismo no incluimos que la función sea inyectiva (hecho usual en cualquier definición de ismorfismo).

Lema 2.1.3. *Sean $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$ órdenes lineales y sea $f : X \to Y$ una función monótona. Entonces f es inyectiva y preserva orden.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Por tricotomía, $x <_R y$ ó $y <_R x$. Entonces se tiene que $f(x) <_S f(y)$ o $f(y) <_S f(x)$ por la monotonía de f. Como S también es tricotómica, tenemos que $f(x) \neq f(y)$. Así que f es inyectiva.

Ahora sean $x, y \in X$ tales que $f(x) <_S f(y)$. De nuevo por tricotomía, se tiene que $x <_R y$, $y <_R x$ o $x = y$, y sólo una de ellas. Pero por la monotonía y el hecho de que f sea función, no pueden ser los casos en que $y <_R x$ o $x = y$. Por tanto, $x <_R y$ y f preserva orden. $\blacksquare$

De manera similar se puede probar que si $f : X \to Y$ cumple que para cualesquiera $x, y \in X$ con $f(x) <_S f(y)$ se tiene que $x <_R y$, entonces f es inyectiva y preserva orden.

Lema 2.1.4. *Sean $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ órdenes lineales. Si existe una función $f : A \to B$ monótona, entonces hay un suborden B' de B isomorfo a A.*

Demostración. Haciendo $B' = f[A]$ obtenemos el suborden deseado, pues por el lema anterior f preserva el orden. $\blacksquare$

Nos interesa estudiar a los órdenes lineales por medio de su tipo de orden (o su apariencia) para así caracterizarlos.

Se puede verificar que $\simeq$ se comporta como una relación de equivalencia sobre la clase[1] de todos los órdenes lineales. Dada la clase de equivalencia de cada tipo de orden, podríamos pensar en elegir a un representante de ella, pero incluso si las clases de equivalencia fueran conjuntos, la colección de ellas no lo es, por lo que no podemos aplicar el Axioma de Elección. Recurrimos entonces al truco de Scott (véase el Apéndice A), tomando el conjunto de órdenes que tienen el mismo tipo de orden y son de rango mínimo.

Por lo visto en el Apéndice A, hablar de un tipo de orden τ es hablar de un conjunto de órdenes lineales isomorfos, entonces que $\langle X, R\rangle$ tiene tipo de orden τ significa que cualquier orden lineal con τ es isomorfo a $\langle X, R\rangle$. Usaremos la notación $\tau \simeq \langle X, R\rangle$[2] para decir que $\langle X, R\rangle$ tiene tipo de orden τ.

Usando la notación que definimos para órdenes lineales, ahora podemos decir lo siguiente para tipos de orden.

Definición 2.1.5. Sean τ_1 y τ_2 tipos de orden. Decimos que τ_1 es *encajable* en τ_2 si y sólo si cualquier orden lineal con tipo de orden τ_1 es encajable en cualquier orden lineal de tipo de orden τ_2. Esto lo denotamos como $\tau_1 \preceq \tau_2$.

Si $\tau_1 \preceq \tau_2$ y $\tau_2 \preceq \tau_1$, entonces escribimos $\tau_1 \equiv \tau_2$.

Lema 2.1.6. *Sean $\langle A, R\rangle \simeq \langle A', R'\rangle$ y $\langle B, S\rangle \simeq \langle B', S'\rangle$ órdenes lineales tales que A y B son ajenos al igual que A' y B'. Entonces $A + B \simeq A' + B'$.*

Demostración. Para probar que dos órdenes lineales son isomorfos basta dar una función monótona y sobre de uno en otro. Como $\langle A, R\rangle \simeq \langle A', R'\rangle$ y

[1] No podemos decir que $\simeq$ es una relación de equivalencia porque no es un conjunto, es una clase propia. En el apéndice A recordamos cuales son las clases propias y las impropias (conjuntos).

[2] Esta noción de isomorfismo es solamente notación que nos simplifica la escritura porque de hecho τ ni siquiera es un orden lineal.

$\langle B, S\rangle \simeq \langle B', S'\rangle$, hay isomorfismos $g_1 : A \to A'$ y $g_2 : B \to B'$. Así que, el ismorfismo que estamos buscando está definido de la siguiente manera, para cada $x \in A + B$

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in A, \\ g_2(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

f está bien definida, pues $A \cap A' = \emptyset = B \cap B'$. ■

Pero también queremos tener la posibilidad de sumar órdenes lineales que no sean ajenos. Si buscamos sumar $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$, podemos encontrar órdenes lineales $\langle X', R'\rangle$ y $\langle Y', S'\rangle$ que sí sean ajenos y que cumplan que $X \simeq X'$ y $Y \simeq Y'$. Esta idea la retomamos de la definición de $\mathscr{Z}$ en el capítulo 1. Habíamos definido a $\mathscr{Z}$ como la suma $\langle \mathbb{N} \times \{0\}, <\rangle + \langle \mathbb{N}, \in\rangle$. Como se tiene que $\langle \mathbb{N} \times \{0\}, <\rangle \simeq \langle \mathbb{N}, \in\rangle^*$, podríamos haber definido $\mathscr{Z} = \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$.

Es importante saber que, aunque por el lema 2.1.6 no sea relevante cuáles, sí podemos encontrar estos dos órdenes lineales ajenos e isomorfos a los originales. Definimos $X' = \{(x, 0) : x \in X\}$ y $R' = \{((x, 0), (y, 0)) : x <_R y\}$; y $Y' = \{(y, 1) : y \in Y\}$ y $S' = \{((x, 1), (y, 1)) : x <_S y\}$. Entonces $\langle X', R'\rangle$ y $\langle Y', S'\rangle$ son órdenes lineales tales que $X' \cap Y' = \emptyset$ y $X \simeq X'$ y $Y \simeq Y'$. Así, está bien definida la suma de cualquier par de órdenes lineales.

Con esto último podemos definir la suma de tipos de orden. Si τ_x y τ_y son los tipos de orden de $\langle X, R\rangle$ y $\langle Y, S\rangle$ respectivamente, entonces $\tau_x + \tau_y$ representa al tipo de orden de $\langle X, R\rangle + \langle Y, S\rangle$.

De hecho, es posible hacer una suma arbitraria de tipos de orden. Sean $\langle I, S\rangle$ un orden lineal y $\{\langle A_i, R_i\rangle : i \in I\}$ y $\{\langle A'_i, R'_i\rangle : i \in I\}$ familias de órdenes lineales tales que $\langle A_i, R_i\rangle \simeq \langle A'_i, R'_i\rangle$ para todo $i \in I$. Entonces, $\sum\{\langle A_i, R_i\rangle : i \in I\} \simeq \sum\{\langle A'_i, R'_i\rangle : i \in I\}$. Por tanto, está bien definida la suma arbitraria de tipos de orden y $\sum\{\tau_i : i \in I\}$ es el tipo de orden de $\sum\{\langle A_i, R_i\rangle : i \in I\}$, donde $\langle A_i, R_i\rangle \simeq \tau_i$.

Definición 2.1.7. Sean τ y α tipos de orden. Tomamos para toda $i \in \tau$, órdenes lineales $\langle A_i, R_i\rangle$ tales que $\langle A_i, R_i\rangle \simeq \alpha$. Se define el *producto de α por τ* como el tipo de orden de $\sum\{A_i : i \in \tau\}$ y lo denotamos por $\alpha \cdot \tau$.

Si tenemos órdenes lineales $\langle I, S\rangle$ y $\langle A, R\rangle$ con tipos de orden τ y α respectivamente, podemos referirnos al producto entre A y I, es decir $A \cdot I$, pues estaríamos hablando de $\alpha \cdot \tau$.

2.2. Los tipos famosos

En el capítulo anterior construimos varios órdenes lineales. Estos conjuntos tienen tipos de orden notables, por lo que los denotarmos con un símbolo específico. El tipo de orden de $\langle \mathbb{N}, \in\rangle$ es ω; al tipo de orden de $\langle \mathscr{Z}, <\rangle$ lo denotamos con ζ; el tipo de orden de $\langle \mathscr{Q}, <_{\mathscr{Q}}\rangle$ es η; y el tipo de orden de $\mathscr{R}$ es λ. Cualquier orden lineal finito con n elementos es isomorfo a $\langle n, \in\rangle$, por lo que denotamos con n a su tipo de orden.

Podemos escribir $\langle X, R\rangle \simeq \tau$, para decir que τ es el tipo de orden de $\langle X, R\rangle$.

En el apéndice B comprobamos que con respecto al orden usual de las estructuras numéricas (y sólo fijándonos en ese orden) es lo mismo hablar de $\mathscr{Z}$ que de $\mathbb{Z}$ y de $\mathscr{Q}$ que de $\mathbb{Q}$. De hecho $\mathbb{N} = \mathscr{N}$, y la construcción de $\mathscr{R}$ es totalmente equivalente a la de $\mathbb{R}$ pero usando $\mathbb{Q}$ en vez de $\mathscr{Q}$. Para más referencia respecto a la construcción de las estructuras numéricas véase el Apéndice B.

En esta sección caracterizamos sus tipos de orden y, por lo discutido en el apéndice B, podremos afirmar que

$$\begin{aligned} \mathscr{Z} &\simeq \zeta \simeq \mathbb{Z}; \\ \mathscr{Q} &\simeq \eta \simeq \mathbb{Q}; \\ \mathscr{R} &\simeq \lambda \simeq \mathbb{R}; \end{aligned}$$

pues también $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ cumplen con las caracterizaciones que damos a continuación.

El tipo de orden ω

Para caracterizar el tipo de orden de $\mathbb{N}$ probemos el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sea $\langle L, <_L\rangle$ un orden lineal numerable. Entonces $L \simeq \omega$ si y sólo si $\{y \in L : y <_L x\}$ es finito para cualquier $x \in L$.*

Demostración. Supongamos que $L \simeq \omega$. Como $\mathbb{N} \simeq \omega$, hay un isomorfismo $f : L \to \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $x \in L$

$$\{y \in L : y <_L x\} \simeq \{n \in \mathbb{N} : n < f(x)\},$$

ya que la restricción de f a $\{y \in L : y <_L x\}$ es sobre y su imagen es $\{n \in \mathbb{N} : n < f(x)\}$. Como $f(x) \in \mathbb{N}$ y $\{n \in \mathbb{N} : n < f(x)\} = f(x)$ para cualquier $x \in L$, $\{y \in L : y <_L x\}$ es finito.

Supongamos ahora que $\{y \in L : y <_L x\}$ es finito para cualquier $x \in L$. Para cada $x \in L$, sea $n_x \in \mathbb{N}$ la cardinalidad de este conjunto. Veamos que la función $f : L \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = n_x$ es un isomorfismo.

Sean $x, y \in L$. Entonces, $x <_L y$ si y sólo si $\{z \in L : z <_L x\} \subsetneq \{z \in L : z <_L y\}$. Sea f_y el isomorfismo entre $\{z \in L : z <_L y\}$ y n_y y sea f_x el isomorfismo entre $\{z \in L : z <_L x\}$ y n_x. Si $\{z \in L : z <_L x\} \subsetneq \{z \in L : z <_L y\}$, entonces $f_y[\{z \in L : z <_L x\}] \subsetneq f_y[\{z \in L : z <_L y\}] = n_y$. Tenemos también que

$$f_y[\{z \in L : z <_L x\}] \simeq \{z \in L : z <_L x\} \simeq n_x.$$

Entonces, $n_x \preceq n_y$, pero $n_x \not\simeq n_y$. De aquí que $n_x < n_y$, pues de lo contrario, como $x = y$ implica que $n_x \simeq n_y$ y $n_y < n_x$ implica que $n_y \subsetneq n_x$, llegaríamos a una contradicción. Concluimos que $n_x < n_y$, si $x <_L y$. La función f es inyectiva y monótona, por tanto, f preserva el orden.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Como f es inyectiva y L es numerable, $f[L]$ es numerable. Entonces hay $a \in L$ tal que $m < n_a$, pues si para todo $a \in L$ tuviéramos que $n_a \leq m$, se seguiría que $f[L] \subseteq m$, contradiciendo la numerabilidad de $f[L]$. Como $m \geq 0$, $n_a > 0$, por lo que a no es el $<_L$-mínimo de L (si lo tuviera). El conjunto de los predecesores de a es un suborden de L de cardinalidad n_a, donde $\{b \in L : b <_L a\} = \{b_0, b_1, \ldots, b_{n_a-1}\}$ y $b_i < b_j$ para toda $i < j \leq n_a - 1$. Tomemos $b_m = c \in L$. Por la definición de f, $m = n_c$. De aquí que f sea sobre. Por lo tanto, f es un isomorfismo y $L \simeq \mathbb{N} \simeq \omega$. ■

Llamamos ω^* al tipo de orden de $\mathbb{N}^*$.

Si $\langle L, <_L\rangle \simeq \omega$, entonces $\langle L, <_L\rangle^* \simeq \omega^*$. Por esto se puede demostrar que $\langle L', <_L\rangle \simeq \omega^*$ si y sólo si $\{y \in L' : x <_L y\}$ es finito.

Otra característica importante que observamos sobre el tipo de orden ω y ω^* se enuncia en el siguiente lema.

Lema 2.2.2. *ω no tiene elemento máximo y ω^* no tienen elemento mínimo.*

Demostración. Sabemos que existe el sucesor inmediato de cualquier número natural, entonces $\mathbb{N}$ no tiene máximo. Por lo tanto, ω no tiene máximo.

Para cualquier elemento n de $\mathbb{N}^*$, hay un predecesor inmediato, a saber el sucesor con el orden de $\mathbb{N}$. Por lo tanto, $\mathbb{N}^*$ no tiene mínimo. Entonces, ω^* no tiene mínimo. ■

El tipo de orden ζ

El tipo de orden de $\langle \mathscr{Z}, <\rangle$ es ζ y, por la construcción de $\mathscr{Z}$,

$$\zeta = \omega^* + \omega.$$

Damos ahora una caracterización del tipo de orden de $\mathscr{Z}$.

Lema 2.2.3. *Sea $\langle L, <_L\rangle$ un orden lineal. $L \simeq \zeta$ si y sólo si L no tiene elemento mínimo ni máximo y $[a, b]$ es finito para cualesquiera $a, b \in L$.*

Demostración. Supongamos que $L \simeq \zeta$. Entonces, $L \simeq \mathscr{Z} \simeq \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$ y hay un isomorfismo $f : L \to \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$. Si L tuviera un elemento mínimo, digamos a, entonces $f(a)$ sería elemento mínimo de $\langle \mathbb{N}, \in\rangle^* + \langle \mathbb{N}, \in\rangle$, y por el orden de la suma de órdenes $f(a)$ sería mínimo de $\mathbb{N}^*$, hecho imposible. Si L tuviera un máximo llegaríamos de la misma manera a que $\mathbb{N}$ tiene un elemento máximo y esto no es posible. Por tanto, L no tiene extremos.

Ahora, dados $a, b \in L$, como f es isomorfismo, $[a, b]$ es finito si y sólo si $[f(a), f(b)]$ es finito. Pero podemos reescribir este intervalo como unión de dos intervalos (no forzosamente no vacíos), $[f(a), f(b)] = [f(a), x_0] \cup [x_0, f(b)]$, donde $[f(a), x_0] \subseteq \mathbb{N}^*$ y $[x_0, f(b)] \subseteq \mathbb{N}$, que por el lema anterior son finitos. Por tanto, $[f(a), f(b)]$ y $[a, b]$ son finitos.

Recíprocamente, supongamos que L no tiene elemento máximo ni mínimo y que para cualesquiera $a, b \in L$, $[a, b]$ es finito. Sea $a_0 \in L$ y consideremos el suborden de L, $L_a = L \setminus \{z \in L : z < a_0\}$. Por la hipótesis, para todo $b \in L_a$, se tiene que $[a_0, b]$ es finito y $[a_0, b)$ es finito. Pero $[a_0, b) = \{z \in L_a : z < b\}$. Además, L_a no es finito, pues si lo fuera tendría un elemento máximo, digamos c, contradiciendo que L no tiene máximo. Por la caracterización de ω del lema 2.2.1, $L_a \simeq \omega$.

De la misma manera se muestra que $L \setminus L_a \simeq \omega^*$. Para todo $b \in L \setminus L_a$, se tiene que $[b, a_0]$ es finito, y por esto $\{z \in L \setminus L_a : b < z\} = (b, a_0)$ es finito. Tampoco $L \setminus L_a$ es finito, pues si lo fuera, tendría un elemento mínimo, contradiciendo que L no tiene mínimo. Usando la caracterización de ω^*, $L \setminus L_a \simeq \omega^*$.

Es inmediato comprobar que $L = L \setminus L_a + L_a$. Por lo tanto, $L \simeq \omega^* + \omega = \zeta$. ■

En el Apéndice B se prueba que $\mathbb{Z}$ es isomorfo a $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}$. Por tanto $\mathbb{Z} \simeq \mathscr{Z}$, así que hablando de órdenes lineales es lo mismo tratar con $\mathscr{Z}$ que con $\mathbb{Z}$.

El tipo de orden η

Ya sabemos que $\mathscr{Q}$ es un orden denso sin extremos. Lo que veremos en esta sección son algunos teoremas de Cantor que tratan sobre los órdenes densos y caracterizan al tipo de orden η.

Para hablar de tipos de orden densos necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2.4. *Si $\langle B, R \rangle \simeq \langle D, S \rangle$ son dos órdenes lineales isomorfos, entonces $\langle B, R \rangle$ es denso si y sólo si $\langle D, S \rangle$ también lo es.*

Demostración. Sea $f : B \to D$ un isomorfismo. Supongamos que $\langle D, S \rangle$ es denso. Sean $x, y \in B$ tales que $x <_R y$. Entonces $f(x) <_S f(y)$. Como D es denso, hay $a \in D$ tal que $f(x) <_S a <_S f(y)$. Como f es sobre, hay $z \in B$ tal que $f(z) = a$ y, por ser isomorfismo, tenemos que $x <_R z <_R y$. La demostración del recíproco es similar. ■

Teorema 2.2.5 (Cantor). *Sea $\langle D, R \rangle$ un orden lineal denso numerable sin máximo ni mínimo y sea $\langle B, S \rangle$ un orden lineal numerable. Entonces $\langle B, S \rangle \preceq \langle D, R \rangle$.*

Demostración. Sea $\{b_0, b_1, b_2 \ldots\}$ una enumeración de B. Vamos a definir cada $f(b_i)$ por recursión para naturales de forma que f sea un función de B en D que preserve orden.

Sea d_0 cualquier elemento de D. Hacemos $f(b_0) = d_0$. Supongamos que están definidos $f(b_i)$ para toda $i \leq n$ y cumplen que

$$b_i <_S b_j \text{ si y sólo si } f(b_i) <_R f(b_j)$$

para $i, j \leq n$. Si enumeramos de otra forma a $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$ como $\{b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\}$ de manera que

$$b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S \ldots <_S b_{i_n}.$$

Entonces,

$$f(b_{i_0}) <_R f(b_{i_1}) <_R \ldots <_R f(b_{i_n}).$$

Las posibilidades en las que se coloca b_{n+1} en el orden de B son las siguientes:

$b_{n+1} <_S b_{i_0}$;
$b_{i_n} <_S b_{n+1}$; o
hay $j < n$ tal que $b_{i_j} <_S b_{n+1} <_S b_{i_{j+1}}$.

En los primeros dos casos, como D no tiene ni máximo ni mínimo hay un elemento $d_{n+1} \in D$, tal que $d_{n+1} <_R f(b_{i_0})$ o $f(b_{i_n}) <_R d_{n+1}$, respectivamente. En el caso en el que hay $j < n$ tal que $b_{i_j} <_S b_{n+1} <_S b_{i_{j+1}}$, tomamos un elemento $d_{n+1} \in D$ tal que $f(b_{i_j}) <_R d_{n+1} <_R f(b_{i_{j+1}})$, que existe porque D es denso.

En cualquier caso hacemos $f(b_{n+1}) = d_{n+1}$. Entonces, para cada $b_i \in B$ ya definimos $f(b_i)$ tales que si $i, j \leq n$, $b_i <_S b_j$ si y sólo si $f(b_i) <_R f(b_j)$. Por tanto, $f : B \to D$ es una función que preserva orden. ■

De aquí que todo orden lineal denso numerable, tiene un suborden de tipo η. Es cierto incluso si $\langle D, R\rangle$ tiene extremo izquierdo o extremo derecho, ya que η es encajable, por el teorema anterior, en el suborden $\langle D', R\rangle$, que resulta de $\langle D, R\rangle$ al quitarle uno o ambos extremos. Por tanto, $\eta \preceq \langle D, R\rangle$.

Teorema 2.2.6 (Cantor)**.** *Sean $\langle D, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ órdenes lineales densos numerables sin extremos. Entonces $\langle B, S\rangle \simeq \langle D, R\rangle$.*

Demostración. Para definir el isomorfismo que queremos, empezamos por construir simultáneamente conjuntos $B_n \subseteq B$ y $D_n \subseteq D$ y funciones $f_n : B_n \to D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que cumplan que para $b_i, b_j \in B_n$

$$b_i <_S b_j \text{ si y sólo si } f_n(b_i) <_R f_n(b_j).$$

Sean $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ y $\{d_0, d_1, d_2, \ldots\}$ enumeraciones de B y D respectivamente. Sean $B_0 = \{b_0\}$, $D_0 = \{d_0\}$ y $f_0(b_0) = d_0$.

Supongamos que están definidos B_i, D_i y f_i para cada $i \leq n$ de forma que cumplan los requisitos. Vamos a construir los correspondientes a $n + 1$.

Si $n + 1$ es par, hacemos $b'_{n+1} = b_k$, donde k es el mínimo natural tal que $b_k \in B - B_n$. Sea $B_{n+1} = B_n \cup \{b'_{n+1}\}$.

Reordenamos $B_n = \{b_{i_0}, b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\}$, de manera que $b_{i_0} <_S b_{i_1} <_S \ldots <_S b_{i_n}$. Las posibilidades en que b'_{n+1} se coloca en el orden de B_n (el mismo orden de B) son: $b'_{n+1} <_S b_{i_0}$; o $b_{i_n} <_S b'_{n+1}$; o hay $j < n$ tal que $b_{i_j} <_S b'_{n+1} <_S b_{i_{j+1}}$.

Luego elegimos d'_{n+1} como en la prueba anterior: si $b'_{n+1} <_S b_{i_0}$, $d'_{n+1} <_S f(b_{i_0})$; si $b_{i_n} <_S b'_{n+1}$, $f(b_{i_n}) <_S d'_{n+1}$; o si hay $j < n$ tal que $b_{i_j} <_S b'_{n+1} <_S$

$b_{i_{j+1}}$, $f(b_{i_j}) <_S d'_{n+1} <_S f(b_{i_{j+1}})$. En cualquier caso podemos elegir dicho d'_{n+1} porque D es un orden denso sin extremos. Sea $D_{n+1} = D_n \cup \{d'_{n+1}\}$.

Ahora hacemos $f_{n+1}(b'_{n+1}) = d'_{n+1}$ y $f_{n+1}(b) = f_n(b)$ para todo $b \in B_n$. Entonces f_{n+1} es un ismorfismo por la elección de d'_{n+1} y la hipótesis de que f_n es isomorfismo.

Si $n+1$ es impar, hacemos casi lo mismo pero partiendo desde $d'_{n+1} \in D-D_n$. Primero hacemos $d'_{n+1} = d_k$, con k el mínimo natural tal que $d_k \in D - D_n$.

Si ordenamos $D_n = \{d_{i_0}, d_{i_1}, \ldots, d_{i_n}\}$ de manera que $d_{i_0} <_R d_{i_1} <_R \ldots <_R d_{i_n}$, nos encontramos con las mismas posibilidades de colocar d'_{n+1} con el orden $<_R$ en D_n. Entonces, como B_n es denso sin extremos, también podemos elegir $b'_{n+1} \in B$ de manera que $b <_S b'_{n+1}$ exactamente para todos los $b \in B_n$ tales que $f_n(b) <_R d'_{n+1}$. Así, $B_{n+1} = B_n \cup \{b'_{n+1}\}$.

Entonces hacemos $f_{n+1}(b'_{n+1}) = d'_{n+1}$ y $f_{n+1}(b) = f_n(b)$ para todo $b \in B_n$. Claramente f_{n+1} es un isomorfismo.

Como en cada paso par de la construcción se toma el mínimo de los que quedan de B, y en cada paso impar de la construcción se toma el mínimo de los que quedan de D, nos estamos asegurando que no falte ningún elemento de B ni de D. Por eso, cualquier $b_i \in B$ es elegido a más tardar en el conjunto B_{2i} y esto se puede ver por inducción sobre i. Supongamos que $b_j \in B_{2j}$ para todo $j < i$. Si $b_i \in B_{2i-1}$ ya terminamos. Pero si $b_i \notin B_{2i-1}$ se tiene que i es el mínimo índice que cumple que $b_j \notin B_{2i-1}$. Entonces, como $2i$ es par, $b_i \in B_{2i}$.

De la misma manera se prueba que cualquier $d_i \in D$ es elegido a más tardar en el conjunto D_{2i+1}. Por tanto, se tiene que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Ahora sí, la función $f : B \to D$ definida como $f(b_n) = f_{2n+1}(b_n)$ es un isomorfismo. ■

Ahora está justificado que $\mathbb{Q}$ y $\mathscr{Q}$ son isomorfos, pues tienen el mismo tipo de orden.

Corolario 2.2.7. *Si $\langle D, R\rangle$ es un orden lineal denso numerable o finito, entonces tiene tipo de orden 1, η, $\eta+1$, $1+\eta$ o $1+\eta+1$.*

Demostración. Si $\langle D, R\rangle$ es finito, entonces sólo puede tener tipo de orden 1, es decir, sólo tiene un elemento (pues si tuviera más de uno, la densidad provocaría que fuera infinito).

Si $\langle D, R\rangle$ es infinito y $\langle D', R\rangle$ es el orden lineal resultante de eliminar el máximo y/o mínimo de D, si los tuviera, entonces, por el teorema anterior, se sigue que $D' \simeq \eta$. Así, dependiendo de si D tiene máximo y/o mínimo, es isomorfo a η, $\eta+1$, $1+\eta$ o $1+\eta+1$. ■

También es interesante notar que $\eta \simeq \eta^*$ y, por tanto, a diferencia de las sumas entre ω y ω^*, no importa el orden en el que sumemos η y η^*, es decir, $\eta+\eta \simeq \eta+\eta^* \simeq \eta^*+\eta$.

El tipo de orden λ

$\mathscr{R}$ es un orden lineal denso completo separable sin extremos, esto es lo que caracteriza al tipo de orden λ.

Teorema 2.2.8. *Si $\langle L, < \rangle$ es un orden lineal denso, separable, completo y sin extremos, entonces $\langle L, < \rangle \simeq \langle \mathscr{R}, <_{\mathscr{R}} \rangle$.*

Demostración. Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal denso, separable, completo y sin extremos. Sea P un suborden de L numerable y denso en L. Veamos que P no puede tener extremos. Si P tiene mínimo, digamos p_0, como L no tiene extremos, hay $x \in L$ tal que $x < p$. Esto no es posible, pues, como P es denso en L, habría $q \in P$ tal que $x < q < p_0$. Se llega a una contradicción similar suponiendo que P tiene máximo. Por tanto, P no tiene extremos. Siendo así, $P \simeq \eta$.

Sea $f : P \to \mathscr{Q}'$ un isomorfismo. Se define $g : L \to \mathscr{R}$ de la siguiente manera. Si $a \in L$, $g(a) = \sup\{f(p) : p \in P \text{ y } p <_L a\}$. Veamos que g es un isomorfismo.

La función g está bien definida, ya que $\{f(p) : p \in P \text{ y } p <_L a\}$ es un suborden acotado de $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}$ es completo.

Sean $a, b \in L$ tales que $a <_L b$. Veamos que $g(a) <_{\mathscr{R}} g(b)$. Como P es denso en L, hay $q \in P$ tal que $a <_L q <_L b$. En primer lugar, se sigue de la definición de g que $f(q) < g(b)$ y de que f es isomorfismo se sigue que $f(a) < f(q)$. En segundo lugar, como $f(a)$ es cota superior de $\{f(p) : p \in P \text{ y } p <_L a\}$, entonces $g(a) \leq f(a)$. Por tanto, $g(a) < g(b)$.

Que g sea una función sobre es una consecuencia de la completud de L. Ya que si $b \in \mathscr{R}$, $b = \sup\{q \in \mathscr{Q}' : q < b\}$, entonces $b = g(a)$, donde $a = \sup\{f^{-1}(q) : q < b\}$.

Ya tenemos que g es una función monótona y sobre, por lo tanto, es un isomorfismo. ■

De aquí que, cualesquiera dos órdenes lineales densos, separables, completos y sin extremos son isomorfos.

Capítulo 3

Ordinales

3.1. Buenos órdenes

Ya definimos en el primer capítulo lo que es un buen orden y a los números naturales como órdenes lineales bien ordenados por la pertenencia. Ahora vamos a estudiar a los buenos órdenes en general y analizar cómo son sus tipos de orden.

Recordemos que un orden lineal $\langle L, < \rangle$ es un buen orden si y sólo si todo subconjunto no vacío de L tiene un elemento $<$-mínimo.

Si L es un buen orden, el mismo L es un subconjunto no vacío de L, así que todo buen orden tiene mínimo o extremo izquierdo. Además, todo suborden de un buen orden es un buen orden.

Es por esto que para cualquier $x \in L$, excepto para el máximo de L (si lo tuviera), hay un sucesor inmediato de x. Este $s(x)$ es el $<$-mínimo del conjunto $\{y \in L : x < y\}$.

Una equivalencia de que $\langle L, < \rangle$ sea un buen orden es que no existe una cadena infinita descendiente contenida en L, como demostramos en el siguiente lema.

Lema 3.1.1. *Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal. Entonces, $\boldsymbol{\omega^*} \preceq L$ si y sólo si L no es un buen orden.*

Demostración. Si L tiene una cadena infinita descendiente, es decir si $\boldsymbol{\omega^*} \preceq L$, hay un subconjunto de L isomorfo a $\boldsymbol{\omega^*}$ que no tiene elemento mínimo, pues como ya vimos anteriormente, $\mathbb{N}^*$ no tiene elemento mínimo. Por tanto, L no es un buen orden.

Supongamos que hay $A \subseteq L$ sin elemento mínimo. Si a_0 es cualquier elemento de A, entonces hay $a_1 \in A$ tal que $a_1 <_R a_0$. Si ya están elegidos $\{a_0, \ldots, a_i\}$ que cumplen $a_n <_R a_m$ si $m < n \leq i$, entonces hay a_{i+1} tal que $a_{n+1} <_R a_n$. Aplicando el Teorema de Recursión para números naturales, ya elegimos elementos $\{a_0, a_1, a_2 \ldots\} \subseteq A$ de forma que $a_{i+1} <_R a_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Éste es un subconjunto de A isomorfo a $\boldsymbol{\omega}^*$ por el lema 2.2.1, pues para cualquier $i \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{a_j : a_i < a_j\}$ es finito. ■

Segmentos iniciales

Definición 3.1.2. Sea W un buen orden. Llamamos *segmento inicial de W* a un intervalo no vacío que tenga al mínimo elemento de W.

Una consecuencia de la definición de buen orden es el siguiente lema.

Lema 3.1.3. *Todo buen orden infinito tiene un segmento inicial con tipo de orden $\boldsymbol{\omega}$.*

Demostración. Sea $\langle W, R\rangle$ un buen orden infinito. Sea a_0 el elemento mínimo de W y consideremos $W - \{a_0\}$. Este es un subconjunto no vacío de W, por lo que también tiene elemento mínimo, digamos a_1, el cual cumple que $a_0 <_R a_1$. Una vez elegidos los primeros n elementos $\{a_0, \ldots, a_n\}$ con $a_0 <_R \ldots <_R a_n$, entonces tomamos el mínimo elemento de $W - \{a_0, \ldots, a_n\}$ y lo llamamos a_{n+1}, esto siempre es posible porque W no es finito. Así, tenemos el conjunto $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, donde $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$. Como para cada a_i, $\{a_j : a_j < a_i\}$ es finito, el conjunto $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ tiene tipo de orden ω, por el lema 2.2.1.

Como a_0, el mínimo de W, pertenece al conjunto $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, sólo falta mostrar que $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ es un intervalo de W para probar que es un segmento inicial de W. Sea $b \in W$. Si hay j tal que $b < a_j$, $j > 0$ y hay un índice $i < j$ máximo tal que $b \geq a_i$. Entonces, para todo k tal que $i < k$, $b < a_k$, y así b es el mínimo elemento de $W - \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$. Por tanto, $b = a_i \in \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. ■

Los segmentos iniciales son subórdenes de un buen orden con la propiedad de tener el mínimo elemento, entonces como su nombre lo indica son un pedazo inicial del buen orden original. Por esto vamos a analizar una equivalencia de la definición de segmento inicial y algunas propiedades de ellos [1].

Lema 3.1.4. *Sea $\langle W, R\rangle$ un buen orden. Entonces se cumple lo siguiente.*

1. *V es un segmento inicial de un buen orden W si y sólo si para todo $b \in V$ y $a \in W$, si $a <_R b$, entonces $a \in V$.*

2. *Si U y V son segmentos iniciales de W, entonces $U \cup V$ y $U \cap V$ son segmentos inciales de W. Mas aún, la unión arbitraria y la intersección arbitraria de segmentos iniciales son segmentos iniciales de W.*

[1] En el primer capítulo definimos específicamente un segmento inicial de los racionales. En general se puede definir un segmento inicial I de un orden A como un intervalo de A cerrado por abajo, es decir, para todo $x \in I$, si $y <_A x$, entonces $y \in I$. A diferencia de la definición de segmento inicial de $\mathscr{Q}$ que dimos en el primer capítulo, un segmento inicial de un orden cualquiera puede tener máximo.

3. *Sea $a \in W$. Definimos el conjunto $W_a = \{b \in W : b <_R a\}$. Entonces, W_a es un segmento inicial de W. Más aún, si V es un segmento inicial propio de W, entonces hay $a \in W$ tal que $V = W_a$.*

Demostración.

1. Sea V un segmento inicial de W y sean $b \in V$ y $a \in W$ tales que $a <_R b$. Se tiene que $a_0 \leq_R a <_R b$, donde a_0 es el mínimo de W, pero como V es un intervalo en el que está el mínimo de W, $a \in V$.

   En el sentido contrario, sea $V \subseteq W$ no vacío y supongamos que para cualesquiera $b \in V$ y $a \in W$, si $a <_R b$, se tiene que $a \in V$. Claramante V es un intervalo y, como el mínimo de W, digamos a_0, es menor o igual que cualquiera, $a_0 \in V$. Por tanto, V es un segmento inicial.

2. Se sigue de la equivalencia de segmento inicial del inciso anterior.

3. Es claro que para toda $a \in W$, W_a es un segmento inicial de W. Ahora, sea V un segmento inicial propio de W. Si consideramos el conjunto $W - V$, éste es no vacío, entonces tiene un elemento R-mínimo, digamos a. Se puede ver entonces que $V = W_a$.

■

Los buenos órdenes son parecidos en el sentido en que todos tienen un primer elemento y cada elemento tiene un sucesor inmediato. Es por esto que vamos a investigar lo que pasa cuando un buen orden en encajable en otro. Además veremos que, como cualesquiera dos buenos órdenes empiezan de la misma manera, uno debe ser encajable en un segmento inicial del otro.

Teorema 3.1.5. *Sean $\langle W, R\rangle$, $\langle V, S\rangle$ buenos órdenes y $f_1 : A_1 \to V$, $f_2 : A_2 \to V$ funciones que preservan orden, con A_1 y A_2 segmentos iniciales de W y $f_1[A_1]$ y $f_2[A_2]$ segmentos iniciales de V. Entonces $f_1(x) = f_2(x)$ para todo $x \in A_1 \cap A_2$.*

Demostración. Supongamos que $W' = \{x \in A_1 \cap A_2 : f_1(x) \neq f_2(x)\}$ es no vacío. Sea x_0 el mínimo de W'. Para cualquier $x <_R x_0$, $x \in A_1 \cap A_2$, pues $A_1 \cap A_2$ es un segmento inicial de W, pero además $f_1(x) = f_2(x)$.

Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $f_1(x_0) <_S f_2(x_0)$. Probaremos que esto implica que $f_2[A_2]$ no es un segmento inicial. Sea $y \in A_2$.

Si $y <_R x_0$, entonces

$$f_2(y) = f_1(y) <_S f_1(x_0).$$

Si $x_0 \leq_R y$, entonces

$$f_1(x_0) <_S f_2(x_0) \leq_S f_2(y).$$

Por tanto, para todo $y \in A_2$, $f_2(y) \neq f_1(x_0)$, es decir $f_1(x_0) \notin f_2[A_2]$. Como $f_1(x_0) <_S f_2(x_0)$, esto contradice que $f_2[A_2]$ es un segmento inicicial de W.

Por lo tanto, para cualquier $x \in A_1 \cap A_2$, $f_1(x) = f_2(x)$. ■

Corolario 3.1.6. *Sean $\langle W, R\rangle$, $\langle V, S\rangle$ buenos órdenes. Si hay una función $f : A \to V$ que preserva orden donde A es un segmento inicial de W y $f[A]$ es un segmento inicial de V, entonces $f[A]$ es el único segmento inicial de V isomorfo a A y el isomorfismo es único.*

Demostración. Este es un caso particular del teorema, donde los segmentos iniciales de W, A_1 y A_2, son iguales, digamos $A_1 = A_2 = A$, y $f_1[A]$ y $f_2[A]$ son segmentos iniciales de V. Sean $f_1 : A \to V$ y $f_2 : A \to V$ funciones que preservan orden. Entonces, para todo $x \in A = A_1 \cap A_2$, se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$, por lo cual $f_1 = f_2$. Es decir, la única función que preserva orden de A en un segmento inicial de V es f.

Sea B un segmento inicial de V isomorfo a A y sea g la función de A en V que preserva orden tal que $g[A] = B$. Por el párrafo anterior, $f[A] = g[A] = B$. Es decir, el único segmento inicial de V isomorfo a A es $f[A]$. ∎

Notemos además que no puede pasar que un buen orden W sea isomorfo a un segmento incial propio de sí mismo, digamos A, pues el único segmento inicial de W isomorfo a A es A, el único isomorfismo de A en A mismo es la identidad y $A \subsetneq W$.

Definición 3.1.7. Una familia de funciones F es un *sistema compatible de funciones* si y sólo si para cualesquiera $f, g \in F$ y para todo $x \in dom(f) \cap dom(g)$, se cumple que $f(x) = g(x)$.

No es cierto que la unión de cualquier familia de funciones sea una función, se requiere que sea un sistema compatible, de ahí el nombre. Si F es un sistema compatible de funciones, $F' = \bigcup F$ es una función con dominio $\bigcup_{f\in F} dom(f)$ y definida por $F'(x) = f(x)$ para alguna $f \in F$ tal que $x \in dom(f)$.

Teorema 3.1.8. *Sean $\langle W, R\rangle$ y $\langle V, S\rangle$ buenos órdenes. Entonces $\langle W, R\rangle \simeq \langle V, S\rangle$; o $\langle W, R\rangle$ es isomorfo a un único segmento inicial propio de $\langle V, S\rangle$; o $\langle V, S\rangle$ es isomorfo a un único segmento inicial propio de $\langle W, R\rangle$, y éstos son los únicos casos posibles de los cuáles sólo sucede uno.*

Demostración. Consideremos la familia de segmentos iniciales A de W isomorfos, bajo f_A, a algún segmento inicial de V, es decir, sea

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =\{&A \subseteq W : A \text{ es segmento inicial de } W \text{ y}\\ &\text{hay un isomorfismo } f_A \text{ de } A \text{ en un segmento inicial de } V\}.\end{aligned}$$

Por el lema 3.1.4, $A^* = \bigcup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ es un segmento inicial propio de W o es W mismo. También hacemos $f^* = \bigcup\{f_A : A \in \mathcal{A}\}$. Se afirma que f^* es un isomorfismo de A^* en un segmento inicial (no necesariamente propio) de V.

Ya vimos en el lema anterior que los isomorfismos f_A, con $A \in \mathcal{A}$, son únicos, es por esto que si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq B$, entonces también $f_A \subseteq f_B$, pues $f_A = f_B \restriction A$. Esto implica que $\{f_A : A \in \mathcal{A}\}$ es un sistema compatible de funciones y f^* es una función con dominio A^*. Por otro lado, sean $x, y \in A^*$ tales que $x <_R y$. Hay $A \in \mathcal{A}$ tal que $y \in A$ y también $x \in A$, pues A es segmento inicial. Aplicando la función, se tiene que $f^*(x) = f_A(x) <_S f_A(y) = f^*(y)$. Esto prueba que f^* preserva orden. La imagen de f^* es la unión de los segmentos iniciales $f_A[A]$ de V, que es asimismo un segmento incial de V.

Veamos los casos que cumple A^*. Si $A^* = W$, hay dos casos: $f^*[W] = V$ o $f^*[W] \subsetneq V$. Entonces, $W \simeq V$ o W es isomorfo a un segmento inicial propio de V.

Si A^* es un segmento inicial propio de W, entonces hay $a \in W$ tal que $A^* = W_a$. Pero si $f^*[A^*]$ fuera un segmento propio de V, habría $b \in V$ tal que $f^*[A^*] = V_b$ y podríamos extender f^* a un isomorfismo de $A^* \cup \{a\}$ en $f^*[A^*] \cup \{b\}$. Siendo así obtendríamos que $A^* \cup \{a\} \subseteq A^*$, contradiciendo que $a \notin A^*$. Entonces $f^*[A^*] = V$. Así, llegamos a la tercera posibilidad, que V sea isomorfo a un segmento inicial propio de W, bajo $(f^*)^{-1}$ y ya hemos agotado todas las posibilidades.

La unicidad de los segmentos iniciales es una consecuencia del corolario 3.1.6. Además, los casos que cumple A^* son excluyentes: $A^* = W$ o $A^* \subsetneq W$; y, si $A^* \subsetneq W$, los casos que cumple $f^*[W]$ son también excluyentes: $f^*[W] = V$ o $f^*[W] \subsetneq V$. ■

Lema 3.1.9. *Sean* $\langle W, R\rangle$, $\langle V, S\rangle$, $\langle W', R'\rangle$ *y* $\langle V', S'\rangle$ *buenos órdenes. Si* $\langle W, R\rangle \simeq \langle W', R'\rangle$, $\langle V, S\rangle \simeq \langle V', S'\rangle$, *entonces:*

1. $\langle W, R\rangle \simeq \langle V, S\rangle$ *si y sólo si* $\langle W', R'\rangle \simeq \langle V', S'\rangle$*; y*

2. $\langle W, R\rangle$ *es isomorfo a un segmento incial propio de* $\langle V, S\rangle$ *si y sólo si* $\langle W', R'\rangle$ *es isomorfo a un segmento incial propio de* $\langle V', S'\rangle$.

Demostración.

1. Supongamos que $\langle W, R\rangle \simeq \langle V, S\rangle$. Sean $f : W \to V$, $g : W \to W'$ y $h : V \to V'$ isomorfismos. Tomamos la composición de funciones $f' = h \circ f \circ g^{-1}$. La función $f' : W' \to V'$ es un isomorfismo.

   La prueba para el recíproco se hace de la misma manera.

2. Como $\langle W, R\rangle \simeq \langle W', R'\rangle$ y $\langle V, S\rangle \simeq \langle V', S'\rangle$ cualquier segmento inicial propio de W es isomorfo a un segmento inicial propio de W' y cualquier segmento inicial propio de V es isomorfo a un segmento inicial propio de V'.

■

Suma de buenos órdenes

Lema 3.1.10. *Sean* $\langle W, R\rangle$ *y* $\langle V, S\rangle$ *buenos órdenes. Entonces* $W + V$ *es un buen orden.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $W \cup V$. Si $A \subseteq V$, se puede ver que el mínimo de A con el orden de la suma es el S-mínimo de A en V. Si $A \cap W \neq \emptyset$, se puede ver que el mínimo de A con el orden de la suma es el R-mínimo de $A \cap W$ en W. Por lo tanto, $W + V$ es un buen orden. ■

Lema 3.1.11. *Sean $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ y $\langle C,T\rangle$ buenos órdenes. Si B es isomorfo a un segmento inicial de C, entonces $A+B$ es isomorfo a un segmento inicial de $A+C$.*

Demostración. Si $B\simeq C$, ya probamos que $A+B\simeq A+C$ en el lema 2.1.6. Si B es isomorfo a un segmento inicial propio de C, con g el isomorfismo, veamos que $A+g[B]$ es un segmento inicial propio de $A+C$. Sean $x\in A+g[B]$ y $y\in A+C$ tales que $y<_{(A+C)}x$. Si $y\in A$ o si $x\in A$, por el orden de la suma tenemos que $y\in A$. Si $x\in g[B]$ y $y\in C$, entonces $y\in g[B]$, pues $g[B]$ es un segmento inicial de C y $y<_C x$. En cualquier caso $y\in A+g[B]$, por lo que $A+g[B]$ es un segmento inicial propio de $A+C$.

Definimos la función $f:A+B\to A+C$ como sigue

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in A\\ g(x) & \text{si } x\in B\end{cases}$$

Se puede verificar que f es un isomorfismo, de manera que $A+B$ es isomorfo a un segmento inicial propio de $A+C$. ■

Corolario 3.1.12. *Sean $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ y $\langle C,T\rangle$ buenos órdenes.*

$$\textit{Si } A+B\simeq A+C, \textit{ entonces } B\simeq C.$$

Demostración. Supongamos que $A+B\simeq A+C$. Por el teorema 3.1.8, hay tres casos posibles. Supongamos que B es isomorfo a un segmento inicial propio de C. Por el lema anterior, tenemos entonces que $A+B$ es isomorfo a un segmento inicial propio de $A+C$, contradiciendo que son isomorfos. Si suponemos que C es isomorfo a un segmento inicial propio de B, llegamos a una contradicción similar. Por tanto, sólo puede suceder que $B\simeq C$. ■

Definición 3.1.13. Sean $\langle I,R\rangle$, $\langle V,S\rangle$ y $\langle V_b,T_b\rangle$ órdenes lineales ajenos dos a dos, con $b\in I$, tales que $\langle V_b,T_b\rangle\simeq\langle V,S\rangle$ para todo $b\in I$. Se define el *producto de V y I* como

$$V\cdot I=\sum_{b\in I}V_b.$$

En el caso de que hagamos una suma “bien ordenada”de buenos órdenes, sí obtenemos un buen orden como demostramos en el siguiente lema. En general no es cierto que la suma arbitraria de buenos órdenes es un buen orden.

Lema 3.1.14. *Sea $\langle I,<_I\rangle$ un buen orden y sean $\langle X_i,<_i\rangle$ buenos órdenes para cada $i\in I$. La suma $\sum\{X_i:i\in I\}$ es un buen orden.*

Demostración. Sea $A\subseteq\sum\{X_i:i\in I\}$ un conjunto no vacío. Digamos que J es el conjunto $\{i\in I: X_i\cap A\neq\emptyset\}$, de índices de los buenos órdenes a los cuales pertenecen los elementos de A. Como J es un subconjunto no vacío de I y éste es un buen orden, J tiene un elemento mínimo i_0. Después encontramos el elemento mínimo de $X_{i_0}\cap A$, digamos que es x_0. Mostraremos que x_0 es el mínimo de A.

Sea $x \in A$. Entonces hay $i \in J$ tal que $x \in A_i$. Se tiene que $i_0 \leq_I i$. Si $i_0 <_I i$, con el orden de la suma, $x_0 <_\Sigma x$; y si $i_0 = i$, entonces con el orden de X_i, $x_0 \leq_i x$. En cualquier caso, $x_0 \leq_\Sigma x$ para todo $x \in A$. Por tanto, x_0 es el mínimo de A y $\sum\{X_i : i \in I\}$ es un buen orden. ■

3.2. El tipo de un buen orden

Para hablar del tipo de orden de un buen orden debemos tener en cuenta el siguiente lema.

Lema 3.2.1. *Sean $\langle W, R\rangle$ y $\langle V, S\rangle$ órdenes lineales tales que $\langle W, R\rangle \simeq \langle V, S\rangle$. Entonces, $\langle W, R\rangle$ es un buen orden si y sólo si $\langle V, S\rangle$ es un buen orden.*

Demostración. Supongamos que $\langle W, R\rangle \simeq \langle V, S\rangle$ y que $\langle W, R\rangle$ es un buen orden. Sea $B \subseteq V$ con $B \neq \emptyset$. Hay $A \subseteq W$ no vacío tal que $f[A] = B$. Sea a el R-mínimo de A. Afirmamos que $b = f(a)$ es el S-mínimo de B. Sea $y \in B$, entonces hay $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Pero $a \leq_R x$, por tanto $b \leq_S y$.

La implicación contraria se prueba de la misma manera. ■

Definición 3.2.2. Decimos que un tipo de orden es un *ordinal* si es el tipo de un buen orden.

Es importante decir que usualmente un ordinal se define como un conjunto transitivo bien ordenado por la pertenencia. En el Apéndice A damos esta definición y varios resultados que se derivan de ella. Entre ellos el Teorema de Enumeración, que dice que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal. Gracias a este Teorema de Enumeración, dado un buen orden, hay un único orden perteneciente a la clase de buenos órdenes isomorfos al orden dado, que corresponde a un ordinal (es decir, a un conjunto transitivo bien ordenado por la pertenencia).

Como el tipo de orden de un buen orden es un representante de la familia de órdenes isomorfos, podríamos elegir que fuera precisamente el único conjunto transitivo bien ordenado por la pertenencia que pertenece a la familia. A pesar de que haciendo esta elección ambas definiciones de ordinal serían equivalentes, es importante resaltar que en esta tesis no asumiremos que que el representante de un buen orden sea necesariamente el ordinal correspondiente con la definición usual (aunque sí estamos asumiendo que una vez hecha la elección del representante de cada familia queda fijo). Esto con la intención de no desviarnos de un concepto central para esta tesis: los tipos de orden de órdenes lineales. Sin embargo, en algunas de las demotraciones que veremos aquí tendremos que ser muy cuidadosos, pues no es indiferente la elección que hagamos del representante de cada familia. Específiciamente debemos considerar que una consecuencia muy conveniente de la definición usual de ordinal es que un ordinal es el conjunto de los ordinales menores que él, lo cual no se puede desprender de la definición que usamos aquí. Esto se refleja en que aquí en vez de definir el orden entre ordinales como la pertenencia (o como la contención propia) lo definimos como

$\prec$, el orden entre tipos de orden que dimos en el capítulo anterior basado en isomorfismos.

En la mayoría de los libros se estudian los ordinales y el orden de la clase de los ordinales se estudian desde la definición usual, como mencionamos anteriormente, pero nosotros intentaremos dar los resultados que necesitamos utilizando únicamente el concepto general de buen orden.

Definición 3.2.3. Dados dos ordinales α y β, decimos que $\alpha < \beta$ si cualquier buen orden con tipo de orden α es isomorfo a un segmento inicial propio de cualquier buen orden con tipo de orden β.

Este orden está bien definido gracias al lema 3.1.9. Resumiendo resultados anteriores, si $\langle W, R\rangle$, $\langle V, S\rangle$ y $\langle Z, T\rangle$ son buenos órdenes, entonces:

1. $\langle W, R\rangle$ y $\langle V, S\rangle$ tienen el mismo tipo de orden si y sólo si $\langle W, R\rangle \simeq \langle V, S\rangle$ si y sólo si $\langle W, R\rangle \preceq \langle V, S\rangle$ y $\langle V, S\rangle \preceq \langle W, R\rangle$, por el lema 3.1.9;

2. $\langle W, R\rangle \prec \langle V, S\rangle$ si y sólo si $\langle W, R\rangle$ es isomorfo a un segmento inicial propio de $\langle V, S\rangle$, por el teorema 3.1.8.

Lo anterior se puede traducir uitlizando tipos de orden de la siguiente manera. Por el teorema 3.1.8, $<$ se comporta como una relación tricotómica y antirreflexiva, y, por el lema 3.1.9, como una relación transitiva. Por tanto, la clase de los ordinales se comporta como un orden lineal.

Lema 3.2.4. *Sean α un ordinal y A el conjunto de los ordinales menores que α. Entonces $\langle A, <\rangle \simeq \alpha$.*

Demostración. Sea $\langle W, R\rangle$ un orden lineal isomorfo a α. Si β es un ordinal tal que $\beta < \alpha$, entonces β es isomorfo a un único segmento inicial propio V de W. Por tanto, para todo ordinal $\beta < \alpha$, hay un único $a(\beta) \in W$ tal que $W_{a(\beta)} \simeq \beta$ y así podemos ver a a como una función de A en W.

Sea $w \in W$. Entonces W_w es un buen orden y es un segmento inicial propio de W. De aqui que el tipo de orden de W_w es menor que α y $\beta \simeq W_w$ para algún ordinal $\beta < \alpha$. Tenemos que $a : A \to W$ es una función suprayectiva, pues $a(\beta) = w$.

Dados $\gamma, \beta \in A$ tales que $a(\gamma) <_R a(\beta)$, se sigue que $W_{a(\gamma)} \subsetneq W_{a(\beta)}$. Pero $\beta \simeq W_{a(\beta)}$ y $\gamma \simeq W_{a(\gamma)}$, entonces $\gamma < \beta$. Por tanto, la función $a : A \to W$ es un isomorfismo. ■

De aquí obtenemos que para todo ordinal α, el conjunto A de los ordinales menores que α tiene tipo de orden α. En particular esto significa que el conjunto de los ordinales menores que α es un buen orden.

Llamaremos $\mathcal{O}$ a la clase de todos los ordinales. Antes introdujimos la notación W_a, donde W es un buen orden y $a \in W$. En semejanza con esta notación, si α es un ordinal, $\mathcal{O}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{O} : \beta < \alpha\}$[2].

[2] Por el lema 3.2.4 y por el Axioma de Reemplazo (véase Apéndice A), $\mathcal{O}_\alpha$ sí es conjunto.

Antes de enunciar el siguiente teorema haremos un paréntesis explicando el lenguaje que se usa. Mencionamos hace poco que $\mathcal{O}$ se comporta como un orden lineal y como consecuencia del siguiente teorema se tiene que $\mathcal{O}$ se comporta como un buen orden, pero no decimos que $\mathcal{O}$ es un buen orden. Hay clases que no son conjuntos pero que de todas maneras se comportan de una manera que podemos estudiar. Por ejemplo, hay clases contenidas en el producto cartesiano de una clase que no es conjunto, en cuyo caso éstas tampoco son conjuntos pero sí podemos decir que se comportan como relación o como función. Las llamaremos relacionales y funcionales. Una funcional F es una relacional de una clase $A \times B$ que además cumple que para cada $x \in A$ hay un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in F$. Normalmente en la Teoría de Conjuntos sí se estudian las clases propias (clases que no son conjuntos), pues están conformadas por conjuntos. En resumen, podemos decir que un conjunto pertenece a una clase propia, lo que no está permitido es hablar de la pertenencia entre clases propias.

Por ejemplo, podemos decir que la colección de los ordinales menores que un ordinal α, $\mathcal{O}_\alpha$, es un segmento inicial[3] de la clase de los ordinales.

Teorema 3.2.5 (Principio del mínimo ordinal). *Toda clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo.*

Demostración. Sean A una clase no vacía de ordinales y $\alpha \in A$. Si $\mathcal{O}_\alpha \cap A = \emptyset$, entonces α es el mínimo de A.

Si $\mathcal{O}_\alpha \cap A \neq \emptyset$, como $\mathcal{O}_\alpha$ es un buen orden por el lema 3.2.4, el conjunto $A' = \mathcal{O}_\alpha \cap A$ tiene mínimo, digamos β_0. Veamos que β_0 es el mínimo de A. Sea $\beta \in A$. Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\beta_0 < \beta$, pues $\beta_0 < \alpha$. Si $\beta < \alpha$, entonces $\beta \in A'$ y, por tanto, $\beta_0 \leq \beta$. ■

Inducción y Recursión Transfinita

Sea $\langle W, R\rangle$ un buen orden y x un conjunto tal que $x \notin W$. Si hacemos la suma $W + \{x\}$, tenemos que $W + \{x\}$ es un buen orden. Así, si α es el tipo de orden de W y tomamos el conjunto $\mathcal{O}_\alpha$ de los ordinales menores que α, entonces $W + \{x\} \simeq \mathcal{O}_\alpha + \{\alpha\} \simeq \alpha + 1$. Esto muestra que $\alpha + 1$ es un ordinal.

Si $\beta < \alpha + 1$, entonces como $\mathcal{O}_\beta$, el conjunto de los ordinales menores que β, es isomorfo a un segmento inicial propio de $\mathcal{O}_\alpha + \{\alpha\}$, $\mathcal{O}_\beta$ es isomorfo a un segmento incial de $\mathcal{O}_\alpha$ o es isomorfo a $\mathcal{O}_\alpha$. Por lo tanto, $\mathcal{O}_\beta \simeq \alpha$, pues $\mathcal{O}_\alpha \simeq \alpha$, en cuyo caso $\beta = \alpha$; o $\mathcal{O}_\beta \subsetneq \mathcal{O}_\alpha$, obteniendo que $\beta < \alpha$.

Concluyendo, si $\beta < \alpha + 1$, $\beta \leq \alpha$, por tanto, $\alpha + 1$ es el mínimo ordinal mayor que α. Es decir, $\alpha + 1$ es el sucesor inmediato de α.

En el primer capítulo vimos que todo número natural tiene un sucesor inmediato y, excepto el 0, todo número natural es el sucesor inmediato de otro. En la clase de los ordinales también es cierto que todo α tiene un sucesor inmediato, $s(\alpha) = \alpha + 1$, pero no todos son sucesores de algún elemento. Por ejemplo, el

[3] Al describir $\mathcal{O}_\alpha$ vemos que cumple las características para ser un segmento inicial de todo $\mathcal{O}$. Estrictamente no podríamos llamarlo de esta manera porque $\mathcal{O}$ no es un conjunto, pero $\mathcal{O}_\alpha$ sí es un segmento inicial de $\mathcal{O}_\beta$ con β cualquier ordinal mayor que α, así que por eso lo llamamos segmento inicial de $\mathcal{O}$ sin mayor problema.

ordinal ω, el tipo de orden de $\mathbb{N}$, no es sucesor de ningún ordinal. Todo ordinal $\eta < \omega$ es isomorfo a un número natural n y ya probamos anteriormente que $n+1$ es también un número natural, por tanto, $n+1 \simeq \eta + 1 < \omega$.

Definición 3.2.6. Decimos que α es un *ordinal sucesor* si y sólo si hay un ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$. Si $\alpha \neq 0$ y no es un ordinal sucesor, decimos que es un *ordinal límite*.

Bajo esta definición, ω es un ordinal límite.

Ya hemos probado un Prinicpio de Inducción para números naturales. Este resultado se puede generalizar para abarcar a toda la clase de los ordinales. Para probar que todos los ordinales tienen una propiedad, basta probar que siempre que todos los menores a cualquier ordinal α cumplan la propiedad, se tiene que α cumple la propiedad. Primero enunciamos un principio de inducción para cualquier buen orden en general.

Teorema 3.2.7. *Sea $\langle W, < \rangle$ un buen orden y $A \subseteq W$. Si para todo $a \in W$ se tiene que $W_a \subseteq A$ implica que $a \in A$, entonces $A = W$.*

Demostración. Supongamos que $W \setminus A$ es no vacío y sea z_0 el mínimo de este conjunto. Entonces, $W_{z_0} \subseteq A$, pues para todo $x \in W$ tal que $x < z_0$, $x \in A$. Por hipótesis, esto implica que $z_0 \in A$, contradiciendo que $z_0 \in W \setminus A$. Por tanto, $A = W$. ■

Podemos traducir este principio para los ordinales.

Teorema 3.2.8 (Principio de Inducción Transfinita)**.** *Sea A una clase de ordinales tal que para cada ordinal α, el hecho de que $\mathcal{O}_\alpha \subseteq A$ implica que $\alpha \in A$. Entonces, $A = \mathcal{O}$.*

En el enunciado del teorema anterior la propiedad de los ordinales de la que hablamos párrafos arriba que describe a este principio se representa como pertenencer a la clase A.

Una equivalencia del Principio de Inducción para los ordinales es el siguiente.

Teorema 3.2.9. *Sea A una clase de ordinales que cumple lo siguiente:*

1. *$0 \in A$;*
2. *para cualquier ordinal α, siempre que $\alpha \in A$, se tiene que $\alpha + 1 \in A$;*
3. *dado un ordinal límite λ tal que para todo $\beta < \lambda$, $\beta \in A$, se tiene que $\lambda \in A$.*

Entonces, para todo ordinal α, $\alpha \in A$.

Demostración. Sea A una clase de ordinales que cumple los incisos 1, 2 y 3 del enunciado del teorema. Supongamos que hay un ordinal γ tal que $\gamma \notin A$. Entonces el conjunto de los ordinales $\{\beta \in \mathcal{O} : \beta \notin A \text{ y } \beta \leq \gamma\}$ es no vacío. Sea γ_0 el mínimo de este conjunto. Hay tres posibilidades para γ_0: $\gamma_0 = 0$, γ_0 es un ordinal sucesor o γ_0 es un ordinal límite. Veremos que ninguno de estos casos es posible.

Como por las hipótesis $0 \in A$, $\gamma_0 \neq 0$. Si $\gamma_0 = \beta + 1$, entonces $\beta \in A$, pues $\beta < \gamma_0$, y, por el inciso 2 de las hipótesis, $\gamma_0 = \beta + 1 \in A$. Por tanto, γ_0 no es un ordinal sucesor. Si γ_0 es un ordinal límite, como para todo $\beta < \gamma_0$, $\beta \in A$, por el inciso 3 de las hipótesis se tiene que $\gamma_0 \in A$.

Por tanto, $\alpha \in A$ para todo ordinal α. Es decir, A es la clase de todos los ordinales. ■

Al igual que hemos podido generalizar el Prinicipio de Inducción para naturales para abarcar a los ordinales, podemos demostrar una generalización del Teorema de Recursión. La siguiente versión del Teorema de Recursión para buenos órdenes afirma que para cualquier buen orden A hay una función con dominio A que cumple que su definición en un elemento $a \in A$ depende de la función evaluada en los predecesores de a.

Si A y B son dos conjuntos, denotamos como ${}^{A}B$ al conjunto de funciones con dominio A y rango B. Si A es un buen orden y $a \in A$, dado que A_a es un segmento inicial de un buen orden, se puede ver a una función de A_a en B como una sucesión de elementos de B de tamaño a.

Teorema 3.2.10. *Sean $\langle A, < \rangle$ un buen orden, B un conjunto arbitrario y $G : \bigcup_{a \in A} {}^{A_a}B \to B$ una función. Entonces, hay una única función $f : A \to B$ que satisface que*

$$f(a) = G(f \restriction_{A_a})$$

para toda $a \in A$.

Demostración. Veremos que para todo $x \in A$ hay una única función $f_x : \{y \in A : y \leq x\} \to B$ tal que

$$f_x(y) = G(f_x \restriction_{A_y})$$

para todo $y \leq x$. Para esto, sea $T \subseteq A$ el conjunto de los $x \in A$ tales que existe esta única función f_x satisfaciendo lo anterior. Probaremos usando el principio de inducción que $T = A$.

Sea $a \in A$ y supongamos que $A_a \subseteq T$. Hagamos una observación. Sean $x, z \in A_a$ tales que $z \leq x$. Tenemos que $\{y \in A : y \leq z\} \subseteq \{y \in A : y \leq x\}$ y, como f_x y f_z son únicas, $f_x \restriction_{\{y \in A : y \leq z\}} = f_z$.

Definimos la función f_a de la siguiente manera:

$$f_a(x) = \begin{cases} f_x(x) & \text{si } x < a, \\ G(f_a \restriction_{A_a}) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Si $x < a$, para todo $z < x$ se tiene que $f_x \restriction_{\{y \in A : y \leq z\}} = f_z$ por la observación, y entonces $f_a(z) = f_z(z) = f_x(z)$. Así, $f_x \restriction_{A_x} = f_a \restriction_{A_x}$, por lo que $f_a(x) = f_x(x) = G(f_x \restriction_{A_x}) = G(f_a \restriction_{A_x})$.

Si $x = a$, $f_a(a)$ cumple el requisito por la definición y solamente falta ver que f_a es la única función tal.

Sea g una función sobre $\{y \in A : y \leq a\}$ tal que $g(x) = G(g\restriction_{A_x})$, para todo $x \leq a$. Si $x < a$, entonces, por la hipótesis de inducción $g\restriction_{\{y\in A:y\leq x\}} = f_x$ y

$$g\restriction_{A_x}(z) = g\restriction_{\{y\in A:y\leq z\}}(z) = f_x\restriction_{A_x}(z) = f_a\restriction_{A_x}(z)$$

para todo $z < x$. Es decir, si $x < a$, entonces

$$g(x) = G(g\restriction_{A_x}) = G(f_a\restriction_{A_x}) = f_a(x).$$

Si $x = a$, entonces $g(a) = G(g\restriction_{A_a}) = G(f_a\restriction_{A_a}) = f_a(a)$. De aquí que $g = f_a$ y, por tanto, $a \in T$ y $T = A$.

Ahora podemos definir la función $f : A \to B$ de la siguiente manera:

$$f(a) = f_a(a).$$

Sean $a \in A$ y $x < a$. Debido a la primera observación que hicimos respecto a los elementos de T, $f_a\restriction_{\{y\in A:y\leq x\}} = f_x$, en particular $f_x(x) = f_a(x)$. Tenemos entonces que $f_a(x) = f_x(x) = f(x)$ para todo $x \in A_a$, es decir $f_a\restriction_{A_a} = f\restriction_{A_a}$.

Por tanto, la función f cumple que

$$f(a) = f_a(a) = G(f_a\restriction_{A_a}) = G(f\restriction_{A_a}).$$

Falta ver que la función f es única. Supongamos que hay una función $g : A \to B$ tal que $g(a) = G(g\restriction_{A_a})$ para toda $a \in A$.

Lo probaremos por inducción transifinita sobre el buen orden A. Supongamos que $A_a \subseteq \{y \in A : f(y) = g(y)\}$, es decir, que $f\restriction_{A_a} = g\restriction_{A_a}$. Es inmediato que

$$f(a) = G(f\restriction_{A_a}) = G(g\restriction_{A_a}) = g(a),$$

es decir, $a \in \{y \in A : f(y) = g(y)\}$. Por tanto, $f = g$. ■

Podemos reescribir este teorema para tener recursión para ordinales, pero el teorema anterior no se puede aplicar directamente porque $\mathcal{O}$ no es un conjunto aunque sí se comporta como un buen orden.

Lo esencial es que para todo ordinal α, $\mathcal{O}_\alpha$ sí es conjunto y es un buen orden, pues es isomorfo a α. Ésta es la razón por la cual podemos usar la misma prueba del teorema 3.2.10 para mostrar que hay una única funcional $F : \mathcal{O} \to B$ que satisface que $F(\alpha) = H(F\restriction_{\mathcal{O}_\alpha})$[4] para todo ordinal α.

En la siguiente sección utilizaremos otras versiones del Teorema de Recursión que son más útiles para este trabajo.

Definición 3.2.11. Sea α un ordinal y G una funcional definida sobre todo el universo. Se dice que t es un *cálculo de longitud α basado en G* si y sólo si t es una función con dominio $\mathcal{O}_{\alpha+1}$ y para todo $\beta \in \mathcal{O}_{\alpha+1}$, $t(\beta) = G(t\restriction_{\mathcal{O}_\beta})$.

[4]Con la definición usual de ordinales se tiene que $\mathcal{O}_\alpha = \{\beta \in \mathcal{O} : \beta \in \alpha\} = \alpha$, entonces en el teorema de recursión se pide que la funcional F cumpla que $F(\alpha) = H(F\restriction_\alpha)$.

Sea G una funcional. Definimos una relacional P_G de la siguiente manera: $(x, y) \in P_G$ si y sólo si

$$\begin{cases} x \in \mathcal{O} \text{ y hay un cálculo } t \text{ de longitud } x \text{ basado en } G \text{ tal que } y = t(x); \text{ o} \\ x \notin \mathcal{O} \text{ y } y = \emptyset \end{cases}$$

Teorema 3.2.12 (de Recursión Transfinita, Versión 1)**.** *Sea G una relacional definida sobre todo el universo. Hay una funcional F que cumple que $F(\alpha) = G(F \restriction_{\mathcal{O}_\alpha})$ para todo ordinal α.*

Demostración. Veamos que la relación P_G define un funcional F. Es decir, probaremos que para todo conjunto x hay un único y tal que $P_G(x, y)$.

Si x no es un ordinal no hay nada que probar, pues siempre le corresponde $y = \emptyset$.

Probemos por inducción transfinita que para cualquier ordinal α hay un único cálculo de longitud α basado en G. La hipótesis de inducción es que para todo $\beta < \alpha$ hay un único cálculo t de longitud β basado en G tal que $t(\gamma) = G(t \restriction_{\mathcal{O}_\gamma})$ para todo $\gamma \leq \beta$. Sea T un conjunto definido de la siguiente forma: $t \in T$ si y sólo si para algún ordinal $\beta < \alpha$, t es un cálculo de longitud β basado en G y es el único que cumple tales características. Se afirma que el conjunto T es un sistema compatible de funciones.

Sean $t, u \in T$. Entonces, hay ordinales $\beta, \gamma < \alpha$ tales que t es un cálculo de longitud β y u es un cálculo de longitud γ. Sin pérdida de la generalidad supongamos que $\beta < \gamma$. Pero entonces $u \restriction_{\mathcal{O}_{\beta+1}}$ es un cálculo de longitud β y cumple que $u \restriction_{\mathcal{O}_{\beta+1}} (\delta) = u(\delta) = G(u \restriction_{\mathcal{O}_\delta})$ si $\delta \leq \beta$, y, como estos cálculos son únicos, $u \restriction_{\mathcal{O}_{\beta+1}} = t$. Las funciones u y t coinciden en todos los elementos de la intersección de sus dominios, ($\mathcal{O}_{\beta+1} = \mathcal{O}_{\beta+1} \cap \mathcal{O}_{\gamma+1}$) esto hace que T sea un sistema compatible de funciones.

Ahora podemos construir una nueva función $\bar{t} = \bigcup T$, de manera que el dominio de $\bar{t}$ es $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{O}_{\beta+1} = \mathcal{O}_\alpha$. Definimos una nueva función

$$\tau = \bar{t} \cup \{(\alpha, G(\bar{t}))\}.$$

Veamos que τ es la función buscada, es decir, es el único cálculo de longitud α basado en G.

Para ver que se comporta como función basta observar que α no pertenece al dominio de $\bar{t}$. Además, el dominio de τ es $\mathcal{O}_\alpha \cup \{\alpha\} = \mathcal{O}_{\alpha+1}$.

Sea $\beta \in \mathcal{O}_{\alpha+1}$. Si $\beta = \alpha$, se tiene que $\tau(\alpha) = G(\bar{t}) = G(\tau \restriction_{\mathcal{O}_\alpha})$. Si $\beta < \alpha$, por la hipótesis de inducción, hay un único cálculo $t \in T$ de longitud β basado en G y

$$\tau(\beta) = \bar{t}(\beta) = t(\beta) = G(t \restriction_{\mathcal{O}_\beta}) = G(\tau \restriction_{\mathcal{O}_\beta}).$$

Por tanto, τ es un cálculo de longitud α basado en G.

Para ver que τ es único, supongamos que hay otro cálculo de longitud α basado en G, digamos σ. Por inducción veamos que para todo $\beta \leq \alpha$, $\tau(\beta) = \sigma(\beta)$. Sea $\beta \leq \alpha$ y supongamos que para todo $\gamma < \beta$ se cumple que $\tau(\gamma) = \sigma(\gamma)$. Tenemos que

$$\tau(\beta) = G(\tau \restriction_{\mathcal{O}_\beta}) = G(\sigma \restriction_{\mathcal{O}_\beta}) = \sigma(\beta).$$

Por tanto, $\tau \in T$. Ya tenemos que para todo ordinal α existe y de forma que hay un único cálculo t de longitud α basado en G tal que $y = t(\alpha)$. Por la unicidad de la función t, $t(\alpha) = y$ es único, probando así que P_G define una funcional que llamaremos F.

En segundo lugar hay que probar que F cumple con con que para todo ordinal α, $F(\alpha) = G(F \restriction_{\mathcal{O}_\alpha})$. Sea $\alpha \in \mathcal{O}$. Por lo visto anteriormente, hay un único cálculo t de longitud α basado en G, así si $\beta < \alpha$, $t \restriction_{\mathcal{O}_{\beta+1}}$ es el único cálculo de longitud β basado en G y $F(\beta) = t \restriction_{\mathcal{O}_{\beta+1}} (\beta) = t(\beta)$ para todo $\beta < \alpha$. En conclusión

$$F(\alpha) = t(\alpha) = G(t \restriction_{\mathcal{O}_\alpha}) = G(F \restriction_{\mathcal{O}_\alpha}).$$

■

Teorema 3.2.13 (de Recursión Transfinita, Versión 2)**.** *Sean G_1, G_2 y G_3 funcionales definidas sobre todo el universo. Entonces, hay una única funcional F que cumple que*

1. $F(0) = G_1(\emptyset)$;
2. $F(\alpha + 1) = G_2(F(\alpha))$, *para todo ordinal* α; *y*
3. $F(\lambda) = G_3(F[\mathcal{O}_\lambda])$, *para todo ordinal límite* λ.

Demostración. Se define una nueva funcional G de la siguiente manera. $G(x) = y$ si y sólo si

1. $x = \emptyset$ y $y = G_1(\emptyset)$; o
2. x es una función y hay un ordinal α tal que el dominio de x es $\mathcal{O}_{\alpha+1}$ y $y = G_2(x(\alpha))$; o
3. x es una función y hay un ordinal límite λ tal que el dominio de x es $\mathcal{O}_\lambda$ y $y = G_3(x[\mathcal{O}_\lambda])$; o
4. x es cualquier otro conjunto y $y = \emptyset$.

Por el teorema 3.2.12, la propiedad P_G (como la definimos anteriormente) define la funcional F que cumple que $F(\alpha) = G(F \restriction_{\mathcal{O}_\alpha})$ para todo ordinal α. Veamos por separado los casos que cumple F.

1. $F(0) = G(F \restriction_\emptyset) = G(\emptyset) = G_1(\emptyset)$.
2. Sea α un ordinal. Entonces, $F(\alpha + 1) = G(F \restriction_{\mathcal{O}_{\alpha+1}}) = G_2(F(\alpha))$, pues $F \restriction_{\mathcal{O}_{\alpha+1}}$ es una función con dominio $\mathcal{O}_{\alpha+1}$.
3. Sea λ un ordinal límite. Entonces $F(\lambda) = G(F \restriction_{\mathcal{O}_\lambda}) = G_3(F[\mathcal{O}_\lambda])$, pues $F \restriction_{\mathcal{O}_\lambda}$ es una función con dominio $\mathcal{O}_\lambda$ y λ es un ordinal límite.

■

Las siguientes versiones del Teorema de Recursión serán más últiles. Esta nueva versión depende de un parámetro, cada funcional que definamos depende de dos variables en vez de una. Sea G una funcional definida sobre dos variables y p un conjunto. Se dice que t es un *cáluclo de longitud α basado en G y p* si y sólo si t es una función con dominio $\mathcal{O}_{\alpha+1}$ y para todo $\beta \in \mathcal{O}_{\alpha+1}$, $t(\beta) = G(p, t\restriction_{\mathcal{O}_\beta})$. Definimos una nueva relacional $P_{G,p}$ de la siguiente manera: $(x, y) \in P_{G,p}$ si y sólo si

$$\begin{cases} x \in \mathcal{O} \text{ y hay un cálculo } t \text{ de longitud } x \text{ basado en } G \text{ y } p \text{ tal que } y = t(x); \text{ o} \\ x \notin \mathcal{O} \text{ y } y = \emptyset \end{cases}$$

Teorema 3.2.14 (de Recursión Transfinita, Versión paramétrica 1)**.** *Sea G una funcional definida sobre todo el universo. Entonces, hay una única funcional F que cumple que $F(\alpha) = G(p, F\restriction_{\mathcal{O}_\alpha})$ para todo ordinal α.*

Demostración. La relación $P_{G,p}$ define a la funcional F. ■

Teorema 3.2.15 (de Recursión Transfinita, Versión paramétrica 2)**.** *Sean G_1, G_2 y G_3 funcionales de dos variables en el unvierso y p un conjunto. Entonces, hay una única funcional F que cumple que*

1. *$F(0) = G_1(p, \emptyset)$;*

2. *$F(\alpha + 1) = G_2(p, F(\alpha))$, para todo ordinal α; y*

3. *$F(\lambda) = G_3(p, F[\mathcal{O}_\lambda])$, para todo ordinal límite λ.*

Demostración. Se define una nueva funcional H de la siguiente manera: $H(x) = y$ si y sólo si

1. $x = \emptyset$ y $y = G_1(p, \emptyset)$; o

2. x es función y hay un ordinal α tal que el dominio de x es $\mathcal{O}_{\alpha+1}$ y $y = G_2(p, x(\alpha))$; o

3. x es función y hay un ordinal límite λ tal que el dominio de x es $\mathcal{O}_\lambda$ y $y = G_3(p, x[\mathcal{O}_\lambda])$; o

4. x es cualquier otro conjunto y $y = \emptyset$.

Entonces, la relacional $P_{H,p}$ define al funcional F. ■

Las pruebas de estos dos últimos teoremas son muy parecidas a los de las primeras dos versiones del Teorema de Recursión, pues el parámetro p no influye en las demostraciones.

3.3. Aritmética ordinal

Lo que buscamos en esta sección es probar un resultado muy importante para expresar a cualquier ordinal como suma de potencias de ω. Esta manera de expresar a un ordinal se llama la Forma Normal de Cantor y nos será muy útil más adelante. Para llegar a esto, debemos dar varias definiciones y entender las operaciones entre ordinales.[5]

Lema 3.3.1. *Si α, β y γ son ordinales tales que $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, entonces $\beta=\gamma$.*

Demostración. Se sigue del corolario 3.1.12. ■

Lema 3.3.2. *Sean α, β y γ ordinales. Entonces, $\beta<\gamma$ si y sólo si $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$.*

Demostración. Supongamos que $\beta<\gamma$. Sean $\langle A,R\rangle$, $\langle B,S\rangle$ y $\langle C,T\rangle$ buenos órdenes tales que $\langle A,R\rangle\simeq\alpha$, $\langle B,S\rangle\simeq\beta$ y $\langle C,T\rangle\simeq\gamma$. Ya vimos en el lema 3.1.11 que, como B es isomorfo a un segmento inicial propio de C, $A+B$ es isomorfo a un segmento inicial propio de $A+C$, por tanto, $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

Si ahora suponemos que $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$, no puede pasar que $\gamma\leq\beta$ por la implicación anterior y el lema 3.3.1. Entonces $\beta<\gamma$. ■

Lema 3.3.3. *Sean α y β ordinales. Entonces $\alpha<\beta$ si y sólo si hay $\gamma\neq 0$ tal que $\alpha+\gamma=\beta$.*

Demostración. Sean $\langle A,R\rangle$ y $\langle B,S\rangle$ buenos órdenes tales que $\langle A,R\rangle\simeq\alpha$ y $\langle B,S\rangle\simeq\beta$. Si $\alpha<\beta$ hay un segmento inicial propio de B isomorfo a A, digamos que es B_b, con $b\in B$. El conjunto $B\setminus B_b$ por ser un subconjunto de un buen orden, es un buen orden no vacío con elemento mínimo b, así que hay un ordinal γ tal que $B\setminus B_b\simeq\gamma$. Además $B_b+(B\setminus B_b)=B$, entonces $\alpha+\gamma=\beta$.

Supongamos que $\gamma\neq\emptyset$ y $\alpha+\gamma=\beta$. Como $0<\gamma$, por el lema 3.3.2, $\alpha<\alpha+\gamma=\beta$. ■

Aplicando el lema 3.3.1, es claro que el ordinal γ del lema anterior es único. Por tanto, podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.3.4. Si α y β son ordinales tales que $\alpha<\beta$, definimos $\beta-\alpha$ como el único ordinal γ tal que $\beta=\alpha+\gamma$.

Diremos que γ es una *cola de* β si hay un ordinal α tal que $\beta=\alpha+\gamma$.

Operaciones con ordinales

Sea λ un ordinal. Si β es el máximo de $\mathcal{O}_\lambda$, no puede ser que $\beta+1<\lambda$, entonces $\lambda\leq\beta+1$, pero al ser $\beta+1$ el sucesor inmediato de β, $\beta+1\leq\lambda$. Por tanto, $\beta+1=\lambda$ y λ es un ordinal sucesor. Es decir, si λ es un ordinal límite, entonces $\mathcal{O}_\lambda$ no tiene máximo.

[5] Las operaciones sobre los ordinales se definen normalmente por recursión, pero siguiendo el enfoque de esta tesis, aquí las definiremos a través de tipos de orden.

Recíprocamente sea β un ordinal distinto de $\emptyset$ tal que $\mathcal{O}_\beta$ no tiene máximo y sea $\alpha < \beta$. No puede ser que $\beta = \alpha + 1$, pues $\mathcal{O}_\beta$ no tiene máximo. Tampoco puede ser que $\beta < \alpha + 1$, pues tendríamos que $\beta \leq \alpha$. Entonces, $\alpha + 1 < \beta$, para todo $\alpha < \beta$, y así, β es un ordinal límite.

Por tanto, λ es un ordinal límite si y sólo si $\mathcal{O}_\lambda$ no tiene máximo.

Lema 3.3.5. *Si X es un conjunto de ordinales, X tiene supremo y éste es un ordinal.*

Demostración. Consideremos el conjunto $Y = \bigcup\{\mathcal{O}_\alpha : \alpha \in X\}$. Éste es un conjunto de ordinales y por tanto es un buen orden, esto se puede ver por el principio del mínimo ordinal. Sea δ el ordinal tal que $Y \simeq \delta$.

Sea $\gamma \in X$. Entonces, como $\mathcal{O}_\gamma \subseteq Y$ se tiene que $\gamma \leq \delta$. Por tanto, δ es cota superior de X.

Por lo anterior, el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{O} : \gamma \leq \alpha \text{ para todo } \gamma \in X\}$, que es el conjunto de cotas superiores de X, es no vacío y por tanto tiene un mínimo. Entonces, X tiene supremo y es un ordinal. ■

Además de que cualquier conjunto de ordinales tiene supremo y éste es un ordinal, desde esta última demostración se puede probar que el mismo δ es el supremo.

Sea β una cota superior de X. Es decir, para todo $\alpha \in X$, $\alpha \leq \beta$. Esto significa que $\mathcal{O}_\alpha \subseteq \mathcal{O}_\beta$ para toda $\alpha \in X$, y por ende $\bigcup\{\mathcal{O}_\alpha : \alpha \in X\} \subseteq \mathcal{O}_\beta$. Esto implica que $\delta \leq \beta$. De aquí que δ es el supremo de X.

Lema 3.3.6. *Sea λ un ordinal límite y sea $\{\alpha_\beta : \beta < \lambda\}$ un conjunto de ordinales tales que $\alpha_\beta < \alpha_\gamma$ si $\beta < \gamma$. Entonces $\sup\{\alpha_\beta : \beta < \lambda\}$ es un ordinal límite.*

Demostración. Sea $\delta = \sup\{\alpha_\beta : \beta < \lambda\}$. Sea $\gamma < \delta$. Para probar que δ es un ordinal límite, basa probar que $\gamma + 1 < \delta$. Como δ es el supremo de $\{\alpha_\beta : \beta < \lambda\}$, hay $\beta < \lambda$ tal que $\gamma \leq \alpha_\beta$. Entonces, $\gamma + 1 \leq \alpha_{\beta+1} < \delta$. ■

Esto quiere decir que el supremo de una sucesión creciente con tamaño un ordinal límite es asimismo un ordinal límite. Para ciertas sucesiones podemos probar exactamente cuál ordinal límite es el supremo [6].

Lema 3.3.7. *Si λ es un ordinal límite, entonces $\lambda = \sup\{\beta \in \mathcal{O} : \beta < \lambda\}$.*

Demostración. Por el lema 3.3.5, $\delta = \sup\{\beta \in \mathcal{O} : \beta < \lambda\}$ es un ordinal. Falta probar que $\lambda = \delta$. Es inmediato ver que λ es una cota superior de $\{\beta \in \mathcal{O} : \beta < \lambda\}$, entonces $\delta \leq \lambda$. Supongamos que $\delta < \lambda$. Como λ es límite, $\delta + 1 < \lambda$, contradiciendo que δ es la mínima cota superior. Por tanto, $\delta = \lambda$. ■

Este lema solamente es cierto si λ es un ordinal límite. Para ordinales sucesores se tiene que $\sup\{\beta \in \mathcal{O} : \beta < \alpha + 1\} = \alpha$, pues en este caso el conjunto tiene máximo y es α.

[6] Con la definición usual de ordinal, se prueba que $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} = \mathcal{O}_\alpha$, entonces es fácil ver que $\sup X = \bigcup X$. En particular, $\lambda = \bigcup \lambda$, si λ es un ordinal límite.

Lema 3.3.8. *Si λ es un ordinal límite y α es cualquier ordinal, entonces* $\alpha+\lambda = \sup\{\alpha+\gamma : \gamma < \lambda\}$.

Demostración. Sea $\delta = \sup\{\alpha+\gamma : \gamma < \lambda\}$.

Si $\gamma < \lambda$, entonces $\alpha+\gamma < \alpha+\lambda$, por tanto, $\alpha+\lambda$ es cota superior del conjunto.

Ahora supongamos que $\delta < \alpha+\lambda$. Hay dos casos posibles: que $\delta < \alpha$ o que $\alpha \leq \delta$.

Si $\delta < \alpha$, $\delta < \alpha+1 \in \{\alpha+\gamma : \gamma < \lambda\}$, contradiciendo que δ es cota superior de este conjunto. Entonces, $\alpha \leq \delta$ y hay γ tal que $\delta = \alpha+\gamma$; pero $\gamma < \lambda$ porque $\delta < \alpha+\lambda$ y, por tanto, $\delta < \alpha+(\gamma+1) < \alpha+\lambda$ y $\delta+1 < \alpha+\lambda$. Este caso también contradice que δ sea una cota superior, pues para todo ordinal β, tal que $\alpha \leq \beta < \alpha+\lambda$, hay $\gamma < \lambda$ tal que $\beta = \alpha+\gamma$.

Por tanto, $\alpha+\lambda = \delta$. ■

Para definir el producto entre dos ordinales α y β, supongamos que $\langle I, R\rangle \simeq \beta$ y $\langle V, S\rangle \simeq \alpha$. Del lema 3.1.14 se obtiene que $V \cdot I$ es un bueno orden si V y I son ordinales. Se denota como $\alpha \cdot \beta$ al ordinal de $V \cdot I$.

También observemos qué sucede si $\alpha \cdot \beta = 0$. Si tomamos para cada $b \in I$ un orden $V_b \simeq V$, entonces $\bigcup_{b\in I} V_b = \emptyset$, con $V_b = \emptyset$ para toda $b \in I$, o $I = \emptyset$. Esto quiere decir que $\alpha = 0$ o $\beta = 0$. Por tanto, si α y β son ordinales distintos de 0, se tiene que $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Lema 3.3.9. *Sean α, β y γ ordinales. Se tiene lo siguiente.*

1. $\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

2. *Si $\beta < \gamma$ y $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.*

3. *Si $\alpha < \beta \cdot \gamma$, entonces hay ordinales únicos δ y η tales que*

$$\alpha = \beta \cdot \delta + \eta,$$

con $\delta < \gamma$ y $\eta < \beta$.

Demostración.

1. Que la suma de órdenes lineales en general distribuye al prouducto es inmediato del hecho de que $\sum\{A_i : i \in B+C\} = \sum\{A_i : i \in B\} + \sum\{A_i : i \in C\}$. Este resultado particular se obtiene pidiendo que $A_i \simeq \alpha$ para todo $i \in B \cup C$, que $B \simeq \beta$ y que $C \simeq \gamma$.

2. Si $\beta < \gamma$, hay $\delta \neq 0$ tal que $\gamma = \beta+\delta$. Entonces, dado $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta+\delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$ y, como $\alpha \cdot \delta \neq 0$, se tiene que $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$.

3. Consideremos dos buenos órdenes $\langle A, R\rangle$ y $\langle C, T\rangle$ tales que $\langle A, R\rangle \simeq \alpha$ y $\langle C, T\rangle \simeq \gamma$, y sean $\langle B_c, S_c\rangle$[7] buenos órdenes para todo $c \in C$ tales que $\langle B_c, S_c\rangle \simeq \beta$.

[7] En esta desmotración hay que tener cuidado para no confundir los órdenes B_c con segmentos inciales de B, ya que c es un elemento de C.

Entonces, $\sum\{B_c : c \in C\} \simeq \beta \cdot \gamma$ y como $\alpha < \beta \cdot \gamma$, A es isomorfo a un segmento inicial de $\sum\{B_c : c \in C\}$. Es decir, hay $b_0 \in \bigcup_{c\in C} B_c$ tal que $A \simeq (\bigcup_{c\in C} B_c)_{b_0}$. Sea $c_0 \in C$ tal que $b_0 \in B_{c_0}$.

Por la manera en que está definido el orden de la suma, veamos que

$$(\bigcup_{c\in C} B_c)_{b_0} = (\sum\{B_c : c \in C_{c_0}\}) + (B_{c_0})_{b_0},$$

pues $x \in (\bigcup_{c\in C} B_c)_{b_0}$ si y sólo si hay $c \in C$ tal que $x \in B_c$ y $x < b_0$, que a su vez es equivalente a que $c <_T c_0$, o $x <_C b_0$ y $c = c_0$.

Como C es un buen orden y C_{c_0} es un segmento inicial de C, hay un ordinal $\delta < \gamma$ tal que $C_{c_0} \simeq \delta$. También $(B_{c_0})_{b_0}$ es un segmento inicial de B_{c_0}, por lo que hay $\eta < \beta$ tal que $(B_{c_0})_{b_0} \simeq \eta$. Por tanto, $\langle A, R\rangle \simeq (\sum\{B_c : c \in C_{c_0}\}) + (B_{c_0})_{b_0} \simeq \beta \cdot \delta + \eta$. Es decir, $\alpha = \beta \cdot \delta + \eta$.

■

Lema 3.3.10. *Si α es un ordinal y λ es un ordinal límite, entonces $\alpha \cdot \lambda = \sup\{\alpha \cdot \beta : \beta < \lambda\}$.*

Demostración. Veamos que $\alpha \cdot \lambda$ es el supremo de $\{\alpha \cdot \beta : \beta < \lambda\}$. Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha \cdot \beta = 0$ para todo $\beta \leq \lambda$, y se cumple la igualdad. Ahora veamos que se cumple cuando $\alpha \neq 0$.

Sea $\beta < \lambda$, como $\alpha \neq 0$, $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \lambda$, entonces $\alpha \cdot \lambda$ es cota superior del conjunto.

Sea μ un ordinal tal que para todo $\beta < \lambda$, se tiene que $\alpha \cdot \beta \leq \mu$. Supongamos que $\mu < \alpha \cdot \lambda$, entonces hay ordinales δ y η tales que $\mu = \alpha \cdot \delta + \eta$, con $\delta < \lambda$ y $\eta < \alpha$. Entonces, $\mu < \alpha \cdot \delta$, contradiciendo quién es μ. Por tanto, $\alpha \cdot \lambda \leq \mu$ y $\alpha \cdot \lambda$ es la mínima cota superior. ■

Por ahora definiremos la exponenciación de ordinales, pero más adelante definiremos también las potencias del tipo de orden de los números enteros.

Definición 3.3.11. Sea θ un ordinal. Se definen las potencias de θ por recursión para ordinales como sigue:

- $\theta^0 = 1$;
- para cualquier ordinal α, $\theta^{\alpha+1} = \theta^\alpha \cdot \theta$;
- para cualquier ordinal límite λ, $\theta^\lambda = \sup\{\theta^\beta : \beta < \lambda\}$.

Si $\theta = 1$ y β es cualquier ordinal, se tiene que $\theta^\beta = 1$. Si $\theta = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $\theta^\beta = 0$.

Teorema 3.3.12. *Sean α, β y γ ordinales con $\alpha \neq 0, 1$. Si $\beta < \gamma$, entonces $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre γ. Si $\gamma = 0$, entonces no hay nada que probar ya que no hay $\beta < \gamma$.

Supongamos que para todo $\beta < \gamma$, $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Por el inciso 2 del lema 3.3.9, como $\alpha > 1$, se tiene que $\alpha^\gamma < \alpha^\gamma \cdot \alpha = \alpha^{\gamma+1}$. Sea $\beta < \gamma + 1$. Si $\beta < \gamma$, entonces $\alpha^\beta < \alpha^\gamma < \alpha^{\gamma+1}$, por hipótesis de inducción; y si $\beta = \gamma$, ya demostramos el resultado. Por lo tanto, si $\beta < \gamma + 1$, $\alpha^\beta < \alpha^{\gamma+1}$.

Sea λ un ordinal límite y $\beta < \lambda$. Se cumple que $\alpha^\beta < \alpha^\lambda$, ya que α^λ por definición es el supremo de $\{\alpha^\beta : \beta < \lambda\}$. ■

Como consecuencia de este lema y de 3.3.6, si θ es un ordinal límite, también θ^α es un ordinal límite, para cualquier ordinal $\alpha > 0$. Si $\alpha = 1$, entonces $\theta^1 = \theta$, que es límite; si se cumple que θ^α es límite, entonces $\theta^\alpha \cdot \theta = \sup\{\theta^\alpha \cdot \beta : \beta < \theta\}$, entonces $\theta^{\alpha+1}$ es límite; si α es ordinal límite es inmediato.

También se pueden probar las siguientes afirmaciones de manera muy parecida a algunos lemas anteriores (lemas 3.3.8,3.3.10). Sean α, θ, λ ordinales. Si λ es un ordinal límite, entonces:

$$\alpha + \theta^\lambda = \sup\{\alpha + \theta^\beta : \beta < \lambda\};$$
$$\alpha + \theta \cdot \lambda = \sup\{\alpha + \theta \cdot \beta : \beta < \lambda\}.$$

Forma Normal de Cantor

Si α es un ordinal cualquiera, podemos encontrar cuál es la máxima potencia de ω menor que α. En lo que resta de α podemos hacer lo mismo, quitar la máxima potencia de ω, esta potencia de ω será menor que la primera. La idea es ir separando las potencias de ω más grandes posibles. Es así como podemos reescribir a α como suma de potencias de ω. Ésta forma de describir al ordinal α es su *Forma Normal de Cantor*.

Lema 3.3.13. *Para cualesquiera ordinales ξ y α, con $\xi > 1$, se tiene que $\alpha < \xi^{\alpha+1}$.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre α. Si $\alpha = 0$, el resultado es obvio, pues $\xi^{\alpha+1} = \xi$.

Supongamos que $\alpha < \xi^{\alpha+1}$. Utilizando el inciso 2 del lema 3.3.9, se tiene que

$$\alpha + 1 \leq \xi^{\alpha+1} < \xi^{\alpha+1} \cdot \xi = \xi^{\alpha+2}.$$

Entonces, se cumple para $\alpha + 1$.

Supongamos que λ es un ordinal límite y que para todo $\delta < \lambda$ se tiene que $\delta < \xi^{\delta+1}$. Entonces, por el teorema anterior, $\delta < \xi^{\delta+1} < \xi^\lambda$ para todo $\delta < \lambda$, pues $\delta + 1 < \lambda$. Por tanto, $\lambda = \sup\{\delta : \delta < \lambda\} \leq \xi^\lambda < \xi^{\lambda+1}$. ■

Teorema 3.3.14 (Forma Normal de Cantor)**.** *Cualquier ordinal $\alpha > 0$ se puede escribir de forma única como*

$$\omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$$

donde $k, n_0, \ldots, n_k$ son números naturales distintos de cero y $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ son ordinales tales que $\alpha_0 > \ldots > \alpha_k$.

Al mayor exponente de la expresión en su Forma Normal de Cantor de un ordinal α se le llama el *grado de* α. Por el enunciado del teorema, éste siempre es el primer exponente, es decir, si $\omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ es la Forma Normal de Cantor de α, su grado es α_0.

Demostración. Sea β_0 el mínimo ordinal tal que $\alpha < \omega^{\beta_0}$. Sabemos que existe porque $\{\gamma \in \mathcal{O} : \alpha < \omega^\gamma\}$ es un conjunto de ordinales no vacío por el lema 3.3.13.

Veamos además que β_0 es un ordinal sucesor. Si $\beta_0 = 0$, tendríamos que $\alpha < 1$, lo cual no es posible porque $\alpha > 0$. Como β_0 es el mínimo ordinal tal que $\alpha < \omega^{\beta_0}$, $\omega^\delta \leq \alpha$, para todo $\delta < \beta_0$. Así, si β_0 fuera un ordinal límite, tendríamos que

$$\omega^{\beta_0} = \sup\{\omega^\delta : \delta < \beta_0\} \leq \alpha,$$

contradiciendo la elección de β_0. Por tanto, hay un ordinal α_0 tal que $\beta_0 = \alpha_0 + 1$.

Tenemos entonces que $\alpha < \omega^{\alpha_0} \cdot \omega$ y, por inciso 3 del lema 3.3.9, hay ordinales únicos n_0 y γ_1 tales que

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \gamma_1,$$

con $n_0 < \omega$ y $\gamma_1 < \omega^{\alpha_0}$. Es claro que $n_0 > 0$, pues si no fuera así tendríamos que $\alpha = \gamma_1 < \omega^{\alpha_0}$, contradiciendo la minimalidad de β_0.

Si $\gamma_1 = 0$, ya terminamos. Si $\gamma_1 > 0$, repetimos el proceso para γ_1.

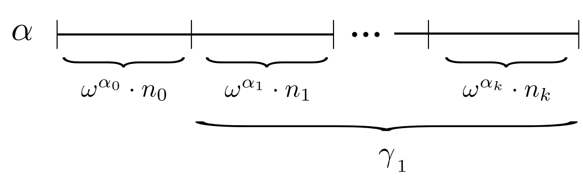

Figura 3.1: La Forma Normal de Cantor de el ordinal α.

Sea β_1 el mínimo ordinal que cumple que $\gamma_1 < \omega^{\beta_1}$. Se puede probar, al igual que en la primera parte, que hay un ordinal α_1 tal que $\beta_1 = \alpha_1 + 1$. Y así, encontramos ordinales únicos n_1 y γ_2 tales que

$$\gamma_1 = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \gamma_2,$$

con $n_1 < \omega$, $n_1 > 0$ y $\gamma_2 < \omega^{\alpha_1}$.

Veamos que $\alpha_0 > \alpha_1$. Supongamos lo contrario, que $\alpha_0 \leq \alpha_1$. Entonces, utilizando el lema 3.3.12, $\gamma_1 < \omega^{\alpha_0} < \omega^{\beta_0} \leq \omega^{\beta_1}$, contradiciendo la minimalidad de β_1.

Si $\gamma_2 = 0$ ya terminamos, pues $\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot n_1$, con $\alpha_0 > \alpha_1$ y $0 < n_0, n_1 < \omega$. Pero si $\gamma_2 > 0$, de nuevo hay α_2, n_2 y γ_3 tales que $\gamma_2 = \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \gamma_3$, con $0 < n_2 < \omega$, $\gamma_3 < \omega^{\alpha_2}$ y $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2$.

Entonces, podemos continuar mientras $\gamma_i \neq 0$. El conjunto de estos ordinales γ_i tales que $\gamma_i > 0$, es un conjunto finito, ya que si no lo fuera tendríamos un conjunto de ordinales sin elemento mínimo, pues $\ldots < \gamma_2 < \gamma_1 < \alpha$.

Sea γ_k el mínimo de estos ordinales tal que $\gamma_k > 0$, donde $k < \omega$, entonces $\gamma_{k+1} = 0$ y

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k,$$

con $n_0, \ldots, n_k < \omega$ y $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k$.

Ahora probemos la unicidad de la descomposición. Supongamos que α también es igual a $\omega^{\mu_0} \cdot m_0 + \omega^{\mu_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\mu_r} \cdot m_r$, con $r, m_0, \ldots, m_r < \omega$ y $\mu_0 > \mu_1 > \ldots > \mu_r$.

Probaremos primero que $\alpha < \omega^{\mu_0+1}$, por inducción sobre $r < \omega$. Si $r = 0$, entonces $\alpha = \omega^{\mu_0} \cdot m_0 < \omega^{\mu_0} \cdot \omega = \omega^{\mu_0+1}$.

Supongamos que se cumple para $r < \omega$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \omega^{\mu_0} \cdot m_0 + \omega^{\mu_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\mu_r} \cdot m_r + \omega^{\mu_{r+1}} \cdot m_{r+1} \\
&< \omega^{\mu_0} \cdot m_0 + \omega^{\mu_1+1} \\
&\leq \omega^{\mu_0} \cdot m_0 + \omega^{\mu_0} \\
&= \omega^{\mu_0} \cdot (m_0 + 1) \\
&< \omega^{\mu_0+1}.
\end{aligned}$$

Usando que $\omega^{\mu_0} \leq \omega^{\mu_0} \cdot m_0 \leq \alpha < \omega^{\mu_0+1}$, por la minimalidad de α_0, tenemos que $\alpha_0 = \mu_0$. Así que

$$\alpha = \omega^{\mu_0} \cdot m_0 + \delta = \omega^{\mu_0} \cdot n_0 + \gamma.$$

Por el lema 3.3.9, $n_0 = m_0$ y $\delta = \gamma$, donde $\delta = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$ y $\gamma = \omega^{\mu_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\mu_r} \cdot m_r$ y además se cumple que $\delta < \omega^{\alpha_1+1}$ y $\gamma < \omega^{\mu_1+1}$.

Repetimos el proceso para el ordinal δ y así sucesivamente, obteniendo $r = k$, $n_i = m_i$ y $\alpha_i = \mu_i$ para todo $i \leq k$. ■

El siguiente Lema nos da una forma de comparar dos ordinales con respecto a su forma normal.

Lema 3.3.15. *Sean α y β ordinales, con formas normales $\omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_p} \cdot n_p$ y $\omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\beta_q} \cdot m_q$. Entonces, $\alpha < \beta$ si y sólo si*

- *hay $i \leq \min\{p, q\}$ tal que $\alpha_j = \beta_j$ y $n_j = m_j$ para todo $j < i$, y $\alpha_i < \beta_i$; o*
- *hay $i \leq \min\{p, q\}$ tal que $\alpha_j = \beta_j$ y $n_j = m_j$ para todo $j < i$, $\alpha_i = \beta_i$ y $n_i < m_i$; o*
- *$p < q$ y $\alpha_j = \beta_j$ y $n_j = m_j$ para todo $j \leq p$.*

Demostración. Si $\alpha < \beta$, hay $\gamma \neq 0$ tal que $\beta = \alpha + \gamma$. Como la Forma Normal de un ordinal es única, hay un mínimo $i \leq \min\{p, q\}$ tal que $\alpha <$

$\omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\beta_i} \cdot m_i$ y $\alpha = \omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\beta_{i-1}} \cdot m_{i-1} + \gamma'$, donde $\gamma' < \omega^{\beta_i} \cdot m_i$. Entonces, por un lado ya tenemos que $n_j = m_j$ y $\alpha_j = \beta_j$ para todo $j < i$.

Si $\gamma' > 0$, entonces $\gamma' = \omega^{\alpha_i} \cdot n_i + \cdots + \omega^{\alpha_p} \cdot n_p$. Si suponemos que $\beta_i < \alpha_i$, entonces $\beta_i + 1 \leq \alpha_i$ y $\omega^{\beta+i} \cdot m_i \leq \omega^{\alpha_i}$, contradiciendo que $\gamma' < \omega^{\beta_i} \cdot m_i$. Por lo tanto, $\alpha_i \leq \beta_i$. Si $\alpha_i < \beta_i$ se cumple el primer caso; si $\alpha_i = \beta_i$, entonces $n_i < m_i$ y se cumple el segundo caso.

Si $\gamma' = 0$, entonces $\alpha = \omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\beta_{i-1}} \cdot m_{i-1}$. Ésta es la tercera posibilidad.

Para la implicación contraria supongamos que pasa alguna de las siguientes:

- hay $i < \text{mín}\{p, q\}$ tal que $\alpha_j = \beta_j$ y $n_j = m_j$ para todo $j < i$, y $\alpha_i < \beta_i$;
- o hay $i < \text{mín}\{p, q\}$ tal que $\alpha_j = \beta_j$ y $n_j = m_j$ para todo $j < i$, $\alpha_i = \beta_i$ y $n_i < m_i$;
- o $p < q$ y $\alpha_j = \beta_j$ y $n_j = m_j$ para todo $j \leq p$.

En cualquier caso $\alpha \neq \beta$. Pero tampoco puede ser que $\beta < \alpha$, porque entonces nos remitimos a la implicación inversa y vemos que se contradice con la hipótesis. Por tanto, $\alpha < \beta$. ■

Capítulo 4

Condensaciones

Condensar un orden lineal se refiere a hacer una partición de éste inducida por una relación de equivalencia de manera que se obtenga un nuevo orden lineal. Usaremos ciertos homomorfismos para definir las condensaciones, donde cada elemento de la partición será un intervalo, es decir, corresponderá a un pedazo del orden original. Las condensaciones nos servirán para descubrir distintas propiedades del orden original. Podremos estudiar el tipo de orden de la condensación basándonos en el tipo de orden original y, viceversa, cuando estudiemos el orden resultante, obtendremos información del orden original.

Podemos condensar nuevamente al orden lineal que obtengamos como resultado de una condensación. De hecho podemos continuar haciendo condensaciones de cada nuevo orden resultante. A esto le llamaremos realizar condensaciones iteradas y, como empezamos con una primera condensación y a partir de ésta volvemos a condensar, y así sucesivamente, podemos ordenar a las condensaciones iteradas con la clase de los ordinales.

En este capítulo vamos a modificar lo que significa la notación de los intervalos. Normalmente, si $[x, y]$ es un intervalo de un orden lineal $\langle L, < \rangle$, entonces, por la definición, está implícito que $x \leq y$. Al hablar de condensaciones no nos interesa tanto cómo son los extremos del intervalo sino las características del intervalo mismo, así que usaremos de manera indiferente $[x, y]$ y $[y, x]$ para significar todos los puntos z de L tales que $x \leq z \leq y$ o tales que $y \leq z \leq x$.

4.1. Condensaciones

Definición 4.1.1. Sea $\langle L, < \rangle$ un orden lineal y sea L' una partición de L compuesta de intervalos disjuntos de L. Definimos el orden $\ll$ sobre L' de manera que dados $I, J \in L'$

$$I \ll J \text{ si y sólo si } x < y \text{ para cualesquiera } x \in I, y \in J.$$

Llamamos a $\langle L', \ll \rangle$ una *condensación de L*.

Un hecho crucial para el desarrollo de este trabajo es que la condensación $\langle L', \ll\rangle$ resulta ser un orden lineal.

Homomorfismos

Definición 4.1.2. Dados dos órdenes lineales $\langle L_1, R_1\rangle$ y $\langle L_2, R_2\rangle$ y una función $f : L_1 \to L_2$, decimos que la función f es un *homomorfismo* si y sólo si para todo $x, y \in L_1$

$$x <_{R_1} y \text{ implica que } f(x) \leq_{R_2} f(y).$$

Definición 4.1.3. Dado L un orden lineal y $f : L \to L$, f es *no decreciente* si y sólo si para todo $x \in L$, $x \leq f(x)$.

Toda función que preserva orden es un homomorfismo, pero no siempre sucede el recíproco, porque no necesariamente un homomorfismo es una función inyectiva.

Tipos de condensación

Si L' es una condensación de L, hay un homomorfismo natural c de L en L', tal que a cada $x \in L$ se le asocia $c(x) \in L'$, donde $c(x)$ es el único intervalo al que pertenece x. Siendo así, para describir una condensación de L basta con dar una función c que a cada cada $x \in L$ le asocie un subconjunto de L y asegurarse que se cumplan las siguientes condiciones:

I. $c(x)$ es un intervalo al que pertenece x; y

II. si $y \in c(x)$, entonces $c(y) = c(x)$.

Si una función c cumple estas dos condiciones, entonces $\langle c[L], \ll\rangle$ es una condensación de L. La segunda condición que cumple c nos asegura que $c[L]$ es una partición de L. Además, es directo de la definición del orden de las condensaciones mostrar que c es un homomorfismo, ya que si $x, y \in L$ cumplen que $x < y$, entonces $c(y) \not\ll c(x)$.

La condensación de L, al ser un orden lineal, se puede ver como en la figura 4.1. También podemos ver que si tomamos un conjunto con uno y sólo un representante de cada intervalo, éste es un suborden de L.

Si L' es una condensación de un orden lineal L y d es el homomorfismo que define a la condensación, entonces hay una relación de equivalencia $\sim_{L'}$ sobre L. De manera que para cualesquiera $x, y \in L$,

$$x \sim_{L'} y \text{ si y sólo si } d(x) = d(y).$$

Es inmediato que $L/\sim_{L'}$, el conjunto de clases de equivalencia de L respecto a $\sim_{L'}$, es isomorfo a $d[L] = L'$. Esta es otra manera de ver a las condensaciones, como el conjunto cociente de L módulo una relación de equivalencia (que es la

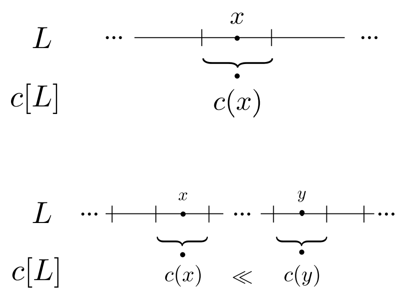

Figura 4.1: El homomorfismo c que induce una condensación sobre L.

definida por el homomorfismo).

A continuación daremos varios ejemplos de condensaciones que usaremos más adelante para resolver algunos problemas.

Definición 4.1.4. Si $x \in L$ y L es un orden lineal denotamos con $c_F(x)$ al conjunto $\{y \in L : [x, y] \text{ es finito}\}$[1]. Llamaremos a $c_F[L]$ la *condensación finita de* L y, si $x \in L$, a $c_F(x)$ la *condensación finita de* x.

Estamos definiendo la condensación finita sobre un orden lineal dado. Cuando no se preste a confusión no hay problema con decir que la condensación finita es simplemente c_F, pero si trabajamos con condesaciones finitas de más de un orden lineal, debemos ser maś precisos ya que c_F es una función definida sobre un orden lineal.

Para mostrar que c_F es una condensación debemos mostrar que para todo $x \in L$, $c_F(x)$ es un intervalo y, si $y \in c_F(x)$, entonces $c_F(y) = c_F(x)$.

Usaremos para esto las siguientes propiedades de los conjuntos finitos que están demostradas en el apéndice A. Si A y B son dos conjuntos finitos, $A \cup B$ es finito; y si A es finito y $B \subseteq A$, entonces B es finito.

Sean y, z en $c_F(x)$ y $w \in L$ tales que $y < w < z$. Si $x \leq w$, entonces $[x, w] \subseteq [x, z]$; si $w \leq x$, entonces $[w, x] \subseteq [y, x]$. Pero $[x, z]$ y $[y, x]$ son finitos, entonces $[x, w]$ es finito. Por tanto, $w \in c_F(x)$. Esto prueba que $c_F(x)$ es un intervalo.

Sea $y \in c_F(x)$. Si $z \in c_F(x)$ se puede ver con las propiedades de orden lineal que si $x \in [y, z]$, entonces $[y, z] = [x, y] \cup [x, z]$; y si $x \notin [y, z]$, entonces $[y, z] \subseteq [x, z]$ o $[y, z] \subseteq [x, y]$. En cualquiera de las posibilidades, $[y, z]$ es finito, entonces $z \in c_F(y)$. Análogamente, si $z \in c_F(y)$, se tiene que $z \in c_F(x)$. Con

[1]Es lo mismo $[x, y] \cap L$ que $[x, y]$, ya que nos referimos a un solo orden lineal L. Más adelante, podrá causar confusión cuando necesitemos hablar de la condensación de un suborden A de L. En este caso la condensación del orden A se describe como $c_F(x) = \{y \in A : [x, y] \cap A \text{ es finito}\}$.

esto terminamos de probar que $c_F(x) = c_F(y)$.

Los lemas 2.2.1 y 2.2.3 nos dan la clave para las observaciones siguientes, ya que son una caracterización de los órdenes lineales con tipo de orden ω, ω^* y ζ.

Hay que notar que $c_F(x)$ puede no ser finito, puede haber una cantidad infinita de intervalos finitos de L que contengan a x. De hecho, si $L \simeq \omega$, entonces $c_F(x) = L$ para todo $x \in L$ y, por tanto, $c_F[L] = \{L\}$. Así, $c_F[\omega] \simeq 1$.

Si L es isomorfo a ω^* o ζ, también se tiene que $c_F[\omega^*] \simeq 1$ o $c_F[\zeta] \simeq 1$.

Más aún, si tomamos un intervalo $[a, b]$ de $c_F(x)$, entonces $[a, b] = [a, x] \cup [x, b]$, mostrando así que $[a, b]$ es finito.

Lema 4.1.5. *Si $c_F(x)$ no es finito, entonces sucede alguna de las siguientes:*

$$c_F(x) \simeq \omega;$$
$$c_F(x) \simeq \omega^*; o$$
$$c_F(x) \simeq \zeta.$$

Demostración. Depende únicamente de si $c_F(x)$ tiene máximo y/o mínimo, pues todos los intervalos de $c_F(x)$ acotados por arriba y por abajo son finitos. ■

Veamos ahora qué sucede con la condensación finita de una suma de órdenes lineales. Sean L_1 y L_2 órdenes lineales tales que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

Demos el ejemplo en el que $L_1 \simeq \omega$ y $L_2 \simeq \omega^*$.

Hasta ahora no ha habido problema con la notación de las condensaciones, ya que hemos hecho la condensación sobre un solo orden lineal L. Como ahora vamos a trabajar con varios órdenes lineales, para evitar confusiones vamos a distinguir el homomorfismo que define a la condensación finita de cada uno de los órdenes. Denotaremos la condensación finita de L_1 con c_{F_1}, la de L_2 con c_{F_2}, y la de $L_1 + L_2$ con c_{F_+}.

Tenemos que $x \in L_1$ si y sólo si $c_{F_1}(x) = L_1$, pues $L_1 \simeq \omega$; y $x \in L_2$ si y sólo si $c_{F_2}(x) = L_2$, pues $L_2 \simeq \omega^*$. Entonces,

$$c_{F_+}[L_1 + L_2] \simeq c_F[\omega + \omega^*] \simeq 2.$$

Así, tenemos que $c_F[\omega + \omega^*] \simeq c_F[\omega] + c_F[\omega^*]$.

De hecho, resulta que en general, tenemos que

$$c_{F_+}[L_1 + L_2] \preceq c_{F_1}[L_1] + c_{F_2}[L_2].$$

Lema 4.1.6. *Sean L_1 y L_2 órdenes lineales tales que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Entonces $c_{F_+}[L_1 + L_2] \preceq c_{F_1}[L_1] + c_{F_2}[L_2]$.*

Demostración. Sea $x \in L_1 + L_2$, entonces $c_{F_+}(x)$ es un intervalo de $L_1 + L_2$. Si $c_{F_+}(x) \subseteq L_1$, entonces $c_{F_+}(x) = c_{F_1}(x)$; si $c_{F_+}(x) \subseteq L_2$, entonces $c_{F_+}(x) = c_{F_2}(x)$; y en el otro caso hay $y \in L_1$ y $z \in L_2$ tales que $c_{F_+}(x) = c_{F_1}(y) + c_{F_2}(z)$.

Se define la función $f : c_{F_+}[L_1 + L_2] \to c_{F_1}[L_1] + c_{F_2}[L_2]$ por casos. Sea $x \in L_1 + L_2$, entonces

$$f(c_{F_+}(x)) = \begin{cases} c_{F_1}(x) & \text{si } c_{F_+}(x) \subseteq L_1 \\ c_{F_2}(x) & \text{si } c_{F_+}(x) \subseteq L_2 \\ c_{F_1}(y) & \text{si } c_{F_+}(x) \cap L_1, c_{F_+}(x) \cap L_2 \neq \emptyset \text{ y } y \in c_{F_+}(x) \cap L_1. \end{cases}$$

■

Sin embargo, no siempre se cumple que $c_{F_1}[L_1] + c_{F_2}[L_2] \preceq c_{F_+}[L_1 + L_2]$. Consideremos el ejemplo anterior sólo que hagamos la suma en otro orden. En este caso resulta que $c_F[\omega^* + \omega] \simeq c_F[\zeta] \simeq 1$. Así, $c_F[\omega^*] + c_F[\omega] \npreceq c_F[\omega^* + \omega]$, pues $c_F[\omega^*] + c_F[\omega] \simeq 2$. Por tanto, $c_{F_1}[\omega^*] + c_{F_2}[\omega] \not\preceq c_{F_+}[\omega^* + \omega]$.

Ahora veamos cómo es la condensación finita de $\omega \cdot \omega$ y $\omega \cdot \tau$, para un tipo de orden cualquiera τ.

Sea $I \simeq \tau$ y sean $A_i \simeq \omega$ para cada $i \in I$, entonces $\sum\{A_i : i \in I\} \simeq \omega \cdot \tau$. Supongamos que los órdenes A_i son ajenos por pares. Por lo visto anteriormente, como $A_i \simeq \omega$ para todo x, $c_F(x) = A_i$ si y sólo si $x \in A_i$. Entonces,

$$c_F\left[\sum\{A_i : i \in I\}\right] = \{A_i : i \in I\} \simeq I.$$

Por tanto,

$$c_F[\omega \cdot \tau] \simeq \tau.$$

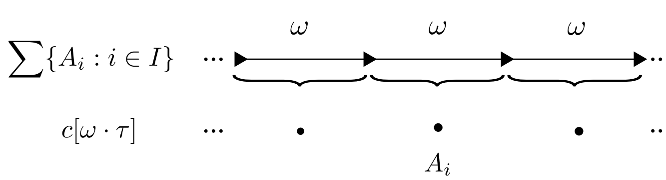

Figura 4.2: Condensación finita de $\omega \cdot \tau$.

En particular, $c_F[\omega \cdot \omega] \simeq \omega$.

Definición 4.1.7. Si $x \in L$ y L es un orden lineal denotamos con $c_W(x)$ al conjunto $\{y \in L : [x, y] \text{ es un buen orden}\}$.

También es claro que $c_W[L]$ cumple las condiciones para ser una condensación, pues un subconjunto de un buen orden es un buen orden y la unión de dos buenos órdenes es un buen orden.

Observemos que no es forzosamente cierto que $c_W(x)$ es un buen orden. Si $L \simeq \omega^*$ para todo $x \in L$ tenemos que $c_W(x) = L$, pues para cualquier $y \in L$, $[x, y]$ es finito, pero L no tiene mínimo.

Sin embargo, veamos que si L es un buen orden, entonces $c_W[L]$ es un buen orden. Sea A un subconjunto no vacío de $c_W[L]$, entonces hay $B \subseteq L$ no vacío tal que $A = \{c_W(x) : x \in B\}$. Así, si x_0 es el mínimo de B, entonces $c_W(x_0)$ es el mínimo de A. Más aún, si L es un buen orden se tiene que $c_W[L] \simeq 1$, pues dado $x \in L$, cualquier $y \in L$ pertenece a $c_W(x)$, ya que $[x, y]$ es un subconjunto del buen orden L.

Si L no es un buen orden, necesitamos más información para saber cómo es el tipo de orden de $c_W[L]$. Por ejemplo, si $L \simeq \zeta$, entonces $c_W(x) = L$ para todo $x \in L$, pues todo intervalo acotado es finito. En este caso $c_W[L]$ es un buen orden. Un ejemplo de lo contrario es cuando $L \simeq \eta$. Como η es un tipo de orden denso (en particular, no es un buen orden), ningún subconjunto de L con al menos dos elementos es un buen orden. Por tanto, $c_W(x) = \{x\}$ para todo $x \in L$ y $c_W[L] \simeq L \simeq \eta$. En este caso $c_W[L]$ no es un buen orden.

Definición 4.1.8. Si $x \in L$ y L es un orden lineal denotamos con $c_S(x)$ al conjunto $\{y \in L : [x, y] \text{ es disperso}\}$.

Si B fuera un suborden denso infinito de $c_S(x)$, entonces para cualesquiera $y_1, y_2 \in B$ con $y_1 \neq y_2$ se tendría que $[y_1, y_2] \cap B$ es denso infinito y habría $y_1, y_2 \in c_S(x)$ tales que $[y_1, y_2]$ no es disperso. La condensación $c_S(x)$ sí es un orden disperso para toda $x \in L$.

Definición 4.1.9. Si $x \in L$ y L es un orden lineal denotamos con $c_C(x)$ al conjunto $\{y \in L : [x, y] \text{ es contable}\}$.

En la siguiente sección hablaremos más sobre esta condensación, la llamamos la *condensación contable.*

La prueba de que c_C y c_S inducen condensaciones de L es muy parecida a la que hicimos para mostrar que c_F induce una condensación. Esto es porque los subconjuntos de un conjunto disperso son dispersos y la unión de dos conjuntos dispersos es dispersa; y, al igual, los subconjuntos de un conjunto contable son contables y la unión de dos conjuntos contables es contable.

Usando condensaciones

Teorema 4.1.10. *Sea L un orden lineal numerable. Entonces hay una función sobre de L en un suborden propio de L que preserva orden.*

Demostración. Si hay algún $x_0 \in L$ para el cual $c_F(x_0)$ no es finito, entonces podemos definir la función de la siguiente manera. Por el lema 4.1.5, sabemos que sólo hay tres casos posibles para $c_F(x_0)$. Si $c_F(x_0) \simeq \omega$, definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin c_F(x_0) \\ s(x) & \text{si } x \in c_F(x_0), \end{cases}$$

donde $s(x)$ es el sucesor inmediato de x.

Si $c_F(x_0) \simeq \omega^*$, definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin c_F(x_0) \\ p(x) & \text{si } x \in c_F(x_0), \end{cases}$$

donde $p(x)$ es el predecesor inmediato de x.

Si $c_F(x_0) \simeq \zeta$, definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < x_0 \text{ ó } x \notin c_F(x_0) \\ s(x) & \text{si } x \geq x_0. \end{cases}$$

En cualquier caso f preserva orden y $f[L] \subsetneq L$, ya que en el primer caso el mínimo de $c_F(x_0)$ no pertenece a $f[L]$, en el segundo caso el máximo de $c_F(x_0)$ no pertenece a $f[L]$, y en el tercero $x_0 \notin f[L]$.

Entonces, veamos qué sucede cuando $c_F(x)$ es finito para todo $x \in L$. Notemos primero que como L es un orden lineal numerable y $c_F(x)$ es finito, $c_F[L]$ tiene al menos dos elementos.

Tomemos $x, y \in L$ tales que $c_F(x) \ll c_F(y)$. Si no hubiera $z \in L$ tal que $c_F(x) \ll c_F(z) \ll c_F(y)$, entonces para todo $z \in L$ tal que $x <_L z <_L y$, se tendría que $z \in c_F(x) \cup c_F(y)$, es decir, $c_F(x) \subseteq c_F(y)$ sería un intervalo, y $[x, y]$ sería finito por lo que $c_F(x) = c_F(y)$. Esto contradice la elección de x y y. Por tanto, $c_F[L]$ tiene tipo de orden denso infinito, pues tiene al menos dos elementos.

Elegimos un representante de cada $c_F(x)$ excepto del máximo y del mínimo de $c_F[L]$ (si existieran) y llamamos L_0 a este suborden de L. Por la forma en la que está construido, L_0 también es denso y no tiene máximo ni mínimo, entonces (por el teorema 2.2.6) $L_0 \simeq \eta$. Tomamos ahora $L' = L_0 - \{y\}$, donde $y \in L_0$, y con esto aseguramos que L' es denso, numerable sin extremos y es un suborden propio de L. Por el teorema 2.2.5, hay una función $f : L \to L'$ que preserva orden. ■

El siguiente resultado nos da más información sobre el tipo de orden de los elementos de la condensación c_W.

Teorema 4.1.11. *Sea L un orden lineal. Si para todo $x \in L$, $\{y : x \leq y\}$ es un buen orden, pero L mismo no es un buen orden, entonces hay $L_0, L_1, L_2 \ldots$ buenos órdenes tales que*

$$L = \cdots + L_2 + L_1 + L_0,$$

es decir, L es una ω^*-suma de buenos órdenes.

Inversamente, si hay $L_0, L_1, L_2 \ldots$ buenos órdenes tales que $L = \cdots + L_2 + L_1 + L_0$, entonces para cualquier $x \in L$ el conjunto $\{y : x \leq y\}$ es un buen orden.

Demostración. Supongamos que para todo $x \in L$, $\{y : x \leq y\}$ es un buen orden y que L no es un buen orden. Como L no es un buen orden, por el lema 3.1.1, hay un suborden numerable de L que se comporta de la siguiente manera:

$$\ldots < x_2 < x_1 < x_0.$$

Definamos $L_i = [x_i, x_{i-1})$ para todo $i > 0$ y $L_0 = \{y : x_0 \leq y\}$. Como $L_i \subseteq \{y : x_i \leq y\}$, L_i es un buen orden para toda $i \in \mathbb{N}$.

Si hubiera $x \in L$, tal que $x < x_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $\{y : x \leq y\}$ no sería un buen orden. Por tanto, para cada $x \in L$ hay $i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \leq x$; es decir, $L \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$. Así, tenemos que $L = \cdots + L_2 + L_1 + L_0$.

Supongamos ahora que $L = \cdots + L_2 + L_1 + L_0$ y L_i es buen orden para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces para cualquier $x \in L$, hay $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_i$, por lo que $\{y : x \leq y\} \subseteq L_i + \cdots + L_0$, pero ésta es una suma finita de buenos órdenes, por tanto es un buen orden. Así, $\{y : x \leq y\}$ es un buen orden. ■

Corolario 4.1.12. *Sea L un orden lineal y sea $x \in L$. Hay dos posibilidades para $c_W(x)$: es un buen orden o es una ω^*-suma de buenos órdenes.*

Demostración. Supongamos que $c_W(x)$ no es un buen orden. Para todo $y \in c_W(x)$ el conjunto $\{z \in c_W(x) : y \leq z\}$ es un buen orden. Esto es así porque si A es un subconjunto no vacío de $\{z \in c_W(x) : y \leq z\}$ y $w \in A$, entonces $A \cap [y, w]$ tiene mínimo, pues $y, w \in c_W(x)$ y, por la definición, $[y, w]$ es un buen orden; así que $A \cap [y, w]$ tiene mínimo y éste es también el mínimo de A. Aplicando el teorema anterior, $c_W(x)$ es una ω^*-suma de buenos órdenes. ■

Teorema 4.1.13. *Sea L un orden lineal numerable tal que toda función de L en L que preserve orden es no decreciente. Entonces L es un buen orden.*

Demostración. Supongamos que L tiene un suborden denso numerable. Si tiene máximo y/o mínimo, consideramos el suborden de éste que resulta de quitar el máximo y el mínimo. Así, sea L' un suborden de L denso numerable sin extremos. Tomamos $y \in L'$ y $x \in L$ tales que $x < y$. Con el mismo método de la prueba del teorema 2.2.5, podemos construir una función $f : L \to L'$ que preserva orden y que además cumple que $f(x) = y$. Esta función f no es no decreciente, contrario a la hipótesis.

Entonces, L no tiene ningún suborden denso numerable.

Primero supongamos que hay $x \in L$ tal que $c_W(x)$ no es un buen orden para llegar a una contradiccón. Por el corolario 4.1.12, hay $L_0, L_1, L_2, \ldots$ buenos órdenes tales que $c_W(x) = \cdots + L_1 + L_0$. Sea α_i el ordinal de L_i, para cada $i < \omega$.

Definimos los conjuntos $A_i = \{j > i : \alpha_i \leq \alpha_j\}$. Obervemos que si A_i es finito, entonces hay un índice máximo en A_i, digamos $j(i)$, el cual cumple que $\alpha_j < \alpha_i$ para todo $j > j(i)$.

Afirmamos que hay una cantidad finita de A_i's finitos. Si hubiera una cantidad infinita, entonces hay un índice mínimo i_0 tal que A_{i_0} es finito y podemos construir una conjunto infinito $\{i_n : n < \omega\}$ donde A_{i_n} es finito, eligiendo $i_{n+1} > j(i_n)$ para cada $n < \omega$. Así, tenemos que

$$\ldots \alpha_{i_{n+1}} < \alpha_{i_n} < \ldots < \alpha_{i_0}.$$

Esto es imposible, pues no hay tal suborden numerable de ordinales sin elemento mínimo.

Por tanto, hay i_0 tal que para todo $i \geq i_0$, A_i es infinito. Es decir, para cada $i \geq i_0$ y $k < \omega$ hay $j > k$ tal que $\alpha_i \leq \alpha_j$.

Recursivamente definimos una función $k : \{i \in \mathbb{N} : i \geq i_0\} \to \{i \in \mathbb{N} : i \geq i_0\}$. Sea $k(i_0)$ el mínimo $j > i_0$ tal que $\alpha_{i_0} \leq \alpha_j$; sea $k(n+1)$ el mínimo $j > k(n)$ tal que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_j$. Podemos ver entonces que L_n es isomorfo a un segmento inicial (no necesariamente propio) de $L_{k(n)}$; es decir, para cada $n \geq i_0$ hay una función $g_n : L_n \to L_{k(n)}$ tal que para cualquier $y \in L_n$ hay $\gamma < \alpha_n$, $\{x : x < y\} \simeq \{g_n(x) : x < y\} \simeq \gamma$; es decir, para cualquier $y \in L_n$ si y es el γ-ésimo elemento de L_n, hay un γ-ésimo elemento de $L_{k(n)}$, que es $g_n(y)$.

Ahora definamos la función $f : L \to L$ de la siguiente manera:

1. $f(y) = y$, si $y \notin c_W(x)$;
2. $f(y) = y$, si $i_0 \geq 1$ y $y \in L_{i_0-1} + \cdots + L_1 + L_0$;
3. $f(y) = g_n(y)$, si $y \in L_n$ y $n \geq i_0$.

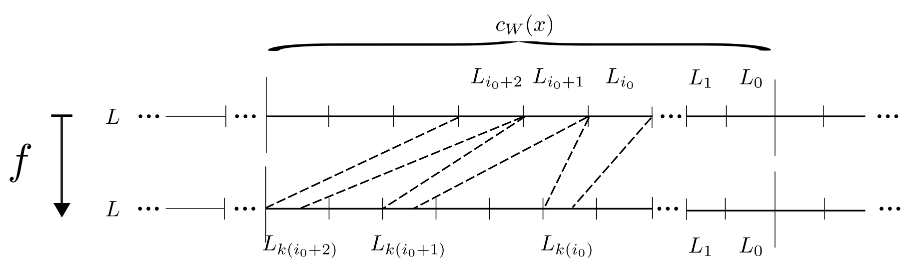

Figura 4.3: La función $f : L \to L$ restringido a $c_W(x)$.

En la figura 4.3, la función $f : L \to L$ actúa sobre los elementos de $c_W(x)$. Cada buen orden L_{i_n} es isomorfo a un segmento inicial de $L_{k(i_n)}$.

Veamos que f es una función que preserva orden, pero no es no decreciente, contradiciendo la hipótesis.

Sea $y \in L_n$ con $n \geq i_0$. Como g_n es una función de L_n en $L_{k(n)}$ y $k(n) > n$, por el orden de la ω^*-suma se tiene que $f(y) = g_n(y) < y$.

Para probar que f preserva orden tomamos $y, z \in L$. Hay varios casos de las posiciones en las que podrían colocarse y y z.

El primero es $y, z \in (L \setminus c_W(x)) \cup (L_{i_0-1} + \cdots + L_0)$. Si $y < z$, entonces por la definición de f, $f(y) < f(z)$.

Para el segundo caso, supongamos que $y \in c_W(x)$ y $z \notin c_W(x)$. En este caso, $f(y) \in c_W(x) = \ldots L_2 + L_1 + L_0$, $f(y) \leq y$ y $f(z) = z$. Si $z < y$, entonces $f(z) = z < f(y)$, pues $c_W(x)$ es un intervalo y $z \notin c_W(x)$. De igual manera, si $y < z$, $f(y) < z = f(z)$.

El tercer caso es en el que hay $n, m \geq i_0$ tales que $y \in L_n$ y $z \in L_m$. Si $y < z$, por el orden de la ω^*-suma, $m \leq n$. Si $m = n$, como g_n preserva orden, entonces $f(y) = g_n(y) < g_n(z) = f(z)$; y si $m < n$, entonces $k(m) \leq n < k(n)$ y $f(y) < f(z)$, pues $f(y) \in L_{k(n)}$ y $f(z) \in L_{k(m)}$.

La función f contradice que toda función de L en L que preserva orden es no decreciente, por tanto, $c_W(x)$ no es una ω^*-suma de buenos órdenes. Así, por el corolario 4.1.12, concluimos que $c_W(x)$ es un buen orden para cualquier $x \in L$.

Para ver que L es un buen orden, supongamos que hay $x, y \in L$ tales que $c_W(x) \ll c_W(y)$. Si $z \in L$ es tal que $x < z < y$, entonces uno de los intervalos $[z, y]$ o $[z, x]$ no es un buen orden, pues la suma de dos buenos órdenes es un buen orden. Sin pérdida de la generalidad supongamos que $[z, y]$ no es un buen orden, entonces para cualquier $w \in [z, y]$ tenemos que $[w, y]$ y $[w, z]$ no sean buenos órdenes. Por tanto, existe $w \in L$ tal que $c_W(x) \ll c_W(w) \ll c_W(y)$ y $c_W[L]$ tiene tipo de orden denso. Pero, como demostramos al principio, L no tiene ningún suborden denso numerable, por lo que $c_W[L] \simeq 1$. Por tanto, $c_W(x) = L$, para todo $x \in L$, y L es un buen orden. ∎

Teorema 4.1.14. *Todo orden lineal L es una suma densa de órdenes lineales dispersos. Es decir, hay un orden lineal denso L_* y una función h tal que $h(i)$ es un orden lineal disperso y $L = \sum\{h(i) : i \in L_*\}$.*

Demostración. Sean $x, y \in L$ tales que $c_S(x) \ll c_S(y)$. Si no hubiera $z \in L$ tal que $c_S(x) \ll c_S(z) \ll c_S(y)$, entonces $[x, y]$ sería disperso haciendo $c_S(x) = c_S(y)$ y contradiciendo la hipótesis. Por tanto, $c_S[L]$ es un orden lineal denso. Además,

$$L = \sum\{x : x \in c_S[L]\}$$

es una suma densa de órdenes dispersos. ∎

4.2. Condensaciones iteradas

Haciendo la condensación de cualquier orden lineal obtenemos un nuevo orden lineal, al que se puede aplicar de nuevo la condensación. Naturalmente se motiva la intención de seguir haciendo la condensación de los nuevos órdenes lineales resultantes. Para esto necesitamos usar los teoremas de recursión sobre ordinales, ya que empezamos con una primera condensación y definimos otra condensación por cada ordinal, obteniendo un buen orden de órdenes lineales, que corresponden a las condensaciones iteradas del orden original.

La única condensación que vamos a usar a partir de esta sección es la condensación finita, entonces simplemente la llamaremos c en vez de c_F. Intuitivamente podremos imaginarnos que en un orden cualquiera todos los intervalos isomorfos a ω se aplastan en un solo punto al hacer la condensación finita, es decir, cada intervalo isomorfo a ω se convierte en un elemento de la condensación. Gracias a la Forma Normal de Cantor para expresar ordinales, al describirlos como potencias de ω, tiene sentido investigar las condensaciones iteradas de buenos órdenes numerables para obtener información del orden original. Esto es lo que estudiaremos después de definir las condensaciones iteradas.

Condensaciones iteradas

Definiremos las condensaciones finitas iteradas de un orden lineal A como ciertos conjuntos ordenados del conjunto potencia de A y posteriormente mostramos que sí cumplen con la definición de condensación. Estos conjuntos son auxiliares, pues posteriormente será más sencillo trabajar con los homomorfismos que les corresponden a estas condensaciones.

Definición 4.2.1. Sea A un orden lineal. Se define la β-ésima condensación finita de A por recursión sobre el ordinal β de la siguiente manera.

1. $A_0 = \{\{x\} : x \in A\}$ es la 0-*ésima condensación finita de* A.

2. Supongamos que está definida la β-*ésima condensación finita de* A y sea ésta A_β[2]. Un conjunto $A_{\beta+1}$ es la $\beta+1$-ésima condensación de A si cumple que para todo $I \in A_{\beta+1}$ hay $J \in A_\beta$ tal que
$$I = \bigcup\{K \in A_\beta : [K, J] \text{ es finito}\}.$$

3. Sea λ un ordinal límite y supongamos que está definida A_β la β-ésima condensación de A para cada $\beta < \lambda$. El conjunto A_λ, la λ-*ésima condensación de* A, se define como $I \in A_\lambda$ si y sólo si hay $y \in A$ tal que
$$I = \{x \in A : \text{hay } \beta < \lambda \text{ y hay } K \in A_\beta \text{ tal que } x, y \in K\}.$$

Debemos ver que efectivamente A_β es una condensación de A para todo ordinal β.

Lema 4.2.2. *Para todo ordinal γ, si se cumple que para todo $\alpha < \gamma$, A_α es una condensación de A, entonces, para cualesquiera $I \in A_\gamma$ y $K \in A_\alpha$ tales que $I \cap K \neq \emptyset$ y $\alpha < \gamma$, se cumple que $K \subseteq I$.*

Demostración. Hagamos la prueba por inducción sobre γ. Si $\gamma = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que el lema se cumple para γ y que A_α es una condensación de A para todo $\alpha < \gamma + 1$. Sea $I \in A_{\gamma+1}$. Por la definición de $A_{\gamma+1}$, hay $J_I \in A_\gamma$ tal que $I = \bigcup\{J \in A_\gamma : [J, J_I] \text{ es finito}\}$.

Primero tomemos $K \in A_\gamma$ tal que $I \cap K \neq \emptyset$. Sea $x \in I \cap K$. Como $x \in I$, hay $J \in A_\gamma$ tal que $[J, J_I]$ es finito y $x \in J$. Pero como A_γ es condensación de

[2] A la condensación A_β se le da el orden $\ll$ definido para condensaciones.

A y $J \cap K \neq \emptyset$, entonces $J = K$. Por tanto, $[K, J_I]$ es finito y así tenemos que $K \subseteq I$.

Ahora, sean $\alpha < \gamma$ y $K \in A_\alpha$ tal que $I \cap K \neq \emptyset$. Tomemos $x \in I \cap K$. Hay $J \in A_\gamma$ tal que $[J, J_I]$ es finito y $x \in J$. Entonces, como $J \cap K \neq \emptyset$ y $\alpha < \gamma$, aplicando la hipótesis de inducción, $K \subseteq J \subseteq I$.

Concluimos que para todo $\alpha < \gamma + 1$, si $K \in A_\alpha$ y $K \cap I \neq \emptyset$, entonces $K \subseteq I$.

Sea λ un ordinal límite y supongamos que para todo $\gamma < \lambda$, A_γ es una condensación de A. Supongamos que el lema se cumple para todo $\gamma < \lambda$. Sean $\gamma < \lambda$, $K \in A_\gamma$ y $I \in A_\lambda$ tales que $I \cap K \neq \emptyset$. Como $I \in A_\lambda$, hay $y_I \in A$ tal que $I = \{x \in A : \text{hay } \beta < \lambda \text{ y hay } J \in A_\beta \text{ tal que } x, y_I \in J\}$. Tomemos $x \in I \cap K$, entonces hay $\alpha < \lambda$ y $J \in A_\alpha$ tal que $x, y_I \in J$. De aquí que $x \in J \cap K$.

Hay dos casos posibles, que $\gamma \leq \alpha$ o que $\alpha \leq \gamma$. Si $\gamma \leq \alpha$, por la hipótesis de inducción tenemos que $K \subseteq J$ y, como $J \subseteq I$, obtenemos lo que queríamos probar. Si $\alpha \leq \gamma$, por la hipótesis inductiva, se cumple que $J \subseteq K$, por lo que $y_I \in K$. Si $y \in K$, como $K \in A_\gamma$ con $\gamma < \lambda$, por la definición de I, se tiene que $y \in I$, mostrando así que $K \subseteq I$. ■

El lema que acabamos de probar muestra que si A_α y A_γ son condensaciones de A y que si a $x \in A$ le corresponden los intervalos J en la condensación A_α y K en la condensación A_γ, entonces $J \subseteq K$ si $\alpha \leq \gamma$. Obsérvese que la implicación contraria no se cumple. Si $J \subsetneq K$, se deduce de esta misma, que $\alpha \leq \gamma$, pero podría suceder que $J = K$, y en este caso sí es posible tener que $\gamma < \alpha$. En el siguiente capítulo estudiaremos cómo los órdenes lineales alcanzan un ordinal a partir del cual no varía el tipo de orden las condensaciones iteradas. A partir de este ordinal, que llamaremos el rango finito, todas las condensaciones posteriores son iguales y, por tanto, comparten intervalos.

Gracias a este lema, suponiendo que λ es un ordinal límite y que A_β es una condensación de A, para todo $\beta < \lambda$, podemos dar la siguiente definición equivalente de los elementos de A_λ: $I \in A_\lambda$ si y sólo si $I \neq \emptyset$ y para cualesquiera $x, y \in I$ hay $\gamma < \lambda$ y $K \in A_\gamma$ tal que $x, y \in K$. Es decir, todos los elementos de I se han condensado en algún intervalo de una condensación anterior a λ. Recurriremos a esta equivalencia de la definición de A_λ en el siguiente lema, combinada con la primera definición que dimos.

Lema 4.2.3. *Para todo ordinal β, A_β es una condensación de A.*

Demostración. Debemos mostrar que A_β es una partición de A y que todos sus elementos son intervalos de A. La prueba la haremos por inducción sobre β.

1. Si $\beta = 0$ no hay nada que probar, pues $\{x\}$ es un intervalo de A si $x \in A$ y A_0 es una partición de A.

2. Supongamos que A_β es una condensación.

    a) De la definición es inmediato ver que si $I \in A_{\beta+1}$, entonces $I \subseteq A$, y así $\bigcup A_{\beta+1} \subseteq A$. Sea $x \in A$, entonces, como A_β es partición de A, hay $K \in A_\beta$ tal que $x \in K$. Como siempre sucede que $[K, K]$

es finito, entonces hay $I \in A_{\beta+1}$ tal que $x \in I$. Esto significa que $\bigcup A_{\beta+1} = A$.

Probemos que dos elementos distintos de $A_{\beta+1}$ son ajenos. Sean $I_1, I_2 \in A_{\beta+1}$ y supongamos que hay $x \in I_1 \cap I_2$. Hay $J_1, J_2 \in A_\beta$ tales que $I_1 = \bigcup\{K \in A_\beta : [K, J_1] \text{ es finito}\}$ y $I_2 = \bigcup\{K \in A_\beta : [K, J_2] \text{ es finito}\}$, y entonces hay $K_1, K_2 \in A_\beta$ tales que $x \in K_1 \cap K_2$. Pero como A_β es una partición de A, $K_1 = K_2$. Denotando con K a K_1, tenemos que $[K, J_1]$ y $[K, J_2]$ son intervalos finitos.

Si $y \in I_1$, entonces hay $K_y \in A_\beta$ tal que $[K_y, J_1]$ es finito y $y \in K_y$. Por lo que acabamos de mostrar, $[K_y, K]$ es finito y entonces también $[K_y, J_2]$ es finito, luego $y \in I_2$. La otra contención se prueba de manera análoga. Por tanto $I_1 = I_2$.

Concluimos que $A_{\beta+1}$ es una partición de A.

b) Sea $I \in A_{\beta+1}$. Hay $J \in A_\beta$ tal que $I = \bigcup\{K \in A_\beta : [K, J] \text{ es finito}\}$. Sean $x, y \in I$ y $w \in A$ tales que $x < w < y$. Debemos probar que $w \in I$. Por la definición, hay $K_x, K_y, K_w \in A_\beta$ tales que $x \in K_x, y \in K_y$ y $w \in K_w$, y que cumplene que $[K_x, J]$, $[K_y, J]$ y $[K_w, J]$ son intervalos finitos. Como A_β es condensación, los intervalos preservan el orden, entonces $K_x \ll K_w$ o $K_x = K_w$, y $K_w \ll K_y$ o $K_y = K_w$. Se sigue que $[K_w, J] \subseteq [K_x, J]$ o $[K_w, J] \subseteq [K_y, J]$. Y, como $[K_x, J]$ y $[K_y, J]$ son finitos, en cualquier caso $[K_w\ J]$ es finito y $w \in I$.

Esto prueba que todo elemento de $A_{\beta+1}$ es un intervalo.

Por lo tanto, $A_{\beta+1}$ es una condensación de A.

3. Sea λ un ordinal límite. Supongamos que para todo $\beta < \lambda$, A_β es una condensación de A.

a) De la definición es inmediato ver que si $I \in A_\lambda$, entonces $I \subseteq A$, y así $\bigcup A_\lambda \subseteq A$. A cada $x \in A$ le podemos asociar un $I \in A_\lambda$ tal que $x \in I$, donde $I = \{y \in A : \text{hay } \beta < \lambda \text{ y hay } K \in A_\beta \text{ tal que } x, y \in K\}$, pues para cada $\beta < \lambda$ hay $K \in A_\beta$ tal que $x \in K$. Entones $\bigcup A_\lambda = A$.

Sean $I_1, I_2 \in A_\lambda$ tales que $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Sabemos que hay $y_1, y_2 \in A$ tales que $I_1 = \{x \in A : \text{hay } \beta < \lambda \text{ y hay } K \in A_\beta \text{ tal que } x, y_1 \in K\}$ y $I_2 = \{x \in A : \text{hay } \beta < \lambda \text{ y hay } K \in A_\beta \text{ tal que } x, y_2 \in K\}$. Tomemos $x \in I_1 \cap I_2$. Entonces hay ordinales $\beta, \alpha < \lambda$ y hay $K_1 \in A_\beta$ y $K_2 \in A_\alpha$ tales que $x, y_1 \in K_1$ y $x, y_2 \in K_2$. Como $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, por el lema 4.2.2, se tiene que $K_1 \subseteq K_2$ o $K_2 \subseteq K_1$, dependiendo de si $\beta \leq \alpha$ o si $\alpha \leq \beta$. Sin pérdida de la generalidad supongamos que se cumple el primer caso y así $y_1, y_2 \in K_2$. De aquí se sigue que $y_1 \in I_2$ y $y_2 \in I_1$.

Usando la definición alternativa que dimos de los elementos de A_λ, si $z \in I_1$, hay $\gamma < \lambda$ y $K \in A_\gamma$ tal que $z, y_2 \in K$, pues $y_2 \in I_1$, y se sigue de la definición original que $z \in I_2$. Mostramos con esto que $I_1 \subseteq I_2$. La otra contención se prueba de manera análoga. Por lo tanto, $I_2 = I_1$.

De aquí que A_λ es una partición de A.

b) Sea $I \in A_\lambda$. Sean $x, y \in I$ y $z \in A$ tales que $x < z < y$. Por la definición alternativa de A_λ, hay $\beta < \lambda$ y $K \in A_\beta$ tal que $x, y \in K$. Como A_β es una condensación, K es un intervalo, entonces $w \in K$. Por el lema anterior, $K \subseteq I$. Entonces, $w \in I$, mostrando así que I es un intervalo de A.

■

Ya que las condensaciones finitas iteradas son asimismo condensaciones, basta definir un homomorfismo del orden en intervalos del orden que cumpla con ciertas características mencionadas anteriormente.

Dado un ordinal β y la β-ésima condensación finita de L, digamos L_β, sabemos que hay un homomorfismo asociado c_L^β.

Cuando no quepa duda sobre cuál orden lineal estamos condensando vamos a evitar el subíndice, entonces será simplemente c^α en vez de c_L^α. Hasta el siguiente capítulo vamos a retomar esta notación para comparar las condensaciones de órdenes lineales distintos. Por ahora vamos a usar un solo orden.

Observemos cómo funciona la definicón de condensación β-ésima. Tomemos $x \in A$ y consideremos $c^{\beta+1}(x)$. Con la definicíon, hay $c^\beta(z) \in c^\beta[A]$, con $z \in A$, tal que $c^{\beta+1}(x) = \bigcup\{c^\beta(y) : [c^\beta(y), c^\beta(z)] \text{ es finito}\}$. En la definición original podíamos elegir entre varios elementos de $c^\beta[A]$ para definir $c^{\beta+1}$, pero es más sencillo asociarle el intervalo particular que ya sabemos que lo define, $c^\beta(x)$, el que le corresponde a x. Es decir,

$$c^{\beta+1}(x) = \bigcup\{c^\beta(y) : [c^\beta(y), c^\beta(x)] \text{ es finito}\}.$$

Sucede algo similar con los elementos de la condensación $c^\lambda[A]$ con λ un ordinal límite. Con la primera definición se tendría que a cada $x \in A$ le corresponde el intervalo

$$c^\lambda(x) = \{y \in A : \text{ hay } \beta < \lambda \text{ y hay } z \in A \text{ tales que } x, y \in c^\beta(z)\},$$

pero como son condensaciones, esto es lo mismo que

$$c^\lambda(x) = \bigcup_{\beta<\lambda} c^\beta(x).$$

Al hacer la condensación finita de un orden lineal A, si $y \in c(x)$ hay una cantidad finita de elementos en A entre x y y. Para el caso general con un ordinal β, si $y \in c^{\beta+1}(x)$ hay una cantidad finita de elementos de $c^\beta[A]$ entre $c^\beta(x)$ y $c^\beta(y)$. Por decirlo de otra manera, $y \in c^{\beta+1}(x)$ significa que x y y son finitamente lejanos en $c^\beta[A]$.

Es natural pensar que las condensaciones finitas de dos órdenes isomorfos, son asimismo isomorfas. Esto es lo que mostramos con el siguiente lema. Si

A y B son dos órdenes lineales isomorfos, a cada intervalo de la condensación de A le corresponde uno de la condensación de B, y los intervalos de dos elementos correspondientes en A y B son isomorfos en cualquier iteración de la condensación.

Lema 4.2.4. *Sean A y B órdenes lineales isomorfos. Si $A \simeq_g B$, entonces $c_A^\beta(x) \simeq_g c_B^\beta(g(x))$ para todo ordinal β y todo $x \in A$.*

Demostración. La demostración la haremos por inducción para ordinales. Si $\beta = 0$ se tiene que $c_A^0(x) = \{x\} \simeq_g \{g(x)\} = c_B^0(g(x))$ para todo $x \in A$.

Supongamos que $c_A^\beta(x) \simeq_g c_B^\beta(g(x))$ para todo $x \in A$ y un ordinal β. De la hipótesis de inducción se sigue que $c_A^\beta(x) = c_A^\beta(y)$ si y sólo si $c_B^\beta(g(x)) = c_B^\beta(g(y))$. Ya teniendo esto es inmediato mostrar que $c_A^\beta[A] \simeq c_B^\beta[B]$, donde el isomorfismo es el que asocia a cada $c_A^\beta(x)$ con $c_B^\beta(g(x))$.

Sean $x \in A$ y $y \in c_A^{\beta+1}(x)$. De la definición sabemos que el intervalo $[c_A^\beta(x), c_A^\beta(y)]$ es finito. Del isomorfismo que se deduce de la hipótesis de inducción, el intervalo $[c_B^\beta(g(x)), c_B^\beta(g(y))]$ también es finito y, por la definición, esto significa que $g(y) \in c_B^{\beta+1}(g(x))$. Y viceversa, si $g(y) \in c_B^{\beta+1}(g(x))$, entonces $y \in c_A^{\beta+1}(x)$. Acabamos de mostrar que $c_A^{\beta+1}(x) \simeq_g c_B^{\beta+1}(g(x))$.

Sea λ un ordinal límite. Supongamos que $c_A^\beta(x) \simeq_g c_B^\beta(g(x))$ para todo $x \in A$ y todo $\beta < \lambda$. Directamente de la hipótesis inductiva, se tiene que $c_A^\lambda(x) = \bigcup_{\beta<\lambda} c_A^\beta(x) \simeq_g \bigcup_{\beta<\lambda} c_B^\beta(g(x)) = c_B^\lambda(g(x))$. ■

Corolario 4.2.5. *Sean A, B órdenes lineales tales que $A \simeq_g B$. Si $c_A^\beta(x) = A$ para algún $x \in A$, entonces $c_B^\beta(g(x)) = B$.*

Demostración. Por el lema anterior, se tiene que $c_B^\beta(g(x)) = g[c_A^\beta(x)]$ y, como g es isomorfismo, $g[A] = B$. Entonces es inmediato que si $c_A^\beta(x) = A$ para algún $x \in A$, se cumple que $c_B^\beta(g(x)) = B$. ■

Ordinales límite

La idea de definir las siguientes clases de ordinales es ver cuándo un ordinal límite es un límite de ordinales límite, o es un límite de límites de ordinales límite, y cómo se puede saber qué tan límite de límites es un ordinal. En la siguiente sección usaremos estos límites para estudiar las condensaciones de buenos órdenes en general.

Definición 4.2.6. Para cada ordinal β definimos la clase de ordinales L_β y a los elementos de L_β los llamamos *ordinales β-límite*.

1. $L_0 = \mathcal{O}$.
2. $\alpha \in L_{\beta+1}$ si y sólo si para cada $\xi < \alpha$ hay $\eta_\xi \in L_\beta$ tal que $\xi < \eta_\xi < \alpha$.
3. Si λ es un ordinal límite, $\alpha \in L_\lambda$ si y sólo si $\alpha \in L_\beta$ para todo $\beta < \lambda$.

De la definición deducimos que 0 es un β-límite para cualquier ordinal β.

Veamos quién es L_1. Si $\alpha \in L_1$, entonces α no tiene máximo. Esto pasa si y sólo si α es un ordinal límite. Por esto, L_1 es el conjunto de todos los ordinales límites, además del 0.

Algunos ejemplos de elementos de L_1 son $\omega + \omega$ y, en general, $\omega \cdot m$, para $m < \omega$. Como ya que sabemos que $\omega \cdot m \in L_1$, vemos que $\omega^2 \in L_2$ si lo expresamos como $\sup\{\omega \cdot m : m < \omega\}$. Pero también $\omega^2 \in L_1$, pues es un ordinal límite. Expresando a ω^3 como $\sup\{\omega^2 \cdot m : m < \omega\}$ tenemos que $\omega^3 \in L_3$, pues $\omega^2 \cdot m \in L_2$. Sucesivamente, para cualquier $n < \omega$, se tiene que $\omega^n \in L_n$.

Tal vez ahora queda más claro qué queremos decir con límite de límites, pues si consideramos el supremo de un conjunto de ordinales límites, digamos $\{a_\beta : \beta < \lambda\}$ con λ un ordinal límite, éste mismo pertenece a L_2. La generalización de esto es que un $\beta + 1$-límite es un límite de β-límites, es decir el supremo de una sucesión creciente de β-límites.

Hay algunos ordinales que aunque pertenecen a L_β, no pertenecen a $L_{\beta+1}$. Por ejemplo, $\omega \in L_1$, pero $\omega \notin L_2$. Decimos que α es un *ordinal β-límite estricto* si $\alpha \in L_\beta$, pero $\alpha \notin L_{\beta+1}$.

Lema 4.2.7. *Si α es un ordinal β-límite, entonces α es un γ-límite para todo $\gamma < \beta$.*

Demostración. Si $\beta = 0$ no hay nada que probar.

Supongamos que para todo $\gamma < \beta$, si α es un β-límite, entonces α es un γ-límite. Sea $\alpha \in L_{\beta+1}$. Usando la hipótesis de inducción, basta probar que si $\alpha \in L_{\beta+1}$, entonces $\alpha \in L_\beta$.

Para todo $\xi < \alpha$ hay $\eta_\xi \in L_\beta$ tal que $\xi < \eta_\xi < \alpha$. Por la hipótesis de inducción, $\eta_\xi \in L_\gamma$ para todo $\gamma < \beta$. Entonces, $\alpha \in L_{\gamma+1}$ para todo $\gamma < \beta$. Si β es un ordinal sucesor, digamos $\beta = \gamma + 1$, como $\gamma < \beta$, $\alpha \in L_{\gamma+1} = L_\beta$. Si β es un ordinal límite y si hubiera $\gamma < \beta$ tal que $\alpha \notin L_\gamma$, sea γ_0 el mínimo ordinal tal que $\alpha \notin L_{\gamma_0}$. Entonces, $\alpha \in L_\delta$ para todo $\delta < \gamma_0$. Pero γ_0 es un ordinal límite por lo primero que mostramos y así, por la definición de γ_0-límite, tendríamos que $\alpha \in L_{\gamma_0}$, contradiciendo que γ_0 es el mínimo para el cual no sucedía esto. Por lo tanto, $\alpha \in L_\gamma$ para todo $\gamma < \beta$ y $\alpha \in L_\beta$.

Sea λ un ordinal límite. Si α es un λ-límite, es inmediato de la definición que $\alpha \in L_\beta$ para todo $\beta < \lambda$. ∎

Con este lema ya tenemos que $L_\beta \subseteq L_\alpha$, si $\alpha < \beta$. Hagamos una observación a partir de este hecho. Sean λ un ordinal límite y α un ordinal tal que $\alpha \in L_{\beta+1}$ para todo $\beta < \lambda$. Si hubiera $\beta < \lambda$ tal que $\alpha \notin L_\beta$, por el lema 4.2.7, $\alpha \notin L_{\beta+1}$, contradiciendo la hipótesis de α. Entonces, $\alpha \in L_\beta$ para todo $\beta < \lambda$ y $\alpha \in L_\lambda$. Esto significa que, si λ es un ordinal límite, para que α sea un λ-límite, basta saber que $\alpha \in L_{\beta+1}$ para cada $\beta < \lambda$, es decir, no es necesario saber que α es β-límite para los ordinales límite $\beta < \lambda$.

Daremos una caracterización de los ordinales β-límite para así entender mejor quiénes son. Por ejemplo, el ordinal $\omega^2+\omega$ no es un 2-límite, aunque $\omega+\omega^2$ sí lo es, pues $\omega+\omega^2=\omega^2$. Para lograr esto estudiaremos las colas de los ordinales en su Forma Normal de Cantor.

Teorema 4.2.8. *Sea α un ordinal numerable y sea $\omega^{\alpha_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\alpha_k}\cdot n_k$ la Forma Normal de Cantor de α. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

A. α es un β-límite;

B. si $\alpha=\delta+\gamma$, con $\gamma\neq 0$, entonces $\gamma\geq\omega^\beta$;

C. $\alpha_k\geq\beta$.

Y son equivalentes las siguientes afirmaciones:

I. α es un β-límite estricto;

II. hay un ordinal δ tal que $\alpha=\delta+\omega^\beta$;

III. $\alpha_k=\beta$.

Demostración. Veamos que el inciso A implica el inciso B por inducción sobre β. Si $\beta=0$ y $\alpha=\delta+\gamma$, con $\gamma\neq 0$, claramente $\gamma\geq\omega^0$, pues $1=\omega^0$.

Supongamos que se cumple la implicación para un ordinal β. Primero veremos que no hay $\beta+1$-límites de la forma $\delta+\omega^\beta$.

Sea η un ordinal tal que $\delta+\omega^\gamma<\eta<\delta+\omega^\beta$, con $\gamma<\beta$. Hay un ordinal ε tal que $\eta=\delta+\varepsilon$, donde se cumple que $0<\varepsilon<\omega^\beta$, pues $\omega^\gamma\neq 0$. Por la hipótesis inductiva, como ε es una cola de η distinta de cero y menor que ω^β, $\eta\notin L_\beta$. Con esto, exhibimos que no hay β-límites entre $\delta+\omega^\gamma$ y $\delta+\omega^\beta$, mostrando así que $\delta+\omega^\beta$ no es un $\beta+1$-límite.

De aquí se sigue que los ordinales $\delta+\omega^\beta\cdot m$, con $m<\omega$ y $m>0$, no son β+1-límites, pues en este caso $\delta+\omega^\beta\cdot m$ se puede escribir como $\delta+\omega^\beta(m-1)+\omega^\beta$.

Supongamos que $\alpha\in L_{\beta+1}$ y $\alpha=\delta+\gamma$ con $\gamma\neq 0$. Por el lema 4.2.7, $\alpha\in L_\beta$ y, por la hipótesis de inducción, $\gamma\geq\omega^\beta$. Veamos que esto, junto con lo que mostramos anteriormente, significa que no hay $m<\omega$ tal que $\delta+\omega^\beta\cdot m\leq\alpha<\delta+\omega^\beta\cdot(m+1)$. No puede ser que $\alpha=\delta+\omega^\beta\cdot m$, pues ya mostramos que este no es un $\beta+1$-límite. Tampoco puede ser que $\delta+\omega^\beta\cdot m<\alpha<\delta+\omega^\beta\cdot(m+1)$, porque se tendría que $\alpha=\delta+\omega^\beta\cdot m+\gamma$, con $\gamma<\omega^\beta$, contradiciendo la hipótesis de inducción.

De esto se sigue que

$$\begin{aligned}\delta+\omega^{\beta+1}&=\delta+\sup\{\omega^\beta\cdot m:m<\omega\}\\&=\sup\{\delta+\omega^\beta\cdot m:m<\omega\}\\&\leq\alpha=\delta+\gamma.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma\geq\omega^{\beta+1}$.

Sea λ un ordinal límite y supongamos que se cumple la implicación para todo $\beta < \lambda$. Supongamos que $\alpha \in L_\lambda$, entonces $\alpha \in \bigcap_{\beta<\lambda} L_\beta$. Si $\alpha = \delta + \gamma$, con $\gamma \neq 0$, por la hipótesis inductiva, $\gamma \geq \omega^\beta$ para todo $\beta < \lambda$ y de aquí que $\gamma \geq \sup\{\omega^\beta : \beta < \lambda\} = \omega^\lambda$.

Ahora veamos que el inciso B implica el inciso C. Si suponemos que toda cola de α es mayor o igual que ω^β, un caso particular de una cola de α es ω^{α_k}. Por lo tanto, $\alpha_k \geq \beta$.

El hecho de que el inciso C implica el inciso A también se prueba por inducción sobre β. Si $\beta = 0$, pues claramente $\alpha \in L_0$.

Supongamos que se cumple la implicación para el ordinal β y que $\alpha_k \geq \beta+1$. Reescribimos a α de la siguiente manera:

$$\alpha = \delta + \omega^{\alpha_k},$$

donde $\delta = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} \cdot n_{k-1} + \omega^{\alpha_k} \cdot (n_k - 1)$ (recuérdese que $n_k > 0$).

Sea $\gamma < \alpha$. Afirmamos que hay $\eta_\gamma \in L_\beta$ tal que $\gamma < \eta_\gamma < \alpha$.

Sea ξ el ordinal tal que $\alpha_k = (\beta+1)+\xi$. Si $\xi = 0$, entonces $\alpha = \sup\{\delta+\omega^\beta \cdot m : m < \omega\}$ y hay $m < \omega$ tal que $\gamma < \omega^\beta \cdot m = \eta_\gamma < \alpha$. Si ξ es un ordinal sucesor, digamos $\xi = \mu + 1$, entonces $\alpha = \{\delta + \omega^{(\beta+1)+\mu} \cdot m : m < \omega\}$ y hay $m < \omega$ tal que $\gamma < \delta + \omega^{(\beta+1)+\mu} \cdot m = \eta_\gamma < \alpha$. Si ξ es un ordinal límite, entonces $\alpha = \sup\{\delta + \omega^{(\beta+1)+\mu} : \mu < \xi\}$ y hay $\mu < \xi$ tal que $\gamma < \delta + \omega^{(\beta+1)+\mu} = \eta_\gamma < \alpha$.

En cualquiera de los casos, η_γ está expresado en su Forma Normal, pues su último exponente, γ_p, cumple que $\gamma_p < \alpha_k$ y, aplicando la hipótesis inductiva, se tiene que, como $\gamma_p \geq \beta$, $\eta_\gamma \in L_\beta$.

Sea λ un ordinal límite. Supongamos que $\alpha_k \geq \lambda$. Por la hipótesis de inducción, $\alpha \in L_\beta$ para todo $\beta < \lambda$, pues $\alpha_k > \beta$. Por tanto, $\alpha \in L_\lambda$.

La segunda lista de equivalencias se prueba a partir de la primera.

Por las equivalencias anteriores, $\alpha \in L_\beta \backslash L_{\beta+1}$ si y sólo si $\alpha_k \geq \beta$ y $\alpha_k < \beta+1$; y esto pasa si y sólo si $\alpha_k = \beta$. Así, son equivalentes las afirmaciones I y III.

Veamos que I implica el inciso II. Supongamos que $\alpha \in L_\beta \setminus L_{\beta+1}$. Como $\alpha \notin L_{\beta+1}$, por el inciso B, hay una cola no nula de α tal que $\gamma < \omega^{\beta+1}$. Sea $m < \omega$ el máximo tal que $\omega^\beta \cdot m \leq \gamma$. No puede pasar que $\omega^\beta \cdot m < \gamma < \omega^\beta(m+1)$, pues en este caso γ tendría una cola menor que ω^β y ésta misma sería cola de α, contradicieno que α es un β-límite. Por tanto, $\gamma = \omega^\beta \cdot m$. De esta manera se puede expresar a α

$$\alpha = \delta + \omega^\beta \cdot (m-1) + \omega^\beta.$$

Por último, veamos que el inciso II implica I. Supongamos que $\alpha = \delta + \omega^\beta$. Como ω^β es una cola de α y es menor que $\omega^{\beta+1}$, entonces $\alpha \notin L_{\beta+1}$.

Sólo falta ver que $\alpha \in L_\beta$ y esta prueba la haremos por inducción sobre β. Si $\beta = 0$, no hay nada que probar.

Supongamos que β es un ordinal sucesor, $\beta = \xi + 1$, y que existe δ tal que $\alpha = \delta + \omega^\beta$. La hipótesis de inducción es que si $\alpha = \delta' + \omega^\xi$, entonces $\alpha \in L_\xi$. Por la hipótesis inductiva, los ordinales de la forma $\delta' + \omega^\xi \cdot m$, con $m < \omega$, son ξ-límites. Entonces, como $\alpha = \sup\{\delta + \omega^\xi \cdot m : m < \omega\}$, para cada $\gamma < \alpha$ hay

$m < \omega$ tal que $\gamma < \delta + \omega^\xi \cdot m$ y se cumple que $\delta + \omega^\xi \cdot m \in L_\xi$. Mostramos con esto que $\alpha \in L_{\xi+1} = L_\beta$.

Sea λ un ordinal límite. Supongamos que $\alpha = \delta + \omega^\lambda$ y que para todo $\beta < \lambda$, si $\alpha = \delta + \omega^\beta$, entonces $\alpha \in L_\beta$. Como λ es límite, $\alpha = \sup\{\delta + \omega^\beta : \beta < \lambda\}$. Por la hipótesis inductiva, $\delta + \omega^\beta \in L_\beta$ y entonces, $\alpha \in L_{\beta+1}$ para todo $\beta < \lambda$. Mencionamos anteriormente (después del lema 4.2.7) que basta que α pertenezca a los $\beta + 1$ -límites, con $\beta < \lambda$, para que α sea un λ-límite. ■

De aquí se sigue que ω^β es un β-límite estricto para cualquier ordinal β y que ω^β es el mínimo β-límite no nulo.

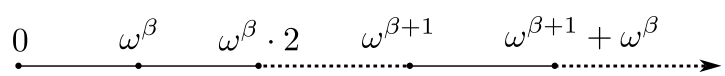

Figura 4.4: En general, los β-límites se ordenan como en este diagrama.

Con esto podemos corregir la contención que se sigue del lema 4.2.7, pues de hecho $L_\beta \subsetneq L_\alpha$ si $\alpha < \beta$. Si $\alpha \in L_\beta$, pero $\alpha \notin L_{\beta+1}$, entonces $\alpha \notin L_\gamma$ para cualquier $\gamma \geq \beta + 1$. Así, el nombre de β-límite cobra sentido.

También este último teorema nos hace visualizar mejor cómo son los β-límites. En el diagrama 4.5 se muestras los primeros L_β.

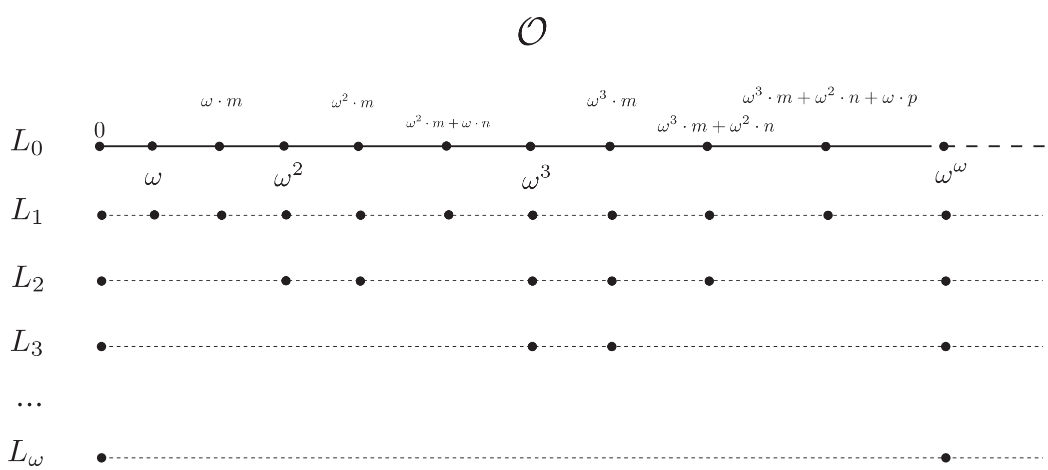

Figura 4.5: Las primeras clases de β-límites se ordenan como en este diagrama.

Como no todos los ordinales son límite, ni mucho menos β-límite para un β arbitrario, nos sirve encontrar el β-límite más cercano a un ordinal cualquiera. Con el siguiente teorema probaremos la existencia de un máximo β-límite menor o igual que un ordinal α para inducir la siguiente definición.

Teorema 4.2.9. *Dados dos ordinales α y β, hay un único β-límite $\gamma \leq \alpha$ tal que si $\gamma < \delta < \alpha$, entonces δ no es un β-límite.*

Demostración. Supongamos que la Forma Normal de Cantor de α es $\omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$.

Si $\beta \leq \alpha_k$, hacemos $\gamma = \alpha$. Por el teorema anterior, γ es un β-límite y γ cumple los requisitos.

Si $\beta > \alpha_0$, hacemos $\gamma = 0$. Tomemos un ordinal $\delta < \alpha$ con Forma Normal $\omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\beta_p} \cdot m_p$. Usando el lema 3.3.15 para comparar dos ordinales, se tiene que $\beta_0 \leq \alpha_0$ y, como $\beta_0 > \beta_p$ en la Forma Normal, $\beta_p < \alpha_0$, por lo que $\beta_p < \beta$. Así, por el teorema 4.2.8, δ no es un ordinal β-límite.

El otro caso es que $\alpha_k < \beta \leq \alpha_0$. Sea $i < k$ el máximo índice tal que $\beta \leq \alpha_i$, entonces

$$\gamma = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_i} \cdot n_i \in L_\beta.$$

Si $\gamma < \delta < \alpha$, entonces $\delta = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_i} \cdot n_i + \tau$, donde, por el lema 3.3.15, el primer exponente de la Forma Normal de τ es menor o igual que α_{i+1}. Pero $\alpha_{i+1} < \beta$, por tanto, δ no es un ordinal β-límite. ∎

Usando este último teorema, podemos dar la siguente definición.

Definición 4.2.10. Sean α y β ordinales. Denotaremos con $L_\beta(\alpha)$ al máximo ordinal β-límite menor o igual que α.

Sea λ un ordinal límite y α un ordinal. A partir de las definiciones se observa que $L_\lambda(\alpha) \in L_\beta$ para todo $\beta < \lambda$ y que $L_\lambda(\alpha) \leq L_\beta(\alpha)$ también para todo $\beta < \lambda$, pues $L_\beta(\alpha)$ es el máximo β-límite menor o igual que α.

Supongamos ahora que para cada $\beta < \lambda$, $L_\lambda(\alpha) < L_\beta(\alpha)$. Entonces

$$L_\lambda(\alpha) < \ldots < L_\beta(\alpha) < \ldots < L_1(\alpha) \leq \alpha.$$

Pero esto no es posible, porque $\{L_\beta(\alpha) : \beta < \lambda\}$ sería un conjunto infinito de ordinales sin mínimo. Por tanto, hay $\beta < \lambda$ tal que $L_\lambda(\alpha) = L_\beta(\alpha)$ y si β es el máximo tal se tiene que

$$L_\lambda(\alpha) = \cdots = L_\beta(\alpha) < \ldots < L_1(\alpha) \leq \alpha.$$

Lema 4.2.11. *Sean α y β ordinales.*

1. *Sea $\gamma \in L_\beta$. Entonces, $L_\beta(\alpha) = \gamma$ si y sólo si $\gamma \leq \alpha < \gamma + \omega^\beta$.*

2. *Sean α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces, $L_\beta(\alpha_1) = L_\beta(\alpha_2)$ si y sólo si $\alpha_2 - \alpha_1 < \omega^\beta$.*

Demostración.

1. Si $L_\beta(\alpha) = \gamma$, entonces $\gamma \le \alpha$ y $\gamma + \omega^\beta$ es un β-límite. Como $L_\beta(\alpha)$ es el máximo β-límite menor o igual que α, $\alpha < \gamma + \omega^\beta$.

   Supongamos que $\gamma \le \alpha < \gamma + \omega^\beta$. Tomemos un ordinal δ tal que $\gamma < \delta$ y $\delta \in L_\beta$. Como $\delta > \gamma$, hay $\tau > 0$ tal que $\delta = \gamma + \tau$. Como $\delta \in L_\beta$, $\tau \ge \omega^\beta$. Entonces $\alpha < \gamma + \omega^\beta \le \gamma + \tau = \delta$. Por tanto, $L_\beta(\alpha) = \gamma$.

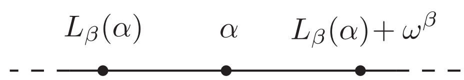

Figura 4.6: Entre dos β-límites hay por lo menos ω^β.

2. Sean α_1 y α_2 tales que $\alpha_1 < \alpha_2$. Supongamos que $L_\beta(\alpha_1) = L_\beta(\alpha_2)$. Sea γ tal que $\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma$. Si $\gamma \ge \omega^\beta$, por el inciso anterior se tiene que

   $$\alpha_2 < L_\beta(\alpha_2) + \omega^\beta = L_\beta(\alpha_1) + \omega^\beta \le \alpha_1 + \omega^\beta \le \alpha_1 + \gamma = \alpha_2,$$

   pero esto es imposible. Entonces $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1 < \omega^\beta$.

   Si $\alpha_2 - \alpha_1 < \omega^\beta$ y γ es el ordinal tal que $\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma$, entonces $\gamma < \omega^\beta$. Llamemos $L_\beta(\alpha_1) = \gamma_1$ y $L_\beta(\alpha_2) = \gamma_2$. Por la definición, $\gamma_1 \le \alpha_1 < \alpha_2$ y, como γ_1 es el máximo β-límite menor o igual que α_1 y γ_2 es un β-límite, tenemos que $\gamma_2 \le \gamma_1$ ó $\alpha_1 < \gamma_2 \le \alpha_2$. Pero como $\gamma_1 < \alpha_2$, $\gamma_2 \not< \gamma_1$, pues de lo contrario γ_2 no sería el máximo β-límite menor o igual que α_2. Así, los dos casos posibles son $\gamma_1 = \gamma_2$ ó $\alpha_1 < \gamma_2 \le \alpha_2$. Se muestra en la figura 4.7 el caso en que $\alpha_1 < \gamma_2 \le \alpha_2$.

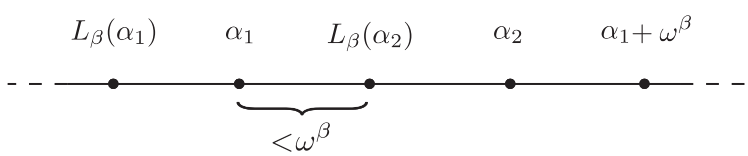

Figura 4.7: $\alpha_1 < \gamma_2 \le \alpha_2$.

   De la segunda desigualdad se sigue que $\gamma_2 - \alpha_1 \le \alpha_2 - \alpha_1 < \omega^\beta$. Esto quiere decir que γ_2 tiene una cola menor que ω^β, contradiciento que es un β-límite. Por tanto, $\gamma_1 = \gamma_2$.

■

Hasta ahora sólo hemos hablado de ordinales, pero en general para cualquier buen orden $\langle W, R\rangle$ podemos hacer definiciones equivalentes, ya que $\langle W, R\rangle$ es isomorfo a un único ordinal.

Definición 4.2.12. Sean $\langle W, R\rangle$ un buen orden, α el ordinal tal que $\langle W, R\rangle \simeq \mathcal{O}_\alpha$ y $f : W \to \mathcal{O}_\alpha$ el isomorfismo.

Si β es un ordinal, decimos que x es un *punto β-límite de* W si y sólo si $f(x) \in L_\beta$. Denotamos con $L_\beta(W)$ al conjunto de los puntos β-límites de W,

$$L_\beta(W) = \{x \in W : f(x) \in L_\beta\}.$$

Definimos también que, para todo $x \in W$, $L_\beta(x) = w$ si y sólo si $f(w) = L_\beta(\gamma)$, donde $f(x) = \gamma$.

Si consideramos los β-límites del orden $\mathcal{O}_\alpha$, éstos son los mismos que los elementos de L_β que sean menores que α, es decir, $L_\beta(\mathcal{O}_\alpha) = L_\beta \cap \mathcal{O}_\alpha$.

Con estas definiciones podemos hacer una traducción a buenos órdenes de los resultados que probamos anterioremente. Sea $x \in W$ y β un ordinal.

1. Si x es un punto β-límite de W, entonces x es un punto γ-límite de W para todo $\gamma \leq \beta$. Por esto se cumple que si λ es un ordinal límite, entonces

$$L_\lambda(W) = \bigcap_{\beta<\lambda} L_\beta(W).$$

2. Como el ordinal $L_\beta(\gamma)$ existe y sabemos que es único, entonces está bien definido $L_\beta(x)$ con $x \in W$. De hecho, las definiciones son análogas. Se puede ver que $L_\beta(x)$ es el máximo punto β-límite menor o igual que x.

   Sea w un punto β-límite de W tal que $w \leq x$. Mostraremos que $w \leq L_\beta(x)$. Hay $\gamma, \delta < \alpha$ tales que $\delta \in L_\beta$, $f(w) = \delta$ y $f(x) = \gamma$. De que f preserva orden se sigue que $\delta \leq \gamma$ y $\delta \leq L_\beta(\gamma)$. Con esto concluimos que $w \leq L_\beta(x)$.

3. Como cada elemento de W corresponde a un único ordinal menor que α, se puede reescribir el lema 4.2.11. Se obtiene algo muy parecido, porque se comparan los puntos β-límite de W con base en los ordinales β-límite que les corresponden.

   a) Sea $w \in L_\beta(W)$. Entonces, $L_\beta(x) = w$ si y sólo si $f(w) \leq f(x) < f(w) + \omega^\beta$.

   b) Sean $w_1, w_2 \in W$ tales que $w_1 <_R w_2$. Entonces, $L_\beta(w_1) = L_\beta(w_2)$ si y sólo si $f(w_2) - f(w_1) < \omega^\beta$.

Límites y condensaciones

Ahora vamos a darle utilidad a los β-límites en el estudio de las condensaciones iteradas.

Teorema 4.2.13. *Sea α un ordinal. Hacemos la condensación c^β sobre el conjunto $\mathcal{O}_\alpha$. Entonces, para todo ordinal β se cumple lo siguiente:*

1. $c^\beta(\gamma) = c^\beta(L_\beta(\gamma))$ *para todo* $\gamma \in \mathcal{O}_\alpha$*;*

2. *si* $\gamma, \delta \in L_\beta(\mathcal{O}_\alpha)$ *son tales que* $\gamma \neq \delta$*, entonces* $c^\beta(\gamma) \neq c^\beta(\delta)$*; y*

3. *si* $\gamma, \delta \in \mathcal{O}_\alpha$ *son tales que* $\gamma < \delta$*,* $c^\beta(\gamma) = c^\beta(\delta)$ *si y sólo si* $\delta - \gamma < \omega^\beta$*.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre los tres puntos simultáneamente.

Veamos el caso en que $\beta = 0$.

1. Para todo $\gamma \in \mathcal{O}_\alpha$, $L_0(\gamma) = \gamma$. Entonces $c^0(\gamma) = c^0(L_0(\gamma))$.

2. Si $\gamma, \delta \in L_0(\mathcal{O}_\alpha)$ y $\gamma \neq \delta$, $c^0(\gamma) = \{\gamma\} \neq \{\delta\} = c^0(\delta)$.

3. Si $\gamma, \delta \in \mathcal{O}_\alpha$, se tiene la siguiente cadena de implicaciones: $\delta - \gamma < \omega^0 = 1$ si y sólo si $\delta - \gamma = 0$, si y sólo si $\delta = \gamma$, si y sólo si $c^0(\gamma) = \{\gamma\} = \{\delta\} = c^0(\delta)$.

Supongamos que se cumple el teorema para un ordinal β.

Primero probaremos usando est hipótesis que la función

$$f : c^\beta[\mathcal{O}_\alpha] \to L_\beta(\mathcal{O}_\alpha),$$

dada por $f(c^\beta(x)) = L_\beta(x)$, es un isomorfismo.

Sea $x, y \in \mathcal{O}_\alpha$ tales que $c^\beta(x) = c^\beta(y)$, por el inciso 1 de la hipótesis inductiva, esto implica que $c^\beta(L_\beta(x)) = c^\beta(L_\beta(y))$ y, por el inciso 2 de la hipótesis inductiva, esto implica que $L_\beta(x) = L_\beta(y)$. Además, por el inciso 1 de la hipótesis inductiva, f es sobre, pues si $x \in L_\beta(\mathcal{O}_\alpha) = L_\beta \cap \mathcal{O}_\alpha$, entonces $L_\beta(x) = x$ y $f(c^\beta(x)) = L_\beta(x) = x$.

Por el inciso 3 de la hipótesis y por el lema 4.2.11, f es una función inyectiva, pues si $x, y \in \mathcal{O}_\alpha$ son tales que $L_\beta(x) = L_\beta(y)$ y $x < y$, entonces $y - x < \omega^\beta$ y, por la hipótesis, $c^\beta(x) = c^\beta(y)$.

Veamos que por el inciso 2 de la hipótesis, f preserva el orden. Sean $x, y \in \mathcal{O}_\alpha$ tales que $c^\beta(x) \ll c^\beta(y)$. Si suponemos que $L_\beta(y) < L_\beta(x)$, entonces $L_\beta(y) \leq y \leq L_\beta(x) \leq x$, contradiciendo que $x < y$. Y si suponemos que $L_\beta(x) = L_\beta(y)$, por el lema 4.2.11, $y - x < \omega^\beta$ y, por el inciso 3 de la hipótesis, $c^\beta(x) = c^\beta(y)$, contradiciendo que $c^\beta(x) \ll c^\beta(y)$. Por tanto, $f(c^\beta(x)) = L_\beta(x) < L_\beta(y) = f(c^\beta(y))$.

Ya tenemos que $c^\beta[\mathcal{O}_\alpha] \simeq L_\beta(\mathcal{O}_\alpha)$.

Ahora afirmamos que para cualquier $x \in \mathcal{O}_\alpha$:

$$c^{\beta+1}(x) = \{y \in \mathcal{O}_\alpha : L_{\beta+1}(x) = L_{\beta+1}(y)\}.$$

Sea $y \in \mathcal{O}_\alpha$ tal que $x < y$. Observemos que por el isomorfismo derivado de la hipótesis inductiva, $[c^\beta(x), c^\beta(y)]$ es finito si y sólo si $[L_\beta(x), L_\beta(y)]$ es finito. Además, por el lema 4.2.11, $L_{\beta+1}(x) = L_{\beta+1}(y)$ si y sólo si $y - x < \omega^{\beta+1}$. Entonces, para probar la afirmación que hicimos basta ver que $[L_\beta(x), L_\beta(y)]$ es finito si y sólo si $y - x < \omega^{\beta+1}$.

Supongamos que $y - x \geq \omega^{\beta+1}$. Tenemos las siguientes desigualdades

$$L_\beta(x) \leq x < x + \omega^{\beta+1} \leq L_\beta(y) \leq y,$$

porque $x + \omega^{\beta+1}$ es β-límite. Pero entonces tendríamos que

$$L_\beta(x) < x + \omega^\beta \cdot m < L_\beta(y)$$

para todo $m < \omega$. Como $x + \omega^\beta \cdot m \in L_\beta$ para todo $m < \omega$, $[L_\beta(x), L_\beta(y)]$ es infinito.

Supongamos que $[L_\beta(x), L_\beta(y)]$ es infinito. De aquí se tiene la desigualdad

$$L_\beta(x) \leq x \leq L_\beta(y) \leq y$$

y, por el hecho de que no hay β-límites entre $L_\beta(x)$ y x, hay una infinidad de β-límites entre x y $L_\beta(y)$. Los primeros β-límites mayores que x son de la forma $x + \omega^\beta \cdot m$, con $m < \omega$. Entonces, $x < x + \omega^\beta \cdot m < L_\beta(y)$ para cada $m < \omega$, pues son una cantidad numerable y son β-límites estrictos. De aquí se siguen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} y &\geq \sup\{x + \omega^\beta \cdot m : m < \omega\} \\ &= x + \sup\{\omega^\beta \cdot m : m < \omega\} \\ &= x + \omega^{\beta+1} \end{aligned}$$

Por tanto, $y - x \geq \omega^{\beta+1}$. El caso en que $y < x$ se desmuestra análogamente y el caso en que $x = y$ es trivial. Con esto podemos afirmar que $c^{\beta+1}(x) = c^{\beta+1}(y)$ si y sólo si $L_{\beta+1}(x) = L_{\beta+1}(y)$.

1. Como $L_{\beta+1}(x)$ es el máximo $\beta + 1$-límite menor o igual que $L_{\beta+1}(x)$, entonces $c^{\beta+1}(x) = c^{\beta+1}(L_{\beta+1}(x))$.

2. Si $x, y \in L_{\beta+1}(\mathcal{O}_\alpha)$ y $x \neq y$, entonces $L_{\beta+1}(x) = x \neq y = L_{\beta+1}(y)$. Por lo tanto, $c^{\beta+1}(y) \neq c^{\beta+1}(x)$.

3. Sean $x, y \in \mathcal{O}_\alpha$, tales que $x < y$. Se tiene que $c^{\beta+1}(x) = c^{\beta+1}(y)$ si y sólo si $L_{\beta+1}(x) = L_{\beta+1}(y)$; y esto sucede si y sólo si $y - x < \omega^{\beta+1}$.

Sea λ un ordinal límite. Supongamos que se cumplen los incisos 1, 2 y 3 para todo $\beta < \lambda$. Como en el caso anterior, basta probar que para todo $x \in \alpha$

$$c^\lambda(x) = \{y \in \mathcal{O}_\alpha : L_\lambda(x) = L_\lambda(y)\}.$$

Sea $y \in c^\lambda(x)$ tal que $x < y$. Hay $\beta < \lambda$ tal que $y \in c^\beta(x)$. Tenemos por el inciso 1 de la hipótesis inductiva, que $c^\beta(L_\beta(y)) = c^\beta(y) = c^\beta(x) = c^\beta(L_\beta(x))$ y, por el inciso 2, $L_\beta(x) = L_\beta(y)$. Además se tiene la siguiente desigualdad

$$L_\lambda(x) \leq L_\beta(x) \leq x \leq L_\lambda(y) \leq L_\beta(y) \leq y$$

de la cual deducimos que $x = L_\lambda(y)$. Entonces, x es un λ-límite y, por tanto, $L_\lambda(x) = L_\lambda(y)$. El caso en que $y < x$ es análogo.

Sea y tal que $L_\lambda(x) = L_\lambda(y)$. Anteriormente observamos que hay ordinales $\beta, \gamma < \lambda$ tales que $L_\lambda(x) = L_\beta(x)$ y $L_\lambda(y) = L_\gamma(y)$ y para todo α con $\beta \leq \alpha < \lambda$,

$L_\lambda(x) = L_\alpha(x)$ (y análogamente para y y γ). Sin pérdida de la generalidad supongamos que $\beta \le \gamma$, entonces $L_\gamma(x) = L_\lambda(x)$ y de aquí que $L_\gamma(x) = L_\gamma(y)$. Por la hipótesis de inducción, esto implica que $y \in c^\gamma(x)$ y, por tanto, $y \in c^\lambda(x)$.

Por lo tanto, $c^\lambda(x) = \{y \in \mathcal{O}_\alpha : L_\lambda(x) = L_\lambda(y)\}$. Análogamente al caso sucesor, de este hecho se desprenden los incisos para λ. ■

Probamos este último teorema para cualquier ordinal α y esto quiere decir que se puede aplicar a cualquier buen orden.

Teorema 4.2.14. *Sea A un buen orden tal que $A \simeq_f \mathcal{O}_\alpha$ con α un ordinal y f un isomorfismo. Entonces para todo ordinal β:*

1. *$c^\beta(x) = c^\beta(L_\beta(x))$ para todo $x \in A$;*
2. *si $x, y \in L_\beta(A)$ son tales que $x \neq y$, entonces $c^\beta(x) \neq c^\beta(y)$;*
3. *si $x, y \in A$ son tales que $x <_A y$, $c^\beta(x) = c^\beta(y)$ si y sólo si $f(y) - f(x) < \omega^\beta$.*

Una consecuencia muy importante de este teorema es que basta condensar los puntos β-límite de A, es decir, $c^\beta[A] \simeq L_\beta(A)$. Esto se representa en la figura 4.8. Como consecuencia tenemos que $c^{\beta+1}[A] \simeq c[L_\beta(A)]$ para todo ordinal β.

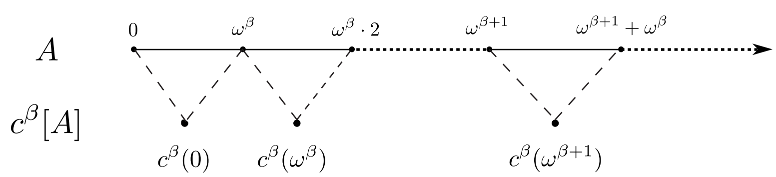

Figura 4.8: La condensación c^β sobre un buen orden A.

Ejemplos

Daremos algunos ejemplos de condensaciones de buenos órdenes. Sea A un buen orden.

1. Sea $m < \omega$. Si $A \simeq \omega^m$, veamos cómo es el conjunto $L_n(A) \simeq L_n(\mathcal{O}_{\omega^m})$ de los puntos n-límites de A, cuando $n < m$. El conjunto $L_n(\mathcal{O}_{\omega^m})$ se describe de la siguiente forma. Dado un ordinal α con forma normal de cantor $\omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} \cdot n_{k-1} + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$

$$\alpha \in L_n(\mathcal{O}_{\omega^m}) \text{ si y sólo si } n \le \alpha_k < \alpha_0 < m; \text{ por otro lado}$$
$$\alpha \in \mathcal{O}_{\omega^{m-n}} \text{ si y sólo si } \alpha_0 < m - n.$$

Construimos la función $f : L_n(\mathcal{O}_{\omega^m}) \to \mathcal{O}_{\omega^{m-n}}$, definida por

$$f(\alpha) = \omega^{\beta_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\beta_{k-1}} \cdot n_{k-1} + \omega^{\beta_k} \cdot n_k,$$

donde $\beta_i = \alpha_i - n$ para todo $i \leq k$. Esta función es un isomorfismo, entonces

$$L_n(\mathcal{O}_{\omega^m}) \simeq_f \omega^{m-n},$$

y, por tanto, $c^n[A] \simeq \omega^{m-n}$.

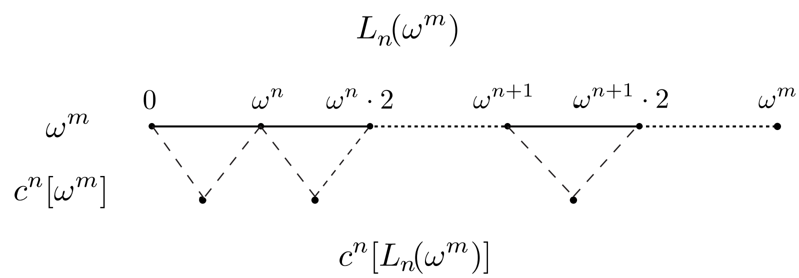

Figura 4.9: La condensación c^n de un buen orden isomorfo a ω^m.

2. Un caso particular del inciso anterior es cuando $n = m$. El primer m-límite no nulo es ω^m, éste es un m-límite estricto. Pero recordemos que $0 \in L_m$, se tiene entonces que $L_m(\omega^m) = \{0\}$. Si a_0 es el mínimo punto m-límite de A, $L_m(A) = \{a_0\}$ y $c^m[A] \simeq 1$.

3. Sea $A \simeq \omega^\omega$ y sea un ordinal α con forma normal de cantor $\omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} \cdot n_{k-1} + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$. Se cumple que

$$\alpha \in L_n(\mathcal{O}_{\omega^\omega}) \text{ si y sólo si } n \leq \alpha_k < \alpha_0 < \omega; \text{ por otro lado}$$
$$\alpha \in \mathcal{O}_{\omega^\omega} \text{ si y sólo si } \alpha_0 < \omega.$$

Al igual que en el primer ejemplo damos un isomorfismo f entre $L_n(\mathcal{O}_{\omega^\omega})$ y $\mathcal{O}_{\omega^\omega}$. Se define

$$f(\alpha) = \omega^{\beta_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\beta_{k-1}} \cdot n_{k-1} + \omega^{\beta_k} \cdot n_k,$$

donde $\beta_i = \alpha_i - n$ para todo $i \leq k$. Se cumple que es un isomorfismo porque si $\beta_i < \omega$, entonces $\beta_i + n < \omega$.

Por tanto, se tiene lo siguiente

$$L_n(\mathcal{O}_{\omega^\omega}) \simeq \omega^\omega.$$

Obtenemos que $c^n[A] \simeq \omega^\omega$ para todo $n < \omega$.

Aunque tengamos que $c[\omega^\omega] \simeq \omega^\omega$, esto no quiere decir que $c[\omega^\omega] = \omega^\omega$, como si la condensación c no tuviera ningún efecto sobre ω^ω. La condensación de ω^ω produce un nuevo orden con el mismo tipo de orden, pero cada intervalo se compone de varios elementos, como si los aplastáramos en uno mismo.

Para condensaciones iteradas finitas no hay efecto en tipos de orden de potencias no finitas de ω, pero no es así en cualquier condensación. Hagamos ahora condensaciones posteriores a ω.

4. Sea $A \simeq \omega^\omega$ y $\alpha \in \mathcal{O}_{\omega^\omega}$, entonces hay $n < \omega$ tal que $\alpha < \omega^n$ y, por el teorema 4.2.14, $c^n(\alpha) = c^n(0)$. Viendo esto, cualquier $\alpha < \omega^\omega$ se condensa a 0 en una cantidad finita de pasos, es decir $\omega^\omega = \bigcup_{n<\omega} c^n(0) = c^\omega(0)$. Esto significa que la condensación c^ω sí tiene efecto sobre ω^ω, pues $c^\omega[A] \simeq 1$.

5. Sea $A \simeq \omega^\omega + \omega^\omega$. Entonces
$$L_\omega(\mathcal{O}_{\omega^\omega+\omega^\omega}) = \{0, \omega^\omega\} \text{ y}$$
$$c^\omega[A] \simeq 2.$$

6. Sea $A \simeq \omega^\omega \cdot \omega$. Sabemos que
$$\alpha \in L_\omega(\mathcal{O}_{\omega^\omega\cdot\omega}) \text{ si y sólo si } \omega \leq \alpha_k < \alpha_0 < \omega + 1; \text{ es decir,}$$
$$L_\omega(\mathcal{O}_{\omega^\omega\cdot\omega}) = \{\omega^\omega \cdot n : n < \omega\}.$$

   Entonces, $c^\omega[A] \simeq \omega$. Éste es un caso particular del siguiente.

7. Sea τ un ordinal con forma normal de cantor $\omega^{\tau_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\tau_r} \cdot m_r$ y $A \simeq \omega^\omega \cdot \tau$. De nuevo,
$$\alpha \in L_\omega(\mathcal{O}_{\omega^\omega\cdot\tau}) \text{ si y sólo si } \omega \leq \alpha_k < \alpha_0 < \omega + \tau_r; \text{ es decir,}$$
$$L_\omega(\mathcal{O}_{\omega^\omega\cdot\tau}) = \{\omega^\omega \cdot \beta : \beta < \tau\}.$$

   Entonces, $c^\omega[A] \simeq \tau$.

8. Sea $A \simeq \omega^\alpha$. Si α es cualquier ordinal, ω^α es el mínimo ordinal α-límite estricto. Por esto, $L_\alpha(\mathcal{O}_{\omega^\alpha}) \simeq 1$. Así obtenemos que $c^\alpha[A] \simeq 1$ para todo ordinal α y $c^\beta[A] \not\simeq 1$ para todo $\beta < \alpha$.

Capítulo 5

Rango de un orden lineal

Veremos en este capítulo que siempre se alcanza un ordinal β para el cual ya no hay cambio en el tipo de orden de las condensaciones, a partir de este ordinal se estaciona el tipo de orden. Es decir, las condensaciones a partir de algún ordinal son todas isomorfas. Vamos a acotar este ordinal para el cual ya no hay cambio posterior en la condensación.

5.1. Rango

Sean A un orden lineal y α un ordinal.

Veamos qué pasa si A es denso infinito. Como A es denso, los únicos intervalos finitos contenidos en A son de la forma $\{x\}$, con $x \in A$. Entonces, $c(x) = \{x\}$ para todo $x \in A$. Esto implica que si A es denso, $c[A] \simeq A$. De hecho, si $c^\alpha[A]$ es denso infinito, los únicos intervalos finitos de $c^\alpha[A]$ son de la forma $\{c^\alpha_A(x)\}$, con $x \in A$. Resulta de este hecho, que si $c^\alpha[A]$ es denso, $c^\alpha_A(x) = c^{\alpha+1}(x)$ para todo $x \in A$.

Más aún, observamos que si A es cualquier orden lineal y $c^\alpha(x) = c^{\alpha+1}(x)$ para todo $x \in A$, entonces las condensaciones posteriores a α no se modifican.

Lema 5.1.1. *Sea α un ordinal. Si $c^\alpha(x) = c^{\alpha+1}(x)$ para todo $x \in A$, entonces $c^\beta(x) = c^\alpha(x)$, para todo $x \in A$ y todo $\beta \geq \alpha$.*

Demostración. Supongamos que $c^{\alpha+1}(x) = c^\alpha(x)$ para todo $x \in A$. Probemos el lema por inducción sobre los ordinales $\beta \geq \alpha$.

Si $c^\beta(x) = c^\alpha(x)$ para todo $x \in A$, con $\beta \geq \alpha$, tenemos que $c^\beta[A] = c^\alpha[A]$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} c^{\beta+1}(x) &= \{y \in A : [c^{\beta}(x), c^{\beta}(y)] \text{ es finito}\} \\ &= \{y \in A : [c^{\alpha}(x), c^{\alpha}(y)] \text{ es finito}\} \\ &= c^{\alpha+1}(x) \\ &= c^{\alpha}(x). \end{aligned}$$

Si $c^{\beta}(x) = c^{\alpha}(x)$ para todo $x \in A$ y $\beta < \lambda$, con λ un ordinal límite, entonces

$$c^{\lambda}(x) = \bigcup_{\beta<\lambda} c^{\beta}(x) = \bigcup_{\beta<\lambda} c^{\alpha}(x) = c^{\alpha}(x),$$

pues para todo $\gamma \leq \beta$ se tiene que $c^{\gamma}(x) \subseteq c^{\beta}(x)$. ■

Como consecuencia del lema anterior, tenemos que si $c^{\alpha}[A]$ es denso infinito, entonces $c^{\beta}(x) = c^{\alpha}(x)$, para todo $x \in A$ y todo $\beta \geq \alpha$. Así, si A es denso infinito, entonces $c^{\alpha}[A] \simeq A$ para cualquier ordinal α.

Ahora, si $c^{\alpha}[A] \simeq 1$, es claro que $c^{\beta}(x) = c^{\alpha}(x)$, para todo $x \in A$ y todo $\beta \geq \alpha$, porque $A = c^{\alpha}(x) \subseteq c^{\beta}(x) \subseteq A$.

Concluimos que en cualquier de estos casos ($c^{\alpha}[A]$ es denso infinito o $c^{\alpha}[A] \simeq 1$), los tipos de orden de las condensaciones siguientes ya son todos iguales.

Cuando $c^{\alpha}[A]$ no es denso, entonces hay al menos dos $x, y \in A$, tales que $c^{\alpha}(x) \neq c^{\alpha}(y)$, para los cuales no hay $z \in A$ tal que $c^{\alpha}(x) \ll c^{\alpha}(z) \ll c^{\alpha}(y)$. Entonces, para x y y, $c^{\alpha+1}(x) = c^{\alpha+1}(y)$ porque no hay elementos de la condensación $c^{\alpha}[A]$ entre ellos. Se ve que en este caso, sí hay cambio en una condensación posterior a c^{α} si $c^{\alpha}[A]$ no es denso.

Lo que queríamos mostrar es que tiene sentido seguir condensando el orden lineal $c^{\alpha}[A]$ (o que haya cambio en el tipo de la siguiente condensación del orden lineal) si y sólo si $c^{\alpha}[A]$ no es denso.

El siguiente teorema prueba que la iteración de las condensaciones de un orden lineal se estaciona después de un cierto ordinal.

Teorema 5.1.2. *Sea A un orden lineal. Hay un ordinal α tal que $c^{\beta}(x) = c^{\alpha}(x)$ para todo $\beta \geq \alpha$ y para todo $x \in A$.*

Demostración. Veamos que

$$A' = \{\alpha \in \mathcal{O} : c^{\alpha+1}(x) \neq c^{\alpha}(x) \text{ para algún } x \in A\}$$

se comporta como un segmento inicial de la clase de los ordinales. Sea $\beta \in A'$ y $\gamma < \beta$. Si $\gamma \notin A'$ (suponiendo que no es un segmento incial), entonces para todo $x \in A$ se tendría que $c^{\gamma+1}(x) = c^{\gamma}(x)$. Pero $\beta > \gamma$, entonces, por el lema 5.1.1, $c^{\beta}(x) = c^{\gamma}(x) = c^{\beta+1}(x)$ para todo $x \in A$. Contradiciendo que $\beta \in A'$. Por tanto, $\gamma \in A'$ y A' se comporta como un segmento inicial de $\mathcal{O}$. Por esto, hay un ordinal[1] α_0 tal que $A' = \mathcal{O}_{\alpha_0}$, el ordinal α_0 es el buscado. Se cumple que si $\beta \geq \alpha_0$, entonces $c^\beta(x) = c^{\alpha_0}(x)$ para todo $x \in A$. ■

Definición 5.1.3. Sea A un orden lineal. Al mínimo ordinal α tal que $c^\alpha(x) = c^\beta(x)$ para todo $x \in A$ y todo $\beta \geq \alpha$ le llamamos el *F-rango de A*, o el *rango finito de A*. Lo denotamos $\alpha = r_F(A)$.

Ya probamos, con el teorema 5.1.2, la existencia de un ordinal que cumple que no hay cambio en las condensaciones posteriores y se ve que el ordinal construido en la prueba es el mínimo que cumple con el requisito. Es decir, el mismo α_0 de la prueba del teorema 5.1.2 es el F-rango de A.

Por lo expuesto antes del teorema 5.1.2, concluimos que si $\alpha = r_F(A)$, entonces $c^\alpha[A]$ tiene tipo de orden denso. También sucede que si A es denso o $A = \emptyset$, entonces $r_F(A) = 0$.

Obsérvese que si en A hay al menos dos elementos y $r_F(A) > 0$, entonces para cualquier $\gamma < r_F(A)$, $c^\gamma[A]$ no es denso, pues hay $x, y \in A$ tales que $c^\gamma(x) \neq c^\gamma(y)$ pero $c^{\gamma+1}(x) = c^{\gamma+1}(y)$.

Lema 5.1.4. *Sea A un orden lineal. Entonces:*

1. *A es disperso si y sólo si $c^\alpha[A] \simeq 1$, con $\alpha = r_F(A)$; y*
2. *$r_F(\omega^\alpha) = \alpha$ para todo ordinal α.*

Demostración.

1. Sea $\alpha = r_F(A)$. Si A es disperso, no puede ser que $c^\alpha[A]$ tenga tipo de orden denso infinito, porque entonces cualquier conjunto de representantes de cada elemento de la condensación sería un suborden denso infinito de A. Por tanto, $c^\alpha[A] \simeq 1$.

   Supongamos que hay un suborden denso infinito B de A. Observemos que para cualquier ordinal β y para cualesquiera $x, y \in B$, tales que $x \neq y$, se tiene que $c^\beta(x) \neq c^\beta(y)$. Esto se prueba por inducción sobre β. Si $\beta = 0$ y $x, y \in B$ tales que $x \neq y$, entonces $c^0(x) = \{x\} \neq \{y\} = c^0(y)$. Sean $x, y \in B$ tales que $x \neq y$ y supongamos que $c^\beta(z) \neq c^\beta(w)$ si $z, w \in B$ y $z \neq w$. Ya tenemos que $c^\beta(x) \neq c^\beta(y)$ y que $[x, y] \cap B$ no es finito, entonces, por la hipótesis de inducción, $[c^\beta(x), c^\beta(y)]$ no es finito. Entonces, $c^{\beta+1}(x) \neq c^{\beta+1}(y)$. Sea λ un ordinal límite y supongamos que $c^\beta(x) \neq c^\beta(y)$ para todo $\beta < \lambda$ y cualesquiera $x, y \in B$ tales que $x \neq y$. Entonces, $c^\lambda(x) \cap c^\lambda(y) = \emptyset$, pues si hubiera $z \in c^\lambda(x) \cap c^\lambda(y)$, habría

[1] Se puede afirmar este hecho porque $A' \subsetneq \mathcal{O}$. En la teoría de conjuntos se sabe que la clase de los ordinales no es un conjunto, entonces si $A' = \mathcal{O}$, podemos encontrar un elemento de A para cada ordinal, contradiciendo que A es un conjunto. De hecho, la contradicción se encuentra por el axioma de Reemplazo (véase el Apéndice A), pues podemos definir por recursión para ordinales una funcional que a cada ordinal le asocie un elemento de A distinto de los anteriores.

$\gamma, \beta < \lambda$ tales que $\gamma \leq \beta < \lambda$ y $z \in c^\beta(x) \cap c^\gamma(y) \subseteq c^\beta(x) \cap c^\beta(y)$, contradiciendo que $c^\beta(x) \cap c^\beta(y) = \emptyset$.

Habiendo probado que hay $x, y \in A$ tales que $c^\beta(x) \neq c^\beta(y)$ para todo ordinal β, en particular se tiene que $c^\alpha[A] \not\simeq 1$.

2. Sea α un ordinal. Como ω^α es disperso y es un buen orden,

$$L_\beta(\omega^\alpha) \simeq c^\beta[\omega^\alpha] \simeq 1,$$

donde $\beta = r_F(\omega^\alpha)$.

Sabemos que $L_\alpha(\mathcal{O}_{\omega^\alpha}) = \{0\}$. Entonces, $\beta \leq \alpha$. Pero no puede suceder que $\beta < \alpha$, pues si fuera así tendríamos que $\omega^\beta < \omega^{\beta+1} \leq \omega^\alpha$ y entonces $\omega^\beta \in L_\beta(\mathcal{O}_{\omega^\alpha})$, contradiciendo que $L_\beta(\omega^\alpha) \simeq 1$. Por lo tanto, $\beta = \alpha$.

■

Como corolario del lema 4.2.4 observemos que si A, B son órdenes lineales tales que $A \simeq B$, entonces $r_F(A) = r_F(B)$.

Comparando rangos

Para comparar los rangos finitos de órdenes distintos, primero veremos qué sucede con los intervalos de un orden A, ya que cuando hagamos las condensaciones de A, podremos decir si estos intervalos están contenidos en algún elemento de la condensación.

Retomamos la notación que usamos en la definición original de condensación α-ésima y denotamos c_A^α como la condensación c^α sobre el orden lineal A. Se entiende por $c_A^\alpha[B]$ a la imagen de $B \subseteq A$ bajo el homomorfismo que corresponde a la condensación α-ésima de A, c^α.

Sea A un orden lineal e I un intervalo de A. Un ejemplo sencillo es en el que $A \simeq \omega$ y el intervalo es $I \simeq n$ con $n < \omega$. En este caso, $c_I^\alpha[I] = \{I\}$ y $c_A^\alpha[I] = \{A\}$. Resultan distintas la condensación del intervalo I de A y la condensación de A restringida a I.

Veamos que en cualquier caso en la condensación de I hay a lo más dos elementos que estén contenidos propiamente en intervalos de la condensación de A.

Lema 5.1.5. *Para cualquier ordinal α, hay a lo más dos elementos distintos de la condensación $c_A^\alpha[A]$ que intersectan a I y a $A \setminus I$.*

Demostración. Sean $x, y \in A$ tales que $x < y$, $c_A^\alpha(x) \neq c_A^\alpha(y)$ y $c_A^\alpha(x), c_A^\alpha(y)$ intersectan ambos a I y a $A \setminus I$. Sea $z \in A$.

Supongamos que $c_A^\alpha(x) \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y)$. Hay $x' \in c_A^\alpha(x)$ y $y' \in c_A^\alpha(y)$ tales que $x', y' \in I$, entonces $c_A^\alpha(x') \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y')$. Como I es intervalo y c^α preserva orden, $c_A^\alpha(z) \subseteq I$. Por tanto, $c_A^\alpha(z) \cap (A \setminus I) = \emptyset$.

Supongamos que $c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(x)$. Hay $a \in c_A^\alpha(x)$ tal que $a \notin I$. Entonces, $c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(a)$ y así $w \notin I$ para todo $w \in c_A^\alpha(z)$, pues $w < a$. Por tanto,

$c_A^\alpha(z) \cap I = \emptyset$. Supongamos que $c_A^\alpha(y) \ll c_A^\alpha(z)$. Hay $b \in c_A^\alpha(y)$ tal que $b \notin I$. Entonces, $c_A^\alpha(b) \ll c_A^\alpha(z)$ y así $w \notin I$ para todo $w \in c_A^\alpha(z)$, pues $b < w$. Por tanto, $c_A^\alpha(z) \cap I = \emptyset$.

Por la tricotomía de $c_A^\alpha[A]$ y lo que acabamos de mostrar, para cualquier $c_A^\alpha(z)$, si $c_A^\alpha(z) \cap I \neq \emptyset$ y $c_A^\alpha(z) \cap (A \setminus I) \neq \emptyset$, entonces $c_A^\alpha(z) = c_A^\alpha(x)$ o $c_A^\alpha(z) = c_A^\alpha(y)$. ■

Si $x \in I$, entonces $c_A^\alpha(x) \subseteq I$ o no; es decir $c_I^\alpha(x) = c_A^\alpha(x)$ o $c_I^\alpha(x) \subsetneq c_A^\alpha(x)$ para todo $x \in I$. En la figura 5.1 se muestra el intervalo I remarcado y las separaciones indican la partición del orden A de la condensación correspondiente a c_A^α y a c_I^α.

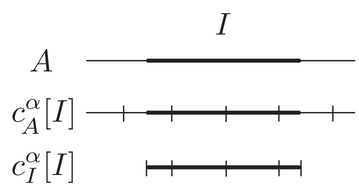

Figura 5.1: Condensación de un intervalo I de A.

Lema 5.1.6. *Sea A un orden lineal e I un intervalo de A. Para cualquier ordinal α, $c_I^\alpha(x) = c_A^\alpha(x) \cap I$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Lo probaremos por inducción para ordinales. Si $\alpha = 0$ y $x \in I$, $c_I^0(x) = \{x\} = c_A^0(x) \cap I$.

Supongamos que $c_I^\alpha(z) = c_A^\alpha(z) \cap I$ para todo $z \in I$. Observemos primero que para todo $z \in I$, se tiene que $c_I^\alpha(z) \subseteq c_A^\alpha(z)$.

Sean $x, y \in I$. Supongamos que $c_A^\alpha(x) \neq c_A^\alpha(y)$. Probemos que para todo $z \in I$ se cumple que

$$c_I^\alpha(x) \ll c_I^\alpha(z) \ll c_I^\alpha(y) \text{ si y sólo si } c_A^\alpha(x) \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y).$$

Sea $z \in I$. Si $c_I^\alpha(x) = c_I^\alpha(z)$, tenemos que $c_I^\alpha(z) \subseteq c_A^\alpha(x) \cap c_A^\alpha(z)$. Entonces, $c_A^\alpha(x) = c_A^\alpha(z)$, pues $c_A^\alpha(x) \cap c_A^\alpha(z) \neq \emptyset$. De la misma manera se prueba que si $c_I^\alpha(y) = c_I^\alpha(z)$, entonces $c_A^\alpha(y) = c_A^\alpha(z)$. Por el contrario, si $c_A^\alpha(x) = c_A^\alpha(z)$, por la hipótesis inductiva, se tiene que $c_I^\alpha(x) = c_A^\alpha(x) \cap I = c_A^\alpha(z) \cap I = c_I^\alpha(z)$. De la misma manera se prueba que si $c_A^\alpha(y) = c_A^\alpha(z)$, entonces $c_I^\alpha(y) = c_I^\alpha(z)$.

Así que como c_A^α y c_I^α son homomorfismos, se cumple que $c_I^\alpha(x) \ll c_I^\alpha(z) \ll c_I^\alpha(y)$ si y sólo si $c_A^\alpha(x) \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y)$.

Entonces, para cualesquiera $x, y \in I$, $[c_I^\alpha(x), c_I^\alpha(y)]$ es finito si y sólo si $[c_A^\alpha(x), c_A^\alpha(y)]$ es finito. Es decir, $y \in c_I^{\alpha+1}(x)$ si y sólo si $y \in c_A^\alpha(x) \cap I$. Esto prueba que $c_A^\alpha(x) \cap I = c_I^{\alpha+1}(x)$ para todo $x \in I$.

Si λ es un ordinal límite y suponemos que $c_I^\beta(x) = c_A^\beta(x) \cap I$ para todo $x \in I$, entonces para todo $x \in I$ y todo $\beta < \lambda$, se tiene que

$$\begin{aligned} c_I^\lambda(x) &= \bigcup_{\beta<\lambda} c_I^\beta(x) \\ &= \bigcup_{\beta<\lambda} (c_A^\beta(x) \cap I) \\ &= (\bigcup_{\beta<\lambda} c_A^\beta(x)) \cap I \\ &= c_A^\lambda(x) \cap I. \end{aligned}$$

■

Supongamos ahora que el intervalo I es un elemento de la condensación α-ésima, $I = c_A^\alpha(b)$ para algún $b \in A$. Se sigue del lema 5.1.6 que para todo $x \in I$, $c_I^\alpha(x) = I$. Además, para todo $x \in I$, $c_A^\alpha(x) = c_A^\alpha(b)$, entonces $c_I^\beta(x) = c_A^\beta(x)$ para todo $\beta \geq \alpha$, pues $c_A^\alpha(x) \subseteq c_A^\beta(x)$.

Con esta observación estamos diciendo dos cosas: primero, que si condensamos algún $I \in c_A^\alpha[A]$ respecto a él mismo, obtenemos que $c_I^\alpha(x) = c_A^\alpha(x)$ para todo $x \in I$; segundo, que si condensamos algún $I \in c_A^\alpha[A]$, en cualquiera de las condensaciones posteriores $\beta \geq \alpha$, es lo mismo condensar los elmentos de I respecto al intervalo que con respecto al orden lineal entero.

Lema 5.1.7. *Sea I un intervalo de A.*

1. $r_F(I) \leq r_F(A)$.
2. *Si $I = c_A^\alpha(b)$ para algún $b \in A$, entonces $r_F(I) \leq \alpha$.*

Demostración.

1. Sea $r_F(A) = \alpha$, entonces $c_A^{\alpha+1}(x) = c_A^\alpha(x)$ para todo $x \in A$.

$$c_I^{\alpha+1}(x) = c_A^\alpha(x) \cap I = c_A^\alpha(x) \cap I = c_I^\alpha(x).$$

   Por tanto $r_F(I) \leq \alpha$.

2. Si $I = c_A^\alpha(b)$ para algún $b \in A$, $c_I^\alpha(x) = I$ para todo $x \in I$. Se sigue de aquí que $r_F(I) \leq \alpha$, porque $c_I^\alpha[I] \simeq 1$.

■

Acabamos de ver que sí se cumple que $r_F(B) \leq r_F(A)$ si B es un intervalo de A. En general no se cumple que el rango de cualquier suborden de A sea menor que el rango de A. Si $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{N}$, tenemos un contraejemplo. Se tiene que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $r_F(\mathbb{N}) = 1$ y $r_F(\mathbb{Q}) = 0$ (por ser denso). El siguiente teorema da una condición que debe cumplir A para que $r_F(B) \leq r_F(A)$, si B es un suborden de A.

Teorema 5.1.8. *Si A es disperso y B es un suborden de A, entonces $r_F(B) \leq r_F(A)$.*

Demostración. Primero probaremos por inducción sobre α que $c_A^\alpha(x) \cap B \subseteq c_B^\alpha(x)$, para todo $x \in B$. En el caso en que $\alpha = 0$, es inmediato porque $c_A^0(x) \cap B = \{x\} = c_B^0(x)$.

Supongamos que es cierto que $c_A^\alpha(z) \cap B \subseteq c_B^\alpha(z)$ para todo $z \in B$. Sean $x, y \in B$. Primero veamos que para todo $z \in B$

$$c_B^\alpha(x) \ll c_B^\alpha(z) \ll c_B^\alpha(y) \text{ implica que } c_A^\alpha(x) \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y).$$

Sea $z \in B$ tal que $c_B^\alpha(x) \ll c_B^\alpha(z) \ll c_B^\alpha(y)$. Como B es un suborden de A y c_B^α es un homomorfismo, $x <_A z <_A y$. No puede pasar que $c_A^\alpha(x) = c_A^\alpha(z)$, pues si fuera cierto tendríamos que $c_A^\alpha(x) \cap B = c_A^\alpha(z) \cap B$ y, por la hipótesis de inducción, $c_A^\alpha(x) \cap B \subseteq c_B^\alpha(x) \cap c_B^\alpha(z) = \emptyset$. De una forma análoga se puede probar que $c_A^\alpha(y) \neq c_A^\alpha(z)$. Por lo tanto, $c_A^\alpha(x) \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y)$.

Esto significa que si $[c_A^\alpha(x), c_A^\alpha(y)] \cap c_A^\alpha[B]$ es finito, entonces $[c_B^\alpha(x), c_B^\alpha(y)]$ es finito. Es decir, si $y \in c_A^{\alpha+1}(x) \cap B$, entonces $y \in c_B^{\alpha+1}(x)$.

Para el caso en que λ es un ordinal límite supongamos que $c_A^\beta(x) \cap B \subseteq c_B^\beta(x)$ para todo $x \in B$ y todo $\beta < \lambda$. Se tiene que

$$\begin{aligned} c_A^\lambda(x) \cap B &= \Big(\bigcup_{\beta<\lambda} c_A^\beta(x)\Big) \cap B \\ &= \bigcup_{\beta<\lambda} (c_A^\beta(x) \cap B) \\ &\subseteq \bigcup_{\beta<\lambda} c_B^\beta(x) \\ &= c_B^\lambda(x). \end{aligned}$$

Sea $y \in B$. Para cualquier $x \in A$ consideramos el intervalo $I_x = [x, y]$. El rango de este intervalo es menor o igual que el rango de A, $r_F(I_x) \leq r_F(A)$, por el lema anterior. Pero además el intervalo es disperso, entonces si $\alpha_x = r_F(I_x)$, $c_{I_x}^{\alpha_x}(x) = c_{I_x}^{\alpha_x}(y) = I_x$. Con esto, obtenemos que $[x, y] = c_{I_x}^{\alpha_x}(x) \subseteq c_A^{\alpha_x}(x)$. Entonces, para cada $x \in A$ hay $\alpha \leq r_F(A)$ tal que $y \in c_A^\alpha(x)$. En particular, si $x \in B$, hay $\alpha \leq r_F(A)$ tal que $y \in c_B^\alpha(x)$.

En resumen, para cualesquiera $x, y \in B$, hay $\alpha \leq r_F(A)$ tal que $c_B^\alpha(x) = c_B^\alpha(y)$.

Sea $\beta \in \{\gamma \in \mathcal{O} : c_B^\gamma(x) \neq c_B^{\gamma+1}(x) \text{ para algún } x \in B\}$. Sea $x \in B$ tal que $c_B^\beta(x) \neq c_B^{\beta+1}(x)$, entonces hay $y \in c_B^{\beta+1}(x)$ tal que $c_B^\beta(x) \neq c_B^\beta(y)$. Pero por lo que acabamos de probar hay $\alpha \leq r_F(A)$ tal que $c_B^\alpha(x) = c_B^\alpha(y)$ y se tiene que $\beta < \alpha$. Por lo tanto, $\beta < r_F(A)$ para todo $\beta < r_F(B)$, pues $r_F(B) = \sup\{\gamma \in \mathcal{O} : c_B^\gamma(x) \neq c_B^{\gamma+1}(x) \text{ para algún } x \in B\}$. Por lo tanto, $r_F(B) \leq r_F(A)$ ∎

Suma de rangos

Si tomamos la suma de dos órdenes lineales y sus condensaciones finitas, parece bastante intuitivo que vale la pena condensar esta suma por lo menos hasta el máximo de los dos rangos. En el caso en que hay dos elementos (uno de cada orden) que podamos condensar en algún α menor que el máximo de los rangos, es decir, que pertenenzcan al mismo elemento de la partición c^α de la suma, el rango de la suma es el máximo de los rangos. El otro caso es en el que no se puede hacer esto, es decir, hay dos elementos que no se condensan hasta un ordinal mayor que el máximo de los rangos. Entonces la siguiente condensación después del máximo de los rangos alcanza el rango de la suma total.

En el siguiente lema acotamos el rango finito de una suma de dos órdenes lineales y más adelante acotamos de manera general el rango de una ω-suma de órdenes lineales.

Lema 5.1.9. *Sean A, B, C órdenes lineales tales que $A = B + C$ y sean $\beta = r_F(B)$, $\gamma = r_F(C)$ y $\alpha = \text{máx}\{\beta, \gamma\}$. Entonces*

$$\alpha \leq r_F(A) \leq \alpha + 1.$$

Demostración. Por el lema 5.1.6, como B y C son intervalos de A, se tiene que $r_F(B) \leq r_F(A)$ y $r_F(C) \leq r_F(A)$, entonces $\alpha \leq r_F(A)$.

Sabemos que $r_F(A) \leq \alpha + 1$ si y sólo si para cualesquiera $x, y \in A$, si $c^{\alpha+2}(x) = c^{\alpha+2}(y)$, entonces $c_A^{\alpha+1}(x) = c_A^{\alpha+1}(y)$.

Sean $x, y \in A$ tales que $c_A^{\alpha+2}(x) = c_A^{\alpha+2}(y)$ y $x < y$ (sin pérdida de la generalidad).

El primer caso es en el que $x, y \in B$. Como B es intervalo de A, tenemos que

$$c_B^{\alpha+2}(x) = c_A^{\alpha+2}(x) \cap B = c_A^{\alpha+2}(y) \cap B = c_B^{\alpha+2}(y).$$

Como $\beta \leq \alpha$, $c_B^{\alpha+1}(x) = c_B^{\alpha+1}(y)$ y de esto se sigue $c_A^{\alpha+1}(x) = c_A^{\alpha+1}(y)$, pues $x \in c_A^{\alpha+1}(y) \cap B$. De la misma manera para el caso en el que $x, y \in C$ se llega a que $c_A^\alpha(x) = c_A^\alpha(y)$.

El tercer caso es en el que $x \in B$ y $y \in C$. Supongamos que hay $z \in A$ tal que $c_A^\alpha(x) \ll c_A^\alpha(z) \ll c_A^\alpha(y)$. Entonces, también se cumple que $c_A^{\alpha+2}(x) = c_A^{\alpha+2}(z) = c_A^{\alpha+2}(y)$. Si $z \in B$, se tiene que $c_B^{\alpha+2}(x) = c_B^{\alpha+2}(z)$ $c_B^\alpha(x) = c_B^\alpha(z)$, pues $\beta \leq \alpha$. Llegamos a un absurdo, pues esto implica que $c_A^\alpha(x) = c_A^\alpha(z)$. Si $z \in C$, llegaríamos a la misma contradicción. Por lo tanto, no hay elementos de $c_A^\alpha[A]$ entre $c_A^\alpha(x)$ y $c_A^\alpha(y)$. Esto implica que $c_A^{\alpha+1}(x) = c_A^{\alpha+1}(y)$.

Concluimos que $r_F(A) \leq \alpha + 1$. ■

En el diagrama 5.2 se representan las dos posibilidades para la condensación de $B + C$, cuando B y C son dispersos. En la primera, hay una parte de B que se condensa con C y por eso el rango es α; en la segunda, B y C se condensan por separado y el rango de la suma resulta ser $\alpha + 1$.

Los ordinales $\omega^* + \omega$ y $\omega + \omega$ ejemplifican los dos casos posibles del rango de una suma de órdenes. Entre cualesquiera elementos de ω^* y ω (en ese orden) hay una cantidad finita de elementos de la suma, entonces cualesquiera dos elementos se condensa desde la primera condensación. Por tanto, $r_F(\omega^* + \omega) = 1$. Pero en el otro caso, en la primera condensación tenemos dos intervalos, $c[\omega + \omega] \simeq 2$. En la segunda, $c^2[\omega + \omega] \simeq 1$. Por tanto, $r_F(\omega + \omega) = 2$.

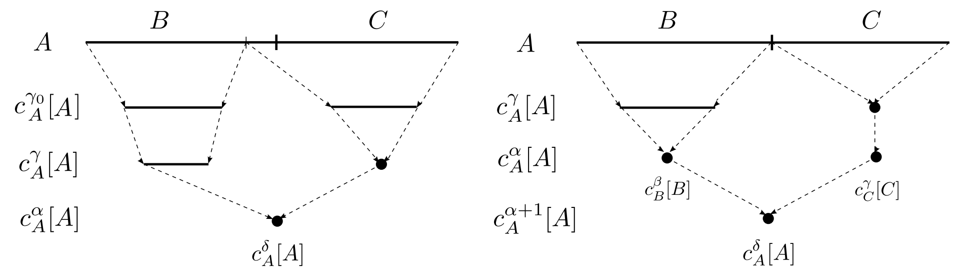

Figura 5.2: Casos de la condensación de la suma de órdenes dispersos, $B + C$.

Obervemos qué sucede si hacemos sumas finitas de ω. Se cumple que $r_F(\omega \cdot n) = 2$. Por inducción sobre n (recordando que la suma de órdenes lineales es asociativa) se prueba que esto funciona más generalmente para la suma finita de órdenes lineales.

Lema 5.1.10. *Supongamos que $A = A_1 + \cdots + A_n$, con $n < \omega$ y $r_F(A_i) = \alpha_i$ para todo $i \leq n$. Sea $\alpha = \text{máx}\{\alpha_i : i \leq n\}$, entonces*

$$\alpha \leq r_F(A) \leq \alpha + 1.$$

Demostración. El caso en que $n = 2$ lo probamos en el lema 5.1.9.

Supongamos que sí pasa para $n < \omega$ y que $A = A_1 + \cdots + A_n + A_{n+1}$. Sean $\alpha' = \text{máx}\{\alpha_i : i \leq n\}$ y $\alpha = \text{máx}\{\alpha_i : i \leq n+1\} = \text{máx}\{\alpha', \alpha_{n+1}\}$. Podemos escribir a $A = (A_1 + \cdots + A_n) + A_{n+1}$ y, del caso $n = 2$, $\alpha \leq r_F(A) \leq \alpha + 1$. ■

También para la suma infinita ω^2, se cumple que $r_F(\omega^2) = 2$, aunque $r_F(\omega^2 + \omega^2) = 3$.

Teorema 5.1.11. *Supongamos que $A = \sum_{i<\omega} A_i$, con $r_F(A_i) = \alpha_i$ para todo $i < \omega$.*

1. *Si $\{\alpha_i : i < \omega\}$ tiene máximo, digamos α_j, entonces $\alpha_j \leq r_F(A) \leq \alpha_j + 1$.*

2. *Si $\{\alpha_i : i < \omega\}$ no tiene máximo, entonces $r_F(A) = \sup\{\alpha_i : i < \omega\}$.*

Demostración. Como A_i es intervalo de A para toda $i < \omega$, entonces $\alpha_i \leq r_F(A)$. Por lo tanto, $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} \leq r_F(A)$.

Sea $\beta = \sup\{\alpha_i + 1 : i < \omega\}$. Veamos que $r_F(A) \leq \beta$. Si $\beta < r_F(A)$, entonces habría $x, y \in A$ tales que $c_A^\beta(x) \neq c_A^\beta(y)$ y $c_A^{\beta+1}(x) = c_A^{\beta+1}(y)$. Esto implica que $\beta < r_F([x, y])$. Tomemos $n, m < \omega$ tales que $x \in A_n$ y $y \in A_m$. Sin pérdida de la generalidad supongamos que $n \leq m$. Entonces, por el lema 5.1.7 y por el lema anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} r_F([x,y]) &\leq r_F(A_n + A_{n+1} + \cdots + A_m) \\ &\leq \text{máx}\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_m\} + 1 \\ &\leq \sup\{\alpha_i + 1 : i < \omega\} = \beta, \end{aligned}$$

y llegamos así a una contradicción. Concluimos que $r_F(A) \leq \beta$.

Para el caso en el que α_j es el máximo de $\{\alpha_i : i < \omega\}$, se tiene que $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} = \alpha_j$ y $\beta = \alpha_j + 1$. Por tanto, $\alpha_j \leq r_F(A) \leq \alpha_j + 1$.

Para el caso en el que $\{\alpha_i : i < \omega\}$ no tiene máximo veamos que $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} = \beta$. Es claro que β es cota superior de $\{\alpha_i : i < \omega\}$, entonces $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} \leq \beta$. Por otro lado, llamemos γ al supremo de $\{\alpha_i : i < \omega\}$ y veamos que γ es cota superior de $\{\alpha_i + 1 : i < \omega\}$. Sea $\alpha_j + 1$, con $j < \omega$. Como $\{\alpha_i : i < \omega\}$ no tiene máximo, hay $n < \omega$ tal que $\alpha_j < \alpha_n$ y entonces, $\alpha_j + 1 \leq \alpha_n$. Pero $\alpha_n < \gamma$, entonces $\alpha_j + 1 < \gamma$. Por lo tanto, $\sup\{\alpha_i + 1 : i < \omega\} \leq \gamma$ y obtenemos que $\sup\{\alpha_i : i < \omega\} = \beta$. De aquí se conlcuye que $r_F(A) = \sup\{\alpha_i : i < \omega\}$. ■

Corolario 5.1.12. *Si $A = \sum_{i<\omega} A_i$, con $r_F(A_i) < \alpha$ para todo $i < \omega$, entonces $r_F(A) \leq \alpha$.*

Si A es una ω^*-suma de órdenes o una ζ-suma de órdenes también se cumple el teorema 5.1.11. Es decir, si hay $A = \sum_{i \in J} A_i$, con $J \simeq \omega$ o $J \simeq \omega^*$ o $J \simeq \zeta$, entonces $\alpha \leq r_F(A) \leq \alpha + 1$, donde $\alpha_i = r_F(A_i)$ para todo $i \in J$ y $\alpha = \text{máx}\{\alpha_i : i \in J\}$. La misma prueba del teorema 5.1.11 se puede modificiar para probar esta afirmación, pues la demostración sólo depende de que todo intervalo acotado de J es finito.

Teorema 5.1.13. *Sean $A = \sum\{A_i : i \in J\}$, $r_F(A_i) = \alpha_i$ para todo $i \in J$. Supongamos que $J \simeq \omega$ o $J \simeq \omega^*$ o $J \simeq \zeta$.*

1. *Si $\{\alpha_i : i \in J\}$ tiene máximo, digamos α_j, entonces $\alpha_j \leq r_F(A) \leq \alpha_j + 1$.*
2. *Si $\{\alpha_i : i \in J\}$ no tiene máximo, entonces $r_F(A) = \sup\{\alpha_i : i \in J\}$.*

Demostración. Sean $x, y \in A$ y $n, m \in J$ tales que $x \in A_n$ y $y \in A_m$. Podemos aplicar el lema 5.1.10 pues, $[n,m]$ es finito, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} r_F([x,y]) &\leq r_F(\sum\{A_i : i \in [n,m]\}) \\ &\leq \text{máx}\{\alpha_i : i \in [n,m]\} + 1 \\ &\leq \sup\{\alpha_i + 1 : i \in J\}. \end{aligned}$$

El resto de la prueba se puede calcar de la prueba del teorema 5.1.11. ■

El siguiente corolario es el resultado análogo para ζ-sumas.

Corolario 5.1.14. *Si $A = \sum\{A_j : j \in J\}$, donde $J \simeq \omega$, $J \simeq \omega^*$ o $J \simeq \zeta$ y $r_F(A_j) < \alpha$ para todo $j \in J$, entonces $r_F(A) \leq \alpha$.*

Podemos mostrar casos de β-sumas, con $\beta > \omega$ en las que no se cumple que el rango finito es menor o igual que el máximo de los rangos de las partes de la suma; por ejemplo, $\omega \cdot (\omega + 1)$. Ésta es una $\omega+1$-suma de órdenes isomorfos a ω. Sabemos que $r_F(\omega) = 1 < 2$, pero $r_F(\omega \cdot (\omega + 1)) \nleq 1$, pues $\omega^2 + \omega = \omega \cdot (\omega + 1)$ y, por el lema 5.1.9, $r_F(\omega^2 + \omega) = 3$.

5.2. Caracterización de órdenes dispersos

Le hemos puesto mucha atención a los buenos órdenes en capítulos anteriores. En este momento ya podemos dar un resultado importante sobre los órdenes dispersos.

En el capítulo 3, definimos las potencias de los ordinales. Ahora vamos a definir potencias de un orden lineal cualquiera. Y finalmente vamos a dar un resultado respecto de las potencias de órdenes con tipo de orden ζ y su rango. Nos interesan estas potencias en particular como un ejemplo del rango finito de los órdenes dispersos.

Potencias de órdenes

Definición 5.2.1. Sean A un orden lineal. Se definen por recursión para ordinales los tipos de orden denotados por A^β. Sea $a \in A$.

1. $A^0 \simeq \{a\}$.

2. Sea β un ordinal y supongamos que está definido el orden lineal A^β, con orden $<_\beta$. Se define el orden

$$A^{\beta+1} \simeq A^\beta \cdot A.$$

   Ya está definido $<_{\beta+1}$ como el orden de la suma. En la construcción del producto $A^\beta \cdot A$ identificamos la copia correspondiente a a con A^β. De esta forma $A^\beta \subseteq A^{\beta+1}$.

3. Sea λ un ordinal límite. Supongamos que están definidos los órdenes A^β para todo $\beta < \lambda$, con órdenes $<_\beta$ respectivamente. Se define

$$A^\lambda \simeq \bigcup_{\beta<\lambda} A^\beta.$$

   Sean $x, y \in A^\lambda$. Definimos el orden $<_\lambda$ como sigue

$$x <_\lambda y \text{ si y sólo si hay } \beta < \lambda \text{ tal que } x, y \in A^\beta \text{ y } x <_\beta y.$$

Decimos que A^β es la *β-ésima potencia de A*. Notemos que $A^0 = 1$ y A^1 es el tipo de orden de A.

Para justificar la definición de las potencias de A, observemos que sí podemos construir órdenes lineales a los cuales corresponden estos tipos de orden; es decir, para cada $\beta < \lambda$ hay órdenes $\mathcal{A}^\beta$ tales que $A^\beta \simeq \mathcal{A}^\beta$ y $\mathcal{A}^\alpha$ es un intervalo de $\mathcal{A}^\beta$ si $\alpha < \beta$. Estos también se construyen por recursión. Sea A un orden lineal y $a \in A$.

Supongamos que está definido el orden $\langle \mathcal{A}^\beta, <_\beta \rangle$ para algún ordinal β. Consideramos para cada $x \in A$ los órdenes lineales $\mathcal{A}^\beta_x = \mathcal{A}^\beta \times \{x\}$, si $x \neq a$, y $\mathcal{A}^\beta_a = \mathcal{A}^\beta$. Se define $\mathcal{A}^{\beta+1}$ como sigue:

$$\mathcal{A}^{\beta+1} = \sum \{\mathcal{A}^\beta_x : x \in A\}.$$

Es en este sentido en el que identificamos la copia correspondiente a a con $\mathcal{A}^\beta$. Y no solamente se cumple que $\mathcal{A}^\beta \subseteq \mathcal{A}^{\beta+1}$, sino que $\mathcal{A}^\beta$ es un intervalo de $\mathcal{A}^{\beta+1}$, así que también tenemos que A^β es un intervalo de $A^{\beta+1}$.

Sea λ un ordinal límite. Supongamos que están definidos los órdenes $\langle \mathcal{A}^\beta, <_\beta \rangle$ para todo $\beta < \lambda$. Se define

$$\mathcal{A}^\lambda = \langle \bigcup_{\beta<\lambda} \mathcal{A}^\beta, <_\lambda \rangle.$$

Generalizando la observación de la construcción en el paso sucesor, por inducción se puede mostrar que para cualquier $\beta < \lambda$ y cualquier $\alpha < \beta$, se cumple que $\mathcal{A}^\alpha$ es un intervalo de $\mathcal{A}^\beta$. Gracias a esto podemos definir el orden $<_\lambda$, pues si $x, y \in \mathcal{A}^\lambda$ hay $\beta < \lambda$ tal que $x, y \in \mathcal{A}^\beta$. Entonces $x <_\lambda y$ si y sólo si $x <_\beta y$. También se ve que A^β es un intervalo de A^λ, para todo $\beta < \lambda$.

El siguiente lema lo habíamos mencionado como afirmación en el primer capítulo, pero hasta ahora nos es necesario para probar que una potencia de un orden disperso es disperso.

Lema 5.2.2. *Sea $\langle I, R \rangle$ un orden lineal disperso y para cada $i \in I$, sean $\langle X_i, R_i \rangle$ órdenes dispersos. Entonces, $\sum\{X_i : i \in I\}$ es disperso.*

Demostración. Sea D un suborden denso de $\sum\{X_i : i \in I\}$. Consideremos los conjuntos $D_i = D \cap X_i$. Como X_i es un intervalo de la suma, D_i es un intervalo de D, para cualquier $i \in I$, y por tanto, es un conjunto denso.

Si D_i fuera infinito, entonces D_i sería un suborden denso infinito de X_i, contradiciendo la hipótesis de que éste es disperso. Entonces, para todo $i \in I$, D_i tiene a lo más un elemento. Sea $I' = \{i \in I : D_i \simeq 1\}$. Se tiene que $D \simeq_f I'$, donde para cada $x \in D$ la función f se define por $f(x) = i$ si y sólo si $x \in D_i$, y f preserva orden. Como I' es un suborden de I, $f[D]$ es un suborden denso de I. Entonces, $D \simeq f[D] \simeq 1$. Probamos así que ningún suborden denso de $\sum\{X_i : i \in I\}$ es infinito. ■

Corolario 5.2.3. *El producto de tipos de orden dispersos es disperso.*

Demostración. Es inmediato de que si dos órdenes A y B son tales que $A \simeq B$ y A es disperso, entonces B es disperso. ■

Lema 5.2.4. *Si A es un orden lineal disperso, entonces A^β es disperso para todo ordinal β.*

Demostración. Sea A un orden disperso. Veamos por inducción sobre β que A^β es disperso. Claramente A^0 es disperso, por ser finito. Si suponemos que A^β es disperso, como $A^{\beta+1} = A^\beta \cdot A$, entonces, por el lema 5.2.2, $A^{\beta+1}$ es disperso.

Supongamos que λ es un ordinal límite y que A^β es disperso para todo $\beta < \lambda$. Sea D un suborden denso de A^λ. Consideremos para cada $\beta < \lambda$ los conjuntos $D_\beta = D \cap A^\beta$.

Sean $x, y \in D_\beta$ y $z \in D$ tales que $x <_\lambda z <_\lambda y$. Como A^β es intervalo de A^λ y $x, y \in A^\beta$, se tiene que $z \in A^\beta$. Entonces, $z \in D \cap A^\beta = D_\beta$, mostrando así que D_β es un intervalo de D y que D_β es un suborden denso de A^β. Esto significa que los conjuntos D_β tienen a lo más un elemento, pues A^β es disperso. Si tomamos $x, y \in D$, entonces hay $\alpha, \beta < \lambda$ tales que $x \in D_\alpha$ y $y \in D_\beta$. De lo anterior, deducimos que si $\alpha = \beta$, entonces $x = y$, pues $D_\alpha \simeq 1$; si $\alpha < \beta$, entonces, como $D_\alpha \subseteq D_\beta$, se tiene que $x, y \in D_\beta$ y de nuevo $x = y$, porque $D_\beta \simeq 1$; y si $\beta < \alpha$, se justifica de igual manera que en el caso anterior que $x = y$. Mostramos con esto que $D \simeq 1$. Es decir, todo suborden denso de A^λ es finito y, por tanto, A^λ es disperso. ■

Potencias de $\mathbb{Z}$

El diagrama 5.3 ilustra la construcción de las potencias de $\mathbb{Z}$. Aquí se puede ver un poco más claramente cómo una potencia está contenida en la anterior, donde la copia que corresponde al 0 es el orden anterior, marcando desde el 0 un eje que da el orden de las contenciones.

El tipo de orden ζ está compuesto por el tipo de orden ω^* y ω, de los cuáles ya sabemos algunos hechos respecto de su rango finito. Nos gustaría que al igual que las potencias de omega, las potencias de los enteros cumplan que $r_F(\zeta^\beta) = \beta$.

Necesitaremos algunos lemas que probaremos a continuación respecto del comportamiento de las potencias de $\mathbb{Z}$.

Lema 5.2.5. *Sea γ un ordinal. Si $\beta < \gamma$, entonces para todo $x \in \mathbb{Z}^\gamma$ hay un intervalo A de $\mathbb{Z}^\gamma$ tal que $x \in A$ y $A \simeq \mathbb{Z}^\beta$.*

Demostración. La hacemos por inducción sobre γ. Si $\gamma = 0$ no hay nada que probar.

Supongamos que sucede para γ. Sea $\beta < \gamma + 1$ y $\mathbb{Z}^{\gamma+1} = \sum\{A_i : i \in \mathbb{Z}\}$ con $A_i \simeq \mathbb{Z}^\gamma$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Sea $x \in \mathbb{Z}^{\gamma+1}$ y sea $i \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in A_i$. Si $\beta = \gamma$, ya terminamos, pues A_i es intervalo de $\mathbb{Z}^{\gamma+1}$ y $A_i \simeq \mathbb{Z}^\gamma$. Si $\beta < \gamma$, como $A_i \simeq \mathbb{Z}^\gamma$, por la hipótesis inductiva hay un intervalo B de A_i tal que $x \in B$ y $B \simeq \mathbb{Z}^\beta$. Pero como A_i es intervalo de $\mathbb{Z}^{\gamma+1}$, también B lo es.

Sea λ un ordinal límite y supongamos que se cumple para todo $\gamma < \lambda$. Sea $x \in \mathbb{Z}^\lambda$ y sea $\gamma < \lambda$ tal que $x \in \mathbb{Z}^\gamma$. Por la hipótesis de inducción, para todo

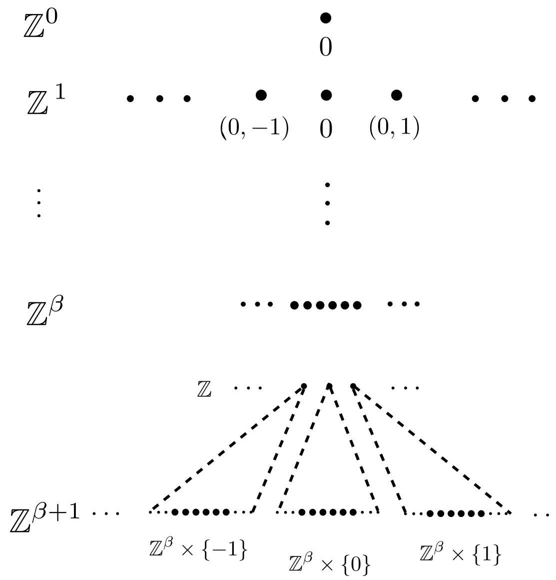

Figura 5.3: Potencias de $\mathbb{Z}$.

$\beta < \gamma$ se cumple que hay un intervalo A de $\mathbb{Z}^\gamma$ tal que $x \in A$ y $A \simeq \mathbb{Z}^\gamma$ y, como $\mathbb{Z}^\gamma$ es intervalo de $\mathbb{Z}^\lambda$, entonces, también A lo es. Ahora, si $\gamma \leq \beta < \lambda$, entonces, como $\mathbb{Z}^\gamma \subseteq \mathbb{Z}^\beta$ y éste último es a su vez intervalo de $\mathbb{Z}^\lambda$, ya terminamos, pues $x \in \mathbb{Z}^\beta$. ■

Lema 5.2.6. *Sea β un ordinal. Si A es un intervalo propio de $\mathbb{Z}^\beta$, entonces $A \not\simeq \mathbb{Z}^\beta$.*

Demostración. La prueba se hace por inducción para ordinales. Si $\beta = 0$, entonces cualquier intervalo propio A de $\mathbb{Z}^0$ es vacío, por tanto, $A \not\simeq 1$.

Supongamos que se cumple para β. Observemos primero que por la hipótesis inductiva $\mathbb{Z}^\beta$ no tiene intervalos isomorfos a $\mathbb{Z}^\beta \cdot \omega$ ni a $\mathbb{Z}^\beta \cdot \omega^*$, pues ambos tienen un intervalo propio isomorfo a $\mathbb{Z}^\beta$.

Sea A un intervalo propio de $\mathbb{Z}^{\beta+1}$ y supongamos que es isomorfo a $\mathbb{Z}^{\beta+1}$. Digamos que $A = \sum\{A_i : i \in \mathbb{Z}\}$, donde $A_i \simeq \mathbb{Z}^\beta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Escribamos a $\mathbb{Z}^{\beta+1}$ como $\sum\{B_i : i \in \mathbb{Z}\}$, donde $B_i \simeq \mathbb{Z}^\beta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como A es un intervalo propio, existe i, el mínimo $i \in \mathbb{Z}$ para el cual $A \cap B_i \neq \emptyset$, o existe j, el máximo $j \in \mathbb{Z}$ para el cual $A \cap B_j \neq \emptyset$.

Supongamos que $i \in \mathbb{Z}$ es el mínimo para el cual $A \cap B_i \neq \emptyset$. Sea $x \in A \cap B_i$. Sabemos que hay $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in A_k$, entonces

$$\sum\{A_n : n \in \mathbb{Z}, n < k\} \simeq \mathbb{Z}^\beta \cdot \omega^*$$

y además esta suma es un intervalo propio de B_i, contradiciendo la hipótesis de inducción, pues $B_i \simeq \mathbb{Z}^\beta$. Supongamos que $j \in \mathbb{Z}$ es el máximo para el cual $A \cap B_j \neq \emptyset$. Sea $x \in A \cap B_j$. Sabemos que hay $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in A_k$, entonces

$$\sum\{A_n : n \in \mathbb{Z}, n > k\} \simeq \mathbb{Z}^\beta \cdot \omega$$

y es un intervalo propio de B_j, contradiciendo la hipótesis de inducción, pues $B_j \simeq \mathbb{Z}$.

Sea λ un ordinal límite y supongamos que se cumple para todo $\beta < \lambda$. Sea A un intervalo propio de $\mathbb{Z}^\lambda$ tal que $A \simeq \mathbb{Z}^\lambda$. Si hay $\beta < \lambda$, tal que $A \subseteq \mathbb{Z}^\beta$, entonces inmediatamente llegamos a una contradicción, pues A tiene un intervalo propio isomorfo a $\mathbb{Z}^\beta$.

Sea $\beta = \sup\{\gamma : \mathbb{Z}^\gamma \subseteq A\}$. Como A es un intervalo propio, tenemos que $\beta < \lambda$. Entonces, $\beta + 1 < \lambda$ y $\mathbb{Z}^{\beta+1} \setminus A \neq \emptyset$. De esta manera $A \cap \mathbb{Z}^{\beta+1}$ es un intervalo propio de $\mathbb{Z}^{\beta+1}$. Y, por esto mismo, si escribimos a $\mathbb{Z}^{\beta+1}$ como $\sum\{B_i : i \in \mathbb{Z}\}$, existe i, el mínimo $i \in \mathbb{Z}$ para el cual $A \cap B_i \neq \emptyset$, o existe j, el máximo $j \in \mathbb{Z}$ para el cual $A \cap B_j \neq \emptyset$.

Sea $f : A \to \mathbb{Z}^\lambda$ un isomorfismo. Si existe i, el mínimo $i \in \mathbb{Z}$ para el cual $A \cap B_i \neq \emptyset$, entonces, dado $k < i$, $f^{-1}[B_k]$ es un intervalo propio de B_i, isomorfo a $\mathbb{Z}^\beta$, contradiciendo la hipótesis inductiva. Si existe j, el máximo $j \in \mathbb{Z}$ para el cual $A \cap B_j \neq \emptyset$, entonces, dado $k > j$, $f^{-1}[B_k]$ es un intervalo propio de B_j, isomorfo a $\mathbb{Z}^\beta$, contradiciendo la hipótesis inductiva. ■

Teorema 5.2.7. *Sea γ un ordinal. Para todo ordinal $\beta \leq \gamma$ y todo $x \in \mathbb{Z}^\gamma$ se cumple que $c^\beta(x) \simeq \mathbb{Z}^\beta$.*

Demostración. Se prueba por inducción sobre β, con $\beta \leq \gamma$.

Si $\beta = 0$ y $x \in \mathbb{Z}^0$, entonces $c^0(x) = \{x\} = \mathbb{Z}^0$.

Supongamos que para todo $a \in \mathbb{Z}^\gamma$ y todo $\beta < \gamma$, se cumple que $c^\beta(a) \simeq \mathbb{Z}^\beta$. Sea $x \in \mathbb{Z}^\gamma$ y consideremos el conjunto $B = \{c^\beta(a) : a \in c^{\beta+1}(x)\}$. Se tiene que

$$c^{\beta+1}(x) = \sum\{c^\beta(a) : c^\beta(a) \in B\} \simeq \mathbb{Z}^\beta \cdot B.$$

Veamos que $B \simeq \mathbb{Z}$. Para esto, usaremos la caracterización 2.2.3 del capítulo 2. Por la construcción de B, para cualesquiera $c^\beta(y), c^\beta(z) \in B$, se tiene que $[c^\beta(y), c^\beta(z)]$ es finito. Debemos probar además que B no tiene extremos.

Sea $c^\beta(a) \in B$. Como $a \in \mathbb{Z}^\gamma$, hay un intervalo A de $\mathbb{Z}^\gamma$ tal que $A \simeq \mathbb{Z}^{\beta+1}$ y $a \in A$. Escribimos a A como $\sum\{A_i : i \in \mathbb{Z}\}$ con $A_i \simeq \mathbb{Z}^\beta$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Entonces, hay $i \in \mathbb{Z}$ tal que $a \in A_i$ y sea $y \in A_{s(s(i))}$. Supongamos que $c^\beta(a) = c^\beta(y)$. Entonces, $A_{s(i)}$ es un intervalo propio de $c^\beta(a)$. Esto es un absurdo, pues, por la hipótesis de inducción, $c^\beta(a) \simeq \mathbb{Z}^\beta$ y, por el lema 5.2.6, esto implica que $A_{s(i)} \not\simeq \mathbb{Z}^\beta$. Por tanto, $c^\beta(a) \ll c^\beta(y)$.

Falta mostrar que $c^\beta(y) \in B$. Sea $c^\beta(z) \in (c^\beta(a), c^\beta(y))$. No puede suceder que $c^\beta(z) \subseteq A_i$, ni que $c^\beta(z) \subseteq A_{s(s(i))}$, porque tendríamos que $c^\beta(z)$ sería un intervalo propio de A_i o de $A_{s(s(i))}$, contradiciendo así el lema 5.2.6. Entonces, tenemos que $c^\beta(z) \cap A_{s(i)} \neq \emptyset$.

Observemos que a lo más hay un $c^\beta(w)$ tal que $c^\beta(a) \ll c^\beta(w) \ll c^\beta(z)$. Para cualquier $c^\beta(w)$ que cumpla que $c^\beta(a) \ll c^\beta(w) \ll c^\beta(z)$, se tiene que

$c^\beta(w) \cap A_i \neq \emptyset$ y $c^\beta(w) \cap A_{s(i)} \neq \emptyset$. Entonces, para cualquier otro $c^\beta(w')$ tal que $c^\beta(a) \ll c^\beta(w') \ll c^\beta(z)$, tendríamos que $c^\beta(w') \subsetneq A_i$ o $c^\beta(w') \subsetneq A_{s(i)}$, contradiciendo lo anterior. De una manera similar se puede probar que a lo más hay un $c^\beta(w)$ tal que $c^\beta(z) \ll c^\beta(w) \ll c^\beta(y)$.

De aquí se sigue que $[c^\beta(a), c^\beta(y)]$ es finito y, por tanto, $c^\beta(y) \in B$. Como para todo $c^\beta(a) \in B$ hay $c^\beta(y) \in B$ tal que $c^\beta(a) \ll c^\beta(y)$, entonces B no tiene máximo. De una manera similar se prueba que B no tiene mínimo.

Por lo tanto, $c^{\beta+1}(x) \simeq \mathbb{Z}^\beta \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{\beta+1}$.

Sea $\lambda < \gamma$ un ordinal límite y supongamos que para todo $\beta < \lambda$ y todo $a \in \mathbb{Z}^\gamma$ se cumple que $c^\beta(a) \simeq \mathbb{Z}^\beta$.

Sea $x \in \mathbb{Z}^\gamma$, entonces

$$c^\lambda(x) = \bigcup_{\beta<\lambda} c^\beta(x) \simeq \bigcup_{\beta<\lambda} \mathbb{Z}^\beta = \mathbb{Z}^\lambda.$$

■

Corolario 5.2.8. *Para cualquier ordinal γ, $r_F(\mathbb{Z}^\gamma) = \gamma$.*

Demostración. Sea γ un ordinal. Por el teorema 5.2.7, $c^\gamma(x) = \mathbb{Z}^\gamma$ para todo $x \in \mathbb{Z}^\gamma$, entonces $c^\gamma[\mathbb{Z}^\gamma] \simeq 1$. Por esto, se tiene que $r_F(\mathbb{Z}^\gamma) \leq \gamma$. Además por el teorema 5.2.7, si $\beta < \gamma$, se tiene que para todo $x \in \mathbb{Z}^\gamma$, $c^\beta(x) \simeq \mathbb{Z}^\beta \subsetneq \mathbb{Z}^\gamma$. Entonces, $\beta < r_F(\mathbb{Z}^\gamma)$ para todo $\beta < \gamma$. Por lo tanto, $r_F(\mathbb{Z}^\gamma) = \gamma$. ■

Ya sabiendo cómo calcular el rango de las potencias de $\mathbb{Z}$, daremos el último teorema con el cual obtenemos una manera de caracterizar a los órdenes dispersos.

Teorema 5.2.9. *Sea γ un ordinal. Entonces, $A \preceq \mathbb{Z}^\gamma$ si y sólo si A es disperso y $r_F(A) \leq \gamma$.*

Demostración. Supongamos que $A \preceq \mathbb{Z}^\gamma$. Como $\mathbb{Z}^\gamma$ es disperso por el lema 5.2.4 y todo suborden de un orden disperso es disperso, A es disperso. Además, como consecuencia del corolario 5.2.8 y del teorema 5.1.8, se tiene que $r_F(A) \leq r_F(\mathbb{Z}^\gamma) = \gamma$.

Para demostrar la implicación inversa sea A un orden disperso y γ un ordinal tales que $r_F(A) \leq \gamma$. Afirmamos que para todo β y para todo $a \in A$ se cumple que $c^\beta(a) \preceq \mathbb{Z}^\beta$. Probemos esta afirmación por inducción sobre β. Si $\beta = 0$, entonces $c^0(a) = \{a\} \simeq 1 = \mathbb{Z}^0$.

Supongamos que $c^\beta(x) \preceq \mathbb{Z}^\beta$ para todo $x \in A$. Sea $a \in A$ y construyamos un conjunto B que tenga un elemento de cada intervalo $c^\beta(x)$ con $x \in c^{\beta+1}(a)$ de forma que en B haya uno sólo representante de cada una de estas condensaciones β-ésimas.

Por la definición de la $\beta + 1$-ésima condensación,

$$c^{\beta+1}(a) = \sum\{c^\beta(x) : x \in B\}.$$

También se ve que $B \preceq \mathbb{Z}$, pues todos los intervalos acotados de B son finitos. Por la hipótesis inductiva, se tiene que $c^\beta(x) \preceq \mathbb{Z}^\beta \times \{x\}$. Por lo tanto,

$$\sum\{c^\beta(x) : x \in B\} \preceq \sum\{\mathbb{Z}^\beta \times \{x\} : x \in B\} \preceq \sum\{\mathbb{Z}^\beta \times \{i\} : i \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^{\beta+1}.$$

Concluimos que $c^{\beta+1}(a) \preceq \mathbb{Z}^{\beta+1}$.

Sea λ un ordinal límite. Supongamos que para todo $\beta < \lambda$ y todo $x \in A$, $c^\beta(x) \preceq \mathbb{Z}^\beta$. Entonces,

$$c^\lambda(a) = \bigcup_{\beta<\lambda} c^\beta(a) \preceq \bigcup_{\beta<\lambda} \mathbb{Z}^\beta = \mathbb{Z}^\lambda.$$

Como $r_F(A) \leq \gamma$ y A es disperso, se tiene que $c^\beta[A] \simeq 1$ para algún $\beta \leq \gamma$. Es decir, hay $\beta \leq \gamma$ tal que para todo $a \in A$, $c^\beta(a) = A$. Por la afirmación que acabamos de probar se tiene que $A \preceq \mathbb{Z}^\beta \preceq \mathbb{Z}^\gamma$. ■

La densidad de un orden se puede estudiar calculando su rango finito. Los órdenes densos alcanzan su rango inmediatamente, en 0, y, para los órdenes que no son densos pero tampoco son dispersos, se calcula el rango para saber cómo son sus subórdenes densos. Este es un tema muy amplio, así que en este estudio nos restringimos a pensar en órdenes dispersos. Desde este punto se podría retomar el estudio de los rangos para estudiar a los órdenes no dispersos por medio del cálculo de su rango (véase [Ros82]), para así dar una clasificación de los órdenes respecto a que tan densos son.

Apéndice A

Conjuntos

A lo largo de la tesis, al hablar de órdenes lineales tratamos casi siempre con conjuntos, y la relación que define un orden es un conjunto de parejas ordenadas. Aunque estemos trabajando en el universo de los conjuntos, se puede hablar y trabajar con colecciones de conjuntos que no son conjuntos en sí (son mucho más grandes), como el universo mismo o la clase de los ordinales. Llamamos clases a las colecciones de conjuntos. En general, las clases son colecciones definidas por los conjuntos que cumplen con una fórmula dada ϕ. Decimos que una clase es *propia* si no es un conjunto y decimos que una clase es *impropia* si sí es un conjunto. Aunque no podamos tratar a las clases propias de la misma manera que a los conjuntos, hay ciertas formas de manejarlas que sí son similares y que nos permiten incluir discusiones respecto a las clase propias en nuestro discurso.

Para formalizar a la Teoría de conjuntos se empieza dando los axiomas de ésta. Con estos axiomas se regula la construcción y la manipulación de conjuntos. Algunos nos garantizan la existencia de conjuntos particulares y otros nos garantizan formas de construir conjuntos, estos últimos los usamos para mostrar que las clases que hemos construido son conjuntos. Por ejemplo, suponer que el universo de los conjuntos o la clase de los ordinales es una clase impropia, nos llevaría a una contradicción. A lo largo de la tesis no nos preocupamos por mostrar que las clases con las que estamos trabajando sí son en verdad conjuntos, pero sí hicimos la distinción entre clase propia y conjunto cuando era necesario.

Los axiomas clásicos de la Teoría de conjuntos son los que correspondenen a la axiomática de Zermelo-Fraenkel que escribimos tanto en español como en el lenguaje formal de esta teoría.

Axioma de Extensionalidad. Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

$$\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y].$$

Axioma de Vacío. Hay un conjunto sin elementos.

$$\exists x \forall y (y \notin x).$$

Axioma del Par. Dados dos conjuntos, hay otro cuyos únicos elementos son estos dos.

$$\forall x \forall y \exists z \forall w [w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y)].$$

Axioma de la Unión. Dado un conjunto, hay otro conjunto que tiene como elementos a los elementos de los elementos del conjunto dado.

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w)].$$

Axioma de Potencia. Dado un conjunto, hay otro conjunto cuyos elementos son los subconjuntos del conjunto dado.

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \rightarrow w \in x)].$$

Axiomas de Separación (o Comprensión). Dados un conjunto y una propiedad ϕ, hay un conjunto cuyos elementos son todos los elementos del conjunto dado que cumplen la propiedad.

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \phi(z))];$$

donde ϕ es una fórmula del lenguaje formal de la Teoría de Conjuntos.

Axiomas de Reemplazo. Si una fórmula $\phi(x, u)$ se comporta como función, entonces la imagen de un conjunto bajo ϕ es un conjunto.

Si

$$\forall x \forall u \forall v [\phi(x, u) \wedge \phi(x, v) \rightarrow u = v],$$

entonces

$$\forall y \exists w \forall z [z \in w \leftrightarrow \exists x (x \in y \wedge \phi(x, z))].$$

Axioma de Regularidad.

$$\forall x [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)].$$

Además de estos axiomas básicos hay otros que no pertenecen a la teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF). Entre ellos está el Axioma de Elección[1]. En esta tesis, sí lo vamos a considerar (y a cualquiera de sus equivalencias) como axioma, ya que hay varios resultados que utilizamos que dependen de éste.

[1] Actualmente, por su naturaleza, lleva a la discordia y no se considera dentro de ZF, pero en los comienzos de la teoría de Zermelo sí era parte de esta.

Axioma de Elección. Para todo conjunto de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, existe un conjunto de elección.

$$\begin{aligned}&\forall x[(\forall y(y \in x \to y \neq \emptyset)\wedge\\ &\quad\forall y\forall z((y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \to \forall u(u \in y \to u \notin z)))\\ &\to\exists y\forall z(z \in x \to \exists u(u \in y \wedge u \in z \wedge \forall w(u \in w \wedge u \in z \to w = z)))]\end{aligned}$$

La teoría en la que trabajamos es llamada ZFE, es ZF más el Axioma de Elección.

A.1. Ordinales

En la parte principal de la tesis definimos a los ordinales de una manera poco usual, pero aquí lo hacemos de la manera común y demostramos la equivalencia de estas definiciones. Esto lo hacemos demostrando el Teorema de Enumeración, el cual afirma que un buen orden es isomorfo a un único ordinal y, así, el tipo de un buen orden puede ser elegido como el único ordinal isomorfo a él.

Ordinales

Definición A.1.1. Un conjunto α es un *ordinal* si y sólo si

1. α es un conjunto transitivo (Definición 1.2.3); y
2. $\langle \alpha, \in \rangle$ es un buen orden.

Denotamos con OR a la clase de estos ordinales, $OR = \{\alpha : \alpha \text{ es un ordinal}\}$. La clase de los ordinales es una clase propia pero con la pertenencia se comporta como un orden lineal con la pertenencia. Entonces, decimos que para α y β ordinales, $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$.

Con los siguientes lemas, se prueba por partes que $<$ se comporta como un orden lineal sobre la clase de los ordinales. Los incisos 1 y 2 del lema A.1.2 muestran que la clase de los ordinales es un orden parcial con $<$ y el lema A.1.4 muestra que $<$ se comporta como una relación tricotómica.

Lema A.1.2. *Sean α, β y γ ordinales. Se cumple que*

1. $\alpha \notin \alpha$;
2. *si* $\alpha \in \beta$ *y* $\beta \in \gamma$, *entonces* $\alpha \in \gamma$; *y*
3. *si* $\alpha \in \beta$, *entonces* $\beta \notin \alpha$.

Demostración.

1. El hecho de que $\alpha \in \alpha$ se contradiría con que la pertenencia es antirreflexiva en α.

2. Se muestra directo del hecho de que γ es un conjunto transitivo.

3. Si suponemos que $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$, usando el segundo inciso de este mismo lema, llegamos a una contradicción con el primer inciso.

■

Lema A.1.3. *Sea α un ordinal. Se cumplen las siguientes afirmaciones.*

1. *Si $x \in \alpha$, entonces x es un ordinal.*

2. $\alpha = \{\beta : \beta$ *es un ordinal y* $\beta < \alpha\}$.

3. *Si $x \subseteq \alpha$ y x es un conjunto transitivo, entonces x es un ordinal.*

Demostración.

1. Sea $x \in \alpha$. Como α es un conjunto transitivo, $x \subseteq \alpha$. Como $\langle \alpha, \in \rangle$ es un buen orden, cualquier subconjunto de α es un buen orden, por lo que $\langle x, \in \rangle$ es un buen orden. Sean $z \in x$ y $y \in z$. Como $x \in \alpha$ y α es transitivo, $z \in \alpha$ y también $y \in \alpha$. Como $\in$ es transitiva en α, entonces $y \in x$, mostrando así que x es un conjunto transitivo.

2. Es inmediato del inciso anterior y de que $\beta \in \alpha$ si y sólo si $\beta < \alpha$.

3. Sea $x \subseteq \alpha$. Como $\langle \alpha, \in \rangle$ es un buen orden, $\langle x, \in \rangle$ es un buen orden. Si además x es transitivo, cumple la definición de ordinal.

■

Lema A.1.4. *Sean α y β ordinales. Se cumple que*

1. $\beta \subsetneq \alpha$ *si y sólo si* $\beta \in \alpha$*;*

2. $\alpha \subseteq \beta$ *o* $\beta \subseteq \alpha$*; y*

3. *se tiene que $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ o $\beta = \alpha$, pero no al mismo tiempo.*

Demostración.

1. Si $\beta \subsetneq \alpha$, entonces $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$. Como α es un buen orden, existe el mínimo de $\alpha \setminus \beta$, digamos x_0. Veamos que $x_0 = \beta$. Para todo $y \in x_0$, $y \notin \alpha \setminus \beta$, pues x_0 es el mínimo; entonces, $y \in \beta$ y, por tanto, $x_0 \subseteq \beta$. Para todo $y \in \beta$, se tiene que $x_0 \in y$, $y = x_0$ o $y \in x_0$, pues la pertenencia es tricotómica en α pero, como $x_0 \notin \beta$, los primeros dos casos no pueden ser porque de cualquiera se sigue que $x_0 \in \beta$; entonces, se tiene que $y \in x_0$ y $\beta \subseteq x_0$. Ya teniendo que $\beta = x_0$, es inmediato que $\beta \in \alpha$.

   Si $\beta \in \alpha$, para todo $\gamma \in \beta$, por la transitividad de la pertenencia, $\gamma \in \alpha$. Entonces, $\beta \subsetneq \alpha$, pues no puede ser que $\beta \in \alpha$ y $\beta = \alpha$.

2. Supongamos que $\alpha \not\subseteq \beta$ y $\beta \not\subseteq \alpha$. Se tiene que $\alpha \cap \beta$ es un ordinal, pues es un subconjuto de un buen orden y, por tanto, un buen orden, y la intersección de conjuntos transitivos es transitivo. Sabemos que $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$ y $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$. Por la hipótesis, $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$ y de esto de se sigue que $\alpha \cap \beta \subsetneq \beta$ y $\alpha \cap \beta \subsetneq \alpha$. Por el inciso anterior de este mismo lema, $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$, llegando a un absurdo. Por lo tanto, $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$.

3. Por el inciso 2, $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$. Supongamos que $\alpha \neq \beta$. Entonces, $\alpha \subsetneq \beta$ o $\beta \subsetneq \alpha$ y, por el inciso 1, esto implica que $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$. No pueden suceder simultáneamente por la transitividad de la pertenencia, pues se tendría que $\alpha \in \alpha$.

■

Ya sabiendo que los ordinales están ordenados linealmente, a grandes rasgos podemos separar a los ordinales en dos subclases, la de los ordinales que son el sucesor inmediato de otro ordinal y los que no.

Es importante notar para la siguiente definición que para cualquier ordinal α, $\alpha \cup \{\alpha\}$ es también un ordinal. Además, $\alpha \cup \{\alpha\}$ es el sucesor inmediato de α y lo denotamos con $\alpha + 1$ o α^+.

Definición A.1.5. Sea α un ordinal. Decimos que α es un *ordinal sucesor* si y sólo si hay un ordinal β tal que $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Decimos que α es un *ordinal límite* si y sólo si $\alpha \neq \emptyset$ y α no es un ordinal sucesor.

Lema A.1.6. *Sea α un ordinal. Entonces,*

1. $\alpha = \bigcup(\alpha \cup \{\alpha\})$*; y*

2. si α es un ordinal límite, $\alpha = \bigcup \alpha$.

Demostración.

1. Claramente $\alpha \subseteq \bigcup(\alpha \cup \{\alpha\})$. Sea $x \in \bigcup(\alpha \cup \{\alpha\})$. Entonces, $x \in \alpha$ o hay $\gamma \in \alpha$ tal que $x \in \gamma$. En cualquier caso $x \in \alpha$. Por lo tanto, $\alpha = \bigcup(\alpha \cup \{\alpha\})$.

2. Supongamos que α es un ordinal límite. Como α es transitivo, claramente $\bigcup \alpha \subseteq \alpha$. Sea $\beta \in \alpha$. Como α es límite, $\alpha \neq \beta \cup \{\beta\}$. Tampoco puede suceder que $\alpha \in \beta \cup \{\beta\}$, pues los ordinales se comportan como un orden lineal y tendríamos que $\alpha = \beta$ o $\alpha \in \beta$, entonces $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$. Por lo tanto, $\alpha \subseteq \bigcup \alpha$, pues $\beta \in \beta \cup \{\beta\}$.

■

También se puede demostrar que $\sup \alpha = \bigcup \alpha$ si α es un ordinal distinto de 0 y que la unión de cualquier subconjunto de ordinales es un ordinal.

Para más detalle en las demostraciones de esta sección, véase [ACMar].

Teorema de Enumeración

A continuación vamos a probar el Teorema de Enumeración. Para esto requerimos varios resultados como son el Teorema de Inducción Transfinita, el Teorema de Recursión Transfinita, el Principio del mínimo ordinal, algunos otros lemas. Las demostraciones detalladas de estos resultados pueden consultarse en [ACMar], aquí solo esquematizamos algunas de ellas.

Lema A.1.7. *Sean α y β ordinales. Si $\langle \alpha, \in \rangle \simeq \langle \beta, \in \rangle$, entonces $\alpha = \beta$.*

Demostración. Sean α y β ordinales tales que $\langle \alpha, \in \rangle \simeq_h \langle \beta, \in \rangle$. Sea $D = \{\delta \in \alpha : h(\delta) \neq \delta\}$. Se puede probar por inducción sobre δ que para todo $\delta \in \alpha$, $\delta \notin D$. Por tanto, $D = \emptyset$ y h es la función identidad. Entonces $\alpha = \beta$. ■

Sea $\langle A, <_A \rangle$ un orden lineal y $a \in A$. Denotamos con A_a al conjunto $\{x \in A : x <_A a\}$ y se tiene que $\langle A_a, <_A \rangle$ es un suborden de A.

Lema A.1.8. *Sea $\langle A, < \rangle$ un buen orden. Si para todo $a \in A$ hay un ordinal β tal que $\langle A_a, < \rangle \simeq \langle \beta, \in \rangle$, entonces hay un ordinal γ tal que $\langle A, < \rangle \simeq \langle \gamma, \in \rangle$.*

Demostración. Supongamos que para todo $a \in A$ hay un ordinal β tal que $\langle A_a, < \rangle \simeq_{g_a} \langle \beta, \in \rangle$. Por el lema A.1.7, el ordinal al cual es isomorfo A_a es único, al igual que g_a. Por esto, podemos definir un funcional $f : A \to OR$ de la siguiente manera: $f(a) = \beta$ si y sólo si $\langle A_a, < \rangle \simeq_{g_a} \langle \beta, \in \rangle$. La imagen de A bajo f, $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$, es un conjunto por el Axioma de Reemplazo.

Primero veamos que $f[A]$ es un conjunto transitivo. Sean α y β ordinales tales que $\alpha \in \beta \in f[A]$. Hay $b \in A$ tal que $f(b) = \beta$. Tomemos $a = g_b^{-1}(\alpha)$. Afirmamos que

$$\langle A_a, < \rangle \simeq_{g_b \restriction A_a} \langle \alpha, \in \rangle.$$

Esto implica que $\alpha \in f[A]$, entonces $f[A]$ es transitivo. Como $f[A]$ es un conjunto transitivo de ordinales, $f[A] = \gamma$ es un ordinal. Falta mostrar que la función $f : A \to \gamma$ preserva orden, pues es suprayectiva. Si $a < b$, entonces $a \in A_b$ y tenemos que $f(a) = g_b(a) \in f(b)$. Por lo tanto,

$$\langle A, < \rangle \simeq_f \langle \gamma, \in \rangle.$$

■

Lema A.1.9. *Si $\langle A, < \rangle$ es un buen orden, para todo $b \in A$ hay un ordinal β tal que $\langle A_b, < \rangle \simeq \langle \beta, \in \rangle$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$E = \{b \in A : \text{ no hay ningún ordinal } \gamma \text{ tal que } \langle A_b, < \rangle \simeq \langle \gamma, \in \rangle\}.$$

Supongamos que $E \neq \emptyset$. Como A es un buen orden, E tiene un $<$-mínimo, digamos b_0. Entonces, tenemos que para todo $b \in A$, si $b < b_0$, hay un ordinal γ tal que $\langle A_b, < \rangle \simeq \langle \gamma, \in \rangle$. Pero $A_b = (A_{b_0})_b$ para cualquier $b < b_0$. Tenemos que para todo $b \in A_{b_0}$ hay un ordinal γ tal que $\langle (A_{b_0})_b, < \rangle \simeq \langle \gamma, \in \rangle$. Por el lema

A.1.8, hay un ordinal β tal que $\langle A_{b_0}, <\rangle \simeq \langle \beta, \in\rangle$, contradiciendo que $b_0 \in E$. Por tanto, $E = \emptyset$ y se cumple que para todo $b \in A$ hay un ordinal β tal que $\langle A_b, <\rangle \simeq \langle \beta, \in\rangle$. ■

Teorema A.1.10 (de Enumeración)**.** *Si $\langle A, <\rangle$ es un buen orden, entonces hay un único ordinal α tal que $\langle A, <\rangle \simeq \langle \alpha, \in\rangle$.*

Demostración. Sea $\langle A, <\rangle$ un buen orden. Por A.1.9, para todo $a \in A$ hay β tal que $\langle A_a, <\rangle \simeq \langle \beta, \in\rangle$. Entonces, por A.1.8, hay α tal que $\langle A, <\rangle \simeq \langle \alpha, \in\rangle$. La unicidad del ordinal α se da por A.1.7. ■

Como consecuencia del Teorema de Enumeración vemos que OR no es un conjunto. Si suponemos que OR es un conjunto, entonces está bien ordenado por la pertenencia y, por tanto, es isomorfo a un único ordinal, digamos $\alpha \in OR$. Además, OR es una clase transitiva, satisfaciendo así la definición de ordinal. Entonces, $OR = \alpha$, contradiciendo que $\alpha \notin \alpha$.

Versiones de Recursión

Presentamos el Esquema general de Recursión para Ordinales en dos de sus versiones. Las pruebas de estos teoremas son muy similares a las que dimos en el capítulo 3, así que aquí no haremos la demostración. Las únicas diferencias en los enunciados son consecuencia de las propiedades del orden $\in$ sobre los ordinales que resultan a partir de esta definición, pues $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.

Teorema A.1.11 (Primera forma)**.** *Sea G un funcional del universo. Existe un único funcional F con dominio OR, tal que para todo ordinal α*

$$F(\alpha) = G(F\restriction_{\alpha}).$$

Teorema A.1.12 (Segunda forma)**.** *Sean H y J funcionales del universo y a un conjunto. Existe un único funcional F con dominio OR, tal que*

1. *$F(0) = a$;*
2. *$F(\alpha + 1) = H(F(\alpha))$, para todo $\alpha \in OR$; y*
3. *$F(\alpha) = J(F[\alpha])$, si α es un ordinal límite.*

A.2. Truco de Scott

Una vez que tenemos a los ordinales podemos usarlos para estudiar la estructura del universo de los conjuntos. Por el Axioma de Regularidad, se puede “definir” al universo usando el Teorema de Recursión para ordinales. A esta manera de ver la construcción del universo se le llama la Jerarquía Acumulativa. El primer nivel, R_0 es el conjunto vacío; si para un ordinal α está definido R_α, $R_{\alpha+1}$ es el conjunto potencia de R_α; y para cualquier ordinal límite λ, si están definidos R_α para cada $\alpha < \lambda$, entonces $R_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} R_\alpha$. Hacemos que el universo V sea la unión de todos estos niveles, $V = \bigcup_{\alpha \in OR} R_\alpha$. Si x es un conjunto, al mínimo ordinal α tal que $x \in R_{\alpha+1}$ se le llama el *rango de* α.

Sea $\langle Y, S\rangle$ un orden lineal. La clase de todos los órdenes isomorfos a $\langle Y, S\rangle$ casi nunca es un conjunto (de hecho, solo es conjunto cuando $Y = \emptyset$). Entonces, vamos a mostrar que podemos encontrar un subconjunto de la clase (casi siempre propia) de equivalencia de todos los órdenes isomorfos a $\langle Y, S\rangle$ en el cual todos los órdenes sean de rango mínimo. Así, podremos dar una definición formal de tipo de orden.

Definición A.2.1. $\langle A, R\rangle$ es un *orden pionero* si y sólo si no hay un orden de rango menor que sea isomorfo a $\langle A, R\rangle$.

Lema A.2.2. *Todo orden $\langle A, R\rangle$ es isomorfo a un orden pionero.*

Demostración. Consideremos la clase de ordinales

$$\{\alpha \in OR : \text{hay un orden lineal } \langle B, S\rangle \text{ tal que } \rho(\langle B, S\rangle) = \alpha \text{ y } \langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle\}.$$

Como ésta es una clase no vacía de ordinales, tiene un mínimo y lo llamaremos *ordinal pionero de* $\langle A, R\rangle$. Así, $\langle B, S\rangle$ es un *orden pionero* si y sólo si hay un ordinal pionero β tal que $\rho(\langle B, S\rangle) = \beta$. ■

Definición A.2.3. Decimos que el conjunto

$$\{\langle B, S\rangle \text{ es un orden pionero} : \langle B, S\rangle \simeq \langle A, R\rangle\}$$

es el *tipo isomórfico de* $\langle A, R\rangle$ y lo denotamos $it\langle A, R\rangle$.

Se tiene que $it\langle A, R\rangle \subseteq R_{\alpha^+}$, donde α es el ordinal pionero de $\langle A, R\rangle$. Por tanto, $it\langle A, R\rangle$ es un conjunto. Denotamos a $it\langle A, R\rangle$ con τ, σ, etc. Entonces decimos que τ es el *tipo de orden* de un orden lineal $\langle X, R\rangle$ si y sólo si $\langle X, R\rangle \in \tau$. Sabemos que esto se puede hacer porque $\tau = it\langle A, R\rangle$ es un conjunto no vacío.

Teorema A.2.4. $it\langle A, R\rangle = it\langle B, S\rangle$ *si y sólo si* $\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$.

Demostración. Supongamos que $\langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$. Sea $\langle C, T\rangle \in it\langle A, R\rangle$. Entonces $\langle C, T\rangle$ es un orden pionero tal que $\langle C, T\rangle \simeq \langle A, R\rangle \simeq \langle B, S\rangle$. Entonces, $\langle C, T\rangle \in it\langle B, S\rangle$. Análogamente, se tiene que $it\langle B, S\rangle \subseteq it\langle A, R\rangle$.

El otro sentido de la implicación es trivial. ■

A.3. Cardinalidades finitas

A partir de los números naturales se define el concepto de ser finito. Un conjunto A es *finito* si y sólo si A es biyectable con un número natural. Denotamos con $A \sim B$ al hecho de que los conjuntos A y B sean biyectables. A lo largo de esta tesis sólo fue necesario hacer la distinción entre las cardinalidades finita e infinita. Demostramos aquí algunos hechos que usamos en los capítulos de la tesis respecto de estas cardinalidades.

Lema A.3.1. *Para cualesquiera conjuntos x y y se cumple lo siguiente:*

1. *si $n \in \mathbb{N}$, $x \sim s(n)$ y $a \in x$, entonces $x \setminus \{a\} \sim n$;*
2. *si x es finito, entonces $x \cup \{y\}$ es finito; es más, si $n \in \mathbb{N}$, $x \sim n$ y $y \notin x$, entonces $x \cup \{y\} \sim s(n)$;*
3. *si x es finito, entonces para cualquier conjunto finito y, $x \cup y$ es finito;*
4. *si x es finito y para todo $a \in x$, a es finito, entonces $\bigcup x$ es finito.*

Demostración.

1. Supongamos que $x \sim s(n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea $a \in x$ y $f : x \to s(n)$ una función biyectiva. Definimos la función $g : x \setminus \{a\} \to n$ de la siguiente manera:
$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } f(z) \neq n; \\ f(a) & \text{si } f(z) = n. \end{cases}$$
Se puede ver que la función g es biyectiva y, por tanto, $x \setminus \{a\} \sim n$.

2. Sea y un conjunto. Si $y \in x$, entonces $x \cup \{y\} = x$ y este ya es finito. Si $y \notin x$ tomamos $n \in \mathbb{N}$, tal que $x \sim n$ y $f : x \to n$ una función biyectiva. Como $y \notin x$ podemos definir la función $g : x \cup \{y\} \to s(n)$ de la siguiente manera:
$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in x; \\ n & \text{si } z = y. \end{cases}$$
La función g es biyectiva y, por tanto, $x \cup \{y\} \sim s(n)$.

3. Supongamos que $x \sim n$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción sobre m que: si y es un conjunto finito tal que $y \sim m$, entonces $x \cup y$ es finito.

   Si $m = 0$, entonces $y = \emptyset$ y $x \cup y = x \sim n$. Supongamos que para cualquier conjunto finito z biyectable con m, se cumple que $x \cup z$ es finito. Sea $y \sim s(m)$ y sea $a \in y$. Por el inciso 1, se tiene que $y \setminus \{a\} \sim m$; por la hipótesis inductiva, $x \cup (y \setminus \{a\})$ es finito; y, por el inciso 2, $x \cup y = (x \cup (y \setminus \{a\})) \cup \{a\}$ es finito.

4. Haremos la prueba por inducción sobre n de que: si x es un conjunto tal que $x \sim n$ y todo $a \in x$ es finito, entonces $\bigcup x$ es finito.

   Si $n = 0$, entonces $x = \emptyset$ y $\bigcup x = \emptyset = 0$. Supongamos que para cualquier conjunto finito z si $z \sim n$ y todo $a \in z$ es finito, entonces $\bigcup z$ es finito. Sea $x \sim s(n)$ tal que todo $b \in x$ es finito y sea $a \in x$. Por el inciso 1, se tiene que $x \setminus \{a\} \sim n$; por la hipótesis inductiva, $\bigcup(x \cup \setminus \{a\})$ es finito; y, por el inciso 3, $\bigcup x = (\bigcup(x \cup \setminus \{a\})) \cup a$ es finito.

■

Conlcuimos a partir de este lema que la unión de dos conjuntos finitos es finita, y que la unión finita de conjuntos finitos es finita.

Lema A.3.2. *1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \subsetneq n$, $n \not\sim x$.*

2. Para todo conjunto x tal que $x \sim n$, con $n \in \mathbb{N}$, si $y \subsetneq x$, entonces y es finito. Es decir, todo subconjunto propio de un conjunto finito es finito.

3. $\mathbb{N}$ es infinito.

Demostración.

1. La prueba la haremos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ no hay nada que probar pues no tiene subconjuntos propios. Suponemos como hipótesis inductiva que para todo $y \subsetneq n$ se cumple que $y \not\sim n$. Supongamos que hay $x \subsetneq s(n)$ tal que $s(n) \sim_f x$.

   Hay dos casos. Si $n \notin x$, $x \subseteq n$, entonces $x \setminus \{f(n)\} \sim n$, pero $x \setminus \{f(n)\} \subsetneq x \subseteq n$, contradiciendo la hipótesis de inducción. Si $n \in x$, entonces hay $m \in s(n)$ tal que $f(m) = n$. Definimos la función $g : n \to x \setminus \{n\}$ de la siguiente manera:
$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \neq m; \\ f(n) & \text{si } y = m. \end{cases}$$
   Observemos que si $m = n$, $g = f \restriction_n$. Se puede ver que la función g es biyectiva, entonces $n \sim_g x \setminus \{n\} \subsetneq x$, contradiciendo la hipótesis de inducción.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Haremos la prueba por inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces $x = \emptyset$ y, como no tiene subconjuntos propios, no hay nada que probar. Supongamos que se cumple para un número natural n. Sea x un conjunto tal que $x \sim s(n)$ y sea $f : x \to s(n)$ una función biyectiva. Tomemos $y \subsetneq x$. Tenemos que $f[y] \subsetneq s(n)$. Si $f[y] = n$, entonces y es finito, pues $y \sim f[y]$. Si $f[y] \subsetneq n$, por la hipótesis de inducción, $f[y]$ es finito y, por tanto, y es finito.

3. Supongamos que $\mathbb{N} \sim_f k$, con algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces $f[k] \subsetneq k$, contradiciendo que ningún natural es biyectable con un subconjunto propio suyo.

■

También se deducen más propiedades respecto a la cardinalidad de conjuntos finitos. Para más detalles, veáse [AMn05]. No lo demostraremos aquí, pero usando el Axioma de Elección se puede probar que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, hecho que se usa también diversas veces en la tesis.

Apéndice B

Estructuras numéricas

Para justificar la definición de las estructuras numéricas básicas como órdenes lineales, primero definiremos sus elementos y las operaciones algebraicas usuales para después darles un orden. Estas estructuras vistas como órdenes son isomorfas a los órdenes que construimos en el primer capítulo.

La definición que dimos de número natural en el primer capítulo solamente requirió hablar de órdenes lineales. De hecho, la definición conjuntista de los números naturales es precisamente la que dimos, por lo que $\mathbb{N} = \mathscr{N}$. El orden del conjunto de los números naturales es $\in$ y lo podemos denotar como $<_{\mathbb{N}}$.

Tampoco hay necesidad de volver a hacer la construcción de $\mathbb{R}$, pues cuando hayamos construido $\mathbb{Q}$ se puede calcar la construcción que ya hicimos para $\mathscr{R}$, pero usando $\mathbb{Q}$ en vez de $\mathscr{Q}$.

B.1. Naturales

Aritmética natural

Necesitamos las operaciones algebraicas de los naturales para construir el conjunto de los enteros. Definiremos la suma de un número natural n y cualquier otro número natural m por recursión para los naturales.

Definición B.1.1. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define la suma de n y otro número natural, $+_n$, como sigue:

- $+_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- $+_n(0) = n$; y
- $+_n(s(m)) = s(+_n(m))$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Y se define la suma entre cualesquiera dos números naturales, $+_{\mathbb{N}}$, como sigue:

- $+_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; y
- $+_{\mathbb{N}}(n, m) = +_n(m)$ para $n, m \in \mathbb{N}$.

Por inducción se puede probar que $n +_{\mathbb{N}} m = m +_{\mathbb{N}} n$ (es decir, que la suma es conmutativa) y que $(n +_{\mathbb{N}} m) +_{\mathbb{N}} p = n +_{\mathbb{N}} (m +_{\mathbb{N}} q)$ (es decir, que la suma es asociativa). También se puede probar que la suma es compatible con el orden en los naturales y, por tanto, se cumplen las leyes de la cancelación de la suma.

Al igual que la suma, definimos el producto entre números naturales por recursión.

Definición B.1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el producto de n con un número natural, $\cdot_n$, como sigue:

- $\cdot_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
- $\cdot_n(0) = 0$, y
- $\cdot_n(s(m)) = \cdot_n(m) +_{\mathbb{N}} n$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Y se define el producto entre dos número naturales, $\cdot_{\mathbb{N}}$, como sigue:

- $\cdot_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y
- $n \cdot_{\mathbb{N}} s(m) = \cdot_n(m)$, para $n, m \in \mathbb{N}$.

B.2. Enteros

Si n y m son números naturales tales que $n \geq m$, podemos encontrar un único número natural k tal que $m +_{\mathbb{N}} k = n$, y así podemos definir una diferencia entre estos números naturales como $n - m = k$. La motivación para definir los números enteros es que la diferencia entre naturales solamente se puede definir si $n \geq m$ y se busca extender esta noción.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida de la siguiente manera. Dados $(a, b), (b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } a +_{\mathbb{N}} d = c +_{\mathbb{N}} b.$$

La conmutatividad y la asociatividad de $+_{\mathbb{N}}$ son las que hacen que ésta relación sea de equivalencia. Denotamos como $\overline{(a, b)}$ a la clase de equivalencia de (a, b).

El conjunto de los números enteros es el conjunto de las clases de equivalencia, donde cada clase de equivalencia representa la diferencia entre dos números naturales sin importar cuál es mayor.

Definición B.2.1. El conjunto de los números enteros es

$$\mathbb{Z} = \{\overline{(a, b)} : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos el orden $<_{\mathbb{Z}}$ entre dos elementos $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ como

$$\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} \text{ si y sólo si } a +_{\mathbb{N}} d <_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b.$$

Veamos que $<_{\mathbb{Z}}$ ordena linealmente a $\mathbb{Z}$. Sean $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ y $\overline{(e,f)} \in \mathbb{Z}$.

Como la suma en los naturales es conmutativa, $a +_{\mathbb{N}} b = b +_{\mathbb{N}} a$. Entonces, $\overline{(a,b)} \not<_{\mathbb{Z}} \overline{(a,b)}$, es decir, $<_{\mathbb{Z}}$ es antirreflexiva.

Si $\overline{(a,b)} \neq \overline{(c,d)}$, entonces por la definición, $a +_{\mathbb{N}} d \neq c +_{\mathbb{N}} b$. Pero $\mathbb{N}$ es un orden lineal y tiene que suceder que $a +_{\mathbb{N}} d <_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b$ o $c +_{\mathbb{N}} b <_{\mathbb{N}} a +_{\mathbb{N}} d$, pero no al mismo tiempo. Es decir, $\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)}$ o $\overline{(c,d)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(a,b)}$. Por tanto, $<_{\mathbb{Z}}$ es tricotómica.

Si $\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(e,f)}$, tenemos que $a +_{\mathbb{N}} d <_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b$ y $c +_{\mathbb{N}} f <_{\mathbb{N}} e +_{\mathbb{N}} d$. Usando que el orden en los naturales es compatible con la suma, obtenemos que

$$(a +_{\mathbb{N}} d +_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} f) <_{\mathbb{N}} (c +_{\mathbb{N}} b +_{\mathbb{N}} e +_{\mathbb{N}} d).$$

Por la conmutatividad de la suma y las leyes de la cancelación en los naturales, se tiene que

$$a +_{\mathbb{N}} f <_{\mathbb{N}} b +_{\mathbb{N}} e.$$

Por tanto, $\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(e,f)}$, es decir, $<_{\mathbb{Z}}$ es transitiva.

Ya probamos todas las propiedades para ver que $\langle \mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}} \rangle$ es un orden lineal. Ahora veamos cuál es el tipo de orden de $\mathbb{Z}$.

Teorema B.2.2. $\mathbb{Z} = \{\overline{(n,m)} : n, m \in \mathbb{N},\ \textit{con } n = 0 \textit{ o } m = 0\}$.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si $m < n$, entonces hay $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m +_{\mathbb{N}} k$. Con esto obtenemos que para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$

1. si $m < n$, entonces hay $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{(k,0)} = \overline{(n,m)}$;
2. si $n < m$, entonces hay $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{(0,k)} = \overline{(n,m)}$; y
3. si $n = m$, entonces $\overline{(0,0)} = \overline{(n,m)}$.

Por la tricotomía de $<_{\mathbb{N}}$, para cada clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$ hay un representante de la forma $(n,0)$ con $n \neq 0$, $(0,m)$ con $m \neq 0$, o $(0,0)$. ■

Con esta forma de expresar a $\mathbb{Z}$ podemos notar que tiene un tipo de orden que ya conocemos, $\omega^* + \omega$. Probemos esto.

Lema B.2.3. $\{\overline{(n,m)} : n, m \in \mathbb{N},\ \textit{con } n = 0 \textit{ o } m = 0\} \simeq \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Nunca puede pasar que $(n,0) <_{\mathbb{Z}} (0,m)$, pues tendríamos $n +_{\mathbb{N}} m <_{\mathbb{N}} 0$, lo cual es imposible.

Se cumplen lo siguiente:

1. $\overline{(n,0)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(m,0)}$ si y sólo si $n+0 <_{\mathbb{N}} 0+m$ si y sólo si $n <_{\mathbb{N}} m$,
2. $\overline{(0,n)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(0,m)}$ si y sólo si $0+m <_{\mathbb{N}} n+0$ si y sólo si $m <_{\mathbb{N}} n$,
3. $\overline{(0,n)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(m,0)}$ si y sólo si $0+0 <_{\mathbb{N}} n+m$ si y sólo si $n \neq 0$ o $m \neq 0$.

- Con estas desigualdades es fácil mostrar que

$$\begin{aligned}&\langle\{\overline{(n,m)} : n,m \in \mathbb{N},\ \text{con } n=0 \text{ o } m=0\}, <_{\mathbb{Z}}\rangle \simeq_h \\ &(\{0\} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})^*) + ((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \{0\}),\end{aligned}$$

  donde $h(\overline{(n,m)}) = (n,m)$.

  Damos un orden $<$ a los conjuntos $(\{0\} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})^*)$ y $((\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \{0\})$ de forma que sea el mismo orden de los enteros pero solamente sobre los representantes, es decir $(a,b) < (c,d)$ si y sólo si $\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)}$. Por 3, está bien definido el orden de la suma como el mismo orden $<$ y, por las otras desigualdades, h es un isomorfismo.

- Bastan 1 y 2 para ver que

$$\begin{gathered}\langle \mathbb{N} \times \{0\}, <_{\mathbb{Z}}\rangle \simeq_f \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle \\ \langle\{0\} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}), <_{\mathbb{Z}}\rangle^* \simeq_g \langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, <_{\mathbb{N}}\rangle^* \simeq_{g'} \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}\rangle^*.\end{gathered}$$

  donde $f(n,0) = n$, $g(0,m) = m$ y $g'(n) = n-1$.

Con los dos puntos que acabamos de probar tenemos que $\{\overline{(n,m)} : n,m \in \mathbb{N},\ \text{con } n=0 \text{ o } m=0\} \simeq \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$. ∎

De aquí concluimos que $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}^* + \mathbb{N}$. Así que su tipo de orden es el mismo que el de $\mathscr{Z}$, $\omega^* + \omega$.

B.3. Racionales

Ahora veremos las operaciones entre números enteros para construir a los números racionales.

Definición B.3.1. Se define la suma de números enteros, $+_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, de la siguiente manera:

$$\overline{(a,b)} +_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{(a +_{\mathbb{N}} c, b +_{\mathbb{N}} d)}.$$

Definición B.3.2. Se define el producto de números enteros, $\cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, de la siguiente manera:

$$\overline{(a,b)} \cdot_{\mathbb{Z}} \overline{(c,d)} = \overline{((a \cdot_{\mathbb{N}} c +_{\mathbb{N}} b \cdot_{\mathbb{N}} d), (a \cdot_{\mathbb{N}} d +_{\mathbb{N}} b \cdot_{\mathbb{N}} c))}.$$

Se puede probar que se cumple la asociatividad, la conmutatividad y la distributividad de las operaciones $\cdot_{\mathbb{Z}}$ en los enteros y hay leyes de la cancelación de la suma y del producto. También se puede mostrar que $\mathbb{Z}$ junto con estas operaciones cumple con ser lo que se conoce en el Álgebra como un dominio entero. De hecho, con estas propiedades vemos que en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{Z}$ hay un elemento que es el neutro aditivo, 0 y $\overline{(0,0)}$ respectivamente, y además hay un elemento que es el neutro multiplicativo, 1 y $\overline{(1,0)}$ respectivamente. Se puede probar que el inverso aditivo de cualquier entero $\overline{(a,b)}$ es $\overline{(b,a)}$.

Para construir a los números enteros completamos la operación diferencia, para que todo elemento tuviera un inverso aditivo, lo que nos falta en $\mathbb{Z}$ es que todo entero tenga un inverso multiplicativo.

Damos una nueva relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$ y el conjunto de los números racionales será el conjunto de las clases de equivalencia.

Dados $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, se define $\backsim$ de la siguiente manera:

$$(a,b) \backsim (c,d) \text{ si y sólo si } a \cdot_{\mathbb{Z}} d = c \cdot_{\mathbb{Z}} b.$$

Se denota con $a/b = \{(c,d) : (a,b) \backsim (c,d)\}$ a la clase de equivalencia de (a,b). Observemos que siempre se puede representar una clase de equivalencia a/b eligiendo un $b >_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$. Se tiene que $(a,b) \sim (c,0)$ si y sólo si $b = 0$ o $c = 0$, pues $b \cdot c = a \cdot 0 = 0$. Entonces los pares de enteros de la forma $(c,0)$ pertenencen a las clase del $(0,0)$, pero también los de la forma $(0,d)$ con $d \neq 0$.

Definición B.3.3. El conjunto de los números racionles es

$$\mathbb{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbb{Z}, b >_{\mathbb{Z}} 0\}.$$

Y se define el orden en $\mathbb{Q}$, como

$$a/b <_{\mathbb{Q}} c/d \text{ si y sólo si } a \cdot_{\mathbb{Z}} d <_{\mathbb{Z}} c \cdot_{\mathbb{Z}} b.$$

Veamos que la relación $<_{\mathbb{Q}}$ ordena linealmente a $\mathbb{Q}$. Sean a/b, c/d y $e/f \in \mathbb{Q}$.

Se tiene que $a \cdot b \not<_{\mathbb{Z}} a \cdot b$ porque $<_{\mathbb{Z}}$ es un orden antirreflexivo. Entonces, $a/b \not<_{\mathbb{Q}} a/b$, es decir, $<_{\mathbb{Q}}$ es antirreflexiva

Si $a/b \neq c/d$, entonces $a \cdot_{\mathbb{Z}} d \neq c \cdot_{\mathbb{Z}} b$. Pero como $\mathbb{Z}$ es un orden lineal cumple con la tricotomía por lo que $a \cdot_{\mathbb{Z}} d <_{\mathbb{Z}} c \cdot_{\mathbb{Z}} b$ o $c \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} d$. Por tanto, $a/b <_{\mathbb{Q}} c/d$ o $c/d <_{\mathbb{Q}} a/b$, y $<_{\mathbb{Q}}$ es tricotómica.

Si $a/b <_{\mathbb{Q}} c/d <_{\mathbb{Q}} e/f$. Tenemos por la definición que $a \cdot_{\mathbb{Z}} d <_{\mathbb{Z}} c \cdot_{\mathbb{Z}} b$ y $c \cdot_{\mathbb{Z}} f <_{\mathbb{Z}} e \cdot_{\mathbb{Z}} d$. Entonces $(a \cdot_{\mathbb{Z}} d \cdot_{\mathbb{Z}} c \cdot_{\mathbb{Z}} f) <_{\mathbb{Z}} (e \cdot_{\mathbb{Z}} d \cdot_{\mathbb{Z}} c \cdot_{\mathbb{Z}} b)$. Si $c \neq 0_{\mathbb{Z}}$, como también $d \neq 0_{\mathbb{Z}}$, aplicamos la cancelación en el producto de $\mathbb{Z}$ y obtenemos $a \cdot_{\mathbb{Z}} f <_{\mathbb{Z}} e \cdot_{\mathbb{Z}} b$. Si $c = 0_{\mathbb{Z}}$, tenemos que $c \cdot_{\mathbb{Z}} b = c \cdot_{\mathbb{Z}} f = 0_{\mathbb{Z}}$ y, por la transitividad del orden de $\mathbb{Z}$, $a \cdot_{\mathbb{Z}} f <_{\mathbb{Z}} e \cdot_{\mathbb{Z}} b$. Por tanto, $<_{\mathbb{Q}}$ es transitiva.

Así, $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ es un orden lineal.

Definición B.3.4. Se define la suma en los racionales, $+_{\mathbb{Q}}$, de la siguiente manera:

$$a/b +_{\mathbb{Q}} c/d = \frac{(a \cdot_{\mathbb{Z}} d) +_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} d)}{b \cdot_{\mathbb{Z}} d}.$$

Definición B.3.5. Se define el producto en los racionales, $\cdot_{\mathbb{Q}}$, de la siguiente manera:

$$a/b \cdot_{\mathbb{Q}} c/d = \frac{(a \cdot_{\mathbb{Z}} c)}{b \cdot_{\mathbb{Z}} d}.$$

Sea $1_{\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Z}}/1_{\mathbb{Z}}$. Se puede probar que es el neutro multiplicativo. También se puede probar que el inverso aditivo de $1_{\mathbb{Q}}$, $-1_{\mathbb{Q}}$, es $(-1_{\mathbb{Z}})/1_{\mathbb{Z}}$. Usaremos que para cualquier $b \in \mathbb{Z}$, $b \cdot_{\mathbb{Z}} b \geq 0_{\mathbb{Z}}$; que si $b > 0$, $-b < 0$; y la cancelación de la suma en el orden de los enteros.

Probando que $\mathbb{Q}$ es un orden denso numerable sin extremos, hemos terminado, porque un teorema de Cantor (el teorema 2.2.6), nos dice que todos los órdenes numerables densos sin extremos son isomorfos.

Lema B.3.6. $\langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ *es un orden denso numerable sin extremos.*

Demostración. Como $\{\frac{a}{1_{\mathbb{Z}}} : a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ es infinito. Para ver que es numerable, basta ver que $\mathbb{Q}$ es un subonjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, que a su vez es numerable, pues $\mathbb{Z}$ es numerable y la unión numerable de numerables es numerable.

Sean $a/b, c/d \in \mathbb{Q}$ tales que $a/b <_{\mathbb{Q}} c/d$.

Tomemos el siguiente número racional $p/q \in \mathbb{Q}$, donde

$$p = (a \cdot_{\mathbb{Z}} d) +_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c)$$

$$q = 2_{\mathbb{Z}} \cdot_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} d.$$

Éste cumple que $a/b <_{\mathbb{Q}} p/q <_{\mathbb{Q}} c/d$. Por tanto, $\mathbb{Q}$ es denso.

Falta ver que no tiene extremos. Pero para todo a/b, se tiene que

$$a/b +_{\mathbb{Q}} (-1_{\mathbb{Q}}) <_{\mathbb{Q}} a/b <_{\mathbb{Q}} a/b + 1_{\mathbb{Q}}.$$

Esto se porque $0_{\mathbb{Z}} < b \cdot_{\mathbb{Z}} b$ y esto implica que $(-b) \cdot b < 0$. Se tiene que

$$\begin{array}{cc}
a \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} b & a \cdot_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} (-b) \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} b \\
a \cdot_{\mathbb{Z}} b <_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} (a +_{\mathbb{Z}} b) & b \cdot_{\mathbb{Z}} (a +_{\mathbb{Z}} (-b)) <_{\mathbb{Z}} a \cdot_{\mathbb{Z}} b \\
a/b <_{\mathbb{Q}} (a +_{\mathbb{Z}} b)/b & (a +_{\mathbb{Z}} (-b))/b <_{\mathbb{Q}} a/b.
\end{array}$$

Con la definición de la suma, $(a +_{\mathbb{Z}} b)/b = a/b +_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Q}}$ y $(a +_{\mathbb{Z}} (-b))/b = a/b +_{\mathbb{Q}} (-1_{\mathbb{Q}})$, probando que a/b no es máximo ni mínimo. ■

Bibliografía

[ACMar] José A. Amor, Gabriela Campero, and Favio E. Miranda. *Teoría de Conjuntos, Curso Intermedio*. Facultad de Ciencias, Por publicar.

[AMn05] José A. Amor Montaño. *Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.

[End77] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic, 1977.

[GL07] Carmen Gómez Laveaga. *Introducción a la Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2007.

[Hal73] Paul R. Halmos. *Teoría Intuitiva de los Conjuntos*. C.E.C.S.A, 1973.

[KT06] Péter Komjáth and Vilmos Totik. *Problems and Theorems in Cassical Set Theory*. Springer, 2006.

[Ros82] Joseph G. Rosenstein. *Linear Orderings*. Academic Press, 1982.