



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ESTADOS CRISTALIZADOS:
GENERACIÓN Y PROPIEDADES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
JULIO ALBERTO LÓPEZ SALDÍVAR

DIRECTOR DE TESIS:
DR. OCTAVIO CASTAÑOS GARZA

COMITÉ TUTORAL:
DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA
DR. JAVIER VITELA ESCAMILLA



posgrado en ciencias físicas
u n a m

2011



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

A mi familia, Esmeralda y a ambas Camilas.

Agradecimientos

Agradezco el apoyo económico brindado por el CONACyT (proyecto 101541), FONCICyT (proyecto 94142) y al Sistema Nacional de Investigadores (SNI).

Quiero agradecer al Dr. Octavio Castaños Garza por su guía y consejos.

Al Dr. Jorge Ramón Soto por su apoyo.

A los sinodales de este trabajo por su gran diligencia.

A mi familia por las incontables ocasiones felices.

A Esmeralda por su compañía y alegría.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Capítulo 1. Introducción	1
Capítulo 2. Fundamentos de Óptica Cuántica	4
2.1. . Fluorescencia Resonante.	4
2.1.1. . Espectro de tres picos de Mollow	5
2.1.2. . “Anti-Bunching”	6
2.2. . Compresión de las fluctuaciones	7
2.2.1. . ¿Qué es un estado comprimido?	7
2.2.2. . Estados comprimidos en el Oscilador Óptico Paramétrico.	8
Detección de un estado comprimido	9
2.2.3. . Estadística del Estado del Vacío	9
2.2.4. . Interferencia en el espacio fase.	10
Estadística de fotones del vacío comprimido.	10
El experimento de la doble rejilla de Young en el espacio fase.	11
2.3. . Modelo de Jaynes-Cummings-Paul.	12
2.3.1. . Un átomo de dos niveles con un solo modo.	12
2.3.2. . Escalas de tiempo.	12
2.4. . Cavidades QED.	13
2.4.1. . Un Maser sorprendente.	13
Maser de un átomo.	14
Radiación del maser.	14
2.4.2. . Cavity QED en el dominio óptico.	15
Movimiento de átomos dentro de la cavidad: Microscopio de átomos en la cavidad.	15
Láser de un átomo.	16
2.5. . Óptica de de Broglie.	16
2.5.1. . Óptica de Electrones y Neutrones.	16
2.5.2. . Óptica Atómica.	16
Capítulo 3. Cuantización del Campo Electromagnético	18
3.1. . El Campo de un Modo como un Oscilador Armónico.	18
3.2. . Cuantización de un Campo Unimodal.	20

3.3.	. El Campo en el Vacío.	23
3.4.	. La Necesidad del Campo del Vacío.	27
3.5.	. Conmutadores de los Campos.	32
3.6.	. El Efecto Unruh-Davies.	33
3.7.	. Radiación Térmica.	34
Capítulo 4. La Función de Wigner		36
4.1.	. Definición de la Función de Wigner	36
4.2.	. Propiedades de la Función de Wigner	37
4.2.1.	. Marginales	37
	Distribución de Posición	37
	Distribución de Momento	38
4.2.2.	. Superposición de Estados Cuánticos en el Espacio Fase	39
4.2.3.	. Forma de la Función de Wigner	41
	Tamaño de un Estado Cuántico	41
	Cota Superior de la Función de Wigner	41
	La función de Wigner puede tomar valores negativos.	42
4.3.	. Evolución Temporal de la Función de Wigner	43
4.3.1.	. La Ecuación de von Neumann en el Espacio Fase	43
4.3.2.	. La Ecuación de Liouville Cuántica	44
4.4.	. La Función de Wigner Determinada por el Espacio Fase	45
4.4.1.	. Definición de la Función de Moyal	45
4.4.2.	. Ecuaciones del Espacio Fase para las Funciones de Moyal	46
4.5.	. Ecuaciones del Espacio Fase para Eigenestados de la Energía	47
4.5.1.	. Expansión en Potencias de la Constante de Planck.	48
	Límite Clásico.	48
	Límite Semiclásico.	49
4.5.2.	. Ecuación Diferencial Modelo.	49
	Solución por medio de la Transformada de Fourier.	50
4.6.	. El Oscilador Armónico.	52
4.6.1.	. La Función de Wigner como una función de onda.	52
4.6.2.	. El Espacio Fase y la Cuantización de la Energía.	54
4.7.	. Evaluación de Promedios Mecánico Cuánticos.	55
4.7.1.	. Ordenamiento de Operadores.	55
	Ejemplo	55
	Ordenamiento de Weyl-Wigner.	56
4.7.2.	. Ejemplos del ordenamiento de Weyl-Wigner.	57
	Ordenamiento simétrico.	57
	La Ecuación de Schrödinger en el Espacio Fase.	58
4.8.	. Otras Distribuciones	59
4.9.	. La Función de Husimi.	60
4.9.1.	. Propiedades de la Función Q.	60
Capítulo 5. Interacción de un Átomo y Radiación Electromagnética		62

5.1. . La Función Hamiltoniana.	62
5.2. . Aproximación Dipolar.	65
5.3. . Cuantización	66
5.4. . Transformación del Hamiltoniano.	67
5.5. . Las Ecuaciones de Heisenberg.	69
5.6. . Correspondencia Clásica-Cuántica.	71
5.7. . Modelo de Dos Estados para un Átomo.	75
5.8. . Modelo de Tres Estados para un Átomo.	79
Capítulo 6. Estados de Gato Cristalizados de Schrödinger	81
6.1. . Estados de Gato de Schrödinger para Grupos Finitos	81
6.1.1. . Definición de los Estados.	82
6.1.2. . Propiedades de los Grupos	85
6.1.3. . Dispersiones	88
6.1.4. . Estadística de Fotones	90
6.1.5. . Distribuciones de Wigner y de Husimi	94
6.1.5.1. . Función de Wigner	94
6.1.5.2. . Función de Husimi	96
6.1.5.3. . Área de la distribución de Husimi	98
6.1.5.4. . Distribuciones Marginales	99
Capítulo 7. Generación de Estados de Gato de Schrödinger	109
7.1. . Átomo de Dos Niveles en una Cavidad.	109
7.2. . Traza del Cuadrado del Operador Densidad.	112
7.3. . Estadística de Fotones e Inversión de Población	116
7.4. . Función de Husimi para el Campo	123
7.5. . Función de Wigner para el Campo	130
Capítulo 8. Conclusiones	140
Apéndice A. Ecuaciones en el Espacio Fase	145
A.1. .Formulación del Problema	145
A.2. .Transformada de Fourier de los Elementos de Matriz	146
A.3. .Términos de la Energía Cinética	147
A.4. .Términos de la Energía Potencial	149
Apéndice B. Programación	152
Apéndice C. Función de Wigner para un operador con estados de Fock . .	159
Bibliografía	162

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo tiene como finalidad la descripción teórica de algunas superposiciones de estados macroscópicos; llamados estados de Gato de Schrödinger; así como observar la generación de dichos estados en un sistema dinámico y caracterizar sus propiedades ópticas y estadísticas.

Los estados de gato de Schrödinger son superposiciones de estados coherentes¹ que portan las propiedades de un determinado grupo finito. Estos estados presentan algunas propiedades cuánticas interesantes como compresión y estadísticas sub-Poissonianas y también presentan una distribución oscilatoria en el número de fotones [1, 2]. Sin embargo no se sabe si estas propiedades son compartidas por todos los estados de gato, no obstante es de esperarse que diferentes estados de gato asociados cada uno de ellos a diferentes grupos difieran en sus comportamientos. Por lo que un objetivo de esta tesis es investigar si algunas de las propiedades cuánticas observadas en los que llamaremos estados par e impar de gato de Schrödinger son también vistos en otros estados de gato.

Estos estados se propone [3, 4] pueden ser utilizados para el procesamiento de información cuántica. Dado que en ciertas condiciones pueden ser tomados como una base ortogonal de estados, con la ventaja de ser macroscópicos.

En los últimos años se han propuesto formas con las que algunos de estos estados pueden generarse. Por lo cual se presenta una forma de generación de estados, mediante un sistema descrito por el modelo de Jaynes-Cummings. Este modelo consiste en un Hamiltoniano resultado de la interacción de un átomo de dos niveles con un campo electromagnético externo. Veremos que la evolución de un estado coherente en este Hamiltoniano generará un estado muy parecido a un estado de gato. Para comparar dichos estados usaremos las funciones de distribución de Wigner, la cual abordaremos extensivamente.

El presente trabajo de tesis se llevará a cabo mediante la siguiente estructura. En el capítulo 2 realizamos una presentación de conceptos básicos de la Óptica Cuántica mediante los cuales explicaremos la importancia que a últimas fechas ha tenido el estudio de fenómenos cuánticos de la luz y veremos que dichos comportamientos han abierto la puerta para el estudio de fenómenos cuánticos de las partículas. Como el

¹ En este caso estados coherentes de la luz

estudio de la estadística de fotones y del amontonamiento o “bunching” de fotones. En especial para la construcción de dispositivos “ópticos” como divisores de haz o interferómetros de partículas. Esto sienta las bases para estudios posteriores que se realizarán ya que en especial las definiciones de compresión y algunos conceptos en el tema de la electrodinámica cuántica en cavidades (QED), serán de suma importancia durante todo el escrito.

En el capítulo 3 trataremos el problema de solucionar² las ecuaciones de Maxwell sin fuentes lo cual nos llevará a una cuantización de dicho campo, esta cuantización se presenta en la forma más sencilla en la que puede observarse. La solución a dicho problema traerá como consecuencia la introducción de un campo asociado al vacío, el estado de vacío con cero fotones $|0\rangle$. El estado vacío del campo electromagnético es de suma importancia para determinar diferentes fenómenos cuánticos que no tienen explicación sin él. Entre estos fenómenos están la preservación de las relaciones de conmutación de operadores conjugados y efectos como el de Unruh-Davies. También veremos un ejemplo de estados que presentan compresión como es el caso de los estados de radiación térmica.

Posteriormente en el capítulo 4 repasaremos la teoría de las distribuciones de cuasi-probabilidad que existen en la Mecánica Cuántica como las distribuciones de Wigner y Husimi. Las cuales permiten un estudio detallado de las propiedades de los estados cuánticos en el espacio fase. Para dicho fin observamos las propiedades que pueden ser interesantes en el espacio fase mediante dichas distribuciones. Como las distribuciones marginales de las variables que definen el espacio fase, llamémosles x y p . La propiedad de localización, que puede observarse directamente de las distribuciones de Wigner y Husimi, se dice que cuando dichas distribuciones tienen un área mayor el sistema está más deslocalizado, ya que la probabilidad fluctúa más para obtener un valor de x y p . Para ello se investiga la forma en la que se define las áreas de las distribuciones en dicho espacio fase. Dicha área se define como el inverso del *segundo momento*³ de la distribución correspondiente. Como un ejemplo de la obtención de la función de Wigner se toma en consideración el estado de Fock para un número arbitrario de número de fotones.

Se hace incapie en esta parte en que el tratamiento de la función de Wigner es en realidad un formalismo de la mecánica cuántica que permite conectarnos con la estadística clásica cuando la constante de Planck $\hbar \rightarrow 0$, y es llamado el límite clásico. Y observaremos que existen varias formulaciones de la mecánica cuántica, mediante diferentes funciones de cuasi-probabilidad.

Además en el capítulo 5 plantearemos de forma cuántica el problema de un átomo dentro de una cavidad. Dicho planteamiento puede reducir en complejidad el problema verdadero considerando un átomo con solo dos o tres niveles energéticos,

² Utilizando sólo conceptos de electrodinámica clásica

³ La forma en que se definen los momentos de las funciones de Wigner y Husimi no es la misma en las que se expresan para las distribuciones de probabilidad de la estadística clásica.

lo cual nos lleva a un sistema descrito por el modelo de Jaynes-Cummings. Estas aproximaciones son llamadas modelos de Jaynes-Cummings de dos y tres niveles. Escribiremos los Hamiltonianos correspondientes para cada caso con el propósito estudiarlos posteriormente.

Estudiamos los estados de gato de Schrödinger en el capítulo 6, en una forma general definidos para grupos finitos de N elementos. Para ello construimos estados que contengan de cierta forma la representación del grupo finito en cuestión. Veremos algunos ejemplos para los grupos finitos cíclicos de dos y tres elementos⁴ y para el grupo de isometrías del triángulo equilátero. Y determinaremos sus propiedades cuánticas.

Finalmente en el capítulo 7 estudiaremos una forma que se ha propuesto para generar estados de gato de Schrödinger para el grupo cíclico de dos elementos mediante el formalismo de las funciones de cuasi-probabilidad. Para ello determinamos que la evolución temporal para un estado coherente en un sistema de un átomo de dos niveles en un campo electromagnético nos lleva a propiedades muy parecidas a las obtenidas para los estados de gato para ciertas condiciones especiales. Se detallan las propiedades de los estados del campo y del átomo por separado en función del tiempo. Propiedades como la traza del cuadrado de la matriz densidad, la distribución de fotones para el campo, la inversión de población, las distribuciones de Wigner y Husimi y el área de la distribución de Husimi.

En el último capítulo presentamos las conclusiones de este trabajo.

⁴ Aunque el procedimiento puede extenderse para cualquier grupo cíclico

Capítulo 2

Fundamentos de Óptica Cuántica

La Óptica Cuántica, se suele decir, es la rama de la óptica que surge cuando la naturaleza cuántica de la luz es importante. Sin embargo los experimentos en los cuales dicha naturaleza es importante son variados y es difícil decir cuál dio paso al surgimiento de la Óptica Cuántica¹. Brevemente daremos un repaso a algunos de estos experimentos.

2.1. Fluorescencia Resonante.

Cuando un átomo es excitado por un campo electromagnético monocromático clásico, emite radiación de la misma frecuencia que el campo de excitación. Esto implica que el espectro de la luz emitida es una función delta de Dirac. En este sentido el átomo se comporta como un dipolo forzado y por lo tanto radía con la misma frecuencia que el campo de excitación.

Consideremos un átomo en una trampa de Paul [5] el cual es excitado en sus niveles electrónicos a través de la luz de un láser y la luz emitida se superpone con la del campo de excitación del láser, la cual es tomada como una señal de referencia. A la señal resultante se le suele llamar señal heterodina.

Experimentalmente el espectro de la señal resultante presenta un pico, llamado el pico elástico de una anchura diferente de cero, esta anchura es muy estrecha y es determinada por el espectro del campo de excitación. Esto representa una comprobación de la naturaleza ondulatoria de la luz, debido a la interferencia entre la luz del láser y la luz emitida. De hecho la estrechez del pico elástico se debe a que la luz emitida y el campo de excitación siguen una relación en sus fases. De forma que el ancho del pico elástico puede modularse mediante un cambio en la fase de las dos señales

Se hace incapie en que este experimento exhibe la naturaleza ondulatoria de la luz dado que existe una interferencia causada por el desfaseamiento entre el campo y la luz emitida. Sin embargo, este experimento puede cambiarse de tal forma que exhiba también un comportamiento corpuscular de la luz.

¹ Aunque algunos autores indican que la óptica cuántica nace del descubrimiento de estadísticas del número de fotones alejadas de la estadística de Poisson.

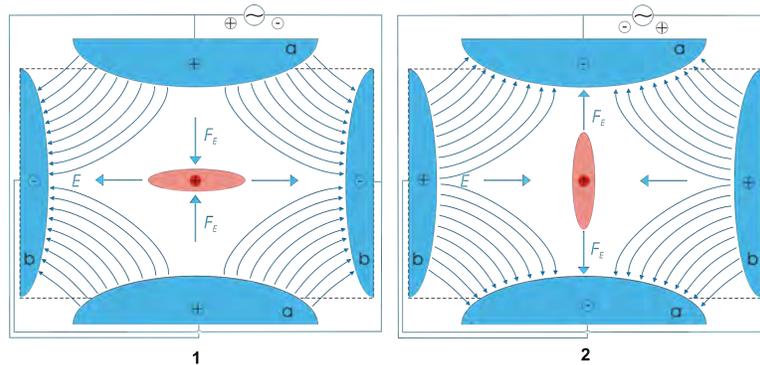


Figura 2.1. Esquema de la trampa dipolar de Paul (Copyright Arian Kriesch)

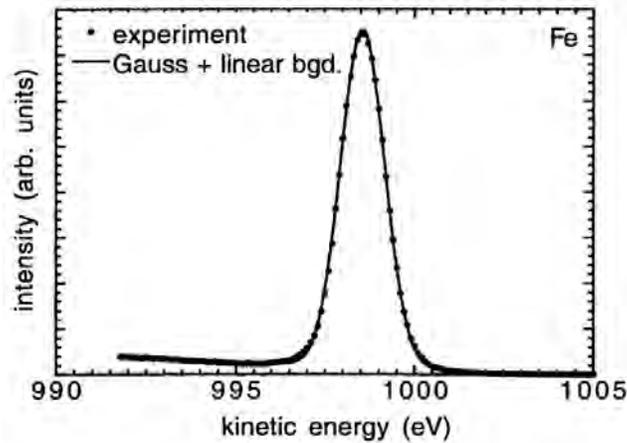


Figura 2.2. Ejemplo de un pico elástico, el cual presenta una anchura diferente de cero.

2.1.1. Espectro de tres picos de Mollow

En los años sesenta B.R. Mollow [6] estudiaba la resonancia fluorescente mediante la electrodinámica cuántica y encontró que el espectro de la luz emitida por el átomo, de dos niveles, depende de la intensidad de la radiación incidente. Para intensidades bajas la presencia del pico elástico es válida. Sin embargo para intensidades altas el espectro presenta una estructura más complicada. Se presentan además de el pico elástico tres contribuciones de gran anchura, centrados en la frecuencia de la luz incidente a ambos lados en el caso de un sistema de dos niveles energéticos.

Este fenómeno es debido al desdoblamiento de los estados cuánticos debido a la presencia del campo magnético del láser. El efecto Stark permite que algunos estados que antes estaban degenerados en energía ahora tengan una energía diferente. Si el

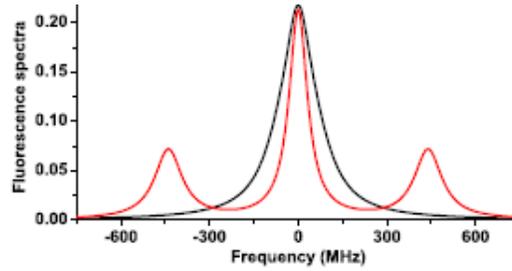


Figura 2.3. Tres picos de Mollow en el espectro de un sistema molecular de dos niveles (en rojo). Tomado de Gu Y. (2010)

átomo dentro de la cavidad tiene un espín electrónico $1/2$ entonces existen tres posibles frecuencias de excitación: $\Omega - \mu_0 B$, $\Omega + \mu_0 B$ y Ω , donde Ω es la frecuencia que determina la diferencia energética entre los dos niveles del átomo, B es el campo magnético del láser y μ_0 es el momento dipolar magnético del electrón. Por lo que el espectro de radiación presenta tres picos, los que determinan las frecuencias de excitación de las tres posibles transiciones en el sistema de dos niveles. En contraste no existe una interferencia entre el espectro de radiación y la luz del láser en la señal heterodina, por lo cual la luz no presenta su comportamiento ondulatorio.

2.1.2. “Anti-Bunching”

A mediados de los setenta se descubrió que hay un retraso entre la emisión consecutiva de dos fotones por un átomo. La luz del átomo entonces no viene en paquetes de fotones en contraste con lo que se conocía de la luz térmica (por ejemplo de una vela) que tiende a emitirse por paquetes. A este fenómeno se le llama “anti-bunching”. La forma en que se determina este anti-empaquetamiento es midiendo el retraso entre dos fotones consecutivos, lo cual se lleva a cabo haciendo incidir la luz emitida en un divisor de haz en cuyas salidas hay detectores. El primer fotón recibido en uno de los detectores dispara un cronómetro que se detiene cuando se detecta un segundo fotón en el otro detector, repitiendo este experimento se puede determinar la distribución del retraso entre dos fotones consecutivos. Para un repaso ver [7].

El comportamiento que manifiesta la señal heterodina en este caso es que la luz emitida tiende a tener una probabilidad muy pequeña de que dos fotones sean detectados uno después del otro. Por lo cual la luz emitida por el átomo en la cavidad presenta el fenómeno de “anti-bunching” poniendo en evidencia el comportamiento corpuscular de la luz. Esto quiere decir junto con lo visto anteriormente, que el mismo experimento puede exhibir los comportamientos corpuscular y ondulatorio de la luz.

Muy cercano al fenómeno de “anti-bunching” está el efecto de la estadística sub-poissoniana. En la estadística de fotones para un láser la probabilidad de encontrar m fotones está determinada por una distribución Poissoniana, la cual nos

dice que en el láser vienen paquetes de fotones con una cantidad de ellos distribuidos mediante dicha poissoniana, es decir tienen un número de fotones al azar. Sin embargo la estadística de la radiación emitida por un átomo excitado es más estrecha que una Poissoniana. Esta distribución es llamada sub-poissoniana y nos dice que la luz emitida no viene en paquetes.

2.2. Compresión de las fluctuaciones

Recientemente el estudio de estados cuánticos ha llevado al descubrimiento de otro comportamiento bastante interesante. Este comportamiento es llamado compresión (squeezing) de las fluctuaciones. Un resumen puede leerse del libro de Scully [8].

2.2.1. ¿Qué es un estado comprimido?

Para describir un estado clásico de un oscilador armónico, necesitamos la amplitud y la fase de dicho estado. De la misma forma necesitamos tanto amplitud y fase para determinar unívocamente un campo electromagnético unimodal. Podemos describir este campo por un vector en un espacio complejo.

De este modo cuando deseamos cuantizar un campo necesitamos entonces toda una distribución de vectores en el espacio complejo. Esta distribución da a cada punto del espacio complejo un factor de peso. Estamos tentados a decir que este factor de peso es la probabilidad de que el campo este determinado por las componentes (amplitud y fase) del punto en cuestión. Sin embargo dado que las dos variables de este espacio son variables conjugadas, deben de cumplir una relación de incertidumbre de Heisenberg. Esto quiere decir que no podemos asociarle un campo a cada punto dentro del espacio fase.

No obstante existen distribuciones cuasi-probabilísticas que podemos usar para describir cuanticamente los campos electromagnéticos. Estas distribuciones, en los casos más elementales, son distribuciones simétricas con respecto al campo promedio. No obstante en algunos experimentos de interferometría es necesario medir la fase con una gran precisión. En este caso no nos interesa la amplitud. Entonces es conveniente redistribuir las fluctuaciones cuánticas de una forma asimétrica. Dado que el área en el espacio fase debe conservarse por la relación de incertidumbre de Heisenberg, entonces tenemos que la reducción de las fluctuaciones en una de las variables tiende a aumentar las fluctuaciones en la otra variable. Este fenómeno es semejante a apretar el envase para sacar la pasta de dientes. Por lo que se ha venido a llamar compresión de las fluctuaciones. Es importante señalar que este comportamiento se presenta solo con aquellas variables que cumplan una relación de dispersión como la que cumplen el momento y la posición.

Dado que los estados coherente minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg y las dispersiones en la posición y momento son iguales a $1/2$, los estados

comprimidos de la luz se definen como aquellos estados cuya una de sus dispersiones sea menor a la del estado coherente ($1/2$) y una segunda sea mayor a $1/2$, siempre y cuando las dispersiones cumplan la relación de Heisenberg que siguen las dispersiones del estado coherente.

2.2.2. Estados comprimidos en el Oscilador Óptico Paramétrico.

El oscilador óptico paramétrico (OOP) es un instrumento óptico utilizado para crear estados comprimidos haciendo uso de la óptica no lineal. Este oscilador crea luz de frecuencia 2ω a partir de luz de frecuencia ω . Este fenómeno es llamado generación del segundo armónico. El proceso inverso también es posible podemos crear luz de frecuencia ω a partir de luz de frecuencia 2ω , este proceso es llamado conversión paramétrica descendente.

Para obtener la generación del segundo armónico o una conversión paramétrica descendente se necesita un medio no lineal, tal como un cristal en el que el vector de polarización está dado por

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \dots, \quad (2.1)$$

tal que de la electrodinámica clásica, la polarización debe cumplir la ecuación

$$\square E \equiv \left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] E = -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} P. \quad (2.2)$$

La constante $\chi^{(1)}$ se conoce como la susceptibilidad lineal y $\chi^{(2)}$ es la susceptibilidad no lineal de segundo orden. Por simplicidad se han tomado P y E como cantidades escalares. Sin embargo si quisiéramos tratar la naturaleza vectorial de los campos, se tendría que tomar $\chi^{(1)}$ como un tensor de segundo rango y $\chi^{(2)}$ un tensor de tercer grado.

Si nos olvidamos de la parte espacial por unos momentos y suponemos que el campo eléctrico tienen una frecuencia ω

$$E = E_1 \cos(\omega t). \quad (2.3)$$

La polarización a segundo orden será entonces

$$P^{(2)} = \chi^{(2)} E_1^2 \cos^2(\omega t). \quad (2.4)$$

Dada la identidad trigonométrica

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)), \quad (2.5)$$

y de la Ec. (2.2) tenemos que el campo eléctrico resultante tendrá una componente constante y una con frecuencia 2ω . Lo cual demuestra la capacidad de generar el segundo armónico mediante mecanismos no lineales.

Un OOP consta de un anillo láser (Ring Láser) que excita un cristal no lineal, el cristal crea luz de frecuencia 2ω , esta luz es enviada hacia un divisor de haz que es sensible a la frecuencia. Parte de esta luz es dirigida a una cavidad con otro cristal no lineal; la otra parte es enviada a un oscilador local (un espejo que modula la fase de la luz). De la cavidad se genera un haz con frecuencia ω y se combina con la luz del oscilador local, ambas con frecuencia ω . Posteriormente se hace incidir la luz resultante sobre un divisor de haz y después a dos fotodiodos, que convierten en corriente la luz obtenida. Por último esta corriente es enviada a un analizador de espectros. De forma similar se puede explicar la conversión paramétrica descendente. Del experimento se obtiene que la luz resultante del OOP está en un estado comprimido.

DetECCIÓN DE UN ESTADO COMPRIMIDO

La forma en como se mide el estado comprimido descrito anteriormente, se hace mediante un analizador de espectros del OOP, llamado detector homodino. A este detector llegan la luz, la cual se quiere comprobar que tiene compresión y que se ha combinado con un campo electromagnético clásico mediante un divisor de haz (de la misma forma que con la señal heterodina). Se miden dos corrientes i_1 e i_2 correspondientes a los dos brazos del divisor de haz. Estas corrientes son proporcionales a la intensidad de la luz en cada caso. Se obtiene la diferencia de las corrientes $i_-(t)$ como función del tiempo. Dicha corriente fluctúa alrededor de un valor promedio $\langle i_- \rangle$, un promedio temporal. La estadística de estas fluctuaciones nos da la distribución de la diferencia de corriente, y en particular de su segundo momento $V = \langle i_-^2 \rangle$, con esto se puede determinar la medida de la anchura de la distribución, mediante la desviación estándar. Estos experimentos se hacen dejando fija la fase θ entre los dos campos que inciden en el divisor de haz.

Si bloqueamos el haz proveniente del oscilador paramétrico sólo la radiación del vacío se mezcla con la del oscilador local. Puesto que la distribución del vacío es rotacionalmente simétrica las fluctuaciones entonces son independientes de la fase θ . Por otro lado, cuando tenemos un estado comprimido hay una asimetría en el espacio fase y las fluctuaciones dependen de la fase. De esta forma se puede distinguir entre un estado comprimido de uno que no lo es.

Para observar un ejemplo de como se mide la compresión ver [9, 10, 11].

2.2.3. Estadística del Estado del Vacío

Una de las características de los estados comprimidos como hemos mencionado, es que tienen una distribución asimétrica de las fluctuaciones. No obstante no es la única propiedad interesante. Estos estados también presentan una distribución inusual de fotones. La luz láser, que puede ser descrita por un estado coherente, exhibe una distribución Poissoniana de fotones. En contraste el vacío comprimido exhibe una

estadística de fotones oscilatoria que fue medida experimentalmente por el grupo de J. Mlynek [11]. Este estado de vacío comprimido es tal que su función de onda es

$$\psi(x) = N \exp \left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2} - ip_0x \right),$$

donde N es la constante de normalización, x_0 y p_0 corresponden al centroide de la función de onda y al momento promedio respectivamente y finalmente σ es la anchura de la función de onda. Este estado corresponde a una generalización del estado vacío. La anchura de la dispersión en la variable x puede ser modificada con la elección de la variable σ de tal forma que el estado muestre compresión, de ahí el nombre de estado de vacío comprimido.

2.2.4. Interferencia en el espacio fase.

El concepto de interferencia en el espacio fase hace uso de la definición de producto escalar $\langle \chi | \psi \rangle$ entre dos estados cuánticos $|\chi\rangle$ y $|\psi\rangle$. Este producto escalar, asocia una área en el espacio fase con una amplitud de probabilidad compleja para $\langle \chi | \psi \rangle$. Si nosotros representamos los estados $|\chi\rangle$ y $|\psi\rangle$ en el espacio fase y las áreas de estas representaciones se cruzan una sola vez entonces el área representa la probabilidad, es decir el valor al cuadrado del producto escalar. Si hay más de un cruce se dice que las áreas *se interfieren*. Entonces cada área, donde hay un cruce representa una amplitud de probabilidad con una amplitud y fase dadas. La amplitud es la raíz cuadrada del área y la fase está determinada por otros medios del espacio fase. Es decir

$$\langle \chi | \psi \rangle = \sum_j \left(\begin{array}{c} \text{j-ésima área} \\ \text{de cruce en el} \\ \text{espacio fase} \end{array} \right)^{1/2} \exp \left[i \left(\begin{array}{c} \text{j-ésima área} \\ \text{encerrada por las} \\ \text{líneas centrales} \end{array} \right) \right], \quad (2.6)$$

es el producto escalar entre los estados $|\chi\rangle$ y $|\psi\rangle$.

Estadística de fotones del vacío comprimido.

Veremos que pasa si evaluamos el producto escalar entre el m -ésimo estado de número de un fotón $|m\rangle$ y el estado comprimido del vacío $|\psi_{cv}\rangle$. Representamos el estado de número m -ésimo como una banda en el espacio fase y el estado comprimido del vacío como una elipse muy elongada. Esto nos hace ver que las áreas de los estados se intersectan en dos lugares. Llamaremos a éstas dos áreas A_m , por lo que el producto escalar

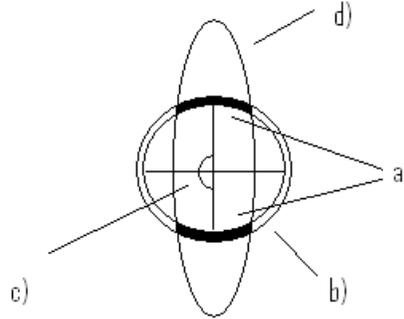


Figura 2.4. Representación en el espacio fase de dos estados, a) es el área A_m donde se juntan ambos estados, c) es el ángulo $2\phi_m$. Donde la banda b) representa al estado de $|m\rangle$ fotones y la elipse d) representa al estado de vacío comprimido.

$$\langle m|\psi_{cv}\rangle = A_m^{1/2}e^{i\phi_m} + A_m^{1/2}e^{-i\phi_m} \quad (2.7)$$

es la suma de las dos áreas que interfieren en el espacio fase. La diferencia en la fase de las dos áreas $2\phi_m$ está dada por el área que encierra a la línea central de la elipse y la banda.

El experimento de la doble rejilla de Young en el espacio fase.

El ejemplo anterior nos da una visión más clara de que la física de la interferencia en el espacio fase es muy similar al problema de las dos rejillas. En ambos casos tenemos dos contribuciones a la probabilidad, en el caso de las rejillas son las contribuciones debidas a cada una de las dos rejillas, en el caso del espacio fase se debe a las dos áreas de cruzamiento entre dos estados. En el caso de la doble rejilla la diferencia de fases entre cada una de las contribuciones de las dos rejilla está dada por la diferencia en el camino óptico medido desde el centro de cada una de las rejillas al punto de medición. De la misma forma las contribuciones a la amplitud de probabilidad en el espacio fase tienen una diferencia de fase debido a los ángulos en el que se encuentran dichas áreas. Por lo cual en ambos casos tendremos interferencia debido a esta diferencia de fases.

2.3. Modelo de Jaynes-Cummings-Paul.

La interacción de la luz con la materia no puede ser explicada de una forma sencilla dado que hay demasiados grados de libertad involucrados. Podríamos tener un átomo con su núcleo y varios electrones. Un caso simple que puede ser analizado es un átomo de hidrógeno con solo un protón y un electrón. Existen entonces dos tipos de movimiento, el traslacional del átomo y el del electrón con respecto al protón. Estos dos movimientos se pueden tratar con una formulación cuántica.

El átomo tiene asociado un dipolo $\vec{\varphi} = e\vec{r}$ donde \vec{r} representa la coordenada relativa. Este dipolo interactúa con el campo eléctrico mediante el Hamiltoniano

$$H = -\vec{\varphi} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t) \quad (2.8)$$

aquí \vec{R} denota la coordenada del centro de masa.

2.3.1. Un átomo de dos niveles con un solo modo.

En el caso cuántico los vectores \vec{r} , \vec{R} y \vec{E} se vuelven operadores. Podemos simplificar el problema pensando que solo hay dos niveles electrónicos que interactúan con un campo electromagnético de un solo modo y este campo causa transiciones entre estos niveles electrónicos, esto sucede si la energía necesaria para cambiar de estados electrónicos es más pequeña o igual a la energía de un fotón emitido por el campo electromagnético. Este modelo fue propuesto por E. T. Jaynes y F. W. Cummings e independientemente por H. Paul. [12, 13, 14].

Dicho modelo puede ser resuelto analíticamente, aunque dado que es muy difícil crear sistemas con estas características, fue considerado por mucho tiempo como un modelo de juguete que no podía ser llevado a un estudio práctico. No obstante hoy en día se ha logrado crear cavidades de un solo modo con factores de calidad $Q = 3 \cdot 10^{10}$ correspondientes a tiempos de vida promedio para un fotón en la cavidad de 0.2 s. Por lo que este modelo se ha convertido en una de las piedras angulares de la óptica cuántica.

2.3.2. Escalas de tiempo.

El sistema básico de cavidad QED (Electrodinámica Cuántica de cavidades) es un átomo de dos niveles interactuando con un campo electromagnético de un solo modo. La dinámica de este sistema está gobernada por la ecuación de Schrödinger y la evolución temporal del sistema es unitaria. El átomo intercambia un fotón con el campo. Este intercambio periódico es descrito por la llamada frecuencia de Rabi

$$g_0 = \frac{\varphi E_0}{\hbar}, \quad (2.9)$$

que está determinada por el momento dipolar, la constante de Planck y el campo eléctrico E_0 .

En electrodinámica cuántica el campo eléctrico está cuantizado y es proporcional al llamado campo eléctrico del vacío.

$$E_0 = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\varepsilon_0 V}}. \quad (2.10)$$

donde ε_0 , Ω y V son la permitividad eléctrica, la frecuencia de la cavidad y su volumen respectivamente.

Podemos aumentar la interacción entre el átomo y el campo de dos maneras, incrementando el momento dipolar o incrementando el campo eléctrico disminuyendo el volumen.

En la realidad los átomos dentro de la cavidad decaen espontáneamente, al tiempo de decaimiento lo llamaremos γ_{\perp} . De forma similar el campo eléctrico decae a una razón que llamaremos κ . El decaimiento hace que el operador de evolución temporal sea no unitario, por lo que es necesario un análisis mediante la matriz de densidad en vez de utilizar el vector de estado.

En muchos experimentos los átomos solo interactúan con el campo durante un tiempo T . Concluimos entonces que en dichos experimentos en cavidades QED hay una jerarquía entre g_0 , κ , γ_{\perp} , y T .

2.4. Cavidades QED.

Durante varios años la tecnología sólo permitía que los tiempos de decaimiento de las cavidades fueran mucho menores que los tiempos de interacción entre los átomos y el campo electromagnético de la cavidad. Actualmente se han desarrollado nuevos resonadores en los regímenes de las microondas y la luz visible que tienen tiempos de decaimiento muy grandes, es decir tienen factores de calidad altos. Por lo que el átomo dentro de estas cavidades pueden absorber y emitir un fotón varias veces. Este hecho ha contribuido en una nueva era de las cavidades QED.

2.4.1. Un Maser sorprendente.

Del Hamiltoniano descrito por la Ec. (2.8), vemos que podemos aumentar la interacción entre el dipolo y el campo al aumentar el momento dipolar del átomo o al aumentar el campo eléctrico. Puesto que el momento dipolar del átomo depende de la distancia entre el núcleo y el electrón, podemos incrementar el momento dipolar al aumentar la distancia entre estos dos. También se sabe que estados muy excitados del electrón tienen una distancia al núcleo muy grande. Por lo que sería conveniente trabajar con átomos bastante excitados, es decir con átomos de Rydberg.

Los láseres sintonizables pueden preparar un átomo en un estado excitado con un número cuántico principal n del orden de 60. La separación entre el núcleo y el electrón va como n^2 en un átomo de Rydberg por lo que podemos asegurar que tendrá un gran momento dipolar. Por lo cual los átomos de Rydberg presentan un gran acoplamiento con el campo eléctrico.

La frecuencia de transición entre dos niveles energéticos contiguos de los átomos de Rydberg, cae en el rango de las microondas por lo que un átomo de Rydberg dentro de una cavidad es una gran oportunidad para el estudio de un Maser.

Maser de un átomo.

Estos maseres son sorprendentes ya que pueden funcionar cuando hay menos de un átomo en promedio dentro de la cavidad, debido a que se utilizan átomos de Rydberg, los cuales llegan excitados a la cavidad. El haz de átomos de Rydberg es preparado por un láser, después pasan por un resonador de microondas de gran calidad. Cuando el campo está en resonancia con la transición atómica el átomo puede depositar su excitación en el campo. El siguiente átomo interacciona con el nuevo campo y también puede depositar su excitación. Cuando el tiempo de decaimiento es grande comparado con los tiempos de transito de los átomos y el tiempo característico de la dinámica interna, entonces se puede construir un campo dentro de la cavidad.

Para corroborar que estos átomos están interactuando con el campo directamente, se debería medir el campo dentro de la cavidad, sin embargo esto afectaría el factor de calidad de la cavidad. Por este motivo se mide la cantidad de átomos que continúan en el estado excitado después de pasar por la cavidad. Dado que los átomos que quedan excitados o en estados de Rydberg no depositan fotones. Se ha observado que la cantidad de estos átomos es pequeña comparada con la cantidad de átomos que llegan desexcitados, probando así que estos átomos dejan la interacción en el campo.

Radiación del maser.

La radiación de los maseres descritos anteriormente presenta las propiedades de “anti-bunching”, estados comprimidos y estadística sub-Poissoniana y se ha utilizado para el estudio de fenómenos como el enredamiento y la decoherencia.

La radiación del maser como su nombre lo indica está en la región de las microondas, sin embargo como hemos visto no podemos medirla directamente ya que afectaría el factor de calidad de la cavidad, es por eso que se hace uso de los átomos que pasan por esta cavidad para, además de crearla, probar que la radiación está ahí.

Puesto que la cavidad está aumentando de temperatura T debido a la alta energía de las transiciones de niveles, existen fotones debidos a la radiación de cuerpo negro cuyo promedio \bar{n} siguen la estadística de Planck

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\Omega}{k_B T}) - 1}, \quad (2.11)$$

con k_B la constante de Boltzmann y Ω la frecuencia del resonador. Para hacer que esta radiación no intervenga es necesario enfriar el sistema para que \bar{n} sea pequeño. En un principio se trabajo con cavidades a una temperatura de 2 K con $\bar{n} = 1.5$, hoy en día se han logrado temperaturas de 0.3 K dando que $\bar{n} = 0.054$, menor que uno.

2.4.2. Cavity QED en el dominio óptico.

Gracias a los avances en la reflectividad en los espejos se han podido construir cavidades en la región visible que puede actuar como resonadores ópticos. En el dominio óptico tenemos la desventaja que las frecuencias son bajas, es decir necesitamos átomos cuya diferencia de energía entre dos niveles sucesivos tenga frecuencia asociada en la región visible. Por este motivo el momento dipolar de estos átomos suele ser pequeño, lo que indica que para lograr un acoplamiento fuerte con el campo electromagnético necesitamos aumentar la intensidad del campo disminuyendo el volumen de la cavidad.

Movimiento de átomos dentro de la cavidad: Microscopio de átomos en la cavidad.

Uno de los experimentos en el dominio óptico, en el cual se a hecho uso de cavidades con factores de calidad altos es el del microscopio atómico. En una Trampa Magneto Óptica (MOT por sus siglas en inglés) se atrapan átomos, en un determinado tiempo estos se dejan caer por gravedad hacia un resonador del tipo de Fabry-Perot (una cavidad óptica con dos espejos planos paralelos entre si), con una distancia entre espejos de 100 μm dado que esta distancia es pequeña, muchos de estos átomos no logran entrar al resonador. Algunos de ellos lo logran. Después un láser manda radiación hacia el resonador y se detecta la luz transmitida con un fotodetector. Puesto que hay un acoplamiento grande entre el momento dipolar y el campo eléctrico del resonador, los átomos cambian la intensidad de la luz transmitida, ésta disminuye cuando los átomos pasan por la cavidad. Por lo que podemos ver átomos individuales cruzando la cavidad al hacer una análisis de la luz trasmitida.

Incluso se ha podido reconstruir la trayectoria de los átomos, es en este sentido en el que llamamos al arreglo un microscopio. Es más, se puede almacenar un átomo en la cavidad usando el campo electromagnético de un solo fotón.

Una de las variantes de este experimento es mandar a los átomos contra la gravedad, de abajo hacia arriba en la cavidad, haciendo que el tiempo de acoplamiento sea más grande ya que tenemos el tiempo de subida y después un tiempo de bajada.

Láser de un átomo.

Si sustituimos el resonador de microondas por un resonador en el visible tendríamos que el máser de un átomo se convierte en un láser de un átomo. La ventaja de trabajar en el visible es que las transiciones, que son suficientes para que trabaje el láser, pueden ser menos energéticas por lo que no tenemos que enfriar el sistema para evitar fotones de la radiación de cuerpo negro. Además se pueden usar fotodetectores normales para medir el campo radiado.

2.5. Óptica de de Broglie.

Una de las predicciones de la Mecánica Cuántica es el comportamiento ondulatorio de las partículas con masa, a las cuales le asociamos una longitud de onda de de Broglie. El experimento que corroboró que puede haber difracción con electrones fue un parteaguas en la historia de la física puesto que demostró este comportamiento ondulatorio de los electrones.

2.5.1. Óptica de Electrones y Neutrones.

El microscopio electrónico ha sido construido al tomar en consideración el comportamiento ondulatorio de los electrones. Asimismo en los últimos años se han construidos aparatos como lentes, rejillas e interferómetros para electrones.

De la misma forma se ha estudiado el comportamiento ondulatorio de los neutrones, que al no tener carga pueden ser más fáciles de estudiar. De hecho la óptica de neutrones ha llevado a demostrar experimentalmente cosas fundamentales en la mecánica cuántica como el hecho de que se necesita una rotación de 4π para tener la identidad en el espacio de espín.

2.5.2. Óptica Atómica.

El láser puede ser empleado para controlar el movimiento del centro de masa de los átomos. Por lo cual se ha empleado para disminuir la energía cinética de dichos átomos y así reducir la temperatura hasta ordenes de micro Kelvin.

En analogía con las ondas electromagnéticas, podemos hacer el experimento de la doble rendija con las ondas de de Broglie. En este experimento un láser juega el papel de la rejilla de difracción. El fenómeno se puede explicar como la interacción de un dipolo (el átomo) con un campo que depende de la posición (el láser). De esta forma la interferencia de ondas de de Broglie puede ser demostrada experimentalmente.

También se puede observar la separación de un haz de átomos de helio en dos haces, mediante un campo de luz estacionario. Esta separación es debida al dipolo eléctrico del átomo que pasa por un campo eléctrico inhomogeneo, una analogía al experimento de Stern-Gerlach. Se puede decir que este experimento es un divisor

de haz para átomos ya que hay coherencia entre los dos haces resultantes. Incluso pueden obtenerse interferómetros de átomos en los cuales el conteo en cada uno de los brazos esté fuera de fase.

Actualmente todo tipo de aditamentos ópticos como giróscopos se han desarrollado para átomos y ya están compitiendo con aquellos hechos para luz. Además se puede hacer interferometría con objetos macroscópicos como los fullerenos.

Incluso cuando la longitud de onda de de Broglie de los átomos se vuelve del orden de la separación entre ellos las funciones de onda individuales se empiezan a superponer. Si son bosones se crea un condensado de Bose-Einstein.

Capítulo 3

Cuantización del Campo Electromagnético

Uno de los métodos con el cual se muestra que un campo electromagnético puede cuantizarse es el método canónico de cuantización. Dicho método hace uso de variables canónicas clásicas para definir con esto operadores de la mecánica cuántica. Es el método que emplearemos a continuación.

3.1. El Campo de un Modo como un Oscilador Armónico.

La finalidad de esta sección es encontrar el Hamiltoniano para un campo electromagnético en ausencia de fuentes. Este Hamiltoniano clásico servirá como base para un modelo cuántico del problema.

Las ecuaciones de Maxwell para un campo en el vacío y sin fuentes son

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Podemos entonces definir el potencial vectorial \mathbf{A} escribiendo al campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla\phi - (1/c) \partial\mathbf{A}/\partial t$ con ϕ el potencial escalar. De la Ec. (3.1) es directo encontrar la ecuación de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.2)$$

donde hemos supuesto la norma de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, y que $\phi = 0$ por simplicidad, dado que no hay fuentes. Esta ecuación puede resolverse mediante la separación de variables al proponer

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \alpha(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Implicando

$$\frac{1}{\mathbf{A}_0} \nabla^2 \mathbf{A}_0 = \frac{1}{c^2} \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} = -\frac{\omega^2}{c^2}.$$

La parte espacial del potencial vectorial $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ cumple entonces con la ecuación de Helmholtz,

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.4)$$

donde $k = \omega/c$.

Como $\alpha^*(t)$ y $\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})$ también son solución de la ecuación de onda, los campos se expresan

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} [\dot{\alpha}(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \dot{\alpha}^*(t) \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})],$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \alpha(t) \nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \alpha^*(t) \nabla \times \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Por lo que la energía electromagnética está dada por la relación

$$\begin{aligned} \int d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) &= \frac{1}{c^2} \dot{\alpha}(t)^2 \int d^3r \mathbf{A}_0(\mathbf{r})^2 \\ &+ \frac{1}{c^2} \dot{\alpha}^*(t)^2 \int d^3r \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})^2 + \frac{2}{c^2} |\dot{\alpha}(t)|^2 \int d^3r |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 \\ &+ \alpha(t)^2 \int d^3r [\nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r})]^2 + \alpha^*(t)^2 \int d^3r [\nabla \times \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})]^2 \\ &+ 2 |\alpha(t)|^2 \int d^3r |\nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Se puede mostrar que la integral

$$\int d^3r [\nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r})]^2 = k^2 \int d^3r \mathbf{A}_0(\mathbf{r}),$$

tenemos una ecuación similar para $\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})$ y puesto que $\dot{\alpha}(t) = -i\omega\alpha(t)$, tenemos que $\dot{\alpha}(t)^2 = -\omega^2\alpha(t)^2$. En este caso la Ec. (3.6) se simplifica como

$$H_F = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{k^2}{2\pi} |\alpha(t)|^2, \quad (3.7)$$

puesto que hemos supuesto, sin pérdida de generalidad que

$$\int d^3r |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})| = 1.$$

Si definimos las cantidades

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{i}{c\sqrt{4\pi}} [\alpha(t) - \alpha^*(t)], \\ p(t) &= \frac{k}{c\sqrt{4\pi}} [\alpha(t) + \alpha^*(t)], \end{aligned} \quad (3.8)$$

Podemos escribir la Ec. (3.7) de la siguiente manera

$$H_F = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad (3.9)$$

que es la ecuación de la energía de un oscilador armónico con frecuencia ω y masa $m = 1$. Además de la Ec. (3.8) podemos ver que $\dot{q} = p$ y $\dot{p} = -\omega^2 q$, es decir recuperamos las ecuaciones de Hamilton para el oscilador armónico.

3.2. Cuantización de un Campo Unimodal.

Hemos demostrado que el campo de un solo modo corresponde a un oscilador armónico con masa unitaria. Por lo que la descripción mecánico-cuántica del mismo corresponde a solucionar el oscilador armónico en este formalismo. Si reemplazamos las cantidades $\alpha(t)$ por el operador $(2\pi\hbar c^2/\omega)^{1/2} a(t)$ y el conjugado $\alpha^*(t)$ por $(2\pi\hbar c^2/\omega)^{1/2} a^\dagger(t)$, tenemos entonces que la Ec. (3.9) puede escribirse como

$$H_F = \hbar\omega \left(a^\dagger(t) a(t) + \frac{1}{2} \right), \quad (3.10)$$

es decir estas amplitudes son ahora los operadores de ascenso y descenso en el formalismo de la mecánica cuántica. Recordamos que los operadores de ascenso y descenso cumplen que para un estado de n cuantos del oscilador

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (3.11)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (3.12)$$

Ahora el vector potencial tendrá la forma

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c}{\omega} \right)^{1/2} [a(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + a^\dagger(t) \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})] \quad (3.13)$$

Sustituyendo en la Ec. (3.5) llegamos a los campos eléctrico y magnético

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i(2\pi\hbar\omega)^{1/2} [a(t)\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) - a^\dagger(t)\mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}\right)^{1/2} [a(t)\nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + a^\dagger(t)\nabla \times \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})]\end{aligned}\quad (3.14)$$

Los eigenvalores del Hamiltoniano cumplen la expresión

$$H_F |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (3.15)$$

donde los eigenvalores son

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.16)$$

la n establece el número de fotones. El estado vacío tiene cero fotones sin embargo tiene una energía diferente de cero $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Lo cual nos indica que en este formalismo hay un campo electromagnético asociado al vacío. Si tomamos el promedio de los campos para un estado de n fotones llegamos

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad (3.17)$$

puesto que $\langle n|a|n\rangle = 0$. Los campos fluctúan con media cero, aunque la energía esté bien definida.

Si nos preguntamos por el valor medio del cuadrado de los campos tendremos

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle &= -(2\pi\hbar\omega) \left(\langle a(t)^2 \rangle \mathbf{A}_0(\mathbf{r})^2 - \langle a(t)a^\dagger(t) + a^\dagger(t)a(t) \rangle \right. \\ &\quad \left. \times |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 + \langle a^\dagger(t)^2 \rangle \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})^2 \right).\end{aligned}\quad (3.18)$$

Recordamos que $\langle a^2 \rangle = \langle a^{\dagger 2} \rangle = 0$, $\langle aa^\dagger + a^\dagger a \rangle = \langle 2a^\dagger a + 1 \rangle = 2n + 1$, por lo que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle &= \left(n + \frac{1}{2}\right) 4\pi\hbar\omega |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2, \\ &= 4\pi\hbar\omega |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 n + 2\pi\hbar\omega |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2, \\ &= 4\pi\hbar\omega |\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2 n + \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle_0.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Aquí emerge un aspecto muy interesante. Podemos ver que el primer término de la derecha está relacionado con el número de fotones n en nuestro campo. Asimismo contiene el término $|\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2$ es decir depende de la posición como si fuera una

onda. En este contexto podemos hablar de la dualidad onda-partícula del campo electromagnético. Podemos observar también que si $|\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2$ es grande hay una gran probabilidad de encontrar un fotón en \mathbf{r} y si $|\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2$ es pequeño hay poca probabilidad. Es decir $|\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2$ mide si estamos observando un comportamiento de partícula o de onda de nuestro campo.

También podemos calcular cantidades como $\langle \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) \rangle$ para $m > 2$. Si suponemos, por simplicidad, que $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0^*(\mathbf{r})$, entonces

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i(2\pi\hbar\omega)^{1/2} [a(t) - a^\dagger(t)] \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = (4\pi\omega^2)^{1/2} q(t) \mathbf{A}_0(\mathbf{r}), \quad (3.20)$$

donde se usó que $(a(t) - a^\dagger(t)) = -i\sqrt{2\omega/\hbar}q(t)$.

Dado que la densidad de probabilidad para el estado base de un oscilador armónico es $|\langle q|n=0\rangle|^2 = |\psi_0(q)|^2 = (\omega/\pi\hbar)^{1/2} e^{-\omega q^2/\hbar}$, sustituyendo $q(t)$ tenemos que

$$P[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = [2\pi \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle_0]^{1/2} \exp[-\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)/2 \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle_0] \quad (3.21)$$

esto es para el estado $|0\rangle$. Tenemos que dado que $\langle a \rangle_0 = \langle a^\dagger \rangle_0 = 0$ que $\langle \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) \rangle_0 = 0$ para m impar y

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) \rangle_0 &= [2\pi \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle_0]^{1/2} \int_0^\infty dE E^m \exp[-\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)/2 \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle_0] \\ &= 2^{m/2} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \langle \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \rangle_0^{m/2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

para m par.

Para los estados $|n\rangle$ diferentes del vacío se pueden encontrar resultados semejantes. Solo que en esos casos la distribución de probabilidad esta asociada con los polinomios de Hermite H_n .

La expresión 3.22 permite observar que las fluctuaciones del campo eléctrico son diferentes de cero aún cuando no hay fotones, existiendo entonces un campo eléctrico asociado al vacío que perméa a todo el universo. Sin embargo podemos ver que en la Ec. (3.19) el promedio del vacío solo interviene como una constante aditiva, la cual podemos suprimir y definir entonces un nuevo Hamiltoniano

$$H_F - \langle 0|H_F|0\rangle = \hbar\omega a^\dagger a, \quad (3.23)$$

sin afectar ningún resultado. Este nuevo Hamiltoniano se dice que sigue el ordenamiento normal u ordenamiento de Wick, donde el operador a^\dagger va a la izquierda del operador a . Este ordenamiento se denota como $: H_F :$,

$$: H_F :=: \frac{1}{2} \hbar \omega (a a^\dagger + a^\dagger a) := \hbar \omega a^\dagger a \quad (3.24)$$

con este ordenamiento hemos eliminado la contribución del vacío dentro del Hamiltoniano.

Sabemos que la dinámica del sistema está descrita por las ecuaciones de Heisenberg que implican conmutadores del Hamiltoniano con las variables dinámicas a y a^\dagger , notamos que la parte asociada al vacío en el Hamiltoniano siempre conmuta con estos operadores. Por esto sabemos que no debe haber ninguna contribución de éste en la dinámica del sistema. Sin embargo veremos que no es tan sencillo como parece, que existen fenómenos medibles como la fuerza de Casimir, en las cuales la energía del vacío toma un rol importante. Por lo cual no podemos eliminarlo de forma arbitraria del Hamiltoniano.

3.3. El Campo en el Vacío¹.

El Hamiltoniano obtenido para un solo modo \mathbf{k} y polarización λ puede ser generalizado para el caso de muchos modos \mathbf{k}_j y polarización λ . Para ello se resuelven las ecuaciones de Maxwell en el vacío con condiciones de frontera periódicas. Es decir se puede generalizar la cuantización de los campos para un espacio vacío (sin fuentes de campo electromagnético) y sin fronteras. En este caso tendremos un número infinito de modos permitidos. Suponemos en este caso que la intensidad del campo para un número infinito de modos no depende de la posición. Esto implica que $|\mathbf{A}_0(\mathbf{r})|^2$ no depende de \mathbf{r} para cualquier modo. De la ecuación de Helmholtz podemos ver que $\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{k} = 0$ para que se cumpla la condición de transversalidad $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ para la norma de Coulomb.

Normalizando cada uno de los modos en un volumen $V = L^3$ y aplicando condiciones a la frontera periódicas

$$\mathbf{A}(x + L, y + L, z + L) = \mathbf{A}(x, y, z), \quad (3.25)$$

tenemos que

$$(k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z), \quad (3.26)$$

donde cada uno de los n es un entero. Tenemos así el campo en el interior de un cubo de volumen V , donde el vector potencial $\mathbf{A}_\mathbf{k}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \mathbf{e}_\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, satisface la ecuación de Helmholtz y está normalizada en el cubo

$$\int_V d^3r |\mathbf{A}_\mathbf{k}(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (3.27)$$

¹ En ausencia de fuentes

El vector unitario $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$, el cual tiene que ser real, especifica la polarización del campo para un modo. Se puede ver que la condición $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}} = 0$ tiene dos soluciones independientes para $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$, que llamaremos $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$ y $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$, que corresponden a dos polarizaciones diferentes, con $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = 0$ y $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}^2 = \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}^2 = 1$, de esta forma definimos para un modo

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\lambda = 1, 2). \quad (3.28)$$

De la Ec. (3.13) tenemos que el vector potencial para un modo con polarización λ es

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.29)$$

ó

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(0) e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.30)$$

con la relación de dispersión $\omega_{\mathbf{k}} = kc$ y los operadores $a_{\mathbf{k}\lambda}$ y $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ son los operadores de creación y aniquilación para el modo con vector de onda \mathbf{k} y polarización λ . La Ec. (3.30) nos da el potencial vectorial para una onda plana. Dada la linealidad de la ecuaciones de Maxwell, para un número infinito de modos tendremos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(0) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(0) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{r}) \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (3.31)$$

es el potencial vectorial en el vacío.

Usando que las soluciones de la ecuación de Helmholtz con condiciones a la frontera periódicas son ortonormales, es decir

$$\int_V d^3r \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}'\lambda'}^*(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^3 \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (3.32)$$

podemos llegar, utilizando un desarrollo parecido al de la sección anterior, que el Hamiltoniano se escribe

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.33)$$

para un número infinito de modos en el vacío. Esta es la expresión de la energía de un número infinito de osciladores armónicos desacoplados, que satisfacen las reglas de conmutación

$$\left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t), a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger(t) \right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^3 \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (3.34)$$

y $[a_{\mathbf{k}\lambda}(t), a_{\mathbf{k}'\lambda'}(t)] = [a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t), a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger(t)] = 0$. Dado que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -(1/c)\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ y de la Ec. (3.31) tenemos el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.35)$$

Mientras que de la Ec. (3.31) y que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ obtenemos directamente que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.36)$$

Las amplitudes definidas en la Ec. (3.28) forman un conjunto completo de funciones, lo que se puede justificar por el teorema de Fourier. Entonces cualquier modo puede ser desarrollado en términos de esas amplitudes.

El momento lineal asociado al campo está dado por la ecuación

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad (3.37)$$

por lo que sustituyendo las Ecs. (3.35), (3.36) y usando la ortonormalidad de las funciones $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{r})$ se tiene que

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \mathbf{k} \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.38)$$

Observamos que $[\mathbf{P}, H_F] = 0$, por lo que el momento lineal es una constante de movimiento. Los eigenvalores de \mathbf{P} son $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \mathbf{k} (n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2})$, donde $n_{\mathbf{k}\lambda}$ es un número positivo o cero. Es decir un estado estacionario está caracterizado por el conjunto de número de fotones $\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}$. Donde el estado $|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$ tiene un número total de fotones $\sum_{\mathbf{k}\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda}$, una energía

$$E = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_k \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.39)$$

y un momento lineal

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \mathbf{k} \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.40)$$

o redefiniendolos

$$E = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k n_{\mathbf{k}\lambda} \quad \mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\mathbf{k} n_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.41)$$

si es que quitamos el término asociado al estado vacío en la energía. En el caso del momento, este término asociado al vacío $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}$ es cero ya que tenemos la contribución de \mathbf{k} y de $-\mathbf{k}$ en esta suma.

Llegamos a la descripción mecánico-cuántica del campo electromagnético donde los estados estacionarios de los fotones tienen energía $\hbar\omega_k$ y momento lineal $\hbar\mathbf{k}$. De lo cual tenemos que $E^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = \hbar^2 (\omega_k^2 - k^2 c^2) = 0$ y entonces la masa en reposo de los fotones es cero, ya que $E^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = m_0^2 c^4$, siendo m_0 la masa en reposo. La teoría también predice que estos fotones son bosones y por lo tanto sus estados estacionarios son simétricos con respecto al intercambio de dos fotones. Podemos construir el estado de n fotones a partir del estado vacío mediante

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad (3.42)$$

que es simétrico ante el intercambio de dos fotones. Este comportamiento bosónico es debido a la regla de conmutación expresada en la Ec. (3.34).

El vector de onda \mathbf{k} determina el momento lineal y la energía del fotón. Asimismo la polarización λ está relacionada con el momento angular intrínseco del fotón, el cual definimos

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r (\mathbf{E} \times \mathbf{A}). \quad (3.43)$$

Es importante notar que \mathbf{S} es un invariante de norma, porque $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Sustituyendo las Ecs. (3.31) y (3.35)

$$\mathbf{S} = i\hbar \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hat{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}2}^\dagger a_{\mathbf{k}1} - a_{\mathbf{k}1}^\dagger a_{\mathbf{k}2} \right), \quad (3.44)$$

con $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k = \mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$. Es el vector unitario que junto con $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$ y $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ forman una triada de vectores. El operador de momento angular intrínseco no conmuta con el operador $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda}$ por lo que el Hamiltoniano y el momento angular no comparten los eigenestados $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$. Podemos construir eigenestados simultáneos de la energía, el momento lineal y el espín definiendo vectores de polarización complejos

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} + i\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k},-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} - i\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}), \quad (3.46)$$

que satisfacen las relaciones $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}^* \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha'} = i\alpha\hat{\mathbf{k}}\delta_{\alpha\alpha'}$, con $\alpha = \pm 1$. Por lo tanto si los vectores de polarización $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$ y $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ corresponden a polarizaciones lineales. Entonces los vectores $\mathbf{e}_{\mathbf{k},+1}$ y $\mathbf{e}_{\mathbf{k},-1}$ corresponden a polarizaciones circulares. Definimos los operadores de creación y aniquilación para modos circularmente polarizados ($\mathbf{k}, \alpha = \pm 1$) como

$$a_{\mathbf{k},+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{k}1} - ia_{\mathbf{k}2}), \quad (3.47)$$

$$a_{\mathbf{k},-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{k}1} + ia_{\mathbf{k}2}), \quad (3.48)$$

en este caso el momento angular intrínseco se escribe

$$\mathbf{S} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k},+1}^\dagger a_{\mathbf{k},+1} - a_{\mathbf{k},-1}^\dagger a_{\mathbf{k},-1} \right) = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \alpha \hbar \hat{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha} \quad (3.49)$$

asimismo $H_F = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha}$ y $\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \alpha \hbar \mathbf{k} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger a_{\mathbf{k},\alpha}$. En este caso el momento angular intrínseco si conmuta con el Hamiltoniano con eigenvector $|n_{\mathbf{k},\alpha}\rangle$ y eigenvalor $\alpha \hbar \hat{\mathbf{k}}$, $\alpha = \pm 1$. Es decir que el momento angular en la dirección de propagación toma valores de $\pm \hbar$. Por lo que podemos corroborar que el fotón es un bosón de espín 1.

3.4. La Necesidad del Campo del Vacío.

Utilizando las ecuaciones de Heisenberg se demuestra que la evolución temporal del potencial vectorial \mathbf{A} de un dipolo tiene dos contribuciones para el campo eléctrico una parte de radiación asociada al dipolo y otra asociada al vacío. Se demostrará que está última contribución es necesaria para que la teoría sea consistente.

El estado vacío se define como el estado de cero fotones, en el cual $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ para toda \mathbf{k} y λ . El estado vacío es un eigenestado del Hamiltoniano pero no de los operadores del campo eléctrico y magnético. En este estado los campos no tienen valores definidos sino que están fluctuando con una media igual a cero.

Podemos pensar que la absorción de fotones es una transición al estado vacío y una emisión de fotones es una transición del estado vacío hacia un estado con un número de fotones diferentes de cero. Dirac lo describía de la siguiente forma [15]:

“Un cuanto de luz tiene la peculiaridad de que aparentemente deja de existir cuando está en uno de sus estados estacionarios, llamado el estado cero, en el cual su momento, y además su energía, son cero. Cuando un cuanto de luz es absorbido puede ser considerado que salta hacia este estado cero, y cuando uno es emitido puede ser considerado que salta desde el estado cero a un estado en el cual esta físicamente en evidencia, así que parece que ha sido creado. Dado que no hay límite al número de cuantos de luz que pueden ser creados de esta forma, debemos suponer que hay un número infinito de cuantos de luz en el estado cero”.

Una de las características más importantes del estado vacío es que tiene una energía $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k/2$ infinita. Para ver el espectro de una forma continua hacemos el cambio

$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \sum_{\lambda} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\lambda} \int d^3k. \quad (3.50)$$

Por lo que la densidad de energía del estado cero es

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar\omega_k &= \frac{2}{8\pi^3} \int d^3k \frac{1}{2} kc \\ &= \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int d\omega \omega^3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

y la densidad espectral de energía del campo del vacío es

$$\rho_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}, \quad (3.52)$$

entonces la densidad de energía en un intervalo entre ω_1 y ω_2 es

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \rho_0(\omega) = \frac{\hbar}{8\pi^2 c^3} (\omega_2^4 - \omega_1^4). \quad (3.53)$$

La cual puede ser muy grande, por ejemplo en la región óptica de 400 a 700 nm, esta densidad de energía es de 220 erg/cm³. Esto nos indica que aún habiendo eliminado la energía del estado vacío de la Ec. (3.39) se tienen consecuencias debidas a ella. Esto se verá más claramente considerando un oscilador dipolar en el vacío.

El Hamiltoniano en este caso está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \mathbf{r}^2 + H_F. \quad (3.54)$$

Las ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Heisenberg, que podemos escribirlas

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, H] = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right), \quad (3.55)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{p}, H] = -\frac{1}{2m} \nabla \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 - m\omega_0^2 \mathbf{r} \quad (3.56)$$

Usando la expresión

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}),$$

es inmediato que la ecuación de movimiento del operador de momento está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{1}{m} \left[\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \nabla \right] \left[-\frac{e}{c} \mathbf{A} \right] - \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \times \nabla \times \left[-\frac{e}{c} \mathbf{A} \right] - m\omega_0^2 \mathbf{r}, \\ &= \frac{e}{c} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} - m\omega_0^2 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Las dos ecuaciones anteriores permiten obtener

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \dot{\mathbf{A}} = -\frac{e}{c} \left[\dot{\mathbf{A}} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} - m\omega_0^2 \mathbf{r} \\ &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} - m\omega_0^2 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

donde se ha utilizado que $\dot{\mathbf{A}} = \partial \mathbf{A} / \partial t + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A}$ y $\mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{A} / \partial t$. Si el movimiento es no-relativista despreciamos el término del campo magnético y tendremos

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} \cong \frac{e}{m} \mathbf{E} \cong i \frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi \hbar \omega_k}{V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(t) - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (3.59)$$

puesto que en la aproximación dipolar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \simeq 0$. La ecuación de Heisenberg para el operador de aniquilación en el Hamiltoniano de la Ec. (3.54)

$$\dot{a}_{\mathbf{k}\lambda} = -i\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} + ie \left(\frac{2\pi}{\hbar \omega_k V} \right)^{1/2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}, \quad (3.60)$$

donde el primer término proviene de H_F y el segundo del oscilador dipolar.

En todo este desarrollo se ha supuesto que los operadores del campo y de la partícula conmutan para un mismo tiempo. La solución a la Ec. (3.60) es

$$a_{\mathbf{k}\lambda}(t) = a_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_k t} + ie \left(\frac{2\pi}{\hbar \omega_k V} \right)^{1/2} \int_0^t dt' \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') e^{i\omega_k(t-t')}, \quad (3.61)$$

Entonces observamos que la Ec. (3.59) puede ser reescrita como sigue

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0(t) + \frac{e}{m} \mathbf{E}_R(t), \quad (3.62)$$

con

$$\mathbf{E}_0(t) = i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_k t} - a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(0) e^{i\omega_k t} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (3.63)$$

y

$$\mathbf{E}_R(t) = -\frac{4\pi e}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \int_0^t dt' [\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t')] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cos \omega_k(t-t'). \quad (3.64)$$

En [16] se ha demostrado que la expresión anterior en caso del continuo está dada por

$$\mathbf{E}_R(t) = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}, \quad (3.65)$$

que es un campo de reacción de radiación. El campo total que actúa sobre el dipolo tiene la contribución de un campo asociado al vacío $\mathbf{E}_0(t)$ y el campo de reacción de radiación $\mathbf{E}_R(t)$. \mathbf{E}_0 es la solución a la ecuación de onda, que proviene de las Ecs. de Maxwell $(\nabla^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\mathbf{E} = 0$. Sustituyendo la Ec. (3.65) en la Ec. (3.62) llegamos a

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} - \tau \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0(t), \quad (3.66)$$

con $\tau = 2e^2/3mc^3$. Es la ecuación de un oscilador armónico amortiguado y forzado, por el campo “externo” del vacío que actúa sobre el dipolo. Dado que la única fuente de campo electromagnético es el dipolo, vemos que el campo que produce este dipolo es el campo de reacción de radiación. Sin embargo la importancia de la Ec. (3.66) radica en que existe siempre un campo que no es generado por la fuente, de aquí que se le llame campo del vacío \mathbf{E}_0 . $\mathbf{E}_R(t)$ es el campo generado por el dipolo y actuando sobre el dipolo.

De las Ecs. (3.63) y (3.64) hacemos notar que en $t = 0$ el campo \mathbf{E}_0 es distinto de cero, mientras \mathbf{E}_R es cero. Lo cual indica que que la interacción descrita por la Ec. (3.62) tiene comienzo en $t = 0$. A este tiempo el estado del sistema está descrito por el vector de estado $|\Psi\rangle = |0\rangle |\psi_D\rangle$, donde $|0\rangle$ es el vector de estado del campo y $|\psi_D\rangle$ es el vector de estado inicial del dipolo. El promedio del campo del vacío para cualquier tiempo es cero, ya que $\langle \mathbf{E}_0(t) \rangle = \langle \Psi | \mathbf{E}_0(t) | \Psi \rangle = 0$, dadas la propiedades que $\langle a_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \langle a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \rangle = 0$. Sin embargo la energía asociada a este campo es

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \langle \mathbf{E}_0^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{k'}}{V} \right)^{1/2} \langle a_{\mathbf{k}\lambda}(0) a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger(0) \rangle e^{i(\omega_{k'} - \omega_k)t}, \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right) = \int_0^\infty d\omega \rho_0(\omega), \tag{3.67}
 \end{aligned}$$

la cual es infinita. Esto quiere decir que siendo la energía del estado vacío sólo un número el cual no contribuye a las ecuaciones de Heisenberg, y por lo cual despreciamos, vuelve a salir a la luz asociada a la energía del campo del vacío. La cual es la solución homogénea de las ecuaciones de onda. Por lo cual este término en la energía, el cual es infinito, no puede ser quitado del Hamiltoniano y es el origen de uno de los infinitos de la electrodinámica cuántica que no puede eliminarse en forma trivial.

Veremos que este término se necesita para que la teoría sea consistente. Tomemos el caso del conmutador $[z(t), p_z(t)] = U^\dagger(t) [z(0), p_z(0)] U(t) = i\hbar$. Podemos calcular este conmutador si conocemos la solución a la Ec. (3.66) y tomando en consideración que $[a_{\mathbf{k}\lambda}, a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$. Donde la solución de la Ec. (3.66) es

$$z(t) = \frac{ie}{m} \sum_{\mathbf{k}\lambda} [F_{\mathbf{k}\lambda} e^{-i\omega_k t} - F_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{i\omega_k t}], \tag{3.68}$$

con

$$F_{\mathbf{k}\lambda} = - \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \frac{a_{\mathbf{k}\lambda}(0)}{\omega_k^2 - \omega_0^2 + i\tau\omega_k^3} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(z), \tag{3.69}$$

donde $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(z)$ es justamente la componente z de $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$. Tenemos ahora que el conmutador

$$[z(t), p_z(t)] = [z(t), m\dot{z}(t)] + \left[z(t), \frac{e}{c} A_z(t) \right] = [z(t), m\dot{z}(t)] \tag{3.70}$$

puesto que los operadores de partícula y campo conmutan a un mismo tiempo. Tenemos entonces que

$$[z(t), m\dot{z}(t)] = \frac{ie^2}{m} \left(\frac{4\pi\hbar}{V} \right) \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(z) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(z) \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega_k^6}$$

donde la suma sobre λ : $\sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(z) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(z) = 1 - k_z^2/k^2$, esto es debido a que $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}, \hat{\mathbf{y}}\mathbf{k}$ forman una triada ortonormal. Además de la Ec. (3.50) tenemos que para una \mathbf{k} continua

$$\begin{aligned}
 [z(t), m\dot{z}(t)] &= \frac{ie^2}{m} \left(\frac{4\pi\hbar}{V} \right) \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) \int d^3k \frac{\left(1 - \frac{k_z^2}{k^2}\right) \omega_k^2}{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega_k^6} \\
 &= \frac{i\hbar e^2}{2\pi^2 m} \left(\frac{8\pi}{3c^3} \right) \int_0^\infty d\omega_k \frac{\omega_k^4}{(\omega_k^2 - \omega_0^2)^2 + \tau^2 \omega_k^6} \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

Suponiendo que hay un pico en $\omega_k \simeq \omega_0$ y haciendo el cambio de variable $x = \omega_k^2 - \omega_0^2$ tenemos

$$[z(t), p_z(t)] \simeq \frac{2i\hbar e^2}{3\pi m c^3} \omega_0^3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \tau^2 \omega_0^6} = \left(\frac{2i\hbar e^2 \omega_0^3}{3\pi m c^3} \right) \left(\frac{\pi}{\tau \omega_0^3} \right) = i\hbar \quad (3.72)$$

Tal como debe ser. Esto implica que el hecho de que exista el forzamiento debido al campo del vacío se llega a que la solución de la Ec. (3.66) preserva las relaciones de conmutación en la Ec. (3.72). Podemos ver que este resultado es consistente con que el movimiento del oscilador armónico dipolar es sostenido. Es decir existe un equilibrio entre el término disipativo y el forzamiento, haciendo que el movimiento se conserve y por lo tanto la energía asociada al campo del vacío es constante en el tiempo.

3.5. Conmutadores de los Campos.

Tenemos que las componentes de los campos siguen reglas de conmutación, que se cumplen para todo tiempo, las cuales nos dicen

$$\begin{aligned}
 [E_i(\mathbf{r}_1, t_1), E_j(\mathbf{r}_2, t_2)] &= [B_i(\mathbf{r}_1, t_1), B_j(\mathbf{r}_2, t_2)] \\
 &= 4\pi i\hbar c \left(\frac{\delta_{ij}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial r_{1i} \partial r_{2j}} \right) \\
 &\quad \times D((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), t_1 - t_2), \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 D(\mathbf{r}, t) &\equiv - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int d^3k \frac{1}{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \sin(\omega_k t), \\
 &= - \frac{1}{4\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk \sin(kr) \sin(ckt), \\
 &= \frac{1}{4\pi r} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)].
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Esto nos indica que los campos en las posiciones y los tiempos (\mathbf{r}_1, t_1) y en (\mathbf{r}_2, t_2) no pueden ser medidos simultáneamente a menos que estos estén conectados por una señal de luz, es decir si $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \pm c(t_1 - t_2)$. De la misma forma tenemos

$$[E_i(\mathbf{r}_1, t_1), B_j(\mathbf{r}_2, t_2)] = 4\pi i \hbar c \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial r_{2k}} D((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), t_1 - t_2) \tag{3.75}$$

Por las propiedades de la función $D(\mathbf{r}, t)$, los conmutadores 3.73 y 3.75 indican que los campos pueden ser medidos simultáneamente. Sin embargo se hace notar que estos conmutadores fueron obtenidos cuando no hay fuentes de campo; si se agregan cargas puntuales, se llegará a otras relaciones de conmutación.

3.6. El Efecto Unruh-Davies.

Otros efectos como el Efecto de Unruh-Davies pueden darnos evidencia experimental del campo del vacío. Este efecto consiste en que si un observador se mueve con una aceleración constante a (propia) en el vacío, éste se percibe inmerso en un baño térmico a una temperatura $T = \hbar a / 2\pi k c$. Este efecto puede demostrarse observando las correlaciones de un potencial escalar para tiempos diferentes, calculadas de dos formas:

1. Con la distribución de probabilidad de la estadística de Bose-Einstein.
2. Mediante el promedio mecánico-cuántico sobre el estado de cero fotones.

Estos dos resultados se comparan llegando a que para que sean iguales debe de cumplirse que

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k c} \tag{3.76}$$

Lo cual indica que en este caso, el efecto de la aceleración es hacer que las fluctuaciones del campo vacío se vean reflejadas en fluctuaciones térmicas. Lo cual es muy intuitivo.

3.7. Radiación Térmica.

El campo del vacío comparte una serie de propiedades con la radiación térmica. Los cuales estudiaremos a continuación.

La probabilidad P_n de que haya n fotones en un campo unimodal de frecuencia ω , en equilibrio térmico a una temperatura T es

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})\hbar\omega/kT}} = \frac{e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega/kT}} \\ &= e^{-n\hbar\omega/kT} (1 - e^{-\hbar\omega/kT}). \end{aligned} \quad (3.77)$$

donde en la última igualdad se utilizó el resultado de una progresión geométrica de n términos cuando $n \rightarrow \infty$

También el número de fotones promedio es

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = - (1 - e^{-\alpha}) \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (3.78)$$

ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}},$$

con $\alpha = \hbar\omega/kT$.

Entonces podemos reescribir P_n en términos de \bar{n} de la siguiente forma

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}. \quad (3.79)$$

Usando el procedimiento indicado para obtener \bar{n} , se pueden calcular promedios de funciones de n . Por ejemplo

$$\bar{n}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = 2\bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (3.80)$$

con lo cual

$$\Delta n^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad (3.81)$$

donde recordando la fórmula de Einstein [17] sobre las fluctuaciones en energía de la radiación térmica se concluye que el término con \bar{n}^2 está asociado con las fluctuaciones de onda y el \bar{n} está asociado a las fluctuaciones de partícula.

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta n^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle a^\dagger a a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 \\
&= \langle a^\dagger (a^\dagger a + 1) a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2 \\
&= \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle + \bar{n} - \bar{n}^2,
\end{aligned} \tag{3.82}$$

siendo a el operador de aniquilación del campo unimodal. Este campo tiene una matriz densidad

$$\rho = \sum_n P_n |n\rangle \langle n|, \tag{3.83}$$

donde P_n es la probabilidad de tener n fotones cuando un campo electromagnético unimodal se encuentra a una temperatura T . Entonces

$$\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle = \sum_n P_n \langle n | a^\dagger a^\dagger a a | n \rangle. \tag{3.84}$$

Como $aa |n\rangle = \sqrt{na} |n-1\rangle = \sqrt{n(n-1)} |n-2\rangle$, nos lleva a

$$\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}} = 2\bar{n}^2. \tag{3.85}$$

Este resultado implica que las Ecs. (3.81) y (3.82) coinciden. Sin embargo el término de partícula se obtiene del conmutador $[a, a^\dagger] = 1$. Este conmutador da origen a la energía del punto cero en el Hamiltoniano del oscilador armónico que describe un campo unimodal. Por lo que podemos concluir que este término de partícula está relacionado con la existencia de la energía del punto cero.

El término \bar{n}^2 en la expresión (3.81) surge de que el promedio $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle = 2\bar{n}^2$. El factor de 2 es muy importante dado que este promedio es el origen de las correlaciones de Brown-Twiss, que se conocen también como empaquetamiento “bunching” de fotones. Suponiendo que en la radiación térmica se cuenta con detectores que absorben dos fotones en forma simultanea, esto es el detector responde a la función de correlación $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$ en el ordenamiento normal. El hecho de que esta correlación sea mayor que \bar{n}^2 indica que los fotones tienden a venir en pares. Este empaquetamiento fue medido por Brown y Twiss en los años 50's [18].

Este empaquetamiento de los fotones no es una propiedad universal de la radiación. Por ejemplo, para un láser ideal $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle = \bar{n}^2$, por lo que los fotones no están correlacionados. Por lo que el láser no presenta el término de onda en las fluctuaciones y $\Delta n^2 = \bar{n}$. Es lo más cercano a una onda de luz clásica sin fluctuaciones.

Capítulo 4

La Función de Wigner

Cuando se relaciona la Mecánica Clásica con la Mecánica Cuántica se puede ver que no son del todo compatibles. Por un lado tenemos que la finalidad de la mecánica clásica es encontrar la trayectoria de una partícula para todo tiempo; o bien propiedades macroscópicas de un conjunto grande de partículas de cuya descripción se encarga la Mecánica Estadística mediante una distribución de probabilidad. En el caso de la Mecánica Cuántica no podemos hablar de trayectorias de las partículas. El estado del sistema está determinado por el vector de onda $|\psi\rangle$ o por el operador densidad $\hat{\rho}$. Por otro lado, además del tratamiento estadístico que puede resultar de observar un conjunto grande de partículas, tenemos que la cuántica en si es una teoría estadística. Dado que los operadores de posición \hat{x} y de momento \hat{p} no conmutan no podemos hablar de una verdadera distribución de probabilidad en el espacio fase.

Sin embargo, se han definido funciones de distribución de cuasiprobabilidad que han probado ser de gran utilidad en el estudio de sistemas cuánticos. Son útiles, no únicamente como instrumentos de cálculo sino también proveen información sobre la relación en la mecánica clásica y la mecánica cuántica. Una de ellas es la llamada función de cuasiprobabilidad de Wigner o función de Wigner en el que se define una función de los eigenvalores de \hat{x} y \hat{p} parecida a una distribución de probabilidad, pero que sin embargo puede tomar valores negativos.

4.1. Definición de la Función de Wigner

La definición de la distribución de Wigner en el espacio fase es [19]

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle. \quad (4.1)$$

Esta expresión corresponde al caso de sistemas mecánico cuánticos en una dimensión. La función de Wigner puede definirse también en n dimensiones. Es necesario reemplazar $1/2\pi\hbar \rightarrow 1/(2\pi\hbar)^n$ y donde x , ξ y p son vectores en n -dimensiones. En esta contribución nos restringiremos al caso unidimensional.

Una justificación de esta definición se puede hacer si suponemos que nuestro objetivo es describir el movimiento de una partícula de una posición x' a x'' . Cuando nos preguntamos por la amplitud de probabilidad de que este movimiento se efectúe, tenemos que preguntarnos por la cantidad $\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle$, la distancia que recorre la partícula es $\xi = x'' - x'$ y si definimos el centro del movimiento como $x \equiv (x'' + x')/2$ entonces tenemos que $x' = x - \frac{1}{2}\xi$ y $x'' = x + \frac{1}{2}\xi$. Por lo que la amplitud de probabilidad del movimiento queda $\langle x + \frac{1}{2}\xi | \hat{\rho} | x - \frac{1}{2}\xi \rangle$. Si asociamos el momento \hat{p} como la variable conjugada de la variable ξ y preguntamos por la amplitud de probabilidad en las variables x y p en vez de las variables x y ξ tenemos que realizar la transformada de Fourier

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

donde hemos agregado el factor de normalización $1/(2\pi\hbar)$ para que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = 1.$$

En el caso de un estado puro $|\psi\rangle$, el operador densidad $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ por lo que la función de Wigner está dada por

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \psi^*\left(x - \frac{1}{2}\xi\right) \psi\left(x + \frac{1}{2}\xi\right) \quad (4.2)$$

4.2. Propiedades de la Función de Wigner

En esta sección veremos que la función de Wigner ayuda a calcular valores esperados en la mecánica cuántica haciendo uso de conceptos de la Mecánica Estadística.

4.2.1. Marginales

Podemos tomar la integral de la función de Wigner en cualquiera de sus dos variables x o p , teniendo de esta forma la distribución de momentos o posiciones, respectivamente.

Distribución de Posición

Integrando la Ec. (4.1) con respecto a la variable p se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

haciendo uso de la definición de la delta de Dirac

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) = \delta(\xi), \quad (4.3)$$

llegamos a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \delta(\xi) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p) = \langle x | \hat{\rho} | x \rangle \equiv W(x) \quad (4.4)$$

De lo cual vemos que al tomar la marginal de la función de Wigner obtenemos la función de distribución de probabilidad para la variable x , $W(x)$.

Distribución de Momento

De igual forma que obtuvimos la distribución para x podemos obtener la distribución de la variable p , integrando sobre x la Ec. (4.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

reintroduciendo las variables $x' = x - \frac{1}{2}\xi$ y $x'' = x + \frac{1}{2}\xi$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p (x'' - x')\right) \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle. \quad (4.5)$$

Dejamos por un momento el desarrollo y nos preguntamos por la expresión a la cual debemos llegar, $W(p) \equiv \langle p | \hat{\rho} | p \rangle$

$$W(p) \equiv \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \langle p | x'' \rangle \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle \langle x' | p \rangle, \quad (4.6)$$

donde hemos utilizado la base completa del operador de posición

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| = 1.$$

Hacemos notar que el paréntesis de transformación entre las bases de los operadores de posición y momento están dadas por la expresión

$$\langle p | x'' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p x''\right). \quad (4.7)$$

Sustituyendo este resultado y el equivalente para $\langle x' | p \rangle$ en la Ec. (4.7) finalmente obtenemos

$$W(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \exp\left(\frac{-i}{\hbar} (x'' - x')\right) \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle.$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos en la Ec. (4.5), por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle \equiv W(p).$$

4.2.2. Superposición de Estados Cuánticos en el Espacio Fase

Otra de las propiedades de la función de Wigner, es llamada la regla del producto de trazas

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_1}(x, p) W_{\hat{\rho}_2}(x, p), \quad (4.8)$$

donde recordamos la definición de la función de Wigner

$$W_{\hat{\rho}_j}(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho}_j \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

con $j = 1$ y 2 .

Para el caso de estados puros $\hat{\rho}_j = |\psi_j\rangle \langle\psi_j|$, lo que indica que la traza del producto de densidades de probabilidad es igual a la magnitud asociada al traslape entre los estados, es decir

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \text{Tr}(|\psi_1\rangle \langle\psi_1|\psi_2\rangle \langle\psi_2|) = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2.$$

Entonces, en este caso la regla del producto de trazas nos dice

$$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{|\psi_1\rangle}(x,p)W_{|\psi_2\rangle}(x,p). \quad (4.9)$$

Por lo cual de la función de Wigner es posible encontrar el producto escalar módulo cuadrado de dos vectores $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$.

Para derivar la regla del producto de las trazas, multiplicamos la definición de la función de Wigner por $\exp(ip\xi'/\hbar)$ e integramos sobre p obteniéndose

$$\langle x''|\hat{\rho}_j|x'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp W\left(\frac{x''+x'}{2}, p\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}p(x''-x')\right).$$

De la definición de traza tenemos

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \langle x''|\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2|x''\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x''|\hat{\rho}_1|x'\rangle \langle x'|\hat{\rho}_2|x''\rangle,$$

donde hemos usado la base completa del operador de posición. Substituyendo los elementos de matriz de los operadores densidad ρ_1 y ρ_2 se tiene que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' W_{\hat{\rho}_1}\left(\frac{x''+x'}{2}, p\right) W_{\hat{\rho}_2}\left(\frac{x''+x'}{2}, p'\right) e^{\left(\frac{i}{\hbar}(p-p')(x''-x')\right)}.$$

Usando nuevamente el cambio de variables $x' = x - \frac{1}{2}\xi$ y $x'' = x + \frac{1}{2}\xi$, entonces

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' W_{\hat{\rho}_1}(x,p) W_{\hat{\rho}_2}(x,p') e^{\left(\frac{i}{\hbar}\xi(p-p')\right)}.$$

Integrando sobre ξ , obtenemos la expresión

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dp' W_{\hat{\rho}_1}(x,p) W_{\hat{\rho}_2}(x,p') \delta(p-p').$$

Llegando al resultado final donde

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_1}(x, p) W_{\hat{\rho}_2}(x, p).$$

4.2.3. Forma de la Función de Wigner

La función de Wigner no puede comprimirse a un dominio del espacio fase más pequeño que $2\pi\hbar$ como consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg. Además la función de Wigner de un estado normalizable, tiene una cota superior y en general puede ser negativa.

Tamaño de un Estado Cuántico

De la propiedad de la matriz densidad, sabemos que

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \leq 1.$$

donde la igualdad se cumple para estados puros, entonces de la Ec. (4.8)

$$2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}}^2(x, p) \leq 1. \quad (4.10)$$

Por lo tanto

$$2\pi\hbar \leq \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}}^2(x, p)}.$$

El lado derecho de la igualdad está relacionado con el área en el espacio fase ocupado por el estado cuántico. Por lo que podemos ver que dicha área no puede tomar un valor mayor que $2\pi\hbar$, se da la igualdad en el caso de estados puros, ya que $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W^2(x, p) = 1/2\pi\hbar$.

Cota Superior de la Función de Wigner

Veremos que el valor absoluto de la función de Wigner no puede tomar valores arbitrariamente grandes, sino que está acotada por el valor $1/(\pi\hbar)$. Para estados puros se tiene que

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \psi^*\left(x - \frac{1}{2}\xi\right) \psi\left(x + \frac{1}{2}\xi\right),$$

que puede escribirse como el producto escalar

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \phi_1^*(\xi) \phi_2(\xi) = \frac{1}{\pi\hbar} \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle,$$

con las definiciones

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \psi\left(x - \frac{1}{2}\xi\right) \quad \text{y} \quad \phi_2(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(x + \frac{1}{2}\xi\right).$$

Si suponemos que $\psi(x)$ está normalizada entonces también lo están las $\phi_j(\xi)$, recordando que el elemento de volumen toma la forma $d(\xi/2)$, por lo que

$$\langle \phi_1 | \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1,$$

$$|W(x, p)| = \frac{1}{\pi\hbar} |\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle|^2 \leq \langle \phi_1 | \phi_1 \rangle \cdot \langle \phi_2 | \phi_2 \rangle = 1.$$

Finalmente obtenemos

$$|W(x, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}.$$

Por lo que la función de Wigner de un estado puro y normalizable no puede tener valores mayores a $1/(\pi\hbar)$. Como consecuencia tenemos que la función de Wigner no puede ser de la forma $W(x, p) = \delta(x - x_0)\delta(p - p_0)$ que sería posible clásicamente.

La función de Wigner puede tomar valores negativos.

De la regla de producto de las trazas, Ec.(4.8). Si encontramos dos operadores $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ tales

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_1 \hat{\rho}_2) = 0,$$

se cumple entonces

$$2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_1}(x, p) W_{\hat{\rho}_2}(x, p) = 0,$$

por lo tanto como estamos integrando sobre todo el espacio, la función de Wigner debe tomar valores tanto positivos como negativos. Sin embargo pueden existir funciones de Wigner que son positivas en todo el espacio fase.

4.3. Evolución Temporal de la Función de Wigner

En esta sección se busca obtener una expresión para la evolución temporal de la función de Wigner, esto pensando en una partícula que está inmersa en un potencial $U(x)$

4.3.1. La Ecuación de von Neumann en el Espacio Fase

Partiendo de la ecuación de evolución para el operador densidad (ecuación de von Neumann). La cual es válida para estados sin dispersión

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}],$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = -\frac{i}{\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| [\hat{H}, \hat{\rho}] \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

multiplicando por $(2\pi\hbar)^{-1} \exp(-ip\xi/\hbar)$ e integrando en todo el espacio la variable ξ notamos que del lado izquierdo tenemos la parcial con respecto al tiempo de la función de Wigner, entonces

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\exp(-\frac{i}{\hbar}p\xi)}{2\pi\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \left[\frac{\hat{p}^2}{2M} + U(x) \right] \hat{\rho} - \hat{\rho} \left[\frac{\hat{p}^2}{2M} + U(x) \right] \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

donde hemos utilizado que el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}).$$

Podemos entonces llegar a que la evolución temporal de la función de Wigner depende de dos términos, uno asociado a la energía cinética y el otro a la potencial. Definidos tales que

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{T} + \mathcal{U},$$

con la cantidad

$$\mathcal{T} \equiv -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2M} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\exp(-\frac{i}{\hbar}p\xi)}{2\pi\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{p}^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{p}^2 \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

el término de energía cinética y

$$\mathcal{U} \equiv -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{\exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right)}{2\pi\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| U(x) \hat{\rho} - \hat{\rho} U(x) \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

el término de energía potencial.

En el Apéndice A estos términos son evaluados, quedando en términos de derivadas de la función de Wigner de la siguiente forma

$$\mathcal{T} = -\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} W(x, p; t), \quad (4.11)$$

y

$$\mathcal{U} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U(x)}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} W(x, p; t). \quad (4.12)$$

Se hace notar que el término de la energía cinética sólo depende de la primer derivada con respecto a la posición de la función de Wigner. Sin embargo el término de energía potencial depende de múltiples derivadas del potencial y la función de Wigner con respecto a la posición y el momento respectivamente. Este hecho dificulta, dependiendo el potencial, la solución de la ecuación diferencial para la función de Wigner dada la complejidad de este término.

4.3.2. La Ecuación de Liouville Cuántica

Con la evaluación de los términos de energía cinética y potencial, podemos finalmente llegar a la ecuación diferencial que determina la evolución de la función de Wigner en el espacio fase, la cual queda como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial p} \right) W(x, p; t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U(x)}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} W(x, p; t) \quad (4.13)$$

Si tomamos el límite clásico. Cuando $\hbar = 0$ vemos que la función de Wigner se expresa en una forma más abreviada

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial p} \right) W(x, p; t) = 0$$

Que es la expresión que se obtiene en la mecánica estadística. Esto hace que nos preguntemos si en el límite cuando $\hbar = 0$ la mecánica cuántica está regida por la mecánica clásica.

Sabemos que la distribución de Wigner puede tomar valores negativos a diferencia de las distribuciones de la mecánica clásica lo cual nos hace sospechar que la función

de Wigner puede no ser el equivalente a la función de distribución de un sistema mecánico clásico.

4.4. La Función de Wigner Determinada por el Espacio Fase

La forma en que se calcula la distribución de Wigner, tal como está escrita en la Ec. (4.1) y Ec. (4.2) involucra el conocer la eigenfunción o el operador densidad en el cual se encuentra el sistema. Es decir, que para calcular la función de Wigner, primero tenemos que resolver la ecuación de Schrödinger o la ecuación de Von Neumann y evaluar la integral de la Ec. (4.1). Con la Ec. (4.13) esto ya no es necesario, solo tenemos que resolver la ecuación diferencial parcial para obtener la distribución. Esta ecuación puede ser sustituida por dos ecuaciones acopladas en el espacio fase que expresa en forma más general la evolución de la función de Wigner. Estas ecuaciones las satisfacen las llamadas funciones de Moyal.

4.4.1. Definición de la Función de Moyal

Para definir las funciones de Moyal tenemos que hacer uso de la extensión temporal de la función de Wigner. La cual es expresada de la forma

$$W(x, p; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho}(t) \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle.$$

Donde recordamos que

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar}$$

Por lo tanto

$$W(x, p; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| e^{-i\hat{H}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{i\hat{H}t/\hbar} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle.$$

Utilizando que la base de los eigenestados del Hamiltoniano es completa

$$\int \sum dE |E\rangle \langle E| = 1$$

donde la suma va sobre los estados discretos de la energía y la integral sobre los continuos. Los estados $|E\rangle$ cumplen con la ecuación de eigenvalores del operador Hamiltoniano expresada

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle \quad (4.14)$$

Por lo tanto podemos ver que la función de Wigner es

$$W(x, p; t) = \int \sum dE' \int \sum dE'' e^{-i(E''-E')t/\hbar} \langle E'' | \hat{\rho}(0) | E' \rangle W_{|E''\rangle\langle E'|}(x, p), \quad (4.15)$$

con la función de Moyal definida como

$$W_{|E''\rangle\langle E'|}(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| E'' \right\rangle \left\langle E' \left| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \right. \quad (4.16)$$

Vemos que esta definición es más extensa que la de la función de Wigner. Si el operador densidad es $\hat{\rho} = |E\rangle\langle E|$ tenemos que la función de Moyal $W_{|E\rangle\langle E|}(x, p) = W_{|E\rangle}(x, p)$ coincide con la función de Wigner. También notamos que esta función de Moyal es independiente del tiempo lo cual simplifica la resolución de las ecuaciones diferenciales.

4.4.2. Ecuaciones del Espacio Fase para las Funciones de Moyal

Para calcular la función de Wigner sin pasar por la ecuación de Schrödinger tenemos que encontrar las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones de Moyal. Si partimos del anticonmutador.

$$\frac{1}{2} \left\{ |E''\rangle\langle E'|, \hat{H} \right\} \equiv \frac{1}{2} \left(|E''\rangle\langle E'| \hat{H} + \hat{H} |E''\rangle\langle E'| \right) = \frac{E'' + E'}{2} |E''\rangle\langle E'|$$

y del conmutador

$$\frac{1}{2} \left[|E''\rangle\langle E'|, \hat{H} \right] \equiv \frac{1}{2} \left(|E''\rangle\langle E'| \hat{H} - \hat{H} |E''\rangle\langle E'| \right) = \frac{E' - E''}{2} |E''\rangle\langle E'|$$

entre el Hamiltoniano \hat{H} y el operador $|E''\rangle\langle E'|$.

Multiplicando ambas ecuaciones por $(2\pi\hbar)^{-1} e^{-ip\xi/\hbar} \langle x + \frac{1}{2}\xi |$ por la izquierda y por $|x - \frac{1}{2}\xi\rangle$ por la derecha e integrando sobre ξ llegamos a los resultados

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \frac{1}{2} \left\{ |E''\rangle\langle E'|, \hat{H} \right\} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = \frac{E'' + E'}{2} W_{|E''\rangle\langle E'|},$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \frac{i}{\hbar} [|E''\rangle \langle E'|, \hat{H}] \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = \frac{i}{\hbar} (E' - E'') W_{|E''\rangle \langle E'|}.$$

Si pensamos que el Hamiltoniano se expresa como la energía cinética más la energía potencial, es decir

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + U(\hat{x})$$

podemos llegar a las siguientes expresiones. La cual queda demostrada con el desarrollo expuesto en el Apéndice A.

$$\left[\frac{p^2}{2M} + U - \frac{\hbar^2}{8M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l)!} \frac{d^{2l}U}{dx^{2l}} \frac{\partial^{2l}}{\partial p^{2l}} \right] W_{|E''\rangle \langle E'|} = \frac{E'' + E'}{2} W_{|E''\rangle \langle E'|} \quad (4.17)$$

y

$$\left[\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU}{dx} \frac{\partial}{\partial p} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} \right] W_{|E''\rangle \langle E'|} = \frac{i}{\hbar} (E' - E'') W_{|E''\rangle \langle E'|} \quad (4.18)$$

Estas ecuaciones establecen la dependencia de la función de Moyal de la posición x y del momento p , haciendo notar que no dependen del tiempo, lo cual es una gran ayuda. También podemos observar que la primera ecuación utiliza las derivadas pares del potencial y la segunda ecuación las derivadas impares y que son de orden infinito. Uno podría pensar que como las ecuaciones dependen de potencias de la constante de Planck, se podría despreciar términos de orden grande en ella. Sin embargo este procedimiento conduce a resultados incorrectos para las funciones de Moyal.

4.5. Ecuaciones del Espacio Fase para Eigenestados de la Energía

Si tenemos que el estado del sistema es un eigenestado de la energía $|E\rangle$, entonces $E'' = E' = E$ y las ecuaciones para la función de Moyal se reducen a

$$\left[\frac{p^2}{2M} + U - \frac{\hbar^2}{8M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l)!} \frac{d^{2l}U}{dx^{2l}} \frac{\partial^{2l}}{\partial p^{2l}} \right] W_{|E\rangle} = E W_{|E\rangle} \quad (4.19)$$

y

$$\left[\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU}{dx} \frac{\partial}{\partial p} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} \right] W_{|E\rangle} = 0 \quad (4.20)$$

Vemos que la primer ecuación es una ecuación de eigenvalores para la función de Moyal. Para recalcar este hecho veremos el ejemplo de un oscilador armónico más adelante. En la siguiente sección nos concentraremos en como afecta que estas ecuaciones diferenciales dependan de las potencias de \hbar .

4.5.1. Expansión en Potencias de la Constante de Planck.

Podemos notar con algunos ejemplos, como el del oscilador armónico y otros potenciales cuadráticos en la posición y el momento, que la función de Wigner tiene un máximo a lo largo de la trayectoria clásica

$$E_{qm} = \frac{p_{qm}^2}{2M} + U(x), \quad (4.21)$$

donde la energía E_{qm} está determinada por la ecuación de Schrödinger. Es más, el dominio en el espacio fase se aleja de la órbita clásica mediante oscilaciones donde la amplitud decae para asegurar la normalización. Por lo cual nos ocuparemos de este fenómeno mediante el estudio de las ecuaciones para los eigenestados Ec.(4.19), Ec.(4.20) y veremos su comportamiento en términos de las potencias de la constante de Planck.

Límite Clásico.

Si tomamos que $\hbar = 0$. Las ecuaciones de evolución para la función de Wigner son

$$\begin{aligned} \left(\frac{p^2}{2M} + U(x) - E \right) W_{|E\rangle}(x, p) &= 0, \\ \left(\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{dU}{dx} \frac{\partial}{\partial p} \right) W_{|E\rangle}(x, p) &= 0. \end{aligned}$$

Una solución a la primera ecuación es

$$W_{|E\rangle}(x, p) = \delta \left(\frac{p^2}{2M} + U(x) - E \right)$$

esta función es una delta a lo largo de la solución clásica con energía E . Hacemos notar que en esta ecuación la E no tiene restricción, como en el caso clásico. Es directo probar que satisface también la segunda ecuación.

Límite Semiclásico.

Cuando tomamos potencias mayores de \hbar en la expansión de las ecuaciones para los eigenvalores, vemos que la función delta es suavizada y se convierte en una función de Airy.

Para ver esto convenientemente, escribimos la Ec. (4.19) reemplazando $E \rightarrow E_{qm}$, esto es

$$\left(-\frac{p_{qm}^2(x) - p^2}{2M} - \frac{\hbar^2}{8M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{8} \frac{d^2U}{dx^2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\hbar^4}{384} \frac{d^4U}{dx^4} \frac{\partial^4}{\partial p^4} + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^{2l}}{2l!} \frac{d^{2l}U}{dx^{2l}} \frac{\partial^{2l}}{\partial p^{2l}} \right) W_{|E\rangle}(x, p) = 0.$$

Si suponemos que estamos cerca de la trayectoria clásica podemos aproximar la diferencia de los cuadrados como sigue

$$p_{qm}^2 - p^2 = (p_{qm} - p)(p_{qm} + p) \simeq 2p_{qm}(p_{qm} - p).$$

Aquí la dependencia de p es lineal. Considerando una posición x fija se puede desprestigiar la segunda derivada de la función de Wigner con respecto a x , y se obtiene la ecuación diferencial de orden infinito

$$\left(-\alpha(p_{qm} - p) + \hbar^2\beta \frac{d^2}{dp^2} + \hbar^4\gamma \frac{d^4}{dp^4} + \dots \right) W_{|E_{qm}\rangle}(x, p) = 0, \quad (4.22)$$

con las definiciones.

$$\alpha = -\frac{p_{qm}}{M},$$

$$\beta = -\frac{1}{8} \frac{d^2V}{dx^2},$$

$$\gamma = \frac{1}{384} \frac{d^4V}{dx^4}.$$

4.5.2. Ecuación Diferencial Modelo.

Hemos visto en la sección anterior que la evolución de la función de Wigner esta dada por términos de las potencias de \hbar . Esto implica algunas sutilezas que veremos a continuación por lo que tomaremos la siguiente ecuación como modelo.

$$\left(-y + \varepsilon^2 \frac{d^2}{dy^2} + \varepsilon^4 \frac{d^4}{dy^4} \right) W(y) = 0 \quad (4.23)$$

vemos que en esta ecuación la ε juega el papel de la \hbar . Por lo que veremos como es el comportamiento de $W(y; \varepsilon)$ cuando ε se acerca a cero.

Solución por medio de la Transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier de la función de Wigner. Se introduce

$$\widetilde{W}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{iky} W(y),$$

y la relación inversa es

$$W(y) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky} \widetilde{W}(k). \quad (4.24)$$

Para que esta transformada exista la función $W(y)$ debe decaer lo suficientemente rápido. Sustituyendo la Ec. (4.24) en la Ec. (4.23) llegamos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk [y + \varepsilon^2 k^2 - \varepsilon^4 k^4] e^{-iky} \widetilde{W}(k) = 0. \quad (4.25)$$

Además usando la relación

$$y e^{-iky} = i \frac{d}{dk} e^{-iky},$$

en el primer término de la expresión anterior e integrando por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk y e^{-iky} \widetilde{W}(k) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\frac{d}{dk} e^{-iky} \right) \widetilde{W}(k) \\ &= i \left\{ e^{-iky} \widetilde{W}(k) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky} \frac{d\widetilde{W}(k)}{dk} \right\}. \end{aligned}$$

Si existe la transformada de Fourier entonces el término evaluado en $\pm\infty$ debe ser cero. Esto implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk y e^{-iky} \widetilde{W}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky} \frac{1}{i} \frac{d\widetilde{W}(k)}{dk}.$$

Por lo que la Ec. (4.25) se escribe como sigue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{1}{i} \frac{d\widetilde{W}(k)}{dk} + (\varepsilon^2 k^2 - \varepsilon^4 k^4) \widetilde{W}(k) \right] = 0,$$

que es equivalente a resolver la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{d\widetilde{W}(k)}{dk} = -i (\varepsilon^2 k^2 - \varepsilon^4 k^4) \widetilde{W}(k).$$

La cual podemos solucionar inmediatamente

$$\widetilde{W}(k) = \exp \left[-i \left(\frac{\varepsilon^2}{3} k^3 - \frac{\varepsilon^4}{5} k^5 \right) \right],$$

con la condición que $\widetilde{W}(k=0) = 1$.

Sustituyendo este resultado en la Ec. (4.24) tenemos

$$W_4 \equiv W(y; \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[-i \left(\frac{\varepsilon^2}{3} k^3 - \frac{\varepsilon^4}{5} k^5 + yk \right) \right], \quad (4.26)$$

expresión que toma en consideración potencias hasta de cuarto orden en el parámetro ε , por ello el subíndice 4.

Podemos resolver este tipo de ecuaciones que dependen de las potencias de ε en diferentes casos. Por ejemplo si $\varepsilon = 0$

$$W_0 \equiv W(y; \varepsilon = 0) = \delta(y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-iky}$$

que es la solución que satisface la Ec. (4.23) cuando $\varepsilon = 0$.

Cuando tomamos en cuenta hasta orden cuadrático en ε ,

$$W_2 \equiv W(y; \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left[-i \left(\frac{\varepsilon^2}{3} k^3 + yk \right) \right],$$

cambiando de variable $\varepsilon^2 k^3 \equiv \xi^2$, esta ecuación es entonces

$$W(y) = \varepsilon^{-2/3} \text{Ai}(\varepsilon^{-2/3} y) \quad (4.27)$$

que es la función de Airy que definimos

$$\text{Ai}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp \left[i \left(\frac{1}{3} \xi^3 + y\xi \right) \right]. \quad (4.28)$$

Esta función tiene como propiedad que para y positiva decae exponencialmente y para y negativa presenta oscilaciones que decaen lentamente. Además exhibe un máximo cerca de $y = 0$, donde la segunda derivada se hace cero. Esto se puede observar de la ecuación diferencial de la función de Airy

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - y \right) \text{Ai}(y) = 0.$$

Si integramos la función de Airy en todo el espacio nos encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Ai}(y) = 1.$$

Vemos entonces que una propiedad importante de este tipo de ecuaciones es que el comportamiento es bastante distinto a medida que tomamos en consideración potencias de orden superior en ε . En nuestro caso pasamos de una función delta centrada en el origen a una función de Airy que tiene un máximo alrededor del origen. Sin embargo cabe señalar que se cumple la condición que la función W_2 tiende a la delta en el límite cuando ε tiende a cero.

4.6. El Oscilador Armónico.

En varios libros de mecánica cuántica se dice que el oscilador armónico es un sistema clásico. Dado que la evolución de la función de Wigner para un eigenestado del oscilador está dada por las Ecs. (4.19) y (4.20). Estas ecuaciones en este caso se reducen a la ecuación de Liouville clásica. Sin embargo como la energía del oscilador depende de la constante de Planck \hbar , nos indica que es un objeto cuántico.

4.6.1. La Función de Wigner como una función de onda.

Resolveremos entonces las Ecs. (4.19) y (4.20) para un eigenestado del oscilador armónico de energía E . En este caso nuestro potencial es

$$U(x) = \frac{1}{2}M\Omega^2x^2$$

las Ecs. (4.19) y (4.20) se expresan como

$$\left[\frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2x^2 - \frac{\hbar^2}{8M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2 M \Omega^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] W_{|E\rangle}(x, p) = E W_{|E\rangle}(x, p) \quad (4.29)$$

y

$$\left[\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} - M\Omega^2 x \frac{\partial}{\partial p} \right] W_{|E\rangle}(x, p) = 0 \quad (4.30)$$

Definimos la cantidad $\kappa \equiv (M\Omega/\hbar)^{1/2}$ para trabajar en unidades adimensionales la “posición” $\xi \equiv \kappa x$, el “momento” $\zeta \equiv p/(\hbar\kappa)$ y la “energía” $\eta \equiv E/(\hbar\Omega)$. Entonces las dos ecuaciones anteriores se escriben

$$\frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] W_{|\eta\rangle}(\xi, \zeta) + [2\eta - (\zeta^2 + \xi^2)] W_{|\eta\rangle}(\xi, \zeta) = 0, \quad (4.31)$$

y

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) W_{|\eta\rangle}(\xi, \zeta) = 0. \quad (4.32)$$

La primer ecuación es análoga a la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico en dos dimensiones. Por lo tanto podemos poner su solución en términos de los polinomios de Hermite para cada una de las variables. La segunda ecuación es un poco más difícil. Para esta ecuación tomaremos el ansatz de que la función de Wigner solamente depende de la “energía”, ésto es

$$W_{|\eta\rangle}(\xi, \zeta) = W(y)$$

donde

$$y \equiv \xi^2 + \zeta^2. \quad (4.33)$$

De esta ecuación tenemos que

$$\frac{\partial W_{|\eta\rangle}}{\partial \xi} = \frac{dW}{dy} 2\xi \quad \text{y} \quad \frac{\partial W_{|\eta\rangle}}{\partial \zeta} = \frac{dW}{dy} 2\zeta \quad (4.34)$$

por lo que se obtiene

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) W_{|\eta\rangle}(\xi, \zeta) = (\zeta \cdot 2\xi - \xi \cdot 2\zeta) \frac{dW(y)}{dy} = 0. \quad (4.35)$$

Además tenemos que

$$\frac{\partial^2 W_{|\eta\rangle}}{\partial \xi^2} = \frac{d^2 W(y)}{dy^2} 4\xi^2 + 2 \frac{dW(y)}{dy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 W_{|\eta\rangle}}{\partial \zeta^2} = \frac{d^2 W(y)}{dy^2} 4\zeta^2 + 2 \frac{dW(y)}{dy}$$

con ayuda de estas expresiones obtenemos de la Ec. (4.31). Efectivamente la función de Wigner del oscilador armónico es una función puramente de la energía, ésto es

$$\left(y \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} + 2\eta - y \right) W(y) = 0. \quad (4.36)$$

En la siguiente sección se presenta la solución de la ecuación diferencial.

4.6.2. El Espacio Fase y la Cuantización de la Energía.

Por lo general en los problemas de la mecánica cuántica. Las condiciones a la frontera del potencial que acota la región en la cual una partícula puede estar, da lugar a la cuantización de la energía. Es decir que en un potencial acotado las energías resultantes serán discretas.

De forma análoga la función de Wigner en nuestro caso es la solución de una ecuación tipo Schrödinger, Ec. (4.31). Esto resulta en que las condiciones a la frontera en el espacio fase determinan la eigenenergías.

Existen dos soluciones independientes para la Ec. (4.36), sin embargo la condición de normalización impone una condición extra sobre estas soluciones. Que estas deben decaer cuando $y \rightarrow \infty$.

Para encontrar la solución se estudia el comportamiento en infinito y se propone $W(y) = e^{-y}G(y)$. La ecuación resultante para G se resuelve por el método de series que da lugar a la cuantización de la energía. La solución para esta ecuación sujeta a la condición de normalización está dada por la expresión

$$W(y) = \frac{(-1)^m}{\pi \hbar} e^{-y} L_m(2y),$$

con L_m el polinomio de Laguerre de orden m -ésimo. Además se tiene que satisfacer que

$$\eta = \left(m + \frac{1}{2} \right).$$

Esto significa que la cuantización de la energía proviene de la cuantización del espacio fase.

En las variables x y p la función de Wigner del m -ésimo eigenestado de la energía se escribe

$$W_{|m\rangle}(x, p) = \frac{(-1)^m}{\pi \hbar} \exp \left\{ - \left[\left(\frac{p}{\hbar \kappa} \right)^2 + (\kappa x)^2 \right] \right\} L_m \left\{ 2 \left[\left(\frac{p}{\hbar \kappa} \right)^2 + (\kappa x)^2 \right] \right\}. \quad (4.37)$$

Es importante señalar que esta función de Wigner ha sido medida experimentalmente para un ion moviéndose en el potencial de oscilador armónico de una trampa de Paul.

4.7. Evaluación de Promedios Mecánico Cuánticos.

En nuestro caso la función de Wigner representa al estado cuántico. Sin embargo para comparar con los resultados de un experimento necesitamos un operador hermitiano que este asociado a una observable.

En la física estadística clásica evaluamos promedios de funciones $A(x, p)$ con la ayuda de una distribución clásica $W_{cl}(x, p)$ mediante la fórmula

$$\langle A_{cl}(x, p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp A_{cl}(x, p) W_{cl}(x, p) \quad (4.38)$$

¿Existe un método similar en la mecánica cuántica?. La respuesta es afirmativa ya que podemos calcular promedios de la forma siguiente

$$\langle \hat{A}(\hat{x}, \hat{p}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp A(x, p) W(x, p),$$

en completa analogía con la Ec. (4.38). La $A(x, p)$ es un c -número que representa al operador $\hat{A}(\hat{x}, \hat{p})$ tal que la integración en el espacio fase con respecto a la función de Wigner da el promedio correcto del operador. Existe una forma en la cual podemos hacer esto y la explicaremos a continuación.

4.7.1. Ordenamiento de Operadores.

Obtener la representación de c -número de un operador no es trivial. Ilustraremos esto con un ejemplo.

Ejemplo

Consideremos el operador producto

$$\hat{A} \equiv \hat{x}\hat{p}$$

Una de las posibilidades para representar el c -número es poner los eigenvalores de \hat{x} , \hat{p} en vez de los operadores. Como primer caso propondremos que

$$\hat{A} \rightarrow A(x, p) \equiv xp \quad (4.39)$$

Por otro lado sabemos que la relación de conmutación que cumplen \hat{x} y \hat{p} es

$$[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$$

entonces escribimos a \hat{A} como

$$\hat{A} = \hat{p}\hat{x} - [\hat{p}, \hat{x}] = \hat{p}\hat{x} + i\hbar$$

Si sustituimos por los eigenvalores

$$\hat{A} = px + i\hbar$$

que es diferente que la expresión en la Ec. (4.39).

También podríamos poner al operador \hat{A} de la siguiente forma

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) - \frac{1}{2}[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}) + \frac{i\hbar}{2}$$

de esta forma tendremos que los operadores de posición y momento aparecen de forma simétrica. En este caso el c -número se expresa

$$A_S \equiv xp + \frac{i\hbar}{2}$$

De esta forma hemos mostrado que hay distintas formas de expresar un operador en la forma de un c -número. Tenemos entonces que encontrar la forma de expresar este c -número tal que podamos calcular los promedios mediante la función de Wigner.

Ordenamiento de Weyl-Wigner.

De la definición de la función de Wigner

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle. \quad (4.40)$$

Tenemos la representación de la matriz densidad de nuestro problema. Es decir a la matriz densidad le corresponde la función de Wigner como representación en el espacio fase. Sin embargo, podemos generalizar este criterio para cualquier operador \hat{A} al cual le hacemos corresponder una función $A(x, p)$ en el espacio fase dada por la siguiente expresión

$$A(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle. \quad (4.41)$$

Esta representación en el espacio fase permite calcular los promedios mediante la Función de Wigner $W(x, p)$.

Sabemos que nuestros promedios son calculados mediante la fórmula

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$$

utilizando la Ec. (4.8) llegamos a que

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp A(x, p) W(x, p).$$

4.7.2. Ejemplos del ordenamiento de Weyl-Wigner.

De nuevo ejemplificaremos el ordenamiento de Weyl-Wigner con el operador $\hat{A} = \hat{x}\hat{p}$ y trataremos el caso del operador $\hat{H}\hat{\rho}$

Ordenamiento simétrico.

Para el caso del operador $\hat{A} = \hat{x}\hat{p}$ tenemos que la función $A(x, p)$

$$A(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{x}\hat{p} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

lo que nos lleva a

$$A(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right) \left(x + \frac{1}{2}\xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{p} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle.$$

Utilizando una base completa en los momentos

$$A(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp\left(-\frac{i}{\hbar}p\xi\right) \left(x + \frac{1}{2}\xi\right) p' \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| p' \right\rangle \left\langle p' \left| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,\right.$$

lo que implica

$$A(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dp' \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p-p')\xi\right) \left(x + \frac{1}{2}\xi\right) p'$$

donde hemos utilizado que

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}x \cdot p\right).$$

Podemos escribir la representación del operador $\hat{x}\hat{p}$ como sigue

$$A(x, p) = \left[x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(-ip/\hbar)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dp' p' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(p-p')\xi\right)$$

donde hemos intercambiado el orden de integración. Mediante la definición de la función delta tenemos

$$A(x, p) = xp + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} p = xp + \frac{i\hbar}{2}.$$

Por lo que en este caso el ordenamiento de Weyl-Wigner corresponde al ordenamiento simétrico. Notamos que podíamos haber escrito

$$\begin{aligned} A(x, p) &= \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) p \\ &= xp + \frac{i\hbar}{2}, \end{aligned}$$

donde reemplazamos $\hat{x} \rightarrow x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}$. En forma similar podemos encontrar $B(x, p)$ asociado a $\hat{p}\hat{x}$, el cual se obtiene

$$\begin{aligned} B(x, p) &= \left(p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) x \\ &= px - \frac{i\hbar}{2}, \end{aligned}$$

donde se interpreta que $\hat{p} \rightarrow p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}$.

La Ecuación de Schrödinger en el Espacio Fase.

Trataremos en esta sección la representación en forma de c -números de los operadores en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Esta ecuación nos dice

$$\hat{H} |E\rangle = E |E\rangle$$

multiplicado por el bra $\langle E|$ por la derecha

$$\hat{H} (|E\rangle \langle E|) = E (|E\rangle \langle E|)$$

Si desarrollamos el término de la derecha de tal forma que obtengamos la función de Wigner para el eigenestado $|E\rangle$, del lado izquierdo tendremos un término relacionado con el producto del operador Hamiltoniano y la matriz densidad.

En el caso de la representación en el espacio fase del producto de dos operadores \hat{A} y \hat{B} , tenemos

$$(AB)(x, p) = A \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) B(x, p).$$

Lo cual nos indica que en este caso si tomamos $\hat{A} = \hat{H}$ y $\hat{B} = \hat{\rho}$ entonces

$$(H\rho)(x, p) = H\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) W_{|E\rangle}(x, p).$$

Esto quiere decir que en el espacio fase la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\hat{H}\hat{\rho} = E\hat{\rho}$$

se escribe de la forma

$$H\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}, p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) W_{|E\rangle}(x, p) = EW_{|E\rangle}(x, p).$$

Para un Hamiltoniano de la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + U(\hat{x})$$

tendremos la ecuación

$$\left[\frac{1}{2M} \left(p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + U\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] W_{|E\rangle}(x, p) = EW_{|E\rangle}(x, p).$$

Si tomamos la parte real y la imaginaria tendremos las ecuaciones, recordamos que la función de Wigner es real

$$\left\{ \frac{p^2}{2M} - \frac{\hbar^2}{8M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[U\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) + U\left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] \right\} W_{|E\rangle}(x, p) = EW_{|E\rangle}(x, p)$$

y

$$\left\{ \frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \left[U\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) - U\left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) \right] \right\} W_{|E\rangle}(x, p) = 0.$$

Al realizar la expansión en series de potencias del potencial llegamos a las Ecs. (4.19) y (4.20). La primera ecuación juega el rol de la ecuación de Schrödinger y la segunda la podemos identificar con la ecuación de Liouville.

4.8. Otras Distribuciones

Así como la función de Wigner nos permiten la obtención de promedios para operadores en la mecánica cuántica; existen otras distribuciones que permiten esto como las distribución de Husimi y Glauber. Cada una de ellas con propiedades distintas, que engloban ventajas y desventajas para la obtención de resultados. Estas

otras distribuciones favorecen esquemas de ordenamiento diferentes al propuesto por Weyl. En el caso de la función Q se tiene un ordenamiento antinormal y mientras que la función P implica un ordenamiento normal.

A continuación veremos brevemente las definiciones y propiedades de la distribución de Husimi o función Q , ya que será utilizada en la parte de las aplicaciones en este trabajo de tesis.

4.9. La Función de Husimi.

De la misma forma que la función de Wigner puede ser utilizada como una función de distribución de un sistema cuántico. Existen otras distribuciones que también pueden ser utilizadas para el mismo propósito. En esta sección abordaremos la función de distribución de Husimi [20]. La cual está definida de la siguiente manera.

$$Q_{\hat{\rho}} = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \quad (4.42)$$

donde $\hat{\rho}$ es la matriz densidad de nuestro problema y $|\alpha\rangle$ es un estado coherente del oscilador armónico. Podemos hacer un mapeo entre el espacio complejo donde vive el parámetro α al espacio fase. Mediante la identificación de la variable x como la parte real de α y la variable p como la parte imaginaria, es decir

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip) \quad (4.43)$$

El cálculo de la función de Husimi o función Q es en general mucho más sencillo que el cálculo de la función de Wigner ya que no hay necesidad de integrar. Sin embargo en muchas ocasiones se tiene que hacer uso de bases completas de kets, las cuales pueden ser de parámetros discretos o continuos, lo cual implicaría una suma o integral, respectivamente. Por lo cual la dificultad para evaluar la función Q puede incrementarse en forma considerable.

Una de las desventajas que tiene esta distribución con respecto a la de Wigner es que la función Q no permite la obtención de las distribuciones marginales en el espacio fase mediante la integración sobre la variable conjugada respectiva. No obstante la conveniencia de esta función está en la obtención de valores esperados de operadores que pueden expresarse en términos de estados coherentes.

4.9.1. Propiedades de la Función Q .

Una de las propiedades que más distinguen la función Q es que ésta siempre toma valores positivos como veremos a continuación.

Podemos definir la matriz densidad en la base $\{|i\rangle\}$ como

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |i\rangle \langle i| \quad (4.44)$$

donde P_i es la probabilidad de encontrar nuestro sistema en el estado $|i\rangle$, por lo que es una cantidad positiva definida. Se sigue que la función Q se escribe

$$Q = \frac{1}{\pi} \sum_i P_i \langle \alpha | i \rangle \langle i | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} \sum_i P_i |\langle \alpha | i \rangle|^2 \quad (4.45)$$

que siempre es positivo y dado que $|\langle \alpha | i \rangle|^2 \leq 1$ se sigue que $Q \leq 1/\pi$. Hacemos énfasis que no podemos abordar con esta función el estudio de la interferencia como aquel que puede realizarse con la función de Wigner, donde los valores negativos de la distribución nos indicaban la interferencia entre estados. De la propiedad de la matriz densidad $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$ se puede demostrar que

$$\int d^2\alpha Q(\alpha) = 1 \quad (4.46)$$

donde el elemento $d^2\alpha = d(\text{Re}(\alpha))d(\text{Im}(\alpha))$. Abordaremos a continuación la forma en que se calculan los valores esperados mediante la función de Husimi para operadores en el ordenamiento antinormal. Supongamos que queremos obtener los valores esperados del operador antinormal $\hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n}$, esto es por la propiedad cíclica de las trazas igual

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n} \rangle &= \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}^m \hat{a}^{\dagger n}) = \text{Tr}(\hat{a}^{\dagger n} \hat{\rho} \hat{a}^m) \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha | \hat{a}^{\dagger n} \hat{\rho} \hat{a}^m | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle \alpha^{*n} \alpha^m = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha Q(\alpha) \alpha^{*n} \alpha^m \end{aligned} \quad (4.47)$$

Este resultado puede utilizarse para encontrar el valor esperado de cualquier operador que sea función de los operadores de creación y aniquilación \hat{a} y \hat{a}^\dagger .

Ambas distribuciones de Wigner y Husimi serán empleadas posteriormente para obtener un análisis de matrices densidad asociadas a un átomo dentro de una cavidad. Con las cuales podremos determinar fenómenos como la interferencia o la localización.

Capítulo 5

Interacción de un Átomo y Radiación Electromagnética

En el Capítulo 2 hemos visto la necesidad del campo vacío y algunas manifestaciones experimentales de este campo. En este Capítulo haremos un tratamiento no relativista completamente cuántico del problema. En este tratamiento comenzaremos en la representación de Heisenberg con la cual escribiremos las ecuaciones de movimiento de un sistema que se compone de un átomo dentro de un campo electromagnético.

5.1. La Función Hamiltoniana.

El propósito de esta sección es determinar el Hamiltoniano clásico del problema de un átomo en interacción con un campo electromagnético, lo cual después utilizaremos para comparar con la contraparte cuántica.

La función Lagrangiana que describe el movimiento de una partícula de masa m , carga e inmersa dentro de un campo electromagnético con potenciales ϕ y \mathbf{A} es

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\phi + \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.1)$$

Si aplicamos las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

tendremos que la ecuación de movimiento queda

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.2)$$

con $\mathbf{E} = -\nabla\phi - c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$. De la definición de la función de Hamilton

$$H = \sum_k \dot{p}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

obtenemos que el Hamiltoniano que describe al sistema está dado por

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi. \quad (5.3)$$

Notamos que el Hamiltoniano es función de las coordenadas q_k y de los momentos p_k . La evolución de estas variables es determinada por las ecuaciones de Hamilton $\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k$ y $\dot{p}_k = -\partial H / \partial q_k$. Por lo que para el Hamiltoniano de la Ec. (5.3),

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (5.4)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}] - e\nabla\phi \quad (5.5)$$

por lo que

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] = -\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\nabla\phi + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde hemos utilizado que $d\mathbf{A}/dt = \partial\mathbf{A}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$.

El teorema de Helmholtz nos dice que un campo vectorial está unívocamente determinado si se conocen su divergencia y el rotacional. Sabemos de las ecuaciones de Maxwell que el rotacional $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ pero no tenemos una ecuación que fije la divergencia de \mathbf{A} . De este modo tenemos la libertad de elegir la divergencia dependiendo del problema a resolver.

Si sumamos al potencial \mathbf{A} el gradiente de una función escalar χ las ecuaciones de Maxwell se siguen satisfaciendo. Esta función arbitraria χ define lo que se llama una norma y a la transformación del potencial $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$ se le llama transformación de norma. Los campos eléctrico y magnético son los mismos independientemente de la norma que se elija, lo cual implica que hay una simetría llamada simetría de norma. En esta formulación fijaremos la divergencia de \mathbf{A} tal que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, la llamada norma de Coulomb.

El momento canónico $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}/c$ es el momento cinético $m\mathbf{v}$ más el momento $e\mathbf{A}/c$. En el caso de que $\phi = 0$ la coordenada \mathbf{x} es cíclica por lo que el momento canónico \mathbf{p} es una cantidad conservada, no $m\mathbf{v}$. En efecto $m\mathbf{v}$ cambia a $m\mathbf{v} - e\mathbf{A}/c$ y de esta forma se conserva \mathbf{p} . Además la energía cinética permanece siendo descrita por $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$ la cual se escribe $(\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2/2m$ en términos del momento canónico. El papel principal del Hamiltoniano en la mecánica cuántica se manifiesta en la ecuación de Schrödinger $i\hbar\partial\psi/\partial t = H\psi$, cuando este Hamiltoniano está cuantizado. También se necesitan tomar en cuenta las variables que corresponden al campo electromagnético en el Hamiltoniano total.

Sin embargo es conocido que el Hamiltoniano clásico para un sistema de una partícula cargada y el campo electromagnético es [21]

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \quad (5.7)$$

El teorema de Helmholtz también establece que cualquier vector \mathbf{E} puede ser dividido en una parte longitudinal y otra transversal $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\parallel} + \mathbf{E}^{\perp}$ que cumplen que $\nabla \times \mathbf{E}^{\parallel} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E}^{\perp} = 0$. En la norma de Coulomb se tiene que $\mathbf{E}^{\parallel} = -\nabla\phi$ y $\mathbf{E}^{\perp} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$, dado que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Por lo que

$$\int d^3r \mathbf{E}^2 = \int d^3r (\mathbf{E}^{\parallel 2} + \mathbf{E}^{\perp 2}) = \int d^3r \mathbf{E}^{\perp 2} + \int d^3r (\nabla\phi)^2, \quad (5.8)$$

puesto que $\int d^3r \mathbf{E}^{\parallel} \cdot \mathbf{E}^{\perp} = 0$. Utilizando el resultado del cálculo vectorial

$$\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = \nabla f \cdot \mathbf{v} + f\nabla \cdot \mathbf{v},$$

e identificando $f = \phi$ y $\mathbf{v} = \nabla\phi$ se tiene que

$$\int d^3r (\nabla\phi)^2 = \int d^3r \nabla \cdot (\phi\nabla\phi) - \int d^3r \phi \nabla^2\phi = 4\pi \int d^3r \rho\phi, \quad (5.9)$$

porque $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ y dado que el potencial se va a cero en infinito. Para un sistema de N cargas puntuales,

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left(\mathbf{p}_i - \frac{e}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 + \frac{1}{2} \int d^3r \rho\phi + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2), \quad (5.10)$$

donde \mathbf{A}_i denota el potencial vectorial en la posición \mathbf{r}_i de la partícula i -ésima. La densidad de carga está determinada por la expresión

$$\rho = \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (5.11)$$

De tal manera que el potencial escalar

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3r' \rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.12)$$

en la norma de Coulomb está determinado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \\ &= \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde se descarta la interacción de una carga consigo misma.

Entonces la función Hamiltoniana queda

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m_i} \left(\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c} \mathbf{A}_i \right)^2 + \sum_{i>j} \frac{e_i e_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2). \quad (5.14)$$

Si suponemos que todas las partículas, excepto una, tienen masas muy grandes tal que podemos suponer que están fijas. Entonces el Hamiltoniano clásico puede escribirse de la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2), \quad (5.15)$$

donde m , e son la carga y masa de la partícula no fija y ϕ es el potencial creado por las $N - 1$ cargas fijas. Este es el Hamiltoniano de la Ec. (5.3) más el término debido al cuadrado de los campos transversal eléctrico y magnético. Es importante señalar que este Hamiltoniano determina la dinámica tanto de la partícula como del campo.

5.2. Aproximación Dipolar.

Sea un electrón confinado en un potencial $V(\mathbf{r}) = e\phi(\mathbf{r})$, y la distancia en la que puede moverse este electrón es pequeña comparada con la longitud de onda de un campo con el que interacciona, esto es $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$. En este caso es conveniente hacer la aproximación dipolar. En la cual la variación espacial de \mathbf{A} es ignorada. Sabemos que las ecuaciones de Maxwell en el vacío dan pie a la ecuación de onda; la solución a esta ecuación son ondas planas. En lo que estamos pensando que la longitud de onda de estas ondas planas es muy grande en comparación con la distancia que puede moverse el electrón dentro de un átomo. Por lo tanto el Hamiltoniano de la Ec. (5.15)

$$H \rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2). \quad (5.16)$$

\mathbf{A} está evaluado en una posición fija. Las ecuaciones de movimiento entonces son

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (5.17)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (5.18)$$

lo que nos da la ecuación de Newton

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) + e\mathbf{E}^{\perp}, \quad (5.19)$$

como \mathbf{A} está evaluada en un punto fijo, entonces $\mathbf{E}^\perp = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$ también está evaluado en un punto fijo. Notar que el electrón y el núcleo en un átomo forman un dipolo, sin embargo en la aproximación dipolar no existe la fuerza $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en la ecuación de movimiento.

Sabemos además que si agregamos al Lagrangiano del sistema la derivada temporal de una función $dS(q, t)/dt$, las ecuaciones de movimiento quedan invariantes. Si usamos una función $S = -(e/c)\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ estamos realizando una transformación de simetría que deja invariante al campo electromagnético. Esto define una transformación de norma fijando la divergencia del potencial vectorial $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ la norma de Coulomb. Con esta transformación tendremos que el Lagrangiano de la Ec. (5.1) cambia por

$$\begin{aligned} L' &= L - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\phi - \frac{e}{c}\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\phi + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^\perp, \end{aligned} \quad (5.20)$$

y el Hamiltoniano de la Ec. (5.16) se transforma a

$$H' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^\perp + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2), \quad (5.21)$$

este Hamiltoniano lleva a la misma ecuación de movimiento Ec. (5.19) que el Hamiltoniano de la Ec. (5.16).

5.3. Cuantización

Ahora trataremos el Hamiltoniano de una forma cuántica que nos servirá como punto de partida para determinar las energías propias de nuestro sistema, así como su evolución temporal en los modelos de átomos de dos y tres niveles en interacción con un campo electromagnético unimodal que se verán posteriormente.

La teoría mecánico-cuántica de un electrón dentro de un campo electromagnético empieza con la sustitución del Hamiltoniano clásico por un Hamiltoniano mecánico-cuántico. Reemplazamos las variables clásicas $\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{A}, \mathbf{E}^\perp$ y \mathbf{B} por operadores de la mecánica cuántica. Por lo que la descripción de un conjunto de partículas cargadas dentro de un campo electromagnético está determinada por el Hamiltoniano de la Ec. (5.14). Hacemos notar que en la norma de Coulomb se necesita cuantizar solo el campo transversal ya que el campo longitudinal aparece en forma del potencial escalar, en el segundo término de la Ec. (5.14).

Por lo que si cuantizamos el Hamiltoniano de la Ec. (5.16) para átomos de un solo electrón obtenemos

$$\begin{aligned}
 H = & H_A + H_F - \frac{e}{mc} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\
 & + \frac{e^2}{2mc^2} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V} \right) \left(\frac{1}{\omega_k \omega_{k'}} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \\
 & \times \left[a_{\mathbf{k}'\lambda'} + a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'}, \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

donde $H_A = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$, describe el átomo con un electrón, además

$$H_F = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k \left(a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \tag{5.23}$$

es el Hamiltoniano del campo eléctrico transversal, con $a_{\mathbf{k}\lambda}$ y $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger$ definidos los operadores de aniquilación y creación para un modo del campo definido por (\mathbf{k}, λ) . En la Ec. (5.22) se ha usado la expresión de la Ec. (3.29) para el potencial vectorial en la aproximación dipolar. Este Hamiltoniano describe el sistema del átomo y el campo en el espacio vacío. Sin ninguna fuente externa a excepción del átomo mismo.

5.4. Transformación del Hamiltoniano.

En esta sección se presenta la transformación de norma que conecta los Hamiltonianos del acoplamiento mínimo Ec. (5.16) con el Hamiltoniano multipolar (5.21). Esta transformación está definida por la expresión

$$U = e^{ier \cdot \mathbf{A}/\hbar c}. \tag{5.24}$$

En la representación de Schrödinger los operadores son independientes del tiempo y tenemos que el nuevo vector de estado se obtiene del viejo $|\psi\rangle = U|\phi\rangle$, tenemos entonces

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = H |\psi\rangle = HU |\phi\rangle, \tag{5.25}$$

lo que nos lleva

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle = U^\dagger HU |\phi\rangle = H' |\phi\rangle. \tag{5.26}$$

Es la ecuación de Schrödinger para el vector de estado $|\phi\rangle$. Con el Hamiltoniano H' donde

$$H' = \frac{1}{2m} U^\dagger \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 U + V(\mathbf{r}) + U^\dagger H_F U. \tag{5.27}$$

utilizando la identidad

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (5.28)$$

obtenemos

$$U^\dagger \mathbf{p} U = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (5.29)$$

y el Hamiltoniano transformado

$$H' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi} \int d^3 r [U^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{E}^\perp(\mathbf{r}) U(\mathbf{r})]^2. \quad (5.30)$$

donde el campo magnético no se ve afectado por la transformación y el último término se evalúa con ayuda de la identidad

$$[A_i(\mathbf{r}), E_j^\perp(\mathbf{r}')] = -4\pi i \hbar c \delta_{ij}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.31)$$

La δ_{ij}^\perp , la función delta transversal está definida por

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^\perp(\mathbf{r}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi r^3} \left(\delta_{ij} - \frac{3r_i r_j}{r^2}\right), \end{aligned} \quad (5.32)$$

y tiene la propiedad

$$F_i^\perp(\mathbf{r}) = \sum_j \int d^3 r' \delta_{ij}^\perp(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_j(\mathbf{r}'). \quad (5.33)$$

Esta expresión da la parte transversal de un campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Lo mismo puede ser dicho de la parte longitudinal, se define una delta longitudinal como

$$\begin{aligned} \delta_{ij}^\parallel(\mathbf{r}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k \frac{k_i k_j}{k^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi r^3} \left(\delta_{ij} - \frac{3r_i r_j}{r^2}\right), \end{aligned} \quad (5.34)$$

tal que

$$F_i^\parallel(\mathbf{r}) = \sum_j \int d^3 r' \delta_{ij}^\parallel(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_j(\mathbf{r}'). \quad (5.35)$$

El conmutador de la Ec. (5.31) y la Ec. (5.28) nos llevan a

$$U^\dagger(\mathbf{r})E_j^\perp(\mathbf{r}')U(\mathbf{r}) = E_j^\perp(\mathbf{r}') - 4\pi P_j^\perp(\mathbf{r}'), \quad (5.36)$$

donde se definió la componente transversal de la polarización asociada al electrón

$$P_j^\perp(\mathbf{r}') = \sum_i ex_i \delta_{ij}^\perp(\mathbf{r}').$$

De tal manera que el último término de (5.30) está dado por

$$\begin{aligned} \int d^3r' [U^\dagger \mathbf{E}(\mathbf{r}') U]^2 &= \int d^3r' \mathbf{E}^{\perp 2}(\mathbf{r}') - 8\pi e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^\perp(0) \\ &+ 16\pi^2 \int d^3r' \mathbf{P}^{\perp 2}(\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (5.37)$$

y entonces el Hamiltoniano después de la transformación toma la forma

$$H' = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}^\perp + \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{E}^{\perp 2} + \mathbf{B}^2) + 2\pi \int d^3r \mathbf{P}^{\perp 2}(\mathbf{r}). \quad (5.38)$$

Este Hamiltoniano es la contraparte cuántica de la Ec. (5.21), en la cual podemos ver que hay un término extra debido a la polarización. Como esta transformación da las mismas ecuaciones de movimiento es lo mismo trabajar con el Hamiltoniano de la Ec. (5.16) o el de la Ec. (5.38) recordando que dos vectores de estado $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ están relacionados como sigue: $|\psi\rangle = U|\phi\rangle$. En adelante trabajaremos con el Hamiltoniano de la Ec. (5.16)

5.5. Las Ecuaciones de Heisenberg.

Las ecuaciones de Heisenberg determinan la evolución de un operador cuántico en un cierto Hamiltoniano. Veremos a continuación que estas ecuaciones determinan una ecuación similar a las ecuaciones de movimiento clásicas para los valores promedios de nuestras variables y que sin embargo la evolución temporal de los operadores cuánticos es diferente. Esto posteriormente dará como resultado una justificación para nuestro campo del vacío.

Muchas veces la representación de Heisenberg ayuda a interpretar los resultados de una forma más física. Para un átomo dentro de un campo electromagnético podemos escribir las ecuaciones de Heisenberg para los operadores \mathbf{r} , \mathbf{p} y $a_{\mathbf{k}\lambda}$. Para los operadores de posición y momento de la Ec. (5.22) obtenemos

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, H] = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (5.39)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{p}, H] = -\nabla V(\mathbf{r}). \quad (5.40)$$

donde se utilizó la aproximación dipolar.

Por lo tanto tendremos que

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) + e\mathbf{E} \quad (5.41)$$

que es la misma ecuación de Newton que en el caso clásico para un electrón dentro del potencial $V(\mathbf{r})$ y el campo eléctrico \mathbf{E}^1

La ecuación de Heisenberg para el operador de aniquilación del campo $a_{\mathbf{k}\lambda}$ se obtiene también de la Ec. (5.22). Utilizando la Ec. (5.39) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}\lambda} &= \frac{1}{i\hbar} [a_{\mathbf{k}\lambda}, H] \\ &= -i\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} - \frac{1}{i\hbar} \frac{e}{mc} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{i\hbar} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}'\lambda'} V} \right)^{1/2} [a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'}. \end{aligned}$$

Expresión que puede escribirse en términos del potencial vectorial, recordando la Ec. (3.60)

$$\begin{aligned} \dot{a}_{\mathbf{k}\lambda} &= -i\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{i}{\hbar} \left(\frac{e}{mc} \right) \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\ &= -i\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda} + i \left(\frac{2\pi e^2}{\hbar\omega_k V} \right)^{1/2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

Esta ecuación ya ha sido resuelta en el Capítulo 3. En el capítulo anterior mostramos que el operador de campo eléctrico tiene dos contribuciones actuando sobre el átomo

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) + \mathbf{E}_R(t), \quad (5.43)$$

con el campo \mathbf{E}_0 el campo del vacío y \mathbf{E}_R el campo de reacción de radiación. Estas dos contribuciones del campo eléctrico determinan la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}} + e\mathbf{E}_0(t), \quad (5.44)$$

¹ Hemos llamado \mathbf{E} a lo que en la Ec. (5.16) era \mathbf{E}^\perp para no hacer más difícil la notación

la Ec. (3.66) es el caso especial donde $V(\mathbf{r}) = m\omega_0^2 \mathbf{r}^2/2$ de la Ec. (5.44).

Tomando el promedio sobre un estado inicial $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle|0\rangle$, donde $|\psi_A\rangle$ es el estado atómico del electrón y $|0\rangle$ es el estado vacío del campo electromagnético, obtenemos

$$m\langle\ddot{\mathbf{r}}\rangle = -\langle\nabla V(\mathbf{r})\rangle + \frac{2e^2}{3c^3}\langle\ddot{\mathbf{r}}\rangle, \quad (5.45)$$

puesto que el promedio $\langle 0|\mathbf{E}_0|0\rangle = 0$. El segundo término en la derecha de la Ec. (4.7) está asociado a la fuerza clásica de Abraham-Lorentz de retroceso que siente el electrón al emitir radiación debido al cambio en la aceleración de dicho electrón. Esta es la ecuación clásica para un electrón sin la presencia del campo externo \mathbf{E}_0 :

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{cl} = -\nabla V(\mathbf{r}_{cl}) + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}_{cl} \quad (5.46)$$

Como en general $\langle\nabla V(\mathbf{r})\rangle \neq \nabla V(\langle\mathbf{r}\rangle)$ entonces $\langle\mathbf{r}\rangle$ no sigue la trayectoria clásica. En el caso del oscilador armónico $\nabla V(\mathbf{r}) = m\omega_0^2 \mathbf{r}$ por lo tanto $\langle\nabla V(\mathbf{r})\rangle = \nabla V(\langle\mathbf{r}\rangle)$, lo que indica que $\langle\mathbf{r}\rangle$ sigue el límite clásico. Sin embargo como $\langle\mathbf{r}^2\rangle \neq \mathbf{r}_{cl}^2$ las Ecs. (5.39) y (5.40) no siguen las trayectorias clásicas².

La diferencia más notable entre la ecuación (5.44) y la ecuación clásica (5.46) es que en la ecuación clásica no existe el campo externo asociado al vacío \mathbf{E}_0 el cual cuanticamente siempre está presente. Por otro lado mostramos en el Capítulo 2 que este campo externo es necesario para la conservación de los conmutadores para todo tiempo. Sin él los operadores decaen a cero y el electrón del átomo caería hacia el núcleo justo como en la teoría clásica.

5.6. Correspondencia Clásica-Cuántica.

Así pues determinaremos formalmente que el campo de radiación en nuestra aproximación dipolar cuántica tiene la misma forma que un campo eléctrico dipolar y retardado clásico. Sin duda una manifestación de que las ecuaciones de Maxwell siguen cumpliéndose en el formalismo cuántico.

La solución formal de (5.42) está determinada por la Ec. (3.35). El primer término de la Ec. (3.61) da el campo del vacío y el segundo término da un campo de radiación dipolar:

² Además tenemos las relaciones de incertidumbre que nos evitan hablar de trayectorias. Éstas sólo pueden definirse al hablar de promedios.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_d^\perp(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} \right)^{1/2} \left[i e \left(\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V} \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \times \int_0^t dt' \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') e^{i\omega_k(t'-t)} \left. \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.} \\
 &= -\frac{2\pi e}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \int_0^t dt' \left[\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') e^{i\omega_k(t'-t)} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.},
 \end{aligned}$$

Efectuando el reemplazo al continuo, esto es $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \rightarrow \frac{V}{8\pi} \sum_\lambda \int d^3k$ se tiene que campo del dipolo puede escribirse

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_d^\perp(\mathbf{r}, t) &= -\frac{e}{4\pi^2} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_0^t dt' e^{i\omega_k(t'-t)} \\
 &\quad \times \sum_\lambda [\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t')] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} + \text{h.c.}, \\
 &= -\frac{e}{4\pi^2} \int d^3k \left[\hat{\mu} - (\hat{\mu} \cdot \hat{k}) \hat{k} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_0^t dt' \dot{r}(t') e^{i\omega_k(t'-t)} + \text{h.c.} \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

donde definimos $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mu}$ y $\mathbf{k} = k \hat{k}$ y se utilizaron las propiedades de los vectores de polarización y de propagación para realizar la suma sobre λ , esto es

$$\sum_\lambda \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(i) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}(j) = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j$$

Hay que notar que las variables que no tienen un argumento temporal explícito están evaluadas al tiempo t .

$$\begin{aligned}
 \int d^3k \hat{\mu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= \hat{\mu} \int dk k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta}, \\
 &= \hat{\mu} \int dk k^2 \left(4\pi \frac{\sin kr}{kr} \right), \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

donde escribimos el vector \hat{k} en coordenadas esféricas. Para realizar la integral hemos escogido que \mathbf{r} está en la dirección del eje z . La segunda integral a calcular es

$$\int d^3k (\hat{\mu} \cdot \hat{k}) \hat{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int dk k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta [\mu_x \hat{x} \sin^2\theta \cos^2\phi + \mu_y \hat{y} \sin^2\theta \sin^2\phi + \mu_z \hat{z} \cos^2\theta] e^{ikr \cos\theta},$$

donde hemos eliminado las contribuciones nulas en la Ec. (5.49). Efectuando la integración en ϕ , usando el resultado (5.49) y $\int_0^\pi \sin^3\theta e^{ikr \cos\theta} d\theta = \frac{4 \sin kr}{(kr)^3} - \frac{4 \cos kr}{(kr)^2}$, obtenemos

$$\int d^3k (\hat{\mu} \cdot \hat{k}) \hat{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 2\pi \int dk k^2 \left[(\mu_x \hat{x} + \mu_y \hat{y}) \left(\frac{2 \sin kr}{k^3 r^3} - \frac{2 \cos kr}{k^2 r^2} \right) + 2\mu_z \hat{z} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \frac{2 \sin kr}{k^3 r^3} + \frac{2 \cos kr}{k^2 r^2} \right) \right], \quad (5.49)$$

Sustituyendo las Ecs. (5.48) y (5.49) en (5.47) e identificando $\mu_z \hat{z} = (\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d^\perp(\mathbf{r}, t) &= -\frac{e}{\pi} \int_0^t dt' \dot{\mathbf{r}}(t') \int_0^\infty dk k^2 e^{ikc(t'-t)} \left([\hat{\mu} - (\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \frac{\sin kr}{kr} \right. \\ &\quad \left. - [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \left[\frac{\sin kr}{k^3 r^3} - \frac{\cos kr}{k^2 r^2} \right] \right) + \text{h.c.}, \\ &= -\frac{2e}{\pi} \int_0^t dt' \dot{\mathbf{r}}(t') \left(\frac{1}{r} [\hat{\mu} - (\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \int_0^\infty dk k \sin kr \cos kc(t'-t) \right. \\ &\quad \left. - [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \left[\frac{1}{r^3} \int_0^\infty dk \frac{1}{k} \sin kr \cos kc(t'-t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r^2} \int_0^\infty dk \cos kr \cos kc(t'-t) \right] \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde el último paso se escribió explícitamente el término hermitiano conjugado.

Sustituyendo las funciones seno y coseno en términos de exponenciales y recordando la definición de la delta de Dirac $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$, y la propiedad $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ tenemos los resultados siguientes:

$$\int_0^\infty dk k \sin kr \cos kc(t'-t) = -\frac{\pi}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\delta\left(t'-t + \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t'-t - \frac{r}{c}\right) \right],$$

$$\int_0^{\infty} dk \cos kr \cos kc(t-t) = \frac{\pi}{2c} \left[\delta\left(t-t+\frac{r}{c}\right) + \delta\left(t-t-\frac{r}{c}\right) \right], \quad (5.51)$$

Conservando la solución retardada al hacer la integración temporal en (5.50) obtenemos que el campo de radiación dipolar está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d^\perp(\mathbf{r}, t) = & -\frac{e}{c^2 r} [\hat{\mu} - (\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \ddot{r} \left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{e}{cr^2} [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \dot{r} \left(t - \frac{r}{c}\right) \\ & + \frac{2e}{\pi r^3} [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \int_0^t dt' \dot{r}(t') F(t'-t), \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde definimos

$$F(t'-t) \equiv \int_0^{\infty} dk \frac{1}{k} \sin kr \cos kc(t'-t). \quad (5.53)$$

El último término de la Ec. (5.52) se evalúa mediante integración por partes de

$$\int_0^t dt' \dot{r}(t') F(t'-t) = -\frac{\pi}{2} r \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\pi}{2} r(t), \quad (5.54)$$

ya que $t \geq r/c$. De tal manera que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d^\perp(\mathbf{r}, t) = & -\frac{e}{c^2 r} [\hat{\mu} - (\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \ddot{r} \left(t - \frac{r}{c}\right) \\ & - \frac{e}{cr^2} [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] \dot{r} \left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{e}{r^3} [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] r \left(t - \frac{r}{c}\right) \\ & + \frac{e}{r^3} [\hat{\mu} - 3(\hat{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}] r(t). \end{aligned} \quad (5.55)$$

El último término de esta expresión es el campo eléctrico de un dipolo y es una solución no retardada. Este resultado no es erróneo ya que estamos evaluando solo la parte transversal del campo dipolar y aún nos falta añadir la contribución longitudinal. Esta parte se obtiene de la ecuación

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.56)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{E}_R^{\parallel}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{r^3} [3(\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}] r(t). \quad (5.57)$$

Esto implica que el campo dipolar total es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_R^{\perp} + \mathbf{E}_R^{\parallel} \\ &= -\frac{e}{c^2 r} [\hat{\boldsymbol{\mu}} - (\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] \ddot{\mathbf{r}} \left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{e}{cr^2} [\hat{\boldsymbol{\mu}} - 3(\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] \dot{\mathbf{r}} \left(t - \frac{r}{c}\right) \\ &\quad - \frac{e}{r^3} [\hat{\boldsymbol{\mu}} - 3(\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}}] r \left(t - \frac{r}{c}\right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Este campo es un campo retardado, y tiene la misma forma que el campo clásico de un dipolo. Lo cual nos dice que existe una correspondencia entre el dipolo clásico y el dipolo cuántico.

Esta correspondencia se cumple para todos los momentos dipolares puesto que las ecuaciones de Maxwell tienen la misma forma en el electromagnetismo clásico y en el cuántico. Esta correspondencia se da entre los campos electromagnéticos clásicos y los operadores de campo en el esquema de Heisenberg de la QED la cual debe de cumplirse para todos los ordenes multipolares.

Una de las consecuencias de esto es que en QED los campos deben tener una energía de punto cero y fluctuaciones incluso en ausencia de fuentes. No significa que en el electromagnetismo clásico no haya campos sin fuentes sino que no existe un campo de punto cero en ausencia de fuentes.

5.7. Modelo de Dos Estados para un Átomo.

A continuación desarrollaremos el problema de la interacción del campo electromagnético con un átomo en una aproximación que llamaremos átomo de dos niveles. Este formalismo será necesario en el próximo capítulo, donde presentaremos algunas de las propiedades interesantes de dicho problema.

Las ecuaciones de Heisenberg para nuestro sistema nos dan la información acerca de la evolución temporal de los operadores de posición \mathbf{r} y momento \mathbf{p} . Sin embargo no nos da ninguna información acerca de los eigenvectores de nuestro Hamiltoniano para ello tenemos que trabajar un poco más. Para el Hamiltoniano de la Ec. (5.22) podemos escribir la parte atómica como

$$H_A = \left(\sum_i |i\rangle \langle i|\right) H_A \left(\sum_j |j\rangle \langle j|\right) \quad (5.59)$$

donde el conjunto $\{|i\rangle\}$ denota el conjunto completo de los eigenvectores de H_A . Es decir $H_A |i\rangle = E_i |i\rangle$.

Se sigue de la Ec. (5.59) que

$$\begin{aligned}
 H_A &= \sum_{i,j} E_j |i\rangle \langle j| \delta_{ij} \\
 &= \sum_i E_i |i\rangle \langle i| \\
 &= \sum_i E_i \sigma_{ii}
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

donde definimos $\sigma_{ii} = |i\rangle \langle i|$. Podemos demostrar que las relaciones de conmutación que cumplen los operadores σ son $[\sigma_{ij}, \sigma_{kl}] = \delta_{jk}\sigma_{il} - \delta_{li}\sigma_{kj}$.

Podemos notar que el conmutador $[\mathbf{r}, H_A] = i\hbar\mathbf{p}/m$. Por lo que para el operador de momento \mathbf{p} se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &= \left(\sum_i |i\rangle \langle i| \right) \mathbf{p} \left(\sum_j |j\rangle \langle j| \right) \\
 &= \frac{m}{i\hbar} \left(\sum_i |i\rangle \langle i| \right) [\mathbf{r}, H_A] \left(\sum_j |j\rangle \langle j| \right) \\
 &= \frac{m}{i\hbar} (E_j - E_i) \langle i|\mathbf{r}|j\rangle |i\rangle \langle j| \\
 &= im \sum_{i,j} \omega_{ij}(\mathbf{r})_{ij} \sigma_{ij}
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

con $\omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$, $\sigma_{ij} = |i\rangle \langle j|$ y $(\mathbf{r})_{ij} = \langle i|\mathbf{r}|j\rangle$.

Sustituyen los operadores H_A y \mathbf{p} en la expresión para el Hamiltoniano de la Ec. (5.22). Tendremos el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_i E_i \sigma_{ii} + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k \left[a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right] \\
 &\quad - \hbar \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k}\lambda} ie \left(\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V} \right)^{1/2} \omega_{ij}(\mathbf{r})_{ij} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \\
 &\quad + \frac{e^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \left(\frac{1}{\omega_k \omega_{k'}} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \left[a_{\mathbf{k}'\lambda'} + a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} \tag{5.62}
 \end{aligned}$$

Este Hamiltoniano para un partícula puede ser generalizado para el caso de N_A átomos. Donde el núcleo s -ésimo tiene la posición \mathbf{r}_s y un momento lineal \mathbf{p}_s . El estado del sistema está determinado por el vector de estado $|s, i\rangle$ con las siguientes propiedades

Estados correspondientes a diferentes átomos o diferentes energías son ortonormales

$$\langle s, i | s', j \rangle = \delta_{ij} \delta_{ss'}, \quad (5.63)$$

los estados forman una base completa, entonces satisfacen la propiedad de cerradura, esto es

$$\sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^n |s, i\rangle \langle s, i| = 1. \quad (5.64)$$

Definimos los operadores $s_{ij} = \sum_{s=1}^N |s, i\rangle \langle s, j|$, que puede mostrarse en forma inmediata que satisfacen las relaciones de conmutación $[s_{ij}, s_{kl}] = \sum_{il} \delta_{jk} - \sum_{kj} \delta_{il}$.

La parte atómica del Hamiltoniano para cada uno de los átomos tiene como eigenvector a $|s, i\rangle$, es decir

$$H_A = \sum_i E_i s_{ii} \quad (5.65)$$

donde consideramos N átomos idénticos de n niveles.

En este caso podemos escribir la suma de los \mathbf{p}_s como una suma de valores esperados de los operadores de posición \mathbf{r}_s , esto puede hacerse puesto que $[\mathbf{r}_s, H_A(s)] = i\hbar \mathbf{p}_s \delta_{ss'}/m$. Por lo que tenemos que la suma

$$\begin{aligned} \sum_s \mathbf{p}_s &= \sum_{s, s', s'', i, j} \frac{-im}{\hbar} \langle s', i | \mathbf{r}_s | s'', j \rangle \delta_{ss'} (E_j - E_i) |s', i\rangle \langle s'', j| \delta_{s', s''} \\ &= \sum_{s, i, j} \frac{-im}{\hbar} \langle s, i | \mathbf{r}_s | s, j \rangle \omega_{ij} |s, i\rangle \langle s, j| \\ &= im \sum_{i, j} (\mathbf{r})_{ij} \omega_{ij} s_{ij} \end{aligned} \quad (5.66)$$

donde $\omega_{ij} = (E_j - E_i)/\hbar$, $(\mathbf{r})_{ij} = \langle s, i | \mathbf{r} | s, j \rangle$ y $s_{ij} = \sum_s |s, i\rangle \langle s, j|$.

Por lo tanto el Hamiltoniano queda de la forma

$$\begin{aligned} H &= \sum_i E_i \sigma_{ii} - i\hbar \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{i, j} \left(\frac{2\pi}{\hbar\omega_{\mathbf{k}} V} \right)^{1/2} [a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger] \omega_{ij} (\mathbf{r})_{ij} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} s_{ij} \\ &+ N_A \frac{e^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \right)^{1/2} [a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger] \\ &\times [a_{\mathbf{k}'\lambda'} + a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Tomemos pues el caso en el que solo hay una partícula y dos estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ con energías E_1 y E_2 respectivamente. Definimos la diferencia de energías como $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0 > 0$ es decir el estado $|2\rangle$ tiene una energía mayor que el estado $|1\rangle$. Recordando la propiedad de completéz tenemos que $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 1$. Definimos además $\sigma_z = \sigma_{22} - \sigma_{11}$ de esta forma tendremos que

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1 - \sigma_z}{2} \\ \sigma_{22} &= \frac{1 + \sigma_z}{2}\end{aligned}\tag{5.68}$$

También se hace notar que los operadores σ_{21} y σ_{12} son como los operadores de ascenso y descenso respectivamente. Se puede ver que $\sigma_{21}|1\rangle = |2\rangle$, $\sigma_{12}|1\rangle = 0$ y también $\sigma_{12}|2\rangle = |1\rangle$.

Utilizando la Ec. (5.68) podremos reescribir el primer término del Hamiltoniano de la Ec. (5.62) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sum_i E_i \sigma_{ii} &= E_1 \sigma_{11} + E_2 \sigma_{22} \\ &= \frac{1}{2} E_1 (1 - \sigma_z) + \frac{1}{2} E_2 (1 + \sigma_z) \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z + \frac{1}{2} (E_1 + E_2)\end{aligned}\tag{5.69}$$

De forma similar tenemos que el tercer término del Hamiltoniano de la Ec. (5.62) tiene como propiedad que

$$\begin{aligned}ei \sum_{i,j} \omega_{ij} \sigma_{ij}(\mathbf{r})_{ij} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} &= ie (\omega_{12} \sigma_{12}(\mathbf{r})_{12} + \omega_{21} \sigma_{21}(\mathbf{r})_{21}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\ &= i\omega_{12} (\sigma_{12} - \sigma_{21})(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\ &= \omega_0 \sigma_y(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}\end{aligned}\tag{5.70}$$

aquí hemos supuesto que $e(\mathbf{r})_{12} = e(\mathbf{r})_{21} \equiv \mathbf{d}$ y definimos $\sigma_y = i(\sigma_{12} - \sigma_{21})$ este operador junto con σ_z y $\sigma_x = \sigma_{12} + \sigma_{21}$ son los generadores de un álgebra unitaria en dos dimensiones como la que generan las matrices de Pauli para espín $s = 1/2$.

Sustituyendo las Ecs. (5.69) y (5.70) en el Hamiltoniano de (5.62) llegamos a que

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \\
 & - \hbar \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left(\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V} \right)^{1/2} \omega_0 \sigma_y(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \\
 & + \frac{e^2}{2m} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sum_{\mathbf{k}'\lambda'} \left(\frac{2\pi\hbar}{V} \right) \left(\frac{1}{\omega_k \omega_{k'}} \right)^{1/2} \left[a_{\mathbf{k}\lambda} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger \right] \left[a_{\mathbf{k}'\lambda'} + a_{\mathbf{k}'\lambda'}^\dagger \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'}, \quad (5.71)
 \end{aligned}$$

en esta expresión hemos quitado los términos constantes $\sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k/2$ y $(E_1 + E_2)/2$.

Para lograr una transición de estados, los fotones del campo electromagnético deben de tener una frecuencia mayor o igual a ω_0 . Sin embargo podemos simplificar el problema si tomamos solo un campo unimodal con frecuencia $\omega_1 \geq \omega_0$ y solo una polarización en la dirección \mathbf{e}_1 . El Hamiltoniano que se obtiene es

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega_1 a^\dagger a - e \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_1 V} \right)^{1/2} \omega_0 \sigma_y(\mathbf{r})_{12} \cdot \mathbf{e}_1 \left[a + a^\dagger \right] + \frac{\pi e^2 \hbar}{mV} \frac{1}{\omega_1} \left[a + a^\dagger \right]^2 \quad (5.72)$$

Notamos que los operadores $\sigma_z/2$, σ_{21} y σ_{12} también son los generadores de un álgebra. Dado que las relaciones de conmutación son

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\sigma_z}{2}, \sigma_{21} \right] &= \sigma_{21} \\
 \left[\frac{\sigma_z}{2}, \sigma_{12} \right] &= -\sigma_{12} \\
 [\sigma_{12}, \sigma_{21}] &= -\sigma_z \quad (5.73)
 \end{aligned}$$

por lo que tenemos los operadores de ascenso $\sigma_+ = \sigma_{21}$, descenso $\sigma_- = \sigma_{12}$ y peso σ_z como en el caso del momento de espín.

5.8. Modelo de Tres Estados para un Átomo.

De una forma análoga para los dos niveles ahora tendremos tres estados $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|3\rangle$ con energías E_1 , E_2 y E_3 respectivamente. De la completéz de la base de la energía tendremos que

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 1 \quad (5.74)$$

Además definiremos los siguientes operadores en analogía a los de dos niveles

$$\begin{aligned}
 \sigma_z^{(1)} &= \sigma_{22} - \sigma_{11} \\
 \sigma_z^{(2)} &= \sigma_{33} - \sigma_{22} \\
 \sigma_z^{(3)} &= \sigma_{33} - \sigma_{11}
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

De forma que tengamos para los elementos de la diagonal

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{1 - 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_z^{(2)}}{3} \\
 \sigma_{22} &= \frac{1 + \sigma_z^{(1)} - \sigma_z^{(2)}}{3} \\
 \sigma_{33} &= \frac{1 + \sigma_z^{(1)} + 2\sigma_z^{(2)}}{2}
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Sustituyendo la Ec. (5.76) en el primer término de la Ec. (5.62) tendremos que el Hamiltoniano atómico

$$H_A = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3} + \frac{\hbar\omega_{21}}{3}\sigma_z^{(1)} + \frac{\hbar\omega_{32}}{3}\sigma_z^{(2)} + \frac{\hbar\omega_{31}}{3}\sigma_z^{(3)} \tag{5.77}$$

Con lo que podemos escribir el Hamiltoniano para tres estados de la forma

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\hbar\omega_{21}}{3}\sigma_z^{(1)} + \frac{\hbar\omega_{32}}{3}\sigma_z^{(2)} + \frac{\hbar\omega_{31}}{3}\sigma_z^{(3)} + \left(\frac{2\pi\hbar}{V}\right)^{1/2} \sum_{l=1}^3 \frac{1}{\omega_l^{1/2}} [a_l + a_l^\dagger] \\
 &\quad \times \left\{ \omega_{21}d_{12}^{(k)}\sigma_y^{(1)} + \omega_{32}d_{23}^{(k)}\sigma_y^{(2)} + \omega_{31}d_{13}^{(k)}\sigma_y^{(3)} \right\} \\
 &\quad + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2
 \end{aligned}$$

donde $d_{ij}^{(k)} = e((\mathbf{r})_{ij} \cdot \mathbf{e}_k)$ es la proyección del momento dipolar en la dirección de la polarización k . También en este caso hemos usado que $(\mathbf{r})_{12} = (\mathbf{r})_{21}$ y que solo existen tres modos en el campo electromagnético capaces de llevarnos de un nivel a otro con frecuencias ω_l con $l = 1, 2$ y 3 . En este caso en lugar de tener un álgebra formada por los operadores de ascenso, descenso y peso del momento de espín y una álgebra formada por \hat{a} y \hat{a}^\dagger como en el caso del átomo de dos niveles. Tendremos tres álgebras formadas por cada uno de los diferentes índices de l tanto en los operadores de espín como en los del campo.

Así pues hemos abordado el planteamiento del Hamiltoniano de los modelos de dos niveles para un átomo interactuando con un campo electromagnético que nos permitirán solucionar los problemas que conciernen a esta tesis.

Capítulo 6

Estados de Gato Cristalizados de Schrödinger

En este capítulo presentamos un método para definir superposiciones de estados coherentes que portan las propiedades de grupos finitos. Los cuales han sido de suma importancia, ya que muestran un comportamiento cuántico de la luz.

Los estados que portan la representación irreducible de grupos cristalinos han sido llamados estados de gato de Schrödinger cristalizados desde mediados de los años 90 [22]. Los estados par e impar introducidos en los años 70 [23] portan la representación simétrica y antisimétrica para el grupo cristalino de dos elementos C_2 .

A lo largo de este capítulo encontraremos las propiedades ópticas para los estados de gato de los grupos C_2 , C_3 y D_3 para mostrar cuales de estos estados presentan compresión y estadísticas sub-Poissonianas. Se calculan las distribuciones de Wigner y Husimi para los estados generales de gato; ya que estas distribuciones nos permiten ver el comportamiento cuántico y el fenómeno de localización de los estados. Además se estudia la evolución temporal de los estados cristalizados, bajo un Hamiltoniano de oscilador armónico, mediante los formalismos de Wigner y Husimi.

6.1. Estados de Gato de Schrödinger para Grupos Finitos

En esta sección se estudian algunas de las propiedades más importantes de las superposiciones de estados coherentes, las cuales están definidas en términos de las representaciones de los grupos cristalinos. Tomamos como ejemplo los grupos cíclicos: C_2 y C_3 y el grupo de isometrías del triángulo equilátero D_3 . Las propiedades estadísticas son estudiadas como aplicación de los formalismos de Wigner y Husimi en el espacio fase.

Estos estados, se ha estudiado pueden ser generados mediante un medio de baja disipación, como el medio de Kerr [24], el cual a partir de un estado coherente $|\alpha\rangle$ nos lleva a una superposición de estados coherentes. También existen otras formas propuestas para generar estos estados, algunas de ellas, como en el medio de Kerr, hacen uso de propiedades no lineales [25, 26]. En otros casos se generan mediante la evolución de un cierto estado inicial en una cavidad óptica [27, 28, 29]. Fenómenos cuánticos de la luz como la compresión y estadísticas sub-Poissonianas [22] pueden ser obtenidas de estas superposiciones.

Las funciones de Wigner y Husimi como hemos visto anteriormente, son distribuciones de cuasi-probabilidad que permiten un tratamiento parecido al tratamiento de la estadística clásica de un problema cuántico en vez de resolver la ecuación de Schrödinger. Además la función de Wigner puede ser utilizada para observar propiedades cuánticas como la compresión de forma gráfica además de poder obtener las distribuciones marginales mientras que la función de Husimi puede ser utilizada para ver la localización y la compresión de los estados.

6.1.1. Definición de los Estados.

Supongamos que tenemos un grupo finito de N elementos $G = \{g_i\}_{i=1}^N$ el cual actúa sobre el plano complejo

$$\alpha \xrightarrow{g_r} \alpha_{g_r}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $1 \leq r \leq N$. Esta acción puede expresarse de forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{r1} \\ a_{r2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^r & g_{12}^r \\ g_{21}^r & g_{22}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

donde $\alpha_r = a_{r1} + ia_{r2}$ con $a_{r1}, a_{r2} \in \mathbb{R}$, y la matriz \mathbf{g}_r pertenece al grupo lineal $GL(2, \mathbb{R})$. La representación irreducible de este grupo se denota con $\mathbf{T}^{(l_k)}(g)$, donde l_k denota la representación y $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ designa la clase del grupo. La representación irreducible, cuyos elementos son $T_{ij}^{(l_k)}$ y $1 \leq i, j \leq N_k$, debe de satisfacer que $\sum_{k=0}^{p-1} N_k^2 = N$.

Los estados de gato cristalizado de Schrödinger no normalizados se definen como

$$\left| \tilde{\psi}_{ij}^{(l_k)} \right\rangle = \sum_{r=1}^N T_{ij}^{(l_k)}(g_r) |\alpha_r\rangle. \quad (6.2)$$

Para obtener estados que sean independientes de la representación irreducible se toma la traza de la Ec. (6.2). Debido a que la traza es un invariante, por lo cual se llega a

$$\left| \tilde{\psi} \right\rangle = \sum_{r=1}^N \chi^{(l_k)}(g_r) |\alpha_r\rangle, \quad (6.3)$$

donde $\chi^{(l_k)}(g)$ define el carácter de la representación irreducible l_k que corresponde al elemento g de nuestro grupo. Hacemos notar que hemos simplificado la notación de nuestro estado. La Ec. (6.3) puede ser reescrita en forma más general mediante un parámetro complejo c_r , es decir

$$\left| \tilde{\psi} \right\rangle = \sum_{r=1}^N c_r |\alpha_r\rangle, \quad (6.4)$$

con $1 \leq r \leq N$. Normalizando este estado tenemos

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} |\tilde{\psi}\rangle, \quad (6.5)$$

donde la constante de normalización está definida por la relación

$$\mathcal{N}^{-2} = \sum_{r,s=1}^N c_r c_s^* E_{sr}, \quad E_{sr} = \langle \alpha_s | \alpha_r \rangle = \exp\left(\alpha_s^* \alpha_r - \frac{|\alpha_r|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2}\right) \quad (6.6)$$

Es importante señalar que para obtener la evolución temporal del estado $|\psi\rangle$ con una dinámica marcada por el oscilador armónico de frecuencia ω , es necesario actuar este estado con el operador de evolución $\hat{U} = \exp(-i(\hat{n} + 1/2)\omega t)$. Obteniendo

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{N} e^{-\frac{i\omega t}{2}} \sum_{r=1}^N c_r |\alpha_r e^{-i\omega t}\rangle$$

donde la fase $\exp(-i\omega t/2)$ se cancela cuando se realiza una medición sobre el sistema. Por esa razón podemos obtener toda la información de nuestros estados al tiempo t realizando la sustitución para cada uno de los parámetros complejos $\alpha_r \rightarrow \alpha_r e^{-i\omega t}$ en la Ec. (6.5). De esta manera si una cierta cantidad solo depende de la norma de α , entonces no depende del tiempo.

Todas las propiedades de los estados de gato cristalizados que se estudiaron son dadas a continuación. Primero calculamos las fluctuaciones de las cuadraturas para un estado general de gato

$$\sigma_x = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s=1}^N \left\{ \alpha_r \alpha_s^* + \frac{1}{2}(\alpha_r^2 + \alpha_s^{*2}) \right\} c_r c_s^* E_{sr} + \frac{1}{2} - \frac{\mathcal{N}^4}{2} \left(\sum_{r,s=1}^N \{ \alpha_r + \alpha_s^* \} c_r c_s^* E_{sr} \right)^2, \quad (6.7)$$

$$\sigma_p = \mathcal{N}^2 \sum_{r,s=1}^N \left\{ \alpha_r \alpha_s^* - \frac{1}{2}(\alpha_r^2 + \alpha_s^{*2}) \right\} c_r c_s^* E_{sr} + \frac{1}{2} + \frac{\mathcal{N}^4}{2} \left(\sum_{r,s=1}^N \{ \alpha_r - \alpha_s^* \} c_r c_s^* E_{sr} \right)^2, \quad (6.8)$$

definidas como $\sigma_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$, $\sigma_p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$, las cuales nos sirven para identificar que tan cuántico es un estado. Si estas fluctuaciones son grandes tendremos un comportamiento cuántico ya que el valor medido de las variables del espacio fase serán por lo general muy diferente al valor promedio, lo cual solo pasa en casos cuánticos. Si por el contrario las fluctuaciones son pequeñas tendremos estados muy parecidos a los clásicos donde el valor medido de ambas observables en el espacio fase coinciden con el valor promedio.

También se puede calcular la distribución del número de fotones n , la cual definiremos como el valor absoluto al cuadrado del producto escalar entre el estado de gato cristalizado y un estado del operador de número

$$P_\psi(n) = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{n!} \sum_{r,s=1}^N c_r c_s^* (\alpha_r \alpha_s^*)^n \exp\left(-\frac{|\alpha_r|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2}\right) \quad (6.9)$$

La función de Wigner dependiente del tiempo para el estado de gato cristalizado de Schrödinger es

$$\begin{aligned} W(x, p; t) = & 2\mathcal{N}^2 \sum_{r,s} c_r c_s^* \exp\left\{-\frac{|\alpha_r|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2} - \frac{\alpha_r^2 e^{-2i\omega t}}{2}\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{\alpha_s^{*2} e^{2i\omega t}}{2} - x^2 + \sqrt{2}x(\alpha_r e^{-i\omega t} + \alpha_s^* e^{i\omega t})\right\} \\ & \times \exp\left\{\frac{1}{2}(\alpha_r e^{-i\omega t} - \alpha_s^* e^{i\omega t} - \sqrt{2}ip)^2\right\}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde la función de Wigner se define como en la Ec. (4.1)

La distribución de Husimi para estos estados es

$$\begin{aligned} Q(x, p) = & \frac{\mathcal{N}^2}{\pi} \sum_{r,s=1}^N c_r c_s^* \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_r + \alpha_s^*)x + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_s^* - \alpha_r)ip\right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(x^2 + p^2) - \frac{|\alpha_r|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

la cual está definida como $Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$ con $|\alpha\rangle$ un estado coherente. También se obtuvo el segundo momento de esta distribución el cual se escribe como

$$M_2 = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle^2;$$

donde $d^2\alpha = \frac{dx dp}{2}$. Considerando $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$, con $|\psi\rangle$ dado por (6.5), el segundo momento de la distribución de Husimi,

$$\begin{aligned} M_2 \equiv & \frac{\mathcal{N}^4}{2} \sum_{r,s,r',s'=1}^N c_r c_s^* c_{r'} c_{s'}^* \exp\left\{-\frac{|\alpha_r|^2}{2} - \frac{|\alpha_s|^2}{2} - \frac{|\alpha_{r'}|^2}{2} - \frac{|\alpha_{s'}|^2}{2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\alpha_r + \alpha_{r'}) (\alpha_s^* + \alpha_{s'}^*)\right\}. \end{aligned}$$

Este momento está relacionado con la complejidad del estado y sus propiedades son similares a las de la entropía clásica, propuesta por Wehrl, sin embargo es más fácil de evaluar numéricamente [30, 31, 32].

6.1.2. Propiedades de los Grupos

Los grupos cíclicos son aquellos que tienen un solo generador y su periodo es igual al orden del grupo.

El grupo C_2 es un grupo cíclico de dos elementos. La identidad \mathbf{I} y la inversión \mathbf{E} a través del origen en el plano complejo.

Podemos construir a estos operadores una base que porta las representaciones irreducibles de C_2 mediante su tabla de caracteres [33]. Los grupos cíclicos tienen la propiedad de que cada uno de sus elementos forma una clase, por lo tanto se tiene

C_2	$\{\mathbf{I}\}$	$\{\mathbf{E}\}$
χ_0	1	1
χ_1	1	-1

También es inmediato probar que $\alpha_1 = \alpha$ y $\alpha_2 = -\alpha$ para este caso. Con lo cual obtenemos los estados coherentes normalizados par e impar

$$|\alpha_{\pm}\rangle = \mathcal{N}_{\pm} (|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) \quad (6.11)$$

los cuales también son llamados de gato cristalizado respectivamente. Las constantes de normalización están definidas como

$$\mathcal{N}_{\pm} = \frac{\exp(|\alpha|^2/2)}{2\sqrt{\Delta_{\pm}}} \quad \text{con} \quad \Delta_{\pm} = \begin{cases} \cosh(|\alpha|^2) \\ \sinh(|\alpha|^2) \end{cases}$$

Para el caso del grupo C_3 tenemos tres representaciones irreducibles que es igual al número de clases y su tabla de caracteres está dada por

C_3	$\{\mathbf{I}\}$	$\{\mathbf{R}_1\}$	$\{\mathbf{R}_2\}$
χ_0	1	1	1
χ_1	1	μ	μ^2
χ_2	1	μ^2	μ

donde $\mu = \exp(2\pi i/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Las tablas de caracteres simples satisfacen los teoremas de ortogonalidad por renglones y columnas, de tal manera que para el caso de C_3 se tiene que cumplir que $1 + \mu + \mu^2 = 0$. Tenemos que para este grupo $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \mu\alpha$ y $\alpha_3 = \mu^2\alpha$, con $\mu^2 = \mu^*$, el complejo conjugado.

Mediante las tablas de caracteres obtenemos los estados

$$|\psi_1\rangle = \mathcal{N}_1 (|\alpha\rangle + |\alpha\mu\rangle + |\alpha\mu^2\rangle)$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle &= \mathcal{N}_2 (|\alpha\rangle + \mu |\alpha\mu\rangle + \mu^2 |\alpha\mu^2\rangle) \\
 |\psi_3\rangle &= \mathcal{N}_3 (|\alpha\rangle + \mu^2 |\alpha\mu\rangle + \mu |\alpha\mu^2\rangle)
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

para cada uno de los elementos del grupo. Con las constantes de normalización definidas por las expresiones

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_1^{-2} &= 3 \left(1 + e^{(\mu^*-1)|\alpha|^2} + e^{(-1+\mu)|\alpha|^2} \right) \\
 \mathcal{N}_2^{-2} &= 3 \left\{ 1 + \mu e^{|\alpha|^2(\mu-1)} + \mu^* e^{|\alpha|^2(\mu^*-1)} \right\} \\
 \mathcal{N}_3^{-2} &= 3 \left\{ 1 + \mu^* e^{|\alpha|^2(\mu-1)} + \mu e^{|\alpha|^2(\mu^*-1)} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

La representación irreducible bidimensional del grupo D_3 está dada por las matrices

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{E}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Las cuales representan las operaciones de la identidad \mathbf{I} , una rotación de 120° \mathbf{R}_1 y una rotación de 240° \mathbf{R}_2 a través del origen y las matrices \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 y \mathbf{E}_3 que representan las inversiones a lo largo de las líneas de la Fig. (6.1) (a).

Existe otra representación irreducible del grupo D_3 que hace uso de las inversiones a lo largo de las líneas de la Fig. (6.1) (b) [33], la cual está asociada con la representación de (6.14), mediante una transformación de semejanza, sin embargo las propiedades de los estados obtenidos mediante las dos representaciones son iguales en ambos casos.

De forma similar a la descrita en el caso de los grupos C_2 y C_3 tenemos la tabla de caracteres de D_3

D_3	$\{\mathbf{I}\}$	$\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2\}$	$\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$
χ_0	1	1	1
χ_1	1	1	-1
χ_2	2	-1	0

Finalmente tenemos 3 funciones base que portan representaciones del grupo D_3 :

$$|\psi_{s,a}\rangle_{D_3} = \mathcal{N}_{s,a} (|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle + |\alpha_3\rangle \pm |\alpha_4\rangle \pm |\alpha_5\rangle \pm |\alpha_6\rangle),$$

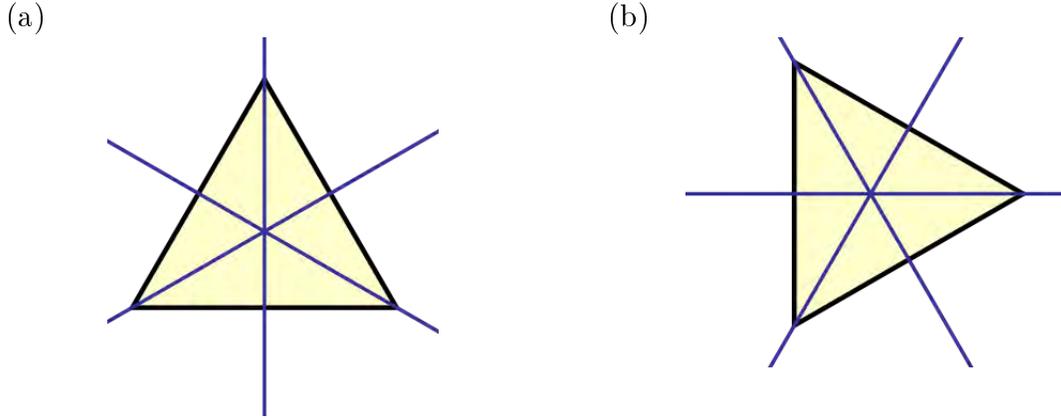


Figura 6.1. Las alturas del triángulo equilátero definen los ejes de inversión. Una inversión ante estos ejes deja invariante la forma del triángulo por lo que constituye una simetría. (a) tomando al eje vertical y como eje de simetría, (b) tomando al eje horizontal x , como eje de simetría.

$$|\psi_{tr}\rangle_{D_3} = \mathcal{N}_{tr} (2|\alpha_1\rangle - |\alpha_2\rangle - |\alpha_3\rangle),$$

donde los parámetros complejos para el grupo D_3 son:

1. $\alpha_1 = \alpha$
2. $\alpha_2 = \mu\alpha$
3. $\alpha_3 = \mu^*\alpha$
4. $\alpha_4 = -\alpha^*$
5. $\alpha_5 = -\mu\alpha^*$
6. $\alpha_6 = -\mu^*\alpha^*$

Se hace notar que para el grupo D_3 , si α es puramente imaginario se tiene que $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ y $\alpha_3 = \alpha_6$, en ese caso el estado $|\psi_a\rangle$ no está definido, por lo cual hay que tener cuidado al obtener las propiedades de dicho estado.

Los primeros dos estados son los estados simétrico y antisimétrico y el último es el estado traza, el cual está relacionado con la representación bidimensional del grupo D_3 . Las constantes de normalización son

$$\mathcal{N}_{s,a}^{-2} = 3 \left\{ \pm \left(e^{-\alpha^2} + e^{-\mu\alpha^2} + e^{-\mu^*\alpha^2} \right) \pm \left(e^{-\alpha^{*2}} + e^{-\mu\alpha^{*2}} + e^{-\mu^*\alpha^{*2}} \right) \right. \\ \left. + 2 \left(e^{-|\alpha|^2} + e^{\mu|\alpha|^2} + e^{\mu^*|\alpha|^2} \right) \right\} e^{-|\alpha|^2},$$

$$\mathcal{N}_{tr}^{-2} = 6 \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{3}{2} |\alpha|^2 \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} |\alpha|^2 \right) \right\}. \quad (6.15)$$

A continuación encontraremos las propiedades de los diferentes estados definidos.

6.1.3. Dispersiones

Las dispersiones nos permiten ver si los estado exhiben compresión. El estado coherente es un estado que minimiza la relación de incertidumbre de Heisenberg donde las fluctuaciones de dos variables conjugadas x y p deben de cumplir $(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq 1/4$, en el caso de los estados coherentes se tiene la igualdad dado que ambas dispersiones son iguales a $1/2$. Cuando un estado cuántico tiene que alguna de las dos dispersiones vale menos que $1/2$ entonces la otra dispersión debe valer más que $1/2$ y por lo tanto se presenta la compresión en las fluctuaciones de dicho estado. Para observar si los estados presentan o no la propiedad de compresión se calculan las dispersiones correspondientes.

Tenemos que las dispersiones para el grupo C_2 están dadas por

Estado par	Estado impar
$\sigma_x = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2}) + \alpha ^2 \tanh(\alpha ^2) + \frac{1}{2} = \sigma_p$	$\sigma_x = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2}) + \alpha ^2 \coth(\alpha ^2) + \frac{1}{2} = \sigma_p$
$\sigma_{xp} = \text{Im}(\alpha^2)$	$\sigma_{xp} = \text{Im}(\alpha^2)$

donde se define $\sigma_{xp} = \frac{1}{2} \langle \{x, p\} \rangle - \langle x \rangle \langle p \rangle$.

Para el grupo C_3 las dispersiones siguen la siguiente expresión

$$\sigma_x^k = \sigma_p^k = \frac{1}{2} + \frac{\mathcal{N}_k^2}{\mathcal{N}_{k+1}^2} |\alpha|^2, \quad \sigma_{xp}^k = 0$$

donde \mathcal{N}_k están definidas por la Ec. (6.13) y tenemos que $\mathcal{N}_4 = \mathcal{N}_1$.

Finalmente para el grupo D_3 tenemos que las dispersiones se escriben como sigue:

Para los estados $|\psi_s\rangle$ y $|\psi_a\rangle$ de D_3 , obtenemos que las dispersiones en x y p son iguales y están dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_p^{s,a} = & \frac{1}{2} + \left\{ 2|\alpha|^2 \left(e^{|\alpha|^2} + \mu e^{\mu|\alpha|^2} + \bar{\mu} e^{\bar{\mu}|\alpha|^2} \right) \mp \bar{\alpha}^2 \left(e^{-\bar{\alpha}^2} + \mu e^{-\mu\bar{\alpha}^2} + \bar{\mu} e^{-\bar{\mu}\bar{\alpha}^2} \right) \right. \\ & \left. \mp \alpha^2 \left(e^{-\alpha^2} + \mu e^{-\mu\alpha^2} + \bar{\mu} e^{-\bar{\mu}\alpha^2} \right) \right\} \left\{ 2 \left(e^{|\alpha|^2} + e^{\mu|\alpha|^2} + e^{\bar{\mu}|\alpha|^2} \right) \right. \\ & \left. \pm \left(e^{-\bar{\alpha}^2} + e^{-\mu\bar{\alpha}^2} + e^{-\bar{\mu}\bar{\alpha}^2} \right) \pm \left(e^{-\alpha^2} + e^{-\mu\alpha^2} + e^{-\bar{\mu}\alpha^2} \right) \right\}^{-1} = \sigma_x^{s,a}, \end{aligned}$$

donde utilizamos que $\langle x \rangle_{s,a} = \langle p \rangle_{s,a} = 0$ y $\langle a^2 \rangle_{s,a} = \langle a^{\dagger 2} \rangle_{s,a} = 0$. Para el estado $|\psi_{tr}\rangle$ las dispersiones no se presentan por la longitud de las mismas, en el caso de los valores esperados de x y p y del operador de número tenemos

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_{tr} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \mathcal{N}_{tr}^2 e^{-|\alpha|^2} (\alpha + \alpha^*) \left(e^{|\alpha|^2} + \mu e^{\mu^* |\alpha|^2} + \mu^* e^{\mu |\alpha|^2} \right), \\ \langle p \rangle_{tr} &= \frac{3}{\sqrt{2}i} \mathcal{N}_{tr}^2 e^{-|\alpha|^2} (\alpha - \alpha^*) \left(e^{|\alpha|^2} + \mu e^{\mu^* |\alpha|^2} + \mu^* e^{\mu |\alpha|^2} \right), \\ \langle a^\dagger a \rangle_{tr} &= 3 |\alpha|^2 e^{-|\alpha|^2} \mathcal{N}_{tr}^2 \left\{ 2e^{|\alpha|^2} - \mu e^{\mu |\alpha|^2} - \mu^* e^{\mu^* |\alpha|^2} \right\}.\end{aligned}$$

Finalmente damos la expresión para la correlación σ_{xp} , para este estado tenemos que

$$\sigma_{xp}^{tr} = \frac{1}{2i} (\alpha^2 - \alpha^{*2}) \left\{ \frac{e^{|\alpha|^2} + \mu e^{\mu |\alpha|^2} + \mu^* e^{\mu^* |\alpha|^2}}{2e^{|\alpha|^2} - e^{\mu |\alpha|^2} - e^{\mu^* |\alpha|^2}} - \left(\frac{e^{|\alpha|^2} + \mu e^{\mu^* |\alpha|^2} + \mu^* e^{\mu |\alpha|^2}}{e^{2|\alpha|^2} - e^{\mu |\alpha|^2} - e^{\mu^* |\alpha|^2}} \right)^2 \right\} \quad (6.16)$$

Precisamos que todas las figuras de este trabajo se hicieron considerando que $\alpha = r e^{i\theta}$

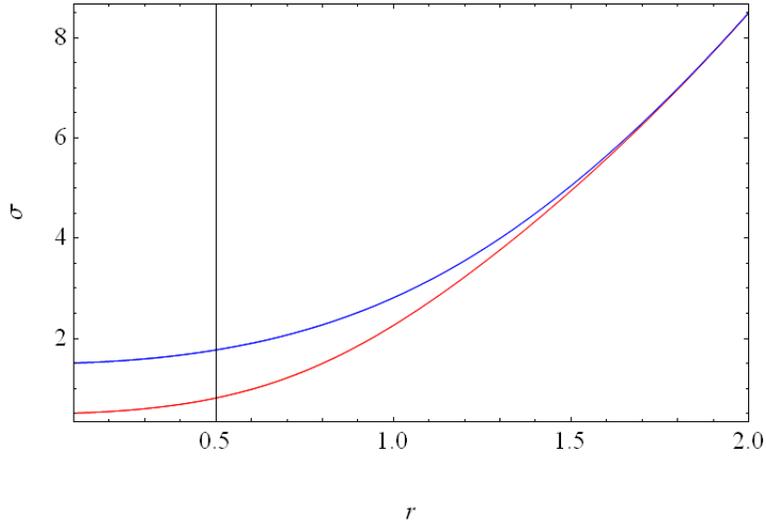


Figura 6.2. Dispersiones para los estados de C_2 vs. la norma de α . De color rojo $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\alpha_+\rangle$; azul indica $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\alpha_-\rangle$. Con $\theta = 0$

Las dispersiones σ_x y σ_p son funciones crecientes de la norma de α como se observa en las Figs. (6.2), (6.4) y (6.5). Sin embargo para el estado par del grupo C_2

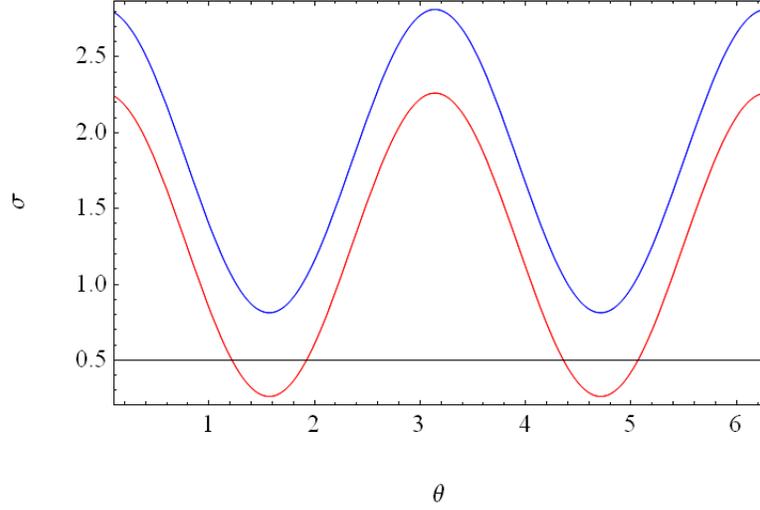


Figura 6.3. Dispersiones para los estados de C_2 vs. la fase de α . De color rojo $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\alpha_+\rangle$; azul indica $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\alpha_-\rangle$. Para $|\alpha| = 1$

se presenta compresión como lo indica la Fig. (6.3). Este fenómeno no se presenta para los demás casos. Esta propiedad se presenta para una fase de α diferente de cero. La región que presenta el fenómeno de compresión está dada por la expresión $r = \sqrt{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \right)}$.

Si observamos la dependencia temporal de dichas fluctuaciones en hamiltoniano del oscilador armónico las gráficas dependientes de la fase de α mantienen su forma y solo se recorren en el eje θ . Lo que implica que el ángulo en el que se encuentra la compresión se recorre.

Las dispersiones en x y p son iguales en la mayoría de los casos salvo para el estado $|\psi_{tr}\rangle$ del grupo D_3 .

6.1.4. Estadística de Fotones

La estadística de fotones se determina mediante el cálculo del valor esperado del número de fotones, $\langle \hat{n} \rangle$, la fluctuación σ_n y la probabilidad $|\langle n | \psi \rangle|^2$. Para los estados cristalizados se obtienen los resultados siguientes:

Estados de C_2

$$P_{\alpha_+}(n) = P_\alpha(n) \frac{1 + (-1)^n}{2 \cosh(|\alpha|^2)}, \quad P_{\alpha_-}(n) = P_\alpha(n) \frac{1 - (-1)^n}{2 \sinh(|\alpha|^2)}$$

donde $P_\alpha(n) = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n} / n!$ que es la distribución Poissoniana del número de fotones. Las dispersiones en n son

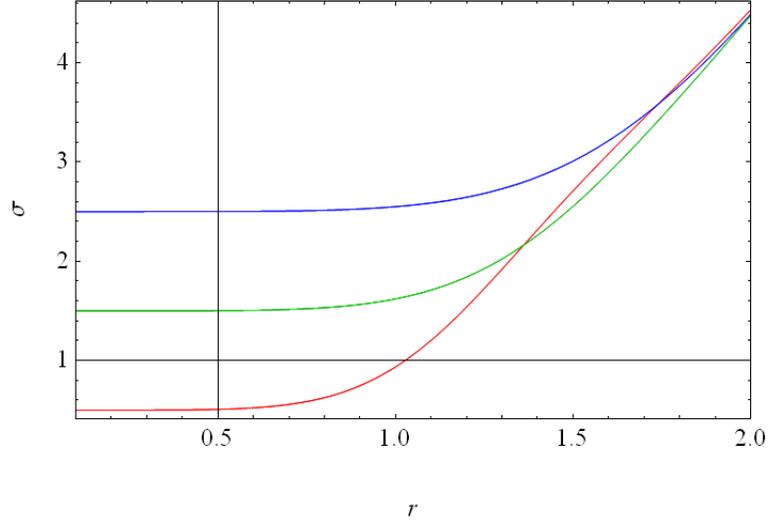


Figura 6.4. Dispersiones para los estados de C_3 vs. la norma de α . De color rojo $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado para el estado $|\psi_1\rangle$; rojo indica $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\psi_2\rangle$; verde es $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\psi_3\rangle$. Con $\theta = 0$.

$$\sigma_{n_+} = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \tanh(|\alpha|^2) - |\alpha|^4 \tanh^2(|\alpha|^2) \quad \sigma_{n_-} = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 \coth(|\alpha|^2) - |\alpha|^4 \coth^2(|\alpha|^2)$$

Vemos que los estados par e impar de C_2 solo tienen contribuciones pares e impares en el número de fotones, respectivamente. De aquí se justifica el nombre de dichos estados.

Las distribuciones de fotones para los estados de C_3 son

$$P_1(n) = P_\alpha(n) \frac{|1 + \mu^n + \mu^{*n}|^2 / 3}{e^{|\alpha|^2} + e^{\mu|\alpha|^2} + e^{\mu^*|\alpha|^2}},$$

$$P_2(n) = P_\alpha(n) \frac{|1 + \mu^{n+1} + \mu^{*(n+1)}|^2 / 3}{e^{|\alpha|^2} + \mu e^{\mu|\alpha|^2} + \mu^* e^{\mu^*|\alpha|^2}},$$

$$P_3(n) = P_\alpha(n) \frac{|1 + \mu^* \mu^n + \mu \mu^{*n}|^2 / 3}{e^{|\alpha|^2} + \mu^* e^{\mu|\alpha|^2} + \mu e^{\mu^*|\alpha|^2}},$$

donde se tienen las relaciones

$$1 + \mu^n + \mu^{*n} = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 0 \pmod{3}; \\ 0, & \text{si } n = 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (6.17)$$

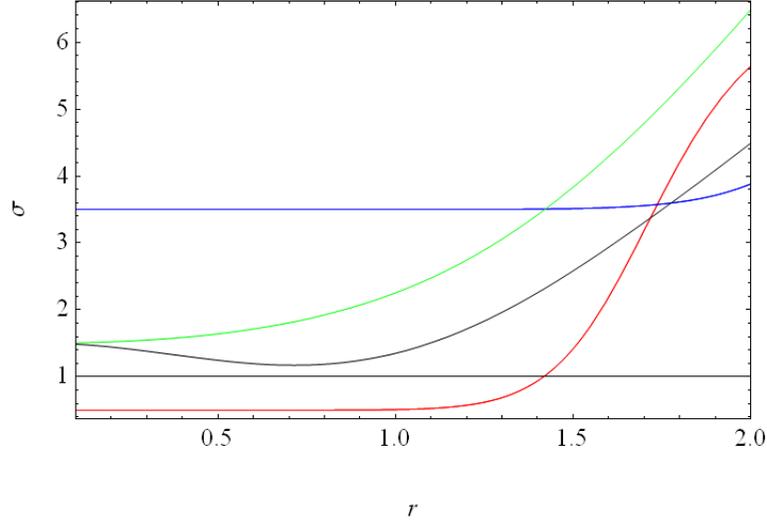


Figura 6.5. Dispersiones para los estados de D_3 vs. la norma de α . De color rojo $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\psi_s\rangle$; azul indica $\sigma_x = \sigma_p$ para el estado $|\psi_a\rangle$; negro es σ_x y verde σ_p para el estado $|\psi_{tr}\rangle$. Con $\theta = 0$.

$$1 + \mu^* \mu^n + \mu \mu^{*n} = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 1 \pmod{3}; \\ 0, & \text{si } n = 0, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (6.18)$$

$$1 + \mu^{n+1} + \mu^{*n+1} = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 2 \pmod{3}; \\ 0, & \text{si } n = 0, 1 \pmod{3} \end{cases} \quad (6.19)$$

Finalmente para el grupo D_3 tenemos que

$$P_{s,a}(n) = |\mathcal{N}_{s,a}|^2 P_\alpha(n) |1 \pm (-1)^n|^2 |1 + \mu^n + \mu^{*n}|^2$$

$$P_{tr}(n) = \frac{|\alpha|^{2n} \exp(|\alpha|^2)}{n!} \left\{ \frac{2 \sin^2\left(\frac{1}{3}\pi n\right)}{1 - \exp\left(-\frac{3}{2}|\alpha|^2\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\alpha|^2\right)} \right\}$$

$$|1 + (-1)^n|^2 |1 + \mu^n + \mu^{*n}|^2 = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \pmod{6}; \\ 0 & \text{si } n = 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{6} \end{cases} \quad (6.20)$$

$$|1 - (-1)^n|^2 |1 + \mu^n + \mu^{*n}|^2 = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 3 \pmod{6}; \\ 0 & \text{si } n = 4, 5, 6, 7, 8 \pmod{6} \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{3}\pi n\right) = \begin{cases} = 0 & \text{si } n = 0 \pmod{3} \\ \neq 0 & \text{si } n = 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (6.22)$$

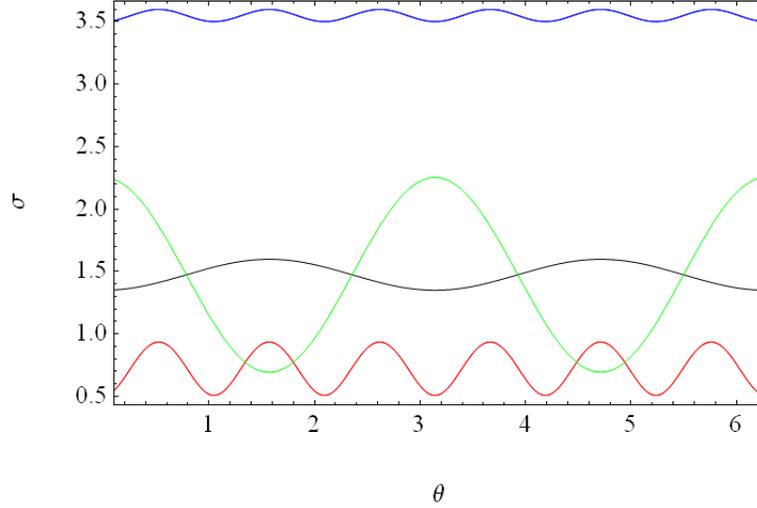


Figura 6.6. Dispersiones para los estados de D_3 vs. la fase de α . De color rojo $\sigma_x=\sigma_p$ para el estado $|\psi_s\rangle$; azul indica $\sigma_x=\sigma_p$ para el estado $|\psi_\alpha\rangle$; negro es σ_x y verde σ_p para el estado $|\psi_{tr}\rangle$. Para $|\alpha| = 1$.

Las distribuciones de los tres grupos dependen solamente de la norma de α por lo cual estas distribuciones no dependen del tiempo. Si tomamos en cuenta la evolución determinada por el Hamiltoniano de oscilador armónico no habrá ningún cambio, dado que $|\alpha| = |\alpha e^{-i\omega t}|$.

De las expresiones (6.17), (6.18) y (6.19) se puede verificar que la distribución de fotones para los estados $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ y $|\psi_3\rangle$ se tienen probabilidades diferentes de cero cada tres números, es decir si $n = 0$ solo contribuye el estado $|\psi_1\rangle$ y las demás distribuciones son cero, para $n = 1$ la contribución diferente de cero viene del estado $|\psi_2\rangle$ y para $n = 2$ la distribución que es diferente de cero es la del estado $|\psi_3\rangle$.

Para el grupo D_3 se aplica el resultado de (6.20), (6.21) y (6.22) para los estados simétrico y antisimétrico y traza respectivamente por lo cual hay contribuciones cada seis números para los estados simétrico. Para el estado traza la estadística presenta una contribución cero cada tres números empezando en $n = 0$.

Las gráficas de las Figs. (6.7), (6.8) y (6.9) permiten suponer¹ que los estados del grupo C_2 son eigenestados del cuadrado del operador de aniquilación, \hat{a}^2 y los estados de C_3 son eigenestados del operador \hat{a}^3 . Además se puede probar que si aplicamos el operador de aniquilación \hat{a} a el estado par obtenemos un estado proporcional al impar y viceversa.

¹ Sin embargo puede ser fácilmente demostrado matemáticamente que lo son

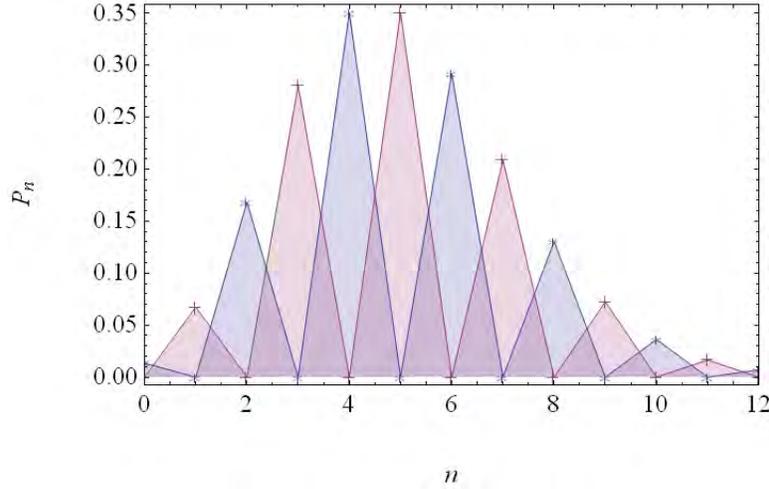


Figura 6.7. Distribución de fotones para los estados de C_2 , en rojo tenemos el estado impar y en azul el estado par. Con $\alpha = 1 + 2i$

En resumen en el caso del grupo C_3 tenemos que dos números de fotones consecutivos tienen una probabilidad cero y el siguiente número tiene una probabilidad distinta de cero a partir de un número. De la misma forma que en el caso de C_2 al aplicar el operador \hat{a} a uno de los estados de C_3 obtenemos un estado proporcional a otro de los estados de C_3 . Para el caso de D_3 esto no se cumple.

6.1.5. Distribuciones de Wigner y de Husimi

6.1.5.1. Función de Wigner

La distribución de Wigner se define mediante la Ec. (4.1), y para nuestros estados cristalizados siguen la expresión general (6.10) que hemos utilizado para obtener la gráficas. Las expresiones de la función de Wigner son por lo general muy largas, por lo que no se reportan en este trabajo

En las imágenes (6.10) y (6.11) podemos ver en comparativa la evolución temporal de las funciones de Wigner para los estado par e impar de gato, las cuales giran alrededor de su centro conforme el tiempo pasa y completan una vuelta cuando el tiempo es múltiplo del periodo del oscilador armónico, en este trabajo se fijó la frecuencia del oscilador $\omega = 1$. También se observa un comportamiento cuántico en estos estados dado que la función de Wigner presenta partes negativas que no se presentan en la teoría clásica de las distribuciones de probabilidad. Para el estado impar de C_2 se presenta un pico negativo, este pico se encuentra localizado muy cerca del origen. Ésto demuestra que para valores pequeños de x y p se presenta mayor comportamiento cuántico para ese estado. Este comportamiento en el origen

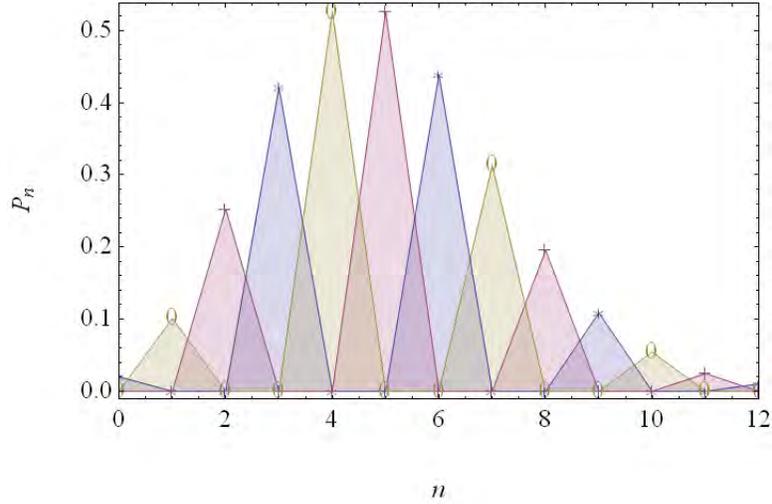


Figura 6.8. Distribución de fotones para los estado de C_3 , en azul tenemos el estado $|\psi_1\rangle$, en rojo el estado $|\psi_2\rangle$ y en café el estado $|\psi_3\rangle$. Con $\alpha = 1 + 2i$

se pierde a medida que aumentamos el valor absoluto del parámetro α , ya que los picos de la función de Wigner se presentan en una región más lejana al origen.

En la imágenes (6.12) a (6.16) que todos estos estados presentan características cuánticas, debido a que la función de Wigner presenta partes negativas. Estas gráficas presentan un comportamiento diferente a medida que se decrece el valor del parámetro α . Al hacer α pequeña, todas las gráficas presentan picos en puntos muy cercanos al origen, en esos casos, el sistema esta muy localizado y a medida que aumentamos α se presentan picos que forman figuras geométricas dependiendo del grupo en cuestión. Para el grupo C_2 se tienen dos picos dispuestos simétricamente con respecto al origen con una franja de interferencia entre ellos. En el caso de todos los estados de C_3 se obtiene un triángulo equilátero cuyo centro pasa por el origen y con picos de igual altura, también se presentan zonas de interferencia en los lados del triángulo que forman los picos, dado el comportamiento parecido de las funciones de Wigner solo se reporta la función para $|\psi_1\rangle$. Por último para los estados simétrico y antisimétrico de D_3 se obtiene un hexágono, de igual forma centrado en el origen y con franjas de interferencia entre los picos que están en los vértices del hexágono. Para el estado traza tenemos un triángulo equilátero con picos de diferentes tamaños, uno más grande que otros dos de igual altura. También se presentan zonas de interferencia a lo largo de las líneas que unen a los vértices del triángulo.

Por lo tanto estos estados forman una figura cerrada en el espacio fase cuyos lados coinciden con el número de estados coherentes que forman la superposición, que en el caso de C_2 es una línea.

La oscilación muy fuerte que se presenta en algunos puntos del espacio fase y que

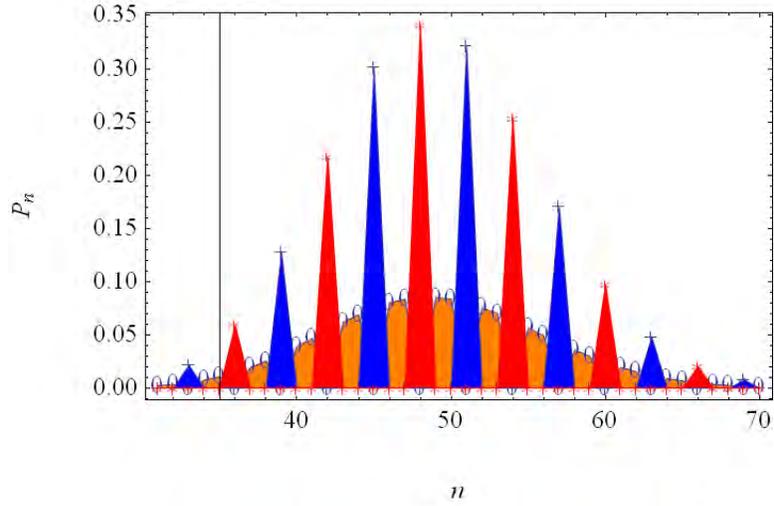


Figura 6.9. Distribución de fotones para los estado de D_3 , en azul tenemos el estado simétrico, en rojo el estado antisimétrico y en anaranjado el estado traza. Con $\alpha = 7$

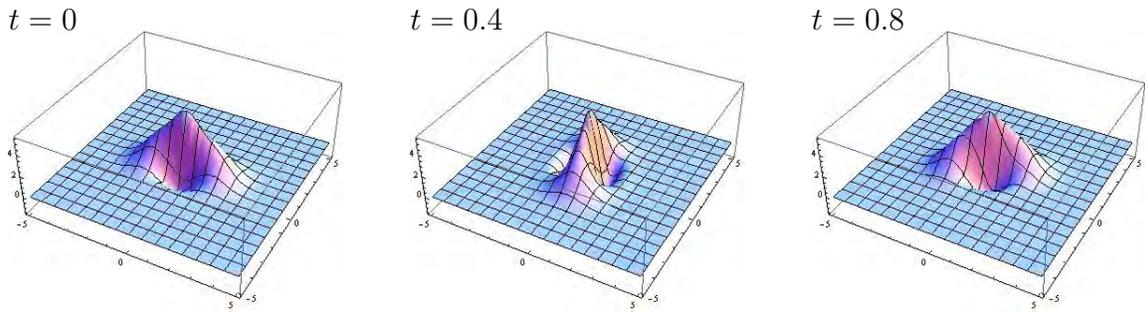


Figura 6.10. Función de Wigner para el estado par de C_2 a diferentes tiempos

hacen que la función de Wigner tome valores negativos y positivos en una vecindad pequeña del espacio fase se debe a la interferencia entre los estados que forman la superposición.

6.1.5.2. Función de Husimi

Recordamos que la función de Husimi también es una función de cuasi-probabilidad que se define como la probabilidad de que el sistema caracterizado por un operador densidad $\hat{\rho}$ esté en el estado coherente $|\alpha\rangle$. Y cuya definición es

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle$$

que satisface las condiciones

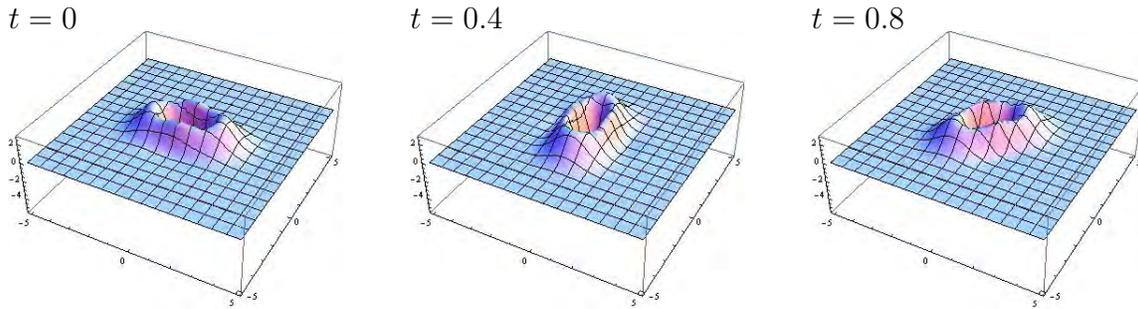


Figura 6.11. Función de Wigner para el estado impar de C_2 a diferentes tiempos

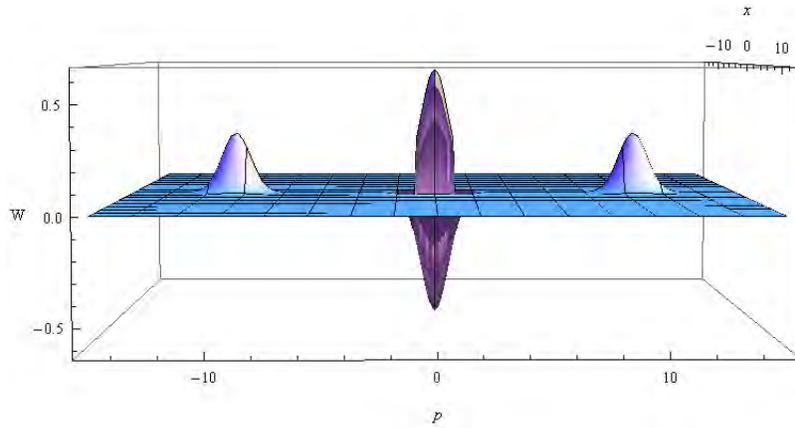


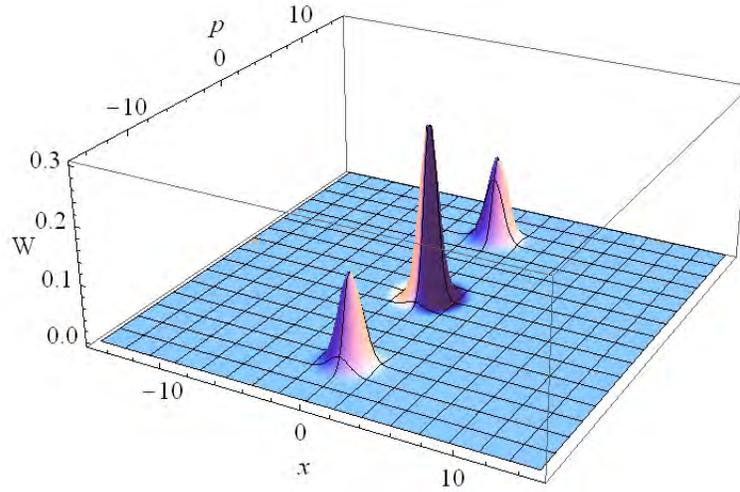
Figura 6.12. Función de Wigner para el estado par de C_2 con $\alpha = 7i$

$$\int d\alpha^2 Q(\alpha) = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq Q(\alpha) \leq 1$$

es decir la función $Q(\alpha)$ está normalizada y es una cantidad no negativa.

Mostramos las gráficas correspondientes a las funciones de Husimi y del área de dicha distribución para cada uno de nuestros estados

Vemos en las gráficas (6.17) a (6.20) que para valores grandes de la norma de α (como $\alpha = 7$), cada función tiene el número de picos asociado al número de estados


 Figura 6.13. Función de Wigner para el estado impar de C_2 con $\alpha = 7i$

que forman la superposición; los cuales en todos los casos menos para el estado traza, corresponden al número de elementos del grupo. Este comportamiento solo se aprecia cuando la norma de α es grande, cuando dicha norma es pequeña se tiene que la función de Husimi está muy localizada en el centro del espacio fase. Esto nos dice que el sistema está más deslocalizado a manera que α crece. Asimismo tenemos la misma observación para el caso de la función de Wigner que las figuras que se forman en el espacio fase corresponde al número de estados que forman la superposición, para el grupo C_2 se forma una línea. Para C_3 un triángulo con picos de igual altura y para el grupo D_3 un hexágono en los casos simétrico y antisimétrico y un triángulo con picos de diferentes tamaños para el estado traza.

6.1.5.3. Área de la distribución de Husimi

El segundo momento de la función de Husimi es graficada en seguida

El área de los estados presenta un comportamiento parecido al del estado coherente cuando el parámetro α es cercano a cero, es decir el área de la distribución de Husimi es igual a uno, salvo los casos donde el estado no está bien definido como en las Figs. (6.24), (6.26) y (6.27). Después el área presenta un salto y toma el valor correspondiente al número de elementos que conforman la superposición para cada estado: 2 para C_2 , 3 para C_3 y 6 para los estado simétrico y antisimétrico y 2 para el estado traza de D_3 , lo que está ligado al fenómeno de deslocalización que sufren estos estados. Cada pico en las funciones de Husimi representa un miembro de la superposición por lo cual es de esperarse que cada uno de estos picos contribuya en una unidad al área de la distribución.

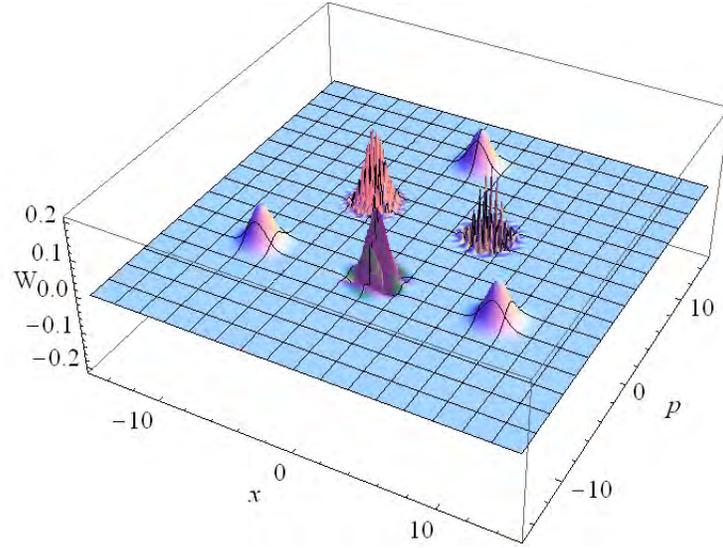


Figura 6.14. Función de Wigner para el estado $|\psi_1\rangle$ de C_3 con $\alpha = 7i$

Por lo anteriormente visto podemos resumir hasta ahora que a través de los formalismos de Wigner y Husimi es posible ver fenómenos cuánticos en la superposición de estados coherentes. Fenómenos como localización y compresión. Las funciones de Wigner y Husimi son similares para estados del mismo grupo. Esto se vuelve más evidente para valores grandes de α . La distribución de Husimi presenta un número de picos que es consistente con el número de elementos de la superposición del grupo. El estado par del grupo C_2 presenta compresión.

6.1.5.4. Distribuciones Marginales

Como hemos presentado en el Capítulo 4, la integración de la función de Wigner en alguna de las variables (x, p) nos permite obtener las distribuciones en la variable conjugada. Presentamos las gráficas de dichas distribuciones.

Las figuras que representan la evolución temporal de las marginales nos permiten observar que existen probabilidades oscilatorias en el espacio fase. Recordemos que las funciones de Wigner para los estados de C_2 tienen dos picos simétricos y una parte de interferencia en el centro Figs. (6.12) y (6.13). La función de Wigner al evolucionar en el tiempo rota casi de forma rígida, lo cual hace que las probabilidades en ambas variables cambie en el tiempo como vemos en la Fig. (6.28) .

Podemos concluir de estas gráficas que la parte central de las funciones de Wigner no contribuye a las marginales; además cuando los picos están alineados con alguno de los ejes, ya sea x o p las marginales presentan máximos, y la probabilidad se

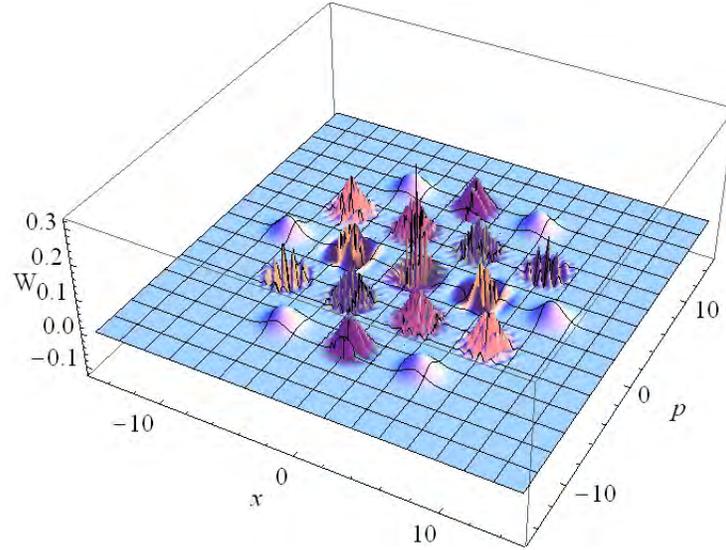


Figura 6.15. Función de Wigner para el estado simétrico de D_3 con $\alpha = 7$

vuelve la unidad en la variable donde se alinean los picos. También se observa que las marginales son periódicas con periodo 2π .

Además existe un desfase en ambas marginales que es el resultado del principio de incertidumbre de Heisenberg, ya que $P(x)$ alcanza el máximo cuando $P(p)$ presenta dos picos de igual altura y alejados uno del otro, lo cual resulta en la indeterminación de la variable p .

Para los estados del grupo C_3 tenemos algo semejante a lo obtenido en el grupo C_2 , tenemos ahora tres curvas cruzándose. Estas curvas corresponden a los tres picos en forma de triángulo de la Fig. (6.14) de la función de Wigner, de nuevo cuando dos picos se alinean en uno de los ejes se presenta un máximo en la probabilidad. Es importante señalar que no es posible que los tres vértices del triángulo estén alineados, por lo tanto la probabilidad no puede ser uno, y las tres curvas en las marginales no pueden cruzarse al mismo tiempo. Para los tres estados de C_3 se tiene el mismo comportamiento.

Por último para los estados del grupo D_3 se obtienen gráficas complicadas en estructura para los casos simétrico y antisimétrico, donde existen cruces de seis curvas correspondientes a los vértices del hexágono que se observa en las Figs. (6.15), cuando dos de estos picos coinciden en un mismo eje tenemos un máximo en la probabilidad. Es interesante ver que para el estado traza tenemos un comportamiento muy similar al que observamos para el caso de C_3 ya que tenemos solo tres picos en la función de Wigner correspondiente. También dado que los picos tienen una altura diferente, la curva presenta una asimetría en sus ejes.

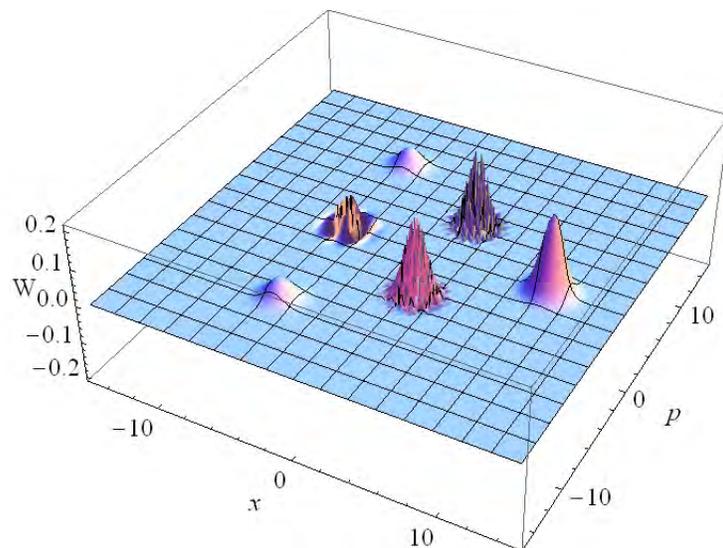


Figura 6.16. Función de Wigner para el estado traza de D_3 con $\alpha = 7$

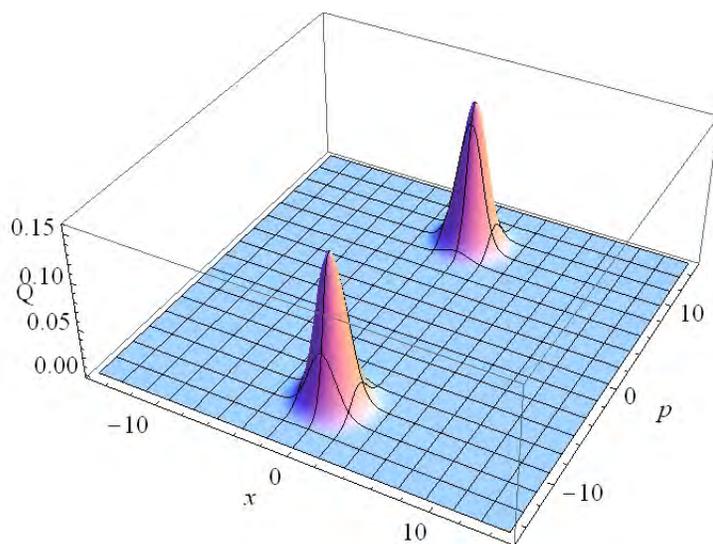


Figura 6.17. Función de Husimi para el estado par de gato con $\alpha = 7i$

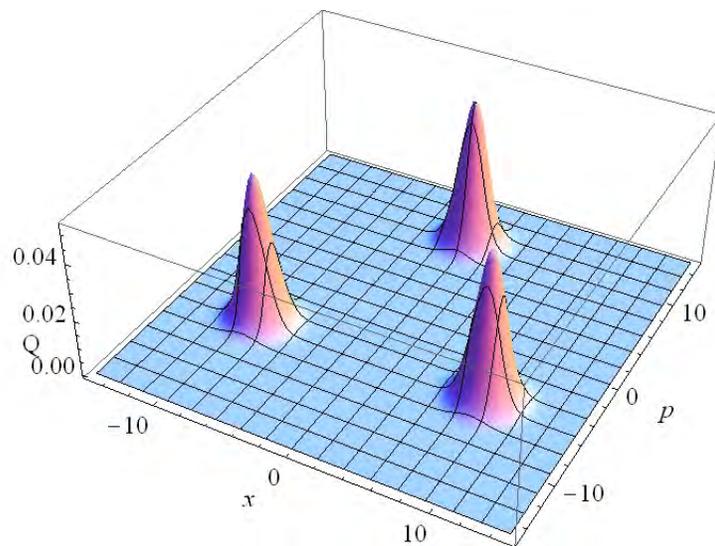


Figura 6.18. Función de Husimi para el estado $|\psi_1\rangle$ de C_3 con $\alpha = 7i$

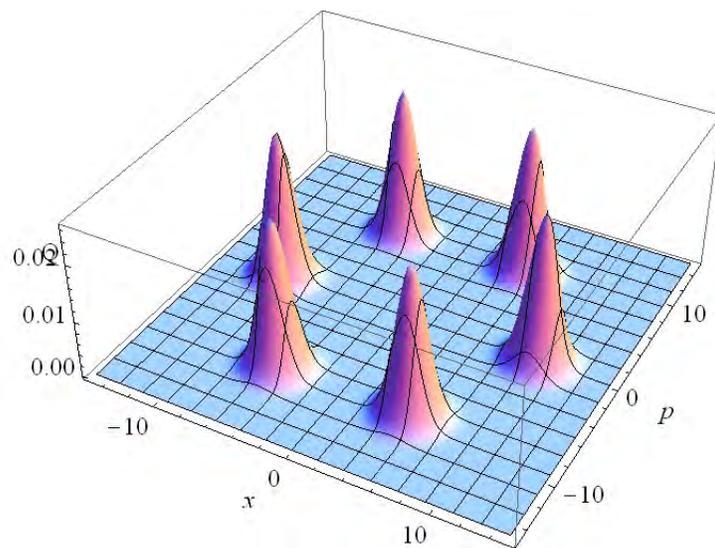


Figura 6.19. Función de Husimi para el estado simétrico de D_3 con $\alpha = 7$

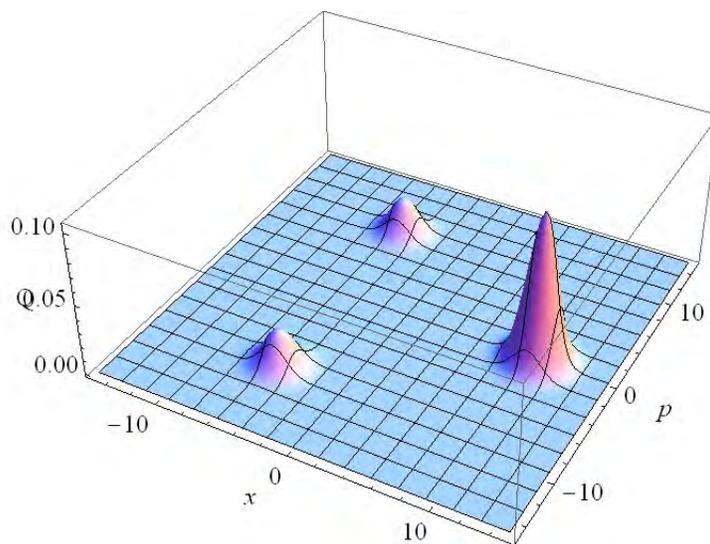


Figura 6.20. Función de Husimi para el estado traza de D_3 con $\alpha = 7$

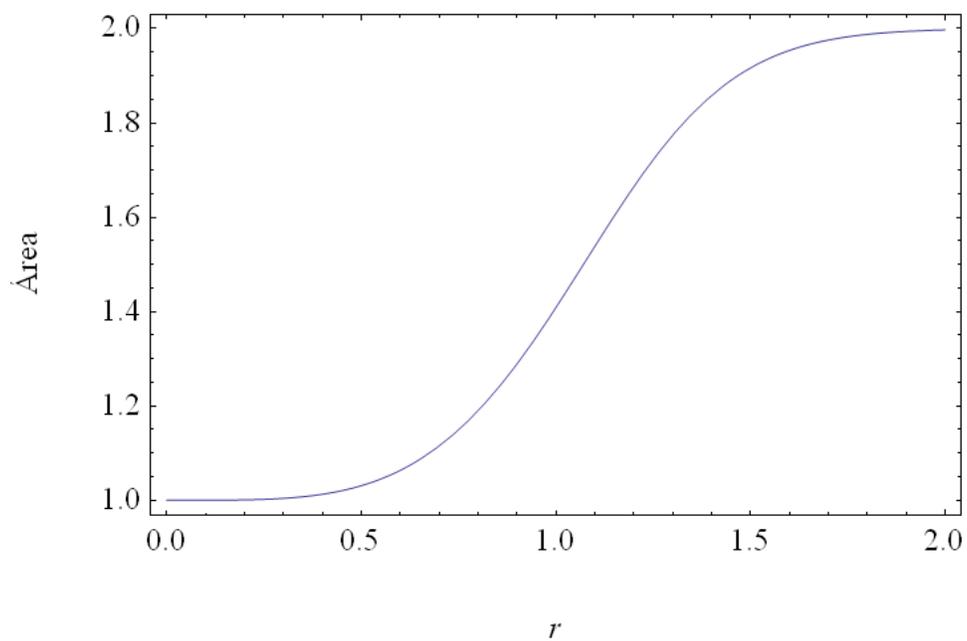


Figura 6.21. Inverso del segundo momento para el estado par

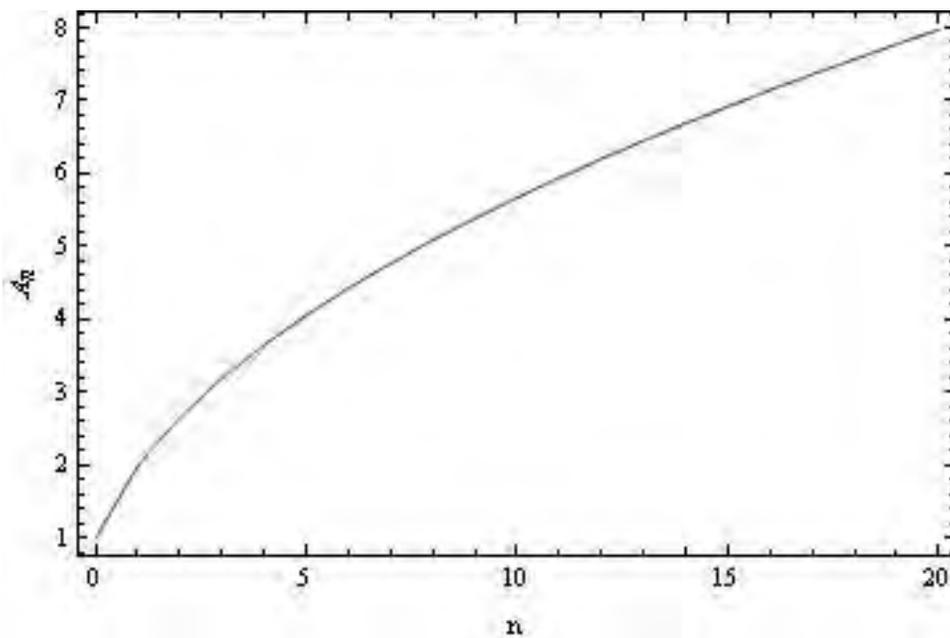


Figura 6.22. Inverso del segundo momento para los estados de Fock $|n\rangle$

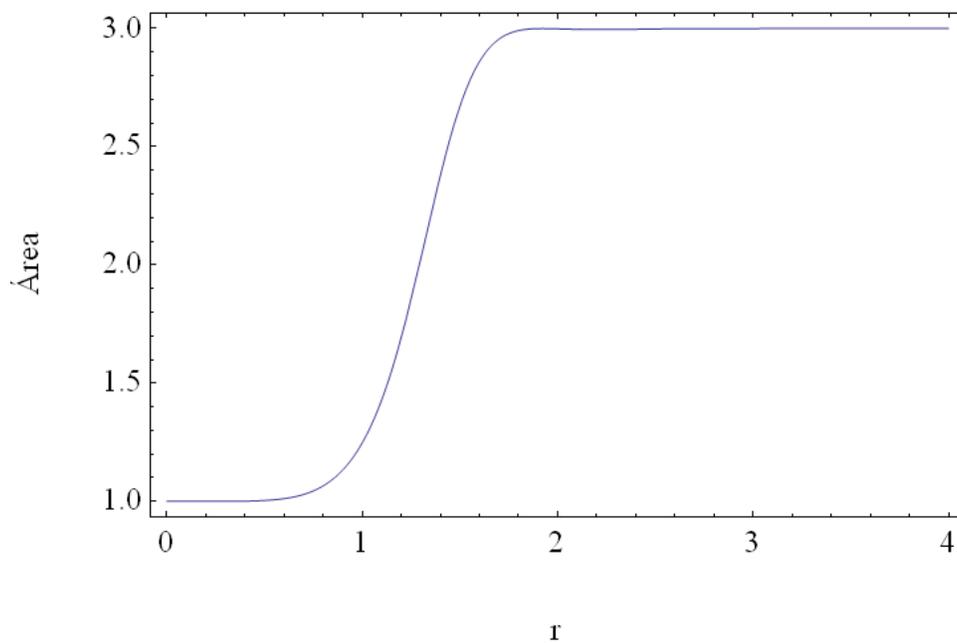


Figura 6.23. Inverso del segundo momento para el estado $|\psi_1\rangle$ de C_3

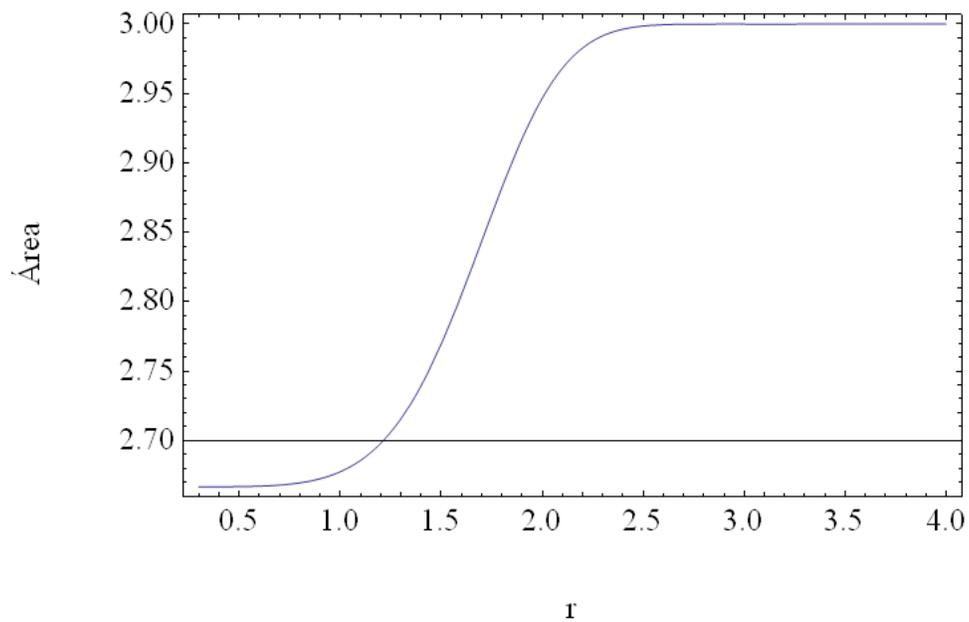


Figura 6.24. Inverso del segundo momento para el estado $|\psi_2\rangle$ de C_3

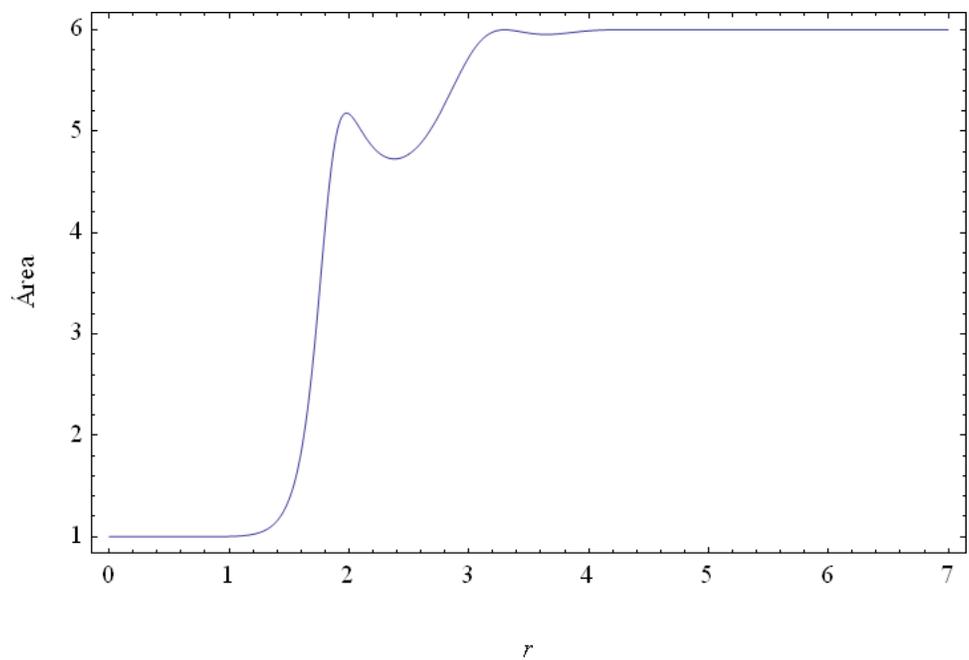


Figura 6.25. Inverso del segundo momento para el estado simétrico de D_3

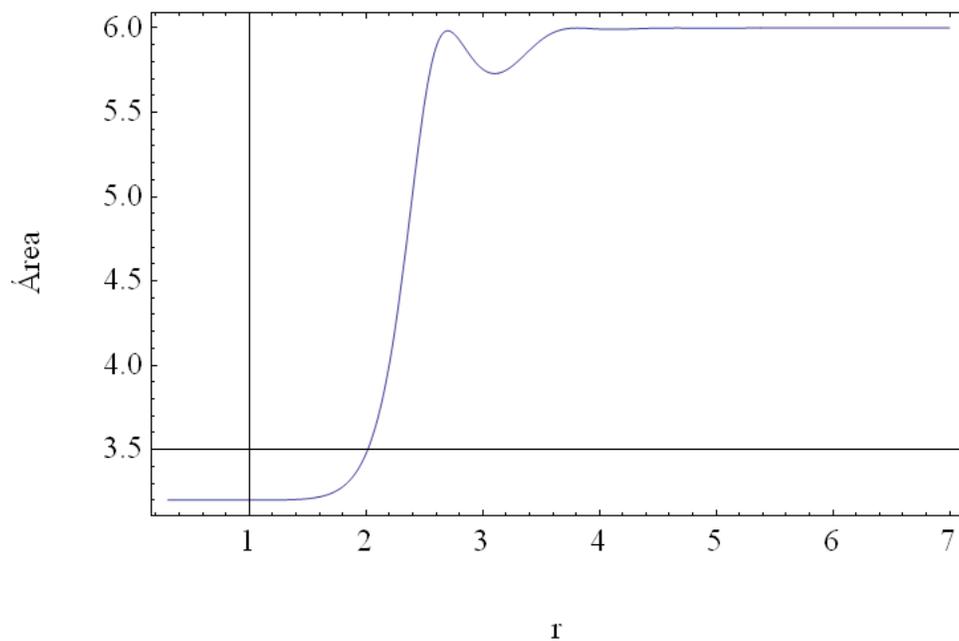


Figura 6.26. Inverso del segundo momento para el estado antisimétrico de D_3

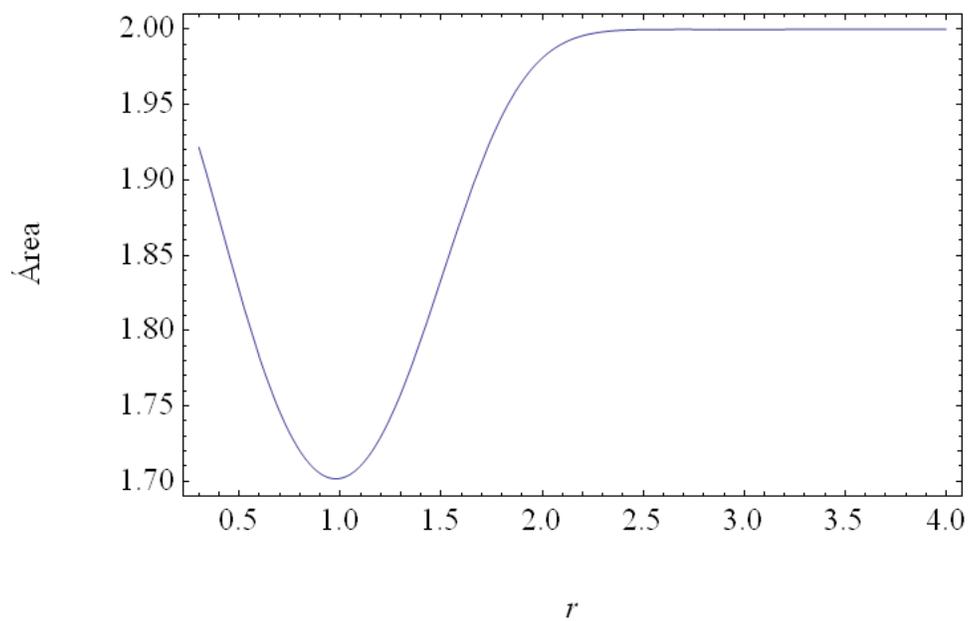


Figura 6.27. Inverso del segundo momento para el estado traza de D_3

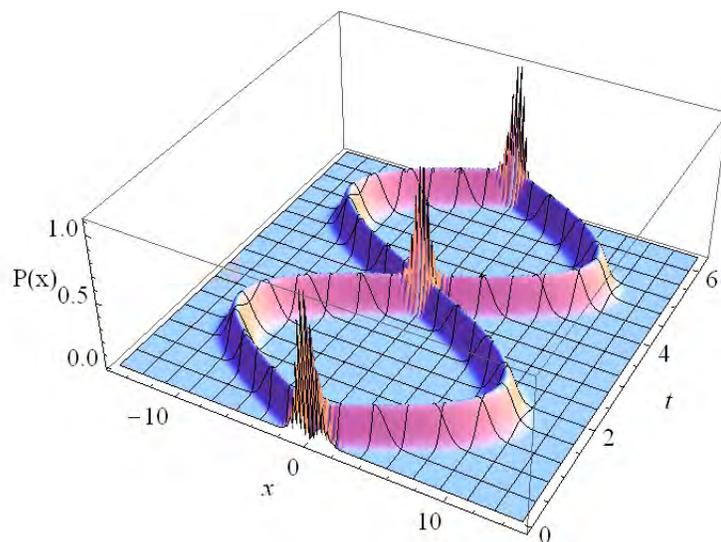


Figura 6.28. Evolución temporal de la distribución marginal $P(x)$ para el estado impar de C_2 , para $\alpha = 7i$, para la distribución de probabilidad en la variable p se obtiene un comportamiento similar sólo que desfazado en el tiempo

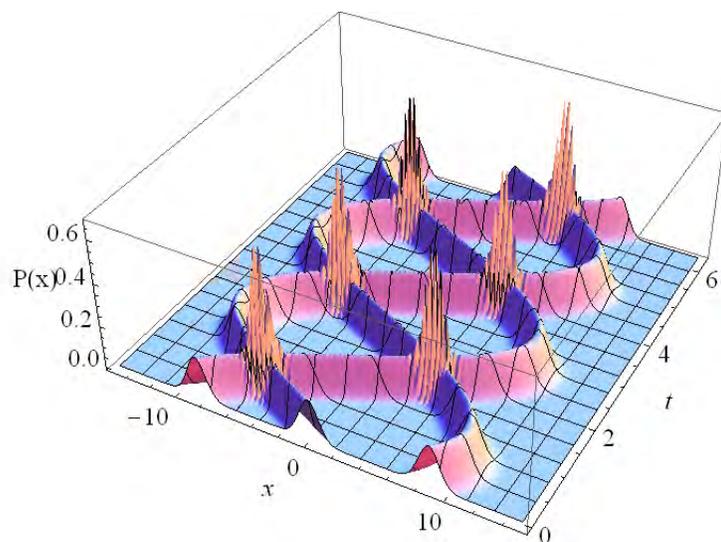


Figura 6.29. Evolución temporal de la distribución marginal $P(x)$ para el estado $|\psi_1\rangle$ de C_3 , para $\alpha = 7i$, para la distribución de probabilidad en la variable p se obtiene un comportamiento similar sólo que desfazado en el tiempo

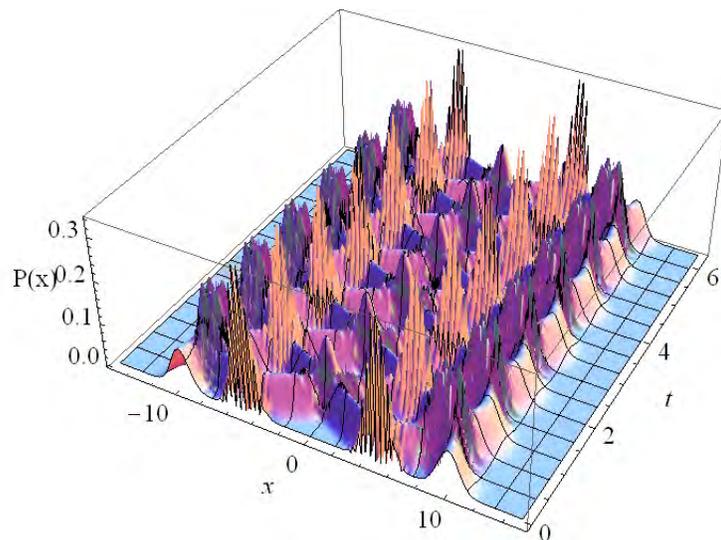


Figura 6.30. Evolución temporal de la distribución marginal $P(x)$ para el estado $|\psi_a\rangle$ de D_3 , para $\alpha = 7$, para la distribución de probabilidad en la variable p se obtiene un comportamiento similar sólo que desfazado en el tiempo

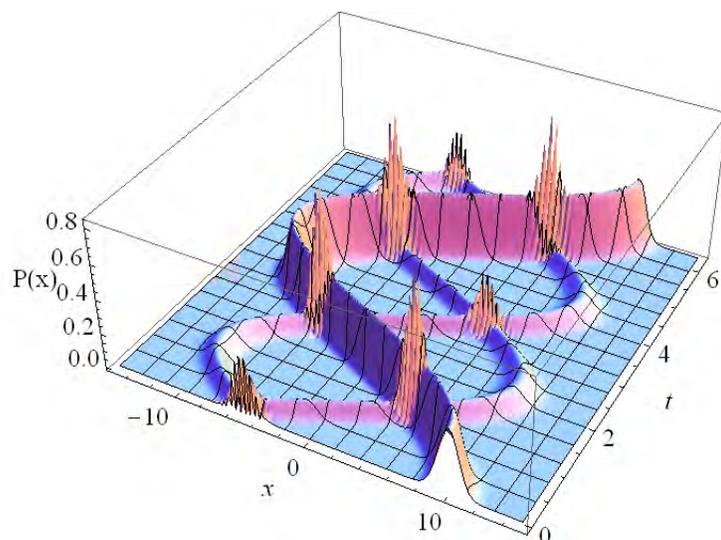


Figura 6.31. Evolución temporal de la distribución marginal $P(x)$ para el estado $|\psi_{tr}\rangle$ de D_3 , para $\alpha = 7$, para la distribución de probabilidad en la variable p se obtiene un comportamiento similar sólo que desfazado en el tiempo

Capítulo 7

Generación de Estados de Gato de Schrödinger

En los últimos años se han propuesto varios métodos para la generación de superposiciones macroscópicas de estados. Las cuales van desde la utilización de propiedades no lineales como en el llamado medio de Kerr hasta modelos donde se consigue la superposición mediante la evolución temporal de un átomo dentro de un campo eléctrico.

A continuación abordaremos uno de dichos métodos.

7.1. Átomo de Dos Niveles en una Cavidad.

Banaocloche [27, 29, 34] establece la evolución de la matriz densidad reducida perteneciente a un campo monomodal dentro de un sistema de un campo y un átomo de dos niveles ($|g\rangle$ el estado base y $|e\rangle$ el estado excitado) en una cavidad. La evolución temporal de dicho sistema nos lleva de un estado coherente a una superposición de estados (estado par de gato) en un tiempo dado. Esto se logra dado que la matriz reducida del campo al tiempo t presenta una evolución no unitaria como veremos a continuación

El Hamiltoniano del sistema es la suma de las contribuciones del átomo y el campo que hemos visto en el capítulo 5. Despreciando el término del cuadrado del potencial vectorial $\hat{\mathbf{A}}^2$ y en la aproximación de onda rotante

$$\hat{H} = \omega_F(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\omega_A\hat{\sigma}_3 + \lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (7.1)$$

donde ω_F es la frecuencia del campo, ω_A es la diferencia de energía de los dos niveles atómicos, $\lambda = e \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_F V} \right)^{1/2} \omega_A(\mathbf{r})_{12} \cdot \mathbf{e}_1$ es la constante de acoplamiento entre el campo y el átomo.

Definimos el operador

$$\hat{\Lambda} = \hat{n} + \frac{\hat{\sigma}_3}{2} + \frac{1}{2}, \quad (7.2)$$

este operador $\hat{\Lambda}$ conmuta con el Hamiltoniano y con la parte de interacción átomo-campo, es decir

$$[\hat{\Lambda}, \hat{H}] = 0,$$

$$[\hat{\Lambda}, \hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger] = 0.$$

Despejando el operador $\hat{\sigma}_3/2$ mediante la Ec. (7.2) el Hamiltoniano puede escribirse

$$\hat{H} = \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right) (\omega_F - \omega_A) + \omega_A \hat{\Lambda} + \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (7.3)$$

Si suponemos que la frecuencia de campo está en resonancia con la diferencia de energías del átomo tendremos

$$\hat{H} = \omega_A \hat{\Lambda} + \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger), \quad (7.4)$$

donde ambos sumandos del Hamiltoniano conmutan por lo que el operador de evolución del sistema es la multiplicación de las exponenciales de ambos términos

$$\hat{U} = \exp(-i\hat{H}t) = e^{-i\omega_A \hat{\Lambda} t} e^{-i\lambda(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)t}. \quad (7.5)$$

Trabajaremos con el primer multiplicando de este operador. En la base del átomo $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ tenemos que el operador $\hat{\Lambda}$ se escribe

$$\hat{\Lambda} = \hat{n} + \frac{\hat{\sigma}_3}{2} + \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} \hat{n} + 1 & 0 \\ 0 & \hat{n} \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

también tenemos

$$\lambda(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \hat{a} \\ \lambda \hat{a}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

donde hemos tomado que la representación de los estados es

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Puede demostrarse que las potencias de la matriz (7.7) puede escribirse como sigue

$$e^{-i\lambda(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger)t} = \begin{pmatrix} \cos(\lambda t \sqrt{\hat{n} + 1}) & -i \hat{a} \frac{\sin(\lambda t \sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}} \\ -i \hat{a}^\dagger \frac{\sin(\lambda t \sqrt{\hat{n} + 1})}{\sqrt{\hat{n} + 1}} & \cos(\lambda t \sqrt{\hat{n}}) \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

La otra exponencial de la Ec. (7.5) queda de la siguiente forma

$$e^{-i\omega_A \hat{\Lambda} t} = \begin{pmatrix} e^{-\omega_A(\hat{n} + 1)t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_A \hat{n} t} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

Por lo que el operador de evolución temporal queda

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{-\omega_A(\hat{n}+1)t} \cos(\lambda t \sqrt{\hat{n}+1}) & -ie^{-\omega_A(\hat{n}+1)t} \hat{a} \frac{\sin(\lambda t \sqrt{\hat{n}})}{\sqrt{\hat{n}}} \\ -ie^{-\omega_A \hat{n}t} \hat{a}^\dagger \frac{\sin(\lambda t \sqrt{\hat{n}+1})}{\sqrt{\hat{n}+1}} & e^{-\omega_A \hat{n}t} \cos(\lambda t \sqrt{\hat{n}}) \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Considerando el estado inicial general

$$|\psi(0)\rangle = (a|e\rangle + b|g\rangle)|\alpha\rangle, \quad (7.12)$$

donde escribimos el estado coherente en términos de los estados de Fock $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ con $c_n = \exp(-|\alpha|^2/2) \alpha^n / \sqrt{n!}$. Encontramos que al actuar con el operador \hat{U} se obtiene el estado

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U} |\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n |e\rangle + \delta_n |g\rangle) |n\rangle, \quad (7.13)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma_n &= (a c_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - ib c_{n+1} \sin(\lambda t \sqrt{n+1})) e^{-i\omega_A(n+1)t}, \\ \delta_n &= (b c_n \cos(\lambda t \sqrt{n}) - ia c_{n-1} \sin(\lambda t \sqrt{n})) e^{-i\omega_A n t}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Como $|\psi(t)\rangle$ está normalizado, se sigue la propiedad de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|\gamma_n|^2 + |\delta_n|^2) = 1. \quad (7.15)$$

La matriz densidad del sistema al tiempo t

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n |e\rangle + \delta_n |g\rangle) (\gamma_{n'}^* \langle e| + \delta_{n'}^* \langle g|) |n\rangle \langle n'| \quad (7.16)$$

se subraya que la dependencia temporal está en las variables $\gamma_n, \gamma_{n'}^*, \delta_n$ y $\delta_{n'}^*$. Para obtener la matriz reducida para el campo tenemos que trazar sobre la base atómica. Esta operación está ligada a medir el estado cuántico del átomo de forma que no se vea afectado el campo. Lo cual veremos hará que nuestro campo tenga una evolución no unitaria. La matriz reducida del campo electromagnético es

$$\hat{\rho}_F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) |n\rangle \langle n'| \quad (7.17)$$

Esta matriz densidad en general representa un estado mixto como veremos a continuación.

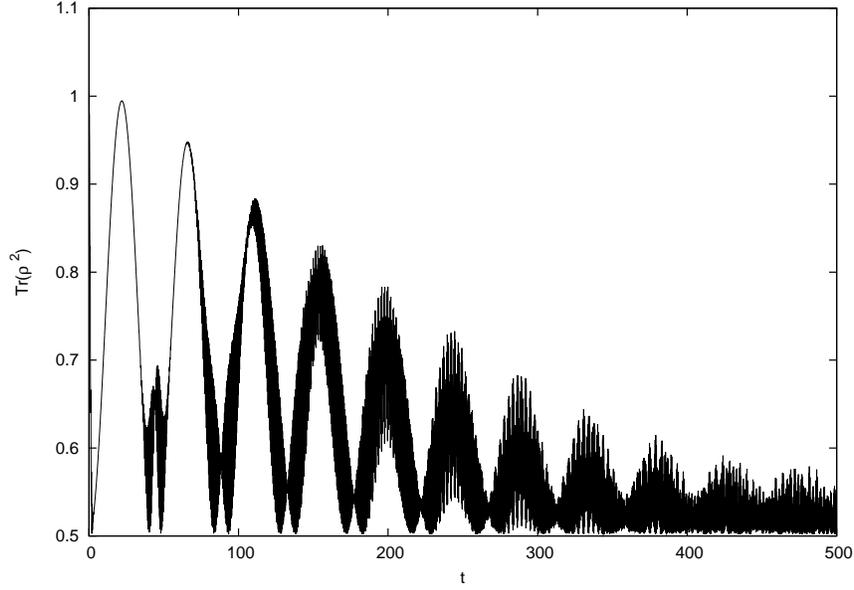


Figura 7.1. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=1$, $b=0$

7.2. Traza del Cuadrado del Operador Densidad.

Ahora estudiaremos varias de las propiedades de la matriz densidad de nuestro campo electromagnético. Primero abordaremos la traza del cuadrado del operador densidad para observar para que tiempos nuestro estado es un estado puro y cuando es mixto. Ya que recordemos que se tiene que cumplir la siguiente propiedad.

$$\text{Tr}(\hat{\rho}^2) \begin{cases} < 1 & \text{estado mixto} \\ = 1 & \text{estado puro} \end{cases}$$

Además esta cantidad está relacionada con la entropía lineal $S = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ del sistema, la cual es a su vez una aproximación de la entropía de von Neumann $S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log(\hat{\rho}))$.

La traza puede obtenerse fácilmente de la Ec. (7.17) dando como resultado

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_F^2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^2 \right)^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_n \delta_n^* \gamma_m^* \delta_m + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n|^2 \right)^2 \quad (7.18)$$

la cual graficamos a continuación para varios casos de a y b

Como podemos observar en la gráficas (7.1) a (7.8), para casi todos los casos de a y b se tiene un comportamiento oscilatorio en la traza. A la mitad del tiempo de

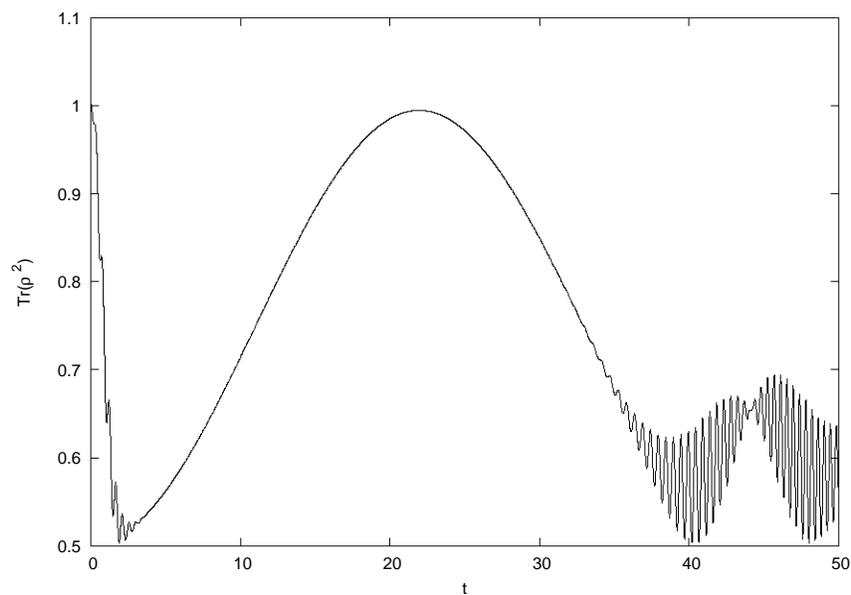


Figura 7.2. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=1$, $b=0$

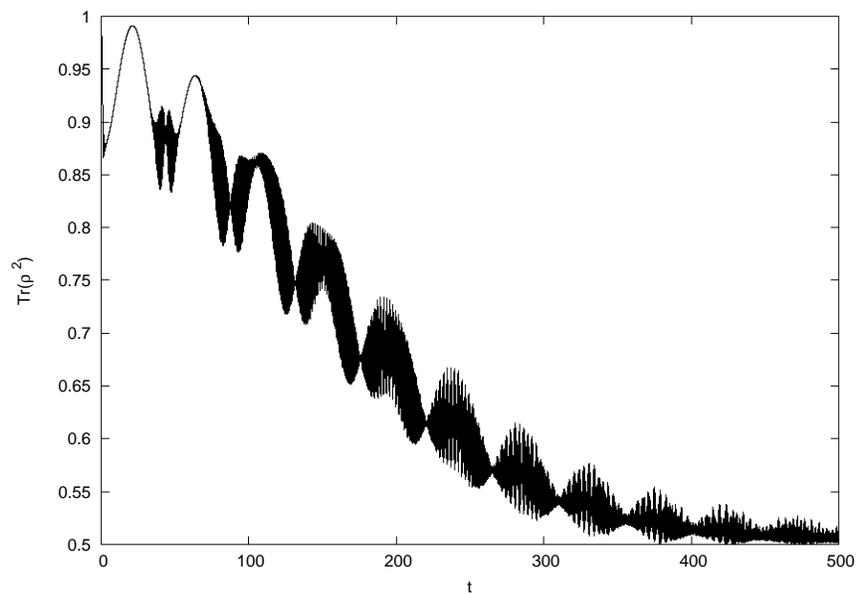


Figura 7.3. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

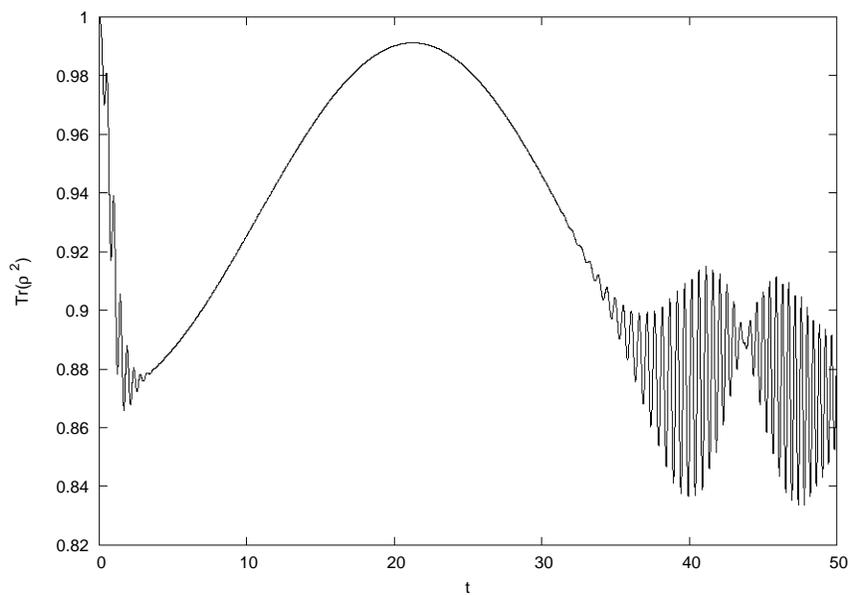


Figura 7.4. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$,
 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

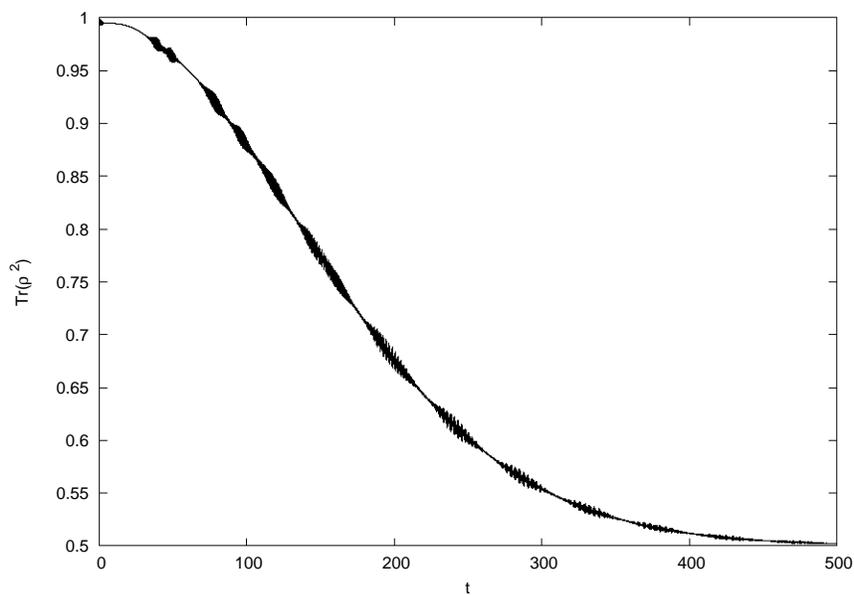


Figura 7.5. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$,
 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

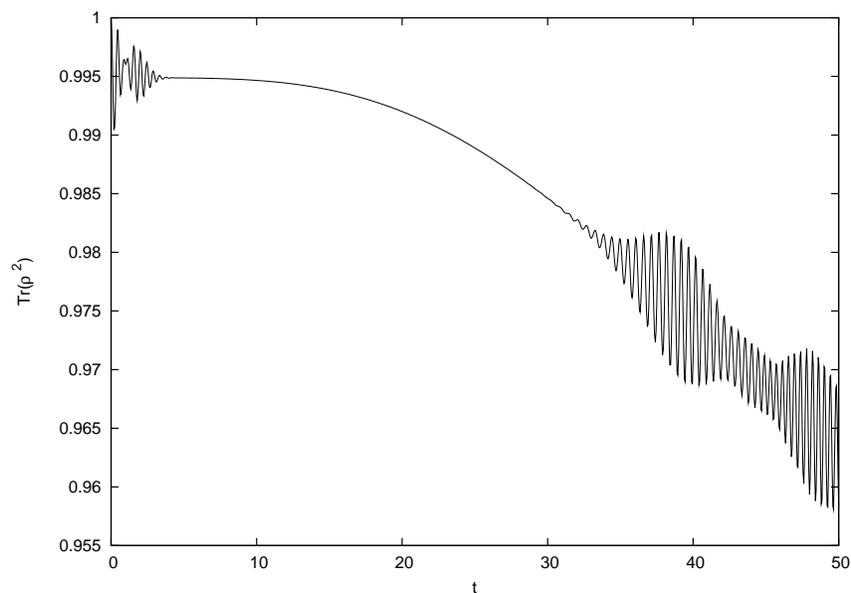


Figura 7.6. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$,
 $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

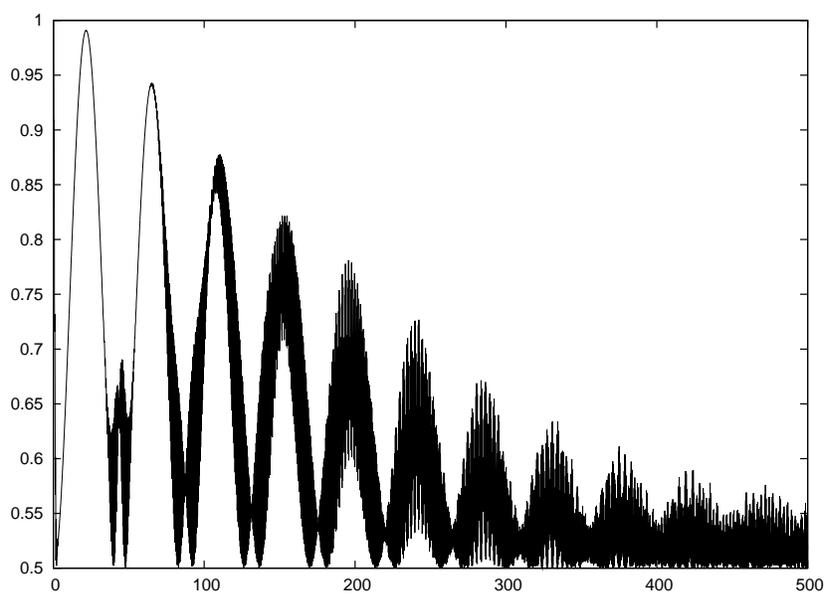


Figura 7.7. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$,
 $a = 0, b = 1$

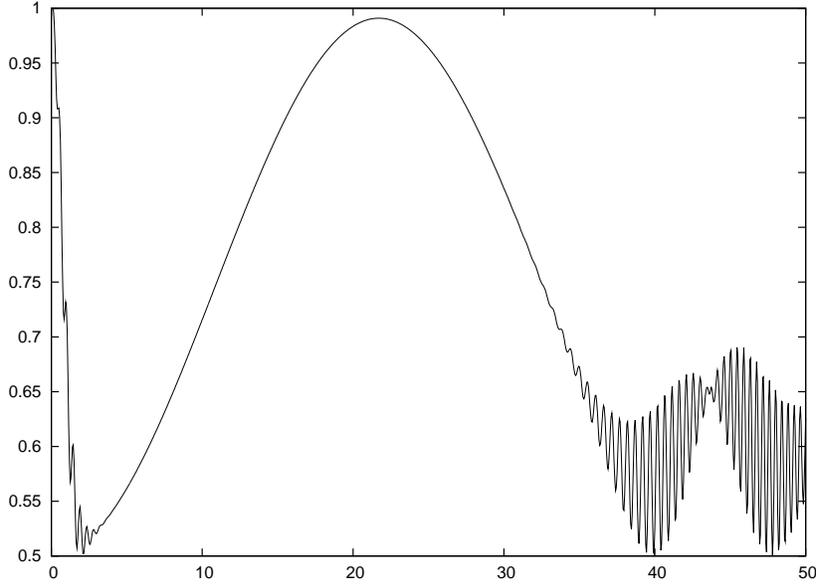


Figura 7.8. Traza del cuadrado del operador densidad en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = 0$, $b = 1$

resurgimiento ($t_R/2 = \pi |\alpha|/\lambda \sim 22$, por simplicidad se fijó $\lambda = 1$), tenemos que el estado es casi un estado puro. Lo cual es demostrado por Banacloche.

Sin embargo para el caso particular de $a = b = 1/\sqrt{2}$ este comportamiento no se presenta en vez de esto vemos que el estado puro inicial tarda en convertirse en un estado mezcla (ver Fig. (7.3)).

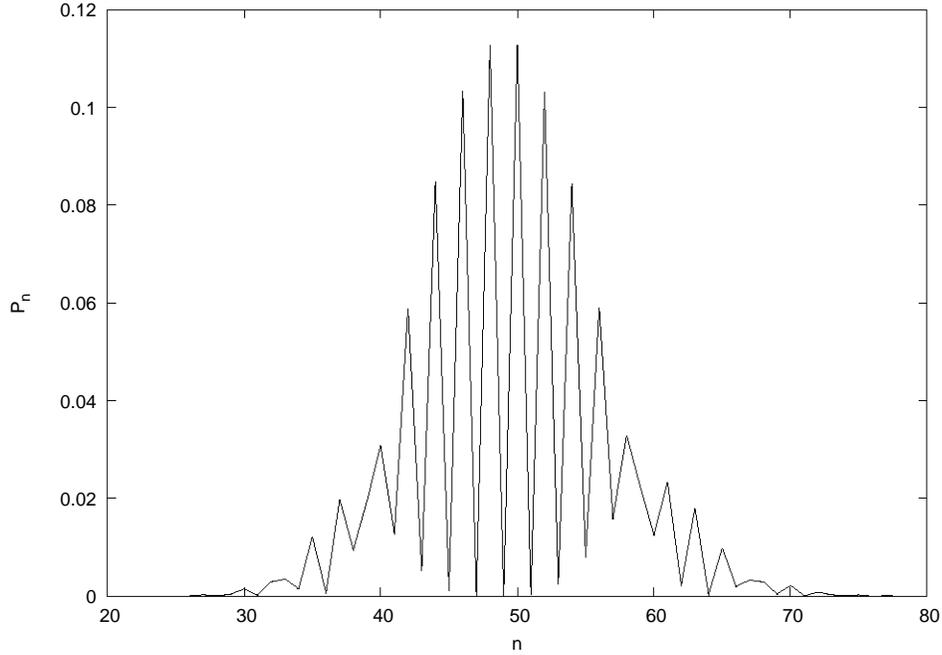
También podemos notar que no importando el estado inicial del átomo que definen los valores de a y b , después de un cierto tiempo llegamos a que el estado del campo se convierte en una mezcla estadística, dado que la $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ llega al valor de $1/2$.

El comportamiento de las curvas cuando el estado atómico inicial es el estado excitado $|e\rangle$ es prácticamente el mismo que cuando inicialmente está en el estado base $|g\rangle$.

7.3. Estadística de Fotones e Inversión de Población

Siendo que para la mitad del tiempo de resurgimiento tenemos un estado muy parecido a un estado puro. Veremos la distribución de fotones para ese tiempo de nuevo para varios casos de a y b . La probabilidad de obtener exactamente l fotones en nuestro campo es

$$\mathcal{P}_l(t) = \langle l | \hat{\rho}_F | l \rangle = (|\gamma_l|^2 + |\delta_l|^2), \quad (7.19)$$


 Figura 7.9. Distribución del número de fotones. Para $\alpha=7$, $a=1$, $b=0$

esta es una función del tiempo y del número de fotones. Las gráficas de la dependencia en el número de fotones de esta probabilidad es graficada para un tiempo la mitad del tiempo de resurgimiento

Vemos (Figs. (7.9) a (7.12)) que para este tiempo el comportamiento en la probabilidad es bastante parecida a la que encontramos para el estado par de gato donde solo contribuyen los estados con un número de fotones par y la probabilidad de un número de fotones impar es casi nula. Por lo cual podemos sospechar que la evolución de nuestro estado coherente lleva a un estado de gato en determinado tiempo, la mitad del tiempo de resurgimiento.

También vemos que esta aseveración es válida solo para estados que evolucionaron de un estado inicial cuya parte atómica es uno de los dos estados de la base, el estado excitado o el estado base. En el caso de un estado inicial atómico como una superposición, el comportamiento no es tan parecido al de la estadística de fotones del estado par de gato. Teniendo un comportamiento límite, de nuevo, cuando $a = b = 1/\sqrt{2}$. Congruente con lo visto en la subsección anterior.

La inversión de población es el valor esperado del operador \hat{J}_z el cual en este caso está dado por

$$\langle \hat{J}_z \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (|\gamma_n|^2 - |\delta_n|^2) \quad (7.20)$$

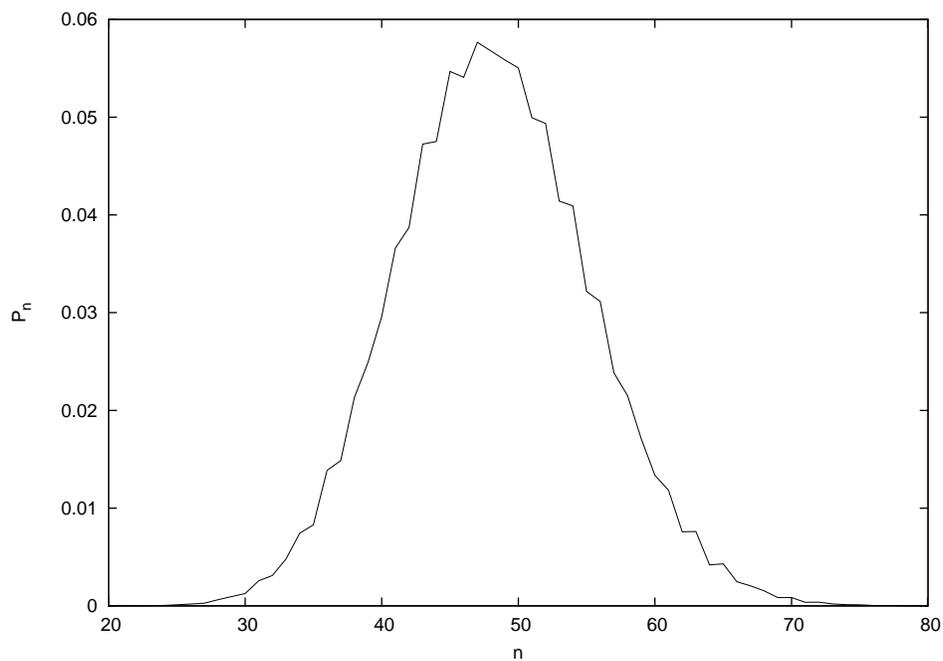


Figura 7.10. Distribución del número de fotones. Para $\alpha=7$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

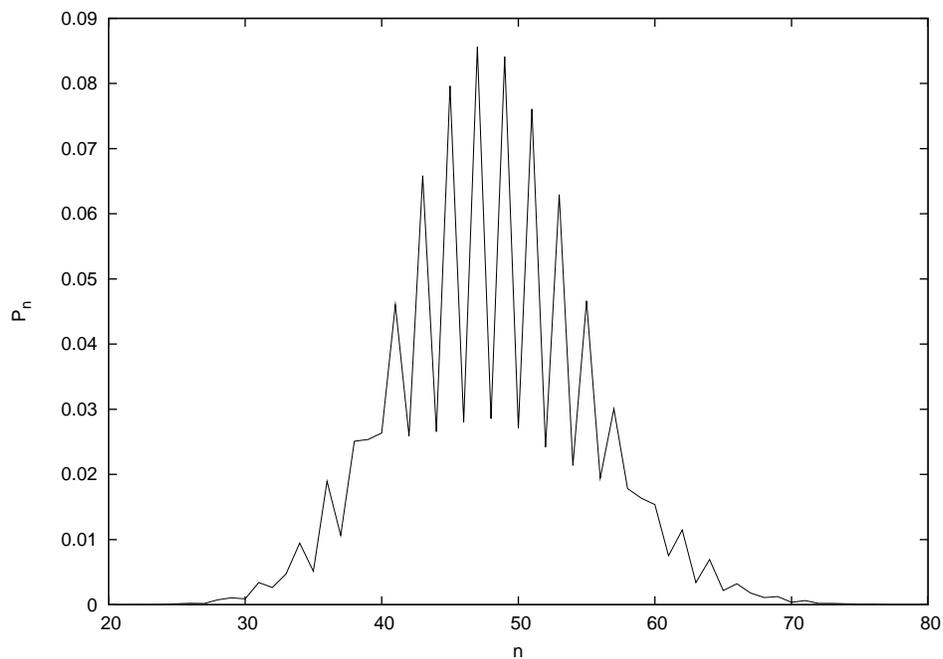


Figura 7.11. Distribución del número de fotones. Para $\alpha=7$, $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

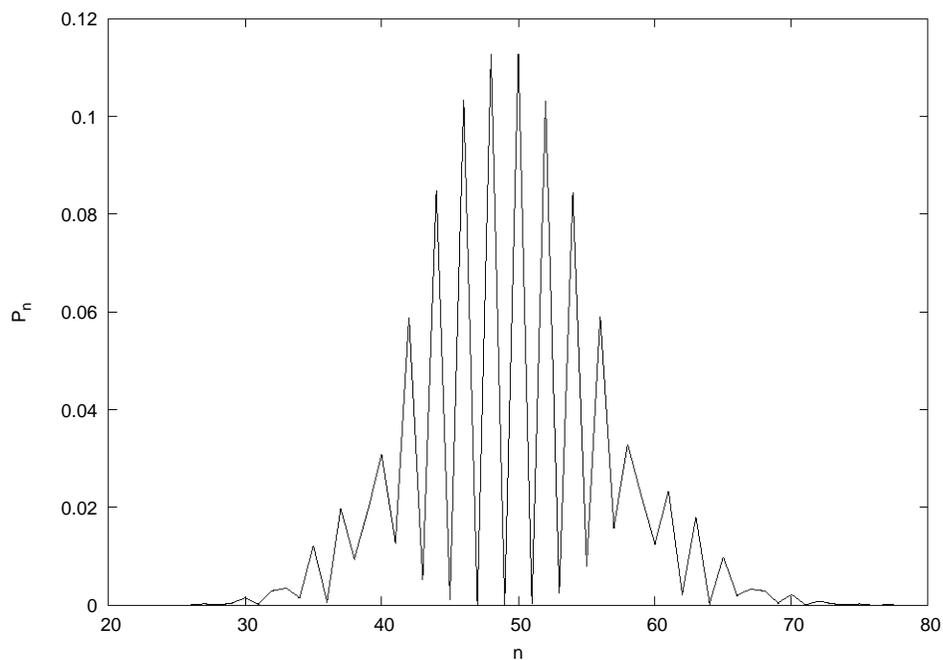


Figura 7.12. Distribución del número de fotones. Para $\alpha=7$, $a = 0$, $b = 1$

la cual se gráfica

Podemos ver que la inversión de población es cero en un gran intervalo de tiempo hasta el tiempo de resurgimiento en el cual se recupera la oscilación que se presenta en un inicio. En un principio al ser $a = 1$, tenemos que el estado inicial del átomo es el estado base. Lo cual se refleja en que a $t = 0$ la inversión de población es $1/2$

Para este caso tenemos el mismo comportamiento que en el caso anterior en el cual la inversión de población es cero en un intervalo donde cae la mitad del tiempo de resurgimiento. Las oscilaciones presentadas al inicio se recuperan cada vez en menor medida en los tiempos múltiplos del tiempo de resurgimiento. Hasta un límite donde las oscilaciones se hace cada vez más ruidosas

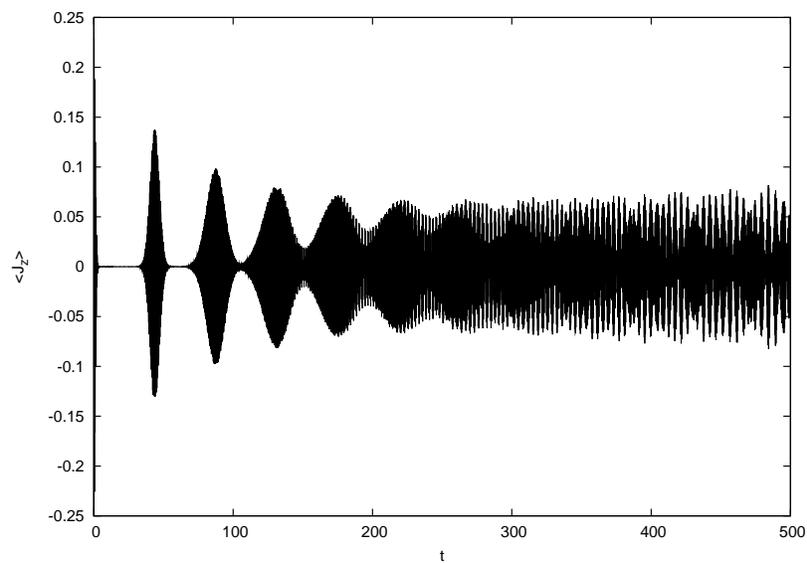


Figura 7.13. $\langle \hat{J}_z \rangle$ en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = 1$, $b = 0$

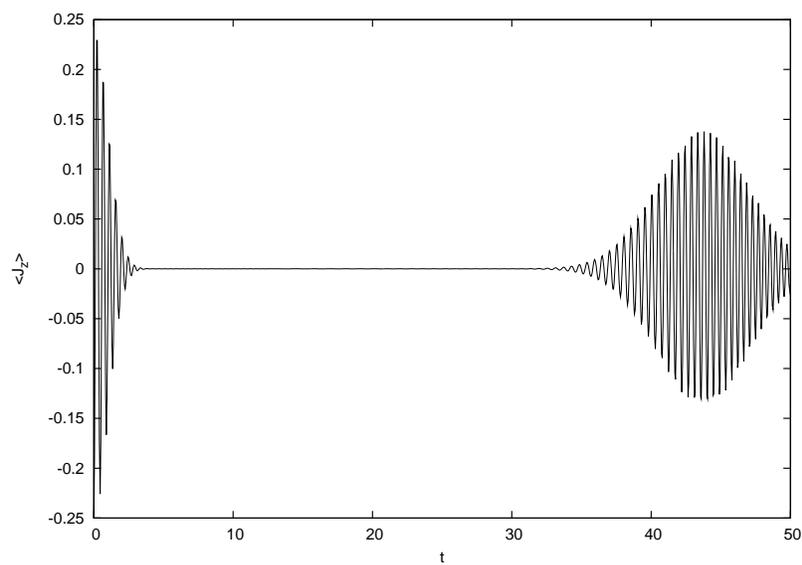


Figura 7.14. $\langle \hat{J}_z \rangle$ en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = 1$, $b = 0$

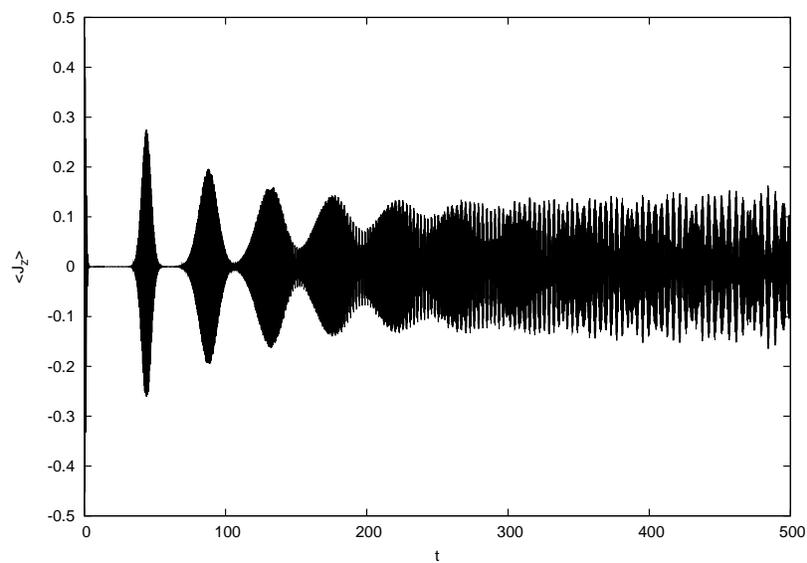


Figura 7.15. $\langle \hat{J}_z \rangle$ en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

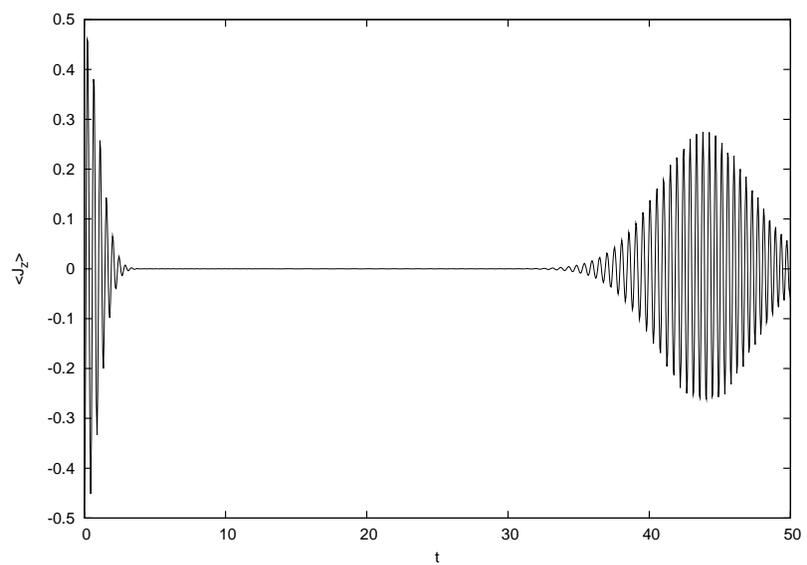


Figura 7.16. $\langle \hat{J}_z \rangle$ en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

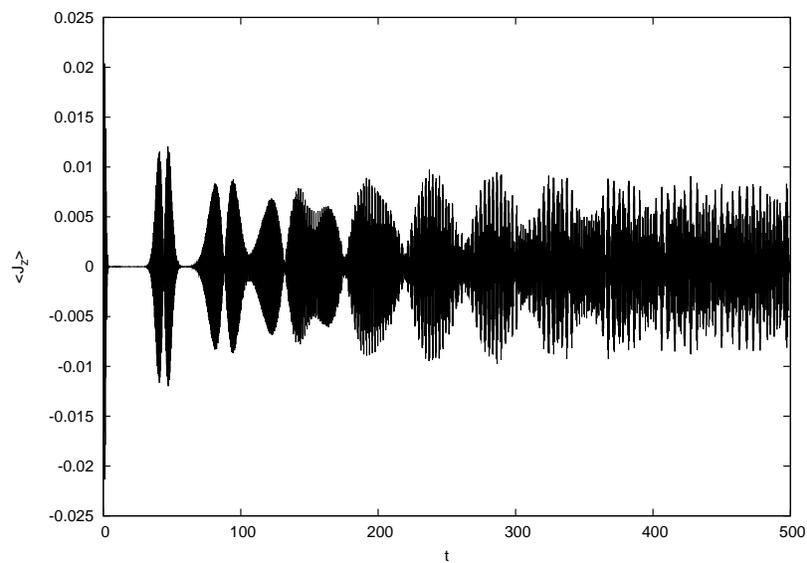


Figura 7.17. $\langle \hat{J}_z \rangle$ en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

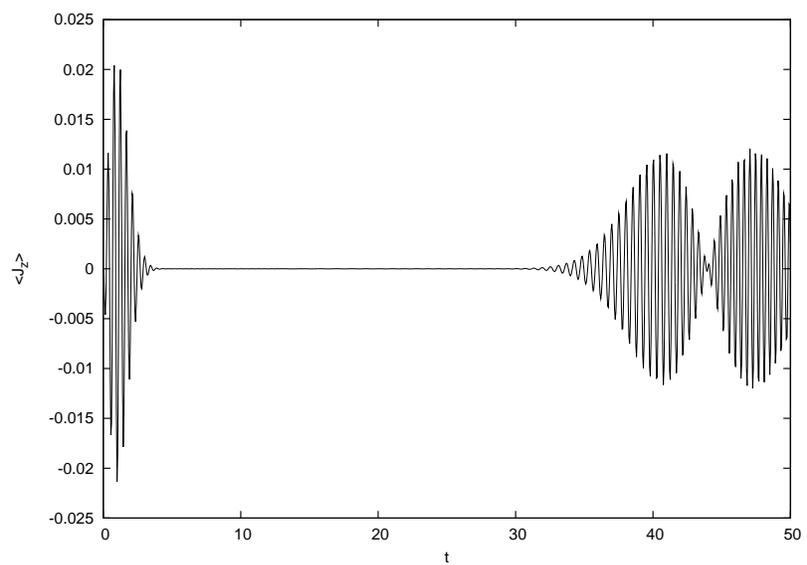


Figura 7.18. $\langle \hat{J}_z \rangle$ en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Para el estado con el mismo peso Fig. (7.18) observamos que en el tiempo de resurgimiento se encuentra un nodo en las oscilaciones dado que en un inicio la inversión de población es también cero. A grandes rasgos no existe un comportamiento muy diferente entre las gráficas correspondientes a los tres casos.

Donde observamos que el promedio es cero para la mitad del tiempo de resurgimiento por lo cual existe la misma probabilidad de encontrar al átomo en su estado base que en su estado excitado. Este fenómeno se da para cualquier estado inicial, lo cual podemos corroborar en todas las figuras ((7.13) a (7.18)).

7.4. Función de Husimi para el Campo

Para determinar la localización del estado y ver si efectivamente hay un comportamiento similar al del estado de gato. Evaluaremos la función de Husimi para nuestra matriz densidad reducida. Para ello tenemos que obtener la función

$$Q_{\hat{\rho}_F} = \frac{1}{\pi} \langle \beta | \hat{\rho}_F | \beta \rangle = \frac{1}{\pi} e^{-|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) \frac{\beta^{*n} \beta^{n'}}{\sqrt{n! n'}} \quad (7.21)$$

haciendo el mapeo al espacio fase, donde $\beta = (x + ip)/\sqrt{2}$ tenemos

$$Q_{\hat{\rho}_F}(x, p; t) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+p^2)/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) \frac{(x - ip)^n (x + ip)^{n'}}{2^{(n+n')/2} \sqrt{n! n'}} \quad (7.22)$$

donde de nuevo la dependencia temporal está en las variables γ y δ . Que cumple con la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp Q_{\hat{\rho}_F}(x, p; t) = 1,$$

la cual es sencilla de demostrar, utilizando coordenadas polares, esto es $x = \rho \cos \phi$, $p = \rho \sin \phi$.

En cada una de las figuras 7.19, 7.20, 7.21, 7.22 y 7.23 se presentan las gráficas de la función de Husimi para los tiempos $t = 0$, $t = t_R/4$, $t = t_R/2$, $t = 3t_R/4$ y $t = t_R$, respectivamente

Observamos que para $t = 0$ (Fig. (7.19)) el comportamiento de la función de Husimi es el de una Gaussiana, distribución que corresponde a la de un estado coherente resultado que se esperaba.

A un cuarto del tiempo de resurgimiento (Fig. (7.20)) la función de Husimi presenta cuatro picos, este tiempo es justo donde la matriz densidad indica que el estado es una mezcla estadística, es decir la $\text{Tr}(\hat{p}^2) = 0.5$

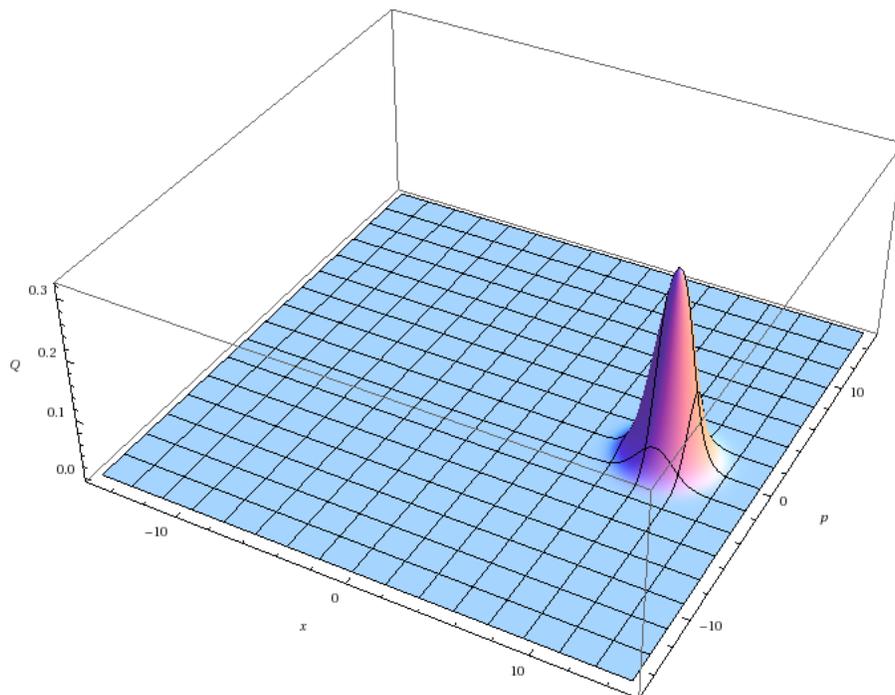


Figura 7.19. Función de Husimi para el campo a $t = 0$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

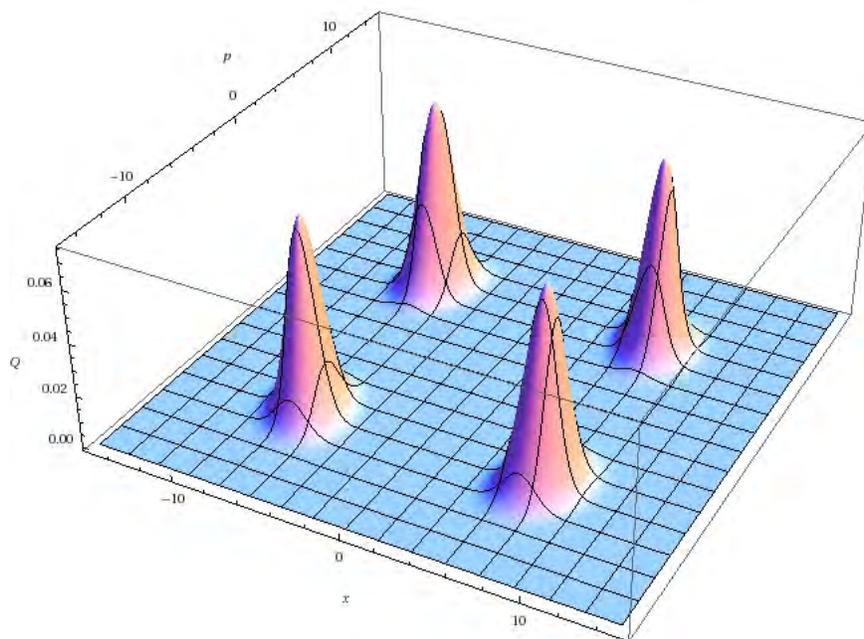


Figura 7.20. Función de Husimi para el campo a $t = \frac{t_R}{4}$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

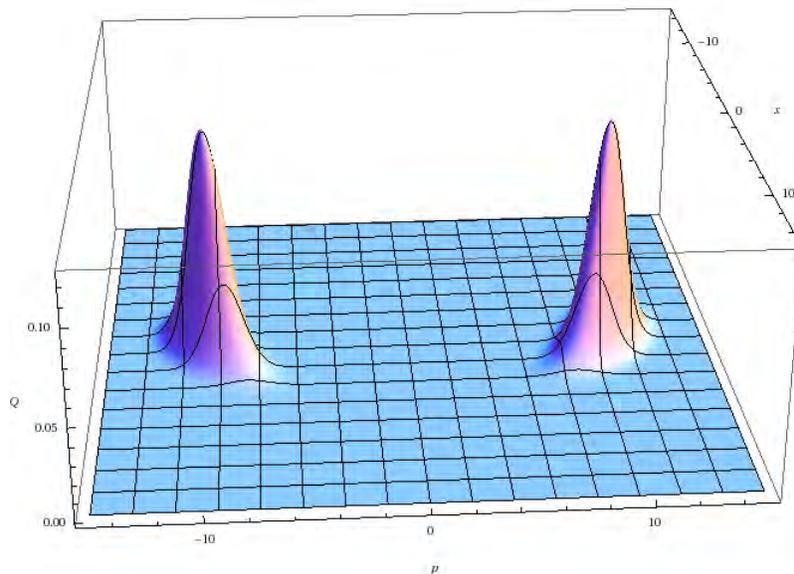


Figura 7.21. Función de Husimi para el campo a $t = \frac{t_R}{2}$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

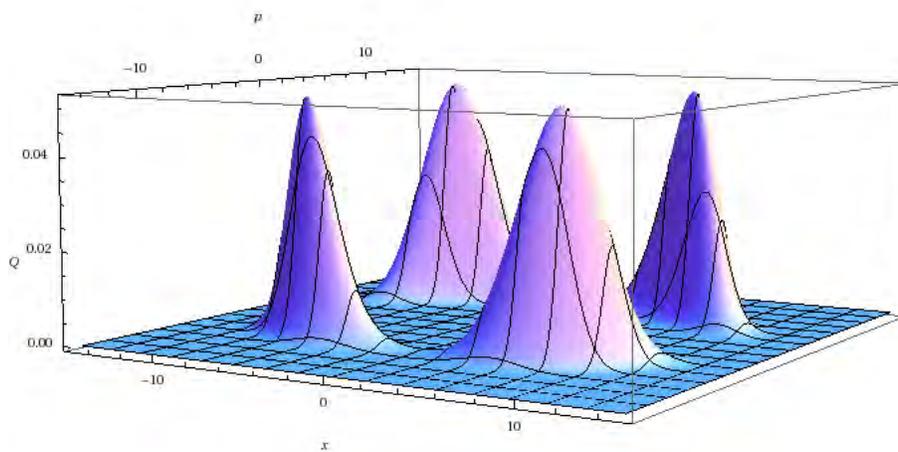


Figura 7.22. Función de Husimi para el campo a $t = \frac{3t_R}{4}$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

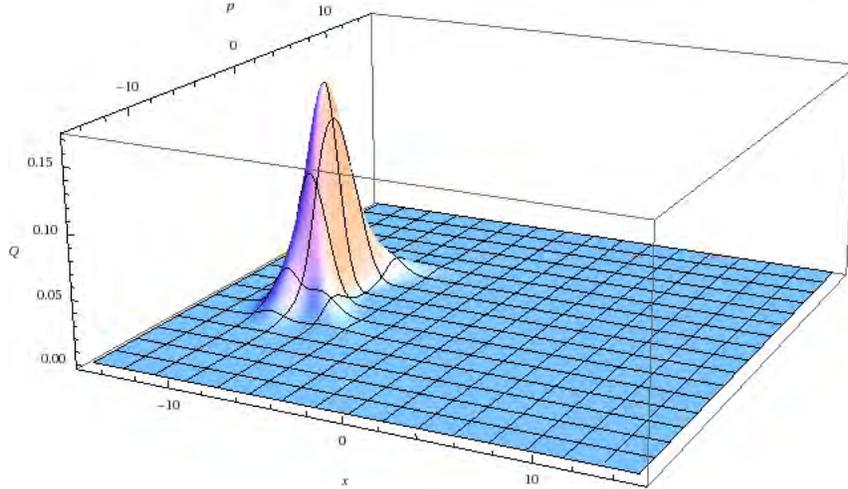


Figura 7.23. Función de Husimi para el campo a $t = t_R$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

Para la mitad del tiempo de resurgimiento la gráfica (7.21) de la función de Husimi presenta dos picos y el comportamiento es similar a la función de Husimi para el estado par de gato (Figura 6.5), solo que los picos están deformados y las variables x y p corresponden a las variables p , x respectivamente en dicha figura.

Para tres cuartos del tiempo (Fig. (7.22)) de resurgimiento volvemos a recuperar los cuatro picos que teníamos en el caso de $t = t_R/4$ por una cierta simetría que existe en la traza del cuadrado de la matriz densidad. Sin embargo los picos son más pequeños que antes los que indica que existe dispersión debido, como veremos a la evolución no unitaria del sistema.

Finalmente para el caso en el tiempo de resurgimiento (Fig. (7.23)) vemos que la función de Husimi recupera hasta cierto punto la forma que tenía a tiempo cero con una rotación de 180° en el eje x . Aunque esta figura tiene la propiedad de tener un mínimo menor que la correspondiente gráfica a $t = 0$ debido a como hemos mencionado que la evolución del sistema es no unitaria.

Recordamos que el inverso del segundo momento (M_2^{-1}) de las distribuciones de Husimi y Wigner corresponden a una medida del área que dichas distribuciones ocupan en el plano (x, p) , dado que no podemos tener pseudo distribuciones de probabilidad que sean puntuales en dicho plano, dado que deben de cumplir la relación de incertidumbre de Heisenberg.

Por otro lado, se puede obtener el segundo momento de la función de Husimi integrando el cuadrado de la función Q en las variables del espacio fase.

$$M_2 = \sum_{n,n',m,m'} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) (\gamma_m \gamma_{m'}^* + \delta_m \delta_{m'}^*) \frac{(n+m)!}{\sqrt{n!n'm!m'}} \delta_{n+m,n'+m'} \quad (7.23)$$

con lo que podemos obtener el área de la distribución de Husimi en el espacio fase, la cual se gráfica enseguida

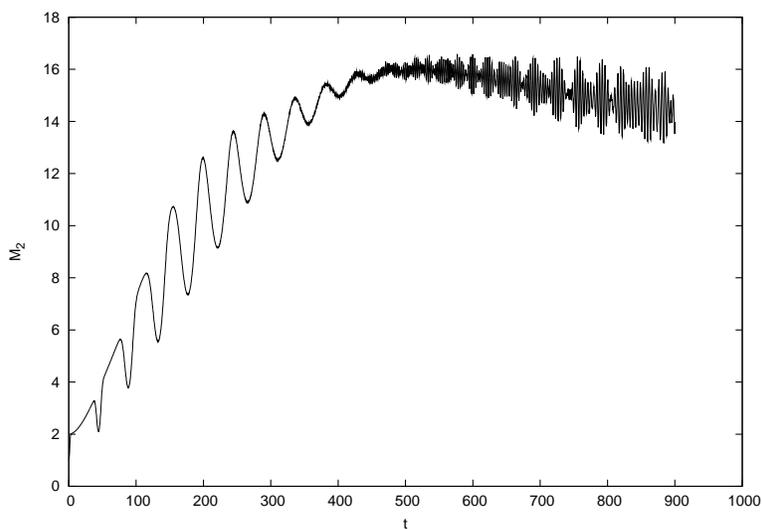


Figura 7.24. M_2^{-1} de la función de Husimi en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = 1$, $b = 0$

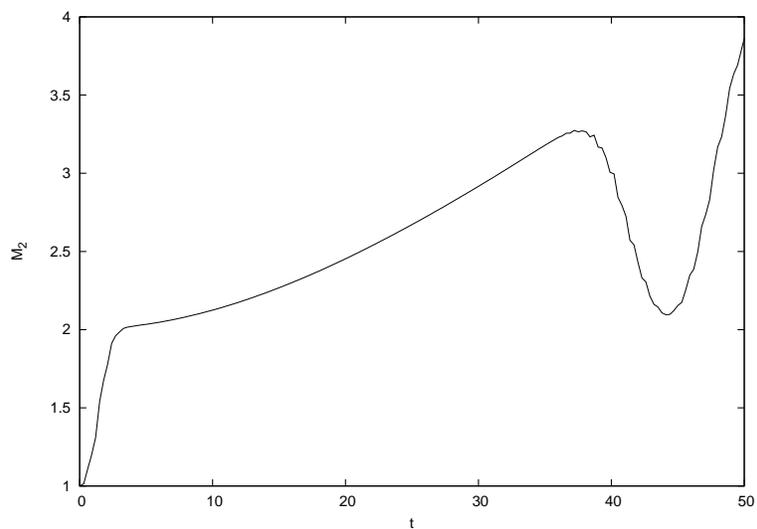


Figura 7.25. M_2^{-1} de la función de Husimi en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = 1$, $b = 0$

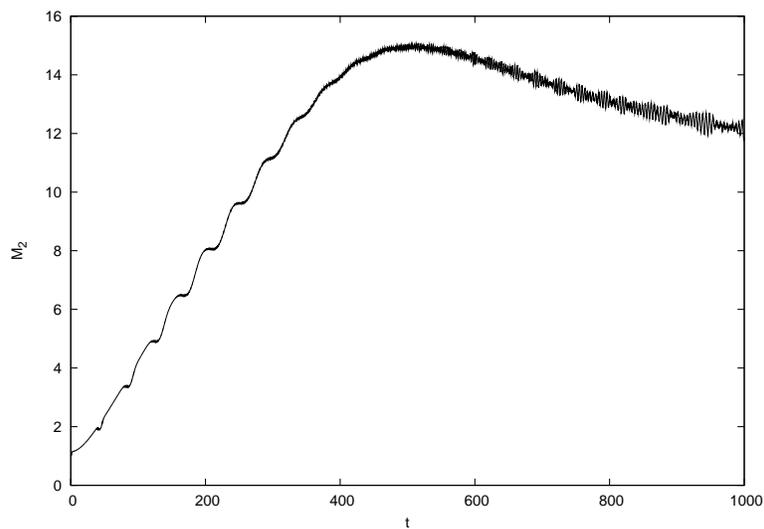


Figura 7.26. M_2^{-1} de la función de Husimi en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

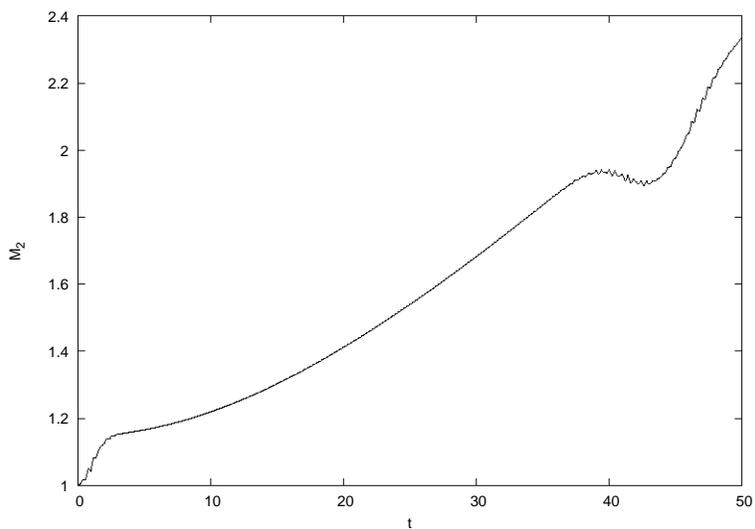


Figura 7.27. M_2^{-1} de la función de Husimi en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

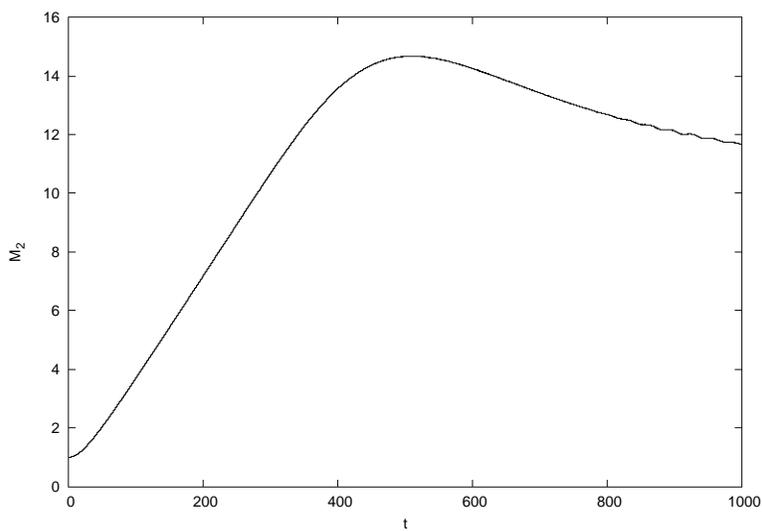


Figura 7.28. M_2^{-1} de la función de Husimi en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

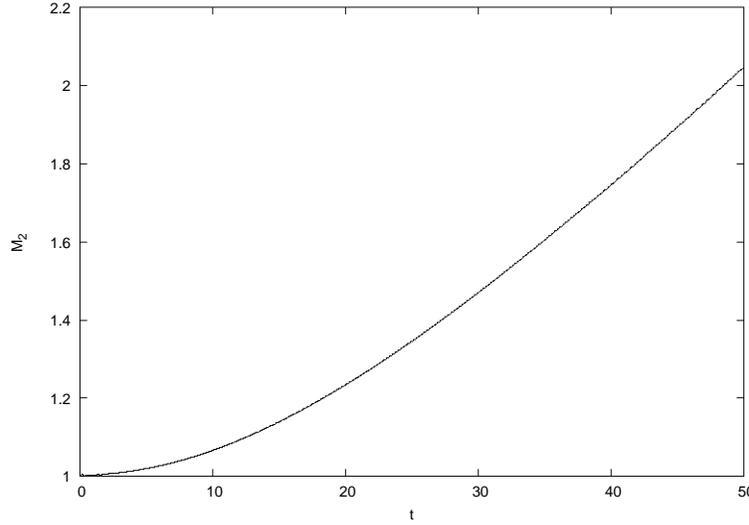


Figura 7.29. M_2^{-1} de la función de Husimi en función del tiempo. Para $\alpha=7$, $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Como podemos ver (Figs. (7.24) a (7.29)) el área presenta un comportamiento oscilatorio, cuyos mínimos locales corresponden a múltiplos del tiempo de resurgimiento. Sin embargo para un cierto tiempo estas oscilaciones se vuelven muy rápidas y a partir de ese tiempo el área de la distribución empieza a disminuir. Para la mitad del tiempo de resurgimiento se obtiene un área cercana a 2.5 que se aproxima al área ocupada por un estado par de gato, para el cual el área es 2. Por esto podemos aseverar que el comportamiento en el área del estado para ese tiempo es parecido al del estado par de gato.

7.5. Función de Wigner para el Campo

Necesitamos evaluar la función de Wigner de la matriz densidad

$$\hat{\rho}_F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) |n\rangle \langle n'|$$

por lo cual nos abocaremos a encontrar la matriz densidad del operador no diagonal $|n\rangle \langle n'|$ ¹, de estados de Fock. Para ello utilizaremos la siguiente definición de dichos estados

¹ Se presenta también una forma alternativa de obtener la función de Wigner para esta matriz densidad en el apéndice C

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{|\alpha|^2/2} |\alpha\rangle \Big|_{\alpha=0} \quad (7.24)$$

Análogamente, tenemos

$$\langle n'| = \frac{1}{\sqrt{n'!}} \frac{\partial^{n'}}{\partial \beta^{*n'}} e^{|\beta|^2/2} \langle \beta| \Big|_{\beta^*=0} \quad (7.25)$$

donde $|\alpha\rangle$ y $|\beta\rangle$ son estados coherentes. Con lo cual la función de Wigner queda

$$W_{|n\rangle\langle n'|} = \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{\partial^{n'}}{\partial \beta^{*n'}} e^{\frac{(|\alpha|^2+|\beta|^2)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \mid \alpha \right\rangle \left\langle \beta \mid x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \Big|_{\alpha,\beta^*=0} \quad (7.26)$$

puesto que se ha tomado $\hbar = 1$. Se puede probar que

$$\langle x|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2 + \sqrt{2}x\alpha - \alpha^2/2 - |\alpha|^2/2} \quad (7.27)$$

por lo tanto la función de Wigner se escribe

$$W_{|n\rangle\langle n'|} = \frac{(2\pi)^{-1}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{\partial^{n'}}{\partial \beta^{*n'}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -x^2 + \sqrt{2}x(\alpha + \beta^*) \right\} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^{*2}}{2} \right\} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{(-ip + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta^*))\xi - \frac{1}{4}\xi^2} \Big|_{\alpha,\beta^*=0} \quad (7.28)$$

solamente queda resolver la integral Gaussiana de lo cual se sigue

$$W_{|n\rangle\langle n'|} = \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{n!n'!}} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \frac{\partial^{n'}}{\partial \beta^{*n'}} e^{-x^2 - p^2} e^{\sqrt{2}\alpha(x-ip) + \sqrt{2}\beta^*(x+ip) - \alpha\beta^*} \Big|_{\alpha,\beta^*=0}. \quad (7.29)$$

Derivando con respecto a α , después utilizando la regla de Leibnitz² para la derivada de un producto, para realizar las derivadas con respecto a β^* y finalmente evaluando $\alpha = \beta^* = 0$ tenemos que

$$W_{|n\rangle\langle n'|} = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \sum_{s=0}^{n'} \frac{\sqrt{n!n'!} (-1)^s}{(n'-s)!(n-s)!s!} (\sqrt{2}(x+ip))^{n'-s} (\sqrt{2}(x-ip))^{n-s} \quad (7.30)$$

² $\frac{d^n}{dx^n} [A(x)B(x)] = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} A(x) \frac{d^s}{dx^s} B(x)$

Se hace notar que en el caso de $n' = n$ es posible obtener de la Ec. (7.30) el resultado

$$W_{|n\rangle\langle n|} = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} (-1)^n L_n(2(x^2 + p^2)) \quad (7.31)$$

la función de Wigner para un estado de Fock, donde L_n son los polinomios de Laguerre. De este resultado se obtiene que la función de Wigner para el operador densidad del campo es

$$W_{\hat{\rho}_F} = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) \sum_{s=0}^{n'} \frac{\sqrt{n!n'} (-1)^s}{(n'-s)!(n-s)!s!} (\sqrt{2}(x+ip))^{n'-s} (\sqrt{2}(x-ip))^{n-s} \quad (7.32)$$

utilizando la relación

$$\sum_{s=0}^{n'} \binom{n}{s} \binom{n'}{s} q^s s! = (-q)^{n'} U\left(-n', 1 - n + n', -\frac{1}{q}\right) \quad (7.33)$$

donde la función U es la función hipergeométrica confluyente, se obtiene que

$$W_{\hat{\rho}_F} = \frac{1}{\pi} e^{-x^2 - p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) \frac{1}{\sqrt{n!n'}} \frac{(\sqrt{2}(x+ip))^{n'} (\sqrt{2}(x-ip))^n}{(2(x^2 + p^2))^n} \times U(-n, 1 - n - n', 2(x^2 + p^2)) \quad (7.34)$$

es fácil demostrar que cumple con la relación de normalización, haciendo uso del teorema de binomio y de la Ec. (7.15), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\hat{\rho}_F}(x, p; t) = 1$$

A continuación mostramos las gráficas de la función de Wigner para varios tiempos, $t = 0$ en la Fig. 7.30, $t = t_R/4$ en la Fig. 7.31, $t = t_R/2$ en la Fig. 7.32, $t = 3t_R/2$ en la Fig. 7.33 y $t = t_R$ en la Fig. 7.34. Se utilizaron los valores $\alpha = 7$, $a = 1$ y $b = 0$ para el estado inicial

Observamos en $t = 0$ (Fig. 7.30) una función Gaussiana que corresponde a la función de Wigner para un estado coherente. Por lo cual no presenta comportamientos cuánticos lo que se traduce en que la función de Wigner siempre es positiva.

Para $t = t_R/4$ (Fig. (7.31)) se presentan seis picos, esto nos indica una deslocalización del sistema, dos de estos picos presentan partes negativas. Aquí vemos que el comportamiento cuántico de la matriz densidad para el campo empieza a

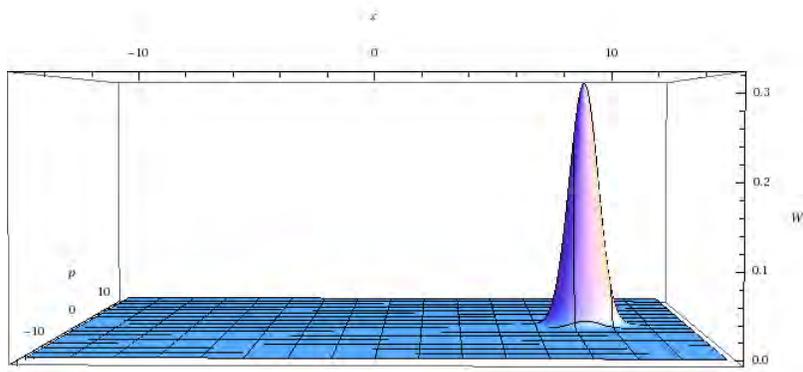


Figura 7.30. Función de Wigner para el campo a $t = 0$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

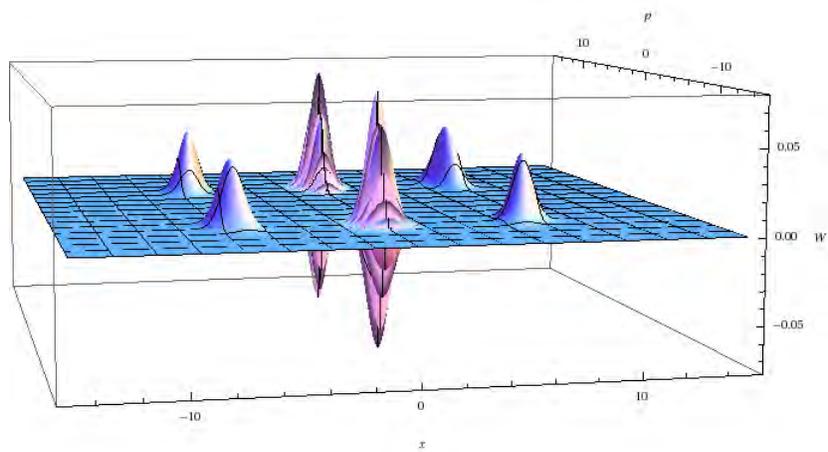


Figura 7.31. Función de Wigner para el campo a $t = \frac{t_R}{4}$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

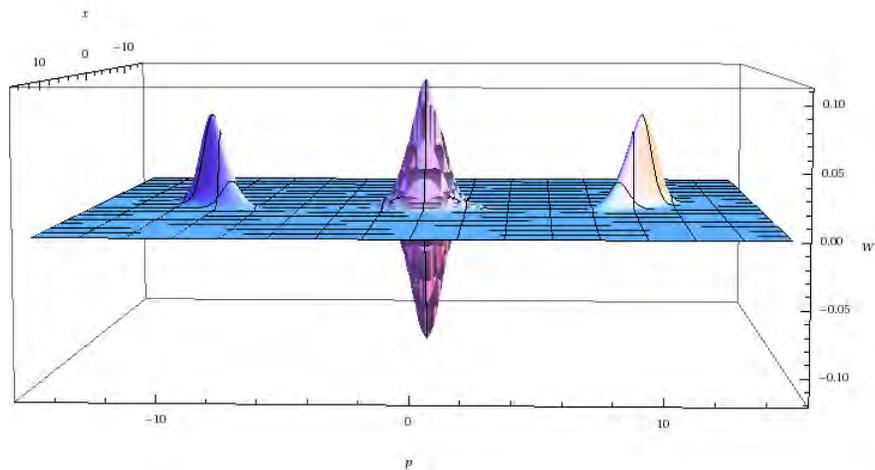


Figura 7.32. Función de Wigner para el campo a $t = \frac{t_R}{2}$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

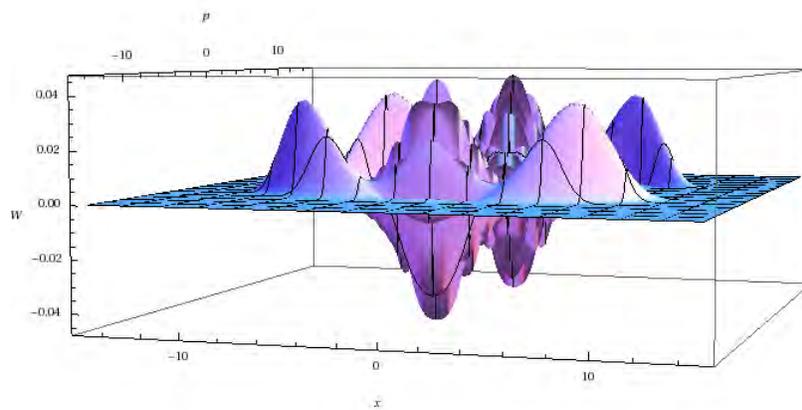


Figura 7.33. Función de Wigner para el campo a $t = \frac{3t_R}{4}$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

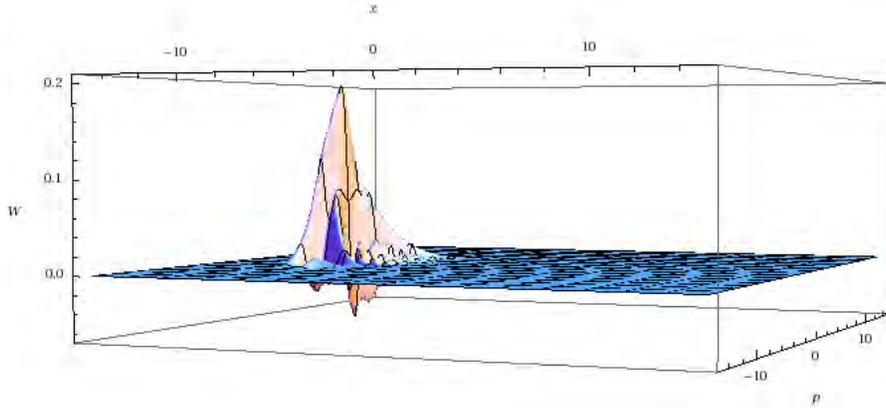


Figura 7.34. Función de Wigner para el campo a $t = t_R$, $\alpha = 7$, $a = 1$, $b = 0$

manifestarse. También podemos ver que estos picos tienen máximos muy pequeños con respecto a el único máximo en $t = 0$.

En la mitad del tiempo de resurgimiento observamos en la imagen (7.32) tres picos y con máximos mayores que aquellos seis de la gráfica 7.21. Recordando que la mezcla estadística de estado converge a un estado puro para este tiempo.

Para $t = 3t_R/4$ (Fig. 7.33) recuperamos los seis picos, sin embargo esta vez tenemos que están casi superpuestos y con máximos algo menores a los que teníamos en $t = t_R/4$ debido de nuevo a la evolución no unitaria presentada por el sistema.

Finalmente para el tiempo de resurgimiento, la gráfica (7.34) de la función de Wigner recupera en cierta grado la forma Gaussiana que se tiene a $t = 0$, tal y como se observaba en la función de Husimi; salvo que en este caso aun se presenta una pequeña parte negativa de la función de Wigner. También observamos que existe la misma rotación de 180° en el eje x entre esta última gráfica y la función de Wigner a $t = 0$ que también se tiene en la función de Husimi.

De estas gráficas podemos observar que para la mitad del tiempo de resurgimiento $t = 7\pi \sim 22$ unidades se presenta un comportamiento similar de la función de Wigner para el campo y un estado par de gato de Schrödinger con el mismo valor para el parámetro $\alpha = 7$. Sin embargo si comparamos estas dos funciones vemos que están rotadas 90° una con respecto de la otra. En otras palabras el eje x en una gráfica corresponde al eje p de la otra gráfica. Esto puede solucionarse de la forma aprendida

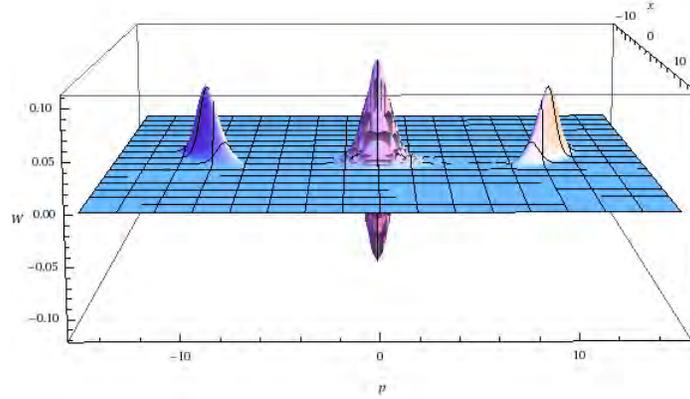


Figura 7.35. Función de Wigner para el campo con $\alpha = 7i$

en el Capítulo 6. En el caso del oscilador armónico la evolución temporal de un estado de gato se obtiene mediante la sustitución de $\alpha \rightarrow \alpha e^{i\omega t}$ donde ω es la frecuencia angular del oscilador. El efecto de esta sustitución es la de rotar la función de Wigner en el espacio fase en función del tiempo, sin deformar la gráfica, y el ángulo rotado equivale al valor de ωt como se puede esperar

Con esto en mente podemos rotar un ángulo de 90° sustituyendo $\alpha = 7$ por $\alpha' = 7e^{i\pi/2} = 7i$ en el estado par de gato y comparamos de nuevo las dos funciones de Wigner en la Fig. 7.35

Podemos observar que estas dos funciones ((7.35) y (7.36)) ahora coinciden de forma bastante aceptable, sin embargo aun se puede hacer más y es comparar el traslape entre el estado par de gato y la matriz densidad para el campo eléctrico con $t = 7\pi$, es decir calcular la probabilidad

$$\text{Traslape} = \langle \alpha_+ | \hat{\rho}_F | \alpha_+ \rangle \tag{7.35}$$

El cual podemos observar Fig (7.37) que para el tiempo requerido toma un valor de aproximadamente 0.75, es decir que la probabilidad de que el estado par de gato y la matriz densidad del campo coincidan para ese tiempo es del 75%. Este valor es justo en la mitad del tiempo de resurgimiento y decae muy rápido en medida que nos alejamos de dicho tiempo. Por lo que ahora corroboraremos que algunas de las propiedades de estos dos estados son muy semejantes

Con la estadística del número de fotones veremos las coincidencias entre estos estados

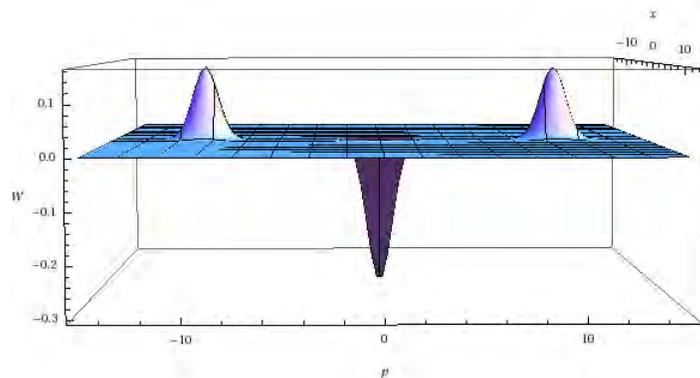


Figura 7.36. Función de Wigner para el estado par de gato con $\alpha = 7i$

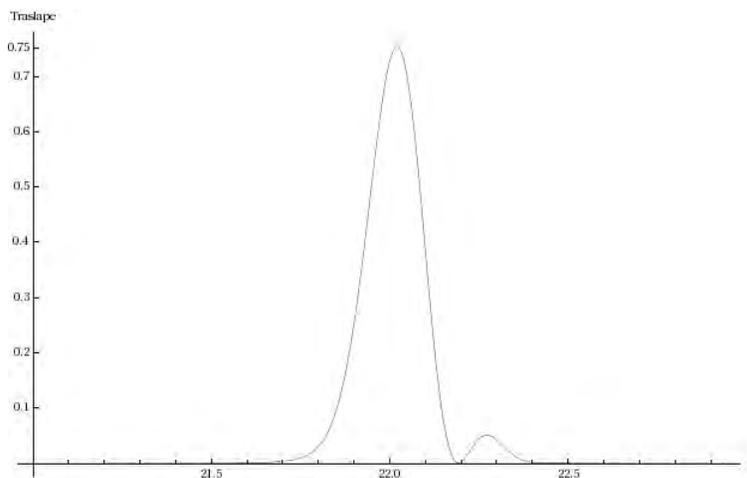


Figura 7.37. Traslape entre el estado par con $\alpha = 7i$ y la matriz densidad del campo con $\alpha = 7$

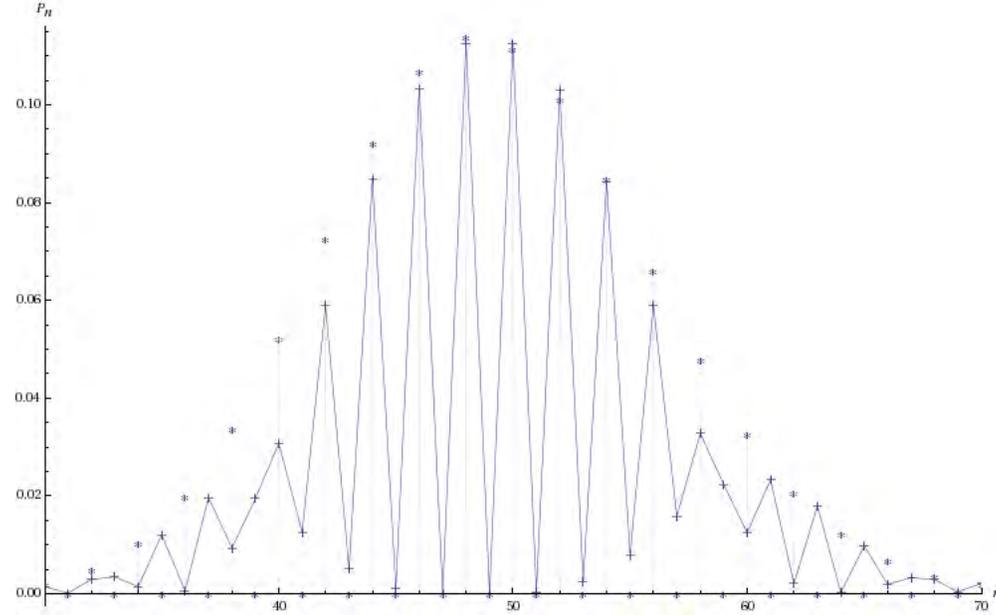


Figura 7.38. Distribución del número de fotones n , los asteriscos corresponden al estado par de gato con $\alpha = 7i$ y la línea con signos de suma corresponde a la matriz densidad del campo con $\alpha = 7$

La distribución de fotones de la Fig. (7.38) toma un comportamiento oscilatorio en ambos casos. Sin embargo la distribución para el campo tiene la propiedad que contiene una contribución mayor para los números de fotones pares mientras que los números impares contribuyen en menor medida pero no es cero dicha contribución. Para el estado par de gato como hemos mencionado anteriormente solo contribuyen los números de fotones pares. Observamos que las colas de la distribución del campo son aquellos que no se apegan a lo previsto en el estado par y por ello no tenemos un 100 % de coincidencia entre nuestro estado y el estado par

Con estos resultados concluimos que las propiedades de la matriz densidad para el campo a la mitad del tiempo de resurgimiento son bastante parecidas con las de un estado par de gato de Schrödinger, sin embargo difieren en el valor del parámetro α

De la misma forma que obtuvimos el segundo momento de la función de Husimi, podemos obtener el segundo momento de la función de Wigner

$$M_2 = \sum_{n,n',m,m'} E_{n,n',m,m'} \sum_{s=0}^{n'} \sum_{s'=0}^{m'} \frac{(-1)^{s+s'} (n+n'-s-s')!}{(n-s)!(n'-s)!(m-s')!(m'-s')! s!s'} \frac{1}{s!s'} \quad (7.36)$$

donde

$$E_{n,n',m,m'} = \frac{1}{\pi} (\gamma_n \gamma_{n'}^* + \delta_n \delta_{n'}^*) (\gamma_m \gamma_{m'}^* + \delta_m \delta_{m'}^*) \sqrt{n!n'!m!m'!} \delta_{m+m',n+n'} \quad (7.37)$$

con lo que podemos obtener el área de la distribución de Wigner en el espacio fase, sin embargo podemos señalar que la gráfica del segundo momento de Wigner corresponde a la gráfica de $\text{Tr}(\hat{\rho}_F^2)$ como hemos establecida en el Capítulo 4.

Capítulo 8

Conclusiones

Hemos dado un breve repaso de las características cuánticas de la luz que significaron el nacimiento de la óptica cuántica. La cual se ha desarrollado enormemente en los últimos años. Tanto teórica y experimentalmente los avances son bastante significativos y las aplicaciones muy variadas.

Para mostrar el manejo cuántico de la teoría electromagnética se resolvió el problema de un campo sin fuentes en el vacío con condiciones a la frontera periódicas. Lo cual nos llevó a que la energía de dicho sistema puede ser escrita en términos discretos de energías de osciladores armónicos, esto nos da una forma de cuantización de la energía. Exhibimos que este problema puede describirse por medio de operadores de campo que posteriormente definieron operadores de la mecánica cuántica. Se puso en evidencia la importancia de la energía que tiene el vacío y se hizo notar que este campo sólo puede aparecer en un tratamiento cuántico de la luz y que dicho campo es importante para la consistencia de la teoría cuántica y que da lugar a fenómenos experimentales antes no descritos con una teoría clásica.

Posteriormente se hizo una investigación sobre el formalismo de Wigner para la mecánica cuántica que hace uso de la llamada distribución de Wigner. Se puede solucionar cualquier problema cuántico obteniendo dicha función en el espacio fase y en términos del tiempo, es decir una cosa similar a la que se tiene al solucionar la ecuación de Schrödinger o la ecuación de Liouville. Sin embargo este formalismo permite ver gráficamente, en algunos casos, fenómenos que interesan en el estudio de la cuántica como es la compresión, el comportamiento de las dispersiones así como si un estado cuántico tiene un comportamiento no clásico lo cual sucede cuando la función de Wigner toma partes negativas. También desarrollamos el formalismo de Husimi. Este formalismo comparte con el de Wigner algunas propiedades; sin embargo enfatizamos que el área de esta última distribución se puede ligar a la entropía del sistema y en general es más fácil de calcular.

Se obtuvieron los estados que portan la representación irreducible de los grupos C_2 , C_3 y D_3 . Y se encontraron las siguientes propiedades para cada grupo: Dispersiones en el espacio fase, estadística de fotones, la función de Husimi, la distribución de Wigner, el área de la distribución de Husimi y las distribuciones marginales. Además de encontrar la evolución temporal de dichos estados en un Hamiltoniano de oscilador armónico.

Podemos concluir que los estados de gato de Schrödinger pueden presentar compresión y para los grupos analizados se encontró compresión en el estado par del grupo cíclico C_2 . Esta compresión se da solamente para ciertos valores de la fase del parámetro complejo α .

Las estadística de fotones que presentan dichos estados es oscilatoria y se puede demostrar que los grupos cíclicos de n elementos son eigenvectores del operador de aniquilación \hat{a}^n con eigenvector en general complejo. Por lo cual la estadística de fotones tiene distribuciones de un cierto número de fotones inicial módulo n .

La función de Husimi de estos estados se encuentra en una región muy localizada para valores del parámetro α pequeños, esto se presenta para todos los casos analizados. Sin embargo para valores de α mayores esta función se deslocaliza y presenta un número de picos que es igual al número de elementos que forman la superposición del estado. El área de dicha distribución es igual a la del estado coherente para $\alpha = 0$ para los estados bien definidos en este límite, y es igual al número de elementos que forman la superposición del estado cuando α crece. Esto es debido a que los estados coherentes que conforman la superposición de cada estado se vuelven linealmente independientes a medida que α crece, por lo cual cada uno actúa casi como un estado independiente.

Las funciones de Wigner de estos estados presentan comportamientos cuánticos al ser menor que cero en algunas regiones del espacio fase. De igual forma que para la función de Husimi el comportamiento es muy similar para valores grandes de α , donde se presenta un número de picos casi igual para estados del mismo grupo. Sin embargo las partes negativas de las funciones pueden cambiar, el caso más drástico es el del grupo C_2 , donde la función de Wigner para el estado impar presenta valores negativos y para la función de Wigner del estado par no se presentan valores negativos para valores pequeños del parámetro α . Asimismo las funciones de Wigner se encuentran muy localizadas en el espacio fase para valores pequeños de α y se deslocaliza conforme crece α . Las funciones de Wigner forman figuras que representan las simetrías de los grupos cuando α tiene una norma grande. Obtuvimos una línea para el caso del grupo C_2 , un triángulo en el caso del grupo C_3 y un hexágono en el caso del grupo D_3 para los estados simétrico y antisimétrico y un triángulo para el estado traza. Este fenómeno también se presenta para la función de Husimi.

El área de la distribución de Wigner es siempre la unidad, esto es debido a que estamos trabajando con estados puros y el área de la función de Wigner de un estado puro es siempre la unidad.

La evolución temporal de los estados de gato de Schrödinger cristalizados en un Hamiltoniano de oscilador armónico con frecuencia ω se obtiene a partir de la sustitución de los parámetros α_r por el valor $\alpha_r e^{-i\omega t}$ para todos los estados. El efecto que tiene dicha evolución es la de rotar las distribuciones de Wigner y Husimi en el espacio fase, preservando en gran medida su forma y su área dado que la evolución es unitaria. En el caso de las fluctuaciones el efecto de esta evolución es el cambio

de la dependencia en términos de la fase de α donde la fase efectiva es ahora $\theta - \omega t$ lo que causa que la compresión del sistema se presente para valores de θ diferentes para cada tiempo

Por otro lado la estadística de fotones no presenta una dependencia del tiempo ya que depende en general de la norma de α y no de su fase y dado que la norma de $|\alpha| = |\alpha e^{-i\omega t}|$, el tiempo no se ve involucrado.

Otro de los temas relevantes de este trabajo es el desarrolló de una forma propuesta para generar estados de gato de Schrödinger que involucra un campo unimodal dentro de una cavidad que interactúa con un átomo de dos niveles. Dicho sistema está descrito por el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings.

Se solucionó la evolución temporal de un estado separable entre el átomo de dos niveles y el campo electromagnético. Para el estado del átomo se tomó el estado excitado y para el campo se eligió un estado coherente determinado por el parámetro α . Se obtuvieron varias propiedades de la matriz densidad reducida para el campo como son: la traza del cuadrado de la matriz densidad, la estadística de fotones, las distribuciones de Wigner y de Husimi y el área de ambas distribuciones en el espacio fase. Además de la inversión de población

Se encontró que el cuadrado de la matriz densidad admite un estado puro para la mitad del tiempo de resurgimiento del sistema. Ésto para valores grandes de α , como ejemplo se tomó el caso de $\alpha = 7$. El cual se acerca mucho a un estado puro para un tiempo $t = 7\pi$. Observamos que este comportamiento se presenta para diferentes valores del estado inicial del átomo, salvo en un caso, que es cuando el átomo está en un estado inicial con el mismo peso de los estados excitado y base. En dicho estado, la traza del cuadrado del operador densidad se mantiene cerca de la unidad y decrece lentamente hasta ser una mezcla estadística de estados que nunca vuelve a recuperarse. Por lo cual la elección de los pesos de cada estado no es trivial.

La estadística de fotones nos hace ver que para tiempos cerca de la mitad del tiempo de resurgimiento se presenta un comportamiento oscilatorio parecido al que encontramos en el caso del estado par de gato de Schrödinger, sin embargo en este caso los números de fotones impares contribuyen en pequeña medida, lo cual no se presenta para el estado par de gato. El comportamiento se pierde a medida que nos alejamos de dicho tiempo y en tal caso se obtiene una distribución parecida en forma a una distribución Gaussiana.

La inversión de población nos dice que el estado en la mitad del tiempo de resurgimiento tiene una contribución igual de los estados base y excitado del átomo, dado que esta propiedad es cero en ese tiempo, por lo cual es igual de probable que el estado este en los dos estados, es decir está en una combinación con igual peso de ambos estados.

La función de Husimi para el campo presentó comportamientos muy diversos a diferentes tiempos; al tiempo cero obtuvimos un comportamiento de estado coherente como era de esperarse. Este comportamiento se recuperó hasta cierto punto para

el tiempo de resurgimiento. Sin embargo cambió radicalmente para un cuarto del tiempo de resurgimiento donde se obtuvieron varios picos debido a que el campo se encuentra en una mezcla estadística de estados en estos tiempos; dicho fenómeno volvió a ocurrir a tres cuartos del tiempo de resurgimiento. Para la mitad del tiempo de resurgimiento se obtuvo una función de Husimi parecida a la del estado par de gato con $\alpha = 7$, solo que deformada y rotada 90° con respecto al eje x del espacio fase.

El área de la distribución de Husimi es una función que toma mínimos locales en múltiplos del tiempo de resurgimiento esto es debido a que el sistema recupera cada vez en menor medida, el comportamiento de un estado coherente en estos tiempos. Puesto a que existe disipación por una evolución temporal no unitaria tenemos que el área de dicha distribución crece, en tiempos intermedios a los múltiplos del tiempo de resurgimiento. Para la mitad del tiempo de resurgimiento se obtiene un valor para el área de 2.5 que se asemeja mucho al valor de 2 obtenido para el estado par de gato.

La función de Wigner también tiene comportamientos diversos a diferentes tiempos, para un tiempo cero se obtiene una función Gaussiana correspondiente al estado coherente inicial. Dicho comportamiento también se recupera en menor forma para el tiempo de resurgimiento donde aparece una pequeña parte negativa de dicha función y presenta una rotación de 180° con respecto a la gráfica del estado inicial. Para los tiempos de un cuarto y tres cuartos del tiempo de resurgimiento tenemos una estructura con picos debido también a la mezcla estadística que conforma el sistema. Para la mitad del tiempo de resurgimiento tenemos una gráfica parecida a la obtenida para el estado par de gato con $\alpha = 7$ deformada y rotada 90° con respecto al eje x , tal y como en el caso de Husimi. Dicha diferencia se resolvió haciendo una rotación del estado de gato en dicho eje de tal forma que se tenga $\alpha = 7i$ para el estado de gato. Para lograr dicha rotación fue necesario utilizar lo aprendido en la evolución de estados de gato en un Hamiltoniano de oscilador armónico.

Posteriormente comparamos el estado par de gato con $\alpha = 7i$ y la matriz densidad para el campo con $\alpha = 7$ mediante el traslape entre ambos. Lo cual nos da una concordancia de 75% a la mitad del tiempo de resurgimiento. Dicha concordancia también se corrobora mediante la comparación de las estadísticas de fotones cuyos máximos son muy parecidos y solo difieren en las colas de las distribuciones.

En este trabajo se pudieron corroborar las predicciones que se habían hecho acerca del sistema de dos niveles en interacción con un campo electromagnético de una cavidad. Mediante las funciones de Wigner y Husimi se pudo observar que existe una fase entre el estado par de gato y el estado generado en la cavidad que de otra forma podría pasar desapercibido. Si se hubiera comparado ambos estados con el mismo parámetro $\alpha = 7$ no se tiene una concordancia entre ambos sistemas.

También se corroboró que el segundo momento de la función de Wigner corres-

ponde a la traza del cuadrado del operador densidad, sin embargo dichas gráficas no se incluyen en este trabajo.

Uno de los estudios que se realizarán posteriormente es observar el comportamiento de un sistema de varias partículas en el Hamiltoniano del modelo de Jaynes-Cummings. De esta forma veremos las propiedades que surgen tanto para cada una de las partículas como para el campo de radiación de nuestra cavidad.

Asimismo el modelo utilizado en este trabajo puede desarrollarse para el caso en que las partículas tengan tres niveles de excitación. Lo cual implicaría que tengamos tres diferentes frecuencias de excitación y enriquece de gran manera nuestro sistema aunque de igual forma lo complica. Esto es debido a que el operador de evolución asociado a este nuevo Hamiltoniano no podría ser separado en productos de exponenciales, al menos no de forma trivial y tendríamos que trabajar en un espacio de 3×3 dimensiones para los operadores de un átomo en vez de las 2×2 dimensiones.

También se planea trabajar en un sistema que tenga un campo de radiación de muchos fotones, esto es con varias potencias del operador de creación y aniquilación. Tal y como se plantea en [28], para el caso de dos fotones. Se puede demostrar que el procedimiento de [28] puede extenderse de forma sencilla para el caso general de k fotones lo cual puede generar estados asociados que portan las representaciones irreducibles de grupos cíclicos.

Apéndice A

Ecuaciones en el Espacio Fase

La forma de expresar la evolución en el espacio fase de la función de Wigner y la función de Moyal, involucra transformadas de Fourier de términos asociados a la energía cinética y potencial del Hamiltoniano. El propósito de este apéndice es evaluar dichos términos.

A.1. Formulación del Problema

La ecuación de Liouville que satisface la distribución de Wigner queda escrita

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{T} + \mathcal{U}, \quad (\text{A.1})$$

la cual determina la evolución temporal la función W

$$W(x, p; t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p\xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho}(t) \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle.$$

Por comodidad hemos definido las cantidades

$$\mathcal{T} \equiv -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2M} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{p}^2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{p}^2 \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

y

$$\mathcal{U} \equiv -\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| U(\hat{x}) \hat{\rho} - \hat{\rho} U(\hat{x}) \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

los cuales resultan de los términos de la energía cinética y potencial del Hamiltoniano.

Por otra parte la función de Moyal satisface las siguientes dos ecuaciones

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \frac{1}{2} \left\{ |E''\rangle \langle E'|, \hat{H} \right\} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = \frac{E'' + E'}{2} W_{|E''\rangle \langle E'|}$$

y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \frac{i}{\hbar} [|E''\rangle \langle E'|, \hat{H}] \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = \frac{i}{\hbar} (E'' - E') W_{|E''\rangle \langle E'|}$$

donde la función de Moyal está definida como

$$W_{|E''\rangle \langle E'|}(x, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi | E'' \right\rangle \left\langle E' | x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

Esas dos ecuaciones que debe de satisfacer la función de Moyal pueden expresarse

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}^{(+)} + \mathcal{U}^{(+)} = \frac{E'' + E'}{2} W_{|E''\rangle \langle E'|} \quad (\text{A.2})$$

y

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}^{(-)} + \mathcal{U}^{(-)} = \frac{i}{\hbar} (E' - E'') W_{|E''\rangle \langle E'|} \quad (\text{A.3})$$

siendo definidas las cantidades

$$\mathcal{T}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2M} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| [|E''\rangle \langle E'| \hat{p}^2 \pm \hat{p}^2 |E''\rangle \langle E'|] \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

para la energía cinética y

$$\mathcal{U}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| [|E''\rangle \langle E'| U(\hat{x}) \pm U(\hat{x}) |E''\rangle \langle E'|] \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

la parte de la energía potencial.

A.2. Transformada de Fourier de los Elementos de Matriz

Para evaluar las cantidades \mathcal{T} , \mathcal{U} , $\mathcal{T}^{(\pm)}$ y $\mathcal{U}^{(\pm)}$ introducimos la transformada de Fourier

$$t^{(\pm)}(\hat{A}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \mathcal{M}^{(\pm)}(x, \xi) \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\mathcal{M}^{(\pm)}(x, \xi) = \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{p}^2 \hat{A} \pm \hat{A} \hat{p}^2 \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \quad (\text{A.5})$$

observamos que son los valores esperados del conmutador y anticonmutador de la energía cinética con el operador \hat{A} . En los casos donde $\hat{A} = \hat{\rho}$ y $\hat{A} = |E''\rangle \langle E'|$ tenemos las relaciones

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2M} \frac{i}{\hbar} t^{(-)}(\hat{\rho}), \quad (\text{A.6})$$

y

$$\mathcal{T}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{2M} t^{(\pm)}(|E''\rangle \langle E'|) \quad (\text{A.7})$$

De forma análoga para la energía potencial $U(x)$ tenemos,

$$u^{(\pm)}(\hat{A}) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-i p \xi / \hbar} \mathcal{N}^{(\pm)}(x, \xi) \quad (\text{A.8})$$

donde

$$\mathcal{N}^{(\pm)}(x, \xi) = \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| U(\hat{x}) \hat{A} \pm \hat{A} U(\hat{x}) \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

y del conmutador y anticonmutador de la energía potencial $U(\hat{x})$ con $\hat{A} = \hat{\rho}$ y $\hat{A} = |E''\rangle \langle E'|$

$$\mathcal{U} = -\frac{i}{\hbar} u^{(-)}(\hat{\rho}) \quad (\text{A.9})$$

y

$$\mathcal{U}^{(\pm)} = \pm u^{(\pm)}(|E''\rangle \langle E'|). \quad (\text{A.10})$$

A.3. Términos de la Energía Cinética

Iniciaremos con la evaluación de las cantidades $t^{(\pm)}$ las cuales originan los términos de la energía cinética. De la representación del operador momento de la mecánica cuántica tenemos que

$$\langle x | \hat{p}^2 | \psi \rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x | \psi \rangle$$

la cual nos lleva a

$$\left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{p}^2 \right| \psi \right\rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial(x - \frac{1}{2}\xi)^2} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \psi \right\rangle\right.$$

y a que

$$\left\langle \psi \left| \hat{p}^2 \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial(x - \frac{1}{2}\xi)^2} \left\langle \psi \left| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle\right.$$

Con lo cual podemos evaluar las variables $\mathcal{M}^{(\pm)}$

$$\mathcal{M}^{(\pm)}(x, \xi) = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial(x + \frac{1}{2}\xi)^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial(x - \frac{1}{2}\xi)^2} \right] \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \quad (\text{A.11})$$

Realizamos los cambios de variables

$$x'' = x + \frac{1}{2}\xi \quad \text{y} \quad x' = x - \frac{1}{2}\xi$$

despejando tenemos

$$x = \frac{1}{2}(x' + x'') \quad \text{y} \quad \xi = x'' - x'$$

con lo cual las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(x + \frac{1}{2}\xi)} &= \frac{\partial}{\partial x''} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x''} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x''} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial(x - \frac{1}{2}\xi)} &= \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Con lo cual calculamos las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2}{\partial(x + \frac{1}{2}\xi)^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial(x - \frac{1}{2}\xi)^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

Por lo que sustituyendo en la Ec. (A.11) se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(+)} &= \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \\ \mathcal{M}^{(-)} &= -2\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial x} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \end{aligned}$$

Las cuales se sustituyen en la Ec. (A.4) y se realiza una integración por partes, dando como resultado

$$t^{(+)} = \left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2p^2 \right) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \quad (\text{A.12})$$

$$t^{(-)} = -2i\hbar p \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle \quad (\text{A.13})$$

Para finalmente llegar a que

$$\mathcal{T} = -\frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} W$$

la cual se utiliza para obtener la ecuación de evolución para la función de Wigner. De forma similar sustituyendo en la Ec. (A.7) se obtiene

$$\mathcal{T}^{(+)} = -\left(\frac{p^2}{M} + \frac{\hbar^2}{4M} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) W_{|E''\rangle\langle E'|} \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{T}^{(-)} = -i\hbar \frac{p}{M} \frac{\partial}{\partial x} W_{|E''\rangle\langle E'|} \quad (\text{A.15})$$

que son utilizadas para evaluar la evolución temporal de la función de Moyal.

A.4. Términos de la Energía Potencial

Para obtener los términos de la energía potencial tenemos que obtener los valores las variables $u^{(\pm)}$. Dado que suponemos que la energía potencial es solo función del operador de posición \hat{x} , tenemos que

$$U(\hat{x}) |x\rangle = U(x) |x\rangle$$

por lo que llegamos a la relación

$$\mathcal{N}^{(\pm)} = \left[U\left(x + \frac{1}{2}\xi\right) \pm U\left(x - \frac{1}{2}\xi\right) \right] \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

Utilizando una expansión en serie de Taylor

$$U\left(x \pm \frac{1}{2}\xi\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m U(x)}{dx^m} \left(\pm \frac{1}{2}\xi\right)^m$$

de lo cual obtenemos que la suma

$$U(x + \frac{1}{2}\xi) + U(x - \frac{1}{2}\xi) = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^{2l}}{(2l)!} \frac{d^{2l}U}{dx^{2l}} \left(-\frac{i\xi}{\hbar}\right)^{2l} \quad (\text{A.16})$$

que solo depende de las derivadas pares del potencial. De la misma manera la resta de los potenciales queda

$$U(x + \frac{1}{2}\xi) - U(x - \frac{1}{2}\xi) = -i\hbar \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U}{dx^{2l+1}} \left(-\frac{i\xi}{\hbar}\right)^{2l+1} \quad (\text{A.17})$$

que solo depende de las derivadas impares. En este caso solo hay involucradas derivadas del eigenvalor x del operador de posición. Por otro lado se hace notar que el término

$$\left(-\frac{i\xi}{\hbar}\right)^s = \frac{d^s}{dp^s} e^{-ip\xi/\hbar}$$

Por lo que finalmente obtenemos que

$$u^{(+)} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^{2l}}{(2l)!} \frac{d^{2l}U}{dx^{2l}} \frac{\partial^{2l}}{\partial p^{2l}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

y

$$u^{(-)} = -i\hbar \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-ip\xi/\hbar} \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{A} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle$$

Con lo cual podemos evaluar los términos de energía potencial, sustituyendo en la Ec. (A.9) tendremos

$$\mathcal{U} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} W(x, p) \quad (\text{A.18})$$

para la evolución de la función de Wigner y además

$$\mathcal{U}^{(+)} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l)!} \frac{d^{2l}U}{dx^{2l}} \frac{\partial^{2l}}{\partial p^{2l}} W_{|E''\rangle\langle E'|} \quad (\text{A.19})$$

y

$$\mathcal{U}^{(+)} = -i\hbar \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U}{dx^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} W_{|E''\rangle\langle E'|} \quad (\text{A.20})$$

Vemos en estas últimas expresiones que el término de la energía potencial depende de las derivadas parciales de la función de Wigner con respecto al momento, cuantas de ellas contribuyen, depende del potencial $U(x)$ de nuestro sistema, en específico de cuales derivadas del potencial son diferentes de cero.

Apéndice B

Programación

Para obtener las gráficas de los capítulos 6 fue necesario realizar programas en Mathematica, los cuales realizaban la evaluación las gráficas de las distribuciones de Wigner y Husimi para los estados de gato. De igual forma para la estadística de fotones y las dispersiones en las cuadraturas.

En el capítulo 7 para la generación de los estados de gato, se realizaron programas en Mathematica y en el lenguaje de programación C, esto último debido al tiempo mayor que le toma a Mathematica evaluar las ecuaciones correspondientes.

En los programas en C fue necesario utilizar una precisión más grande que la doble para algunos cálculos, esta precisión definida por el tipo de variables “long double”, en una computadora con un procesador AMD Sempron 5200+ de 64 bits. Lo cual requirió una migración exhaustiva de los programas que habían sido realizados como prueba en una máquina de 32 bits.

Se observó que el error numérico aparecía con mucha facilidad ya que se comparaban números muy pequeños cercanos al fin de la precisión de la computadora, lo cual hacía que explotaran dichos cálculos. Este problema fue resuelto tras depurar el código, ya que se eliminaron dichos términos pequeños al realizar manipulaciones secundarias de estos números.

Mathematica se utilizó para calcular las diferentes propiedades de los estados de gato de Schrödinger.

```

nmax = 3;
{c1 = 1, c2 = 1, c3 = 1};
{a1[a_] := a, a2[a_] := Exp[2 * π * i / 3] * a, a3[a_] := Exp[4 * π * i / 3] * a};

N2[α_] := Sum[N[ $\left[ c_r * \text{Conjugate}[c_s] * \text{Exp}[a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] - \frac{(a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]])}{2} - \frac{(a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])}{2} \right]$ ], {r, 1, nmax}, {s, 1, nmax}];

W2[α_, x_, p_] := N[ $\frac{1}{\pi} * \frac{1}{N2[\alpha]} * \text{Sum}[c_r * \text{Conjugate}[c_s] * 2 * \text{Exp}[\sqrt{2} * a_r[\alpha] * (x - I * p) + \sqrt{2} * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] * (x + I * p) - a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] - \frac{a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]]}{2} - \frac{a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]]}{2} - (x * x + p * p)]$ ], {r, 1, nmax}, {s, 1, nmax}];

M2[α_] := N[ $\frac{1}{2 * \pi} * \frac{1}{N2[\alpha]^2} * \text{Sum}[\left( c_r * \text{Conjugate}[c_s] * c_{r1} * \text{Conjugate}[c_{s1}] * \text{Exp}\left[ -\frac{a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]]}{2} - \frac{a_{s1}[\alpha] * \text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]]}{2} - \frac{a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]]}{2} - \frac{a_{r1}[\alpha] * \text{Conjugate}[a_{r1}[\alpha]]}{2} - \frac{a_r[\alpha]^2}{2} - \frac{\text{Conjugate}[a_s[\alpha]]^2}{2} - \frac{a_{r1}[\alpha]^2}{2} - \frac{\text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]]^2}{2} + \frac{(a_r[\alpha] + a_{r1}[\alpha] + \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] + \text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]])^2}{4} - \frac{(a_r[\alpha] + a_{r1}[\alpha] - \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] - \text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]])^2}{4} + \frac{((a_r[\alpha] - \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])^2 + (a_{r1}[\alpha] - \text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]])^2)}{2} \right]$ ], {r, 1, nmax}, {s, 1, nmax}, {r1, 1, nmax}, {s1, 1, nmax}];

M2Q[α_] := N[ $\frac{1}{N2[\alpha]^2} * \text{Sum}[\left( c_r * \text{Conjugate}[c_s] * c_{r1} * \text{Conjugate}[c_{s1}] * \text{Exp}\left[ -\frac{a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]]}{2} - \frac{a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]]}{2} - \frac{a_{r1}[\alpha] * \text{Conjugate}[a_{r1}[\alpha]]}{2} - \frac{a_{s1}[\alpha] * \text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]]}{2} + \frac{1}{2} * (a_r[\alpha] + a_{r1}[\alpha]) * (\text{Conjugate}[a_s[\alpha]] + \text{Conjugate}[a_{s1}[\alpha]]) \right]$ ], {r, 1, nmax}, {s, 1, nmax}, {r1, 1, nmax}, {s1, 1, nmax}];

```

$$\begin{aligned}
 \text{SPQ}[\alpha_] := & N \left[\frac{1}{2 * N2[\alpha]} * \text{Sum} \left[\left(c_r * \text{Conjugate}[c_s] * (a_r[\alpha]^2 - \text{Conjugate}[a_s[\alpha]]^2) * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \text{Exp} \left[a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] - \frac{(a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]])}{2} - \frac{(a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])}{2} \right] \right), \{r, 1, nmax\}, \{s, 1, nmax\} \right] - \frac{1}{2 * N2[\alpha]^2} * \right. \\
 & \left(\text{Sum} \left[\left(c_r * \text{Conjugate}[c_s] + a_r[\alpha] * \text{Exp} \left[a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] - \frac{(a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]])}{2} - \frac{(a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])}{2} \right] \right), \{r, 1, nmax\}, \{s, 1, nmax\} \right] \right)^2 + \\
 & \left(\text{Sum} \left[\left(c_r * \text{Conjugate}[c_s] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] * \text{Exp} \left[a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] - \frac{(a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]])}{2} - \frac{(a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])}{2} \right] \right), \{r, 1, nmax\}, \{s, 1, nmax\} \right] \right)^2 \Bigg]; \\
 \text{Pn}[n_ , \alpha_] := & N \left[\frac{1}{N2[\alpha] * n!} * \text{Sum} \left[\left(c_r * \text{Conjugate}[c_s] * (a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])^n * \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \text{Exp} \left[- \frac{(a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]])}{2} - \frac{(a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]])}{2} \right] \right), \{r, 1, nmax\}, \{s, 1, nmax\} \right] \Bigg]; \\
 \text{Q1}[\alpha_ , x_ , p_] := & N \left[\frac{1}{\pi} * \frac{1}{N2[\alpha]} * \text{Sum} \left[\left(c_r * \text{Conjugate}[c_s] * \text{Exp} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} * a_r[\alpha] * (x - I * p) + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{1}{\sqrt{2}} * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]] * (x + I * p) - \frac{a_s[\alpha] * \text{Conjugate}[a_s[\alpha]]}{2} - \frac{a_r[\alpha] * \text{Conjugate}[a_r[\alpha]]}{2} - \frac{1}{2} * (x * x + p * p) \right] \right), \{r, 1, nmax\}, \{s, 1, nmax\} \right] \Bigg];
 \end{aligned}$$

Para encontrar la función de Husimi se utilizó el siguiente programa en C:

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>
double np=49.0;
double a=1.0;
double b=0.0;
double cn(double n4){
return (double)
pow((sqrt(np)),n4)/sqrt(exp(lgamma(n4+1.)));
}
double cn1(double n5){
return (double)
pow((sqrt(np)),(n5+1.))/sqrt(exp(lgamma(n5+2.)));
}
double cn2(double n6){

```

```

double gy;
if(n6>0.)gy=pow((sqrt(np)),(n6-1.))/sqrt(exp(lgamma(n6)));
else gy=0.0;
return (double)gy;
}
double complex gn(double n7,double t1){
return
(double complex)
(a*cn(n7)*cos(t1*sqrt(n7+1.))-I*b*cn1(n7)*sin(t1*sqrt(n7+1.))*cexp(-I*(n7+1.)*t1);
}
double complex dn(double n8,double t2){
return
(double complex)
(b*cn(n8)*cos(t2*sqrt(n8))-I*a*cn2(n8)*sin(t2*sqrt(n8)))*cexp(-I*n8*t2);
}
main(){
FILE *ar=fopen("hust0.txt","w");
double n,n1,s;
double ix,ip;
    double t=0.;
double complex res=0.0+0.0*I;
double h=1.0/10.;
double x,p;
double hx=1./10.;
double hp=1./10.;
double complex s1;
double pi=4.0*atan(1.0);
double complex E;

for(ix=0.;ix<=300.;ix+=1.){
for(ip=0.;ip<=300.;ip+=1.){
s1=0.0+0.0*I;
x=-15.+ix*hx;
p=-15.+ip*hp;
if(fabs(x)>0.01 || fabs(p)>0.01){
for(n=0.;n<=90.;n+=1.){
for(n1=0.;n1<=90.;n1+=1.){
E=(gn(n,t)*conj(gn(n1,t))+dn(n,t)*conj(dn(n1,t)))/pow(sqrt(2.0),(n+n1));
s1+=E*exp(-0.5*x*x-0.5*p*p)*exp(-np)*pow(sqrt(x*x+p*p),n+n1)*cos(atan2(p,x)*(n1-n))/
sqrt(exp(lgamma(n1+1.))*exp(lgamma(n+1.)));
}
}
res=s1/pi;
fprintf(ar,"%f_ %f_ %f\n",x,p,creal(res));
}
}
}
}

```

Para obtener el área de la distribución de Husimi se utilizó el programa

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>

long double np=10.0;
long double ifactorial(int p);
long double a=1.0/sqrtl(2.);
long double b=1.0/sqrtl(2.);
long double complex cn(int n4){
return expl(-np/2.)*powl(sqrtl(np),n4)/sqrtl(ifactorial(n4));
}

```

```

long double complex cn1(int n5){
return expl(-np/2.)*powl(sqrtl(np),n5+1)/sqrtl(ifactorial(n5+1));
}
long double complex cn2(int n6){
long double complex xt;
if(n6>0)xt=expl(-np/2.)*powl(sqrtl(np),n6-1)/sqrtl(ifactorial(n6-1));
else xt=0.0+0.*I;
return xt;
}
long double complex gn(int n7,long double t1){
return
(a*cn(n7)*cosl(t1*sqrtl(n7+1))-I*b*cn1(n7)*sinl(t1*sqrtl(n7+1))*cexpl(-I*(n7+1)*t1);
}
long double complex dn(int n8,long double t2){
return
(b*cn(n8)*cosl(t2*sqrtl(n8))-I*a*cn2(n8)*sinl(t2*sqrtl(n8)))*cexpl(-I*n8*t2);
}

main(){
FILE *ar=fopen("m_husimin10a1r2.txt","w");
int n,n1,n2,n3;
int i,max=20;
long double sd=0;
long double t=0.0;
long double complex res=0.0+0.0*I;
long double h=50.0/1000.;
long double complex s1,s2,s3,s4;
long double fa,pi=4.0*atanl(1.0);
    for (i=0;i<=1000;i++){
        t=h*i;
        s1=0.0+0.0*I;
        s2=0.0+0.0*I;
        s3=0.0+0.0*I;
        s4=0.0+0.0*I;
        for (n=0;n<=max;n++){
            for (n1=0;n1<=max;n1++){
                for (n2=0;n2<=max;n2++){
                    for (n3=0;n3<=max;n3++){
if(n1+n3==n+n2){

fa=1.0/powl(sqrtl(2.),n+n1+n2+n3);
s1+=gn(n,t)*conj(gn(n1,t))*gn(n2,t)*conj(gn(n3,t))*pi*expl(gammal(0.5*(n+n1+n2+n3)+1.0)*fa/sqrtl(ifactorial(n)*ifactorial(n1)*ifactorial(n2)*ifactorial(n3)));
s2+=gn(n,t)*conj(gn(n1,t))*dn(n2,t)*conj(dn(n3,t))*pi*expl(gammal(0.5*(n+n1+n2+n3)+1.0)*fa/sqrtl(ifactorial(n)*ifactorial(n1)*ifactorial(n2)*ifactorial(n3)));
s3+=dn(n,t)*conj(dn(n1,t))*gn(n2,t)*conj(gn(n3,t))*pi*expl(gammal(0.5*(n+n1+n2+n3)+1.0)*fa/sqrtl(ifactorial(n)*ifactorial(n1)*ifactorial(n2)*ifactorial(n3)));
s4+=dn(n,t)*conj(dn(n1,t))*dn(n2,t)*conj(dn(n3,t))*pi*expl(gammal(0.5*(n+n1+n2+n3)+1.0)*fa/sqrtl(ifactorial(n)*ifactorial(n1)*ifactorial(n2)*ifactorial(n3)));
}
}
}
}
        res=(s1+s2+s3+s4)/pi;
        fprintf(ar,"%Lf_ %Lf_ %Lf\n",t,1./creall(res),cimagl(res));
    }
fclose(ar);
}

```

```

long double ifactorial(int p){
    return (long double)exp1(gammal(p+1));
}

```

Finalmente para obtener la función de Wigner del sistema se utilizó el siguiente programa

```

#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<complex.h>
#include<gsl/gsl_sf_hyperg.h>

double np=49.0;
    double a=1.0;
    double b=0.0;
double cn(double n4){
return (double) pow((sqrt(np)),n4)/sqrt(tgamma(n4+1.));
}
double cn1(double n5){
return (double)pow((sqrt(np)),(n5+1.))/sqrt(tgamma(n5+2.));
}
double cn2(double n6){
double gy;
if(n6>0.)gy=pow((sqrt(np)),(n6-1.))/sqrt(tgamma(n6));
else gy=0.0;
return (double)gy;
}
double complex gn(double n7,double t1){
return
(double)(a*cn(n7)*cos(t1*sqrt(n7+1.))-I*b*cn1(n7)*sin(t1*sqrt(n7+1.)))*
cexp(-I*(n7+1.)*t1);
}
double complex dn(double n8,double t2){
return
(double)(b*cn(n8)*cos(t2*sqrt(n8))-I*a*cn2(n8)*sin(t2*sqrt(n8)))*cexp(-I*n8*t2);
}

main(){

FILE *ar1=fopen("wig_mathtr4.txt","w");
double n,n1,s;
double it,ix,ip;

double t=M_PI*sqrt(np)/2.;
double complex res;
double h=50.0/100.;
double x=sqrt(2.*np),p=0.;
double hx=1./10.;
double hp=1./10.;
double complex s1,s2;
double pi=4.0*atan(1.0);
double complex E;

for(ix=0.;ix<=300.;ix+=1.){
for(ip=0.;ip<=300.;ip+=1.){
s1=0.0+0.0*I;
x=-15.+ix*hx;
p=-15.+ip*hp;
if(fabs(x)>0.01 || fabs(p)>0.01){
for(n=0.;n<=91.;n+=1.){

```

```

for (n1=0.; n1<=91.; n1+=1.){
E=(gn(n,t)*conj(gn(n1,t))+dn(n,t)*conj(dn(n1,t)))*pow(sqrt(2.0),(n+n1))*
pow(sqrt(x*x+p*p),n+n1)*cos(atan2(p,x)*(n1-n))/
sqrt(exp(lgamma(n1+1.))+lgamma(n+1.)));

s1+=E*pow(2.*(x*x+p*p),-n)*gsl_sf_hyperg_U(-n,1.-n+n1,2.*(x*x+p*p));

        }

res=exp(-x*x-p*p)*exp(-n*p)*s1/pi;
fprintf(ar1,"%f_%f_%f\n",x,p,creal(res));
}

}

fclose(ar1);
}

```

Apéndice C

Función de Wigner para un operador con estados de Fock

Se presenta una forma alternativa para obtener la función de Wigner para un operador con estados de Fock ($|n\rangle \langle n'|$). En este caso la matriz densidad del sistema es igual al operador en cuestión $\hat{\rho} = |n\rangle \langle n'|$. Sustituyendo en la definición de la función de Wigner tenemos

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| \hat{\rho} \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle,$$

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \left\langle x + \frac{1}{2}\xi \left| (|n\rangle \langle n'|) \right| x - \frac{1}{2}\xi \right\rangle. \quad (\text{C.1})$$

Recordando las eigenfunciones del oscilador armónico, en unidades donde $\hbar = m = \omega = 1$

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad (\text{C.2})$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite

De la Ec. (C.1), tenemos

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(-ip \xi) \psi_n\left(x + \frac{1}{2}\xi\right) \psi_{n'}^*\left(x - \frac{1}{2}\xi\right).$$

Sustituyendo la expresión para las eigenfunciones se llega

$$W(x, p) = A \exp(-x^2) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp(-ip \xi - \frac{1}{4}\xi^2) H_n\left(x + \frac{1}{2}\xi\right) H_{n'}\left(x - \frac{1}{2}\xi\right)$$

con

$$A = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2^{n+n'}}} \frac{1}{\sqrt{n!n'!}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Completando cuadrados para la exponencial dentro de la integral

$$W(x, p) = A \exp(-x^2 - p^2) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp\left(-\frac{1}{4}(\xi + 2ip)^2\right) H_n\left(x + \frac{1}{2}\xi\right) H_{n'}\left(x - \frac{1}{2}\xi\right) \quad (\text{C.3})$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{2}(\xi + 2ip)$ obtenemos

$$W(x, p) = 2A \exp(-x^2 - p^2) \int_{-\infty+ip}^{\infty+ip} du \exp(-u^2) H_n(x + u - ip) H_{n'}(x - u + ip).$$

Utilizando la propiedad de los polinomios de Hermite

$$H_n(x + y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(x) (2y)^{n-k},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} H_n(u + (x - ip)) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(u) (2(x - ip))^{n-k}, \\ H_{n'}(-u + (x + ip)) &= \sum_{k'=0}^{n'} \binom{n'}{k'} H_{k'}(-u) (2(x + ip))^{n'-k'}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Además se tiene la relación de paridad de las funciones de Hermite

$$H_{k'}(-u) = (-1)^{k'} H_{k'}(u) \quad (\text{C.5})$$

Utilizando las Ecs. (C.4), (C.5) en (C.3), tenemos

$$\begin{aligned} W(x, p) &= 2A e^{-x^2 - p^2} \sum_{k=0}^n \sum_{k'=0}^{n'} \binom{n}{k} \binom{n'}{k'} (2(x + ip))^{n'-k'} (2(x - ip))^{n-k} (-1)^{k'} \\ &\quad \times \int_{-\infty+ip}^{\infty+ip} du \exp(-u^2) H_k(u) H_{k'}(u) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Dado que el integrando es una función analítica, se puede obtener la integral en un camino cerrado. Sin embargo la integración en la parte imaginaria del espacio complejo se va a cero, por lo tanto

$$\int_{-\infty+ip}^{\infty+ip} du \exp(-u^2) H_n(u) H_{n'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-u^2) H_k(u) H_{k'}(u)$$

lo que constituye la relación de ortogonalidad de los polinomios de Hermite igual a $2^k k! \sqrt{\pi} \delta_{kk'}$, por lo cual

$$W(x, p) = 2Ae^{-x^2-p^2} \sum_{k=0}^{n'} \binom{n}{k} \binom{n'}{k} (2(x+ip))^{n'-k} (2(x-ip))^{n-k} (-1)^k 2^k k! \sqrt{\pi}$$

Sustituyendo el valor de A , finalmente obtenemos que

$$W_{|n\rangle\langle n'|} = \frac{1}{\pi} e^{-x^2-p^2} \sum_{k=0}^{n'} \frac{\sqrt{n!n'}(-1)^k}{(n'-k)!(n-k)!} (\sqrt{2}(x+ip))^{n'-k} (\sqrt{2}(x-ip))^{n-k} \quad (C.7)$$

la misma expresión que la obtenida en el Capítulo 7 para este estado.

Bibliografía

- [1] Scheleich W. P., Wheeler J. A., *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 1715, (1987).
- [2] Scheleich W. P., Walls D. F., Wheeler J. A., *Phys. Rev. A*, **38**, 1177, (1988).
- [3] Jeong, H., Ralph, T. C., *Quantum Information with Continuous Variables of Atoms and Light*, Imperial College Press, pp. 159-177, (2007).
- [4] Maximilian Schlosshauer, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **67**, 1, (2007).
- [5] Paul W., Steinwedel H, *RZeitschrift für Naturforschung A* **8**, 448, (1953).
- [6] Mollow B. R., *Phys. Rev.* **188**, 1969, (1969).
- [7] Paul, H., *Rev. of Mod. Phys.*, **54**, 1061, (1982).
- [8] Scully, M., Zubairy, M., “Quantum Optics”, Cambridge University Press, pp. 56-66, (2001).
- [9] Xu-dong S., et al, *Optoelec. Lett.* **4**, 231, (2008).
- [10] Wu L.A., et al, *J. Opt. Soc. Am. D.*, **4**, 1465, (1987).
- [11] Breitenbach G., Schiller S., y Mlynek J., *Nature*, **387**, 471, (1997).
- [12] Jaynes E.T., Cummings F.W., *Proc. IEEE*, **51**, 89, (1963).
- [13] Paul H., *Ann. Phys. (Leipzig)*, **11**, 411, (1963).
- [14] Shore, B. W., Knight, P. L., *J. of Mod. Opt.*, **40**, 1195, (1993).
- [15] Dirac, P. A. M., *Proc., Roy., Soc., Lon., A*, **114**, 243, (1927).
- [16] Schleich W.P. “Quantum Optics in Phase Space”, Wiley, pp. 695, (2001).
- [17] Huang K., “Statistical Mechanics”, Wiley, pp. 470, (1963).
- [18] Hanbury R., Brown y Twiss R. Q., *Nature* **178**, 1046, (1956).
- [19] Wigner E.P., *Phys. Rev.*, **40**, 749, (1932).
- [20] Husimi K., *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **22**, 264, (1940).
- [21] Milloni P. W. “The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics”, Academic Press Inc., pp. 522, (1994).
- [22] Castaños O., López-Peña R., Man’ko V. I., *J. Russ. Laser Res.*, **16**, 477, (1995).
- [23] Dodonov V. V., Malkin I. A., Man’ko V. I., *Physica*, **72**, 597, (1974).
- [24] Yurke B., Stoler D., *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 13, (1986).
- [25] Mecozi A., Tombesi P., *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1055, (1987).
- [26] Tombesi P., Mecozi A., *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 1700, (1987).
- [27] Gea-Banacloche J., *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 3385, (1990).
- [28] Buzek V., Hladky B., *J. Mod. Phys*, **40**, 1309, (1993).
- [29] Gea-Banacloche J., *Phys. Rev. A*, **44**, 5913, (1991).
- [30] Wehrl A., *Rev. Mod. Phys.*, **50**, 221, (1978).
- [31] Sujita A., *Phys. Rev. E*, **65**, 03625, (2002).

- [32] Sujita A., J. Phys. a math. apro. & gral., **36**, 9081, (2003).
- [33] Wigner E., P., “Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra”, Academic Press, pp. 372, (1959).
- [34] Buzek V., et al, Phys. Rev. A, **45**, 8190, (1992).