



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS ESPECTRAL EN LOS ELEMENTOS
VIBRATORIOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA
(ÁREA MECÁNICA)**

PRESENTA:

JOSÉ GERARDO PACHECO VILLEGAS



DIRECTOR DE TESIS: DR. ANGEL ROJAS SALGADO

MÉXICO, D.F.

2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



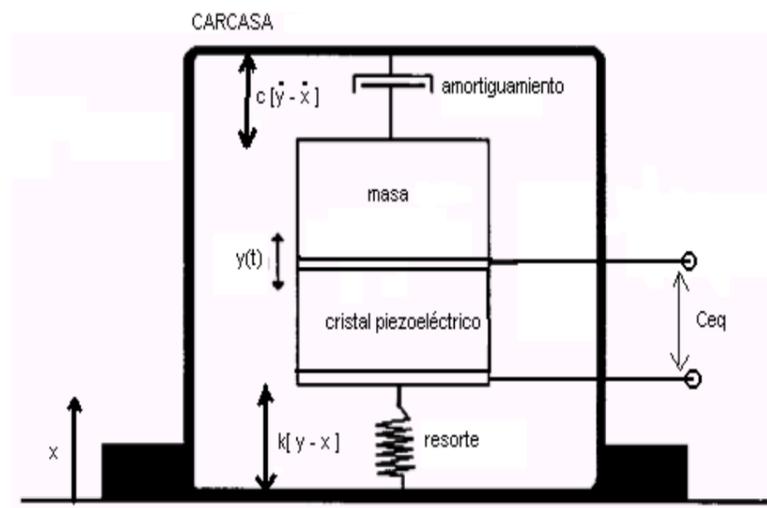
UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Fundamentos de análisis espectral en los elementos vibratorios



José Gerardo Pacheco Villegas

Asesor: Dr. Ángel Rojas Salgado

Fundamentos de análisis espectral en los elementos vibratorios.

Contenido.	Pag.
1 Introducción.	3
2 Elementos para el Análisis Espectral.	
2.1 Osciloscopio.	7
2.1.1 Componente de deflexión Horizontal	8
2.1.2 Circuitos de base de tiempo.	9
2.1.3 Componente de Deflexión vertical.	11
2.1.4 Controles en el osciloscopio.	11
2.1.5 Mediciones en el osciloscopio.	12
2.2 Analizador de Espectro	
2.2.1 El dominio de la frecuencia.	13
2.2.2 Aparato analizador de espectro.	13
2.2.3 Resolución de ancho de banda	15
2.2.4 Controles en el analizador de espectro.	15
2.2.5 Dominio de la frecuencia versus dominio del tiempo.	16
3. Análisis Armónico o de Fourier.	
3.1 Serie de Fourier.	17
3.2 Determinación de los coeficientes de Fourier.	18
3.3 Funciones Pares e Impares.	19
3.4 Extensión del intervalo de desarrollo.	21
3.5 Forma compleja de la serie de Fourier.	21
3.6 Integral de Fourier.	24
3.7 Transformada de Fourier.	25
3.8 Transformada inversa	26
3.9 Teoremas básicos para la transformada de Fourier.	27
3.10 Muestreo de una señal o Función	30
3.11 Convolución	31
3.13 Transformada discreta de Fourier	38
3.14 Transformada rápida de Fourier.	41
4. Vibraciones Mecánicas.	
4.1 Sistemas de un grado de libertad.	46
4.2 Vibración Libre.	46
4.3 Método de la Energía.	48
4.4 Método de Rayleigh.	49
4.5 Vibración libre con amortiguamiento.	50
4.6 Vibraciones forzadas.	54

4.7	Vibraciones Forzadas con amortiguamiento.	58
5	El análisis espectral en las vibraciones mecánicas.	
5.1	Mediciones y pruebas en vibraciones mecánicas	60
5.2	Descripción de señales	62
5.3	Señal espectral	66
5.4	Función de transferencia	69
5.5	Ruido blanco	71
5.6	Sensores y transductores	75
6.	Conclusiones.	83
	Apéndice	
	Nomenclatura	85
	Referencias Bibliográficas.	86

Capítulo 1. Introducción.

En la naturaleza las partículas son cuerpos susceptibles de vibrar, debido a una perturbación de alguna fuerza que puede ser externa o interna al campo de su alrededor, tal como el gravitacional o el electromagnético. Sabemos que vibran las partículas pequeñas como el electrón, cuerpos medianos como un cuerpo rígido que gira, hasta cuerpos de masa grande que ocasionan un sismo o un maremoto.

En lo que toca a vibraciones mecánicas, lo que puede vibrar pueden ser masas, elementos estructurales, máquinas, sistemas mecánicos. etc. Por lo que es de interés saber cómo se comportan estos cuerpos, como un sistema mecánico al ser perturbado por una fuerza de excitación, así mismo saber cuál es su respuesta, y de ser posible efectuar la medición de algún parámetro o variable de interés tal como, el desplazamiento, velocidad, aceleración, la amplitud y frecuencia de vibración.

En la física, o en la mecánica, se conocen varios métodos para el análisis y solución a este problema, entre ellos establecer un modelo, por medio de ecuaciones diferenciales, para su planteamiento se utiliza el principio de conservación de la energía, el principio de mínima acción, las funciones de Lagrange y de Hamilton en coordenadas generalizadas.

Los sistemas más considerados en la ingeniería son los sistemas lineales que son los que cumplen con la propiedad de linealidad en sentido matemático y el principio de superposición, aunque también están los sistemas no lineales.

En este trabajo se tiene por objeto abordar por otro camino el estudio y valoración relativa a las vibraciones, para ello se propone utilizar (una rama de la matemática e ingeniería conocida como Análisis Espectral).

Esencialmente en el análisis espectral trata de convertir una señal o función del dominio en el tiempo a otra en el dominio de la frecuencia, y se relaciona con una función matemática conocida como transformada de Fourier, esta permite hacer una descomposición espectral de los componentes de una señal o de una onda y además permite con el espectro generado reconstruir la función original mediante la aplicación de la transformada inversa. La transformada contiene información sobre la amplitud de frecuencia y fase de la función o señal de interés.

Para llevar a cabo el estudio y la medición de la vibración mecánica de un sistema específico, se requiere conocer y emplear la teoría del análisis espectral, también el uso de instrumentos tales como lo son el osciloscopio, el analizador de espectro, los sensores y transductores, relacionándolos con la teoría de las vibraciones mecánicas. En el presente trabajo estos temas se abordan y reparten de la siguiente forma:

Capítulo 2. Elementos para el análisis espectral.

En esta parte consideramos como elementos necesarios a los instrumentos de medición, tal como al osciloscopio y al analizador de espectro.

El osciloscopio es un instrumento que permite observar las variaciones en una gráfica ya sea voltaje u otra función contra el tiempo, sobre una pantalla iluminada, puede usarse para medir formas complicadas de onda, y puede medir funciones diferentes de las eléctricas por medio de un transductor adecuado.

La pantalla tiene forma de retícula, o cuadrícula, cuenta con dos ejes, el vertical en el cual medimos o leemos generalmente un voltaje o bien otra función, en escala lineal o logarítmica en decibeles y en el eje horizontal generalmente el tiempo en segundos.

El osciloscopio permite mostrar señales periódicas, medir la amplitud de la función, pero también puede rastrear una señal, efectuar el muestreo de una función, para efectuar una discretización.

El analizador de espectro.

Este instrumento muestra la señal directa en el dominio de la frecuencia y exhibe la gráfica de la amplitud contra frecuencia. La función básica del analizador es la de poder efectuar mediciones muy finas de la amplitud para varias frecuencias de una señal.

El analizador de espectro puede ser utilizado para determinar la respuesta en circuitos, amplificadores, filtros, radares, que son elementos electrónicos, pero también se puede aplicar en otros campos de la ingeniería en las que se trabaje en bajas frecuencias como en geología, ciencia de la tierra, oceanografía, ingeniería estructural, vibraciones mecánicas, etc. con la ayuda de un transductor para convertir el movimiento mecánico en una señal eléctrica.

Cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia o sea cuando la variable independiente es la frecuencia, se tiene una comparación segura para dos eventos, (que efectuando la comparación en el dominio del tiempo).

Empleando en forma correcta la serie de Fourier y la transformada de Fourier para funciones continuas y la transformada discreta de Fourier para funciones discretas, permite realizar una transformación de una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

Así mismo cuando se trabaja en el dominio del tiempo no se logra dar una imagen completa, porque en este dominio es limitada la muestra para el nivel bajo de armónicas o cuando hay distorsión, mientras que en el dominio de la frecuencia pueden mostrarse tales distorsiones.

También se pueden llevar a cabo mediciones correctas de amplitud para diferentes frecuencias de una señal. La amplitud se puede medir en una escala vertical que puede ser logarítmica o lineal, mientras que en la parte horizontal normalmente se tendrá a la frecuencia.

Capítulo 3. Análisis Armónico o de Fourier.

El análisis armónico o de Fourier, permite evaluar una función dada en una serie de funciones seno y coseno o sea funciones armónicas y se aplica a fenómenos que tienen bien definido su periodo.

Las series presentadas en el dominio de la frecuencia incluyen la frecuencia fundamental y sus múltiplos, las cuales son funciones armónicas.

Las armónicas se dibujan en el eje vertical donde cada armónica es representada con una línea vertical, denominada línea espectral.

El espectro es una función que puede representar a la amplitud, la potencia, etc. y la variable independiente generalmente será la frecuencia, este espectro puede ser una cantidad compleja.

La serie contiene n términos donde n es un número entero, contiene dos coeficientes generales a_n y b_n , asociados con las funciones trigonométricas coseno y seno.

A partir de la serie se puede obtener la integral de Fourier, y a su vez desde esta se obtiene la transformada de Fourier y su respectiva inversa.

La serie de Fourier es formulada para funciones periódicas mientras que la transformada es para funciones no necesariamente periódicas pero que sean continuas.

También se dan un grupo de teoremas que se conocen como teoremas Espectrales. Donde se observa que para obtener la derivada de una función en la frecuencia sólo se

necesita multiplicar por $i\omega$ a la función transformada, o para obtener la segunda derivada por el factor $(-i\omega)^2$, de la misma manera para obtener la integral de una función se multiplica la función transformada por el factor $1/i\omega$, o para obtener la segunda integral se multiplica por $-1/\omega^2$ por lo que puede concluirse que es más fácil operar en el campo de la frecuencia que en del tiempo, ya que en este dominio se tendrá que realizar mucho esfuerzo en el cálculo.

Lo anterior es para funciones o señales continuas, pero se puede trabajar en forma discreta, una señal o función continua se puede representar en forma discreta, conociendo sus valores en ciertos puntos en el tiempo, esto se logra a través de un muestreo, que consiste en aplicar un tren de impulsos a una función, se puede auxiliar con un osciloscopio, con este conjunto de puntos se puede reconstruir la función original, el muestreo sirve de enlace entre las señales continuas y las discretas.

La transformada discreta de Fourier (DFT) es una versión de la transformada de Fourier pero en el campo discreto usando un algoritmo matemático, puede usarse en un analizador de espectro y obtener el cálculo de esta y mostrar el resultado en la salida.

Se considera que la (DFT) como un conjunto de líneas espectrales es una buena aproximación de la transformada de Fourier, la (DFT) y su inversa tienen propiedades similares a sus contrapartes continuas. Se tiene una versión dentro del análisis espectral conocida como transformada rápida de Fourier (FFT) y requiere menos cálculos que la (DFT).

Capítulo 4. Vibraciones Mecánicas.

En esta parte se inicia el análisis de sistemas mecánicos, resultando que el movimiento armónico es la forma más sencilla de oscilación de las vibraciones libres y forzadas. Solamente se refiere a sistemas de un grado de libertad, aunque pueden existir sistemas con dos o más grados de libertad.

En las vibraciones mecánicas se estudian sistemas lineales que son los que cumplen con la linealidad y el principio de superposición a que haremos referencia.

Aunque también hay sistemas no lineales y tienen sus métodos de estudio, pero no serán tratados en este trabajo.

También se tratan las oscilaciones libres, como son ejemplo el péndulo y sistema masa-resorte, el método de la energía.

Por último se trata el estudio de las oscilaciones forzadas provocadas por una fuerza excitadora y sus características.

Capítulo 5. El análisis espectral en las vibraciones mecánicas.

Usualmente en ingeniería nos encontramos con fenómenos en los cuales se conoce su comportamiento y su record histórico de valores generalmente en función del tiempo, o bien a través de mediciones llevadas a cabo en un experimento determinado, y se pueden predecir valores futuros, a estos fenómenos se conocen como deterministas, pero también se presentan fenómenos no deterministas que producen un único historial de tiempo, y no es factible reproducirlos con detalle, estos se conocen como aleatorios.

En esta parte se trata de las funciones o señales del tipo aleatorio, como se justifican y se aproximan a una función periódica, cuando en un evento la función tiende a un valor constante para tiempos largos y se dice que es estacionaria (o sea que no tiene dependencia en el tiempo) se puede estimar estadísticamente, usando el valor promedio o el valor medio cuadrático.

Se introduce la función de correlación y a partir de esta se obtiene la función de potencia de densidad espectral, que se aprovecha para obtener la respuesta en la frecuencia de un sistema, sujeto a vibración.

Así podemos estimar con la densidad espectral correspondiente a la salida o respuesta si conocemos la entrada y la función de transferencia de algún sistema. También si se quiere se puede conocer las características del sistema en la función de transferencia si se conocen la entrada y la respuesta de algún sistema.

Se presenta el ruido blanco, que es una componente indeseable en la medición de una señal, tal ruido se puede establecer por medio del valor medio o la varianza, y que lleva a un valor constante de densidad espectral de ruido blanco, pero esto se presenta solo en un ancho de banda limitado.

El promedio de la respuesta al ruido blanco se representa con una línea espectral y que se adiciona a la respuesta correspondiente a la entrada o excitación.

Empleamos la función de transferencia para determinar la respuesta conociendo la entrada y las características del sistema y utilizando la función de densidad espectral, entonces conoceremos la respuesta de un sistema sujeto a vibración, en forma de espectro, que es lo que nos interesa conocer.

Para llevar a cabo la medición de un sistema sujeto a vibración o algún equipo o máquina, se requiere de un dispositivo para excitarlo, de un sensor o transductor adecuado para convertir una función dinámica a una función eléctrica, de un analizador de espectro, para llevar a cabo la deseada medición de la respuesta.

2 Elementos para el Análisis Espectral.

2.1 Osciloscopio.

El osciloscopio es un instrumento que nos permite observar oscilaciones formadas por una grafica de voltaje contra tiempo. Este instrumento puede usarse para medir detalladamente formas complicadas de onda a partir de micro frecuencias y puede medir fenómenos de tipo diferente a los eléctricos por medio de algún transductor apropiado. También es muy versátil en las mediciones de comparación, cálculos, automatización y control. Pueden seguir señales de frecuencia del orden de 1 Khz hasta 1 Ghz, o aun mayores.

El mecanismo de despliegue es un de tubo de rayos catódicos, este permite observar variaciones de alta velocidad, el tubo genera un haz delgado de electrones (rayo catódico) que choca contra la pantalla fluorescente que se encuentra en el extremo del tubo, este rayo está cargado electrónicamente y se puede desviar en forma rápida y exacta mediante la aplicación adecuada de campos electromagnéticos colocados en su trayectoria, pudiendo responder casi instantáneamente a variaciones rápidas de señales de alta frecuencia, esta capacidad permite al tubo de rayos catódicos (CRT) muestre virtualmente cualquier tipo de forma de onda en la pantalla del osciloscopio, los campos provocan deflexiones en el haz de electrones en su trayecto mediante el uso de placas deflectoras.

La figura desplegada en la pantalla será una gráfica de la variación del voltaje con respecto al tiempo o la grafica de la variación de alguna señal con respecto al tiempo. El osciloscopio es un instrumento capaz de desplegar y medir una amplia variedad de señales y está constituido básicamente por 6 componentes o subsistemas que son:

- a) Tubo de rayos catódicos (CRT)
- b) Deflexión vertical
- c) Deflexión Horizontal
- d) Circuito base de tiempo
- e) Circuito de punta de prueba
- f) Circuitos de calibración

La pantalla es creada mediante el movimiento del rayo del foco o por una línea de electrones de alta velocidad a través de una placa recubierta de fósforo del (CRT).

En la figura 1, se muestra el diagrama de bloque para un osciloscopio básico, donde se aprecia cómo interactúan las diferentes componentes para obtener un despliegue de la señal observada. La señal se detecta de una fuente, mediante una punta de prueba del osciloscopio que detecta una señal de voltaje o bien convierte una señal de otra especie a una de voltaje.

La señal de entrada generalmente necesita ser amplificada para activar el despliegue del (CRT), esta función la lleva a cabo el subsistema de deflexión vertical del (CRT), creándose dentro del tubo un haz de electrones mediante un cañón de electrones. El haz se reflexiona en forma vertical en proporción a la amplitud del voltaje aplicado a las placas de deflexión vertical. La señal amplificada de entrada esta monitoreada por el subsistema de deflexión Horizontal y tiene la función de barrer horizontalmente el haz de electrones a través de la pantalla a una velocidad uniforme.

La deflexión uniforme del haz de electrones en las direcciones vertical y horizontal hace que el punto de luz producido por el haz de electrones trace una línea a través de la pantalla del tubo de rayos catódicos.

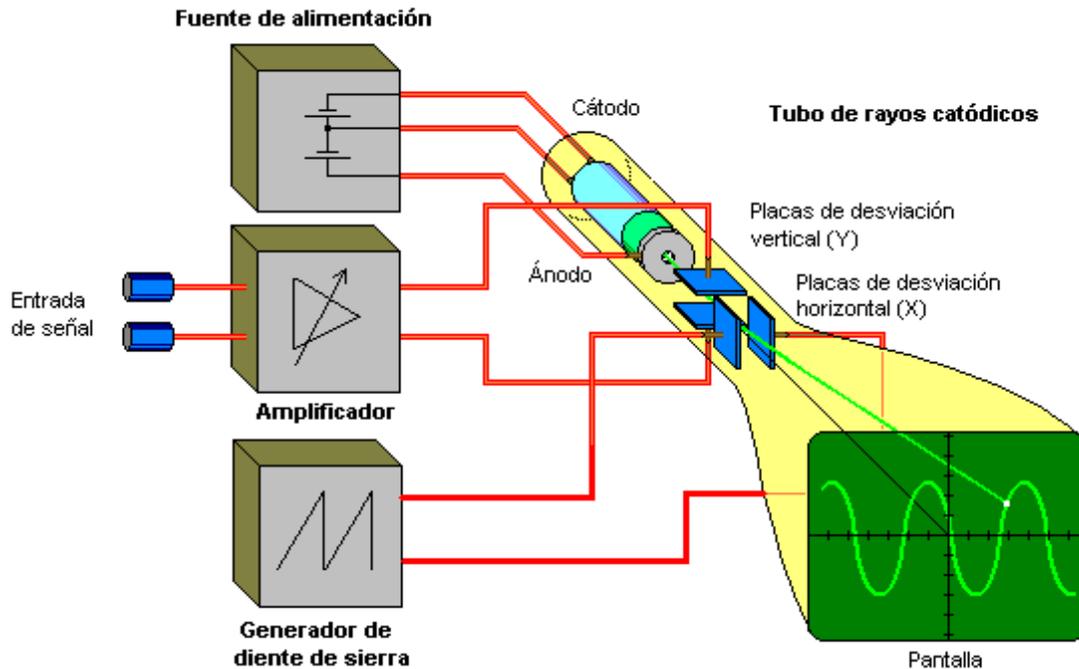


Fig. 1 Diagrama de bloque para un osciloscopio básico

Si la entrada es periódica y se sincronizan correctamente el barrido horizontal con la deflexión vertical los puntos de luz recorrerá la misma trayectoria una y múltiples veces.

2.1.1 Componente de Deflexión Horizontal.

Esta componente requiere de la generación de señales tipo diente de sierra, la sincronización y la magnitud. Esta componente consiste de un amplificador y circuitos de base de tiempo.

Se emplea el amplificador para agrandar las señales externas de entrada, que es la variación de una señal mostrada en el eje Y o vertical contra otra que se encuentra a lo largo del eje X, o sea el eje horizontal, entonces se dice que el osciloscopio está trabajando en el modo X-Y de despliegue.

También se usa el amplificador horizontal para agrandar las ondas de barrido generadas en los circuitos de base de tiempo. Esta manera de operar se llama modo Y contra T, que es la variación de la señal de entrada que aparece en el eje vertical Y contra el tiempo que aparece a lo largo del eje horizontal.

Las variaciones de señal contra el tiempo, es decir modo (Y-T), para lograr este tipo de despliegue es necesario amplificar un voltaje en las placas de deflexión horizontal tal que resulte para la posición horizontal del haz, sea proporcional al tiempo.

2.1.2 Circuitos de Base de Tiempo.

Es común que un osciloscopio muestre variaciones de la señal con respecto al tiempo, es decir el modo (Y-T), para lograr este tipo de despliegue es necesario amplificar un voltaje a las placas de deflexión horizontal para que la posición horizontal del haz sea proporcional al tiempo, adicionalmente se deberá aplicar este mismo voltaje repetidas veces a las placas horizontales para que el haz pueda volver a trazar la misma trayectoria con rapidez para que el punto móvil de luz se vea como una línea nítida.

Se sincroniza dicho voltaje con la señal periódica que se esté mostrando para que se trace la misma trayectoria y aparezca una imagen estable en la pantalla del osciloscopio. Los circuitos base de tiempo, son las componentes que efectúan dichas operaciones.

La señal generada por los circuitos base de tiempo se le denomina “onda de barrido” y tiene la forma de diente de sierra, en la figura. 2. se muestra un ciclo, V_h representa el voltaje aplicado a las placas horizontales del (CRT).

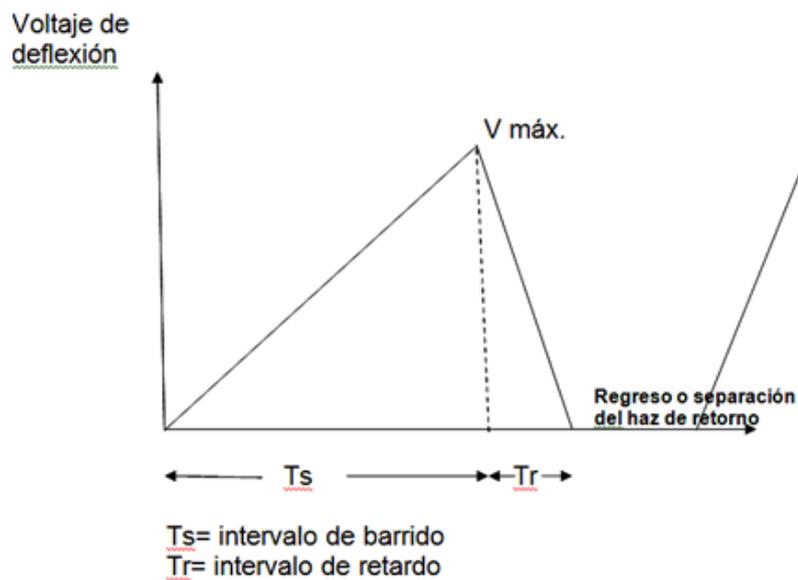


Fig. 2 Un ciclo de onda de barrido.

El haz de electrones se localiza en la orilla izquierda de la pantalla en $T=0$ y el voltaje de la onda de barrido al ir aumentando hará que el haz y el punto recorra horizontalmente la pantalla y después de T segundos el punto se habrá movido horizontalmente toda la pantalla de T_1 a T_2 , mientras que V_h disminuirá hasta cero y el punto regresará al extremo izquierdo de $T=0$ hasta T_1 , V_h aumenta linealmente con el tiempo y la posición del punto en este intervalo será proporcional al tiempo transcurrido.

El control tiempo/división en el tablero del instrumento determina el tiempo que le toma a la onda de barrido para mover el punto a través de una división de la pantalla.

En la figura. 3 se considera un diagrama de los circuitos de base de tiempo para saber cómo se genera una onda de barrido, donde una señal de disparo aumenta primero al generador de pulsos de la base de tiempo

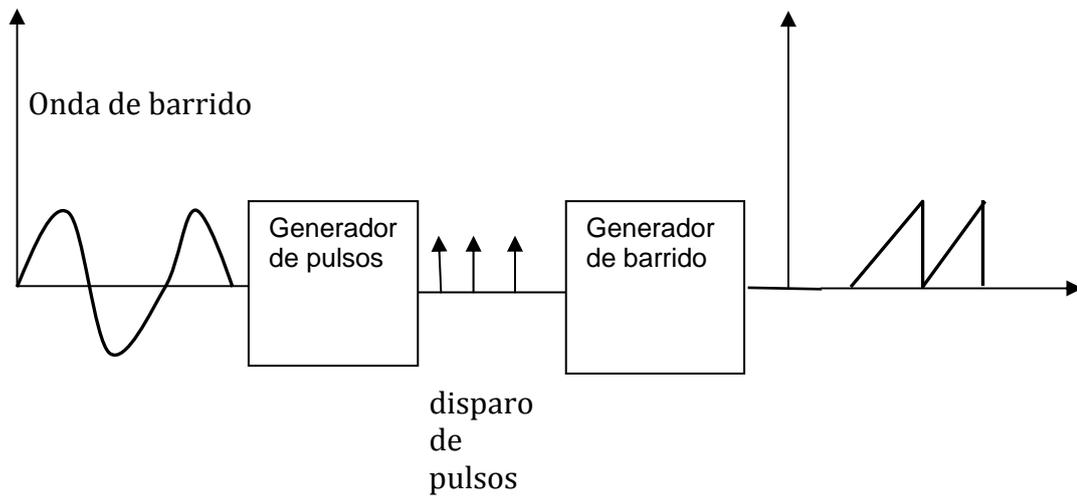


Fig. 3. Generación de Ondas de Barrido.

Cada vez que esta señal de disparo cruza una condición de nivel de pendiente y nivel de voltaje, el generador de pulsos emite un pulso, y este pulso dispara al generador de barrido que comienza a producir un ciclo de onda de barrido.

La manera de relacionarse con el tiempo, la señal de disparo, los pulsos emitidos y la onda de barrido, se muestra en la figura. 4.

El punto de la señal de disparo en el que el generador de pulsos emite un pulso que se controla mediante los interruptores disparo de pendiente y de nivel de disparo del osciloscopio.

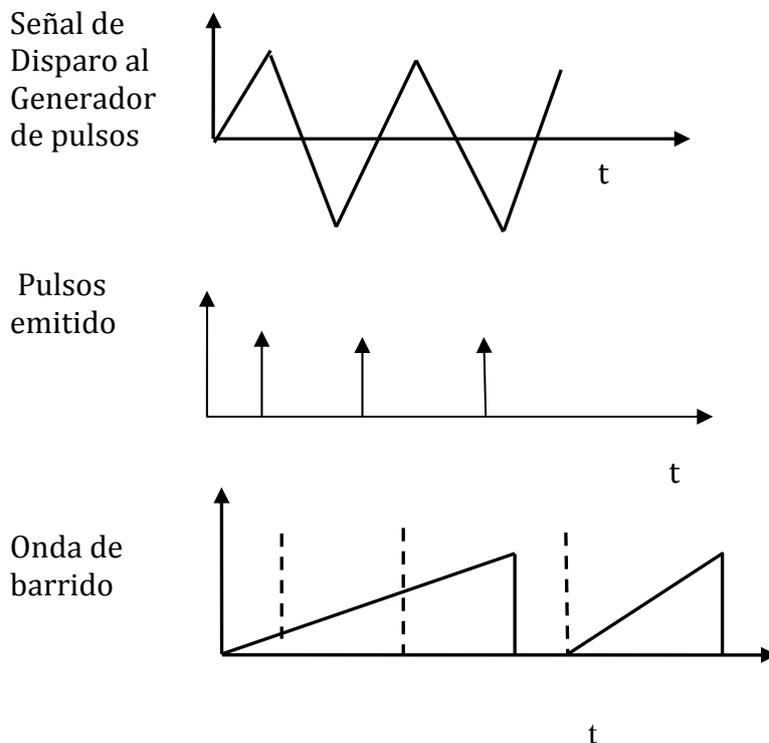


Fig. 4. Relación entre la señal de disparo, pulsos emitidos y onda de barrido en el tiempo T.

El osciloscopio cuenta con generador de base de tiempo, también llamado generador de barrido que provee una onda tipo diente de sierra para la deflexión horizontal de una línea rastreada, la rampa positiva de una onda tipo diente de sierra es lineal y la pendiente está determinada por tiempo/división en el frente del panel de control.

2.1.3 Componente de Deflexión Vertical.

En un subsistema capaz de atenuar o amplificar las señales de entrada para que se produzcan figuras correctas cuando se apliquen señales de interés a las placas deflectoras del (CRT) ya que en ocasiones se pueden presentar señales muy altas o muy débiles con respecto a las adecuadas que aproximadamente se aplican de 10 a 20 volts a las placas deflectoras del (CRT) para desviar el haz de electrones 1 cm.

La mayor frecuencia de una señal que un osciloscopio puede mostrar es un ancho de banda, el rango típico es de 10 a 20 Mhz, y puede ser mayor hasta de 100 Mhz, en laboratorios de alta calidad.

El ancho de banda se relaciona con el tiempo elevado, el cual es una cualidad de cómo el osciloscopio puede responder a un cambio instantáneo del nivel de voltaje en la entrada.

El ancho de banda ($B\omega$) y el tiempo elevado (T_e) están relacionados por una simple ecuación que es:

$$B\omega = \frac{0.35}{T_e}$$

ambas determinan la deflexión vertical.

Por ejemplo para un amplificador vertical de un osciloscopio a 17 Mhz se puede determinar rápidamente el tiempo elevado T_e de una onda cuadrada puede tener:

Mostrando la forma de onda en el osciloscopio sin distorsión.

$$T_e = \frac{0.35}{17} \text{ Mhz} = 20 \text{ n seg.}$$

2.1.4 Controles en el osciloscopio.

Las perillas de control y los interruptores en el tablero de un osciloscopio pueden variar de un modelo a otro, o de un instrumento a otro, pero los principales controles que se emplean con mayor frecuencia son:

- a. Potencia de alimentación o de línea.
- b. Intensidad - controla la brillantez del trazo del osciloscopio.
- c. Enfoque-cuando se ajusta este control el trazo en la pantalla del osciloscopio se hace más agudo y definido.
- d. Localizador de haz.-Regresa el despliegue a la zona del tubo (CRT).
- e. Posición vertical.- Controla el centrado vertical del trazo.
- f. Posición horizontal .-Controla la posición central de la imagen.
- g. Tiempo de barrido o tiempo / div.-Controla el tiempo que el punto toma para moverse horizontalmente en la pantalla. Los tiempos típicos varían de $1 \mu\text{s/cm.}$ a 10 s/cm.
- h. Tiempo variable.- Control de vernier que permite escoger una velocidad continua de tiempo / div.
- i. Fuente de disparo.- Selecciona la fuente de la señal de disparo.
- j. Amplificador de Barrido (x 10).- Este control permite disminuir el tiempo por cada división de una onda de barrido.

- k. Disparo de pendiente- Determina si el circuito de pulsos en la base de tiempo responderá a una señal de disparo con pendiente positiva o negativa.

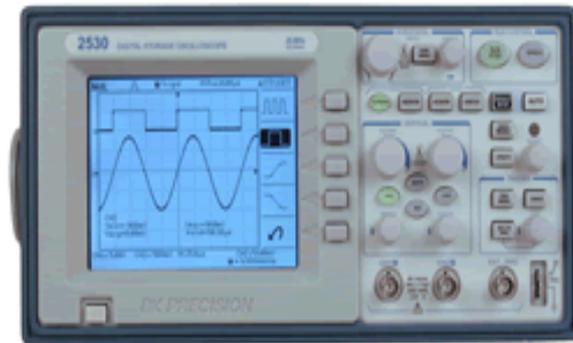


FIG. 5. Osciloscopio.

2.1.5 Mediciones con el Osciloscopio.

En virtud de que el osciloscopio es un instrumento muy flexible y versátil. Puede usarse para medir diversos parámetros mediante el uso de señales (CD o CA). Usando un sólo canal es capaz de efectuar mediciones de voltaje, corriente, tiempo, etc.

Se puede medir el voltaje a partir de la imagen presentada como se describe a continuación.

Empleando el modo de barrido de disparo, exhibe la variación de voltaje aplicado a su entrada vertical con respecto al tiempo, la altura de la deflexión vertical con respecto al ajuste del interruptor (v/ división) da el voltaje pico a pico de la señal de entrada

Medición del Tiempo.

Si se utiliza el modo de barrido de disparo, el circuito de base de tiempo se emplea para dar un barrido con varios valores de tiempo de barrido (s / div)

En una señal mostrada en el osciloscopio y este se ajusta a un tiempo de barrido por división, el número de divisiones horizontales entre dos puntos a lo largo de la onda de señal será una medida del tiempo transcurrido.

Tiempo= distancia entre dos puntos por el ajuste de barrido horizontal.

$$T = d.s/ \text{div}$$

Medición de Frecuencia.

Para la medición de la frecuencia f de ondas periódicas se efectúa de manera similar a la medición de tiempo, pero teniendo en cuenta que la frecuencia de una onda es el número de ciclos por segundo y se relaciona con el tiempo:

$$f = 1/ t , \text{ siendo } t \text{ el tiempo de un ciclo.}$$

2.2 Analizador de Espectro.

El analizador de espectro es un instrumento que indica la frecuencia característica de una señal así como el tiempo, amplitud o alguna otra propiedad. El aparato muestra la señal directa en el dominio de la frecuencia y exhibe la grafica de amplitud contra frecuencia.

2.2.1 El dominio de la frecuencia.

En muchas ocasiones cuando se trabaja en el dominio del tiempo no logra dar una completa imagen, ya que el dominio del tiempo es limitado al mostrar el nivel bajo de armónicas o en la presencia de distorsiones. En el dominio de la frecuencia puede mostrarse tales distorsiones

El proceso de convertir una señal en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es llamado “**Análisis Espectral** □.

El análisis de Fourier incluye las series y la transformada de Fourier. Las series permiten representar cualquier función periódica dependiente del tiempo como una serie de armónicas de apropiada amplitud, mientras que la transformada de Fourier expresa una función continúa en el dominio del tiempo en componentes senoidales.

La original transformada de Fourier fue establecida para funciones continuas, después algunos matemáticos desarrollaron la transformada de Fourier para funciones discretas que dan en la representación de la frecuencia como una función continua pesada de exponenciales complejas. El método llamado transformada discreta de Fourier requiere considerables cálculos, la versión llamada Fast Fourier Transform (FFT) o transformada rápida de Fourier reduce considerablemente los cálculos.

Se han continuado encontrando métodos para las funciones FFT y es común proceder a hacer el análisis espectral con un computador, por medio de transformar los datos en el dominio del tiempo

Esto se puede hacer a partir de un muestreo de datos en un osciloscopio y una computadora digital, la FFT permite el uso de mediciones que de otra forma sería imposible en el dominio del tiempo.

El rango de frecuencia del analizador (FT) puede extenderse desde 10^{-3} hz hasta 100 m hz, generalmente el analizador (FT) tiene menor rango de sensibilidad y dinámico que un analizador de espectro

2.2.2 Aparato Analizador de Espectro.

El analizador de espectro puede ser utilizado para determinar la respuesta a la frecuencia, para circuitos, filtros, amplificadores, radar y otras operaciones electrónicas. En otros campos de la ingeniería y la ciencia puede usarse el analizador de espectro cuando en dichas aplicaciones se trabaje en bajas frecuencias como en geología, ciencias de la tierra, oceanografía, ingeniería estructural, en pruebas mecánicas, estudio de vibraciones mecánicas y estructurales.

Un transductor es usado para convertir el movimiento mecánico en una señal eléctrica.

Se consideran dos tipos de analizadores de espectro.

- a) De tiempo real
- b) De barrido de tono

a) El analizador de tiempo real, usa algunos filtros de banda para separar las componentes de una señal simultáneamente dentro de cada uno de ellos representado por cada filtro.

El analizador de tiempo real es solamente el tipo de analizador que puede ser usado para observar fenómenos transitorios porque muestran simultáneamente las componentes del espectro en contraste con el analizador de barrido de tono el display muestra una pequeña porción del espectro en un tiempo.

El analizador de tiempo real es consecuentemente escaso y costoso que el analizador de barrido.

b) Los analizadores de barrido, son más comunes y ofrecen ventajas de flexibilidad. Es esencialmente un súper receptor de radio con un CRT indicando el nivel de potencia de la señal recibida como una función de la frecuencia. Se mira la señal de espectro a través de una ventana angosta que se mueve en el tiempo.

El aparato receptor de radio conocido como Superheterodyne ha estado presente por muchos años, en la figura. 6. se muestra el diagrama de bloques de dicho aparato.

El generador Scan produce una onda serrada (diente de sierra) que controla la frecuencia del oscilador local y mueve el haz de luz en la dirección horizontal a través del (CRT), es decir la posición horizontal corresponderá a la frecuencia a la cual el analizador de espectro es afinado.

Mientras tanto, la frecuencia intermedia (IF) es detectada y ampliada en el sentido vertical del (CRT), produciendo una grafica de amplitud contra frecuencia para la señal de entrada.

La escala vertical puede ser calibrada como una escala lineal o bien como una escala logarítmica, incrementándose de izquierda a derecha.

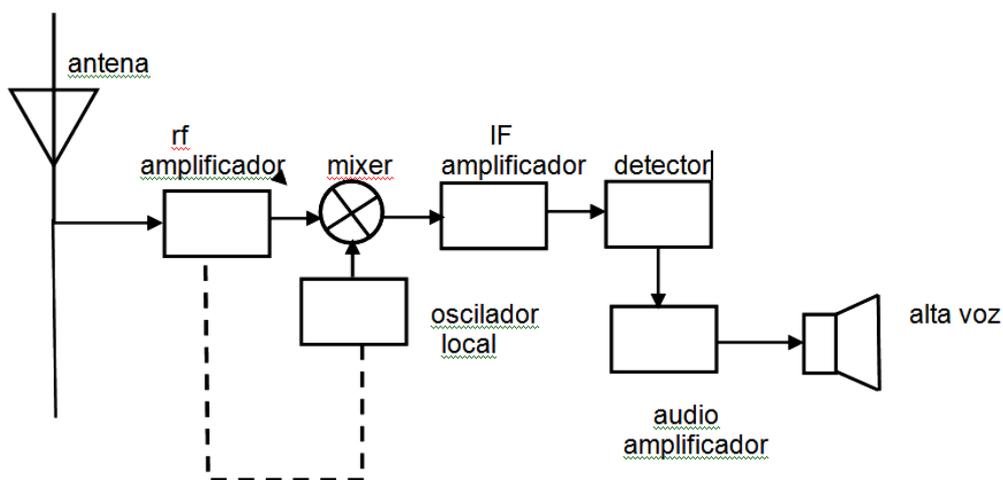


Fig. 6. Analizador de espectro superheterodine

2.2.3 Resolución de Ancho de Banda.

La resolución de la frecuencia es una medida de la habilidad del analizador de espectro para distinguir dos señales espaciadas.

La resolución de la frecuencia es determinada por la resolución del ancho de banda y por la forma de la respuesta de la IF.

Se usa el término resolución de ancho de banda para describir el ancho de la IF o algún nivel de decibeles relativo al pico de la respuesta, la forma de la IF se especifica por la selección de ancho de banda, la cual es de aproximadamente de 60-db.

Para señales de igual amplitud, la resolución de la frecuencia es especificada solamente por la resolución del ancho de banda.

Mediciones de Amplitud.

Una función básica del analizador de espectro es el de poder llevar a cabo mediciones muy precisas de amplitud para varias frecuencias, componentes de una señal.

La amplitud puede ser medida sobre una escala logarítmica o una escala lineal, cuando las mediciones son efectuadas con señales de un rango muy largo, para ello la escala vertical es usualmente seleccionada como una escala logarítmica.

El factor de escala vertical puede ser acomodado para varios niveles dependiendo del tamaño de la señal de entrada.

Cada división sobre la escala logarítmica representa una relación fija entre los niveles de la entrada.

El nivel de la señal de entrada puede ser encontrada observando la amplitud sobre el display en decibeles por división a partir de la referencia y restando el número de db desde el nivel de referencia.

2.2.4 Controles en el Analizador de Espectro.

La señal de entrada deberá cumplir con ciertos límites para la amplitud y la frecuencia, si la amplitud es demasiada alta, la sensibilidad puede ser deteriorada y puede crear distorsiones, por otro lado si la señal de entrada es demasiado pequeña, el ruido interno generado por el analizador puede reducir la señal.

Las funciones principales están localizadas en la parte superior del instrumento, esas funciones incluyen el control para el nivel de referencia, frecuencia y control de marcas y la división de espaciamento.

Los modernos analizadores han reemplazado los controles físicos del panel por un menú de posibles opciones. El rango de la frecuencia es seleccionado por la central de frecuencia.

El Span, es conocido como control de dispersión, determina el ancho del espectro, también puede colocar el máximo espaciamento, mostrando el máximo rango de frecuencia.

El Control de ancho de banda, selecciona diferentes IF, para máxima resoluciones, el ancho de banda deberá ser lo más angosto posible.

2.2.5 Dominio de la frecuencia contra dominio del tiempo.

La ventaja del espectro es que se trabaja en el dominio de la frecuencia, en donde la variable independiente es la frecuencia ω provee una comparación segura y verificación de diferentes eventos referidos a algún valor de este parámetro.

Por otra parte midiendo sólo en el dominio del tiempo, en muchos casos no se puede estar seguro de que la comparación sea la adecuada, así en el tiempo no provee tal control que comparamos pensando en dos eventos.

Así se remarca la importancia que tiene la frecuencia en la mayoría de los fenómenos físicos ondulatorios.

El uso apropiado de las series de Fourier, la transformada de Fourier y la transformada discreta de Fourier (DFT) permiten la transformación de una función en el dominio del tiempo $f(t)$, a otra función en el dominio de la frecuencia $F(\omega)$.

El analizador de espectro en la frecuencia selectiva mide la amplitud de la señal sobre el rango de la frecuencia de interés, esto es el analizador de espectro en el dominio de la frecuencia es como el osciloscopio en el dominio del tiempo



Fig. 7 Analizador de espectro

3. Análisis Armónico o de Fourier

Los métodos de análisis para fenómenos físicos requieren de extensos desarrollos y de la ayuda de la computadora. En las primeras épocas de análisis fueron menos sofisticadas y se trabajó principalmente a partir de mediciones directas.

El más importante de los análisis es el Armónico o de Fourier o desarrollo en serie de Fourier.

La posibilidad de resolver una curva dada o una función en una serie de funciones seno y coseno, es decir funciones armónicas. Se le ha dado el nombre de análisis armónico, a esta técnica de cálculo. Por la naturaleza de este análisis, es aplicado sólo a fenómenos que tengan bien definido su periodo.

Los primeros métodos de análisis se caracterizaron por sus restricciones en el dominio del tiempo. Si se considera una función que representa a algún fenómeno físico la cual fluctúa en el tiempo y el espacio, la fluctuación o sea la frecuencia o número de onda, es un parámetro significativo en la definición de la función, la frecuencia es mucho más significativa y más usada como variable independiente respecto al uso del tiempo.

En el caso más general la expresión Espectro, no es otra cosa que una función, que depende de alguna cantidad o variable independiente, la función puede ser la amplitud, potencia o cualquier otra propiedad y el parámetro independiente es generalmente la frecuencia.

El espectro es en general una cantidad compleja o función compleja.

$$a) F(\omega) = a(\omega) + i b(\omega)$$

$$b) F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

3.1 Serie de Fourier.

La serie de Fourier, propuesta por el matemático francés Joseph Fourier en 1807, sugiere el desarrollo de una función continua y periódica $f(t) = f(t+nT)$ donde T es el periodo y n es un número entero, en un desarrollo trigonométrico con funciones cosenos y senos.

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt \\ + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt$$

en el intervalo $(-\pi, \pi)$

La teoría de las series de Fourier es un instrumento importante en el análisis y tratamiento de diversos problemas físicos, tales como la conducción de calor, propagación de corrientes eléctricas, ondas electromagnéticas, vibraciones mecánicas, etc.

Condiciones de Dirichet.

Para que una función $f(t)$ sea desarrollada en un infinito número de términos senoidales, deberá satisfacer ciertas condiciones conocidas como condiciones de Dirichet, que son:

- 1) $f(t)$ deberá ser periódica, es decir $f(t) = f(t + 2\pi)$
- 2) Deberá ser seccionalmente continua, con un número finito de discontinuidades y brincos finitos.
- 3) Deberá tener un número finito de máximos y mínimos.
- 4) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$ deberá ser convergente.

3.2 Determinación de los coeficientes de Fourier.

Se puede representar la serie en una notación compacta:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1)$$

Los coeficientes constantes de la serie se pueden integrar término a término en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Para determinar a_0 , se integra la relación (1) y recordando que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt \quad (2)$$

Para determinar a_n del término general relativo a $\cos nt$ se multiplica (1) por $\cos mt$ y se lleva a cabo la integración y recordando el hecho de que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt \, dt = 0 \quad \text{para } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \, dt = \pi \quad \text{para } m=n \text{ y } 0 \text{ para } m \neq n$$

$$\text{Entonces } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (3)$$

Similarmente para determinar b_n , multiplicado (1) por $\sin mt$ obtenemos:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (4)$$

la función $f(t)$ se puede desarrollar en el intervalo $(0, 2\pi)$ y obtener los mismos valores anteriores que en (1), (2) y (3)

El desarrollo (1) es válido para todo tipo de funciones, que cumplan completamente las condiciones de Dirichlet. A partir de las expresiones (2) y (3) vemos que a_0 es el

promedio de la función $f(t)$ sobre el intervalo de integración, mientras que a_n y b_n son los promedios de las funciones modulares $f(t)\cos nt$ y $f(t)\sin nt$, respectivamente.

Existe un teorema especial llamado *teorema de Riemann*, que establece que la expansión (1), es única, o sea que sólo hay un conjunto de valores para los coeficientes (propiedad de unicidad). Si hubiera otro conjunto de valores, podríamos escribir el lado derecho de (1) de dos maneras diferentes, los cuales deberían ser idénticamente iguales para todos los valores de t , pero esto solo puede acontecer si los coeficientes de los dos conjuntos resultan idénticamente iguales. Esto se puede demostrar a través de método de los mínimos cuadrados, donde los valores que minimizan y satisfacen dicho teorema son exactamente los a_n y b_n del desarrollo de Fourier.

3.3 Funciones Pares e Impares.

En general el desarrollo de Fourier para $f(t)$ contendrá sólo términos en senos y cosenos. Cuando una función es par solo contendrá términos cosenos. Así también si una función es impar contendrá sólo términos en senos.

Una función es par si $f(t) = f(-t)$ en $0 < t < \pi$

Una función es impar si $f(t) = -f(-t)$ en $-\pi < t < 0$

Para la función par es:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \cos(-nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \quad (5)$$

$$\text{Cuando } b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \sin(-nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(-t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(-t) \sin(-nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(-t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = 0$$

Y el desarrollo será:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt$$

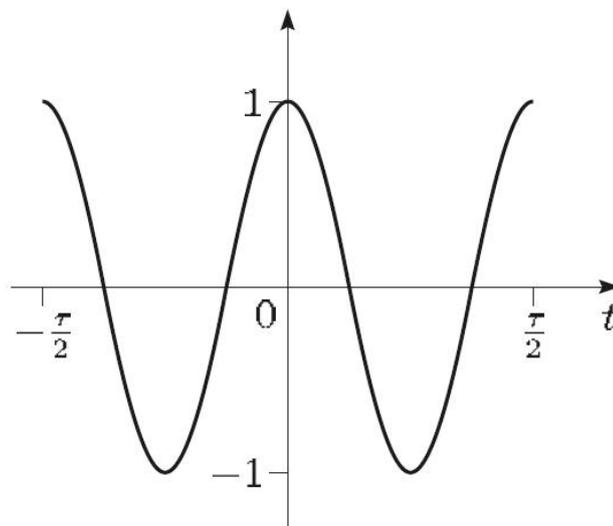
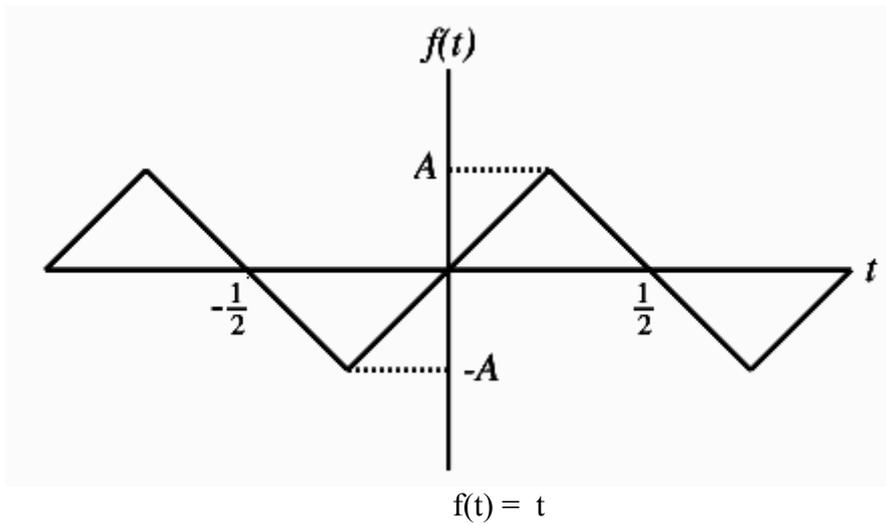
Análogamente para una función impar es $f(t) = -f(-t)$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (6)$$

y el desarrollo será:

$$f(t) = b_1 \sin t + b_3 \sin 3t + \dots + b_n \sin nt \quad (7)$$



$$F(t) = \cos(t)$$

Fig. 8 Función Impar y Función Par

Otras funciones pares son:

$$F(t) = t^2, \cos t, \exp(-k t^2), \dots \text{ etc}$$

e impares : $F(t) = t, \sin t, \exp(t), \dots \text{ etc}$

3.4 Extensión del intervalo del desarrollo.

Cuando se requiera efectuar el desarrollo de la serie en el intervalo $(-L, L)$, los términos de la serie tendrán la forma siguiente: (referencia) [7]

$$t = \left(\frac{L}{\pi}\right)x \quad f(t) = f\left(\left(\frac{L}{\pi}\right)x\right)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (8)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (9)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

que representa el valor medio de $f(t)$ en el intervalo.

Identidad de Parseval

Considerando la serie (1) multiplicando por $f(t)$ dt e integrando se obtiene.

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt = a_0^2 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (10)$$

3.5 Forma compleja de la serie de Fourier.

La serie compleja se puede escribir, mediante la fórmula de Euler:

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

En una forma equivalente, llamándola.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad (11)$$

Cuando C_n está definida como.

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

Donde el índice para la sumación n recorre el conjunto de los enteros positivos y negativos incluyendo el cero.

Para $n > 0$

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos nt - i \sin nt) dt \quad (12)$$

Luego usando (3) y (4) se obtiene:

$$C_n = \frac{an}{2} - i \frac{bn}{2} \quad (13)$$

Similarmente para $n \neq 0$

$$C_{-n} = \frac{an}{2} + i \frac{bn}{2} \quad (14)$$

Mientras que $C_0 = \frac{a_0}{2}$

Para un intervalo $(-L, L)$ se puede escribir :

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in \pi x/L} dx \quad (15)$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in \pi x/L}$$

Serie de una onda rectangular.

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & 0 < t < \pi \\ f(t) &= -1 & -\pi < t < 0 \end{aligned}$$

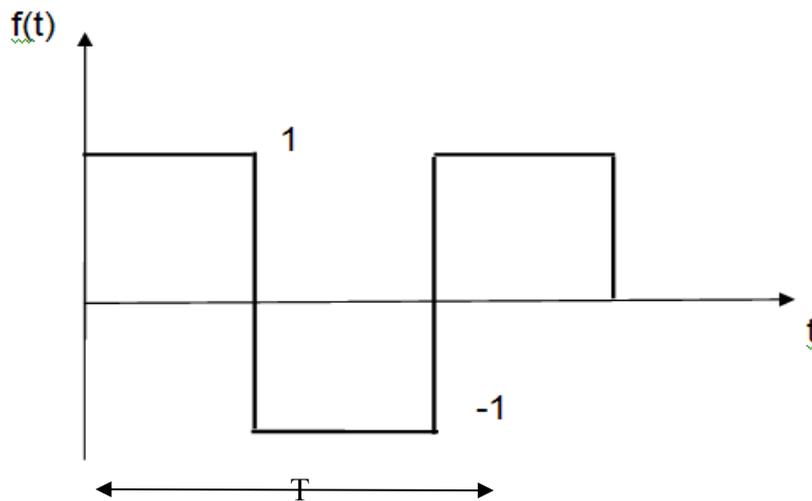


Fig. 9 grafica de una onda rectangular

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 (-1) \cos nt dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (1) \cos nt dt$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 -1 \cdot \text{sen}(2\pi n f_0 t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 1 \cdot \text{sen}(2\pi n f_0 t) dt$$

$$b_n = (1/n\pi)(2 - 2\cos n\pi) \quad b_n = 4/n\pi \quad \text{para } n \text{ impar}$$

mientras que para n par $b_n = 0$

$$f(t) = \sum_1^{\infty} \frac{4}{n\pi} \text{sen } nt/T$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} [\text{sen}(t) + 1/3 \text{sen}(3t) + 1/5 \text{sen}(5t) + \dots]$$

Así la onda rectangular tiene armónicas impares.

La figura. 10 muestra las tres primeras armónicas de una onda rectangular.

Se nota como las armónicas tienden a llenar la onda rectangular tomando un infinito número armónicas para producir una onda rectangular.

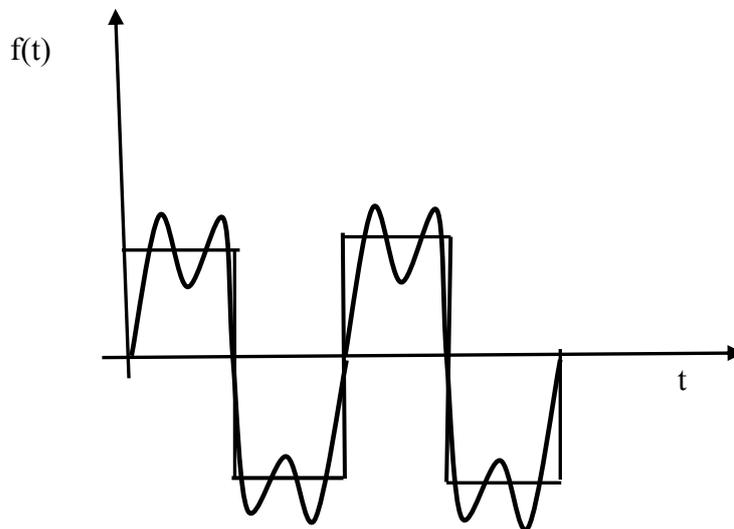


Fig. 10. onda rectangular con tres armónicas.

La onda rectangular puede mostrarse en el dominio de la frecuencia dibujando la amplitud de cada armónica en el eje vertical se tendrán volts contra frecuencia en el eje horizontal, para representar una gráfica.

Entonces cada armónica representada como una línea vertical y son llamadas líneas espectrales.

Las series siempre resultarán en el dominio de la frecuencia las cuales tienen solo líneas espectrales, entonces las series formadas solo incluyen la frecuencia fundamental y las armónicas.

La amplitud de cada armónica impar es $1/n$ veces la fundamental, cuando se examina en el analizador de espectro, podemos esperar que cada armónica se reduzca por este factor. En decibeles la n -ésima armónica será $20 \log(1/n)$ decibeles relativa a la fundamental.

Si una forma de onda no es perfectamente simétrica o tiene otras formas de distorsión las armónicas pares se presentarán.

Los modernos analizadores de espectro detectan tales imperfecciones en una onda cuadrada par, sin embargo la onda cuadrada puede mirarse completamente bien cuando es mostrada por un osciloscopio.

El analizador de espectro esta normalmente calibrado a medir el valor de rms de una línea usualmente expresado en [db] o en [rms volts]. Para correlacionar las representaciones en series y las mediciones típicas de los resultados será necesario multiplicar los coeficientes de la serie por $1/\sqrt{2}$ si se desea convertir a [dbm].

3.6 Integral de Fourier

Para el caso general donde el periodo fundamental es T, las expresiones para los coeficientes de la serie serán: (referencia [1])

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Si consideramos en las relaciones para a_0 , a_n , b_n , una variable dormida p y reemplazando en dichas relaciones nos dan :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(p) dp$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(p) \cos(k p) dp \quad \text{con } k = (2n \pi / T)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(p) \sin(k p) dp$$

que reemplazando en (1) la función serie toma la forma de:

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(p) dp + \sum_1^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(p) \cos k (t - p) dt \quad (16)$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(p) \cos k (t - p) dt \quad (16)$$

Sean $k = \omega_n$

$$\omega_{n-1} = 2(n-1) \pi / T \quad \text{entonces} \quad \omega_{n-1} - \omega_n = 2 \pi / T = \Delta \omega$$

Para tiempos largos, T tiende a ∞ , mientras $\Delta \omega$ tiende a 0 y podemos tomar a $\Delta \omega = d\omega$

- a_0 tiende a cero, aunque $\int_{-T/2}^{T/2} f(p) dp$ sea finita y converja.
- $\Delta \omega$ se puede tomar como $d\omega$, ya que $d\omega$ tiende a 0.
- La sumatoria se convierte en una integral desde 0 hasta ∞

Entonces tomando el límite $\Delta \omega$ tiende a 0.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \cos(\omega n (t - p)) dp \quad (17)$$

Expresión que es la integral de Fourier.

3.7 Transformada de Fourier

Partiendo de la expresión integral de Fourier se obtiene la función transformada de Fourier introduciendo las siguientes definiciones. (Referencia [1])

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \cos \omega p dp \quad (18)$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \operatorname{sen} \omega p dp$$

$$y \quad \operatorname{sen} \varphi(\omega) = \frac{-B(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}}$$

$$\operatorname{cos} \varphi(\omega) = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}}$$

$$\operatorname{Tan} \varphi(\omega) = -B(\omega) / A(\omega)$$

y reemplazando en la integral de Fourier.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \operatorname{cos} \omega t + B(\omega) \operatorname{sen} \omega t) d\omega \quad (19)$$

luego incorporando las expresiones para A(ω) y B(ω) en (19) se llega a :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (20)$$

$$\text{Como: } F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} = [A^2(\omega) + B^2(\omega)]^{1/2} e^{i\varphi(\omega)} \quad (21)$$

$$F(\omega) = [A^2(\omega) + B^2(\omega)]^{1/2} [\operatorname{cos} \varphi(\omega) + i \operatorname{sen} \varphi(\omega)]$$

$$= A(\omega) - i B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (22)$$

Resumiendo, tenemos las importantes relaciones siguientes:

La transformada de Fourier.

$$1) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (23)$$

- 2) $|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ es la magnitud del espectro.
- 3) $\varphi(\omega) = \text{Arc Tan}(-B(\omega) / A(\omega)) + 2n\pi$ es la fase del espectro para $n = 0, 1, 2, \dots$

3.8 Transformada Inversa.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (24)$$

Las relaciones para $F(\omega)$, $f(t)$ son válidas para cualquier tipo de funciones, como las son en el campo real, o en el complejo, pares e impares o combinaciones de estas a reserva de cumplir con las condiciones de Dirichet, y se dice que ellas forman un par de Fourier.

$F(\omega)$ corresponde al promedio de $f(t) e^{-i\omega t}$ sobre el intervalo de integración.

En virtud de las propiedades ortogonales de las funciones trigonométricas el factor actúa como un operador, seleccionando a partir de $f(t)$ solo componentes con frecuencia $e^{-i\omega t}$.

Cuando $F(\omega)$ es referida a la unidad del intervalo de frecuencia, esta cantidad es conocida como “densidad” o densidad espectral para $F(\omega)$ y la densidad de amplitud para $|F(\omega)|$.

Desde el punto de vista dimensional $F(\omega)$ tiene las mismas dimensiones que $f(t)$, así si $f(t)$ tiene dimensiones de desplazamiento $F(\omega)$ tendrá las mismas dimensiones y $|F(\omega)|^2$ tendrá dimensiones de longitud al cuadrado.

Es posible referirse a la densidad espectral para un tiempo instantáneo a un intervalo unitario de frecuencia esto es efectuado multiplicando $F(\omega)$ por un número de ciclos por segundo o por una cantidad proporcional como ω , entonces $\omega F(\omega)$ es la densidad espectral referida a un instante unitario de tiempo.

Propiedades correspondientes entre $f(t)$ y $F(\omega)$.

Cualquier función $f(t)$ puede ser dividida en partes pares e impares, en general exceptuando condiciones físicas, $f(t)$ es una función compleja, separando $f(t)$ en parte real e imaginaria, se tiene .

$$f(t) = \text{Re } f(t) + i \text{ Imp } f(t)$$

Tabla I

$f(t)$	$F(\omega)$
Real y par	Real y par
Real e impar	Imaginaria e impar
Imaginaria y par	Imaginaria y par
Imaginaria e impar	Real e impar

3.9 Teoremas Básicos para la transformada de Fourier.

Las funciones $f(t)$ y $F(\omega)$ están relacionadas por la transformada de Fourier y su correspondiente inversa.

Estas ecuaciones permiten deducir algunos teoremas importantes.

Teoremas de Linealidad, superposición y adición.

Sean $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ y $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

Entonces:

$$[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] \leftrightarrow [a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)] \quad (25)$$

Esto es, la suma de espectros de un número de señales es igual a la suma de los espectros en forma individual.

Este resultado es de uso práctico y puede permitir el cálculo del espectro de manera más fácil, si se da una función $f(t)$ puede ser expresada como la suma de funciones simples.

Simetría.

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{entonces} \quad f(t) \leftrightarrow 2\pi F(-\omega) \quad (26)$$

$$f(-t) \leftrightarrow 2\pi F(\omega)$$

Escala.

Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ y a es una constante real entonces,

$$f(at) \leftrightarrow 1/a F(\omega/a) \quad (27)$$

De acuerdo a esta última relación, una extensión (reducción) en la escala del tiempo por un factor a corresponde a una reducción (extensión) en la escala de la frecuencia por el mismo factor.

Traslación del tiempo

$$\text{Si } f(t+a) \leftrightarrow e^{iaw} F(\omega) \quad (28)$$

$$f(t-a) \leftrightarrow e^{-iaw} F(\omega)$$

Desplazamiento de la frecuencia.

$$F(\omega + \omega_0) \leftrightarrow e^{-i\omega_0 t} f(t) \quad (29)$$

$$F(\omega - \omega_0) \leftrightarrow e^{i\omega_0 t} f(t)$$

Derivación.

$$d f(t) / dt \leftrightarrow i\omega F(\omega) \quad (30)$$

$$y \quad dF(\omega) / dt \leftrightarrow -it f(t)$$

Para derivadas de orden superior son:

$$d^n f(t) / dt^n \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega) \quad (31)$$

$$d^n F(\omega) / d\omega^n \leftrightarrow (-it)^n f(t)$$

Integración.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \leftrightarrow (1/i\omega) F(\omega) \quad (32)$$

El teorema de derivación se usa para la resolución de ecuaciones diferenciales, mientras que el teorema de integración puede ser usado para transformar una ecuación algebraica en el dominio de la frecuencia, estos teoremas son usados en otras aplicaciones físicas como por ejemplo en dinámica.

Ejemplo:

Desplazamiento $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

Velocidad $V(t) = d f(t) / dt \leftrightarrow i \omega F(\omega) = \omega F(\omega) e^{i \pi/2}$

Aceleración $A(t) = d^2 f(t) / dt^2 \leftrightarrow -\omega^2 F(\omega) = \omega^2 F(\omega) e^{-i \pi}$

Se puede a partir de la aceleración aplicar el teorema de integración, para obtener la velocidad y el desplazamiento, pero mucho esfuerzo se tendrá que realizar en los métodos de integración, mientras que sobre el dominio de la frecuencia ofrece soluciones más ventajosas, porque las operaciones en el dominio de la frecuencia son más simples que las correspondientes derivación e integración en el dominio del tiempo.

Nota sobre los teoremas básicos mencionados con anterioridad.

Se nota que en los teoremas básicos dados anteriormente, sólo aparece el espectro $F(\omega)$, sin embargo separa la amplitud y la fase del espectro, pero mediante (21) la amplitud del espectro es $|F(\omega)|$ y la fase del espectro es $\varphi(\omega)$. En la tabla II se resumen para algunos de los teoremas dados antes, donde la amplitud y la fase se dan separadamente.

Tabla II

Función	Amplitud del espectro	Fase del espectro
$f(t)$	$ F(\omega) $	$\varphi(\omega)$
$a f(t)$	$a F(\omega) $	$\varphi(\omega)$
$f(\pm t)$	$2 \pi F(\pm \omega) $	$n \pi$

$f(at)$	$\frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a}) $	$\Phi(\frac{\omega}{a})$
$f(t \pm a)$	$ F(\omega) $	$\varphi(\omega) \pm a\omega$
$f(t) \exp(+i\omega_0 t)$	$ F(\omega - \omega_0) $	$\varphi(\omega - \omega_0)$
$f(t) \exp(-i\omega_0 t)$	$ F(\omega + \omega_0) $	$\varphi(\omega + \omega_0)$
df/dt	$\omega F(\omega) $	$\varphi(\omega) + \pi/2$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$	$ F(\omega) / \omega$	$\varphi(\omega) - \pi/2$
$f(t) * g(t)$	$ F(\omega) G(\omega) $	$\varphi(\omega) + \Phi(\omega)$

Cálculo de las transformadas de Fourier.

Las siguientes reglas y sugerencias pueden ser consideradas para utilizarse en el cálculo de la transformada de Fourier.

1. Integración directa o real, usando la expresión correspondiente para $F(\omega)$, es en la mayoría de las veces la operación inmediata y auxiliándose de una tabla de integrales impropias.
2. Utilizar una integral de contorno en el plano complejo, puede ser útil, reemplazando el t por la variable compleja $z = it$.

$$F(\omega) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} f(z/i) e^{-\omega z} dz$$

Que puede ser resuelta como una integral de contorno en el plano complejo.

3 A menudo es posible expresar la función dada $f(t)$ en términos de otras funciones, para las cuales las transformadas son conocidas o bien pueden ser más fácil de calcular.

4. Los teoremas dados en el tema 3.9, son muy útiles para deducir otras formulas adicionales. Un pequeño grupo de transformadas tales como las dadas en la tabla III, pueden ser usadas para muchas otras funciones mediante la aplicación de estos teoremas.

5. Comprobar siempre que la transformada tiene la estructura correcta correspondiente a la función dada en el tiempo, dependiendo si la última es par o impar, real o imaginaria siguiendo las reglas dadas en la tabla I.

6. Algunas ocasiones, es más conveniente primero desarrollar $f(t)$ en series de Fourier, y entonces transformar esta serie, término a término. Es ilustrativo comparar $F(\omega)$ con un desarrollo de $f(t)$, las dos corresponden una con otra.

3.10 Muestreo de funciones o señales.

Una señal o función continua puede representarse o reconstruirse completamente partiendo del conocimiento de sus valores o muestras, en puntos equi-espaciados en el tiempo.

Cuando estas muestras son vistas con una secuencia con una cierta rapidez, se tiene una representación muy parecida a la imagen original en movimiento continuo. Si las muestras están muy cercanas unas de otras, la imagen parecerá ser continua, aunque si la observamos con un lente de aumento su representación en función de las muestras se notará.

El muestreo tiene la importancia de servir de enlace entre las señales continuas y las discretas, una secuencia de muestras proporcionan una manera de representar una señal continua mediante una señal discreta y esta se prefiere en el procesamiento de señales continuas.

Muestreo mediante un tren de impulsos, para desarrollar el muestreo de una señal continúa en intervalos regulares, una forma de hacerlo es emplear un tren de impulsos multiplicada por la función continua $x(t)$. Este muestreo mediante un tren de impulsos periódicos $p(t)$, que se observa en la figura.11. con T como periodo de muestreo y de frecuencia fundamental de $p(t) = \frac{2\pi}{T}$, como frecuencia de muestreo, entonces, (referencia[9])

$$x p (t) = x(t) p(t) \quad (33)$$

donde:

$$p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta (t - nT) \quad (34)$$

Cuando los intervalos están espaciados por T , luego,

$$x p (t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x (nT) \delta (t - nT)$$

efectuando la operación,

$$Xp (j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta (\omega - k \omega_s)$$

Como la convolución con un impulso desplaza la función.

$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_s) = X(j(\omega - \omega_s))$$

Entonces:

$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \quad (35)$$

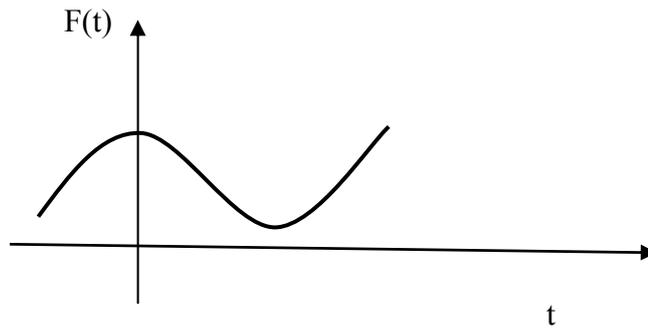


Fig. 11 a. Función del tiempo original

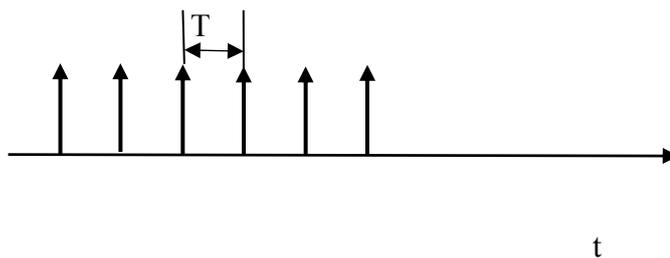


Fig. 11 b. Tren de impulsos

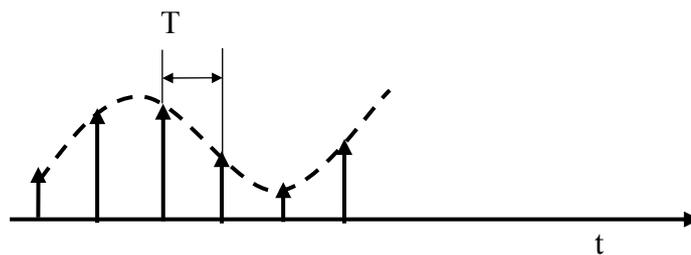


Fig. 11c. Muestreo con un tren de impulsos.

3.11 Convolución.

Se llama producto integral o convolución de dos funciones a la relación:

$$\mathbf{h(x) = f(x) * g(x) = \int_0^{\infty} f(\rho)g(x - \rho)d\rho} \quad (36)$$

Si se considera a las funciones E, F, G (referencia [7])

$$\int_0^x E(x - \rho) [F(\rho) + G(\rho)]d\rho = \int_0^x E(x - \rho) F(\rho)d\rho + \int_0^x E(x - \rho)G(\rho)d\rho$$

$$\text{Entonces } E * [F + G] = E * F + E * G \quad (37)$$

o sea es válida la propiedad distributiva.

Si efectuamos el cambio de variable $\square = x - \rho$, en (36) tenemos,

$$\int_0^x F(x-\rho) G(\rho) d\rho = \int_0^x G(x-\rho) F(\rho) d\rho$$

de acuerdo con la definición (36), entonces

$$F * G = G * F \quad (38)$$

también tiene validez la propiedad conmutativa

Si en (36) se pone $G(\rho) = 1$ y se aprovecha la propiedad conmutativa en (38) se obtiene:

$$F * 1 = \int_0^x F(\rho) d\rho \quad (39)$$

Que es el producto de una función cualquiera por la unidad.

Si derivamos esta última relación obtenemos,

$$dF/dx * 1 = F(x) - F(0) \quad (40)$$

o bien $F(x) = dF/dx * 1 + F(0)$

Cuando se ha muestreado una función dada, en el fondo se ha efectuado una operación de convolución, esta operación se produce cuando tenemos un producto de funciones en el dominio del tiempo, ocurriendo una convolución en el dominio de la frecuencia o a la inversa.

$$h(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\infty f_1(\rho) f_2(t-\rho) d\rho \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{cuando } f_1(t) &\leftrightarrow F_1(\omega) \\ f_2(t) &\leftrightarrow F_2(\omega) \\ f_1(t) * f_2(t) &\leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) = H(\omega) \end{aligned} \quad (42)$$

$H(\omega)$ es el espectro de Fourier la función $h(t)$ obtenida de la convolución, entonces si se quiere conocer la convolución de dos funciones, en lugar de resolver la integral de las funciones, es mejor obtener los espectros de Fourier cada una de las funciones y luego multiplicarlas.

Análogamente se hubiera podido definir la convolución en el dominio de la frecuencia.

Otras formas de onda

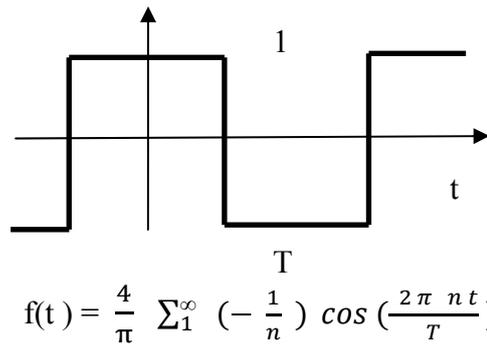


Fig. 12.a. Onda cuadrada par

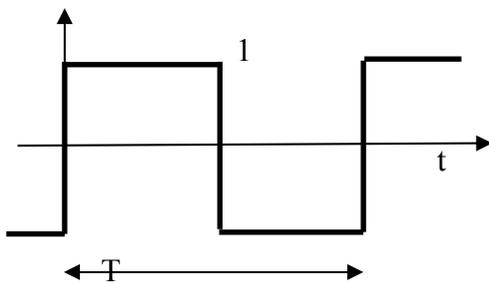


Fig 12.b. Onda cuadrada impar

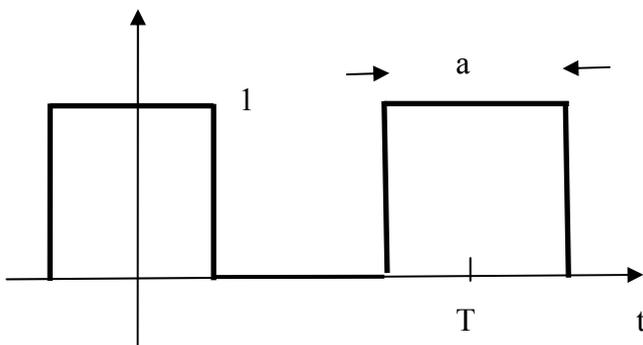
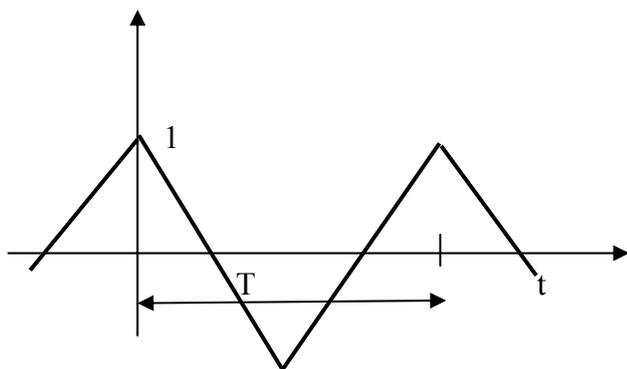
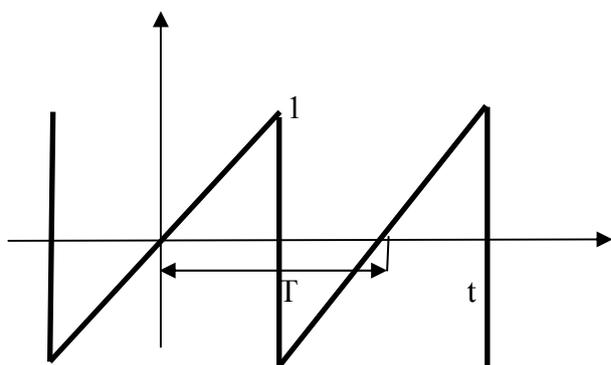


Fig. 12.c. Tren de pulsos



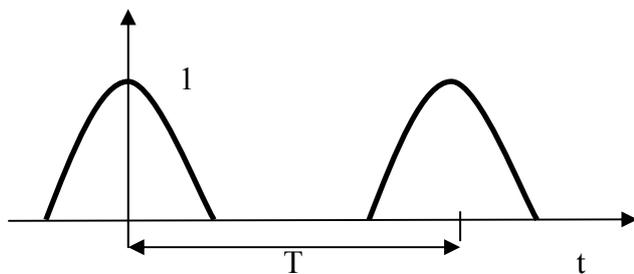
$$f(t) = \left(\frac{8}{\pi^2}\right) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

Fig 12.d. Forma triangular



$$F(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \sum_1^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\right) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

Fig. 12. e. Diente de sierra



$$f(t) = 1/\pi + 1/2 \cos(2\pi t/T) - 2/n \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \cos(2n\pi / T)$$

Fig. 12 . f. Media onda de coseno

Pares:

Función

Transformada

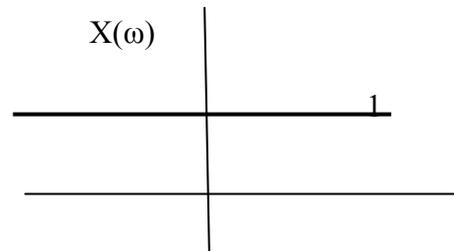
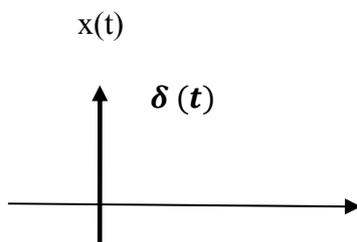


Fig. 13. a. Impulso unitario

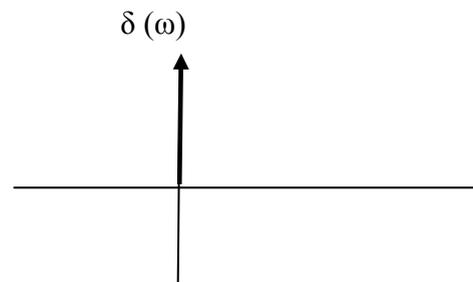
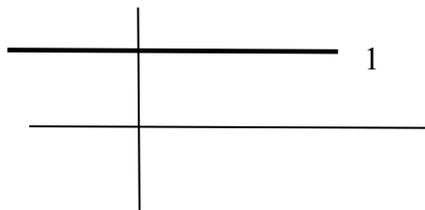
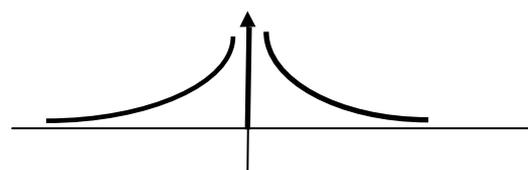
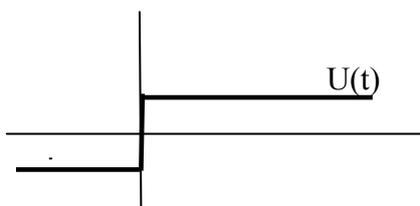


Fig. 13. b. Constante



$$\frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2j\omega}$$

Fig. 13 c. Escalón unitario

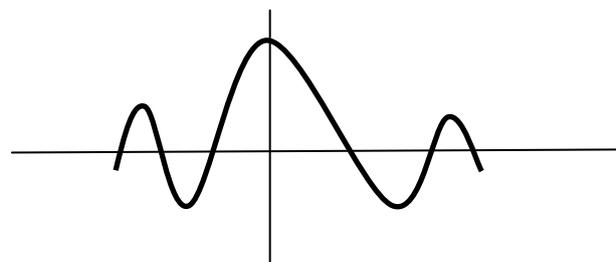
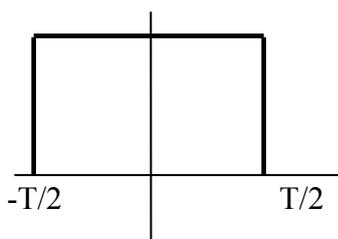
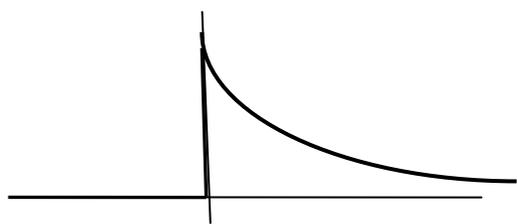


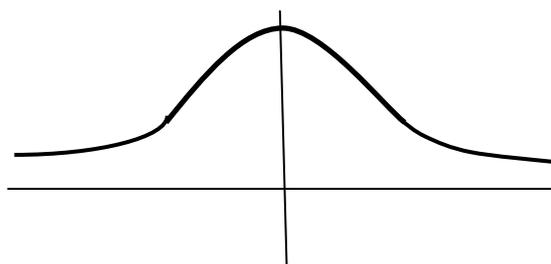
Fig. 13 .d. Pulso

$$T \text{ sen}(\omega T) / \omega T$$



$$e^{-at} u(t)$$

Fig. 13. d. Exponencial



$$\frac{1}{a+iw} = \frac{a-iw}{a^2+w^2}$$

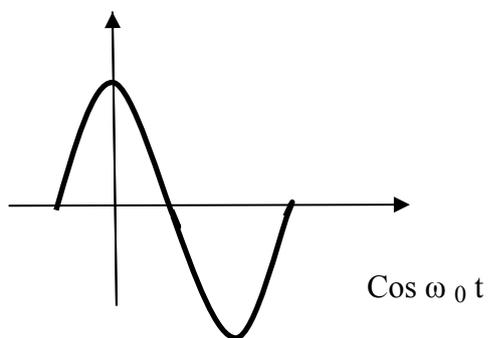
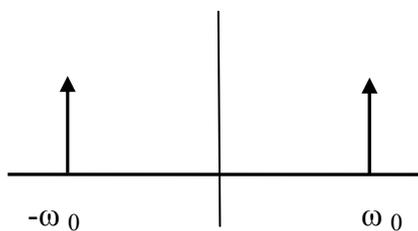
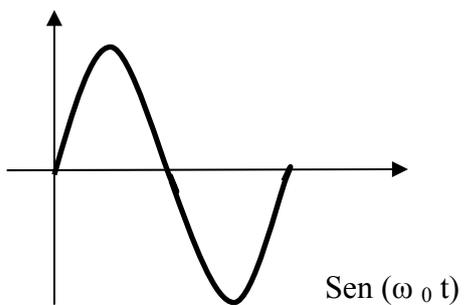


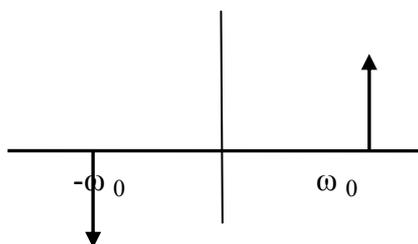
Fig. 13. e. Coseno



$$- \pi [\delta (\omega + \omega_0) + \delta (\omega - \omega_0)]$$



Fi. 13. f. Seno



$$i \pi [\delta (\omega + \omega_0) - \delta (\omega - \omega_0)]$$

Tabla III

Función	Transformada
1	$2 \pi \delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{2j\omega}$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2 \pi \delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-at} u(t) \quad a \geq 0$	$\frac{(a-i\omega)}{(a^2 + \omega^2)}$
$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\text{sen } \omega_0 t$	$i \pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$u(t) \cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] - \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$
$u(t) \text{ sen } \omega_0 t$	$i \pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{(a^2 + \omega^2)}$
$ t $	$\frac{-2}{\omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
e^{-at}	$\frac{a}{(a^2 + \omega^2)}$
$\cos at^2$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\text{sen } at^2$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$
e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$

3.13 Transformada discreta de Fourier.

Es una versión discreta de la transformada de Fourier denominada como (DFT), tal que permite tomar una muestra de la señal en el dominio del tiempo para ser transformada en una muestra en el dominio de la frecuencia y es una herramienta más para el análisis. Puede ser usada en un analizador de espectro para calcularse directamente y obtener el resultado deseado.

Recordando la forma compleja de Fourier, se puede escribir con un cambio en la variable del periodo T , como:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{(-2i\pi k f_0 t)} dt \quad (43)$$

Si se considera el periodo de la forma de onda mostrada en la figura. 14.

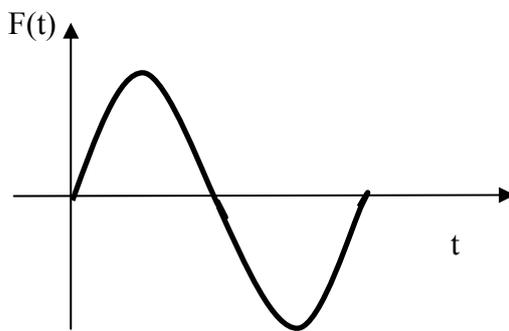


Fig. 14 a. Señal a ser muestreada.

Suponiendo que una versión de la muestra de un periodo de la forma de onda está disponible según la figura 14 a.

La serie de Fourier puede ser aplicada a esta forma de onda muestreada con el menor cambio en el dominio del tiempo, la forma de onda no es continua. Esto significa que $x(t)$ deberá ser reemplazada por $x(nT)$ cuando T es el tiempo entre las muestras

$$C_k = \frac{T}{tm} \sum_0^{N-1} x(nT) e^{(-2i\pi k f_0 t)} \quad (44)$$

También tiene lugar una sumación discreta de la forma de onda muestreada en lugar de una integración y deberá ser llevada a cabo junto con el resultado de multiplicar por el tiempo entre las muestras, por T .

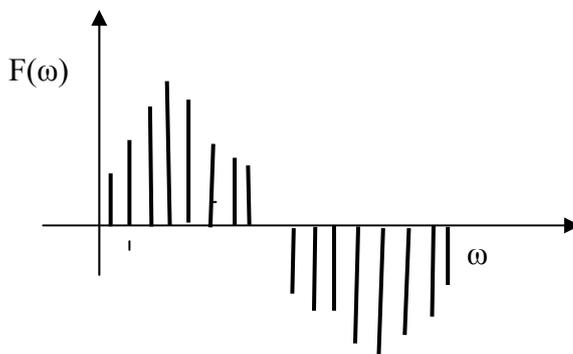


Fig. 14 b Muestreo sobre un periodo.

Notándose que el rango de n deberá tomarse desde 0 hasta $N-1$, produciéndose N muestras. La frecuencia fundamental es igualmente el espacio entre dos puntos de frecuencia discreta.

La DFT es usualmente definida N veces los coeficientes de la serie compleja de Fourier. Esto es sólo un factor de escala y no afecta el contenido de la frecuencia en la DFT. En el instrumento usado, la DFT deberá tener un factor de escala apropiada, además de una adecuada calibración del instrumento.

$$X(kF) = N C_k$$

$$X(kF) = \frac{NT}{tp} \sum_0^{N-1} x(nT) e^{(-2i\pi kfo t)}$$

Cuando el número de muestras N veces la muestra del tiempo T iguales al periodo tp la ecuación se simplifica a la forma común de la transformada discreta de Fourier.

$$X(kF) = \sum_0^{N-1} x(nt) e^{(-2i\pi kfo t)} \quad (45)$$

N = número de muestras

F = espaciamiento (separación) de las muestras

T = periodo muestreado en el dominio del tiempo

En el instrumento usado, la entrada de la DFT es un record de datos en el dominio del tiempo obtenidos por el muestreo de una señal que está siendo analizada.

La tasa de la muestra de f es igual a $1/T$, después de N muestras del dominio del tiempo son coleccionadas, ellas están alimentadas dentro del algoritmo de la DFT, el cual produce N muestras en el dominio de la frecuencia espaciadas F hertz, que no son del todo independientes.

El conjunto de muestras mencionadas al menos son $N/2$ son redundantes con respecto a las muestras numeradas por encima de $N/2$.

Para N puntos la DFT sólo las muestras por encima de $N/2$ puntos del dominio de la frecuencia son retenidas. En general estos puntos son números complejos.

Recordando que en principio comenzamos el proceso de obtención, con la serie y y no con la transformada.

Podemos considerar la DFT como un conjunto pequeño de lineales espectrales y creyendo que es una buena aproximación de la transformada de Fourier.

La inversa de la DFT es la IDFT y está dada por

$$X(nT) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} x(kF) e^{(+2i\pi kfo t)} \quad (46)$$

Se puede imaginar que la DFT y la IDFT tienen propiedades muy similares a sus contrapartes continuas.

La DFT solo es una aproximación de la transformada de Fourier y difiere de la transformada continua.

Propiedades de la DFT.

Si consideramos la secuencia de n números complejos x_0, x_1, \dots, x_{N-1} los cuales son transformados en una secuencia de números complejos X_0, X_1, \dots, X_{N-1} , mediante la DFT de acuerdo con: $2\pi i kn/N$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{(-2\pi i kn/N)} \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

La inversa de la transformación discreta de Fourier (IDFT) está dada por

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{(-2\pi i kn/N)} \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

Elas cumplen con algunas de las propiedades siguientes:

Ortogonalidad.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{(-2\pi i kn/N)} e^{(2\pi i kn/N)} = N \delta_{kn} \quad (47)$$

Donde δ_{kn} es la delta de Kronecker.

Teorema de Plancherel

Si X_k e Y_k son las DFT de las funciones x_n, y_n

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y_k^* \quad (48)$$

Donde y_n^*, Y_k^* son las funciones complejas conjugadas de y_n, Y_k

Teorema de Parseval.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2 \quad (49)$$

Periodicidad.

La definición que define a la DFT se evalúa para los enteros k justamente para: $k=0, \dots, N-1$, resultando una serie infinita de extensión periódica, con periodo N . la periodicidad puede mostrarse a partir de la definición:

$$\begin{aligned} X_{k+N} &= \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{(-2\pi i (k+N)n/N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{(-2\pi i (k+N)n/N)} e^{(-2\pi i n)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{(-2\pi i kn/N)} (1) = X_k \end{aligned}$$

$$X_{k+N} = X_k \quad (50)$$

Aquí se usó el hecho de que $e^{(-2\pi i)} = 1$

3.14 Transformada Rápida de Fourier.

Una innovación dentro del análisis espectral es la transformada rápida de Fourier, es un algoritmo para el cálculo de la transformada discreta, en forma más rápida que cálculo directo para la transformada discreta, que se introdujo alrededor de 1967, aunque hay varias clases de algoritmos relativos a la FFT. (referencia [7])

El cálculo para la transformada discreta, para una serie de N términos requiere de aproximadamente de N^2 operaciones, mientras que la FFT requiere de $2 N \log_2 N$ operaciones.

Lo relevante de la FFT es que calcula más rápido una muestra del espectro directamente, una muestra plana de espectro se calcula de mejor manera la función de auto correlación. A pesar de la ventaja en el cálculo, el uso de FFT no es tan fuerte como el análisis de Fourier.

Una descripción de la transformada rápida fue dada por Cochran W. et al. ¿what is the Fast Fourier transform? en junio de 1967, y la historia de su descubrimiento por Cooley J. en “ Historical Notes on the fast Fourier transform” en junio 1967.

El algoritmo para la FFT, se trata de la manera siguiente:

Supongamos que se requiere encontrar la transformada X_m , para $m = 0, 1, \dots, n-1$ de las series x_t , con $t = 1, 2, \dots, \dots, n$, donde n es par, y se toma una partición de la serie X_t en dos mitades de series, Y_t y Z_t :

$$Y_t = x_{2t-1}, \quad Z_t = x_{2t} \quad t = 1, 2, \dots, n/2$$

Las series Y_t y Z_t cada una de ellas contiene $n/2$ términos

$$Y(m, n/2) = \frac{2}{n} \sum_1^{n/2} y_t e^{(-4i \pi t m / n)}$$

$$Z(m, n/2) = \frac{2}{n} \sum_1^{n/2} z_t e^{(-4i \pi t m / n)}$$

Pero $X(m, n)$, $Y(m, n/2)$, $Z(m, n/2)$ están relacionadas entre ellas, de manera tal:

$$\begin{aligned} X(m, n) &= \frac{2}{n} \sum_1^n x_t e^{(-4i \pi t m / n)} \\ &= \frac{2}{n} \sum_1^{n/2} y_t e^{(-4i \pi t m / n)} + \\ &\quad \frac{2}{n} \sum_1^{n/2} z_t e^{(-4i \pi t m / n)} \\ &= e^{i(2 \pi m / n)} \frac{1}{n} \sum_1^{n/2} y_t e^{(-4i \pi t m / n)} + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_1^{n/2} z_t e^{(-4i \pi t m / n)} \end{aligned}$$

$$X(m, n) = e^{i(2 \pi m / n)} \frac{1}{2} Y(m, n/2) + \frac{1}{2} Z(m, n/2) \quad (51)$$

$$i(2\pi m/n)$$

Esto es en $0 < m < n/2 - 1$

De la misma manera se verifica:

$$Y(m + n/2, n/2) = Y(m, n/2)$$

$$Z(m + n/2, n/2) = Z(m, n/2) \quad \text{en} \quad 0 < m < n/2 - 1$$

y se obtiene:

$$X(m+n/2, n) = -e^{i(2\pi m/n)} \left(\frac{1}{2}\right) Y(m, n/2) + \left(\frac{1}{2}\right) Z(m, n/2) \quad (52)$$

Se ve que la transformada de Fourier para la serie x_t es obtenida a partir de las series mitad para Y_t y Z_t .

De la misma manera si $n/2$ es un número par las series Y_t e Z_t pueden ser particionadas a su vez en otras dos series Y'_t e Z'_t e Y''_t e Z''_t respectivamente, y pueden ser usadas para construir las transformadas $Y(m, n/2)$, $Z(m, n/2)$ a partir de las series de longitud $n/4$.

El procedimiento de partición las series se pueden repetir.

Para ejemplificar considérense los siguientes datos de una medición de doce eventos; $n=12$

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X _t	-6	-20	-28	-8	-1	7	20	-26	-7	14	19	12

Haciendo la partición en dos se tiene:

T	1	2	3	4	5	6
Y	-6	-28	-1	-20	-7	19
Z	-20	-8	7	-6	14	12

La partición de Y_t y Z_t a su vez da:

T	1	2	3
<u>Y'</u> _t	-6	-1	-7
<u>Z'</u> _t	-2 8	-20	19
<u>Y''</u> _t	-20	7	14
<u>Z''</u> _t	-8	-6	12

Se calculan las transformadas de los términos $Y't, Z't$ y $Y''t, Z''t$

$Y(m,3), Z(m,3)$

m			
Transformada	0	1	2
$Y'(m,3)$	-4,66	-1.166 + j 1.433	-1.666 - j1.443
$Z'(m,3)$	-9.666	14.333+ j 2.309	14.333 - j 2.309
$Y''(m,3)$	0.333	6.833 + j 7.794	6.833 - j 7.794
$Z''(m,3)$	-0.666	6.333 + j 0.5773	6.333 - j 0.5773

Las transformadas para $Y(m,6)$ y $Z(m,6)$ son calculadas con ayuda de (34) (verificar numero de ec.) de la siguiente forma:

$$Y(0,6) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} Y(0,3) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} Z(0,3) = -7.166$$

$$Y(1,6) = \frac{1}{2} (1/2 + j \sqrt{3}/2) Y(1,3) + \frac{1}{2} Z(1,3) = 6.25 + j 1.01$$

Así hasta $Y(5,6)$, de manera análoga se calculan los elementos para $Z(0,6)$ hasta $Z(5,6)$

m						
Transformación	0	1	2	3	4	5
$Y(m,6)$	-7.1666	6.250 + j1.03	8.083 + - j1.299	-2.500	8.0833+j 1.299	6.250 - j1.031
$Z(m,6)$	-0.166	1.500 + j5.19	4.833 + j4.618	-0.500	4.833 - j4.61	1.500 - j5.196

La combinación de valores nos da la transformada para X_m .

Así por ejemplo:

$$X(0, 12) = 1/2 Y(0,6) + 1/2 Z(0,6) = -3.666$$

$$X(1,12) = \frac{1}{2} (1/2 + j \sqrt{3}/2) Y(1,6) + \frac{1}{2} Z(1,6)$$

Así hasta $X(12, 12)$

M	0	1	2	3	4	5
$X(m,12)$	-3.667	3.204 + j4.598	5.000 + j5.485	-0.250 - j1.25	-0.167 + j 0.886	-1.704 + j0.598
M	6	7	8	9	10	11
$X(m,12)$	-3.5000	-1.704 + j0.598	-0.167 - j0.866	-0.250 + j1.250	5.000 - j5.485	3.204 - j4.598

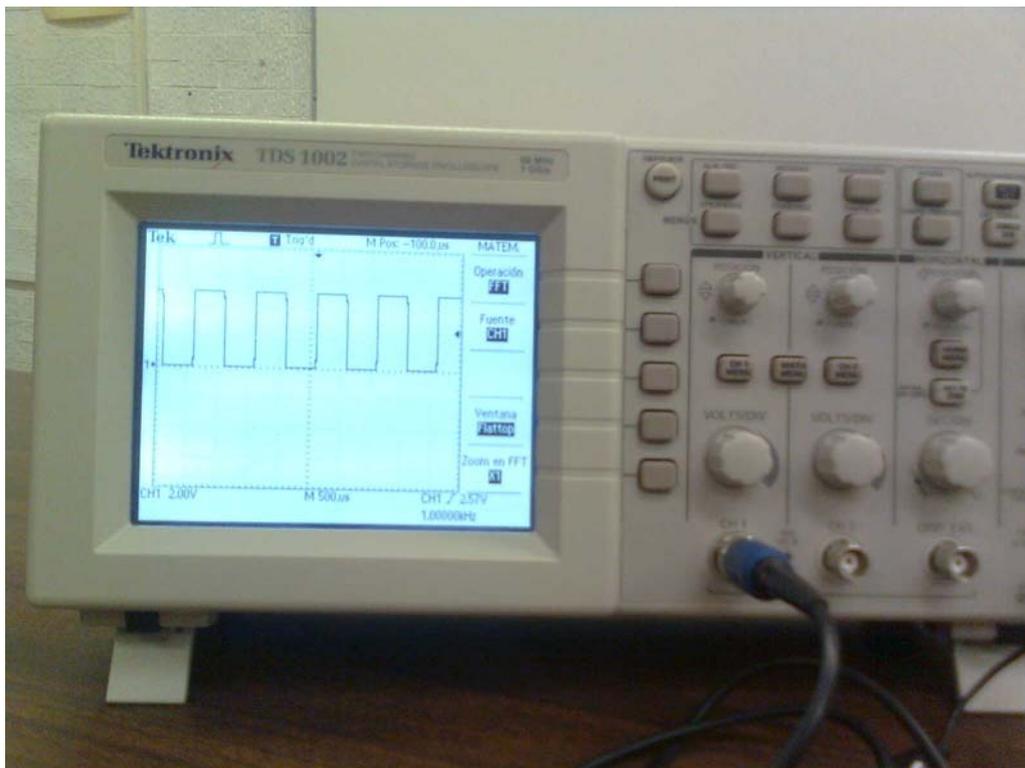


Fig. 15 a. Analizador de espectro mostrando una función cuadrada dependiente del tiempo

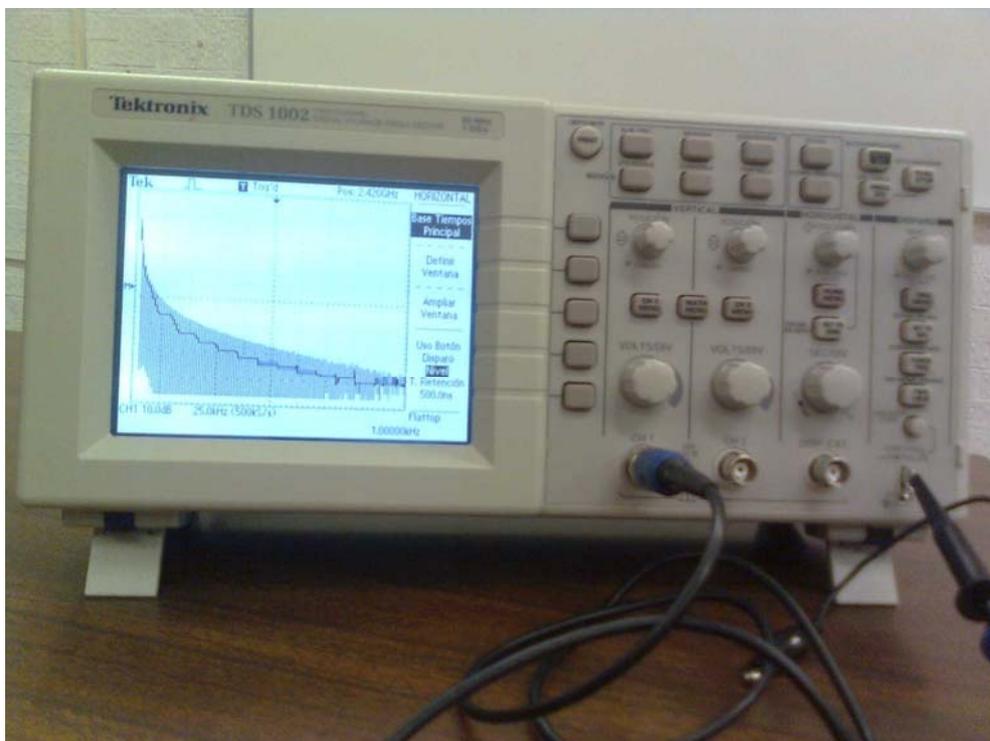


Fig. 15 b. Analizador mostrando el espectro correspondiente a la función cuadrada.

4. Vibraciones Mecánicas.

Se considera en un sentido general, un movimiento periódico aquel que se repite con todas sus características después de cierto intervalo de tiempo llamado periodo.

Los cuerpos que poseen masa y elasticidad son susceptibles de vibrar, por la acción de una fuerza perturbadora, muchas máquinas y estructuras de ingeniería experimentan vibraciones en diferentes grados.

Los sistemas pueden ser generalmente caracterizados como lineales o no lineales.

Para los sistemas lineales el principio de superposición tiene validez y los métodos matemáticos disponibles para su tratamiento están bien desarrollados, mientras que los métodos para el análisis de sistemas no lineales son menos conocidos y difíciles de aplicar.

Los sistemas tienden a ser no lineales cuando se incrementa considerablemente su amplitud de oscilación.

La forma más sencilla de oscilación es el movimiento armónico.

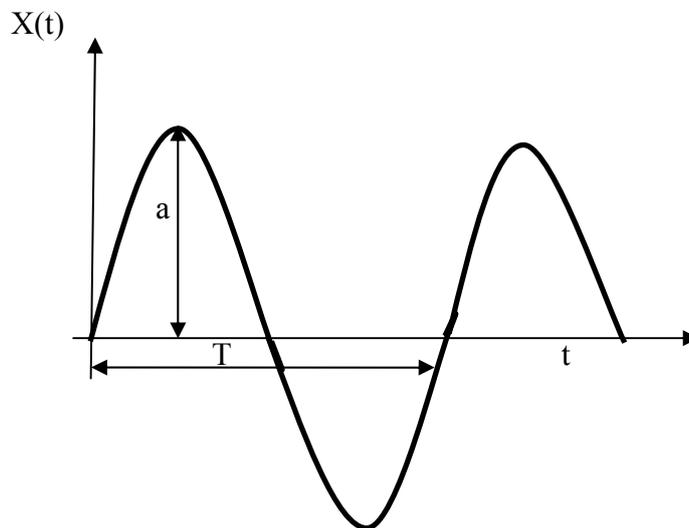


Fig. 16. Gráfica de un movimiento armónico.

a es la amplitud T es el periodo y f es la frecuencia $f = 1/T$

El desplazamiento es: $X(t) = a \operatorname{sen} \omega t$ $\omega t = 2\pi$

la Velocidad : $v(t) = dx / dt = a \omega \cos \omega t$

la Aceleración: $a(t) = -a \omega^2 \operatorname{sen} \omega t$

Este movimiento es simétrico alrededor de un punto de equilibrio y la velocidad es máxima y la aceleración es cero para esta posición.

Esta es la forma más sencilla de vibración y se le denomina movimiento armónico. Este movimiento es típico en los sistemas de un sólo grado de libertad y que se ha desplazado desde un punto de equilibrio

4.1 Sistemas de un grado de libertad.

Un sistema mecánico tiene un grado de libertad si se puede determinar su posición geométrica en cualquier tiempo mediante una sola coordenada.

Si un sistema requiere dos coordenadas para determinar su posición en un tiempo determinado entonces tendremos dos grados de libertad y en general si para especificar su posición se requieren n coordenadas el sistema tendrá n grados de libertad.

Sistema Masa – Resorte.

Este arreglo es un ejemplo de un sistema de un grado de libertad, una masa m de peso w con $w = mg$, está suspendida por medio de un resorte elástico donde el arreglo es tal que el movimiento es solo en una dirección (vertical) del bloque.

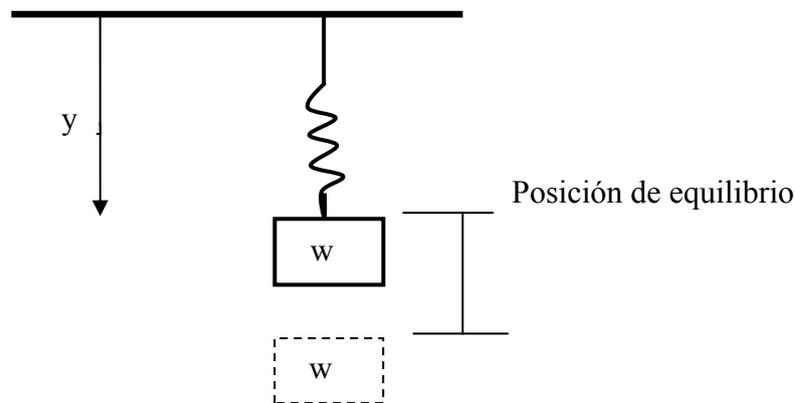


Fig. 17. Sistema masa- resorte con un grado de libertad

4.2 Vibración Libre

La vibración libre así como la frecuencia natural toman lugar donde la masa es perturbada a partir de su posición de equilibrio.

Se toma como referencia la posición de equilibrio de la masa en esta posición la fuerza gravitacional w que actúa sobre la masa es balanceada por la fuerza del resorte.

La ecuación de movimiento es de acuerdo a la segunda ley de Newton.

$$\Sigma F_y = ma = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

$$ma = mg - (k + \zeta) y(t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k y(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} y(t) = 0 \quad (53)$$

donde: $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$2 \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \omega^2 \frac{dy(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} v^2 = -\omega^2 \frac{d}{dt} y^2$$

entonces $v^2 = -\omega^2 y + c^2$; $\frac{dy}{dt} = (c^2 - \omega^2 y)^{1/2}$

$$t = \frac{1}{\omega} \arcsin(\omega y / c)$$

que se puede escribir como:

$$y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

las constantes A y B son determinadas mediante las condiciones iniciales que son:

$$y(0) = 0 \quad y \quad \frac{dy(0)}{dt}$$

$$y(t) = (V_0 / \omega) \sin \omega t + V_0 \cos \omega t \quad (54)$$

que también se puede escribir como:

$$y(t) = C \sin(\omega t + \phi)$$

Otro ejemplo de un sistema de un grado de libertad es un péndulo simple.

En este caso la coordenada característica es ϕ .

La fuerza tangencial es $-mg \sin \phi$ y la aceleración tangencial es (referencia[14])

$$L \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad \text{entonces igualando se tiene.}$$

$$m L \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -g \sin \phi$$

Si se consideran pequeñas oscilaciones, entonces $\sin \phi = \phi$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + (g/L) \phi = 0 \quad (55)$$

donde la frecuencia de vibración es $\omega = \sqrt{g/L}$ y depende de la longitud del péndulo L, y es independiente de la masa del arreglo. El péndulo simple se ha usado como una manera de medir el tiempo.

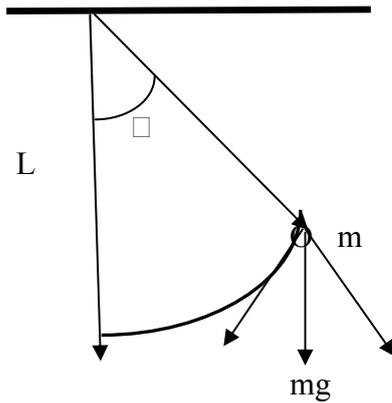


Fig. 18. Péndulo simple

4.3 Método de la Energía.

Se considera el uso del principio de conservación de la energía en la vibración de sistemas en los cuales no hay disipación de la energía, en cualquier instante la energía del sistema se conserva y es parcialmente energía cinética y parcialmente energía potencial.

$T =$ energía cinética

$U =$ energía potencial

$T + U =$ constante

$d(T+U)/dt = 0$

Para el sistema resorte masa, si se desprecia la masa del resorte, la energía cinética será.

$$T = m \dot{u}^2 / 2$$

En tanto que la energía potencial es la suma de la energía potencial del peso w con respecto a su posición de equilibrio y la energía almacenada en el resorte.

$$U = mgh + k u^2 / 2$$

$$m \dot{u}^2 / 2 + k u^2 / 2 = \text{constante}$$

$$d(m \dot{u}^2 / 2 + k u^2 / 2) / dt = 0$$

$$(w/g) \ddot{u} + k u = 0 \quad \text{o sea} \quad m \ddot{u} + k u = 0 \quad (56)$$

de la cual obtenemos $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, que es la frecuencia natural de vibración

4.4 Método de Rayleigh.

Es la aplicación del método de la energía a sistemas con masa distribuida, tal como una viga o como un resorte en la cual su masa no es despreciable, la configuración de la deflexión del sistema es necesaria para la evaluación de la energía cinética y potencial.

El método de Rayleigh muestra que la frecuencia fundamental (aquella de más bajo valor) de tales sistemas puede ser determinada con buena aproximación conociendo la curva de deflexión.

Se puede aplicar a sistemas de más de un grado de libertad, asimismo la frecuencia calculada nunca puede ser menor con respecto a la encontrada para la frecuencia fundamental.

Se propone utilizar el método de la energía, para masas distribuidas en un punto particular donde la rigidez es conocida.

Esto es en efecto, el sistema distribuido se reduce a un sistema equivalente de un grado de libertad.

Si consideramos el siguiente sistema como el mostrado en la figura 17, donde se desea determinar el efecto de la masa del resorte sobre la frecuencia de vibración.

El máximo desplazamiento de x es x_0 y cualquier punto tienen por desplazamiento y velocidad de:

$$x(t) = \frac{z}{L} a \sin \omega t \quad \frac{dy}{dt} = \frac{z}{L} \omega a \cos \omega t$$

L es la longitud del resorte en su posición de equilibrio.

La máxima energía cinética del elemento del resorte $m dz$ es igual a :

$$\frac{P}{g} dz \left(\frac{za \omega}{L} \right)^2 = d T_m$$

siendo p es el peso por unidad de longitud del resorte

$$T_m = \frac{P}{2g} \left(\frac{a \omega}{L} \right)^2 \int_0^L z^2 dz = \frac{1}{2} (pL / 3g) \omega^2 a^2 \quad (57)$$

Si adicionamos la energía cinética de la masa rígida, tenemos que el incremento de energía cinética total.

$$T_m = \frac{1}{2} (P + pL/3) \omega^2 a^2 / g$$

y la energía potencial del sistema es :

$$U_m = \int_0^a k(z + \Delta) dz - \omega a = \frac{1}{2} k a^2$$

$$U_m = \frac{1}{2} k a^2$$

Igualando las dos expresiones para la energía obtenemos para la frecuencia.

$$(P + pL/3) \omega^2 = g k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{gk}{P+pl/3}} \quad (58)$$

Si el efecto de la masa del resorte p puede ser tomada como si se adicionara al peso de la masa rígida P .

Si se considera que p es despreciable, se regresa a la frecuencia conocida

$$\omega_n = \sqrt{k g / P} = \sqrt{k g / m g} = \sqrt{k / m}$$

4.5 Vibración Libre con Amortiguamiento.

Amortiguamiento viscoso.

En este tipo de vibración la energía es disipada de alguna manera, y la amplitud no puede ser mantenida.

La descripción de la fuerza de amortiguamiento en relación a la disipación de la energía puede resultar bastante difícil, pudiendo ser función del desplazamiento, deformación u otra.

Sin embargo el modelo ideal de vibración con amortiguamiento que puede establecerse a menudo permite una satisfactoria aproximación.

La fuerza viscosa de amortiguamiento, se puede considerar proporcional a la velocidad y puede ser expresada mediante una relación matemática simple.

$$F = -c v(t) = -c \frac{dx}{dt}$$

Donde c es una constante de proporcionalidad.

El sistema bajo vibración libre, que se muestra en la figura.19. tiene por ecuación de movimiento (referencia [14]).

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -c \frac{dx(t)}{dt} - k x(t)$$

Reordenando de la forma:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad (59)$$

que acepta una solución de la forma

$$x(t) = q \exp(st) \quad q = \text{constante}$$

se obtiene una ecuación característica

$$s^2 + \frac{c}{m} s + \frac{k}{m} = 0$$

$$s_1, s_2 = -\frac{c}{2m} \pm \left[\left(\frac{c}{2m} \right)^2 - \frac{k}{m} \right]^{1/2}$$

$$x(t) = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} \quad (60)$$

con A y B constantes que dependen del movimiento establecido.

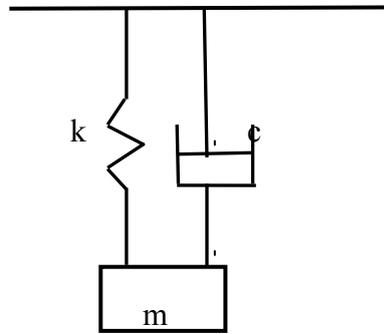


Fig. 19. Vibración libre con amortiguamiento viscoso

Amortiguamiento crítico.

El comportamiento del sistema amortiguado depende de los valores de s , se define como amortiguamiento crítico el valor de c para el cual se reduce el discriminante de s a cero.

$$\frac{c}{2m} = \sqrt{k/m} = \omega_n$$

$$c = 2m \omega_n$$

El sistema amortiguado puede ser especificado en términos del amortiguamiento crítico C_c .

Por la relación a dimensional

$$\zeta = \frac{c}{C_c} \quad c / C_c$$

$$\frac{c}{2m} = \zeta \frac{C_c}{2m} = \zeta \omega_n$$

$$y \quad s \text{ se reduce a } s = [-\zeta \pm (\zeta^2 - 1)^{1/2}] \omega_n$$

La situación de interés es ahora sobre la dependencia de ζ si es mayor, igual o menor de 1.

A) Amortiguamiento menor al crítico.

$$(\zeta < 1)$$

Substituyendo en la general solución se tiene.

$$X(t) = e^{(-\zeta \omega_n t)} [A e^{(\sqrt{1-\zeta^2} i \omega_n t)} + B e^{(\sqrt{1-\zeta^2} i \omega_n t)}]$$

$$X(t) = K e^{(-\zeta \omega_n t)} (\text{sen}((\sqrt{1-\zeta^2}) \omega_n t + \phi)) \quad (61)$$

y el movimiento es oscilatorio con la amplitud disminuyendo, como se muestra en la figura 20.

La frecuencia de oscilación amortiguada es:

$$\omega_d = (1 - \zeta^2)^{1/2} \omega_n$$

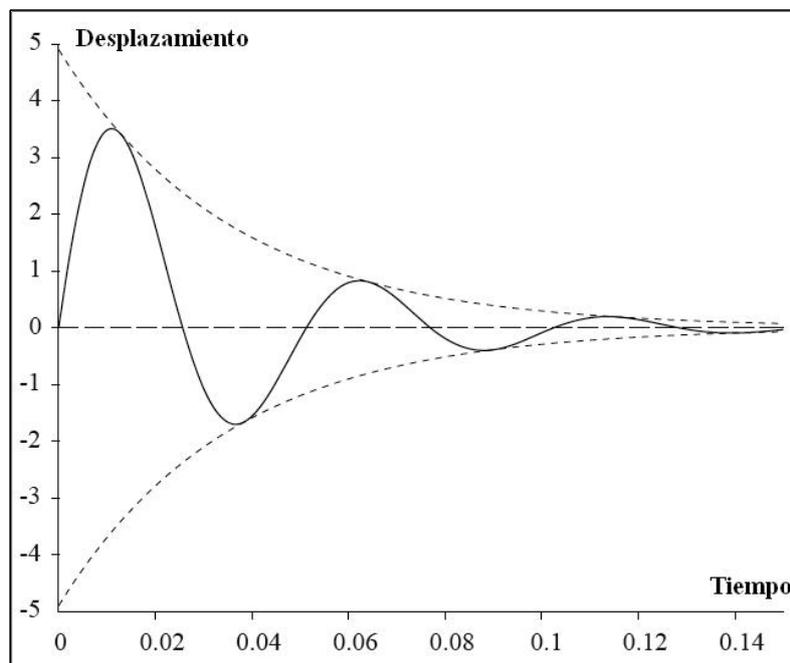


Fig. 20 Oscilación amortiguada, $\zeta < 1$

B) Amortiguamiento mayor que el crítico $\zeta > 1$

Cuando ζ es mayor a 1, las dos raíces quedan sobre el eje real, pero separadas una creciente y la otra decreciente. La ecuación queda

$$X = A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t}$$

El movimiento no es periódico, siendo exponencialmente decreciente con el tiempo, tal movimiento resulta ser aperiódico como se muestra en la figura 21.

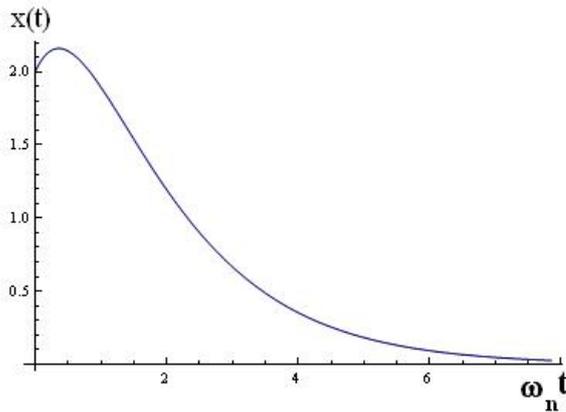


Fig. 21 Vibración sobre amortiguada

C) Amortiguamiento Crítico. Cuando $\zeta = 1$

Representa una transición entre las condiciones oscilatorio y no oscilatorio, para $\zeta = 1$ se obtiene una raíz doble es decir $S_1 = S_2 = -\omega_n$

Para este caso de raíz repetida aparecerá un segundo término de la forma $t e^{-\omega_n t}$ como una solución adicional a la simple $A e^{-\omega_n t}$

$$X(t) = (A + Bt) e^{-\omega_n t} \quad (62)$$

Conteniendo el número de constantes necesarias para satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden. Para el movimiento con condiciones iniciales, posición x_0 , y velocidad v_0 la solución toma la forma:

$$X(t) = \left[x_0 + \left(\frac{v_0}{\omega_n} + x_0 \right) \omega_n t \right] e^{-\omega_n t} \quad (63)$$

El movimiento es similar al movimiento aperiódico, como se ve en la figura 22.

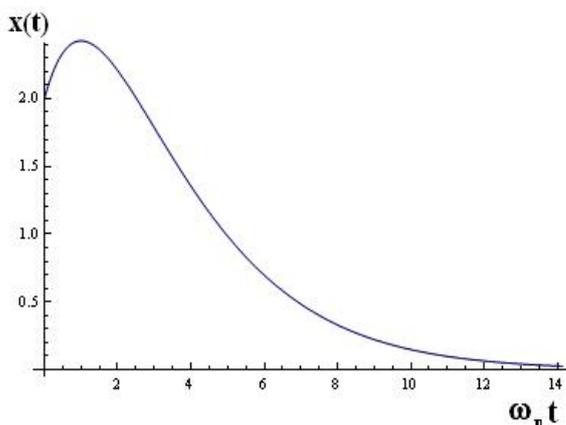


Fig. 22 Vibración críticamente amortiguada.

4.6 Vibraciones Forzadas.

Un sistema mecánico que en ocasiones está sujeto a fuerzas o excitaciones externas, dichas excitaciones son generalmente en forma de desplazamiento o de velocidad, también pueden ser en forma de fuerzas extendidas sobre el tiempo o sobre el periodo.

Las fuerzas externas pueden ser armónicas, no armónicas pero periódicas, no periódicas pero con forma definida o aleatoria.

La respuesta del sistema a tales excitaciones es llamada respuesta forzada.

La respuesta de un sistema bajo consideración, aplicando excitaciones no periódicas es llamada respuesta transitoria.

Vibración forzada sin amortiguamiento.

Un arreglo sencillo sin amortiguamiento, es un sistema masa-resorte, variando debido a una fuerza externa que depende del tiempo de la forma:

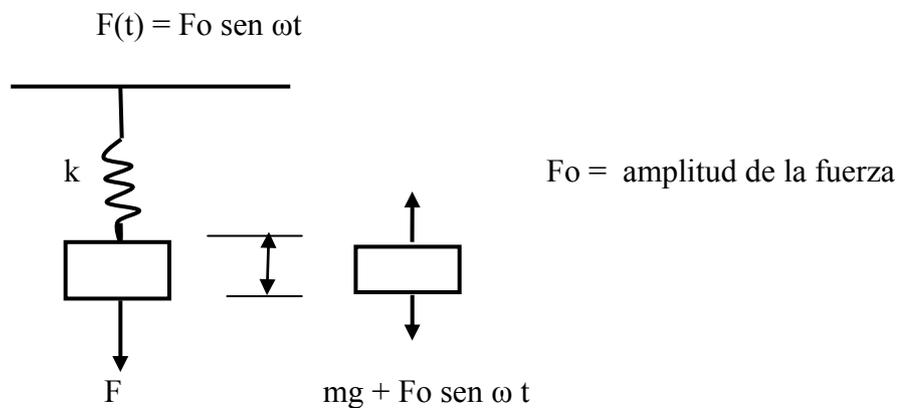


Fig. 23. Sistema con excitación forzada sin amortiguamiento.

Aplicando la segunda ley de Newton, en el cuerpo libre anterior. Se obtiene.

$$\sum Fy = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -k(y + \Delta) + mg + F$$

Que en la posición de equilibrio se cumple $k + \Delta y$, así que se puede escribir.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{F}{m}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{F}{m} \text{ sen } \omega t \quad (64)$$

Que resulta ser una ecuación no homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes, se sabe que tiene por solución la suma de la solución a la ecuación homogénea $Y_h(t)$, más una solución de tipo particular.

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)$$

La solución para $Y_h(t)$ es la que corresponde a la vibración libre de un oscilador armónico simple, para la cual $Y_h(t)$ tiene la forma de:

$$Y_h(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad \text{donde:} \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

y la solución particular tiene la forma armónica, como la fuerza de excitación:

$$Y_p(t) = Y \sin \omega t$$

Con una constante por determinar Y significa además la máxima amplitud de $Y_p(t)$, resolviendo para Y, se obtiene

$$Y = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)} \quad ; \quad Y = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \quad (65)$$

Así que la solución particular queda.

$$Y(t) = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \sin \omega t$$

solución completa para el movimiento de la masa está dada por:

$$Y(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \sin \omega t \quad (66)$$

Las constantes A y B se determinan aplicando las condiciones iniciales, que son:

$$Y(0) = Y_0 \quad \text{y} \quad V(0) = V_0$$

Resultando:

$$A = \frac{V_0}{\omega_0} \quad B = Y_0 - \frac{F_0}{(k - \omega^2)}$$

$$Y(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \cos \omega t + \left(Y_0 - \frac{F_0}{(k - \omega^2)}\right) \sin \omega t + \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \sin \omega t \quad (67)$$

La máxima amplitud para la respuesta puede ser expresada como

$$Y = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}$$

$$Y/df = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]} \quad , \quad df = \frac{F_0}{k} \quad \text{conocida como}$$

deflexión de la masa bajo la fuerza F_0 , o deflexión estática, cuando F_0 es una fuerza constante.

Mientras que la cantidad Y/df representa la razón de la amplitud dinámica a la amplitud estática del movimiento, o también conocido como factor de amplitud.

Cuando se considera la respuesta, que reescrita de la forma:

$$Y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\frac{F_0}{k}}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2]} \sin \omega t \quad (68)$$

Donde Y y φ , son la amplitud y la fase de la respuesta a la vibración libre, la última ecuación muestra que el movimiento de la masa es la suma de la respuesta de la vibración libre y la vibración forzada, cada una de ellas varían en forma senoidal con el tiempo.

La razón entre ω / ω_n , que es la razón entre la frecuencia de la fuerza a la frecuencia del sistema resorte-masa.

$$Y = df / (1 - r^2)$$

En de los diferentes valores de r , se presentan tres tipos diferentes de movimiento

- a) Relación de frecuencia $r < 1$

Si $r < 1$ entonces $\omega < \omega_n$, significa que la parte correspondiente a la vibración libre de la masa completa varios ciclos en el tiempo requerido para completar un ciclo, equivalente en la respuesta forzada como se muestra en la figura 24.

También hay que notar que la relación Y / df , que representa el factor de amplitud que es mayor a 1, y significa que la amplitud de la respuesta forzada es mayor que la deflexión estática.

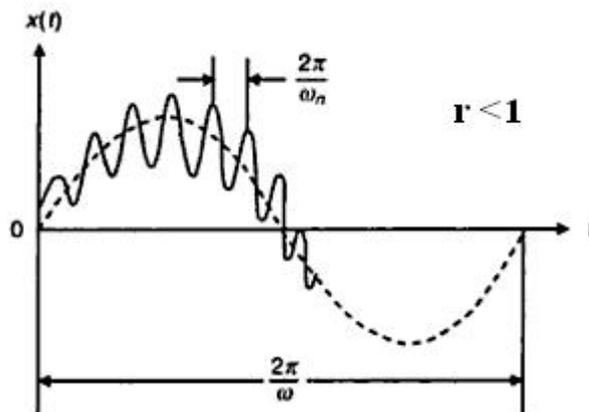


Fig. 24 Relación de frecuencia $r < 1$

- b) Relación de frecuencia $r > 1$

Si $r > 1$, entonces $\omega > \omega_n$, que es la frecuencia natural de la respuesta libre y es menor que la frecuencia de la respuesta forzada.

El movimiento es de tal forma que la respuesta forzada oscila alrededor de la respuesta libre como se muestra en la figura 25. Conforme $r \rightarrow \infty$, $Y \rightarrow 0$ lo cual significa que la respuesta del sistema a la fuerza armónica es de altas frecuencia y se cierra en cero.

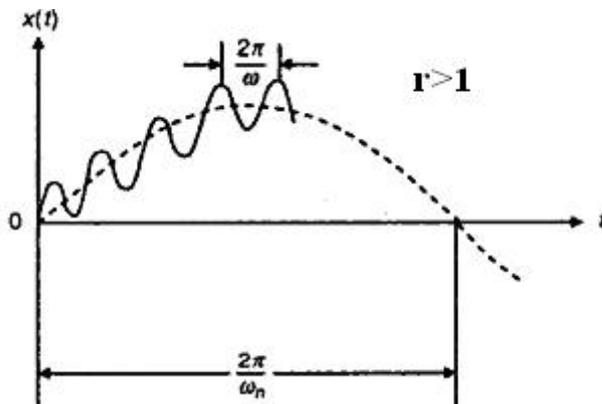


Fig. 25 Relación de frecuencia $r > 1$

c) Resonancia. $r = 1$

En el caso de que $r = 1$, o sea $\omega / \omega_n = 1$ que es cuando la frecuencia de la función forzada se iguala a la frecuencia del sistema resorte masa y se le refiere como resonancia el desplazamiento $y(t)$ crece para todo valor de t , la amplitud va al infinito, lo cual físicamente es inaceptable.

Entonces la ecuación (66) no representa la solución para el estado estacionario de resonancia ya que un desplazamiento infinito no puede alcanzarse en un instante.

La ecuación de movimiento para el caso $r = 1$, es:

$$\frac{d^2 y(t)}{d t^2} + \frac{k}{m} y(t) = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega t \quad (69)$$

Considerando la solución de la forma, $Y_p(t) = Y \text{ sen } \omega n t$ que acuerdo con (64) da:

$$- Y \omega^2 n \text{ sen } \omega n t + Y \omega^2 n \text{ sen } \omega n t = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega n t$$

$$0 = \frac{F_0}{m} \text{ sen } \omega n t, \quad \text{que representa un caso trivial para } F_0 = 0 \text{ ó } m \text{ es infinita.}$$

Así que se propone una solución de la forma:

$$Y_p(t) = Y t \text{ cos } \omega n t$$

Que reemplazando en (69) queda:

$$Y = - \frac{F_0}{2m \omega n} = \frac{-Y_0 \omega n}{2}$$

la completa solución para el caso $r = 1$, está dada por:

$$Y(t) = Y \sin(\omega n t + \square) - \frac{Y_0 \omega n}{2} t \cos \omega n t \quad (70)$$

Que muestra que la respuesta forzada varia senoidalmente y la amplitud se incrementa linealmente con el tiempo.

$$Y(t) = A \cos \omega n t + B \sin \omega n t - \frac{Y_0 \omega n}{2} t \cos \omega n t$$

$$A = Y_0, \quad B = \left[\frac{V_0}{\omega n} + \frac{y_0}{2} \right], \quad Y = [A^2 + B^2]$$

De acuerdo a lo anterior la amplitud de la respuesta forzada crece conforme transcurre el tiempo y eventualmente va al infinito, como se ve en la figura 26. y en ese caso el sistema resorte masa falla de manera indeseable.

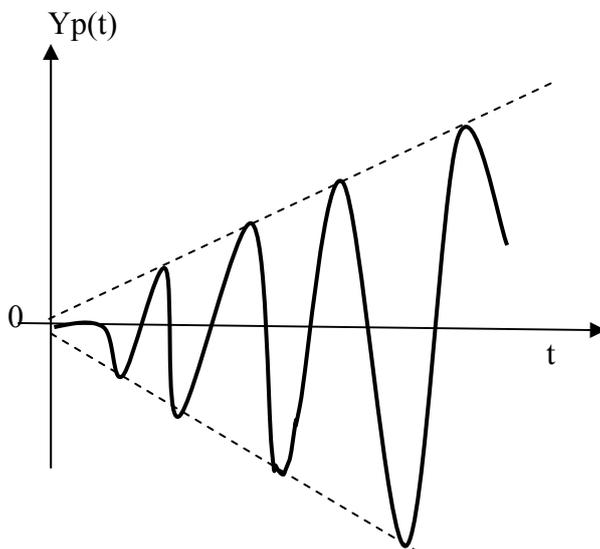


Fig 26. Amplitud de la respuesta forzada para el caso de resonancia.

4.7 Vibraciones forzadas con amortiguamiento.

Para un sistema amortiguado sujeto a una fuerza que varia armónicamente, tiene por ecuación de movimiento:

$$m \ddot{y} = -k y - c \dot{y} + F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (71)$$

Que es una ecuación diferencial no homogénea, la solución particular para el estado estacionario puede ser considerado de la forma:

$$Y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

De la cual se obtiene para la velocidad y la aceleración;

$$\dot{y} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t = -\omega^2 \quad (72)$$

Que llevadas a (71) nos da:

$$[k - m \omega^2] B - c \omega A = F_0$$

$$\omega B + [k - m \omega^2] A = 0$$

Resolviendo el sistema anterior, para A, B se obtiene:

$$A = -\frac{F_0 c \omega}{D} \quad B = \frac{F_0 [k - m \omega^2]}{D}$$

$$D = (c\omega)^2 + [k - m \omega^2]^2 \quad (73)$$

**“The Spectral Analysis isan Art”
Petre Stoica.**

5. El análisis espectral en las vibraciones mecánicas.

5.1 Mediciones y pruebas en Vibraciones Mecánicas.

Se sabe que en algunas aplicaciones para las cuales se dificulta el desarrollo y solución de un modelo representado por una ecuación diferencial para un sistema obtenido a partir de principios y leyes básicas de la dinámica, se puede complicar el desarrollo analítico de un modelo para obtener las frecuencias naturales, en tales casos se deberá recurrir a la medición en la respuesta del sistema.

La medición de la vibración y pruebas requieren del conocimiento de algunos programas y equipo, que serán necesarios para llevar a cabo las mediciones de la respuesta del sistema bajo estudio y prueba, así como también de algunos algoritmos.

Identificación del Sistema.

Se puede obtener un modelo mediante la aplicación de principios y métodos de la dinámica, sin embargo esto no siempre será posible en parte porque si el sistema dinámico no está lo suficientemente bien definido, o porque existe alguna limitación en el tiempo en el cual se desarrolla el modelo.

De acuerdo a las circunstancias anteriores el ingeniero recurre a la medición y pruebas del sistema por analizar, pero suponiendo que no es el caso anterior y que podemos probar el sistema, la información básica que se necesitara a menudo determinar de una prueba de vibración, incluye los siguientes puntos:

- a) El número de grados de libertad del sistema bajo estudio, medición y/o prueba.
- b) La frecuencia natural del sistema.
- c) La forma de modos.
- d) El amortiguamiento asociado a cada modo.

Esta es la información dada de un sistema bien entendido, pero para diseñar y analizar un sistema se necesita ser capaz de predecir su respuesta y también se puede necesitar tener un modelo específico.

El proceso para obtener un modelo matemático a partir de una prueba es llamado *“identificación del sistema”*

En tanto la identificación de parámetros, describen la situación del modelo, pero será necesario conocer los valores para estos parámetros.

Ejemplo: sea el modelo de un sistema lineal de un grado de libertad.

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) = f(t)$$

Cuya función de transferencia con la frecuencia como variable es:

$$H(\omega) = X(\omega) / F(\omega) = \frac{1}{k - m \omega^2 + c \omega i}$$

Para lo cual requerimos conocer los valores de k , m , c .

Se puede ayudarse de varios elementos para esta evaluación, tales como:

- La curva encontrada usando datos a partir de pruebas estáticas para estimar la rigidez k , y de manera similar a partir de las pruebas dinámicas para estimar el amortiguamiento c .
- Empleando el decremento logarítmico para estimar c , k , partiendo de la medición de la oscilación de la respuesta libre.
- Empleando la histéresis para estimar c .
- Usando la grafica de la respuesta en la frecuencia obtenida experimentalmente.

X (cm)

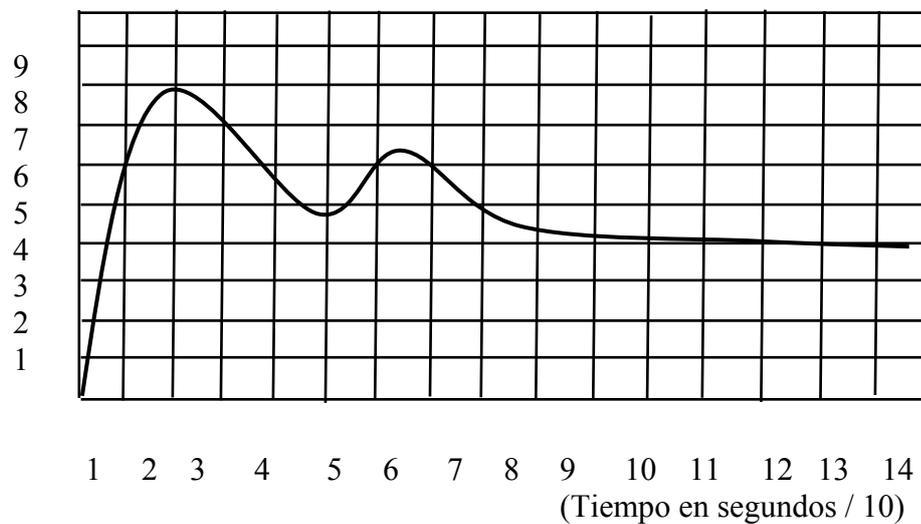


Fig. 27 gráfica en la medición de la respuesta un escalón.

Para $f = 12 \times 10^3 \text{ N}$

de acuerdo con la gráfica la respuesta en estado estacionario es para $X_s = 4 \text{ cm}$. o sea la ordenada de la grafica anterior y para este estado es $X_s = f / k$ desde ahí obtenemos, $k = 12 / 4 = 3 \times 10^5 \text{ N/m}$

de acuerdo con la gráfica el valor pico es 8 cm , así que el sobre disparo es,

$$S_d = (8 - 4) / 8 = 0.50$$

Entonces se puede calcular la razón de amortiguamiento;

$$A = \ln(100 / 50) = \ln 2 = 0.6931 \quad \zeta = \frac{A}{\sqrt{\pi^2 + A^2}} = 0.2154$$

Mientras que el pico ocurre en $t_p = 0.2$ que se obtiene con la gráfica (27)

$$\text{Además } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} ; \quad t_p = 32.2 / \omega_n$$

y de ahí $\omega_n = 16.1$ y $\omega^2_n = 260$, mientras que $m = k / \omega^2_n$

$$m = 3 \times 10^5 / 260 = 1154 \text{ kg}$$

Para obtener c tenemos $c = 2 \zeta \sqrt{m k} = 2 \times 0.215 \times (1154 \times 30)^{0.5} \times 10^2 \text{ kg / seg}$

$$c = 43 \sqrt{34620} = 8000 \text{ kg / seg.}$$

luego reconstruimos el modelo como:

$$1154 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 8000 \frac{dx(t)}{dt} + 3 \times 10^5 x(t) = f(t)$$

5.2 Descripción de señales.

Los fenómenos físicos de interés común en Ingeniería, son usualmente medidos en términos de una función de amplitud versus el tiempo, referidos a un record o historia de tiempo.

La amplitud instantánea en ese record puede representar cualquier cantidad de interés, por ejemplo desplazamiento, velocidad, aceleración, presión etc., similarmente la escala de tiempo puede representar cualquier variable independiente, tales como el tiempo, la posición, posición angular, etc.

Hay ciertos tipos de fenómenos físicos donde se especifica el record de la historia de tiempo, para futuras mediciones pueden ser predichas con razonable aproximación basadas en el conocimiento de la física o bien en observaciones anteriores de resultados experimentales, tales como la fuerza en una rueda giratoria, la posición de un satélite en órbita, la respuesta de un elemento estructural a una carga puntual.

Tales fenómenos se conocen como deterministas y los métodos para su análisis en la función del record de tiempo son bien conocidos.

Otros fenómenos físicos de interés en ingeniería no son deterministas, esto es cada experimento produce un único historial de tiempo. El cual no es posible ser repetido y no se puede predecir exactamente en detalle, tales datos y fenómenos físicos que se presentan se llaman aleatorios.

En la ingeniería se está más familiarizado trabajar con vibraciones deterministas, es decir sistemas con excitación periódica y hay certidumbre acerca de ellas.

Pero en el ámbito de las excitaciones se pueden incluir las aleatorias, donde las entradas no son bien conocidas, y pueden ser descritas en términos de medidas estadísticas, tal como el valor medio, como por ejemplo, en eventos tales como, la carga de viento en estructuras y puentes, fuerzas ondulatorias, el movimiento durante un sismo.

Una función aleatoria se mira irregular, sin un patrón definido, se considera que una señal aleatoria como una forma de onda que nunca se puede repetir, por ejemplo la función de la figura. 28.

De tal manera que una función senoidal no es una función aleatoria porque se repite para cualquier T segundos, cuando T es el periodo de la oscilación. Ahora si tomamos

por ejemplo, la función $x(t) = at$, no es una función aleatoria, y ella no siempre se repite a sí misma y justamente es que constantemente se está incrementando.

Este es un ejemplo de una situación no estacionaria, por el término estacionario se entiende que una o más cantidades permanecen fijas.

Cuando una señal tiende a un valor fijo entonces exhibe estacionariedad, o cuando el valor promedio es una constante, pero por lo general nos enfocaremos con procesos estacionarios.

Inclusive si una función es estacionaria, no periódica no es suficiente, por ejemplo,

$$F(t) = \sin t + \sin \sqrt{2} t$$

No es periódica, pero no llega a ser aleatoria, además dos ondas senoidales cuyas frecuencias no están relacionadas racionalmente siempre producirán un resultado no periódico, cada una de las cuales no es aleatoria y las dos funciones senoidales juntas no deberán considerarse como aleatoria, debido a que los valores de la función en el tiempo t es completamente predecible.

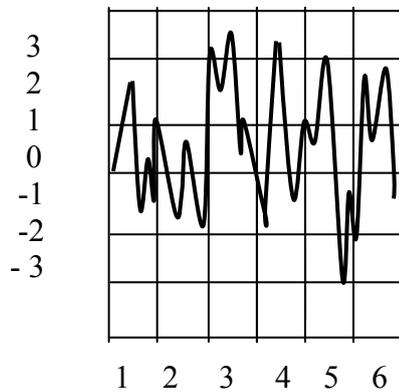


Fig. 28. Señal aleatoria.

Estas ideas dejan ver que las funciones aleatorias no pueden romperse o descomponerse en componentes armónicas puras.

Por esta razón no será posible encontrar una representación en series de Fourier de una verdadera señal aleatoria.

Si se tiene un estado estacionario, una verdadera función aleatoria es tal que cambia continuamente e impredeciblemente con el tiempo.

Por lo que eventualmente tendrá que cortarse la fuente de datos, entonces puede optar por imponer a la función una periodicidad asumiendo que se repite indefinidamente, con un periodo igual a t_1 , y efectuando un truncamiento de la función (haciendo dentro un transitorio), ahora se ha hecho una función periódica.

Se puede analizar otra señal periódica, realizando un artificio que es incrementando el tiempo t_1 , y aproximamos la actual señal aleatoria, esta aproximación será una aproximación asintótica de la verdadera señal aleatoria, dejando un pequeño error en un tiempo largo t_1 , para una señal dada como la que se muestra en la figura. 29

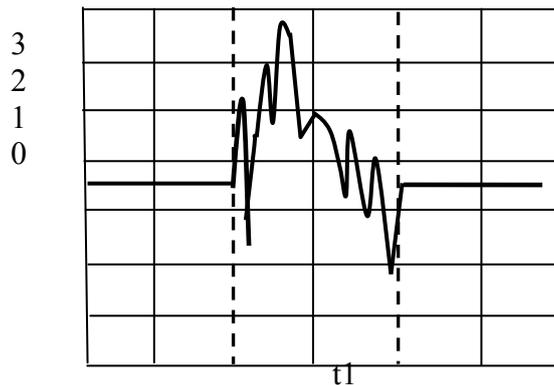


Fig. 29 Señal aperiódica

Si recorremos sobre la gráfica para un tiempo mayor a 1 segundo, se deberá tener cuidado para reproducir la grafica a partir de la señal conocida desde 0 a 1 seg.

¿Qué significado tiene realmente el término aleatorio? es tal que no se puede predecir cómo será una señal después de cierto tiempo, aun cuando si se conoce exactamente como era en el pasado, esto es enteramente diferente al caso de una senoide, para la cual se conoce que todos los valores futuros, y se conocerán también el periodo y la amplitud de la señal.

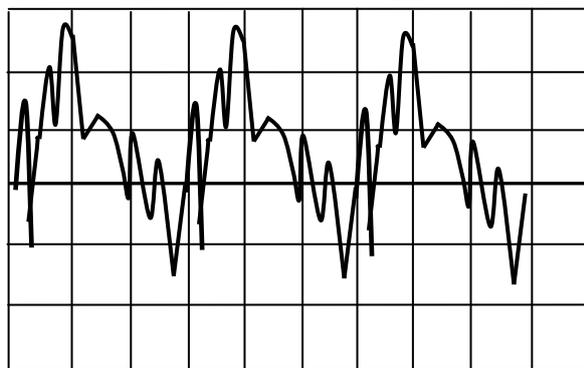


Fig 30. Respuesta periódica

En un proceso aleatorio se genera una respuesta que es impredecible, aun cuando un proceso aleatorio produce una respuesta que no es predecible en detalle, la respuesta sin embargo desde un punto de vista del promedio de una función es enteramente predecible.

Si la cantidad promedio de una función o señal por unidad de tiempo es constante entonces el proceso es estacionario.

La descripción más común a tratar para una señal es el valor promedio de la función, y esta dada por:

$$E(y) = \frac{1}{n} \sum_1^n y_i$$

Si lo relacionamos con un proceso continuo $y(t)$, se tendrá que definir al valor medio de la función como:

$$E(y(t)) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} y(t) dt \quad (74)$$

En el cual la muestra de datos tiene una duración de t_1 seg.

Toda señal real deberá ser muestreada y las muestras procesadas siendo la fuente de datos continuos la más familiar y en ocasiones matemáticamente más fácil de trabajar.

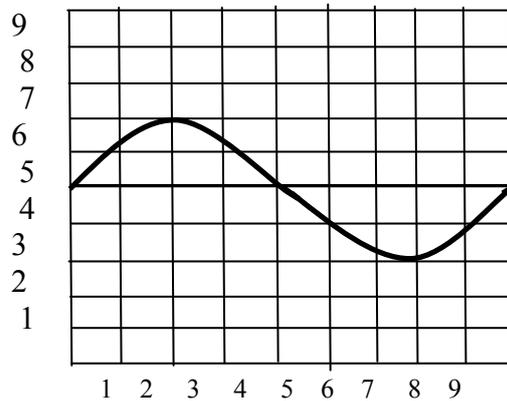


Fig 31 a. Valor medio de una función periódica

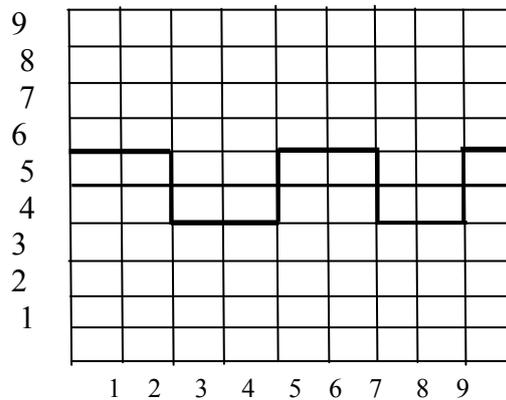


Fig 31 b. Valor medio de una función cuadrada.

Los valores promedio de las funciones anteriores son iguales y con valor de 5.

Pero las funciones son diferentes cualitativamente. Cuando se dé el caso de que los valores positivos cancelen a los valores negativos tendríamos un valor promedio de cero y esto no nos ayudaría mucho.

Pero podemos utilizar en lugar de lo anterior a la varianza o bien el valor medio cuadrático (r m s).

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

5.3 Señal Espectral.

Se puede encontrar una descripción de una señal a través del análisis de la transformada de Fourier.

Cuando se pregunta si hay alguna correlación entre la señal en dos puntos diferentes en el tiempo.

Una señal está claramente correlacionada consigo misma, y se puede preguntar si existe una correlación entre una señal en el tiempo t y otro en el tiempo $t + \lambda$.

Si la señal tiene una forma sinodal con periodo λ , se sabe que hay una muy buena correlación, cuando la respuesta en esos dos puntos de tiempo sean iguales o idénticos.

Una señal aleatoria pura no deberá ser correlacionada para cualquier periodo λ , además de cero, cuando la respuesta cambia de una manera impredecible.

La función de auto correlación $R_{xx}(\lambda)$, satisface justamente esta clase de pregunta, y se define como:

$$R_{xx}(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \lambda) dt \quad (75)$$

Para tiempos infinitamente largos no es realmente práctico, entonces el límite para T se tomará para aplicaciones reales como muy largo, pero no infinito.

Asimismo, si una señal $x(t)$ ha sido truncada la integral deberá tener límites finitos definidos donde $x(t)$ tiende a cero.

Para $\lambda = 0$ de acuerdo a (75)

$$R_{xx}(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t) dt \quad (76)$$

Esto significa que se obtiene el valor medio cuadrático para $x(t)$.

Esta es la función de auto correlación de una señal y que es igual al valor medio cuadrático de esa señal cuando se retrasa a $\lambda = 0$.

$$R(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \lambda) dt$$

Esta es la llamada Cross – correlación o correlación cruzada y es más general porque siempre puede dejar igual una función $z(t)$ igual a $x(t)$ si queremos una auto correlación.

Si la correlación cruzada es alta para algún valor de λ , se puede deducir que existe una relación entre dos vibraciones y que el tiempo transcurrido para el movimiento transmitido a partir de un punto a otro igual a λ .

La correlación cruzada podría ser usada para intentar determinar una vibración en un punto de un sistema que fue influenciada por la vibración en otro punto.

La función de correlación es muy útil porque se pueden obtener a partir de ella otras formas de funciones.

Una de esas funciones es conocida como potencia de densidad espectral y tiene la forma de:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\lambda) \exp(-i\omega\lambda) d\lambda \quad (77)$$

Que mirándola detalladamente la forma de la relación (77) sugiere que la potencia de **densidad espectral es la transformada de Fourier de la función de auto correlación.**

Se deduce entonces que R_{xx} puede escribirse como la inversa de la transformada de $S_{xx}(\omega)$.

$$R_{xx}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \exp(i\omega\lambda) d\omega \quad (78)$$

El resultado es el nivel de potencia de la densidad espectral que presenta una señal para cualquier frecuencia de interés.

Si queremos saber la potencia total entre dos frecuencias se necesita integrar $S_{xx}(\omega)$ entre las frecuencias tomando ambas frecuencias ω_1 y $-\omega_2$

La densidad espectral $S_{xx}(\omega)$ es una de las funciones más usadas en las pruebas de vibraciones.

Ejemplo.

Para la función $f(t) = a \sin(\omega_0 t)$, determinamos la función de densidad usando la función de auto correlación.

Partiendo de la función de auto correlación tenemos

$$R_{xx}(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a \sin(\omega_0 t) a \sin(\omega_0(t + \lambda)) dt$$

$$R_{xx}(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 \lambda) dt$$

$$+ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 \lambda) dt$$

$$T \rightarrow \infty$$

La segunda integral desaparece mientras la primera se reduce a:

$$R_{xx}(\lambda) = \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \lambda)$$

Este resultado se hace notar, nos dice porque la función seno es la máxima correlación consigo misma para valores posteriores de $2\pi/\omega_0$, mientras no se correlaciona para un cambio de tiempo $\pi/2\omega_0$, puesto que un cambio en el tiempo de este valor, altera la función seno a un coseno, esperando entonces una correlación cero.

La última relación predice que el valor medio $R_{xx}(0)$ es igual a $a^2/2$, que se puede también verificar analíticamente, si:

$$f(t) = a \sin(\omega_0 t), \text{ cuando}$$

$$f^2 = a^2 \sin^2(\omega_0 t) = a^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(\omega_0 t) \right)$$

De tal manera que el promedio de $\cos(\omega_0 t)$ queda en cero, dejando como valor medio cuadrático al término $a^2/2$, que está de acuerdo con lo que se había predicho.

Ahora podemos determinar la densidad espectral.

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-d}^d R_{xx}(\lambda) \exp(-i\omega\lambda) d\lambda \quad (79)$$

$$\text{Donde } d = \frac{n\pi}{\omega_0}$$

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-d}^d a^2/2 \cos(\omega_0\lambda) \exp(-i\omega\lambda) d\lambda \quad (80)$$

Se nota que es un poco diferente de (77) en el que se involucra un límite, si nosotros inmediatamente intentáramos utilizar los límites de integración infinitos no podríamos evaluar la integral.

Pero tomando el tiempo como múltiplos enteros del periodo de la función de auto correlación, usando d en vez de ∞ y dejando el número de múltiplos vaya a ∞ , conseguiremos la solución final correcta y asimismo podemos ver la manera en que se realiza la aproximación.

Corriendo fuera de la integral anterior nos deja:

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)} [a^2 \sin(n\pi - n\pi\omega/\omega_0) + a^2 \sin(n\pi + n\pi\omega/\omega_0)] \quad (81)$$

aplicando la regla de L' hospital, para $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n\beta}{\beta} = 1$

se reduce;

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{4} a^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Con dos deltas de Dirac, en $\omega = +\omega_0$ y $\omega = -\omega_0$

Lo relevante que se ha encontrado, nos dice que toda la energía de la onda seno está concentrada en una frecuencia, así cuando tratamos con pruebas modales, y encontramos la potencia de la densidad espectral aguda.

Sabremos lo que significa que haya armónicas distintas en la señal bajo análisis y que las frecuencias de las armónicas corresponden a las frecuencias de pico.

Observando que conseguimos esta información basada en la frecuencia de una función basada en el tiempo, (la función de auto correlación) que desde el punto de vista del análisis espectral, gira alrededor del dominio de la frecuencia en lugar del tiempo.

5.4 Función de Transferencia

La densidad espectral puede ser usada para determinar la respuesta a la frecuencia de un sistema bajo estudio. Su grafica puede aprovecharse para identificar el número de modos de vibración.

Un resultado muy usado, el cual deberemos tenerlo en cuenta es:

$$S_{xx}(\omega) = [g(\omega)]^2 S_{ff}(\omega) \quad (82)$$

donde $g(\omega)$ es la función de Transferencia del sistema bajo consideración, $f(t)$ es la entrada a el sistema, y $x(t)$ es la respuesta o salida del mismo .

La densidad espectral $S_{xx}(\omega)$ en la salida y $S_{ff}(\omega)$ es la densidad espectral en la entrada.

Consideremos como ejemplo, la ecuación de movimiento en un sistema masa -resorte.

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k x(t) = f(t)$$

para la cual la función de transferencia es :

$$g(\omega) = \frac{1}{k - m \omega^2}$$

que nos da para la respuesta:

$$S_{xx}(\omega) = \left[\frac{1}{k - m \omega^2} \right]^2 S_{ff}(\omega)$$

Conociendo la densidad espectral de la fuerza, se puede conocer la densidad espectral de la respuesta a partir de (82) como:

$$S_{xx}(\omega) = \left[\frac{1}{k - m \omega^2} \right]^2 S_{ff}(\omega) \quad (83)$$

Que nos permite saber la densidad espectral de la respuesta, conociendo la función de transferencia del sistema y la densidad espectral de la excitación.

La relación (82) puede ser empleada de diferentes maneras, la más sencilla es la que acabamos de ver, encontrando la densidad espectral de la respuesta, a partir de conocer la función de transferencia y la densidad espectral de la fuerza en la entrada.

Otra manera de usar la ecuación (82), seria para poder determinar la excitación a la entrada, midiendo la densidad espectral a la salida y dividiendo entre el cuadrado de la función de transferencia. Esto puede ser usado si no se puede con facilidad conocer la densidad a la entrada, pero si se conoce la salida y las características del sistema.

También se puede usar para conocer las características del sistema, midiendo las funciones de la entrada y la salida.

$$[g(\omega)]^2 = S_{xx}(\omega) / S_{ff}(\omega)$$

Ejemplo 2.

Como aplicación de estas últimas relaciones, considererando un sistema masa-resorte, bajo la acción de una fuerza senoidal de valor $4 \sin \omega t$, en la entrada y los parámetros:

$$f(t) = 4 \sin \omega t \text{ N}, \quad k = 660 \text{ N/m}, \quad m = 6 \text{ kg}, \quad \omega = 10 \text{ rad/seg}$$

$$S_{ff}(\omega) = (16/4) [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$S_{xx}(\omega) = \left[\frac{1}{k - m \omega^2} \right]^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$S_{xx}(\omega) = \left[\frac{1}{660 - 600} \right]^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$S_{xx}(\omega) = \left[\frac{1}{3600} \right] [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Se puede conocer la función de auto correlación $R_{xx}(\lambda)$

$$R_{xx}(\lambda) = \frac{1}{3600} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \exp(i\omega \lambda) dt$$

$$R_{xx}(\lambda) = \frac{1}{3600} \cos(8\lambda), \text{ calculando en } \lambda = 0, \text{ nos queda}$$

$$R_{xx}(\lambda) = \frac{1}{800}$$

El valor medio para x , es $\langle x \rangle = \left[\frac{1}{k - m \omega^2} \right] \langle f \rangle$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{60} = \frac{1}{15} \quad \text{así tendremos la respuesta como :}$$

$$X(t) = \frac{1}{15} \sin(10t)$$

Y el valor medio cuadrático esta dado por:

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{15} \right)^2 = \frac{1}{500}$$

5.5 Ruido.

Respuesta al Ruido.

El término se refiere a la componente aleatoria indeseable en la medición de una señal. El ruido producido por algunas fuentes se puede caracterizar por una distribución tal como la de Gauss.

Así aunque sean aleatorias, podemos describir tales señales ruidosas por medio del valor medio o la varianza.

La descripción más común del ruido es el modelo de ruido blanco, el nombre se debe al hecho de que la luz blanca contiene, en teoría una distribución uniforme de ondas de diversos colores, correspondientes a diversas frecuencias, la definición formal de ruido blanco es que la función de auto correlación es el de una función impulso, que es:

$$R_{xx}(\lambda) = \omega_0 \delta(\lambda) \quad (84)$$

donde ω_0 es una constante, la señal está completamente correlacionada para $\lambda=0$ y completamente sin correlación para $\lambda \neq 0$ en consecuencia la densidad espectral de un ruido blanco es una constante.

$$S_{xx}(\omega) = \omega_0 / 2\pi = S_0$$

Así podemos expresar a $R_{xx}(\lambda)$ como :

$$R_{xx}(\lambda) = 2\pi S_0 \delta(\lambda) \quad (85)$$

Entonces la constancia de la función de densidad en el modelo de ruido blanco permite simplificaciones matemáticas, y a menudo es una apropiada descripción de señales reales de ruido.

Limitación de la banda de ruido.

Observamos que una señal de ruido blanco no puede existir físicamente porque contendría una energía infinita, esto se puede ver ya que el área debajo de la curva de densidad espectrales proporcional al contenido de energía de la señal.

Pero puesto que la densidad es constante para un intervalo $-\infty < \omega < \infty$, el área es infinita de acuerdo con la figura (32 a), así que para señales reales la densidad espectral deberá decrecer para las frecuencias más altas.

La densidad espectral será aproximadamente constante de acuerdo con la figura (32 b).

Un caso idealizado se muestra en la figura (32 c), el cual es más fácil de digerir matemáticamente. Son ejemplos de ruido de banda limitada, que es así llamado porque la densidad es diferente de cero solamente en una banda de frecuencia limitada.

La diferencia entre una señal de ruido blanco ideal y una señal de banda limitada consiste en que no contienen altas frecuencias.

El comportamiento poco realista del modelo de ruido blanco en los de alta frecuencia no causa problemas en la práctica porque la magnitud de las funciones de transferencia en la frecuencia de los sistemas mecánicos es muy pequeña en relación a la frecuencia natural más alta.

La función de auto correlación para el ruido de banda limitada, mostrada en la figura (32 c) es:

$$R_{xx}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \exp(i\omega\lambda) d\omega = \frac{2S_0}{\lambda} (\sin \omega_2 \lambda - \sin \omega_1 \lambda) \quad (86)$$

La correlación llega a ser muy pequeña para tiempos más altos de λ , de la correlación. Notándose que la correlación para $\lambda = 0$ es ahora finita, mientras que para el ruido blanco ideal ∞ .

Si la señal real se puede agrupar en componentes deterministas más una componente de ruido, podemos agregar a la auto correlación de cada componente, para obtener la auto correlación total.

Similarmente podemos agregar las densidades espectrales de las componentes para obtener, la densidad total, así pues por ejemplo, si modelamos la señal como agrupada en una función seno más ruido blanco ideal, entonces.

$$R_{xx}(\lambda) = 2\pi S_0 \delta(\lambda) + (a^2/2) \cos(2\pi\lambda/T)$$

$$S_{xx}(\omega) = S_0 + 1/4 a^2 [\delta(\omega - 2\pi/T) + \delta(\omega + 2\pi/T)]$$

El ruido contribuye a un ajuste de pico en la auto correlación, mientras que la función seno contribuye en dos picos en la densidad espectral. El ruido blanco eleva el nivel de la densidad en una cantidad constante S_0 .

Se podría aplicar esta propiedad aditiva en más de una componente armónica presente en la señal.

La auto correlación parecerá más complicada porque contiene la suma de dos funciones armónicas de frecuencias diferentes, pero la densidad tendrá un par de puntos para cada una de las armónicas.

Esta es una razón por la que la densidad espectral medida es útil, sus picos indican las frecuencias de las componentes armónicas, la presencia del ruido blanco cambia de posición el diagrama simplemente hacia arriba.

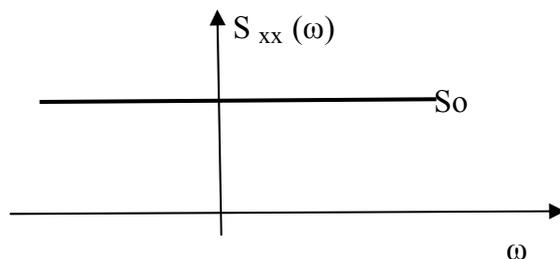


Fig 32 a.

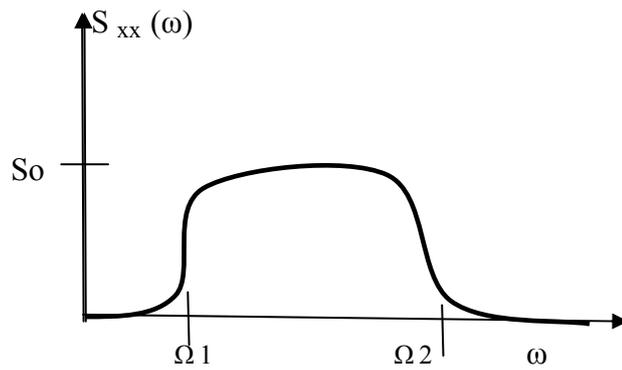


Fig 32 b

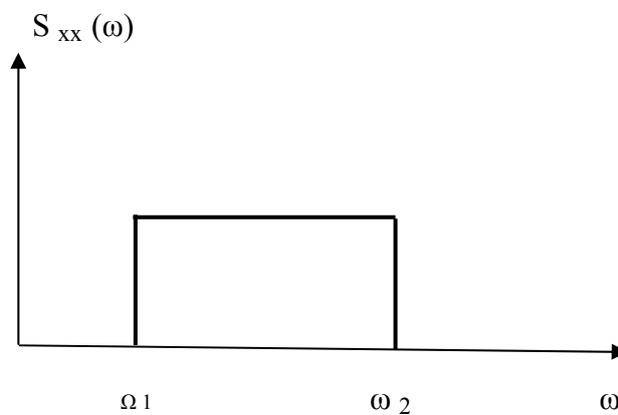


Fig 32 c.

Ejemplo.

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega$$

Que combinada con (82) tenemos.

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega$$

Esta expresión nos permite calcular la respuesta si es conocida la densidad espectral de una fuerza, para el caso de ruido blanco la densidad espectral se considera constante S_0 y así el valor medio cuadrático de la respuesta es:

$$E(x^2) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

Para el modelo de vibración de segundo orden, con amortiguación tenemos:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) = f(t)$$

- Primero obtenemos la expresión para la densidad espectral de la respuesta, en términos de la densidad espectral de la función fuerza, asumiéndola como una densidad constante S_o .

La función de transferencia es:

$$H(\omega) = X(\omega) / F(\omega) = \frac{1}{k - m \omega^2 + c \omega i}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(k - m \omega^2)^2 + 2(k - m \omega^2)c \omega + (c \omega)^2}$$

Y así $S_{xx} = \frac{1}{(k - m \omega^2)^2 + 2(k - m \omega^2)c \omega + (c \omega)^2} S_o$, ya que $S_{ff} = S_o$

Aunque la respuesta es aleatoria, tendrá una densidad espectral que es función de la frecuencia, dado que la densidad espectral de la entrada es constante.

-Segundo, el valor medio cuadrático de la respuesta estará dada por:

$$E(x^2) = S_o \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

$$E(x^2) = S_o \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{k - m \omega^2 + i \omega c} \right|^2 d\omega$$

$$E(x^2) = \pi S_o / c k, \quad (87)$$

que queda en función de S_o , y los parámetros c , k .

5.6 Sensores.

Un sensor es un aparato capaz de transformar una variable física, en una magnitud eléctrica llamada variable de instrumentación. Las variables dependen del tipo de sensor y se refieren a diferentes áreas de la física tales como mecánicas (velocidad, aceleración fuerza, presión, torque, etc.), térmicas, (temperatura, densidad, humedad) ópticas, eléctricas, hidráulicas, entre otros.

Un sensor esta siempre en contacto con la variable por medir o controlar. Los sensores no solo sirven para medir una variable, sino que también pueden transformarla en una señal regular, para establecer una relación funcional con los cambios de la variable censada, dentro de algún intervalo.

Cuando se va a llevar a cabo una *prueba modal*, se requerirá que algunos elementos básicos estén presentes, se necesitara de alguna manera excitar al sistema, también se necesitara de alguna forma de detectar la respuesta del sistema y se necesitara de un dispositivo que pueda utilizar la información de la entrada y de la salida para deducir algunas características del sistema.

Con respecto a las excitaciones, las dos más ampliamente utilizadas son el martillo de impacto y el sacudidor.

El martillo de impacto se parece a un martillo ordinario y se utiliza de manera similar, pegando rápidamente a la estructura o elemento que es probado, considerando que el martillo golpee solamente una vez.

Como se vio las cargas que ocurren rápidamente actúan como funciones delta, encontramos también que las funciones delta tienen una potencia espectral constante, siendo esta una propiedad importante dentro de nuestro análisis.

Recordando que el valor absoluto de la función de transferencia está dado como:

$$|G(\omega)| = \left[\frac{S_{xx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \right]^{1/2}$$

Si la densidad espectral de la energía de entrada es una constante S_0 entonces tenemos.

$$|G(\omega)| = \left[\frac{S_{xx}(\omega)}{S_0(\omega)} \right]^{1/2}$$

Así en lugar de tener el coeficiente de dos funciones dependientes de la frecuencia, solamente se necesitara dividir la densidad espectral de la salida, por una constante.

En el extremo de la cabeza de la pieza se pega a la estructura, se encuentra un sensor piezoeléctrico que genera una señal proporcional a la fuerza de impacto.

Este elemento se conoce como transductor de fuerza y un cable pasa del martillo a un analizador modal conectando la salida del transductor de fuerza hacia la entrada en el analizador.

El analizador entonces puede determinar cuál fue el perfil exacto de la fuerza contra el tiempo durante el golpe y de ahí calcula la densidad espectral de la fuerza a la entrada.

El martillo de impacto viene con pesos que pueden ser agregados a la cabeza y las extremidades, que permiten diversos niveles de fuerza en la estructura en la entrada.

La ventaja del martillo de impacto es su rapidez al utilizarlo y relativamente barato.

No se ata a la estructura y así no altera sus características dinámicas.

Una desventaja es que no se sabe exactamente donde se está golpeando a la estructura y se está introduciendo alguna incertidumbre en la medición, además puede ser que se golpee la estructura en demasía y la dañe.

El segundo tipo de instrumento de excitación es el Sacudidor, este mueve la estructura de prueba mecánicamente o hidráulicamente. El tipo más común es el sacudidor electromecánico.

El excitador debe ser capaz de producir una variación significativa de la fuerza con la cual excita a la estructura de prueba. El sacudidor es físicamente conectado a la estructura de prueba por medio de una barra fina de plástico o metal, conocido como aguijón.

Si se coloca de acuerdo con el eje del sacudidor, el movimiento se transmite con eficacia la fuerza del sacudidor, pero no causa una torsión indeseable a la estructura.

Se puede controlar la señal eléctrica que alcanza el sacudidor, podremos reproducir cualquier forma de onda de entrada que tengamos gusto.

Una señal deseada sería una senoidal permitiendo que determinemos la respuesta de la estructura en una sola frecuencia, también podríamos también tener una señal aleatoria.

Las ventajas de un sacudidor son la variedad de excitaciones que pueden ser usadas, el rango de nivel de fuerza y la aproximación con la cual la entrada puede ser aplicada.

La principal desventaja consiste en su alto costo y el hecho de que el sacudidor modifica la estructura a la que se sujeta. Los sacudidores hay en diversos, pero en general son pesados y se dificulta sujetarlos a la estructura.

Claro que no solamente tenemos aparatos para la entrada, es necesario también tener aparatos para poder medir la respuesta, el aparato más común para la respuesta es el acelerómetro. Estos son usualmente piezoeléctricos que nos permiten determinar la aceleración en la estructura, mientras nos cercioramos de que la frecuencia natural del acelerómetro sea mayor que la frecuencia más alta que estamos interesados en hacer la medición.

Los acelerómetros vienen en una variedad de tamaños y masas, la masa es un parámetro de interés puesto que el acelerómetro se sujeta físicamente al claro de la estructura.

La manera más común de atar un acelerómetro es pegarlo a la estructura con cera de abejas. Alternativamente se puede sujetar atornillando a la estructura.

Los sensores son relativamente baratos pero son también ruidosos y tienen un rango dinámico limitado. Además los cristales piezoeléctricos (flexibles o rígidos), distribuyen el material sobre una amplia área que se puede utilizar para detectar directamente los modos particulares de la estructura.

Después de que una señal ha sido censada, es amplificada a través de un acondicionador de señal apropiado y después se alimenta a un analizador. La gama de analizadores conocidos como los de vibración, analizador modal, analizador de espectro, es muy amplia actualmente.

Transductores.

La recopilación adecuada de datos acerca de la vibración, para la supervisión y el diagnóstico del estado de una maquina es una parte importante y donde la selección apropiada de algún transductor también lo es, se trata de los transductores más comunes del movimiento, el de proximidad, de velocidad, aceleración, así como de fuerza (piezoeléctrico).

Parámetro a medir.

En los comienzos del trabajo de mantenimiento predictivo, el transductor más común fue el de velocidad. La decisión en cuanto a que parámetro se debía medir se inclinó a favor del de velocidad. Adicionalmente a este punto la decisión, se inclina a la lectura de los niveles de desplazamiento, velocidad y aceleración que deben estar en función de la amplitud y de las frecuencias forzadas que una máquina es capaz de generar.

La operación física de varios tipos de transductor es tal que se ha limitado a la gama de frecuencias de 5 a 200 hz, no significa que el transductor de velocidad sea únicamente el utilizado. Se debe estar atento a los problemas que puedan presentarse de una pobre selección de transductores.

Los transductores más comúnmente usados en la vibración son los de proximidad, los recolectores de velocidad sísmica y los acelerómetros.

Transductor de proximidad.

Es un dispositivo que genera un campo electromagnético en la extremidad, la acción de esta extremidad que se sitúa cerca de un objeto metálico causa una interferencia en el campo, lo cual cambia la salida de la unidad.

Ventajas.

El T. de proximidad puede leer en la separación de la c.d., proporcionando una manera muy buena de supervisar los parámetros tales como el espesor de una película de aceite. Estos dispositivos son populares para obtener las orbitas de un eje, porque miden entre el hueco y un miembro fijo sobre el cual se montan y el eje directamente.

Cuando uno monta dos T de proximidad, perpendicularmente uno con el otro, tal que la punta de prueba observe el movimiento vertical, mientras que la otra el movimiento horizontal, la salida de los puntas de prueba pueden ser conducidos a los amplificadores vertical y horizontal de un osciloscopio, *para las orbitas producidas por* el eje. Los T. de proximidad son útiles para hacer medidas de la vibración de un eje con poca velocidad, apoyados en los cojinetes, pueden leer directamente al eje.

Desventajas.

Los T. de proximidad deben ser utilizados solamente para frecuencias del orden de unas centenas de Hz, el uso exclusivo de estos dispositivos para la de supervisión de vibraciones, dará lugar a todos los demás sean de información de orden mayor.

Se debe cuidar de que una falla bien puede dar lugar de cierta manera a frecuencias más altas en las cuales el T. de proximidad se basa el sistema de monitoreo oculto.



Fig. 33. Transductor de proximidad acoplado a un motor

Recolectores de velocidad sísmica.

Antes de la aparición de los acelerómetros piezoeléctricos de circuito integrado, la mayoría de los fenómenos de vibración utilizaron recolectores de velocidad sísmica para medir la vibración.

Este recolector se compone de una masa magnética de un resorte, en un baño de aceite, rodeando a la masa de una bobina.

Cuando el recolector está sujeto a la vibración, la masa magnética oscila alrededor de la bobina, produce de la misma forma que un generador de energía eléctrica generando un campo magnético, más allá de la bobina que esta inmóvil.

La oscilación magnética causa un campo que genera un voltaje en la bobina, estos voltajes son proporcionales a la velocidad de la superficie sobre el cual el recolector es montado.

Ventajas.

El recolector de velocidad se ha usado durante años y es bien conocido, ya que la señal la genera uno mismo, no es necesario poner una fuente de alimentación y el cambio de un amplificador se hace innecesario.

Desventajas.

En un recolector el resorte de acero es relativamente débil y la masa grande, por lo que la frecuencia natural ($f = 1/2\pi \sqrt{k/m}$) es cerca de 10 Hz, debido a la resonancia, el recolector se llena de aceite, sobre amortiguando a la función de transferencia, causando que la sensibilidad de la respuesta caiga por debajo de 10 Hz.

Los técnicos que tienen maquinaria de baja velocidad por lo general usan el recolector, sin embargo los recolectores se hacen insensibles por debajo de los 10 Hz.

Acelerómetros.

Se consideran varios tipos de transductores, pero el transductor vibratorio más comúnmente empleado, es el tipo piezoeléctrico, como el mostrado en la figura. 34. El mecanismo básico de trabajo es la masa que actúa sobre el cristal piezoeléctrico, ya que

este material genera una carga eléctrica que es proporcional a su deformación, podemos utilizarlo para determinar la aceleración de un cuerpo sobre el cual es atado o sujeto acelerómetro. El material piezoeléctrico se trasquila, mientras la masa sísmica que se mueve en la periferia de la carcasa.

El acelerómetro mostrado en la figura. 35 induce una carga en el material piezoeléctrico es comprimido. Puede ser considerado como un sistema de segundo orden, una masa atada a la cubierta del acelerómetro a través de un resorte. De acuerdo con la fig. 35 donde la masa movable se interna dentro del cuerpo del acelerómetro representado por m , el resorte que conecta con esta masa con el acelerómetro es denotado k .

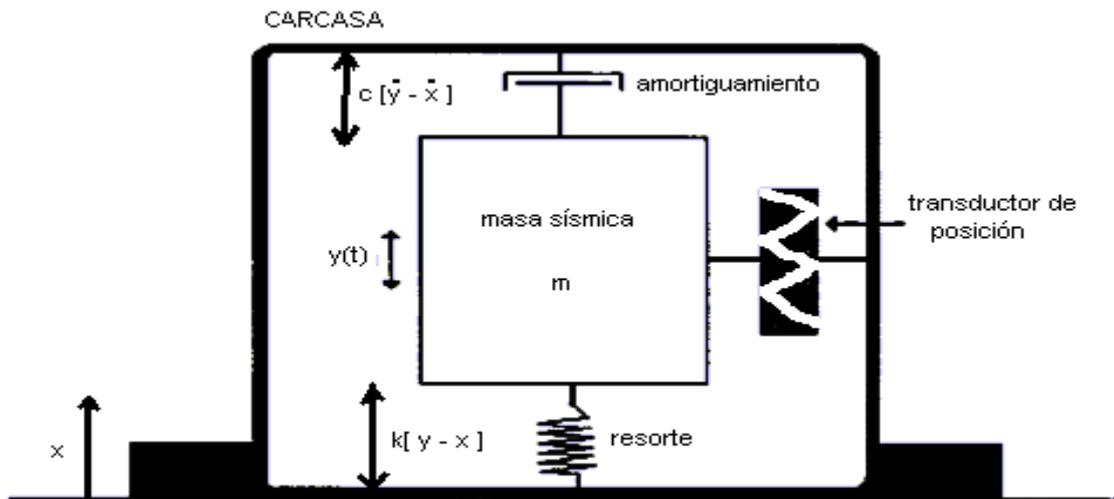


Fig. 34. Acelerómetro de masa sísmica.

El movimiento real del cuerpo del acelerómetro está dado por y , mientras que el movimiento relativo de la masa m , con respecto al movimiento del cuerpo del acelerómetro está dado por x . También se incluye un amortiguador c , que causa la disipación por la fricción, se hace notar que el x es el movimiento relativo de la masa interna, no siendo el movimiento real de la masa interna con respecto a un observador externo.

El movimiento absoluto de la masa sísmica está dado por $x + y$, podemos llevar a cabo un balance de fuerzas para encontrar:

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -c\dot{y} - kx \quad \text{que se puede reordenar como:}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{y} + kx = -m\ddot{y}$$

para una aceleración de tipo senoidal, usamos $y(t) = Y e^{i\omega t}$

entonces $x(t) = X e^{i\omega t}$, que nos lleva a:

$$(\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega)X = \omega^2 Y \quad (88)$$

Luego, $x(t) = N/D$

$$N = \omega^2 Y e^{i\omega t} \quad D = \omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega_n\omega$$

Esta ecuación que gobierna al acelerómetro, resultando una expresión que no es simple, pero esta situación cambia cuando consideramos el caso en el cual la frecuencia de la excitación sea mucho más pequeña que la frecuencia natural del acelerómetro ω mucho menor que ω_n o sea $\omega \ll \omega_n$. En este caso los términos para la velocidad y la aceleración resultan despreciables en comparación con el desplazamiento.

$$|i\omega^2 x| \ll |i\omega x| \ll |x|$$

Que finalmente se reduce a:

$$x(t) = -\ddot{y}(t) / \omega_n^2 \quad (89)$$

Así se tiene una medida directa de aceleración del objeto que necesitamos, simplemente multiplicando por $-\omega_n^2$ para obtenerla.

Considerando el caso para el cual la frecuencia natural de nuestro dispositivo es mucho más bajo que la frecuencia de excitación

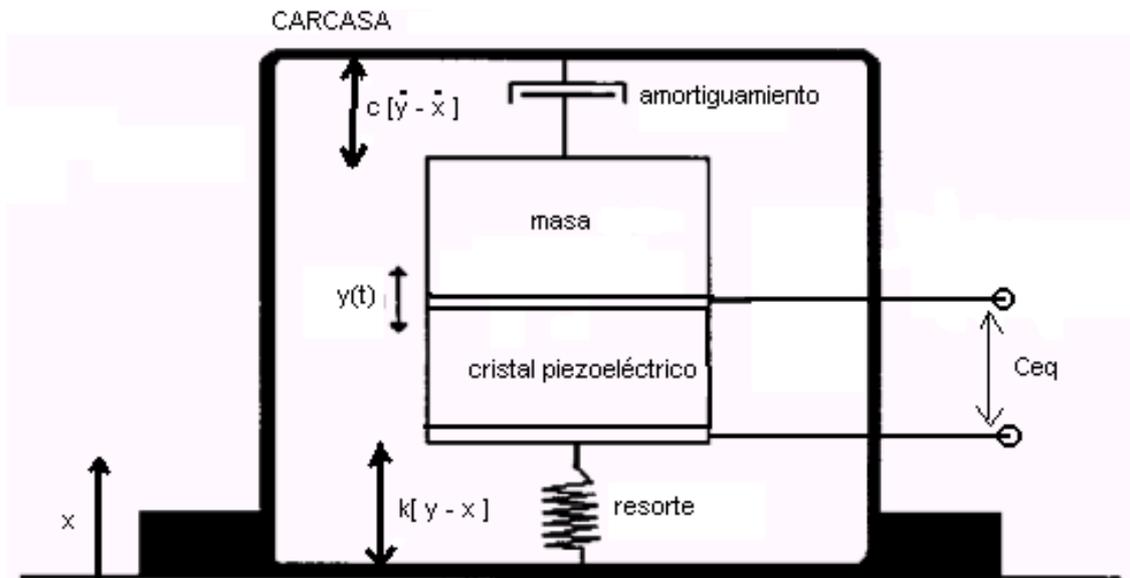


Fig. 35 acelerómetro piezoeléctrico.

$\omega \ll \omega_n$ que llevando a (88) da:

$$x(t) = -Y e^{i\omega t}$$

entonces es de esperarse que el transductor nos da una lectura que este directamente proporcional a la superficie de montaje en movimiento, cuando se está utilizando de esta manera el transductor es llamado sismómetro.

Físicamente el confinamiento de $\omega \ll \omega_n$ significa que la frecuencia natural debe ser pequeña, esto implica que cualquier masa grande o un resorte débil.

Consecuentemente los sismómetros resultan sustancialmente más grandes que los acelerómetros.



Fig. 36 Acelerómetro piezoelectrico de cuarzo.

Transductor de fuerza

Un transductor piezoelectrico de fuerza es similar a un acelerómetro pero sin incluir la masa, un cristal es montado tal que cualquier fuerza aplicada al sistema resulta de compresión o tensión. El cristal genera una carga positiva o negativa según si esta es de compresión o tensión, que es proporcional a la fuerza.

Por las razones vistas anteriormente para usar un acelerómetro, son también recomendables para usar un transductor de fuerza.

Un transductor de fuerza ve la fuerza que pasa por él, en una prueba con el sacudidor por ejemplo, toda la energía impartida al objeto de la prueba debe pasar a través del transductor de fuerza.

Si se utiliza un martillo de fuerza para la prueba de impacto, el transductor debe estar entre la manija del martillo y la extremidad.

Especial atención debe por tanto, ser prestada a la sección de un martillo de la fuerza para la prueba de impacto, para el diseño de la estructura del transductor y el martillo de fuerza, cada tamaño de los martillos tiene una gama diversa de frecuencia asible.

Teniendo una buena respuesta a la frecuencia pero unos pocos de kilo Hertz.

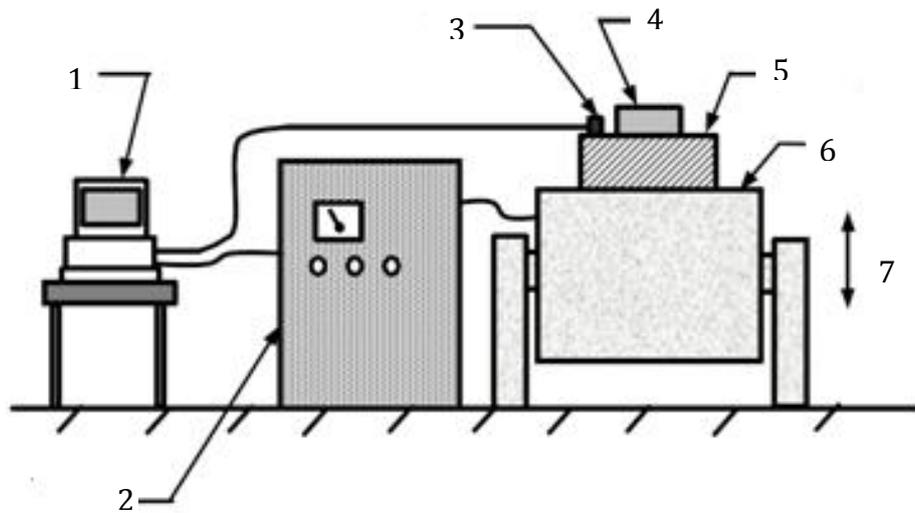


Fig. 37 Arreglo para una prueba de una pieza, sujeto a vibración.
Se muestran las principales componentes.

1. Computadora.
2. Amplificador
3. Acelerómetro.
4. Pieza a probar.
5. Fijación.
6. Sacudidor.
7. Sentido de la vibración.



Fig. 38 Analizador de espectro acoplado a una maquina.

6 Conclusiones.

La importancia que tiene conocer, determinar y medir algunas funciones o parámetros en los cuerpos o en elementos estructurales, o en máquinas, sujetos a vibraciones, llevaron a desarrollar algunos métodos y procedimientos para su estudio y evaluación. Estos fueron establecidos principalmente en los siglos XVIII y XIX, los cuales son bien conocidos casi todos de carácter determinista, pero en las últimas décadas se han incorporado el análisis espectral para llevar a cabo estos objetivos, incluyéndose las vibraciones de carácter aleatorio, que hemos visto en los temas contenidos en el presente trabajo y que en función de ello podemos establecer algunas conclusiones como las siguientes:

1.- El empleo de la Serie y la Transformada de Fourier, nos permiten pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

2.- El trabajar en el dominio de la frecuencia ofrece mayor facilidad en los cálculos y operaciones.

3.- Se aprovecha el uso de osciloscopio como instrumento para seguir una señal, y para efectuar un muestreo.

4.- El analizador de espectro nos permite conocer el espectro, calculando la transformada rápida de Fourier en el campo discreto, llevando a cabo mediciones precisas de amplitud para varias frecuencias y teniendo mayor resolución para un rango o ancho de banda, que en el dominio del tiempo, pues presenta menor ruido que con respecto a un osciloscopio.

5.- Se pueden manejar excitaciones aleatorias, o procesos aleatorios, empleando una estimación o estadística, por ejemplo el valor medio o el valor medio cuadrático o la varianza de una función, para dejar este carácter aleatorio, siempre que un sistema presente un estado estacionario.

Dado que la función aleatoria no se puede manejar como una función periódica así que no se podrá descomponer en armónicas y aplicar directamente la transformada de Fourier.

6.- Se establece la importancia de la función de densidad espectral, que es una función básica muy usada en el análisis espectral, ya que con ella se puede estimar la respuesta para un sistema o proceso aleatorio. Es común asociarla a una función como el desplazamiento, la velocidad, aceleración, fuerza y medir su magnitud en función de la frecuencia.

7.- Cuando se considera el ruido, se trabaja con el ruido blanco o ideal que nos proporciona una densidad espectral constante para la entrada y esto nos facilita el cálculo para la salida o respuesta del sistema o proceso que estamos estimando.

La amplitud del ruido blanco se adicionara a las amplitudes de la excitación.

8.- El análisis espectral nos da la posibilidad de obtener las repuesta y valor de algún sistema propuesto por ejemplo de primer o segundo orden.

9.- También puede aplicarse en ensayos y pruebas de algunos elementos estructurales, o elementos de maquinas y/ o motores.

10.- Actualmente se emplea para monitorear elementos de máquinas o maquinaria generalmente rotatorias y prevenir algunas fallas.

Apéndice 1

Nomenclatura.

a- Amplitud de vibración, aceleración.

a_n - término generico en la serie de Fourier asociado con la función $\cos nt$.

b_n . - término genérico en la serie de Fourier asociado con la función $\sin nt$

c - coeficiente de amortiguamiento.

C_c - amortiguamiento crítico

k- rigidez de un elemento elástico o resorte

E - energía

F- fuerza

$F(t)$ - función en el dominio del tiempo

$F(\omega)$ - función espectral en el dominio de la frecuencia

$H(\omega)$ - función de transferencia

M - masa

m- índice entero

n- índice entero

R - función de correlación

S - función de densidad espectral

T - Período

ω - frecuencia

ω_n - frecuencia natural

Referencias Bibliograficas.

- 1 Bath Marcus.
Modern spectral analysis in geophysics.
University of Uppsala, Sweden. 1974
Elsevier Scientific Publishing co.
- 2 Bendat Jolius.
Engineering applications of correlations and spectral analysis.
Jhon wiley and sons 1993
- 3 Buchla David.
Applied electronic, instrumentation and measurement.
Merrill's international series in engineering technology 1992.
- 4 Berlin Howard and Getz Frank c.
Principles of electronic instrumentation and measurement.
Merrill's international series in electronics technology. 1988
- 5 Jenkis Gwilyn M & Watts Donald G.
Spectral analysis an its applications.
University Lancaster, Holden- Day 1968
- 6 Cooley ,J.W., Lewis A.W. "Historical notes on the Fast Fourier Transform"
IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol Au -15; Junio 1967
- 7 Levi L. Enzo.
Teoría y métodos de las Matemáticas aplicadas.
Facultad de Ingeniería UNAM. 1986.
- 8 Newland David Edward.
University of Shefflied
An introduction to random vibrations and spectral analysis. 1994
- 9 Oppenheim Alan V. and Shafer R.W.
Digital Signal Procesisng.
Prentice Hall.
- 10 Palm III William J.
University of Rodhe Island 2007
Mechanical Vibration.
John Wiley & Sons
- 11 Rao. V. Dukippati
Vibration analysis
Alpha Scieinc International Ltd
2004
- 12 Sokolnikoff I.
Advanced Mathematics for Engineering and physics
Mc Graw Hill 1996

- 13 Spanos P. D. and Roberts J. B.
Vibrations and statistical linearization.
John Wiley and Sons 1990
- 14 Thomson William.
Vibration theory and applications.
University of California 1965
Prentice Hall
- 16 Tongue Benson H.
Principles of Vibration
Oxford University Press 2002
- 17 Witte Robert.
Spectrum and network measurements.
Prentice Hall. 1993.