



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**GENERADORES DEL POLITOPO DE PESOS POR  
SÍMBOLO ASOCIADOS A SISTEMAS DE CICLOS DE  
CADENAS DE MARKOV**

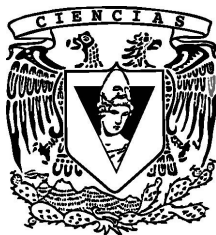
**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**JORGE KEN MENDOZA HASHIMOTO**



**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. RICARDO GÓMEZ AÍZA  
2011**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Generadores del politopo de pesos por símbolo asociados a sistemas de ciclos de cadenas de Markov

Jorge Ken Mendoza Hashimoto

2011

1.-Datos del alumno

Apellido Paterno: Mendoza

Apellido Materno: Hashimoto

Nombre: Jorge Ken

Tel: 56434356

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias

Matemáticas

# de cuenta: 300702851

2.-Datos del tutor

Dr.

Ricardo

Gómez

Aíza

3.- Datos sinodal

M. en C.

Rafael

Alcaraz

Barrera

4.- Datos sinodal

Dra.

Isabel

Hubard

Escalera

5.- Datos sinodal

Dr.

Germán Aubín

Arroyo

Camacho

6.- Datos sinodal

Dra.

María Emilia

Caballero

Acosta

7.-Datos de trabajo escrito

Título: Generadores del politopo de pesos por símbolo asociados a sistemas de ciclos de cadenas de Markov

2011

# Agradecimientos

Antes que nada, le agradezco a mis padres, a quienes debo todo. Por todo su amor y cariño que me han dado a lo largo de estos años, por ser ejemplos a seguir. De todo corazón les doy las gracias. A mis abuelos Aurelio y Antonia, Mikiro y Shizuno. Siempre me consintieron tanto, y han sido grandes inspiraciones.

Agradezco al Dr. Ricardo Gómez, pues gracias a él se pudo realizar este trabajo. Sin sus geniales exposiciones y su enorme paciencia nada de esto hubiera sido posible. Gracias por todo Rich. También agradezco al Dr. Aubín, Dra. Isabel y Dra. Maria Emilia por haber aceptado ayudarme con este trabajo. Y al buen Rafa, que me apoyó como sinodal y como compa.

A mi hermanito Ricardo Vázquez. Si nunca me ha preocupado ser hijo único, es porque tengo un gran hermano en tí. A Abrahame, un hermano con quien me ayudo para salir de los baches. A Mai, mi hermanita que siempre me hecha porras. A León, el mejor amigo que me dió la universidad. A la “real sociedad”: Hiroki, quien ya me ha aguantado mucho tiempo y sigue siendo un gran cuate, a Kenji que siempre está al pendiente de que no meta la pata, y a Paco, que siempre me saca una risa. A Violeta por su gran amistad y el enorme apoyo que me ha dado en este último jalón.

A todos los amigos que conocí en la universidad, y de una u otra forma me han apoyado: Rodrigo (Wara), María, Serena, Dago, Leon(es), Natalia, Ana Hess, Edna, elAle, Victor, Arita, Rodri, Noé, César, Gato, la banda del basket, Paulina. A mis primos, Juan Antonio, Omar, Isac, Jocelyn, David. A Bruno, Paulina y Danny.

A todos aquellos que me han hecho la vida mejor, gracias. Espero algún día devolverles el favor.

Y porqué no, al Santo...



# Introducción

El objetivo de esta tesis es describir el politopo de pesos por símbolo introducido por Parry y Tuncel en [5] y mostrar conjuntos de generadores de estos politopos asociados a los sistemas de ciclos. Estos conceptos se enmarcan en el contexto de la dinámica simbólica. La dinámica simbólica es una herramienta para estudiar los sistemas dinámicos, y se enfoca en los llamados *espacios shift*, a los cuales en el presente trabajo nos referiremos como  $\sigma$ -espacios. Los  $\sigma$ -espacios nos dirigen hacia dos áreas: la probabilidad, al asociar los  $\sigma$ -espacios con cadenas de Markov, y con la teoría de gráficas, al asociar los  $\sigma$ -espacios con digráficas. Esta relación es la que nos permitirá partir de un  $\sigma$ -espacio, determinar algunos de sus invariantes, y a partir de éstos construir el politopo de pesos por símbolo.

Veremos algunos ejemplos de politopos de pesos por símbolo, y de estos ejemplos fijaremos nuestra atención en sus generadores, asociados a sistemas de ciclos. Los sistemas de ciclos se definen formalmente como cocientes de funciones zeta, y corresponden al conjunto de todos los posibles “primeros retornos” a un estado. Los coeficientes de la serie de potencias que resultan de este cociente los vamos a asociar con puntos del politopo. Esta asociación va a resultar en ejemplos de representaciones de los generadores de los politopos de pesos por símbolo que resultaron de interés, y fueron una de las principales motivaciones para este trabajo.

En el capítulo 1 se presentan bases teóricas que son requeridas en capítulos posteriores. Empezamos por introducir conceptos de dinámica simbólica, para lo cual se usa como referencia principal el libro escrito por Douglas Lind y Brian Marcus ([4]). Uno de los conceptos más importantes que introducimos en esta sección es el de  $\sigma$ -espacios de tipo finito, junto con conceptos de teoría de gráficas, probabilidad y teoría de la medida. Es de particular importancia ver cómo relacionamos a los  $\sigma$ -espacios de tipo finito con gráficas. Nos introducimos en los  $\sigma$ -espacios de tipo finito, observamos algunas de sus características, relacionando algunos conceptos correspondientes al álgebra lineal, en particular al Teorema de Perron-Frobenius (1.54) y su uso dentro de los sistemas dinámicos que manejamos en adelante.



El capítulo 2 está basado en un artículo escrito por Brian Marcus y Selim Tuncel ([5]), y su objetivo principal es describir el politopo de pesos por símbolo. Marcus y Tuncel introducen el politopo de pesos por símbolo usando el semianillo  $\mathbb{Z}_+[exp]$ ; este semianillo es definido al inicio de este capítulo. Introducimos algunos invariantes en  $\sigma$ -espacios de tipo finito, que nos son útiles para estudiar el politopo de pesos por símbolo. Definimos el politopo de pesos por símbolo, y se presentan algunas de sus características, así como algunos ejemplos. Hacemos algunas observaciones sobre propiedades adicionales del politopo de pesos por símbolo, en específico acerca de las caras del politopo y el “manejo” de invariantes que podemos extraer de éstas.

En el capítulo 3 introducimos los sistemas de ciclos. Empezamos por describir funciones zeta; la función zeta de Artin-Mazur definida para sistemas dinámicos, y la función zeta de Ihara que está definida para digráficas. Describimos las funciones zeta en el contexto de matrices estocásticas, y luego buscamos asociarlas con sistemas de ciclos, los cuales resultan de cocientes de estas funciones zeta. En este contexto, es necesario extender el semianillo  $\mathbb{Z}_+[exp]$  al semianillo de series de potencias  $\mathbb{Z}_+[exp][[t]]$  (en otras palabras, la categoría en la que se enmarca nuestro estudio es la de *shifts de Markov* con conjuntos de estados numerables, aun cuando el objeto inicial del cual partimos es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito). Se enuncia la función zeta estocástica, la cual es una generalización que ahora incluye pesos en su definición. Se estudian las matrices obtenidas a partir de remover una fila y una columna de una matriz, que es básicamente quitarle un vértice a su gráfica, y se observa la información que resulta del cociente de sus respectivas funciones zeta estocásticas. Veremos que este cociente representa el sistema de ciclos con base en el vértice que es removido. Este resultado es fundamental en este trabajo, por lo que presentamos una demostración rigurosa. Concluimos describiendo cómo los sistemas de ciclos inducen puntos en el politopo de pesos por símbolo. Por resultados vistos en el capítulo 2, observamos que estos puntos inducidos por los sistemas de ciclos son los generadores del politopo de pesos por símbolo. Esta correspondencia entre sistemas de ciclos y generadores del politopo es la que nos inducirá una representación gráfica del politopo asociada al sistema de ciclos correspondiente. Esta representación gráfica presenta a simple vista patrones autosimilares o *fractalosos* (término que pretende describir cómo las representaciones cargan a simple vista la promesa de ser autosimilares, aunque eso no se demuestra en el presente trabajo). Este hecho motiva una de las preguntas del siguiente (y último) capítulo.

En el último capítulo presentamos reflexiones y posibles líneas de investigación a partir de la construcción de generadores del politopo de pesos por símbolo asociada a sistemas de ciclos, vista en el capítulo anterior. La primer pregunta que nos planteamos es si existen estos patrones autosimilares. Otra pregunta que planteamos en este trabajo está relacionada con embaldosados del espacio euclideano. Los politopos de pesos por símbolo, junto con sus generadores asociados a sistemas de ciclos, van a constituir las protobaldosas, las cuales, por construcción están definidas por una serie de potencias. Los generadores en las caras del politopo inducen reglas de pegado. El problema de determinar cuándo es posible embaldosar el espacio con un conjunto de protobaldosas se convierte entonces en un problema de series de potencias. La pregunta que planteamos consiste

esencialmente en determinar condiciones algebraicas entre las series de potencias asociadas a las baldosas que nos permitan determinar si es posible o no embaldosar el espacio.



# Índice general

<b>1. Conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Nociones de dinámica simbólica . . . . .	1
1.2. Códigos de bloques . . . . .	5
1.3. Presentación de $N$ -bloques . . . . .	9
1.4. $\sigma$ -espacios de tipo finito . . . . .	11
1.5. Puntos doblemente transitivos . . . . .	12
1.6. Gráficas . . . . .	14
1.7. Conceptos de medida . . . . .	20
1.8. Probabilidad y Cadenas de Markov . . . . .	22
1.9. Sistemas dinámicos . . . . .	27
1.10. Invariantes . . . . .	28
<b>2. El politopo de pesos por símbolo</b>	<b>33</b>
2.1. El semianillo $\mathbb{Z}_+[exp]$ . . . . .	33
2.2. Normalización estocástica de Parry-Tuncel . . . . .	36

2.3. Algunos invariantes . . . . .	38
2.4. Definición del politopo de pesos por símbolo y algunas propiedades básicas . . . . .	54
2.5. Ejemplos del politopo de pesos por símbolo . . . . .	58
2.6. Algunas propiedades básicas del politopo de pesos por símbolo . . . . .	61
<b>3. Sistemas de ciclos y cocientes de funciones zeta</b>	<b>65</b>
3.1. Funciones zeta en sistemas dinámicos . . . . .	65
3.2. Funciones zeta estocásticas y sistemas de ciclos . . . . .	70
3.3. Ejemplos de politopos de pesos por símbolo generados por sistemas de ciclos . . . . .	76
<b>4. Reflexiones y algunas preguntas</b>	<b>83</b>

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

En este capítulo introducimos conceptos y nociones que son bases para el presente trabajo. Se hace énfasis en sistemas dinámicos, en particular en dinámica simbólica, teniendo como principal referencia a Lind y Marcus ([4]).

Se definen los  $\sigma$ -espacios de tipo finito, que juegan un papel crucial dentro de este trabajo. Asimismo, se relacionan  $\sigma$ -espacios con gráficas, lo cual también es fundamental para el desarrollo de capítulos posteriores. Se introducen algunos conceptos de probabilidad, que nos serán de gran utilidad al momento de “traducir” nuestros  $\sigma$ -espacios como gráficas.

### 1.1. Nociones de dinámica simbólica

Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto finito de símbolos o letras al cual llamaremos **alfabeto** y equiparemos con la topología discreta. Denotaremos a una sucesión  $x$  de símbolos como  $x = \dots x_{-1}x_0x_1\dots$  donde  $x_i \in \mathcal{A}$ . La  $i$ -ésima coordenada de  $x$  será  $x_i$ .

*Definición 1.1.* El  $\mathcal{A}$  **shift-completo** o  $\mathcal{A}$   **$\sigma$ -espacio completo** es la colección de todas las sucesiones bi-infinitas de símbolos de  $\mathcal{A}$  y se denota por

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid x_i \in \mathcal{A} \text{ para toda } i \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un espacio topológico con la topología producto.

Un **bloque** o palabra sobre  $\mathcal{A}$  es una sucesión finita de símbolos de  $\mathcal{A}$ . Si  $\omega = \omega_1 \dots \omega_k \in \mathcal{A}^k$

es un bloque, entonces diremos que su longitud es  $k$  y nos referiremos a él como un  $k$ -**bloque**. Si  $\omega$  es un  $k$ -bloque, escribiremos  $l(\omega) = k$  para denotar su **longitud**. Si  $u = \omega_i \dots \omega_{i+r}$  para alguna  $1 \leq i \leq k$  y  $0 \leq r \leq k - i$ , entonces diremos que  $u$  es un subbloque de  $\omega$ . Por ejemplo,  $\omega = \underbrace{x_{-1}x_0x_1}_{l(w)=3}$  es un 3-bloque, y  $u = x_{-1}x_0$  es un subbloque de  $\omega$ .

Dado  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ,  $i \leq j$ , denotaremos  $x_i \dots x_j = x_{[i,j]}$ .

El **mapeo shift** o **función corrimiento** es la función  $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  que mapea el punto  $x$  al punto  $y = \sigma(x)$ , donde  $y_i = x_{i+1}$ . Un punto  $x$  es **periódico** para  $\sigma$  si  $\sigma^n(x) = x$  para alguna  $n \geq 1$ , en cuyo caso decimos que  $x$  tiene periodo  $n$  bajo  $\sigma$ . Si  $\sigma(x) = x$ , decimos que  $x$  es un punto fijo para  $\sigma$ .

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de bloques sobre  $\mathcal{A}$  a la cual llamaremos **familia de bloques prohibidos**. Sea  $X_{\mathcal{F}}$  el subconjunto de sucesiones en  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  que no contienen algún subbloque de  $\mathcal{F}$ , es decir

$$X_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \text{no existe } k \in \mathbb{Z}, w \in \mathcal{F} \text{ tal que } x_{[k, k+l(w)-1]} = w\}.$$

*Definición 1.2.* Un **espacio shift** o  $\sigma$ -**espacio** es un subconjunto  $X$  de un  $\sigma$ -espacio completo  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  tal que  $X = X_{\mathcal{F}}$  para alguna  $\mathcal{F}$  sobre  $\mathcal{A}$ .

La colección  $\mathcal{F}$  puede ser finita o infinita, pero dado que  $\mathcal{A}$  es finito, los elementos de  $\mathcal{F}$  son a lo más numerables, pues sus elementos pueden ser ordenados en una lista (basta con escribir los bloques de longitud 1 primero, luego los de longitud 2, y así sucesivamente).

Notemos que en general, si  $X_{\mathcal{F}}$  es un  $\sigma$ -espacio,  $\mathcal{F}$  no es único y además  $\sigma(X_{\mathcal{F}}) = X_{\mathcal{F}}$ .

Otra forma equivalente de definir un  $\sigma$ -espacio se da en la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.** *Un subconjunto  $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un  $\sigma$ -espacio si y sólo si  $X$  es cerrado y  $\sigma(X) = X$ .*

La demostración de esta proposición se incluye al final de esta sección.

Sea  $X$  un subconjunto de un  $\sigma$ -espacio completo. Para cada  $n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  definimos  $\mathcal{B}_n(X)$  como el conjunto de  $n$ -bloques que ocurren en los puntos de  $X$ . Precisamente,  $\mathcal{B}_0(X) = \emptyset$  y si  $n > 0$ , entonces

$$\mathcal{B}_n(X) = \{x_i \dots x_j \mid x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in X \text{ y } j - i + 1 = n\}.$$

Llamamos **lenguaje** de  $X$  a la colección  $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X)$ . Para un bloque  $u \in \mathcal{B}(X)$ , decimos que  $u$  ocurre en  $X$ .

**Proposición 1.4.** *Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio, y  $\mathcal{B}(X)$  su lenguaje.*

1. Si  $w \in \mathcal{B}(X)$  entonces:
  - a) Todo subbloque de  $w$  pertenece a  $\mathcal{B}(X)$ .
  - b) Existen bloques no vacíos  $u, v$  en  $\mathcal{B}(X)$  tales que  $uwv \in \mathcal{B}(X)$ .
2. El lenguaje de los  $\sigma$ -espacios está caracterizado por 1. Es decir, si  $\mathcal{L}$  es una colección de bloques sobre  $\mathcal{A}$ , entonces  $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$  para algún  $\sigma$ -espacio  $X$  si y sólo si  $\mathcal{L}$  satisface la condición 1.
3. El lenguaje de un  $\sigma$ -espacio determina al  $\sigma$ -espacio. Mas aún, para cualquier  $\sigma$ -espacio tenemos que  $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$ . Así, dos  $\sigma$ -espacios son iguales si y sólo si tienen el mismo lenguaje.

*Demostración.* 1. Sea  $w'$  subbloque de  $w$ , donde  $w \in \mathcal{B}(X)$ . Como  $w \in \mathcal{B}(X)$ , existen  $x \in X$  y  $j \geq i$  tales que  $w = x_{[i,j]}$ . Como  $w'$  es subbloque de  $w$ , existen  $r, s \in \mathbb{Z}$  tales que  $w' = x_{[r,s]}$  donde  $r, s \in \mathbb{Z}$  y  $i \leq r \leq s \leq j$ . Entonces  $w' \in \mathcal{B}(X)$ .

Sea  $w \in \mathcal{B}(X)$ . De nuevo, esto implica que  $w = x_{[i,j]}$  para alguna  $i, j \in \mathbb{Z}, x \in X$ . Sea  $u = x_{i-1}, v = x_{j+1}$ . Entonces  $uwv = x_{[i-1, j+1]} \in X$ , de lo cual  $uwv \in \mathcal{B}(X)$ .

2. Sea  $\mathcal{L}$  una colección de bloques que satisfacen el inciso 1 de este teorema, y  $X$  el  $\sigma$ -espacio  $X_{\mathcal{L}^c}$ . Tenemos que demostrar que  $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$ .

Si  $w \in \mathcal{B}(X)$ , entonces  $w$  ocurre en algún punto de  $X = X_{\mathcal{L}^c}$  de modo que  $w \notin \mathcal{L}^c$ , por lo cual  $w \in \mathcal{L}$ . Entonces  $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{L}$ . Ahora supongamos que  $w = x_0 x_1 \cdots x_m \in \mathcal{L}$ . Entonces por la condición 1b podemos encontrar símbolos  $x_j$  con  $j > m$  tales que  $x_j \in \mathcal{L}$ . Dada  $i > 0$ , por la condición 1a todo subbloque de  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  está en  $\mathcal{L}$ . Esto significa que  $x \in X_{\mathcal{L}^c}$ . Como  $w$  ocurre en  $x$ , tenemos que  $w \in \mathcal{B}(X_{\mathcal{L}^c}) = \mathcal{B}(X)$  entonces  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(X)$ . Concluimos que  $\mathcal{L} = \mathcal{B}(X)$ .

3. Si  $x \in X$ , ningún bloque que ocurre en  $x$  está en  $\mathcal{B}(X)^c$  dado que  $\mathcal{B}(X)$  contiene a todos los bloques que ocurren en todos los puntos de  $X$ . Entonces  $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$ , de lo cual  $X \subseteq X_{\mathcal{B}(X)^c}$ . Análogamente, dado que  $X$  es un  $\sigma$ -espacio, hay una colección  $\mathcal{F}$  para la cual  $X = X_{\mathcal{F}}$ . Si  $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c}$  entonces cada bloque en  $x$  debe estar en  $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X_{\mathcal{F}})$  y no puede estar en  $\mathcal{F}$ . Así,  $x \in X_{\mathcal{F}}$  entonces  $X = X_{\mathcal{F}} \supseteq X_{\mathcal{B}(X)^c}$ .



□

Con la proposición anterior tenemos ya una caracterización de los  $\sigma$ -espacios.

**Corolario 1.5.** *Sea  $X$  un subconjunto del  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -espacio completo. Entonces  $X$  es un  $\sigma$ -espacio si y sólo si cuando  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  y cada  $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(X)$ ,  $x \in X$ .*

*Demostración.* La condición de  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  y cada  $x_{[i,j]} \in \mathcal{B}(X)$ , es equivalente a la condición  $X = X_{\mathcal{B}(X)^c}$ . Entonces este corolario se sigue de la Proposición 1.4, 3. □

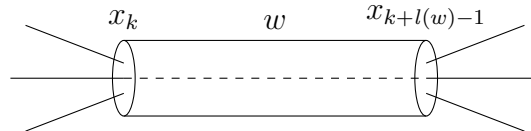
**Definición 1.6.** Decimos que un  $\sigma$ -espacio  $X$  es **irreducible** si para cada par ordenado de bloques  $u, v \in \mathcal{B}(X)$  existe  $w \in \mathcal{B}(X)$  tal que  $uwv \in \mathcal{B}(X)$ .

En cuanto a la topología, se tiene como base a los conjuntos cilindro, los cuales se definen a continuación.

**Definición 1.7.** Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio,  $w$  un bloque de  $X$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Entonces se define el **cilindro**  $\mathcal{C}[w; k]$  como:

$$\mathcal{C}[w; k] = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+l(w)-1}) = w\}.$$

En la siguiente figura se muestra la idea intuitiva de este concepto.



Los conjuntos cilindro generan una topología metrizable, por la métrica de Cantor:

Si  $x, y \in X$  con  $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , entonces

$d(x, y) = 0$  cuando  $x = y$ , y  $d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}}$  cuando  $x \neq y$ , en donde

$$n = \sup\{i \geq 0 \mid x_{-i} \dots x_i = y_{-i} \dots y_i\}.$$

Con esto podemos demostrar la Proposición 1.3, en la que enunciamos que  $X_{\mathcal{F}}$  es un  $\sigma$ -espacio si y sólo si  $X$  es cerrado y  $\sigma$ -invariante.

*Demostración de la Proposición 1.3.* Sea  $x \in \overline{X}_{\mathcal{F}}$ . Para toda  $n$  existe  $x^{(n)} \in X$  tal que  $d(x^{(n)}, x) < \frac{1}{2^n}$ , que por definición ocurre si y sólo si  $n > \sup\{i \geq 0 \mid x_{-i} \dots x_i = x_{-i}^{(n)} \dots x_i^{(n)}\}$ . Un bloque  $w$  es subbloque de  $x$  si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x_{[k, k+l(w)-1]} = w$ . Si  $n > |k| + l(w)$ , entonces  $w$  es también un subbloque de  $x^{(n)}$ . Por lo tanto  $w \notin \mathcal{F}$  y  $x \in X$ . Concluimos que  $X$  es cerrado.

Ahora sea  $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  cerrado,  $\sigma$ -invariante. Sea  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)^c$ .

Supongamos  $x \in X$ . Dado que  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)^c$ , tenemos por definición que cualquier subbloque de  $x$  está en  $\mathcal{B}(X)$ . Por lo tanto  $x \in X_{\mathcal{B}(X)^c} = X_{\mathcal{F}}$ . De esto,  $X \subseteq X_{\mathcal{F}}$ .

Sea  $x \in X_{\mathcal{F}}$ . Para cada  $n \geq 0$ ,  $x_{[-n, n]} \notin \mathcal{F}$ , es decir  $x_{[-n, n]} \in \mathcal{F}^c \Rightarrow x_{[-n, n]} \in \mathcal{B}(X)$ . Como  $X$  es  $\sigma$ -invariante, existe  $x^{(n)} \in \mathcal{C}_{[x_{[-n, n]}, -n]}$ . Por lo tanto  $d(x^{(n)}, x) < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ . Pero dado que  $X$  es cerrado,  $x \in X$ . Concluimos que  $X_{\mathcal{F}} \subseteq X$ . Por lo tanto  $X = X_{\mathcal{F}}$ .  $\square$

Concluimos esta sección con el siguiente teorema fundamental.

**Proposición 1.8.** *Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio. Entonces  $\sigma : X \rightarrow X$  es continua.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$ ,  $\varepsilon > 0$ . Queremos demostrar que existe  $\delta > 0$  tal que si  $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon$ .

Tenemos que  $d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}}$  donde  $n = \sup\{i \geq 0 \mid x_{-i} \dots x_i = y_{-i} \dots y_i\}$ . Sea  $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$ , y  $\delta > \frac{1}{2^{n+1}}$ .

Entonces  $d(x, y) = \frac{1}{2^{n+1}} < \delta$ , y tenemos que  $x_i = y_i$  para todo  $|i| < n + 1$ . De lo cual,  $\sigma(x)_i = \sigma(y)_i$  para toda  $|i| < n$ .

$$\Rightarrow d(\sigma(x), \sigma(y)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $\sigma$  es continua.

$\square$

## 1.2. Códigos de bloques

Supongamos que se tiene una sucesión de símbolos  $x = \dots x_{-1}x_0x_1\dots$  en el  $\sigma$ -espacio  $X$ . Transformaremos la sucesión  $x$  en la sucesión  $y = \dots y_{-1}y_0y_1\dots$  donde  $y$  está en el  $\sigma$ -espacio

$Y$  (no necesariamente con el mismo alfabeto). Sean dos números enteros  $m, a \geq 0$ . Para calcular la  $i$ -ésima coordenada  $y_i$  de la sucesión  $y$ , definimos una función  $\Phi$  que depende de la sucesión  $x$  únicamente en las coordenadas de  $i - m$  hasta  $i + a$ , es decir depende únicamente de  $x_{[i-m, i+a]}$ :

$$\Phi : B_{m+a+1}(X) \longrightarrow B_1(Y) \quad (1.9)$$

o sea que

$$\Phi(x_{i-m}x_{i-m+1} \cdots x_{i+a-1}x_{i+a}) = \Phi(x_{[i-m, i+a]}) = y_i.$$

Llamaremos a  $\Phi$  un **mapeo de bloques**.

*Definición 1.10.* Sean  $X, Y$  dos  $\sigma$ -espacios, y sea  $\Phi : B_{m+a+1}(X) \rightarrow B_1(Y)$  un mapeo de bloques. Entonces el mapeo  $\phi : X \rightarrow Y$  definido por  $\phi(x) = \Phi(x_{-m} \cdots x_a) = y$  es un  $(m + a + 1)$ -**código de bloque**. En este caso, decimos que el código de bloque tiene memoria  $m$  y anticipación  $a$ .

A los códigos de bloque donde  $m = a = 0$  los denominamos **códigos de 1-bloque**. Nota que en este caso la  $i$ -ésima coordenada de la imagen de  $x$  depende sólo de  $x_i$ .

**Proposición 1.11.** Sean  $X, Y$   $\sigma$ -espacios. Si  $\phi : X \rightarrow Y$  es un código de bloques, entonces  $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ ; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma_X} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{\sigma_Y} & Y \end{array}$$

*Demostración.* Sea  $\phi$  inducida por el mapeo de bloques  $\Phi : B_{m+a+1}(X) \rightarrow \mathcal{U}$  con memoria  $m$  y anticipación  $a$ . Para  $x \in X$ ,

$$(\sigma_Y \circ \phi)(x)_{[i]} = \phi(x)_{[i+1]} = \Phi(x_{[i+1-m, i+1+a]})$$

mientras que

$$\begin{aligned} (\phi \circ \sigma_X)(x)_{[i]} &= \phi(\sigma_X(x))_{[i]} \\ &= \Phi(\sigma_X(x)_{[i-m, i+a]}) \\ &= \Phi(x_{[i-m+1, i+a+1]}) \end{aligned}$$

Así, las  $i$ -ésimas coordenadas de las imágenes coinciden para cada  $i$ , y las imágenes son iguales.

□

Sin embargo, el que  $\sigma$  conmute con una función  $\phi : X \rightarrow Y$  no es suficiente para tener un código de bloque. También necesitamos que  $\phi(x)_0$  dependa únicamente del bloque central de  $x$ .

**Proposición 1.12.** Sean  $X, Y$   $\sigma$ -espacios. Un mapeo  $\phi : X \rightarrow Y$  es un código de bloque si y sólo si  $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$  y existe  $N \geq 0$  tal que  $\phi(x)_0$  es función de  $x_{[-N, N]}$ .

*Demostración.* El que la condición es necesaria se sigue de la definición y de la Proposición anterior (1.11). Para demostrar que esta condición es suficiente, definamos el  $(2N + 1)$ -mapeo de bloques  $\phi$  como  $\Phi(w) = \phi(x)_0$  donde  $x$  es cualquier punto en  $X$  tal que  $x_{[-N, N]} = w$ . Entonces se puede ver que  $\phi = \Phi_{\infty}^{[-N, N]}$ .  $\square$

Si un código de bloque  $\phi : X \rightarrow Y$  es sobreyectivo, lo llamaremos **código factor** de  $X$  en  $Y$ . Un  $\sigma$ -espacio  $Y$  es **factor** de  $X$  si existe un código factor de  $X$  en  $Y$ . Si un código de bloque  $\phi : X \rightarrow Y$  es inyectivo, lo denominaremos **encaje** de  $X$  en  $Y$ . Decimos que un código de bloque  $\phi$  es **invertible** si tiene inversa, es decir si existe un código de bloque  $\psi : Y \rightarrow X$  tal que  $\psi(\phi(x)) = x$  para cualquier  $x \in X$  y además  $\phi(\psi(y)) = y$  para toda  $y \in Y$ . En este caso,  $\psi$  será la inversa de  $\phi$ .

*Definición 1.13.* Sean  $X, Y$  dos  $\sigma$ -espacios. Decimos que  $X, Y$  son **conjugados** si existe un código de bloque  $\phi : X \rightarrow Y$  biyectivo con inversa un código de bloque. En este caso,  $\phi$  será una **conjugación**.

Un resultado importante de los códigos de bloque, es que la imagen de un  $\sigma$ -espacio bajo un código de bloque es un  $\sigma$ -espacio. La demostración de este resultado se omite, aunque se puede encontrar en [4]. Ahora, el siguiente teorema es fundamental en la teoría de códigos de bloque, por lo que el resto de esta sección se dedica a su demostración.

**Teorema 1.14. (Curtis-Lyndon-Hedlund)** Sean  $(X, \sigma_X), (Y, \sigma_Y)$   $\sigma$ -espacios,  $\phi : X \rightarrow Y$  una función. Entonces  $\phi$  es un código de bloque si y sólo si es un homomorfismo, es decir si  $\phi$  es continua y  $\phi \circ \sigma_X(x) = \sigma_Y \circ \phi(x)$  dada  $x \in X$ .

Antes de hacer la demostración del teorema, que es de gran importancia, un par de observaciones que requeriremos.

- Observación 1.15.*
1. Sean  $M, N$  espacios métricos, y  $M$  compacto. Sea  $\theta : M \rightarrow N$  continua. Si  $E$  es un subconjunto compacto de  $N$ , entonces  $\theta^{-1}(E)$  es compacto.
  2. Sean  $E, F$  subconjuntos compactos y ajenos en un espacio métrico  $M$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $\rho(x, y) \geq \delta$  para toda  $x \in E$ , para toda  $y \in F$ .

*Demostración.* 1.  $E$  es subconjunto compacto de  $N$  entonces  $E$  es subconjunto cerrado de  $N$ . Esto porque si  $E$  compacto y  $N$  espacio métrico, entonces para toda  $y \in E^c$  (donde  $E^c$  denota el complemento de  $E$ ) existe una vecindad  $U$  ajena a  $E$ .

Nota que dado  $M$  espacio métrico (en particular un espacio de Hausdorff), y  $x \in E$ ,  $y \in E^c$  entonces para toda  $x \in E$  existen conjuntos abiertos ajenos  $U_x, V_x$  tales que  $x \in U_x$ ,  $y \in V_x$ . Así  $\{U_x\}_{x \in E}$  es una cubierta abierta para  $E$ , y dado que  $E$  es compacto existe  $E_0 \subset E$  tal que  $\{U_x\}_{x \in E_0}$  es una subcubierta finita para  $E$ . Sea  $U = \bigcup_{x \in E_0} U_x$ ,  $V = \bigcap_{x \in E_0} V_x$ . Ahora, es claro que  $U$  y  $V$  son abiertos, y  $E \subset U$ ,  $y \in V$ . Además  $U$  y  $V$  son ajenos: suponga que  $z \in U$ , entonces  $z \in U_x$  para alguna  $x \in E_0$ , pero como  $U_x$  y  $V_x$  son ajenos  $z$  no puede estar en  $V_x$  y consecuentemente no puede estar en  $V$ .

Entonces para toda  $y \in E^c$  existe una vecindad  $U$  ajena a  $E$ , por lo cual  $E^c = \bigcup_{y \in E^c} U_y$ .

Pero la unión arbitraria de abiertos es abierta, entonces  $E^c$  es abierto, por lo cual  $E$  es cerrado.

Dado que  $\theta$  es continua,  $\theta^{-1}(E)$  es cerrado en  $M$ .

$M$  es compacto entonces  $\theta^{-1}(E)$  es compacto por lo siguiente.

Sea  $\Lambda = \{A \subseteq M \mid A \text{ es abierto}\}$  una cubierta abierta de  $\theta^{-1}(E)$  (de forma que  $\theta^{-1}(E) \subseteq \bigcup_{A \in \Lambda} A$ ). Ahora, sea  $\Lambda' = \Lambda \cup \theta^{-1}(E)^c$  entonces  $\exists A_1, \dots, A_n \in \Lambda'$  tal que  $\bigcup_{i=1}^n A_i = M \supseteq \theta^{-1}(E)$ . Si  $A_i \in \Lambda$ , para toda  $i = 1, \dots, n$ , entonces ya acabamos. Si  $A_i = \theta^{-1}(E)^c$  entonces  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n$  es una subcubierta finita de  $\theta^{-1}(E)$  entonces  $\theta^{-1}(E)$  es compacto en  $M$ .

2. Supongamos que es falso i.e. para toda  $\delta > 0$ ,  $\rho(x, y) < \delta$  para  $x \in E$ ,  $y \in F$  dados  $E, F$  ajenos.

Sea  $\delta = \frac{1}{n}$  y sean  $x_n \in E$  y  $y_n \in F$  tales que  $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ . Como  $E$  es compacto, existe una subsucesión  $x_{n_k}$  que converge a  $x \in E$ .

Entonces por desigualdad del triángulo,  $\rho(y_{n_k}, x) \leq \rho(y_{n_k}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x)$ .

Cuando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\rho(y_{n_k}, x_{n_k}) \rightarrow \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$  y  $\rho(x_{n_k}, x) \rightarrow 0$ .

Entonces  $y_{n_k} \rightarrow x$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Pero  $y_{n_k} \in F$ . Además  $F$  es compacto y está en un espacio métrico, por lo tanto es cerrado, lo que implica  $x \in F$ , una contradicción.

Entonces  $\exists \delta > 0$  tal que  $\rho(x, y) \geq \delta \quad \forall x \in E, \forall y \in F$ .

□

Ahora sí, procedemos a la demostración del Teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund.

*Demostración.* (Curtis-Lyndon-Hedlund)

Primero, sea  $\phi = \Phi_{\infty}^{[-m,a]}$  un código de bloque. Si dos puntos en  $X$  son cercanos, entonces coinciden en un bloque central largo. Pero entonces, sus imágenes bajo  $\phi$  también coinciden en un bloque central muy largo. Concluimos que  $\phi$  es continuo, además de que conmuta con  $\sigma$ .

Ahora, sea  $\phi$  un homomorfismo. Sea  $\mathcal{A}$  el alfabeto de  $X$ ,  $\mathcal{U}$  el alfabeto de  $Y$ . Para cada  $b \in \mathcal{U}$ , sea  $C_0(b)$  el conjunto cilindro  $\{y \in Y \mid y_0 = b\}$ . Los conjuntos  $C_0(b)$  para  $b \in \mathcal{U}$  son ajenos y compactos; entonces por la observación 1 sus imágenes inversas  $E_b = \phi^{-1}(C_0(b))$  son también ajenas y compactas en  $X$ . Por la observación 2,  $\exists \delta > 0$  tal que los puntos en conjuntos  $E_b$  distintos tienen al menos una separación  $\delta$ . Escogemos  $n$  tal que  $2^{-n} < \delta$ . Entonces cualquier par de puntos  $x, x' \in X$  tales que  $x_{[-n,n]} = x'_{[-n,n]}$  deben estar en el mismo conjunto  $E_b$ , y entonces  $\phi(x)_0 = b = \phi(x')_0$ . Así, la 0-ésima coordenada de  $\phi(x)$  depende sólo del  $(2n + 1)$ -bloque central de  $x$ , de lo cual por la Proposición 1.12  $\phi$  es un código de bloques.

□

### 1.3. Presentación de $N$ -bloques

Plantaremos una construcción básica en dinámica simbólica, que consiste en enfocarnos en bloques de símbolos, y considerar a dichos bloques como letras de un alfabeto más complejo. Este proceso nos permite dar una descripción alterna de un mismo  $\sigma$ -espacio, y es una herramienta esencial para pensar en  $\sigma$ -espacios como gráficas, lo cual se verá más adelante.

Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_X^{[N]} = \mathcal{B}_N(X)$  la colección de  $N$ -bloques permitidos en  $X$ . Consideramos a  $\mathcal{A}_X^{[N]}$  como un alfabeto. Definimos entonces la **presentación en  $N$ -bloques**  $b_N : X \rightarrow (\mathcal{A}_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}$  como:

$$(b_N(x))_{[i]} = x_{[i, i+N-1]}.$$

Entonces  $b_N$  reemplaza la  $i$ -ésima coordenada de  $x$  con el bloque de coordenadas en  $x$  de longitud  $N$  empezando en la posición  $i$ . Por ejemplo:

$$b_4(x) = \dots \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \\ x_{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \dots \in (\mathcal{A}_X^{[N]})^{\mathbb{Z}}.$$

**Definición 1.16.** Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio. Entonces la **presentación en  $N$ -bloques** de  $X$  es la imagen  $X^{[N]} = b_N(X)$ .

De hecho, esta presentación es un  $\sigma$ -espacio. Esto lo vemos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.17.** Las presentaciones en  $N$ -bloques de un  $\sigma$ -espacio son también  $\sigma$ -espacios.

*Demostración.* Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio sobre el alfabeto  $\mathcal{A}$  y  $N \geq 1$ . Entonces existe una colección  $\mathcal{F}$  de bloques sobre  $\mathcal{A}$  tal que  $X = X_{\mathcal{F}}$ . Creamos una colección  $\tilde{\mathcal{F}}$  reemplazando cada bloque  $u$  en  $\mathcal{F}$  tal que  $|u| < N$ , con todos los  $N$ -bloques sobre  $\mathcal{F}$  que contengan a  $u$ . Entonces claramente  $X = X_{\tilde{\mathcal{F}}}$ , y cada bloque en  $\tilde{\mathcal{F}}$  tiene longitud mayor o igual que  $N$ .

Para cada  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \tilde{\mathcal{F}}$ , sea

$$w^{[N]} = (a_1 a_2 \dots a_N) (a_2 a_3 \dots a_{N+1}) \dots (a_{n-N+1} a_{n-N+2} \dots a_n)$$

los  $(n - N + 1)$ -bloques correspondientes sobre  $\mathcal{A}_X^{[N]}$ . Sea  $\mathcal{F}_1$  el conjunto de todos los bloques sobre el alfabeto  $\mathcal{A}_X^{[N]}$  con la forma  $w^{[N]}$  para alguna  $w \in \tilde{\mathcal{F}}$ . Esto representa un conjunto de restricciones en  $X^{[N]}$ , específicamente aquellas que vienen de las restricciones del  $\sigma$ -espacio original. Se sigue que  $X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_1}$ .

Sea

$$\mathcal{F}_2 = \{uv \mid u \in \mathcal{A}_X^{[N]}, v \in \mathcal{A}_X^{[N]}, \text{ y } u, v \text{ no se traslapan progresivamente}\}.$$

Entonces  $X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_2}$  de lo cual  $X^{[N]} \subseteq X_{\mathcal{F}_1} \cap X_{\mathcal{F}_2} = X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ .

Ahora supongamos que  $y \in X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ , y sea  $x$  el punto de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  reconstruido de los bloques “inferiores” de la Definición 1.16. Entonces  $x \in X = X_{\mathcal{F}}$  pues  $y$  satisface las condiciones de  $\mathcal{F}_1$  y  $y = b_N(x)$  por las restricciones de traslapeo de  $\mathcal{F}_2$ . Esto demuestra que  $X^{[N]} \supseteq X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$ , de lo cual  $X^{[N]} = X_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2}$  es un  $\sigma$ -espacio.

□

La noción de presentación de  $N$ -bloques nos será útil más adelante, cuando interpretemos gráficas como  $\sigma$ -espacios de tipo finito, los cuales veremos a continuación.

## 1.4. $\sigma$ -espacios de tipo finito

Nos enfocaremos en los  $\sigma$ -espacios de tipo finito, los cuales se pueden representar con una gráfica finita. De allí su importancia, pues muchas preguntas acerca del  $\sigma$ -espacio podrán ser replanteadas como preguntas acerca de la matriz de adyacencia de la gráfica. Es por esto que aún cuando son  $\sigma$ -espacios un tanto “simples”, juegan un papel importante.

*Definición 1.18.* Un  **$\sigma$ -espacio de tipo finito** es un  $\sigma$ -espacio que puede ser definido por un conjunto finito de bloques prohibidos. Es decir, un  $\sigma$ -espacio  $X$  con la forma  $X_{\mathcal{F}}$  para algún conjunto finito  $\mathcal{F}$  de bloques.

Nota que un  $\sigma$ -espacio de tipo finito puede ser descrito también por un conjunto no finito de bloques prohibidos, pues nos basta con que exista un conjunto finito de bloques prohibidos que lo represente.

Diremos que un  $\sigma$ -espacio de tipo finito tiene **memoria**  $M$  si puede ser descrito por una colección de bloques prohibidos donde todos los bloques tengan longitud  $M + 1$ . Se puede observar que un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria  $M$  es también de memoria  $K$  para cualquier  $K \geq M$ .

**Proposición 1.19.** Si  $X$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito, entonces existe  $M \geq 0$  tal que  $X$  tiene memoria  $M$ .

*Demostración.* Dado que  $X$  es  $\sigma$ -espacio de tipo finito,  $X = X_{\mathcal{F}}$  para un conjunto finito  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F} = \emptyset$  entonces  $M = 0$ . Si  $\mathcal{F}$  es no vacío, sea  $M$  la longitud del bloque más largo en  $\mathcal{F}$  menos 1.

Consideramos a  $\mathcal{F}_{M+1}$  como el conjunto que contiene a la colección de todos los subbloques de longitud  $M$  que contienen algún bloque en  $\mathcal{F}$ , para así poder incluir en  $\mathcal{F}_{M+1}$  los bloques de longitud menor a  $M$  que están en  $\mathcal{F}$ .

Entonces se puede ver que  $X$  está descrito por  $\mathcal{F}_{M+1}$ , y es de memoria  $M$ . □

**Teorema 1.20.** Un  $\sigma$ -espacio es de tipo finito con memoria  $M$  si y sólo si dados  $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$  con  $|v| \geq M$  entonces  $uvw \in \mathcal{B}(X)$ .

*Demostración.* Primero supongamos que  $X$  es un  $\sigma$ -espacio con memoria  $M$ , de tal manera que  $X = X_{\mathcal{F}}$  para una lista finita  $\mathcal{F}$  que consiste de  $(M + 1)$ -bloques. Suponga que  $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$ , donde  $|v| = n \geq M$ . Entonces existen puntos  $x, y \in X$  tales que  $x_{[-k, n]} = uv$  y  $y_{[1, l]} = vw$ , de



modo tal que  $x_{[1,n]} = y_{[1,n]} = v$ . Afirmamos que el punto  $z = x_{(-\infty,0]} v y_{[n+1,\infty)}$  está en  $X$ . Esto porque si una palabra de  $\mathcal{F}$  ocurre en  $z$ , entonces debe ocurrir ya sea en  $x_{(-\infty,0]} v = x_{(-\infty,n]}$  ó en  $v y_{[n+1,\infty)} = y_{[1,\infty)}$  dado que  $|v| = n \geq M$ , contradiciendo que  $x \in X$  ó  $y \in X$ . Entonces

$$uvw = x_{[-k,0]} v y_{[n+1,l]} = z_{[-k,l]} \in \mathcal{B}(X).$$

Ahora supongamos que  $X$  es un  $\sigma$ -espacio sobre  $\mathcal{A}$ , y que  $M$  tiene la propiedad de que si  $uv, vw \in \mathcal{B}(X)$  con  $|v| \geq M$ , entonces  $uvw \in \mathcal{B}(X)$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de todos los  $(M+1)$ -bloques sobre  $\mathcal{A}$  que no están en  $\mathcal{B}_{M+1}(X)$ . Demostraremos que  $X = X_{\mathcal{F}}$ , verificando que  $X$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria  $M$ .

Si  $x \in X$ , entonces ningún bloque en  $\mathcal{F}$  puede ocurrir en  $x$ , y entonces  $x \in X_{\mathcal{F}}$ . Esto demuestra que  $X \subseteq X_{\mathcal{F}}$ . Ahora sea  $x \in X_{\mathcal{F}}$ . Entonces  $x_{[0,M]}$  y  $x_{[1,M+1]}$  están en  $\mathcal{B}(X)$  por nuestra definición de  $\mathcal{F}$ . Dado que se sobreponen en  $M$  símbolos,  $x_{[0,M+1]}$  también está en  $\mathcal{B}(X)$  ( $u = x_{[0]}$ ,  $v = x_{[1,m]}$ ,  $w = x_{[m+1]}$ ). Ahora  $x_{[2,M+2]}$  está en  $\mathcal{B}(X)$  y se sobrepone en  $M$  símbolos con  $x_{[0,M+1]}$ . Entonces  $x_{[0,M+2]} \in \mathcal{B}(X)$ . Aplicando este argumento varias veces en cada dirección demuestra que  $x_{[-k,l]} \in \mathcal{B}(X) \forall k, l \geq 0$ . Por el Corolario 1.5 esto implica que  $x \in X$ , demostrando que  $X_{\mathcal{F}} \subseteq X$ .

□

Cabe mencionar que hay casos en los que un factor de un  $\sigma$ -espacio de tipo finito no tiene tipo finito, o que la imagen inversa de un  $\sigma$ -espacio de tipo finito no es de tipo finito. Éste no es el caso cuando los espacios son conjugados.

**Teorema 1.21.** *Sean  $X, Y$  dos  $\sigma$ -espacios conjugados. Si  $Y$  es de tipo finito entonces  $X$  es de tipo finito.*

Se omite la demostración de este teorema, pero se puede consultar en [4].

## 1.5. Puntos doblemente transitivos

En esta sección vamos a discutir brevemente los puntos doblemente transitivos. Su importancia radica en que el conjunto de puntos doblemente transitivos es un conjunto de medida 1 para cualquier medida de Markov ergódica (es decir, forman un conjunto “gordo”), como veremos más adelante.

*Definición 1.22.* Un punto  $x$  en un  $\sigma$ -espacio  $X$  es **doblemente transitivo** si cada bloque en  $X$  ocurre una infinidad de veces en  $x$  tanto a la derecha como a la izquierda. Concretamente,  $x$  es doblemente transitivo si siempre que  $\omega \in \mathcal{B}(X)$ , el conjunto

$$\{i \in \mathbb{Z} \mid x_i, \dots, x_{i+\ell(\omega)-1} = \omega\}$$

no está acotado ni por arriba ni por abajo.

Nota que si  $X$  tiene un punto doblemente transitivo, entonces  $X$  debe ser irreducible.

Por otro lado, si  $X$  es irreducible entonces podemos construir un punto doblemente transitivo de la siguiente manera:

- Escribimos todos los bloques de  $X$  en algún orden. Sea dicho orden  $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$
- Fijamos  $w^{(1)}$  como un bloque de longitud impar que contiene a  $u^{(1)}$ .
- Asumiendo que  $w^{(n-1)}$  ha sido definido, usamos la irreducibilidad de  $X$  varias veces para encontrar bloques  $s, t$  tales que:
  1. Ambos,  $s$  y  $t$  contengan a cada uno de  $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ .
  2.  $s, t$  sean de la misma longitud.
  3.  $sw^{(n-1)}$  sea un bloque en  $X$ .
- Fijamos  $w^{(n)} = sw^{(n-1)}t$ . Nota entonces que  $|w^{(n)}|$  es impar.
- Sea  $x^{(n)}$  cualquier punto en  $X$  que contenga a  $w^{(n)}$  como bloque central (y como consecuencia tenga a  $w^{(k)}$  como bloque central para  $k \leq n$ ).

Entonces la sucesión  $\{x^{(n)}\}$  converge a un punto  $x \in X$  que contiene a cada bloque  $w^{(n)}$  y de allí,  $x$  es doblemente transitivo.

Por lo tanto, el conjunto de puntos doblemente transitivos de un  $\sigma$ -espacio  $X$  es no vacío si y sólo si  $X$  es irreducible.

El concepto de irreducibilidad nos es de gran importancia en este trabajo; en las siguientes secciones se verá porqué.

## 1.6. Gráficas

A continuación introducimos la noción de gráficas, la construcción de una gráfica finita a partir de  $\sigma$ -espacios de tipo finito; el uso de la matriz de adyacencia de la gráfica para trabajar sobre el  $\sigma$ -espacio, y algunas otras ideas que nos ayudarán a relacionar el concepto de gráficas con el de  $\sigma$ -espacios de tipo finito.

*Definición 1.23.* Una **gráfica**  $G$  consiste de un conjunto finito  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(G)$  de **vértices**, un conjunto finito  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(G)$  de **aristas** y de dos funciones  $(i, t)$  que van de  $\mathcal{V}$  en  $\mathcal{E}$ . Diremos que cada arista  $e \in \mathcal{E}$  **empieza** en el vértice  $i(e)$  y **termina** en el vértice  $t(e)$ .

*Definición 1.24.* Sea  $G$  una gráfica. Una sucesión finita de aristas  $\gamma = e_1 e_2 \cdots e_n$ , donde  $e_i \in \mathcal{E}(G)$  y  $i(e_{i+1}) = t(e_i)$ , es una **trayectoria**. Definimos la longitud  $l(\gamma)$  como el número  $n$  de aristas que atraviesa la trayectoria  $\gamma$ .

*Definición 1.25.* Sea  $G$  una gráfica. si  $|\{e \in \mathcal{E}(G) \mid i(e) = u, t(e) = v\}| \leq 1$  para toda  $u, v \in \mathcal{V}(G)$ , entonces decimos que  $G$  es **simple**.

*Definición 1.26.* Sea  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  una gráfica. Dado  $I \in \mathcal{V}$ :

$$\mathcal{E}_I = \{e \in \mathcal{E} \mid i(e) = I\}, \quad \mathcal{E}^I = \{e \in \mathcal{E} \mid t(e) = I\}.$$

A  $|\mathcal{E}_I|$  lo llamaremos **ex-grado** de  $I$ , mientras que a  $|\mathcal{E}^I|$  lo llamaremos **in-grado** de  $I$ . Sean  $I, J \in \mathcal{V}$ . Entonces:

$$\mathcal{E}_I^J = \mathcal{E}_I \cap \mathcal{E}^J = \{e \in \mathcal{E} \mid i(e) = I, t(e) = J\}.$$

Sea  $G$  una gráfica. Siempre que esté claro en el contexto, escribiremos  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{E}$  en lugar de  $\mathcal{V}(G)$  y  $\mathcal{E}(G)$ .

Algo que es importante notar aquí, es que existen formas de mapear gráficas en otras gráficas de modo que se conserven los estados iniciales y terminales.

*Definición 1.27.* Sean  $G, H$  dos gráficas. Un **homomorfismo** consiste de un par  $(\delta\Phi, \Phi)$  donde

$$\begin{aligned} \delta\Phi : \mathcal{V}(G) &\rightarrow \mathcal{V}(H) & \Phi : \mathcal{E}(G) &\rightarrow \mathcal{E}(H) \\ \text{tal que } \forall e \in \mathcal{E} & \delta\Phi(i(e)) = i(\Phi(e)), & \delta\Phi(t(e)) &= t(\Phi(e)). \end{aligned}$$

Si  $\delta\Phi$  y  $\Phi$  son inyectivos y sobreyectivos, entonces definen un **isomorfismo de gráficas** en cuyo caso decimos que  $G$  y  $H$  son isomorfas en gráficas.

Ahora, nos interesan las matrices de adyacencia de una gráfica  $G$ . La matriz de adyacencia es un método para representar la adyacencia entre los vértices de la gráfica.

*Definición 1.28.* Sea  $G$  una gráfica con conjunto de vértices  $V$ . Para  $I, J \in V$  sea  $A_{IJ}$  el número de aristas en  $G$  con estado inicial  $I$  y estado terminal  $J$ . Entonces la **matriz de adyacencia** de  $G$  es  $A = [A_{IJ}]$  y si está construida a partir de  $G$  se denota  $A = A(G)$ .

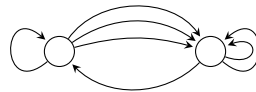
Según esta definición, la información en  $A(G)$  nos es suficiente para reconstruir  $G$ , al menos sujeto a isomorfismos de gráficas.

*Definición 1.29.* Sea  $A = [A_{IJ}]$  una matriz de  $r \times r$  con entradas enteras no negativas. Entonces **la gráfica de  $A$**  es la gráfica  $G = G(A)$  con conjunto de vértices  $V(G) = \{1, 2, \dots, r\}$  con  $A_{[IJ]}$  aristas distintas tales que su estado inicial es  $I$  y su estado terminal es  $J$ .

*Ejemplo 1.30.* Sea  $A$  la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces  $G$  sería:



El siguiente paso es ver cómo una gráfica  $G$  con matriz de adyacencia  $A$  nos describe un  $\sigma$ -espacio de tipo finito.

*Definición 1.31.* Sea  $G$  una gráfica con conjunto de aristas  $\mathcal{E}$  y matriz de adyacencia  $A$ . Llamaremos  **$\sigma$ -espacio de aristas** al  $\sigma$ -espacio con alfabeto  $\mathcal{A} = \mathcal{E}$  dado por:

$$X_G = X_A = \{\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}} \mid t(\xi_i) = i(\xi_{i+1}) \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

La función corrimiento en  $X_G = X_A$  es llamada **corrimiento de aristas** y se denota  $\sigma_G = \sigma_A$ .

Se puede observar que cuando  $G, H$  son isomorfos como gráficas,  $X_G$  y  $X_H$  son conjugados.

*Observación 1.32.* Si  $G$  es una gráfica con matriz de adyacencia  $A$ , entonces el  $\sigma$ -espacio de aristas asociado  $X_G = X_A$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria 1.

Para esto, sea  $\mathcal{A} = \mathcal{E}$  el alfabeto y sea  $\mathcal{F} = \{ef \mid e, f \in \mathcal{A}, t(e) \neq i(f)\}$ . Observa que de acuerdo a la Definición 1.31,  $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  ocurre cuando ningún punto de  $\mathcal{F}$  ocurre en  $\xi$ , de lo cual tenemos que  $X_G = X_{\mathcal{F}}$ . Entonces los  $\sigma$ -espacios de aristas son  $\sigma$ -espacios de tipo finito con memoria 1.

*Definición 1.33.* Una **trayectoria**  $\pi = e_1e_2 \dots e_m$  en una gráfica  $G$  es una secuencia finita de aristas  $e_i$  en  $G$  tal que  $t(e_i) = i(e_{i+1})$  para  $1 \leq i \leq m-1$ . La longitud de  $\pi = e_1e_2 \dots e_m$  es  $|\pi| = m$ , el número de vértices que atraviesa. Un **ciclo** es una trayectoria que empieza y termina en el mismo vértice. Un **ciclo simple** es un ciclo que no se auto-intersecta, i.e. un ciclo  $\pi = e_1e_2 \dots e_m$  tal que los estados  $i(e_1), i(e_2), \dots, i(e_m)$  son distintos.

**Proposición 1.34.** Sea  $G$  una gráfica con matriz de adyacencia  $A$ , y sea  $m \geq 0$ .

1. El número de trayectorias de longitud  $m$  de  $I$  a  $J$  es  $(A^m)_{IJ}$ , la  $(I, J)$ -ésima entrada de  $A^m$ .
2. El número de ciclos de longitud  $m$  en  $G$  es igual al número de puntos en  $X_G$  con periodo  $m$ .

*Demostración.* 1. Para  $m = 0$  las únicas trayectorias de longitud 0 son las trayectorias vacías. Si  $m \geq 1$ , entonces contar las trayectorias de longitud  $m$  de  $I$  a  $J$  sumando todas las posibles secuencias de los  $m-1$  vértices que intervienen, nos da la  $(I, J)$ -ésima entrada de  $A^m$ .

2. Notemos que si  $\pi$  es un ciclo en  $G$  de longitud  $m$ , entonces  $\pi^\infty$  es un punto de periodo  $m$  en  $X_G$ , mientras que si  $x \in X_G$  tiene periodo  $m$ , entonces  $x_{[0, m-1]}$  debe ser un ciclo en  $G$  de longitud  $m$ . Esto nos da una correspondencia uno a uno entre los ciclos en  $G$  de longitud  $m$  y los puntos en  $X_G$  de periodo  $m$ .

□

Ahora, veremos como cualquier  $\sigma$ -espacio de tipo finito puede ser recodificado, usando una presentación en  $N$ -bloques, para que sea un  $\sigma$ -espacio por aristas.

**Teorema 1.35.** Si  $X$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria  $M$ , entonces existe una gráfica  $G$  tal que  $X^{[M+1]} = X_G$ .

*Demostración.* Primero observa que si  $M = 0$ , entonces  $X$  es un  $\sigma$ -espacio completo, y podemos tomar  $G$  con un vértice y un arista para cada símbolo que aparece en  $X$ . Entonces podemos asumir

que  $M \geq 1$ . Definimos el conjunto de vértices de  $G$  como  $V = \mathcal{B}_M(X)$ , el conjunto de bloques permitidos en  $X$ . Definimos el conjunto de aristas  $\mathcal{E}$  como se indica a continuación: supongamos que  $I = a_1a_2 \dots a_M$  y  $J = b_1b_2 \dots b_M$  son dos vértices en  $G$ . Si  $a_2a_3 \dots a_M = b_1b_2 \dots b_{M-1}$ , y si  $a_1 \dots a_M b_M (= a_1b_1 \dots b_M)$  está en  $\mathcal{B}(X)$ , entonces dibujamos exactamente un arista en  $G$  de  $I$  a  $J$ , y la nombramos  $a_1a_2 \dots a_M b_M = a_1b_1b_2 \dots b_M$ . De otro modo, no existe un arista de  $I$  a  $J$ .

De esta construcción, es claro que la trayectoria bi-infinita en  $G$  es exactamente una sucesión de  $(M+1)$ - bloques en  $\mathcal{B}_{M+1}(X)$  que se traslapan progresivamente. Entonces  $X_G = X^{[M+1]}$ .  $\square$

Para codificar, muchas veces requerimos agrupar varios símbolos. Para hacer esto, tenemos ya un método, que son las presentaciones en  $N$ -bloques (1.16). Lo siguiente es una construcción análoga para gráficas.

**Definición 1.36.** Sea  $G$  una gráfica. Para  $N \geq 2$  definimos la  **$N$ -potencia de la gráfica por aristas**  $G^{[N]}$  de  $G$  de modo tal que su conjunto de vértices sea igual a la colección de todas las trayectorias de longitud  $N-1$  en  $G$ , y que el conjunto de aristas contenga exactamente un arista de  $e_1e_2 \dots e_{N-1}$  a  $f_1f_2 \dots f_{N-1}$  siempre que  $e_2e_3 \dots e_{N-1} = f_1f_2 \dots f_{N-2}$ . Esta arista se le llama  $e_1e_2 \dots e_{N-1}f_{N-1} = e_1f_1f_2 \dots f_{N-1}$ . Para  $N = 1$  escribimos  $G^{[1]} = G$ .

La relación que hay entre el  $\sigma$ -espacio de aristas en la  $N$ -potencia de la gráfica por aristas de  $G$  y la  $N$ -presentación en bloques de  $X_G$  se describe en la siguiente proposición.

**Proposición 1.37.** Sea  $G$  una gráfica. Entonces  $(X_G)^{[N]} = X_{G^{[N]}}$ .

*Demostración.* Los símbolos para  $(X_G)^{[N]}$  son los  $N$ -bloques de  $X_G$ , que son trayectorias de longitud  $N$  en  $G$ . Pero también son los símbolos para  $X_{G^{[N]}}$ . Una sucesión bi-infinita de estos símbolos está en cualquiera de estos  $\sigma$ -espacios precisamente cuando los símbolos (o  $N$ -bloques) se traslapan progresivamente.  $\square$

A continuación proponemos una forma alternativa de construir un  $\sigma$ -espacio en base a la gráfica, que en este caso es una matriz que se compone sólo de 1s y 0s.

**Definición 1.38.** Sea  $B$  una matriz de  $r \times r$  de 0s y 1s, o dicho de otra manera, la matriz de adyacencia de una gráfica  $G$  tal que entre cualesquiera dos vértices hay a lo más una arista. El  **$\sigma$ -espacio de vértices**  $\widehat{X}_B = \widehat{X}_G$  es el  $\sigma$ -espacio con alfabeto  $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, r\}$  definido por:

$$\widehat{X}_B = \widehat{X}_G = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid B_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para toda } i \in \mathbb{Z}\}$$

donde  $B_{x_i x_{i+1}}$  es la entrada de la matriz  $B$  correspondiente a la arista  $x_i x_{i+1}$ .

El **corrimento de vértices** es el mapeo en  $\widehat{X}_B = \widehat{X}_G$  y se denota  $\widehat{\sigma}_B$  ó  $\widehat{\sigma}_G$ .

Tenemos establecido que los  $\sigma$ -espacios por aristas son  $\sigma$ -espacios de tipo finito con memoria 1 (1.32). Los  $\sigma$ -espacios por vértices también son  $\sigma$ -espacios de tipo finito con memoria 1:  $\widehat{X}_B$  es el  $\sigma$ -espacio definido por la lista  $\mathcal{F} = \{ij | B_{ij} = 0\}$  de bloques prohibidos.

**Proposición 1.39.** *1. Los  $\sigma$ -espacios de tipo finito son iguales a los  $\sigma$ -espacios por vértices, sujeto a un renombramiento de símbolos.*

*2. Todo  $\sigma$ -espacio por aristas es un  $\sigma$ -espacio por vértices, sujeto a un renombramiento de símbolos y en gráficas distintas.*

*3. Si  $X$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria  $M$ , entonces  $X^{[M]}$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria 1, equivalente a un  $\sigma$ -espacio por vértices. De hecho, existe una gráfica  $G$  tal que  $X^{[M]} = \widehat{\sigma}_G$  y  $X^{[M+1]} = X_G$ .*

*Demostración.* Ya hemos visto que cada  $\sigma$ -espacio por vértices es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria 1. También todo  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria 1 es, sujeto a un renombramiento de símbolos, un  $\sigma$ -espacio por vértices. Esto porque si  $X = X_F$  donde  $F$  consiste de 2-bloques, entonces  $X$  puede ser considerado como el  $\sigma$ -espacio por vértices  $\widehat{X}_B$ , donde  $B$  es la 0-1 matriz indexada por el alfabeto de  $X$  y  $B_{ij} = 0$  si y sólo si  $ij \in F$ . Esto nos demuestra que los  $\sigma$ -espacios de tipo finito son iguales a los  $\sigma$ -espacios por vértices.

Para demostrar que todo  $\sigma$ -espacio por aristas es un  $\sigma$ -espacio por vértices, usamos el primer inciso de esta misma proposición, junto con la observación 1.32, que nos indica que dada la gráfica  $G$  con matriz de adyacencia  $A$ , entonces el  $\sigma$ -espacio por aristas  $X_G = X_A$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito.

Para ver que dado  $X$  un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria  $M$ , entonces  $X^{[M]}$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria 1, usamos el hecho de que cualquier  $(M+1)$ -bloque en  $X$  puede ser considerado como un 2-bloque en  $X^{[M]}$ . Para ver que existe una gráfica  $G$  tal que  $X^{[M]} = \widehat{\sigma}_G$  y  $X^{[M+1]} = X_G$ , es suficiente hacer la misma construcción usada en la demostración del Teorema 1.35.

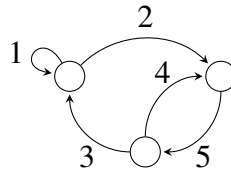
□

Afirmamos que todo  $\sigma$ -espacio por aristas puede ser considerado como un  $\sigma$ -espacio de vértices. Para ver cómo se da esta equivalencia, empezamos con un  $\sigma$ -espacio de aristas  $X_A$  con matriz

de adyacencia  $A$ , y sea  $\mathcal{E}$  el conjunto de aristas de la gráfica. El número de elementos en  $\mathcal{E}$  es  $\sum_{I,J} A_{IJ}$ . Formamos la matriz  $B$  indexada por  $\mathcal{E}$  definida de la siguiente manera:

$$B_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{si } t(e) = i(f) \\ 0 & \text{si } t(e) \neq i(f) \end{cases}$$

*Ejemplo 1.40.* Sea la siguiente gráfica, con sus aristas indexados como se muestra.



Entonces el  $\sigma$ -espacio de vértices que le corresponde es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que una gráfica es **fuertemente conexa** si dados cualquier par de vértices  $i, j$  existe una trayectoria de  $i$  a  $j$ . Esta condición es equivalente a que el  $\sigma$ -espacio  $X_G$  sea irreducible. Más aún, esto es equivalente a que la matriz de adyacencia  $A_G$  sea irreducible. Una matriz  $A$  es **irreducible** si dados un par de índices  $(i, j)$ , existe  $N = N(i, j)$  tal que  $A_{ij}^N \neq 0$ . Equivalentemente  $A$  es irreducible si no existe una permutación de sus renglones y columnas que resulte en una forma triangular, como se muestra a continuación (en donde sí hay una forma triangular):

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

donde  $P$  es una matriz de permutación de  $n \times n$  (es decir, cada renglón y cada columna tienen exactamente una entrada 1 y las demás 0),  $A_{11}$  es de  $r \times r$  y  $A_{22}$  es de  $(n - r) \times (n - r)$ .



## 1.7. Conceptos de medida

En esta sección recordamos brevemente algunos conceptos necesarios para que más adelante podamos definir las medidas de Markov en los  $\sigma$ -espacios.

*Definición 1.41.* Sea  $X$  un conjunto,  $\mathcal{A}$  una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty]$  es **finitamente aditiva** si cumple:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Para toda colección  $A_i$  de conjuntos ajenos en  $\mathcal{A}$ ;

$$\text{si } A := \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A} \quad \text{entonces} \quad \mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Si además  $A_i \in \mathcal{A}$  conjuntos ajenos con  $n = 1, 2, \dots$  y  $B := \bigcup_{i \geq 1} (A_i) \in \mathcal{A}$  tenemos que  $\mu(B) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$ , entonces  $\mu$  es **numerablemente aditiva**.

*Definición 1.42.* Dado un conjunto  $X$ , una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  es una **semiálgebra** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
2.  $(A \cup B) \in \mathcal{A}$  para toda  $A, B \in \mathcal{A}$ .
3.  $B \setminus A \in \mathcal{A}$  para toda  $A, B \in \mathcal{A}$ .

*Definición 1.43.* Dado un conjunto  $X$ , una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  es un **álgebra** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$ .
2.  $(A \cup B) \in \mathcal{A}$  para toda  $A, B \in \mathcal{A}$ .
3. Si  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ .

*Definición 1.44.* Dado un conjunto  $X$  y un álgebra  $\mathcal{A}$ , decimos que  $\mathcal{A}$  es una  **$\sigma$ -álgebra** si para cualquier secuencia  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  de conjuntos en  $\mathcal{A}$ ,

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}.$$

En este caso nos referiremos a  $(X, \mathcal{A})$  como un **espacio medible**.

Es sencillo demostrar que la intersección de dos  $\sigma$ -álgebras es una  $\sigma$ -álgebra, lo que fundamenta la siguiente definición.

*Definición 1.45.* Sea  $X$  un conjunto y  $B \subseteq 2^X$ . Definimos la  $\sigma$ -álgebra **generada** por  $B$  como

$$\bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra sobre } X \text{ tal que } B \subseteq \mathcal{A} \}.$$

*Definición 1.46.* Dado un espacio topológico  $X$ , la  $\sigma$ -álgebra de **Borel** de  $X$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos abiertos de  $X$ .

Sea una  $A_1, A_2, \dots$  sucesión de conjuntos. Escribimos  $A_n \downarrow \emptyset$  cuando  $A_{n+1} \subset A_n$  y  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ .

**Teorema 1.47.** [7] Sea  $X$  un conjunto y sea  $\mathcal{A}$  un álgebra, sea  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [-\infty, \infty]$  finitamente aditiva. Entonces  $\mu$  es numerablemente aditiva si y sólo si  $\mu$  es “continua en  $\emptyset$ ”, es decir  $\mu(A_n) \rightarrow 0$  si  $A_n \downarrow \emptyset$  y  $A_n \in \mathcal{A}$ .

La demostración se puede encontrar en [7].

*Definición 1.48.* Sea  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible. Una **medida** en una  $\sigma$ -álgebra es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$  numerablemente aditiva. En este caso  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  es un **espacio de medida**.

**Teorema 1.49.** Para cualquier conjunto  $X$  y cualquier semiálgebra  $\mathcal{A}$  de conjuntos de  $X$ , cualquier función numerablemente aditiva  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$  se extiende a una medida en el  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{S}$  generada por  $\mathcal{A}$ .

*Demostración.* Para cualquier conjunto  $E \in X$  sea

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{1 \leq n < \infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_n A_n \right\}$$

ó  $+\infty$  si no existe tal  $A_n$ . Se puede ver que  $\mu^*$  es una medida en el espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ .  $\square$

En general, esta  $\mu^*$  es llamada la **medida exterior** definida por  $\mu$  ([7]). Existe otra definición comunmente usada para el concepto de medida exterior.

*Definición 1.50.* ([8]) Una medida exterior  $\mu^*$  es una función no negativa con valores reales definida en todos los subconjuntos de un espacio  $X$  y que cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

2.  $A \subset B$  entonces  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ .
3.  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  entonces  $\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ .

Nótese que la medida exterior establecida en el Teorema 1.49 satisface las condiciones dadas en la definición 1.50.

**Teorema 1.51. (Extensión de Carathéodory)** *Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  un álgebra de subconjuntos de  $X$ . Sea  $\mu$  una medida en un álgebra  $\mathcal{A}$ ,  $\mu^*$  la medida exterior definida por  $\mu$ . Entonces la restricción  $\bar{\mu}$  de  $\mu^*$  a los conjuntos  $\mu^*$ -medibles (es decir, a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}^*$  generada por  $\mathcal{A}$ ) es una extensión de  $\mu$  al espacio medible  $(X, \mathcal{A}^*)$  que contiene a  $\mathcal{A}$ .*

*Si  $\mu$  es finita también lo es  $\bar{\mu}$ . Si  $\mu$  es  $\sigma$ -finita, entonces  $\bar{\mu}$  es la única medida en la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a  $\mathcal{A}$  (es decir,  $\mathcal{A}^*$ ) que es una extensión de  $\mu$ .*

La demostración se puede encontrar en [8].

## 1.8. Probabilidad y Cadenas de Markov

El propósito de esta sección es definir las medidas de Markov en  $\sigma$ -espacios de tipo finito. Éstas van a ser medidas  $\sigma$ -invariantes de probabilidad definidas en la  $\sigma$ -álgebra de Borel.

Empezamos con una definición básica en probabilidad;

**Definición 1.52.** Un **espacio de probabilidad** consiste de una tripleta  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , donde  $\Omega$  es el **conjunto de estados**,  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathbb{P}: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ , es una **medida de probabilidad**, es decir, es una medida tal que  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

Una **variable aleatoria** es una función medible  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in I}$  donde  $I = \mathbb{R}$  ó  $I = \mathbb{Z}$  (en el primer caso decimos que el proceso es de **tiempo continuo** y en el otro decimos que es de **tiempo discreto**). En este trabajo sólo consideraremos procesos estocásticos de tiempos discretos.

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad con una cantidad a lo más numerable de estados y sea  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  un proceso estocástico de tiempo discreto. Definimos para cada  $i, j \in \Omega$

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad \text{y} \quad p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i).$$

El proceso  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  satisface la propiedad de Markov si

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = x_n)$$

es decir, la probabilidad de un evento condicionada al pasado depende únicamente del último estado del proceso. Decimos que el proceso es **homogéneo** si además ocurre

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sólo consideraremos procesos homogéneos.

La **matriz de transición**  $P = p_{ij}$  es la matriz  $|S| \times |S|$  de las probabilidades de transición.

En probabilidad, a un proceso estocástico de tiempo discreto que satisface la propiedad de Markov se le conoce como **cadena de Markov**.

En general, para describir una cadena de Markov homogénea comenzamos con una **matriz estocástica**  $P$ , es decir, una matriz cuadrada cuyos renglones consistan de números reales no negativos y en que la suma de las entradas de cada renglón es igual a 1.

Entonces las cadenas de Markov se pueden describir por medio de una sucesión de matrices de estocásticas  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  que determinan las probabilidades de transición:

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i) = P_n(i, j).$$

En este caso la cadena de Markov se describe mediante una matriz estocástica única  $P$ , con probabilidades de transición:

$$\mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = P(i, j) = P_{i,j}.$$

*Definición 1.53.* Un estado  $i$  es **persistente** o **recurrente** si:

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ para alguna } n \geq 1 \mid X_0 = i) = 1$$

es decir, si la probabilidad de que en algún momento regrese a  $i$  habiendo empezado en  $i$  es 1. Si la probabilidad es menor que 1,  $i$  se denomina estado **transitorio**.

Antes de continuar, recordemos un teorema fundamental en la teoría espectral de matrices no negativas: el Teorema de Perron-Frobenius.

**Teorema 1.54. (Perron-Frobenius)** Sea  $A = (A_{ij})$  una matriz real de  $n \times n$  con entradas no negativas, e irreducible. Entonces:

1. Existe un eigenvalor real  $\lambda_A > 0$  de  $A$  tal que cualquier otro eigenvalor  $r$  de  $A$  cumple  $|r| < \lambda_A$ .
2. Existen eigenvectores positivos tanto izquierdos como derechos, ambos asociados con  $\lambda_A$ , i.e.

$$\exists v = (v_1, \dots, v_n) \ \& \ \exists w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$v_i > 0, \ w_i > 0 \ \text{tal que} \ vA = \lambda_A v \ \& \ Aw = \lambda_A w.$$

3. El valor  $\lambda_A$  es una raíz simple del polinomio característico de  $A$ .

Al eigenvalor real  $\lambda_A$  que cumple con la condición dada en el inciso (1) del teorema anterior lo llamaremos **valor Perron** de  $A$ .

Entonces por el Teorema de Perron-Frobenius, dada  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R}^+)$  una matriz estocástica e irreducible sabemos que existe un vector característico izquierdo y uno derecho que corresponden al valor Perron  $\lambda_P = 1$  y cuyas entradas son todas estrictamente positivas. Más aún, se puede ver que el conjunto de estos vectores característicos derechos es  $\{(a, \dots, a) = a^n | a > 0\}$ . En este caso son los vectores característicos izquierdos los que nos interesan más, en particular aquel que es estocástico. Dicho vector  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  existe, es único, y satisface que  $\pi_i > 0$  para toda  $i = 1, \dots, n$ ,  $\pi P = \pi$  y además  $\pi_1 + \dots + \pi_n = 1$ . A este vector se le llama distribución estacionaria y lo definimos formalmente a continuación.

**Definición 1.55.** Sea  $P$  una matriz estocástica indexada sobre un conjunto de estados  $S$ .  $\pi$  es **distribución estacionaria** de  $P$  si es un vector renglón con entradas  $\pi_j$  con  $j \in S$  tales que:

1.  $\pi_j \geq 0$  para toda  $j$  y  $\sum_j \pi_j = 1$ .
2.  $\pi = \pi P$  es decir  $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}$  para toda  $j$ .

No toda matriz estocástica  $P$  tiene una distribución estacionaria, y si la tiene no necesariamente es única. Ahora, si  $P$  es irreducible y tiene una distribución estacionaria, entonces ésta es única. Si  $P$  es irreducible, entonces es necesario que todos los estados sean recurrentes para que exista una distribución estacionaria, pero no es suficiente. Esto induce una nueva clase de estados que llamaremos positivos recurrentes y que definimos a continuación.

Sea

$$q_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i)$$

la probabilidad de que la primera visita al estado  $j$ , habiendo empezado en  $i$ , sea en el  $n$ -ésimo paso. También definimos

$$q_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} q_{ij}(n)$$

que sería la probabilidad de que la cadena visite en algún momento el estado  $j$  habiendo partido de  $i$ . Nota que  $j$  es recurrente si y sólo si  $q_{jj} = 1$ .

**Definición 1.56.** El **tiempo promedio de recurrencia**  $\mu_i$  de  $i$  se define como

$$\mu_i = \begin{cases} \sum_n n q_{ii}(n) & \text{si } i \text{ es recurrente.} \\ \infty & \text{si } i \text{ es transitorio.} \end{cases}$$

Decimos que un estado recurrente  $i$  es **positivo recurrente** si  $\mu_i$  es finito.

Nota que  $\mu_i$  puede ser infinito aún cuando  $i$  sea recurrente, en cuyo caso decimos que  $i$  es **nulo recurrente**.

La idea heurística del tiempo promedio de recurrencia, es que si partiéramos del estado  $i$  y al movernos estuviésemos en otro estado, indicar el tiempo que en promedio tiene que transcurrir para “caer” de nuevo en el estado  $i$ ; la idea de la distribución estacionaria es que indique la probabilidad de que al “mover” algo, se caiga en el estado  $i$ , ajeno al estado en el que hayamos comenzado.

**Teorema 1.57.** Sea  $P$  una matriz estocástica e irreducible, indexada sobre un conjunto de estados  $S$ . Entonces  $P$  tiene distribución estacionaria  $\pi$  si y sólo si todos los estados son positivos recurrentes. En este caso  $\pi$  es la única distribución estacionaria y está dada por  $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$  para cada  $i \in S$ .

La demostración se puede encontrar en [2].

**Teorema 1.58.** Sea  $P$  una matriz estocástica e irreducible, indexada sobre un conjunto de estados  $S$ . Supongamos que todos los estados son positivos recurrentes. Supongamos además que existe  $N$  tal que  $P^N > 0$ . Entonces

$$p_{ij}(n) \rightarrow \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad \text{para toda } i, j$$

donde  $\pi$  es la distribución estacionaria, y  $\mu$  son los tiempos promedio de recurrencia (definición 1.56).

La demostración se puede encontrar en [2].

Dada una matriz estocástica  $P$ , sea  $A$  la  $\{0, 1\}$ -matriz “equivalente” a  $P$ ; es decir para todo  $i, j$ :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_{ij} > 0 \\ 0 & \text{si } P_{ij} = 0 \end{cases}$$

Consideremos ahora la gráfica  $G$  con matriz de adyacencia  $A$ . Claramente,  $G$  es una gráfica simple y por lo tanto sus trayectorias pueden ser codificadas como matrices de adyacencia por vértices. Supongamos que  $G_A$  es irreducible. Es bien sabido que si un estado es (positivo) recurrente (resp. transitorio), entonces todos los estados son (positivo) recurrentes (resp. transitorios). En adelante, únicamente vamos a considerar matrices estocásticas irreducibles en donde los estados son positivos recurrentes.

Queremos definir una medida  $\mu_P$  en la  $\sigma$ -álgebra de Borel del  $\sigma$ -espacio  $X_A$ . En virtud del clásico Teorema de Extensión de Carathéodory (1.51), basta definir a  $\mu_P$  en los conjuntos cilindros. Sea  $w = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{B}_n(X_A)$ , con  $x_i \in \mathcal{V}(G_A)$  para toda  $i = 0, \dots, n$ . Definimos

$$wt_P(w) = P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n) \quad (1.59)$$

donde a  $wt_P(w)$  lo llamaremos el **peso** de  $w$  en  $P$ . Ahora, usando la distribución estacionaria, definimos

$$\mu_P(\mathcal{C}[w; k]) = \pi_{x_0} wt_P(w). \quad (1.60)$$

*Definición 1.61.* Sea  $P$  una matriz estocástica irreducible y positiva recurrente, y sea  $A$  la  $(0, 1)$ -matriz equivalente a  $P$ . Una **cadena de Markov** es  $(X_A, \sigma, \mu_P)$ .

Cabe observar que la noción de irreducibilidad tiene interpretaciones interesantes en matrices estocásticas, gráficas y sistemas dinámicos respectivamente. En digráficas, el que una matriz sea irreducible equivale a decir que la gráfica representada por la matriz es fuertemente conexa. En sistemas dinámicos el que la matriz que representa a un sistema sea reducible quiere decir que el sistema se puede reducir a dos o más sistemas más simples, y que si la matriz es irreducible el sistema se tiene que tratar como un todo. En cadenas de Markov, cuando una matriz es reducible entonces hay dos o más sistemas de estados aislados, posiblemente conectados por estados trascendentes y que corresponden a la existencia de múltiples distribuciones estacionarias.

Otro aspecto donde podemos observar la importancia del concepto de irreducibilidad, es cuando hablamos de **transitividad topológica**; un  $\sigma$ -espacio de tipo finito es topológicamente transitivo si y sólo si su matriz de transición es irreducible.

Nota también que en este caso, buscamos alguna forma de medir un subconjunto  $A \subseteq X$ , donde  $X$  es un  $\sigma$ -espacio y  $A$  un boreliano (pues son éstos los elementos de la  $\sigma$ -álgebra). En  $X_G$  sí tenemos definida una medida  $\mu_P$ , pues se definió una medida para los cilindros, y por el Teorema de Carathéodory podemos extender esta medida. Además, necesitamos una medida  $\sigma$ -invariante. Dado  $\mu : A \rightarrow A$  un mapeo continuo, definimos  $\bar{\mu}_P(A) = \mu_P(\phi(A))$ .

Entonces  $\bar{\mu}_P$  es  $\sigma$ -invariante pues

$$\bar{\mu}_P(\sigma(A)) = \mu_P(\phi(\sigma(A))) = \mu_P(\sigma(\phi(A))) = \mu_P(\phi(A)) = \bar{\mu}_P(A).$$

A ésto generalmente se le conoce como un *pullback*.

## 1.9. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es, en principio, una forma de describir la dependencia de un estado o posición (generalmente de un punto en una variedad, aunque en nuestro caso será en un espacio métrico compacto), bajo la acción de una transformación a lo largo del tiempo. El tiempo es pensado en  $\mathbb{R}$  para sistemas dinámicos continuos, o en  $\mathbb{Z}$  para sistemas dinámicos discretos. En nuestro caso nos interesan únicamente los sistemas dinámicos discretos.

*Definición 1.62.* Un **sistema dinámico**  $(M, \phi)$  consiste de un espacio métrico compacto  $M$  y un mapeo continuo  $\phi : M \rightarrow M$ .

Si  $\phi$  es un homeomorfismo entonces denominamos a  $(M, \phi)$  un sistema dinámico **invertible**.

*Ejemplo 1.63.* Sea  $(X, \sigma)$  un  $\sigma$ -espacio. Entonces, en virtud de la Proposición 1.8,  $(X, \sigma)$  es un sistema dinámico discreto.

Dado un sistema dinámico  $(M, \phi)$  la **órbita** de un punto  $x \in M$  es el conjunto de iteraciones  $\{\phi^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  cuando  $\phi$  es invertible (y para este trabajo en general lo será). Un **punto periódico** es un punto  $x \in M$  tal que  $\phi^n(x) = x$  para algún  $n \geq 0$ .

Sean  $(M, \phi)$  y  $(N, \psi)$  dos sistemas dinámicos. Un **homomorfismo**  $\theta : (M, \phi) \rightarrow (N, \psi)$  es una función continua  $\theta : M \rightarrow N$  que satisface  $\psi \circ \theta = \theta \circ \phi$ , de modo tal que el siguiente diagrama conmuta:



$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ N & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

*Definición 1.64.* Sean  $(M, \phi)$  y  $(N, \psi)$  dos sistemas dinámicos, y sea  $\theta : (M, \phi) \rightarrow (N, \psi)$  un homomorfismo. Si  $\theta$  es inyectiva, entonces la llamaremos un **encaje**, si es sobreyectiva, entonces es un **mapeo factor** y si es inyectiva, sobreyectiva y su mapeo inverso es continuo entonces la llamaremos **conjugación topológica**. Si  $\theta$  es una conjugación topológica decimos que estos sistemas dinámicos son **topológicamente conjugados** y lo denotamos  $(M, \phi) \cong (N, \psi)$ .

Ahora, consideremos el siguiente caso: sea  $(M, \phi)$  un sistema dinámico, sea

$$\overline{M} \subseteq \dots \times M \times M \times M \times \dots = M^{\mathbb{Z}}$$

determinado de la siguiente manera: para cada  $x \in M$ , sea

$$\overline{x} = (\dots, \phi^{-1}(x), x, \phi(x), \dots) \in \overline{M}.$$

Definimos  $\overline{\phi} : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  tal que:

$$\overline{\phi}(\overline{x}) = (\dots, \phi(\phi^{-1}(x)), \phi(x), \phi(\phi(x)), \dots) = (\dots, x, \phi(x), \phi^2(x), \dots)$$

es decir,  $\overline{\phi}$  es un corrimiento.  $(\overline{M}, \overline{\phi})$  es un sistema dinámico que se conoce como **extensión natural**.

Nota que  $(M, \phi) \cong (\overline{M}, \overline{\phi})$ , es decir, son topológicamente conjugados. Entonces podemos pensar en un sistema dinámico, módulo una conjugación como un sistema dinámico en el que la acción es el mapeo  $\sigma$ .

## 1.10. Invariantes

Algo que es importante en el estudio de los sistemas dinámicos es encontrar invariantes para sistemas dinámicos topológicamente conjugados.

El invariante por excelencia es la entropía topológica, que definimos a continuación para  $\sigma$ -espacios.

*Definición 1.65.* Sea  $X$  un  $\sigma$ -espacio. Definimos la **entropía (topológica)** de  $X$  por

$$h(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathcal{B}_n(X)|}{n}$$

donde  $\mathcal{B}_n(X)$  son los bloques permitidos en  $X$  de longitud  $n$ .

La entropía es un invariante de conjugación, y representa la tasa de crecimiento exponencial de la cardinalidad del conjunto de bloques de longitud  $n$ . De hecho, calcular la entropía de  $\sigma$ -espacios de tipo finito es sencillo, como lo muestra el siguiente Teorema.

**Teorema 1.66.** *Si  $X$  es un  $\sigma$ -espacio irreducible de tipo finito, con memoria  $M$ ,  $G$  es una gráfica irreducible tal que  $X^{[M+1]} = X_G$ , y  $A(G)$  su matriz de adyacencia, entonces  $h(X) = \log \lambda_{A(G)}$ .*

La demostración se puede encontrar en [4], y se demuestra con argumentos de teoría de Perron - Frobenius. La idea es demostrar que la tasa de crecimiento está controlada por el eigenvalor más grande de  $A$ .

Así pues, para calcular la entropía de un  $\sigma$ -espacio de tipo finito con memoria  $M$ , basta con obtener los eigenvalores de la matriz de vértices de la gráfica asociada al  $\sigma$ -espacio de tipo finito, la cual existe por la Proposición 1.39.

Los puntos periódicos son un invariante básico en los sistemas dinámicos, además de ser un concepto intuitivamente claro en este contexto.

*Definición 1.67.* Sea  $(X, \phi)$  un sistema dinámico. Sea  $p_n(X)$  el número de puntos periódicos de periodo  $n \geq 1$ ; es decir

$$p_n(X) := |\{x \in X | \phi^n(x) = x\}|$$

y sea

$$q_n(X) := |\{x \in X | \phi^n(x) = x \text{ y } \phi^k(x) \neq x \text{ dado } 1 < k < n\}|.$$

En otras palabras  $q_n(X)$  nos describe el número de puntos con periodo mínimo  $n$ .

Es claro que tanto  $p_n(X)$  como  $q_n(X)$  son invariantes de conjugación en sistemas dinámicos, ya que dada una conjugación  $\theta : (M, \phi) \cong (N, \psi)$ , entonces  $\phi^n(x) = x$  si y sólo si

$$\theta(x) = \theta(\phi^n(x)) = \psi^n(\theta(x)).$$

Además, para calcular la entropía nos podemos fijar, bajo ciertas condiciones, únicamente en puntos periódicos. Concretamente, si  $X$  es un  $\sigma$ -espacio de tipo finito e irreducible, entonces la tasa de crecimiento exponencial de la cardinalidad del conjunto de puntos periódicos de periodo  $n$  es igual a la de los bloques de longitud  $n$ .

*Ejemplo 1.68.* Consideremos un  $\sigma$ -espacio  $(X_A, \sigma)$  con  $\sigma: X_A \rightarrow X_A$  donde  $A$  es la matriz de adyacencia de una gráfica. Entonces observamos que  $x_{r,s} \in A$  representa la arista  $e$  tal que  $i(e) = r$ ,  $t(e) = s$ ; se puede ver entonces que los sumandos que componen  $tr(A)$ , es decir la traza de  $A$ , son los puntos tales que  $i(e) = t(e)$ .

Tenemos, usando la Proposición 1.34, que dada  $A \in M_{m \times m}(\mathbb{Z}_+)$ ,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = sp(A)$  donde  $sp(A)$  es el **espectro de  $A$**  (es decir, el conjunto de eigenvalores de  $A$ ), entonces  $p_n(X_A) = tr(A^n) = \lambda_1^n + \dots + \lambda_m^n$ .

Sea  $A$  la matriz de adyacencia que define a un  $\sigma$ -espacio  $X_A$ . Entonces

$$p_n(X_A) = \sum_{k|n} q_k(X_A)$$

donde  $k|n$  son los divisores  $k$  de  $n$ . De esto tenemos que  $q_n$  nos determina  $p_n$ .

Por otro lado, se puede observar que

$$q_n(X_A) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) tr(A^d)$$

donde  $\mu$  es la fórmula de inversión de Möbius definida como:

$$\mu(m) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si } m \text{ es producto de } r \text{ primos distintos.} \\ 0 & \text{si } p^2|n \text{ para alguna } p. \\ 1 & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Pero por la Proposición 1.34 tenemos que  $tr(A^n) = p_n$ ; entonces

$$q_n(X_A) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) tr(A^d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p_d(X_A)$$

de lo cual tenemos que  $p_n$  determina a  $q_n$ .

Definimos ahora la entropía de la teoría de la medida. Para ésto suponemos que tenemos un  $\sigma$ -espacio  $\widehat{X}_A$  definido por una 0-1 matriz de adyacencia. Sea  $P$  una matriz estocástica equivalente a  $A$ , y sea  $\mu_P$  la medida de Markov que define  $P$  en  $X_A$ . Sea  $\pi$  la distribución estacionaria de  $P$ . Definimos la **entropía de teoría de la medida** como

$$h(\widehat{X}_A; \mu_P) = - \sum_{i,j} \pi_i P_{ij} \log P_{ij}.$$

Se puede demostrar que si  $A$  es irreducible, entonces

$$h(\widehat{X}_A; \mu_P) \leq h(X_A)$$

y que existe una única  $P_0$  tal que  $h(\widehat{X}_A; \mu_{P_0}) = h(X_A)$ . Por esta razón, a  $\mu_{P_0}$  se le conoce como **medida de entropía máxima**. Estos conceptos son relevantes para poder enunciar el Teorema 2.49 más adelante.



# Capítulo 2

## El politopo de pesos por símbolo

Uno de los objetos centrales en esta tesis es el politopo de pesos por símbolo de una cadena de Markov. Tuncel y Marcus ([5]) lo definen en un contexto algebraico de matrices sobre un semianillo más general, a saber  $\mathbb{Z}_+[exp]$ . Las matrices estocásticas comunes “viven” en el conjunto de matrices sobre  $\mathbb{Z}_+[exp]$ . La estructura algebraica de  $\mathbb{Z}_+[exp]$  nos va a permitir estudiar más propiedades de las cadenas de Markov.

Empezaremos por describir el semianillo  $\mathbb{Z}_+[exp]$  y veremos cómo matrices sobre este semianillo definen cadenas de Markov. Después definiremos invariantes como el grupo  $\Gamma$  y el grupo  $\Delta$ , que usaremos para construir las  $\Gamma$ -formas y las  $\Delta$ -formas, que son de vital importancia para el estudio del politopo de pesos por símbolo.

Definimos el politopo de pesos por símbolo, estudiamos algunas de sus propiedades que lo caracterizan y mencionamos brevemente algunas propiedades de sus caras. Se dan algunos ejemplos de politopos de pesos por símbolo, mismos que se usarán en el Capítulo 3.

### 2.1. El semianillo $\mathbb{Z}_+[exp]$

Sea  $exp$  el conjunto de funciones exponenciales, es decir  $exp = \{a^t \mid a > 0\}$ . Entonces  $\mathbb{Z}_+[exp]$  denota el conjunto de polinomios en  $exp$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_+$ .  $\mathbb{Z}_+[exp]$  es un semianillo cuando lo equipamos con las operaciones de suma y producto. Recordemos la definición de semianillo.

*Definición 2.1.* Dado un conjunto  $A$  y dos operaciones binarias  $+$  y  $\cdot$ , llamadas suma y multiplicación,  $(A, +, \cdot)$  es un semianillo si satisface las siguientes condiciones:

- $(A, +)$  es un monoide conmutativo con  $0$  como elemento neutro, es decir:
  1.  $a + (b + c) = (a + b) + c$  para todo  $a, b, c \in A$ .
  2.  $a + b = b + a$  para todo  $a, b \in A$ .
  3.  $0 + a = a + 0 = a$  para todo  $a \in A$ .
- $(A, \cdot)$  es un monoide con elemento neutro  $1$ , es decir:
  1.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  para todo  $a, b, c \in A$ .
  2.  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  para todo  $a \in A$ .
- $\cdot$  distribuye en  $+$ , es decir:
  1.  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  para todo  $a, b, c \in A$ .
  2.  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  para todo  $a, b, c \in A$ .
- Además se tiene que  $1 \cdot 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .

*Ejemplo 2.2.* Los siguientes son elementos de  $\mathbb{Z}_+[exp]$ :

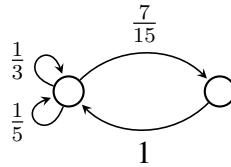
$$1 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^t \quad \pi^t \quad 4\left(\frac{1}{3}\right)^t + 7e^{-t}$$

*Ejemplo 2.3.*

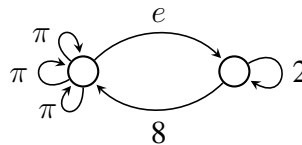
$$\left(1^t + 3\left(\frac{2}{3}\right)^t\right) \left(2e^t + 5\left(\frac{1}{4}\right)^t\right) = 2e^t + 5\left(\frac{1}{4}\right)^t + 6\left(\frac{2e}{3}\right)^t + 15\left(\frac{1}{6}\right)^t$$

A una matriz sobre  $\mathbb{Z}_+[exp]$  le llamaremos una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -**matriz**. Dado  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A_t$  denota la matriz real no negativa  $A$  evaluada en  $t$ . Veamos cómo matrices sobre este semianillo representan gráficas con “pesos” en sus aristas.

*Ejemplo 2.4.* La matriz  $\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{1}{3}\right)^t & \left(\frac{7}{15}\right)^t \\ 1^t & 0 \end{pmatrix}$  representa la gráfica



Ejemplo 2.5. De nuevo, la matriz  $\begin{pmatrix} 3\pi^t & e^t \\ 8^t & 2^t \end{pmatrix}$  representa la gráfica



Una  $\mathbb{R}^+$ -matriz  $A$  es naturalmente una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz mediante el encaje  $a \mapsto a^t$ . Hay que extender varias definiciones que ya hemos visto al contexto de  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices.

Tenemos que dada una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz,  $A_t$  con  $t \in \mathbb{R}$  es la matriz evaluada en  $t$ . Por ejemplo, sea

$$A_t = \begin{pmatrix} (\frac{1}{3})^t & 0 \\ \pi^t & 1^t \end{pmatrix}.$$

Con esta misma matriz tenemos que

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}.$$

Así por ejemplo, la matriz  $A_0$  tendrá entradas en  $\mathbb{Z}_+$  y determina la gráfica  $G(A)$  con vértices  $\mathcal{V}(A)$  y aristas  $\mathcal{E}(A)$ .

**Definición 2.6.** Una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz  $A$  es **irreducible** si  $A_0$  es irreducible, y es **estocástica** si  $A_1$  es estocástica.

Como se ve en los ejemplos anteriores, una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz resulta en una matriz no negativa al ser evaluada en  $t \geq 0$ . El primer ejemplo (2.4) es de una matriz estocástica, y el segundo (2.5) de una matriz no estocástica. Observe que la gráfica de una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz no necesariamente es simple, aun si es estocástica. Por esta razón, en el contexto de  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices, las aristas de la gráfica serán, como veremos más adelante, los estados de la cadena de Markov correspondiente.

En principio estaremos considerando matrices que son no negativas, pero no necesariamente estocásticas. Más adelante sí necesitaremos matrices estocásticas, por lo que describiremos el clásico método de Parry - Tuncel para convertir la matriz dada en una matriz estocástica.



## 2.2. Normalización estocástica de Parry-Tuncel

Dada una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz  $A$ , escribimos  $A_{IJ} = \sum_{m \in exp} a_{IJ_m} m$  donde  $a_{IJ_m} \in \mathbb{Z}_+$ . Observa que  $A_0$  nos define una gráfica  $G(A)$ .  $\mathcal{V}(A)$  es el conjunto de índices de  $A$  y hay  $(A_0)_{IJ} = \sum_{m \in exp} a_{IJ_m}$  aristas de  $I$  a  $J$ , donde  $I, J \in \mathcal{E}(A)$ .

Esto nos define un  $\sigma$ -espacio de tipo finito:

$$\Sigma_{A_0} = \{x \in (\mathcal{E}(A))^{\mathbb{Z}} \mid t(x_I) = i(x_{I+1}) \text{ para toda } I \in \mathbb{Z} \text{ en } G(A)\}.$$

Ahora, podemos asignar pesos a las aristas  $\mathcal{E}(A)$  de la siguiente manera: para cada par  $I, J \in \mathcal{V}(A)$  y cada  $m = a^t \in exp$ , asignamos peso  $a$  a exactamente  $a_{IJ_m}$  aristas que van de  $I$  a  $J$ . Tenemos entonces que

$$A_{IJ} = \sum_{w \in \mathcal{E}(A), i(w)=I, t(w)=J} wt_A(w)^t.$$

Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz irreducible. Sea  $\lambda$  el valor Perron de  $A_1$ , y sea  $r$  el vector Perron derecho asociado a  $\lambda$ . Defínase la probabilidad de transición para cada arista  $w$  como:

$$p_A(w) = \frac{wt_A(w)r_{t(w)}}{\lambda(A)r_{i(w)}}.$$

Sea

$$P := \frac{D^{-1}AD}{(\lambda(A))^t} \tag{2.7}$$

donde  $D$  es la matriz diagonal  $D_{II} = r_I$ .

Entonces

$$P_{IJ} = \sum_{i(w)=I, t(w)=J} (p_A(w))^t.$$

De 2.7, y dado que  $A_1 r = \lambda(A_1) r$ , tenemos que  $P_1 \bar{1} = \bar{1}$ , donde  $\bar{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  es decir,  $P_1$  es

estocástica. Dado que  $A_1$  es irreducible, también lo es  $P_1$  y entonces existe un vector estacionario único  $\pi$  tal que  $\pi P_1 = \pi$  con  $\pi > 0, \pi \cdot \bar{1} = 1$ .

Observa que

$$\frac{D^{-1}AD}{\lambda} \bar{1} = \frac{D^{-1}Ar}{\lambda} = \frac{D^{-1}\lambda r}{\lambda} = D^{-1}r = \bar{1}$$

de lo cual,  $P = \frac{D^{-1}AD}{\lambda}$  es estocástica.

Definimos  $\mu_A$  en los conjuntos cilindro  $\mathcal{C} = \{x \in \Sigma_{A_0} \mid x_m \cdots x_n = w_{i_m} \cdots w_{i_n}\}$ , como  $\mu_A(\mathcal{C}) = \pi_{i(e_{i_m})} p_A(e_{i_m}) \cdots p_A(e_{i_n})$ .

**Definición 2.8.** La **cadena de Markov** definida por  $A$  es  $\Sigma = (\Sigma_{A_0}, \sigma_{A_0}, \mu_A)$ .

La siguiente proposición nos indica cuándo dos  $\mathbb{Z}^+[exp]$ -matrices irreducibles nos definen la misma cadena de Markov.

**Proposición 2.9.** Sean  $A, B \mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices irreducibles. Entonces:

1.  $A$  tiene forma estocástica única.
2.  $A, B$  definen la misma cadena de Markov si y sólo si existe una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz diagonal  $D$ , con  $m \in exp$  tal que

$$A = \frac{D^{-1}BD}{m}. \quad (2.10)$$

*Demostración.* Para ver que cualquier  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz irreducible es única, observa que la matriz  $P$ , definida por la ecuación 2.7 es una forma estocástica de  $A$ , pues para una matriz estocástica  $P_1$ ,  $\lambda(P_1) = 1$  y un eigenvector Perron derecho para  $P_1$  es  $\bar{1}$  (el vector cuyas entradas son 1's) y entonces las cadenas de Markov definidas por  $P$  y  $A$  coinciden ( $(\sigma_{A_0}, \sigma_{A_0}^n, \mu_A) = (\sigma_{P_0}, \sigma_{P_0}^n, \mu_P)$ ).

De aquí se puede ver que dos formas estocásticas definen la misma cadena de Markov si y sólo si coinciden.

Ahora, para demostrar que dadas  $A, B \mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices irreducibles definen la misma cadena de Markov con las condiciones dadas, primero definimos  $A \sim B$  si la ecuación 2.10 se cumple para alguna  $D, m = a^t$ . Se puede ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

Sean  $P, Q$  formas estocásticas para  $A, B$  respectivamente. Entonces  $A \sim P$  y  $B \sim Q$ . Pero entonces  $A \sim B$  si y sólo si  $P \sim Q$ .

Si  $P = \frac{D^{-1}QD}{a^t}$  entonces  $a = \frac{\lambda(Q_1)}{\lambda(P_1)} = 1$ . Entonces  $D_1 \bar{1} = D_1 P_1 \bar{1} = Q_1 (D_1 \bar{1})$ . De allí  $D_1 \bar{1} = c \bar{1}$  para alguna  $c$ . Entonces  $D = c^t I$  y por ende  $P = Q$ .

□

### 2.3. Algunos invariantes

Sea  $\gamma = e_1 e_2 \dots e_n$  una trayectoria en  $G(A)$ , donde  $e_i$  son las aristas de la trayectoria. Definimos la **longitud**  $l(\gamma)$  como el número  $n$  de aristas que atraviesa la trayectoria  $\gamma$ .

Llamaremos a una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz **no errante** si siempre que existe una trayectoria de  $I$  a  $J$ , existe una trayectoria de  $J$  a  $I$ .

*Definición 2.11.* Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$  matriz. Definimos el conjunto **gamma** de  $A$  como:

$$\Gamma_A = \langle \{wt_A(\gamma) \mid \gamma \text{ es un ciclo}\} \rangle$$

y el conjunto **delta** de  $A$  como:

$$\Delta_A = \left\{ \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \mid \gamma, \gamma' \text{ son ciclos y } l(\gamma) = l(\gamma') \right\}.$$

Llamaremos **ciclos simples** a aquellos ciclos donde el único vértice que se repite es el inicial, que es igual al terminal.

*Definición 2.12.* Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz irreducible. El **periodo**  $d = d_A$  de  $A$  es el máximo común divisor de las longitudes de los ciclos de  $G(A)$ . Decimos que  $A$  es **aperiódico** si  $d = 1$ .

Si  $A$  es irreducible con periodo  $d$ , entonces para toda  $n$ ,  $A^n$  es no errante y  $A^d$  tiene exactamente  $d$  componentes irreducibles, y cada componente es aperiódico.

**Proposición 2.13.** Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz irreducible. Entonces se cumple:

1. Para cada estado  $I$ ,  $\Gamma_A$  es el grupo generado por

$$\{wt_A(\gamma) \mid \gamma \text{ es un ciclo que pasa por } I\}$$

y

$$\Delta_A = \left\{ \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \mid \gamma, \gamma' \text{ son ciclos que pasan por } I \text{ con } l(\gamma) = l(\gamma') \right\}.$$

2.  $\Delta_A \subseteq \Gamma_A$  y éstos son subgrupos finitamente generados por el grupo multiplicativo  $(\mathbb{R}^+, \times)$ . Así pues  $\Gamma_A$  y  $\Delta_A$  son grupos abelianos finitamente generados.
3. Para cada  $I$ ,  $\Delta_A$  no depende de  $I$ .
4. Para toda  $n$ ,  $\Delta_{A^n} = \Delta_A$ .

*Demostración.* 1. Dado que  $A$  es irreducible, se sigue que el grupo generado por un ciclo que pasa por un vértice específico es igual al  $\Gamma_A$  generado por cualquier ciclo. Esto es análogo para  $\Delta_A$ .

2. Primero,  $\Gamma_A$  es un subgrupo de  $(\mathbb{R}^+, \times)$  por definición, al igual que  $\Delta_A$ .

Ahora, nota que  $\Gamma_A, \Delta_A$  son finitamente generados, pues  $A$  representa una gráfica finitamente generada, la cual tiene una cantidad finita de ciclos simples, y el peso de cualquier ciclo puede ser descrito como el producto de pesos de ciclos simples.

3. Se sigue de la Proposición 2.9, inciso (2).
4. Se puede ver que  $\Delta_{A^n} \subseteq \Delta_A$ .

Demostraremos que  $\Delta_A \subseteq \Delta_{A^n}$ : sean ciclos  $\gamma, \gamma'$  los cuales tienen un estado  $I$  común y tales que  $l(\gamma) = l(\gamma')$ .

Considera

$$\underbrace{\gamma * \gamma * \cdots * \gamma}_{n \text{ veces}} \qquad \underbrace{\gamma' * \gamma * \cdots * \gamma}_{n-1 \text{ veces}}$$

(donde  $*$  significa concatenar). Estas cadenas tienen sentido como ciclos, aún cuando puede ser necesario aplicar  $\sigma$  a  $\gamma$ . Nota que además estos ciclos representan los ciclos  $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}'$  en la gráfica de  $A^n$ . Entonces:

$$\frac{wt_{A^n}(\bar{\gamma})}{wt_{A^n}(\bar{\gamma}')} = \frac{(wt_A(\gamma))^n}{(wt_A(\gamma'))(wt_A(\gamma))^{n-1}} = \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}.$$

De esta forma, cualquier elemento de  $\Delta_A$  puede ser presentado como elemento de  $\Delta_{A^n}$

$$\therefore \Delta_A \subseteq \Delta_{A^n} \therefore \Delta_A = \Delta_{A^n}.$$

□

*Definición 2.14.* Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz con periodo  $d$ . Sean  $\gamma, \gamma'$  ciclos en  $G(A)$  tales que  $l(\gamma) = d + l(\gamma')$ . Definimos

$$c_A := \left( \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \right)^{1/d}.$$

Nota que  $c_A$  depende de los ciclos  $\gamma, \gamma'$ . Sin embargo, si establecemos que  $A$  es irreducible, entonces  $c_A$  es un objeto bien definido módulo  $\Delta_A^{1/d} = \{a^{1/d} \mid a \in \Delta_A\}$ , lo cual se demostrará a continuación.

Antes, una pequeña observación que resultará muy útil para la siguiente proposición.

*Observación 2.15.* Si  $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$  son ciclos en  $G(A)$  tales que  $l(\gamma) - l(\gamma') = l(\delta) - l(\delta')$  entonces:

$$\frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} = \frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')} \pmod{\Delta_A}.$$

*Demostración.* Dado que  $A$  es irreducible, podemos asumir que  $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$  pasan todos por un estado en común. Entonces, concatenar  $\gamma * \delta', \gamma' * \delta$  tiene sentido como ciclos, (si los estados iniciales de  $\delta, \delta'$  no coinciden con los estados terminales de  $\gamma, \gamma'$  respectivamente, aplicamos  $\sigma$  a  $\delta, \delta'$ ). Además,  $l(\gamma * \delta') = l(\gamma' * \delta)$ .

Entonces

$$\frac{\frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}}{\frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')}} = \frac{wt_A(\gamma)wt_A(\delta')}{wt_A(\gamma')wt_A(\delta)}.$$

Ahora, como dados dos ciclos cualesquiera  $\gamma, \delta$  se tiene que

$wt_A(\gamma)wt_A(\delta) = \prod_{i=1}^n wt_A(e_i) \prod_{j=1}^m wt_A(e_j) = wt_A(\gamma * \delta)$  (donde  $e_i, e_j$  son las aristas de los ciclos  $\delta, \gamma$  respectivamente).

Se sigue que

$$\frac{wt_A(\gamma)wt_A(\delta')}{wt_A(\gamma')wt_A(\delta)} = \frac{wt_A(\gamma * \delta')}{wt_A(\gamma' * \delta)}$$

donde además  $l(\gamma * \delta') = l(\gamma' * \delta)$ .

$$\text{Entonces } \frac{wt_A(\gamma * \delta')}{wt_A(\gamma' * \delta)} \in \Delta_A, \quad \frac{\frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}}{\frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')}} \in \Delta_A, \quad \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} = \frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')} \pmod{\Delta_A}.$$

□

Con esto en mente, veamos la siguiente proposición:

**Proposición 2.16.** *Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz irreducible y aperiódica*

1.  $c_A$  está bien definida mód  $\Delta_A$ .

2.  $\forall i \in \mathbb{N}$

$$c_A^i \Delta_A = \left\{ \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \mid \gamma, \gamma' \text{ son ciclos tales que } l(\gamma) = i + l(\gamma') \right\}.$$

3.  $\Gamma_A / \Delta_A$  es un grupo cíclico con generador  $c_A \Delta_A$ .

4. Si  $A, B$  definen la misma cadena de Markov, entonces

$$\left( \frac{c_A}{\lambda(A_1)} \right) = \left( \frac{c_B}{\lambda(B_1)} \right) \quad \text{mód } \Delta_A.$$

En particular si  $P, A$  definen la misma cadena de Markov,  $P$  es una forma estocástica entonces  $c_P = \left( \frac{c_A}{\lambda(A_1)} \right)$  mód  $\Delta_P$ .

5.  $c_{A^n} \Delta_{A^n} = c_A^n \Delta_A$ .

*Demostración.* 1. Por definición,  $c_A = \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}$  dado  $l(\gamma) = 1 + l(\gamma')$ .

De la observación anterior (2.15): sea

$$l(\gamma) - l(\gamma') = l(\delta) - l(\delta') \quad \text{entonces} \quad \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} = \frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')} \quad \text{mód } \Delta_A.$$

2.

$$c_A^i = \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \quad \text{donde } l(\gamma) - l(\gamma') = i.$$

De nuevo, sean  $\delta, \delta'$  tales que  $l(\gamma) - l(\gamma') = i = l(\delta) - l(\delta')$

$$\text{entonces} \quad \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} = \frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')} \quad \text{mód } \Delta_A.$$

Sea

$$\zeta \in c_A^i \Delta_A \quad \text{entonces} \quad \zeta = \left( \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \right) \left( \frac{wt_A(\delta)}{wt_A(\delta')} \right)$$

donde  $l(\gamma) - l(\gamma') = i, l(\delta) = l(\delta')$ .

Pero  $\zeta$  era un elemento cualquiera. Entonces afirmamos que

$$c_A^i \Delta_A = \left\{ \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')} \mid \gamma, \gamma' \text{ son ciclos tales que } l(\gamma) = i + l(\gamma') \right\}.$$

3. Sabemos que  $\Delta \leq \Gamma$ ; tenemos además que

$$\Gamma/\Delta = \{g\Delta \mid g \in \Gamma\}$$

$$g\Delta = \{gh \mid h \in \Delta\}.$$

Por demostrar que existe  $g\Delta \in \Gamma/\Delta$  tal que  $\langle g\Delta \rangle = \Gamma/\Delta$ .

Sea  $h\Delta \in \Gamma/\Delta$ ; recordemos que  $\Gamma = \langle \{wt_A(\gamma) \text{ tal que } \gamma \text{ es ciclo}\} \rangle$ .

Sea  $h = wt_A(\gamma_0)$  entonces  $wt_A(\gamma_0)\Delta = c^m \Delta$  donde  $c = \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}$  dado  $l(\gamma) = l(\gamma') + 1$ .

Habría que demostrar que existe  $m$  tal que  $wt_A(\gamma_0)c^{-m} \in \Delta$  i.e.

$$wt_A(\gamma_0) \frac{wt_A(\gamma')^m}{wt_A(\gamma)^m} \in \Delta.$$

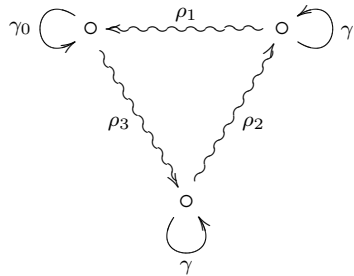
Llamaremos  $n_0, n$  respectivamente a las longitudes de los ciclos  $\gamma_0, \gamma'$ .

Dado que estamos trabajando en una matriz irreducible podemos considerar, sin pérdida de generalidad, trayectorias que cumplen:

- $\rho_1$  que una a un vértice de  $\gamma'$  con un vértice de  $\gamma_0$ , denotando su longitud  $k_1$ .
- $\rho_2$  que una a un vértice de  $\gamma_0$  con un vértice de  $\gamma$ , denotando su longitud  $k_2$ .
- $\rho_3$  que una a un vértice de  $\gamma$  con un vértice de  $\gamma'$ , denotando su longitud  $k_3$ .

Sea  $\rho = \rho_1 * \rho_2 * \rho_3$ , y  $k = k_1 + k_2 + k_3$

i.e.



(Nótese que el anterior dibujo es una mera referencia, pues ninguna de las trayectorias que aparecen en éste deben ser necesariamente de longitud 1.)

Consideramos entonces

$$\frac{wt_A(\gamma_0)wt_A(\rho_3)wt_A(\rho_2)wt_A(\gamma')^mwt_A(\rho_1)}{wt_A(\gamma')^mwt_A(\rho)} = \frac{n_0 + nm + k}{m(n+1) + k} = \frac{mn + k + n_0}{mn + k + m}.$$

Observa que tomamos ámbos ciclos.

Pero entonces basta con  $m = n_0$  y tenemos que  $wt_A(\gamma_0)c^{-m} \in \Delta$  entonces  $h\Delta = c^m\Delta$ .

4. Si  $A, B$  definen la misma cadena de Markov, entonces se tiene que  $A = \frac{D^{-1}BD}{m}$  donde  $D$  es una matriz diagonal y  $m$  está en  $exp$ .

Entonces

$$A^n = \left( \frac{D^{-1}BD}{m} \right)^n = \frac{(D^{-1}BD)^n}{m^n} = \frac{D^{-1}B^nD}{m^n}.$$

Sean  $P_A, P_B$  formas estocásticas de  $A, B$  respetivamente. Entonces

$$P_A = \frac{D_A^{-1}AD_A}{(\lambda(A_1))^t} = \frac{D_B^{-1}BD_B}{(\lambda(B_1))^t} = P_B.$$

$$\text{Se sigue que } \frac{wt_A(\gamma)}{\lambda(A_1)^{l(\gamma)}} = wt_P(\gamma) = \frac{wt_B(\gamma)}{(\lambda(B_1))^{l(\gamma)}}$$

$$\text{entonces } wt_A(\gamma) = wt_B(\gamma) \left( \frac{1}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)} \lambda(A_1)^{l(\gamma)} = wt_B(\gamma) \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)}.$$

Esta igualdad implica que:

$$\begin{aligned} \frac{c_A}{\lambda(A_1)} &= \frac{wt_A(\gamma)}{\lambda(A_1)} = \frac{wt_B(\gamma) \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)}}{wt_B(\gamma') \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma')}} = \frac{wt_B(\gamma)}{wt_B(\gamma')} \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma) - l(\gamma')} \\ &= \frac{wt_B(\gamma)}{wt_B(\gamma')} = \frac{c_B}{\lambda(B_1)}. \end{aligned}$$

En el caso de que  $B$  fuese estocástica, tendríamos que  $c_B = \left( \frac{c_A}{\lambda(A_1)} \right)$  mód  $\Delta_A$  pero dado que  $\lambda(B_1) = 1$ . Entonces:

$$\frac{c_B}{\lambda(B_1)} = \frac{c_A}{\lambda(A_1)}.$$



5. Demostraremos que  $c_{A^n} \Delta_{A^n} = c_A^n \Delta_A$ .

Tenemos por la Proposición 2.13 (4) que  $\Delta_{A^n} = \Delta_A$ .

Ahora, por definición tenemos que

$$c_A = \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}$$

para algún par de ciclos  $\gamma$  y  $\gamma'$  en  $G(A)$ , con  $l(\gamma) = l(\gamma') + 1$ .

Observamos que

$$c_A^n = \frac{wt_A(\gamma)^n}{wt_A(\gamma')^n} \quad \text{y además} \quad l(\gamma^n) = nl(\gamma') + n. \quad (2.17)$$

Por otro lado

$$c_{A^n} = \frac{wt_{A^n}(\rho)}{wt_{A^n}(\rho')}$$

para algún par de ciclos  $\rho$  y  $\rho'$  en  $G(A^n)$ , con  $l(\rho) = l(\rho') + 1$ .

Entonces, ya que las aristas (símbolos) de  $G(A^n)$  corresponden a caminos de longitud  $n$  en  $G(A)$ , entonces existe un ciclo  $\bar{\rho}$  en  $G(A)$  que corresponde al ciclo  $\rho$  en  $G(A^n)$ , y se tiene que  $l(\bar{\rho}) = n(m+1) = mn + n$  donde  $m = l(\rho')$  (por lo que  $l_{A^n}(\rho') = mn$ ), y en virtud de las ecuaciones 2.17, tenemos que  $c_{A^n} \Delta_{A^n} = c_A^n \Delta_A$ .

□

Nótese que  $(\Gamma_A/\Delta_A)$  puede ser finito o infinito. Por ejemplo, si  $A = p^t + q^t$  dados  $p$  y  $q$  linealmente independientes, entonces  $\Gamma_A = \langle p, q \rangle$ ,  $\Delta_A = \langle p/q \rangle$  y  $|\Gamma_A/\Delta_A| = \infty$ .

A continuación se muestra que las cadenas de Markov pueden ser representadas con matrices sobre  $\mathbb{Z}_+[\Gamma^t]$ ,  $\mathbb{Z}_+[\Delta^t]$ .

**Proposición 2.18.** *Sea  $A$  una matriz irreducible  $\mathbb{Z}_+[exp]$ . Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1.  $\exists D$  matriz diagonal sobre  $exp$  tal que

$$\widehat{A} := D^{-1}AD \text{ está sobre } \mathbb{Z}_+[\Gamma_A^t]$$

( $\widehat{A}$  es la  $\Gamma$ -forma de  $A$ ).

2. La  $\Gamma$ -forma es única salvo conjugación con una matriz diagonal en  $\Gamma_A^t$ .
3.  $\exists D$  matriz diagonal sobre  $\exp$ ,  $m \in \exp$  tal que

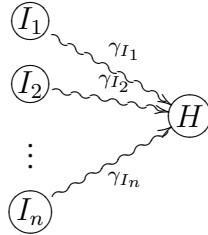
$$\bar{A} := \frac{D^{-1}AD}{m} \text{ está sobre } \mathbb{Z}_+[\Delta_A^t]$$

( $\bar{A}$  es la  $\Delta$ -forma de  $A$ ).

4. Si  $A$  es aperiódica, la  $\Delta$ -forma es única salvo conjugación con una matriz diagonal con una matriz diagonal sobre  $\Delta_A^t$  y división con un elemento de  $\Delta_A^t$ .

Nótese que si  $A$  y  $B$  definen la misma cadena de Markov, entonces una  $\Delta$ -forma para  $A$  es también una  $\Delta$ - forma para  $B$ .

*Demostración.*



1. Para cada estado  $I_i$  escogemos trayectorias  $\gamma_{I_i}$  con la misma longitud y el mismo estado terminal  $H$ , tales que  $\gamma_{I_i}$  tiene estado inicial  $I_i$ . Tomamos la matriz diagonal  $D$  definida por

$$D_{II} = (wt_A(\gamma_{I_i}))^t$$

es decir,

$$D_{II} = (wt_A(\gamma_I))^t \text{ i.e.}$$

$$D = \begin{pmatrix} wt_A(\gamma_{I_1})^t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & wt_A(\gamma_{I_2})^t & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & wt_A(\gamma_{I_N})^t \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} (wt_A(\gamma_{I_1})^{-1})^t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (wt_A(\gamma_{I_2})^{-1})^t & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (wt_A(\gamma_{I_N})^{-1})^t \end{pmatrix}$$

de forma que

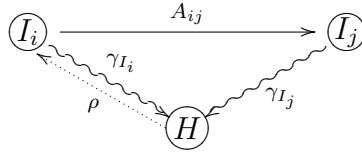
$$(D^{-1}AD)_{ij} = wt_A(\gamma_{I_i})^{-t} A_{ij} wt_A(\gamma_{I_j})^t.$$

Entonces hay que demostrar que

$$wt_A(\gamma_{I_i})^{-t} A_{ij} wt_A(\gamma_{I_j})^t \in \Gamma = \langle \{wt_A(\gamma) | \gamma \text{ es un ciclo}\} \rangle,$$

es decir, que es cociente de dos ciclos.

Ahora, observa la siguiente figura:



$\rho$  existe por irreducibilidad de la matriz  $A$ . Nos fijamos en los ciclos  $A_{ij}\gamma_j\rho$ , y  $\gamma_i\rho$ . Luego

$$\frac{A_{ij}wt_A(\gamma_j)wt_A(\rho)}{wt_A(\gamma_i)wt_A(\rho)} = \frac{A_{ij}wt_A(\gamma_j)}{wt_A(\gamma_i)} = wt_A(\gamma_i)^{-1}A_{ij}wt_A(\gamma_j).$$

Pero este es el ciclo que buscábamos.

$$\text{Entonces } wt_A(\gamma_i)^{-t} A_{ij} wt_A(\gamma_j)^t \in \Gamma$$

$$\text{de lo cual } D^{-1}AD \in \mathbb{Z}_+[\Gamma_A^t].$$

2. La demostración se implica en la demostración del inciso (4).
3. Por demostrar que  $\exists D$  matriz diagonal sobre  $exp$  y  $m \in exp$  tal que

$$\bar{A} := \frac{D^{-1}AD}{m}$$

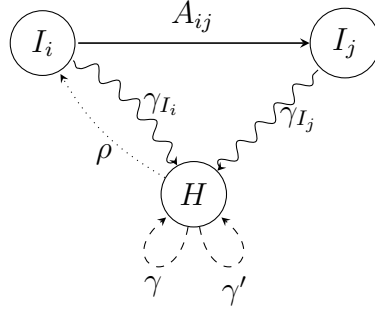
está sobre  $\mathbb{Z}_+[\Delta_A]$ .

De nuevo consideramos  $D_{II} = (wt_A(\gamma_I))^t$  y además consideramos  $m = c_A^t$ , recordando que  $c = \frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}$  donde  $l(\gamma) = l(\gamma') + 1$ .

Entonces, usando lo visto en la demostración del inciso anterior, tenemos que ver que

$$\frac{wt_A(\gamma_{I_i})^{-t} A_{ij} wt_A(\gamma_{I_j})^t}{\frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}} \in \Delta_A.$$

Observa la figura:



Considera los ciclos  $A_{ij}\gamma_{I_j}\gamma'\rho$  y  $\gamma_{I_i}\gamma\rho$ . Sea

$$\frac{A_{ij}wt_A(\gamma_{I_j})wt_A(\gamma')wt_A(\rho)}{wt_A(\gamma_{I_i})wt_A(\gamma)wt_A(\rho)} = \frac{A_{ij}wt_A(\gamma_{I_j})wt_A(\gamma')}{wt_A(\gamma_{I_i})wt_A(\gamma)}.$$

Recordando que tenemos  $wt_A(\gamma_{I_j}) = wt_A(\gamma_{I_i})$  y  $l(\gamma) = l(\gamma') + 1$ , entonces

$$A_{ij}wt_A(\gamma_{I_j})wt_A(\gamma') = wt_A(\gamma_{I_i})wt_A(\gamma)$$

por tanto,  $\frac{A_{ij}wt_A(\gamma_{I_j})wt_A(\gamma')}{wt_A(\gamma_{I_i})wt_A(\gamma)} \in \Delta_A$ .

Pero además esta es la forma que buscábamos.

Entonces  $\frac{wt_A(\gamma_{I_i})^{-1}A_{ij}wt_A(\gamma_{I_j})}{\frac{wt_A(\gamma)}{wt_A(\gamma')}} \in \Delta_A$

se sigue que  $\frac{D^{-1}AD}{m} \in \mathbb{Z}_+[\Delta_A]$ .

4. Sean  $\bar{A}, \bar{B}$   $\Delta$ -formas de una matriz  $A$ . Entonces  $\bar{A} = \frac{D^{-1}\bar{B}D}{m}$  para alguna  $m = c^t$ .

$$\forall \gamma \text{ ciclo en } G(\bar{A}) = G(\bar{B}), \quad wt_{\bar{A}}(\gamma) = \frac{1}{c^{l(\gamma)}} wt_{\bar{B}}(\gamma).$$

Como  $wt_{\bar{A}}(\gamma), wt_{\bar{B}}(\gamma) \in \Delta_A$  entonces  $c^{l(\gamma)} \in \Delta_A$ . Pero como  $A$  es aperiódica y  $\Delta_A$  es grupo,  $c \in \Delta_A$ .

Ahora, fijamos un estado  $I_0$ . Sea  $E = \frac{D}{D_{I_0 I_0}}$  entonces  $\bar{A} = \frac{E^{-1}\bar{B}E}{m}$ . Falta ver que las entradas de  $E$  están en  $\Delta$ .

Para cualquier estado  $I$  existe una trayectoria  $a_{I_0 I}$ .

$$\text{Sea } a_{ij} = \frac{(e_i)^{-1}(e_j)b_{ij}}{c^t} = \frac{(e_{i_0})^{-1}(e_{i_1})b_{i_0 i_1}}{c^t} \dots \frac{(e_{i_{n-1}})^{-1}(e_{i_n})b_{i_{n-1} i_n}}{c^t}.$$

$$\text{De aquí, } wt_A(a) = \frac{wt_B(a)e_{I_0}^{-1}e_{I_n}}{c^{l(\gamma)}}.$$

Si la trayectoria es el ciclo, entonces  $(E_1)_{II} = (E)_{I_0 I_0} = 1$  lo cual implica que

$$wt_{\bar{A}}(a) = wt_{\bar{B}}(a)(E_1)_{II} \left( \frac{1}{c^{l(\gamma)}} \right).$$

Ahora, como  $wt_{\bar{A}}(a)$ ,  $wt_{\bar{B}}(a)$ ,  $c \in \Delta_A$  entonces  $(E_1)_{II} \in \Delta_A$ .

Para demostrar la unicidad de las  $\Gamma$ -formas, es básicamente el mismo procedimiento pero sin  $c$ .

□

**Proposición 2.19.** 1. Si  $A$  es una  $\Delta$ -forma, entonces  $\Gamma_A = \Delta_A$  y  $c_A^d \Delta_A = \Delta_A$ .

2. Si  $P$  es estocástica y aperiódica, entonces

$$(1/c_p)\Delta_P = \{\lambda(A_t) \mid A \text{ es una } \Delta\text{-forma para } P\}.$$

*Demostración.* 1. Si  $A$  es una  $\Delta$ -forma, por demostrar que  $\Gamma_A = \Delta_A$ .

Dado que  $A$  es una  $\Delta$ -forma, sus entradas están en  $\Delta_A$ . Entonces, para cualquier ciclo  $\gamma$  en la gráfica  $G(A)$  de  $A$ , su peso  $wt_A(\gamma) \in \Delta_A$ .

Pero por definición  $wt(\gamma) \in \Gamma_A$  entonces  $\Gamma_A \subseteq \Delta_A$ . Además por Proposición 2.13 (2) tenemos que  $\Delta_A \subseteq \Gamma_A$  por lo cual  $\Delta_A = \Gamma_A$ .

Falta demostrar que  $c_A^d \Delta_A = \Delta_A$ . Pero como ya tenemos que  $\Delta_A = \Gamma_A$ ,  $\Gamma_A/\Delta_A$  es trivial. Ahora, por Proposición 2.16 (3) sabemos que  $\Gamma_A/\Delta_A$  es generado por  $c_A \Delta_A$ , lo cual implica que  $c_A \Delta_A = \Delta_A$ .

2. Si  $P$  es estocástica y aperiódica, demostrar que

$$\left( \frac{1}{c_P} \right) \Delta_P = \{\lambda(A_1) \text{ tal que } A \text{ es una } \Delta\text{-forma para } P\}.$$

Observa que por Proposición 2.16 (4) tenemos que  $c_P = \frac{c_A}{\lambda(A_1)} \text{ mód } \Delta_P$ , de lo cual  $\lambda(A_1)c_P = c_A \text{ mód } \Delta_P$ .

Además tenemos por el inciso anterior que  $c_A \Delta_A = \Delta_A \Rightarrow \lambda(A_1) = \frac{1}{c_P} \pmod{\Delta_P}$ . Pero sabemos que cualquier múltiplo de una  $\Delta$ -forma sigue siendo una  $\Delta$ -forma.

Entonces  $\frac{1}{c_P} = \{\lambda(A_1) \text{ tal que } A \text{ es una } \Delta\text{-forma para } P\}$ .

□

Dado que buscamos condiciones necesarias y suficientes para la existencia de cierto tipo de códigos de una cadena de Markov a otra, a continuación veremos algunas nociones de codificación.

La continuidad hace referencia a los espacios producto  $\mathcal{E}(A)^{\mathbb{Z}}$ ,  $\mathcal{E}(B)^{\mathbb{Z}}$ , a los cuales se relacionan de forma natural  $\Sigma_{A_0}$  y  $\Sigma_{B_0}$  respectivamente. Recordemos que el mapeo  $\pi : \Sigma_{A_0} \rightarrow \Sigma_{B_0}$  es continuo si y sólo si existe un mapeo  $\varphi^*$  de las trayectorias de longitud  $L$  en  $G(A)$  a las aristas en  $G(B)$  tales que para algún  $k \in \mathbb{Z}$  se tenga que

$$\varphi(x)_{i+k} = \pi^*(x_i \dots x_{i+L-1}).$$

Si  $L = 1$  entonces  $\varphi$  es un 1-mapeo de bloque y está determinado por un homomorfismo de gráficas  $G(A) \rightarrow G(B)$ , es decir, mapeos  $\mathcal{V}(A) \rightarrow \mathcal{V}(B)$ ,  $\mathcal{E}(A) \rightarrow \mathcal{E}(B)$  tales que se respetan los estados iniciales y terminales.

*Definición 2.20.* Sean  $A$  y  $B \in \mathbb{Z}_+[exp]$  matrices. Un **homomorfismo de bloques**  $\varphi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_B$  es un mapeo factor  $\varphi : \Sigma_{A_0} \rightarrow \Sigma_{B_0}$  que además preleva la medida (es decir,  $\varphi(\mu_A) = \mu_B$ ). Decimos que  $\Sigma_B$  es **factor** de  $\Sigma_A$  si existe dicho homomorfismo de bloques. Un **isomorfismo de bloques** es un homomorfismo de bloques que es 1 – 1.

Para un ciclo  $\gamma$  en  $G(A)$ ,  $\gamma^\infty$  denota el punto periódico de  $\Sigma_{A_0}$  generado por  $\gamma$ . Por ejemplo, si  $\gamma = e_1 \dots e_n$  entonces  $(\gamma^\infty)_i = e_i \pmod{n}$ . Si  $\varphi$  es un homomorfismo de bloques, sea  $\varphi(\gamma)$  el ciclo cuya longitud es igual a la longitud de  $\gamma$  y tal que genera  $\varphi(\gamma^\infty)$ . Es decir,  $\varphi(\gamma) = (\varphi(\gamma^\infty))_1 \dots (\varphi(\gamma^\infty))_n$ .

A continuación se da una caracterización fundamental de los mapeos factor finito a uno que preservan medida. La caracterización se da en términos de los pesos de los ciclos.

**Proposición 2.21.** Sean  $P, Q \in \mathbb{Z}_+[exp]$  matrices irreducibles y estocásticas. Sea  $\varphi : \Sigma_{P_0} \rightarrow \Sigma_{Q_0}$  un mapeo factor finito a uno. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $\varphi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_Q$  es un homomorfismo de bloques (es decir, preserva medida).

2. Para todo ciclo  $\gamma$  en  $G(P)$ ,  $wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma)$ .
3. Si  $A, B$  definen la misma cadena de Markov que  $P, Q$  respectivamente, entonces existe  $a \in \mathbb{R}^+$  tal que para toda  $\gamma$  ciclo en  $G(A)$ ,

$$wt_A(\gamma) = a^{l(\gamma)} wt_B(\varphi\gamma).$$

*Demostración.* • Demostraremos primero que dado  $\varphi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_Q$  un homomorfismo de bloques, entonces para todo ciclo  $\gamma$  en  $G(P)$ ,  $wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma)$ .

Sea  $\varphi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_Q$  un mapeo de  $k$ -bloques. Sea  $\gamma \in \Sigma_P$  un punto periódico con periodo mínimo  $p$ . Si  $\delta = \varphi\gamma$ , entonces  $\delta$  es periódico de periodo  $p$  y sea  $p'$  el periodo mínimo de  $\delta$  (de forma que  $p' \mid p$ ).

Sean  $\pi^{(P)}, \pi^{(Q)}$  las distribuciones estacionarias de  $P, Q$  respectivamente. Consideremos al conjunto cilindro  $\mathcal{C}[\delta_1 \dots \delta_{p'}; k] \subset \Sigma_Q$ , el cual tiene medida  $\pi_{\delta_1}^{(Q)}(wt_Q(\delta_1 \dots \delta_{p'}))$ . Consideremos también al conjunto cilindro  $\mathcal{C}[(\delta_1 \dots \delta_{p'})^N; k]$ , el cual tiene medida  $\pi_{\delta_1}^{(Q)}(wt_Q(\delta_1 \dots \delta_{p'})^N)$ . Supongamos que  $\gamma = \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(r)}$  son las pre-imágenes de  $\delta$  con periodos  $p = p_1 = s(1)p', p_2 = s(2)p', \dots, p_r = s(r)p'$  respectivamente. Para cada  $N \geq 0$  consideremos  $\varphi^{-1}(\mathcal{C}[(\delta_1 \dots \delta_{p'})^{2N+1}; -Np' + 1]) \subseteq \Sigma_P$ .

Por continuidad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi^{-1}(\mathcal{C}[(\delta_1 \dots \delta_{p'})^{2N+1}; -Np' + 1]) = \{\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)}\} = \varphi^{-1}\delta.$$

Hay entonces una  $t$ , independiente de  $N$  tal que cada punto en  $\varphi^{-1}(\mathcal{C}[(\delta_1 \dots \delta_{p'})^{2N+1}; -Np' + 1])$  coincide con uno de  $\gamma^{(i)}$  en un  $(p')^{2N+1-t}$ -bloque; más precisamente, si  $x \in \varphi^{-1}(\mathcal{C}[(\delta_1 \dots \delta_{p'})^{2N+1}; -Np' + 1])$ , entonces

$$x_{-Np'+1+t} \dots x_{Np'-t} = \gamma_{[-Np'+1+t, Np'-t]}^{(i)}.$$

La medida de  $\varphi^{-1}(\mathcal{C}[(\delta_1 \dots \delta_{p'})^{2N+1}; -Np' + 1])$  puede ser expresada como

$$M(1)(wt_P(\gamma_1^{(1)} \dots \gamma_{p_1}^{(1)}))^{\frac{2N+1-t}{s(1)}} + \dots + M(r)(wt_P(\gamma_1^{(r)} \dots \gamma_{p_r}^{(r)}))^{\frac{2N+1-t}{s(r)}}$$

para  $M(i)$  positivo. Se requieren los  $s(i)$  porque  $p_i = s(i)p'$ . La  $N$  debe ser escogida de modo tal que  $\frac{2N+1-t}{s(i)}$  sean enteros. Dado que  $\varphi$  preserva medida, tenemos

$$\pi_{\delta_1}^{(Q)}(wt_Q(\delta_1 \dots \delta_{p'})^{2N+1}) = \sum_{i=1}^r M(i)((wt_P(\gamma_1^{(i)} \dots \gamma_{p_i}^{(i)})^{-s(i)})^{2N+1-t})$$

para una secuencia de  $N$  al infinito. Esto nos dice que  $(wt_Q(\delta_1 \dots \delta_{p'}))^{s(i)} = wt_P(\gamma_1^{(i)} \dots \gamma_{p_i}^{(i)}) \forall i$  que equivale a  $wt_Q(\delta_1 \dots \delta_p) = wt_P(\gamma_1 \dots \gamma_p)$ , i.e.  $wt_Q(\varphi\gamma) = wt_P(\gamma)$ .

- Para la demostración de que si todo ciclo  $\gamma$  en  $G(P)$  tenemos que  $wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma)$ , entonces  $\varphi$  preserva medida, se puede consultar en [3].
- Demostraremos que dado  $wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma)$  para todo ciclo  $\gamma$ , tenemos que para  $A, B$  que definen la misma cadena de Markov, existe  $a \in \mathbb{R}^+$  tal que para todo ciclo  $\gamma$  en  $G(A)$ ,  $wt_A(\gamma) = a^{l(\gamma)}wt_B(\varphi\gamma)$ .

Dado que  $A, B$  definen la misma cadena de Markov tenemos que

$$wt_A(\gamma) = wt_P(\gamma) \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(P_1)} \right)^{l(\gamma)} \quad \text{y análogamente} \quad wt_B(\varphi\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma) \left( \frac{\lambda(B_1)}{\lambda(Q_1)} \right)^{l(\varphi\gamma)}.$$

Por hipótesis  $wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma)$ , de lo cual:

$$wt_A(\gamma) \left( \frac{1}{\lambda(A_1)} \right)^{l(\gamma)} = wt_B(\varphi\gamma) (\lambda(B_1))^{l(\gamma)}$$

$$wt_A(\gamma) = \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)} wt_B(\varphi\gamma).$$

Entonces, además tenemos  $a^{l(\gamma)} = \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)}$ .

- Tenemos que para  $A, B$  que definen la misma cadena de Markov, existe  $a \in \mathbb{R}^+$  tal que para todo ciclo  $\gamma$  en  $G(A)$ ,  $wt_A(\gamma) = a^{l(\gamma)}wt_B(\varphi\gamma)$ , y demostraremos que esto implica que para todo ciclo  $\gamma$  en  $G(P)$  entonces  $wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma)$ .

Dado que  $wt_A(\gamma) = \left( \frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)} \right)^{l(\gamma)} wt_B(\varphi\gamma)$ . Se sigue que

$$wt_P(\gamma) \left( \frac{\lambda(P_1)}{\lambda(A_1)} \right)^{l(\gamma)} = \left( \frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)} \right)^{l(\gamma)} \left( \frac{\lambda(Q_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)} wt_Q(\varphi\gamma) \quad \text{entonces} \quad wt_P(\gamma) = wt_Q(\varphi\gamma).$$

□

A continuación se introduce el invariante que juega el rol de la entropía topológica para las cadenas de Markov.

*Definición 2.22.* Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$  matriz. La **función beta**  $\beta_A$  se define como

$$\beta_A(t) = sp(A_t) \quad \text{tal que} \quad t \in \mathbb{R}.$$



*Observación 2.23.* Sean  $A$  y  $B \in \mathbb{Z}_+[exp]$  matrices irreducibles.

1. Si  $AS = \alpha S$  donde  $\alpha = \alpha(t)$  y  $S \neq 0$  está sobre  $\mathbb{Z}_+[exp]$ , entonces  $\alpha = \beta_A$ . Esto se sigue del Teorema de Perron - Frobenius (1.54).
2. Si  $\beta_A = \beta_B$  y  $P, Q$  son formas estocásticas para  $A, B$  respectivamente, entonces  $\beta_P = \beta_Q$ . Esto se sigue de que  $\beta_A = \beta_B$  implica que  $\lambda(A_1) = \lambda(B_1)$  y entonces

$$\beta_P = \frac{\beta_A}{(\lambda(A_1))^t} = \frac{\beta_B}{(\lambda(B_1))^t} = \beta_Q.$$

Teniendo los objetos  $\Gamma_P, c_P \Delta_P, \Delta_P, \beta_P$ , ya podemos buscar condiciones necesarias para homomorfismos de bloques finito a uno.

**Proposición 2.24.** Sean  $P, Q \in \mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices estocásticas. Sea  $\varphi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_Q$  un homomorfismo de bloques finito a uno; sea  $d = d_P$ . Entonces:

$$\beta_P = \beta_Q, \quad \Gamma_P \subseteq \Gamma_Q, \quad \Delta_P \subseteq \Delta_Q, \quad c_P^d = c_Q^d \text{ mód } \Delta_Q \text{ y } |\Gamma_Q/\Gamma_P|, |\Delta_Q/\Delta_P| \text{ son finitos.}$$

Nota como podemos reformular la información contenida en  $\beta_P, \Gamma_P, \Delta_P, c_P \Delta_P$  en términos de  $\Delta$ -formas.

**Proposición 2.25.** Sean  $P, Q \in \mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices estocásticas aperiódicas. Entonces:

$$1. (\Gamma_P, c_P \Delta_P, \Delta_P, \beta_P) = (\Gamma_Q, c_Q \Delta_Q, \Delta_Q, \beta_Q)$$

si y sólo si

$$\Delta_P = \Delta_Q \text{ y existen } \Delta\text{-formas } A, B \text{ para } P, Q \text{ tal que } \beta_A = \beta_B.$$

$$2. \Gamma_P \subseteq \Gamma_Q \quad c_P = c_Q \text{ mód } \Delta_Q \quad \Delta_P \subseteq \Delta_Q \quad \beta_P = \beta_Q$$

si y sólo si

$$\Delta_P \subseteq \Delta_Q \text{ y existen } \Delta\text{-formas } A, B \text{ para } P, Q \text{ tal que } \beta_A = \beta_B.$$

*Demostración.* Nota: Sólo demostraremos el primer inciso, ya que el segundo inciso no lo requeriremos para este trabajo.

1. Queremos demostrar que  $(\Gamma_P, c_P \Delta_P, \Delta_P, \beta_P) = (\Gamma_Q, c_Q \Delta_Q, \Delta_Q, \beta_Q)$ .  
Entonces  $\Delta_P = \Delta_Q$  y existen  $\Delta$ -formas  $A, B$  para  $P, Q$  tal que  $\beta_A = \beta_B$ .

Sean  $A, B$   $\Delta$ -formas para  $P, Q$  respectivamente. Por Proposición 2.19 (2) sabemos que dada  $P$  estocástica y aperiódica,

$$(1/c_P)\Delta_P = \{\lambda(A_1) \text{ tal que } A \text{ es una } \Delta\text{-forma para } P\}.$$

Entonces  $\lambda(A_1) \in (\frac{1}{c_P})\Delta_P$  y  $\lambda(B_1) \in (\frac{1}{c_Q})\Delta_Q$ . Además tenemos que  $\Delta_P = \Delta_Q$  y  $c_P \Delta_P = c_Q \Delta_Q$  entonces  $\lambda(A_1) = \lambda(B_1) \text{ mód } \Delta_P$ .

Ahora, sea  $\bar{A} = A \left( \frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)} \right)^t$ . Observemos que  $\bar{A}$  sigue siendo una  $\Delta$  forma para  $P$  y que  $\lambda(\bar{A}_1) = \lambda(B_1)$ . Entonces tenemos que:

$$\beta_{\bar{A}}(t) = sp(\bar{A}_t) \quad \beta_B(t) = sp(B_t)$$

$$\text{Entonces } \frac{\beta_{\bar{A}}(t)}{\beta_B(t)} = \frac{sp(\bar{A}_t)}{sp(B_t)} = \frac{sp\left(A_t \left(\frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)}\right)^t\right)}{sp(B_t)} = \frac{\left(\frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)}\right)^t sp(A_t)}{sp(B_t)} = \frac{\left(\frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)}\right)^t \beta_A(t)}{\beta_B(t)}$$

(recordando que en observación 2.23 (2) tenemos que  $\beta_A(t) = (\lambda(A_1)^t)\beta_P(t)$ )

$$= \left(\frac{\lambda(B_1)}{\lambda(A_1)}\right)^t \frac{(\lambda(A_1))^t \beta_P(t)}{(\lambda(B_1))^t \beta_Q(t)} = 1$$

De lo cual  $\beta_{\bar{A}} = \beta_B$  entonces  $\Delta_{\bar{A}} = \Delta_P = \Delta_Q = \Delta_B$  □

Ahora demostraremos que  $\Delta_P = \Delta_Q$  y existen  $\Delta$ -formas  $A, B$  para  $P, Q$  tal que  $\beta_A = \beta_B$  entonces  $(\Gamma_P, c_P \Delta_P, \Delta_P, \beta_P) = (\Gamma_Q, c_Q \Delta_Q, \Delta_Q, \beta_Q)$ .

Sean  $A, B$   $\Delta$  formas para  $P, Q$  tales que  $\beta_A = \beta_B$ . Por observación 2.23 (2) esto implica  $\beta_P = \beta_Q$ .  $\beta_A = \beta_B$  también implica  $\lambda(A_1) = \lambda(B_1)$ . Teniendo esto y usando la Proposición 2.19 (2) obtenemos que  $c_P \Delta_P = c_Q \Delta_Q$ . Ahora, por Proposición 2.16 (3) sabemos que  $\frac{\Gamma_P}{\Delta_P}$  tiene generador  $c_P \Delta_P$ , de lo cual concluimos que  $\Gamma_P = \Gamma_Q$ .

□

## 2.4. Definición del politopo de pesos por símbolo y algunas propiedades básicas

Definiremos el politopo de pesos por símbolo, así como veremos algunas de sus propiedades. Para esto, requerimos varias definiciones y conceptos, algunos de los cuales se han visto en la sección anterior.

*Definición 2.26.* Un conjunto  $X$  es **convexo** si para toda  $x, y \in X, t \in [0, 1]$  el punto  $(1-t)x+ty \in X$ .

El **casco convexo** de un conjunto  $X$  es el mínimo conjunto convexo que contiene a  $X$ .

Recordemos que un conjunto  $X$  es convexo si y sólo si para cualesquiera  $x_1, x_2, \dots, x_s \in X$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \geq 0$  tales que  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = 1$ , se tiene que  $\sum_{k=1}^s \lambda_k x_k \in X$ .

Para un conjunto  $S$  de números reales,  $\langle S \rangle_{\mathbb{Q}}$  es el espacio vectorial racional generado por  $S$ , es decir  $\{\sum q_i s_i \mid q_i \in \mathbb{Q}, s_i \in S\}$ .

Denotaremos  $\bar{S}$  a la cerradura del casco convexo racional de  $S$  en  $\langle S \rangle_{\mathbb{Q}}$ , es decir:

$$\{\sum q_i s_i \mid q_i \in \mathbb{Q}, q_i \geq 0, \sum q_i = 1, s_i \in S\}.$$

*Ejemplo 2.27.*  $S = \{2, 3\}$  entonces  $\langle S \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ .

*Ejemplo 2.28.*  $P = \{\pi, e\}$  entonces  $\langle P \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^2$ .

*Definición 2.29.* Los **puntos extremos** de un conjunto convexo  $S$  en un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{Q}$ , son los puntos en  $S$  tales que no están en un segmento abierto de  $S$ .

Es decir,  $x$  es punto extremo si y sólo si dados  $x, y, z \in S, t \in (0, 1), x = ty + (1-t)z \Rightarrow x = y = z$ .

Definimos un **politopo** como el casco convexo de un conjunto finito.

*Definición 2.30.* Sea  $A$  una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz.

1. Para un ciclo  $\gamma$  de  $G(A)$ , se define el **peso por símbolo de**  $\gamma$  como

$$wps_A(\gamma) = \frac{\log(wt_A(\gamma))}{l(\gamma)}.$$

2.  $WPS_A := \{wps_A(\gamma) \mid \gamma \text{ es un ciclo de } G(A)\}$ .
3. El **politopo de pesos por símbolo de A** es  $\overline{WPS}_A$ , es decir, la cerradura del casco convexo racional de  $WPS_A$  en  $\langle WPS_A \rangle_{\mathbb{Q}}$ .
4.  $EXT_A$  es el conjunto de puntos extremos en  $\overline{WPS}_A$ .

La sección 2.5 está dedicada a ejemplos del politopo de pesos por símbolo. Sin embargo, por lo pronto enfocaremos nuestra atención a algunas propiedades del politopo de pesos por símbolo. En particular, a continuación demostramos que el politopo de pesos por símbolo es un politopo.

**Proposición 2.31.** *Sea A una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz.*

1.  $\langle WPS_A \rangle_{\mathbb{Q}}$  es de dimensión finita.
2.  $\overline{WPS}_A$  es un politopo, es decir,  $\overline{WPS}_A$  es el casco convexo de un conjunto finito.
3.  $EXT_A \subseteq \{wps_A(\gamma) \mid \gamma \text{ es un ciclo simple}\}$ .

Antes de demostrar la proposición, veamos una observación que nos es de gran utilidad:

*Observación 2.32.* Sea  $\gamma$  un ciclo de  $G(A)$ . Sean ciclos simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tales que  $wt_A(\gamma) = wt_A(\alpha_1)wt_A(\alpha_2) \dots wt_A(\alpha_n)$  y  $\sum_{i=1}^n l(\alpha_i) = l(\gamma)$  (los cuales en general existen). Entonces

$$wps_A(\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{l(\alpha_i)}{l(\gamma)} wps_A(\alpha_i).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} wps_A(\gamma) &= \frac{\log(wt_A(\gamma))}{l(\gamma)} = \frac{\log(wt_A(\alpha_1) \dots wt_A(\alpha_n))}{l(\gamma)} \\ &= \frac{\log(wt_A(\alpha_1)) + \dots + \log(wt_A(\alpha_n))}{l(\gamma)} \\ &= \frac{l(\alpha_1)wps_A(wt_A(\alpha_1)) + \dots + l(\alpha_n)wps_A(wt_A(\alpha_n))}{l(\gamma)} = \sum_{i=1}^n \frac{l(\alpha_i)}{l(\gamma)} wps_A(\alpha_i). \end{aligned}$$

Nota que además  $0 \leq \frac{l(\alpha_i)}{l(\gamma)} \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^n \frac{l(\alpha_i)}{l(\gamma)} = 1$ .

□

*Demostración de la Proposición 2.31.* Por la observación anterior, tenemos que  $wps_A(\gamma)$  es una combinación convexa racional de  $\{wps_A(\alpha) \mid \alpha \text{ es un ciclo simple}\}$ , que es un conjunto finito. Por lo tanto  $WPS_A$  es un conjunto finito, y de allí  $\langle WPS_A \rangle_{\mathbb{Q}}$  es de dimensión finita.

Además, al ser  $WPS_A$  un conjunto finito,  $\overline{WPS_A}$  es casco convexo de un conjunto finito. Finalmente, es claro que los puntos extremos de  $\overline{WPS_A}$  son ciclos simples. □

Es importante mencionar que hay ejemplos en los que  $WPS_A \neq \overline{WPS_A}$ , como se verá en el ejemplo 2.39. También observe que  $WPS_A, \overline{WPS_A}, EXT_A$  pueden ser vistos ya sea como subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , o subconjuntos del espacio vectorial racional  $\langle WPS(A) \rangle_{\mathbb{Q}}$ .

*Observación 2.33.* 1. Si  $A$  y  $B$  definen la misma cadena de Markov, entonces por la Proposición 2.9 (2), decimos que

$$WPS_A = WPS_B + a, \quad a = \log \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right).$$

2. Si  $A, B$  satisfacen  $\lambda(A_1) = \lambda(B_1)$  (en particular si  $\beta_A = \beta_B$ ) y  $P, Q$  son las formas estocásticas de  $A, B$  respectivamente, entonces

$$\overline{WPS_P} = \overline{WPS_Q} \text{ si y sólo si } \overline{WPS_A} = \overline{WPS_B}.$$

*Demostración.* 1. Tenemos que

$$WPS_A = \{wps_A(\gamma) \mid \gamma \text{ es un ciclo}\}$$

$$wps_A(\gamma) = \frac{\log(wt_A(\gamma))}{l(\gamma)}.$$

Por la Proposición 2.21 (3) tenemos que si  $A, B$  definen la misma cadena de Markov, y  $\varphi : \Sigma_{P_0} \rightarrow \Sigma_{Q_0}$  donde  $\varphi$  es un mapeo finito a uno, y  $P, Q$  matrices irreducibles estocásticas, entonces para todo  $\gamma$  ciclo se tiene que  $wt_A(\gamma) = a^{l(\gamma)} wt_B(\varphi\gamma)$  donde  $a^{l(\gamma)} = \left( \frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)} \right)^{l(\gamma)}$ . En particular

$$\frac{\log(wt_A(\gamma))}{l(\gamma)} = \frac{\log(a^{l(\gamma)}wt_B(\gamma))}{l(\gamma)} = \frac{l(\gamma)\log a}{l(\gamma)} + \frac{\log(wt_B(\gamma))}{l(\gamma)} = \log a + wps_B(\gamma).$$

Por lo tanto  $WPS_A = WPS_B + \log\left(\frac{\lambda(A_1)}{\lambda(B_1)}\right)$ .

2. Se sigue del inciso anterior ya que  $\lambda(P_1) = 1$  para cualquier forma estocástica  $P$ .

□

Con esto, se puede ver que  $WPS_A, \overline{WPS}_A, EXT_A$  dependen del representativo de la cadena de Markov sólo de manera trivial. En particular los politopos  $\overline{WPS}_A$  y  $\overline{WPS}_B$  difieren sólo por traslaciones.

Definimos la **dimensión** de un politopo  $S$  como la dimensión del espacio vectorial generado por  $\{s - s' \mid s, s' \in S\}$ , y también definimos **rango** como la cardinalidad de un subconjunto maximal linealmente independiente.

**Proposición 2.34.** *La dimensión de  $\overline{WPS}_A$  es el rango de  $\Delta_A$ .*

*Demostración.* Por la observación anterior, podemos asumir que  $A$  es una  $\Delta$ -forma. Si  $\gamma$  es un ciclo de  $G(A)$ , entonces

$$wps_A(\gamma) = \frac{\log(wt_A(\gamma))}{l(\gamma)} \in \frac{\log(\Delta_A)}{l(\gamma)}$$

por lo tanto,  $\langle WPS_A \rangle_{\mathbb{Q}} \subset \langle \log(\Delta_A) \rangle_{\mathbb{Q}}$ .

$$\begin{aligned} \dim(\overline{WPS}_A) &\leq \dim(\langle WPS_A \rangle_{\mathbb{Q}}) \\ &\leq \dim(\langle \log \Delta_A \rangle_{\mathbb{Q}}) \\ &= \text{rango}(\Delta_A). \end{aligned}$$

Ahora, si  $\delta \in \Delta_A$ , entonces existen ciclos  $\gamma, \gamma'$  tal que  $l(\gamma) = l(\gamma')$  y  $\log(\delta) = \log(wt_A(\gamma)) - \log(wt_A(\gamma'))$ . Entonces  $\log(\delta) = l(\gamma)(wps_A(\gamma) - (wps_A(\gamma')))$  y por lo tanto

$$\log(\delta) \in \langle s - s' \mid s, s' \in \overline{WPS}_A \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

por lo tanto el rango de  $\Delta_A \leq \dim(\overline{WPS}_A)$   
y podemos concluir que  $\dim(\overline{WPS}_A) = \text{rango}(\Delta_A)$ .

□

Podemos ver entonces que la  $\Delta$ -forma de una cadena de Markov es natural, pues  $\overline{WPS}_A$  es un polítopo que tiene la misma dimensión que  $\langle WPS_A \rangle_{\mathbb{Q}}$  cuando  $A$  es una  $\Delta$ -forma, pero esto no sucede en general cuando  $A$  no es una forma estocástica. Un ejemplo de esto:

*Ejemplo 2.35.* Sea  $P = (p^t + q^t)$  donde  $p, q$  sean multiplicativamente independientes. Entonces  $\overline{WPS}_P$  es el intervalo  $[\log p, \log q]$  (de dimensión 1) en el espacio  $\langle \{\log p, \log q\} \rangle_{\mathbb{Q}}$  de dimensión 2. Ahora,  $A = 1 + (q/p)^t$  es una  $\Delta$ -forma para  $P$ , y  $\overline{WPS}_A$  es el intervalo  $[0, \log(q/p)]$  en el espacio  $\langle \log(q/p) \rangle_{\mathbb{Q}}$ .

## 2.5. Ejemplos del polítopo de pesos por símbolo

Si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es sub-base de  $\Gamma_A$ , entonces podemos visualizar a  $\overline{WPS}_A$  como un polítopo geométrico en  $\mathbb{Q}^n$ . Específicamente, podemos encajar  $\overline{WPS}_A$  en  $\mathbb{Q}^n$  con el mapeo

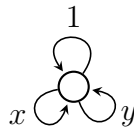
$$wps_A(\gamma) \mapsto \frac{(a_1, \dots, a_n)}{l}$$

donde  $wt_A(\gamma) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$ ,  $l(\gamma) = l$ .

*Ejemplo 2.36.* Sea  $A$  la matriz de  $1 \times 1$   $\sum a_m m$  donde  $a_m \in \mathbb{Z}$  y la suma está sobre los polinomios en  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de exponenciales multiplicativamente independientes. Entonces  $\overline{WPS}_A = \{\log(m) \mid a_m \neq 0\}$ .

*Ejemplo 2.37.* Sea  $A = 1 + x + y$  (esto es un caso particular del ejemplo anterior).

Tenemos que  $G(A)$  en este caso es:

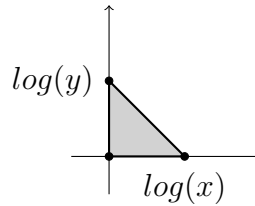


Observa que los ciclos en esta gráfica son aquellos determinados por las aristas de peso 1,  $x$ ,  $y$ ,

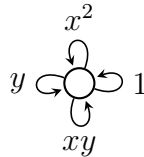
de lo cual tenemos que

$$\begin{aligned} wps_A(1) &= \frac{\log(1)}{1} = 0 \\ wps_A(x) &= \frac{\log(x)}{1} = \log(x) \\ wps_A(y) &= \frac{\log(y)}{1} = \log(y) \end{aligned}$$

Entonces tenemos en el  $WPS$  los puntos  $(0, 0)$ ,  $(\log(x), 0)$ ,  $(0, \log(y))$ , de lo cual  $WPS_A$  se ve de la siguiente forma:



*Ejemplo 2.38.* Sea  $A = 1 + x^2 + y + xy$ .

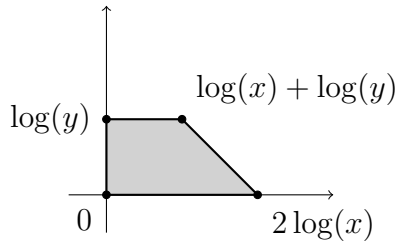


Los ciclos simples de la gráfica de nuevo están determinados por las aristas. Entonces

$$\begin{aligned} wps_A(1) &= \frac{\log(1)}{1} = 0 \\ wps_A(x^2) &= \frac{\log(x^2)}{1} = 2 \log(x) \\ wps_A(y) &= \log(y) \\ wps_A(xy) &= \log(xy) = \log(x) + \log(y) \end{aligned}$$

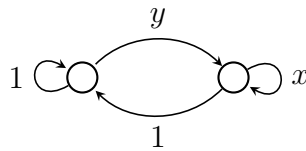
Y el  $WPS$  se ve así:





Ejemplo 2.39. Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{bmatrix}$

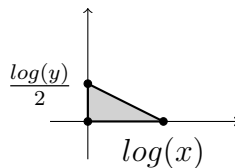
La gráfica ahora tiene dos vértices, con 3 ciclos simples que son aquellos definidos por la arista de peso 1, otro el definido por las aristas  $y$  y 1 (nota que éste tiene longitud 2), y finalmente el definido por la arista  $x$ .



Entonces:

$$\begin{aligned} wps_A(1) &= \frac{\log(1)}{1} = 0 \\ wps_A(y1) &= \frac{\log(y)}{2} \\ wps_A(x) &= \log(x). \end{aligned}$$

Y el  $WPS$  es:



Algo que es importante observar en este ejemplo, es que  $WPS_A = \overline{WPS}_A - I$  donde  $I$  es el interior del segmento determinado por 0 y  $\log x$ . En particular, tenemos que  $WPS_A \neq \overline{WPS}_A$ .

## 2.6. Algunas propiedades básicas del politopo de pesos por símbolo

*Definición 2.40.* Sea  $K$  un politopo en un espacio vectorial racional  $V$   $n$ -dimensional. Un **hiperplano soporte** de  $K$  es una traslación  $H$  de un subespacio lineal  $(n - 1)$ -dimensional de  $V$  tal que  $H \cap K \neq \emptyset$  y  $K$  está en uno de los semiespacios determinados por  $H$ .

Una **cara**  $F$  de  $K$  es un subconjunto de  $K$  para el cual existe un hiperplano soporte  $H$  tal que  $H \cap K = F$ .

**Lema 2.41.** Sea  $K$  un politopo en un espacio vectorial racional  $V$ , sea  $F$  una cara de  $K$ . Sean  $x, y \in K$  y supongamos que dado  $t \in (0, 1)$ ,  $tx + (1 - t)y \in F$ . Entonces

$$\text{para toda } t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in F.$$

Esto es, si el interior de un segmento en  $K$  está en  $F$ , entonces todo el segmento está en  $F$ .

*Demostración.* Dado que  $F$  es una cara, existe un hiperplano soporte  $H$  para  $K$  tal que  $H \cap K = F$ .

Sean

$$L = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0, 1]\}, \quad L^0 = \{tx + (1 - t)y \mid t \in (0, 1)\}.$$

Por hipótesis,  $L^0 \cap F \neq \emptyset$ , de lo cual  $L^0 \cap H \neq \emptyset$ . Si suponemos que  $L \not\subseteq H$  entonces  $L$  es transversal a  $H$  y entonces  $L^0$  intersecta a ambos semiespacios cerrados determinados por  $H$ . Pero  $L \subset K$  y  $K$  está contenido en sólo uno de los semiespacios cerrados, con lo cual tenemos una contradicción.

Entonces  $L \subset H$ . Dado que  $L \subset K$ ,  $L \subset (H \cap K) = F$ . □

*Definición 2.42.* Sea  $F$  una cara de  $\overline{WPS}_A$ . Definimos  $G_F = G_F(A)$  como la subgráfica de  $G(A)$  que consiste de todas las aristas de un ciclo  $\gamma$  con  $wps_A(\gamma) \in F$ .

**Proposición 2.43.** 1.  $G_F$  es no errante.

2. Un ciclo  $\gamma$  en  $G(A)$  está completamente contenido en  $G_F$  si y sólo si  $wps_A(\gamma) \in F$ .

*Demostración.* 1. Por construcción  $G_F$  está construido en torno a un ciclo.

2. El que un ciclo  $\gamma$  en  $G(A)$  está completamente contenido en  $G_F$  si  $wps_A(\gamma) \in F$  es por definición de  $G_F$  (2.42).

Para demostrar que si  $\gamma$  es un ciclo en  $G(A)$  y  $wps_A(\gamma) \in F$  entonces  $\gamma$  está completamente contenido en  $G_F$ , sea  $\gamma = e_1 \cdots e_n$  un ciclo en  $G_F$ . Por construcción, para  $i = 1, \dots, n$  existe un ciclo  $\alpha_i$  tal que  $e_i$  es una arista de  $\alpha_i$ , y  $wps_A(\alpha_i) \in F$ . Sea  $\alpha_i = e_i * \delta_i$  donde  $\delta_i$  es una trayectoria de  $t(e_i)$  a  $i(e_i)$ . Sea  $\delta = \delta_n * \delta_{n-1} * \cdots * \delta_1$  un ciclo en  $G(A)$ .

Entonces  $\sum_{i=1}^n l(\alpha_i) = l(\gamma) + l(\delta)$  y  $\prod_{i=1}^n wt_A(\alpha_i) = wt_A(\gamma) wt_A(\delta)$ .

Tenemos entonces que

$$\frac{l(\gamma)}{l(\gamma) + l(\delta)} wps_A(\gamma) + \frac{l(\delta)}{l(\gamma) + l(\delta)} wps_A(\delta) = \sum_{i=1}^n \frac{l(\alpha_i)}{\sum_{j=1}^n l(\alpha_j)} wps_A(\alpha_i).$$

Pero  $\frac{l(\delta)}{l(\gamma) + l(\delta)} wps_A(\delta) \in F$  dado que  $F$  es convexa. Entonces el interior del segmento determinado por  $wps_A(\gamma)$ , que es  $wps_A(\delta)$  está en  $F$ . Por el lema anterior (2.41) el segmento completo está en  $F$ . En particular  $wps_A(\gamma) \in F$ .

□

Ahora asociaremos cadenas de Markov inducidas a cada  $G_F$  y sus componentes irreducibles.

*Definición 2.44.* Para una cara  $F$  de  $\overline{WPS}_A$ , sea  $A_F$  la matriz  $A$  restringida a  $G_F$ . Es decir,  $A_F$  es la matriz indexada por los estados de  $G_F$  y

$$(A_F)_{IJ} = \sum_{e \in E(G_F), i(e)=I, t(e)=J} wt_A(e)^t.$$

Sea  $G_{F,i} = G_{F,i}(A)$ ,  $i = 1, \dots, k_F = k_F(A)$  los componentes irreducibles de  $G_F$  y sea  $A_{F,i}$  la restricción de  $A$  a  $G_{F,i}$ .

Cada  $A_{F,i}$  es una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz y define una cadena de Markov irreducible.  $A_F$  es una  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matriz y define una unión disjunta de cadenas de Markov irreducibles. Si  $F' \subset F$ , entonces  $A_{F'}$  es la restricción de  $A_F$ . Llamamos a la asociación  $F \rightarrow A_F$  donde  $F$  varía sobre las caras de  $\overline{WPS}_A$ , el **manejo** de cadenas de Markov asociadas a  $A$ .

*Observación 2.45.* Nota que si  $A$  y  $B$  definen la misma cadena de Markov, entonces para cualquier cara  $F$  de  $A$ ,  $A_F$  y  $B_{F'}$  definen la misma cadena de Markov, donde  $F'$  es la cara de  $\overline{WPS}_B$  que corresponde a la cara  $F$ .

Veamos ejemplos de ésto, usando ejemplos previamente vistos:

*Ejemplo 2.46.* Sea el ejemplo 2.37, donde  $A = 1 + x + y$ . Vimos que en este caso  $\overline{WPS}_A$  tiene tres caras unidimensionales:

$$F_1 = \overline{\{0, \log(x)\}} \quad F_2 = \overline{\{0, \log(y)\}} \quad F_3 = \overline{\{\log(x), \log(y)\}}$$

y las cadenas de Markov inducidas, que están dadas por:

$$A_{F_1} = 1 + x \quad A_{F_2} = 1 + y \quad A_{F_3} = x + y.$$

También tenemos 3 esquinas (que son caras 0-dimensionales):

$$F_4 = \{0\} \quad F_5 = \{\log(x)\} \quad F_6 = \{\log(y)\},$$

$$A_{F_4} = 1 \quad A_{F_5} = x \quad A_{F_6} = y.$$

*Ejemplo 2.47.* Ahora veamos el ejemplo 2.38,  $A = 1 + x^2 + y + xy$ . Observamos que  $\overline{WPS}_A$  tiene cuatro caras unidimensionales:

$$F_1 = \overline{\{0, 2 \log(x)\}} \quad F_2 = \overline{\{2 \log(x), \log(xy)\}} \quad F_3 = \overline{\{\log(xy), \log(y)\}} \quad F_4 = \overline{\{0, \log(y)\}}$$

con sus cadenas de Markov inducidas, dadas por:

$$A_{F_1} = 1 + y^2 \quad A_{F_2} = x^2 + xy \quad A_{F_3} = xy + y \quad A_{F_4} = 1 + y.$$

*Ejemplo 2.48.* Sea el ejemplo 2.39 donde  $A = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{pmatrix}$ .  $\overline{WPS}_A$  tiene las caras unidimensionales:

$$F_1 = \overline{\{0, \log(x)\}} \quad F_2 = \overline{\{0, \log(y^{\frac{1}{2}})\}} \quad F_3 = \overline{\{\log(y^{\frac{1}{2}}), \log(x)\}}$$

$$A_{F_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \quad A_{F_2} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{F_3} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

A continuación mostraremos que los homomorfismos de bloques y los homomorfismos de bloques finito a uno respetan el politopo de pesos por símbolo y el manajo de cadenas de Markov. Este resultado es fundamental en el artículo [5] para definir el manajo de invariantes. Sin embargo, dado que en el presente trabajo no usamos el manajo de invariantes, la demostración se omite.

**Teorema 2.49.** Sean  $P, Q$  ambas  $\mathbb{Z}_+[exp]$ -matrices irreducibles y estocásticas. Sea  $\pi : \Sigma_P \rightarrow \Sigma_Q$  un homomorfismo de bloques finito a uno. Entonces:

1.  $WPS_P = WPS_Q$  (y por ende  $\overline{WPS}_P = \overline{WPS}_Q$ ) y para cada cara  $F$  de  $\overline{WPS}_P$ ,  $\pi(\Sigma_{(P_F)_0}) = \Sigma_{(Q_F)_0}$ , y además existe un mapeo sobreyectivo  $\psi_F : \{1, \dots, k_F(P)\} \rightarrow \{1, \dots, k_F(Q)\}$  tal que  $\pi(\Sigma_{(P_{F,i})_0}) \subset \Sigma_{(Q_{F,\psi_F(i)})_0}$ .
2. Si  $\Sigma_{(P_{F,i})_0}$  tiene entropía topológica maximal en  $\Sigma_{(P_F)_0}$ , entonces  $\Sigma_{(Q_{F,\psi_F(i)})_0}$  tiene entropía topológica maximal en  $\Sigma_{(Q_F)_0}$  y  $\pi|_{\Sigma_{(P_{F,i})_0}}$  es un homomorfismo de bloques finito y sobreyectivo  $\Sigma_{P_{F,i}} \rightarrow \Sigma_{Q_{F,\psi_F(i)}}$ .
3. Para cada  $j \in \{1, \dots, k_F(Q)\}$ , existe  $i \in \psi_F^{-1}(j)$  tal que  $\pi|_{\Sigma_{(P_{F,i})_0}}$  es un homomorfismo de bloques finito y sobreyectivo  $\Sigma_{P_{F,i}} \rightarrow \Sigma_{Q_{F,j}}$ .
4. Si  $\pi$  es un isomorfismo de bloques entonces para cada cara  $F$ ,  $\psi_F$  es una biyección y  $\pi|_{\Sigma_{(P_{F,i})_0}}$  es un isomorfismo de bloques  $\Sigma_{P_{F,i}} \rightarrow \Sigma_{Q_{F,\psi_F(i)}}$ .

La demostración se puede encontrar en [5].

# Capítulo 3

## Sistemas de ciclos y cocientes de funciones zeta

La idea intuitiva de los *sistemas de ciclos de primer retorno* es la siguiente: consideramos sucesiones de símbolos (o elementos de nuestro  $\sigma$ -espacio) y escogemos una palabra o bloque del  $\sigma$ -espacio con la propiedad de que la única sobreposición es la trivial. Entonces un *ciclo de primer retorno* ocurre cada vez que encontramos dos ocurrencias de la palabra. A cada ciclo de primer retorno le corresponde un bloque intermedio de cierta longitud. Con estos bloques se define un nuevo  $\sigma$ -espacio determinado por una gráfica infinita que se construye de la siguiente manera: se fija un vértice distinguido  $u$  que se identifica con el bloque que determina los ciclos de primer retorno y por cada bloque intermedio de longitud  $n$ , ponemos un ciclo en  $u$  de longitud  $n$  (dos de estos ciclos son ajenos en vértices excepto por el vértice base  $u$ ).

Para su estudio, usaremos lo visto anteriormente en este trabajo. Hay conceptos que nos serán de gran utilidad tales como el *tiempo promedio de recurrencia* (1.56) o la *distribución estacionaria* (1.55). La idea empírica de estos conceptos mencionada en el capítulo 1 también nos es de utilidad.

### 3.1. Funciones zeta en sistemas dinámicos

Definimos la función zeta de Artin-Mazur, la cual nos ayudará a enlazar varios conceptos y visualizarlos en este contexto. Esta función es usada con frecuencia para estudiar funciones iteradas que ocurren en sistemas dinámicos. Requerimos los puntos periódicos  $p_n$  (1.67), y la ventaja que

nos dan al ser invariantes en sistemas dinámicos topológicamente transitivos (1.8).

También definimos la función zeta de Ihara, que está relacionada con la función zeta de Artin-Mazur, y nos permite asociar la función zeta con los determinantes de matrices, algo que nos será de gran utilidad.

*Definición 3.1.* Sea  $(M, \phi)$  un sistema dinámico tal que  $p_n < \infty$  para toda  $n \geq 1$ . Definimos la **función zeta** como

$$\zeta_\phi(t) := \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n} t^n\right).$$

Recordando la serie de Taylor en donde

$$e^x = \exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y usándolo sobre la función zeta, tenemos

$$\zeta_\phi(t) = 1 + p_1(\phi)t + \frac{1}{2}[p_2(\phi) + p_1(\phi)^2]t^2 + \frac{1}{6}[2p_3(\phi) + 3p_1(\phi)p_2(\phi) + p_1(\phi)^3]t^3 + \cdots$$

Otra observación importante es que

$$\log \zeta_\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(\phi)}{n} t^n$$

de lo cual por la formula de Taylor obtenemos

$$\frac{d^n}{dt^n} \log \zeta_\phi(t)|_{t=0} = n! \frac{p_n(\phi)}{n} = (n-1)! p_n(\phi).$$

Una característica importante de esta función es que es invariante bajo conjugación topológica.

También podemos encajar los números  $p_n(\phi)$  en una función de una forma más tradicional, que es usando la función generadora de puntos periódicos definida como:

$$g_\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(\phi) t^n.$$

Nota como ambas, la función zeta y la función generadora de  $\phi$  están determinadas por la misma información, que son los números  $p_n(\phi)$ . Sin embargo, la función zeta tiene algunas ventajas conceptuales y formales sobre la función generadora. Por ejemplo, la función zeta de un  $\sigma$ -espacio de tipo finito es el recíproco de un polinomio.

*Ejemplo 3.2.* Sea  $M$  un punto, y  $\phi$  el mapeo identidad. Tenemos  $p_n(\phi) = 1 \forall n \geq 1$ , entonces  $\zeta_\phi(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right)$ .

Dado que la serie de Taylor de  $-\log(1-t)$  es

$$-\log(1-t) = \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}.$$

De lo cual  $\zeta_\phi(t) = \exp(-\log(1-t)) = \frac{1}{1-t}$ .

*Ejemplo 3.3.* Sea  $M = X_{[2]}$  y  $\phi = \sigma_{[2]}$ . Entonces  $p_n(\phi) = 2^n$  y usando las series de Taylor observamos que

$$\zeta_\phi(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n}\right) = \exp(-\log(1-2t)) = \frac{1}{1-2t}.$$

*Ejemplo 3.4.* Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $M = X_A$ ,  $\phi = \sigma_A$ .

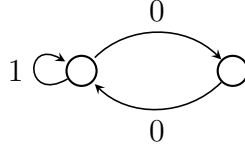
Tenemos por 1.68 que  $p_n(\phi) = \text{tr} A^n = \lambda^n + \mu^n$ , donde  $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  son las raíces de  $\chi_A(t) = t^2 - t - 1 = 0$ .

Entonces

$$\begin{aligned} \zeta_\phi(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n + \mu^n}{n} t^n\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n}\right) \\ &= \exp(-\log(1-\lambda t) - \log(1-\mu t)) = \frac{1}{(1-\lambda t)(1-\mu t)} = \frac{1}{1-t-t^2}. \end{aligned}$$

*Ejemplo 3.5.* Consideremos el  $\sigma$ -espacio par, que está definido con conjunto de bloques prohibidos  $\mathcal{F} = \{10^{2n+1}1 \mid n \geq 0\}$ ,  $\phi = \sigma_X$ . Usaremos la presentación  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{L})$  de  $X$  que se muestra en la siguiente figura:





Observa que el código de 1-bloques  $\mathcal{L}_\infty : X_G \rightarrow X_G$  es uno a uno, excepto en el punto  $0^\infty$ , donde es dos a uno. Si  $n$  es par, entonces todo punto de  $X_G$  de periodo  $n$  es la imagen de exactamente un punto en  $X_G$  del mismo periodo excepto  $0^\infty$ , que es la imagen de dos puntos de periodo  $n$ . Entonces  $p_n(\sigma_G) = p_n(\sigma_G) - 1$  cuando  $n$  es par. Si  $n$  es impar, entonces  $0^\infty$  no es la imagen de ningún punto en  $X_G$  con periodo  $n$ , por lo cual  $p_n(\sigma_G) = p_n(\sigma_G) + 1$  para  $n$  impar. Esto, junto con los resultados del ejemplo anterior muestra que:

$$p_n(\phi) = p_n(\sigma_G) = p_n(\sigma_G) - (-1)^n = \lambda^n + \mu^n - (-1)^n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \zeta_\Phi(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n + \mu^n - (-1)^n}{n} t^n\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n}\right) \\ &= \exp(-\log(1 - \lambda t) - \log(1 - \mu t) + \log(1 + t)) \\ &= \frac{1 + t}{(1 - \lambda t)(1 - \mu t)} = \frac{1 + t}{1 - t - t^2}. \end{aligned}$$

Nota como también podemos definir a la función zeta en términos de matrices (estocásticas). Esta es la función zeta de Ihara, la cual puede ser interpretada como un ejemplo de la función zeta de Artin - Mazur.

**Lema 3.6.** *Sea  $A$  una matriz entera no negativa,  $\chi_A(t)$  su polinomio característico, y  $\sigma_A$  el corrimiento asociado. Entonces*

$$\zeta_{\sigma_A}(t) = \frac{1}{t^r \chi_A(t^{-1})} = \frac{1}{\det(I - tA)}.$$

*A esta función se le conoce también como la función zeta de Ihara, y con esto demostramos que la función zeta de un  $\sigma$ -espacio de tipo finito es el recíproco de un polinomio.*

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  las raíces de  $\chi_A(t)$ . Tenemos que

$$p_n(\sigma_A) = \text{tr}(A^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_r^n. \quad (1.68)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma_A}(t) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_r^n}{n} t^n\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n} + \dots + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_r t)^n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_1 t} \times \dots \times \frac{1}{1 - \lambda_r t}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \chi_A(u) &= (u - \lambda_1) \dots (u - \lambda_r) = u^r (1 - \lambda_1 u^{-1}) \dots (1 - \lambda_r u^{-1}) \\ &= u^r \det(I - u^{-1}A). \end{aligned}$$

Sustituyendo  $t^{-1}$  con  $u$  tenemos que

$$\chi_A(t^{-1}) = t^{-r} (1 - \lambda_1 t) \dots (1 - \lambda_r t) = t^{-r} \det(I - tA).$$

Con lo cual concluimos que

$$\zeta_{\sigma_A}(t) = \frac{1}{t^r \chi_A(t^{-1})} = \frac{1}{\det(I - tA)}.$$

□

Con este resultado podemos dar cuatro formas equivalentes de ver la información que está contenida en la función zeta de un  $\sigma$ -espacio de aristas  $X_A$ . Una es a través de los eigenvalores distintos de cero de  $A$ . Nos referiremos como **lista** de números a una colección de números donde el orden es irrelevante, pero importa la multiplicidad. Es decir, la lista  $\{2, 1\}$  es diferente de  $\{2, 1, 1, 1\}$  pero es igual a la lista  $\{1, 2\}$ . Definimos  $sp^\times(A)$  como la lista de eigenvalores distintos a cero de  $A$  (donde al ser una lista, los eigenvalores repetidos están acorde a su multiplicidad).

**Corolario 3.7.** *Sea  $A$  una matriz entera no negativa. Entonces cada uno de los siguientes determina a los otros dos:*

1.  $\zeta_{\sigma_A}(t)$ ,
2.  $sp^\times(A)$ ,
3.  $\{p_n(\sigma_A)\}_{n \geq 1}$

*Demostración.* Es claro que las  $p_n$  determinan a la función zeta. Por el Teorema anterior (3.6) la función zeta puede ser expresada como:

$$\zeta_{\sigma_A}(t) = \frac{1}{\det(I - tA)} = \frac{1}{\prod_{\lambda \in sp^\times(A)} (1 - \lambda t)}.$$

Entonces la función zeta de  $\sigma_A$  determina  $sp^\times(A)$ . Finalmente,  $sp^\times(A)$  determina las  $p_n$  porque

$$p_n(\sigma_A) = tr A^n = \sum_{\lambda \in sp^\times(A)} \lambda^n.$$

□

## 3.2. Funciones zeta estocásticas y sistemas de ciclos

Nos interesa una función zeta que nos dé información en términos de los sistemas de ciclos. Para esto, queremos que las entradas de la matriz estén en  $exp[[t]]$ , pero al partir de una matriz estocástica con entradas mayores que 0, tenemos que sus entradas están en  $\mathbb{R}^+$ . Utilizaremos entonces el siguiente procedimiento:

Sea  $P$  una matriz en  $M(\mathbb{R}^+)$ . Definimos  $\bar{P}$  y  $\overline{\bar{P}}$  de la siguiente manera:

$$P \quad \leftrightarrow \quad \bar{P} \quad \leftrightarrow \quad \overline{\bar{P}} \quad (3.8)$$

$$P \quad \mapsto \quad P^s \quad \mapsto \quad (t)\bar{P} = (t)P^s \quad (3.9)$$

Con esto, tenemos que  $\overline{\bar{P}} \in M(\mathbb{Z}_+[exp][[t]])$ .

*Definición 3.10.* Para una matriz  $P$  se define la **función zeta estocástica** como

$$\zeta_P(t, s) = \frac{1}{\det(I - \overline{\overline{P}})}.$$

*Ejemplo 3.11.* Sea  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1^s & 2^s \\ 3^s & 1^s \end{pmatrix} \quad \overline{\overline{P}} = (t) \begin{pmatrix} 1^s & 2^s \\ 3^s & 1^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t[1^s] & t[2^s] \\ t[3^s] & t[1^s] \end{pmatrix}$$

Por lo tanto 
$$\zeta_P(t, s) = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 - t[1^s] & -t[2^s] \\ -t[3^s] & 1 - t[1^s] \end{pmatrix}} = \frac{1}{(1 - t[1^s])^2 - (t[3^s])(t[2^s])}.$$

Ahora observemos algunas propiedades del  $wps$  y el  $WPS$ :

*Observación 3.12.* Sea  $A$  una matriz estocástica. Entonces

$$wps_A(\gamma) = wps_A(\gamma^n).$$

*Demostración.* Tenemos que

$$wps_A(\gamma^n) = \frac{\log(wt_A(\gamma^n))}{nl(\gamma)} = \frac{\log(wt_A(\gamma))^n}{nl(\gamma)} = \frac{\log(wt_A(\gamma))}{l(\gamma)} = wps_A(\gamma).$$

□

Con este resultado, demostramos que el  $WPS$  no depende del vértice en el cual nos fijemos.

**Lema 3.13.** Sea  $I$  un vértice en  $G(A)$ . Entonces

$$WPS_A = \overline{\{wps_A(\gamma) | \gamma \text{ es un ciclo en } I\}}$$

*Demostración.* Es claro que  $WPS_A \supseteq \overline{\{wps_A(\gamma) | \gamma \text{ es un ciclo en } I\}}$ .

P.D.  $WPS_A \subseteq \overline{\{wps_A(\gamma) | \gamma \text{ es un ciclo en } I\}}$ .

Sea  $\gamma$  un ciclo. Tenemos dos casos:

1. Si  $\gamma$  pasa por  $I$ , entonces  $wps_A(\gamma) \in \overline{\{wps_A(\gamma) | \gamma \text{ es un ciclo en } I\}}$  y queda demostrado.
2. Supongamos que  $I \notin V(\gamma)$ .

Demostraremos que existe  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ , donde cada  $\gamma_n$  es un ciclo tal que  $I \in V(\gamma_n)$  y  $wps_A(\gamma_n)$  converge a  $wps_A(\gamma)$ .

Sea  $\rho_-$  una trayectoria que va desde algun vértice de  $\gamma$  a  $I$  (dicha trayectoria existe por irreducibilidad de  $A$ ). Sea  $\rho_+$  una trayectoria que va de  $I$  a el vértice inicial de  $\rho_-$ . Llamaremos  $\rho$  a la concatenación de  $\rho_-$  con  $\rho_+$ .

Sea  $\gamma_n = \gamma^n * \rho$ .

Entonces

$$\begin{aligned}
 wps_A(\gamma_n) &= wps_A(\gamma^n * \rho) \\
 &= \frac{\log wt_A(\gamma^n * \rho)}{nl(\gamma) + l(\rho)} \\
 &= \frac{n \log wt_A(\gamma) + \log wt_A(\rho)}{nl(\gamma) + l(\rho)} \\
 &= \frac{n}{n(l(\gamma) + l(\rho))} \frac{l(\gamma)}{l(\gamma)} \log wt_A(\gamma) + \frac{1}{nl(\gamma) + l(\rho)} \frac{l(\rho)}{l(\rho)} \log wt_A(\rho) \\
 &= \frac{nl(\gamma)}{nl(\gamma) + l(\rho)} wps_A(\gamma) + \frac{l(\rho)}{nl(\gamma) + l(\rho)} wps_A(\rho).
 \end{aligned}$$

Ahora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{nl(\gamma)}{nl(\gamma) + l(\rho)} wps_A(\gamma) + \frac{l(\rho)}{nl(\gamma) + l(\rho)} wps_A(\rho) \right) = wps_A(\gamma)$$

□

Sea  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}_+)$ . Definimos la matriz  $Q^{(v)}$  en relación a la matriz  $P$  de la siguiente forma: considera un elemento  $v$  con coordenadas  $i, j$  en la matriz  $P$ , entonces  $Q^{(v)}$  será la matriz obtenida al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz  $P$ .

Definimos

$$a_n^{(v)} = |\{x \in X_A \text{ tal que } \sigma^n(x) = x, x_0 = v, x_i \neq v \ \forall i = 1, \dots, n-1\}|,$$

$$f^{(v)}(t) = \sum_n^{\infty} a_n^{(v)} t^n$$

$$\mathfrak{C}_n^k = \{\text{composiciones de } n \text{ en } k \text{ enteros}\}$$

(Acerca de composiciones de enteros, se puede consultar en [1].)

Demostremos el siguiente teorema para matrices enteras; aunque se dejará pendiente el caso de matrices estocásticas, la idea de la demostración es la misma.

**Proposición 3.14.** *Sea  $A$  una matriz entera,  $B = B^{(v)}$  una matriz obtenida de la matriz  $A$ , donde  $v$  es un vértice en  $G(A)$ . Entonces:*

$$1 - f^{(v)}(t) = \frac{\zeta_B(t)}{\zeta_A(t)}.$$

*Demostración.* Por definición tenemos que  $\zeta_A(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A)}{n} t^n\right)$ .

Entonces  $1 - f^{(v)}(t) = \frac{\zeta_B(t)}{\zeta_A(t)}$  si y sólo si  $\frac{1}{1 - f^{(v)}(t)} = \frac{\zeta_A(t)}{\zeta_B(t)}$

si y sólo si  $\frac{1}{1 - f^{(v)}(t)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n} t^n\right)$

si y sólo si  $\log \frac{1}{1 - f^{(v)}(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n} t^n$ .

Ahora, usando series de Taylor tenemos que

$$\log \frac{1}{1 - f^{(v)}(t)} = f^{(v)}(t) + \frac{f^{(v)}(t)^2}{2} + \frac{f^{(v)}(t)^3}{3} + \dots$$

Entonces

$$\log \frac{1}{1 - f^{(v)}(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n} t^n$$

$$\text{si y sólo si } f^{(v)}(t) + f^{(v)}(t)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n} t^n.$$

Extraemos el coeficiente  $[t^n]$  de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n} t^n$ .

$$\text{si y sólo si } [t^n](f^{(v)}(t) + \frac{f^{(v)}(t)^2}{2} + \dots) = \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} & [t^n](f^{(v)}(t) + \frac{f^{(v)}(t)^2}{2} + \dots) \\ &= [t^n] \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^2}{2} + \dots \right) \\ &= [t^n] \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^2}{2} + \dots + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^k}{k} \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^n}{n} \right). \end{aligned}$$

Planteamos a  $\frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^2}{2}$  como una convolución de series de potencias, es decir:

$$\frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^2}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(v)} a_{n-i}^{(v)}.$$

Análogamente

$$\frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^k}{k} = \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{C}_n^k} a_{n_1}^{(v)} \dots a_{n_k}^{(v)}$$

$$\text{entonces } [t^n] \left( \sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^2}{2} + \dots + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^k}{k} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \dots + \frac{(\sum_{m=1}^{\infty} a_m(v) t^m)^n}{n} \\
 & = a_n^{(v)} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(v)} a_{n-i}^{(v)}}{2} + \dots + \frac{\sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{C}_n^k} a_{n_1}^{(v)} \dots a_{n_k}^{(v)}}{k} \\
 & \quad + \dots + \overbrace{a_1^{(v)} \dots a_1^{(v)}}^{n\text{-veces}} \\
 & = \frac{n a_n^{(v)}}{n} + \frac{n \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(v)} a_{n-i}^{(v)}}{2n} + \dots + \frac{n \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{C}_n^k} a_{n_1}^{(v)} \dots a_{n_k}^{(v)}}{nk} \\
 & \quad + \dots + \frac{n \overbrace{(a_1^{(v)} \dots a_1^{(v)})}^{n\text{-veces}}}{n} \\
 & = \frac{1}{n} \left( n a_n^{(v)} + \frac{n \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(v)} a_{n-i}^{(v)}}{2} + \dots + \frac{\sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{C}_n^k} a_{n_1}^{(v)} \dots a_{n_k}^{(v)}}{k} \right. \\
 & \quad \left. + \dots + n \overbrace{(a_1^{(v)} \dots a_1^{(v)})}^{n\text{-veces}} \right).
 \end{aligned}$$

Observa que  $na_n^{(v)}$  describe el número de ciclos que pasan por  $v$  una vez, de longitud  $n$ .  $na_n^{(v)}$  describe el número de ciclos que pasan por  $v$  una vez, de longitud  $n$ .

$\frac{n \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(v)} a_{n-i}^{(v)}}{2}$  describe el número de ciclos que pasan por  $v$  2 veces, de longitud  $n$ .

$\frac{n \sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{C}_n^k} a_{n_1}^{(v)} \dots a_{n_k}^{(v)}}{k}$  describe el número de ciclos que pasan por  $v$   $k$  veces, de longitud  $n$ .

$n \overbrace{(a_1^{(v)} \dots a_1^{(v)})}^{n\text{-veces}}$  describe el número de ciclos que pasan por  $v$   $n$  veces, de longitud  $n$ .



$$\begin{aligned}
\text{Entonces } & \frac{1}{n} \left( n a_n^{(v)} + \frac{n \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(v)} a_{n-i}^{(v)}}{2} + \dots + \frac{\sum_{(n_1, \dots, n_k) \in \mathfrak{C}_n^k} a_{n_1}^{(v)} \dots a_{n_k}^{(v)}}{k} \right. \\
& \left. + \dots + n \overbrace{(a_1^{(v)} \dots a_1^{(v)})}^{n\text{-veces}} \right) \\
& = \frac{1}{n} (p_n(A) - p_n(B)).
\end{aligned}$$

□

*Observación 3.15.* Podemos pensar en los puntos periódicos que pasan por  $v$  como la clase combinatoria que resulta de considerar las secuencias de los ciclos de primer retorno a  $v$ . La correspondencia en diccionarios de funciones generadoras de combinatoria analítica implican la proposición anterior. Esto se puede ver en [1].

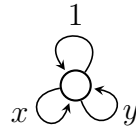
$$A(Z) = \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(A) - p_n(B)}{n} t^n \right)$$

representa los ciclos de primer retorno a  $v$ .

### 3.3. Ejemplos de politopos de pesos por símbolo generados por sistemas de ciclos

Del Lema 3.13, se afirma que los pesos por símbolo de los ciclos de primer retorno forman un conjunto generador del politopo de pesos por símbolo. Estos pesos están codificados en la serie de potencias asociada al sistema de ciclos. Vamos a representar gráficamente estos pesos para visualizar el sistema de ciclos en el politopo de pesos por símbolo, lo cual fue en buena parte la motivación para el presente trabajo.

*Ejemplo 3.16.* Consideremos el ejemplo 2.37 ( $A = 1 + x + y$ ). Tenemos la gráfica :



En este caso el *WPS* lo podríamos ver como 3 puntos, representando respectivamente a  $\frac{\log 1}{1}$ ,  $\frac{\log x}{1}$  y  $\frac{\log y}{1}$ .

$$\log(y)$$

$$\log(1)$$

$$\log(x)$$

Como se puede apreciar en el dibujo, una trayectoria no necesariamente pasa por la arista  $y$ . Quitamos entonces la arista  $x$  y en su lugar agregamos todas los posibles ciclos que incluyan a las concatenaciones de  $x$  con las otras aristas. Esto equivale a considerar el sistema de ciclos de primer retorno a  $y$ , es decir

$$1, y, 1 * x, y * x, 1 * x * x, \dots, 1 * x^n, y * x^n, \dots$$

Entonces los generadores del *WPS* se modifican, y tenemos en el *WPS* los siguientes puntos:

$$\frac{\log 1}{1}, \frac{\log y}{1}, \frac{\log 1x}{2}, \frac{\log 1x^2}{3}, \frac{\log yx^2}{3}, \dots, \frac{\log 1x^n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \log x, \frac{\log yx^n}{n+1} = \frac{n}{n+1} \log yx, \dots$$

Y se vería así:

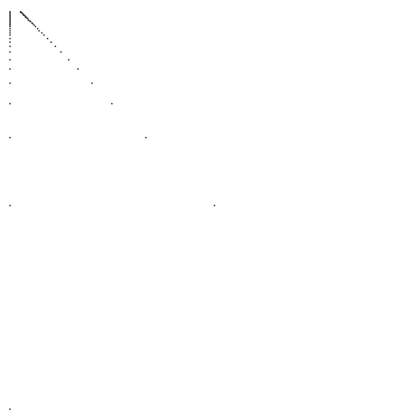


Figura 3.1: Quitamos el vértice  $\log(y)$ .

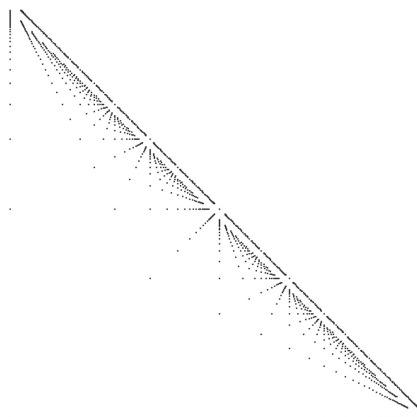


Figura 3.2: Para esta figura, quitamos el vértice correspondiente a  $x$  (además de que ya habíamos quitado  $y$ ).

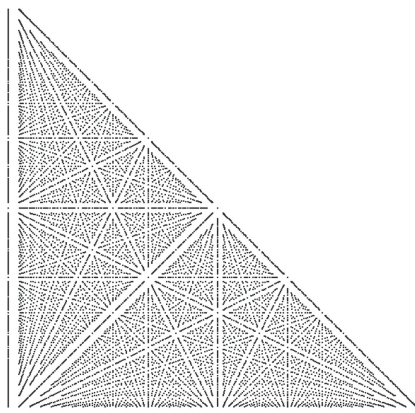


Figura 3.3: Aquí quitamos el vértice correspondiente a  $\log 0$ .

Esta última figura nos pareció de interés.

*Ejemplo 3.17.* Pasemos al ejemplo 2.38 donde tenemos  $A = 1 + x^2 + y + xy$ . En este caso  $WPS_A$  estaría generado por 4 puntos, que son los ciclos simples de la gráfica:

$$\begin{aligned} wps_A(1) &= \frac{\log(1)}{1} = 0 \\ wps_A(x^2) &= \frac{\log(x^2)}{1} = 2 \log(x) \\ wps_A(y) &= \log(y) \\ wps_A(xy) &= \log(xy) = \log(x) + \log(y) \end{aligned}$$

los cuales podemos representar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cc} \log(y) & \log(x) + \log(y) \\ \dot{\phantom{\log}} & \dot{\phantom{\log}} \\ \\ \dot{\phantom{\log}} & \dot{\phantom{\log}} \\ \log(1) & 2 \log(x) \end{array}$$

Ahora, iremos quitando algunos vértices, y sustituyéndolos con las representaciones de los respectivos sistemas de ciclos que se generan al quitarlos.

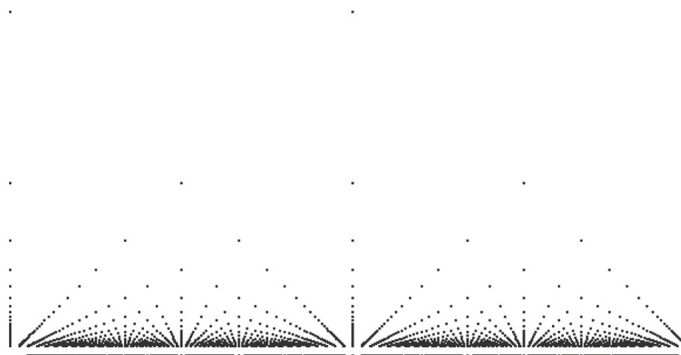


Figura 3.4: Quitamos los vértices  $\log(1)$  y  $2 \log(x)$ .

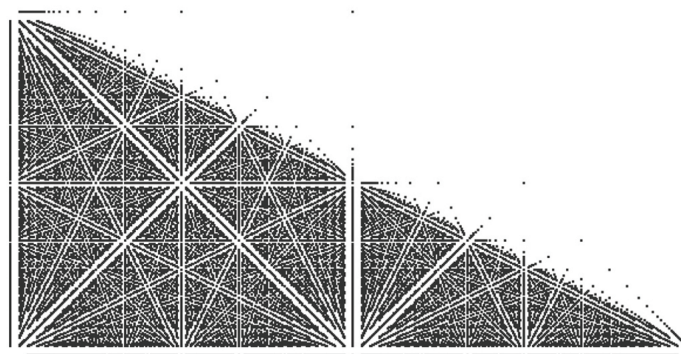


Figura 3.5: Ahora quitamos el vértice  $\log(y)$ .

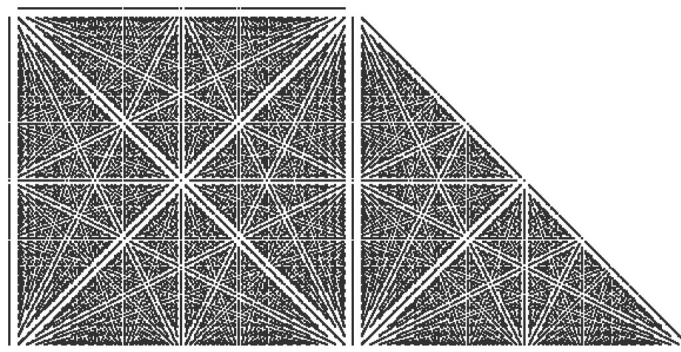
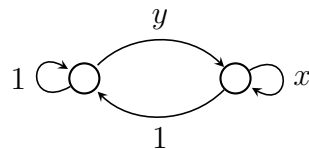


Figura 3.6: Quitamos  $\log(x) + \log(y)$ .

*Ejemplo 3.18.* Seguimos con el ejemplo 2.39 en el cual tenemos  $A = \begin{bmatrix} 1 & y \\ 1 & x \end{bmatrix}$ . Es fácil observar los ciclos simples de  $WPS_A$  observando la gráfica de nuevo:



Los generadores de sus ciclos simples son:

$$\begin{aligned} wps_A(1) &= 0 \\ wps_A(x) &= \log(x) \\ wps_A(y \cdot 1) &= \frac{\log(y)}{2} \end{aligned}$$

Estos tres puntos conforman un triángulo (2.39), y ahora pasaremos directamente a quitar vértices:

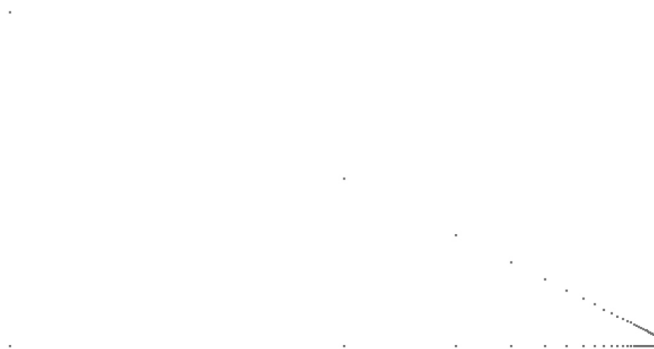
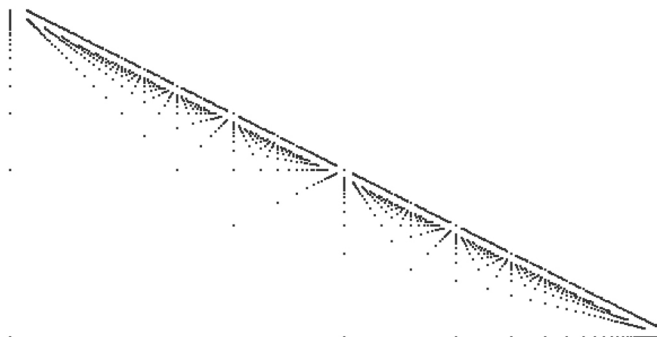
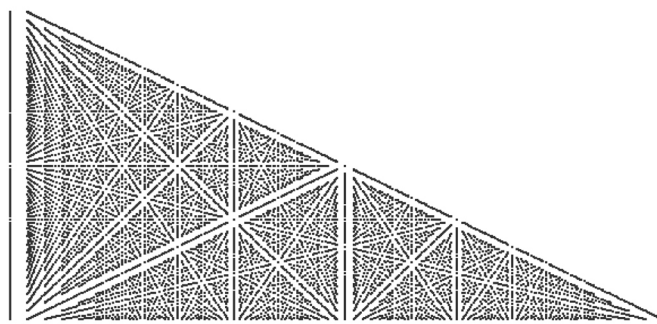


Figura 3.7: Quitamos el vértice  $\log(x)$ .

Luego quitamos  $\frac{\log(y)}{2}$ :



Y finalmente quitando  $\log(1)$  obtenemos:



Se puede ver que todos los politopos son iguales, y lo que cambian son sus generadores (3.13).

# Capítulo 4

## Reflexiones y algunas preguntas

Uno de los objetivos de esta tesis fue estudiar los politopos de pesos por símbolo generados por sistemas de ciclos. Llegamos a los politopos de pesos por símbolo en el capítulo 2, y los asociamos a los sistemas de ciclos en el capítulo 3. Se presentó una prueba explícita de la Proposición 3.14, en donde se puede ver la relación que tiene un sistema de ciclos con la función zeta estocástica de una matriz  $A$  y la función zeta estocástica de la matriz que resulta al remover un renglón y una columna de la matriz  $A$  que corresponden a un vértice. Es también interesante cómo se logra representar gráficamente a generadores del politopo de pesos por símbolo de los sistemas de ciclos.

En el artículo [5] el politopo de pesos por símbolo es estudiado en profundidad, y se demuestra su utilidad en el estudio de clases de homomorfismos dinámicos definidos en términos de sus propiedades de codificación (Teorema 2.49).

Los sistemas de ciclos son del tipo *shifts de Bernoulli* y son representables en series de potencias formales. Estas representaciones se exhiben en relaciones de las funciones zeta asociadas a matrices estocásticas. Las herramientas que brindan las funciones generadoras en el estudio de propiedades de los sistemas a los que están asociadas son amplias. Por ejemplo, en el caso de los sistemas de ciclos se pueden encontrar algunos resultados importantes en [10] y [11]. En este contexto es de interés que obtuvimos gráficas *fractalesas* (palabra inventada y explicada en la introducción) a partir de remover vértices (generadores) de los politopos de pesos por símbolos, y se plantea de forma tentativa, ver si en efecto se forman patrones autosimilares.

*Pregunta.* Con el método que hemos propuesto y en el caso particular de sistemas de ciclos: ¿Las figuras que obtenemos son autosimilares? (Fig 4.1)

Planteemos otra pregunta, ahora en el contexto de los embaldosados o teselados. Nuestra prop-



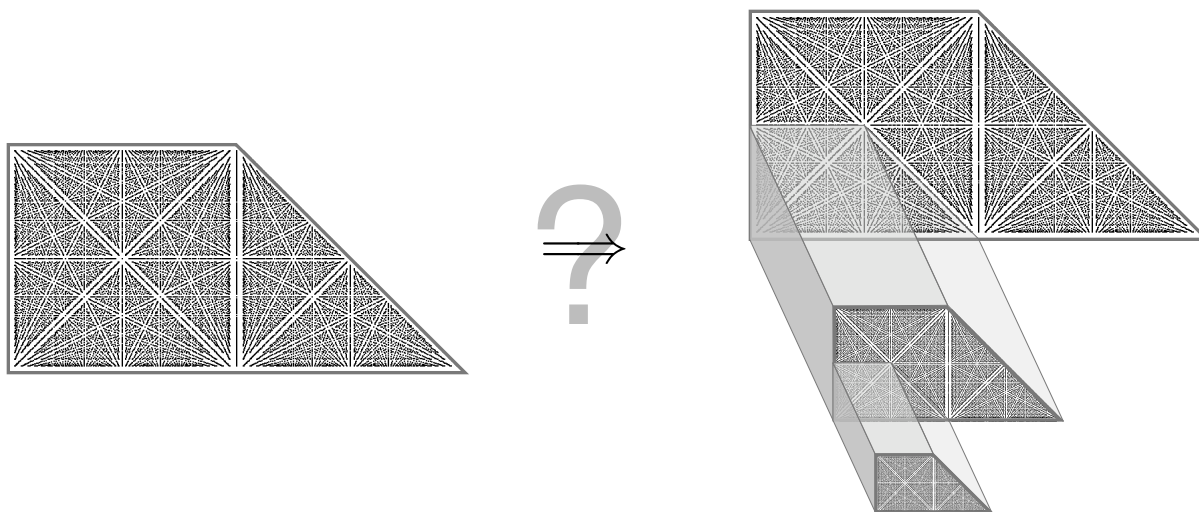


Figura 4.1: ¿Es autosimilar?

Esta es construir baldosas con polítopos de pesos por símbolo, junto con sistemas de ciclos. Vamos a describir a *grosso modo* los pasos necesarios para construir embaledosados. Veremos dos ejemplos de embaledosados; uno que admite puntos periódicos y otro clásico de Penrose. Para esto daremos breve e informalmente algunas nociones básicas de embaledosados; nos fijaremos únicamente en embaledosados del plano.

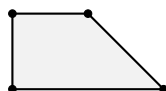
Un *embaledosado* del plano es una colección de figuras planas, que llamaremos *protobaldosas*, con las que es posible cubrir el plano sin superposiciones, y sin dejar huecos. Una manera de clasificar los embaledosados es en periódicos y aperiódicos. Un embaledosado es *periódico* si acepta traslaciones en al menos dos direcciones no paralelas, y en caso contrario es *aperiódico*. Dicho de otra manera, los embaledosados periódicos son aquellos embaledosados en los que es posible hacer un paralelogramo (en general más grande que las baldosas) que pueda ser repetido para producir el mismo embaledosado. Decimos que un conjunto de protobaldosas es aperiódico si *únicamente admite embaledosados no periódicos*. Ahora, un embaledosado aperiódico es un embaledosado obtenido de un conjunto aperiódico de baldosas, pero un embaledosado aperiódico también puede obtenerse de un conjunto de protobaldosas no necesariamente aperiódico. Determinar si es posible embaledosar el plano con un conjunto de protobaldosas y si los embaledosados que resultan en caso positivo son o no periódicos es un problema indecidible.

Ahora, nosotros proponemos como protobaldosas a los polítopos de pesos por símbolo, junto con generadores asociados a sistemas de ciclos de primer retorno. Para simplificar la notación, en los ejemplos subsecuentes no escribiremos la variable  $t$  que denota la longitud de los ciclos; este abuso de notación no deberá causar confusión. Vamos a considerar dos tipos de operaciones

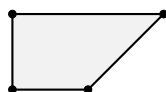
para construir las protobaldosas. Una es la de “remover” ciclos, lo cual en esencia corresponde a considerar primeros retornos. Otra operación relativamente sencilla que se puede realizar con los sistemas de ciclos simples es simplemente multiplicar la función que representa a dichos ciclos por ella misma. Utilizando estas dos operaciones se pueden obtener generadores asociados a uno o varios sistemas de ciclos.

Veamos a continuación un ejemplo de embaledado periódico. Proponemos las siguientes figuras, con sus respectivas ecuaciones, como base de las protobaldosas.

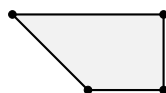
$$f_1(x) = 1 + x^2 + y + xy \quad (\text{que de hecho corresponde al ejemplo 2.38}).$$



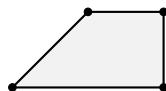
$$f_2(x) = 1 + x + y + x^2y$$



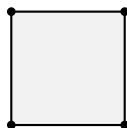
$$f_3(x) = x + y + x^2 + x^2y$$



$$f_4(x) = 1 + xy + x^2 + x^2y$$



$$f_5 = 1 + x + y + xy$$



Usando estos polítopos de pesos por símbolo, y aplicando los procedimientos ya mencionados de multiplicar por la misma matriz y remover vértices, generamos el ejemplo 4.2. No entraremos en detalle en cómo generamos las respectivas baldosas, pero se debe observar que para embaldosar tomamos en cuenta que las caras que fueron unidas tuvieran los mismos generadores. Solamente en la baldosa que está marcada con un tache, rompimos intencionalmente esta regla.

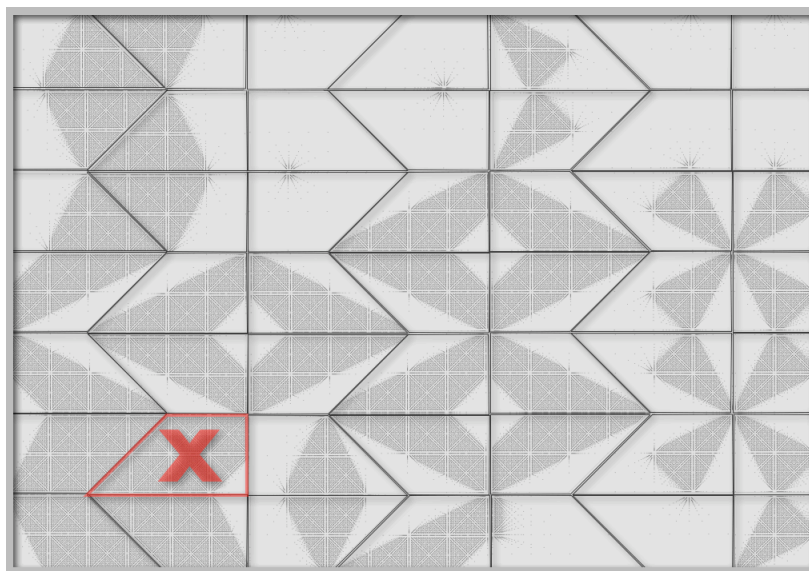


Figura 4.2: Ejemplo de reglas de embaldosado, usando generadores asociados a sistemas de ciclos

Ahora veamos un ejemplo de embaldosados aperiódicos. Algunos de los ejemplos más conocidos de embaldosados aperiódicos son los embaldosados de Penrose. Fijaremos nuestra atención en uno de ellos, conocido como *los rombos de Penrose* o el tercer embaldosado de Penrose.

Este embaldosado tiene a dos rombos como protobaldosas: ambos tienen todas sus aristas de longitud 1:

- El rombo delgado, con ángulos de 36 y 144 grados respectivamente.
- El rombo grueso que tiene ángulos de 72 y 108 grados.

Estos rombos, sólo con estas condiciones, nos permiten hacer un embaledado periódico, por lo cual distinguiremos sus respectivas aristas con flechas y flechas dobles (también se pueden usar colores) como se muestra en la figura 4.3.

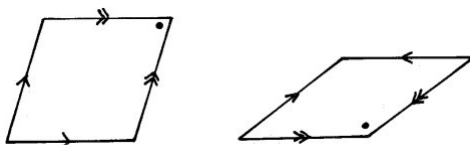


Figura 4.3: *Rombo grueso y rombo delgado*

La condición para unir las baldosas es que las flechas coincidan: baldosas adyacentes deben tener flechas iguales y con la misma dirección en sus aristas comunes. En la figura 4.4 se muestra un ejemplo de embaledado de rombos de Penrose.

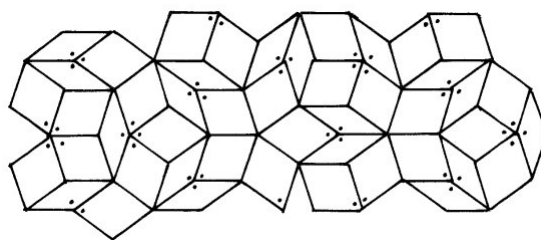
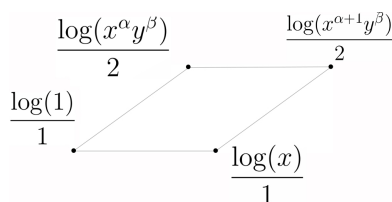


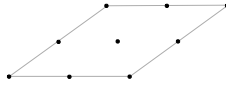
Figura 4.4: *Ejemplo de embaledado de rombos de Penrose*

Consideramos la ecuación  $f_0(x, y) = 1 + x + x^\alpha y^\beta + x^{\alpha+1} y^\beta$ , donde  $\alpha = \cos 36$  y  $\beta = \sin 36$  para plantear el rombo delgado. Los puntos extremos del politopo de pesos por símbolo de esta función son  $\frac{\log(1)}{1}$ ,  $\frac{\log(x)}{1}$ ,  $\frac{\log(x^\alpha y^\beta)}{2}$ ,  $\frac{\log(x^{\alpha+1} y^\beta)}{2}$ . Éstos, junto con su casco convexo se representan en la siguiente figura.



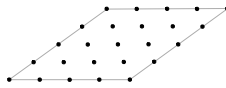
Multiplicamos  $f_0$  por sí mismo (es decir,  $f_0 \cdot f_0$ ). Esto nos da más puntos en nuestra figura.

$$f_1(x, y) = f_0(x, y)^2$$



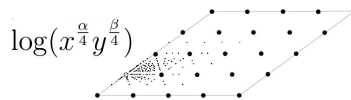
Repetimos lo hecho en el paso anterior

$$f_2(x, y) = f_1(x, y)^2$$

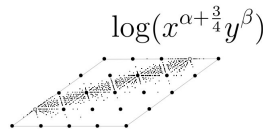


Ahora, recordando la ecuación 3.14, tenemos que  $\zeta_B(t) = \frac{\zeta_A(t)}{1 - f^{(v)}(t)}$ . Acorde a esto, iremos quitando algunos vértices y viendo en la figura los sistemas de ciclos que generan. Iremos denotando con  $q_i$  a los vértices que quitemos.

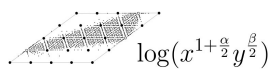
$$f_3(x, y) = \frac{f_2(x, y)}{1 - q_3(x, y)} \quad q_3(x, y) = x^{\frac{\alpha}{4}} y^{\frac{\beta}{4}}$$



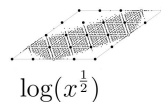
$$f_4(x, y) = \frac{f_3(x, y)}{1 - q_4(x, y)} \quad q_4(x, y) = x^{\alpha + \frac{3}{4}} y^{\beta}$$



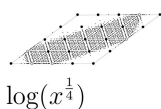
$$f_5(x, y) = \frac{f_4(x, y)}{1 - q_5(x, y)} \quad q_5(x, y) = x^{1 + \frac{\alpha}{2}} y^{\frac{\beta}{2}}$$



$$f_6(x, y) = \frac{f_5(x, y)}{1 - q_6(x, y)} \quad q_6(x, y) = x^{\frac{1}{2}}$$



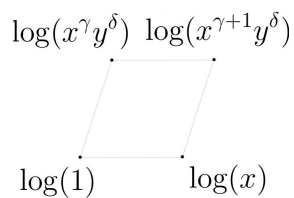
$$f_7(x, y) = \frac{f_6(x, y)}{1 - q_7(x, y)} \quad q_7(x, y) = x^{\frac{1}{4}}$$



$$f_8(x, y) = \frac{f_7(x, y)}{1 - q_8(x, y)} \quad q_8(x, y) = x^{1+\frac{3}{4}\alpha} y^{\frac{3}{4}\beta}$$

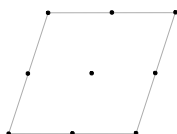


Ahora el rombo grueso. Su ecuación es  $g_0(x, y) = 1 + x + x^\gamma y^\delta + x^{\gamma+1} y^\delta$  donde  $\gamma = \cos 72$  y  $\delta = \sin 72$ . Esencialmente repetiremos lo hecho con el rombo delgado.

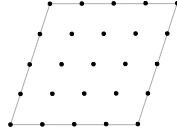


Sea:

$$g_1(x, y) = g_0(x, y)^2$$

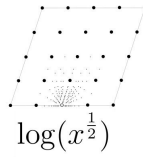


$$g_2(x, y) = g_1(x, y)^2$$



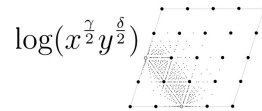
$$g_3(x, y) = \frac{g_2(x, y)}{1 - k_3(x, y)}$$

$$k_3(x, y) = x^{\frac{1}{2}}$$



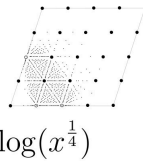
$$g_4(x, y) = \frac{g_3(x, y)}{1 - k_4(x, y)}$$

$$k_4(x, y) = x^{\frac{\gamma}{2}} y^{\frac{\delta}{2}}$$



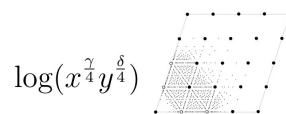
$$g_5(x, y) = \frac{g_4(x, y)}{1 - k_5(x, y)}$$

$$k_5(x, y) = x^{\frac{1}{4}}$$

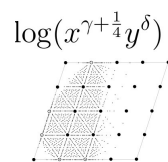


$$g_6(x, y) = \frac{g_5(x, y)}{1 - k_6(x, y)}$$

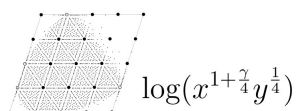
$$k_6(x, y) = x^{\frac{\gamma}{4}} y^{\frac{\delta}{4}}$$



$$g_7(x, y) = \frac{g_6(x, y)}{1 - k_7(x, y)} \quad k_7(x, y) = x^{\gamma + \frac{1}{4}} y^\delta$$



$$g_8(x, y) = \frac{g_8(x, y)}{1 - k_8(x, y)} \quad k_8(x, y) = x^{1 + \frac{\gamma}{4}} y^{\frac{\delta}{4}}$$



Con estas figuras, y con condiciones similares a las de los rombos de Penrose, pero en términos de generadores en cada arista, formamos baldosas como la figura 4.5.

Las condiciones para unir las baldosas (los rombos) en términos algebraicos se dejan como tema pendiente, pues la figura 4.5 se realizó de forma intuitiva, es decir, fijándonos en los dibujos, y checando que tuviésemos la misma cantidad de generadores en cada arista al momento de pegarlos.

*Pregunta.* ¿Se pueden encontrar condiciones algebraicas suficientes para embaldosar el espacio con polítopos de pesos por símbolo asociados a sistemas de ciclos?



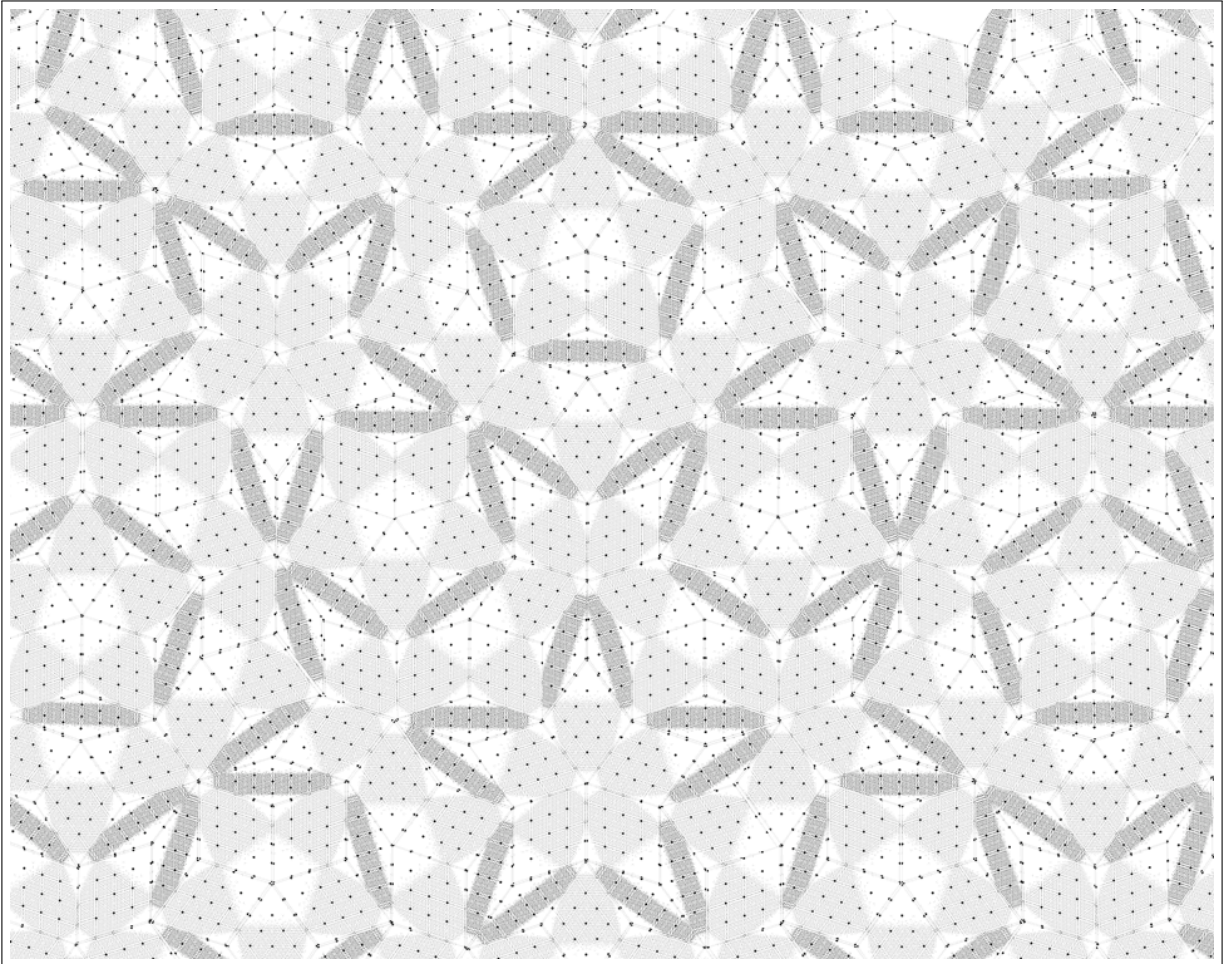


Figura 4.5: Ejemplo de embaldosado con rombos de Penrose

# Bibliografía

- [1] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press. 2009.
- [2] G. Grimmett y D. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press. Third Edition. 2001.
- [3] B. Kitchens. Linear algebra and subshifts of finite type. *Contemporary Mathematics V.* 26, 1984.
- [4] D. Lind and B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press 1995.
- [5] B. Marcus and S. Tuncel. The weight-per-symbol polytope and scaffolds of invariants associated with Markov chains. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **11** (1991) 129-180.
- [6] K. Petersen. *Ergodic Theory*. Cambridge University Press. 1983.
- [7] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill, 1953.
- [8] H.L. Royden. *Real Analysis*. MacMillan Publishing Company, 1988.
- [9] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Springer Verlag. 1981.
- [10] M. Boyle, J. Buzzi, R. Gómez. Almost isomorphism for countable state Markov shifts. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 592 (2006) 23-47.
- [11] R. Gómez. Positive K-Theory for finitary isomorphisms of Markov Chains. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 23 (2003) 1485-1504.
- [12] N.G. de Bruijn. Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane. *Non Nederl. Akad. Wetensch A* 84 (1981) 39-66.