Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Sobre las medidas minimizantes de Lagrangianos periódicos sobre el círculo.

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Lic. Dora Nancy Hernández Martínez

Director: Dr. C. Osvaldo Osuna Castro
Codirector: Dr. Pierre Bayard

Morelia, Michoacán - 10 de diciembre de 2010.

Índice general

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme terminar este proyecto, por todo lo que me ha dado en la vida.

A mis asesores, el Dr. C. Osvaldo Osuna Castro y el Dr. Pierre Bayard, por su paciencia y dedicación, su tiempo, sus enseñanzas.

A los sinodales por revisar y dar sugerencias para mejorar este trabajo.

A mi familia y amigos, que con su cariño y afecto alimentaron mi ánimo en los momentos difíciles.

A cada una de las personas que, quizá sin darse cuenta, han contribuido a mi crecimiento profesional como personal.

Por supuesto al CONACYT, por apoyarme económicamente para realizar estos estudios.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la UMSNH y al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por confiar en mi y darme la oportunidad de ingresar a esta maestría, así como por el apoyo brindado en el transcurso de ésta.

A todos, Gracias.

Introducción.

Es bien conocido que muchos problemas de matemáticas, física, ingeniería y demás ciencias pueden ser modelados por una clase de sistemas de ecuaciones especiales, los sistemas Lagrangianos.

Por un Lagrangiano sobre una variedad diferenciable M entenderemos una función suave $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$; supondremos además que L es de *Tonelli*, es decir, L es convexo, superlineal y define un flujo completo (ver en cap. 1 la definición precisa).

En [**8**] Mather inició el estudio de Lagrangianos de Tonelli considerando la acción de medidas invariantes de soporte compacto sobre la σ-álgebra de Borel sobre $TM \times \mathbb{S}^1$; este enfoque es muy fructífero en la construcción de conjuntos invariantes por el flujo de Euler-Lagrange. La idea es, dada una medida μ como antes le asociamos una única clase de homología $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$, se introducen entonces los conjuntos de medidas invariantes $\mathcal{M}_\gamma(L)$ que minimizan la acción y tienen homología γ. La teoría de Aubry-Mather se refiere a la descripción de dichos conjuntos y su relación con la dinámica de L (entre otros aspectos). Por ejemplo: Sea Q una propiedad dinámica para medidas invariantes, una pregunta de interés es determinar el conjunto $\mathcal{H} \subset H_1(M, \mathbb{R})$ de clases de homología h tales que $\mathcal{M}_h(L)$ contiene elementos que satisfacen Q.

En el famoso trabajo [**4**], Mañé introdujo la noción de Lagrangiano genérico. En forma más precisa decimos que una propiedad P se satisface para Lagrangianos genéricos, o es genérica en el sentido de Mañé, si existe un conjunto residual $\mathcal{O}(L) \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ (en la topología C^∞) tal que la propiedad P se satisface para cada $L + \phi$ con $\phi \in \mathcal{O}(L)$. Mañé probó que la teoría de Aubry-Mather es más fuerte para Lagrangianos genéricos. El objetivo de esta tesis es revisar-mejorar los resultados de Mañé en el caso especial de Lagrangianos genéricos sobre el círculo. Como un primer paso consideramos el siguiente resultado de Mañé.

Teorema 1 *([**4**], Th. D). Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano. Entonces*

a) *Para cada $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$ existe un conjunto residual $\mathcal{O}(\gamma) \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}(\gamma)$ se tiene que $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$.*
b) *Existen conjuntos residuales $\mathcal{O}(\gamma) \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y $\mathcal{H} \subset H_1(M, \mathbb{R})$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}(\gamma)$ y $\gamma \in \mathcal{H}$ entonces $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$.*

Y obtenemos, del Teorema D a) y propiedades dinámicas de Lagrangianos sobre $\mathbb{S}^1$, la siguiente versión mejorada de la parte *b*), la cual es probada en el capítulo 4 como el Teorema 4.3.

Teorema 2. *Sea $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli, entonces existe un conjunto residual $\mathcal{O}(L) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que para todo $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y para todo $\psi \in \mathcal{O}(L)$ se tiene que $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$.*

En resumen este resultado nos dice que podemos tomar $\mathcal{H} = H_1(M, \mathbb{R})$. Además este teorema contesta afirmativamente, para el caso de Lagrangianos genéricos sobre $\mathbb{S}^1$, uno de los problemas propuestos por Mañé en [**4**], el cual dice: "Problema IV. ¿Es verdad que para un Lagrangiano genérico $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, se tiene que para toda $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$ existe una única $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$?".

Luego, usando el Teorema 2 podemos obtener una versión más fuerte del Teorema A en [**4**], ver capítulo 4, Corolario 4.5.

Como veremos en el capítulo 2, dada una 1-forma cerrada ω definimos el conjunto de medidas $\mathcal{M}^\omega(L)$ y se tiene que dicho conjunto no depende del representante en $[\omega] \subset H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$.

Continuando con los resultados de [**4**] el Teorema C, establece:

Teorema 3. *([**4**], Th. C) Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli. Entonces*

a) *Para cada $\omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ existe un conjunto residual $\mathcal{O}(\omega) \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que $\#\mathcal{M}^\omega(L + \psi) = 1$, $\forall \psi \in \mathcal{O}(\omega)$.*
b) *Existen conjuntos residuales $\mathcal{O} \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y $\mathcal{H} \subset H^1(M, \mathbb{R})$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}$ y $\omega \in \mathcal{H}$ entonces $\#\mathcal{M}^\omega(L + \psi) = 1$.*

En relación a este resultado, en el capítulo 4 probaremos la siguiente proposición para el caso de Lagrangianos sobre el círculo.

Proposición 4. *Dado $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli, existe un conjunto residual $\mathcal{O}(L) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que $\#\mathcal{M}^\omega(L + \psi) = 1$, $\forall \psi \in \mathcal{O}(L)$, $\forall \omega \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$.*

Por otro lado dada una clase de cohomología $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ podemos definir el conjunto (proyectado) de Aubry $\mathcal{A}_\omega(L) \subset M \times \mathbb{S}^1$, el cual resulta ser un conjunto invariante, compacto e independiente del representante ω; además se cumple que

$$\Lambda_\omega(L) := \overline{\cup \operatorname{supp}(\mu)} \subset \mathcal{A}_\omega(L),$$

donde supp(μ) es el soporte de la medida μ y la unión corre sobre todas las medidas $\mu \in \mathcal{M}^\omega(L)$.

En [**9**] se introduce una pseudométrica d sobre $\mathcal{A}_\omega(L)$ (ver capítulo 2); usando dicha pseudométrica definimos una relación de equivalencia. Denotamos por $(\bar{\mathcal{A}}_\omega(L), \bar{d})$ el espacio métrico naturalmente conocido, el cual es llamado por Mather, el conjunto cociente de Aubry. Llamaremos a los elementos de $(\bar{\mathcal{A}}_\omega(L), \bar{d})$ clases estáticas.

Una pregunta interesante es determinar para qué Lagrangianos y variedades se cumple que el espacio $(\bar{\mathcal{A}}_\omega(L), \bar{d})$ es totalmente disconexo. Por ejemplo en [**10**] Mather prueba que si $\dim M \leq 2$ entonces se tiene que $(\bar{\mathcal{A}}_\omega(L), \bar{d})$ es totalmente disconexo. En [**1**], Corolario 4, se probó que "para todo $\omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ y para un Lagrangiano genérico L el cociente de Aubry $\bar{\mathcal{A}}_\omega(L)$ tiene a lo más $1 + \dim H^1(M, \mathbb{R})$ elementos". En particular, si $M = \mathbb{S}^1$ entonces $\bar{\mathcal{A}}_\omega(L)$ tiene a lo más 2 elementos (para Lagrangianos genéricos). Como una aplicación del Teorema 4 tenemos:

Proposición 5. *Sea $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli, entonces existe un conjunto residual $\mathcal{O}(L) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que para todo $\psi \in \mathcal{O}(L)$ y para todo $\omega \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ se tiene que $\#\bar{\mathcal{A}}_\omega(L + \psi) = 1$.*

El establecimiento para $\dim M > 1$ de estos resultados o versiones intermedias de lo probado por Mañé y los establecidos en esta tesis, representa un trabajo formidable como profundo y actualmente es un tema activo de investigación.

Organización.

Uno de nuestros objetivos es que este texto sea autocontenido, por lo que dedicamos los primeros capítulos a las bases de la teoría sobre Lagrangianos y medidas minimizantes.

En el primer capítulo introducimos la definición de Lagrangianos de Tonelli, autónomos y periódicos; luego definimos la acción de una curva diferenciable respecto a un Lagrangiano y a partir de esto vemos que a un Lagrangiano se le asocia un flujo, el cual corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange. Además damos algunos ejemplos ilustrativos de Lagrangianos de Tonelli, como son: Lagrangiano mecánico, Lagrangianos encajados y el Lagrangiano magnético.

El capítulo dos lo dedicamos a definir algunos conjuntos de medidas con características específicas, entre ellas las medidas minimizantes, las cuales se definen a partir de la acción sobre medidas respecto a un Lagrangiano. Además vemos que hay una conexión entre el conjunto de medidas $\mathcal{M}(L)$ y el primer grupo de homología real. Luego definimos las funciones especiales introducidas por Mather (beta de Mather y alfa de Mather), las cuales son funciones convexas y son útiles para ver si un conjunto de medidas contiene elementos ergódicos y únicamente ergódicos, entre otras propiedades dinámicas de las medidas. También definimos el conjunto de Aubry, pues en el capítulo cuatro tendremos algún resultado referente a éste.

En el capítulo tres, consideramos un caso específico de Lagrangianos de Tonelli: Lagrangianos periódicos sobre el círculo, los cuales son nuestro objeto principal de estudio. Vemos que en este caso particular se cumplen algunas propiedades especiales.

Por último en el capítulo cuatro definimos el término de Lagrangiano genérico, introducido por Mañé, y obtenemos resultados más generales al aplicar sus técnicas a Lagrangianos sobre el círculo.

En cuanto al apéndice, consideramos importante mencionar, sin prueba, algunos resultados importantes de teoría ergódica, homeomorfismos del círculo y funciones convexas.

CAPíTULO 1

Generalidades.

1. Dinámica Lagrangiana.

Empezamos por dar una breve introducción a sistemas Lagrangianos, para más detalles ver [**2**], [**5**], [**6**] y las referencias ahí contenidas.

Sea M^n una variedad Riemanniana compacta. Un *Lagrangiano de Tonelli* sobre M es una función $L : TM \times T \to \mathbb{R}$, C^∞, donde T puede ser el conjunto $\{0\}$, $\mathbb{R}$, o $\mathbb{S}^1$. Además L cumple las siguientes propiedades:

(a) Convexidad: La matriz Hessiana

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v, t),$$

calculada en coordenadas lineales sobre la fibra T_xM es definida positiva, uniformemente en $(x, v, t) \in TM \times T$, es decir: existe $A > 0$ tal que

$$\omega^t L_{vv}(x, v, t)\omega \geq A\, \|\omega\|^2$$

para todo $(x, v, t) \in TM \times T$ y $\omega \in T_xM$.

(b) Superlinealidad: Se tiene que

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{L(x, v, t)}{\|v\|} = +\infty,$$

uniformemente para $x \in M$, o equivalentemente, para todo $A \in \mathbb{R}$ existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $L(x, v, t) \geq A\, \|v\| - B$ para todo $(x, v, t) \in TM \times T$.

(c) Completez: La ecuación de Euler-Lagrange asociada a L es completa, es decir, la ecuación define un flujo completo.

Vamos a llamar $L : TM \times T \to \mathbb{R}$ un *Lagrangiano de Tonelli autónomo* si $T = \{0\}$, y un *Lagrangiano de Tonelli periódico* si $T = \mathbb{R}$ o $T = \mathbb{S}^1$. Recordemos que L es periódico en t, en este caso de periodo 1, si: $L(x, v, t + 1) = L(x, v, t)$, para todo $(x, v, t) \in TM \times T$.

Debido a que nuestro interés está enfocado en los Lagrangianos sobre $\mathbb{S}^1$,tenemos en este caso que $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, así escribiendo en coordenadas $(x, v, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ se tiene que las condiciones (a) y (b) se reducen a:

(a') Convexidad: $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v, t)$ es positiva definida, es decir, existe $A > 0$ tal que

$$\omega^t L_{vv}(x, v, t)\omega \geq A|\omega|^2,$$

por lo que es suficiente ver que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v, t) \geq A > 0 \ \text{ para algún } A.$$

(b') Superlinealidad: $\lim\limits_{|v|\to\infty} \frac{L(x,v,t)}{|v|} = +\infty$ o equivalentemente para todo $A \in \mathbb{R}$ existe $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v, t) \geq A|v| - B$$

para todo $(x, v, t) \in T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, donde $|\cdot|$ denota el valor absoluto.

Dado un Lagrangiano de Tonelli $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ y una curva diferenciable $\gamma : [0, T] \to M$, definimos *la acción de γ respecto a L* como

$$A_L(\gamma) := \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)dt.$$

Uno de los problemas primordiales es estudiar las curvas que minimizan esta acción A_L, para esto consideramos el siguiente conjunto de curvas:

$$C^k(p, q, T) := \{\gamma : [0, T] \to M \mid \gamma \text{ es } C^k \text{ diferenciable}, \gamma(0) = p \text{ y } \gamma(T) = q\}.$$

Así, decimos que γ es *A_L-minimizante* en $C^k(p, q, T)$ si $A_L(\gamma) \leq A_L(\alpha)$ para todo $\alpha \in C^k(p, q, T)$.

Lema 1.1. *Sea $(x_1, ..., x_n)$ un sistema de coordenadas de M. Si una curva $\gamma \in C^k(p, q, T)$ minimiza la acción A_L en $C^k(p, q, T)$, entonces satisface la ecuación de Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = 0. \tag{1.1}$$

Demostración. Podemos suponer que γ está contenida en una carta local y sea $\eta : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ C^k diferenciable tal que $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Así para ϵ suficientemente pequeño, $y_\epsilon = \gamma + \epsilon\eta \in C^k(p, q, T)$. Definimos para $a > 0$ suficientemente pequeño, $g_\epsilon : (-a, a) \to \mathbb{R}$ como $g_\epsilon := A_L(y_\epsilon)$.

Entonces g tiene un mínimo en cero y

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T \frac{L(\gamma(t)+\epsilon\eta(t),\dot\gamma(t)+\epsilon\dot\eta(t),t)-L(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)}{\epsilon}\,dt\\
&= \int_0^T \lim_{\epsilon\to 0}\{\frac{L(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)+\epsilon L_x(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\eta(t)+\epsilon L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\dot\eta(t)+o(\epsilon)}{\epsilon}\\
&\qquad -\frac{L(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)}{\epsilon}\}\,dt\\
&= \int_0^T L_x(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\eta(t)+L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\dot\eta(t)\,dt\\
&= \int_0^T (L_x(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)-\tfrac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t))\,\eta(t)\,dt + L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\,\eta(t)\Big|_0^T\\
&= \int_0^T (L_x(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)-\tfrac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t))\,\eta(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$0=\int_0^T\left[L_x(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)-\frac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)\right]\eta(t)\,dt,$$

para cualquier función $\eta\in C^k(0,0;T)$.

Entonces por el teorema fundamental del cálculo de variaciones se tiene que

$$L_x(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)-\frac{d}{dt}L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t),t)=0,$$

es decir, $\gamma(t)$ satisface la ecuación de Euler Lagrange. ❑

Por otro lado, para estudiar propiedades dinámicas de un Lagrangiano de Tonelli L, se introduce el flujo local de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a L. Denotamos este flujo por

$$\varphi_t^L : TM\times\mathbb{S}^1\to TM\times\mathbb{S}^1,$$

y se define como

$$\varphi_t^L(x_0,v_0,t_0):=(x(t+t_0),\dot x(t+t_0),t+t_0(\bmod 1)),$$

donde $x:(t_0-\epsilon,t_0+\epsilon)\to M$ es una solución de L con condiciones iniciales $x(t_0)=x_0,\ \dot x(t_0)=v_0$; generalmente consideraremos $t_0=0$.

Y de ahí se tiene que el campo vectorial asociado a la ecuación de Euler-Lagrange, denotado

$$X_L : TM\times\mathbb{R}\to T(TM),$$

está dado por

$$X_L(x,v,t)=(x(0),\dot x(0),\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^L(x_0,v_0,0)\mid_{t=0}).$$

Así, para ver que este flujo es completo tenemos el siguiente criterio.

Lema 1.2. ***(Criterio de Mañé)***
Sea M compacta, $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ C^∞, convexo y superlineal. Sea $X_L : TM \times \mathbb{R} \to T(TM)$ el campo vectorial asociado a L. Si existen funciones continuas $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ tales que

$$\|X_L(x, v, t)\| \leq f_1(t)\|v\| + f_2(t), \qquad \forall (x, v, t)$$

entonces φ_t^L es completo.

La prueba de este lema se puede ver en [**5**], pág. 43.

2. Ejemplos de Lagrangianos.

2.1. Lagrangiano mecánico. También llamado Lagrangiano natural, el Lagrangiano mecánico se define a partir de la energía cinética y la energía potencial.

Considerando esta última como una función $U : M \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, C^∞, el Lagrangiano mecánico $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ está dado por

$$L(x, v, t) = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 - U(x, t).$$

Consideremos un Lagrangiano mecánico sobre el círculo, $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, v, t) = \frac{1}{2}v^2 - U(x, t),$$

con $U : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, 1-periódica en t.

Veamos en este caso, que efectivamente es un Lagrangiano de Tonelli, es decir, que es convexo, superlineal y que la ecuación de Euler-Lagrange define un flujo completo.

Tenemos que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v, t) = 1,$$

entonces podemos tomar $A = 1$ en (a) y por tanto L es convexo.

Luego,

$$\lim_{|v|\to\infty} \frac{L(x, v, t)}{|v|} = \lim_{|v|\to\infty} \frac{\frac{1}{2}v^2 - U(x, t)}{|v|} = \lim_{|v|\to\infty} \frac{1}{2}|v| - \lim_{|v|\to\infty} \frac{U(x, t)}{|v|} = +\infty,$$

pues $U(x, t)$ es acotada. Entonces L es superlineal.

Ahora para calcular la ecuación de Euler-Lagrange asociada a L, primero se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}L(x, v, t) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}v^2 - U(x, t)) = -\frac{\partial}{\partial x}U(x, t).$$

Y también
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v}L(x,v,t) = \frac{d}{dt}v = \dot{v}.$$
Así, la ecuación de Euler-Lagrange está dada por
$$\dot{v} + \frac{\partial}{\partial x}U(x,t) = 0.$$

Veamos además que el flujo asociado a esta ecuación es completo. Se tiene que el campo vectorial asociado a la ecuación de Euler-Lagrange $X_L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to T(T\mathbb{S}^1)$ está dado por
$$X_L(x,v,t) = (x,v,v,-\frac{\partial}{\partial x}U(x,t)).$$

Así,
$$\|X_L(x,v,t)\| = |v| + |-\frac{\partial}{\partial x}U(x,t)|,$$
luego como $U(x,t)$ es C^∞ y 1-periódica, se tiene $|\frac{\partial}{\partial x}U(x,t)| \leq K, K > 0$ constante. Entonces tenemos
$$\|X_L(x,v,t)\| \ \leq |v| + K.$$
Considerando $f_1(t) = 1$ y $f_2(t) = K$, por el criterio de Mañé el flujo es completo.

Un ejemplo de un Lagrangiano mecánico sobre el círculo $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ está dado por
$$L(x,v,t) = \frac{1}{2}v^2 - \sin^2(x)\cos(2\pi t),$$
en este caso $U(x,t) = \sin^2(x)\cos(2\pi t)$.

2.2. Lagrangianos encajados. También llamados Lagrangianos de Mañé, un Lagrangiano encajado es un lagrangiano de Tonelli $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ dado por
$$L(x,v,t) = \frac{1}{2}\|v - X_t(x)\|^2,$$
donde $X_t(x)$ es un campo vectorial C^∞ sobre M con periodo 1 en la variable tiempo.

Sobre $M \times \mathbb{S}^1$ está definido un flujo $\Phi_t : M \times \mathbb{S}^1 \hookleftarrow$, el flujo del campo vectorial X_t, el cual es completo y está dado por
$$\Phi_t(x_0,t_0) = (x(t+t_0), t + t_0(\text{mod } 1)),$$
donde x es la solución de $\dot{x} = X_t(x)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$.

Observemos que si $x : \mathbb{R} \to M$ es solución de la ecuación diferencial $\dot{x} = X_t(x)$, entonces es solución de la ecuación de Euler-Lagrange asociada al Lagrangiano L. En efecto,
$$A_L(x|_{[a,b]}) = \int_a^b L(x,\dot{x},t) = \int_a^b \|\dot{x} - X_t(x)\|^2 dt = 0.$$

Por otro lado, consideremos una curva C^1, $y : \mathbb{R} \to M$, tal que $y(a) = x(a)$ y $y(b) = x(b)$. Tenemos que $A_L(y) \geq 0$, entonces x es minimizante y por tanto solución de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a L. Entonces podemos ver que la dinámica del campo vectorial X_t aparece en la dinámica del Lagrangiano L, por lo tanto esta última puede ser muy rica. Este tipo de Lagrangiano es útil para construir ejemplos y contraejemplos de propiedades de dinámica Lagrangiana.

2.3. Lagrangianos magnéticos. Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli. Dada ω una 1-forma cerrada, podemos considerar

$$\mathbb{L}(x, v, t) := L(x, v, t) - \omega_x(v).$$

Tenemos que $\mathbb{L}$ es un Lagrangiano de Tonelli y es llamado Lagrangiano magnético. Además como ω es una 1-forma cerrada, el flujo de Euler-Lagrange no cambia, es decir, $\varphi_t^L(x, v, t) = \varphi_t^{\mathbb{L}}(x, v, t)$. Luego, como L es de Tonelli, entonces $\varphi_t^L(x, v, t)$ es completo, y por lo tanto también $\varphi_t^{\mathbb{L}}(x, v, t)$ es completo.

CAPíTULO 2

Medidas minimizantes y función beta.

1. Medidas minimizantes y homología.

Iniciamos con algunos aspectos ergódicos para Lagrangianos (en el apéndice recordamos conceptos básicos de teoría ergódica).

Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli. Tenemos que $\varphi_t^L : TM \times \mathbb{S}^1 \to TM \times \mathbb{S}^1$ es el flujo de la ecuación de Euler-Lagrange asociada a L. Denotemos por $\mathcal{B}(TM \times \mathbb{S}^1)$ la σ-álgebra de Borel de $TM \times \mathbb{S}^1$ y definimos el conjunto de medidas

$\mathcal{M}(L) := \{\mu,$ medida de probabilidad con soporte compacto sobre $\mathcal{B}(TM \times \mathbb{S}^1)$ invariante por $\varphi_t^L\}$.

Ahora consideremos la función bilineal no degenerada

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(M, \mathbb{R}) \times H^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

la cual está dada por la integración de formas cerradas sobre ciclos diferenciables y está definida como: dado $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ y $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$ se tiene

$$\langle h, [\omega] \rangle := \int_{\sum r_i \sigma_i} \omega,$$

donde $\sum r_i \sigma_i$ es un ciclo diferenciable que representa la clase de homología h, con σ_i 1-simplejos diferenciables y $r_i \in \mathbb{R}$. Del teorema de Stokes se desprende que el pareamiento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bien definido.

Existe una relación entre el conjunto de probabilidades $\mathcal{M}(L)$ y el primer grupo de homología real $H_1(M, \mathbb{R})$, esta relación se establece en el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Dado $\mu \in \mathcal{M}(L)$ existe una única homología $\rho(\mu)$ en $H_1(M, \mathbb{R})$ tal que para toda ω 1-forma cerrada se tiene que*

$$\langle \rho(\mu), \omega \rangle = \int_{TM \times \mathbb{S}^1} \omega d\mu.$$

Demostración. Primero recordemos el teorema de representación de Riesz.

Teorema. *(Representación de Riesz) Si $k : H^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una función lineal, entonces existe un único $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$ tal que $k(\cdot) = \langle \gamma, \cdot \rangle$.*

Para demostrar la proposición, sea $\mu \in \mathcal{M}(L)$ y consideremos la función

$$L_\mu(\omega) = \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu,$$

la cual está definida sobre 1-formas cerradas.

Necesitamos probar que L_μ induce una función lineal sobre $H^1(M, \mathbb{R})$ y para ello es suficiente ver $L_\mu|_{B^1(M)} \equiv 0$, donde $B^1(M)$ es el espacio de 1-formas exactas sobre M. Sea $\omega \in B^1(M)$, entonces existe $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $df = \omega$, y se tiene que

$$\int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu = \int_{TM\times\mathbb{S}^1} df d\mu$$

Luego por el teorema ergódico de Birkhoff (ver apéndice) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{TM\times\mathbb{S}^1} df d\mu &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T df(\varphi_t(p_0))dt, \quad \mu - c.t.p_0,\ p_0 = (x_0, v_0) \in TM \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}[f(\pi(\varphi_T(p_0))) - f(\pi(p_0))] = 0,\end{aligned}$$

donde $\pi : TM \to M$ es la proyección canónica.

Entonces $L_\mu : H^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $L_\mu([\omega]) = L_\mu(\omega)$ está bien definido y es lineal, por lo tanto por el teorema de Riesz, existe un único $\rho(\mu) \in H_1(M, \mathbb{R})$ tal que $L_\mu(\cdot) = \langle \rho(\mu), \cdot \rangle$ ❑

Ejemplo 1: Caso ergódico.

Consideremos $\mu \in \mathcal{M}(L)$ una medida ergódica respecto al flujo φ_t^L y sea γ una órbita genérica de μ, es decir, γ es tal que

$$\int_{TM\times\mathbb{S}^1} f d\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\gamma(t))dt$$

para toda función continua $f : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.

Para este caso podemos calcular en forma explícita la homología asociada a esta medida ergódica $\mu \in \mathcal{M}(L)$, es decir, esta homología está dada por

$$\rho(\mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}[\hat{x}],$$

donde $\hat{x}$ es una curva cerrada definida sobre M.

En efecto, para calcular dicha homología escribimos $\gamma(t) = (x(t), \dot{x}(t), t)$, donde x es la solución de L asociada a γ. Entonces, por la proposición anterior y dado que γ es genérica, se tiene

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mu), \omega \rangle &= \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega_{x(t)}(\dot{x}(t))dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{x/[0,T]} \omega + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{y_T} \omega - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{y_T} \omega,\end{aligned}$$

donde $y_T : [0,1] \to M$ es una curva tal que long $y_T \le \operatorname{diam} M$, con $y_T(0) = x(T)$ y $y_T(1) = x(0)$.

Sea $\hat{x} : [0, T+1] \to M$, definida por

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in [0,T] \\ y_T(t-T) & \text{si } t \in [T, T+1] \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mu), \omega \rangle &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\hat{x}} \omega - \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{y_T} \omega \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \langle [\hat{x}], \omega \rangle = \langle \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} [\hat{x}], \omega \rangle\end{aligned}$$

Así, $\rho(\mu) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}[\hat{x}]$.

Ejemplo 2: Órbitas periódicas.

Sea $\gamma(t) = (x(t), \dot{x}(t), t)$ una órbita ℓ-periódica de φ_t^L, y sea μ_γ la medida de probabilidad invariante, ergódica y definida como

$$\int_{TM\times\mathbb{S}^1} f d\mu_\gamma = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell f(x(t), \dot{x}(t), t)dt.$$

para toda función continua $f : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.

Al igual que en el ejemplo anterior, podemos calcular la homología asociada a μ_γ. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mu_\gamma), \omega \rangle &= \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu_\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ell} \int_0^{n\ell} \omega_{x(t)}(\dot{x}(t))dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\ell} \int_0^\ell \omega_{x(t)}(\dot{x}(t))dt = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \omega_{x(t)}(\dot{x}(t))dt \\ &= \frac{1}{\ell} \int_{x/_{[0,\ell]}} \omega = \frac{1}{\ell} \langle [x], \omega \rangle = \langle \frac{1}{\ell}[x], \omega \rangle\end{aligned}$$

Entonces $\rho(\mu_\gamma) = \frac{1}{\ell}[x]$.

Ahora veamos algunas propiedades de la función ρ.

Lema 2.2. *La función $\rho : \mathcal{M}(L) \to H_1(M, \mathbb{R})$ es convexa y sobreyectiva.*

Demostración. Veamos primero que es convexa. Sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(L)$ y tales que

$$\mu_\lambda = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \ \text{ con } \lambda \in [0,1].$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mu_\lambda), \omega\rangle &= \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu_\lambda \\ &= \lambda \int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu_1 + (1-\lambda)\int_{TM\times\mathbb{S}^1} \omega d\mu_2 \\ &= \lambda\,\langle \rho(\mu_1), \omega\rangle + (1-\lambda)\,\langle \rho(\mu_2), \omega\rangle \\ &= \langle \lambda\,\rho(\mu_1) + (1-\lambda)\,\rho(\mu_2), \omega\rangle.\end{aligned}$$

Entonces

$$\rho(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) = \lambda\rho(\mu_1) + (1-\lambda)\rho(\mu_2),$$

lo que implica que ρ es convexa.

Podemos ver la prueba de sobreyectividad en [**2**], Lema 2-6.3. ❑

Ahora tenemos que dado un Lagrangiano de Tonelli $L : TM\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, la *acción sobre medidas* $A_L : \mathcal{M}(L) \to \mathbb{R}$ se define como

$$A_L(\mu) := \int\limits_{TM\times\mathbb{S}^1} L d\mu.$$

Además se tiene que esta acción cumple lo siguiente. Este resultado lo podemos encontrar en [**5**].

Lema 2.3. *La acción $A_L : \mathcal{M}(L) \to \mathbb{R}$ es semicontinua superior (según la topología débil), es decir, para todo $\mu \in \mathcal{M}(L)$, $A_L(\mu) \le \liminf\limits_{n\to\infty} A_L(v_n)$, para toda $\{v_n\} \subset \mathcal{M}(L)$, tal que $v_n \to \mu$.*

Demostración. Por la superlinealidad de L, podemos suponer que $L \ge 0$. Definamos

$$L_c : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$$

como

$$L_c(x,v,t) := \begin{cases} L(x,v,t) & \text{si } \|v\| \le c \\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Entonces L_c es integrable para cualquier medida con soporte compacto y

$$\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L_c d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L_c d\nu_n = \liminf_{n\to\infty}\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L_c d\nu_n.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} A_L(\mu) &= \int_{TM\times\mathbb{S}^1} L d\mu = \sup_c\left(\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L_c d\mu\right) \\ &\leq \sup_c\left(\liminf_{n\to\infty}\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L_c d\nu_n\right) \\ &\leq \sup_c\left(\liminf_{n\to\infty}\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L d\nu_n\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\int_{TM\times\mathbb{S}^1} L d\nu_n = \liminf_{n\to\infty} A_L(\nu_n.) \end{aligned}$$

❏

Diremos que una medida $\mu \in \mathcal{M}(L)$ es *minimizante* si

$$A_L(\mu) = \inf\{A_L(\nu) : \nu \in \mathcal{M}(L) \text{ y } \rho(\mu) = \rho(\nu)\}.$$

Así dado $\gamma \in H_1(M,\mathbb{R})$ podemos considerar

$$\mathcal{M}_\gamma(L) := \{\mu \in \mathcal{M}(L) : \mu \text{ es minimizante y } \rho(\mu) = \gamma\}.$$

Tenemos el siguiente resultado respecto a la función ρ restringida a un subconjunto de estas medidas minimizantes, podemos ver la prueba en [**5**], proposición 2.4 c).

Lema 2.4. *Para todo $c > 0$, la función $\rho|_{\{\mu\in\mathcal{M}(L):A_L(\mu)\leq c\}}$ es continua.*

Por otro lado, Mather probó el siguiente teorema en [**8**], página 178.

Teorema 2.5. *Para todo $\gamma \in H_1(M,\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_\gamma(L) \neq \emptyset$.*

Es decir, para todo $\gamma \in H_1(M,\mathbb{R})$, siempre existen medidas minimizantes cuya clase de homología es γ.

2. Función beta.

Dado un Lagrangiano de Tonelli $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, Mather define la función llamada *beta de Mather* de L, $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como

$$\beta(h) = \text{ínf}\{A_L(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(L),\ \rho(\mu) = h\}.$$

Del teorema 2.5, se tiene que el ínfimo es un mínimo, es decir

$$\beta(h) = \text{mín}\{A_L(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(L),\ \rho(\mu) = h\}.$$

Además note que $\mu \in \mathcal{M}(L)$ es minimizante si y sólo si $\beta(\rho(\mu)) = A_L(\mu)$.

El siguiente resultado establece la convexidad de esta función (ver [**2**]), dicha propiedad nos resultará muy útil en nuestro trabajo .

Proposición 2.6. *Para cualquier Lagrangiano de Tonelli $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, tenemos que la función $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es convexa.*

Demostración. Consideremos $\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(M, \mathbb{R})$ y $0 < \lambda < 1$, entonces para $\gamma = \lambda\gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2$ se tiene que

$$\{\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2 : \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(L), \rho(\mu_1) = \gamma_1, \rho(\mu_2)_= \gamma_2\} \subset \{\mu \in \mathcal{M}(L) : \rho(\mu) = \gamma\}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\beta(\gamma) &= \text{mín}\{A_L(\mu) : \mu \in \mathcal{M}(L), \rho(\mu) = \gamma\} \\
&\leq \text{mín}\{A_L(\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2) : \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(L), \rho(\mu_1) = \gamma_1, \rho(\mu_2)_= \gamma_2\} \\
&= \lambda\, \text{mín}\{A_L(\mu_1) : \mu_1 \in \mathcal{M}(L), \rho(\mu_1) = \gamma_1\} + (1 - \lambda)\, \text{mín}\{A_L(\mu_2) : \mu_2 \in \mathcal{M}(L), \rho(\mu_2) = \gamma_2\} \\
&= \lambda\beta(\gamma_1) + (1 - \lambda)\beta(\gamma_2).
\end{aligned}$$

❏

Por otro lado considerando el dual convexo (ver apéndice), Mather define la función llamada *alfa de Mather* $\alpha : H^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $\alpha := \beta^*$. Entonces α es convexa y $\alpha^* = \beta$.

Entonces dado $[\omega] \in H^1(M,\mathbb{R})$ podemos escribir la función alfa de Mather como

$$\begin{aligned}
\alpha([\omega]) &= \max_{h\in H_1(M,\mathbb{R})}(\langle h,\omega\rangle - \beta(h)) \\
&= \max_{\mu\in\mathcal{M}(L)}(\langle \rho(\mu),\omega\rangle - A_L(\mu)) \\
&= -\min_{\mu\in\mathcal{M}(L)}(\int_{TM} L d\mu - \int_{TM}\omega d\mu) \\
&= -\min_{\mu\in\mathcal{M}(L)}(\int_{TM}(L-\omega)d\mu) \\
&= -\min_{\mu\in\mathcal{M}(L)}\{A_{L-\omega}(\mu)\}.
\end{aligned}$$

Y así para cualquier $[\omega] \in H^1(M,\mathbb{R})$, definimos

$$\mathcal{M}^\omega(L) := \{\mu \in \mathcal{M}(L) \mid A_{L-\omega}(\mu) = -\alpha([\omega])\}\,.$$

Luego como la función β es convexa, podemos considerar el conjunto $S \subset H_1(M,\mathbb{R})$ un dominio soporte de β (ver apéndice para su definición), y definimos

$$\Lambda(S) := \overline{\cup\ \mathrm{supp}\,(\mu)},$$

donde la unión corre sobre $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$, $\gamma \in S$. En otras palabras, $\Lambda(S)$ se define como la clausura de la unión de soportes de medidas con homología en S.

Por otro lado tenemos que γ es un *punto extremal* de β si

$$\beta(\lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2) < \lambda\beta(\gamma_1) + (1-\lambda)\beta(\gamma_2),$$

para todo $\gamma_1,\gamma_2 \in H_1(M,\mathbb{R})$, $0 < \lambda < 1$ y tales que $\gamma = \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2$. Y que γ es un *punto extremal estricto* de β si $\{\gamma\}$ es un dominio soporte de β, es decir, si existe un mapa soporte afin $\psi : H_1(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que γ es el único punto donde se tiene que $\beta(h) = \psi(h)$.

Note que cualquier punto extremal estricto es un punto extremal.

Se tiene el siguiente resultado concerniente a los puntos extremales y extremales estrictos de la función β, podemos ver prueba en [**7**].

Teorema 2.7.

(a) *Si $\gamma \in H_1(M,\mathbb{R})$ es un punto extremal de β, entonces $\mathcal{M}_\gamma(L)$ tiene elementos ergódicos.*
(b) *Si $\gamma \in H_1(M,\mathbb{R})$ es un punto extremal estricto de β, entonces $\mathcal{M}_\gamma(L)$ contiene elementos únicamente ergódicos.*

Recordemos el teorema de la gráfica de Mather, considerando solamente el caso del círculo ya que es la variedad sobre la que vamos a trabajar. Para prueba ver [**5**].

Teorema 2.8. *(Gráfica de Mather)*
Sea $S \subset H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ *un dominio soporte de* β *y* $\pi : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ *dada por* $\pi(x, v, t) = (x, t)$*, entonces* π *restricta a* $\Lambda(S)$ *es biyectiva con inversa continua sobre su imagen.*

Dado que la función $\pi : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es continua, de este teorema resulta que al restringirla a $\Lambda(S)$, π es un homeomorfismo sobre su imagen.

3. Conjunto de Aubry.

Dado un Lagrangiano $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos $A_L : M \times \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$A_L(p, S; q, T) := \min_{\gamma(S)=p,\, \gamma(T)=q} \int_S^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)dt,$$

donde el mínimo es tomado sobre todas las curvas C^1, $\gamma : [S, T] \to M$ tales que $\gamma(S) = p$ y $\gamma(T) = q$.

En [**9**] se prueba que existe una única constante $c(L) \in \mathbb{R}$ tal que $A_{L+c(L)}(p, S; q, T)$ es acotada sobre $\{T \geq S + 1\}$, esta constante se conoce como el *valor crítico de Mañé*.

Luego, siguiendo a Mather definimos la barrera de Peierls como

$$h_L(p, S; q, T) := \liminf_{n\to\infty}(A_L(p, S; q, T + n) + (T - S + n)c(L)), \text{ con } n \in \mathbb{N},$$

la cual es un objeto central en el estudio de órbitas minimizantes.

El conjunto proyectado de Aubry $\mathcal{A}(L) \subset M \times \mathbb{S}^1$ se define como

$$\mathcal{A}(L) := \{(p, S) \in M \times \mathbb{S}^1 | h_L(p, S; p, S) = 0\}.$$

Y a partir de este último, el conjunto de Aubry está dado por

$$\widetilde{\mathcal{A}}(L) := \pi^{-1}(\mathcal{A}(L)) \subset TM \times \mathbb{S}^1.$$

Este conjunto es compacto y φ_t^L-invariante.

Luego Mather observó que la función

$$d(p,S;q,T) := h_L(p,S;q,T) + h_L(q,T;p,S)$$

definida sobre $(M \times \mathbb{S}^1, M \times \mathbb{S}^1)$, es una pseudométrica sobre $\mathcal{A}(L)$. También define sobre este conjunto, una relación de equivalencia dada por $(p,S) \sim (q,T)$ si y sólo si $d(p,S;q,T) = 0$. Las clases de equivalencia son llamadas clases estáticas, las cuales son conjuntos invariantes de $\mathcal{A}(L)$. Así, d es una métrica sobre el conjunto de clases estáticas denotado por $\bar{\mathcal{A}}(L)$.

El conjunto $\bar{\mathcal{A}}(L)$ dotado con esta métrica d es llamado por Mather, el *conjunto cociente de Aubry* y es un espacio métrico compacto.

Se tiene la siguiente proposición que relaciona las clases estáticas con medidas minimizantes, para prueba ver [**9**].

Proposición 2.9. *Dada una medida invariante minimizante μ, se tiene que supp (μ) está contenido en una clase estática. Además cualquier clase estática tiene al menos una medida minimizante.*

Uno de los problemas abiertos respecto a este tema, es determinar la cardinalidad de $\bar{\mathcal{A}}(L)$, o más aún ver si este espacio es totalmente disconexo. De hecho, Mather prueba en [**10**] que para un Lagrangiano de Tonelli $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ con dim $M \leq 2$, el conjunto cociente de Aubry $\bar{\mathcal{A}}(L)$ es totalmente disconexo. En el capítulo 4 veremos algunos resultados respecto a la cardinalidad de este conjunto.

CAPíTULO 3

Lagrangianos periódicos sobre $\mathbb{S}^1$.

Sea $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli periódico sobre $\mathbb{S}^1$. Del teorema 2.8, tenemos que dado un dominio soporte $S \subset H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, la función $\pi : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ definida por $\pi(x, v, t) = (x, t)$, al restringirla a $\Lambda(S)$, resulta ser un homeomorfismo sobre su imagen, la cual denotamos por $\Sigma(S) := \pi(\Lambda(S))$.

Luego si $\varphi_t : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookleftarrow$ es el flujo asociado al Lagrangiano L, y $\Lambda(S)$ es invariante bajo este flujo, entonces podemos considerar la restricción del flujo a $\Lambda(S)$ e inducir un flujo sobre $\Sigma(S)$ según el siguiente diagrama, pues $\pi|_{\Lambda(S)}$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} \Lambda(S) \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "\pi"'] & \Lambda(S) \arrow[d, "\pi"'] \\ \Sigma(S) \arrow[r, "\psi_t"] & \Sigma(S) \end{tikzcd} \tag{0.1}$$

Definimos este flujo de la siguiente manera: sea $p = (x_0, t_0) \in \Sigma(S)$ y sea $\theta := \pi^{-1}(p) \cap \Lambda(S)$ el único punto en $\Lambda(S)$ tal que $\pi(\theta) = p$, entonces el flujo está dado por $\psi_t(p) := \pi(\varphi_t(\theta))$.

Veamos ahora que para este tipo de Lagrangianos sobre $\mathbb{S}^1$, $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, se tienen resultados más concretos sobre la dinámica de L.

Primero calculamos la homología de una medida ergódica para un Lagrangiano sobre el círculo.

Ejemplo 3.1: Consideremos $M = \mathbb{S}^1$ y sea δ la 1-forma sobre el círculo definida por $p^*\delta = dx$, donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la proyección canónica. Entonces $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es generado por δ y $H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es identificado con $\mathbb{R}$, identificando $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ con $\langle \gamma, \delta \rangle$.

Sea $\mu \in \mathcal{M}(L)$ ergódica y supongamos que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la solución de L asociada a una órbita genérica de μ. Entonces si $\tilde{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de x, y por el ejemplo 1, se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(\mu) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{x/[0,T]} \delta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{p\circ\tilde{x}/[0,T]} \delta \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\tilde{x}/[0,T]} p^*\delta = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\tilde{x}/[0,T]} dx \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} (\tilde{x}(T) - \tilde{x}(0)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \tilde{x}(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho(\mu) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\ \tilde{x}(T)$.

Tenemos que para el círculo, la función beta cumple una propiedad más fuerte.

Proposición 3.1. *Dado $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli, entonces la función $\beta : H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es estrictamente convexa.*

Demostración. Supongamos que β no es estrictamente convexa, entonces existe un intervalo $[\gamma_1, \gamma_2] \subset \mathbb{R}$ con $\gamma_1 \neq \gamma_2$, que es un dominio soporte de β. Los puntos γ_1, γ_2 son puntos extremales y por tanto existen medidas ergódicas $\mu_i \in \mathcal{M}_{\gamma_i}(L)$, $i = 1, 2$. Sean $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ levantamientos de las soluciones de L asociadas a las órbitas de φ_t, genéricas para μ_i, $i = 1, 2$. Entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} x_i(t) = \gamma_i$, por el ejemplo anterior.

Luego como $\gamma_1 \neq \gamma_2$, se tiene que $x_1(a) = x_2(a)$ para algún a, pero como $x_1 \neq x_2$, entonces $\dot{x}_1(a) \neq \dot{x}_2(a)$. Esto contradice el teorema 2.8 aplicado a $\Lambda([\gamma_1, \gamma_2])$ y por tanto β es estrictamente convexa. ❏

Como consecuencia de esta proposición, tenemos que para Lagrangianos sobre el círculo siempre tenemos medidas ergódicas.

Corolario 3.2. *Sea $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ de Tonelli. Dado $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_\gamma(L)$ contiene elementos ergódicos.*

Demostración. El resultado se sigue de la proposición anterior, pues ésta nos dice que la función beta es estrictamente convexa, es decir, cada $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es un punto extremal de β y por el teorema 2.7, $\mathcal{M}_\gamma(L)$ contiene elementos ergódicos. ❏

Enseguida veremos que la homología nos da información sobre las propiedades dinámicas de una medida ergódica invariante. Primero consideremos la construcción que hacemos al inicio del capítulo tomando $\Lambda(S) = \Lambda(\{\gamma\})$ (o más aún podemos tomar $supp(\mu)$ con $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$ en lugar de $\Lambda(S)$) y $\pi : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Recordemos entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(S) & \xrightarrow{\varphi_t} & \Lambda(S) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \Sigma(S) & \xrightarrow{\psi_t} & \Sigma(S) \end{array} \tag{0.2}$$

donde $\Sigma(S) := \pi(\Lambda(S))$ y $\pi|_{\Lambda(S)}$ es un homeomorfismo.

Ahora consideremos el mapa tiempo 1 de los flujos φ_t y ψ_t. Hacemos $\Lambda_0 := \Lambda(S) \cap (T\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ y también $\Sigma_0 := \pi(\Lambda_0) = \pi(\Lambda(S)) \cap (\mathbb{S}^1 \times \{0\})$. Entonces tenemos el siguiente diagrama para el mapa tiempo 1 de estos flujos

$$\begin{tikzcd} \Lambda_0 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi"'] & \Lambda_0 \arrow[d, "\pi"'] \\ \Sigma_0 \arrow[r, "\psi_1"] & \Sigma_0 \end{tikzcd} \tag{0.3}$$

donde $\varphi_1(x_0, v_0, 0) = (x(1), \dot{x}(1), 1)$ con x solución de la ecuación de Euler-Lagrange tal que $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, y así $\psi_1(x_0, 0) = (x(1), 1(mod 1))$.

Por otra parte, Σ_0 es compacto en $\mathbb{S}^1$, pues π es continua y Λ_0 es compacto. También se tiene que $\psi_1 : \Sigma_0 \hookleftarrow$ es un homeomorfismo pues es el mapa tiempo 1 del flujo ψ_t.

Además ψ_1 preserva orientación, es decir, si $p_0, p_1, p_2 \in \Sigma_0$ están ordenados en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces $\psi_1(p_0), \psi_1(p_1), \psi_1(p_2)$ están en el mismo orden. Para probar esto último, supongamos que ψ_1 no preserva orden, es decir si $p_0, p_1, p_2 \in \Sigma_0$ están ordenados en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces $\psi_1(p_0), \psi_1(p_1), \psi_1(p_2)$ no están en tal orden. Supongamos, por ejemplo, que su orden está dado como $\psi_1(p_0), \psi_1(p_2), \psi_1(p_1)$. Por definición de ψ_1 tenemos que existe x_i solución de la ecuación de Euler Lagrange que une p_i con $\psi_1(p_i)$ para $i = 0, 1, 2$. Por tanto como ψ_1 no preserva orden, se tiene que al menos dos soluciones se cruzan, lo cual no es posible por el teorema del gráfico 2.8.

En resumen tenemos un conjunto compacto $C \subset \mathbb{S}^1$ en el cual está definido $h_1 : C \to C$ un homeomorfismo que preserva orientación. Queremos extender este homeomorfismo a todo el círculo. Tenemos el siguiente lema.

Lema 3.3. *Dado $C \subset \mathbb{S}^1$ un conjunto compacto y $h_1 : C \to C$ un homeomorfismo que preserva orientación, existe $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ homeomorfismo que preserva orientación tal que $h|_C = h_1$.*

Demostración. Como el conjunto $C \subset \mathbb{S}^1$ es compacto, entonces podemos escribir $C^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, donde I_n son arcos abiertos maximales disjuntos a pares. Luego consideramos $I_n := (a_n, b_n)$ con $a_n, b_n \in C$, pues I_n es abierto. Además como a_n, b_n son elementos del círculo, podemos expresarlos de la forma $a_n = e^{2\pi i\alpha_n}$ y $b_n = e^{2\pi i\beta_n}$, con $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ y $\alpha_n < \beta_n$. Así, su imagen bajo h_1 está dada por $h_1(a_n) = e^{2\pi i\tilde{\alpha}_n}$ y $h_1(b_n) = e^{2\pi i\tilde{\beta}_n}$, con $\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n \in \mathbb{R}$. Note que si $c \in C$, $c \neq a_n, b_n$, entonces $h_1(c) \notin (h_1(a_n), h_1(b_n))$, pues h_1 preserva orden. Además si $a \in [a_n, b_n]$ entonces $a = e^{2\pi i(s\alpha_n + (1-s)\beta_n)}$, $s \in [0, 1]$ y podemos definir su imagen bajo h como $h(a) := e^{2\pi i(s\tilde{\alpha}_n + (1-s)\tilde{\beta}_n)}$.

De esta manera la función que buscamos está dada por

$$h(a) := \begin{cases} h_1(a) & \text{si } a \in C \\ e^{2\pi i(s\tilde{\alpha}_n+(1-s)\tilde{\beta}_n)} & \text{si } a \in I_n = (a_n, b_n) \subset C^c \end{cases}$$

Vemos que por construcción h es continua, preserva orientación y es biyectiva. Luego como h manda arcos abiertos en arcos abiertos su inversa es continua. Por lo tanto h es un homeomorfismo que preserva orientación tal que $h|_C = h_1$. ❑

Entonces por este lema tenemos que existe una extensión de ψ_1 a todo el círculo, es decir, existe un homeomorfismo que preserva orientación $\hat{\psi} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $\hat{\psi}|_{\Sigma_0} = \psi_1$. Así, por la proposición A.6 que aparece en el apéndice, se tiene que a este homeomorfismo $\hat{\psi}$ corresponde un número de rotación dado por

$$\tau(\hat{\psi}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\Psi^n(y) - y) \text{ (mod 1)},$$

con $y \in \mathbb{R}$ y $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de $\hat{\psi}$.

Para calcular el número de rotación de $\hat{\psi}$ necesitamos calcular $\Psi^n(x)$; para esto consideremos el siguiente diagrama. (Omitimos la coordenada tiempo, pues en nuestros calculos prácticamente $t = 0$)

(0.4)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\hat{\psi}"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Aquí $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ está dada por $p(t) = exp(2\pi it)$ y dado que Ψ es un levantamiento de $\hat{\psi}$, se tiene que $p\Psi = \hat{\psi}p$.

Sea $x_0 \in \Sigma_0 \subset \mathbb{S}^1$. Tenemos que $\hat{\psi}|_{\Sigma_0} = \psi_1$, entonces

$$\hat{\psi}(x_0) = \psi_1(x_0) = x(1)$$

y por tanto

$$\hat{\psi}^n(x_0) = \psi_1^n(x_0) = x(n),$$

donde x es la solución de la ecuación de Euler-Lagrange tal que $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$.

Tomemos $y \in p^{-1}(x_0)$, entonces

$$p\Psi(y) = \hat{\psi}p(y) = x(1) \text{ y } p\Psi^n(y) = \hat{\psi}^n p(y) = x(n).$$

Ahora consideremos un levantamiento de x a $\mathbb{R}$, denotémoslo $\tilde{x}$

(0.5)
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\tilde{x}"] \arrow[r, "x"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

entonces se tiene que $p\tilde{x} = x$, por tanto $p\Psi^n(y) = p\tilde{x}(n)$ y así $\Psi^n(y) = \tilde{x}(n)$.

Por lo tanto el número de rotación de $\hat{\psi}$ está dado por

$$\begin{aligned} \tau(\hat{\psi}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\Psi^n(y) - y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\tilde{x}(n) - \tilde{x}(0)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\tilde{x}(n)) = \rho(\mu), \end{aligned}$$

donde $\rho(\mu)$ es la homología asociada a la medida μ, como se muestra en el ejemplo 3.1.

De los resultados anteriores y de la teoría de homeomorfismos sobre el círculo (ver apéndice) tenemos una descripción de los elementos de $\mathcal{M}_\gamma(L)$ en el siguiente teorema, el cual es conocido en la teoría de Lagrangianos. Por comodidad del lector damos su prueba.

Teorema 3.4. *Dado $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli, tenemos*

(a) *Si $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es racional, entonces cualquier medida únicamente ergódica $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$ está soportada por una única órbita periódica.*
(b) *Si $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es irracional, entonces $\mathcal{M}_\gamma(L)$ contiene una única probabilidad μ, la cual es ergódica.*

Demostración. Observemos primero que dado $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$, podemos inducir una medida ν, ψ_1-invariante. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ y definamos

$$\nu(A) := \mu(\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A))),$$

donde $\varphi_{[0,1]}(D) := \{\varphi_t(x_0, v_0, t_0) : t \in [0, 1], (x_0, v_0, t_0) \in D\}$, $D \subset T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Recordemos el diagrama 0.1 para ilustrar la construcción de esta medida.

(0.6)
$$\begin{tikzcd} \Lambda(S) \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "\pi"'] & \Lambda(S) \arrow[d, "\pi"'] \\ \Sigma(S) \arrow[r, "\psi_t"] & \Sigma(S) \end{tikzcd}$$

Veamos que en efecto, ν es ψ_1-invariante.

$$\begin{aligned}\nu(\psi_1(A)) &= \mu(\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(\psi_1(A))) \\ &= \mu(\varphi_{[0,1]}\varphi_1(\pi^{-1}(A))), \text{ según el diagrama anterior} \\ &= \mu(\varphi_1\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A))) \\ &= \mu(\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A))) = \nu(A)\end{aligned}$$

Note que si μ es ergódica, entonces ν es ergódica. Supongamos que no, entonces existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ ψ_1-invariante, es decir, tal que $\psi_1(A) = A$ y además $\nu(A) \neq 0, 1$.

Por un lado tenemos que

$$\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(\psi_1(A))) = \varphi_1\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A)),$$

por el diagrama y propiedades de flujos. Pero como $\psi_1(A) = A$, también tenemos que

$$\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(\psi_1(A))) = \varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A)).$$

Es decir, el conjunto $\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A))$ es φ_1-invariante, entonces como μ es ergódica

$$\mu(\varphi_{[0,1]}(\pi^{-1}(A))) = 0 \text{ ó } 1.$$

Por lo tanto $\nu(A) = 0$ o 1, lo que contradice que ν no es ergódica. De ahí que ν es ergódica.

(a) Sea $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ racional y $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$ únicamente ergódica. Por lo anterior tenemos una medida inducida ν, la cual es ψ_1-invariante y ergódica. Como $\tau(\hat{\psi}) = \gamma$, del Corolario A.10 del apéndice, tenemos que dado $z \in supp(\nu)$, existe $y_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $orb(y_0)$ es periódica y se tiene que

$$y_0 \in orb(y_0) \subseteq \omega(z) \subseteq supp(\nu).$$

Sea x la solución de Euler-Lagrange tal que $x(0) = y_0$, entonces

$$\Gamma := orb_{\varphi_t}(x(0), \dot{x}(0), 0) \in supp(\mu)$$

es una órbita periódica. Luego como μ es únicamente ergódica se tiene que $supp(\mu) = \Gamma$.

(b) Sea $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ irracional y consideremos $\Lambda(\{\gamma\})$, entonces dada $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L)$ tenemos una medida inducida ν, que es ψ_1-invariante. Recordemos que ψ es la extensión de ψ_1 al círculo y que $\tau(\hat{\psi}) = \gamma$, así por el Teorema A.8 tenemos que $\hat{\psi}$ es únicamente ergódico. Por lo tanto no pueden existir $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathcal{M}_\gamma(L)$, de lo contrario tendriamos $\nu_1 \neq \nu_2$ medidas inducidas, ψ_1-invariantes, lo que contradice que $\hat{\psi}$ es únicamente ergódico.

Así $\#\mathcal{M}_\gamma(L) = 1$

❑

CAPíTULO 4

Lagrangianos genéricos y resultados.

1. Lagrangianos genéricos.

En el célebre trabajo [**4**], Mañé introdujo la noción de sistemas Lagrangianos genéricos y mostró que la teoría de Aubry-Mather es más fuerte y precisa en este contexto.

Además de probar varios resultados interesantes (ver teoremas C y D de [**4**]), Mañé fórmula varias preguntas y conjeturas. Por ejemplo ver Problema 1, Problema 2, etc. del mismo artículo.

La meta de este trabajo es decidir la validez de estas cuestiones para el caso específico pero interesante de Lagrangianos sobre $\mathbb{S}^1$. Damos además algunas consecuencias y probamos versiones más fuertes de los resultados o preguntas de Mañé.

Antes de presentar los resultados del trabajo introduciremos algunas nociones. Sea (X, d) un espacio métrico, tenemos que un subconjunto $O \subset (X, d)$ es llamado *residual o genérico* si O contiene una intersección contable de subconjuntos abiertos densos.

Recordemos sin prueba el siguiente resultado clásico.

Teorema. *(Categoria de Baire) Sea X un espacio métrico completo. Si $\{U_n\}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos densos de X, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es densa en X.*

Una propiedad P se dice genérica si existe un conjunto residual $O \subset (X, d)$ tal que cada uno de sus elementos cumple esta propiedad P.

Lema 4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo, entonces no puede haber dos propiedades genéricas contradictorias sobre X.*

Demostración. Supongamos que P y NP son propiedades genéricas contradictorias sobre X, entonces existen conjuntos residuales $O_1, O_2 \subset X$ tal que en O_1 se satisface la propiedad P y en O_2 la propiedad NP. Por lo tanto por el teorema de Baire, $O := O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ es denso en X, por consecuencia cada elemento de O satisface P y NP, lo cual no es posible. ❑

Ahora recordemos la topología utilizada en $C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$. Así dado $u \in C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, denotamos por $||u||_k$ su C^k-norma y definimos

$$||u||_\infty := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\arctan(||u||_k)}{2^k}.$$

Note que ésta no es una norma. Dotemos $C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ con la métrica $||u - v||_\infty$ invariante por translaciones. Como la métrica $|| \cdot ||_\infty$ es completa, entonces la propiedad de Baire se mantiene, es decir, cualquier subconjunto residual de $C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es denso.

Luego tenemos que una propiedad P se dice genérica para un Lagrangiano L o *genérica en el sentido de Mañé*, si existe un conjunto residual $\mathcal{O} \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}$ entonces $L + \psi$ tiene la propiedad P.

Para empezar recordemos el teorema D de [**4**]. Cabe mencionar que Mañé desarrolla una técnica abstracta y general usando espacios localmente convexos para probar sus resultados.

Teorema 4.2. *Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano.*

(a) *Para cada $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$ existe un conjunto residual $\mathcal{O}(\gamma) \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1)$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}(\gamma)$, se tiene que $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$.*
b) *Existen conjuntos residuales $\mathcal{O}(\gamma) \subset C^\infty(M \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y $\mathcal{H} \subset H_1(M, \mathbb{R})$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}(\gamma)$ y $\gamma \in \mathcal{H}$ entonces $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$*

Nuestro primer resultado es establecer que en el caso de Lagrangianos sobre el círculo de hecho tenemos una versión más fuerte de este último teorema, para ello usamos los resultados del capítulo anterior, así tenemos:

Teorema 4.3. *Dado un Lagrangiano $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, existe un conjunto residual $\mathcal{O} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que para todo $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y para todo $\psi \in \mathcal{O}$, se tiene que $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$.*

Demostración. Consideremos dos casos. Supongamos primero que γ es racional y consideremos

$$\{\gamma_i \in \mathbb{Q} : \gamma_i \neq \gamma_j \text{ si y sólo si } i \neq j, \; i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Aplicando el teorema anterior, tenemos que para cada γ_i existe un conjunto residual $\mathcal{O}(\gamma_i)$ tal que si $\psi \in \mathcal{O}(\gamma_i)$, entonces $\#\mathcal{M}_{\gamma_i}(L + \psi) = 1$.

Por otro lado si γ es irracional, entonces para cualquier Lagrangiano de Tonelli L se tiene que $\#\mathcal{M}_\gamma(L) = 1$ por el teorema 3.4 b). Entonces dado que si tomamos $\psi \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, tenemos que $L + \psi$ también es un Lagrangiano de Tonelli, por lo tanto también se tiene que $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$.

Así, podemos considerar $\mathcal{O} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{O}(\gamma_i)$. Tenemos que $\mathcal{O}(\gamma_i) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ es un conjunto residual y satisface las condiciones requeridas. ❑

También en dicho artículo, Teorema A, Mañé establece:

Teorema 4.4. *Si L es un Lagrangiano genérico, existe un subconjunto residual S del conjunto de puntos extremales de β_L, tal que si $\gamma \in S$ entonces $\mathcal{M}_\gamma(L)$ consiste de una medida y esta medida es únicamente ergódica.*

Como un corolario del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado más fuerte para Lagrangianos periódicos sobre el círculo. Note que no tenemos restricciones sobre la condición de extremalidad de γ respecto a β.

Corolario 4.5. *Dado un Lagrangiano $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, existe un conjunto residual $\mathcal{O} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que para todo $\psi \in \mathcal{O}$ y para todo $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, se tiene que $\mathcal{M}_\gamma(L + \psi)$ consiste de una sola medida y esta medida es únicamente ergódica.*
(en particular $\Lambda_\gamma(L + \psi) = supp(\mu)$ es minimal)

Demostración. Sea $\mathcal{O}$ como en el Teorema 4.3, entonces para todo $\psi \in \mathcal{O}$ y para todo $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tenemos que $\#\mathcal{M}_\gamma(L + \psi) = 1$, es decir, hay una única medida $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L + \psi)$. Resta ver que dicha medida es únicamente ergódica, para esto recordemos que la función beta de Mather es estrictamente convexa para Lagrangianos sobre el círculo y por el Corolario 3.2 $\mathcal{M}_\gamma(L+\psi)$ contiene elementos ergódicos. Por lo tanto $\mu \in \mathcal{M}_\gamma(L + \psi)$ es únicamente ergódica. ❑

A continuación tenemos algunos lemas que necesitaremos más adelante para demostrar un resultado relevante sobre la cardinalidad de $\mathcal{M}^\omega(L)$.

Lema 4.6. *Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli. Dados $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ y $\omega \in H^1(M, \mathbb{R})$, tales que $\beta(h) + \alpha([\omega]) = \langle h, \omega\rangle$ entonces $\mathcal{M}_h(L) \subset \mathcal{M}^\omega(L)$.*

Demostración. Sea $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ y $\omega \in H^1(M, \mathbb{R})$ tales que $\beta(h) + \alpha([\omega]) = \langle h, \omega\rangle$. Sea $\mu \in \mathcal{M}_h(L)$, entonces $\beta(h) = A_L(\mu)$ y $\rho(\mu) = h$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_L(\mu) &= -\alpha([\omega]) + \langle h, \omega\rangle \\ &= -\alpha([\omega]) + \langle \rho(\mu), \omega\rangle \\ &= -\alpha([\omega]) + \int \omega d\mu. \end{aligned}$$

Por consiguiente $A_L(\mu) - \int \omega d\mu = -\alpha([\omega])$, es decir,

$$A_{L-\omega}(\mu) = -\alpha([\omega])$$

y entonces $\mu \in \mathcal{M}^{\omega}(L)$. ❏

Lema 4.7. *Sea $L : TM \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli. Dado $\omega \in H^1(M, \mathbb{R})$, entonces el conjunto*

$$S^{\omega}(L) := \{h \in H_1(M, \mathbb{R}) : \beta(h) + \alpha([\omega]) = \langle h, \omega \rangle\}.$$

es convexo.

Demostración. Sean $h_1, h_2 \in S^{\omega}(L)$, $\lambda \in [0, 1]$ y $h = \lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2$. Debemos ver que $h \in S^{\omega}(L)$, para esto vemos primero que como

$$\alpha([\omega]) = \max_{h \in H_1(M,\mathbb{R})} \left[\langle h, \omega \rangle - \beta(h)\right],$$

entonces $\alpha([\omega]) \geq \langle \gamma, \omega \rangle - \beta(\gamma)$, para todo $\gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$ y por tanto

$$\beta([\gamma]) \geq -\alpha([\omega]) + \langle \gamma, \omega \rangle.$$

Luego como la función beta es convexa se tiene que

$$\begin{aligned}
\beta(h) &\leq \lambda\beta(h_1) + (1 - \lambda)\beta(h_2) \\
&= \lambda(-\alpha([\omega]) + \langle h_1, \omega \rangle) + (1 - \lambda)(-\alpha([\omega]) + \langle h_2, \omega \rangle) \\
&= -\alpha([\omega]) + \lambda\langle h_1, \omega \rangle + (1 - \lambda)\langle h_2, \omega \rangle \\
&= -\alpha([\omega]) + \langle \lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2, \omega \rangle \\
&= -\alpha([\omega]) + \langle h, \omega \rangle \leq \beta(h).
\end{aligned}$$

Así $\beta(h) = -\alpha([\omega]) + \langle h, \omega \rangle$, es decir, $h \in S^{\omega}(L)$ y por lo tanto $S^{\omega}(L)$ es convexo. ❏

Lema 4.8. *Sea $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ un Lagrangiano de Tonelli. Dado $\omega \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$, existe $\gamma_0 \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}^{\omega}(L) = \mathcal{M}_{\gamma_0}(L)$.*

Demostración. Sea $\omega \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ y $\mu \in \mathcal{M}^{\omega}(L)$. Primero necesitamos ver que $\mu \in \mathcal{M}_{\rho(\mu)}(L)$. Supongamos que no, entonces existe $\nu \in \mathcal{M}(L)$ tal que $\rho(\mu) = \rho(\nu)$ y $A_L(\mu) > A_L(\nu)$. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
A_{L-\omega}(\mu) = A_L(\mu) - \int \omega d\mu &= A_L(\mu) - \langle \rho(\mu), \omega \rangle \\
&> A_L(\nu) - \langle \rho(\nu), \omega \rangle.
\end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que $\mu \in \mathcal{M}^{\omega}(L)$, pues

$$A_{L-\omega}(\mu) = \min_{\mu \in \mathcal{M}(L)} \{A_{L-\omega}(\mu)\},$$

por lo tanto $\mu \in \mathcal{M}_{\rho(\mu)}(L)$.

Lo anterior implica que

$$\mathcal{M}^{\omega}(L) \subset \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}^{\omega}(L)} \mathcal{M}_h(L).$$

Luego tenemos que si $\mathcal{M}_h(L) \cap \mathcal{M}^{\omega}(L) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{M}_h(L) \subset \mathcal{M}^{\omega}(L)$ y así

$$\mathcal{M}^{\omega}(L) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}^{\omega}(L)} \mathcal{M}_{\rho(\mu)}(L).$$

En efecto, sea $\nu \in \mathcal{M}_h(L) \cap \mathcal{M}^{\omega}(L)$, es decir ν es tal que

$$\rho(\nu) = h,\ \beta(\rho(\nu)) = A_L(\nu) \ \text{ y } \ A_{L-\omega}(\nu) = -\alpha([\omega]).$$

Por lo tanto

$$\beta(h) = -\alpha([\omega]) + \langle h, \omega \rangle.$$

Luego por el Lema 4.6

$$\mathcal{M}^{\omega}(L) = \bigcup_{h \in S^{\omega}(L)} \mathcal{M}_h(L).$$

Ahora veamos que $\#S^{\omega}(L) = 1$, supongamos que existen $h_1 \neq h_2 \in S^{\omega}(L)$ tales que

$$\beta(h_1) = -\alpha([\omega]) + \langle h_1, \omega \rangle, \quad \beta(h_2) = -\alpha([\omega]) + \langle h_2, \omega \rangle$$

y $h = \lambda h_1 + (1-\lambda) h_2$, con $\lambda \in (0,1)$. Por el lema anterior, $h \in S^{\omega}(L)$.

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\lambda\beta(h_1) + (1-\lambda)\beta(h_2) &= \lambda(-\alpha([\omega]) + \langle h_1, \omega \rangle) + (1-\lambda)(-\alpha([\omega]) + \langle h_2, \omega \rangle) \\
&= -\alpha([\omega]) + \lambda \langle h_1, \omega \rangle + (1-\lambda)\langle h_2, \omega \rangle \\
&= -\alpha([\omega]) + \langle \lambda h_1 + (1-\lambda) h_2, \omega \rangle \\
&= -\alpha([\omega]) + \langle h, \omega \rangle = \beta(h)
\end{aligned}$$

esto contradice el hecho de que β es estrictamente convexa. Por lo tanto $\#S^{\omega}(L) = 1$ y como consecuencia se tiene que $\mathcal{M}^{\omega}(L) = \mathcal{M}_h(L)$ para algún $h \in H_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$. ❏

En la página 278 del trabajo [**4**], Mañé prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.9. *Sea L un Lagrangiano. Entonces*

(a) *Para cada* $\omega \in H^1(M,\mathbb{R})$ *existe un subconjunto residual* $\mathcal{O}(\omega) \subset C^\infty(M\times\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ *tal que si* $\psi \in \mathcal{O}(\omega)$ *entonces* $\#\mathcal{M}^\omega(L+\psi) = 1$.
(b) *Existen subconjuntos residuales* $\mathcal{O} \subset C^\infty(M\times\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ *y* $\mathcal{H} \subset H^1(M,\mathbb{R})$ *tales que si* $\psi \in \mathcal{O}$ *y* $\omega \in \mathcal{H}$ *se tiene que* $\#\mathcal{M}^\omega(L+\psi) = 1$.

En el caso de Lagrangianos sobre el círculo podemos probar lo siguiente.

Proposición 4.10. *Dado un Lagrangiano* $L : T\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$*, existe un conjunto residual* $\mathcal{O}(L) \subset C^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ *tal que para todo* $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ *se tiene que* $\#\mathcal{M}^\omega(L+\psi) = 1$ *para todo* $\psi \in \mathcal{O}(L)$.

Demostración. Consideremos el conjunto residual $\mathcal{O} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ dado por el Teorema 4.3. Sea $\omega \in H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ y $\psi \in \mathcal{O}$. Por el Lema 4.8, existe $\gamma \in H_1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{M}^\omega(L+\psi) = \mathcal{M}_\gamma(L+\psi).$$

Luego por la elección del conjunto residual $\mathcal{O}$ se tiene que

$$\#\mathcal{M}_\gamma(L+\psi) = 1,$$

y por lo tanto

$$\#\mathcal{M}^\omega(L+\psi) = 1.$$

❏

2. Conjunto cociente de Aubry.

Dada ω una 1-forma cerrada, consideramos $\mathcal{A}_\omega(L) := \mathcal{A}(L-\omega)$, así podemos considerar también $\bar{\mathcal{A}}_\omega(L) := \bar{\mathcal{A}}(L-\omega)$ (Ver capítulo 2 para su definición).

Patrick Bernard y Gonzalo Contreras prueban en [**1**] el siguiente corolario respecto a la cardinalidad del conjunto cociente de Aubry.

Corolario 4.11. *La siguiente propiedad es genérica en el sentido de Mañé:*
Para todo $\omega \in H^1(M,\mathbb{R})$ *el conjunto cociente de Aubry* $\bar{\mathcal{A}}_\omega(L)$ *tiene a lo más* $1 + dim H^1(M,\mathbb{R})$ *elementos.*

Note que si $M = \mathbb{S}^1$, entonces dim $H^1(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}) = 1$. Así, por el corolario anterior se tiene que $\bar{\mathcal{A}}_\omega(L)$ tiene a lo más 2 elementos.

Por los resultados que ya tenemos en Lagrangianos genéricos sobre el círculo, podemos probar lo siguiente.

Proposición 4.12. *Dado un Lagrangiano* $L : T\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$*, existe un conjunto residual* $\mathcal{O}(L) \subseteq C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ *tal que para todo* $\omega \in H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ *se tiene que* $\#\bar{\mathcal{A}}_\omega(L + \phi) = 1$ *para todo* $\phi \in \mathcal{O}(L)$.

Demostración. Sea $\mathcal{O} \subseteq C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ como en la Proposición 4.10 y $\phi \in \mathcal{O}$. Supongamos que existen $x, y \in \bar{\mathcal{A}}_\omega(L + \phi)$, es decir tenemos dos clases estáticas, entonces por la Proposición 2.9 se tiene que cada clase estática contiene una medida minimizante, por tanto se tienen $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathcal{M}^\omega(L + \phi)$, pero $\#\mathcal{M}^\omega(L + \phi) = 1$. Entonces $\#\bar{\mathcal{A}}_\omega(L + \phi) = 1$. ❑

APÉNDICE A

Un breve repaso.

1. Teoría ergódica.

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\varphi_t : X \to X$ un flujo, decimos que φ_t preserva la medida μ o que μ es φ_t-invariante si para todo $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = \mu(\varphi_t^{-1}(A))$. Recordemos también que si $\mathcal{M}(X)$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre $\mathcal{B}$, entonces

$$\mathcal{M}_{\varphi_t}(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \mu \text{ es } \varphi_t\text{-invariante}\},$$

es un espacio métrico compacto con la topología débil estrella y convexo. Además tenemos que μ es ergódica respecto a φ_t si μ es φ_t-invariante y para cualquier $A \in \mathcal{B}$ tal que $\varphi_t^{-1}(A) = A$ se tiene que $\mu(A) = 0$, o $\mu(A) = 1$; más aún, μ es únicamente ergódica si $\#\mathcal{M}_{\varphi_t}(X) = 1$.

Por otro lado, tenemos que μ es un punto extremal de $\mathcal{M}_{\varphi_t(X)}$ si no puede escribisrse como combinación convexa $\mu = \mu_1 t + (1-t)\mu_2$ con $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$. Tenemos el siguiente teorema respecto a puntos extremales.

Teorema A.1. *Sea μ una medida, entonces μ es ergódica si y sólo si es un punto extremal de $\mathcal{M}_{\varphi_t}(X)$.*

Ahora recordemos el siguiente teorema.

Teorema A.2. *(Ergódico de Birkhoff para flujos)*
Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y φ_s un flujo que preserva μ. Tenemos que para $f \in L^1(X, \mu)$

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(\varphi_s(x))ds$$

converge c.t.p. x (cuando $t \to \infty$)a una función $\tilde{f} \in L^1(X, \mu)$ y si $\mu(X) < \infty$ se tiene que

$$\int_X \tilde{f} d\mu = \int_X f d\mu.$$

Finalmente recordemos que el *soporte de una medida* μ es

$$supp(\mu) := \{x \in X : \mu(U_x) > 0 \text{ para todo } U_x \text{ abierto que contiene a } x\}.$$

2. Homeomorfismos del círculo.

Antes de profundizar sobre los homeomorfismos del círculo, recordemos algunas definiciones de espacios de recubrimiento.

Tenemos que dado $p : \tilde{X} \to X$ un mapa continuo, el subconjunto abierto $U \subseteq X$ se dice *cubierto* por p si $p^{-1}(U)$ es la unión disjunta de subconjuntos abiertos $V_j \subset \tilde{X}, j \in J$ y además se tiene que $p|_{V_j}$ es un homeomorfismo para cada $j \in J$.

Definición A.3. Sea $p : \tilde{X} \to X$ un mapa continuo y sobre, p es un *mapa cubriente o de recubrimiento* si para todo punto $x \in X$ existe U vecindad abierta de x que es cubierta. Al espacio $\tilde{X}$ se le llama espacio cubriente y X es el espacio base.

Un ejemplo es $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, con $p(t) = e^{2\pi it}$.

Definición A.4. Si $p : Z \to X$ es un mapa de recubrimiento y $f : Y \to X$ es un mapa continuo, entonces un *levantamiento de f al espacio cubriente* es un mapa continuo $\tilde{f} : Y \to Z$ tal que $p\tilde{f} = f$.

A continuación veremos algunos aspectos de la teoría de homeomorfismos sobre $\mathbb{S}^1$, los cuales están basados en el libro [**3**], Cap. 11, por lo que para las pruebas remitimos al lector a consultar dicho libro.

Dado cualquier mapa continuo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, un *levantamiento de f* es un mapa continuo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que si $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ se define como $p(t) = \exp(2\pi it)$ entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

conmuta, i.e $p \circ F = f \circ p$, o equivalentemente $\exp(2\pi iF(t)) = f(\exp(2\pi it))$.

Recordemos que si $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo, entonces existe un levantamiento continuo al cubriente universal, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Teorema A.5. *Un homeomorfismo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de algún homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ si y sólo si, o bien $F(x + n) = F(x) + n$ o bien $F(x + n) = F(x) - n$.*

Tenemos que un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *preserva orientación* si para cualesquiera $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{S}^1$ ordenados en sentido antihorario, se tiene que $f(p_1), f(p_2), f(p_3)$ están ordenados en sentido antihorario. Consideremos el conjunto de estos homeomorfismos

$$Homeo^+(\mathbb{S}^1) = \left\{ f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \mid f \text{ es homeomorfismo que preserva orientación} \right\}$$

Además en la siguiente proposición se tiene que a cada uno de estos homeomorfismos que preservan orientación se asocia un valor, llamado número de rotación.

Proposición A.6. *Sea $f \in Homeo^+(\mathbb{S}^1)$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f, entonces*

$$\tau(f) = (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)) \ (mod\ 1)$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$. Además $\tau(f)$ no depende de x, ni del levantamiento F.

A $\tau(f)$ se le llama *número de rotación* de f.

Lema A.7. *Sea $f \in Homeo^+(\mathbb{S}^1)$, entonces $\tau(f) \in \mathbb{Q}$ si y sólo si f tiene al menos un punto periódico.*

Note que si $f \in Homeo^+(\mathbb{S}^1)$ y $\tau(f) = \frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$, entonces todos los puntos tienen periodo mínimo q.

El siguiente resultado se encuentra en [**3**] Th 11.2.9 página 399.

Teorema A.8. *Un homeomorfismo del círculo con número de rotación irracional es únicamente ergódico.*

Ahora recordemos las siguientes definiciones:

Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ un homeomorfismo, entonces el punto $x \in X$ se dice *homoclínico* al punto $y \in X$ si

$$\lim_{|n|\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Y se dice ser *heteroclínico* a los puntos $y_1, y_2 \in X$ si

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y_1)) = \lim_{n\to-\infty} d(f^n(x), f^n(y_2)) = 0$$

La siguiente proposición es probada en [**3**] (Prop.11.2.2)

Proposición A.9. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva orientación con número de rotación $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, entonces existen dos tipos posibles de órbitas no periódicas para f:*

(a) *Si f tiene exactamente una órbita periódica, entonces cada uno de los otros puntos es heteroclínico bajo f^q a dos puntos sobre la órbita periódica. Estos puntos son diferentes si el periodo es mayor que 1.*
(b) *Si f tiene más de una órbita periódica, entonces cada punto no periódico es heteroclínico bajo f^q a dos puntos sobre diferentes órbitas periódicas.*

Recordemos también que si (X, d) es un espacio métrico y $f : X \to X$ es continua, entonces dado $x \in X$ definimos el conjunto ω-límite de x como

$$\omega_f(x) := \{y \in X : \exists n_i \to \infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \to y\}.$$

De aqui se tiene que si $y \in \omega_f(x)$, entonces $orb(y) \in \omega_f(x)$.

Combinando estas observaciones y resultados anteriores, tenemos lo siguiente.

Corolario A.10. *Si $f \in Homeo^+(\mathbb{S}^1)$ y $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, entonces para todo $x \in \mathbb{S}^1$ existe $y_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $orb(y_0)$ es periódica y $orb(y_0) \subset \omega_f(x)$.*

Demostración. Si x es un punto periódico, entonces $orb(x) \subset \omega_f(x)$. De otra manera si x en un punto no periódico, se tiene por la proposición anterior en ambos casos (1) y (2), existe $y \in X$ tal que $orb(y)$ es periódica y

$$\lim_{n\to+\infty} d((f^q)^n(x), (f^q)^n(y)) = 0.$$

Como y es q-periódica entonces $f^q(y) = y$, por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} d((f^q)^n(x), y) = 0.$$

De ahí que $y \in \omega_f(x)$ y por tanto $orb(y) \in \omega_f(x)$. ❑

3. Funciones convexas.

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la *subderivada de f* en x_0 es el conjunto

$$\partial f(x_0) := \{p \in \mathbb{R}^{n^*} | f(x) \geq p(x - x_0) + f(x_0)\}$$

y sus elementos son llamados subderivadas de f en x_0.

Por otro lado, una función afin $\Psi(x) := Hx + c$ con $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal, $c \in \mathbb{R}$ constante se llama *mapa afin soporte* de f en x_0 si $f(x) \geq \Psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $f(x_0) = \Psi(x_0)$.

Lema A.11. *Existe una correspondencia 1-1 entre subderivadas de f en x_0 y los mapas afin soportes de f en x_0.*

Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexa, $p \in \mathbb{R}^{n^*}$. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es llamado *dominio soporte* si es de la forma $S := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = p(x - x_0) + f(x_0)\}$.

Proposición A.12.

(a) *$\partial f(x) \neq \emptyset$ para cada x en el dominio de f.*
(b) *Una función convexa finita es continua y diferenciable casi en todas partes según Lebesgue.*
(c) *Si $\partial f(x) = \{p\}$ entonces f es diferenciable en x y $f'(x) = p$.*

Dada una función convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *el dual convexo* de f es la función $f^* : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{R} \cup \infty$ definida por

$$f^*(p) := \max_{x \in \mathbb{R}^n} [p(x) - f(x)] \tag{3.1}$$

Proposición A.13. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces se tiene*

(i) *f^* es convexo,*
(ii) *Si f y f^* son superlineales, entonces $(f^*)^* = f$.*

Bibliografía

[1] P. Bernard; G. Contreras. *A generic property of families of Lagrangian systems*. Annals of Maths 167 No. 3, 2008.

[2] G. Contreras; R. Iturriaga. *Global minimizers of autonomous Lagrangians*. CIMAT, 2000.

[3] A. Katok; B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of Mathematics and its applications 54, Cambridge University Press, 1995.

[4] R. Mañé. *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*. Nonlinearity 9, 273-310, 1996.

[5] R. Mañé. *Global Variational Methods in conservative Dynamics*. IMPA, 1991.

[6] R. Mañé. *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits*. Reprint in Bol. Soc. Bras. Mat. vol: 28, No. 2, 141-153, 1997.
G. Contreras; J. Delgado; R. Iturriaga; *Lagrangians flows: the dynamics of globally minimizing orbits II*. Bol. Soc. Bras. Mat. vol: 28, No.2, 155-196, 1997. .

[7] R. Mañé. *On de minimizing measures of the Lagrangians dynamical systems*. Nonlinearity 5, 623-638, 1992.

[8] J. Mather. *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems*. Math. Z. 207, 169-207, 1991.

[9] J. Mather. *Variational construction of connecting orbits*. Annales de l'institut Fourier vol: 43, No. 5, 1349-1386, 1993.

[10] J. Mather. *Total disconnectedness of the quotient Aubry set in low dimensions*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol: 56, No. 8, 1178 - 1183, 2003.

Índice alfabético