



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Haces Principales y La Geometrización de la  
Electrodinámica Clásica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
TALÍA LEZAMA MERGOLD LOVE

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MICHO DURDEVICH LUCICH



2011



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Hoja de datos del jurado**

1. Datos del alumno Lezama Mergold Love Talía Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 406069434
2. Datos del tutor Dr Micho Durdevich Lucich
3. Datos del sinodal 1 Dr Rodolfo Patricio Martínez y Romero
4. Datos del sinodal 2 Dr Miguel Socolovsky Vajovsky
5. Datos del sinodal 3 Dra Laura Ortiz Bobadilla
6. Datos del sinodal 4 Dr Jerónimo Alonso Cortez Quezada
7. Datos del trabajo escrito Haces Principales y La Geometrización de la Electrodinámica Clásica 89 p 2011

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1. Simetría</b>	<b>1</b>
1.1. Grupo de simetrías . . . . .	1
1.1.1. Subgrupo . . . . .	3
1.1.2. Concepto de coset . . . . .	3
1.2. Acciones de grupos . . . . .	4
1.2.1. Idea de acción . . . . .	4
1.2.2. Acción transitiva y espacio homogéneo . . . . .	5
1.2.3. Concepto de órbita . . . . .	6
1.2.4. Concepto de estabilizador . . . . .	7
1.2.5. Acción Efectiva . . . . .	8
1.2.6. Acción Libre . . . . .	9
1.2.7. Espacio Afín . . . . .	10
1.2.8. Un ejemplo . . . . .	10
1.3. Grupo de Lie . . . . .	12
1.4. Álgebra de Lie . . . . .	13
1.4.1. Subgrupo uniparamétrico de $G$ . . . . .	16
1.4.2. Ejemplos de grupos de Lie y sus respectivas álgebras de Lie	17
1.4.3. Representaciones de grupos . . . . .	19

<b>2. Haces y conexiones principales</b>	<b>21</b>
2.1. Haz principal . . . . .	22
2.1.1. Ejemplo de un haz principal . . . . .	23
2.1.2. Funciones de Transición . . . . .	25
2.2. Haz asociado . . . . .	27
2.2.1. Secciones de un haz asociado . . . . .	28
2.2.2. Haces asociados vectoriales en mecánica cuántica . . . . .	28
2.3. Conexión principal . . . . .	29
2.3.1. Teorema de Frobenius . . . . .	30
2.3.2. Levantamiento de una curva por la conexión . . . . .	31
2.3.3. Transporte Paralelo . . . . .	32
2.3.4. 1-Forma de la conexión . . . . .	33
2.4. El espacio afín de todas las conexiones . . . . .	34
2.5. Derivada covariante . . . . .	35
2.5.1. Conexión en coordenadas locales . . . . .	39
2.6. Tensor de curvatura . . . . .	39
2.6.1. Formas horizontales . . . . .	41
2.6.2. Primera ecuación de estructura . . . . .	43
2.6.3. Identidad de Bianchi . . . . .	44
2.7. Transformaciones de norma . . . . .	45
2.7.1. Espacios móduli e invariancia de la acción . . . . .	50
2.8. ¿Por qué la curvatura? . . . . .	50
2.8.1. ¿Por qué haces principales? . . . . .	52
2.8.2. El ejemplo del mundo de Galileo y Newton . . . . .	53

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
<b>3. Electrodinámica</b>	<b>57</b>
3.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	59
3.1.1. Primera ecuación de Maxwell en forma diferencial . . . . .	60
3.1.2. Operador estrella de Hodge . . . . .	61
3.1.3. Segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial . . . . .	62
3.2. Electrodinámica Geometrizada . . . . .	64
3.3. Principio de Acción . . . . .	65
3.3.1. Las ecuaciones de movimiento . . . . .	67
3.3.2. El lagrangiano electromagnético . . . . .	68
3.4. Ecuaciones de Yang-Mills . . . . .	70
<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>

# Introducción

Los grupos de simetría forman un papel fundamental en la física y en la geometría moderna. Mentas geniales del siglo XX lo sabían muy bien, por mencionar algunos, Einstein, que rumbo hacia cumplir su gran sueño usó este principio en el que la simetría determina las interacciones físicas dentro de un entorno geométrico. Emmy Noether fue otra, una de las mejores matemáticas a quien Einstein admiraba por sus ideas, ideas que fueron relevantes contribuciones a la física, la principal es el teorema que lleva su nombre en el que explica la conexión entre simetrías de la naturaleza o de un sistema físico y las leyes de conservación. Aunque si hacemos un intento por analizar la historia en retrospectiva, quizás el precursor de todas estas concepciones posteriores, en un contexto más primitivo pero igual de importante y revolucionario, fue Felix Klein, quien tuvo la idea de pensar a la geometría del espacio como el estudio de propiedades invariantes bajo un grupo de transformaciones, toda esta teoría de los invariantes fue promovida por él en su famoso programa de Erlangen.

Podríamos pensar que es un poco místico el hecho de que los espacios simétricos sean usados como bloques constituyentes en la física moderna, dado que simetrías tan exactas sólo existen en construcciones matemáticas idealizadas, y cualquier representación física por medio de un cuerpo simétrico tal como una esfera, un círculo, un poliedro platónico u objetos semejantes, podría considerarse tan solo como una aproximación dado que en el mundo real no existen tales simetrías, por lo menos a simple vista. Sin embargo, el éxito de las teorías físicas del siglo XX, yace precisamente en el entendido de que las interacciones físicas, tales como la gravedad, el electromagnetismo y las fuerzas fuerte y débil, actúan en base a esta idea fundamental que depende de estructuras físicas cuyas simetrías son precisamente, exactas.

Un ejemplo que sin duda es de gran relevancia en física es *la teoría de la relatividad especial*, donde el grupo de simetrías del espaciotiempo de Minkowski

$M_4$ , es el grupo de Poincaré de 10 parámetros. Este está constituido por el grupo de Lorentz de 6 dimensiones, en el que 3 parámetros definen rotaciones en el espacio físico los cuales corresponden a los ángulos de Euler, otros 3, parametrizan las transformaciones que mezclan el espacio y el tiempo, las cuales no son rotaciones como tal, sino el pasar de un sistema inercial a otro (las transformaciones tipo boost). Y los 4 parámetros restantes, constituyen las 4 simetrías de traslación (3 espaciales y 1 temporal). Sin embargo, al pasar a *la teoría de relatividad general*, el grupo de simetrías de la variedad  $M$  que es el espaciotiempo, es el grupo  $\text{Diff}(M)$  de los difeomorfismos de  $M$ . De modo que el salto de una a otra teoría es pasar de un grupo de 10 dimensiones a uno de dimensión infinita.

Otro ejemplo, que es el que nos concierne en este trabajo, es *la electrodinámica*. Como veremos a lo largo del último capítulo, la electrodinámica, desde el punto de vista de esta teoría de simetrías, se puede ver como una teoría física naturalmente asociada a *haces principales* cuyas fibras son círculos orientados. Hacer un intento por aprender electrodinámica en este entorno matemático y geométrico, nos ayudará a extender esta idea a las teorías de Yang-Mills que son una generalización, donde en lugar de aparecer el grupo  $U(1)$  aparecerá un grupo de Lie compacto y multidimensional como por ejemplo,  $SU(3)$  en el caso de la cromodinámica. Toda esta teoría de simetrías la desarrollaremos a lo largo del primer capítulo, y en el segundo capítulo veremos que los haces principales son el ideal matemático para describir la idea de localización de simetrías.

En general, cuando tenemos un haz principal, físicamente nos referimos a que un grupo  $G$  (que puede ser  $U(1)$  en electrodinámica o  $SU(3)$  en cromodinámica), es un grupo que enriquece el espaciotiempo de manera ‘local’. Donde ahora imaginamos a las partículas no como puntos en el espaciotiempo, sino como puntos que también tienen una ‘vida interna’ que se representa mediante simetrías internas dadas por este grupo. Considerando así, un nuevo espacio físico que cobra vida, en el que la existencia de las cosas la podemos interpretar desde un punto de vista físico más intuitivo. Y por otro lado, el hecho de que también podamos mover los objetos de un lugar a otro, y de cierta forma relacionarlos, lo que demuestra es la existencia de algo que unifica las cosas, y, que difiere con la idea de espacio euclidiano en el que sólo yacen objetos inertes que a menudo nos sirven como representaciones de algo que va mucho más allá de este artificio matemático. Los físicos suelen llamar a estas simetrías internas como *grados internos de libertad*.

Al reflexionar en esto, estamos por realizar un paso conceptual enorme. Pues si pensamos que existe una simetría realizada en algún punto del espacio, por decir, una rotación donde la física no ve esta transformación interna, nada nos

dice que estas simetrías no puedan ser independientes de los puntos del espacio. Entonces la pregunta del físico sería la siguiente: si alguien realiza una simetría en algún punto del espacio, ¿será que alguien más en algún otro punto tenga que realizar inmediatamente la misma simetría? Y ¿qué podríamos responder?, pues probablemente no, pero ¿acaso esto sería físicamente aceptable? Bueno, pues la respuesta a esta pregunta es el reto de las teorías de Yang-Mills, tratar de ver hasta dónde podemos llegar si deseamos que esto pase.

Matemáticamente, estas teorías no involucran únicamente al grupo  $G$ , sino al grupo de todas las funciones suaves  $C^\infty(M, G)$  definidas en el espaciotiempo  $M$  con valores en  $G$ . Así, en un punto  $x$  de una porción del espaciotiempo podemos asociar una transformación  $\gamma(x) \in G$ , que suponemos depende suavemente de los puntos  $x$  de  $M$ . Estas asignaciones son las que conocemos como *transformaciones de norma*  $\mathcal{G}(P)$ . El procedimiento de pasar de un grupo global  $G$ , al grupo de transformaciones de norma, que es un grupo de dimensión infinita, se conoce como *localización de simetría*. Es así como llegamos a las teorías de Yang-Mills, donde exigimos la construcción de una teoría que tenga estas simetrías. Entonces, si hablamos de cromodinámica estaremos considerando el grupo  $C^\infty(M, \text{SU}(3))$ , y en el caso de electrodinámica, el grupo  $C^\infty(M, \text{U}(1))$ .

Cuando hablamos de la fuerza aparecen unos objetos matemáticos llamados *conexiones* que desarrollaremos en el segundo y tercer capítulo. Las conexiones, como su nombre lo dice, son las que ‘conectan’ las cosas y son de singular importancia. Hay una manifestación física impactante de la conexión que se da cuando movemos los objetos, y es el hecho de que éstos no se transforman en algo diferente, como por ejemplo en luz, sino que permanecen siendo objetos materiales, revelando así a la fuerza como la ‘materialidad’ de las cosas.

Un ejemplo de todo esto sería pensar en un campo electrón-positrónico controlado por unos imanes donde actúa un grupo  $G$  sobre el espaciotiempo, y primero considerar una configuración en la que el campo está inmóvil, es decir, una configuración en la que el campo se encuentra en el nivel mínimo de energía. Lo relevante es que si después aplicamos una simetría que varía de ser neutra a no serlo y después volver a serlo, el campo sufrirá una desviación, apareciendo así, derivadas parciales al cuadrado que son las expresiones para la energía de campo como se ve en las teorías de campo estándares. Entonces esta nueva configuración intuitivamente tendría que tener más energía que la anterior, lo que parecería un poco contradictorio con la visión que teníamos de la teoría que contiene toda esta simetría. Sin embargo, existe una solución que consiste en introducir otro campo que no hemos tomado en cuenta que también se transforma y que conjuntamente

con este campo inicial, hace que la energía se preserve, este es lo que se conoce como *campo material de conexión*. Donde geoméricamente, el campo inicial es la sección de un *haz asociado* (el cual es asociar arquetipos representados por un haz principal) que son los fermiones, y el que nos permite movernos por el espaciotiempo, es el de la conexión. Por ejemplo, para la electrodinámica el campo de conexión son los fotones y para la cromodinámica los gluones.

Con todo este formalismo geométrico asentado estaremos en posibilidad de introducir en el tercer capítulo la derivación de las ecuaciones de Yang-Mills, siendo las ecuaciones de Maxwell una consecuencia particular de este resultado.

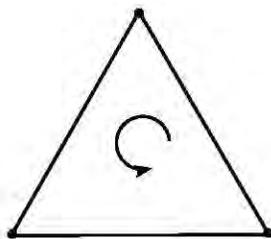
# Capítulo 1

## Simetría

### 1.1. Grupo de simetrías

En este capítulo platicaremos sobre grupos y simetrías. Si tratamos de considerarlo a nivel muy general, lo más profundo que debemos saber sobre simetrías, es que aparentemente estas preservan algo.

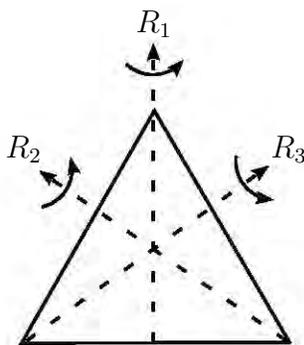
Pensemos, por ejemplo, en las simetrías geométricas de un triángulo equilátero, éstas van a preservar su estructura que son sus vértices y aristas. Simetrías, que podríamos clasificar en dos tipos; las que invierten orientación y las que no. Veamos primero cuáles son las simetrías que preservan la orientación. Si consideramos el conjunto de vértices como vemos en la figura (1.1), sus simetrías serán rotaciones por un ángulo de  $\frac{2\pi}{3}$  en torno al eje de simetría que pasa por el centro del triángulo y que es ortogonal al plano del mismo, y serán 3: la trivial que no hace nada,  $\frac{2\pi}{3}$  y  $\frac{4\pi}{3}$ . Y la composición de cualesquiera dos de ellas, nos dará nuevamente una de ellas. Estas tres rotaciones ilustran un ejemplo de un *grupo de simetrías*, pues este consiste en un conjunto de elementos equipado con una ley de multiplicación u operación binaria:  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ , para la cual, se cumple la ley asociativa de la multiplicación  $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ , donde hay un elemento  $e$ , llamado elemento neutro, que satisface que  $g \cdot e = e \cdot g = g$ , y en el que se cumple que para cualquier elemento  $g$ , existe su inversa  $g^{-1}$ , tal que  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ . Estas leyes se llaman *axiomas de grupo*, y las simetrías que transforman un objeto en sí mismo siempre las van a satisfacer.



**Figura 1.1:** Rotaciones orientables del triángulo

Hay una clase muy particular de grupos que cumplen que cualesquiera dos de sus elementos,  $g \cdot h = h \cdot g$ . Estos se llaman *conmutativos* o *abelianos*.

Si ahora consideramos las rotaciones reflexivas del triángulo, es decir, las tres rotaciones  $(R_1, R_2, R_3)$  que no preservan la orientación, en torno a sus tres respectivos ejes de simetría que unen los centros de aristas con los vértices opuestos, como observamos en la figura (1.2). Al final vamos a tener un grupo no abeliano, ya que  $R_i \cdot R_j \neq R_j \cdot R_i$  para  $i, j = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$ , cuyo orden es 6, donde el *orden* de un grupo es el número total de elementos distintos del grupo.



**Figura 1.2:** Rotaciones reflexivas del triángulo

**Observación:** A menudo omitiremos el punto  $\cdot$ , y simplemente expresaremos la multiplicación entre dos elementos  $g, h$  de  $G$  como:  $gh$ . Sin embargo, hay que tener en cuenta que existen grupos donde esta ley de ‘multiplicación’ es una suma. En este caso, la operación binaria la escribiríamos como  $g + h$ , el elemento neutro como  $0$ , y la inversa de  $g$  como  $-g$ .

Dos de las categorías más importantes de grupos son los grupos finitos y los grupos de *Lie* que representan una simbiosis del concepto abstracto de un grupo

con la idea de una variedad suave. Más adelante veremos algunos ejemplos y una vez introducido todo el formalismo de haces principales, podremos ver su profunda conexión con la física y cómo se conectan con la *geometría cuántica*, la cual nos proporciona una visión mucho más amplia del espacio, incorporando en el mundo de la geometría las ideas y métodos de la física cuántica.

### 1.1.1. Subgrupo

Es importante tener la noción de subgrupo de un grupo. Para ver que algo es un subgrupo, hay que elegir una colección de elementos dentro del grupo que por sí mismos formen un grupo, para esto, hay que checar que cumplan las operaciones de multiplicación e inversión que satisface el grupo entero.

Esto es importante porque en ocasiones, el grupo completo puede tener simetrías ‘ocultas’, cuya manifestación en alguna forma, sólo se puede apreciar cuando se rompe la simetría en algún subgrupo del grupo. En las teorías de física de partículas actuales a menudo se habla de simetrías fundamentales que describen la relación entre las partículas, y, sus interacciones. De modo que conocer los posibles subgrupos de un grupo de simetría fundamental, nos permite conocer la manifestación de la naturaleza en todas estas posibles formas de simetría.

En el ejemplo del triángulo un subgrupo del grupo de simetrías del triángulo son las simetrías que preservan la orientación, cuyo orden es 3.

### 1.1.2. Concepto de coset

El concepto de cosets tiene que ver con el concepto de subgrupo. Cuando tenemos un grupo  $G$  y su subgrupo  $H$ , siempre podemos introducir cosets izquierdos y cosets derechos multiplicando  $H$  a la izquierda o a la derecha por elementos del grupo, obteniendo así, una descomposición en cosets.

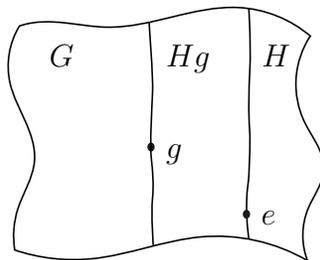


Figura 1.3: Cosets

## Subgrupo normal y grupo simple

Un subgrupo  $H$  es normal o invariante cuando los cosets izquierdos y derechos coinciden  $gH = Hg$ , o bien, es invariante bajo conjugaciones  $gHg^{-1} = H$  y se le llama *grupo normal*. Observamos que cada grupo  $G$  tiene a  $\{e\}$  y a  $G$  como subgrupos *triviales*, y son normales.

Un *grupo simple* es aquél grupo que no posee ningún subgrupo normal no trivial.

Para grupos finitos, el número de elementos de  $G$  siempre es el producto del número de elementos de  $H$  y el número de elementos del espacio de cosets  $G/H$ , es decir  $\|G\| = \|H\| \|G/H\|$ .

## 1.2. Acciones de grupos

Mencionaremos algunas nociones y ejemplos de acciones de grupos, veremos qué es acción transitiva, efectiva y libre, también hablaremos de conceptos como homogeneidad de espacio, estabilizador y espacio de cosets, como lo podemos ver en más detalle en [3].

### 1.2.1. Idea de acción

Tenemos un conjunto  $S$  y un grupo  $G$  que actúa sobre este conjunto, es decir, tenemos un mapeo

$$G \times S \rightarrow S \quad \text{ó bien} \quad S \times G \rightarrow S \quad (1.1)$$

dado que la acción se puede definir como izquierda o derecha. Y cuando también tenemos una estructura extra como la del grupo de Lie, es natural suponer que  $S$  es una variedad suave, al igual que los mapeos arriba mencionados.

De modo que para un  $x \in S$  y un  $g \in G$ , el mapeo es de la forma:

- $(g, x) \mapsto x$  si la acción es izquierda
- $(x, g) \mapsto x$  si la acción es derecha

Más en concreto, la acción derecha es asociar a cada pareja  $(x, g)$  un  $xg$  con la condición de que  $(xg)h = x(gh)$  y que  $xe = x$  donde  $g, h \in G$ ,  $x \in S$  y  $e$  es el elemento neutro. Por lo tanto existe la inversa, ya que:  $(xg)g^{-1} = x(gg^{-1}) = xe = x$ . Y la interpretación de este mapeo es la siguiente: fijando un  $g$ , podemos verlo como una transformación de  $S$  a  $S$ , dado que  $g$  mueve  $x$  a  $xg$ , teniendo así una biyección. El razonamiento es análogo para la acción izquierda. De modo que cada elemento de  $G$  se puede ver como una biyección de  $S$  a  $S$ , tal que  $x \mapsto gx$ .

De hecho, cada acción izquierda define una acción derecha y viceversa, donde en lugar de actuar  $g$  actúa  $g^{-1}$ .

### 1.2.2. Acción transitiva y espacio homogéneo

Existen varios tipos de acción, uno de ellos es la *acción transitiva*, esta se refiere a que dados dos puntos;  $x$  y  $y$  de  $S$ , siempre existe un elemento  $g \in G$  que nos lleva uno a otro por una simetría, es decir, tal que  $xg = y$ .

Geométricamente, esto nos lleva a la idea de *homogeneidad de espacio* donde todos los puntos son iguales si podemos pasar de uno a otro por una simetría, que en términos de la acción transitiva podemos definir.

Un conjunto  $(G, S)$  será un *espacio homogéneo* bajo la acción del grupo  $G$  si ésta es transitiva.

Esto no va a ocurrir en general pues podríamos tener algunos puntos y otros distintos que no se comportarán igual respecto de una simetría. Por lo tanto, existe un concepto más fino que siempre podemos introducir, éste es el concepto de *órbita*.

### 1.2.3. Concepto de órbita

Como vamos a ver, dada una acción del grupo  $G$ , por simetrías del conjunto  $S$ , nos permite introducir de manera natural una relación de equivalencia, cuyas clases se van a llamar *órbitas*.

Cuando decimos que dos puntos son equivalentes si hay una simetría que mueve uno a otro, será una relación de equivalencia especial que satisface el ser simétrica, reflexiva y transitiva.

De modo que la órbita asociada a un elemento  $x \in S$  es su propia clase de equivalencia, que son todos los puntos que podemos generar aplicando todas las posibles simetrías a este elemento inicial, es decir, si  $S$  es un espacio homogéneo y  $G$  actúa sobre él, entonces, la órbita  $O_x$  de  $x \in S$  se define como:

$$O_x = \{xg \mid g \in G\} \quad (1.2)$$

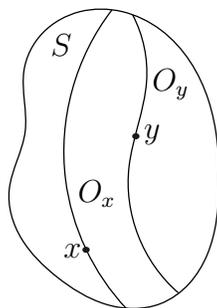
Por lo que las órbitas son justamente clases de equivalencia bajo la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff \text{existe } g \in G \text{ tal que } xg = y \quad (1.3)$$

Ahora, ¿cómo podemos reformular la propiedad de que la acción es transitiva en términos del concepto de órbita?

Si comenzamos con cualquier punto inicial  $x$ , y aplicamos las simetrías del grupo  $G$  a  $x$ , al ser la acción transitiva, cubriremos todo el espacio, ya que cualquier otro punto lo podremos recuperar como la acción de  $G$  sobre  $x$ . Entonces  $O_x = G$ .

En general, cuando tenemos una acción de un grupo, el espacio  $S$  siempre estará compuesto por clases de equivalencia disjuntas que son estas órbitas. Observemos que los elementos de una órbita se pueden mover de uno a otro por un elemento de  $G$ , pero elementos que pertenezcan a distintas órbitas no se podrán mover de uno a otro pues no son equivalentes.



**Figura 1.4:** Órbitas

### 1.2.4. Concepto de estabilizador

Fijemos  $x \in S$  y consideremos el conjunto

$$G_x = \{g \in G \mid xg = x\} \quad (1.4)$$

a este conjunto se le llama *estabilizador de  $x$* , o bien, *grupo de isotropía de  $x$* .

Podemos demostrar que el conjunto  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ . Consideremos  $a, b \in G_x$ ,  $x \in S$ ,  $ab \in G_x$  pues  $(x, a) \mapsto xa = x$  y  $(x, b) \mapsto xb = x \implies (x, ab) \mapsto x(ab) = (xa)b = xb = x$ . Para cualquier  $a \in G_x$ ,  $a^{-1} \in G_x$  ya que  $(x, a) \mapsto xa = x = x(aa^{-1}) = (xa)a^{-1} = xa^{-1} \implies x = xa^{-1}$ . Y por lo anterior,  $e \in G_x$  dado que  $(x, aa^{-1}) \mapsto x(aa^{-1}) = xe \implies x = xe$ .

Por lo tanto  $G_x$  es subgrupo de  $G$ .

Ahora estamos en posibilidad de analizar la relación entre órbitas, estabilizadores y sus cosets en el grupo completo:

Primero,  $Hg$  es un coset que no tiene estructura de subgrupo porque no contiene al elemento neutro. Podemos ver a  $Hg$  de dos formas: Multiplicamos todo  $H$  por  $g$  a la derecha o consideramos la acción de  $H$  sobre  $g$  multiplicando elementos de  $G$  a la izquierda por elementos de  $H$  que sería la órbita de  $G$  bajo la acción izquierda del subgrupo sobre el grupo. Así, todo el grupo se descompone en órbitas, donde cada órbita tiene el mismo número de elementos que  $H$ , como se ve en la figura (1.3). Y para ir de  $H$  a la órbita  $Hg$ , multiplicamos a la derecha por el elemento  $g$  de  $G$ . Es un mapeo biyectivo porque podemos revertirlo, para ir de  $Hg$  a  $H$ , multiplicamos a la derecha por  $g^{-1}$ .

Tomemos un elemento  $y \in O_x$ , tal que  $y = xg$ . Podemos decir que le asociaremos un  $g$  a  $y$ , sin embargo, esto es ambiguo ya que como vimos, puede haber un  $g'$  que puede aparecer en la misma ecuación. Entonces si dos elementos:  $g$  y  $g'$  mueven el elemento  $x$  a un mismo elemento  $y$ , podremos obtener uno a partir del otro multiplicándolo a la izquierda por un elemento  $h$  del estabilizador  $G_x$ , ya que al hacer la operación  $x(gg'^{-1}) = (xg)g'^{-1} = yg'^{-1} = x$ , podemos concluir que  $gg'^{-1} \in G_x$ , donde  $h = gg'^{-1}$ , así,  $g = hg'$ . Lo que también es válido a la inversa, pues si tenemos que  $g = hg'$ , podemos afirmar que actuando en  $x$  siempre nos darán el mismo resultado:

$$xg = x(hg') = (xh)g' = xg'$$

De modo que los cosets,  $G/G_x$ , son el espacio cociente de  $G$  por la relación de equivalencia:

$$g \sim g', \text{ si y sólo si, existe } h \in G_x \text{ tal que } g = hg' \quad (1.5)$$

Hay cosets izquierdos y derechos dependiendo de qué lado esté la  $h$ . Si multiplicamos elementos ' $h$ ' de  $G_x$  a la derecha por elementos ' $g$ ' de  $G$ , entonces, tenemos una acción derecha y naturalmente, cosets derechos. Y se sigue la misma lógica para la acción izquierda.

Entonces para evitar la ambigüedad que hemos mencionado, le asociaremos a  $y$  toda la clase de equivalencia  $[g]$  que es el coset derecho  $G_x$  correspondiente a  $g$ :

$$y \mapsto [g] = G_x g$$

Por lo tanto, los elementos de la órbita están relacionados uno a uno con los elementos de los cosets

$$O_x \leftrightarrow G/G_x \quad (1.6)$$

¿Y cuándo va a ser único, el elemento  $g$  que mueve  $x$  a  $y$ ? Cuando el estabilizador sea trivial para cada punto, y esto quiere decir que contiene únicamente un elemento, que es el elemento neutro.

A continuación mencionaremos las definiciones de acción efectiva y libre.

### 1.2.5. Acción Efectiva

*Efectivo* quiere decir que no hay una simetría no trivial que actúa sobre todo el espacio como trivial. En otras palabras, decimos que  $G$  actúa efectivamente en  $S$  si  $(x, g) \mapsto xg = x$  para todo  $x \in S$  implica que  $g = e$ . En otras palabras, en el caso de la acción efectiva tenemos una fiel representación de  $G$  en simetrías de  $S$ .

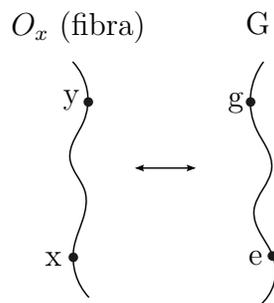
### 1.2.6. Acción Libre

*Libre* es algo más fuerte, pues quiere decir que el estabilizador de cada punto del espacio es trivial. En otras palabras, decimos que  $G$  actúa libremente en  $S$  si  $(x, g) \mapsto xg = x$  para algún  $x \in S$  implica que  $g = e$ .

En el contexto de *haces principales*, tema que veremos en el siguiente capítulo, las órbitas de la acción libre del grupo  $G$  que actúa a la derecha sobre el haz, son difeomorfas a  $G$ .

Para ver esto, regresemos a la discusión anterior donde dijimos que las órbitas son isomorfas a los cosets. Que la acción sea libre quiere decir que  $G_x$  es trivial lo que implica que el espacio de los cosets es únicamente el elemento neutro. De forma que al tener cada coset un elemento, tendremos una descomposición trivial de  $G$  en subconjuntos donde cada uno de ellos es cualquier elemento del grupo, de modo que en este sentido el espacio de los cosets es el grupo  $G$ . Ahora el mapeo  $y \mapsto g$  estará bien definido, y por lo tanto, toda la fibra se puede ver identificada con el grupo. Pero para esto, necesitamos fijar un elemento  $x$  de la fibra. No es una identificación canónica debido a que depende del elemento  $x$ .

En un contexto más general, si la acción es libre, y además transitiva, entonces todo el espacio se puede identificar geoméricamente con el grupo. Para esto, sólo tenemos que fijar un punto que represente un origen donde va el elemento neutro, que será el punto  $x$ , después de esto, el isomorfismo entre la órbita (que en este caso, es todo el espacio) y  $G$ , quedará fijo.



**Figura 1.5:** Isomorfismo entre  $O_x$  y  $G$

Un caso particular, sería considerar un espacio vectorial con la suma como operación, y suponer que tenemos una acción libre y transitiva del grupo de todos

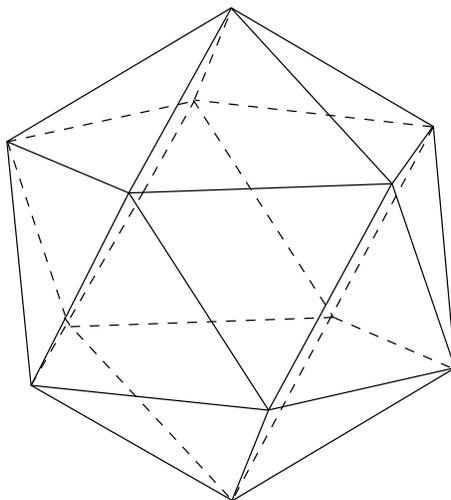
los vectores en un espacio vectorial, sobre un espacio. Por lo tanto, todo el espacio se identificaría con el espacio vectorial. Pero el elemento neutro en este caso, es el vector cero, por lo que el espacio del que hablamos es un *espacio afín*.

### 1.2.7. Espacio Afín

Es un conjunto sobre el cual el grupo aditivo de vectores de un espacio vectorial dado, actúa transitivamente y efectivamente. De hecho, si la acción es transitiva y  $G$  es abeliano, entonces, efectivo implica libre.<sup>1</sup>

### 1.2.8. Un ejemplo

Analicemos un ejemplo de un grupo finito para tratar de ilustrar los conceptos abordados hasta ahora, este es el icosaedro, uno de los 5 poliedros platónicos en 3 dimensiones.



**Figura 1.6:** Icosaedro

El poliedro icosaedro tiene treinta aristas, veinte caras y doce vértices. Nos interesan los movimientos del objeto que lo preservan. Por ejemplo, tomemos el

---

<sup>1</sup>Observemos que este grupo es un grupo abeliano, dado que la adición de vectores es conmutativa.

eje de simetría que pasa por los vértices opuestos. Al realizar una rotación de  $\pm \frac{2\pi}{5}$  o de  $\pm \frac{4\pi}{5}$ , el icosaedro se moverá en si mismo. También podemos considerar el eje de simetría que pasa por los centros de las aristas opuestas y girar el poliedro por  $\pi$ , o bien, tomar el eje que pasa por los centros de las caras opuestas y hacer una rotación de  $\pm \frac{2\pi}{3}$ . Al final veremos que hay sesenta de estas simetrías compuestas por los movimientos que hemos mencionado y el movimiento trivial. Ahora consideremos que nuestro conjunto  $S$ , es el conjunto de vértices únicamente. Estas sesenta transformaciones que preservan el icosaedro, moverán un vértice a otro vértice.<sup>2</sup> Entonces vamos a tener una acción de simetrías de permutaciones de 12 vértices que es transitiva, pues es un poliedro donde todos sus vértices son iguales. Si ahora nuestro conjunto son treinta aristas, la acción sigue siendo transitiva, pues podremos mover cada arista en otra arista (pues son iguales). Y así, aplicamos el mismo razonamiento a las caras. Por lo tanto, si  $S$  es el conjunto de vértices, aristas o caras, tendremos una acción transitiva. Pero también existe un concepto muy importante que podemos definir, el concepto de pétalo, este se define como una estructura compleja que en este ejemplo es un triángulo con una estructura extra, para construirlo hay que empezar con un vértice, luego fijarnos en una de las aristas que salen de éste, y por último, en una cara vecina a ambos, así, formamos el triángulo proporcionándole la orientación inducida del espacio. ¿Cuántos pétalos tendremos? Si tenemos 20 caras, e iniciamos con un determinado vértice como nuestro punto inicial del pétalo, tendremos una orientación y todo quedará definido. Así las cosas, cada cara nos dará tres pétalos que son vecinos a las aristas del pétalo original, entonces al final el icosaedro tendrá sesenta pétalos, el mismo número que sus simetrías. Ahora, si  $S$  es el conjunto de pétalos, tendremos nuevamente una acción transitiva, pero también será libre ya que cualquier pétalo podrá moverse en cualquier otro solamente de una forma. Y esto es precisamente la definición de un poliedro platónico.

### Definición de poliedro platónico

Cualquier poliedro que tenga la propiedad de que en el conjunto de sus pétalos, sus simetrías actúan transitivamente, será un poliedro platónico. Y se puede demostrar que entonces, dicha acción es libre.

Hasta ahora sabemos que tenemos sesenta pétalos y sesenta simetrías. Si consideramos el conjunto de aristas y nos preguntamos ¿cuántos elementos tiene el

---

<sup>2</sup>Naturalmente no podrán mover un vértice a una arista o a una cara.

estabilizador cuando el grupo  $G$  son sesenta movimientos del icosaedro, y el conjunto  $S$ , es el conjunto de aristas? Notamos que estos elementos son: la trivial y la rotación por  $\pi$ . Así, tenemos dos simetrías que estabilizan a cada arista, y como hay treinta aristas, observamos que al dividir el número de simetrías por el número de elementos del estabilizador:  $\frac{60}{2} = 30$ , obtenemos el número de elementos del conjunto. Similarmente, las simetrías que estabilizan una cara son; la trivial, rotación por  $\frac{2\pi}{3}$  y rotación por  $\frac{4\pi}{3}$ , por lo tanto tenemos que:  $\frac{60}{3} = 20$ . Las simetrías que estabilizan un vértice son: la trivial, rotación por;  $\frac{2\pi}{5}$ ,  $\frac{4\pi}{5}$ ,  $\frac{6\pi}{5}$  y  $\frac{8\pi}{5}$ , así:  $\frac{60}{5} = 12$ . Esto nos dice que hay una profunda conexión entre el número de simetrías y el número de elementos geométricos de estos poliedros. La propiedad que mencionamos antes nos dice que el número de elementos del grupo es igual al producto de elementos del grupo de isotropía y el número de pétalos que son los cosets.

### 1.3. Grupo de Lie

Una de las clases de grupos más interesantes e importantes en física y geometría es la de grupos de Lie.

Un grupo de Lie  $G$  es un grupo que al mismo tiempo es una variedad diferenciable tal que la operación de producto en el grupo  $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$  y la inversa  $g \mapsto g^{-1}$  son mapeos diferenciables de  $G \times G$  a  $G$  y de  $G$  a  $G$ , respectivamente.

#### Traslación de $G$

Denotamos como  $L_g$  y  $R_g$  a la traslación izquierda y derecha de  $G$  por un elemento  $g \in G$  como:  $L_g h = gh$  y  $R_g h = hg$  para todo  $h \in G$ , respectivamente.

## 1.4. Álgebra de Lie

Toda la teoría local de grupos continuos se la debemos al brillante matemático Sophus Lie, quien estudió a profundidad los elementos infinitesimales de un grupo. El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , se introdujo precisamente para dotar la información entera sobre la estructura local del grupo. Cuando hablamos de ‘localidad’ nos referimos a una región abierta  $n$ -dimensional suficientemente pequeña alrededor del elemento neutro del grupo de Lie  $G$ .

En física, se usa de manera habitual, la teoría de representaciones de álgebras de Lie mediante transformaciones lineales, que al mismo tiempo son representaciones de grupos de Lie. Por ejemplo, en mecánica cuántica, se ha vuelto de particular importancia el poder trabajar con elementos del álgebra de Lie, ya que estos a menudo se interpretan como magnitudes físicas. Y su importancia radica en el hecho de que las matrices del álgebra de Lie tienen una estructura mucho menos complicada que las matrices correspondientes al grupo de Lie, pues las primeras dependen de restricciones lineales, y las segundas, de restricciones no lineales en general.

Antes de dar una definición precisa de álgebra de Lie, veamos intuitivamente, cómo se conecta el concepto de grupo de Lie con el concepto de álgebra de Lie.

En general, cuando tenemos la acción de un grupo de Lie sobre un espacio, nos preguntamos cómo podemos pasar a la acción de un álgebra de Lie. Pues resulta que el álgebra de Lie es la versión infinitesimal del grupo de Lie. Si por grupo de Lie entendemos ‘simetría’, por álgebra de Lie entenderemos ‘simetría infinitesimal’. Entonces si tenemos un espacio donde actúa un grupo de Lie, cualquier espacio, también tendremos elementos actuando que serán pequeños desplazamientos del elemento neutro. Sabemos que la transformación de simetría correspondiente al elemento neutro del grupo, es la transformación idéntica. De modo que si tenemos un elemento  $x$ , esta transformación idéntica transformará  $x$  a  $x$ . Pero si tenemos una transformación en el grupo que no es la identidad, sino la identidad desplazada  $e + \delta g$ , esto será un elemento del álgebra de Lie. Así, si la transformación neutra, a cada punto  $x$  le asocia el mismo punto  $x$ , la transformación que es una pequeña desviación de ser neutra nos dará un desplazamiento muy pequeño, esto será un campo vectorial. Y así es como lo construimos, dado un elemento del álgebra de Lie, asociamos un campo vectorial en la variedad que también se puede ver como una transformación de simetría infinitesimal de la variedad. A veces, estos campos

se llaman *campos vectoriales fundamentales* asociados a los elementos del álgebra de Lie.

Un campo vectorial  $X$  sobre el grupo  $G$ , es llamado *izquierdo invariante* (*derecho invariante*) si es invariante bajo todas las traslaciones izquierdas  $L_g$  (traslaciones derechas  $R_g$ ), con  $g \in G$ . Observemos que esto es una definición de un *campo vectorial constante* en  $G$ .

Para tener otra noción de cómo se llega al álgebra de Lie a partir de la acción de un grupo de Lie, consideremos lo siguiente: Tomemos una vecindad alrededor del elemento neutro  $e$  del grupo de Lie  $G$ , mapémosla, bajo la traslación izquierda por un elemento  $g$  de  $G$ , en una vecindad de  $g$ . Como este mapeo lleva curvas en curvas, también mapeará vectores tangentes  $X$  en  $e$ , es decir, elementos del espacio tangente a la identidad que denotaremos por  $T_e$ , a elementos  $X_g$  del espacio tangente  $T_g$  en  $g$ , como vemos en la figura (1.7). Para más detalle, ver [13].

Cada vector en  $T_e$  define un único campo vectorial izquierdo invariante. Para ver esto tomemos un campo  $X \in T_e$  tal que  $X_g = L_{g*}X$ , donde

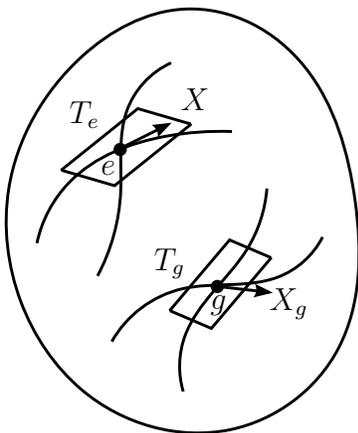
$$L_{g*} = T_e \rightarrow T_g \quad (1.7)$$

es la traslación izquierda del campo vectorial fundamental  $X$ , es decir,  $L_{g*} = D_e L_g$  donde  $D_e$  es la diferencial. Veamos que el campo  $X_g$  es invariante por la izquierda: Como  $L_h(g) = hg$ , demostremos que  $L_{h*}X_g = X_{hg}$  :

$$\begin{aligned} L_{h*}X_g &= L_{h*}L_{g*}X = L_{h*}D_e L_g X \\ &= D_g L_h D_e L_g X = D_{L_g(e)} L_h D_e L_g X \\ &= D_e (L_h \circ L_g) X = D_e (L_{hg}) X \\ &= (L_{hg})_* X = X_{hg} \end{aligned}$$

Por lo tanto, estos campos vectoriales izquierdo invariantes forman un espacio vectorial  $n$ -dimensional. De hecho, si  $X$  y  $Y$  son dos campos vectoriales izquierdo invariantes, entonces,  $L_g$  mapea  $[X, Y]$  en  $e$  a  $[X, Y]$  en  $g$ , por lo que el campo  $[X, Y]$  también es izquierdo invariante. Lo que nos lleva a la definición de álgebra de Lie de un grupo de Lie.

**Definición:** Definimos el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como el conjunto de todos los campos vectoriales izquierdo invariantes en  $G$  con la suma, multiplicación y la operación del corchete de Lie usual.



**Figura 1.7:** Campo vectorial izquierdo invariante

Un álgebra de Lie se puede definir independientemente del grupo de Lie, la definición anterior es sólo un ejemplo de la estructura general que es un álgebra de Lie abstracta, y ésta se puede definir en la manera abstracta como un espacio vectorial  $V$  dotado con un corchete bilineal  $[ \cdot, \cdot ] : V \times V \rightarrow V$ , que satisface la antisimetricidad

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{1.8}$$

y la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{1.9}$$

para  $X, Y$  y  $Z$  elementos de  $V$ .

### Transformación adjunta

Consideremos un elemento del álgebra de Lie,  $X$ , como campo vectorial invariante a la izquierda, su transformación adjunta será simplemente una traslación a la derecha  $gXg^{-1} = R_{g^{-1}}L_gX$ .

De la definición de álgebra de Lie, naturalmente surge la pregunta de si será o no posible construir el grupo entero  $G$ , a partir de la información que tengamos sobre ella.

La respuesta es, que toda álgebra de Lie es el álgebra de Lie de uno y sólo un grupo de Lie, siempre y cuando éste sea simplemente conexo. Más aún, cualquier

otro grupo de Lie con la misma álgebra de Lie que no sea simplemente conexo, será cubierto por el simplemente conexo. Cubierta que deberá ser un homomorfismo entre ambos grupos.

Es importante mencionar que el álgebra de Lie quedará completamente caracterizada por sus *constantes de estructura*, que están definidas de la siguiente manera:

Primero escogemos una base  $\{X_i\}, i = 1, \dots, n$  para el álgebra de Lie que es un conjunto linealmente independiente de campos vectoriales izquierdo invariantes. Entonces siempre podemos escribir:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k \quad (1.10)$$

Como la base  $\{X_k\}$  no es única, las constantes de estructura se transformarán, bajo un cambio de base como componentes de un tensor  $\binom{1}{2}$ .

Se puede demostrar que este tensor determina completamente la estructura del grupo  $G$ , en el caso cuando  $G$  es conexo.

### 1.4.1. Subgrupo uniparamétrico de $G$

Un grupo uniparamétrico de transformaciones diferenciables de una variedad  $M$ , a cada pareja  $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$  le asocia un elemento  $\varphi_t(p)$  de  $M$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . El grupo uniparamétrico además satisface que,  $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Todo grupo uniparamétrico de transformaciones  $\varphi_t$  induce un campo vectorial  $X$ , ya que para cada punto  $p \in M$ , el vector  $X_p$  es tangente a la curva  $y(t) = \varphi_t(p)$  que es la órbita de  $p$ . Esta órbita es la curva integral de  $X$  que surge de  $p$ . Para definir un grupo uniparamétrico de transformaciones locales, se usa el mismo razonamiento, pero en este caso la órbita de  $p$  se define sólo para  $t$  en una vecindad del 0 y para  $p$  en un abierto de  $M$ .

Ahora consideremos la curva integral de un campo izquierdo invariante  $X$  que pasa por  $e$ . Esta tiene un único vector tangente  $X_e$  en  $e$  y un único parámetro  $t$  correspondiente a  $e$  con  $t = 0$ . El mapeo exponencial,  $\exp(tX)$ , nos permite localizar los puntos sobre la curva, lo que involucra el difeomorfismo de  $G$  en si

mismo, generado por  $X$ . En este caso,  $X$  queda completamente determinado por  $X_e$ , de manera que podemos denotar los puntos de  $G$  en esta curva por:

$$\varphi_t \leftrightarrow \exp(tX) \tag{1.11}$$

Vale la pena mencionar que toda la geometría se puede ver encodificada en el álgebra de funciones suaves. Este campo izquierdo invariante  $X$  se puede interpretar como una derivación de esta álgebra,  $\exp(tX)$  es un grupo uniparamétrico de automorfismos del álgebra, y en este sentido tenemos esta correspondencia

Porque este mapeo satisface la propiedad:

$$\exp(sX)\exp(tX) = \exp[(t + s)X]$$

donde los puntos en estas curvas integrales forman un grupo

$$\varphi_{t+s} = \exp[(t + s)X] = \exp(sX)\exp(tX) = \varphi_s\varphi_t.$$

A esto se le llama *subgrupo uniparamétrico de  $G$* . Es abeliano simplemente porque la operación de grupo corresponde a la adición de los valores del parámetro.

A cada vector en  $T_e$  le corresponde un único subgrupo. Más aún, como todo subgrupo uniparamétrico debe ser una curva suave en  $G$  que pasa por  $e$ , existe una correspondencia biunívoca entre los subgrupos uniparamétricos de  $G$  y los elementos del álgebra de Lie de  $G$ . Que es la misma idea que dimos al principio de esta sección pero un poco más rigurosamente planteada. Para más detalle ver [13].

### 1.4.2. Ejemplos de grupos de Lie y sus respectivas álgebras de Lie

#### Grupo general lineal $GL(n)$

El grupo general lineal de dimensión  $n$ , es el grupo de simetrías de un espacio vectorial  $n$ -dimensional, que explícitamente se desarrolla como el grupo de todas las matrices  $M_n$  complejas (o reales) de  $n \times n$ , invertibles, con la multiplicación de matrices como operación del grupo, es decir

$$GL(n) = \{A \in M_n \mid \det A \neq 0\}$$

en el caso complejo, el grupo es simplemente conexo, a diferencia del caso real, que por supuesto es un subgrupo del anterior, ambos tienen dimensión  $n^2$  compleja y real respectivamente. Su álgebra de Lie, generalmente denotada como  $\mathfrak{gl}(n)$ , son todas las  $M_n$  con su conmutador.

**Grupo especial lineal  $SL(n)$** 

El grupo especial lineal

$$SL(n) = \{A \in M_n \mid \det A = 1\}$$

es un subgrupo normal del general lineal, este grupo preserva la orientación y el volumen de transformaciones lineales de  $\mathbb{C}^n$  ó  $\mathbb{R}^n$ . Su álgebra de Lie son todas las matrices de  $n \times n$  cuya traza es cero, es decir

$$\mathfrak{sl}(n) = \{X \in M_n \mid \text{Tr}(X) = 0\}$$

**Grupo ortogonal  $O(n)$** 

El grupo de matrices ortogonales (sobre los reales) se define como

$$O(n) = \{A \in GL(n) \mid AA^T = 1\}$$

cuya álgebra de Lie es

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in M_n \mid X + X^T = 0\}$$

que son todas las matrices antisimétricas de  $n \times n$ .

**Grupo especial ortogonal  $SO(n)$** 

El grupo  $SO(n)$  es la componente conexa de  $O(n)$  que contiene el 1, es un subgrupo normal, y nos muestra cómo se preserva la métrica y la orientación, la otra componente de  $O(n)$  es aquella donde viven las matrices ortogonales de determinante -1, que son las que cambian la orientación, ambos son grupos de dimensión  $n(n-1)/2$ . En otras palabras

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

que representan movimientos continuos de cuerpos rígidos en  $n$  dimensiones. Su álgebra de Lie son las mismas matrices antisimétricas, en otras palabras

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$$

### Grupo unitario $U(n)$

El grupo unitario es el grupo de matrices unitarias de  $n \times n$  es decir

$$U(n) = \{A \in M_n \mid AA^\dagger = 1\}$$

y su dimensión es  $n^2$ . El determinante de una matriz unitaria es un número complejo de norma 1, que de hecho es un elemento del grupo unitario unidimensional,  $U(1)$ . Para  $n > 1$  el grupo es no abeliano. El centro de  $U(n)$  es un subgrupo normal invariante, que consiste de todos los elementos del grupo que conmutan con todos los demás, que en este caso son las matrices escalares unitarias, es decir, números complejos de módulo uno por la matriz idéntica. Su álgebra de Lie son las matrices antihermiteanas

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in M_n \mid X + X^\dagger = 0\}$$

### Grupo especial unitario $SU(n)$

Es el subgrupo normal del grupo unitario, donde

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

tiene dimensión  $n^2 - 1$ , y por otro lado, su álgebra de Lie, son todas las matrices antihermiteanas con traza cero,

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in M_n \mid X + X^\dagger = 0, \text{Tr}(X) = 0\}.$$

### 1.4.3. Representaciones de grupos

La representación de un grupo es un caso particular de la acción izquierda cuando tenemos transformaciones lineales.

Una aplicación extensiva de esta situación la encontramos en la mecánica cuántica y en las simetrías físicas.



## Capítulo 2

# Haces y conexiones principales

Muchas teorías en física como las teorías de norma de interacciones entre partículas, necesitan de espacios un poco distintos a los que estamos acostumbrados, éstas, además de considerar las dimensiones del espacio y tiempo usuales, añaden una o más dimensiones espaciales extra, por decirlo de alguna manera, que suelen conocerse como '*dimensiones internas*', lo que hace posible el poder realizar movimientos a lo largo de esta dimensión interna sin que nos alejemos del punto del espaciotiempo en el que estemos parados.

Los haces fibrados principales tienen estas características que nos permiten hacer uso de la localidad y al mismo tiempo movernos por dimensiones internas, que además tienen la propiedad de ser parametrizables por simetrías internas.

Gran parte de la teoría moderna de interacciones entre partículas depende de la noción de conexión, que es una generalización de una noción más primitiva como lo es, la de derivada covariante que se basa en la idea del transporte paralelo de cualquier objeto geométrico local a lo largo de una curva en una variedad, cantidad que es referida a los vectores tangentes en puntos de esta. Una conexión tiene que ver con transportar paralelamente objetos geométricos apropiados (que pueden tener una interpretación física interesante). Y ¿por qué nos interesa transportar paralelamente? Porque nos lleva a la idea de universalidad de la física. Si por ejemplo, tenemos un dispositivo experimental de observables físicas que también puede involucrar objetos abstractos como vectores, tensores, espinores, y por otro lado, alguien más en algún lugar lejano tiene su propio dispositivo experimental y desea entender el universo también, debemos tener la misma visión, ambos

dispositivos experimentales deben poderse vincular uno con otro, y aunque veamos las cosas un poco distintas, esta idea de universalidad de la física, de cierta forma nos lleva a la suposición de que debe existir una manera de transformar lo nuestro en lo del otro, pero para esto nos basamos en la noción del espaciotiempo como algo continuo, de forma que si nos movemos por él mediante trayectorias, podremos transformar de un lado a otro, y de aquí la idea del transporte paralelo, que es un significado físico muy primitivo de las conexiones.

## 2.1. Haz principal

Un haz fibrado principal diferenciable  $P(M, G)$  es una variedad cuya estructura se define a partir de otro par de variedades  $M$  y  $G$ , donde  $G$  es un grupo de Lie. A  $P$  usualmente se le denomina espacio total, a  $M$  espacio base, y a  $G$ , grupo estructural. De modo que un haz fibrado principal sobre  $M$  con grupo  $G$ , consiste en una variedad diferenciable y una acción de  $G$  en  $P$  que satisface las siguientes propiedades:

1. El grupo  $G$  actúa *libremente* en  $P$  por la derecha, es decir,

$$(u, g) \in P \times G \mapsto R_g u = ug \in P$$

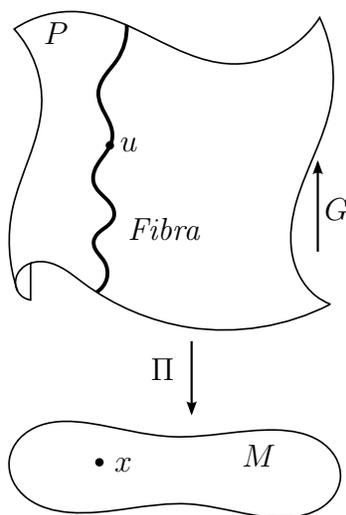
donde el estabilizador es trivial para cada elemento.

2. La variedad  $M$  debe considerarse como el *espacio cociente* de  $P$  por la relación de equivalencia inducida por  $G$ , es decir,  $M = P/G$ , y donde la proyección canónica  $\Pi : P \rightarrow M$  es diferenciable. Lo que quiere decir que para cada punto  $x \in M$ , la inversa  $\Pi^{-1}(x)$  es una subvariedad cerrada de  $P$  llamada, *fibra* sobre  $x$ . Si  $u$  es un punto de  $\Pi^{-1}(x)$ , entonces  $\Pi^{-1}(x)$  es el conjunto de puntos  $ug$ , con  $g \in G$ , que es la fibra que pasa por  $u$ . Cada fibra será difeomorfa a  $G$ , pues las fibras son las órbitas generadas por la acción del grupo y ésta es libre.
3. El haz  $P$  es *localmente trivial*, lo que significa que cada punto  $x \in M$  tiene una vecindad  $U$ , tal que  $\Pi^{-1}(U)$  es isomorfa a  $U \times G$  en el sentido de que existe un difeomorfismo  $\Psi : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  tal que  $\Psi(u) = (\Pi(u), \varphi(u))$  donde  $\varphi$  es un mapeo de  $\Pi^{-1}(U)$  a  $G$ , que satisface:  $\varphi(ug) = \varphi(u)g$  para todo  $u \in \Pi^{-1}(U)$  y  $g \in G$ . De aquí vemos que si  $N$  es una subvariedad de  $M$ , entonces,  $\Pi^{-1}(N)(N, G)$  también es un haz principal.

Un haz principal será un *haz trivial* (en el sentido global) si puede ser expresado como el producto directo del espacio base que es la variedad  $M$  y la fibra, que es el grupo de Lie  $G$  que naturalmente actúa libremente por la derecha sobre  $P = M \times G$ , esto significa que para cada  $h \in G$ ,  $R_h$  mapea  $(x, g) \in M \times G$  en  $(x, gh) \in M \times G$ . O bien, este será trivial si existe una sección global, como se ilustra en el ejemplo que sigue (2.2).

Por otro lado, una *porción de un haz* se define como  $\Pi^{-1}(U)$ . Y la trivialidad local se refiere a que las porciones del haz que son conjuntos suficientemente pequeños que cubren el espacio base son trivializables.

Hay un resultado topológico importante que dice que si el espacio base  $M$  es contractible, entonces, el haz principal  $P$  es trivializable sobre todo  $M$ . Como podemos ver en [7].

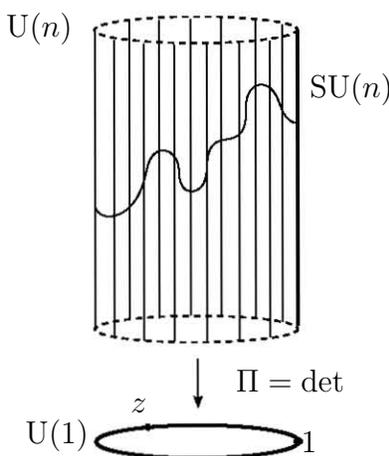


**Figura 2.1:** Haz Principal

### 2.1.1. Ejemplo de un haz principal

En la figura (2.2) tenemos una imagen ilustrativa de un haz principal que involucra a  $U(n)$  como haz,  $SU(n)$  como grupo estructural y el círculo que es  $U(1)$  como:

Podemos proyectar todo  $U(n)$  en  $U(1)$  mediante el mapeo determinante. Teniendo así, un fibrado sobre el círculo, donde este último se puede ver como el conjunto de números complejos de módulo uno.



**Figura 2.2:** Haz  $U(n)$

Observemos que la fibra sobre el número 1 es  $SU(n)$ . De esta forma, tenemos un ejemplo sencillo de un haz principal donde el espacio total es  $U(n)$ , el grupo estructural  $SU(n)$ , y la variedad base  $U(1)$  que es un círculo. Aquí  $SU(n)$  actúa a la derecha simplemente multiplicando todos los elementos del haz principal a la derecha por un elemento de si mismo. De hecho, aquí tenemos un ejemplo de un *haz trivial* ya que siempre podemos construir una sección global asociando a cada elemento  $z$  de la base  $U(1)$ , la matriz diagonal:

$$U(1) \ni z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in U(n)$$

la cual se proyecta a este elemento inicial mediante el mapeo determinante.

En general, siempre que tenemos un grupo y un subgrupo podemos construir un haz. Podemos considerar el espacio de los cosets derechos de un grupo  $\tilde{G}$  respecto al subgrupo  $G$  teniendo como espacio base a la variedad  $M$ . En este caso, todas las fibras tienen estructura de grupo y el subgrupo aparece siempre que consideramos las fibras sobre las cuales se proyecta el elemento neutro. Entonces

tenemos una acción derecha de  $G$  sobre  $\tilde{G}$ :  $(\tilde{g}, g) \in \tilde{G} \times G \rightarrow \tilde{g}g \in \tilde{G}$ . Actuando el grupo  $\tilde{G}$  por la izquierda por un elemento dado preservando los cosets derechos y moviendo todo el haz a la izquierda para que se preserven las fibras. Al preservarse las fibras, la acción se proyecta en  $M$ . La variedad  $M$  va a ser un *espacio homogéneo* por el hecho de que cada punto se puede transformar en cada otro punto mediante un desplazamiento a la izquierda. En otras palabras, esta simetría a la izquierda de las fibras implica una simetría en la variedad. Es decir, si tenemos un elemento arbitrario  $u$  y aplicamos una simetría  $w$  de  $\tilde{G}$ , entonces moveremos  $u$  a  $wu$ . Por otro lado, al ser las fibras órbitas de la acción derecha del grupo  $G$ , tendremos dos acciones que conmutan por la ley de asociatividad, es decir, actuar a la derecha  $(wu)g$  es lo mismo que actuar a la izquierda  $w(ug)$ . Lo que quiere decir que las órbitas que son las fibras verticales van a pasar a órbitas, y cuando pegamos todos los puntos de las órbitas en un punto, es decir cuando hacemos la proyección, tendremos una acción consistente en  $M$ .

El espacio de Minkowski  $M_4$  en la teoría de la relatividad especial es un ejemplo físico de esto, donde  $\tilde{G}$  es el grupo de Poincaré (de 10 dimensiones),  $G$  es el grupo de Lorentz (de 6 dimensiones) y  $M_4$  es el espacio base (de  $10 - 6 = 4$  dimensiones). El hecho de que el grupo de Poincaré actúe sobre  $M_4$ , es como una realización del programa de Erlangen donde podríamos decir que el espaciotiempo está hecho de puras simetrías.

### 2.1.2. Funciones de Transición

El concepto de funciones de transición lo que busca es relacionar la definición intrínseca de un haz principal, con la definición y construcción de una cubierta abierta. Esto físicamente tiene como consecuencia el poder utilizar distintas cartas que representan a distintos observadores para describir un mismo objeto.

Sabemos que un haz principal  $P(M, G)$  es localmente trivial, lo que significa que es posible escoger una cubierta abierta  $\{U_\alpha\}$  de  $M$ , tal que cada  $\Pi^{-1}(U_\alpha)$ , es provisto con un difeomorfismo  $u \mapsto (\Pi(u), \varphi_\alpha(u))$  de  $\Pi^{-1}(U_\alpha)$  a  $U_\alpha \times G$ , tal que  $\varphi_\alpha(ug) = \varphi_\alpha(u)g$ . Ahora, si  $u \in \Pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi_\beta(ug)(\varphi_\alpha(ug))^{-1} &= (\varphi_\beta(u)g) \cdot (g^{-1}(\varphi_\alpha(u))^{-1}) \\ &= \varphi_\beta(u)gg^{-1}(\varphi_\alpha(u))^{-1} \\ &= \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1} \end{aligned}$$

Lo que nos dice que sólo depende de  $\Pi(u)$  no de  $u$ .

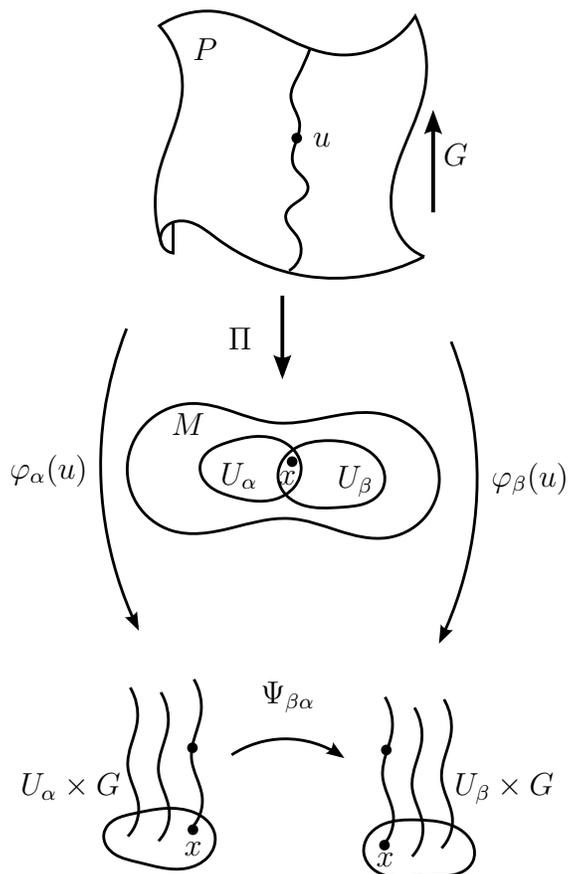
Podemos definir un mapeo  $\Psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  dado por

$$\Psi_{\beta\alpha}(\Pi(u)) = \varphi_\beta(u)(\varphi_\alpha(u))^{-1}$$

La familia de mapeos  $\Psi_{\beta\alpha}$  son llamados *funciones de transición del haz*  $P(M, G)$  correspondiente a la cubierta  $U_\alpha$  de  $M$  y al sistema de trivializaciones  $\varphi_\alpha$ . Y satisfacen las siguientes relaciones:

- $\Psi_{\gamma\alpha}(x) = \Psi_{\gamma\beta}(x)\Psi_{\beta\alpha}(x)$  para  $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$
- $\Psi_{\gamma\gamma}(x) = x$
- $\Psi_{\beta\alpha}(x) = (\Psi_{\alpha\beta}(x))^{-1}$

donde los últimos dos puntos son consecuencia del primero.



**Figura 2.3:** Funciones de transición

De hecho, si tenemos una variedad  $M$ , una cubierta abierta  $U_\alpha$  de  $M$  y un grupo de Lie  $G$ . Dado un mapeo  $\Psi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  para todo  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  que satisface las relaciones anteriores, podemos construir un haz principal diferenciable  $P(M, G)$  con funciones de transición  $\Psi_{\beta\alpha}$ , naturalmente revertiendo la construcción anterior.

## 2.2. Haz asociado

Haz asociado, localización de un haz principal En todas las teorías de Yang-Mills se usan haces principales, de los cuales todo se puede derivar. En geometría diferencial se estudian objetos que se llaman *haces vectoriales*, que se derivan de un haz principal. Como veremos a continuación, hay una manera de construir un *haz asociado*, a partir del haz principal. Un haz vectorial es un caso particular de un haz asociado cuando la fibra es un espacio vectorial y cuando el grupo actúa como representación lineal.

Consideremos un haz fibrado principal  $P(M, G)$ , y una variedad  $F$  en la que  $G$  actúa por la izquierda:  $(g, \xi) \in G \times F \rightarrow g\xi \in F$ . Ahora construyamos un haz fibrado asociado a  $P$ , sobre la base  $M$ , con fibra estándar  $F$ , y grupo estructural  $G$ , denotado por  $E(M, F, G, P)$ . El grupo  $G$  actúa por la derecha en la variedad producto  $P \times F$ , como sigue: un elemento  $g \in G$  mapea  $(u, \xi) \in P \times F$  en  $(ug, g^{-1}\xi) \in P \times F$ . El espacio cociente de  $P \times F$  por esta acción de grupo se escribe como:  $P \times_G F$ . Hasta ahora  $E$  es sólo un conjunto, al que después vamos a introducir una estructura diferenciable. El mapeo  $P \times F \rightarrow M$  que mapea  $(u, \xi)$  en  $\Pi(u)$ , induce un mapeo  $\Pi_E$  llamado la proyección de  $E$  en  $M$ . Para cada  $x \in M$ , el conjunto  $\Pi_E^{-1}(x)$  es llamado la fibra de  $E$  sobre  $x$ . Cada punto  $x$  de  $M$  tiene una vecindad  $U$  tal que  $\Pi^{-1}(U)$  es isomorfa a  $U \times G$ . Identificando  $\Pi^{-1}(U)$  con  $U \times G$  vemos que la acción de  $G$  en  $\Pi^{-1}(U) \times F$  por la derecha está dada por:  $(x, g, \xi) \rightarrow (x, gh, h^{-1}\xi)$  para  $(x, g, \xi) \in U \times G \times F$  y  $h \in G$ . Como se sigue fielmente de [7].

El isomorfismo  $\Pi^{-1}(U) \approx U \times G$  induce un isomorfismo  $\Pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$ . De manera que podemos introducir una estructura diferenciable en  $E$  ya que  $\Pi_E^{-1}(U)$  es una subvariedad abierta de  $E$  que es difeomorfa a  $U \times F$ , bajo el isomorfismo  $\Pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$ . La proyección  $\Pi_E$  es entonces un mapeo diferenciable de  $E$  en  $M$ .

De hecho, si  $P(M, G)$  es un haz principal y  $F$  una variedad en la cual  $G$  actúa por la izquierda, y  $E(M, F, G, P)$  es el haz fibrado asociado a  $P$ . Para cada  $u \in P$  y cada  $\xi \in F$ ,  $u\xi$  es la imagen de  $(u, \xi) \in P \times F$  por la proyección natural  $P \times F \rightarrow E$ . Entonces cada  $u \in P$ , es un mapeo de  $F$  en  $F_x = \Pi_E^{-1}(x)$ , donde  $x = \Pi(u)$  y

$$(ug)\xi = u(g\xi)$$

para  $u \in P, g \in G, \xi \in F$ .

Cuando hablamos de isomorfismo entre una fibra  $F_x = \Pi_E^{-1}(x), x \in M$ , y otra fibra  $F_y = \Pi_E^{-1}(y), y \in M$ , nos referimos a un difeomorfismo que podemos representar de la forma  $v \circ u^{-1}$ , donde  $u \in \Pi^{-1}(x)$  y  $v \in \Pi^{-1}(y)$  son considerados mapeos de  $F$  en  $F_x$  y  $F_y$  respectivamente. En particular, un automorfismo de la fibra  $F_x$  es un mapeo de la forma  $v \circ u^{-1}$  con  $u, v \in \Pi^{-1}(x)$ . En este caso,  $v = ug$  para algún  $g \in G$  tal que cualquier automorfismo de  $F_x$  se puede expresar como  $u \circ g \circ u^{-1}$ , donde  $u$  es un punto fijo arbitrario de  $\Pi^{-1}(x)$ . Por lo tanto, el grupo de automorfismos de  $F_x$  es isomorfo al grupo estructural  $G$ .

En el caso en el que la representación  $\rho$  es trivial, tendremos un haz asociado trivial que es de la forma  $M \times F$ .

### 2.2.1. Secciones de un haz asociado

En términos de un haz principal, las secciones de un haz asociado son funciones en  $P$  con valores en  $F$  que satisfacen la propiedad de covariancia

$$\Psi(pg) = \rho(g^{-1})\Psi(p) \tag{2.1}$$

La situación más interesante desde el punto de vista físico es cuando tales  $\Psi$  corresponden a campos físicos, y  $F$  representa los grados internos de libertad de estos campos.

### 2.2.2. Haces asociados vectoriales en mecánica cuántica

Cuando tenemos un haz vectorial,  $F$  es un espacio vectorial y  $\rho$  es una representación lineal. Dentro del contexto de aplicaciones en mecánica cuántica, siempre que tenemos una representación de un espacio vectorial, esta será lineal,

esto es por como está formulada. En ella aparecen los *espacios de Hilbert*, donde las configuraciones del sistema (que pueden ser una partícula o un campo) son vectores en el espacio de Hilbert que es un espacio vectorial complejo dotado con un producto escalar. Las simetrías de la mecánica cuántica, están dadas por operadores unitarios o antiunitarios, y no hay más, físicamente los podemos interpretar como algo que preserva las probabilidades de transición<sup>1</sup>. En el caso más general,  $F$  corresponde a la parte material que enriquece el espacio, son grados internos de libertad que en mecánica cuántica forman parte del gran espacio cuántico de configuraciones, constituyendo un espacio de Hilbert de dimensión finita sobre el cual hay un grupo que actúa. Considerando el escenario más simple, serán transformaciones unitarias, sin embargo, existe el escenario donde las transformaciones son antiunitarias el cual no es tan frecuentemente considerado.

## 2.3. Conexión principal

Sea  $P(M, G)$  un haz principal sobre una variedad  $M$  con grupo estructural  $G$ . Para cada  $u \in P$ , sea  $T_u(P)$  el espacio tangente de  $P$  en  $u$  y  $G_u$  un subespacio vertical de  $T_u(P)$  que consiste de todos los vectores tangentes a la fibra que pasa por  $u$ .

Una conexión  $\nabla$  en  $P$  es la asignación de un subespacio horizontal  $Q_u$  de  $T_u(P)$  a cada  $u \in P$  tal que:

- (1) El espacio tangente se puede escribir como la suma directa de estos subespacios,  $T_u(P) = G_u \oplus Q_u$
- (2)  $Secumple Q_{ug} = R_{g*}Q_u$  para todo  $u \in P$  y  $g \in G$
- (3) La distribución  $u \rightarrow Q_u$  es suave.

Observemos que el espacio vertical  $G_u$ , existe sencillamente por la existencia de las fibras, pues naturalmente existen espacios verticales que son subespacios de vectores tangentes que son tangentes a las fibras, y si imaginamos a las fibras como algo vertical, por lo tanto, decimos ‘vertical’. Sin embargo, no tenemos el

---

<sup>1</sup>Teorema de Wigner.

concepto de la horizontalidad. En general, las fibras no están relacionadas en un haz, la conexión es la que ‘conecta’ las fibras, por eso se llama conexión. Pero si recordamos, la proyección  $\Pi : P \rightarrow M$ , es un mapeo diferenciable, de modo que podemos hablar de su diferencial  $d\Pi : TP \rightarrow TM$ , donde  $TP$  y  $TM$  son los haces tangentes correspondientes a  $P$  y a  $M$  respectivamente, así, si aplicamos la diferencial de la proyección a este espacio que es complementario al vertical, cuyo núcleo es exactamente la distribución de espacios verticales, tendremos un mapeo biyectivo entre éste y el espacio tangente a la variedad. Por lo tanto, para cualquier vector en el espacio base, podremos encontrar un único vector que vive para cada punto  $u$ , en el espacio tangente  $Q_u$ , y, que se proyecta en este vector inicial. Esto sería como una especie de levantamiento de estos vectores horizontales. Para esto, lo que necesitamos es únicamente un punto  $x$  de la base y un vector, luego, escogemos cualquier punto  $u$  en la fibra sobre este punto de la base y en este punto y en su espacio tangente encontramos el vector correspondiente.

Más adelante veremos que el concepto de la 1-forma de la conexión es una manera algebraica de decir esto, que es su imagen geométrica. No sin antes ser conscientes de que aún no sabemos cómo movernos horizontalmente, sólo sabemos cómo hacerlo de manera vertical. Lo que nos lleva de manera natural a introducir el teorema de Frobenius.

### 2.3.1. Teorema de Frobenius

El teorema de Frobenius tiene que ver con distribuciones. Una conexión es una distribución. En general podemos preguntarnos qué es una distribución definida sobre una variedad. Es asociarle a cada punto  $x$  de la variedad  $M$ , un subespacio  $\Delta_x \subseteq T_x M$ , siendo esta una asociación suave. Y como la dimensión es algo intrínseco asociado al espacio concluimos que todos estos subespacios tienen dimensión fija, localmente.

El teorema de Frobenius nos explica en general, cuándo una distribución proviene de una foliación, tales distribuciones que provienen de una foliación, se llaman: *integrables*. Si pensamos en todos los campos vectoriales que viven en la distribución  $\Delta$ , asociándole a cada punto un vector tangente que vive dentro de la distribución, entonces podemos considerar todos los campos vectoriales que viven ahí, los cuales formarán un espacio de campos vectoriales  $\mathcal{X}(\Delta)$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>En realidad  $\mathcal{X}(\Delta)$  es un módulo sobre el álgebra  $\mathbb{C}^\infty(M)$ .

Entonces el teorema de Frobenius dice que la distribución es integrable si y solamente si, su  $\mathcal{X}(\Delta)$  es un álgebra de Lie. En otras palabras, ésta será integrable, si dados  $X, Y \in \mathcal{X}(\Delta) \implies [X, Y] \in \mathcal{X}(\Delta)$ . Lo que es una condición necesaria y suficiente.

En el contexto de las conexiones principales, podemos aplicar el teorema de Frobenius ya que tenemos dos distribuciones, una canónica, que son los subespacios  $G_u$ , para los cuales no necesitamos el concepto de conexión, ya que siempre los tenemos cuando tenemos un haz, donde las fibras son una foliación de la variedad, foliación que nos permite introducir estos  $G_u$  como tangentes a cada hoja. Y por otro lado, tenemos esta otra distribución, compuesta por los subespacios  $Q_u$ , la cual no sabemos si proviene de una foliación, quizás si, quizás no. De hecho, en el caso en que la curvatura es cero, provendrá de una foliación. Y se puede demostrar que la curvatura cero es equivalente a la integrabilidad de la distribución horizontal. [7]

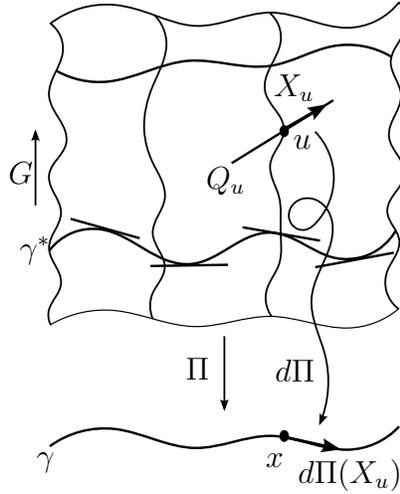
Ahora consideremos un caso muy particular, el caso en el que la distribución  $\Delta$  es 1-dimensional. Esto quiere decir que tendremos un campo vectorial  $\xi$ , digamos localmente, que será como una base, de modo que cualesquiera par de campos vectoriales  $X$  y  $Y$  se pueden ver en función del campo  $\xi$ , es decir:  $X = f\xi$  y  $Y = g\xi$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones suaves. Entonces, al hacer su conmutador, tendremos que:

$$[f\xi, g\xi] = [f(\xi g) - g(\xi f)]\xi \quad (2.2)$$

Pero esto todavía vive en  $\Delta$  porque es un múltiplo escalar de  $\xi$ . Lo que quiere decir que se cumple el teorema de Frobenius, entonces, acabamos de demostrar que cada distribución unidimensional siempre es integrable, lo que intuitivamente es claro, porque una distribución unidimensional quiere decir, direccionamientos en el espacio, lo que significa que siempre podemos encontrar curvas que integran esos direccionamientos.

### 2.3.2. Levantamiento de una curva por la conexión

Observemos la siguiente figura:



**Figura 2.4:** Cortina con sombra unidimensional

Ahora estamos considerando una porción del haz sobre la curva  $\gamma$ . Cuando consideramos la conexión y la restringimos a esta curva, tenemos subespacios horizontales de dimensión 1 (porque  $\gamma$  tiene dimensión 1). Y podemos aplicar el teorema de Frobenius a esta distribución sobre esta cortina, el cual nos dice que se puede integrar. Al integrarla, encontraremos curvas que reproducen estos subespacios tangentes, y como es una distribución invariante bajo la acción del grupo  $G$ , entonces la foliación asociada también es invariante.

Lo que acabamos de construir es el levantamiento de la curva por la conexión. Estas curvas nos permiten unir las fibras, y así es como uniremos las fibras en un haz principal. Esto es lo que conocemos como *transporte paralelo*.

### 2.3.3. Transporte Paralelo

Cuando tenemos una conexión  $\nabla$  en un haz principal  $P(M, G)$  es natural definir el concepto de transporte paralelo de fibras a lo largo de cualquier curva suave  $\gamma$  en la variedad base  $M$ , que es una transformación de la fibra sobre el punto inicial  $x \in M$  a la fibra sobre el punto final  $y \in M$  de la curva. Donde el levantamiento de  $\gamma$  es una curva horizontal  $\gamma^*$  en  $P$  que se proyecta en la curva inicial. Por curva horizontal entendemos una curva suave cuyos vectores tangentes son todos horizontales.

### 2.3.4. 1-Forma de la conexión

Dada una conexión  $\Gamma$  en  $P$ , definimos su 1-forma  $\omega$  en  $P$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  como sigue:

Primero hagamos hincapié en que todo  $A \in \mathfrak{g}$  induce un campo vectorial  $A^*$  en  $P$ , llamado campo vectorial fundamental correspondiente a  $A$ , donde  $A \mapsto A_u^*$  es un isomorfismo lineal de  $\mathfrak{g}$  en  $G_u$  para todo  $u \in P$ . Así las cosas, para cada vector  $X \in T_u(P)$ , definimos  $\omega(X)$  como la única  $A \in \mathfrak{g}$  tal que  $A_u^*$  es igual a la componente vertical de  $X$ . Por otro lado,  $\omega(X) = 0$  si y sólo si  $X$  es horizontal. Esta forma  $\omega : T_u(P) \rightarrow \mathfrak{g}$  es llamada 1-forma de la conexión, dada  $\Gamma$ .

En particular, una de las condiciones sobre la forma  $\omega$ , es que regresa campos vectoriales fundamentales en su generadores:

$$\omega(A^*) = A \tag{2.3}$$

y la otra es que recupera los espacios horizontales mediante núcleos:

$$Q_u = \{\xi \in T_u(P) \mid \omega(\xi) = 0\} \tag{2.4}$$

Recapitulando, hemos visto cómo construir una 1-forma  $\omega$  a partir de la distribución de espacios horizontales  $Q_u$  y cómo una 1-forma  $\omega$  nos genera la distribución  $Q_u$ . El vínculo entre ambas definiciones se da mediante los subespacios tangentes compuestos por los vectores  $\xi \in T_u(P)$  que satisfacen:  $\omega(\xi) = 0$ . A partir de esto podemos determinar completamente la forma porque obtenemos toda la información sobre los elementos necesarios para construir la conexión, por un lado nos da la información sobre los espacios verticales y por el otro la de los horizontales, y un espacio tangente al haz en cada punto de la fibra lo realizamos como la suma directa de estos subespacios. Ahora, si queremos explicar cómo irnos de la 1-forma que satisface la condición algebraica (2.3) a la idea geométrica de la conexión, notamos que también debe satisfacer otra condición, que es la covariancia:

$$(R_g^*\omega)(\xi) = g^{-1}\omega(\xi)g \tag{2.5}$$

donde  $R_g^*$  son los operadores de pullback correspondientes a la acción derecha del grupo estructural  $G$  sobre  $P$ .

Como consecuencia de la covariancia, obtenemos la invariancia de los subespacios horizontales. Entonces podemos decir que cualquier 1-forma  $\omega$  en  $P$  con valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , que además satisface dos condiciones:

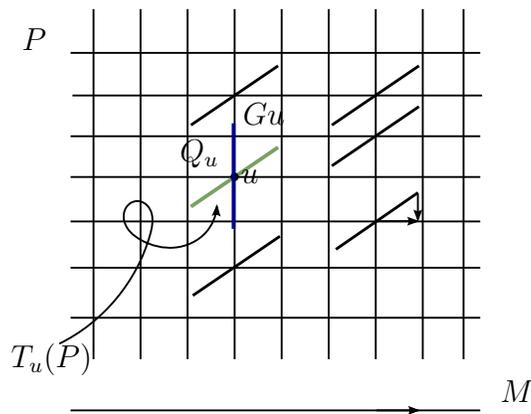
- Mapea campos vectoriales fundamentales en sus generadores
- Es ad-covariante en el sentido de la fórmula anterior

nos induce de manera natural una conexión tomando como distribución de subespacios horizontales, los núcleos de  $\omega$ .

En el siguiente capítulo  $\omega$  tomará el papel del potencial electromagnético expresado en coordenadas apropiadamente.

Veamos algo análogo en dos dimensiones para tratar de ilustrar la geometría de estos espacios tangentes de un haz principal, donde  $M$  ahora es una línea.

Como ya vimos, un haz principal es localmente trivial, si lo trivializamos, obtenemos una especie de malla horizontal-vertical. En esta forma, los espacios verticales, son fibras verticales, pero los espacios horizontales no necesariamente son horizontales, sino un poco inclinados, entonces, la forma de la conexión se puede explicar completamente, asociando a los vectores horizontales, que son los vectores en la carta horizontal de la base, un vector vertical que mide la inclinación de este espacio horizontal.

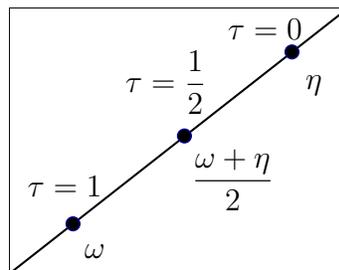


**Figura 2.5:** Malla horizontal-vertical

## 2.4. El espacio afín de todas las conexiones

Si consideramos las dos condiciones que debe cumplir la 1-forma  $\omega$  para que sea conexión, la primera es la única que nos restringe a las sumas afines. Pues

si aplicamos aquella condición vemos que el espacio de las conexiones no es un espacio vectorial ya que no contiene al cero. Y por otro lado, que la suma de dos conexiones  $\omega$  y  $\eta$  tampoco es una conexión, pero sí la suma de ellas entre dos,  $\frac{(\omega + \eta)}{2}(A^*) = A$ . Siguiendo con este razonamiento veamos que todas las 1-formas forman un espacio vectorial que adquirimos geoméricamente cuando escribimos  $\tau\omega + (1 - \tau)\eta$  con  $\tau \in \mathbb{R}$ . Y el conjunto de todas las sumas afines de dos puntos forman la única recta que pasa por estos dos puntos (hecha de puras conexiones), por lo tanto las conexiones forman un espacio afín. Y además de dimensión infinita.



**Figura 2.6:** Espacio afín de conexiones

Este espacio afín tiene una estructura interesante, ya que si sólo nos interesan las conexiones sobre la fibra que está arriba de un punto del espacio base, tendremos sobre cada punto  $x \in M$  un espacio afín que son conexiones localizadas que son las formas  $\omega$ . Así, la conexión verdaderamente se reduce a asociar a cada uno de estos espacios afines (fibras) un punto para cada punto  $x \in M$ . En otras palabras, existe un haz afín natural sobre  $M$ , cuyas secciones son formas de conexión, a esto se le llama *sección* de un haz afín. Podemos profundizar lo que hemos visto de combinaciones afines, observando que  $\tau$  no sólo puede ser un escalar sino una función arbitraria real suave sobre  $M$ .

Como cada fibra es un espacio afín, todos los puntos son iguales, y aunque no tenemos al cero, podemos construir una conexión especial, algo distinguido que será nuestro punto de referencia llamada *sección cero*, para que desde ahora podamos comparar todas las conexiones respecto de esta.

## 2.5. Derivada covariante

El *operador de derivada covariante*  $\nabla$  actúa sobre secciones suaves de un haz vectorial asociado. La idea de derivada covariante surge de comparar el compor-

tamiento real de un campo general (en el sentido de secciones suaves arbitrarias de haces vectoriales asociados) en cierta dirección que nace de un punto  $p$  con el transporte paralelo del mismo campo transportado en la misma dirección desde  $p$ , y restar el segundo del primero. Esto podemos aplicarlo a un pequeño desplazamiento a lo largo de cierta curva  $\gamma$ . Para definir la derivada de un campo general sólo necesitamos un desplazamiento infinitesimal a partir de  $p$ , que dependerá únicamente de la forma en que la curva surja de  $p$ , es decir, dependerá sólo del vector tangente  $X$  de  $\gamma$  en  $p$ .

Se puede demostrar que las siguientes propiedades caracterizan de manera intrínseca a los operadores que son derivadas covariantes:

$$\begin{aligned}\nabla_{X+Y} &= \nabla_X + \nabla_Y \\ \nabla_{fX} &= f\nabla_X \\ \nabla_X(f\xi) &= (Xf)\xi + f\nabla_X\xi \\ \nabla_X(\xi + \eta) &= \nabla_X\xi + \nabla_X\eta\end{aligned}$$

para  $X$  y  $Y$  campos vectoriales,  $\xi$  y  $\eta$  secciones del haz vectorial asociado, y  $f$  una función escalar.

Observemos que las propiedades anteriores nos dicen que el operador de derivada covariante es un operador lineal, local y que cumple la regla de Leibniz.

Un haz vectorial asociado a un haz principal  $P$ , depende de la representación  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , donde  $V$  es un espacio vectorial. Naturalmente, toda representación  $\rho$  tiene una representación  $\rho^* : G \rightarrow \text{GL}(V^*)$ , siendo ahora  $V^*$  el espacio dual. Por lo tanto, en general, el operador  $\nabla$  puede actuar sobre secciones vectoriales y covectoriales del haz asociado vectorial y covectorial respectivamente, de la siguiente manera:

$$\nabla_X \langle \varphi, \xi \rangle = X \langle \varphi, \xi \rangle = \langle \nabla_X \varphi, \xi \rangle + \langle \varphi, \nabla_X \xi \rangle$$

donde  $\varphi$  es una sección covectorial,  $\xi$  es una sección vectorial y  $X$ , un campo vectorial.

Observemos que cuando  $F = \mathbb{C}$  y  $\rho$  es trivial, obtenemos un haz vectorial trivial cuyas secciones serán funciones suaves complejas sobre  $M$ . Ahora cuando  $\nabla$  actúe sobre una sección  $\phi$  de este haz trivial, será lo mismo que hacer actuar a la derivada exterior sobre dicha sección:

$$\nabla \phi = d\phi$$

Y cuando tenemos una representación  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , que actúa sobre un espacio vectorial  $V$ , y otra representación  $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(V')$  que actúa sobre un espacio vectorial  $V'$ , también podemos considerar la representación-producto tensorial:

$$\rho \otimes \rho' : g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$$

que actúa en el producto tensorial  $V \otimes V'$ .

En particular, así es como podemos definir la acción de  $\nabla$  en haces algebraicamente derivados de un haz vectorial general, donde podemos asociarle toda el álgebra tensorial compuesta por productos tensoriales del haz inicial con su dual.

Es importante mencionar que aquí se cumpla la regla de Leibniz apropiada:

$$\nabla_X(T \otimes T') = (\nabla_X T) \otimes T' + T \otimes \nabla_X T'$$

para  $T$  y  $T'$  campos tensoriales arbitrarios.

En el capítulo anterior vimos la definición de lo que era un espacio afín, lo que nos dice que para cada dos puntos en él, hay un único vector que mueve uno a otro.

Ahora vamos a ver cómo la estructura de este espacio afín se refleja en términos de estos operadores de derivada covariante. Como acabamos de ver, hay cuatro propiedades que caracterizan  $\nabla$ , las cuales definen por completo una derivada covariante. Las conexiones las representamos por estos operadores  $\nabla$ .

Nos interesa el espacio de todas estas conexiones. Ahora, si tenemos otra conexión, digamos,  $\tilde{\nabla}$ . ¿Qué podemos decir de  $\lambda_X = (\tilde{\nabla}_X - \nabla_X)$ ? Que la diferencia es un tensor. Puesto que:

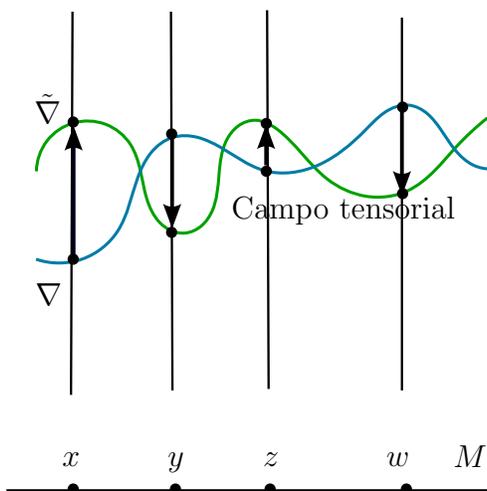
$$\begin{aligned} \lambda_{fX} &= f\lambda_X & \lambda_{X+Y} &= \lambda_X + \lambda_Y \\ \lambda_X(\xi + \varphi) &= \lambda_X(\xi) + \lambda_X(\varphi) & \lambda_X(f\xi) &= f\lambda_X\xi \end{aligned}$$

donde  $X, Y$  son vectores,  $\xi, \varphi$  secciones de un haz vectorial asociado y  $f$  una función suave.

Y viceversa, si tenemos un operador tensorial  $\lambda_X$  que cumple las propiedades anteriores, tomando una conexión como el inicio de nuestro espacio afín, podremos construir las demás conexiones. Lo que quiere decir que el espacio es afín, en el sentido de que el grupo aditivo de vectores son uno-formas con valores en el álgebra

de Lie, cuyo tipo dependerá del haz inicial. Como no hay una conexión privilegiada a priori, el cero no está, pero siempre podemos añadirle a cualquier conexión un tensor apropiado, que entonces, nos dará otra conexión. Y observemos que esto es completamente local, pues en cualquier argumento de estas diferencias,  $f$  sale.

Por lo tanto, estas conexiones las podemos ver como secciones de un haz afín, que es otra representación del mismo fenómeno de haz afín pero en términos de operadores de derivada covariante. Y como todo es local, quiere decir que la situación geométrica es la siguiente (ver figura 2.7): Consideremos los puntos  $x, y, z, w$  en  $M$  y las fibras sobre ellos, cada vector que une un punto en cada fibra entre esas dos conexiones, es el campo tensorial.



**Figura 2.7:** Haz afín

Recapitulando, el espacio afín de todas las conexiones es un espacio de dimensión infinita, tenemos fibras afines sobre cada punto que son espacios de dimensión finita  $\dim(E)^2 n$ , donde  $E$  es el haz vectorial asociado y  $n$  es la dimensión de la variedad  $M$ .<sup>3</sup> Y las secciones suaves de este haz de fibras afines forman el espacio de todos los campos que son conexiones.

<sup>3</sup>Ya que la dimensión del espacio de operadores lineales de un espacio a otro es el producto de sus dimensiones, y en este contexto el espacio de operadores lineales es  $L(T_x, L(E, E))$ . En el caso de haces generales estas fibras tienen la dimensión de  $L(T_x, \mathfrak{g}_x)$ , donde  $\mathfrak{g}_x$  es la realización local del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

### 2.5.1. Conexión en coordenadas locales

Cuando hablamos de una conexión en coordenadas locales, estamos considerando un caso mucho más simple que físicamente no es tan interesante dado que las coordenadas son arbitrarias, sin embargo, resulta ser útil a la hora de hacer cálculos. Ya habíamos hablado un poco sobre el vínculo entre las nociones de transporte paralelo y una conexión, en el caso de una conexión en coordenadas locales, la noción de paralelismo se ve reflejada en el hecho de que todas las líneas coordenadas son, de alguna forma, paralelas. A veces, en contextos llenos de geometría aparece una conexión especial. Por ejemplo la *conexión de Levi-Civita* en el caso de geometría Riemanniana, donde ésta existe y es única. Esta conexión no es considerada como una simple asignación a la variedad  $M$ , sino como una asignación secundaria que se ve reflejada de dotar una métrica a  $M$ . La conexión de Levi-Civita, satisface dos condiciones: una es que la derivada covariante de la métrica es cero y la otra es que su torsión es cero, y todas las otras conexiones se pueden calcular en base a su desviación respecto a ésta que se toma como conexión de referencia.

Naturalmente, al ser un haz localmente trivial, va a existir una cubierta con pequeñas regiones donde podemos introducir cartas, entonces en estas regiones que son cartas de la variedad, donde el haz es trivial, tenemos también la conexión que lleva la trivialización, que es ‘horizontal’. De manera que en este contexto, cuando tenemos la trivialización del haz y cartas, la conexión va a depender de las coordenadas, no va a ser algo intrínseco, sin embargo, una vez que tenemos como coordenadas a campos  $X_\mu$ , vamos a tener también derivadas parciales  $\partial/\partial X_\mu$  que usualmente escribiremos simplemente como  $\partial_\mu$ . Y si la figura (2.7) es cierta, entonces, tenemos una conexión verdadera que se representa con su derivada covariante  $\nabla_\mu$ , al igual que una conexión privilegiada que podemos escribir como  $\partial_\mu$ , y por toda la discusión anterior donde dijimos que las conexiones forman un espacio afín, al movernos de una conexión a otra en coordenadas locales, obtenemos los *símbolos de Christoffel*  $\Gamma_\mu$ .

De modo que en un sistema lineal de coordenadas, la conexión se suele escribir como:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu \tag{2.6}$$

## 2.6. Tensor de curvatura

La noción primitiva de curvatura tiene que ver con preguntarnos qué tan independiente es el transporte paralelo a lo largo de una curva que une dos puntos

fijos  $x$  y  $y$  en  $M$ . Si la curvatura es cero, este será independiente del camino que escojamos. Una conexión en coordenadas locales es una conexión muy especial, ya que el transporte paralelo que define es independiente de la curva, pues como acabamos de ver, es una conexión definida en términos de derivadas parciales  $\partial_\mu$ , que son operadores que conmutan, y el hecho de que éstos conmuten o no, interviene directamente en la definición de curvatura. En cambio, para una conexión general  $\nabla$ , no se va a satisfacer que conmuten los operadores  $\nabla_\mu$ . De forma que la curvatura es una cantidad que indica la dependencia del camino de la conexión, localmente. La interpretación geométrica de la curvatura es la siguiente: Imaginemos que transportamos un vector alrededor de una pequeña curva cerrada  $l$  en  $M$ , usando el transporte paralelo que define la conexión  $\nabla$ , el cambio entre el vector inicial anclado en un punto  $p$  de  $l$  y el mismo vector transportado a lo largo de  $l$  al regresar al punto  $p$ , es lo que mide la curvatura  $R$ .

En términos de derivada covariante, la curvatura  $R$  se define como:

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (2.7)$$

La curvatura tiene las siguientes propiedades importantes:

$$\begin{aligned} R(X, Y) &= -R(Y, X) & R(fX, Y) &= fR(X, Y) \\ R(X, fY) &= fR(X, Y) & R(X, Y)(fZ) &= fR(X, Y)(Z) \end{aligned}$$

para  $X, Y$  y  $Z$  campos vectoriales y  $f$  una función suave.

Es instructivo demostrar estas cuatro propiedades utilizando la ecuación (2.7) junto con las propiedades que satisface el operador  $\nabla_X$ , mencionadas anteriormente. La primera indica la antisimetría del tensor de curvatura

$$\begin{aligned} R(Y, X) &= [\nabla_Y, \nabla_X] - \nabla_{[Y, X]} = -[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{-[X, Y]} = -[\nabla_X, \nabla_Y] + \nabla_{[X, Y]} \\ &= -R(X, Y) \end{aligned}$$

La segunda muestra la localidad en el primer argumento

$$\begin{aligned} R(fX, Y) &= [\nabla_{fX}, \nabla_Y] - \nabla_{[fX, Y]} = [f\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{f[X, Y]} + \nabla_{(Yf)X} \\ &= f[\nabla_X, \nabla_Y] - (Yf)\nabla_X - \nabla_{f[X, Y]} + (Yf)\nabla_X = f[\nabla_X, \nabla_Y] - f\nabla_{[X, Y]} \\ &= fR(X, Y) \end{aligned}$$

Como  $R(X, fY) = -R(fY, X) = -fR(Y, X) = fR(X, Y)$  tenemos la localidad en el segundo argumento también. Además

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)(fZ) &= [\nabla_X, \nabla_Y](fZ) - \nabla_{[X, Y]}(fZ) = (\nabla_X \nabla_Y(fZ) - \nabla_Y \nabla_X(fZ)) \\
 &\quad - (([X, Y]f)Z + f\nabla_{[X, Y]}Z) = \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Z + f\nabla_X Z) \\
 &\quad - (X(Yf) - Y(Xf))Z - f\nabla_{[X, Y]}Z = X(Yf)Z + (Yf)\nabla_X Z + \nabla_X(f\nabla_Y Z) - Y(Xf)Z \\
 &\quad - (Xf)\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - X(Yf)Z + Y(Xf)Z - f\nabla_{[X, Y]}Z = (Yf)\nabla_X Z \\
 &\quad + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z \\
 &= f[\nabla_X, \nabla_Y](Z) - f\nabla_{[X, Y]}(Z) = fR(X, Y)Z
 \end{aligned}$$

lo que quiere decir que es algo local:

Observemos que a priori la expresión para la curvatura nos da un operador diferencial (que depende de la conexión), que algebraicamente es una expresión cuadrática en términos de derivadas parciales. Sin embargo, de acuerdo con lo anterior, todos los términos diferenciales se cancelan y nos queda un operador de orden cero que es un campo tensorial.

### 2.6.1. Formas horizontales

Sabemos que una  $k$ -forma  $\theta$  es un operador que actúa en una  $k$ -ada de campos vectoriales. Sin embargo, esta situación es un caso particular de formas diferenciales con valores en haces vectoriales, ya que en cada punto de la variedad  $M$ , esta  $k$ -ada se calcula en el elemento del espacio vectorial del haz vectorial dado, sobre cada punto. Estas formas diferenciales generalizadas se llaman *formas diferenciales E-valuadas*, las cuales asumen valores en el haz. Y las *secciones* de este haz se pueden interpretar como 0-formas.

Cuando tenemos un haz principal  $P(M, G)$  y una representación  $\rho$  de  $G$  en un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ , podemos considerar una  $k$ -forma *pseudo-tensorial*  $\varphi$  en  $P$  con valores en  $V$  tal que su pullback satisface

$$R_g^* \varphi = \rho(g^{-1}) \cdot \varphi \tag{2.8}$$

para cada  $g \in G$ .

Esta  $k$ -forma  $\varphi$  se dice que es horizontal cuando se anula al evaluarla en un campo vertical (tangente a la fibra), es decir, cuando  $\varphi(X_1, \dots, X_k) = 0$  con al

menos un  $X_i, i = 1, \dots, k$  vertical. Cuando  $\varphi$  es horizontal, se dice que es una *forma tensorial*. En este caso, la ecuación (2.8) también generaliza en el contexto de haces vectoriales asociados, a partir de la interpretación de las secciones de un haz vectorial asociado, a las formas horizontales como formas diferenciales sobre la base  $M$  valuadas en el haz asociado.

En un haz, tenemos campos vectoriales verticales que no dependen de la conexión, simplemente se van por las fibras. La horizontalidad que estudiamos en un principio era para vectores, en cambio, para formas, tenemos un concepto intrínseco de la horizontalidad siendo lo vertical inducido mediante la forma de conexión  $\omega$ . Entonces, podemos conocer una forma horizontal sin la conexión, sin embargo, cuando tenemos la conexión, podemos proyectar cualquier forma diferencial a una forma horizontal. Dicho de manera más precisa, si tenemos una conexión  $\omega$  en  $P(M, G)$ , y consideramos la proyección  $h_\omega : T_u(P) \rightarrow Q_u$ , entonces podemos proyectar una  $n$ -forma diferencial  $\theta$  a una forma horizontal  $\varphi(\theta)$  evaluándola en  $n$  campos vectoriales mediante la proyección horizontal de cada campo con la conexión, teniendo como resultado, una nueva  $n$ -forma, siendo  $h_\omega$  un operador de proyección, ya que al aplicarlo dos veces nos da lo mismo. Con todo esto podemos decir en otras palabras que,  $\varphi$  va a satisfacer los siguiente:

- (1) La forma  $\varphi h_\omega$  definida como  $(\varphi h_\omega)(X_1, \dots, X_k) = \varphi(h_\omega X_1, \dots, h_\omega X_k)$ , con  $X_i \in T_u(P)$ , es una  $k$ -forma en  $P$ ,  $V$ -valuada, que es horizontal, es decir, es una forma tensorial
- (2) La diferencial  $d\varphi$  es una  $(k + 1)$ -forma  $V$ -valuada
- (3) Si definimos la  $(k + 1)$ -forma  $D_\omega \varphi$  como  $D_\omega \varphi = (d\varphi)h_\omega$ , esta será una  $(k + 1)$ -forma  $V$ -valuada que es horizontal

La derivada covariante siempre que actúa sobre formas diferenciales en  $P$  nos da una forma horizontal (por su construcción), en particular, si actúa sobre formas horizontales obtenemos nuevamente formas horizontales. Se llama covariante porque conmuta con los operadores  $R_g^*$ . Como la simetría la preserva, tenemos como consecuencia que se preserva la ecuación (2.8). Cuando una forma satisface esta ecuación, también su derivada covariante.

La propiedad (3) nos dice que la derivada covariante  $D_\omega$  es la composición de dos operadores: el operador  $h_\omega$  y el operador de diferenciación exterior  $d$ . De modo que por la construcción, nos damos cuenta que la derivada covariante es

una forma horizontal. Podemos aplicar la derivada covariante a cualquier forma, en particular podemos aplicarla a la forma de conexión cuyo resultado es por definición, la forma de curvatura  $\Omega$ , de modo que

$$D_\omega \omega = \Omega$$

### 2.6.2. Primera ecuación de estructura

La primera ecuación de estructura se escribe en términos de la forma de conexión  $\omega$  y su forma de curvatura  $\Omega$ , como:

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] + \Omega \quad (2.9)$$

y donde

$$[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X) \wedge \omega(Y)]$$

es la combinación natural del producto cuña y el corchete dentro del álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Ahora estudiaremos cómo cambia la curvatura si nos desplazamos de una conexión a otra. En general, cuando expresamos una conexión  $\tilde{\omega}$  en términos de otra conexión  $\omega$  más un desplazamiento  $\lambda$ , es decir,  $\tilde{\omega} = \omega + \lambda$ , donde  $\lambda$  es un campo tensorial (sólo en coordenadas locales). Podemos entonces preguntarnos por la curvatura asociada a  $\tilde{\omega}$ , es decir, por la curvatura en términos de la conexión y el desplazamiento,  $\omega + \lambda$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= d\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}] = d\omega + d\lambda + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] + \frac{1}{2}[\omega \wedge \lambda] + \frac{1}{2}[\lambda \wedge \omega] + \frac{1}{2}[\lambda \wedge \lambda] \\ &= \Omega + (d\lambda + [\omega \wedge \lambda]) + \frac{1}{2}[\lambda \wedge \lambda] \end{aligned}$$

arriba hemos aplicado antisimetría del producto cuña de dos 1-formas, así como la antisimetría del corchete en el álgebra de Lie, entonces, dos antisimétricos nos dan algo simétrico.

Y su manifestación en términos de derivada covariante  $\tilde{\nabla}_X = \nabla_X + \lambda_X$  es que permite actuar en campos vectoriales como un tensor. Esta derivación covariante  $\nabla_X$  corresponde a  $\omega$ , pero no es algo directo, es la interpretación con operadores

de la conexión, y también podemos hacer el mismo cálculo pero ahora en términos de estos operadores:

$$\tilde{R}(X, Y) = R(X, Y) + (\nabla_X(\lambda_Y) - \nabla_Y(\lambda_X) - \lambda_{[X, Y]}) + \frac{1}{2}[\lambda_X \wedge \lambda_Y] \quad (2.10)$$

vale la pena mencionar que el término entre paréntesis es la derivada covariante del desplazamiento.

Demostremos la ecuación (2.10):

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y) &= [\tilde{\nabla}_X, \tilde{\nabla}_Y] - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} = [\nabla_X + \lambda_X, \nabla_Y + \lambda_Y] - \nabla_{[X, Y]} - \lambda_{[X, Y]} \\ &= ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}) + ([\nabla_X, \lambda_Y] + [\lambda_X, \nabla_Y] - \lambda_{[X, Y]}) + [\lambda_X, \lambda_Y] \\ &= ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}) + ([\nabla_X, \lambda_Y] - [\nabla_Y, \lambda_X] - \lambda_{[X, Y]}) + [\lambda_X, \lambda_Y] \\ &= R(X, Y) + \frac{1}{2}[\lambda_X \wedge \lambda_Y] + (\nabla_X(\lambda_Y) - \nabla_Y(\lambda_X) - \lambda_{[X, Y]}) \end{aligned}$$

Lo que calculamos nos va a servir cuando queramos expresar la curvatura de la conexión en coordenadas locales en el caso de la electrodinámica, donde este desplazamiento  $\lambda$  es el potencial electromagnético (o bien, el potencial de Yang-Mills), que suele escribirse como  $A_\mu$  y simplemente es un escalar, de modo que la curvatura en términos de la conexión  $\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$  no es nada más ni nada menos que el tensor de Faraday, que es un caso particular de esta expresión general.

### 2.6.3. Identidad de Bianchi

La identidad de Bianchi puede presentarse en distintas formas. Estas tienen diversas aplicaciones y juegan un papel importante en teorías como Electromagnetismo y Relatividad General.

La forma estándar de escribir la identidad de Bianchi que también la encontramos en las teorías de norma es:

$$D_\omega \Omega = 0 \quad (2.11)$$

lo que nos dice es que la derivada covariante de la forma de curvatura se anula.

Hay otra expresión para la identidad de Bianchi a partir de los operadores  $\nabla_X$  los cuales, en términos de un haz principal  $P$  se interpretan en la forma

$$\nabla_X \Psi \leftrightarrow X_* \Psi$$

donde  $X_*$  es el levantamiento horizontal de los campos vectoriales  $X$  en  $M$ , y  $\Psi$  son las secciones de un haz asociado que satisfacen (2.1). Recordemos también a partir de esta interpretación que si  $\Psi$  son formas horizontales en  $P$  valuadas en  $V = F$  que satisfacen la ecuación (2.8), serán formas diferenciales sobre la base  $M$  valuadas en el haz asociado, teniendo la siguiente correspondencia

$$\Phi(X_1, \dots, X_m) \leftrightarrow \Phi(X_{1*}, \dots, X_{m*})$$

donde en el lado izquierdo  $\Phi$  participa como una  $m$ -forma en  $M$  valuada en el haz asociado, y en el lado derecho la interpretamos como una forma tensorial correspondiente definida sobre el haz principal  $P$ .

Por otro lado, vale la pena mencionar la expresión general para la derivada exterior de De Rham

$$\begin{aligned} d\varphi(X_1, \dots, X_{m+1}) &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} X_i \varphi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{m+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{m+1}) \end{aligned}$$

donde  $\varphi$  es una  $m$ -forma,  $X_i$  son campos vectoriales y ‘ $\hat{\phantom{x}}$ ’ significa omitir el símbolo de la expresión. En particular, si tenemos una 2-forma  $a$ , su derivada exterior de De Rham es

$$\begin{aligned} da(X, Y, Z) &= Xa(Y, Z) + Ya(Z, X) + Za(X, Y) \\ &\quad - a([X, Y], Z) - a([Y, Z], X) - a([Z, X], Y) \end{aligned}$$

Por lo que a partir de la ecuación (2.11) llegamos a la siguiente forma de la identidad de Bianchi en términos de la forma de curvatura  $R$

$$\begin{aligned} \nabla_X R(X, Y) + \nabla_Y R(Z, X) + \nabla_Z R(X, Y) \\ - R([X, Y], Z) - R([Y, Z], X) - R([Z, X], Y) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

## 2.7. Transformaciones de norma

Como hemos mencionado, un haz principal  $P$  es un espacio enriquecido con simetrías locales. Una simetría del haz principal  $\phi : P \rightarrow P$  es un difeomorfismo

de la variedad  $P$  que conmuta con la acción del grupo estructural de la siguiente manera:

$$\phi(pg) = \phi(p)g \quad (2.13)$$

con  $p \in P$  y  $g \in G$ .

Se puede demostrar que estos difeomorfismos forman un grupo que es el *grupo de simetrías del haz principal*  $\text{Symm}(P)$ .

La propiedad (2.12) nos dice que las fibras se preservan. Y como  $M$  es de la ‘categoría derivada’ donde sus puntos forman las órbitas de la acción. Esto es lo mismo que decir que cada simetría de  $P$  se proyecta en una simetría de  $M$ . Teniendo así, un homomorfismo del grupo de simetrías  $\text{Symm}(P)$  al grupo de simetrías  $\text{Symm}(M)$  de  $M$ , ya que cualquier composición de dos movimientos de  $P$  se refleja en el espacio de las órbitas como composición de dos movimientos en  $M$ .

Este grupo tiene un subgrupo muy importante el cual contiene aquellas simetrías que no se reflejan en el espaciotiempo  $M$ , esto quiere decir que son simetrías que únicamente mueven verticalmente por  $P$ , éstas son las *transformaciones de norma* y el subgrupo es conocido como *grupo de norma*  $\mathcal{G}(P)$ , así que tenemos la siguiente sucesión corta exacta de grupos

$$* \rightarrow \mathcal{G}(P) \rightarrow \text{Symm}(P) \rightarrow \text{Symm}(M) \rightarrow *$$

Entonces como las transformaciones de norma son simetrías que se trivializan al proyectarlas en  $M$ , sabemos que si tomamos un punto  $p \in P$ , al aplicarle una simetría  $\phi$  que sea una transformación de norma, impedirá que este punto se mueva horizontalmente ya que de hacerlo, al proyectar en  $M$ , se movería de un punto a otro lo que implicaría la existencia de una simetría no trivial en  $M$ . Por lo tanto, los puntos  $p$  y  $\phi(p)$  tienen que estar en la misma fibra.

Ahora vamos a presentar la segunda interpretación de las transformaciones de norma. Al ser la fibra una órbita y la acción libre, entonces, existe un único elemento  $\gamma(p) \in G$  que desplaza  $p$  a  $\phi(p)$  como sigue:

$$\phi(p) = p\gamma(p) \quad (2.14)$$

lo que quiere decir que  $\phi(p)$  es simplemente una acción derecha sobre  $p$  por un elemento que depende de  $p$  que llamamos  $\gamma(p)$ . Y en este sentido, en lugar de decir

que tenemos un mapeo  $\phi : P \rightarrow P$  que vive en  $\mathcal{G}(P)$  que es una transformación de norma, podemos decir que tenemos un mapeo  $\gamma : P \rightarrow G$  que se relacionan de esta forma.

Naturalmente nos preguntamos por la propiedad que debe tener  $\gamma$  como mapeo entre  $P$  y  $G$  para que  $\phi$  sea una simetría del haz que cumpla la condición (2.12), es decir, para que la acción se preserve.

Entonces vemos que si aplicamos el resultado (2.13) a un punto de la fibra  $pg$ :

$$\phi(pg) = (pg)\gamma(pg) \quad (2.15)$$

Por la condición (2.12)  $\phi(pg) = \phi(p)g$ , y por (2.13)  $\phi(p) = p\gamma(p)$ , entonces:

$$\phi(p)g = [p\gamma(p)]g \quad (2.16)$$

Igualando las ecuaciones (2.14) y (2.15):

$$pg\gamma(pg) = p\gamma(p)g \quad (2.17)$$

Y gracias a que la acción es libre podemos quitar  $p$  de la ecuación (2.16) y llegar a la siguiente conclusión:

$$\gamma(pg) = g^{-1}\gamma(p)g \quad (2.18)$$

Si el grupo es conmutativo, entonces  $\gamma(pg) = \gamma(p)$ , esto quiere decir que  $\gamma$  es constante a lo largo de las fibras siendo ahora no una función de  $P$  en  $G$  sino de  $M$  en  $G$ . En este caso

$$\mathcal{G}(P) \leftrightarrow \mathbb{C}^\infty(M, G)$$

Como hemos visto, cuando tenemos una trivialización de  $P$  en  $M$ , local o global, es equivalente a considerar una sección (sobre un abierto  $U$  o sobre todo  $M$ , si es local o global), lo que efectivamente nos proporciona un punto de referencia en  $P$  para cada  $x$  en  $M$ . Esto nos permite tomar la composición de la inyección de  $M$  en esta sección, la inyección del abierto  $U$  y  $\gamma$ , en el caso de trivialización local. Teniendo ahora transformaciones de norma  $\gamma_U$ , inducidas por esta trivialización. Lo que nos regresa a la interpretación original de las simetrías internas que no hacen absolutamente nada en el espaciotiempo, pero que son simetrías del haz.

Todo esto también se puede ver en términos del álgebra de Lie, donde ahora:  $\gamma : P \rightarrow \mathfrak{g}$ . Esto es la infinitesimalización de las transformaciones de norma, donde la ecuación (2.17) se preservará por completo. Sólo que si usamos álgebra de Lie, estas transformaciones serán el álgebra de Lie del grupo de norma, el cual es un grupo de Lie de dimensión infinita.

Existe una tercera interpretación, que consiste en ver a las transformaciones de norma  $\gamma$ , como secciones suaves del *haz adjunto*.

Como hemos visto la construcción de un *haz asociado* se basa en un haz principal  $P$ , y la representación  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(F)$  del grupo estructural  $G$  en unas simetrías que son *automorfismos de  $F$* .<sup>4</sup>

A cada haz principal le podemos asociar un haz donde la fibra  $F$  es  $G$  y  $\rho$  son *simetrías adjuntas*, esto quiere decir que  $\rho(g)$  actúa a un elemento  $h$  de la fibra como  $\rho(g)h = ghg^{-1}$ . Las secciones de este haz adjunto de acuerdo con la fórmula (2.17), son exactamente los mapeos  $\gamma$  de la segunda interpretación de las transformaciones de norma.

Entonces, estamos reconociendo ahora a estos mapeos  $\gamma$  como campos, como secciones de un haz asociado donde el grupo actúa sobre si mismo por *transformaciones de conjugación*.

Es importante observar que la acción va a ser no trivial solamente cuando el grupo sea no abeliano, cuando es abeliano  $\rho(g)h = h$  teniendo una identificación canónica (intrínseca) entre la fibra sobre un punto  $x$  de  $M$  que llamamos  $G_x$ , y  $G$ .

Entonces, tenemos un haz y los automorfismos de la fibra  $F = G$  que preservan la estructura de grupo lo que los hace verdaderamente *automorfismos de grupo*. Por lo que en realidad tenemos un haz asociado que es un *haz de grupos*. Y como estructura geométrica tendremos fibras isomorfas a  $G$ , aunque no será un isomorfismo canónico. Al ser cada fibra un grupo, tendremos una sección neutra que asocia a cada punto  $x$ , el elemento neutro  $e_x$ . Y todos estos  $\gamma$  serán secciones de este haz, es decir, serán campos en el espaciotiempo  $M$  que tienen valores en los grupos. Este haz se llama *haz adjunto* porque  $\rho$  es quien actúa y a veces se le conoce como *acción adjunta* del grupo sobre si mismo.

---

<sup>4</sup>Por ejemplo  $F$  puede ser un espacio lineal, un espacio de Hilbert, o una variedad suave. Siendo sus automorfismos en cada caso: transformaciones lineales, transformaciones unitarias y difeomorfismos, respectivamente.

En el caso conmutativo, la acción adjunta es trivial, por lo tanto todos los grupos  $G_x$  se pueden ver canónicamente (intrínsecamente) como  $G$ . Sin embargo, en el caso general, al no existir esta identificación canónica de cada  $G_x$  con  $G$ , tendríamos que trivializar localmente para que luego asumiera la forma exacta de  $G$ .

Esto nos puede llevar a una discusión similar que es la de preguntarnos cuáles son las coordenadas de un campo vectorial. Podríamos decir que esa pregunta no tiene sentido pues sólo cuando tenemos una base es cuando podemos asignar coordenadas. De manera que si imaginamos a  $G$  como un arquetipo que muestra coordenadas en un sentido muy abstracto, podríamos preguntarnos por cuáles son las coordenadas de nuestras simetrías. Tampoco habrá coordenadas sin antes identificar el marco de referencia, para esto tendríamos que trivializar el haz. ¿Por qué? Porque si pasamos de una base a otra, las coordenadas cambian. Entonces si consideramos el *haz principal de todos los marcos de referencia*, la fibra serán todas las bases del espacio tangente, en estas bases, el grupo estructural será  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R}^n)$ , y actuará libremente a la derecha. En este caso  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$  es una matriz que actúa en  $\mathbb{R}^n$ , lo que nos dará un haz asociado que es un *haz tangente* cuyas secciones (campos) son los mapeos  $\Psi : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfacen:  $\Psi(pg) = g^{-1}\Psi$ .<sup>5</sup> Pero  $p \in P$  es un marco de referencia por lo que aquí estamos pasando de un marco de referencia a otro. Y es tan simple como pensar que si cambiamos de sistema de referencia y las componentes no cambian, pues entonces estamos en un caso estático donde la fibra es simplemente  $\mathbb{R}^n$ . Es la misma lógica para grupos abelianos, la representación adjunta cuando el grupo actúa sobre si mismo es trivial, por lo tanto, cada fibra es el grupo inicial  $G$ .

Por lo mismo, sólo puede existir un isomorfismo intrínseco entre el grupo de norma,  $\mathcal{G}(P)$ , y las funciones suaves  $C^\infty(M, G)$  sobre  $M$  con valores en  $G$ , cuando el grupo es abeliano. Cuando tenemos la trivialización local de un haz asociado  $P \times_G F$  siendo esta  $(p, \xi) \mapsto (pg, \rho(g^{-1})\xi)$ , una acción derecha de  $G$  sobre el haz asociado, si existirá un isomorfismo aunque no será algo intrínseco ya que hay que construirlo. El isomorfismo lo podemos construir porque cuando tenemos un haz localmente trivializado sobre un abierto  $U$  de  $M$ , entonces podemos tener una sección privilegiada localmente que es la asociación del elemento neutro a cada punto de  $U$ , y entonces fijar estos elementos neutros para así formar un marco de referencia, haciendo que todas las fibras asuman la forma de  $G$ . Si tenemos que todo el haz es trivial, todos los haces asociados van a ser triviales, de hecho, si hacemos una trivialización ya sea local o global, nos dará una trivialización del haz asociado, y las secciones de este haz que son transformaciones de norma, serán lo mismo que funciones  $C^\infty(M, G)$ .

---

<sup>5</sup>Pues en este caso  $\rho(g) = g$ .

### 2.7.1. Espacios móduli e invariancia de la acción

Ya vimos que el concepto del espaciotiempo  $M$  se puede ver como una categoría derivada de un haz principal  $P$ . Como ya hemos mencionado, hay otra categoría derivada dada por los espacios afines de las conexiones  $\mathcal{C}$ . Lo que quiere decir que el grupo de simetrías  $\text{Symm}(P)$ , en particular, el grupo de transformaciones de norma  $\mathcal{G}(P)$ , actúa sobre este gran espacio moviendo conexiones, una a otra. A diferencia de  $M$ , aquí tenemos una estructura mucho más rica geoméricamente porque tenemos un espacio afín, y como en este espacio actúa el grupo de norma, entonces podemos preguntarnos por cuál es el *factor espacio*. Este factor espacio  $\mathcal{M} = \mathcal{C}/\mathcal{G}(P)$  es lo que se conoce como *espacio móduli*.

Por lo tanto, el espacio móduli es el espacio de las órbitas de este espacio afín de dimensión infinita hecho de conexiones bajo la acción del grupo de norma.

Generalizando la situación que encontramos en la electrodinámica clásica parece física y matemáticamente interesante adoptar el punto de vista donde las verdaderas *candidatas observables* deben ser invariantes bajo estas transformaciones de norma. El ejemplo más importante para nosotros es construir la *acción*<sup>6</sup>, en otras palabras, asociar a cada conexión  $\omega$ , un número  $\mathcal{S}(\omega)$ . Número que no debe cambiar si pasamos de una conexión a otra en la misma órbita. Esto es la *invariancia de la acción* bajo transformaciones de norma sobre el espacio afín de las conexiones. De tal forma, la acción así como las observables físicas, son interpretables como funciones (de cierta clase apropiada) sobre el espacio móduli  $\mathcal{M}$ .

## 2.8. ¿Por qué la curvatura?

Como hemos visto, en geometría diferencial existe una entidad intrínsecamente conectada con la conexión, esta es la curvatura. A lo largo de esta sección veremos la importancia que tiene la curvatura a partir de un punto de vista geométrico fundamental. También hablaremos un poco de hacia dónde va todo este lenguaje geométrico en la física.

Ya hemos estudiado lo que es una conexión  $\omega$ , que si intentamos pensarlo como algo físico, es un campo de interacción (fotones, gluones, bosones). Entonces

---

<sup>6</sup>En el siguiente capítulo daremos una noción más detallada de su significado en la física.

naturalmente nos preguntamos: ¿qué es lo mínimo que podemos construir a partir de  $\omega$ , utilizando operaciones algebraicas y la derivada exterior  $d$  de De Rham?

Por un lado sabemos que una conexión es una 1-forma y que las formas diferenciales constituyen un *álgebra* graduada diferencial respecto del producto cuña, cuya graduación es el grado de formas, y cuya diferencial es la derivada exterior  $d$ . Así que nos referimos a todas las posibles expresiones algebraicas polinomiales que contienen a  $\omega$  y  $d\omega$ . Entonces, lo siguiente sería preguntarnos cuáles de ellas tienen un significado físico, donde por significado físico entendemos lo que está más ‘apegado’ al espaciotiempo. Esto nos hace recordar la discusión sobre horizontalidad y verticalidad para formas diferenciales y campos vectoriales. Recordemos que la conexión  $\omega$  nos permite introducir el concepto de verticalidad para formas diferenciales, el concepto de horizontalidad es intrínseco (no depende de conexiones) y son precisamente las formas diferenciales horizontales las que podemos considerar naturalmente como constituyentes de las entidades que tienen una interpretación física con ‘raíces’ en el espaciotiempo.

Se puede demostrar que dentro de dicha álgebra diferencial, la *subálgebra horizontal* es precisamente hecha de la *curvatura*, es decir, la constituyen todos los posibles polinomios sobre las componentes de  $R$ . Entonces es la parte física del mínimo cálculo diferencial.

Todo sale de la ecuación de estructura (2.9), la cual nos proporciona una descomposición de la derivada exterior de la conexión  $d\omega$  en la parte completamente vertical  $[\omega, \omega]/2$  y en la parte totalmente horizontal  $d\omega - [\omega, \omega]/2 = \Omega$ , que es la curvatura. Por lo tanto, alguna subálgebra generada por la conexión  $\omega$ , cerrada bajo diferenciales y proyectada en la parte horizontal, será la subálgebra generada por la curvatura.

Dentro de las formas horizontales sobre un haz principal  $P$ , algunas son invariantes bajo la acción del grupo estructural<sup>7</sup>, y son éstas precisamente las que se pueden interpretar como formas diferenciales en el espacio base.

Es interesante mencionar que dentro de este marco conceptual, si además consideramos las expresiones algebraicas constituidas por la curvatura simétricas bajo la acción del grupo  $G$ , es decir, las que pertenecen al álgebra  $\Omega(M)$ , resulta que todas estas deberán ser cerradas gracias a la identidad de Bianchi, además se

---

<sup>7</sup>Acción que se puede extender mediante los pullbacks  $R_g^* : \Omega(P) \rightarrow \Omega(P)$ , donde  $\Omega(P)$  es el espacio de todas las formas diferenciales en  $P$ .

puede demostrar que su *clase cohomológica de De Rham no depende de la conexión* [8]. El detalle está en que cuando cambiamos de una conexión a otra, la forma cambiará por una exacta, y al factorizar todo, la clase de cohomología no cambiará, lo que quiere decir que cada polinomio constituido por la curvatura que resulta ser invariante (simétrico), determina un invariante topológico en la base, lo que nos conduce a la teoría de *clases características* como podemos ver en más detalle en [8].

En las *teorías de Yang-Mills*, si aceptamos todas estas nociones, sabemos que todavía puede cambiar en términos de simetría, sin embargo, es una teoría que no tendrá propiedades diferenciales a lo largo de las fibras. Lo único que importará son los campos horizontales. Entonces si nos vamos por el camino más simple y buscamos darle un significado físico a la conexión, inmediatamente llegamos al *álgebra de observables* generadas por la conexión. Y ¿qué es una observable? Por ejemplo, en la electrodinámica clásica, el *potencial electromagnético*  $A$  no tiene un significado directo como observable pues si hacemos una transformación de norma  $A + d\alpha$ , el *campo electromagnético*  $F$  queda igual.

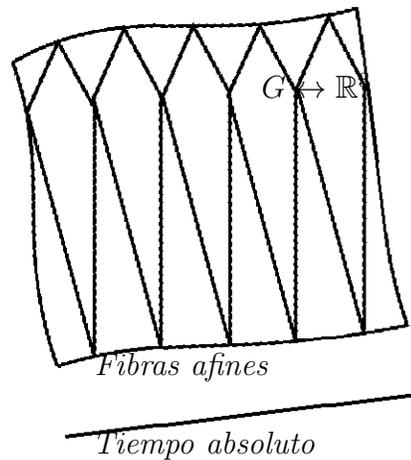
### 2.8.1. ¿Por qué haces principales?

Físicamente podemos interpretar a un *haz principal* como un ‘espaciotiempo vivo’ y no simplemente como algo inerte como lo imaginaba Euclides, sino como algo que tiene una parte material. Como aquél lugar donde la física se debe formular y cuya categoría derivada es el espaciotiempo. También podríamos especular y considerar al espaciotiempo como una propiedad colectiva y macroscópica que puede extraerse sólo después de que se da la interacción entre ciertos campos.

Otra importancia de estos haces principales tiene que ver con cosmología ya que hay propiedades globales del cosmos donde este formalismo se ajusta, otros ejemplos tienen que ver con aplicaciones topológicas como lo es la teoría de clases características.

En geometría diferencial los haces principales son importantes porque involucran a los haces de marcos, además, proporcionan un lenguaje unificante para estudiar diversas clases de espacios, y sus propiedades locales y globales. Como ejemplos podemos mencionar la geometría riemanniana, simpléctica, compleja, espinorial y la de Kähler.

### 2.8.2. El ejemplo del mundo de Galileo y Newton



**Figura 2.8:** Mundo geométrico de Galileo y Newton

En el mundo de Galileo las leyes dinámicas del universo no cambian de un sistema de referencia inercial a otro. Dos sistemas inerciales siempre se relacionan con una transformación de Galileo, en particular, hay una velocidad uniforme entre los dos, como consecuencia de esto, no existe ni el espacio ni el reposo absoluto.

En la dinámica de Galileo, los sucesos del mundo físico que evoluciona en el tiempo no se manifiestan en un único espacio 3-dimensional. Es importante mencionar que este espacio no es un espacio vectorial (que tiene un origen), en realidad lo que tenemos es un grupo abeliano asociado a un espacio vectorial real de 3 dimensiones. Esta situación nos dice que para cada instante de tiempo se tiene un espacio distinto, no existiendo una relación natural entre ellos. Lo que parece ir un poco en contra de la noción que tenemos del mundo físico ya que si lo pensamos al modo galileano, tendríamos que redefinir nuestro concepto de espacio como algo que permanece sólo un instante, ‘desaparece’ y al siguiente instante ‘reaparece’ como un nuevo espacio.

Después de estudiar lo que hemos visto a lo largo de este capítulo, resulta ser que el espaciotiempo de Galileo es un haz fibrado, donde el espacio base  $M$  es el tiempo absoluto que es un espacio afín unidimensional, y las fibras son los espacios especiales que mencionamos en el párrafo anterior, físicamente interpretables como

mundos ‘congelados’ en un instante dado. Sabemos que en un haz fibrado no hay una identificación puntual entre una fibra y otra aunque éstas sean una foliación de la variedad e intuitivamente ésta es una estructura que podemos dotar al espaciotiempo galileano. Aquí no habrá localización espacial, sólo asignaciones temporales, que se dan mediante la proyección canónica del espaciotiempo de Galileo sobre el tiempo absoluto.

Pero aún nos faltan elementos para entender la dinámica de Galileo y Newton en este contexto geométrico, para esto tenemos que traducir las leyes de Newton a este lenguaje. En ellas se establece como ley fundamental el principio de relatividad galileana, en el que a partir de la noción de tiempo absoluto, las leyes de la física deben ser universales bajo cambios de sistemas de referencia inerciales. Para dotar al espaciotiempo de Galileo de una estructura como una conexión, hay que considerar primero que se cumpla la primera ley de Newton, que nos dice que cualquier cuerpo en movimiento sobre el cual no actúe ninguna fuerza debe ser inercial, es decir, uniforme y en línea recta.

El movimiento inercial o no de un cuerpo en el espaciotiempo está representado por su ‘línea universo’ que es una curva. En el espaciotiempo de Galileo las líneas universo de los cuerpos son secciones transversales del haz fibrado donde los movimientos inerciales son rectas. He aquí la primera noción de conexión en este mundo de Galileo y Newton, en el que las fibras son espacios afines donde ahora el grupo  $G$  es isomorfo a  $\mathbb{R}^3$ , y donde un sistema observacional va a ser una conexión que tiene curvatura cero que llenará todo el espacio.

El tener una conexión definida en el espaciotiempo galileano nos permite tener una noción de geodésicas, que son líneas rectas en cada uno de estos espacios. Distintos observadores tienen un concepto diferente de lo que está en reposo en su espacio 3-dimensional y las geodésicas son las que definen los movimientos inerciales correspondientes a la primera ley de Newton.

Un sistema acelerado tendría una curvatura no trivial en el que las líneas de universo no serían geodésicas. La magnitud real de la aceleración se mediría en términos espaciotemporales como la curvatura de la línea universo. Por la segunda ley de Newton esta aceleración es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre un cuerpo e inversamente proporcional a su masa. Así, para un cuerpo de cierta masa, la curvatura de su línea universo es la que dará una medida directa de la fuerza total que actúa sobre dicho cuerpo.

Los físicos podríamos pensar que es un poco exagerado nombrar a estos espacios de esta manera tan elaborada y no simplemente como:  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, si intentáramos crear un modelo cuántico del mundo de Galileo y Newton, tendríamos un tiempo cuántico.

Lo importante de este ejemplo es que nos damos cuenta de que la teoría de Galileo y Newton se ve más complicada geometrizada. Quizás nuestra primera impresión es que es más sencilla, sin embargo, es mucho más compleja en este contexto que la teoría de la relatividad especial y general donde el espacio y el tiempo están unificados. De hecho, la idea de Einstein también se puede interpretar como una metodología para revelar la simplicidad de las cosas. Sin duda la geometrización sería un camino para descubrir cuáles son las cosas físicas verdaderamente simples. Como podemos ver en [9].

# Capítulo 3

## Electrodinámica

El electromagnetismo como primera teoría unificante de electricidad y magnetismo, es una de las más bellas y completas teorías de la física. Fue esta teoría la que sirvió como inspiración para intentar resolver los misterios aún no descubiertos que involucran al resto de las fuerzas básicas de la naturaleza, 4 identificadas hasta ahora, y también, los de las partículas que constituyen el universo, ya que para entender cómo es que este está unido, se necesita de una teoría que nos explique cómo es que las partículas elementales de la materia interactúan entre sí. Y lo que los físicos han buscado hasta ahora es una y sólo una teoría que logre incorporar a todas las fuerzas conocidas. Estas teorías unificantes están fuertemente relacionadas con las teorías de norma no abelianas de simetría local también conocidas como las *teorías de Yang-Mills*, las cuales buscan relacionar las simetrías de la naturaleza con propiedades de estas fuerzas. Tales teorías tienen que ver con la naturaleza de la electrodinámica.

Es muy común que existan simetrías globales en una teoría física, las cuales establecen que alguna ley física permanece invariante cuando la misma transformación es aplicada en un instante en todos los puntos del espaciotiempo. Sin embargo, también es posible tener simetría local, es decir, una simetría que sea independiente de los puntos del espaciotiempo, en la que la ley física debe permanecer invariante aunque se apliquen distintas transformaciones en cada punto del mismo. No obstante, al pedir que la simetría sea algo local, implicaría mayores esfuerzos en la construcción de una teoría, he aquí el reto de estas teorías, descubrir si es esto físicamente aceptable.

Para que una teoría sea invariante respecto a transformaciones locales, debemos añadir una *fuerza*. En las teorías de partículas se utilizan tres elementos fundamentales para su construcción: partículas, fuerzas y campos. Cuando lo que nos interesa son objetos eléctricamente cargados, los campos nos ayudan a entender cómo la fuerza electromagnética se transporta de un punto del espaciotiempo a otro. La interacción entre dos partículas a través de sus campos interpenetrantes se da cuando existe el intercambio de una tercer partícula, conocida como *quanto del campo*. Por ejemplo, si son dos electrones los que interactúan entre sí, cada uno rodeado por un campo electromagnético, se dice que intercambian un fotón, que es el cuanto del campo electromagnético. Este cuanto intercambiado tiene una existencia efímera ya que una vez que ha sido emitido, debe ser reabsorbido por la misma partícula o por otra, con un periodo finito. Entes de esta naturaleza son los que generalmente se conocen como *partículas virtuales* y entre más grande es su energía más corta es su existencia. El rango que alcanza una interacción está relacionado con la masa del cuanto que es intercambiado. En el caso especial en el que el cuanto intercambiado no tenga masa el rango es infinito, es por eso que el de las interacciones electromagnéticas y gravitacionales lo es, ya que tanto el fotón como el gravitón tienen masa cero y deben moverse a la velocidad de la luz. En el modelo estándar, que incorpora las fuerzas electromagnética, débil y fuerte, se dice que éstas son campos de norma, la forma de las ecuaciones en este contexto es parecida a las de Maxwell, donde lo que describen son campos cuánticos en los que las fuerzas se transportan por estas partículas virtuales: como ya dijimos la fuerza electromagnética se transporta mediante el fotón, por otro lado, la débil mediante las partículas  $Z$  y  $W$ , y la fuerte por gluones.

La teoría del electromagnetismo, introducida por James Clerk Maxwell en 1868, fue la primera teoría de norma con simetría local. Esta es una teoría completa en la que los campos eléctrico y magnético son manifestaciones de una misma fuerza. La simetría que hace que la teoría de Maxwell sea una teoría de norma, es aquella que puede pasar de ser una simetría global a una local. Si sólo hubiera un campo eléctrico que actuara entre partículas cargadas, la simetría no podría ser local, ya que cuando las cargas están en movimiento, se genera un campo magnético, y son los efectos de este segundo campo los que restauran la localidad de la simetría. Como los campos eléctrico y magnético dependen de la distribución de las cargas y del movimiento de las mismas, respectivamente, ambos pueden derivarse de los potenciales eléctrico y magnético. Y es en el sistema del potencial electromagnético que pueden aplicarse las transformaciones locales dejando invariante al campo electromagnético.

La electrodinámica, al predecir que la luz proveniente de un cuerpo en reposo viaja a la misma velocidad que la luz emitida por un cuerpo en movimiento,

generó una revolución en la concepción que tenían los físicos del espacio y del tiempo, una nueva noción en la que se deberían de considerar nuevas simetrías que combinaran las coordenadas del espacio y del tiempo además de las simetrías rotacionales del espacio ya conocidas. Nuevas simetrías que a su vez mezclan los campos eléctricos y magnéticos, la carga y la corriente, la energía y el momento, revelando así, la simplicidad del universo, como un universo constituido por una sola pieza. Después del trabajo de Maxwell, Einstein se dio cuenta de que la física es geometría, y ese fue su legado, la geometría del espaciotiempo se curva por sí misma ante la influencia de un campo gravitacional. Así, las ecuaciones de Maxwell además de interpretarse como la influencia de las densidades de carga y corriente sobre el campo electromagnético, tienen otra interpretación en términos del tensor de energía momento  $F_{\mu\nu}$ , donde ahora de alguna forma es como si la energía y el momento afectaran la geometría del espaciotiempo.

De modo que la física es geometría, y la geometrización de la electrodinámica clásica, es la primera teoría que nos acerca a los misterios de estas teorías tan prometedoras, las teorías de Yang-Mills.

### 3.1. Ecuaciones de Maxwell

Clásicamente, las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento de dos campos vectoriales, el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$ , que son campos definidos en todo el espacio y a la vez funciones del tiempo  $t$  que dependen de la densidades de carga eléctrica  $\rho$  y de corriente  $\mathbf{j}$ , siendo estas una función y un campo vectorial en el espacio dependientes del tiempo.

Así, presentamos las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{3.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \tag{3.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j} \tag{3.4}$$

Cuando  $\rho$  y  $\mathbf{j}$  son cero, estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de Maxwell en el vacío, en este caso observemos la simetría entre las ecuaciones (3.1) y (3.3) y entre las ecuaciones (3.2) y (3.4). También observemos que en el caso

general, hay asimetría entre ellas, sin embargo, las simetrías se pueden restablecer introduciendo *monopolos magnéticos*. Este concepto fue planteado por primera vez por Paul Dirac, y representa una manera interesante de explicar la cuantización de la carga eléctrica a partir del restablecimiento de la simetría entre el campo eléctrico y magnético. Y es la única explicación teórica de por qué la carga eléctrica debe ser cuantizada.

**Observación:** Hemos considerado unidades en las que la velocidad de la luz es  $c = 1$ .

También podemos expresar a las ecuaciones de Maxwell en términos de formas diferenciales, agrupando las primeras dos en una sola ecuación y las últimas dos en otra única ecuación.

### 3.1.1. Primera ecuación de Maxwell en forma diferencial

Los campos eléctrico y magnético son 1-formas y 2-formas definidas en el espaciotiempo.

En la ecuación (3.1) aparece una divergencia que como 3-forma es la derivada exterior de una 2-forma en  $\mathbb{R}^3$ , esta 2-forma es el campo magnético, que podemos expresar de la siguiente manera:

$$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \quad (3.5)$$

Por otro lado, en la ecuación (3.2) aparece un rotacional, que en este contexto es una 2-forma, y a su vez, la derivada exterior de una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$  que se escribe en términos del campo eléctrico como:

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (3.6)$$

Sin embargo, en la ecuación (3.2) aparece también otro término dependiente del tiempo que hay que considerar. Así las cosas, para formar el campo electromagnético  $F$  hay que hacer una combinación de ambos que será la siguiente 2-forma en  $\mathbb{R}^4$ :

$$F = B + E \wedge dt \quad (3.7)$$

Cuyas componentes son:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (3.8)$$

Que en forma matricial toman la forma:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

En esta forma las primeras dos ecuaciones de Maxwell se vuelven una simple y elegante ecuación: <sup>1</sup>

$$dF = 0 \quad (3.10)$$

### 3.1.2. Operador estrella de Hodge

Para escribir las otras dos ecuaciones de Maxwell en el lenguaje de formas diferenciales tendremos que introducir el *operador estrella de Hodge*, el cual mapea en cada punto  $p$  de una variedad Riemanniana 3-dimensional  $M$ , por mencionar un ejemplo, una 1-forma  $\xi$  representada por una flecha infinitesimal en una 2-forma  $\varphi \wedge \psi$  que corresponde al elemento de área que es ortogonal a  $\xi$ . En general, en un espacio de  $n$  dimensiones, el operador estrella de Hodge mapea  $p$ -formas en  $(n-p)$ -formas en una manera muy similar, tomando cada elemento de área infinitesimal de  $p$  dimensiones en un elemento de área ortogonal  $(n-p)$ -dimensional. Para más detalle ver [2].

El operador estrella de Hodge,

$$\star : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M) \quad (3.11)$$

se define como el único mapeo lineal de  $p$ -formas a  $(n-p)$ -formas, tal que

$$\varphi \wedge \star(\psi) = g(\varphi, \psi)w \quad (3.12)$$

---

<sup>1</sup>Para obtenerla sólo hay que calcular la derivada exterior de la ecuación (3.7) y usar las ecuaciones (3.1) y (3.2).

para toda  $\varphi, \psi \in \Omega^p(M)$ . Siendo ambos lados de la ecuación  $n$ -formas,  $M$  una variedad orientada  $n$ -dimensional semi-Riemanniana con la métrica  $g$  y  $w$  la forma de volumen asociada a la métrica  $g$ .

También, en la fórmula anterior hemos supuesto que la métrica  $g$  está extendida naturalmente a el álgebra de formas diferenciales. Esta extensión se realiza identificando las formas diferenciales con campos covectoriales completamente antisimétricos, y extendiendo la métrica de vectores a covectores y luego a la completa álgebra tensorial.

En particular observemos que si  $\theta$  es una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$ ,  $d\theta$  será una 2-forma y  $\star(d\theta)$  será nuevamente una 1-forma que es el rotacional de  $\theta$  usando la métrica y la orientación apropiadamente. Análogamente, si  $\theta$  es una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$ ,  $d\star(\theta)$  será una 3-forma (pues  $\star(\theta)$  es una 2-forma cuya derivada exterior es una 3-forma). En este caso,  $\star d\star\theta$  será una 0-forma que básicamente equivale a tomar la divergencia de  $\theta$ .

Por lo que ahora estamos en posibilidad de escribir el segundo par de ecuaciones de Maxwell en términos del operador estrella de Hodge en su forma diferencial. La clave está en calcular el *dual*  $\star F$  del campo electromagnético  $F$ .

### 3.1.3. Segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial

En el caso más general, si asumimos que el espaciotiempo  $M$  es cualquier variedad. Entonces el campo electromagnético  $F$  es una 2-forma en  $M$ , siendo el primer par de ecuaciones de Maxwell:  $dF = 0$ , como ya dijimos. Para escribir el segundo par de ecuaciones, adicionalmente debemos considerar a  $M$  como una variedad orientable y pseudoriemanniana. Estas tienen una estructura muy similar a las anteriores y de igual forma se convierten en una sola ecuación:

$$\star d\star F = J \tag{3.13}$$

Esto se puede ver introduciendo a los campos eléctrico y magnético por separado, y asumiendo que el espaciotiempo es la variedad producto:  $M = T \times S$  donde  $T$  es el tiempo y  $S$  el espacio. Escribiendo a  $F$  como  $F = B + E \wedge dt$  y a  $J$  como  $J = j - \rho dt$ . De manera similar,  $E$  y  $J$  serán ahora 1-formas, y  $B$  una 2-forma en el espacio 3-dimensional. Adicionalmente hay que suponer que la

métrica en  $M$  es de la forma:  $ds^2 = -dt^2 + dr^2$ , siendo  $dr^2$  una métrica riemanniana en el espacio  $S$ . Estando así en posibilidad de calcular  $F = B + E \wedge dt$ , luego  $\star F = \star E - \star B \wedge dt$ ,<sup>2</sup> y por último  $\star d\star F = J$ , usando las ecuaciones (3.3) y (3.4).

El primer par de ecuaciones de Maxwell nos dice que el campo electromagnético  $F$  es tal que  $dF = 0$ . Lo que quiere decir que  $F$  es una 2-forma cerrada en  $M$ . Esto tiene una consecuencia muy importante ya que su pullback bajo cualquier difeomorfismo en  $M$  también va a satisfacer la ecuación  $dF = 0$ . Esto quiere decir que las ecuaciones de Maxwell serán invariantes bajo todas las transformaciones de coordenadas que están representadas por el grupo de difeomorfismos de la variedad  $M$ . Al ser  $F$  una 2-forma cerrada tenemos como consecuencia que  $F = dA$  para alguna 1-forma  $A$ , donde  $A$  es lo que conocemos como el *potencial electromagnético*. El potencial  $A$  no está únicamente determinado por  $F$  puesto que al sumarle una 1-forma exacta que denotaremos como  $d\alpha$ , siendo  $\alpha$  una 0-forma real,  $F = dA$  permanece igual. Se puede demostrar, que esta forma en que cambiamos  $A$  por  $A + d\alpha$  corresponde precisamente a la acción inducida de una *transformación de norma*, en el espacio afín de todas las conexiones, de acuerdo con lo que hemos visto en el capítulo anterior.

La libertad que tenemos en escoger el potencial  $A$ , se conoce como *libertad de norma*. Esta libertad de norma en el potencial electromagnético nos dice que  $A$  no es una magnitud localmente medible, esto quiere decir que no hay experimentos que puedan medir y determinar el valor de  $A$  en un punto, porque  $A + d\alpha$  sirve exactamente para el mismo propósito físico que  $A$ . De acuerdo con la discusión del capítulo anterior, las formas diferenciales que son candidatos a observables físicas, deben ser horizontales, lo que no es el caso de la forma de conexión, que exhibe una verticalidad inherente. De hecho, como hemos visto, la uno-forma de la conexión *define* el concepto de verticalidad, complementando la idea de la horizontalidad representada por los vectores tangentes que forman la distribución correspondiente.

Sin embargo, el potencial proporciona la clave matemática para la forma en la cual el campo electromagnético interacciona con alguna otra entidad física, digamos,  $\Psi$ . De modo que el papel de  $A_\mu$  consiste en proporcionar operadores de derivadas parciales covariantes  $\nabla_\mu = \partial/\partial x^\mu + A_\mu$  actuando de manera natural con tales campos  $\Psi$ . Por ejemplo,  $\Psi$  puede representar una partícula cuántica cargada, tal como un electrón o un protón, y sería entonces su función de onda,

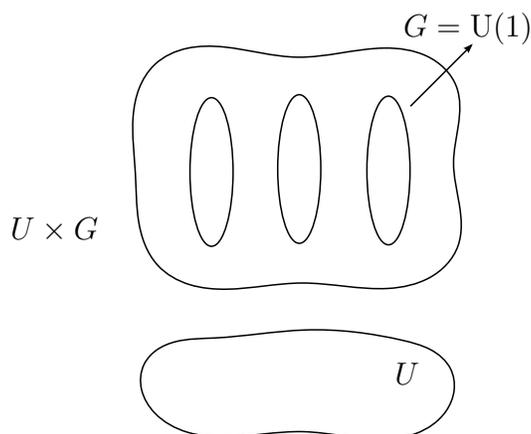
---

<sup>2</sup>Denotamos como  $\star$  al operador estrella de Hodge en formas diferenciales espaciales dependientes del tiempo.

en nuestro entorno geométrico vista como la sección de un haz vectorial asociado al haz principal  $P$ .

### 3.2. La electrodinámica como una teoría física geometrizada

El electromagnetismo se puede ver como una teoría física naturalmente asociada a haces principales donde el espacio base  $M$  es el espaciotiempo y el grupo estructural es  $G = U(1)$ . Como un haz principal es localmente trivial, podemos considerar un haz trivializado  $U \times G$  sobre un abierto  $U$  que es una carta de la variedad  $M$  con coordenadas (bases)  $X_\mu$ . En particular, tenemos una conexión, la cual es una 1-forma en la variedad  $P$ , siendo la trivialización de estos espacios horizontales de la conexión unos espacios inclinados como ilustramos en la figura (2.5) del capítulo anterior, en la que dibujamos un triángulo que interpretamos como el espacio tangente  $T_u(p)$  al haz principal  $P$  en términos de dos vectores; uno horizontal y uno vertical. El vector horizontal será un vector unitario con base  $e_\mu$  en  $M$ , y el vector vertical será un vector cuyos valores que llamaremos  $A_\mu$ , estarán en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo de Lie  $G$ . A continuación diremos qué papel juegan estos en electrodinámica.



**Figura 3.1:** Modelo geométrico de la electrodinámica

Como en el caso de electrodinámica el grupo estructural es un círculo orientado  $U(1) = SO(2)$ , su álgebra de Lie, naturalmente, es el espacio tangente que en este

caso son números reales (conmutativos)  $A_\mu^a = A_\mu$ .<sup>3</sup> Esto es lo que se conoce como el potencial electromagnético. Este potencial  $A_\mu$  depende de la carta y de la trivialización del haz sobre la carta, es decir, si pasamos de una trivialización a otra cambiará, pero la *conexión* en estas coordenadas locales  $\nabla_\mu = \partial/\partial x^\mu$  no va a cambiar.<sup>4</sup>

Podemos conectar todo esto con el concepto de transformación de norma. En el caso de electrodinámica, podemos considerar un campo físico  $\Psi$  que es la sección de un haz asociado, el cual, físicamente es invariante bajo la *transformación de norma electromagnética*. Esta *invariancia de norma* a veces la expresan como invariancia de la física bajo sustituciones  $\Psi \mapsto e^{i\theta}\Psi$  donde  $\theta$  es un campo escalar real en  $M$ .

Por otro lado, la curvatura de un haz principal, es una forma tensorial y es la derivada covariante de la conexión. En este contexto, la curvatura de la conexión expresada en coordenadas locales va a ser la 2-forma:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (3.14)$$

Como se sigue de (2.10) donde  $F$ ,  $\nabla_\mu$ ,  $\partial_\mu$  y  $A_\mu$  toman el papel de  $R$ ,  $\tilde{\nabla}$ ,  $\nabla$  y  $\lambda$  respectivamente.

Entonces llegamos a esto no como una manipulación, sino que lo deducimos de forma natural, viendo en esta formulación al potencial electromagnético simplemente como la representación de la conexión en una carta (en una trivialización), y el  $F$  asociado como la curvatura de la conexión.

### 3.3. La Mecánica Lagrangiana y el Principio de Acción

La mecánica lagrangiana surgió de la mecánica de Newton con el ideal de encontrar una visión unificante de las cosas. Con esta se logró tener como sustento del universo físico una elegante estructura matemática, la cual se encarga de describir la dinámica de un sistema físico mediante el *espacio de configuraciones*. La

<sup>3</sup>El índice  $a$ , suele incluirse en los casos no conmutativos.

<sup>4</sup>Las ecuaciones de Maxwell quedarán inalteradas para esta definición de  $\nabla_\mu$  puesto que las magnitudes del campo  $F$  y el potencial  $A$  electromagnéticos no tienen carga.

configuración espacial de un sistema mecánico tiene la estructura de una variedad diferenciable sobre la cual actúa su grupo de difeomorfismos. Las nociones básicas y teoremas de la mecánica lagrangiana son invariantes bajo este grupo, incluso si están formulados en términos de coordenadas locales. Para más detalle ver [1].

La formulación de la mecánica lagrangiana tiene muchas aplicaciones y es útil para resolver muchos problemas mecánicos, sin embargo, también ha tenido un papel muy importante en el entendimiento profundo que se tiene de la física. Un hecho notable es que a pesar de que toda esta formulación fue pensada para describir la mecánica clásica, *el principio de acción* es algo que ahora se ha podido extender al dominio de la mecánica cuántica.

Un sistema mecánico lagrangiano está dado por una variedad que es el espacio de configuración  $C$  y una función  $\mathcal{L}$  en su haz tangente  $T(C)$  que se conoce como *lagrangiano*. Todo grupo uniparamétrico de difeomorfismos del espacio de configuración  $C$  que fija la función lagrangiana  $\mathcal{L}$  define una ley de conservación, que resulta de integrar las ecuaciones de movimiento.

Si consideramos un sistema potencial newtoniano como un caso particular del sistema lagrangiano, que consiste en un número finito de partículas y cuerpos rígidos. El espacio de configuración  $C$  de  $N$  dimensiones en este caso será el espacio euclidiano, donde cada punto  $q$  de  $C$  representa una única disposición espacial (una configuración posible) de esta familia newtoniana de partículas y cuerpos rígidos. A medida que el sistema evoluciona en el tiempo, el punto  $q$  que representa todo el sistema se moverá dentro de  $C$  describiendo una curva ahí. Este movimiento estará regido por una ley que engloba el comportamiento newtoniano del sistema y que a la vez podemos obtener directamente a partir de una única función, la función lagrangiana.

En general, el lagrangiano  $\mathcal{L}$  es una función de las coordenadas y velocidades generalizadas:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q^1, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N) \quad (3.15)$$

Siendo cada  $\dot{q}^r$  una variable independiente, en particular, de  $q^r$ . La interpretación física en contextos más simples del valor de la función  $\mathcal{L}$  sería la diferencia  $\mathcal{L} = K - V$  entre la energía cinética  $K$  del sistema y la energía potencial  $V$  debida a las fuerzas externas, expresadas en dichas coordenadas.

### 3.3.1. Las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento del sistema que manejan toda la información sobre su comportamiento newtoniano vienen dadas por *las ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^r} \quad (r = 1, \dots, N) \quad (3.16)$$

Las cuales, de manera simple y extraordinaria expresan lo mismo que el famoso *principio de acción*. El significado físico de estas ecuaciones, pensando en términos del movimiento del punto  $q$  en  $C$ , es que este movimiento es tal que minimiza la *acción*  $\mathcal{S}$  [12].

La *acción*  $\mathcal{S}$  se define como la integral de  $\mathcal{L}$  a lo largo de la curva tomada entre dos puntos extremos fijos,  $t_1$  y  $t_2$ , en el espacio de configuración  $C$ :

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \quad (3.17)$$

Debemos ser conscientes de que esta acción puede no ser realmente un mínimo, por eso, siempre que pensemos en la ‘acción’ debemos pensar en que en realidad nos referimos a una *acción estacionaria*.

Abundando un poco más en esto, pensemos que si tenemos distintas curvas, obtendremos distintos números para esta acción, de modo que nuestro problema matemático sería encontrar para qué curva en el espacio este número es más pequeño (es mínimo). Para encontrar esa curva lo que se hace es acotar el problema a que cualquier curva que difiera de la curva que busquemos, en la primera aproximación, no hará diferencia en la acción.

En general, el formalismo lagrangiano puede aplicarse también a campos físicos. Como un campo  $\Phi$  varía de forma continua de un punto del espacio a otro, necesitaríamos ahora un número infinito de parámetros, teniendo por tanto, un espacio de configuración de dimensión infinita. El lagrangiano  $\mathcal{L}$  ahora será un *funcional*, es decir, una función de un cierto número de campos  $\Phi_i$  (cada uno de los cuales es por si mismo una función del espaciotiempo) y de las derivadas de dichos campos  $\nabla_\mu \Phi_i$ . Al igual que también tendremos *diferenciaciones funcionales*  $\delta$  como procedimientos matemáticos a seguir.

En este contexto general, podemos reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de la nueva derivada funcional  $\delta$ :

$$\nabla^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \nabla_\mu \Phi_i} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} \quad (3.18)$$

para los campos físicos  $\Phi_i$ .

En general, el principio de acción va a expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange como la estacionariedad de la acción, siendo esta la integral del lagrangiano pero ahora sobre un 4-volumen  $M$  espaciotemporal (compacto), para una configuración de campo dada en la frontera  $\partial M$ . De esta forma consideramos al lagrangiano  $\mathcal{L}$  como una densidad espaciotemporal, siendo la 4-forma  $\mathcal{L}w$  invariante, donde  $w = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \sqrt{-\det g}$  es la forma de volumen. Escribiendo así, a la acción como:

$$\mathcal{S} = \int_M \mathcal{L}w \quad (3.19)$$

Para obtener las ecuaciones de campo, debemos afirmar que la acción  $\mathcal{S}$  es estacionaria con respecto a variaciones de todas las variables, lo que significa que la derivada variacional de  $\mathcal{L}$  con respecto a todos los campos constituyentes y sus respectivas derivadas se tiene que anular, lo que quiere decir que:

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (3.20)$$

Históricamente, el principio de acción fue formulado por primera vez por el científico francés Pierre-Louis Maupertuis quien dijo que la naturaleza escoge en todos los fenómenos, la modalidad de la acción mínima, lo que nos deja ver la universalidad de este principio aunque de naturaleza metafísica. Feynman también fue el primero en formular el principio de acción en la modalidad cuántica usando lo que conocemos como integrales de camino.

### 3.3.2. El lagrangiano electromagnético

En el formalismo lagrangiano no sólo las leyes de Newton, sino también las ecuaciones de Maxwell pueden ser derivadas como las ecuaciones de Euler-Lagrange de un lagrangiano clásico.

Podríamos preguntarnos por qué cuando se propone una nueva teoría física, esta casi siempre viene en forma de algún funcional lagrangiano, aún cuando esto tienda a generar un distanciamiento entre la comprensión que tenemos de la realidad y de la práctica en física, en especial, cuando consideramos lagrangianos para campos. Y la razón de esto es que el proponer una teoría física en esta forma tiene muchas ventajas en cuanto a que existe mayor probabilidad de que la teoría que construyamos tenga las propiedades de consistencia e invariancia que se requieren, otra razón es que cuando dos campos interactúan, aparece implícitamente la tercera ley de Newton en alguna forma. También otra ventaja es que los lagrangianos tienen la propiedad de que se pueden incluir las nuevas contribuciones de los nuevos campos añadidos al lagrangiano anterior.

### El teorema de Noether

El *teorema de Noether* por ejemplo, es un teorema de suma importancia que dice que si cualquier lagrangiano posee una simetría suave, entonces habrá una ley de conservación asociada a dicha simetría. Este procedimiento se puede generalizar a los funcionales lagrangianos para campos y podríamos decir por ejemplo, que si existe una invariancia de norma, entonces encontraremos una correspondiente carga conservada. La *carga eléctrica* es un ejemplo de esto en el caso de la *invariancia de norma electromagnética*, donde las simetrías suaves involucradas son elementos del grupo  $U(1)$ .

Existe un lagrangiano apropiado para el electromagnetismo, este es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.21)$$

Sin embargo, para que el lagrangiano electromagnético funcione como un lagrangiano necesita expresarse en términos del potencial electromagnético  $A_\mu$ , aunque su valor no sea una cantidad directamente observable. En la mayoría de los casos, la densidad lagrangiana en apariencia no tiene por sí misma un nítido significado físico, y también suele pasar que pueden existir muchos lagrangianos distintos que llevan a las mismas ecuaciones de campo. Cuando hay también campos cargados, se necesitan términos adicionales que expresan esta interacción, y estos también incluyen a  $A_\mu$ . El punto importante está en comprobar la invariancia de norma del conjunto. Cuando se incorpora también la gravedad, entonces se necesita que exista la invariancia de norma apropiada para la gravedad, esta es la invariancia de coordenadas.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Escribiendo las cosas de manera apropiada en forma tensorial geométrica.

### 3.4. Derivación de las ecuaciones de Yang-Mills

Con todos estos elementos entonces estamos en posibilidad de escribir las ecuaciones de Yang-Mills de manera intrínseca para después poder generalizarlo a espacios cuánticos.

El producto escalar (complejo) en formas diferenciales se define como:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M g(\bar{\varphi}, \psi) w \quad (3.22)$$

donde la métrica  $g$  está extendida a formas diferenciales, de acuerdo con lo que vimos anteriormente. Con esto, el espacio de todas las formas diferenciales (complejas) adquiere una estructura natural de un espacio unitario.

Además, por lo que hemos visto anteriormente, tenemos la siguiente expresión alternativa para el producto escalar:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \bar{\varphi} \wedge \star(\psi) \quad (3.23)$$

Esta fórmula nos da el producto escalar para formas diferenciales sobre  $M$ . Necesitaríamos una modificación simple de esta fórmula, para las formas tensoriales sobre  $M$ , valuadas en el algebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , así que:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \left\{ \sum_a g(\varphi^a, \psi^a) \right\} w = \int_M \left\{ \sum_a \varphi^a \wedge \star(\psi^a) \right\} \quad (3.24)$$

donde las formas tensoriales las hemos desarrollado en una base ortonormal arbitraria, respecto de un producto escalar positivo invariante bajo la acción adjunta. Vale la pena recordar, que en el caso de grupos de Lie compactos y simples, existe, módulo escalares positivos, solamente una métrica invariante, dada por la expresión:

$$\gamma(x, y) = \text{tr}(\text{ad}(x)\text{ad}(y))$$

donde  $\text{ad}(x)y = [x, y]$  es la acción adjunta de  $\mathfrak{g}$  sobre si misma. También, vale la pena observar que las expresiones bajo el símbolo de la integral son formas diferenciales horizontales invariantes bajo la acción del grupo estructural  $G$ , y como tales, se pueden interpretar como formas diferenciales en  $M$ .

En resonancia con nuestra discusión del capítulo anterior, es natural esperar que el funcional de la acción electromagnética, donde las configuraciones del campo

electromagnético son representadas por las conexiones en el haz principal  $P$ , va a estar expresado sólo en *términos de la curvatura*. Recordémonos que el álgebra de formas diferenciales horizontales generada por la uno-forma de la conexión y su derivada exterior, es precisamente la subálgebra de formas horizontales que son expresiones algebraicas de la curvatura.

Geoméricamente,<sup>6</sup> la más simple y bella expresión es considerar el *cuadrado de la norma de la curvatura*. Por la construcción, esta expresión es *invariante bajo la acción de las transformaciones de norma*.

Entonces, nuestro campo está representado por una conexión  $\omega$ . La curvatura  $R_\omega$  es el bloque constituyente de observables físicas. Y el cuadrado del módulo de la curvatura nos da la acción:

$$\mathcal{S}(\omega) = \langle R_\omega, R_\omega \rangle = \int_M \left\{ \sum_a R_\omega^a \wedge \star(R_\omega^a) \right\} \quad (3.25)$$

Nuestro propósito ahora es derivar las ecuaciones de movimiento, del principio de acción. Recapitulando el escenario geométrico. Primero pensamos en el espacio afín de dimensión infinita que forman todas las conexiones. Entonces a cada punto  $\omega$  de este espacio le asociamos un número  $\mathcal{S}(\omega)$ . El principio de acción nos dice que una conexión que representa la configuración física, tiene la propiedad de ser un punto estacionario de este funcional (un mínimo, máximo o punto de inflexión), en otras palabras:

$$\delta\mathcal{S}(\omega) = 0$$

Ahora, al ser este un espacio afín podemos desplazar un poco  $\omega$  y llegar a otras conexiones  $\omega + \lambda$ , donde los desplazamientos  $\lambda$  son 1-formas tensoriales. Así las cosas:

$$R_{\omega+\lambda} = R_\omega + D_\omega\lambda + \frac{1}{2}[\lambda, \lambda]$$

Observemos que en el caso de la electrodinámica, el tercer término es idénticamente cero. También, observemos que en el caso general, el tercer término no va a contribuir en las ecuaciones de movimiento asociadas al principio de acción, siendo un término cuadrático. Ahora, si insertamos esto en la expresión para la

---

<sup>6</sup>En tradición con la escuela Pitagórica.

acción, y consideramos a  $\lambda$  como algo muy pequeño, y variamos, esto quiere decir que  $R_\omega$  se va a desplazar de la siguiente forma:

$$\delta R_\omega = D_\omega \lambda \quad (3.26)$$

Entonces calculemos cuánto se desplaza el cuadrado de la norma correspondiente. Por la bilinealidad del producto escalar, y condición extremal, obtenemos:

$$\delta \langle R_\omega, R_\omega \rangle = \langle \delta R_\omega, R_\omega \rangle + \langle R_\omega, \delta R_\omega \rangle = 0$$

Y como estamos en geometría real, el producto escalar es simétrico, entonces tenemos como conclusión que:

$$\langle \delta R_\omega, R_\omega \rangle = 0$$

Pero por (3.22) y (3.23) esto es lo mismo que:

$$\int_M \left\{ \sum_a \delta R_\omega^a \wedge \star(R_\omega^a) \right\} = 0$$

Y por (3.26):

$$\int_M \left\{ \sum_a \nabla_\omega \lambda^a \wedge \star(R_\omega^a) \right\} = 0 \quad (3.27)$$

Lo expresamos de esta forma intrínseca porque esta derivación se cumplirá en las teorías de Yang-Mills y porque estos son los ingredientes principales para su generalización cuántica.

Por el teorema de Stokes, al ser  $M$  una variedad sin frontera tenemos que:

$$\int_M d \left\{ \sum_a \lambda^a \wedge \star(R_\omega^a) \right\} = 0$$

Pero  $d$  así como  $D_\omega$ , cumplen la regla graduada de Leibniz, y tomando en cuenta que  $\nabla_\omega$  extiende  $d$ , entonces:

$$\int_M \left\{ \sum_a (D_\omega \lambda^a) \wedge \star(R_\omega^a) \right\} - \int_M \left\{ \sum_a \lambda^a \wedge D_\omega \star(R_\omega^a) \right\} = 0$$

Por (3.27) el primer término desaparece, y entonces

$$\int_M \left\{ \sum_a \lambda^a \wedge D_\omega \star (R_\omega^a) \right\} = 0$$

Observemos que esto es lo mismo que:

$$\int_M \left\{ \sum_a \lambda^a \wedge \star [\star^{-1} D_\omega \star (R_\omega^a)] \right\} = 0$$

Pero esto es la definición de producto escalar, es decir:

$$\langle \lambda, \star^{-1} D_\omega \star (R_\omega) \rangle = 0$$

Tomando en cuenta la arbitrariedad del pequeño desplazamiento  $\lambda$ , y la positividad estricta del producto escalar, concluimos

$$D_\omega \star R_\omega = 0 \tag{3.28}$$

lo que es equivalente a decir que

$$D_\omega^\star R_\omega = 0$$

donde  $D_\omega^\star = \star^{-1} D_\omega \star$  es la *derivada covariante dual*.

Estas son las ecuaciones de movimiento del campo de Yang-Mills en el vacío.

# Conclusiones

El espíritu de esta tesis fue seguir la visión de Albert Einstein de la geometrización de las teorías físicas. Hemos presentado un extremo enfoque geométrico dado por el formalismo de haces principales, aplicado a la electrodinámica clásica como la primera teoría unificante y naturalmente extendido a las teorías de Yang-Mills. Como hemos visto, la teoría de haces principales nos permite expresar toda una variedad de fenómenos físicos, relacionados con la existencia de simetrías internas, de una manera clara y simple, en resonancia con el programa de Erlangen de Felix Klein. Desde este punto de vista, la electrodinámica clásica se puede interpretar también como la teoría Yang-Mills más simple, basada en la idea de la localización de simetrías. Este marco conceptual unifica por un lado la idea de la simetría interna, con la geometría del espaciotiempo. Además de las teorías de Yang-Mills estándares, el formalismo de haces principales nos permite ver la teoría general de la relatividad, muy por el mismo estilo. En este caso, el grupo estructural es el grupo de Lorentz, o bien su cubierta universal que es el grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , y el haz principal  $P$  es el haz de marcos naturalmente asociado al espaciotiempo  $M$ . Es interesante mencionar que el grupo de Lorentz es naturalmente isomorfo al grupo  $M(2)$  de las transformaciones de Möbius que a su vez se puede interpretar como el grupo de automorfismos de la 2-esfera holomorfa. La interpretación física de esta esfera es que la forman los *rayos de luz*. También el mismo grupo de Möbius-Lorentz es naturalmente realizable como los movimientos isométricos del espacio hiperbólico 3-dimensional. La interpretación física de este espacio 3-dimensional es que lo constituyen los sistemas inerciales y la métrica hiperbólica viene inducida de la métrica del espacio de Minkowski [14].

En geometría diferencial, los haces principales proporcionan un lenguaje unificante para estudiar diversas clases de espacios, y sus propiedades locales y globales. Como ejemplos notables podemos mencionar la geometría riemanniana, simpléctica, compleja y la de Kähler. También, vale la pena mencionar la teoría de clases

características, que nos permite de una manera intrínseca, asociar invariantes topológicos del espacio base, a los polinomios invariantes definidos en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo estructural  $G$  bajo la acción adjunta de  $G$ . Esta asociación se ve particularmente elegante, utilizando la curvatura  $R_\omega$  y considerando expresiones algebraicas invariantes bajo simetrías de  $G$ . Es muy interesante pensar sobre esto, en la luz de la interpretación física de objetos construidos a partir de  $\omega$  y  $d\omega$ .

Otra ventaja de utilizar un formalismo geométrico como este, es que nos quitamos la necesidad de ver las cosas en términos de coordenadas locales, puntos, y expresiones no-naturales, que oscurecen la verdadera estructura detrás de expresiones complicadas. Esto, a su vez, nos da la oportunidad de pensar en situaciones geométricas donde no tenemos la posibilidad de dividir artificialmente el espacio en ‘partes’ y donde hablar de puntos y coordenadas locales pierde su significado. La *geometría cuántica*, que unifica estas ideas geométricas con las de física cuántica, es una realización de esta filosofía. En ella podemos hablar de ‘espacios’ cuánticos que no tienen puntos ni partes,<sup>7</sup> y de nuevas formas de simetrías basadas en grupos cuánticos, extendiendo los métodos presentados en esta tesis, pero siguiendo el mismo espíritu.

Desde la perspectiva de una posible aplicación en física teórica, problemas abiertos como la unificación de la relatividad y la mecánica cuántica tienen que ver con la naturaleza del espaciotiempo en longitudes muy pequeñas, comparables con la longitud de Planck.

Y si todo es geometría como lo veía Einstein, entonces es natural pensar en que probablemente deba ser otra geometría, como la geometría cuántica, que desde sus fundamentos tiene incorporadas ideas cuánticas en el lenguaje y la visión del espacio y el tiempo.

Pero para esto necesitamos un lenguaje matemático adecuado que nos ponga como físicos teóricos en un entorno apropiado para pensar sobre todos los objetos involucrados en esta teoría, de aquí mi entusiasmo de empezar a familiarizarme con el formalismo de haces y conexiones principales.

---

<sup>7</sup>Desarrollando su teoría de anillos de operadores, las estructuras que ahora se conocen como álgebras de von Neumann, él mismo utilizaba la metáfora *pointless spaces* para los nuevos espacios que generalizan la idea de un espacio medible.

# Bibliografía

- [1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics - 2nd Edition*, Springer-Verlag, 1989.
- [2] J. Baez and J.P. Muniain, *Gauge Fields, Knots, and Gravity*, World Scientific, 1994.
- [3] M. Berger, *Geometry - Volume I*, Springer-Verlag, 1987.
- [4] P.R. Feynman, *The Feynman Lectures in Physics*, Addison-Wesley, 1989.
- [5] G.Hooft, *Gauge Theories of the Forces between Elementary Particles*, Scientific American **242** (1980), no. 6, 90–116.
- [6] C. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, World Scientific Publishing Company, 1999.
- [7] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry - Volume I*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, 1963.
- [8] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundation of Differential Geometry - Volume II*, Interscience tracts in pure and applied mathematics, 1963.
- [9] Ch. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 1973.
- [10] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society, 2001.
- [11] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Institute of Physics Pub., 2003.
- [12] R. Penrose, *The Road to Reality*, A.A. Knopf, 2005.

- [13] B. Shutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1993.
- [14] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 1997.
- [15] H. Stefan and A. Tromba, *The Parmonius Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag, 1996.