Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencia e Ingeniería de la Computación

"Abducción y lógicas no clásicas. Un acercamiento desde las lógicas adaptativas y la lógica modal"

T E S I S

que para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias
(Computación)

P R E S E N T A

Laura Alicia Leonides Jiménez

Directora de Tesis:
Dra. Atocha Aliseda Llera

México, D.F. 2011

Agradecimientos

Esta investigación fue apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), con la beca CVU–268447 para estudios de Maestría en la Universidad Nacional Autónoma de México.

La tesis fue realizada bajo la supervisión de Atocha Aliseda, a quien agradezco enormemente su apoyo, guía, confianza y paciencia.

Agradezco también a Ángel Nepomuceno, por su gran ayuda y por las provechosas discusiones que mantuvimos durante mi estancia de investigación en la Universidad de Sevilla, financiada por Becas Mixtas de CONACyT. También estoy en deuda con Diderik Batens y Joke Meheus por las valiosas sugerencias que aportaron a esta investigación durante nuestras reuniones.

Estoy agradecida con mis sinodales: Carlos Velarde, David Rosenblueth, Favio Miranda y Francisco Hernández, por las importantes recomendaciones con que colaboraron en mi trabajo. Fue gracias a su pronta acción que estuve lista para recibirme en noviembre de 2010, mas por causas de índole administrativo no fue posible realizar el examen en la fecha planeada.

Y por supuesto, gracias...

A mi mamá, a mi abue y a Citla, por apoyarme incondicionalmente, por hacerme reír con sus excentricidades y por ser las grandes mujeres que son. A mi abuelo, por estar siempre conmigo.

A Balpö, por las risas, las pláticas enriquecedoras, la complicidad y la locura.

A Aldo, Cla, Claudia (QK), Daniel, Mau, Rulo, Sergio y Silvia, por su compañía en los buenos y los malos momentos, por los abrazos y las conversaciones.

A Alexis, Etniux, Jorgiux, Mag, Tzolsticia y Víctor porque con sus rarezas hicieron de mi estancia en la maestría una experiencia extremadamente divertida.

A Cris y David, por abrirme sus corazones y hacerme sentir como en casa mientras estaba del otro lado del mundo.

Índice general

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presenta un panorama general de la abducción; se aborda su caracterización usual en la lógica clásica, su tratamiento mediante distintos tipos de tableaux y con la ayuda de pruebas orientadas a metas. Posteriormente se exponen y se analizan las limitaciones de la abducción en la lógica clásica, junto con algunos trabajos que van más allá de la caracterización clásica de la abducción.

Por último, se exponen los objetivos que se espera alcanzar con el presente trabajo de investigación, así como un breve capitulado en el que se introduce la estructura del mismo y los temas que se tratarán en cada uno de los capítulos subsecuentes.

1.1 Abducción

Comúnmente tenemos que formular explicaciones a hechos sorprendentes a los que nos enfrentamos durante nuestras actividades diarias. Ya sea saber por qué nuestra mascota no salió a recibirnos cuando llegamos a casa o por qué el coche no arranca.

Probablemente las explicaciones a las que lleguemos sean erradas. Quizá el perro no salió a recibirnos porque lo sacaron a pasear y no porque no nos escuchó llegar. Tal vez el coche no arranca porque no tiene gasolina, no porque la batería se ha dañado. Aun cuando nuestra explicación podría llegar a ser refutada al adquirir más información, no detenemos nuestras acciones debido a la incertidumbre de nuestras conclusiones: actuamos con base en ellas; adquirimos nueva información, lo cual nos lleva revisar, actualizar y desechar algunas de las explicaciones generadas.

El tipo de razonamiento por excelencia usado al buscar una explicación, es abductivo. La abducción es el proceso mediante el cual se realiza el razonamiento a partir de la evidencia y hacia la explicación, proceder característico en situaciones con información incompleta. Es decir, la abducción es una forma de razonamiento en la que se infieren premisas a partir de un conjunto de conclusiones, con una teoría de trasfondo [Aliseda, 2006].

Los orígenes del concepto de abducción se remontan a Aristóteles, con cuya noción de *apagoge* se ha comparado a la abducción. Posteriormente, Laplace argumenta que la abducción es una metodología importante en las ciencias. En el contexto moderno, es C. S. Peirce quien introduce el concepto de abducción como se le conoce hoy en día.

Los ejemplos antes mencionados se refieren a situaciones de la vida diaria; sin embargo, el razonamiento abductivo puede hallarse en áreas tan distintas como la Filosofía de la Ciencia [Aliseda, 2006], la Inteligencia Artificial [Konolige, 1990] y la Programación Lógica [Kakas et al., 1992].

Al referirnos a la abducción, podemos hacerlo desde dos puntos de vista distintos: como proceso o como producto. El primero de ellos hace alusión a la actividad realizada y, el segundo, al resultado de dicha actividad.

Cuando se habla de la abducción como producto, se hace referencia a una explicación abductiva; cuando se hace mención de la abducción como proceso, se apunta hacia la actividad abductiva, cuyo resultado es una explicación abductiva. Ya que el resultado de un proceso abductivo es una explicación abductiva, resulta evidente que ambos conceptos están fuertemente ligados.

Es importante notar que, a pesar de estar estrechamente relacionados y ser significativos por igual, ambos conceptos no deben confundirse. Al ser tratada como producto, se hace énfasis en la cualidad que distingue a un simple hecho informativo de aquél que conforma una explicación; al ser tratada como proceso, se acentúa el enfoque algorítmico, en el que se busca proponer y analizar métodos que permitan llegar a explicaciones abductivas, mediante una mezcla de reglas de inferencia con estrategias de búsqueda para encontrar las mejores explicaciones posibles.

Otra distinción notable involucrada en el proceso abductivo es la separación en dos etapas de la producción de explicaciones abductivas: la construcción y la selección. Cuando se está en búsqueda de una explicación abductiva, siempre se aspira a generar la mejor explicación posible, a saber, aquélla que realmente ocurrió y puede explicar el hecho sorprendente observado. Sin embargo, es posible que se generen varias explicaciones para el hecho observado, en cuyo caso habría que seleccionar la mejor explicación de acuerdo con algún criterio de preferencia.

Como puede notarse, la abducción consiste tanto en la construcción de hipótesis como de la selección de la mejor de aquéllas generadas, para finalmente obtener la mejor explicación abductiva posible.

1.1.1 Caracterización de la abducción

La forma lógica de la abducción puede verse, de manera muy general, como la relación de tres partes

$$\Theta, \varphi \Rightarrow \alpha$$

donde Θ es la *teoría de trasfondo*, φ un *hecho sorprendente* y α la *explicación* producida. Al tomar como argumentos la teoría y un hecho sorprendente se obtiene como producto una explicación abductiva [Aliseda, 2006].

Esta caracterización captura el sentido del razonamiento abductivo, es decir, ir de la evidencia hacia las explicaciones; sin embargo, se requiere de una caracterización del argumento abductivo de forma deductiva, esto es

$$\Theta, \alpha \Rightarrow \varphi$$

El caracterizar el argumento abductivo mediante una forma deductiva, no quiere decir que la abducción y la deducción puedan ser asimiladas como un mismo tipo de razonamiento. Simplemente se busca un término medio entre la reducción sin más de la abducción a la deducción y la independencia total entre ambos tipos de razonamiento. No sería posible comprender la abducción sin ningún tipo de referencia a la deducción, especialmente desde el punto de vista de la lógica formal. Por esto, resulta evidente que no es posible dar una caracterización de la abducción sin una referencia deductiva.

Aliseda [Aliseda, 2006] propone tres parámetros principales que determinan tipos de argumentos explicativos:

(i) Un parámetro inferencial ($\Rightarrow$), que establece una relación lógica adecuada entre la teoría de trasfondo y el hecho que necesita ser explicado.

(ii) Los detonantes que determinan cuál tipo de proceso abductivo ha de realizarse: φ puede ser un fenómeno nuevo o puede estar en conflicto con la teoría de trasfondo.

(iii) Los resultados (α), son los distintos productos de un proceso abductivo: hechos, reglas o hasta nuevas teorías.

Como puede notarse, en esta caracterización de la abducción, la noción de inferencia no está fija; es sólo un parámetro de los argumentos explicativos que puede manejarse de forma independiente. De acuerdo con Aliseda [Aliseda, 2006], la abducción no es una nueva noción de inferencia, sino una práctica de razonamiento científico, que puede ser usada por distintos tipos de inferencias lógicas o procesos computacionales[1].

De acuerdo con Peirce [Peirce, 1958], quien dio a la abducción su nombre y su forma lógica, un razonamiento abductivo es propiciado por un fenómeno sorprendente. La cualidad de sorpresa de un hecho depende de la teoría que respalda a los hechos esperados, por lo que Aliseda interpreta un hecho sorprendente como aquél que necesita de una explicación; es decir, el que la teoría de trasfondo no logra explicar.

A diferencia del enfoque computacional propuesto por Kakas, Kowalski y Toni [Kakas et al., 1992], en el cual únicamente se considera a la novedad como detonante, Aliseda identifica dos detonantes para el razonamiento abductivo:

Novedad abductiva. Ocurre cuando el hecho sorprendente, φ, es un hecho nuevo, es decir, ni él ni su negación pueden ser explicados por la teoría de trasfondo.

$$\Theta \not\Rightarrow \varphi, \quad \Theta \not\Rightarrow \neg\varphi$$

[1] Si bien el trabajo de Aliseda [Aliseda, 2006] no es el único ni el primero que ha estudiado a la abducción, sí es un trabajo en el que se incluye un recuento de los estudios anteriores, los cuales han realizado contribuciones importantes al área.

Anomalía abductiva. Ocurre cuando el hecho sorprendente, φ, es anómalo, es decir, la teoría explica su negación.

$$\Theta \not\Rightarrow \varphi, \quad \Theta \Rightarrow \neg\varphi$$

En el presente trabajo, se denotará por $\langle \Theta, \varphi \rangle$ al problema abductivo conformado por la presencia de un hecho sorprendente (novedoso o anómalo) φ con la teoría de trasfondo Θ.

Los resultados de un proceso abductivo pueden ser hechos, reglas o incluso nuevas teorías. En ocasiones basta con un hecho para explicar una observación sorprendente; sin embargo, en otros casos, la mera adición de un hecho a la teoría no será suficiente para explicar el hecho sorprendente. En estas ocasiones tal vez sea inevitable la definición de nuevas reglas y aun más: es posible que agregar hechos o reglas a la teoría, no sea suficiente, por lo que resulte ineludible la construcción de una nueva teoría.

1.2 Abducción en lógica clásica

Aliseda [Aliseda, 2006] propone una caracterización de la abducción en la que distingue entre cinco distintas versiones de una explicación abductiva, que conforman los estilos plano, consistente, explicativo, mínimo y preferencial de una explicación abductiva; estos estilos están basados en los criterios propuestos por Kakas [Kakas et al., 1992]. Aliseda también señala que una versión completa de la abducción tendría en cuenta todas las versiones antes señaladas; por tal razón, en el presente trabajo, se considerará que, dada una teoría Θ y una fórmula φ, α es una explicación si

1. $\Theta \cup \{\alpha\} \Rightarrow \varphi$.[2]
2. α es consistente con Θ.
3. α es minimal.
4. α tiene una restricción sintáctica.

[2] $\Rightarrow$ no es necesariamente la inferencia clásica; puede tratarse de cualquier tipo de inferencia lógica.

La primera condición es fundamental para la definición de una explicación a un hecho novedoso, ya que destaca la necesidad de que la teoría y la explicación den cuenta del hecho observado. El segundo requisito impone la condición de que la explicación no contradiga a la teoría, pues podrían entonces proponerse explicaciones triviales. La tercera condición trata sobre la minimalidad de la explicación.

El criterio de minimalidad puede cambiar junto con el problema abductivo que se trate. En ciertos contextos, puede referirse a la mejor explicación y en otros a la explicación preferida. Al hablar de la explicación minimal como la explicación preferida, debe definirse un orden de preferencia para las posibles explicaciones. Si, por el contrario, se habla de mejor explicación como aquélla que agregue menos a la teoría, entonces se hace referencia a la explicación más débil. Al exigir que α sea minimal y no mínima, se reconoce que puede haber varias fórmulas que satisfagan igualmente el criterio impuesto (explicación preferida o explicación más débil).

Diremos que α es la explicación abductiva más débil para φ con la teoría Θ si y sólo si

1. $\Theta, \alpha \models \varphi$

2. Para toda fórmula β tal que $\Theta, \beta \models \varphi$, se tiene que $\models \beta \to \alpha$

Sin embargo, debe notarse que $\alpha = \Theta \to \varphi$ es siempre la explicación más débil. Evidentemente, al buscar una explicación abductiva, no es deseable que α sea la explicación trivial, por lo que es primordial descartar este caso.

Por último, se requiere de una restricción sintáctica, mediante ésta es posible establecer que la explicación debe ser atómica o una conjunción de fórmulas atómicas. Este requisito, junto con la minimalidad, tiene como fin obtener explicaciones abductivas simples.

Una condición adicional que no siempre se menciona de manera explícita es $\Theta \not\models \varphi$, aunque ésta, más que un requisito para una solución abductiva es una condición para un problema abductivo, por lo que usualmente se le conoce como *precondición para un problema abductivo*. Dicha condición asegura que el hecho que se quiere explicar no sea de antemano explicado por la teoría Θ.

1.3 Abducción como proceso

El problema de tener un mecanismo sistemático para hallar una explicación abductiva en lógica clásica ha sido ampliamente estudiado, especialmente en el caso de la lógica proposicional. A continuación se realiza una breve revisión de algunos de los procedimientos hasta ahora propuestos.

1.3.1 Tableaux Semánticos

Los *tableaux semánticos* son un procedimiento semántico y sistemático, de búsqueda de un modelo que cumpla ciertos requisitos, así como un procedimiento sintáctico de prueba de teoremas. Consisten en el despliegue sistemático de las condiciones de verdad de las fórmulas en estudio y muestran la consecuencia mediante un procedimiento refutativo, basado en que

$$\Gamma \models C \text{ si y sólo si } \Gamma \cup \{\neg C\} \text{ es insatisfactible.}$$

En su artículo *Computing Abduction in Semantic Tableaux* [Aliseda, 1998], Aliseda propone un método para encontrar explicaciones abductivas mediante tableaux semánticos en lógica proposicional[3].

La principal idea de utilizar tableaux semánticos para resolver problemas abductivos en lógica proposicional, se basa en el hecho de que cuando φ no es una consecuencia lógica de Θ, entonces puede pensarse en corregir el contraejemplo encontrado para reparar la teoría. Esto mediante la inclusión de premisas para lograr que φ sea consecuencia lógica de alguna extensión de Θ.

Algunos conceptos importantes para el manejo de tableaux semánticos se presentan a continuación:

Definición 1.3.1. Rama: Sucesión de fórmulas que se obtienen a partir de la raíz de un tableau mediante la aplicación de las reglas de expansión[4].

[3] El método de tableaux semánticos en lógica proposicional tiene antecedentes en el trabajo de Mayer y Pirri [Mayer y Pirri, 1993].

[4] Para una introducción a los tableaux y sus reglas para lógica proposicional y de primer orden puede consultarse el trabajo de Nepomuceno [Nepomuceno, 2003]. D'Agostino et al. [D'Agostino et al., 1999] realizan una compilación detallada de los tableaux y sus aplicaciones.

Definición 1.3.2. Rama cerrada: Una rama que contiene una fórmula y su negación.

Definición 1.3.3. Rama abierta: Una rama que no está cerrada.

Dada una rama abierta Γ y una fórmula γ, dicha rama puede extenderse de las siguientes maneras:

Extensión abierta. $\Gamma + \gamma = \delta_1 \cup \ldots \cup \delta_n$ es una extensión abierta si y sólo si cada δ_i es una rama abierta.

Extensión cerrada. $\Gamma + \gamma = \delta_1 \cup \ldots \cup \delta_n$ es una extensión cerrada si y sólo si cada δ_i es una rama cerrada.

Extensión semicerrada. $\Gamma + \gamma = \delta_1 \cup \ldots \cup \delta_n$ es una extensión semicerrada si y sólo si por lo menos una δ_i es una rama abierta y una δ_j es una rama cerrada ($i \neq j$ porque una misma rama no puede estar abierta y cerrada a la vez).

Un problema abductivo puede formularse en el marco de los tableaux semánticos como un proceso de expansión, cuyo fin será extender un tableau con fórmulas que cierren ramas abiertas.

Para calcular explicaciones abductivas consistentes, Aliseda [Aliseda, 1998] propone el siguiente método:

1. Generar todas las fórmulas α para las que $(\Theta + \alpha)$ es una extensión semicerrada.

2. Seleccionar todas las fórmulas α producidas en el paso anterior, para las que $((\Theta + \neg\varphi) + \alpha)$ es una extensión cerrada.

El proceso de cálculo de abducciones consistentes se divide en la búsqueda de explicaciones de tres tipos distintos: atómicas, conjuntivas y disyuntivas. Mediante el método propuesto se garantiza que las explicaciones encontradas serán consistentes y mínimas, es decir, no se producen explicaciones redundantes ni triviales.

Asimismo, Reyes et al. abordan el tema de la aplicación de procedimientos abductivos en lógica de primer orden [Reyes et al., 2006], campo que hasta entonces no se había explorado a profundidad[5]. Debido a la indecidibilidad de la satisfacción en la lógica de primer orden, el problema de la abducción en dicha lógica se consideraba intratable. Sin embargo, teniendo en cuenta que existen fragmentos decidibles de esa lógica, surge la inquietud por determinar si es posible tratar el problema de la abducción de primer orden para modelos de cardinalidad finita.

Con el objetivo de limitar el problema de la abducción en la lógica de primer orden, se trabaja con algunos de los conceptos propuestos por Nepomuceno [Nepomuceno, 1999] para tratar únicamente con modelos de cardinalidad finita. Se dice que un modelo es de cardinalidad n si su universo de discurso tiene cardinalidad n.

- *n-satisfactibilidad*, denotada por $\mathcal{M} \models_n \varphi$, que indica que $\mathcal{M}$ es un modelo de cardinalidad n y $\mathcal{M} \models \varphi$.

- *n-consecuencia lógica*, denotada por $\Gamma \models_n \varphi$, que indica que, para cualquier modelo $\mathcal{M}$ de cardinalidad n, si $\mathcal{M} \models \Gamma$, entonces $\mathcal{M} \models \varphi$.

Reyes introduce la noción de *problema n-abductivo*. Dado un conjunto de fórmulas Θ y una fórmula φ, se dice que $\langle \Theta, \varphi \rangle_n$ es un *problema n-abductivo*, si cumple que:

$$\Theta \not\models_n \varphi \text{ y } \Theta \not\models_n \neg\varphi$$

Reyes también se apega a la caracterización de la abducción antes descrita, sólo que trabaja con las nociones de satisfactibilidad y consecuencia lógica modificadas para adaptarse a los modelos de cardinalidad finita presentados con anterioridad, por lo cual, una *solución n-abductiva*, que es la solución a un *problema n-abductivo*, se define como sigue:

Sea $\langle \Theta, \varphi \rangle_n$ un *problema n-abductivo* y α una fórmula del lenguaje de la lógica de primer orden; α es una *solución n-abductiva* para $\langle \Theta, \varphi \rangle_n$ si:

1. $\Theta \cup \{\alpha\} \models_n \varphi$

2. $\Theta \cup \{\alpha\}$ es mínimamente *n-satisfactible*, es decir, $\Theta \cup \{\alpha\} \not\models_n \bot$

[5] Un estudio preliminar en abducción de primer orden es el realizado por Mayer y Pirri [Mayer y Pirri, 1993].

3. $\alpha \not\models_n \varphi$

Reyes hace uso también de una extensión de los tableaux, a la cual nombra $\mathcal{N}$-*tableaux*, los cuales están basados en los DB-tableaux, pero especialmente diseñados para el tratamiento de problemas abductivos. En los $\mathcal{N}$-*tableaux*, además de las reglas usuales para tableaux semánticos en lógica proposicional, se tienen las siguientes reglas:

- γ-regla

$$\frac{\forall x \varphi}{\begin{array}{c}\varphi(b_1/x)\\ \varphi(b_2/x)\\ \vdots\\ \varphi(b_n/x)\end{array}}$$

- $\delta_{\mathcal{N}}$-regla

$$\frac{\exists x \varphi}{\varphi(c_1/x) \mid \ldots \mid \varphi(c_n/x)}$$

Aunque Reyes únicamente proporciona un mecanismo detallado para encontrar soluciones abductivas atómicas, mas no proporciona el detalle de cómo seleccionar y producir explicaciones conjuntivas, el bosquejo de la solución a este problema resulta un gran avance en el tratamiento de la abducción en lógica de primer orden.

1.3.2 Pruebas orientadas a metas

Meheus y Provijn han presentado un procedimiento sistematizado para encontrar explicaciones abductivas mediante el uso de pruebas orientadas a metas [Meheus y Provijn, 2007]. Asimismo, realizan un análisis del procedimiento propuesto por Aliseda para el razonamiento abductivo, basado en tableaux semánticos [Aliseda, 2006].

De acuerdo con Aliseda, una explicación α para el problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ no es redundante si es una fórmula atómica o si ninguna subfórmula de α, distinta de φ, es una explicación abductiva. Meheus y Provijn argumentan que el procedimiento descrito por Aliseda no garantiza que las explicaciones no sean redundantes y tampoco se garantiza la consistencia en las explicaciones abductivas conjuntivas.

También exponen algunos casos para los que, siguiendo el procedimiento propuesto, se llega a explicaciones redundantes y a explicaciones inconsistentes. Dichos casos parten de teorías *deficientes* y, aunque las malas teorías conducen a malas explicaciones, Meheus y Provijn aseguran que, ante un mundo tan complejo y desordenado, muchas veces es necesario trabajar con malas teorías y, es por eso, que se necesita de un método capaz de generar explicaciones aun con teorías deficientes.

Para dar solución a los problemas abductivos detonados por novedad presentan las pruebas orientadas a metas, en las cuales los elementos del proceso de búsqueda que ocurren en la prueba de $\Gamma \vdash G$, se incluyen en la prueba misma. En una prueba orientada a metas, las fórmulas derivadas tienen la forma

$$[B_1, \ldots, B_n]\, A$$

que indica que la fórmula A se deriva, bajo la condición de que $B_1, \ldots$ y B_n se cumplan. También presenta sus reglas de derivación y de marcaje de fórmulas. Este marcaje de fórmulas consiste en señalar cuáles líneas de la prueba ya no son de utilidad para la derivación de la meta; esto puede suceder debido a la ocurrencia de redundancias, inconsistencias o ciclos.

Posteriormente realizan la comparación de las dos soluciones expuestas para problemas abductivos: mediante tableaux semánticos [Aliseda, 2006] y con pruebas orientadas a metas [Meheus y Provijn, 2007]. Los autores aseguran que la abducción mediante pruebas orientadas a metas es más eficiente que aquélla basada en tableaux semánticos, porque sólo se incluyen las premisas relevantes a la prueba, reduciendo de esta manera el espacio de búsqueda de explicaciones. Sin embargo, no ofrecen un estudio detallado que asegure que es efectivamente más eficiente.

Además, dicho método puede manejar adecuadamente los problemas de redundancia, inconsistencia y autoexplicaciones que se encontraron en el procedimiento basado en tableaux. A pesar de no contar con la generación de explicaciones disyuntivas, y que, de acuerdo con los autores, no parece estar al alcance una forma adecuada de abordar dicho problema, se asegura que dicho método es más eficiente que el de Aliseda ya que no genera explicaciones inconsistentes ni redundantes.

Es importante resaltar que en los trabajos presentados en esta sección no se lleva a cabo un análisis minucioso de la complejidad de los algoritmos propuestos por los autores; sin embargo, Eiter et al. han realizado un estudio de la complejidad computacional de la abducción en la lógica proposicional [Eiter y Gottlob, 1995]. En dicho trabajo, los autores abordan tres aspectos de los problemas abductivos: existencia de una solución; relevancia de una hipótesis en la solución; y si una hipótesis figura en todas las soluciones aceptables del problema abductivo. Asimismo, realizan una breve revisión de estudios anteriores sobre la complejidad de los problemas abductivos (aunque no todos los trabajos anteriores consideran el enfoque lógico de la abducción).

1.4 Limitaciones de la abducción en la lógica clásica

Hasta ahora se han analizado distintos tratamientos de la abducción como proceso en la lógica clásica, es decir, donde el parámetro inferencial $\Rightarrow$ es la relación de consecuencia clásica. Todos ellos están basados en la caracterización expuesta previamente. Las definiciones de problema y solución abductiva abordadas están guiadas por la lógica clásica, pero ¿qué ventajas traería su tratamiento en lógicas no clásicas? Quizá mediante el uso de lógicas no clásicas sea posible abordar problemas abductivos en teorías inconsistentes o resolver una gama más amplia de problemas.

Las facetas de la abducción que no son reconocidas por la caracterización usual en la lógica clásica que se estudiarán en este trabajo son:

1. Abducción sin detonantes.
2. Abducción en teorías inconsistentes.
3. Abducción detonada por anomalía.
4. Abducción estructural.

1.4.1 ¿Abducción sin detonantes?

La taxonomía para la abducción propuesta por Aliseda señala que únicamente los hechos sorprendentes son detonantes del proceso abductivo. Dicha restricción limita el tipo de problemas a los que la abducción puede aplicarse. Ciertamente, una de las principales *tareas* que se le han asignado a la abducción es la generación de explicaciones para hechos inesperados y de los cuales la teoría no puede dar cuenta. Sin embargo, es posible abordar otros problemas si a esa condición se le otorga flexibilidad.

Un claro ejemplo de esto es el tratamiento que D'Agostino et al. dan a la abducción [D'Agostino et al., 2008]. En él, no restringen el problema abductivo a la búsqueda de explicaciones para hechos sorprendentes, sino que además, buscan aplicar un procedimiento abductivo a teorías en las que no hay hechos sorprendentes, sino en las que simplemente se busca generar pruebas más simples.

D'Agostino propone una generalización de la abducción tradicional para realizar dos tareas:

Generación de hipótesis. Si $\Theta \nvdash \varphi$ y $\Theta \nvdash \neg\varphi$, entonces se requiere encontrar un enunciado α tal que $\Theta \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$.

Generación de lemas. Si $\Theta \vdash \varphi$, entonces puede encontrarse un enunciado α tal que $\Theta \vdash \alpha$ y la prueba de $\Theta \cup \{\alpha\} \vdash \varphi$ sea más simple que la de $\Theta \vdash \varphi$.

Es decir, se expande la visión "explicacionista" de la abducción, para adoptar una visión "simplificacionista" de ella. En este caso, la hipótesis abducida α, puede verse como el cálculo de una *fórmula de corte*, lo cual permite usar la inferencia de corte para *unir* ambas pruebas.

Se define la regla de corte como sigue:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \quad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

La regla de corte establece que si A—posiblemente junto con otras fórmulas—puede derivarse a partir de un conjunto de premisas Γ_1 y ésa misma A puede usarse como parte de las premisas que permiten la derivación del conjunto de fórmulas Δ_2, entonces A puede eliminarse y las derivaciones involucradas pueden unirse.

Debido a la introducción de la regla de corte, resulta conveniente utilizar los KE-tableaux (propuestos anteriormente por D'Agostino y Mondadori [D'Agostino y Mondadori, 1994] para incorporar la regla de corte en las pruebas mediante tableaux semánticos), que son capaces de simular el cálculo de secuentes mediante la utilización de cortes. Dado que los KE-tableaux tienen propiedades computacionales deseables y que el uso de la regla de corte puede restringirse para preservar las propiedades de las pruebas sin corte, se asegura que éste es un método superior al uso de los tableaux convencionales.

Los KE-tableaux manejan *fórmulas con signos* y cada conectiva lógica está asociada a un conjunto de reglas de expansión lineales, también llamadas *reglas de eliminación*. La única regla que puede *dividir* las ramas de un KE-tableaux es la del *principio de bivalencia*, que expresa que una fórmula debe ser verdadera o falsa.

Para realizar abducción basada en cortes, se parte de intentar construir una KE-prueba para la consecuencia a la que se quiere agregar una hipótesis α hasta que ésta se detenga con un KE-tableau completo y después generar la hipótesis abducida, mediante el procedimiento abductivo propuesto (*abducción estática*).

Al tratar generación de lemas, el procedimiento cambia ligeramente, ya que, en lugar de generar un KE-tableau completo, es posible detenerse antes de terminar la prueba y realizar la abducción sobre el KE-tableau incompleto (*abducción dinámica*). Si la *abducción dinámica* no se realiza de manera correcta, podría llevar a procedimientos computacionalmente muy costosos y que no garanticen una prueba más eficiente para la consecuencia tratada.

Al respecto, D'Agostino analiza dos tipos de abducción dinámica: *ingenua* e *iterada*. En la primera, la abducción se realiza después de haber aplicado todas las reglas de expansión lineal y se abduce la *hipótesis menos comprometedora*. En la segunda, se elige una fórmula φ a eliminar y se construye un tableau completo para todas las fórmulas que la contengan; posteriormente para cada rama abierta $\mathcal{B}$, se calcula su hipótesis y ésa es la fórmula abducida.

Es primordial notar que el algoritmo para realizar abducción dinámica es parcialmente correcto. Esto es porque el éxito del mismo depende de la heurística que se elija al realizar la abducción dinámica iterada. Si se escoge una mala heurística, es posible que nunca se llegue a los resultados esperados.

D'Agostino manifiesta que, aunque el procedimiento abductivo propuesto no es exclusivo de los KE-tableaux, sí se comporta mejor en ellos que en los tableaux estilo Smullyan[6]. Con los tableaux estilo Smullyan es posible llegar a ramas que no son lógicamente independientes, lo cual produce explicaciones redundantes. En contraste, esto no puede suceder si se aplica el mismo procedimiento abductivo a un KE-tableau.

Como se ha dicho, la visión de la abducción propuesta por D'Agostino, no se apega a la caracterización usual de la abducción. En ese enfoque sí tiene sentido realizar abducción aun cuando el hecho φ sí se siga de la teoría de trasfondo Θ, es decir, cuando $\Theta \models \varphi$. Entre los beneficios de dar este tratamiento a la abducción, se encuentra el no tener que garantizar con anticipación si el hecho se sigue o no de la teoría. En caso de que sí se siguiera, el procedimiento arroja como resultado hipótesis que pueden agregarse para construir una prueba más compacta del hecho; en caso de no seguirse, entonces se obtiene una explicación abductiva a dicho hecho.

El no limitar el alcance de la abducción a la búsqueda de explicaciones de hechos sorprendentes resulta en una herramienta poderosa para la generación de lemas, que sirven para la construcción de pruebas más simples.

1.4.2 Abducción en teorías inconsistentes

Una de las condiciones de la caracterización de la abducción que limita el poder de la misma, es que se requiere que una explicación abductiva sea consistente con la teoría de trasfondo, lo cual nos impide tratar con teorías inconsistentes. Tal vez podría argumentarse que las teorías inconsistentes no son de interés para la búsqueda de explicaciones; sin embargo, encontramos inconsistencias durante nuestro razonamiento diario y eso no nos detiene para

[6] Los tableaux estilo Smullyan son aquéllos en los que se tienen fórmulas con signos que indican si la fórmula ha de ser verdadera o falsa y cuentan con reglas de clase α y de clase β, así como reglas de expansión que consideran los signos de las fórmulas para determinar con cuál fórmula debe extenderse el tableau [Smullyan, 1995].

formular explicaciones a hechos sorprendentes. En el razonamiento de todos los días, nos vemos forzados a trabajar no sólo con información incompleta, sino también con información inconsistente.

En vista de que tal requerimiento viola la condición de consistencia para una solución abductiva, resulta adecuado considerar el replanteamiento de dicha limitación. No obstante, hay que realizar tal replanteamiento cuidadosamente. No es deseable que cualquier fórmula pueda ser considerada una solución a un problema abductivo; no debe sacrificarse la correctez del procedimiento abductivo para poder manejar teorías inconsistentes. Al contrario, se busca trabajar con teorías inconsistentes de la manera más consistente posible.

En este contexto, es conveniente enfatizar la distinción entre una teoría trivial y una teoría inconsistente: una teoría trivial es aquélla que implica todas las posibles consecuencias; una teoría inconsistente tiene contradicciones. En lugar del requerimiento de abducción consistente, podría involucrarse a la consecuencia no trivial [Carnielli et al., 2005], en la cual se establece que C es consecuencia de Θ y φ—lo cual se denota como $\Theta, \varphi \Rightarrow C$—si $\Theta \cup \{\varphi\}$ no es trivial, es decir, si existe una ψ tal que $\Theta, \varphi \not\Rightarrow \psi$.

El hecho de exigir que una explicación sea consistente con la teoría, impide el tratamiento de problemas abductivos en teorías inconsistentes, por eso resulta más conveniente exigir que la explicación junto con la teoría no sean triviales, es decir, que no impliquen todas las posibles consecuencias. De esta manera se mantiene la exigencia de consistencia en la lógica clásica, permitiendo al mismo tiempo el manejo de otras lógicas en problemas abductivos.

1.4.3 Abducción detonada por anomalía

Un punto de la caracterización de las explicaciones abductivas que conviene destacar es aquél en el que se dice que para un problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$, una solución α debe satisfacer $\Theta \cup \{\alpha\} \models \varphi$. Debe notarse que cuando el problema abductivo que se aborda no es un problema abductivo por novedad, sino por anomalía, la explicación abductiva que se busca no cumplirá con el requisito de $\Theta \cup \{\alpha\} \models \varphi$.

En el caso de un problema abductivo por novedad, tiene sentido realizar tal exigencia debido a que el hecho a explicar, φ, no entra en contradicción con la teoría Θ, por lo que éste puede ser explicado mediante una expansión, es decir, a través de la incorporación de nuevas fórmulas a Θ. Sin embargo, para un problema abductivo por anomalía, es decir, aquél en el que $\Theta \models \neg\varphi$, esta restricción para la caracterización de una solución abductiva, no resulta adecuada.

Para resolver un problema abductivo detonado por la observación de una anomalía, es ineludible una revisión de la teoría de trasfondo. Para tal fin, es necesario eliminar y agregar fórmulas de Θ. Las fórmulas a desecharse serán aquéllas que entren en contradicción con el hecho a explicar o bien fórmulas que tengan como consecuencia una fórmula que resulte en una contradicción con el hecho a explicar. Las fórmulas que se deberán incorporar en la teoría pueden ser, bien el hecho a explicar, o bien fórmulas que tengan como consecuencia tal hecho.

Aunque se han abordado problemas en los que se requiere de una revisión y una actualización de la teoría [Ginsberg, 1988, Shrager y Langley, 1990, Peng y Reggia, 1990, Aravindan y Dung, 1994], tales tratamientos no se han realizado desde el punto de vista lógico. Es por esto que se considera que los problemas abductivos detonados por una anomalía han sido poco abordados, principalmente porque para resolver este tipo de problemas es imprescindible la revisión de la teoría de trasfondo, con las añadiduras y reducciones que ésta supone[7].

Un ejemplo por excelencia en Filosofía de la Ciencia, en donde una revisión de la teoría resulta necesaria, es el caso del razonamiento usado por Kepler para determinar que las órbitas de los planetas son elípticas y no circulares [Aliseda, 2006] (véase capítulo 2).

En este trabajo se realiza un estudio de las *lógicas adaptativas*[8] y cómo éstas pueden auxiliar en la solución de problemas abductivos detonados por anomalía [Batens, 2002]. En la literatura existente pueden encontrarse varios

[7]Aliseda ha realizado un tratamiento de los problemas abductivos anómalos basado en tableaux semánticos para realizar la revisión mediante contracciones globales y locales [Aliseda, 2006] (cf. capítulo 8).

[8]Las *lógicas adaptativas* cuentan con una lógica subyacente, llamada *Lógica Límite Inferior* (LLI) que sirve de base para interpretar una teoría tan normalmente como sea posible, de acuerdo con un estándar de normalidad determinado por un conjunto de anormalidades (formas lógicas que se tomarán por falsas mientras no se demuestre lo contrario) y una estrategia adaptativa. Estas lógicas serán presentadas con detalle en el capítulo 2.

casos de lógicas adaptativas capaces de abordar problemas abductivos detonados por novedad; por este motivo, el estudio de las lógicas adaptativas resultaba atractivo para investigar su aplicación en la solución de problemas abductivos anómalos. Asimismo, existen lógicas adaptativas capaces de tratar con teorías inconsistentes.

Si se toma en cuenta que para resolver problemas abductivos detonados por anomalía, debe de tratarse con una teoría inconsistente (la teoría original junto con el hecho anómalo), así como determinar qué fórmulas deben agregarse a la teoría revisada para que pueda dar cuenta del hecho observado, resultan claras las ventajas que podrían tenerse al utilizar lógicas adaptativas en la solución de problemas abductivos detonados por un hecho anómalo. Como se verá más adelante, las lógicas adaptativas constituyen una herramienta atractiva y un marco lógico ideal para tratar con tales problemas.

Mediante el uso de una lógica adaptativa que tenga como *lógica límite inferior* (LLI) a una lógica paraconsistente (como CLuN)[9] y como conjunto de anormalidades no únicamente a $\{(\exists x)(A(x) \wedge \neg A(x))\}$ sino también a $\{(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge B(b) \wedge \neg A(b)\}$,[10] se estaría combinando el potencial de dos lógicas adaptativas. Tal potencial puede utilizarse para detectar los fragmentos de la teoría que no entran en contradicción con el hecho a explicar.

1.4.4 Cambio de sistemas lógicos

Además de los aspectos tratados anteriormente, resultaría interesante analizar si los métodos hasta ahora propuestos para la abducción en lógica clásica pueden emplearse en el proceso de solución de problemas abductivos en otras lógicas, como la modal. De esta forma podría llegarse a procedimientos para resolver problemas abductivos en lógica epistémica o temporal.

Asimismo, podrían explorarse nuevas nociones de abducción, como es el caso de la *abducción estructural*, en la cual es la lógica subyacente la que exige un cambio y no la teoría. Es decir, en ella no se requiere de un cambio en la

[9] CLuN es una lógica paraconsistente que se forma mediante la parte positiva de la lógica clásica; en ella no se valida el *Silogismo Disyuntivo*; esta lógica será presentada con detalle en el capítulo 2.

[10] El conjunto $\{(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge B(b) \wedge \neg A(b)\}$ se refiere a aquellas fórmulas en las que no puede aplicarse el formato abductivo.

teoría para dar cuenta del hecho sorprendente; por el contrario, se exige un cambio en la relación de satisfactibilidad para que ésta permita dar cuenta del hecho observado sin alterar la teoría.

1.5 Objetivos y capitulado

Hasta ahora, la abducción en lógica clásica ha sido ampliamente estudiada; sin embargo, todavía se encuentra carente de caracterización en lógicas no clásicas. Debido a que se caracteriza a la abducción sin estar atada a una lógica en particular, sino que puede usarse con distintas nociones de inferencia, surge la inquietud por tratar a la abducción en lógicas en las que no se ha explorado tal opción hasta este momento.

En el capítulo 2 se elaborará una revisión panorámica de las *lógicas adaptativas*; se presentarán las motivaciones que dieron origen a tales lógicas, se mostrarán sus pruebas y su *formato estándar*[11]. Posteriormente se expondrán dos casos de lógicas adaptativas: una para tratar teorías con inconsistencias y otra capaz de resolver problemas abductivos por novedad. Con el fin de dar tratamiento a los problemas abductivos detonados por anomalía, se expondrá una manera en la que es posible combinar lógicas adaptativas y se abordará la modificación de su caracterización y sistema de demostración.

En el capítulo 3 se retornará a las limitaciones de la caracterización de la abducción presentadas en la sección 1.4 para proponer modificaciones adecuadas que permitan superar algunas de las limitaciones expuestas. Ulteriormente se examinarán las ventajas y desventajas que las lógicas adaptativas existentes poseen para abordar problemas abductivos detonados por anomalía.

Una de las aportaciones de esta investigación consistirá en definir una nueva lógica adaptativa (LATA^r), que servirá como punto de partida para un procedimiento abductivo basado en las pruebas dinámicas utilizadas por LATA^r. Tal proceso tendrá como fin resolver problemas abductivos detonados por anomalía, sin dejar de lado aquéllos detonados por novedad.

En el capítulo 4 se realizará una revisión de los procedimientos existentes para la solución de problemas abductivos detonados por novedad en la lógica

[11]El formato estándar sirve para definir de manera precisa todas las características que distinguen a una lógica adaptativa.

modal. Asimismo, se expondrá la caracterización de la inferencia abductiva en lógica modal, mediante el tratamiento de problemas abductivos estructurales.

En los problemas abductivos estructurales es la lógica subyacente la que demanda un cambio y no la teoría, es decir, no se requiere agregar ni eliminar fórmulas de la teoría, sino cambiar las propiedades de la relación de accesibilidad entre los mundos, para resolver un problema abductivo dado.

Además de la formalización de las ideas relacionadas con la abducción estructural, sugeridas por Nepomuceno [Nepomuceno, 2009], una de las contribuciones que se pretende alcanzar con esta investigación es la propuesta de un procedimiento para resolver problemas estructurales en lógicas modales.

En el capítulo 5 se ofrecerán las conclusiones que se obtengan después de desarrollar la investigación planteada. Se expondrán las aportaciones originales que se realicen como fruto de esta exploración de la abducción y las lógicas no clásicas. Además se mencionará el trabajo a futuro que queda por desarrollarse.

Capítulo 2

Las Lógicas Adaptativas

En este capítulo se abordarán las motivaciones que han llevado al desarrollo de las lógicas adaptativas, el tipo de razonamiento que modelan, sus pruebas y su caracterización. Asimismo, se expondrán dos casos de lógicas adaptativas: una que es capaz de tratar teorías inconsistentes y otra diseñada para la solución de problemas abductivos por novedad.

Posteriormente se expondrá una manera en la que es posible combinar lógicas adaptativas que compartan ciertas características, se verá de qué forma afecta esto a su caracterización y su sistema de demostración.

2.1 Preliminares

Comúnmente se dice que la lógica es el estudio del razonamiento correcto. Mucho se ha discutido sobre qué es *una lógica* y, tal como es de esperarse al realizar un esfuerzo por definir una noción tan amplia y rica en usos dentro de los más variados contextos, se encuentran diversas posturas al respecto.

Coexisten distintas concepciones de lo que es *una lógica*. En el ámbito matemático puede considerarse como el estudio de las propiedades matemáticas de los lenguajes formales; asimismo, puede pensarse como la relación entre las inferencias válidas y el razonamiento correcto basado en tales inferencias; un tercer intento por definir la *lógica* es como el estudio de un tipo especial de verdades: las verdades lógicas; por último, puede también concebirse como el estudio de las características más generales del razonamiento. [Hofweber, 2009]

Usualmente una lógica se caracteriza mediante una sintaxis y una semántica, es decir, a través de sus relaciones de consecuencia lógica y de derivabilidad, respectivamente. Sin embargo, existen otros medios para describir formalmente una lógica, como el que se tratará en este capítulo y el siguiente: la noción en la que una lógica puede verse como una función que mapea un conjunto de premisas a un conjunto de consecuencias. Diremos entonces que, cuando $\mathcal{W}$ es el conjunto de las fórmulas bien formadas de un lenguaje[1] y $\wp(\mathcal{W})$ el conjunto potencia de las fórmulas bien formadas, una lógica $\mathcal{L}$ está definida como una función $\mathcal{L} : \wp(\mathcal{W}) \rightarrow \wp(\mathcal{W})$. El hecho de que A sea consecuencia de Γ quiere decir que A forma parte del conjunto que la función $\mathcal{L}$ le asigna a Γ.

Antes de proceder a la definición formal de las lógicas adaptativas, se dará una idea informal de éstas y para qué pueden utilizarse. El objetivo de este tipo de lógicas es modelar procesos de razonamiento refutable, es decir, aquéllos en los que una conclusión derivada en cierto punto puede ser revocada después, pero tal vez reconsiderada más adelante.

A diferencia de otras lógicas que tratan con procesos de razonamiento dinámicos, las lógicas adaptativas no requieren de la adición de nuevas premisas para derivar o retirar conclusiones; basta con la obtención de mayor entendimiento de las premisas iniciales, es decir, al *comprender* mejor las premisas de las que se parte, es posible derivar nuevas conclusiones, aun cuando éstas, por tratarse de conclusiones en un proceso dinámico, puedan ser revocadas posteriormente.

La *lógica clásica* (CL) trata con procesos estáticos, por lo que una conclusión derivada no puede revocarse luego, sin importar si se añaden o no premisas, de ahí su carácter *monótono*[2]. Por el contrario, las lógicas adaptativas poseen una naturaleza dinámica; tal característica no se manifiesta únicamente de

[1]Mientras no se especifique lo contrario, el lenguaje a utilizar será el de la lógica clásica de primer orden.

[2]Se dice que una lógica es *monótona* si su relación de consecuencia es *monótona*. Esto es, cuando el conjunto de hipótesis Θ de cualquier fórmula derivada φ, puede extenderse con un conjunto de hipótesis adicionales Δ y aún se deriva φ. Es decir, si $\models$ es una relación de consecuencia monótona y $\Theta \models \varphi$, entonces $\Theta \cup \Delta \models \varphi$.

manera externa (como en las *lógicas no monótonas*[3]), sino también interna; la primera se refiere a la propiedad de *no monotonía* y la segunda al mejor entendimiento de las premisas.

Una lógica adaptativa se adapta al conjunto de premisas al cual se aplica, es decir, las premisas determinan cuáles inferencias son correctas. La finalidad de las lógicas adaptativas es interpretar el conjunto de premisas tan *normalmente* como sea posible, con respecto a un estándar específico de normalidad [Batens, 2002].

No debe resultar extraño que una lógica se adapte al conjunto de premisas al que se aplica. Sea $Cn(\Theta)$ el conjunto de consecuencias del conjunto de premisas Θ. Si se considera que $Cn(\Theta)$ depende de Θ, es comprensible que la presencia de ciertas premisas impida la derivación de una fórmula.

2.2 El formato estándar

En un inicio, no se sabía si las lógicas adaptativas compartían una estructura en común; fue después del estudio de varias de las lógicas adaptativas conocidas y de las propiedades que éstas compartían, que se logró encontrar esa estructura común, conocida hoy en día como *formato estándar*. Incluso después de la presentación del formato estándar [Batens, 2002] se definieron diversas lógicas adaptativas que no se encontraban en dicho formato, tales como LA y LA^k [Meheus, 2005][4].

De acuerdo con la definición del formato estándar realizada por Batens [Batens, 2002], una lógica adaptativa LA se define mediante una tripleta:

Lógica Límite Inferior (LLI)[5]. La *Lógica Límite Inferior* es cualquier lógi-

[3]Se dice que una relación de consecuencia es *no monótona* si al agregar premisas, la derivación de las conclusiones a las que se había llegado con anterioridad, ya no puede garantizarse; esto es, tal vez las fórmulas derivadas antes, ya no puedan derivarse. Es decir, si $\models$ es una relación de consecuencia no monótona y $\Theta \models \varphi$, entonces no se sigue que $\Theta \cup \Delta \models \varphi$.

[4]Las lógicas adaptativas LA y LA^k pueden tratar problemas abductivos detonados por anomalía.

[5]El término utilizado en inglés para *Lógica Límite Inferior*, es *Lower Limit Logic*, por lo que en la literatura existente en dicha lengua, se encontrará la abreviatura LLL.

ca cuyas pruebas sean de naturaleza estática[6] [Batens, 2009].

Conjunto de anormalidades. El conjunto de anormalidades Ω es un conjunto de fórmulas bien formadas caracterizadas por un esquema lógico[7], por ejemplo:

$$\{(\exists x)(A(x) \wedge \neg A(x))\}$$

o la unión de varios de dichos conjuntos.

Estrategia adaptativa. La estrategia adaptativa puede ser *Confiabilidad* o *Anormalidad mínima*. Ambas estrategias (que serán presentadas con detalle más adelante) especifican el significado de interpretar las premisas tan normalmente como sea posible, pero cada una lo hace a partir de un criterio distinto.

La LLI es considerada como la parte estable de la lógica adaptativa, aquélla que es independiente de las premisas. Desde el punto de la teoría de la demostración, la LLI proporciona las reglas de inferencia que siempre pueden aplicarse en la prueba; en lo semántico, los modelos adaptativos del conjunto de fórmulas Θ son una selección de los modelos de Θ en LLI.

El conjunto de anormalidades Ω contiene a las fórmulas que habrán de ser consideradas como falsas a menos y hasta que se pruebe que son verdaderas. Son las fórmulas que se suponen falsas hasta que el conjunto de premisas exija lo contrario. El conjunto presentado como ejemplo en la definición del conjunto de anormalidades del formato estándar, corresponde al usado—como se verá más adelante—en una lógica adaptativa que puede tratar con teorías inconsistentes; es claro que en ese tipo de lógicas, se procura considerar a las inconsistencias como falsas siempre que la teoría lo permita.

Si la LLI se extiende con el requerimiento de que ninguna anormalidad sea lógicamente posible, se obtiene como resultado una lógica monótona, llamada *Lógica Límite Superior* (LLS)[8]. La semántica de la LLS se obtiene seleccio-

[6] Una lógica con pruebas estáticas es aquélla en la que una conclusión φ derivada a partir de cierto conjunto de premisas Θ, necesariamente seguirá formando parte de la prueba hasta que ésta concluya y en ningún momento se podrá eliminar a φ de la prueba. Es decir, no pueden derivarse fórmulas y posteriormente excluirlas de la prueba y considerarlas como no derivables. Tal es el caso, por supuesto, de la lógica clásica.

[7] Un esquema lógico es una fórmula en la que aparecen variables esquemáticas. Estas variables esquemáticas representan a cualquier término o subfórmula del lenguaje lógico en cuestión. Es así que un esquema lógico describe a un conjunto de fórmulas del lenguaje.

[8] El término utilizado en inglés para *Lógica Límite Superior*, es *Upper Limit Logic*, por

nando aquellos modelos de la LLI que no verifican ninguna anormalidad.

Es importante notar que un conjunto de premisas puede implicar una disyunción clásica de anormalidades, sin que, partiendo de ese mismo conjunto de premisas, pueda derivarse uno de los disyuntos. Es aquí donde las estrategias adaptativas juegan un papel importante, ya que determinan cuáles fórmulas han de considerarse como *responsables* de la presencia de una anormalidad.

Definición 2.2.1 (Dab-fórmulas)**.** *Las disyunciones de anormalidades son llamadas* Dab-fórmulas[9]*; si* $\Delta \subseteq \Omega$*, entonces la disyunción clásica de todos los elementos de* Δ *es una disyunción de anormalidades y se denota por* $Dab(\Delta)$*.*

Definición 2.2.2 (Dab-consecuencias de Θ)**.** *Las* Dab-consecuencias *de un conjunto de fórmulas* Θ *son las* Dab-fórmulas *que pueden derivarse a partir del conjunto* Θ *de fórmulas.*

Debido a que la disyunción de las *Dab-fórmulas* es clásica, se sabe que si $Dab(\Delta)$ es *Dab-consecuencia* de Θ y Γ es un conjunto de fórmulas, entonces también $Dab(\Delta \cup \Gamma)$ es una *Dab-consecuencia* de Θ; por tal motivo es de interés considerar únicamente a las *Dab-consecuencias mínimas* de Θ.

Definición 2.2.3 (*Dab*-consecuencia mínima)**.** $Dab(\Delta)$ *es una* *Dab*-consecuencia mínima de Θ *si y sólo si* $\Theta \vdash_{\text{LLI}} Dab(\Delta)$ *y no existe* $\Delta' \subset \Delta$ *tal que* $\Theta \vdash_{\text{LLI}} Dab(\Delta')$*.*

Se han propuesto diversas estrategias adaptativas, pero de todas ellas, son dos las que se distinguen por su amplio uso en la definición de lógicas adaptativas: la estrategia de *Confiabilidad* [Batens, 1989] y la de *Anormalidad Mínima* [Batens, 1986]. El significado exacto de las estrategias depende de las definiciones de marcaje—las cuales se presentan en la siguiente sección (véase pág. 30).

Es pertinente notar que la semántica de una lógica adaptativa se define en términos de su LLI, su conjunto de anormalidades y su estrategia adaptativa. Los modelos de una lógica adaptativa LA serán algunos de los modelos de su LLI. La selección de dichos modelos dependerá de su conjunto de anormalidades Ω y su estrategia adaptativa.

lo que en la literatura existente en dicha lengua, se encontrará la abreviatura ULL.

[9]El término *Dab* viene de ***D**isjunction of **ab**normalities.*

Estas lógicas tienen una sintaxis y una semántica bien definidas. Además, al presentar las lógicas adaptativas en su formato estándar se sabe que satisfacen diversas propiedades metalógicas—como la correctez y completez de lógicas adaptativas con la estrategia de *confiabilidad* o con *anormalidad mínima*, que por supuesto dependen de la completez y correctez de la LLI utilizada [Batens, 2007].

2.2.1 Teoría de la demostración

A continuación se presentará la teoría de la demostración de las lógicas adaptativas. Como es de esperarse, sus pruebas son dinámicas y derivan conclusiones que pueden llegar a ser revocadas en etapas posteriores de la prueba y después volver a ser consideradas.

Las pruebas dinámicas de las lógicas adaptativas constituyen una extensión de las pruebas estáticas de CL. Las pruebas en CL son secuencias finitas de fórmulas, cada una de las cuales es una premisa, un axioma o resulta de la aplicación de una regla de inferencia a un subconjunto de las líneas derivadas anteriormente. La última línea de la prueba es lo que se quiere probar. Toda vez que una fórmula se ha derivado en la prueba, ésta no puede invalidarse por ningún medio. En contraste, las pruebas dinámicas de las lógicas adaptativas pueden derivar fórmulas que podrían ser rechazadas posteriormente; la razón por la cual pueden llegar a descartarse es que no cumplan con las condiciones impuestas para su inserción en la prueba.

No debe entenderse que las condiciones surgen sorpresivamente. Las condiciones se establecen desde que la fórmula se deriva en la prueba y se asume que todas las condiciones se cumplen; sin embargo, a medida que se avanza en las *etapas*[10] de la prueba y se adquiere mayor entendimiento de las premisas (*dinámica interna*), es posible determinar que la condición ya no se satisface.

En las pruebas estáticas, usuales en otras lógicas, se tiene comúnmente un

[10]En las lógicas adaptativas se considera que una prueba atraviesa varias *etapas*. Cada vez que se aplica una regla en la prueba se pasa a la siguiente *etapa*. De esta forma es posible hablar de fórmulas derivadas en una etapa s de la prueba, esto es, las fórmulas que hasta dicha etapa satisfacen todas las condiciones que se les impusieron al derivarse en la prueba—incluso si fueron agregadas a la prueba en etapas anteriores.

número de línea, la fórmula derivada y la regla que se aplicó (junto con las líneas a las que se aplicó, si es el caso). Es decir, una prueba estática tiene la siguiente forma:

Número de línea	Fórmula	Regla
1	α	R_1
2	β	$R_2(1)$
3	η	$R_3(1,2)$

Las lógicas adaptativas cuentan con pruebas ligeramente distintas, ya que su *dinámica interna* las obliga a imponer condiciones para las fórmulas derivadas en cierto punto de la prueba. Por tal motivo, resulta conveniente agregar una cuarta columna, en la cual se indican las condiciones que deben satisfacerse para que la línea en cuestión se considere como parte de la prueba. Sin embargo, es importante resaltar que las pruebas en las lógicas adaptativas no son sólo pruebas estáticas con una columna añadida. Las pruebas dinámicas de las lógicas adaptativas cuentan con una noción de prueba distinta: en ella las fórmulas derivadas deben satisfacer ciertas condiciones (las establecidas en la columna de condiciones) para ser consideradas como derivables en la prueba.

La manera en que se definen las condiciones es mediante conjuntos de fórmulas, en particular, conjuntos de anormalidades que, de acuerdo con el espíritu de las lógicas adaptativas, se consideran falsas a menos y hasta que no se muestre lo contrario. Una prueba dinámica para una lógica adaptativa tiene la siguiente forma:

Número de línea	Fórmula	Regla	Condición
1	α	R_1	$\emptyset$
2	β	$R_2(1)$	$\{\gamma, \eta\}$
3	η	$R_3(1,2)$	$\emptyset$

Dado que las condiciones presentadas en la última columna son conjuntos de anormalidades, una línea en una prueba adaptativa puede entenderse como sigue: la fórmula se deriva a menos que uno de los elementos de la condición sea verdadero[11]. Es decir, la línea 2 del ejemplo, puede leerse como: al aplicar

[11]La interpretación de las líneas de la prueba aquí presentada es sólo intuitiva, más adelante se verá que ésta cambia de acuerdo con la estrategia adaptativa que se utilice.

la regla R_2 a la línea 1 se deriva β siempre que tanto γ como η sean falsos. Si en algún momento posterior de la prueba—como ocurre al agregar la línea número 3—γ o η fueren verdaderos, la línea 2 ya no se considerará como parte de la prueba.

La manera de indicar que una línea determinada ya no se considera como parte de la prueba es mediante el marcaje de líneas. Ésta es otra diferencia que las pruebas para las lógicas adaptativas tienen con respecto a las pruebas estáticas: las pruebas para las lógicas adaptativas no se basan únicamente en un conjunto de reglas de deducción, sino que, además, necesitan de una definición de marcaje. Las reglas de deducción permiten la adición de nuevas líneas a la prueba y las definiciones de marcaje permiten quitar líneas a la prueba en alguna etapa.

En el cuadro 2.1 se muestran las reglas de deducción genéricas para las lógicas adaptativas; las reglas de marcaje se presentan más adelante.

$$
\begin{array}{lll}
\textsc{prem} & \text{Si } A \text{ es premisa:} & \begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \hline A & \emptyset \end{array} \\[2em]
\textsc{ri} & \text{Si } A_1, \ldots, A_n \vdash_{\textsc{lli}} B\text{:} & \begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \end{array} \\[2em]
\textsc{rc} & \text{Si } A_1, \ldots, A_n \vdash_{\textsc{lli}} B \vee Dab(\Sigma) & \begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Sigma \end{array}
\end{array}
$$

Cuadro 2.1: Reglas genéricas para las demostraciones en las lógicas adaptativas

La regla PREM simplemente indica que, en cualquier línea de la prueba, una premisa puede introducirse con la condición vacía. La *regla incondicional* (RI) dice que, cuando $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\textsc{lli}} B$ y $A_1, \ldots, A_n$ ocurran en la prueba con las condiciones $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, entonces B puede agregarse a la prueba con la condición $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$; es decir, la regla RI no agrega nuevas condiciones, simplemente hereda aquellas condiciones que ya se hubiesen impuesto a las fórmulas involucradas en la derivación de B.

La *regla condicional* (RC), por el contrario, sí agrega condiciones a la prueba. La razón es la siguiente: si $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\text{LLI}} B \vee Dab(\Sigma)$, entonces la única manera en que se puede garantizar que B sea verdadera es si todos los elementos de Σ son falsos, por tal motivo se agregan todos ellos como condición para B, además de conservar las condiciones que tuvieran las fórmulas involucradas en la derivación de B.

Debe notarse que si una línea tiene de hecho una condición, esta condición sólo puede venir de una o más aplicaciones de la regla RC. Cuando A figura en una prueba con la condición Σ, entonces $A \vee Dab(\Sigma)$ puede derivarse con la condición vacía. Considérese que si $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash_{\text{LLI}} A \vee Dab(\Sigma)$ y además $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ forman parte de la prueba y sus respectivas condiciones son vacías, entonces de acuerdo con la regla RI, $A \vee Dab(\Sigma)$ puede agregarse a la prueba con la condición vacía, es decir

$$\text{Si } \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash_{\text{LLI}} A \vee Dab(\Sigma): \qquad \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \emptyset \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \emptyset \\ \hline A \vee Dab(\Sigma) & \emptyset \end{array}$$

Por otro lado, si se aplica la regla RC, la fórmula A puede agregarse a la prueba con la condición Σ, es decir

$$\text{Si } \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash_{\text{LLI}} A \vee Dab(\Sigma): \qquad \begin{array}{cc} \Gamma_1 & \emptyset \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \emptyset \\ \hline A & \Sigma \end{array}$$

Si la disyunción de los miembros de Σ puede derivarse con la condición vacía, esto se debe a que las premisas requieren que al menos uno de dichos elementos sea verdadero, por lo que un subconjunto de Σ también podría ser derivado con la condición vacía. Si la disyunción de anormalidades $Dab(\Sigma)$ es derivable con la condición vacía y el resultado de eliminar uno o más disyuntos no es derivable con la condición vacía, entonces todos los elementos de Σ

están conectados con respecto a su consistencia, es decir, todos los miembros de Σ deben ser verdaderos.

Debido a que las lógicas adaptativas modelan procesos de razonamiento dinámico, las pruebas en estas lógicas necesitan explicar dicho razonamiento. Como se ha mencionado anteriormente, al nivel de las pruebas, la dinámica necesita controlarse; esto se realiza mediante el establecimiento de condiciones y definiciones de marcaje. Las definiciones de marcaje se encuentran en estrecha relación con la estrategia utilizada, por tal motivo, se tienen distintas definiciones de marcaje para cada una de las estrategias adaptativas. A continuación se introducen algunos conceptos necesarios para realizar las definiciones de marcaje para las dos estrategias consideradas hasta ahora: *confiabilidad* y *anormalidad mínima*. En todas las definiciones siguientes Θ representa a la teoría de la que se parte.

Definición 2.2.4 (Dab-fórmula mínima). *$Dab(\Delta)$ es una Dab-fórmula mínima en la etapa s de la prueba si y sólo si es la fórmula de una línea que tiene a $\emptyset$ como condición y ninguna $Dab(\Delta')$ con $\Delta' \subset \Delta$ es la fórmula de una línea que tiene a $\emptyset$ como condición.*

Definición 2.2.5 (Conjunto de elección). *Sea $\Sigma = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$. Un conjunto de elección de Σ contiene a un elemento de cada uno de los conjuntos que conforman a Σ.*

Definición 2.2.6 (Conjunto de elección mínimo). *Un conjunto de elección Γ de Σ es mínimo si ningún subconjunto propio de Γ es un conjunto de elección de Σ.*

Definición 2.2.7 (Fórmulas no confiables). *Si $Dab(\Delta_1), \ldots, Dab(\Delta_n)$ son Dab-fórmulas mínimas de Θ en la etapa s, el conjunto de fórmulas no confiables en la etapa s es*

$$U_s(\Theta) = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$$

Definición 2.2.8 (Anormalidades mínimas). *Si $Dab(\Delta_1), \ldots, Dab(\Delta_n)$ son Dab-fórmulas mínimas en la etapa s, el conjunto mínimo de anormalidades en la etapa s, denotado por $\Phi_s(\Theta)$, es el conjunto conformado por todos los conjuntos de elección mínimos de $\{\Delta_1, \ldots \Delta_n\}$.*

Los marcajes se definen como sigue:

Definición 2.2.9 (Marcaje para la estrategia de *confiabilidad*)**.** *La línea i, con condición Δ, se marca en la etapa s si y sólo si $\Delta \cap U_s(\Theta) \neq \emptyset$.*

Definición 2.2.10 (Marcaje para *anormalidad mínima*)**.** *La línea i, en la que se deriva la fórmula A con la condición Δ, se marca en la etapa s si y sólo si*

(i) No existe $\Pi \in \Phi_s(\Theta)$ tal que $\Pi \cap \Delta = \emptyset$ o bien

(ii) Para algún $\Pi \in \Phi_s(\Theta)$, no hay una línea en la que se derive A con la condición Θ para la que $\Pi \cap \Theta = \emptyset$.

Cuando se escribe una prueba para una lógica adaptativa, es necesario tener presente cuáles líneas están marcadas y cuáles no lo están. Es importante recordar que únicamente las líneas no marcadas forman parte de la prueba en una etapa determinada. Es entonces primordial definir la manera en que se expresará gráficamente que una línea está marcada. De manera intuitiva, podría preferirse el tachado de una línea; sin embargo, dado que una línea marcada puede desmarcarse en una etapa posterior de la prueba, es preferible utilizar un símbolo que no dificulte la reintegración de la línea a la prueba. Batens y Meheus, principales investigadores en las lógicas adaptativas han optado por colocar la marca ✓, que puede resultar confusa. Por tal motivo, en el presente trabajo se utilizará la marca ✗ para señalar que una línea está marcada y no debe considerarse como parte de la prueba.

Debido a la naturaleza dinámica de las pruebas en las lógicas adaptativas, es necesario introducir la noción de fórmula estable, es decir, una fórmula que para cualquier extensión de la prueba, pueda mantenerse sin marca que la invalide. A esto se refiere el concepto de *derivabilidad final* de una fórmula.

Definición 2.2.11 (Derivabilidad final)**.** *Se dice que A es finalmente derivable a partir del conjunto de premisas Θ en la línea i de una prueba en la etapa s si y sólo si*

(i) A es la fórmula derivada en la línea i.

(ii) La línea i no está marcada en la etapa s.

(iii) Cualquier extensión de la prueba en que la línea i se marque, puede extenderse de manera que la línea i no quede marcada.

Se dice que A es finalmente derivable a partir del conjunto de premisas Θ, $\Theta \vdash_{\text{LA}} A$, si y sólo si A es finalmente derivable en alguna línea y alguna etapa de una prueba cuyo conjunto de premisas sea Θ.

Con esto concluye la presentación del formato estándar de las lógicas adaptativas. En las siguientes secciones se presentarán dos casos de lógicas adaptativas que usan la estrategia adaptativa de *Confiabilidad*.

2.3 CLuN^r: Una lógica adaptativa para teorías inconsistentes

En esta sección se presentará una lógica adaptativa para el tratamiento de teorías inconsistentes: CLuN^r. Como primer paso, se definirá la lógica paraconsistente CLuN, en la cual está basada CLuN^r. Posteriormente, se considerarán ejemplos de pruebas dinámicas en CLuN^r para finalmente proporcionar el formato estándar de CLuN^r.[12]

2.3.1 CLuN

CLuN es un lógica paraconsistente, es decir, en ella puede darse el caso en que $A \wedge \neg A$ sea verdadero sin implicar trivialidad. A continuación se expone intuitivamente el comportamiento de esta lógica.

CLuN conserva toda la lógica positiva, es decir, si

$$A_1, \ldots A_n \vdash_{\text{CL}} B$$

y no ocurre ninguna negación en $A_1, \ldots A_n$ o en B, entonces

$$A_1, \ldots A_n \vdash_{\text{CLuN}} B.$$

CLuN conserva también el *Tercero Excluido* $A \vee \neg A$; sin embargo, no valida el *Silogismo Disyuntivo*

[12] La lógica paraconsistente CLuN recibe su nombre de CL, en la que se permiten excesos (gl**u**ts en inglés) con respecto a la **n**egación [Batens, 1999]. El nombre de CLuN^r está dado por el nombre la lógica en que está basada—CLuN—y un indicador de la estrategia adaptativa utilizada: *confiabilidad* (***r**eliability* en inglés).

$$\frac{\begin{array}{c} A \vee B \\ \neg A \end{array}}{B}$$

Esto ocurre porque si $A \vee B$ es verdadero, entonces A es verdadero o B es verdadero, además $\neg A$ es verdadero, pero A podría ser verdadero junto con $\neg A$, por lo que B podría ser falso. CLuN no valida la doble negación, las reglas de De Morgan ni otras reglas similares que involucran a la negación. Sintácticamente, CLuN consta de toda la lógica positiva clásica más el esquema de axioma $A \vee \neg A$ [Batens, 1999].

2.3.2 Descripción de CLuN^r

CLuN^r es una lógica adaptativa capaz de tratar con teorías inconsistentes. CLuN^r interpreta las teorías tan consistentemente como sea posible, es decir, considera las inconsistencias como falsas, excepto cuando lo teoría lo impida. En esta lógica adaptativa, el estándar de normalidad al que se refiere la estrategia adaptativa es la consistencia.

En CLuN^r, se dice que una fórmula se comporta consistentemente con respecto a un conjunto Θ de premisas si, ya sea la fórmula en sí o su negación, no pueden derivarse a partir de Θ; asimismo, una fórmula se comporta consistentemente a menos y hasta que se pruebe lo contrario.

Si se considera el siguiente conjunto de fórmulas Θ:

$$\Theta = \{p, q, \neg p \vee r, \neg q \vee s, \neg q\}$$

se sabe que

$$\Theta \nvdash_{\text{CLuN}} s \text{ y que } \Theta \nvdash_{\text{CLuN}} r$$

por lo que, de acuerdo con la definición anterior, r y s se comportan consistentemente con respecto a Θ.

Con CLuN^r, lo que se busca es considerar una fórmula de la forma $A \wedge \neg A$ como falsa, mientras y hasta que se pruebe lo contrario, es decir, a menos que las premisas no lo permitan.

Si se observa nuevamente el ejemplo anterior, puede notarse que Θ requiere que $q \wedge \neg q$ sea verdadera, pero no que $p \wedge \neg p$ lo sea. Si todas las fórmulas de Θ son verdaderas y $p \wedge \neg p$ fuera falsa, r sería verdadera. Por lo que se tendría que

$$\Theta \vdash_{\text{CLuN}^r} r$$

2.3.3 Pruebas dinámicas en CLuN^r

Las pruebas dinámicas en CLuN^r siguen las mismas reglas de deducción genéricas presentadas en el cuadro 2.1 y tomando como regla de marcaje aquélla correspondiente a la estrategia de *confiabilidad*.

Como se vio antes, las líneas de una prueba estática estándar constan de tres elementos: (a) un número de línea, (b) la fórmula derivada y (c) una justificación: los números de línea de las fórmulas a partir de las cuales se derivó (b). Las lógicas adaptativas requieren además de una cuarta columna: la condición para la derivación de la fórmula. En CLuN^r la condición corresponde al conjunto de fórmulas que deben comportarse consistentemente para que la fórmula derivada pueda obtenerse de acuerdo con la regla mencionada en (c) a partir de las líneas involucradas.

Ejemplo 2.3.1. *A continuación se muestra cómo procede una derivación en* CLuN^r*. Sea Θ el conjunto de premisas a partir del que se realiza la derivación:*

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x)), (\forall x)(R(x) \wedge S(x)), (\forall x)(\neg R(x) \vee T(x)), \\ \neg P(a), \neg R(a) \end{array} \right\}$$

Para comenzar la prueba, se agregan únicamente las premisas, es decir, todos los elementos de Θ:

1	$(\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x))$	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)(R(x) \wedge S(x))$	PREM	$\emptyset$
3	$(\forall x)(\neg R(x) \vee T(x))$	PREM	$\emptyset$
4	$\neg P(a)$	PREM	$\emptyset$
5	$\neg R(a)$	PREM	$\emptyset$

Para obtener las líneas 6 y 7, se aplica la regla condicional a las líneas 1 y 4, y 3 y 5, respectivamente. La razón por la que puede aplicarse la regla condicional a las líneas 1 y 4 es que

$$\neg P(a), (\forall x)(P(x) \vee \neg Q(x)) \vdash_{\text{CLuN}} \neg Q(a) \vee (P(a) \wedge \neg P(a))$$

una justificación análoga aplica para las líneas 3 y 5.

$$
\begin{array}{llll}
\mathit{6} & \neg Q(a) & \text{RC}\mathit{(1,4)} & \{P(a) \wedge \neg P(a)\} \\
\mathit{7} & T(a) & \text{RC}\mathit{(3,5)} & \{R(a) \wedge \neg R(a)\}
\end{array}
$$

Si se aplica la regla incondicional a la línea 2, se obtiene

$$\mathit{8} \quad R(a) \quad \text{RI}\mathit{(2)} \quad \emptyset$$

Si se aplica la regla incondicional a las líneas 5 y 8, se tiene

$$\mathit{9} \quad R(a) \wedge \neg R(a) \quad \text{RI}\mathit{(5,8)} \quad \emptyset$$

Debe notarse ahora que justamente la fórmula $R(a) \wedge \neg R(a)$ se encuentra contenida en el conjunto de anormalidades que deben ser falsas para que la línea 7 forme parte de la prueba, por lo que dicha línea debe ser marcada para no ser considerada en etapas posteriores de la prueba (pudiendo después ser reincorporada a la prueba).

$$\mathit{7} \quad T(a) \quad \text{RC}\mathit{(3,5)} \quad \{R(a) \wedge \neg R(a)\} \quad ✗$$

2.3.4 Formato estándar de CLuN^r

Ahora que se ha presentado la definición formal de CLuN y la manera en que se desarrolla una prueba en CLuN^r, se introducirá formalmente a CLuN^r, mediante su formato estándar. Como se ha mencionado antes, la lógica en la que está basada CLuN^{r}es CLuN, por lo que ésta será su LLI; el conjunto de anormalidades es aquél caracterizado por el esquema lógico $(\exists x)(A(x) \wedge \neg A(x))$, es decir, las inconsistencias y; por último, su estrategia adaptativa es la *Confiabilidad*.

Entonces, el formato estándar de CLuN^r es el siguiente:

Lógica Límite Inferior. CLuN

Conjunto de anormalidades. $\Omega = \{(\exists x)(A(x) \wedge \neg A(x))\}$

Estrategia adaptativa. Confiabilidad.

2.4 LA^r_s: Una lógica adaptativa para la abducción

En esta sección se presentará una lógica adaptativa que sirve para solucionar problemas abductivos por novedad [Meheus, 2010]. Dicha lógica está basada en CL y su estándar de normalidad consiste en aplicar el formato abductivo[13] tan frecuentemente como sea posible. Es decir, siguiendo la línea característica de las lógicas adaptativas, LA^r_s interpreta un conjunto de premisas tan normalmente como sea posible, lo cual, en este contexto, significa que se aplican pasos abductivos tanto como sea posible[14].

El primer intento realizado para dar solución a problemas abductivos mediante el uso las lógicas adaptativas como herramienta, fue presentado por Meheus [Meheus, 2005] con las lógicas LA y LA^k; sin embargo, como se mencionó antes, tales lógicas no se encuentran en el formato estándar de las lógicas adaptativas. Posteriormente Meheus y Batens [Meheus y Batens, 2006] presentaron la lógica adaptativa LA^r; esta lógica, aunque se encuentra en formato estándar, necesita contar de antemano con un conjunto de fórmulas que constituyen posibles explicaciones para las fórmulas que requieren de una explicación.

La propuesta más reciente elaborada por Meheus [Meheus, 2010] considera una lógica adaptativa en formato estándar que no requiere conocer de antemano el conjunto de fórmulas que constituyen posibles explicaciones. Tal lógica se presenta a continuación.

[13]Se entiende por formato abductivo la siguiente regla:

$$\frac{(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), B(c)}{A(c)}$$

conocida como la *Falacia de Afirmación del Consecuente* en la tradición clásica.

[14]LA^r_s obtiene su nombre del término en inglés ***L**ogic for the **A**bduction of **S**ingular Hypothesis* y un indicador a la estrategia adaptativa que utiliza: confiabilidad (***r**eliability* en inglés).

2.4.1 Formato estándar de LA^r_s

Dado que ya se ha abordado con anterioridad la idea intuitiva detrás de las lógicas adaptativas, esta vez se presentará el formato estándar de LA^r_s antes de los ejemplos de pruebas dinámicas para esta lógica.

LA^r_s tiene como lógica subyacente a CL, por lo que ésta será su LLI. Su conjunto de anormalidades consta de aquellas fórmulas que impiden la aplicación del formato abductivo, es decir, aquéllas en las que el consecuente de la implicación se cumple, mas no así el antecedente. Por último, se utilizará también la estrategia adaptativa de *confiabilidad*.

El Formato Estándar de LA^r_s es el siguiente:

Lógica Límite Inferior. CL

Conjunto de anormalidades.

$$\Omega = \{(\forall x)\,(A\,(x) \to B\,(x)) \wedge (B\,(c) \wedge \neg A\,(c)) \mid \text{ningún predicado que figure en } B(c) \text{ figure en } A(c)\}$$

Estrategia adaptativa. Confiabilidad.

La restricción impuesta en el conjunto de anormalidades para que ningún predicado que ocurra en $B(c)$ ocurra en $A(c)$, es necesaria para garantizar que no se producirán explicaciones redundantes (parciales o no); por lo que, por ejemplo, la fórmula $(\forall x)(P(x) \to P(x)) \wedge (P(a) \wedge \neg P(a))$ no será considerada como una anormalidad.

2.4.2 Pruebas dinámicas en LA^r_s

Las pruebas dinámicas en LA^r_s son empleadas para resolver problemas abductivos por novedad. Si se tiene el problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$,[15] se construye una prueba en la cual se incluyen como premisas todos los elementos de Θ y, con una marca especial, se incluye también φ como premisa. Posteriormente

[15] Para mayor detalle sobre la definición de un problema abductivo, puede consultarse la sección 1.1.1.

se realiza la prueba como se haría con cualquier lógica adaptativa, teniendo en cuenta que una fórmula obtenida mediante la aplicación de la *regla condicional* se considera candidata a ser una explicación del hecho sorprendente φ.

Como es de esperarse, al ser una lógica adaptativa, LA_s^r se rige por las reglas genéricas descritas en el cuadro 2.1; asimismo, considera como conjunto de anormalidades a aquellas fórmulas que impiden la aplicación del formato abductivo.

Es conveniente recordar que, para el caso de un problema abductivo por novedad $\langle\Theta, \varphi\rangle$, α es una explicación si

1. $\Theta \cup \{\alpha\} \Rightarrow \varphi$.[16]
2. α es consistente con Θ.
3. α es minimal.
4. α tiene una restricción sintáctica.

La noción de minimalidad utilizada por LA_s^r es aquélla en la que se considera que una explicación es minimal si no hay ninguna alternativa disponible que sea lógicamente más débil y que también satisfaga las condiciones 1 y 2. De momento, se ha dejado de lado la restricción sintáctica, sin que esto implique necesariamente que tal requerimiento no pueda integrarse posteriormente.

A continuación se presenta un ejemplo en el que puede apreciarse el tipo de explicaciones abductivas que se obtienen con LA_s^r.

Ejemplo 2.4.1. *Si se tiene el problema abductivo $\langle\Theta, \varphi\rangle$ con*

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(P(x) \to R(x)), \\ (\forall x)(S(x) \to \neg P(x)), Q(a) \wedge S(a) \end{array} \right\}$$

y

$$\varphi = Q(b)$$

[16]Como se especificó anteriormente, $\Rightarrow$ no se refiere necesariamente a la inferencia clásica, puede tratarse de cualquier tipo de inferencia lógica. Sin embargo, en el caso específico de los problemas que aborda LA_s^r, $\Rightarrow$ se trata de la inferencia clásica.

se debe realizar una prueba en la que las premisas serán cada uno de los elementos de Θ y, de manera especial, φ. La prueba inicia de la siguiente manera (la marca que distingue al hecho a explicar es $_\bigstar$):

1	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)(P(x) \to R(x))$	PREM	$\emptyset$
3	$(\forall x)(S(x) \to \neg P(x))$	PREM	$\emptyset$
4	$Q(a) \wedge S(a)$	PREM	$\emptyset$
5	$Q(b)$	$\text{PREM}_\bigstar$	$\emptyset$

Si ahora se toma en cuenta que

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), Q(a) \wedge S(a) \vdash_{\text{CL}} P(a) \vee ((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a)))$$

puede aplicarse la regla condicional a las líneas 1 y 4 y agregar la línea:

6	$P(a)$	RC*(1,4)*	$\{(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a))\}$

Si ahora se considera la aplicación de la regla incondicional a las líneas 2 y 6, y 3 y 4, se pueden agregar las líneas 7 y 8, respectivamente

7	$R(a)$	RI*(2,6)*	$\{(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a))\}$
8	$\neg P(a)$	RI*(3,4)*	$\emptyset$

Al aplicar la regla incondicional a las líneas 1,4 y 8, se agrega la línea:

9	$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a))$	RI*(1,4,8)*	$\emptyset$

Ahora debe notarse que la fórmula $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a))$ forma parte de los conjuntos de anormalidades que deben ser falsas en las líneas 6 y 7, por lo que se requiere marcar dichas líneas para no considerarlas como parte de la prueba en etapas posteriores. Entonces se tiene:

6	$P(a)$	RC*(1,4)*	$\{(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a))\}$	✗
7	$R(a)$	RI*(2,6)*	$\{(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(a) \wedge \neg P(a))\}$	✗

Si se toma en cuenta que

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)),\ Q(b) \vdash_{\text{CL}} P(b) \vee ((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(b) \wedge \neg P(b)))$$

y se aplica la regla condicional a las líneas 1 y 5, se agrega la línea

$$10 \quad P(b) \quad \text{RC}(1,5) \quad \{(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(b) \wedge \neg P(b))\}$$

Al ser ésta una aplicación de la regla condicional *que involucra a la línea 5, $P(b)$ se considera como una solución al problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$.*

En este momento se da por terminada la prueba porque se ha obtenido una explicación abductiva; sin embargo, no existe una limitación que exija la detención en este punto. Es posible continuar la prueba para procurar producir explicaciones adicionales. Debe notarse que de haber detenido la prueba antes de derivar la línea 9, las líneas 6 y 7 habrían permanecido sin marca, lo cual habría llevado a considerar la fórmula $P(a)$ como candidata a ser una explicación del hecho sorprendente φ.

2.5 Combinación de lógicas adaptativas

En esta sección se explica la manera en que pueden combinarse lógicas adaptativas que compartan lógicas subyacentes y estrategia adaptativa, mas no el conjunto de anormalidades que las distingue[17]. Se mencionarán brevemente algunas combinaciones existentes y el tipo de problemas que pueden resolverse con ellas.

El combinar lógicas adaptativas simples tiene varias ventajas, una de las principales es que se observan maneras de hacer que distintas lógicas adaptativas cooperen entre sí para solucionar problemas, además, mediante esta cooperación no se dificultan sustancialmente las pruebas resultantes de estas lógicas adaptativas combinadas.

[17] Es posible combinar también lógicas adaptativas que no compartan su LLI [Batens, 2002]; sin embargo, para simplificar la presentación, únicamente se considerarán en esta sección combinaciones de lógicas que sí comparten sus lógicas subyacentes. Las lógicas con LLI distintas, serán abordadas en el capítulo 3.

Para combinar lógicas adaptativas que compartan sus LLI y sus estrategias, es necesario unir su conjunto de anormalidades, conservando las lógicas subyacentes y estrategias. También es necesario modificar las reglas genéricas para que consideren no sólo un conjunto de anormalidades, sino dos (o más si hay más lógicas involucradas).

Aunque las estrategias se conservan, éstas deben ser ligeramente modificadas para que también tomen en cuenta a todos los conjuntos de anormalidades involucrados. Además, es necesario establecer el orden en el que las reglas deben ser aplicadas para garantizar que las consecuencias serán las adecuadas, lo cual altera también la noción de prueba presentada con anterioridad. Es importante destacar que, en el contexto de las pruebas en lógicas adaptativas, la aplicación ordenada de reglas no obedece a heurísticas, como lo es en el caso de los tableaux para CL. En CL se requiere de heurísticas que auxilien en la prevención de la generación de múltiples ramas, pero finalmente el resultado al que se llegará, será el mismo[18].

En las lógicas adaptativas combinadas éste no es el caso. El manejo ordenado de reglas obedece a la necesidad de aplicar las reglas condicionales para cada uno de los conjuntos de anormalidades involucrados en la combinación, sin dejar fuera a ninguno de ellos. La estrategia modificada deberá interpretar primero las premisas tan normalmente como sea posible con respecto al primer conjunto de anormalidades, después con respecto al segundo y seguir de esa manera hasta llegar al último y comenzar de nuevo con el primero.

Para facilitar la presentación de las definiciones, es necesario establecer un estándar en la manera en que han de nombrarse los distintos elementos utilizados en la definición de las lógicas adaptativas, por lo que, donde las lógicas adaptativas se llamen $\text{LA}_1, \text{LA}_2, \ldots, \text{LA}_n$ sus LLI se llamarán $\text{L}_1, \text{L}_2, \ldots, \text{L}_n$, respectivamente[19] y sus conjuntos de anormalidades serán $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$. La expresión $Dab^i(\Delta)$ abreviará la disyunción clásica de los miembros de $\Delta \subset \Omega_i$ y se llamará a ésta una Dab^i-fórmula.

Asimismo, los nombres de las reglas de deducción genéricas deberán modificarse para distinguir la lógica sobre la que actúan; de esta manera, las reglas

[18]Existen también heurísticas en las lógicas adaptativas, cuyo objetivo es auxiliar en la construcción de las pruebas. Este tema se tratará más adelante.

[19]Debe recordarse que, en general, no se restringe la combinación a lógicas con la misma LLI.

tendrán los nombres RI^i y RC^i. Sin embargo, debe notarse que la regla RI no necesita distinguirse para un conjunto de anormalidades específico, ya que no actúa sobre dicho conjunto. Por esto, únicamente la regla RC necesitará de tal distinción.

2.5.1 Superposiciones secuenciales

Una manera de combinar lógicas adaptativas, hasta ahora la más estudiada, es mediante superposiciones secuenciales, las cuales se obtienen mediante una composición con la siguiente estructura:

$$Cn_{\text{LAC}}(\Theta) = \ldots Cn_{\text{LA}_3}\left(Cn_{\text{LA}_2}\left(Cn_{\text{LA}_1(\Theta)}\right)\right)\ldots$$

Tal composición da como resultado una nueva lógica adaptativa *combinada* denotada por LAC.

Para la combinación de lógicas adaptativas mediante superposiciones secuenciales, es necesario modificar ligeramente las reglas de deducción genéricas como se muestra en el cuadro 2.2.

PREM	Si A es premisa:	$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \hline A & \emptyset \end{array}$
RI	Si $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\text{LLI}} B$:	$\begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \end{array}$
RC^i	Si $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\text{LLI}} B \vee Dab^i(\Sigma)$	$\begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Sigma \end{array}$

Cuadro 2.2: Reglas genéricas para las demostraciones en lógicas adaptativas combinadas mediante superposiciones secuenciales.

Cabe aclarar que hay tantas RC como conjuntos de anormalidades se consideren en la composición. Debe recordarse que las *reglas condicionales* contemplan al conjunto de anormalidades para formar las disyunciones que pueden derivarse en la LLI; por tal motivo, al haber diversos conjuntos de anormalidades, se requiere una *regla condicional* para cada uno de ellos. Es conveniente notar que para las reglas RC^i, $\Delta_j (1 < j < n)$ puede contener elementos de cualquier Ω^k, es decir, cualquier Δ_j puede considerar anormalidades tanto de un Ω^k con $k \leq i$ como de uno con $k \geq i$.

Es importante no ignorar que debe mantenerse un orden preciso en la aplicación de las reglas en las lógicas adaptativas combinadas. Se comienza por escribir una prueba en LA_1 hasta la etapa s_1. Las fórmulas en líneas que resulten sin marca al llegar a la etapa s_1 serán consideradas como premisas para comenzar una prueba en la lógica LA_2, si ahora se continúa dicha prueba hasta la etapa s_2, las fórmulas en las líneas que resulten sin marca al llegar a dicha etapa, serán consideradas como premisas para comenzar una prueba en la lógica LA_3, la cual se continúa hasta la etapa s_3. El procedimiento sigue hasta pasar por todas las LA_i involucradas en la combinación, punto en el cual se procede a realizar nuevamente una prueba para LA_1.

Las estrategias de marcaje se conservan en las lógicas adaptativas combinadas, simplemente considerando distintos conjuntos de anormalidades para determinar las líneas que deben marcarse en cada etapa.

2.6 Observaciones y conclusiones

En este capítulo se dio una introducción a las lógicas adaptativas. Se expusieron las motivaciones de su diseño y su teoría de la demostración, que incluyó la especificación de sus reglas de deducción genéricas y de sus definiciones de marcaje.

Se mostraron dos ejemplos de lógicas adaptativas existentes: CLuN^r, para el manejo de teorías inconsistentes; y LA^r_s, para el tratamiento de problemas abductivos detonados por novedad. En ambos casos se presentó su *formato estándar* y se expusieron ejemplos de pruebas dinámicas. Finalmente se presentaron las lógicas adaptativas combinadas cuando éstas comparten la lógica subyacente y la estrategias.

En este capítulo se presentó la teoría de la demostración de las lógicas adaptativas; sin embargo, es primordial destacar que también cuenta con una teoría de modelos. La semántica de las lógicas adaptativas se define en términos de la LLI, el conjunto de anormalidades y la estrategia utilizada. [Batens, 2002] También se cuenta con las pruebas de completez y correctez, de las lógicas adaptativas con respecto a su semántica, así como de otros teoremas metalógicos [Batens, 2007]; como es de esperarse, tales pruebas dependen de la completez y correctez de la LLI utilizada. Además se cuenta con un análisis de las propiedades de los conjuntos de premisas y las LLI. [Batens et al., 2009]

Se mencionó también que existen heurísticas para la aplicación de reglas en las pruebas dinámicas de las lógicas adaptativas. Sin embargo, las heurísticas se encuentran todavía en desarrollo y han sido abordadas únicamente en lo referente a lógicas adaptativas que lidian con inconsistencias, como es el caso de CLuN^r. Se ha trabajado en *tableaux* para este tipo de lógicas [Batens y Meheus, 2000] y en las estrategias de marcaje sobre los *tableaux* presentados, para incrementar su eficiencia [Batens y Meheus, 2001].

Asimismo, se han establecido criterios para la *derivabilidad final* en lógicas adaptativas para abordar teorías inconsistentes. Para su fragmento proposicional (lógica llamada ACLuN1) se ha propuesto un algoritmo que permite determinar la *derivabilidad final* [Batens, 2005]. Tal algoritmo puede extenderse a todas las lógicas adaptativas simples, aunque resta definir cómo debe procederse en el caso de las lógicas adaptativas combinadas.

Capítulo 3

Abducción detonada por anomalía

En este capítulo se retomarán algunas de las limitaciones de la caracterización usual de la abducción, las cuales se analizaron en el capítulo 1. Posteriormente se propondrá una modificación a dicha caracterización para ampliar el alcance de la abducción a lógicas en las que antes no se había considerado. Se realizará una revisión de LA_s^r y del tipo de problemas que ésta puede resolver.

Más adelante se presentará una nueva lógica adaptativa capaz de resolver problemas abductivos tanto detonados por anomalía como por novedad: LATA^r. Se establecerá su formato estándar, sus pruebas dinámicas y su estrategia adaptativa. Por último, se presentarán ejemplos en los que podrá observarse el comportamiento de las pruebas dinámicas de la lógica LATA^r y la manera en que puede emplearse para resolver problemas abductivos.

3.1 Limitaciones de la caracterización de la abducción

La caracterización de la abducción [Aliseda, 2006] establece que α es una solución al problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ si:

1. $\Theta \cup \{\alpha\} \models \varphi$

2. α es consistente con Θ.
3. α es minimal.
4. α tiene una restricción sintáctica.

Sin embargo, es importante advertir que tal formato considera únicamente soluciones abductivas para problemas detonados por novedad, mas no para los detonados por una anomalía. Como se expuso en el capítulo 1, la solución a un problema abductivo detonado por anomalía requiere de una revisión de la teoría. Debe recordarse que en un problema abductivo detonado por anomalía, el hecho sorprendente observado entra en conflicto con la teoría subyacente, es decir, donde Θ es la teoría y φ el hecho observado, se tiene que

$$\Theta \models \neg\varphi$$

Es por eso que una extensión de la teoría no es suficiente para resolver ese tipo de problemas, esto es, agregar fórmulas a la teoría no soluciona el problema. Es indispensable eliminar aquellas fórmulas que entran en conflicto con φ, es decir, suprimir aquellos elementos de Θ considerados como *responsables* de que $\Theta \models \neg\varphi$. Una forma en la que se ha abordado este tipo de problemas es la de encontrar una nueva teoría, $\Theta' \subset \Theta$ tal que $\Theta' \not\models \neg\varphi$. Una vez que se ha determinado el subconjunto Θ' que es consistente con φ, es necesario extender la teoría con fórmulas que, junto con Θ' den cuenta de φ.

Resulta conveniente también realizar una reflexión con respecto al requerimiento sobre la consistencia expresado en el segundo punto del formato general de la abducción. Como se mencionó también en el capítulo 1, el exigir que una explicación sea consistente con la teoría, limita el tratamiento de teorías inconsistentes, en particular impide abordar problemas abductivos en lógicas que toleren inconsistencias, como lo son las *lógicas paraconsistentes*.

Por esta razón, resulta apropiado considerar la modificación de tal requerimiento para exigir no trivialidad en lugar consistencia. De acuerdo con Carnielli [Carnielli et al., 2005], una consecuencia $\Theta, \varphi \Rightarrow C$ no es trivial si existe una ψ tal que $\Theta, \varphi \not\Rightarrow \psi$. Es importante no confundir cuándo una teoría es contradictoria y cuándo es trivial.

- Una teoría Θ es contradictoria si satisface:

  Existe una fórmula α tal que $\Theta \Rightarrow \alpha$ y $\Theta \Rightarrow \neg\alpha$

- Una teoría Θ es trivial si satisface:

$$\text{Para toda fórmula } \alpha, \text{ se tiene que } \Theta \Rightarrow \alpha$$

Como puede notarse, la noción de *no trivialidad* se ajusta bien al objetivo planteado: tratar problemas abductivos con teorías inconsistentes. Asimismo, es importante señalar que la *no trivialidad*, en lógica clásica se reduce a la *no contradicción*, por lo que el requerimiento de *no trivialidad* se acopla también a la lógica clásica.

Al utilizar la noción de *no trivialidad* antes mencionada, el segundo requerimiento del formato abductivo podría formularse para ampliar el alcance de la abducción a lógicas que toleren inconsistencias.

3.1.1 Caracterización de soluciones abductivas en lógicas no clásicas

Debido las limitaciones expuestas en la sección anterior, es conveniente contar con una caracterización más general de la abducción, que permita caracterizar también soluciones a problemas abductivos detonados por anomalía—preferentemente que abarque también la solución a problemas abductivos por novedad—y que posibilite el manejo de lógicas que puedan lidiar con inconsistencias.

En cuanto al primer requerimiento de la caracterización existente, éste debe ser modificado para considerar revisiones de la teoría y no sólo extensiones. Por lo que, si Θ es la teoría inicial y φ es el hecho a explicar, se busca eliminar de Θ aquellas fórmulas que entran en conflicto con φ y además agregar fórmulas que lo expliquen sin entrar en contradicciones.

Un primer intento por extender la caracterización de la abducción, es el que se presenta a continuación.

$\langle \Upsilon, \gamma \rangle$ es una solución a problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ si:

1. $(\Theta \setminus \Upsilon) \cup \{\gamma\} \models \varphi$
2. $(\Theta \setminus \Upsilon) \cup \{\gamma\}$ no es trivial.

3. γ es minimal.

4. γ tiene una restricción sintáctica.

donde $\setminus$ denota la diferencia de conjuntos, Υ es el conjunto de fórmulas—posiblemente vacío—que entran en conflicto con el hecho a explicar, φ, y γ es la fórmula que junto con $\Theta \cup \Upsilon$ da cuenta de φ.

Sin embargo, debe notarse que la formulación anterior falla en la descripción del conjunto Υ. Si se considera el problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ con

$$\Theta = \{r \vee s, \neg r\} \text{ y } \varphi = \neg s$$

¿cuál es el conjunto Υ cuyas fórmulas entran en conflicto con φ?

Se tienen dos opciones

- $\Upsilon = \{r \vee s\}$
- $\Upsilon = \{\neg r\}$

pero ninguna de ellas, por si sola, contradice a $\neg s$. Por tal motivo, la descripción final de Υ sería más adecuada formulada de la siguiente manera: Υ es el conjunto de fórmulas que, al sustraerse de Θ, resultan en un conjunto $(\Theta \setminus \Upsilon)$ que no entra en conflicto con φ.

En vista de esa observación, resulta más conveniente reformular la caracterización de la siguiente manera:

Definición 3.1.1. Solución a un problema abductivo: $\langle \Theta', \gamma \rangle$ es una solución al problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ si:

1. $\Theta' \subseteq \Theta$ y $\Theta' \not\models \neg\varphi$.
2. $\Theta' \cup \{\gamma\} \models \varphi$.
3. $\Theta' \cup \{\gamma\}$ no es trivial.
4. γ es minimal.
5. γ tiene una restricción sintáctica.

6. Θ' es máximo, en el sentido en que preserva el mayor número de fórmulas posibles con respecto a Θ.[1]

donde Θ' es la teoría Θ revisada para que no contradiga al hecho a explicar φ. Debe notarse que, si se combinan los conjuntos involucrados en las dos reformulaciones del formato general presentadas hasta ahora, puede decirse que $\Theta' = \Theta \setminus \Upsilon$, pero la última caracterización evita describir a Υ y en su lugar emplea el conjunto resultante una vez que se ha efectuado la sustracción, a saber, Θ'. Además, Θ' es *máximo*[2] si no existe $\Xi \subset \Theta$ tal que $\Theta' \subset \Xi$ y $\Xi \not\models \neg\varphi$, es decir, cualquier súperconjunto propio de Θ', tiene como consecuencia a $\neg\varphi$.

Es apropiado centrar ahora la atención sobre el cuarto punto del nuevo formato general propuesto. ¿Qué quiere decir que γ sea minimal? Al igual que en la caracterización anterior, el concepto de *minimalidad* puede tener distintas interpretaciones, dependiendo del contexto en el que se ubique el problema a tratar: puede referirse a la explicación preferida o a la mejor explicación. Si se apunta a la explicación preferida, debe proporcionarse un orden de preferencia que haga posible el determinar cuál es la explicación preferida. Si, por el contrario, se alude a la mejor explicación, también debe determinarse qué es una mejor explicación. Una de las opciones planteadas antes era considerar como mejor explicación a la más débil, es decir, la que agregue menos a la teoría.

Como se presentó en el capítulo 1, α es la explicación abductiva más débil para φ con la teoría Θ si y sólo si

1. $\Theta, \alpha \models \varphi$
2. Para toda fórmula β tal que $\Theta, \beta \models \varphi$, se tiene que $\models \beta \rightarrow \alpha$.

Debe recordarse que $\alpha = \Theta \rightarrow \varphi$, aunque cumple con el requerimiento de *debilidad*, es una solución trivial y no debe considerarse.

[1] De acuerdo con Alchourrón, Gärdenfors y Makinson [Alchourrón et al., 1985], Θ' es un subconjunto máximo de Θ que no implica a $\neg\varphi$ si y sólo si (i)$\Theta' \subseteq \Theta$, (ii) $\neg\varphi \notin Cn(\Theta')$ y (iii) si para cualquier Θ'' tal que $\Theta' \subset \Theta'' \subseteq \Theta$, $\neg\varphi \in Cn(\Theta'')$.

[2] Gärdenfors [Gärdenfors, 2003] presenta una definición similar basada en el trabajo de Alchourrón, Gärdenfors y Makinson [Alchourrón et al., 1985].

Posteriormente se encuentra el requisito de la restricción sintáctica; éste depende también del problema que se trate. Podría requerirse que γ sea atómica o que se trate únicamente de conjunciones de átomos.

Por último se encuentra el requerimiento de que Θ' sea máximo. Debe notarse que el conjunto máximo Θ' puede no ser único. Si se considera de nuevo el problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ con

$$\Theta = \{r \vee s, \neg r\} \text{ y } \varphi = \neg s$$

existen dos conjuntos máximos Θ'_1 y Θ'_2 que no tienen a s como consecuencia, a saber:

$$\Theta'_1 = \{r \vee s\} \text{ y } \Theta'_2 = \{\neg r\}$$

En casos como éste, se requiere de un mayor detalle en la especificación de *conjunto máximo*. Podría considerarse como máximo aquel conjunto que conserve el mayor número posible de variables distintas o el que tenga el mayor número de conectivos lógicos. Sin embargo, debe reconocerse que dicho cuestionamiento es un problema pragmático y no lógico, por lo que esta decisión dependerá del contexto en que se aborde. En la sección 3.4.1 se abordan los distintos criterios que pueden considerarse para la selección del conjunto máximo.

3.2 Abducción y Lógicas Adaptativas

Como se vio en el capítulo 2, ya existen tratamientos de problemas abductivos mediante lógicas adaptativas. En particular, se presentó el caso de LA^r_s, que es una lógica adaptativa que auxilia en la solución de problemas abductivos detonados por novedad. En la siguiente sección se mostrará por qué esa lógica no es suficiente para resolver problemas abductivos detonados por anomalía.

3.2.1 Limitaciones de LA^r_s

La lógica adaptativa para resolver problemas abductivos mediante la estrategia de *confiabilidad*, LA^r_s, ha mostrado ser una herramienta poderosa para la solución de problemas abductivos detonados por novedad. Sin embargo, tal como ha sido presentada, no es posible utilizarla como instrumento en la solución de problemas abductivos detonados por anomalía.

Basta con recordar que la *Lógica Límite Inferior* de LA^r_s es CL, que no es capaz de lidiar con inconsistencias, por lo que sería incapaz de resolver el problema que surge en la teoría al validar justo la negación del hecho que se quiere explicar. Lo que es más, un requisito expreso para encontrar una solución mediante LA^r_s es que la explicación sea consistente con la teoría inicial. Como se ha visto, esto no es posible para los problemas detonados por anomalía. Además, LA^r_s al encontrarse ante una contradicción en la teoría, podría producir explicaciones triviales, esto derivado de su *Lógica Límite Inferior*: CL.

A continuación se muestra un ejemplo en el que puede apreciarse el comportamiento de LA^r_s con una teoría inconsistente y que resulta en la producción de una explicación trivial.

Ejemplo 3.2.1.

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(P(x) \to S(x)), \\ P(a), S(a) \vee R(a), S(a) \end{array} \right\}$$

$$\varphi = \neg Q(a)$$

En el cuadro 3.1 se muestra la prueba correspondiente en LA^r_s. Con dicha prueba puede concluirse que $(\forall x)(S(x) \wedge \neg S(x)) \wedge Q(a)$ es una solución al problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$.

3.3 LATA^r: Una lógica adaptativa para la solución de problemas abductivos detonados por anomalía

En esta sección se presenta una nueva propuesta que involucra a una lógica adaptativa para utilizarse como herramienta en la solución de problemas abductivos detonados por anomalía, sin restringir su uso a éstos, es decir, puede emplearse también en la solución de problemas detonados por novedad. Primero se dará una descripción informal de dicha lógica para después

1	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)(R(x) \to \neg Q(x))$	PREM	$\emptyset$
3	$(\forall x)(P(x) \to S(x))$	PREM	$\emptyset$
4	$P(a)$	PREM	$\emptyset$
5	$S(a) \vee R(a)$	PREM	$\emptyset$
6	$S(a)$	PREM	$\emptyset$
7	$\neg Q(a)$ ★	PREM	$\emptyset$
8	$Q(a)$	RI(1,4)	$\emptyset$
9	$\neg Q(a) \wedge Q(a)$	RI(7,8)	$\emptyset$
10	$(\forall x)(S(x) \wedge \neg S(x)) \wedge Q(a)$	RC(2,9)	$\left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)) \wedge \\ (\neg Q(a) \wedge \neg R(a)) \end{array} \right\}$

Cuadro 3.1: Prueba dinámica en LA_s^r con una teoría inconsistente.

mostrar cómo pueden combinarse las dos lógicas adaptativas antes presentadas: CLuN^r y LA_s^r, para la definición de la nueva lógica LATA^r. Posteriormente se presenta el formato estándar de LATA^r y por último se proporcionan ejemplos de pruebas dinámicas en esta lógica.

3.3.1 Descripción de LATA^r

Es conveniente recordar los principios bajo los cuales funcionan las lógicas CLuN^r y LA_s^r. El objetivo primordial de CLuN^r es interpretar la teoría tan consistentemente como sea posible y el de LA_s^r es aplicar el *formato abductivo* tan frecuentemente como sea posible.

Si se toma en cuenta que para resolver problemas abductivos detonados por anomalía, debe de tratarse con una teoría inconsistente (la teoría original junto con el hecho anómalo) así como determinar qué fórmulas deben agregarse a la teoría revisada para que se pueda dar cuenta del hecho observado, resulta evidente que CLuN^r y LA_s^r son candidatos ideales para utilizarse como auxiliares ante la tarea de solución de problemas abductivos detonados por un hecho anómalo.

La nueva lógica adaptativa que se presentará en este capítulo, LATA^r, sigue justamente los dos principios de CLuN^r y LA_s^r: interpretar la teoría tan consistentemente como sea posible y aplicar el *formato abductivo* tan frecuentemente como sea posible. El objetivo de LATA^r es encontrar las fórmulas que deben agregarse a la teoría para dar cuenta del hecho sorprendente, al mismo tiempo que se trabaja con la teoría inconsistente tan consistentemente como sea posible, es decir, suponiendo que todas las inconsistencias son falsas, a menos que se pruebe lo contrario. De esta manera, al final se obtendrá la teoría revisada para que no entre en conflicto con el hecho a explicar, así como las fórmulas que deben agregarse a la teoría para dar cuenta del hecho observado.

Como se verá más adelante, la lógica adaptativa LATA^r, aun cuando resulta de una combinación de CLuN^r y LA^r_s, por si sola no resuelve en su totalidad un problema abductivo detonado por anomalía. La manera en que será utilizada para resolver dichos problemas es mediante sus pruebas; las pruebas dinámicas de LATA^r servirán como base para el proceso abductivo que permitirá *extraer* información de la prueba para dar solución al problema abductivo.

3.3.2 Combinación de CLuN^r y LA^r_s

Para definir la nueva lógica adaptativa que será capaz de lidiar con problemas abductivos por anomalía, será necesario hacer uso de las lógicas adaptativas vistas con anterioridad: CLuN^r y LA^r_s, por lo que es oportuno recordar sus respectivos formatos estándar.

El formato estándar de CLuN^r es el siguiente[3]:

Lógica Límite Inferior. CLuN

Conjunto de anormalidades. $\Omega = \{(\exists x)(A(x) \wedge \neg A(x))\}$

Estrategia adaptativa. Confiabilidad.

El formato estándar de LA^r_s es el siguiente[4]:

[3]Para mayor detalle sobre el formato estándar de CLuN^r, puede consultarse la sección 2.3.4

[4]Para mayor detalle sobre el formato estándar de LA^r_s, puede consultarse la sección 2.4.1

Lógica Límite Inferior. CL

Conjunto de anormalidades.

$$\Omega = \{(\forall x)\,(A\,(x) \rightarrow B\,(x)) \wedge (B\,(c) \wedge \neg A\,(c))\ |$$
$$\text{ningún predicado que figure en } B(c) \text{ figure en } A(c)\}$$

Estrategia adaptativa. Confiabilidad.

Como puede observarse, el primer problema que surge es que las LLI de cada una de las lógicas, son distintas, por lo que no pueden combinarse de la manera tradicional en que suelen combinarse las lógicas adaptativas, tal como fue presentado en la sección 2.5.

Resulta entonces fundamental elegir una nueva lógica que logre capturar, tal vez con algunas restricciones, el comportamiento de las lógicas CLuN y CL. Dado que CLuN es el lado positivo de CL, es posible tomar CLuN como LLI y ajustarla para que refleje el comportamiento del *formato abductivo*, que es lo que requiere LA^r_s. Debe notarse que CL no es un buen candidato para funcionar como LLI, porque no es apta para tratar con teorías inconsistentes. En contraste, CLuN, al ser una lógica más *permisiva* que CL, puede adecuarse para tratar problemas abductivos.

Antes debe analizarse qué sucede con el formato abductivo en CLuN, sin olvidar que CLuN no valida el *Silogismo Disyuntivo*. El *formato abductivo* en CL es el siguiente:

$$\frac{(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), B(c)}{A(c)}$$

y dado que la semántica de la implicación es la misma en CL y en CLuN,[5] el *formato abductivo* se conserva sin cambios en CLuN. Lo anterior tiene como consecuencia que el conjunto de anormalidades de LA^r_s se conserve sin cambios al tomar a CLuN como LLI.

Ya que LATA^r estará basada en CLuN^r y LA^r_s, vale la pena realizar algunas convenciones en la notación para evitar confusiones en los conjuntos de anormalidades y las reglas condicionales (junto con las disyunciones de anormalidades que las rigen) de las dos lógicas adaptativas involucradas. El conjunto

[5] El cambio en la semántica de CLuN ocurre únicamente en la negación, los demás conectivos lógicos conservan la misma semántica que en CL [Batens, 1999].

de anormalidades de CLuN^r estará denotado por Ω_{CLuN^r} y el de LA_s^r por $\Omega_{\text{LA}_s^r}$. La expresión $Dab^{\text{CLuN}^r}(\Delta)$ abreviará la disyunción clásica de los miembros de $\Delta \subset \Omega_{\text{CLuN}^r}$ y se llamará a ésta una Dab^{CLuN^r}-fórmula; de manera análoga, $Dab^{\text{LA}_s^r}(\Delta)$ abreviará la disyunción clásica de los miembros de $\Delta \subset \Omega_{\text{LA}_s^r}$ y se llamará a ésta una $Dab^{\text{LA}_s^r}$-fórmula.

Como se mencionó en la sección 2.5, para combinar dos lógicas adaptativas que comparten sus lógicas subyacentes, basta con tomar la unión de sus conjuntos de anormalidades; en este caso, se considerarán los conjuntos Ω_{CLuN^r} y $\Omega_{\text{LA}_s^r}$ para constituir el conjunto de anormalidades de LATA^r.

3.3.3 Formato estándar de LATA^r

En esta sección se presentará el formato estándar de LATA^r, sin perder de vista su comportamiento como lógica adaptativa combinada. Tal como se propuso en la sección anterior, se unificaron las LLI para utilizar únicamente a CLuN como LLI de la lógica adaptativa LATA^r, por lo que el formato estándar de LATA^r es el que sigue:

Lógica Límite Inferior. CLuN

Conjunto de anormalidades. $\Omega = \Omega_{\text{CLuN}^r} \cup \Omega_{\text{LA}_s^r}$, donde

$$\Omega_{\text{CLuN}^r} = \{(\exists x)(A(x) \wedge \neg A(x))\} \text{ y}$$

$$\Omega_{\text{LA}_s^r} = \{(\forall x)\,(A\,(x) \rightarrow B\,(x)) \wedge (B\,(c) \wedge \neg A\,(c)) \mid \text{ningún predicado que figure en } B(c) \text{ figure en } A(c)\}$$

Estrategia adaptativa. Confiabilidad.

3.3.4 Pruebas dinámicas en LATA^r

Las lógicas adaptativas combinadas también tienen reglas genéricas que se utilizan en las pruebas dinámicas. En el cuadro 3.2 se muestran las reglas de inferencia utilizadas en LATA^r.[6]

[6] Debe notarse que las reglas para las pruebas dinámicas de LATA^r son las mismas reglas genéricas mostradas en el cuadro 2.2, sólo considerando los distintos conjuntos de anormalidades implicados en LATA^r.

PREM	Si A es premisa:	$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ \hline A & \emptyset \end{array}$
RI	Si $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\text{CLuN}} B$:	$\begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \end{array}$
$\text{RC}^{\text{CLuN}^r}$	Si $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\text{CLuN}} B \vee Dab^{\text{CLuN}^r}(\Sigma)$	$\begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Sigma \end{array}$
$\text{RC}^{\text{LA}^r_s}$	Si $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\text{CLuN}} B \vee Dab^{\text{LA}^r_s}(\Sigma)$	$\begin{array}{ll} A_1 & \Delta_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & \Delta_n \\ \hline B & \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \cup \Sigma \end{array}$

Cuadro 3.2: Reglas para las demostraciones en LATA^r.

Asimismo, es importante recordar que, en las lógicas adaptativas combinadas por superposiciones secuenciales, es necesario establecer el orden en que deberán aplicarse las reglas en las pruebas dinámicas. En el caso de LATA^r, la combinación secuencial es la siguiente:

$$Cn_{\text{LATA}^r} = Cn_{\text{LA}^r_s}(Cn_{\text{CLuN}^r})$$

es decir, primero se interpreta la teoría tan consistentemente como sea posible y después se busca aplicar el formato abductivo tan frecuentemente como sea posible.

Sin embargo, como se expuso también en la sección 2.5.1, una prueba en una lógica adaptativa combinada puede verse como la unión de varias pruebas: cada una correspondiente a una lógica involucrada en la combinación. Se comienza con una prueba para la primera lógica adaptativa considerada, se lleva esa prueba hasta una etapa s_1; las fórmulas derivadas hasta ese punto, se consideran premisas para una prueba en la segunda lógica adaptativa y así sucesivamente hasta que se ha pasado por todas los lógicas involucradas.

En ese instante se procede a construir una prueba nuevamente en la primera lógica adaptativa y considerar después las demás lógicas.

3.3.5 Heurísticas auxiliares para las pruebas en LATA^r

En esta sección se introducen las heurísticas que se utilizarán en la aplicación de las reglas condicionales en las pruebas de LATA^r. Dichas heurísticas servirán como guía para determinar cuándo debe detenerse una prueba en LATA^r. Asimismo, se expondrán heurísticas para precisar cuántas veces deben aplicarse las reglas $\text{RC}^{\text{CLuN}^r}$ y $\text{RC}^{\text{LA}_s^r}$ en las pruebas de LATA^r.

Como se vio anteriormente, una prueba en LATA^r está compuesta por pruebas *intercaladas* de CLuN^r y LA_s^r; sin embargo, no hay un número determinado de etapas que deban considerarse en cada una de las pruebas que conforman a la prueba completa de la lógica adaptativa combinada. En el caso de LATA^r, se utilizarán heurísticas para controlar cuántas etapas se consideran en cada prueba, en qué punto se detiene cada prueba y en qué instante se detiene la prueba completa de LATA^r.

Una prueba en LATA^r comenzará, como en cualquier lógica adaptativa, con la adición de las premisas a la prueba con la regla PREM y el conjunto vacío como condición. Posteriormente se realizará una prueba en CLuN^r, en la que se aplicará, de ser posible, una sola vez la regla condicional $\text{RC}^{\text{CLuN}^r}$; si la aplicación de dicha regla no es posible, se aplicará la regla incondicional RI y se detendrá la prueba correspondiente a la parte de CLuN^r. A continuación, se realiza una prueba en LA_s^r y se intenta aplicar la regla condicional $\text{RC}^{\text{LA}_s^r}$ una sola vez[7]. Si la aplicación de la regla no es posible, únicamente se aplica la regla incondicional RI, se detiene esa parte de la prueba y se vuelve a realizar una prueba con CLuN^r.

La prueba continúa mediante la combinación secuencial de las reglas condicionales $\text{RC}^{\text{CLuN}^r}$ y $\text{RC}^{\text{LA}_s^r}$ hasta que se haya derivado $\varphi \wedge \neg\varphi$ en una línea y se haya aplicado la regla $\text{RC}^{\text{LA}_s^r}$ al menos una vez.

Debe notarse que una heurística importante a aplicar durante la prueba, es la de procurar la aplicación de la regla $\text{RC}^{\text{LA}_s^r}$ tanto como sea posible a la

[7] Es importante recordar que se trata de la versión modificada de LA_s^r en la que se usa a CLuN como LLI.

línea que contiene el hecho a explicar o a alguna línea que lo tenga como consecuencia. En este trabajo se dará prioridad a que la regla sea directamente aplicada a la línea donde aparece φ, sin restringir, por supuesto, su aplicación a esta línea.

3.3.6 Ejemplo de prueba en LATA^r

A continuación se presenta un ejemplo de una prueba dinámica en LATA^r.

Ejemplo 3.3.1. *Para resolver el problema abductivo por anomalía* $\langle\Theta,\varphi\rangle$*, donde*

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(P(x) \to S(x)), \\ P(a), S(a) \vee R(a), S(a) \end{array} \right\}$$

y

$$\varphi = \neg Q(a)$$

se realiza primero una prueba en LATA^r *en la cual se toma como conjunto de premisas al resultante de* $\Theta \cup \{\varphi\}$*. Como se ha señalado con anterioridad, al ser* $\langle\Theta,\varphi\rangle$ *un problema abductivo por anomalía,* $\Theta \cup \{\varphi\}$ *será necesariamente un conjunto inconsistente. Mediante su tratamiento con* LATA^r *se interpretará tan consistentemente como sea posible al mismo tiempo que se busca una explicación al hecho sorprendente* φ*.*

A continuación se detalla paso a paso la prueba dinámica en LATA^r*.*

Primero se agregan a la prueba todos los elementos de $\Theta \cup \{\varphi\}$ *como premisas. Se agrega una marca especial (★) al hecho a explicar, esto será de utilidad durante el proceso abductivo.*

1	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)(R(x) \to \neg Q(x))$	PREM	$\emptyset$
3	$(\forall x)(P(x) \to S(x))$	PREM	$\emptyset$
4	$P(a)$	PREM	$\emptyset$
5	$S(a) \vee R(a)$	PREM	$\emptyset$
6	$S(a)$	PREM	$\emptyset$
7	$\neg Q(a)$	PREM$_\bigstar$	$\emptyset$

Considérense ahora las líneas 1 y 4; debido a que

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)), P(a) \vdash_{\text{CLuN}} Q(a)$$

puede agregarse la línea

$$8 \quad Q(a) \quad \text{RI}(1,4) \quad \emptyset$$

Si se toman en cuenta las líneas 7 y 8, puede agregarse la línea:

$$9 \quad \neg Q(a) \wedge Q(a) \quad \text{RI}(7,8) \quad \emptyset$$

Ahora, con las líneas 2 y 7, si se tiene en cuenta que

$$(\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)), \neg Q(a) \vdash_{\text{CLuN}} R(a) \vee ((\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)) \wedge (\neg Q(a) \wedge \neg R(a)))$$

puede agregarse la siguiente línea:

$$10 \quad R(a) \quad \text{RC}^{\text{LA}_s^r}(2,7) \quad \{(\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)) \wedge (\neg Q(a) \wedge \neg R(a))\}$$

En el cuadro 3.3 puede verse la prueba completa.

1	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)(R(x) \to \neg Q(x))$	PREM	$\emptyset$
3	$(\forall x)(P(x) \to S(x))$	PREM	$\emptyset$
4	$P(a)$	PREM	$\emptyset$
5	$S(a) \vee R(a)$	PREM	$\emptyset$
6	$S(a)$	PREM	$\emptyset$
7	$\neg Q(a)$	PREM$_\bigstar$	$\emptyset$
8	$Q(a)$	RI(1,4)	$\emptyset$
9	$\neg Q(a) \wedge Q(a)$	RI(7,8)	$\emptyset$
10	$R(a)$	$\text{RC}^{\text{LA}_s^r}(2,7)$	$\left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)) \wedge \\ (\neg Q(a) \wedge \neg R(a)) \end{array} \right\}$

Cuadro 3.3: Prueba dinámica en LATA^r

Como se mencionó anteriormente, las pruebas en LATA^r no son suficientes para la solución de problemas abductivos por anomalía, es necesario además, aplicar un procedimiento abductivo que *extraiga* de la prueba la información pertinente para la solución del problema. Es decir, la solución de un problema abductivo por anomalía mediante lógicas adaptativas consta de dos etapas: (a) construcción de prueba adaptativa y (b) aplicación del procedimiento abductivo.

Es por eso que la prueba se detiene para aplicar el procedimiento abductivo que se detalla en la siguiente sección.

3.4 Proceso abductivo auxiliado por LATA^r

LATA^r fue diseñada pensando especialmente en la solución de problemas abductivos detonados por una anomalía; sin embargo, LATA^r por si sola no resuelve el problema. Las pruebas dinámicas de LATA^r se usarán como instrumento para encontrar soluciones a tal tipo de problemas, es decir, serán una guía que llevará naturalmente a la explicación buscada.

Una vez que se ha obtenido una prueba en LATA^r, ésta pasará por un proceso abductivo mediante el cual se establecerá cuáles fórmulas deben eliminarse de la teoría para que ésta no contradiga el hecho a explicar. Dicho proceso será también el responsable de determinar las fórmulas que deberán agregarse a la teoría para dar cuenta del hecho sorprendente.

Como se mencionó en la sección anterior, el hecho a explicar juega un papel importante en este procedimiento, por eso es que, en la prueba, la línea en la que aparece el hecho debe distinguirse mediante una marca especial (no debe confundirse con las marcas resultantes de las reglas de marcaje propias de las lógicas adaptativas); en el procedimiento se considerará dicha marca.

Este procedimiento consta de dos partes:

Retroceso para revisión. Primero se realiza un proceso de retroceso sobre la prueba dinámica, el cual permite llevar a cabo una revisión de la teoría para eliminar las fórmulas que entran en conflicto con el hecho a explicar. Este proceso de retroceso, al que se denominará RETRO, identifica las inconsistencias y posteriormente elimina de la teoría algunas de las fórmulas involucradas en la generación de tales inconsistencias.

Generación de soluciones. Posteriormente se generan las explicaciones abductivas que dan cuenta del hecho observado, con la certeza de que no existen inconsistencias en la teoría revisada.

En las siguientes secciones se detallan ambos procesos, en ellas se toma como base la prueba dinámica presentada en el cuadro 3.3.

3.4.1 Procedimiento de retroceso para la revisión de la teoría

A continuación se presenta un esbozo del procedimiento de retroceso utilizado para la revisión de la teoría, de tal manera que puedan eliminarse las fórmulas que causan inconsistencias con el hecho observado.

- Sea ℓ_φ la línea de la prueba que se distinguió con $\bigstar$, es decir, aquélla que contiene el hecho sorprendente anómalo φ.
- Sea ℓ_c la línea que contiene a la fórmula $\varphi \wedge \neg\varphi$.
- Se aplica el procedimiento RETRO a la línea ℓ_c.

  Una vez que se haya aplicado el procedimiento RETRO a la línea ℓ_c, se tendrán en el conjunto Υ las fórmulas que potencialmente entran en conflicto con el hecho a explicar φ.

  Procedimiento RETRO

  Entrada: Un número de línea ℓ.[8]

  Salida: Un conjunto de fórmulas Υ.

  - $\Upsilon := \emptyset$
  - Si $\ell = \ell_\varphi$, entonces regresar Υ como salida y terminar.
  - Si la regla de la línea ℓ es PREM:

[8] Hay que notar que durante la primera vuelta del procedimiento, es decir, antes de que haya habido una llamada recursiva, ℓ es ℓ_c, que es la línea a la que inicialmente se le aplica el procedimiento; sin embargo, ℓ cambia con cada llamada recursiva.

    * Sea A_ℓ la fórmula derivada en la línea ℓ.
    * $\Upsilon := \Upsilon \cup \{A_\ell\}$
    * Regresar Υ como salida y terminar.
  - Si la regla de la línea ℓ no es PREM:
    * Sean $\ell_1, \ldots, \ell_n$ las líneas que aparecen en la tercera columna de la línea ℓ, es decir, aquéllas a las que se aplicó la regla.
    * Sean $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_n$ los conjuntos resultantes de aplicar RETRO a cada $\ell_1, \ldots, \ell_n$, respectivamente.
    * $\Upsilon := \Upsilon \cup \Upsilon_1 \cup \ldots \cup \Upsilon_n$
    * Regresar Υ como salida y terminar.

Como se mencionó anteriormente, una vez que se aplicó el procedimiento RETRO a la línea ℓ_c, se tienen en Υ las fórmulas que potencialmente entran en conflicto con el hecho a explicar φ. Una posible solución sería excluir de la teoría todas las fórmulas contenidas en Υ; sin embargo, esa solución no resulta en un conjunto revisado máximo[9].

Para determinar cuál subconjunto de Υ conviene sustraer de la teoría, deben tomarse en cuenta criterios que expresen la preferencia de algunas fórmulas sobre otras, esto por supuesto, determinado por el problema abductivo del que se trate.

A continuación se presentan algunas preferencias que podrían considerarse en la elección del conjunto $\Upsilon' \subset \Upsilon$ que deberá sustraerse de Θ para conformar la teoría revisada Θ'.

Menor impacto. Eliminar la fórmula que involucre el menor número de predicados distintos posible.

Confianza en la teoría. Se prefiere descartar hechos observados—debido tal vez a la poca confiabilidad de las observaciones—en cuyo caso se eliminarían las fórmulas sin variables. Esto es, las suposiciones de trasfondo son más confiables que las afirmaciones basadas en una observación.

[9]Debe recordarse que Θ' es máximo si no existe $\Xi \subset \Theta$ tal que $\Theta' \subset \Xi$ y $\Xi \not\models \neg\varphi$. Para mayor detalle puede consultarse la sección 3.1.1.

Confianza en las observaciones. Se confía más en los hechos observados que en la teoría de trasfondo, en cuyo caso se eliminarían las fórmulas cuantificadas[10].

Subfórmulas. Eliminar subfórmulas de las fórmulas contenidas en Υ, por ejemplo, en el caso de las conjunciones, tal vez no sea necesario eliminar la conjunción completa, sino únicamente la parte de ésta que genera una inconsistencia con el hecho observado φ.

Cuál proceder será el adecuado, dependerá del problema a tratar y del tipo de teoría a la que se busque llegar. La importancia del proceso de retroceso es que permite reconstruir la prueba mediante la cual se llegó a $\varphi \wedge \neg\varphi$, lo cual facilita determinar qué parte de la teoría debe eliminarse, en términos del criterio establecido.

A continuación se presenta la aplicación del procedimiento de retroceso a la prueba realizada en el cuadro 3.3; posteriormente se presenta el conjunto Υ' resultante de aplicar cada uno de los cuatro criterios de preferencia vistos anteriormente y por último se exhibe la solución producida al elegir el criterio de *confianza en la teoría*.

- La línea distinguida en la que se encuentra el hecho sorprendente anómalo es la línea 7 (ℓ_φ).
- La línea que contiene a la fórmula $\neg Q(a) \wedge Q(a)$ es la línea 9, que se presenta a continuación:

$$9 \quad \neg Q(a) \wedge Q(a) \quad \text{RI}(7{,}8) \quad \emptyset$$

- De acuerdo con el procedimiento RETRO, dado que la regla de la línea no es PREM, se aplica recursivamente el procedimiento RETRO ahora a las líneas 7 y 8.
  - Como la línea 7 es ℓ_φ, esta llamada recursiva termina.

[10] Gärdenfors utiliza el concepto de *atrincheramiento epistémico* (*epistemic entrenchment*) para distinguir cuáles elementos de la teoría tienen más valor que otros [Gärdenfors, 2003]; por ejemplo, en el criterio de *Confianza en la teoría* presentado anteriormente, las fórmulas cuantificadas universalmente tienen un grado de *atrincheramiento epistémico* más alto que las proposiciones atómicas.

– La línea 8 es la siguiente:

$$8 \quad Q(a) \quad \textsc{ri}(1{,}4) \quad \emptyset$$

Como la regla de la línea no es PREM, se aplica el procedimiento RETRO a las líneas 1 y 4, que se presentan a continuación:

$$\begin{array}{lll} 1 \quad (\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)) & \textsc{prem} & \emptyset \\ 4 \quad P(a) & \textsc{prem} & \emptyset \end{array}$$

  * Como la línea 1 contiene una premisa, se agrega esta premisa al conjunto Υ_1 (se agrega el subíndice para distinguirlo de otros conjuntos resultantes en llamadas recursivas distintas) y termina la llamada recursiva.
  * Al igual que en el caso anterior, se agrega la fórmula de la línea 4 a un conjunto Υ_2.

– Se toma la unión de los conjuntos Υ_1 y Υ_2, a la que se denominará Υ y se regresa como resultado del procedimiento RETRO.

Al final del procedimiento, el conjunto Υ es:

$$\Upsilon = \{(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x)), P(a)\}$$

Ahora se presenta el conjunto $\Upsilon' \subset \Upsilon$ obtenido usando cada uno de los distintos criterios que se especificaron con anterioridad:

Menor impacto. $\Upsilon' = \{P(a)\}$

Confianza en la teoría. $\Upsilon' = \{P(a)\}$

Confianza en las observaciones. $\Upsilon' = \{(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))\}$

Subfórmulas. No puede aplicarse.

Debe recordarse que la teoría original Θ era:

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow S(x)), \\ P(a), S(a) \vee R(a), S(a) \end{array} \right\}$$

por lo que, por ejemplo, si se utiliza el criterio de *confianza en la teoría*, la teoría revisada Θ' que se obtiene es

$$\Theta' = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x)), (\forall x)(P(x) \rightarrow S(x)), \\ S(a) \vee R(a), S(a) \end{array} \right\}$$

3.4.2 Generación de soluciones abductivas

Es primordial tener en cuenta la manera en que se encuentran las soluciones abductivas cuando se utiliza LA_s^r para resolver problemas abductivos por anomalía: una fórmula obtenida mediante la aplicación de la *regla condicional*, que se refiera a la línea distinguida donde se introduce φ como premisa—o que tenga como consecuencia a φ, como se estableció en la sección 3.3.5—se considera candidata a ser una explicación del hecho sorprendente φ.

En las pruebas de LATA^r se seguirá un procedimiento similar. La diferencia sutil que es importante resaltar es que en LATA^r se tienen dos reglas condicionales: $\mathrm{RC}^{\mathrm{CLuN}^r}$ y $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}_s^r}$; naturalmente, la regla condicional que será considerada para encontrar las explicaciones abductivas a problemas detonados por anomalía, será $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}_s^r}$. Entonces, cualquier regla que se haya derivado gracias a la aplicación de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}_s^r}$ a la línea en la que se introdujo φ—o que tenga como consecuencia a φ—es una candidata a ser una explicación del hecho sorprendente.

En seguida se muestra cuál sería dicha explicación si se toma como prueba dinámica base la del cuadro 3.3.

La única aplicación de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}_s^r}$ en dicha prueba, ocurre en la línea 10, que se muestra a continuación:

$$10 \quad R(a) \quad \mathrm{RC}^{\mathrm{LA}_s^r}(2{,}7) \quad \{(\forall x)(\neg R(x) \vee \neg Q(x)) \wedge (\neg Q(a) \wedge \neg R(a))\}$$

Como puede notarse, tal aplicación de la regla ocurre justamente al considerar las líneas 2 y 7. Debido a que la línea 7 contiene al hecho $\neg Q(a)$, que es el hecho cuya explicación se busca, la fórmula derivada en la línea 10 es una explicación abductiva a dicho hecho, tal fórmula es $R(a)$. Si hubiera otras aplicaciones de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}_s^r}$ en la prueba, las fórmulas derivadas de tal aplicación, serían también candidatas a formar explicaciones abductivas para el hecho φ.

Ahora se tienen ya las dos partes que conforman la solución de un problema abductivo de acuerdo con la nueva caracterización propuesta: la teoría revisada Θ', que no entra en conflicto con el hecho a explicar y el hecho que debe agregarse a la teoría para dar cuenta del hecho sorprendente.

Entonces la solución al problema abductivo detonado por anomalía $\langle \Theta, \varphi \rangle$, donde

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(P(x) \to S(x)), \\ P(a), S(a) \vee R(a), S(a) \end{array} \right\}$$

y

$$\varphi = \neg Q(a)$$

es $\langle \Theta', \gamma \rangle$ con

$$\Theta' = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(R(x) \to \neg Q(x)), (\forall x)(P(x) \to S(x)), \\ S(a) \vee R(a), S(a) \end{array} \right\}$$

y

$$\gamma = R(a)$$

si se considera el criterio de *confianza en la teoría* para la selección del conjunto máximo.

Como se mencionó anteriormente, LATA^r sirve como auxiliar en la solución de problemas abductivos detonados por anomalía, sin dejar de lado a los detonados por novedad. Es entonces importante realizar una distinción en los pasos que deben aplicarse para la solución de problemas por novedad. Debe notarse que, para la solución de problemas abductivos por novedad, no es necesario aplicar el procedimiento RETRO ni los criterios de selección para conformar la teoría revisada, ya que no existe necesidad alguna de revisar la teoría; en estos casos basta con realizar la generación de soluciones abductivas.

3.5 Observaciones y conclusiones

En este capítulo se presentó un nuevo formato alternativo de la abducción, que considera las soluciones a problemas abductivos detonados por anomalía y no sólo a los detonados por novedad. Es decir, se tiene en cuenta no sólo a la extensión de la teoría sino también a la revisión de la misma. De manera adicional, este formato considera la noción de *no trivialidad*, lo cual permite el tratamiento de problemas abductivos en lógicas capaces de lidiar con inconsistencias.

Posteriormente se presentaron las razones por las cuales LA^r_s, la lógica adaptativa existente en la literatura para tratar problemas abductivos detonados por novedad, no basta para resolver problemas abductivos por anomalía; sin embargo, su combinación con CLuN^r resulta en una lógica adaptativa capaz de lidiar con problemas abductivos detonados por anomalía: LATA^r. Se presentó el formato estándar de LATA^r junto con sus pruebas dinámicas y algunas heurísticas que pueden aplicarse en sus pruebas para decidir cuándo detenerse y qué reglas aplicar en cada etapa de la prueba.

Asimismo, se exhibió el procedimiento abductivo que toma como base las pruebas de LATA^r para encontrar soluciones a problemas abductivos detonados por anomalía. Dicho proceso se dividió en dos etapas: el retroceso para la revisión de la teoría y la generación de explicaciones abductivas.

En el proceso de retroceso para la revisión de la teoría, fue necesario introducir los criterios para determinar el conjunto máximo que representa a la teoría revisada que no entra en conflicto con el hecho a explicar. En la generación de explicaciones abductivas se consideró únicamente el caso de las fórmulas derivadas mediante la aplicación directa de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}^r_s}$ a la línea en que se encuentra el hecho a explicar φ; sin embargo, debe notarse que pueden encontrarse otras explicaciones abductivas al considerar también líneas que tengan como consecuencia a φ y que hayan sido a su vez obtenidas mediante la aplicación de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}^r_s}$.

En el cuadro 3.4 se presenta una prueba de LATA^r en la que se ilustra ese caso.

Después de aplicar el proceso de retroceso RETRO con el criterio de *confianza en la teoría* para la obtención del conjunto máximo, se obtiene la teoría revisada

$$\Theta' = \left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(T(x) \to R(x)), (\forall x)((S(x) \wedge P(x)) \to R(x)), \\ (\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)(U(x) \to \neg R(x)), S(a), Q(a) \end{array} \right\}$$

De acuerdo con el procedimiento de generación de explicaciones abductivas utilizado anteriormente, la única aplicación de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}^r_s}$ a la línea 8—donde se introduce el hecho a explicar—es la línea 11, por lo que la explicación abducida sería $T(a)$. Sin embargo, debe notarse que también la línea 12 produce una explicación abductiva para el hecho $R(a)$, también mediante la aplicación de la regla $\mathrm{RC}^{\mathrm{LA}^r_s}$ mas no de manera directa a la línea 8. Lo que ocurre en este caso es que la fórmula derivada en la línea 12 permite la derivación de $R(a)$.

1	$(\forall x)(T(x) \to R(x))$	PREM	$\emptyset$
2	$(\forall x)((S(x) \wedge P(x)) \to R(x))$	PREM	$\emptyset$
3	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	PREM	$\emptyset$
4	$(\forall x)(U(x) \to \neg R(x))$	PREM	$\emptyset$
5	$S(a)$	PREM	$\emptyset$
6	$Q(a)$	PREM	$\emptyset$
7	$U(a)$	PREM	$\emptyset$
8	$R(a) \quad \bigstar$	PREM	$\emptyset$
9	$\neg R(a)$	$\text{RI}^{\text{CLuN}^r}(4,7)$	$\emptyset$
10	$R(a) \wedge \neg R(a)$	RI(8,9)	$\emptyset$
11	$T(a)$	$\text{RC}^{\text{LA}_s^r}(1,8)$	$\left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(T(x) \to R(x)) \\ \wedge(R(a) \wedge \neg T(a)) \end{array} \right\}$
12	$P(a)$	$\text{RC}^{\text{LA}_s^r}(3,6)$	$\left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ \wedge(Q(a) \wedge \neg P(a)) \end{array} \right\}$
13	$R(a)$	RI(2,5,12)	$\left\{ \begin{array}{c} (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \\ \wedge(Q(a) \wedge \neg P(a)) \end{array} \right\}$

Cuadro 3.4: Prueba dinámica en LATA^r con múltiples soluciones abductivas.

Estos casos podrían resolverse también mediante LATA^r, sólo se necesita modificar el proceso de generación de explicaciones para especificar con precisión cómo reconocer la existencia de tales fórmulas. Esto podría decidirse mediante un proceso de retroceso aplicado a las líneas en las que la fórmula derivada sea el hecho mismo a explicar. Pueden utilizarse técnicas similares a las utilizadas en las pruebas orientadas a metas[11], en las cuales, cada paso de la prueba está guiado por una fórmula que se quiere derivar. En el caso de LATA^r, dicha meta sería, evidentemente, el hecho a explicar. Queda como trabajo a futuro especificar una variación del proceso de generación de explicaciones para incluir las ideas que rigen a las pruebas orientadas a metas.

[11]Un ejemplo de pruebas orientadas a metas para la solución de problemas abductivos, sin la utilización de lógicas adaptativas, es el presentado por Meheus y Provijn [Meheus y Provijn, 2007].

Capítulo 4

Abducción estructural

En este capítulo se realizará una breve revisión de los enfoques existentes para el tratamiento de problemas abductivos detonados por novedad en la lógica modal. Posteriormente se introducirá una nueva noción de problema abductivo: el problema de *abducción estructural*.

En los problemas abductivos estructurales, es la lógica subyacente[1] la que exige un cambio y no la teoría. Es decir, no se requiere de la modificación de las hipótesis, sino de la relación de satisfactibilidad; de tal manera que permita dar cuenta del hecho observado sin alterar la teoría. Se presentan distintos tipos de problemas abductivos estructurales y se propone un procedimiento para resolver los problemas estructurales que ocurren en todos los mundos de un marco dado.

4.1 Lógica modal

La lógica modal es aquélla que se encarga del estudio de proposiciones modales y las relaciones que existen entre ellas. Una proposición modal contiene un operador modal, el cual especifica la manera o modo en el que el resto de la proposición puede ser cierta o falsa [Zalta, 1995]. Las más famosas son aquéllas que actúan sobre la posibilidad y la necesidad de que una proposición sea cierta o falsa. Por ejemplo, si α es la proposición *"Leticia perdió sus*

[1] En este capítulo la lógica subyacente será la lógica modal.

lentes", en el lenguaje de la lógica modal pueden construirse fórmulas que expresen *"Es posible que Leticia haya perdido sus lentes"* ($\Diamond\alpha$) o *"Necesariamente Leticia perdió sus lentes"* ($\Box\alpha$).[2]

La lógica modal fue descrita por primera vez por Aristóteles, en su *De interpretatione*. En él, Aristóteles notó que las nociones de posibilidad y necesidad eran interdefinibles. Posteriormente, otras aportaciones fueron realizadas por Ockham, Leibniz y Lewis.

Fue Carnap [Carnap, 1942] quien comenzó con el estudio de la teoría de modelos para la lógica modal por medio de descripciones de estados (o mundos posibles). Las descripciones de estados constan de un conjunto de proposiciones atómicas y se dice que una proposición p es cierta con respecto a una descripción de estado S si y sólo si $p \in S$. Para Carnap, dada una colección de descripciones de estados M, la oración *es necesario que* p es cierta si y sólo si p es cierta en todas las descripciones de estados que conforman M. Sin embargo, con esta interpretación no es posible distinguir *es necesario que sea necesario que* p de *es necesario que* p; es decir, *es necesario que sea necesario que* p es verdadero si y sólo si también lo es *es necesario que* p.

Posteriormente, Kripke propuso una interpretación de la teoría de modelos para la lógica modal basada en mundos posibles [Kripke, 1963]. Al igual que Carnap, Kripke utilizó el operador de necesidad como un cuantificador sobre los mundos posibles, sólo que Kripke no definió la necesidad como *es necesario que* p es verdadero si y sólo si p es verdadero en todos los mundos posibles; de haberlo hecho así, habría incurrido en el mismo error que Carnap, en el que las iteraciones del operador de necesidad no causan ningún efecto.

La forma en que Kripke solucionó el problema fue mediante una definición adecuada de relaciones de accesibilidad entre mundos posibles. La idea principal es que no cualquier mundo es accesible modalmente desde otro mundo posible; para ello, la relación de accesibilidad precisa a cuáles mundos es posible acceder desde un mundo dado. De un mundo u se puede acceder a un mundo w sólo si cualquier proposición verdadera en w es posiblemente verdadera en u. Si hay proposiciones en w que no son posibles en u, esto quiere decir que w representa *situaciones* que no son posibles desde el punto de vista de u. De esta forma, Kripke definió la noción de necesidad de la siguiente manera: *es necesario que* p es verdadera en el mundo u si y sólo si

[2]La sintaxis y la semántica de la lógica modal serán presentadas más adelante.

p es verdadera en cualquier mundo accesible desde u.

Aunque en sus inicios la lógica modal fue concebida para el manejo de las nociones de necesidad y posibilidad, actualmente su alcance se ha extendido a modalidades de tipo temporal, epistémico, deóntico (que trata sobre las obligaciones y los permisos) y doxástico (que se refiere a las creencias) [Goldblatt, 2003].

4.1.1 El lenguaje de la lógica modal

El lenguaje modal proposicional es una extensión del lenguaje proposicional puro. En esta extensión se agregan los operadores modales de necesidad y posibilidad. Como se ha mencionado con anterioridad, basta con agregar el operador de necesidad, ya que la posibilidad puede ser definida en términos de ésta. El operador de necesidad se representa comúnmente con el símbolo $\Box$ y el de posibilidad con el símbolo $\Diamond$.

La sintaxis del lenguaje de la lógica modal está formalmente dada por la siguiente gramática BNF:

$$\varphi ::= \top \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

Para la semántica del lenguaje de la lógica modal, la interpretación de Kripke es ampliamente usada. Para tal fin, es necesario definir el concepto de modelo.

Definición 4.1.1 (Modelo)**.** *Un modelo $\mathcal{M}$ para la lógica modal, comúnmente denominado* marco de Kripke *es un par ordenado $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$. donde $\mathcal{W}$ es el conjunto de mundos posibles y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ es la relación de accesibilidad. Para simplificar la notación utilizada, cuando $(u, v) \in \mathcal{R}$, se escribirá $u \rightarrow v$.*

Una valuación de la lógica modal proposicional es una función e, tal que

$$e : P \times \mathcal{W} \rightarrow \{V, F\}$$

donde P es el conjunto de proposiciones atómicas.

Sea $\mathcal{M}$ un marco, $w \in \mathcal{W}$ y e una valuación. La relación de satisfactibilidad se define de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, e, w \models p & \text{si y sólo si} & e(p, w) = V, p \in P \\
\mathcal{M}, e, w \models \neg\alpha & \text{si y sólo si} & \mathcal{M}, e, w \not\models \alpha \\
\mathcal{M}, e, w \models \alpha \wedge \beta & \text{si y sólo si} & \mathcal{M}, e, w \models \alpha \text{ y } \mathcal{M}, e, w \models \beta \\
\mathcal{M}, e, w \models \alpha \vee \beta & \text{si y sólo si} & \mathcal{M}, e, w \models \alpha \text{ o } \mathcal{M}, e, w \models \beta \\
\mathcal{M}, e, w \models \Box\alpha & \text{si y sólo si} & \forall u \in \mathcal{W}.\ \text{si } w \rightarrow u,\ \text{entonces } \mathcal{M}, e, u \models \alpha \\
\mathcal{M}, e, w \models \Diamond\alpha & \text{si y sólo si} & \exists u \in \mathcal{W}.\ w \rightarrow u \text{ y } \mathcal{M}, e, u \models \alpha
\end{array}
$$

Como se mencionó antes, los conceptos de necesidad y posibilidad son interdefinibles:

$$\Box\alpha \equiv \neg\Diamond\neg\alpha$$
$$\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$$

Asimismo, es importante señalar que los sistemas modales pueden ser caracterizados mediante un subconjunto de los siguientes esquemas:

$$
\begin{array}{rc}
(K) & \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) \\
(T) & \Box\alpha \rightarrow \alpha \\
(D) & \Box\alpha \rightarrow \Diamond\alpha \\
(B) & \alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha \\
(4) & \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha \\
(5) & \Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha
\end{array}
$$

y la regla de *necesitación*

$$\frac{\alpha}{\Box\alpha}$$

Son de especial interés los sistemas K, con el axioma K; D, con los axiomas K y D; T, con los axiomas K y T; $S4$, con los axiomas K, T y 4; y $S5$, con los axiomas K, T y 5. En todos los sistemas mencionados, se incluye la regla de *necesitación*.

4.2 Abducción en la lógica modal

La abducción en la lógica modal tiene como fin producir explicaciones a hechos sorprendentes que son consistentes con la teoría, pero que ésta no puede explicar. De acuerdo con Mayer y Pirri [Mayer y Pirri, 1994], en el contexto de la lógica epistémica, puede pensarse en un agente que razona sobre su propio conocimiento y entonces advierte que el hecho φ es consistente con su conocimiento, mas no puede explicarlo. Es decir, el agente considera que $\Diamond\varphi$ es verdadero, pero su teoría de trasfondo (conocimiento) no puede dar cuenta de ello. En este caso, la abducción se encargaría de generar la explicación abductiva para $\Diamond\varphi$.

Mayer y Pirri [Mayer y Pirri, 1994] tratan el problema de la abducción en la lógica modal, mediante una caracterización de la abducción modal que se apega al formato usual de la abducción en lógica clásica. Señalan que, para un problema abductivo modal $\langle\Theta, \varphi\rangle$, α es una solución si:

1. $\Theta, \alpha \models \varphi$

2. α es consistente con Θ.

3. α es una explicación mínima para el problema abductivo $\langle\Theta, \varphi\rangle$. La noción de minimalidad que manejan es la de la explicación abductiva más débil para φ.

4. α tiene una restricción sintáctica.

Aunque no lo mencionan explícitamente, las autoras abordan únicamente problemas abductivos en lógica modal detonados por novedad, mas no por anomalía; es decir, cuando después de ocurrir un hecho sorprendente φ, ni él ni su negación pueden ser explicados por la teoría de trasfondo.

Las autoras proponen un procedimiento para generar explicaciones abductivas en los sistemas modales K, D, T y $S4$ mediante la utilización de tableaux modales implícitos para encontrar las soluciones a los problemas abductivos tratados. Los tableaux utilizados para tal fin son una extensión de los tableaux para la lógica proposicional, con la adición de nuevas reglas que expresen los axiomas válidos en la lógica de que se trate. El procedimiento abductivo se basa en la idea de construir un tableau para la teoría y la negación del hecho a explicar y posteriormente tratar de cerrar las ramas que permanezcan abiertas.

4.3 Abducción y cambio de sistemas lógicos

En esta sección se investigará una nueva noción de abducción: aquélla que trata problemas en los que es la lógica subyacente la que reclama un cambio y no la teoría; es decir, donde el interés se encuentra dirigido a buscar una relación de consecuencia que permita a la teoría dar cuenta del hecho sorprendente.

Hasta ahora, en la literatura existente sobre abducción, se han abordado problemas abductivos en los que se requiere un cambio en la teoría para poder dar cuenta del hecho sorprendente φ. Sin embargo, resulta interesante también tratar problemas en los que no se quiere realizar un cambio en la teoría, sino en la lógica subyacente a ella.

Este tipo de problema abductivo fue por un lado planteado por Keiff en el contexto de la lógica dialógica y su relación con los *diálogos en búsqueda de estructura* (SSD por sus siglas en inglés, *Structure Seeking Dialogues*) [Keiff, 2007]. Keiff propone la siguiente definición:

Definición 4.3.1 (Problema de abducción estructural)**.** *Sea $\mathcal{L}$ un sistema de reglas de inferencia tal que, para una fórmula α dada, $\nvdash_{\mathcal{L}} \alpha$ y $\nvdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha$. Un "problema de abducción estructural" consiste en encontrar un sistema óptimo*[3] *de reglas $\mathcal{L}'$ tal que $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ y $\vdash_{\mathcal{L}'} \alpha$.*

Por otra parte, Nepomuceno propone un tratamiento estructural de la abducción para la solución problemas abductivos en la lógica modal, en los que no se trata de hallar una fórmula adicional para dar cuenta de un hecho sorprendente observado, sino de encontrar la lógica más adecuada; es decir, la relación de consecuencia que, sin realizar cambios en la teoría, dé cuenta del hecho observado [Nepomuceno, 2009]. El enfoque de Nepomuceno consiste en un cambio de lógica que no es estricto, ya que cambia de un sistema modal a otro, pero siempre dentro de la lógica modal.

Nepomuceno argumenta que la abducción estructural resulta de utilidad cuando la lógica subyacente no cuenta con las reglas suficientes que respalden una inferencia que se realiza ya de manera usual en la práctica científica o en el vivir cotidiano. Asimismo, su uso es conveniente en situaciones en las que la lógica subyacente no captura determinadas características del campo

[3] Keiff utiliza el término *óptimo* para referirse a la minimalidad del sistema.

de estudio, por lo que se requeriría cambiar de lógica para encontrar una que refleje adecuadamente tales aspectos. A diferencia de Keiff, Nepomuceno no propone la búsqueda de un sistema óptimo de reglas, sino de la estructura modal donde, a partir de la teoría sin modificaciones, se siga el hecho a explicar.

4.3.1 Caracterización de la abducción estructural

De acuerdo con Nepomuceno [Nepomuceno, 2009], en el caso de la lógica modal, existen dos enfoques para tratar problemas abductivos estructurales: aquél en el que se requiere hallar un mundo en el que cierto hecho sorprendente sea válido y aquél en el que se precisa una modificación de la relación de accesibilidad. En este trabajo, se caracterizarán ambas nociones, junto con una generalización del segundo enfoque—a partir de las ideas sugeridas por Nepomuceno—de la siguiente manera:

Definición 4.3.2 (Problema abductivo estructural por posibilidad en un mundo w)**.** $\langle \Theta, \varphi \rangle$ *constituye un problema abductivo estructural en un mundo* $w \in \mathcal{W}$ *si:*

- φ *es independiente de* Θ *en el mundo* w*, i.e.* $\Theta, w \nvdash \varphi$ *y* $\Theta, w \nvdash \neg\varphi$*.*
- $\Theta, w \vdash \Diamond\varphi$ *y* $\Theta, w \vdash \neg\Diamond\varphi$*.*

Definición 4.3.3 (Solución a un problema abductivo estructural por posibilidad en un mundo w)**.** *Dado un problema abductivo estructural por posibilidad en un mundo* w*,* $u \in \mathcal{W}$ *es una solución a dicho problema si:*

- u *es accesible desde* w*, es decir, si* $w \rightarrow u$*.*
- $\Theta, u \vdash \varphi$*.*

Definición 4.3.4 (Problema abductivo estructural en un mundo w)**.** $\langle \Theta, \varphi \rangle$ *constituye un problema abductivo estructural en un mundo* $w \in \mathcal{W}$ *si:*

- φ *es independiente de* Θ *en el mundo* w*, i.e.* $\Theta, w \nvdash \varphi$ *y* $\Theta, w \nvdash \neg\varphi$*.*

Puede notarse que el problema abductivo estructural *por posibilidad* en un mundo w es un caso especial del problema abductivo estructural en un mundo w. La diferencia radica en que el problema por *posibilidad* puede solucionarse de una manera particular (mediante la búsqueda del mundo u), aunque no se descarta su solución por medio de la modificación de la relación de accesibilidad, como será presentado más adelante.

Definición 4.3.5 (Problema abductivo estructural relativizado a un marco $\mathcal{M}$)**.** *Sea $\mathcal{M}$ el marco conformado por el conjunto de mundos posibles $\mathcal{W}$ y la relación de accesibilidad $\mathcal{R}$. $\langle\Theta, \varphi\rangle$ constituye un problema abductivo estructural en un marco $\mathcal{M} = \langle\mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ si:*

Para cualquier mundo $w \in \mathcal{W}$ se tiene que $\Theta, w \not\models_{\mathcal{M}} \varphi$ y que $\Theta, w \not\models_{\mathcal{M}} \neg\varphi$.

En este trabajo, se tratará el tercer tipo de problema abductivo estructural presentado: aquél en el que se busca modificar la estructura existente para dar solución al problema abductivo que ocurre en todos los mundos. Con esto en consideración, ahora se presentan los requerimientos que debe cumplir una solución abductiva estructural para este tipo de problema.

Definición 4.3.6 (Solución a un problema abductivo estructural relativizado a un marco $\mathcal{M}$)**.** *Dado un problema abductivo estructural $\langle\Theta, \varphi\rangle$ en un marco $\mathcal{M} = \langle\mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$, $\mathcal{M}' = \langle\mathcal{W}, \mathcal{R}'\rangle$ es una solución a dicho problema si:*

1. *En todo mundo $w \in \mathcal{W}$ se tiene que $\Theta, w \models_{\mathcal{M}'} \varphi$*
2. *$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ tal que $\mathcal{R}'$ es mínimo.*

Más adelante se presentará un procedimiento que tiene como fin resolver los problemas abductivos estructurales. Este procedimiento está basado en la construcción de un tableau modal para Θ y φ; una vez construido el tableau, se procede a determinar la manera en que deben cerrarse las ramas abiertas para encontrar una solución al problema abductivo. Dicho procedimiento produce como salida la relación de accesibilidad modificada—$\mathcal{R}'$ en la definición de solución a un problema abductivo estructural—que permite dar cuenta del hecho sorprendente sin modificar la teoría.

Para poder realizar la definición del procedimiento, es fundamental comprender antes el funcionamiento de los tableaux modales explícitos, los cuales se presentan en la siguiente sección.

4.4 Tableaux modales explícitos

Existe una amplia gama de tableaux modales que se divide en dos tipos principales: aquéllos en los que se indica de manera implícita la relación de accesibilidad subyacente; y aquéllos en los que la accesibilidad se encuentra explícita en las reglas mismas. Para el tratamiento de los problemas estructurales resulta conveniente el empleo de los tableaux en los que la relación de accesibilidad entre los mundos se presenta de manera explícita[4]. A continuación se realizará un estudio de tales tableaux.

En los tableaux explícitos para la lógica modal, la relación de accesibilidad $\mathcal{R}$ se encuentra presentada de manera clara en la construcción del tableau. Existen distintas maneras en las que esto es posible:

- Tener una red de nodos con nombres, cada uno de estos nodos contendrá un conjunto de fórmulas. Adicional al nombrado de nodos, deberá llevarse un registro de la relación de accesibilidad de manera que $x \rightarrow y$ representa que el nodo con nombre y es accesible desde el nodo x.

- Incorporar nombres de mundos estructurados a la sintaxis y adjuntar una etiqueta ℓ a cada fórmula que pertenezca al mundo llamado ℓ; hacer lo mismo para todos los mundos involucrados en el tableau. Las etiquetas de mundos estructurados son secuencias de enteros positivos separadas por puntos. Si σ es una etiqueta, la etiqueta τ es una extensión de σ si $\tau = \sigma.n_1.n_2.\ldots.n_k$. Estas etiquetas reflejan la relación de accesibilidad existente entre los mundos a los que dan nombre. Si un mundo está etiquetado con $\sigma.n$, dicho mundo es accesible desde el mundo etiquetado con σ.

- Incorporar nombres de mundos simples y adjuntar una etiqueta ℓ a cada fórmula que pertenezca al mundo llamado ℓ; hacer lo mismo para todos los mundos involucrados en el tableau. De manera adicional, deberá llevarse un registro de la relación de accesibilidad entre los mundos, de manera que $x \rightarrow y$ representa que el mundo y es accesible desde el mundo x.

[4] Goré [Goré, 1999] ha realizado una excelente recopilación de los distintos tableaux modales, tanto implícitos como explícitos.

Debido a la facilidad de su manejo y a la claridad de su construcción, para la solución de problemas abductivos estructurales, se utilizará el tercer tipo de tableau explícito presentado, a los cuales se llamará *tableaux modales etiquetados por mundos simples*, que están basados en los tableaux presentados por Nepomuceno [Nepomuceno, 2009], los cuales están a su vez inspirados en los usados por Priest [Priest, 2008].

En los tableaux modales etiquetados por mundos simples, como su nombre lo indica, las etiquetas corresponden a los nombres de los mundos, que estarán dados por u_i, donde $i \in \mathbb{N}$. Todas las reglas de expansión de los tableaux para lógica de primer orden se mantienen en los tableaux modales etiquetados por mundos simples, con sencillos ajustes para adaptarse a la notación utilizada.

El registro de la relación de accesibilidad se incluirá en el tableau mismo; a pesar de que dicho registro podría mantenerse en una estructura independiente, resulta conveniente manejarla dentro del mismo tableau para poder hacer uso de la numeración empleada en los nodos y, de esta forma, incorporar la relación de accesibilidad al tableau de una manera más transparente. Sin embargo, es importante destacar que los nodos que contengan elementos de la relación de accesibilidad no estarán etiquetados por mundos. Únicamente aquellos nodos que contengan fórmulas estarán etiquetados por un mundo, a saber, el mundo en el que tal fórmula es válida.

Además de las reglas de lógica de primer orden, se añaden reglas propias de los tableaux modales, las cuales vinculan a las fórmulas y la relación de accesibilidad[5]. En el cuadro 4.1 se muestran las reglas modales de expansión adicionales.

Además de las reglas de expansión es necesario tener reglas para la relación de accesibilidad. Estas reglas cambiarán junto con la lógica de que se trate, esto es porque las propiedades de la relación de accesibilidad están relacionadas con los axiomas válidos en la lógica modal. De esta forma, la relación de accesibilidad entre los mundos en la lógica K4—en la que son válidos los axiomas K y 4—es transitiva; en S4—donde son válidos los axiomas K, T y 4—se tiene una relación de accesibilidad reflexiva y transitiva.

En el cuadro 4.2 se muestran algunas de estas reglas.

[5]Es importante notar que las reglas de expansión modales pueden aplicarse sin importar el sistema modal en el que se construya el tableau; las restricciones ocurrirán únicamente en las reglas para la relación de accesibilidad.

κ	$\dfrac{u_i : \neg\Box\beta}{u_i : \Diamond\neg\beta}$	donde $i \in \mathbb{N}$
λ	$\dfrac{u_i : \neg\Diamond\beta}{u_i : \Box\neg\beta}$	donde $i \in \mathbb{N}$
ν	$\dfrac{u_i : \Box\beta, u_i \rightarrow u_j}{u_j : \beta}$	donde $i, j \in \mathbb{N}$
π	$\dfrac{u_i : \Diamond\beta}{u_i \rightarrow u_j, u_j : \beta}$	donde $i, j \in \mathbb{N}$ y u_j es un nuevo mundo que no aparece ya en el tableau.

Cuadro 4.1: Reglas de expansión modales.

Reflexiva. Para cada mundo u_i en la rama, agregar $u_i \rightarrow u_i$.

Simétrica. $\dfrac{u_i \rightarrow u_j}{u_j \rightarrow u_i}$

Transitiva. $\dfrac{u_i \rightarrow u_j, u_j \rightarrow u_k}{u_i \rightarrow u_k}$

Cuadro 4.2: Reglas modales para la relación de accesibilidad.

Es importante notar que la única regla que agrega nuevos mundos al tableau es la regla π. Por tal motivo, es conveniente que inmediatamente después de haber aplicado dicha regla, se apliquen tantas reglas para la relación de accesibilidad como sea posible. De esta manera, nos aseguramos de mantener la *visión* de la relación de accesibilidad tan actualizada como sea posible.

Una rama de un tableau modal etiquetado está cerrada si y sólo si los nodos $u_k : \beta$ y $u_k : \neg\beta$, para alguna $k \in \mathbb{N}$, se encuentran en dicha rama, esto es, si β y su complemento aparecen en nodos etiquetados con el mismo mundo. Un tableau modal etiquetado está cerrado si y sólo si todas sus ramas están cerradas.

A continuación se presenta un ejemplo de un tableau modal etiquetado por mundos simples.

Ejemplo 4.4.1. *Sea $\Theta = \{\Diamond r\}$ la teoría de trasfondo, y $\varphi = \Box\Diamond r$ el hecho a explicar en el sistema modal* B*, donde son válidos los axiomas* K, T *y* B*;*

es decir, con una relación de accesibilidad reflexiva y simétrica. El tableau correspondiente es el siguiente:

Primero se agregan todos los elementos de la teoría (nodo 1) y la negación del hecho a explicar (nodo 2).

$$\begin{array}{lll} \textit{1.} & u_1: & \Diamond r \\ \textit{2.} & u_1: & \neg\Box\Diamond r \end{array}$$

Debe notarse que ambos se etiquetan con el mundo u_1*; esta decisión es arbitraria, ya que podrían etiquetarse con cualquier mundo, pero ambos con el mismo. La razón por la que no importa el mundo que se utilice es que ambas fórmulas se suponen válidas en todos los mundos posibles. Por claridad, siempre se iniciará el etiquetamiento con el mundo* u_1*.*

Ahora, como se trata de una relación reflexiva, de acuerdo con las reglas anteriores se agrega el nodo:

$$\begin{array}{llll} \textit{3.} & \text{—} & u_1 \rightarrow u_1 & \textit{ref}(u_1) \end{array}$$

Este nodo no está etiquetado por un mundo porque no contiene a una fórmula, sino a un elemento de la relación de accesibilidad.

Ahora puede aplicarse la regla π *al nodo 1, con lo que se obtienen los siguientes nodos:*

$$\begin{array}{llll} \textit{4.} & \text{—} & u_1 \rightarrow u_2 & \pi(\textit{1}) \\ \textit{5.} & u_2: & r & \pi(\textit{1}) \end{array}$$

Como resultado de la aplicación de la regla π*, se ha agregado un nuevo mundo al tableau:* u_2*, por lo que si ahora se aplican las reglas de la relación de accesibilidad, se obtienen los siguientes nodos sin etiquetas:*

$$\begin{array}{llll} \textit{6.} & \text{—} & u_2 \rightarrow u_2 & \textit{ref}(u_2) \\ \textit{7.} & \text{—} & u_2 \rightarrow u_1 & \textit{sim}(\textit{4}) \end{array}$$

Si se aplica la regla κ *al nodo 2, se obtiene:*

$$\begin{array}{llll} \textit{8.} & u_1: & \Diamond\neg\Diamond r & \kappa(\textit{2}) \end{array}$$

Si ahora se aplica la regla de expansión π al nodo 8, se tiene:

9.	—	$u_1 \to u_3$	π(8)
10.	u_3 :	$\neg\Diamond r$	π (8)

Ahora se ha agregado un nuevo mundo al tableau: u_3, por lo que se aplican las reglas de la relación de accesibilidad para obtener los siguientes nodos sin etiquetas:

11.	—	$u_3 \to u_3$	ref(u_3)
12.	—	$u_3 \to u_1$	sim(9)

Con la aplicación de la regla λ al nodo 10 se tiene que:

13.	u_3 :	$\Box\neg r$	λ(10)

Por último, si se aplica la regla ν al nodo 13 junto con los nodos 12 y 11, se obtienen los siguientes nodos:

14.	u_1 :	$\neg r$	ν(13, 12)
15.	u_3 :	$\neg r$	ν(13, 11)

En el cuadro 4.3 se muestra el tableau completo.

4.5 Solución a los problemas abductivos estructurales

Los tableaux modales etiquetados por mundos simples servirán como base para el procedimiento abductivo que dará solución a los problemas abductivos estructurales en una lógica modal. El procedimiento abductivo que se propone en este trabajo está basado en la idea de cerrar las ramas abiertas del tableau; sin embargo, difiere de otros procedimientos abductivos basados en tableaux porque éste no busca agregar más fórmulas a la teoría, sino modificar la relación de accesibilidad entre los mundos para que la teoría—sin

1.	$u_1:$	$\Diamond r$	
2.	$u_1:$	$\neg\Box\Diamond r$	
3.	—	$u_1 \to u_1$	ref(u_1)
4.	—	$u_1 \to u_2$	$\pi(1)$
5.	$u_2:$	r	$\pi(1)$
6.	—	$u_2 \to u_2$	ref(u_2)
7.	—	$u_2 \to u_1$	sim(4)
8.	$u_1:$	$\Diamond\neg\Diamond r$	$\kappa(2)$
9.	—	$u_1 \to u_3$	$\pi(8)$
10.	$u_3:$	$\neg\Diamond r$	π (8)
11.	—	$u_3 \to u_3$	ref(u_3)
12.	—	$u_3 \to u_1$	sim(9)
13.	$u_3:$	$\Box\neg r$	$\lambda(10)$
14.	$u_1:$	$\neg r$	ν(13,12)
15.	$u_3:$	$\neg r$	ν(13,11)

Cuadro 4.3: Tableau modal etiquetado por mundos simples.

modificación alguna—pueda dar cuenta del hecho sorprendente observado en otro sistema lógico.

En esta sección se presenta un esbozo de dicho procedimiento y se muestra un ejemplo de su aplicación.

Sea $\langle\Theta, \varphi\rangle$ un problema abductivo estructural en una lógica modal. Para determinar las modificaciones que deben realizarse a la relación de accesibilidad entre los mundos posibles, se lleva a cabo lo siguiente:

- Construir un tableau modal etiquetado por mundos simples para Θ y $\neg\varphi$; sea $\mathcal{T}$ dicho tableau.

- Aplicar el procedimiento STRUCT a $\mathcal{T}$.

  Procedimiento STRUCT

  Entrada: Un tableau modal etiquetado por mundos simples $\mathcal{T}$.

  Salida: Un conjunto de pares ordenados de mundos que deberán agregarse a la relación de accesibilidad para resolver el problema abductivo.

1. Buscar una literal A en uno de los nodos etiquetados de $\mathcal{T}$. Sea dicho nodo aquél etiquetado con el mundo u_j.
2. Buscar el complemento de A, es decir, $\neg A$, en la misma rama del tableau, etiquetado con un mundo distinto[6]. Sea u_i el mundo que etiqueta a ese nodo.
3. Buscar $u_i : \Box\neg A$ en la misma rama del tableau.
4. Cuando se encuentre, agregar $u_i \to u_j$ a la relación.
5. Aplicar todas las posibles reglas para la relación de accesibilidad al tableau $\mathcal{T}$.
6. Regresar todos los pares ordenados generados en el paso anterior.

Después de ejecutar el procedimiento, se obtendrán los pares ordenados que deberán agregarse a la relación de accesibilidad entre los mundos posibles, para que la teoría—sin cambios—dé cuenta del hecho observado. Debe notarse que, como el tableau se construye sin fijar un mundo en particular[7], las relaciones que se agregan, deben verse reflejadas en todos los mundos posibles; es por esto que lo que finalmente se logra es modificar las propiedades de la relación de accesibilidad y, en consecuencia, los axiomas válidos en la lógica. Es de esta forma que se consigue cambiar de un sistema modal a otro.

A continuación se presenta un ejemplo de la utilización del procedimiento abductivo estructural propuesto.

Ejemplo 4.5.1. *Sea $\langle\Theta, \varphi\rangle$ un problema abductivo estructural donde $\Theta = \{\Diamond r\}$ y $\varphi = \Box\Diamond r$ en el sistema modal* B.

- *Se construye el tableau modal etiquetado por mundos simples $\mathcal{T}$. Éste es el tableau elaborado en el ejemplo 4.4.1, cuya forma final puede apreciarse en el cuadro 4.3.*
- *Se aplica el procedimiento* STRUCT *a dicho tableau.*

  Procedimiento STRUCT *aplicado a $\mathcal{T}$*

[6]Es importante notar que, si $\neg A$ está en esa rama del tableau, forzosamente está etiquetado con un mundo distinto al de A ya que, de lo contrario, la rama ya estaría cerrada.

[7]Debe recordarse que la elección del mundo u_1 como mundo inicial, es arbitraria, como se vio en el ejemplo 4.4.1.

1. Se elige $u_2 : r$ obtenido en el nodo 5.

2. Se busca $\neg r$ en uno de los nodos etiquetados.
$\neg r$ se encuentra en los nodos 14 y 15, etiquetados con los mundos u_1 y u_3, respectivamente.

3. Se busca $u_1 : \Box\neg r$, pero no se encuentra en la rama.

4. Se busca $u_3 : \Box\neg r$; se encuentra en el nodo 13.

5. Se agrega $u_3 \rightarrow u_2$ a la relación de accesibilidad.

6. Se aplican las reglas para la relación de accesibilidad, gracias a lo cual se genera $u_2 \rightarrow u_3$ por la regla de simetría.

Después de la aplicación del procedimiento abductivo, se obtiene una relación reflexiva, simétrica y transitiva, a diferencia de la relación reflexiva y simétrica propia del sistema modal B*; es decir, se pasó de un sistema modal* B *a un sistema modal* S5*, que tiene una relación reflexiva, simétrica y transitiva y en el que los axiomas* K, T *y* 5 *son válidos.*

En el ejemplo anterior se ha mostrado que, en lógica modal, la solución al problema estructural $\langle\{\Diamond r\}, \Box\Diamond r\rangle$, cuando la relación de accesibilidad de la lógica es reflexiva y simétrica, pero no transitiva, es hacer la relación también transitiva. Debe notarse que esto no implica que no exista una solución abductiva en el mismo sistema modal B, es decir, es posible que exista también una solución abductiva tradicional (no estructural) al problema planteado.

4.6 Observaciones y conclusiones

En este capítulo se abordó el problema de la abducción en la lógica modal. Primero se introdujo el lenguaje de la lógica modal y posteriormente se expusieron los problemas abductivos por novedad en la lógica modal y se presentaron brevemente las principales ideas del trabajo realizado por Mayer y Pirri [Mayer y Pirri, 1994] para solucionar tal tipo de problemas mediante tableaux modales implícitos.

Después se propuso otro tipo de abducción: la abducción estructural. En ella se tratan problemas en los que es la lógica subyacente (en este caso un sistema modal) la que reclama un cambio y no la teoría. Por último se propuso un procedimiento para solucionar problemas abductivos estructurales en un sistema modal. Dicho procedimiento está basado en los tableaux modales etiquetados por mundos y en el trabajo que Nepomuceno [Nepomuceno, 2009] ha iniciado al respecto.

Queda como trabajo a futuro probar la correctez del procedimiento, así como determinar qué ocurre en los casos en que las fórmulas buscadas no se encuentren en la rama correspondiente del tableau. Una solución posible a estos casos es agregar mundos al tableau (como lo hace la regla π) y aplicar posteriormente las reglas para la relación de accesibilidad. Aún quedan por establecer las dificultades que conlleva esta tarea.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones a las que se ha llegado después del análisis e investigación realizadas durante el desarrollo de este trabajo. En él, se resaltan las principales aportaciones originales que se produjeron como resultado de este estudio, así como el trabajo a futuro que queda por realizar para enriquecer el tratamiento de la abducción mediante lógicas no clásicas.

5.1 Caracterización de la abducción

De acuerdo con la caracterización usual de una solución abductiva, α es una solución al problema abductivo $\langle \Theta, \varphi \rangle$ si:

1. $\Theta \cup \{\alpha\} \models \varphi$
2. α es consistente con Θ.
3. α es minimal.
4. α tiene una restricción sintáctica.

Sin embargo, como se apuntó anteriormente, esta caracterización se concentra en los problemas abductivos detonados por una novedad, mas no considera a los detonados por una anomalía, así como tampoco permite realizar abducción en teorías inconsistentes. Debe recordarse que para resolver un problema por anomalía es imprescindible realizar una revisión de la teoría, lo cual implica no únicamente agregar fórmulas, sino eliminar aquellas fórmulas que entran en conflicto con el hecho a explicar para posteriormente ampliar la teoría.

En este trabajo se estableció que la exigencia de la consistencia entre la teoría Θ y la explicación α, hacía que los problemas abductivos en lógicas que toleran inconsistencias, fueran intratables. Por tal motivo se realizó una revisión de los conceptos de no contradicción y no trivialidad para determinar cuál era el más adecuado para el tratamiento de problemas abductivos en lógicas que toleran inconsistencias.

Se encontró que modificar la imposición de consistencia para demandar en su lugar la no trivialidad se traduce en una caracterización de las soluciones abductivas que puede ser utilizada en lógicas que toleran inconsistencias. Esto permite ampliar el alcance real de la abducción, sin limitar su tratamiento a la lógica clásica, ya que como Aliseda lo plantea [Aliseda, 2006], la abducción no es una nueva noción de inferencia, sino un ejercicio del razonamiento científico que cuenta con el respaldo de alguna inferencia lógica. Por lo anterior, debería ser posible aplicar abducción en lógicas distintas a la clásica; sin embargo, con la caracterización usada anteriormente, las lógicas paraconsistentes quedaban fuera del terreno considerado para los problemas abductivos.

Asimismo, se ha propuesto una caracterización más general de una solución abductiva que tiene en cuenta no sólo a los problemas detonados por novedad, sino también a los detonados por anomalía. Se reconoce la necesidad de realizar una revisión de la teoría en los casos anómalos, pero sin afectar la caracterización existente para los problemas abductivos por novedad. Es decir, esta nueva caracterización alternativa de la abducción abarca tanto a los problemas por novedad como a los problemas por anomalía.

Debido a los cambios propuestos a la caracterización de una solución abductiva, la nueva caracterización permite tratar problemas abductivos en lógicas distintas a la clásica y reconocer las necesidades específicas de los problemas abductivos detonados por anomalía. Es importante notar que la caracterización propuesta únicamente se refiere al concepto de *solución a un problema abductivo* mas no al de *problema abductivo*; esto es, se conserva la misma noción de *problema abductivo* presentada por Aliseda y se modifica únicamente la de *solución*. La caracterización propuesta es la siguiente (véase sección 3.1.1):

Definición 5.1.1 (Solución abductiva)**.** $\langle \Theta', \gamma \rangle$ *es una solución al problema abductivo* $\langle \Theta, \varphi \rangle$ *si:*

1. $\Theta' \subseteq \Theta$ *y* $\Theta' \not\models \neg\varphi$.
2. $\Theta' \cup \{\gamma\} \models \varphi$.
3. γ *junto con* Θ' *no es trivial.*
4. γ *es minimal.*
5. γ *tiene una restricción sintáctica.*
6. Θ' *es máximo*[1]*, en el sentido en que preserva el mayor número de fórmulas posibles con respecto a* Θ.

donde Θ' *es la teoría* Θ *revisada para que no contradiga al hecho a explicar* φ.

5.2 Problemas abductivos por anomalía

La abducción en la lógica clásica ha sido ampliamente estudiada, con propuestas tales como el uso de los tableaux semánticos para la lógica proposicional [Aliseda, 1998, Aliseda, 2006], los $\mathcal{N}$-tableaux semánticos para la lógica de primer orden [Reyes et al., 2006], las pruebas orientadas a metas [Meheus y Provijn, 2007] y los tableaux semánticos implícitos en la lógica modal [Mayer y Pirri, 1994]. Todas las propuestas antes mencionadas tratan la solución de problemas abductivos por novedad, es decir, cuando ni el hecho sorprendente ni su negación son explicados por la teoría.

Sin embargo, aun en el terreno de la lógica clásica, poco se ha tratado el problema de la abducción detonada por una anomalía. Esto probablemente

[1]Puede consultarse la definición 3.1.1 para mayor detalle en la caracterización de la solución de un problema abductivo.

se debe a lo complejo que resultan las tareas de revisión de teorías—paso forzoso en la solución de un problema abductivo anómalo. Algunos de estos problemas son incluso pragmáticos y no lógicos, es decir, que no dependen sólo de la lógica que se emplea, sino de factores y criterios externos que sirven de guía en la revisión de una teoría.

Un claro ejemplo de los problemas metalógicos, puede encontrarse en la sección 3.4.1, donde se presentan los distintos criterios que pueden utilizarse para determinar cuál subconjunto de la teoría debe considerarse como *responsable* de las inconsistencias que ocurren al agregar el hecho anómalo observado.

En este trabajo se ha abordado el tema de la abducción y las lógicas no clásicas. En especial se ha investigado cómo puede una lógica no clásica auxiliar en la solución de problemas abductivos por anomalía en lógica clásica. Se estudió particularmente la utilidad de las lógicas adaptativas para abordar estos problemas.

Ya existían tratamientos de la abducción mediante lógicas adaptativas, pero sólo para la solución de problemas por novedad; y no sólo eso, tampoco era posible realizar modificaciones o extensiones a dichas lógicas para llegar a resolver problemas detonados por anomalía. Las primeras lógicas adaptativas con las que se abordó la solución de problemas abductivos fueron las lógicas LA y $\textsc{la}^k$ [Meheus, 2005]; sin embargo, ninguna de ellas se encuentra definida mediante el formato estándar propuesto por Batens [Batens, 2002], lo cual dificulta su análisis y no garantiza el cumplimiento de todas las propiedades metateóricas que se aseguran cuando se realiza la definición de lógicas adaptativas a través del formato estándar.

Posteriormente se presentó la lógica $\textsc{la}^r$ [Meheus y Batens, 2006]; sin embargo, en dicha lógica es necesario contar de antemano con un conjunto $\mathcal{W}^e$ de fórmulas que necesitan una explicación[2] y con un conjunto $\mathcal{W}^a$ de fórmulas que constituyen posibles explicaciones para las fórmulas que requieren de una explicación[3].

Por último, Meheus [Meheus, 2010] propuso una lógica adaptativa capaz de abordar problemas abductivos: $\textsc{la}^r_s$. Dicha lógica se encuentra en el formato estándar de las lógicas adaptativas, lo cual facilita su estudio, así como la utilización de su teoría de la demostración y la posibilidad de combinarla con

[2] La letra e en el nombre del conjunto $\mathcal{W}^e$ se refiere a ***e**xplananda*.
[3] La letra a en el nombre del conjunto $\mathcal{W}^a$ se refiere a *explananti**a***.

otras lógicas adaptativas.

Por otro lado, se presentó también la lógica CLuN^r [Batens, 1999], la cual es capaz de lidiar con teorías inconsistentes para interpretarlas de la manera más consistente posible. El reto abordado en esta investigación fue utilizarlas para resolver problemas detonados por anomalía; para tal fin se utilizaron dos lógicas adaptativas: CLuN^r y LA^r_s.

CLuN^r se encarga de interpretar una teoría tan consistentemente como sea posible; mientras que LA^r_s se ocupa de la generación de explicaciones a hechos sorprendentes novedosos. Se utilizó la combinación en lógicas adaptativas para acoplar ambas lógicas y de esta manera, aumentar su poder en la solución de problemas abductivos anómalos. Sin embargo, la combinación de estas lógicas resultó en un desafío adicional, ya que sus LLI son distintas y, aunque en teoría es posible combinar lógicas adaptativas con diferentes LLI, aún no existe en la literatura una descripción de cómo debe realizarse tal combinación.

La solución propuesta en este trabajo es establecer una lógica límite inferior común para las dos. Para determinar cuál de las dos lógicas ha de considerarse como la LLI para la lógica combinada, es necesario precisar cuál de ellas es la más débil mediante el análisis de su lógica límite inferior y su lógica límite superior (LLS)[4]. Para esto, considérese primero la lógica CLuN^r: su lógica límite inferior es CLuN y su lógica límite superior es CL; tómese ahora en cuenta LA^r_s: su lógica límite inferior es CL y su lógica límite superior es el fragmento de CL en el que siempre puede aplicarse el formato abductivo.

Como puede notarse, la lógica límite inferior de LA^r_s es la lógica límite superior de CLuN^r, por lo que la lógica límite inferior de CLuN^r resulta ser la lógica más débil de todas las involucradas(CLuN, CL y el fragmento de CL en el que siempre puede aplicarse el formato abductivo). Al ser la lógica más débil, ésta es más permisiva que todas las demás, de forma tal que, mediante restricciones adicionales sobre CLuN, es posible simular el comportamiento que tendrían las otras lógicas sobre un conjunto de premisas determinado.

Al seleccionar a CLuN como lógica límite inferior y conservar los conjuntos de anormalidades correspondientes a cada una de las lógicas adaptativas,

[4]Debe recordarse que la LLS de una lógica adaptativa es la lógica que resulta de eliminar de la LLI las fórmulas anormales, es decir, aquéllas contenidas en el conjunto Ω de anormalidades.

así como la estrategia adaptativa que ambas utilizaban (*Confiabilidad*), se llegó a la definición de una nueva lógica adaptativa: LATA^r. Esta lógica es capaz de tratar con teorías inconsistentes mientras busca soluciones a un problema abductivo, que son las dos cuestiones que abordan, cada una por su cuenta, las lógicas CLuN^r y LA^r_s, respectivamente. LATA^r une el poder de ambas lógicas para realizar ambas tareas a la par, mediante la redefinición de sus LLI y la aplicación de heurísticas durante las pruebas de la nueva lógica adaptativa combinada.

Es importante señalar que LATA^r por sí sola no puede solucionar los problemas abductivos; se requiere de un procedimiento auxiliar capaz de extraer la información pertinente de las pruebas de LATA^r para poder dar solución a los problemas abductivos tanto detonados por anomalía como por novedad. Como procedimiento auxiliar en la solución de problemas abductivos detonados por anomalía, se definió el procedimiento RETRO, el cual se encarga de realizar una revisión de la teoría por medio del retroceso en los pasos de la prueba. Este procedimiento obtiene el conjunto Υ, que es el conjunto de fórmulas que potencialmente entran en conflicto con el hecho a explicar φ.

Una vez que se tiene dicho conjunto, es necesario aplicar alguno de los criterios establecidos en el capítulo 3 para seleccionar las fórmulas que deben eliminarse de la teoría. Dichos criterios son: *Menor impacto*, *Confianza en la teoría*, *Confianza en las observaciones* y *Subfórmulas*[5]. Por último, se procede a la generación de soluciones abductivas basada en las aplicaciones de la regla RC$^{\mathrm{LA}^r_s}$.[6]

Debe notarse que, para la solución de problemas abductivos por novedad, no es necesario aplicar el procedimiento RETRO ni los criterios de selección para conformar la teoría revisada—no hay necesidad de revisar la teoría, por lo que tales pasos carecen de sentido. En estos casos es necesario únicamente realizar la generación de soluciones abductivas, como se expone en la sección 3.4.2.

Además se propuso una heurística que sirve como guía en la aplicación de las reglas condicionales e incondicionales durante una prueba en LATA^r. Antes de la definición de LATA^r, se habían ya propuesto heurísticas para la aplicación de reglas en las pruebas dinámicas de las lógicas adaptativas; sin embargo,

[5]Puede referirse a la sección 3.4.1 para una revisión de cada uno de ellos.
[6]Puede consultarse la sección 3.4.2 para una explicación detallada.

tales heurísticas se encuentran todavía en desarrollo y han sido abordadas únicamente en lo referente a lógicas adaptativas que lidian con inconsistencias, como es el caso de CLuN^r.

En las heurísticas presentadas en este trabajo, se consideran también estrategias para aplicación de reglas en pruebas de lógicas adaptativas combinadas. Como podrá recordarse, tales pruebas están compuestas por varias subpruebas correspondientes a cada una las lógicas adaptativas simples involucradas (en el caso de LATA^r únicamente ha de tratarse con CLuN^r y con LA$_s^r$).

La definición de la nueva lógica adaptativa LATA^r junto con la especificación del algoritmo RETRO, conforman un primer acercamiento a la solución de problemas abductivos detonados por anomalía, mediante lógicas adaptativas. Específicamente por medio de lógicas adaptativas combinadas, con distintas lógicas de límite inferior, lo cual tiene como consecuencia la redefinición y homogeneización de sus LLI. De manera adicional, se contribuye también al desarrollo de heurísticas para las lógicas adaptativas combinadas.

5.3 Problemas abductivos estructurales

En el caso de la abducción en la lógica modal, existen algunos tratamientos que utilizan a los tableaux semánticos implícitos para dar solución a los problemas abductivos por novedad en esta lógica [Mayer y Pirri, 1994]. Sin embargo, el objetivo que se persiguió durante el desarrollo de la presente investigación de la abducción y las lógicas no clásicas, fue el de presentar y estudiar una nueva noción de problema abductivo: aquélla en la que es la lógica subyacente y no la teoría, quien exige un cambio.

Para este estudio se utilizó como lógica subyacente a la lógica modal, siguiendo la línea de investigación iniciada por Keiff [Keiff, 2007] y Nepomuceno [Nepomuceno, 2009]. A esta nueva noción de problema abductivo se le conoce como *problema abductivo estructural*, en el cual no se requiere de la modificación de la teoría, sino de la alteración de la relación de accesibilidad; de manera tal que pueda darse cuenta del hecho observado sin que la teoría sufra cambio alguno.

Específicamente, en el caso de la lógica modal, se identificaron diversos tipos de problemas abductivos estructurales: (i) *Problema abductivo estructural por* *posibilidad en un mundo w*; (ii) *Problema abductivo estructural en un mundo w* y; (iii) *Problema abductivo estructural relativizado a un marco* $\mathcal{M}$.[7]

Una de las contribuciones realizadas en este trabajo consiste en la caracterización de la solución de un problema abductivo estructural relativizado a un marco $\mathcal{M}$, el cual se encontraba hasta ahora carente de tal definición[8]. Una vez que se realizó la caracterización, se buscó obtener un procedimiento sistemático que permitiera dar solución a ese tipo de problema abductivo.

Se presentó un algoritmo, llamado STRUCT, que formaliza las ideas presentadas por Nepomuceno para dar solución a problemas abductivos estructurales relativizados a un marco $\mathcal{M}$ por medio de una versión modificada de los tableaux modales explícitos. Para definir tal algoritmo fue necesario ajustar los tableaux usados por Nepomuceno para que éstos contaran con todos los elementos necesarios para su posterior manipulación por parte del procedimiento.

El procedimiento STRUCT, tal como lo hacen otros procedimientos basados en tableaux, busca cerrar las ramas abiertas de éste. Lo que distingue a este procedimiento es el tipo de cambios que hace al tableau para cerrar las ramas abiertas: no agrega fórmulas al tableaux; por el contrario, busca complementar la relación de accesibilidad entre los mundos para cerrar el tableau. De esta manera, lo que logra es modificar la lógica subyacente, mientras mantiene la teoría intacta.

En este trabajo, se realizó la formalización de los conceptos de abducción estructural en la lógica modal. Tal formalización sirve como base para el inicio de una investigación profunda de distintos métodos para resolver problemas abductivos estructurales en dicha lógica. Asimismo, se definió el procedimiento STRUCT, el cual constituye un primer acercamiento a la búsqueda de explicaciones abductivas para problemas estructurales.

[7] Puede verse la sección 4.3.1 para una definición precisa de cada uno de ellos.

[8] En 2009, Nepomuceno [Nepomuceno, 2009] introdujo las ideas en las que se basa esta caracterización.

5.4 Trabajo a futuro

Este trabajo constituye una primera aproximación al tratamiento de problemas abductivos en y mediante lógicas no clásicas. Se establecieron modificaciones a la caracterización usual de la abducción para ampliar el alcance de sus aplicaciones. Sin embargo, se formulan también nuevas interrogantes que deberán resolverse para enriquecer el tratamiento de la abducción tanto en su faceta de producto como en la de proceso.

Una de las cuestiones que queda por resolver es afinar el proceso de retroceso RETRO. Como se mencionó y se ejemplificó anteriormente[9], dicho proceso, durante la generación de explicaciones abductivas, únicamente toma en cuenta el caso de las fórmulas derivadas mediante la aplicación directa de una de las reglas condicionales de LATA^r: RC$^{\mathrm{LA}^r_s}$; y no sólo eso, la aplicación de tal regla se exige únicamente en la línea en la que se encuentra el hecho a explicar.

Sin embargo, debe notarse que es posible hallar explicaciones abductivas distintas si se toman también en cuenta las líneas que tengan como consecuencia al hecho a explicar y que hayan sido a su vez obtenidas a través de la aplicación de la regla condicional RC$^{\mathrm{LA}^r_s}$. De esta manera, podrían hallarse explicaciones que no tengan como consecuencia directa el hecho a explicar, pero sí a otra fórmula o fórmulas a partir de las cuales pueda derivarse el hecho sorprendente.

Estos casos pueden solucionarse también mediante LATA^r y el procedimiento RETRO, únicamente sería necesario modificar el proceso de generación de explicaciones para establecer cómo reconocer la existencia de fórmulas que tengan como consecuencia el hecho sorprendente.

Sería admisible considerar todas las aplicaciones de la regla condicional RC$^{\mathrm{LA}^r_s}$ como *posibles* soluciones abductivas al problema dado; sin embargo, el proceso de selección de fórmulas que sean explicaciones abductivas de entre todas las *posibles* soluciones generadas, podría requerir de más recursos que la generación inicial misma.

Resulta interesante notar que la naturaleza de este problema sugiere que el uso de pruebas orientadas a metas[10] podría emplearse como una herramienta

[9] En el cuadro 3.4 se encuentra un problema abductivo con múltiples explicaciones.

[10] Puede consultarse la sección 1.3.2 para mayor detalle sobre las pruebas orientadas a

poderosa para su solución. Las pruebas orientadas a metas otorgarían al procedimiento un mecanismo auxiliar para determinar la existencia de estas fórmulas *intermedias* en la búsqueda de una explicación.

Por lo anterior, se considera que esto podría determinarse mediante un proceso de retroceso aplicado a las líneas en las que la fórmula derivada sea el hecho mismo a explicar. Pueden utilizarse técnicas similares a las utilizadas en las pruebas orientadas a metas, en las cuales, cada paso de la prueba está guiado por una fórmula que se quiere derivar. En el caso de LATA^r, dicha meta sería, evidentemente, el hecho a explicar. Entonces, se mantiene como trabajo a futuro el especificar una variación del proceso de generación de explicaciones para incluir los principios que conducen a las pruebas orientadas a metas.

En lo concerniente a la abducción estructural en la lógica modal, el procedimiento STRUCT requiere de un estudio adicional para establecer cuál debería ser la acción a realizar cuando se llegue al caso en que la fórmula buscada no se encuentre en la rama correspondiente.

Hará falta establecer si en tales casos es conveniente agregar mundos al tableau y, de ser así, bajo qué condiciones se hará y qué alteraciones deberán realizarse a la relación de accesibilidad para que la inclusión de dichos mundos resulte en un avance hacia el cierre de las ramas abiertas. Para tal fin, podría ser necesario definir nuevas reglas que agreguen mundos y elementos a la relación de accesibilidad, como lo hace la regla π de los tableaux presentados.

Resulta también importante resaltar que debería ser posible aplicar abducción estructural en lógicas distintas a la modal. Los problemas estructurales en lógicas modales consisten en cambiar de sistema modal para dar cuenta del hecho sorprendente sin modificar la teoría. Sin embargo, no es ésta la única manera de modificar una lógica para resolver un problema estructural.

Por ejemplo, en el caso de lógicas paraconsistentes, permanece abierto el cuestionamiento que considera pasar de una lógica paraconsistente a otra. Incluso podría requerirse pasar de una lógica paraconsistente a la lógica clásica. Quedan por especificar los procedimientos que permitirían reconocer la necesidad de pasar de una lógica a otra, así como la manera en que ha de realizarse la

metas.

transición.

Otro problema en el que podría aplicarse la abducción estructural es en el establecimiento de conocimiento compartido en una lógica epistémica con más de un agente. En este caso, tendrían que hacerse distinciones entre las relaciones de accesibilidad existentes para cada uno de los agentes involucrados, así como en los mundos que cada agente considera posibles. Serían también necesarias ligeras modificaciones en los tableaux usados para que éstos puedan proporcionar una visión global del conocimiento de cada agente.

Por último, se mencionan las publicaciones que se han generado como fruto de este estudio y gracias a la estancia de investigación realizada: el artículo *Limitaciones del formato general de la abducción* [Leonides, 2010] aborda el tema de la caracterización usual de la abducción. En él se realiza una revisión de los enfoques y definiciones utilizados actualmente, se lleva a cabo un análisis de su insuficiencia y se estudia la posibilidad de ampliar el alcance de la abducción mediante la modificación de su caracterización, para permitir la inclusión de lógicas no clásicas como lógicas subyacentes en el proceso abductivo. Posteriormente se proponen modificaciones a la caracterización y se sugiere un procedimiento para solucionar problemas abductivos detonados por anomalía a través del empleo de lógicas adaptativas como auxiliares en el proceso abductivo.

Actualmente se encuentra en revisión el artículo *Adaptive Logics and the Solution of Abductive Problems Triggered by Anomaly* [Leonides, 2011], en el cual se examina cómo las lógicas adaptativas pueden usarse para resolver problemas abductivos detonados por una anomalía y se sugiere una manera de realizar combinaciones de lógicas adaptativas que no comparten sus *lógicas de límite inferior*.

Bibliografía

[Alchourrón et al., 1985] Alchourrón, C. E., Gärdenfors, P., y Makinson, D. (1985). On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(2):510–530.

[Aliseda, 1998] Aliseda, A. (1998). Computing Abduction in Semantic Tableaux. *Computación y Sistemas: Revista Iberoamericana de Computación*, 2(1):5–13.

[Aliseda, 2006] Aliseda, A. (2006). *Abductive Reasoning. Logical investigations into Discovery and Explanation*, volumen 330. Synthese Library. Springer.

[Aravindan y Dung, 1994] Aravindan, C. y Dung, P. M. (1994). Belief dynamics, abduction, and databases. En MacNish, C., Pereira, L. M., y Pearce, D., editores, *Logics in Artificial Intelligence*, págs. 66–85. Springer-Verlag, Berlin.

[Batens, 1986] Batens, D. (1986). Dialectical dynamics within formal logics. *Logique et Analyse*, 114:161–173.

[Batens, 1989] Batens, D. (1989). Dynamic dialectical logics. En Gabbay, editor, *Paraconsistent Logic. Essays on the Inconsistent*, págs. 187–217. Philosophia Verlag.

[Batens, 1999] Batens, D. (1999). Inconsistency-adaptive logics. En Orłowska, E., editor, *Logic at Work. Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, págs. 445–472. Physica Verlag (Springer), Heidelberg, New York.

[Batens, 2002] Batens, D. (2002). A General Characterization of Adaptive Logics. *Logique et analyse*, 173–175:45–68.

[Batens, 2005] Batens, D. (2005). A procedural criterion for final derivability in inconsistency-adaptive logics. *J. Applied Logic*, 3(1):221–250.

[Batens, 2007] Batens, D. (2007). A Universal Logic Approach to Adaptive Logics. *Logica Universalis*, 1:221–242.

[Batens, 2009] Batens, D. (2009). Towards a Dialogic Intepretation of Dynamic Proofs. En Dégremont, C., Keiff, L., y Rückert, H., editores, *Dialogues, Logics and Other Strange Things. Essays in Honour of Shahid Rahman*, págs. 27–51. College Publications, London.

[Batens y Meheus, 2000] Batens, D. y Meheus, J. (2000). A tableau method for inconsistency-adaptive logics. En Dyckhoff, R., editor, *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, volumen 1847 de *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, págs. 127–142, London, UK. Springer.

[Batens y Meheus, 2001] Batens, D. y Meheus, J. (2001). Shortcuts and dynamic marking in the tableau method for adaptive logics. *Studia Logica*, 69(2):221–248.

[Batens et al., 2009] Batens, D., Strasser, C., y Verdée, P. (2009). On the Transparency of Defeasible Logics: Equivalent Premise Sets, Equivalence of Their Extensions, and Maximality of the Lower Limit. *Logique et Analyse*, (207):281–304.

[Carnap, 1942] Carnap, R. (1942). *Introduction to Semantics*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

[Carnielli et al., 2005] Carnielli, W. A., Coniglio, M. E., y Marcos, J. (2005). Logics of formal Inconsistency. En Gabbay, D. y Guenthner, F., editores, *Handbook of Philosophical Logic*, volumen 14. Kluwer Academic Publishers, 2nd edición.

[D'Agostino et al., 2008] D'Agostino, M., Finger, M., y Gabbay, D. (2008). Cut-Based Abduction. *Logic Journal of the IGPL*, 16(6):431–451.

[D'Agostino et al., 1999] D'Agostino, M., Gabbay, D. M., Hähnle, R., y Posegga, J., editores (1999). *Handbook of Tableau Methods.* Springer.

[D'Agostino y Mondadori, 1994] D'Agostino, M. y Mondadori, M. (1994). The Taming of the Cut. Classical Refutations with Analytic Cut. *Journal of Logic and Computation*, 4:285–319.

[Eiter y Gottlob, 1995] Eiter, T. y Gottlob, G. (1995). The Complexity of Logic-Based Abduction. *J. ACM*, 42(1):3–42.

[Gärdenfors, 2003] Gärdenfors, P. (2003). Belief revision: An introduction. En Gärdenfors, P., editor, *Belief revision*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press.

[Ginsberg, 1988] Ginsberg, A. (1988). Theory revision via prior operationalization. En *Proceedings of the Seventh National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-88)*, págs. 590–595, St. Paul, MN.

[Goldblatt, 2003] Goldblatt, R. (2003). Mathematical modal logic: A view of its evolution. *Journal of Applied Logic*, 1(5):309–392.

[Goré, 1999] Goré, R. (1999). Tableau methods for modal and temporal logics. En D'Agostino, Marcello, Gabbay, Dov, Hähnle, Reiner, y Posegga, Joachim, editores, *Handbook of Tableau Methods*. Kluwer Academic Publishers.

[Hofweber, 2009] Hofweber, T. (2009). Logic and ontology. En Zalta, E., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Edición Primavera 2009.

[Kakas et al., 1992] Kakas, A. C., Kowalski, R. A., y Toni, F. (1992). Abductive logic programming. *Journal of Logic and Computation*, 2(6):719–770.

[Keiff, 2007] Keiff, L. (2007). *Le Pluralisme Dialogique. Approches Dynamiques de l'Argumentation Formelle.* Tesis de Doctorado, Université de Lille 3.

[Konolige, 1990] Konolige, K. (1990). A general theory of abduction. En *Automated Abduction, Working Notes.*, Spring Symposium Series of the AAA, págs. 62–66. Standford University.

[Kripke, 1963] Kripke, S. A. (1963). Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica*, 16:83–94.

[Leonides, 2010] Leonides, L. (2010). Limitaciones del formato general de la abducción. En Fernández-Duque, D., Hernández Antón, I., y Gómez–Caminero Parejo, E. F., editores, *Estudios de Lógica, Lenguaje y Epistemología. IV Jornadas Ibéricas.*, págs. 251–263, Universidad de Sevilla. Fénix Editora.

[Leonides, 2011] Leonides, L. (2011). Adaptive logics and the solution of abductive problems triggered by anomaly. Por publicarse, como parte de las *Memorias del International Symposium. Argumentation in Intentional Contexts: Knowledge, Belief, Dialogues*, realizado en Sevilla el 21 de mayo de 2010.

[Mayer y Pirri, 1993] Mayer, M. C. y Pirri, F. (1993). First Order Abduction Via Tableau and Sequent Calculi. *Bulletin of the IGPL*, 1:99–117.

[Mayer y Pirri, 1994] Mayer, M. C. y Pirri, F. (1994). Propositional abduction in modal logic. *Journal of the IGPL*, 3:153–167.

[Meheus, 2005] Meheus, J. (2005). Empirical progress and ampliative adaptive logics. *Confirmation, Empirical Progress and Truth Approximation (Poznań Sudies in the Philosophy of Sciences and the Humanities)*, 83:193–217.

[Meheus, 2010] Meheus, J. (2010). A Formal Logic for the Abduction of Singular Hypotheses. *To appear.*

[Meheus y Batens, 2006] Meheus, J. y Batens, D. (2006). A formal logic for abductive reasoning. *Logic Journal of the IGPL*, 14(2):221–236.

[Meheus y Provijn, 2007] Meheus, J. y Provijn, D. (2007). Abduction through Semantic Tableaux versus Abduction through Goal-Directed Proofs. *Theoria. Revista de teoría, historia y fundamentos de la Ciencias*, 22(3):295–304.

[Nepomuceno, 1999] Nepomuceno, Á. (1999). Tablas semánticas y metalógica (el caso de la lógica de segundo orden). *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, XXXI(93):21–47.

[Nepomuceno, 2003] Nepomuceno, Á. (2003). *El método de las Tablas Semánticas*. Editorial Kronos.

[Nepomuceno, 2009] Nepomuceno, Á. (2009). Sistematización del descubrimiento y la explicación: la elaboración de una lógica abductiva. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 41(123):129–146.

[Peirce, 1958] Peirce, C. (1931–1935, 1958). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusettes. Volúmenes 1-6 editados por C. Hartshorne y P. Weiss; volúmenes 7 y 8 editados por A. Burks.

[Peng y Reggia, 1990] Peng, Y. y Reggia, J. A. (1990). *Abductive Inference Models for Diagnostic Problem–Solving*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA.

[Priest, 2008] Priest, G. (2008). *An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is.* Cambridge Introductions to Philosophy. Cambridge University Press, 2a. edición.

[Reyes et al., 2006] Reyes, L., Aliseda, A., y Nepomuceno, Á. (2006). Towards Abductive Reasoning in First-order Logic. *Logic Journal of the IGPL*, 14(2):287–304.

[Shrager y Langley, 1990] Shrager, J. y Langley, P. (1990). *Computational Models of Scientific Discovery and Theory Formation*. San Mateo: Morgan Kaufmann.

[Smullyan, 1995] Smullyan, R. M. (1995). *First-Order Logic*. Dover Publications.

[Zalta, 1995] Zalta, E. (1995). *Basic Concepts in Modal Logic*. Stanford University.