



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EXTRACCIÓN DE INFORMACIÓN  
IMPLÍCITA EN LAS OPCIONES DE TIPO  
DE CAMBIO: EXPERIENCIA MEXICANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
ACTUARIO

PRESENTA:  
RAÚL ÁLVAREZ DEL CASTILLO PENNA

DIRECTOR DE TESIS:  
M. EN C. AGUSTÍN ROMÁN AGUILAR



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno  
Apellido paterno  
Apellido materno  
Nombre(s)  
Teléfono  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Carrera  
Número de cuenta

1. Datos del alumno  
Álvarez del Castillo  
Penna  
Raúl  
52 27 88 37  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Actuaría  
300595611

2. Datos del tutor  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

2. Datos del tutor  
M en C  
Agustín  
Román  
Aguilar

3. Datos del sinodal 1  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

3. Datos del sinodal 1  
MBA  
Francisco Javier  
Duclaud  
González de Castilla

4. Datos del sinodal 2  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

4. Datos del sinodal 2  
Dra  
Ana  
Meda  
Guardiola

5. Datos del sinodal 3  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

5. Datos del sinodal 3  
Dr  
Arturo  
Lorenzo  
Valdés

6. Datos del sinodal 4  
Grado  
Nombre(s)  
Apellido paterno  
Apellido materno

6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Gilberto  
Calvillo  
Vives

7. Datos del trabajo escrito.  
Título

7. Datos del trabajo escrito  
Extracción de información implícita en las opciones de tipo  
de cambio: experiencia mexicana

Subtítulo  
Número de páginas  
Año

181 p  
2010





**Resumen:**

El objetivo de esta tesis es extraer la información implícita en cotizaciones de los productos financieros derivados en particular de las opciones de corto plazo para el peso mexicano. Para las volatilidades implícitas se muestra su eficiencia y poder predictivo de la volatilidad realizada. Asimismo se prueba la causalidad entre movimientos en la volatilidad y fluctuaciones en el subyacente de gran magnitud. En la segunda parte de este trabajo se estudian los diferentes métodos para obtener la distribución implícita en las cotizaciones de las opciones. Además se propone un indicador de prima de riesgo y una aplicación para el cálculo del valor en riesgo, aunque la mayor aportación es la facultad de las distribuciones obtenidas para transmitir el pulso del mercado para los tomadores de decisiones.

**Abstract**

The objective of this thesis is to extract the implied information in derivatives cotizations. For that purpose I have used the short term Mexican peso options. The implied volatilities' efficiency and forecasting power are shown as well. Also, a causality relationship between the increase of volatility and big fluctuations in the foreign exchange prices is proved. In the second part, several methodologies to obtain the implied distribution are implemented. Finally, there are some applications of this distribution, such as defining a risk premium and redefining the value at risk using this distribution. But the main contribution of this distribution is to transmit the market sentiment to the policy makers.

A mi Mama Vicky a quien le debo todo lo que soy,

Quiero agradecer:

A Dios por permitirme vivir y darme a la familia y amigos que tengo,

A mis tíos y primos por estar siempre conmigo,

A mi novia Malú por su apoyo incondicional,

A mis amigos por su apoyo y amistad,

gracias Leo, Gabo, Ale, Miriam, Chucho, Tania, ..., etc,

A mis profesores por la formación que me dieron,

En particular a Agustin por su orientación en la elaboración de este trabajo,

A mis compañeros de trabajo por sus enseñanzas sobre mercados financieros

En particular a Toño, Carlos, Alfredo y Javier,

A mis sinodales Ana Meda, Arturo Lorenzo, Gilberto Calvillo y javier Duclaud

por sus revisiones y valiosos comentarios

A Rebeca y Gonzalo por sus valiosos puntos de vista,

A la Facultad de Ciencias de la UNAM por formar profesionales de alto nivel.

“Essentially, all models are wrong, but some are useful”

George Edward Pelham Box



# Índice general

Índice de figuras	VIII
Índice de cuadros	X
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Mercado de Tipo de Cambio y de Sus Derivados</b>	<b>5</b>
2.1. Descripción General de los Instrumentos Derivados . . . . .	5
2.1.1. Principio de No Arbitraje . . . . .	6
2.2. Forwards y Swaps . . . . .	7
2.2.1. Swaps . . . . .	9
2.3. Opciones . . . . .	9
2.3.1. Valuación de Opciones sobre el Tipo de Cambio . . . . .	11
2.3.2. Paridad Put-Call . . . . .	15
2.3.3. Las Griegas . . . . .	17
2.4. Generalidades sobre el Mercado Cambiario . . . . .	23
2.5. Mercado Cambiario Mexicano . . . . .	27
<b>3. Análisis de la Volatilidad Implícita</b>	<b>33</b>
3.1. Características e Importancia de la Volatilidad Implícita . . . . .	35
3.1.1. Curva Smile . . . . .	38
3.2. Prueba de Eficiencia . . . . .	40
3.3. Prueba de Causalidad . . . . .	42
3.4. Señal de Advertencia ante Eventos de Gran Magnitud . . . . .	48
<b>4. Extracción de la Función de Densidad para el Tipo de Cambio</b>	<b>55</b>
4.1. Estimación Distribución de Densidad . . . . .	56
4.2. Método Lognormal . . . . .	59
4.3. Método de Mezcla de Lognormales . . . . .	64
4.4. Método de Interpolación de la Curva Smile . . . . .	69
4.4.1. Resultado de Breeden-Litzenberger . . . . .	70
4.4.2. Obtención de la Distribución Implícita Método No Parametrico . . . . .	71

4.4.3.	Las Colas de la Distribución . . . . .	80
4.4.4.	Reflexiones en Cuanto la Conveniencia de Utilizar la Mezcla de Lognormales o la Interpolación de la Curva Smile . . . . .	82
<b>5.</b>	<b>Distribución Implícita con Expectativa en Tasas de Interés y Curva Smile</b>	<b>84</b>
5.1.	Extracción de Probabilidad Cambios en las Tasas de Interés . . . . .	84
5.1.1.	Información Contendida en las Tasas de Interés en Dólares de Corto Plazo . . . . .	86
5.1.2.	Información en los Swaps Cambiarios y de Tasa de Interés . . . . .	86
5.2.	Simulación Montecarlo . . . . .	90
5.2.1.	Antecedentes Matemáticos . . . . .	90
5.2.2.	La Idea de Montecarlo . . . . .	91
5.2.3.	Modelo para el Comportamiento de Precios de Activos . . . . .	93
5.3.	Comparación de las Diferentes Metodologías . . . . .	103
<b>6.</b>	<b>Análisis y Aplicaciones</b>	<b>112</b>
6.1.	Prima de Riesgo Cambiario Estimada en las Distribuciones Implícitas del Peso Mexicano . . . . .	113
6.2.	Distribución de los Rendimientos del Tipo de Cambio y su Aplicación al Valor en Riesgo. . . . .	117
<b>7.</b>	<b>Conclusión</b>	<b>120</b>
<b>8.</b>	<b>Anexos</b>	<b>124</b>
8.1.	Cálculo Estocástico y Lema de $\hat{I}to$ . . . . .	124
8.2.	Fórmula Black-Scholes . . . . .	127
8.3.	Valuación de Opciones Europeas sobre el Tipo de Cambio . . . . .	134
8.3.1.	Paridad Put-Call . . . . .	138
8.3.2.	Relación con el Precio Forward o Futuro . . . . .	138
8.4.	Opciones Americanas sobre Tipo de Cambio: . . . . .	140
8.5.	Códigos Matlab . . . . .	144
8.5.1.	Estimación Lognormal (método paramétrico) . . . . .	144
8.5.2.	Estimación Lognormal (método paramétrico) . . . . .	146
8.5.3.	Estimación Método No Paramétrico (Curva Smile) . . . . .	148
8.5.4.	Estimación Método Montecarlo . . . . .	153
8.6.	Funcion GAMLSS de R . . . . .	160
	<b>Bibliografía</b>	<b>166</b>

# Índice de figuras

2.1. Pay Off de opciones Call y Put . . . . .	11
2.2. Tipo de Cambio Fix (2006-2010) . . . . .	14
2.3. Rendimiento Logarítmico Diario del Peso . . . . .	14
2.4. Distribución Empírica de los Rendimientos (ene 2006-sep 2008) . . . . .	15
2.5. Distribución Empírica de los Rendimientos (oct 2009-jun 2010) . . . . .	16
2.6. Distribución empírica de los rendimientos (oct 2008-sep 2009) . . . . .	18
2.7. Delta vs Tiempo . . . . .	19
2.8. Delta vs Subyacente . . . . .	19
2.9. Delta Dual . . . . .	20
2.10. Gamma Call-Put . . . . .	20
2.11. Gamma Dual . . . . .	21
2.12. Vega . . . . .	21
2.13. Volumen Global en el Mercado Cambiario . . . . .	25
2.14. Peso Mexicano Histórico . . . . .	29
2.15. Volumen Operado del Peso Mexicano . . . . .	30
3.1. Superficie de Volatilidades . . . . .	38
3.2. Efecto del Sesgo y la Kurtosis . . . . .	39
3.3. Rendimientos Logarítmicos del Peso Mexicano . . . . .	44
3.4. Rendimientos al Cuadrado del Peso Mexicano . . . . .	44
3.5. Volatilidad Semanal Implícita del Peso Mexicano . . . . .	49
3.6. Rendimiento Logarítmico de la Volatilidad . . . . .	50
3.7. Rendimiento Logarítmico del Peso (2005-2010) . . . . .	51
4.1. Distribución Porobabilidad Dólar-Euro . . . . .	58
4.2. Método Lognormal (para septiembre 2010) . . . . .	61
4.3. Método de Mezcla de Lognormales (MexDer) . . . . .	67
4.4. Método de Mezcla de Lognormales (Filadelfia) . . . . .	68
4.5. Payoff de una Estructura Butterfly . . . . .	75
4.6. Payoff de un Risk Reversal . . . . .	75
4.7. Curvas Smile para el Peso Mexicano . . . . .	77
4.8. Curva smile Continua para una Semana . . . . .	77

4.9. Función $\sigma(K)$ Volatilidad VS Precio de Ejercicio . . . . .	78
4.10. Distribución Implícita en las Opciones . . . . .	79
4.11. Distribuciones del Peso Mexicano en 2008 . . . . .	81
4.12. Distribución del Peso Mexicano en 2009 . . . . .	81
5.1. Curva OIS Interpolada con Splines . . . . .	87
5.2. Curva THIE Interpolada por Splines . . . . .	88
5.3. Comparación entre la Curva Forward CETES y THIE . . . . .	88
5.4. Interpolación Curva Forward del Swap Cambiario . . . . .	89
5.5. Movimiento Browniano Estándar . . . . .	95
5.6. Proceso Generalizado de Wiener . . . . .	96
5.7. Movimiento Geométrico Browniano . . . . .	97
5.8. Simulación MGB para el Peso Mexicano . . . . .	98
5.9. Superficie de Volatilidad para el Peso Mexicano . . . . .	99
5.10. Superficie de Volatilidad Implícita por Día para el Peso . . . . .	100
5.11. . . . .	100
5.12. Histograma Implícito del Peso Mexicano a un Mes . . . . .	101
5.13. Histogramas Implícitos del Peso Durante la Crisis . . . . .	102
5.14. Intervalos para el Peso Mexicano (2 de julio de 2010) . . . . .	102
5.15. Histograma y GB2 del MXN (2 jul) . . . . .	106
5.16. Comparación entre GB2 , Lognormal y no Paramétrica . . . . .	107
5.17. Parámetros Estimados GB2 para el Peso . . . . .	108
5.18. Momentos de la Distribución GB2 del Peso . . . . .	108
5.19. Gráfica Q-Q GB2 del Peso (2 jul) . . . . .	109
5.20. Gráfica Q-Q Lognormal del Peso (2 jul) . . . . .	109
5.21. Intervalos de Confianza al 95 % para el Peso . . . . .	110
6.1. Tasa de Fondeo y Tasa Swap en Pesos . . . . .	115
6.2. Prima de Riesgo en Opciones y CDS . . . . .	116
6.3. Distribuciones de los Rendimientos del Peso Mexicano . . . . .	118
6.4. Comparación del VaR Periodicidad Mensual . . . . .	119

# Índice de cuadros

2.1. Prueba Kolmogorov . . . . .	17
2.2. Volumen Global de Cambios . . . . .	26
2.3. Volumen Derivados . . . . .	26
2.4. Volumen Actual del Peso Mexicano . . . . .	32
3.1. Prueba de Eficiencia y Poder Predictivo . . . . .	41
3.2. Causalidad de Granger . . . . .	46
3.3. Causalidad de Granger (positivos) . . . . .	47
3.4. Causalidad de Granger (negativos) . . . . .	47
3.5. Eventos de Gran Magnitud . . . . .	53
4.1. Opciones Operadas en Filadelfia . . . . .	62
4.2. Opciones MexDer . . . . .	62
4.3. Estimación de una lognormal . . . . .	63
5.1. Tabla Kupiec . . . . .	104
6.1. Valor en Riesgo . . . . .	119

# Capítulo 1

## Introducción

Actualmente existe mucha literatura relacionada con los productos derivados y se ha convertido en un tema recurrente de investigación en los últimos años. Muchos artículos se han enfocado en la aplicación de diferentes modelos matemáticos para valuar estos instrumentos financieros, mientras que otros cuantifican los riesgos asociados a un uso inadecuado de estos productos.

Sin embargo, el desarrollo de los mercados financieros, en particular en el de derivados, observado en la última década tanto en México como en el mundo ha posibilitado una línea de investigación en la cual se busca extraer la información implícita en las cotizaciones de los productos derivados para realizar inferencias sobre el comportamiento del bien subyacente. En particular, las opciones al ser contratos que otorgan a su tenedor el derecho más no la obligación de vender un bien en una fecha futura a un precio previamente pactado (precio de ejercicio), deben de incorporar en sus cotizaciones las expectativas que tenga el operador sobre la trayectoria futura del bien subyacente, para los fines de este

trabajo el tipo de cambio peso dólar.

Las opciones se operan con diferentes precios de ejercicio y el rendimiento que se obtiene depende de los valores específicos que registre el tipo de cambio a la fecha de vencimiento del contrato; por lo cual el valor presente de estos instrumentos dependerá de la distribución de probabilidad esperada por los participantes para el comportamiento del tipo de cambio. De forma análoga, al conocer los precios de las opciones se pueden hacer inferencias sobre la distribución de probabilidades esperadas para el tipo de cambio.

Este tema ha motivado el desarrollo de literatura económica, matemática y financiera, en la cual se busca construir distribuciones de probabilidad esperadas para los precios del bien subyacente que sean congruentes con los precios de sus derivados. La utilidad de esta inferencia radica en conocer los riesgos que el mercado percibe sobre el precio de un subyacente como puede ser el tipo de cambio.

El insumo más importante para realizar nuestras estimaciones sobre la distribución del tipo de cambio deberían ser las primas pagadas al contratar una opción que deben de ser iguales al valor presente de las ganancias esperadas por la adquisición de la opción a un determinado precio de ejercicio y fecha de vencimiento. No obstante en los mercados de común acuerdo donde se concentra la mayor operación y liquidez de estos instrumentos las cotizaciones se realizan en términos de volatilidades implícitas, ya que independientemente de que se trate una opción de compra o de venta del bien subyacente al aumentar la volatilidad implícita aumentara el costo de la opción y viceversa. Además, la volatilidad es la única variable que incide en las formulas de valuación de las opciones que se desconoce al momento de pactar la compra o venta de una opción por lo que dependiendo del precio

de ejercicio y del vencimiento deseado los operadores cotizan una volatilidad en la que incorporan el pasado reciente y toda la información disponible que pudiera afectar el comportamiento futuro del bien subyacente.

Debido a la importancia de la volatilidad que cotizan los operadores, conocida como volatilidad implícita, es necesaria probar su efectividad y poder predictivo respecto a la que se observará, asimismo se realizaron pruebas de causalidad entre incrementos en los niveles de volatilidad y ajustes significativos en los niveles del subyacente lo que posibilita el planteamiento de un modelo de alertas tempranas ante posibles ajustes del subyacente.

En la literatura se han propuesto diversas metodologías para la extracción de la distribución implícita del tipo de cambio cada una de éstas presenta ventajas en relación de las otras pero su implementación depende sustancialmente de la estructura del mercado y de la información disponible. Al respecto en este trabajo se plantea un método basado en la generación de escenarios mediante simulación Montecarlo buscando incorporar las expectativas de los participantes del mercado incorporadas en las cotizaciones de las opciones. Una vez que se han generado los diferentes escenarios se propone ajustar a los datos de la simulación una distribución beta generalizada II la cual por sus características y al depender de cuatro parámetros presenta la flexibilidad suficiente que permite la obtención de distribuciones con mayor kurtosis que una distribución log-normal y sesgos tanto positivos como negativos. Finalmente, al poder conocer la distribución implícita en las opciones del tipo de cambio es posible cuantificar los riesgos asociados a las fluctuaciones cambiarias.

En los primeros apartados se describen las características de los instrumentos financieros derivados y los rasgos generales de los mercados en los que se operan los tipos

de cambio y sus derivados en particular en los que interviene el peso mexicano. El tercer capítulo hace una descripción de la volatilidad implícita, sus principales características, su poder predictivo y eficiencia como indicador anticipado tanto de la volatilidad observada como de fluctuaciones importantes en los precios del bien subyacente.

En el cuarto capítulo se describen las metodologías, que con mayor frecuencia se encuentran en los documentos de investigación, para extraer la distribución implícita del tipo de cambio en base a los precios de las opciones, este apartado tiene como objetivo permitir comparar las distribuciones que se obtienen por al ajustar una distribución beta generalizada con las obtenidas comúnmente en estos textos. Así, la metodología descrita en el quinto apartado basada en simulaciones Montecarlo y el ajuste de una distribución conocida (Beta Generalizada) genera resultados comparables con las obtenidas mediante métodos utilizados en varios documentos de investigación permitiendo realizar inferencias sobre el comportamiento futuro del tipo de cambio.

Por último en el sexto capítulo se plantean algunas aplicaciones como la definición de una prima de riesgo por activos denominados en pesos implícita en las opciones y el cálculo del valor en riesgo de posiciones a favor o en contra del peso mexicano.

## Capítulo 2

# Mercado de Tipo de Cambio y de Sus Derivados

### 2.1. Descripción General de los Instrumentos Derivados

En las dos últimas décadas, tanto los mercados financieros como sus instrumentos se han desarrollado en forma sin precedentes, en particular, el mercado de derivados se ha extendido por todo el mundo probando ser una eficaz herramienta en la administración de riesgos; de esta forma, han sido utilizados por corporaciones, emisores e inversionistas para cubrir posiciones o riesgos indeseables. Asimismo, el número de instrumentos que cotizan en este mercado, continúa en ascenso brindando a los participantes la posibilidad de obtener un derivado hecho a su medida. La construcción del marco teórico para la evaluación de los productos derivados ha permitido uno de los mayores cambios en el campo de las finanzas, gracias al incremento en el número y variedad de estos instrumentos.

De acuerdo con *Hull (2008)*, un derivado se define como un instrumento financiero cuyo valor se deriva del precio de otro activo o bien subyacente. Estos instrumentos crean derechos y obligaciones entre las contrapartes involucradas y tienen el propósito principal de transferir el riesgo asociado con el activo subyacente. Una característica fundamental de los derivados es que permiten negociar en el presente, el valor de una transacción que se llevará a cabo en el futuro.

### **2.1.1. Principio de No Arbitraje**

Antes de describir las características y valuación de algunos derivados es necesario introducir el concepto de arbitraje así como el principio de no arbitraje los cuales tienen una gran relevación al efectuar la valuación de estos instrumentos. El arbitraje supone la obtención de un beneficio libre de riesgo por medio de transacciones realizadas en dos o más mercados. Uno de los conceptos fundamentales en los modelos que buscan valorar a los derivados es la ausencia de oportunidades de arbitraje, llamado *Principio de no arbitraje*. Si el mercado financiero funciona correctamente, tal oportunidad de arbitraje no puede existir puesto que los operadores están alerta a las variaciones y responderán tan pronto como sea posible. Sin embargo, cuando existe un costo de transacción, lo cual es muy común a causa de la fricción del mercado, las pequeñas diferencias en precios pueden persistir.

En un lenguaje más riguroso, una *Oportunidad de Arbitraje* puede ser definida como una estrategia de auto-financiación que no requiere una inversión inicial, y donde no existe una probabilidad de valor negativo en la fecha de expiración, y teniendo posibilidad de un valor al vencimiento positivo.

## 2.2. Forwards y Swaps

Un forward es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un subyacente, en este caso tipo de cambio peso-dólar, en una fecha futura y a un precio previamente pactado (precio forward). Este contrato implica dos posiciones; la *Posición Larga* es la que adquiere la persona que compra el futuro, mientras que la *Posición Corta* es adquirida por la persona que vende el instrumento.

El valor al vencimiento de las ganancias del derivado están dadas en términos de las posiciones antes mencionadas, siendo para la posición larga:

$$S_T - X,$$

y para la posición corta:

$$X - S_T,$$

donde  $S_T$  es el tipo de cambio al tiempo  $T$  y  $X$  es el tipo de cambio forward pactado.

La determinación del precio forward esta basada en la paridad descubierta de las tasas de interés (*Keynes 1923*) que es una relación crucial en economía y finanzas internacionales. La condición establece que el diferencial entre una tasa de interés en moneda local y una tasa de interés en moneda extranjera es igual a la depreciación esperada de la moneda local sobre el mismo período de vencimiento que los instrumentos financieros involucrados. La representación teórica de esta relación está dada por:

$$(r_l - r_f)T = \ln \left( \frac{F}{S_0} \right)$$

donde  $r_l$  es la tasa de interés libre de riesgo en moneda local,  $r_f$  es la tasa de interés libre de riesgo en moneda extranjera,  $T$  es el plazo para el vencimiento,  $S_0$  es el tipo de cambio

y  $F$  es el tipo de cambio esperado en  $T$ . Se puede despejar de la función anterior el valor esperado del tipo de cambio,  $F$  el cual se conoce como tipo de cambio forward:

$$F = S_0 e^{(r_i - r_f)T}$$

La relación anterior se puede comprobar mediante el principio de no arbitraje ya que de no cumplirse la relación anterior se podrían obtener ganancias libres de riesgo.

Los forwards sobre el peso - dólar son negociados principalmente para los plazos de un día, un mes, tres meses, seis meses y un año; aunque existen a plazos más largos. En los mercados de común acuerdo (OTC<sup>1</sup>) los forwards de tipo de cambio son cotizados en puntos forward los cuales son la diferencia entre el tipo de cambio forward y el tipo de cambio actual (spot). Cuando se operan estos instrumentos se acuerdan los puntos forward (*pts\_fwd*) y se le suman al tipo de cambio spot de ese momento para determinar el tipo de cambio forward, esta forma de cotización evita tener que estar actualizando las cotizaciones de los forwards con cada cambio en el precio del subyacente.

$$F = S_0 + pts\_fwd = S_0 e^{(r_d - r_f)T}$$

$$pts\_fwd = S_0 (e^{(r_d - r_f)T} - 1)$$

Si consideramos un tipo de cambio de 12,30 pesos dólar, tasa local de 4,5% y tasa foránea de 0,25% los puntos forwards (*pts\_fwd*) serán 15 pips para un forward a un día (overnight).

De esta forma, las tasas de interés juegan un papel preponderante en la valuación de forwards al estar implícitas en las cotizaciones de los puntos forward brindan una curva de

---

<sup>1</sup>OTC: a los mercados de común acuerdo se les conoce como OTC por sus siglas en inglés Over The Counter.

interés implícita en los contratos forwards que complementan a los instrumentos disponibles en el mercado de dinero en pesos, dando como consecuencia la alineación de los precios en los mercados financieros.

### **2.2.1. Swaps**

Un swap cambiario es un contrato entre dos partes mediante el cual se establece la obligación de intercambiar un monto denominado en una divisa por su equivalente en otra y regresar dichos montos en una fecha futura y a un tipo de cambio preestablecido (forward). Los swaps cambiarios más comunes en el mercado mexicano son los de corto plazo, es decir, aquellos con vencimientos de uno o dos días.

En un swap el primer intercambio se realiza al tipo de cambio de contado mientras que el segundo intercambio se efectuará utilizando el tipo de cambio forward. Estos instrumentos cotizan en función de los puntos forwards que determinaran el tipo de cambio del segundo intercambio. Los swaps de peso - dólar constituyen el instrumento con mayor volumen de negociación y son ocupados como estrategia de inversión por parte de inversionistas extranjeros que buscan tener exposición en pesos.

### **2.3. Opciones**

Las opciones son un derivado que le otorgan al poseedor de la misma el derecho (adquiriendo una posición larga) más no la obligación de comprar (opción *Call*) o vender (opción *Put*) el subyacente en una fecha futura y a un precio determinado a cambio de pagar una prima a la contraparte por el riesgo asumido. En particular, las opciones cotizan

con diferentes precios de ejercicio ofreciendo un rendimiento que depende de los valores que registre el activo subyacente a una fecha determinada.

Si la opción puede ser ejercida únicamente en la fecha de vencimiento, entonces es llamada opción Europea, en cambio, si el ejercicio de la misma es permitido en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento es conocida como opción Americana. Para el caso del peso mexicano las opciones europeas son las más operadas en los mercados de común acuerdo aunque también se operan las americanas y opciones con características más exóticas denominadas de segunda generación.

Consideremos una opción *Call* con precio de ejercicio  $X$  y sea  $S_T$  el precio del activo subyacente el día del vencimiento  $T$ , si  $S_T > X$  entonces quien compró la opción decidirá ejercerla, al hacerlo obtendrá la ganancia de  $S_T - X$ . Sin embargo, si  $S_T \leq X$ , entonces quien compró la opción decidirá no ejercer puesto que puede comprar el activo subyacente en el mercado a un precio menor o igual al predeterminado precio de ejercicio  $X$ . De esta manera tenemos que el valor al vencimiento de la posición larga en el *Call* Europeo es:

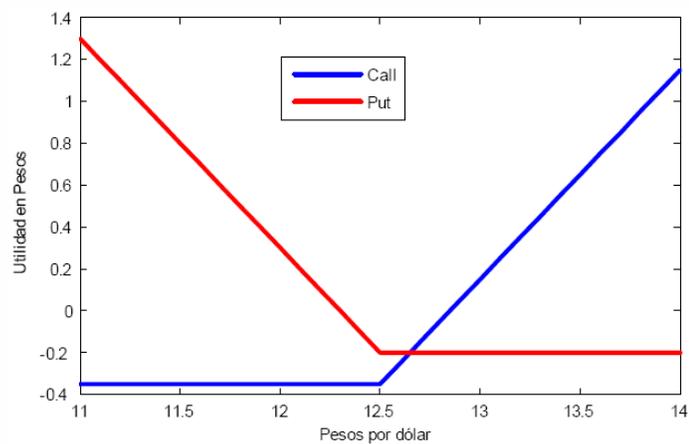
$$\text{máx}(S_T - X, 0)$$

En forma similar, el valor al vencimiento para la posición larga de un *Put* Europeo está dado por:

$$\text{máx}(X - S_T, 0)$$

Entonces el *Put* será ejercido sólo si  $S_T < X$ , bajo el cual, el activo se vende a un precio igual a  $X$  en vez de  $S_T$ . Consideremos por último que en ambas opciones (*Call* y *Put*), el valor al vencimiento es siempre no negativo. Para el caso de opciones sobre divisas que

Figura 2.1: Pay Off de opciones Call y Put



se analizará con más detalle en el siguiente capítulo, si el precio de la divisa se encuentra por arriba del precio de ejercicio, el tenedor de la opción Call puede comprar la divisa a un precio menor, obteniendo una ganancia al ejercer y se le denomina In the money. Si la ganancia es mayor a la prima pagada de la opción, el tenedor tendrá una utilidad positiva. Si el precio de la moneda es menor que el precio de ejercicio, la opción call estará fuera del dinero (out of the money); de ser ejercida se tendría un flujo negativo por lo tanto nunca será ejercida una opción out-of-the- money. Para opciones put la situación es la inversa.

### 2.3.1. Valuación de Opciones sobre el Tipo de Cambio

Las opciones de tipo de cambio han brindado un nuevo mecanismo para el control de riesgo, al mismo tiempo se han convertido en un instrumento especulativo, donde la fuente principal de riesgo proviene de la fluctuación en la paridad de las monedas.

Las opciones cambiarias se operan con diferentes precios de ejercicio y fechas de vencimiento, ofreciendo un rendimiento que depende de los valores específicos que registre

su activo subyacente en una fecha determinada. Por tanto, el valor presente de estos instrumentos depende de la distribución de probabilidad y de la volatilidad esperada por los participantes en dicho mercado y, al igual que los forwards, del diferencial de tasas y las expectativas en torno a ellas. Podemos calcular la prima de estos instrumentos mediante la modificación al modelo de valuación de opciones de *Black & Scholes (1973)* propuesta por *Garman & Kohlhagen (1983)* para opciones sobre divisas:

**Modelo de Garman & Kohlhagen.** Definimos:

$S_0$  = precio del subyacente en el tiempo  $t = 0$

$\sigma$  = volatilidad del subyacente

$T$  = plazo de la opción

$r_d$  = tasa doméstica libre de riesgo

$r_f$  = tasa foránea libre de riesgo

$K$  = precio de ejercicio

$S_t$  = precio del subyacente en el tiempo  $t$

$\Pi$  = La prima de la opción Call = precio justo =  $\mathbb{E}[(S_T - K)^+]e^{-r_d T}$ , recordemos

que para este cálculo se tomarán en consideración los supuestos de la teoría de riesgo neutral y las siguientes hipótesis de mercado eficiente:

- 1) La información del pasado se refleja en las cotizaciones actuales.
- 2) El mercado responde inmediatamente a la nueva información.

$$\text{Prima} = \Pi = \mathbb{E}[(S_T - K)^+]e^{-r_d T}$$

$$\therefore \Pi_{Call} = \mathbb{E}[(S_T - K)^+]e^{-r_d T} = S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(d_1) - e^{-r_d T} K \mathbb{N}(d_2), \text{ donde}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

análogamente para el Put se tendría:

$$\therefore \Pi_{Put} = \mathbb{E}[(K - S_t)^+]e^{-r_d T} = e^{-r_d T} K \mathbb{N}(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(-d_1), \text{ donde}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

■

Las formulas de valuación de *Garman & Kohlhagen* suponen que los rendimientos logarítmicos de las monedas tienen una distribución normal. Para amparar el uso de este supuesto se realizó la prueba estadística de *Kolmogorov* para contrastar si los rendimientos del peso provienen de una distribución normal, que es la hipótesis nula, o no, que es la hipótesis alternativa. Aplicando la prueba *Kolmogorov* a los rendimientos diarios entre enero de 2006 y septiembre 2008, no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto no se rechaza que los rendimientos diarios provienen de una distribución normal, con un 99% de confianza, un P-value de  $0,0208 > 0,01$  por lo tanto con los datos observados no se puede refutar el supuesto de normalidad utilizado en el modelo de *Garman & Kohlhagen*. Sin embargo, es importante notar que la distribución del tipo del cambio no es constante en el tiempo y cambia afectada por modificaciones en la estructura del mercado como pueden ser la liquidez, profundidad y percepción del riesgo por parte de los participantes.

De manera análoga, para los periodos semestrales comprendidos entre enero de 2006 y junio de 2010 la prueba *Kolmogorov* no pudo rechazar la hipótesis nula de normalidad para los rendimientos logarítmicos diarios al 99% de confianza excepción del segundo semestre de 2008 donde fue notorio un cambio estructural en la formación de precios en el tipo de cambio, al existir mayor volatilidad, menor liquidez y profundidad en el mercado. A continuación se detallan los resultados obtenidos para cada semestre de la

Figura 2.2: Tipo de Cambio Fix (2006-2010)

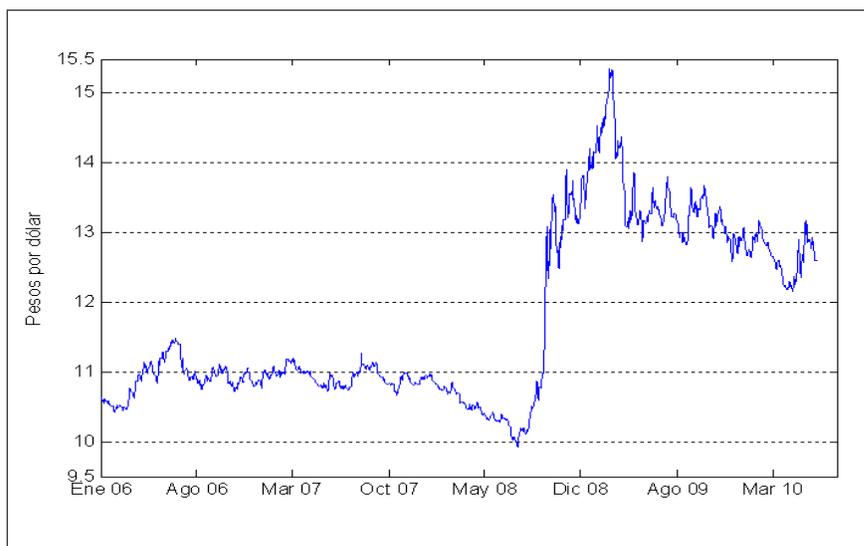


Figura 2.3: Rendimiento Logarítmico Diario del Peso

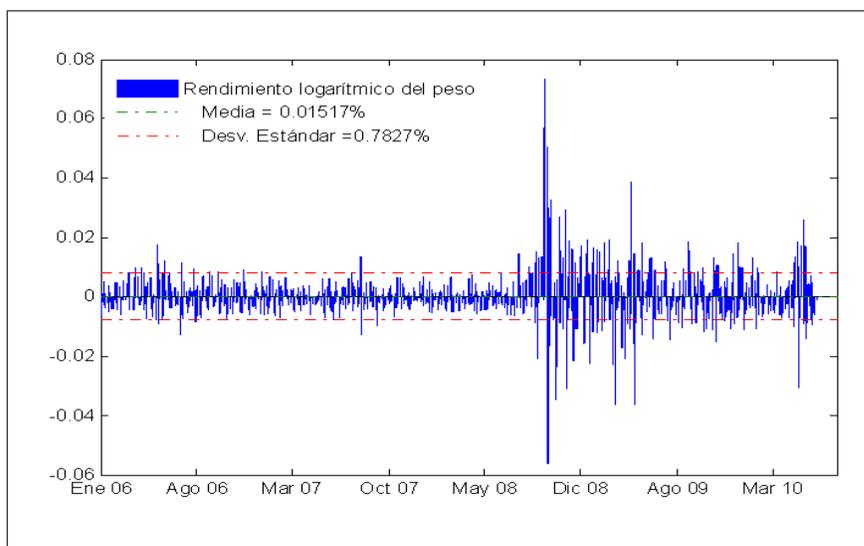
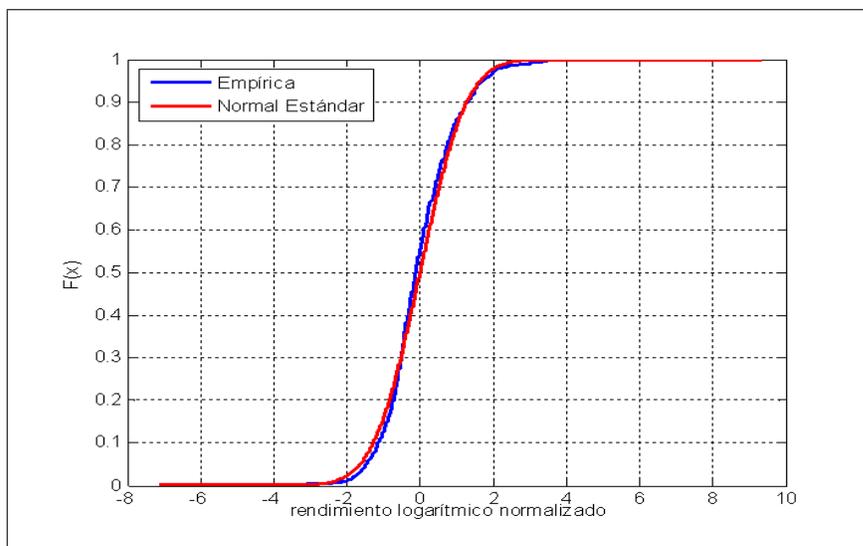


Figura 2.4: Distribución Empírica de los Rendimientos (ene 2006-sep 2008)



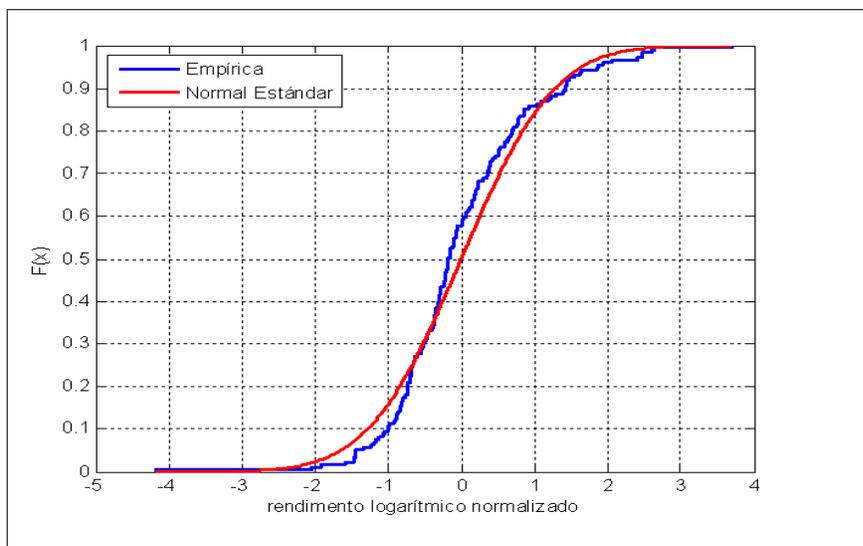
prueba *Kolmogorov*:

En el caso del segundo semestre de 2008 se debe considerar en dos partes este periodo para evaluar su normalidad: antes de la quiebra de Lehman Brothers el 15 de septiembre y de esta fecha en adelante. Tomando estas consideraciones, la prueba de *Kolmogorov* arrojó los siguientes resultados para el periodo comprendido entre julio de 2008 y el 15 de septiembre el  $P - value$  fue 0,8280 y para el segundo momento el  $P - value$  fue 0,3893 en ambos casos no se rechaza la hipótesis nula aunque para el segundo la significancia disminuyó considerablemente debido a la turbulencia observada en los mercados en esas fechas que motivaron un cambio sustancial en la función de densidad.

### 2.3.2. Paridad Put-Call

Una importante relación entre el put y el call europeo se da considerando los siguientes portafolios:

Figura 2.5: Distribución Empírica de los Rendimientos (oct 2009-jun 2010)



*Portafolio A:* compro un call ( $c$ ) y mantengo una cantidad  $K \exp(-r_d T)$  en efectivo,

*Portafolio C:* compro un put ( $p$ ) y una fracción de la divisa ( $S_0 e^{-r_f T}$ )

Así, ambas valen  $\max(S_T, K)$  al vencimiento de la opción  $\Rightarrow$  ambas deben tener el mismo valor presente.

*Portafolio A* al tiempo  $T$  el call  $c = \max(-K + S_T, 0) + K = \max(S_T, K)$

*Portafolio C* al vencimiento  $= p + S_T = \max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T)$

$$\Rightarrow c + K e^{-rdT} = p + S_0 e^{-r_f T} \quad (\text{Paridad Put - Call})$$

Esta relación es conocida como *Paridad Put-Call* y permite conocer el precio del put o del call en función del otro siempre y cuando éstos sean estilo europeo.

Prueba Kolmogorov		
Semestre	<i>P</i> - Value	Confianza
1 - 2006	0,0526	99 %
2 - 2006	0,8476	99 %
1 - 2007	0,9996	99 %
2 - 2007	0,3941	99 %
1 - 2008	0,8255	99 %
2 - 2008	0,0058	99 %
1 - 2009	0,7676	99 %
2 - 2009	0,3844	99 %
1 - 2010	0,0558	99 %

Cuadro 2.1: Prueba Kolmogorov

### 2.3.3. Las Griegas

Las opciones europeas varían ante cambios en cualquiera de sus variables por lo que es relevante conocer las derivadas parciales para comprender el efecto de cada una de las variables sobre el precio de la opción. Son de particular importancia la derivada parcial respecto al subyacente y la segunda derivada respecto a este, al ser utilizados para determinar el valor en riesgo de este tipo de instrumentos y el nivel de cobertura necesario para fluctuaciones en el subyacente.

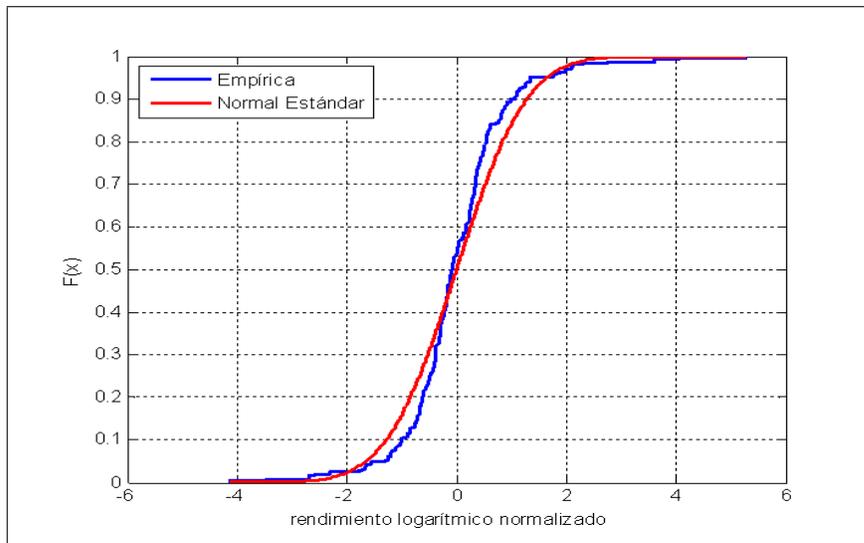
$$\Delta_{call} = \frac{\partial \Pi_{Call}}{\partial S} = e^{-r_f T} \mathbb{N}(d_1) > 0$$

$$\Delta_{put} = \frac{\partial \Pi_{put}}{\partial S} = e^{-r_f T} [\mathbb{N}(d_1) - 1] < 0$$

$$\Delta_{(dual)call} = \frac{\partial \Pi_{Call}}{\partial K} = -e^{-r_d T} \mathbb{N}(d_2) < 0$$

$$\Delta_{(dual)put} = \frac{\partial \Pi_{put}}{\partial K} = -e^{-r_d T} [\mathbb{N}(d_2) - 1] > 0$$

Figura 2.6: Distribución empírica de los rendimientos (oct 2008-sep 2009)



$$\Gamma_{(call / put)} = \frac{\partial^2 \Pi_{(call / put)}}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)e^{-r_f T}}{S\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Gamma_{dual(call / put)} = \frac{\partial^2 \Pi_{(call / put)}}{\partial K^2} = \frac{N'(d_2)e^{-r_d T}}{K\sigma\sqrt{T}}$$

$$\mathcal{V}_{(call / put)} = \frac{\partial \Pi_{(call / put)}}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}N'(d_1)e^{-r_f T} > 0$$

$$\rho_{d(call)} = \frac{\partial \Pi_{(call)}}{\partial r_d} = KTN(d_2)e^{-r_d T} > 0$$

$$\rho_{d(put)} = \frac{\partial \Pi_{(put)}}{\partial r_d} = -KTN(-d_2)e^{-r_d T} < 0$$

$$\rho_{f(call)} = \frac{\partial \Pi_{(call)}}{\partial r_f} = -TSN(d_1)e^{-r_f T} < 0$$

$$\rho_{f(put)} = \frac{\partial \Pi_{(put)}}{\partial r_f} = STN(-d_1)e^{-r_f T} > 0$$

$$\Theta_{call} = \frac{\partial \Pi_{Call}}{\partial T} = \frac{-SN'(d_1)\sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} + r_f S N(d_1)e^{-r_f T} - r_d K e^{-r_d T} N(d_2)$$

Figura 2.7: Delta vs Tiempo

Deltas para un Call ATM, dentro y fuera del dinero a diferentes plazos  
Porcentaje

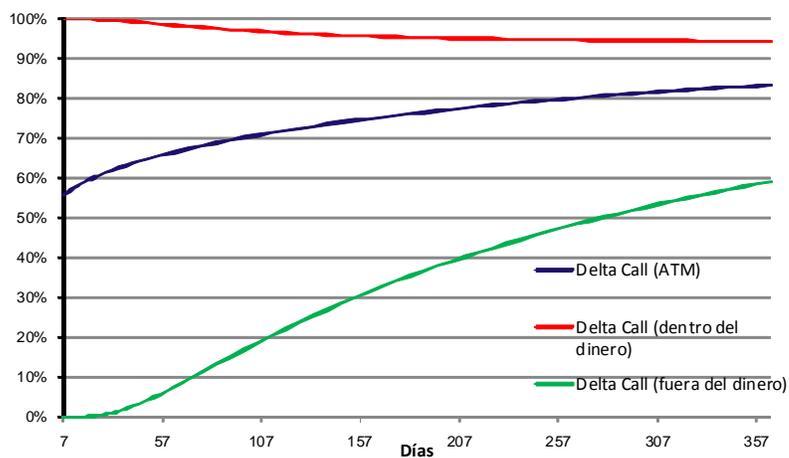


Figura 2.8: Delta vs Subyacente

Deltas para un Call y un Put a 3 meses con K=10.50 sobre el Peso Mexicano  
Porcentaje

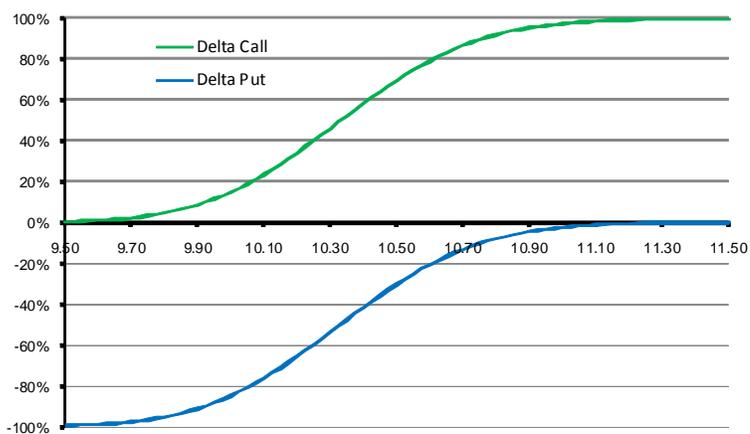


Figura 2.9: Delta Dual

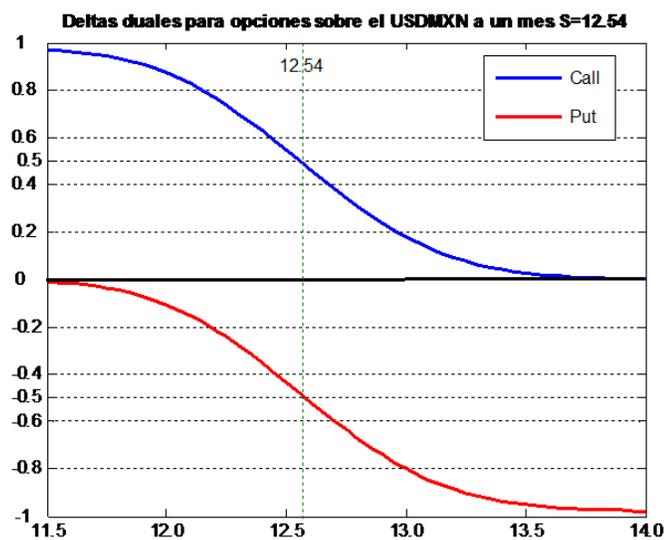


Figura 2.10: Gamma Call-Put

**Gamma para un Call y un Put a 3 meses con  $K=10.50$  sobre el MXN**  
**Porcentaje**

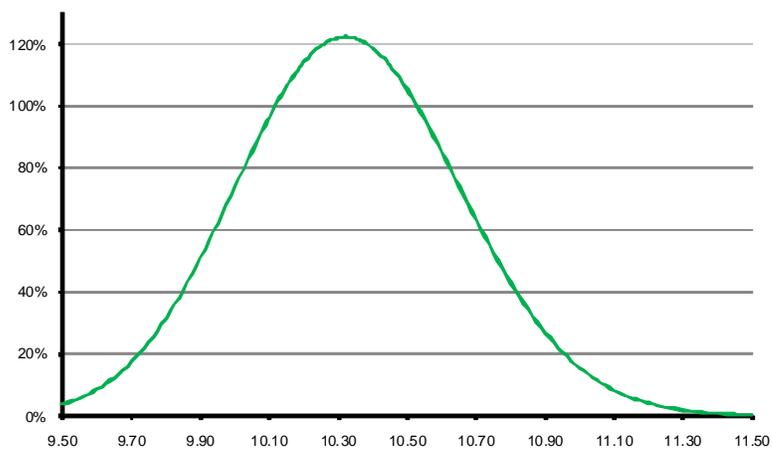


Figura 2.11: Gamma Dual

**Gamma (k) para un Call y un Put a 3 meses con  $S=10.30$  sobre el MXN**  
Porcentaje

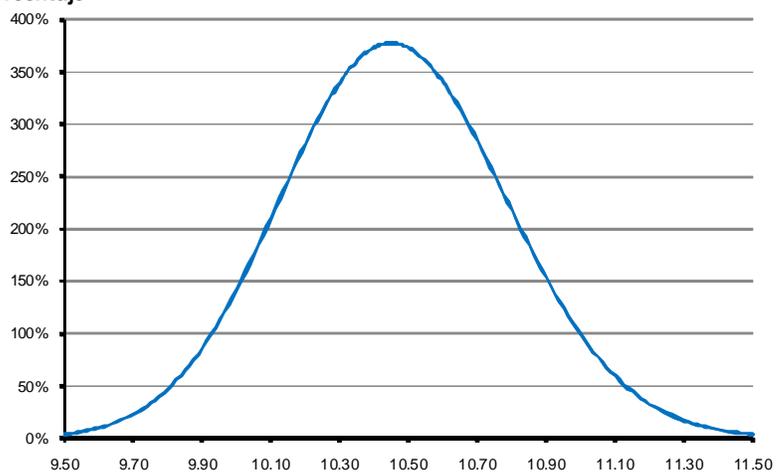
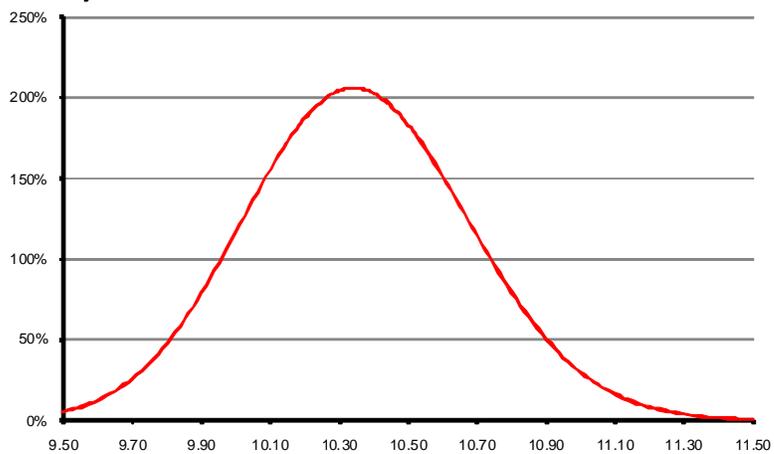


Figura 2.12: Vega

**Vega para un Call y un Put a 3 meses con  $K=10.50$  sobre el MXN**  
Porcentaje



$$\Theta_{put} = \frac{\partial \Pi_{put}}{\partial T} = \frac{-SN'(d_1)\sigma e^{-r_f T}}{2\sqrt{T}} - r_f SN(-d_1)e^{-r_f T} + r_d K e^{-r_d T} N(-d_2)$$

En conclusión, cuando las otras variables se mantienen constantes, en especial el tipo de cambio spot, el valor de la opción se incrementa cuando la tasa doméstica aumenta, disminuye cuando la tasa foránea se reduce, se incrementa cuando la volatilidad aumenta, mientras se incrementa cuando aumenta el precio de ejercicio. Cuando se incrementa el spot aumentará el valor del call mientras que en el put disminuirá. El signo en la derivada respecto al tiempo es ambigua, por ejemplo cuando un Call está dentro de dinero tiende a tener signo negativo cuando el vencimiento esta próximo y se exagera si está profundamente dentro del dinero o cuando la tasa de interés foránea se incrementa por arriba de la doméstica.

Es importante mencionar que en la mesa de negociaciones, los operadores de opciones de divisas no cotizan las opciones en términos de precios sino de volatilidad. Intuitivamente, para un precio y un vencimiento dados, se opera una estimación de la volatilidad futura de las divisas en el mercado interbancario a través de opciones. Esto se debe a que la volatilidad es el único de los parámetros que no se conoce al momento de la operación y su valor dependerá de las expectativas hacia el futuro del subyacente; es importante señalar que los precios de ejercicio se operan en términos de deltas como se explicará en el siguiente capítulo. Además, la griega conocida como vega  $\mathcal{V}_{(call / put)}$  que es igual tanto para un Call como para un Put y es definida positiva permite que los operadores aumenten o disminuyan el precio de las opciones al aumentar o disminuir la volatilidad.

## 2.4. Generalidades sobre el Mercado Cambiario

El mercado global de divisas conocido como Forex (abreviación de *Foreign Exchange Market*) es el mercado financiero más grande del mundo y está constituido por la infraestructura física y las instituciones necesarias para poder negociar las divisas. Una divisa es la moneda de otro país libremente convertible. Este mercado es el mecanismo que permite que la demanda se encuentre con la oferta y se establezca el precio de equilibrio denominado tipo de cambio.

En el mundo existen alrededor de 150 monedas, lo que implicaría 11,175 tipos de cambio. En la realidad este número es mucho menor ya que la mayoría de las monedas no cotizan entre sí y en cambio utilizan a divisas como el dólar, el euro o el yen como monedas vehiculares. Si conocemos los 149 tipos de cambio contra el dólar se pueden conocer los tipos de cambio contra las otras monedas. De acuerdo a la encuesta más reciente del Banco Internacional de Pagos (BIS) el 85 % de las operaciones se realizan contra el dólar, el 39 % contra el euro y únicamente el 4 % de las operaciones no involucran a ninguna de estas monedas <sup>2</sup>.

Las plazas que concentran el mayor número de operaciones son Londres, Nueva York, Tokio, Singapur, Honk Kong y Zurich. Las distintas plazas, y más recientemente el CLS<sup>®</sup><sup>3</sup> permiten que el mercado opere las 24 horas; el mercado es más profundo al principio de la tarde europea al estar abiertas las plazas europeas al mismo tiempo que inicia operaciones Nueva York, siendo el mejor momento para efectuar operaciones importantes

---

<sup>2</sup>Nota: existe un doble conteo en las operaciones realizadas dólar euro en los porcentajes presentados.

<sup>3</sup>CLS<sup>®</sup> (Continuous Linked Settlement) es un intermediario que permite la liquidación y compensación de 16 monedas alrededor del mundo el mismo día entre las que se encuentra el peso mexicano a partir de mayo de 2008.

sin afectar al precio.

El mercado global de divisas funciona con medios electrónicos interconectados por una compleja red de telecomunicaciones, tradicionalmente, las plataformas electrónicas interbancarias, al igual que los sistemas conversacionales y de corretaje como Reuters, han generado un incremento en la actividad y la creación del "*trading*" electrónico. Más recientemente, se ha incrementado la relevancia de las plataformas electrónicas orientadas a los clientes institucionales de bancos, facilitando cada vez más el acceso de participantes no bancarios al mercado cambiario. Otra modalidad que ha comenzado a tomar mayor importancia es la del corretaje central, por medio del cual clientes no bancarios reciben líneas de crédito que les permiten operar en el mercado interbancario utilizando el nombre del banco patrocinador. Es importante mencionar que si bien estos mecanismos disminuyen los costos de transacción para los participantes en el mercado referido, su implantación debe estar acompañada por un método adecuado de control de riesgos, incluyendo el procesamiento y liquidación de operaciones y la evaluación de los estándares utilizados para otorgar las mencionadas líneas de crédito. Además de los mecanismos de operación antes mencionados, se utilizan el teléfono, los chats o dealings, el fax y el sistema de comunicación por computadora SWIFT<sup>4</sup> como mecanismos de confirmación. Este sistema fue establecido en Bruselas en 1977 e interconecta a todos los participantes. Los que operan con divisas necesitan acceso a la información financiera y económica más actualizada por lo que contratan servicios de empresas especializadas tales como Reuters y Bloomberg.

El volumen de operación se ha incrementado más de 70 % en los últimos tres años debido al crecimiento en las transacciones realizadas entre los bancos y otras instituciones

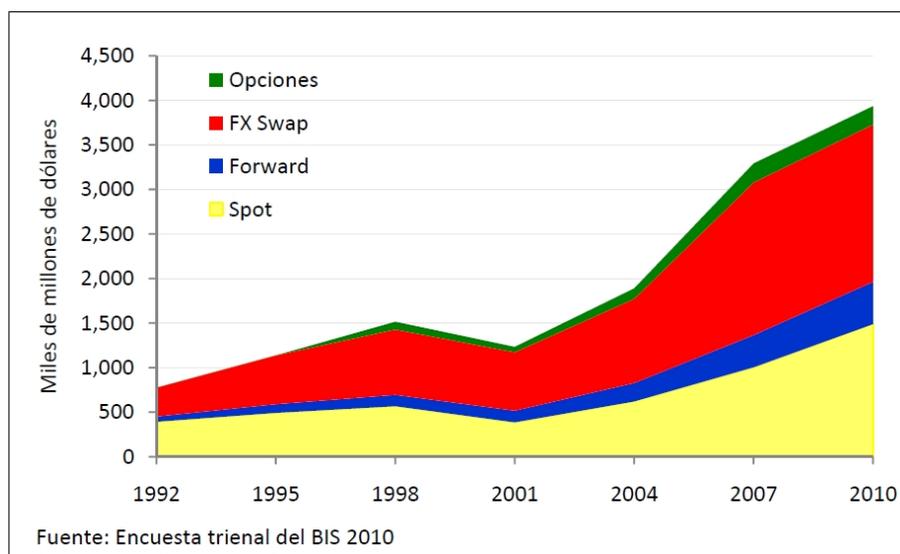
---

<sup>4</sup>Society for Worldwide International Financial Telecommunications

como *hedge funds*, fondos de pensiones, fondos soberanos, fideicomisos e inversionistas institucionales que consistentemente han elevado su participación e incrementado su posición en varias divisas, incluyendo al peso mexicano. Cabe destacar que la mayor parte de la operación de los fondos denominados Hedge Funds<sup>5</sup> concentran la mayor parte de su actividad en los Estados Unidos y Londres.

Los resultados arrojados por la encuesta trienal del BIS 2010 reflejan un incremento importante en el volumen de operación de divisas emergentes, principalmente en las operaciones entre no residentes, como ha sido el caso del peso mexicano, el zloty polaco, el real brasileño, lira turca, ringgit de Malasia y el Won coreano.

Figura 2.13: Volumen Global en el Mercado Cambiario



<sup>5</sup>Hedge Funds: podría ser traducido como fondos de cobertura, son fondos que ofrecen cobertura frente a los riesgos beta del mercado, sin embargo no ofrecen menores riesgos que los fondos de inversión; se les permite comprar o vender (incluso en descubierto) activos tradicionales y exóticos con el objetivo de generar rendimientos absolutos. La gestión de los Hedge Funds se enfoca hacia la explotación de oportunidades de arbitraje. Estos fondos administras alrededor de 600,000 mdd. y llegaron a causar pérdidas cercanas a 1 billón de dólares por el Long Term Capital Management en 1998 que estuvo a punto de causar un colapso en el sistema financiero mundial.

<b>Volumen Operado en el Mercado Cambiario</b>							
Promedio diario, miles de millones de dólares							
	1992	1995	1998	2001	2004	2007	2010
Contado	394	494	568	387	621	1,005	1,490
Forward	58	97	128	131	208	362	475
Swap	324	546	734	656	944	1,714	1,765
Total	880	1,150	1,527	1,239	1,934	3,324	3,981

Fuente: Encuesta Trienal del BIS 2010

Cuadro 2.2: Volumen Global de Cambios

<b>Volumen en Derivados Cambiarios en el OTC</b>					
Promedio diario, miles de millones de dólares					
	1998	2001	2004	2007	2010
Outright Forwards y FX Swaps	862	786	1,163	2,076	2,240
Swaps de divisas	10	7	21	31	43
Opciones	87	60	117	212	207
Total	959	853	1,303	2,317	2,490

Fuente: Encuesta trienal del BIS 2010

Cuadro 2.3: Volumen Derivados

El segmento correspondiente a los derivados de tipo de cambio continúa siendo dominado por los instrumentos tradicionales como son los Forwards y swaps. Cabe destacar que la mayor parte de las operaciones en derivados se realiza en el mercado OTC. Con un promedio diario de operación de \$2.2 billones de dólares; el 90 % del volumen de derivados se concentra en este tipo de estrategias. Instrumentos menos convencionales como las opciones incrementaron su operación en 81 % en 2007 a \$0.2 billones de dólares, que representa 8 % del total operando en FX.

Por su parte, la operación de derivados en mercados organizados, pese a que ha aumentado, mantiene un volumen mucho menor en comparación al operado en los mercados OTC. Durante el 2007 se operaron en bolsas organizadas \$3.3 mil millones de dólares diarios

en opciones y \$90 mil millones de dólares de futuros en promedio por día. En 2010 la operación de opciones y futuros se incremento hasta 166 miles de millones de dólares.

## 2.5. Mercado Cambiario Mexicano

Antes de plantear los modelos mediante los cuales se puede extraer la información implícita contenida en las opciones del peso mexicano y en particular su función de densidad, es necesario mencionar algunos aspectos generales sobre el mercado de tipo de cambio donde opera el peso mexicano así como de sus mercados de productos financieros derivados.

El tipo de cambio se define como el precio de una divisa en términos de otra. Sin duda el tipo de cambio más relevante para la economía nacional es el peso vs dólar, para dimensionar la importancia del tipo de cambio peso dólar se puede mencionar que el 95 % de las operaciones de intercambio de divisas en las que participa el peso mexicano son contra el dólar norteamericano y el 80 % de las exportaciones del país tienen como destino a los Estados Unidos.

Las cotizaciones que se realizan del tipo de cambio se realizan frecuentemente en pesos por dólar a cuatro decimales, donde la unidad más pequeña conocida como pip<sup>6</sup> es 0,0001 a este mercado se le conoce como mercado spot o de contado. La compra - venta de divisas se efectúa directamente entre los participantes que pueden ser instituciones financieras, empresas o personas físicas, la determinación del nivel del tipo de cambio depende de la oferta y la demanda que exista incrementándose cuando existe una demanda de dólares (venta de pesos) y disminuyendo cuando existe una oferta de dólares (compra de

---

<sup>6</sup>Un pip (percentage in point) para la mayoría de las divisas incluyendo al peso es de 1/10,000 al cotizarse estas monedas con una precisión de cuatro decimales.

pesos).

A la política cambiaria en la que el tipo de cambio es determinado por las fuerzas del mercado se le conoce como de libre flotación, esta política fue adoptada por la Comisión de Cambios<sup>7</sup> el 22 de diciembre de 1994. Bajo este régimen cambiario el tipo de cambio se ajusta rápidamente a choques domésticos y externos, como pueden ser cambios en las tasas de interés de los Estados Unidos o una recesión económica. Esta característica permite que la economía se ajuste a estos choques más fácilmente permitiendo su absorción. Además, dentro de esta política cambiaria la fortaleza o debilidad de una moneda dependerá en gran medida de los fundamentales económicos del país, sin embargo en ocasiones ajustes significativos en las cotizaciones del tipo de cambio no responden a factores directamente relacionados con la economía del país y se relaciona más con incrementos en la aversión al riesgo de los inversionistas por activos de países emergentes como sucedió en 1998 con la crisis rusa y en 1999 con la crisis brasileña como algunos ejemplos.

La Comisión de Cambios ha instrumentado diversos mecanismos cambiarios desde que se adoptó la libre flotación cuidando de no afectar significativamente las cotizaciones manteniendo su compromiso con este régimen cambiario. Las autoridades cambiarias sólo han intervenido discrecionalmente en momentos en los que existe un ataque especulativo o cuando en el mercado prevalece una excesiva volatilidad y la formación de precios es errática. El ejemplo más reciente donde se presentó esta conducta fue durante la crisis financiera de 2008 y 2009.

Debido al impacto que tiene el tipo de cambio sobre un gran número de sectores

---

<sup>7</sup>La Comisión de Cambios es el órgano del gobierno encargado de determinar las políticas cambiarias de México y está conformada por 3 miembros de la Secretaría de Hacienda (el Secretario de Hacienda, el Subsecretario de Hacienda y otro Subsecretario) y 3 representantes del Banco de México (el Gobernador y otros 2 miembros de la Junta de Gobierno).

Figura 2.14: Peso Mexicano Histórico



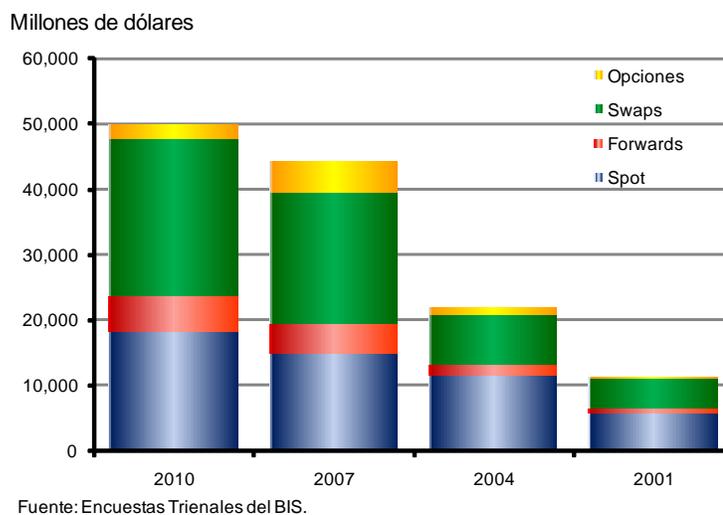
económicos y financieros es una de las variables más relevantes por lo que sería deseable conocer con cierta confianza cual será su trayectoria por lo menos en el corto plazo. La incertidumbre sobre los niveles futuros del peso mexicano contra el dólar dio lugar a la creación de instrumentos de cobertura conocidos como derivados.

A partir de abril de 1995 las autoridades financieras realizaron un esfuerzo por relajar la regulación, enfocado en permitir la operación de nuevos instrumentos:

1. La operación de instrumentos derivados que tienen como subyacente al peso en mercados extranjeros.
2. Depósitos en pesos en instituciones extranjeras.

El principal fundamento para estos cambios es que los derivados permiten la cobertura del riesgo cambiario y mitigar la incertidumbre en torno al tipo de cambio.

Figura 2.15: Volumen Operado del Peso Mexicano



Estos cambios permitieron que las instituciones financieras pudieran ofrecer instrumentos denominados en pesos incrementándose sustancialmente el número de participantes y con ellos la diversidad de instrumentos.

De acuerdo con *Sidaoui (2005)* la instrumentación del régimen cambiario de libre flotación ha sido exitoso y prueba de esto es el importante crecimiento en los volúmenes de operaciones y el grado de internacionalización del peso mexicano y sus derivados.

Las autoridades financieras autorizaron la operación de contratos de futuros del peso en el Chicago Mercantil Exchange (CME) en 1995, siendo el primer contrato sobre monedas de países emergentes. El peso ha operado en este mercado un promedio 1,055 mdd diarios durante el último año. Posteriormente y una vez que se consolidó la operación del peso, el CME decidió listar contratos de opciones sobre los futuros del peso aunque estos no han sido tan favorecidos por los participantes. En 1998 inició operaciones el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) donde se han operado futuros sobre el peso

desde diciembre de 1998, con un volumen promedio de operación diaria de 193 mdd y en el 2006 listó el contrato opcional para el peso dólar.

De esta manera, se ha consolidado el régimen de libre flotación respaldado por los fundamentales macroeconómicos más sanos y por el impulso de las autoridades financieras<sup>8</sup> a la creación de nuevos instrumentos y a la participación de nuevas instituciones en el mercado cambiario habiendo creado las condiciones para que sea un mercado líquido y profundo.

Las reformas institucionales implantadas desde 1995, incluyendo la intervención de las autoridades monetarias buscando impulsar el desarrollo de la moneda mexicana, le han permitido al peso convertirse en una de las monedas más negociadas a nivel mundial. El volumen de operación se ha incrementado significativamente en la última década, con un promedio diario de casi 50 mil millones de dólares, el peso se ubica entre las 10 monedas de mayor operación, sólo detrás del euro, yen, libra esterlina, dólar canadiense, franco suizo y dólar australiano; es la tercer moneda de mercados emergentes con mayor volumen de operación. Una política de libre flotación, libre entrada de capitales, reglas claras de operación, incursión dentro del CLS<sup>®</sup> y un banco central transparente en su actuar, han permitido que el mercado cambiario en México posea gran liquidez y profundidad.

La actividad en el mercado de derivados ha continuado expandiéndose a nivel mundial, sin ser la excepción las opciones, operándose en abril de 2007 un monto de 212mdd diarios en el mundo. Las opciones sobre el peso mexicano son negociados en grandes montos, aunque su operación se concentra en el exterior y en el mercado OTC en

---

<sup>8</sup>Desde 1988 el Banco de México inició un proceso ambicioso de relajar la regularización y fortalecer la modernización del sistema financiero, enfocado en eliminar los controles de cambios, permitir la inversión extranjera en los mercados de deuda y bursátiles, eliminar restricciones al crédito y límites en tasas de interés y relajar los requerimientos de reservas.

<b>Volumen Operado del Peso Mexicano</b>				
Promedio diario, millones de dólares				
Instrumento	2010	2007	2004	2001
Spot	18,158	14,666	11,425	5,731
Forwards	5,392	4,594	1,716	673
Swaps FX	24,088	20,119	7,555	4,398
Opciones	2,315	4,905	1,012	189
Total	49,954	44,284	21,708	10,991
Fuente: Banco Internacional de Pagos (BIS).				

Cuadro 2.4: Volumen Actual del Peso Mexicano

el cual se negocia el 80 % de las opciones a nivel mundial. Únicamente se operan en México 120mdd de los 2,315mdd operados diariamente en el mundo en 2010. La operación de estos instrumentos ha crecido en forma muy importante, lo que les ha permitido convertirse en un mercado profundo y líquido en el que también se operan opciones de segunda generación, en particular opciones de barrera y binarias. Las opciones OTC ofrecen muchas ventajas dada la flexibilidad de los contratos al ser “hechos a la medida” ya sea en términos de monto, precio de ejercicio, vencimiento y duración (aunque rara vez mayor a un año).

## Capítulo 3

# Análisis de la Volatilidad Implícita

En el modelo de *Black & Scholes* el precio de la opción o prima esta en función de seis variables: el precio del subyacente, precio de ejercicio, tasa local y foránea libres de riesgo, el vencimiento y la volatilidad. Si excluimos la volatilidad, el resto de las variables pueden ser observadas con relativa facilidad al momento de efectuar cotizaciones. Consecuentemente, la volatilidad es el parámetro más importante al momento de valorar una opción, por lo que la prima de la opción dependerá de las perspectivas a futuro de la volatilidad del bien subyacente.

Numéricamente, el valor de la volatilidad implícita se obtiene despejándola de la fórmula de *Black & Scholes*, por lo que se debe obtener la volatilidad del tipo de cambio en función del precio de la opción y no en sentido opuesto. Este procedimiento no siempre es sencillo. Otra particularidad del mercado de opciones es que no se cotiza la misma volatilidad para todos los precios de ejercicio como lo sugeriría el modelo de Black & Scholes.

Los precios de ejercicio de las opciones OTC usualmente son cercanos al tipo de

cambio forward para el vencimiento o plazo de vida de la opción; de ser el mismo valor se les conoce como *At The Money Forward*.

Conforme se aleje el precio de ejercicio  $K$  del *forward* los operadores incrementarán y en ocasiones hasta disminuirán la volatilidad en la que cotizan las opciones. Los precios de ejercicio son determinados en función de qué tan cerca o lejos se encuentren del ATM y con la finalidad de facilitar las cotizaciones, el mercado realiza las cotizaciones en términos de deltas (duales); de esta forma un Call con precio de ejercicio fuera del dinero tendría asociada una delta de 25 o 10 deltas, los cuales indican el percentil de la distribución normal en que se encuentra el rendimiento necesario para que el subyacente alcance el precio de ejercicio. Las opciones con precio de ejercicio ATM forward tienen una delta de 50 al estar en el centro teórico de la distribución normal. Comúnmente las cotizaciones más usuales son a 25 deltas, 50 deltas (ATM) y 75 deltas. Cabe señalar que para opciones call deltas duales por debajo de 50 indican precios fuera del dinero mientras que superiores indican precios dentro del dinero. Los operadores asignarán a cada delta una volatilidad incluyendo en ésta los datos históricos así como su percepción futura sobre la tendencia del subyacente y aversión al riesgo. Esta forma de cotización evita tener que reevaluar las volatilidades ante cambios del mercado spot que afectarían los niveles de los precios de ejercicio

Finalmente, *Rubinstein (1994)* señaló que el incremento en la volatilidad dados diferentes precios de ejercicio, en particular de precios de ejercicio fuera del dinero, se motivó a partir de la crisis de los mercados en 1987 después del llamado “Black Monday (19 de octubre)”. Rubinstein llamó a este efecto “*Crash-o-fobia*”, lo que volvió a los diferentes agentes sensibles en torno a la probabilidad de crisis similares. Así el costo de protección

contra este tipo de episodios, ha incrementado el valor de las opciones en el dinero y en especial de aquéllas fuera del dinero; adicionalmente a este hay que agregar el efecto por el apalancamiento que realizan los participantes de esos mercados, lo que ha dado la forma característica del llamado “*smile*” y de la superficie de volatilidades.

### 3.1. Características e Importancia de la Volatilidad Implícita

Como hemos mencionado, las opciones cotizan en los mercados en términos de la volatilidad, la cual está en función de la duración del contrato y del precio de ejercicio deseado i.e.  $\sigma = \sigma(K, T)$ . Así, la volatilidad o desviación estándar es utilizada como medida de riesgo, e interpretada como la medida de riesgo que el mercado asigna para el periodo de vida de la opción a determinado nivel del activo subyacente.

Lo anterior sugiere que la volatilidad implícita contiene información útil sobre el sentimiento y perspectivas de los participantes del mercado sobre el comportamiento de la volatilidad asociados al bien subyacente en un periodo, incorporando en su valor las posibles fluctuaciones y perturbaciones del futuro cercano; de esta forma, la volatilidad es una herramienta práctica para advertir a los administradores de riesgos sobre eventos adversos.

A diferencia de lo que ocurre con los indicadores macroeconómicos, que son reportados con retraso y tienen en promedio un efecto en los siguientes 24 meses permitiéndole a los administradores de riesgos y estrategias balancear sus carteras, los precios de mercados financieros están disponibles diariamente e inclusive de forma intradía que contienen información implícita referida a los mercados en el corto plazo. Los precios de las opciones son un

candidato obvio para ser una señal de alarma para movimientos abruptos en el subyacente.

Los futuros y forwards pueden ser observados en tiempo real, aunque sólo cambian marginalmente en respuesta a las percepciones de los mercados sobre la posible ocurrencia de eventos de gran magnitud; sin embargo, ante eventos de baja probabilidad los forwards y futuros presentan una baja sensibilidad.

En contraste, las opciones tienden a incrementar su valor cuando los participantes temen a una gran turbulencia o un rango más amplio de operación para los precios de los activos. Los precios de las opciones aumentan al incrementarse la volatilidad, anticipándose a fuertes cambios en los precios, debido a variaciones en la liquidez.

Al conocer los precios pactados en el mercado para las opciones, se pueden hacer inferencias sobre las distribuciones de probabilidad esperadas para los activos subyacentes. Este tema ha dado lugar a un amplio desarrollo de la literatura económica y financiera, en la cual se ha buscado construir distribuciones de probabilidad esperadas para los activos subyacentes que sean congruentes con los precios de sus instrumentos derivados. Esto es de gran utilidad, ya que permite conocer con precisión los riesgos que el mercado percibe para el precio de un activo subyacente determinado.

Se ha sugerido anteriormente, que en los modelos los parámetros pueden ser estimados por datos históricos y reemplazados en las fórmulas, siendo la medida de volatilidad la más difícil en la práctica. Sin embargo, el problema de la volatilidad se puede resolver si ocupamos la volatilidad implícita suponiendo que el mercado “sí conoce” cual será la volatilidad que presentará el activo subyacente entre la fecha de cotización y el vencimiento; incorporando en ella la información y el sentimiento del mercado al momento de su cotización.

La volatilidad implícita no es constante en el tiempo ni equivalente para todos los precios de ejercicio por lo que se puede obtener una gran gama de volatilidades que tienen asociadas un precio de ejercicio y un vencimiento, lo que nos permite construir la superficie “*smile o smirk*” que corresponde a los valores de la volatilidad para diferentes precios de ejercicio a diferentes plazos. Suponiendo que la prima de una opción de mercado es congruente con el modelo de Garman-Kohlhagen entonces la volatilidad implícita presenta las siguientes características:

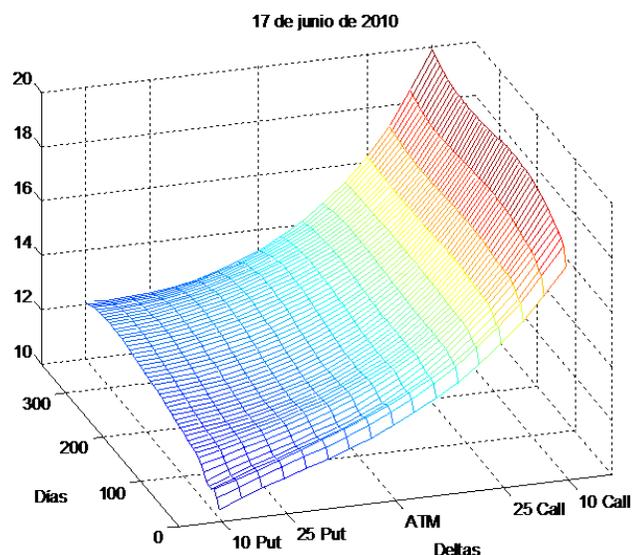
1. Una única volatilidad implícita  $\sigma$  mayor que cero, que puede ser encontrada dada la siguiente relación  $C_{BS}(S, K, T, r_d, r_f, \sigma) = C^{observado}$  debido a la monotonía de la fórmula de Black & Scholes respecto a la volatilidad.

$$vega = \frac{\partial \Pi_{(call / put)}}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\mathbb{N}'(d_1)e^{-r_f T} > 0$$

El operador cotizará volatilidades para compra y venta de opciones, ej. (6,6.5) y como la *vega* es mayor que cero tanto para el call como para el put su valor intrínseco tendrá una relación directa ante cambios en la volatilidad, de esta manera, el operador deberá vigilar diaria y simultáneamente la evolución de las tasas al contado y la volatilidad en los vencimientos, los cuales duran desde varias semanas hasta varios años.

2. La volatilidad implícita del *Put* y del *Call* es la misma para un mismo precio de ejercicio e igual vencimiento por la *Paridad Put - Call*. Así, la volatilidad de un put con delta  $\delta$  implica una volatilidad para un call de  $(1 - \delta)$ .

Figura 3.1: Superficie de Volatilidades

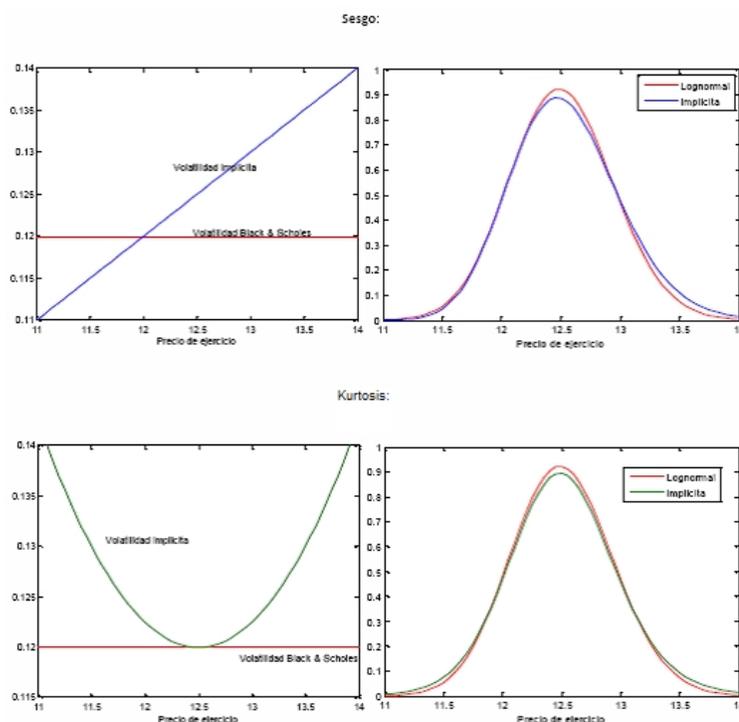


### 3.1.1. Curva Smile

La *Curva Smile* (o *Smirk*) definida por la volatilidad para diferentes precios de ejercicio incorpora en su construcción las perspectivas del mercado sobre la volatilidad para el periodo de vigencia de las opciones. La curva muestra por lo general volatilidades mayores para las opciones call dentro del dinero ( $K < Spot$ ) y fuera del dinero ( $K > Spot$ ). Este sesgo que incorpora la curva *smile* no lo captura el modelo tradicional basado en la distribución lognormal. Las diferentes formas que presenta la curva *smile* son consistentes con diferentes momentos del activo subyacente, por ejemplo una curva *smile* simétrica implica la existencia de leptokurtosis en la distribución i.e. otorga mayor probabilidad a grandes cambios en el bien subyacente ya sean negativos o positivos en comparación con las probabilidades asociadas a una distribución lognormal (problema de colas pesadas).

Por lo general en los mercados de divisas no se obtiene un *smile* simétrico presentando

Figura 3.2: Efecto del Sesgo y la Kurtosis



en la mayoría de los casos un sesgo hacia la depreciación de la divisa frente al dólar, sin embargo, este hecho es más notorio para las divisas emergentes. Cuando se presenta esta asimetría, al *smile* se le denomina *smirk* al incrementarse las volatilidades más rápido cuando los precios de ejercicio son superiores al forward. Diferentes formas del *smile* son consistentes con diferentes distribuciones del bien subyacente para diferentes periodos. La forma que adopte la distribución está vinculada con la pendiente y la convexidad de la curva *smile*. Una pendiente negativa (positiva) implica que la distribución tendrá un sesgo hacia la izquierda (derecha). La magnitud del sesgo dependerá a su vez del nivel de la pendiente. Asimismo, la convexidad del *smile* está directamente relacionado con la kurtosis de la distribución.

### 3.2. Prueba de Eficiencia

La volatilidad implícita contiene información sobre el futuro que no está contenida en las series históricas. Para nuestro análisis consideraremos opciones de una semana, un mes, seis meses y un año. En este contexto se puede hacer un back testing de la volatilidad implícita de ese periodo con la observada, probando la eficiencia de la volatilidad implícita. Para probar la habilidad predictiva de la volatilidad implícita se utilizaron las metodologías sugeridas por *Gereben & Pintér (2005)* y *Cincibuch (2004)*, si la volatilidad implícita refleja las expectativas de los participantes sobre la volatilidad futura y éstas son racionales, se espera que el valor de la volatilidad observada en un tiempo  $T$  sea igual a la volatilidad implícita para  $T$ . Formalmente:

$$\mathbb{E}[\sigma_{T,m}|\phi_t] = VI_{t,T} \quad (3.1)$$

donde  $\phi_t$  es el conjunto de información disponible por los participantes del mercado al tiempo  $t$ . Por definición, la esperanza matemática de las dispersiones en la volatilidad observada dada la información disponible debe ser cero, de esta forma:

$$\sigma_{T,m} = \mathbb{E}[\sigma_{T,m}|\phi_t] + \varepsilon_t, \quad \mathbb{E}[\varepsilon_t|\phi_t] = 0 \quad (3.2)$$

si se siguen las ecuaciones anteriores y se cumplen los supuestos mencionados, al efectuar la siguiente regresión lineal entre la volatilidad observada e implícita, el parámetro  $\alpha$  debe ser muy cercano a uno:

$$\sigma_{T,m} = \alpha VI_{t,T} + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

donde  $\sigma_{T,m}$  es la volatilidad observada en  $T$  para el plazo  $m$  y  $VI_{t,T}$  es la volatilidad implícita observada en  $t$  con vencimiento en  $T = t + m$ . Para calcular  $\sigma_{T,m}$  asumiremos que

**Resultados de la Prueba de Eficiencia y Poder Predictivo**

Regresión:	$\sigma_{t,m} = \alpha VI_{t-n,t} + \varepsilon_t$			$\sigma_t = \alpha VI_{t-n,t} + \beta \sigma_{t-n,m} + \varepsilon_t$			
<i>Volatilidad implícita</i>	$\alpha$	$R^2$	<i>p - value</i>	$\alpha$	$\beta$	$R^2$	<i>p - value</i>
Una semana, n=m=5	0,837	74,1 %	0,000	0,761	0,088	74,2 %	0,000
Dos semanas, n=m=10	0,828	63,3 %	0,000	0,762	0,073	63,3 %	0,000
Un mes, n=m=20	0,825	54,4 %	0,000	1,051	-0,241	55,4 %	0,000
Tres Meses, n=m=60	0,733	18,1 %	0,000	1,410	-0,630	22,2 %	0,000

Cuadro 3.1: Prueba de Eficiencia y Poder Predictivo

la media de los rendimientos es 0 en el periodo comprendido entre 2006 y 2010 la media diaria fue de 0,01 % y al realizar la prueba de hipótesis  $H_0 : \mu = 0$  vs  $H_1 : \mu \neq 0$ , donde  $\mu$  es la media de los rendimientos y utilizando el estadístico  $T = \frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}} \sim T - student(n - 1)$  no se pudo rechazar cero la hipótesis que la media es cero.

$$\sigma_{T,m} = \sqrt{\sum_{i=t+1}^T \frac{r_i^2}{m}} \quad (3.4)$$

La formula anterior permite calcular la volatilidad realizada es consistente con los supuestos de *Black & Scholes* debido a que en el límite cuando  $m$  tiende a  $\infty$  es igual a la volatilidad integrada utilizada en el modelo de *Black & Scholes*. Este resultado es discutido en varios documentos de investigación en particular en *Zhang & Mykland (2005)*.

Adicionalmente se puede estimar la misma regresión incluyendo la volatilidad histórica para probar que al incluir la información contenida en la volatilidad histórica no incrementa significativamente el poder predictivo de la volatilidad implícita al ya estar incluida esta información en su cotización.

$$\sigma_{T,m} = \alpha VI_{t,T} + \beta \sigma_{t,m} + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

Se puede concluir del análisis anterior que la volatilidad implícita incorpora toda la información disponible al momento de su cotización, siendo un buen estimador de la volatilidad futura en especial para los muy cortos plazos, perdiendo su efectividad conforme se incrementa el plazo.

### 3.3. Prueba de Causalidad

Una forma de probar si la volatilidad implícita puede prever el desempeño de los retornos es mediante la prueba de causalidad de Granger. Se dice que una serie de tiempo  $Y$  tiene causalidad sobre la serie  $X$  si valores de  $y$  contribuyen a predecir el valor actual de  $x$ . La varianza condicional de  $x$  debería reducirse al incorporar información pasada de  $y$  en el conjunto de condiciones. Una variable  $y$  es rechazada como variable causal de  $x$ . En la prueba estándar de causalidad se establecen arbitrariamente  $k$  rezagos, y se estiman los parámetros utilizando la siguiente regresión mediante mínimos cuadrados ordinarios:

$$x_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i y_{t-i} + u_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.6)$$

La hipótesis nula es que los coeficientes  $\beta_i$  son iguales a cero y esto implica que  $Y$  no causa a  $X$ . La prueba puede ser ejecutada corriendo una segunda regresión:

$$x_t = \sum_{i=1}^k \gamma_i x_{t-i} + v_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.7)$$

Bajo  $H_o = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$ , se obtiene el siguiente estadístico:

$$\lambda(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^k \hat{v}_t^2 - \sum_{i=1}^k \hat{u}_t^2}{\sum_{i=1}^k \hat{u}_t^2} \frac{T - 2k - 1}{k}, \quad (3.8)$$

donde  $\hat{v}_t$  y  $\hat{u}_t$  son los residuales de las regresiones, tienen una distribución asintótica  $F(k, T - 2k - 1)$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Si  $\lambda(x, y)$  excede el valor crítico de la distribución  $F$  a un

determinado nivel de confianza  $(1 - \alpha)$ ,  $H_0$  es rechazado. Intuitivamente, si incluimos valores pasados de  $y$  debería mejorar significativamente el pronóstico de  $x$ , entonces  $\lambda(x, y)$  será lo suficientemente grande y se rechaza la hipótesis que  $y$  falla explicando  $x$ .

Como métrica de los retornos de gran magnitud, usaremos los retornos al cuadrado. Ésta métrica se centra en la kurtosis despreciando el sesgo al ignorar el signo de los rendimientos. La frecuencia de los datos es diaria. Se puede apreciar en las siguientes gráficas cómo los rendimientos del tipo de cambio se ajustan rápidamente a los choques; por ejemplo, las mayores fluctuaciones en los rendimientos se pueden apreciar en fechas posteriores al 30 de septiembre de 2008, cuando tras la quiebra de Lehman Brothers, la crisis crediticia se intensificó de forma significativa, repercutiendo en todos los activos emergentes que presentaron grandes pérdidas, aunado a esto la magnitud de las variaciones en el tipo de cambio llevaron a los corporativos nacionales a posiciones perdedoras en derivados cambiarios que incrementaron la demanda de éstos por dólares para cubrir sus llamadas al margen o bien cerrar su exposición en estos instrumentos. Posteriormente las medidas adoptadas por el banco central contribuyeron a limitar las fluctuaciones del tipo de cambio en un rango de 2% diario.

Para el estudio incluiremos los rezagos de 5 días hábiles que *Malz(2000)* asume como suficientes para que el ajuste se materialice. Típicamente le toma un cierto tiempo a los activos financieros el asimilar los nuevos eventos o noticias, aunque dada la incertidumbre la volatilidad tiende a incrementarse moderadamente con mayor rapidez de los precios de otros instrumentos.

Figura 3.3: Rendimientos Logarítmicos del Peso Mexicano

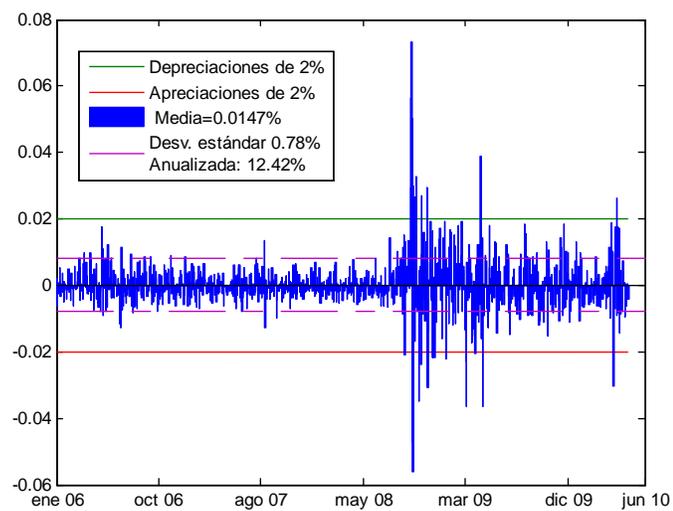
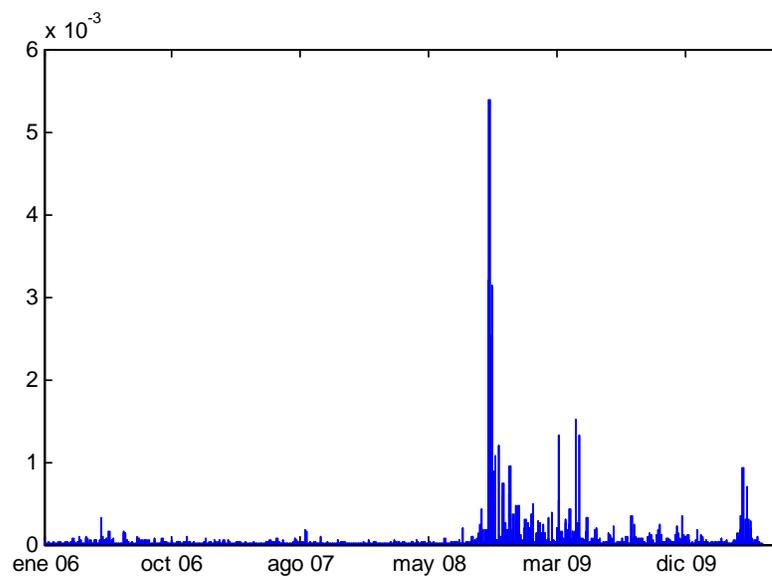


Figura 3.4: Rendimientos al Cuadrado del Peso Mexicano



Se estiman las siguientes regresiones:

$$r_t^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^5 \beta_i \sigma_{t-i} + u_t$$

$$r_t^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_{t-i}^2 + v_t$$

Donde  $r_t^2$  son los rendimientos logarítmicos al cuadrado entre  $t$  y  $t - 1$  y  $\sigma_t$  es la volatilidad implícita en el dinero al tiempo  $t$ . La hipótesis nula es  $H_0 : \beta_i = 0, i = 1, \dots, 5$ . Como  $H_0$  se rechaza, implica que hay evidencia en la causalidad de la volatilidad implícita sobre los rendimientos al cuadrado. En la siguiente tabla se muestra cómo al comparar la regresión de únicamente los rendimientos al cuadrado con la que incluye la volatilidad implícita, a diferentes plazos, se obtienen mejores ajustes en la segunda (al incorporar al modelo la volatilidad implícita); es decir, la volatilidad implícita contiene información que no se encuentra presente en los rendimientos históricos del tipo de cambio por lo que es un mejor pronóstico de fuertes fluctuaciones en los rendimientos, rechazándose en todos los casos la hipótesis nula y admitiendo la causalidad de la volatilidad implícita sobre los rendimientos al cuadrado.

En algunas ocasiones el poder predictivo de la volatilidad implícita ante eventos de gran magnitud es mejor para un lado que para otro, para verificarlo mediante la prueba

**Resultados de la Prueba de Causalidad de Granger  
para Rendimientos al Cuadrados**

Valor crítico  $F(5, 430) = 95\%$

**2,25**

$R^2$  regresión sin volatilidad implícita **42,4%**

<i>Volatilidad implícita</i>	$\lambda(r^2, \sigma)$	$R^2$	<i>p - value</i>
Una semana	17,13	51,9%	0,000
Un mes	30,55	57,5%	0,000
Tres meses	25,91	55,7%	0,000
Seis meses	26,06	55,8%	0,000
Un año	30,62	57,5%	0,000

Cuadro 3.2: Causalidad de Granger

de Granger se utiliza una modificación corriendo las siguientes regresiones:

$$r_{pos,t}^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_{pos,t-i}^2 + \sum_{i=1}^5 \beta_i \sigma_{t-i} + u_t$$

$$r_{pos,t}^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_{pos,t-i}^2 + v_t$$

$$r_{neg,t}^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_{neg,t-i}^2 + \sum_{i=1}^5 \beta_i \sigma_{t-i} + u_t$$

$$r_{neg,t}^2 = \sum_{i=1}^5 \alpha_i r_{neg,t-i}^2 + v_t$$

donde  $r_{pos,t}^2 \equiv \max^2(0, r_t)$  y  $r_{neg,t}^2 \equiv \max^2(0, -r_t)$ . Los resultados presentados en las siguientes tablas nos indican que la volatilidad implícita tiene un mayor poder predictivo cuando se trata de movimientos sesgados a la depreciación que cuando se trata de apreciaciones, aunque para ambos casos se puede rechazar la hipótesis nula de la prueba de Granger.

Una posible explicación a este resultado es que elevados niveles de volatilidad coinciden con una elevada aversión al riesgo, por ejemplo se observó que cuando esta aversión al riesgo se incrementó en octubre de 2008, cuando tras la bancarrota de Lehman Brothers,

**Resultados de la Prueba de Causalidad de Granger  
para Rendimientos Positivos Cuadrados ( $\text{Max}^2(\mathbf{0}, \mathbf{r}_t)$ )**

Valor crítico  $\mathbb{F}(5, 430) = 95\%$       **2,25**  
 $R^2$  regresión sin volatilidad implícita    **18,2%**

<i>Volatilidad implícita</i>	$\lambda(r^2, \sigma)$	$R^2$	<i>p - value</i>
Una semana	31,71	40,8%	0,000
Un mes	23,86	36,6%	0,000
Tres meses	21,47	35,2%	0,000
Seis meses	24,95	37,2%	0,000
Un año	15,85	31,6%	0,000

Cuadro 3.3: Causalidad de Granger (positivos)

**Resultados de la Prueba de Causalidad de Granger  
para Rendimientos Negativos Cuadrados ( $\text{Max}^2(\mathbf{0}, -\mathbf{r}_t)$ )**

Valor crítico  $\mathbb{F}(5, 430) = 95\%$       **2,25**  
 $R^2$  regresión sin volatilidad implícita    **1,8%**

<i>Volatilidad implícita</i>	$\lambda(r^2, \sigma)$	$R^2$	<i>p - value</i>
Una semana	13,07	14,7%	0,000
Un mes	9,72	11,7%	0,000
Tres meses	17,38	18,3%	0,000
Seis meses	10,51	12,5%	0,000
Un año	18,54	19,2%	0,000

Cuadro 3.4: Causalidad de Granger (negativos)

hubo una salida muy importante de posiciones en los diferentes activos emergentes, en particular para el peso; al mismo tiempo que la volatilidad implícita se incrementaba, el peso mexicano se depreciaba, lo que motivó a su vez demanda de opciones buscando cubrir su exposición, sin embargo, es importante destacar que esta cobertura fue moderada ya que el volumen operado en las opciones disminuyó drásticamente al igual que su liquidez debido a las fuertes fluctuaciones que se observaron durante el mes de octubre.

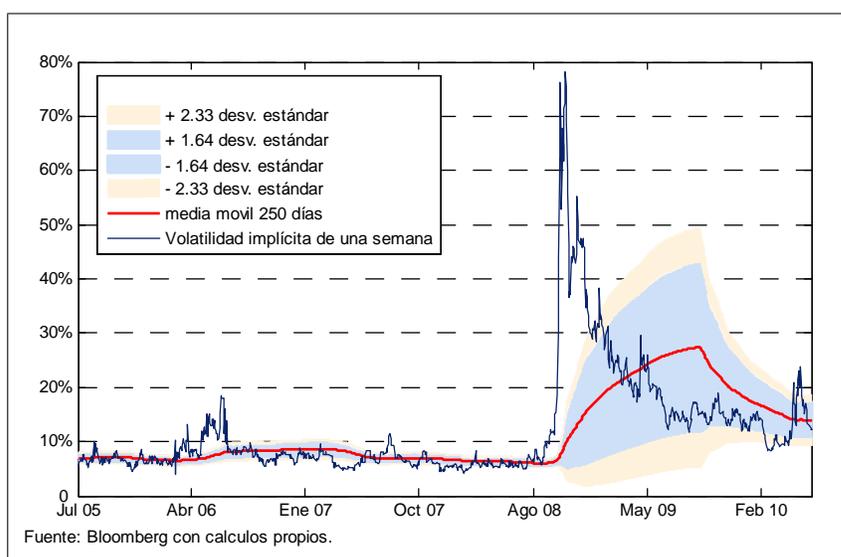
### **3.4. Señal de Advertencia ante Eventos de Gran Magnitud**

Las medidas cuantitativas como el VAR, con reportes enfocados en las pérdidas potenciales inducidas por las fluctuaciones en los rendimientos de los activos y ,primordialmente, las pruebas de estrés, estiman las pérdidas en situaciones anormales (*Laubsh (1999)*). En condiciones ideales los administradores de riesgos deberían usar la prueba de estrés para poder prevenir pérdidas. Por este motivo los investigadores de los mercados han buscado desarrollar indicadores que prevengan crisis, tomen en cuenta datos macroeconómicos, como las cuentas corrientes, acciones realizadas por los bancos centrales y/o ministerios de finanzas, reportes corporativos y los precios de activos forward looking como los forwards, futuros y en particular las opciones.

Como se ha demostrado en secciones anteriores, la volatilidad implícita contiene información relevante de los retornos de gran magnitud, la cual puede ser utilizada para mejorar la efectividad de las pruebas de estrés realizadas por las áreas de riesgos. *Malz(2000)* propone una metodología práctica mediante la cual se puede enviar una señal de alerta ante posibles sucesos de gran magnitud.

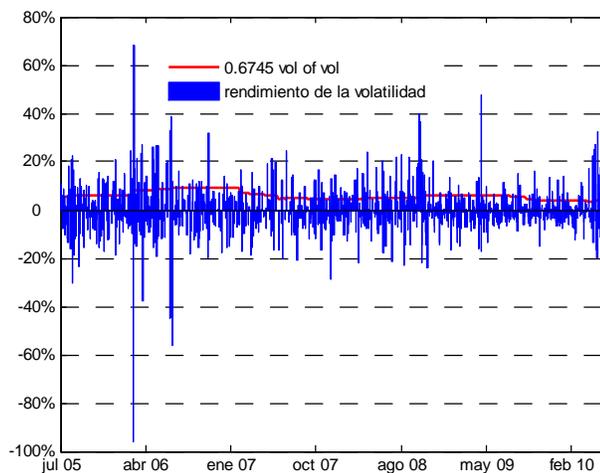
A continuación se aplicará tal metodología para identificar cómo la volatilidad implícita puede proveer una señal de alerta, se deberá considerar aquellos eventos en los que la volatilidad implícita es alta y creciente; al examinar este evento, se determinará si es posible anticipar retornos del tipo de cambio excesivamente bajos o altos. Se considerará que la volatilidad es extrema si ésta es mayor al promedio móvil de 250 días más 1,64 desviaciones estándar.

Figura 3.5: Volatilidad Semanal Implícita del Peso Mexicano



Para cuantificar la velocidad con la que se está incrementando la volatilidad se calculará la desviación estándar de los cambios logarítmicos de la volatilidad, denominados en el argot del mercado como volatility of volatility o '*vol of vol*'. Los operadores ponen especial atención a la *vol of vol* ya que de ésta deriva una importante parte del riesgo de mantener una cobertura delta de un portafolio que contiene opciones. Utilizaremos la *vol of vol* para determinar si la volatilidad está creciendo rápidamente en comparación con la experiencia reciente. Se determinará que la volatilidad crece rápidamente si presenta un

Figura 3.6: Rendimiento Logarítmico de la Volatilidad



Fuente: Bloomberg con cálculos propios.

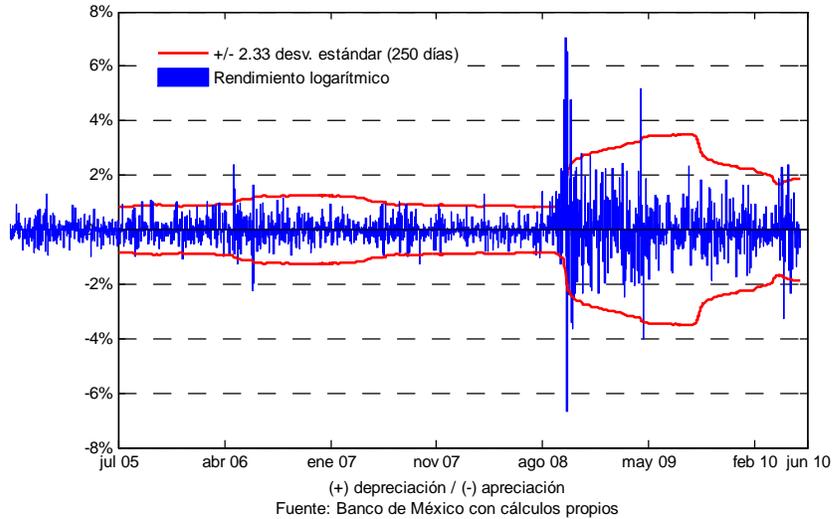
cambio logarítmico superior a 0,6745 vol of vol, correspondiente al percentil del 75 % de una distribución normal estándar.

Finalmente definiremos un retorno extraordinario utilizando la desviación estándar móvil de 250 días de los rendimientos. Se considerará que un evento es excesivo cuando la magnitud del rendimiento supere el percentil del 99 % o 2,33 desviaciones estándar.

Se utilizará la volatilidad implícita a una semana que mostró ser más significativa en comparación a otros plazos. Sea  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  el conjunto de observaciones de la volatilidad implícita y tipo de cambio en días hábiles entre julio de 2005 a junio de 2010, verificando para cada una si la volatilidad es elevada y si su crecimiento es mayor que 0,6745 *vol of vol* en la semana previa.

Se puede estimar que la volatilidad implícita puede mandar una señal cuando las probabilidades de que un evento de gran magnitud ocurra son considerablemente altas en el transcurso de la próxima semana. Sea  $A$  el subconjunto de  $T$  observaciones donde la

Figura 3.7: Rendimiento Logarítmico del Peso (2005-2010)



volatilidad es alta y crece rápidamente:

$$A = \{t_\tau \in T : \text{la volatilidad implícita es alta y crece rápidamente}\} \quad (3.9)$$

Y sea  $B$  el subconjunto de todas las observaciones en las que se registró un rendimiento de gran magnitud, los cuales se encuentran en el percentil del 99% de los rendimientos:

$$B = \{t_\tau \in T : \text{los rendimientos de gran magnitud}\} \quad (3.10)$$

la intersección entre los conjuntos anteriores,  $A \cap B$ , será el conjunto en el que la alerta advirtió un movimiento extremo.

Número de ocasiones que la volatilidad implícita anticipó retornos extremos						
2005-2010	$N(T)$	$N(A)$	$N(B)$	$N(A \cap B)$	Ef. Alertas	Anticipados
Peso Mexicano	1,288	206	54	43	45%	80%

Podemos definir la siguiente hipótesis nula sobre la independencia entre los eventos

$A$  y  $B$ :

$$H_0 : \mathbb{P}(t_\tau \in B | t_\tau \in A) = \mathbb{P}(t_\tau \in B),$$

esta hipótesis implica que la volatilidad no anticipa movimientos de gran magnitud. A continuación se efectúan dos pruebas sobre  $H_0$ .

Una es la prueba de la Ji cuadrada utilizando el estadístico Q de Pearson. Se tienen 1,288 observaciones diarias de las cuales en 206 ocasiones la volatilidad es elevada y creciente. En 54 ocasiones se registraron movimientos de gran magnitud de los cuales 43 de estos coincidieron con volatilidades elevadas y crecientes en la semana previa, se resumiran estos resultados en la siguiente tabla de contingencia:

	$N(B)$	$N(B^c)$	$total$
$N(A)$	43	163	206
$N(A^c)$	11	1,071	1,082
$total$	54	1,234	1,288

Bajo  $H_0$ , la probabilidad de máxima verosimilitud de  $A \cap B$  es  $\frac{206}{1,288} \frac{54}{1,288} \approx 0,67\%$ .

Bajo la hipótesis alternativa:

$$H_1 : \mathbb{P}(t_\tau \in B | t_\tau \in A) \neq \mathbb{P}(t_\tau \in B),$$

la probabilidad de máxima verosimilitud de  $A \cap B$  es  $\frac{43}{1,288} \approx 3,34\%$ . La  $Q$  de *Pearson* es la suma de las diferencias entre las cuatro celdas de la tabla de contingencia y sus estimadores:

$$Q = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{N_{jk} - \frac{N_{j.}N_{.k}}{N}}{\frac{N_{j.}N_{.k}}{N}},$$

donde  $N_{jk}$  son el número de elementos que se encuentran en la casilla j (renglón) k(columna) de la tabla de contingencia y el punto indica que se considerará la suma de toda la columna o renglón según corresponda. Este estadístico tiene una distribución asintótica Ji-Cuadrada con un grado de libertad. Entonces  $Q = 3,89$  y un  $p\text{-value} = 4.9\%$  por lo que  $H_0$  se rechaza con un nivel de confianza del 95%..

Eventos de gran magnitud   rendimiento  >2% (+ apreciación/- depreciación)					
Fecha	Rendimiento	Anticipado	Fecha	Rendimiento	Anticipado
12 may 06	-2.38 %	si	28 oct 08	3.63 %	si
03 jul 07	2.26 %	si	30 oct 08	2.57 %	si
29 sep 08	-2.24 %	si	19 nov 08	-2.80 %	si
02 oct 08	-2.13 %	si	20 nov 08	-2.82 %	si
06 oct 08	-4.77 %	si	27 abr 09	-5.19 %	no
07 oct 08	-4.23 %	si	04 may 09	4.03 %	no
09 oct 08	-7.03 %	si	04 may 10	-2.27 %	no
13 oct 08	6.65 %	si	06 may 10	-2.03 %	si
15 oct 08	-6.53 %	si	10 may 10	3.25 %	si
16 oct 08	2.39 %	si	20 may 10	-2.39 %	si
22 oct 08	-4.74 %	si	27 may 10	2.32 %	si
23 oct 08	3.39 %	si			

Cuadro 3.5: Eventos de Gran Magnitud

Otra prueba se basa en la distribución hipergeométrica; bajo  $H_0$ , la probabilidad del evento  $A \cap B$  sigue una distribución hipergeométrica con una población igual a  $N$  y, una muestra de tamaño  $N(A)$  y una probabilidad de éxito igual a  $\frac{N(B)}{N}$ . Entonces, la población es de 1,288 de los cuales se sabe hay 54 eventos de gran magnitud, si consideramos la muestra dada por el conjunto  $A$  de 206 y si calculamos bajo éstos la probabilidad que haya 43 o más eventos de gran magnitud obtenemos  $\mathbb{P}(x \geq 43) = 2,17 \times 10^{-26}$ ; este resultado se utiliza como *p-value* para la prueba hipergeométrica. Ambas pruebas sugieren que la volatilidad implícita provee de una útil señal de advertencia ante eventos de gran magnitud, al incorporar mayor información sobre el sesgo y la kurtosis. Finalmente, cabe destacar que la mayoría de los movimientos de gran magnitud en los mercados ocurren frecuentemente en fechas consecutivas lo cual limita un poco la prueba hipergeométrica que supone eventos independientes.

Sólo existen tres casos en los que el modelo no pudo anticipar cambios mayores a 2%, las fluctuaciones que hubo el 27 de abril y el 4 de mayo de 2009 se debieron a la aparición de la influenza H1N1 en México, lo que constituye un factor completamente exógeno a los mercados financieros. Por otra parte el movimiento observado el 4 de mayo de 2010 estuvo asociado a los problemas fiscales de Grecia y el riesgo de un posible contagio a otras economías motivando aversión al riesgo generalizada que impactó en el peso al liquidarse en forma anticipada estrategias a favor del peso. A partir de este momento el mercado comenzó a incorporar en las cotizaciones un riesgo de fuertes fluctuaciones en los precios de tipo de cambio de agravarse la situación fiscal de estos países europeos o de existir un plan de rescate que motivaría una fuerte corrección en los precios.

## Capítulo 4

# Extracción de la Función de Densidad para el Tipo de Cambio

En el análisis previos se ha probado que los agentes financieros incorporan en el mercado de opciones cambiarias la información disponible, incluyendo los riesgos y perspectivas que observa cada uno al momento de efectuar una cotización. Dada la información contenida en estos activos por su naturaleza contingente, es deseable utilizarla con el propósito de estimar distribuciones de probabilidad para el peso-dólar más exactas en comparación con las obtenidas bajo los supuestos de riesgo neutral. En el marco académico las metodologías siguientes han sido las más utilizadas: la mezcla de lognormales y la interpolación de la curva smile para la cotización del peso respecto al dólar. El uso de una u otra metodología dependerá de la información que se tenga disponible. La información de mercados bursátiles como MexDer, el Chicago Mercantile Exchange o el Philadelphia Stock Exchange en los que se listan los precios de opciones para una gran variedad de precios de ejercicio y vencimientos,

permite utilizar un método paramétrico como lo es la mezcla de lognormales para aproximar la distribución de probabilidad esperada (*Bahara (1997)*). Sin embargo como se estableció en el *Capítulo 3*, la mayor parte del volumen de opciones se efectúa en los mercados OTC que cotizan en términos de delta y vencimiento por lo que el método no paramétrico conocido como interpolación de la curva smile (*Malz (1997)*) permite estimar la función de distribución pese a las restricciones de información de estos mercados. Las distribuciones obtenidas por estas metodologías estarán sustentadas por decisiones de inversión y no sólo por la percepción de algunos analistas, encuestas de opinión, etc.

#### **4.1. Estimación Distribución de Densidad**

Se puede estimar la función de densidad de probabilidades, en particular para el tipo de cambio peso-dólar, partiendo de los precios de las opciones; esta distribución reflejará para un fecha en particular la probabilidad con la que se alcanzarán los diferentes precios del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción de acuerdo con las expectativas del mercado. Asimismo, es posible calcular la media, varianza, sesgo y kurtosis para el activo subyacente. Las distribuciones obtenidas presentarán un mayor sesgo o coeficiente de asimetría al incorporarse las expectativas de depreciación inherentes para el caso del peso. Adicionalmente, las distribuciones también presentan una kurtosis mayor a la que posee la lognormal utilizada para el modelo de *Black & Scholes*, lo que permite que valores extremos tengan mayor probabilidad de ocurrencia en comparación con la probabilidad asignada por la distribución lognormal neutral al riesgo.

Estas diferentes metodologías han sido utilizadas y desarrolladas por el Banco

Central de Inglaterra, el Banco Internacional de Pagos, la Reserva Federal de Estados Unidos y el Banco de México entre otros. *Díaz de León (2003)* destaca los siguientes ejemplos: el Comité de Política Monetaria del Banco de Inglaterra ha utilizado la información de los mercados de derivados para cuantificar la incertidumbre asociada a los precios futuros de diversos activos, lo cual le ha permitido: 1) anticipar eventos exógenos, 2) analizar la fortaleza o debilidad de una moneda y 3) conocer la expectativa del mercado sobre el futuro de la política monetaria.

El Banco Internacional de Pagos (BIS), ha analizado las expectativas del mercado de diversos tipos de cambio. Por ejemplo, en su Reporte Anual #68 (BIS (1998)) presentó las expectativas del marco alemán frente al dólar ante la crisis asiática a finales de 1997 donde se anticipaba una apreciación del marco alemán frente al dólar tanto por el sesgo como por una menor media para la paridad marco-dólar, lo que era congruente con una expectativa de mayor repercusión de la crisis asiática sobre los Estados Unidos que sobre la economía Alemana.

Finalmente, el BIS (2001) calculó las distribuciones de probabilidad para la paridad euro-dólar permitiéndole concluir que la intervención cambiaria concertada por los países del G7 el 22 de septiembre, 3, 6 y 9 de noviembre de 2000 sólo tuvieron un efecto transitorio sobre las distribuciones de probabilidad esperadas para el euro frente al dólar. Lo anterior se aprecia por el desplazamiento temporal de las funciones de densidad.

La teoría de opciones busca valuar el precio de estos instrumentos en función de los precios de diferentes activos y supuestos sobre el proceso estocástico y la función de distribución, sin embargo, para los desarrollos siguientes utilizaremos los precios observados

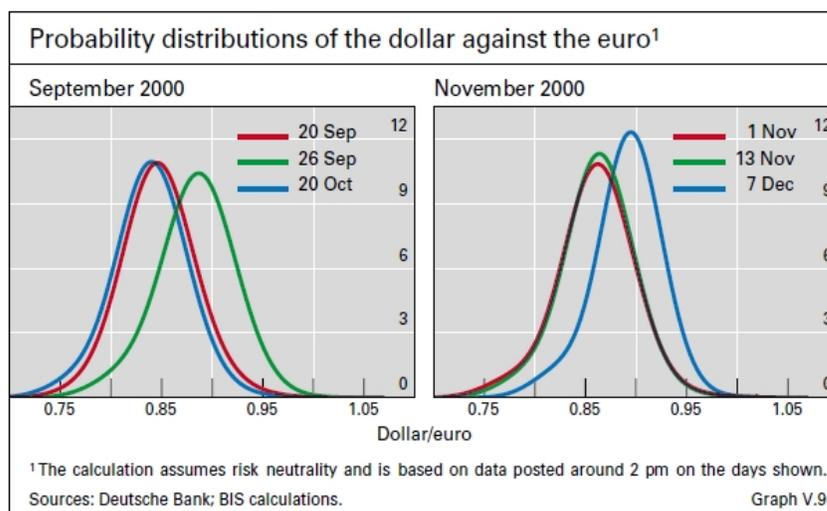


Figura 4.1: Distribución Porobabilidad Dólar-Euro

en el mercado de opciones para obtener la función de probabilidades.

Es importante destacar que debido a que no se conocen explícitamente las diferentes primas de riesgo que están incorporadas en los precios de las opciones, ni la aversión al riesgo de los inversionistas, los supuestos que se tienen que realizar para poder construir las funciones de densidad implican que sólo se pueden estimar distribuciones de probabilidad esperadas neutras al riesgo. No obstante, cabe señalar que si la prima de riesgo que está presente en los precios es baja o estable, las variaciones en las funciones estimadas reflejarán principalmente los cambios en las expectativas de los agentes del mercado. Este tipo de información es de gran utilidad, tanto para los participantes en el mercado como para las autoridades financieras, en particular los bancos centrales, ya que de esta manera pueden seguir el pulso de los mercados. Por ello, los bancos centrales de Inglaterra, Canadá, Estados Unidos, México, así como el Fondo Monetario Internacional y el Banco de Pagos

Internacionales, entre otros, han desarrollado y publicado estudios en la materia.

## 4.2. Método Lognormal

En general, la teoría de opciones ha buscado poder valorar el precio de diferentes instrumentos derivados a partir de los precios de los activos subyacentes y de ciertos supuestos sobre el proceso estocástico y la distribución de probabilidad seguida por éstos. En este trabajo se pretende ir en dirección contraria, es decir, pasar de los precios observados de las opciones intercambiadas en el mercado, a la distribución de probabilidad implícita para los precios de los activos subyacentes.

Existen diversas metodologías para estimar las funciones de densidad de los activos subyacentes a través de los precios de sus instrumentos financieros derivados. En particular, existen dos alternativas:

1. a) La paramétrica, la cual requiere predefinir el tipo de distribución de probabilidad que sigue el precio del activo subyacente (lognormal, mezcla de lognormales, etc.) y posteriormente encontrar los parámetros correspondientes a dichas distribuciones que reflejen de la mejor manera posible los precios observados.
- b) La no paramétrica, la cual a partir de los precios de los derivados se construye la distribución de probabilidad para el activo subyacente sin suponer que ésta tiene una forma predefinida.

El Método Lognormal constituye una referencia al estar basado directamente en el modelo *Black-Scholes* para opciones europeas, sin embargo supone volatilidad constante

para todos los precios. En el tercer capítulo se demostró que es tolerable asumir que el logaritmo natural del tipo de cambio tiene una distribución normal:

$$\ln(S_t) \sim \mathbb{N}[\ln(S_0) + (r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})dt, \sigma^2 dt]$$

lo anterior implica que dado que el logaritmo de la variable aleatoria (el tipo de cambio) tiene una distribución normal entonces el tipo de cambio debe de tener una distribución lognormal con los siguientes parámetros dado su proceso estocástico Browniano:

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\Phi} \\ \mathbb{L}(S_T; \alpha, \beta) &= \frac{1}{S_T \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(S_T) - \alpha)^2}{2\beta^2}\right) \\ \alpha &= \ln(S_0) + (r_d - r_f)T - \frac{1}{2}\beta^2 \\ \beta &= \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$

donde  $S_0$  es el nivel actual del tipo de cambio,  $T$  es tiempo al vencimiento,  $\sigma$  es la volatilidad del subyacente y  $r_d, r_f$  son las tasas libre de riesgo doméstica y externa respectivamente. Al conocer los parámetros se puede construir la distribución lognormal a la fecha de vencimiento y el valor futuro esperado del subyacente dadas las tasas libres de riesgo está dado por  $S_0 e^{(r_d - r_f)T} = \mathbb{E}[\mathbb{L}(S_T | \alpha, \beta)] = e^{(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2)}$  bajo los supuestos de riesgo neutral.

Al sustituir  $\alpha$  y  $\beta$  en las fórmulas de *Black-Scholes* y *Garman & Kohlhagen* para los Calls y Puts estilo europeo se obtienen las siguientes ecuaciones:

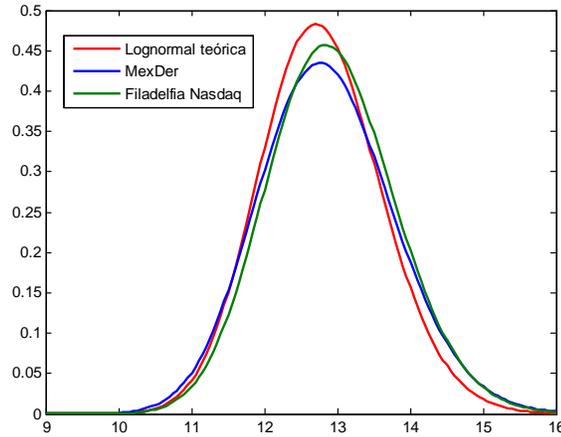
$$\Pi_{Call} = e^{-r_d T} [e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \mathbb{N}(d_1) - K \mathbb{N}(d_2)] \quad (5.1)$$

$$\Pi_{Put} = e^{-r_d T} [-e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}} \mathbb{N}(-d_1) + K \mathbb{N}(-d_2)] \quad (5.2)$$

donde

$$d_1 = \frac{-\ln(K) + \alpha + \beta^2}{\beta}$$

Figura 4.2: Método Lognormal (para septiembre 2010)



$$d_2 = d_1 - \beta$$

Para poder obtener la distribución implícita en las opciones sobre el tipo de cambio bajo el supuesto en el que conocemos la tasa libre de riesgo doméstica, es necesario estimar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Estos parámetros pueden ser estimados mediante el método de mínimos cuadrados no lineales, buscando minimizar las diferencias entre los precios observados en el mercado a diferentes niveles de ejercicio para los Calls ( $C_i$ ) y Puts ( $P_j$ ) con los calculados teóricamente mediante las ecuaciones 5.1 y 5.2. Finalmente, se condiciona que  $e^{(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2)}$  sea igual al forward de mercado para garantizar que la media de la distribución se encuentre lo más cercana al Forward.

$$\text{Min}_{\alpha, \beta} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n [\Pi_{Call}(K_i, T) - C_i]^2 \\ \sum_{j=1}^m [\Pi_{Put}(K_j, T) - P_j]^2 \\ [\exp(\alpha + \frac{\beta^2}{2}) - F]^2 \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, m$ .

<b>PHLX World Currency Options®</b>		
Cotizaciones de opciones para el 18 de septiembre obtenidas el 25 de junio de 2010 (spot=12.7042)		
Precio de ejercicio	Prima Put	Prima Call
12.5000	0.199	0.481
12.5786	0.235	0.436
12.6582	0.275	0.396
12.7389	0.319	0.359
12.8205	0.365	0.325
12.9032	0.415	0.294
12.9870	0.466	0.266
Fuente: Nasdaq.		

Cuadro 4.1: Opciones Operadas en Filadelfia

<b>MexDer Opciones</b>		
Cotizaciones de opciones para el 13 de septiembre obtenidas el 25 de junio de 2010 (spot=12.7042)		
Precio de ejercicio	Prima Put	Prima Call
12.50	0.247	0.576
12.60	0.282	0.509
12.70	0.321	0.445
12.80	0.364	0.385
12.90	0.412	0.329
13.00	0.463	0.277
Fuente: MexDer.		

Cuadro 4.2: Opciones MexDer

Cuadro 4.3: Estimación de una lognormal

Estimaciones al 25 de junio de 2010

Spot=12.7042    T. local = 4.5 %    T. foránea= 0.25 %    Vol. 12.8 %

Parámetros	MexDer	Filadelfia	Teórico
Media	2.5491	2.5433	2.4891
Desv. estándar	7.18 %	6.36 %	6.38 %

Uno de los requisitos para poder aplicar esta metodología es encontrar mercados organizados en los cuales exista gran variedad de precios para opciones europeas a diferentes niveles de ejercicio. Estos datos pueden ser obtenidos de la Bolsa de Filadelfia (PHLX World Currency Options) y del MexDer; en el caso del CME las opciones que cotizan tienen como subyacente los futuros del peso. Aunque en los mercados mencionados existen precios, éstos no son muy líquidos para poder utilizar los precios de las operaciones pactadas por lo que se usará el promedio de las primas de compra y de venta para los niveles de ejercicio en los que existan ambas.

Al comparar la distribución obtenida por este método para los datos de PHLX y MexDer con la distribución teórica, en la que asumimos lognormalidad y que se cumplen al 100 % los supuestos de *Black & Scholes*, se observa que la media de la distribución de PHLX se encuentra desplazada hacia la derecha en comparación con la media teórica, al incorporar las perspectivas de los operadores. Adicionalmente, la volatilidad implícita en las opciones cotizadas en la PHLX y en el MexDer se encuentra ligeramente por debajo de la volatilidad implícita en las opciones en OTC, sin embargo esta desalineación es más notoria en los precios cotizados en MexDer para niveles de ejercicio altos.

### 4.3. Método de Mezcla de Lognormales

Al igual que el método anterior, el método de mezcla de lognormales es una estimación paramétrica de la distribución de probabilidades que correspondería al tipo de cambio. La presente metodología ha sido utilizada por los Bancos Centrales de Inglaterra y de Canadá, y ha sido considerada de gran utilidad cuando los mercados o bolsas de derivados intercambian opciones con una amplia gama de precios de ejercicio (*Bahra (1996), (1997)* y *Mc Manus (1999)*). Esta metodología considera que la distribución del precio de un activo subyacente se puede caracterizar como el resultado de mezclar dos o más distribuciones lognormales. En la fórmula *Black-Scholes* para evaluar opciones se asume que un proceso estocástico Browniano describe de manera adecuada el precio del activo subyacente, el cual se distribuye lognormalmente. Sin embargo, con la finalidad de mejorar la estimación de la función de probabilidades es necesario flexibilizar los parámetros de la distribución permitiéndonos obtener distribuciones distintas a la lognormal, por lo que se ha sugerido utilizar una mezcla de dos lognormales que es lo suficientemente flexible para capturar dentro de sus parámetros un sesgo y una kurtosis más precisas, al mismo tiempo que se pueden obtener funciones bimodales (*Melick y Thomas (1997)* y *Bahra (1997)*).

Una función de densidad construida a partir de una combinación de lognormales queda definida por cinco parámetros y caracterizada por la siguiente función:

$$\mathbb{D}\mathbb{L}(S_T; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \theta) = \theta \mathbb{L}(S_T; \alpha_1, \beta_1) + (1 - \theta) \mathbb{L}(S_T; \alpha_2, \beta_2) \quad (5.4)$$

donde  $\mathbb{D}\mathbb{L}(S_T; \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \theta)$  es la función de probabilidad del precio del activo subyacente  $S_t$  para una fecha futura  $T$ ;  $\theta$  es el ponderador de las funciones tal que  $\theta \in [0, 1]$ ;  $\mathbb{L}(S_T; \alpha_1, \beta_1)$  es la función de densidad lognormal para  $S_T$  con media y desviación estándar determinada

por los parámetros  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , respectivamente; análogamente se tienen los parámetros  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  para la segunda distribución.

Así, la metodología consiste en encontrar los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  y  $\theta$ , que se ajusten mejor a los precios de las opciones referenciadas al tipo de cambio. Para lograr lo anterior se necesita de una ecuación que permita valuar las opciones (Calls y Puts) y que a su vez contenga los parámetros buscados. Esto se ilustra a partir de la fórmula para opciones propuesta por Garman & Kohlhagen, en la que su precio debe ser igual al valor esperado de sus pagos bajo los supuestos de riesgo neutral:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{Call} &= \mathbb{E}[(S_T - K)^+]e^{-r_d T} = e^{-r_d T} \int_x^\infty (S_T - K) \mathbb{D}\mathbb{L}(S_T) \partial S_T = & (5.5) \\
 \Pi_{Call} &= \theta(S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(d_1) - e^{-r_d T} K \mathbb{N}(d_2)) + (1 - \theta)(S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(d_3) - e^{-r_d T} K \mathbb{N}(d_4)) \\
 \Pi_{Put} &= \mathbb{E}[(K - S_T)^+]e^{-r_d T} = e^{-r_d T} \int_{-\infty}^x (K - S_T) \mathbb{D}\mathbb{L}(S_T) \partial S_T = \\
 \Pi_{Put} &= \theta(e^{-r_d T} K \mathbb{N}(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(-d_1)) + (1 - \theta)(e^{-r_d T} K \mathbb{N}(-d_4) - S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(-d_3)) \\
 d_1 &= \frac{-\ln(X) + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1}, \quad d_2 = d_1 - \beta_1 \\
 d_3 &= \frac{-\ln(X) + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2}, \quad d_4 = d_3 - \beta_2
 \end{aligned}$$

donde  $K$  es el precio de ejercicio de la opción,  $S_T$  es el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento;  $T$  es el tiempo en años que falta para el vencimiento de la opción;  $r$  es la tasa de interés libre de riesgo (compuesta de manera continua) y  $\Pi_{Call}$  y  $\Pi_{Put}$  corresponden a los precios de los calls y de los puts para cada precio de ejercicio  $K$ ; donde  $\mathbb{N}(\cdot)$  corresponde a la función de probabilidad acumulada para la normal estándar. Adicionalmente debe de considerarse que en ausencia de arbitraje los parámetros deben cumplir la siguiente

condición:

$$\theta \exp\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{2}\right) + (1 - \theta) \exp\left(\alpha_2 + \frac{\beta_2^2}{2}\right) = Forward \quad (5.6)$$

Las ecuaciones (5.5) son resueltas utilizando la fórmula de valuación de opciones propuesta por *Black-Scholes (1973)* y pueden interpretarse como una suma ponderada de soluciones.

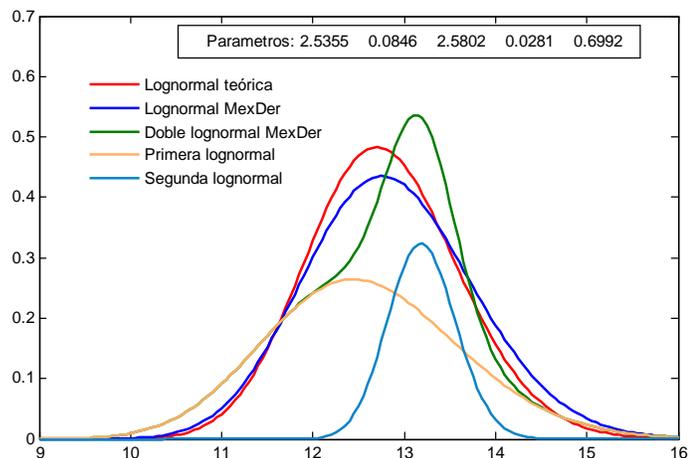
Una vez que se ha definido una forma funcional que permite valorar las opciones en función de los parámetros que se necesitan para construir la mezcla de lognormales, se procede a encontrar aquellos parámetros que minimicen las diferencias entre los precios determinados por las ecuaciones 5,5y 5,6 respecto a los observados en el mercado ( $C_i$  y  $P_j$ ). Esto se realiza respecto a cada opción con precio de ejercicio  $K_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $K_j$  con  $j = 1, 2, \dots, m$ . Adicionalmente, si se desea que la media de las distribuciones de probabilidad coincida con el forward implícito en las cotizaciones, se incluye un término que permite minimizar la diferencia al cuadrado entre la media de la distribución que se construye y la de los precios del forward. Con base en lo anterior, la ecuación a partir de la cual se pretenden encontrar los parámetros  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  y  $\theta$ , que permiten minimizar la diferencia entre los precios observados y los que se desprenderían de la función de densidad construida, es la siguiente:

$$\underset{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \theta}{Min} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n [\Pi_{Call}(K_i, T) - C_i]^2 \\ \sum_{j=1}^m [\Pi_{Put}(K_j, T) - P_j]^2 \\ \theta \exp\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{2}\right) + (1 - \theta) \exp\left(\alpha_2 + \frac{\beta_2^2}{2}\right) - F \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

donde  $F$  es el valor del forward del precio del activo subyacente.

Finalmente, al contar con los parámetros  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  y  $\theta$ , se puede obtener la

Figura 4.3: Método de Mezcla de Lognormales (MexDer)



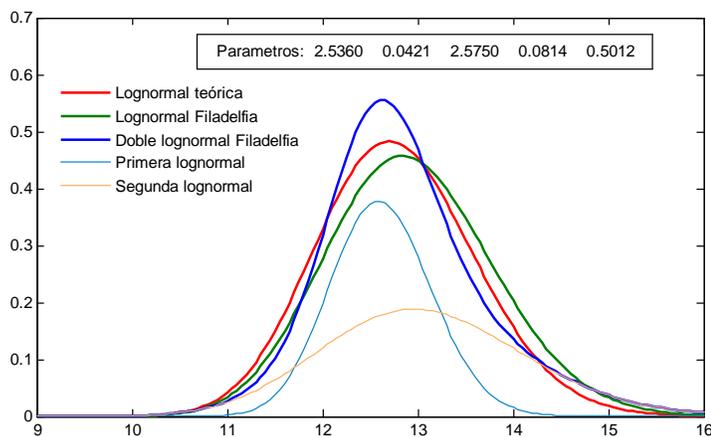
función de probabilidad del precio del activo subyacente a través de la ecuación 5.4. Esta metodología ofrecerá mejores resultados en la medida en que se cuente con las primas de una amplia gama de precios de ejercicio en las opciones (Call o Put). La optimización, al igual que en el caso de una sola distribución, puede realizarse por el método de mínimos cuadrados no lineales. Al momento de implementar el código para minimizar en MATLAB se obtiene un valor muy pequeño para la desviación estándar para una de las lognormales lo cual no es congruente y puede generar un pico en la gráfica; para evitar que esto suceda se anexa la siguiente restricción sobre  $\beta_1$  y  $\beta_2$ :

$$0,25 < \frac{\beta_1}{\beta_2} < 4$$

esta restricción limita que las desviaciones estándar queden muy alejadas una de la otra permitiendo obtener una mejor estimación en las distribuciones.

En la figura anterior utilizando los valores observados en el MexDer se obtiene una distribución con los siguientes parámetros  $\alpha_1 = 2,5355$ ,  $\beta_1 = 0,0846$ ,  $\alpha_2 = 2,5802$ ,

Figura 4.4: Método de Mezcla de Lognormales (Filadelfia)



$\beta_2 = 0,0281$  y  $\theta = 0,6992$  la cual presenta colas ligeramente más pesadas que la distribución obtenida por el método de una Lognormal. Desafortunadamente, para el caso de las opciones cotizadas en Filadelfia se obtuvo  $\theta = 1$  por lo que sólo se pudo obtener una sola distribución lognormal, sin embargo el centro de la distribución se encuentra desplazado hacia la derecha asignando una mayor probabilidad a niveles entre 12,50 y 14,00 pesos por dólar en comparación con la distribución obtenida con una sola lognormal y la teórica. Además, incorpora una mayor probabilidad a los niveles de la cola izquierda en comparación con las otras distribuciones.

En el caso de las cotizaciones de opciones en Filadelfia observamos la cola derecha ligeramente más pesada en comparación con la distribución obtenida por el método de una lognormal y acota a un menor rango de niveles el centro de la distribución. Para los casos de MexDer y Filadelfia observamos cómo el método de mezcla de lognormales incorpora mayor información en las distribuciones; sin embargo se aprecian diferencias importantes entre las distribuciones; obtenidas de cada uno de estos mercados. Una explicación de estas diferencias

radica en la poca liquidez que existe en estos mercados debido a la poca operación que se realiza en los mercados organizados de opciones; cabe destacar que de acuerdo al análisis realizado por *Arild(2002)* el método de mezcla de lognormales es muy sensible a los cambios en las primas de las opciones. Adicionalmente, el mercado de Filadelfia cotiza en dólares por pesos sus precios de ejercicio y las primas en dólares por lo que para aplicar el mismo análisis se debieron homogeneizar las cotizaciones. Finalmente, tanto el método de una como el método de dos lognormales presentan la desventaja de depender de precios listados en mercados organizados, los cuales tienen sólo una gama limitada de fechas de vencimiento, lo que dificulta el obtener distribuciones para fechas distintas a las del vencimiento.

#### 4.4. Método de Interpolación de la Curva Smile

La función de densidad implícita en las opciones está fuertemente relacionada con la definición de activo con precio de estado contingente, los cuales son activos que prometen una unidad monetaria si ocurre un determinado evento y cero en otro caso. Si se tiene una reclamación para cada uno de los estados posibles entonces la esperanza matemática será uno. De esta manera el precio justo que se debe pagar por estos activos es el resultado de multiplicar una unidad monetaria por la probabilidad de que ocurra dicho evento. Si el mercado es completo, es relativamente fácil obtener la función de probabilidad a partir de los precios de estos activos. *Ross (1976)* demostró esto utilizando los precios de opciones europeas, posteriormente *Breeden y Litzenberger (1978)* obtuvieron la relación analítica entre los precios de las opciones y las probabilidades neutrales al riesgo:

$$\frac{\delta^2 c(X, T)}{\delta X^2} = e^{-r_d T} \mathbb{P}(S_T)$$

#### 4.4.1. Resultado de Breeden-Litzenberger

En el documento de *Breeden y Litzenberger (1978)* se parte de un “derecho elemental de cobro” la cual paga una unidad monetaria en una determinada fecha  $T$  si el valor de un activo subyacente es  $M$ , cuyo precio debería ser (1) si  $\mathbb{P}(M = 1)$ . Suponiendo que el bien subyacente únicamente puede tener uno de los siguientes valores  $\$1, \$2, \dots, \$N$ ; se puede expresar el Pay Off como el de un portafolio de opciones call europeas denotados como  $C(X, T)$  con precio de ejercicio  $X = 0, 1, 2$  y vencimiento  $T$  de la siguiente forma:

<b>Calls Payoff</b>			
Subyacente	$C(0, T)$	$C(1, T)$	$C(2, T)$
$M = 1$	1	0	0
$M = 2$	2	1	0
$M = 3$	3	2	1
$M = 4$	4	3	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$M = N$	$N$	$N - 1$	$N - 2$

Se puede replicar un derecho elemental de cobro con  $M = 1$  si se construye el siguiente portafolio:

$$[C(0, T) - C(1, T)] - [C(1, T) - C(2, T)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

el cual replica el payoff de un “derecho elemental de cobro”, lo que implicaría que  $C(0, T) - 2C(1, T) + C(2, T) = \mathbb{P}(M = 1)$  que para cualquier  $M = m$  es:

$$C(m - 1, T) - 2C(m, T) + C(m + 1, T) = \mathbb{P}(M = m)$$

si suponemos que la magnitud del intervalo es  $\Delta M$  se tiene:

$$\left[\frac{1}{\Delta M}\right][C(m - \Delta M, T) - 2C(m, T) + C(m + \Delta M, T)] = \mathbb{P}(M = m)$$

de acuerdo *Breeden y Litzenberger [1978]* al dividir nuevamente entre  $\Delta M$  se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(M = m)}{\Delta M} &= \frac{\mathbb{P}(m - \Delta M < M < m + \Delta M)}{\Delta M} = \frac{\mathbb{P}(M < m + \Delta M) - [1 - \mathbb{P}(M \leq m - \Delta M)]}{\Delta M} \text{ y} \\ \frac{\mathbb{P}(M = m)}{\Delta M} &= \left[ \frac{1}{(\Delta M)^2} \right] [C(m - \Delta M, T) - 2C(m, T) + C(m + \Delta M, T)] \implies \\ \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(M = m)}{\Delta M} &= \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(\Delta M)^2} \right] [C(m - \Delta M, T) - 2C(m, T) + C(m + \Delta M, T)] = \\ \mathbb{P}(M = m) &= \frac{\delta^2 c(X, T)}{\delta X^2} \Big|_{X=S_T} = \frac{\mathbb{N}'(d_2) e^{-rdT}}{K \sigma \sqrt{T}} = e^{-rdT} \mathbb{P}(S_T = X) \end{aligned}$$

Este resultado es válido siempre y cuando  $\mathbb{P}(\bullet)$  y  $C(X, T)$  sean funciones diferenciables en segundo grado, no existan condiciones de arbitraje y  $C(X, T)$  debe ser convexa y monótona decreciente para  $X$  para garantizar la obtención de una función de densidad positiva.

#### 4.4.2. Obtención de la Distribución Implícita Método No Parametrico

En los métodos paramétricos los precios están vinculados con una fecha determinada, lo que dificulta el realizar comparaciones entre las distribución de un día contra otro, además de poder ser afectada por eventos particulares asociados a la fecha de vencimiento. En los mercados OTC diariamente se pueden obtener cotizaciones para las opciones a diferentes plazos aunque el rango de precios para los que existen cotizaciones es limitado. Además, en el estudio presentado por *Benavides(2006)* concluye que el método no paramétrico tiene una mayor precisión al pronosticar el tipo de cambio futuro en comparación con la aproximación realizada por el método de dos lognormales.

El método no paramétrico conocido como interpolación de la curva smile es una estimación de la distribución de probabilidad del precio del activo subyacente, el cual ha sido utilizado, entre otros, por el Banco Central de Inglaterra y el Fondo Monetario Internacional (*Clews, Panigirtzoglou y Proudman, (2000) e IMF (2002)*). Se recomienda utilizar esta

metodología cuando no se tienen precios de opciones para una amplia gama de precios de ejercicio con el mismo plazo por vencer. Es común estar en este caso, ya que en los mercados de derivados de mayoreo, conocidos como “over the counter (OTC)”, sólo se cuenta con información para unos cuantos precios de ejercicio, por lo cual para construir las funciones de densidad para los activos subyacentes se necesitan métodos que permitan interpolar todo el rango de precios a partir de unos cuantos datos observados. Sin embargo se debe tener precaución al momento de obtener los diferentes nodos de volatilidad de la curva smile ya que una distorsión en alguno de ellos producirá una distribución espuria.

A diferencia del método de mezcla de lognormales, donde a partir de los precios de las opciones se encuentran los parámetros de la distribución de probabilidad que se supone para el precio del activo subyacente, en esta metodología la función de probabilidad  $\mathbb{P}(S_T)$ , se encuentra a partir de la propiedad encontrada por *Breeden y Litzenberger (1978)* en la cual dicha función de probabilidad depende de la segunda derivada parcial de la función del precio del call,  $C(X, T)$ , con respecto a los diferentes precios de ejercicio  $X$ :

$$\mathbb{P}(M = m) = \frac{\delta^2 c(X, T)}{\delta X^2} \Big|_{X=S_T} = \frac{\mathbb{N}'(d_2)e^{-r_d T}}{K\sigma\sqrt{T}} = e^{-r_d T} \mathbb{P}(S_T = X)$$

Así, de la ecuación anterior se puede despejar  $\mathbb{P}(S_T = X)$  obteniendo así la función de probabilidades:

$$\mathbb{P}(S_T = X) = \frac{\mathbb{N}'(d_2)e^{-r_d T}}{K\sigma\sqrt{T}} e^{r_d T}$$

Sin embargo, debido a que la función de precios del *Call* es continua para el rango de precios de ejercicio, en principio se necesitarían precios de opciones para un rango prácticamente continuo de precios de ejercicio para poder construir la función de densidad. Estos precios no están disponibles en el mercado o presentan problemas en su liquidez, por

lo que a partir de unos cuantos precios observados, se requiere interpolar un curva continua de volatilidades de las opciones y de precios de ejercicio.

Es importante recordar que los precios de las opciones en los OTC se cotizan en términos de la volatilidad implícita, la cual tiende a ser diferente dependiendo de los precios de ejercicio. Por ejemplo, en opciones de tipo de cambio la volatilidad implícita a la cual se venden opciones con precios de ejercicio cercanos a la cotización forward son conocidas como opciones “at the Money forward (atm)” y suelen ser inferiores a las volatilidades de aquellas opciones con precios de ejercicio muy superiores o inferiores. Este fenómeno da lugar a la conocida curva smile o smirk que relaciona las volatilidades implícitas en las opciones para diferentes rangos de precios de ejercicio.

Cabe destacar que es común que las cotizaciones de los precios de las opciones se hagan en términos de la delta dual de la opción, la cual corresponde a la primera parcial del precio de la opción respecto al precio de ejercicio. Esta última tiene una relación monótono respecto al precio de ejercicio. Utilizando la fórmula Black-Scholes para el caso de una opción de compra (call) sobre tipos de cambio, la delta está expresada por la siguiente ecuación:

$$\Delta_{call(dual)} = \frac{\partial \Pi_{Call}}{\partial K} = e^{-r_d T} \mathbb{N} \left( \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) > 0 \quad (\text{Delta dual})$$

La metodología propuesta por *Malz (1997)* para el cálculo de la distribución implícita tiene dos pasos:

a) Se necesita de una función continua que relacione las volatilidades implícitas en función de las deltas. Por lo general pueden obtenerse del mercado al menos 5 nodos de esta función directamente. A partir de esta relación se debe obtener una función que relacione las volatilidades implícitas en términos de los precios de ejercicio utilizando la expresión

para la delta obtenida anteriormente.

b) Se deben utilizar los valores obtenidos de esta última función para aplicar el resultado de *Breeden y Litzenberger (1978)* y así obtener la función de densidad.

Algunos de los instrumentos con opciones con precios de ejercicio distintos al precio ATM que se intercambian con mayor frecuencia en los mercados OTC son:

1. Butterfly (btf): es el resultado de combinar una posición corta en dos call ATM con una posición larga en calls a 25 y 75 (10 y 90) deltas; esto implica que el precio de ejercicio de estas últimas opciones estén a una distancia similar al ATM. Este instrumento se cotiza como la volatilidad promedio del call y put a 25 deltas (call a 75 deltas) menos la volatilidad ATM. Este portafolio de opciones registra ganancias siempre y cuando el precio del activo subyacente se mantenga en un rango acotado, i.e. mientras el precio no disminuya ni se incremente sustancialmente. Por ello, estos precios dan mucha información sobre las colas de la distribución de probabilidad que los agentes esperan para determinado activo subyacente (kurtosis).

2. Risk reversal (rr): es la combinación de una posición larga en una opción call con precio de ejercicio superior al forward y una posición corta en un put con un precio de ejercicio inferior, ambas opciones con la misma delta. Se cotiza como la resta de la volatilidad implícita en el call menos la correspondiente al put. Este portafolio de opciones reportará ingresos significativos cuando el precio del activo subyacente tenga alzas considerables. Así, el patrón de pagos tendrá beneficios dependiendo del sesgo de la distribución de probabilidad que tenga el activo subyacente. Por tanto, su comportamiento es determinante para conocer el sesgo que anticipa el mercado para determinado activo subyacente.

Figura 4.5: Payoff de una Estructura Butterfly

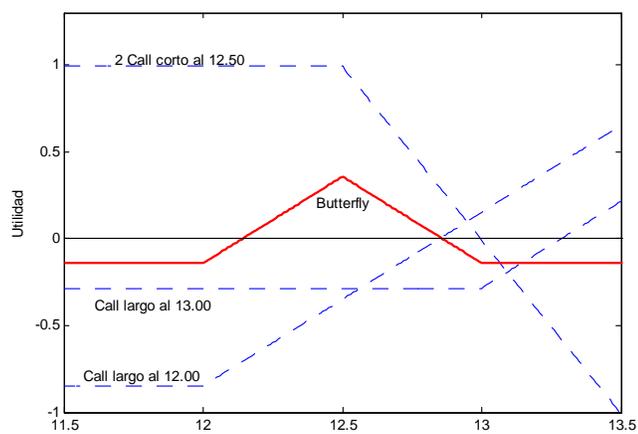
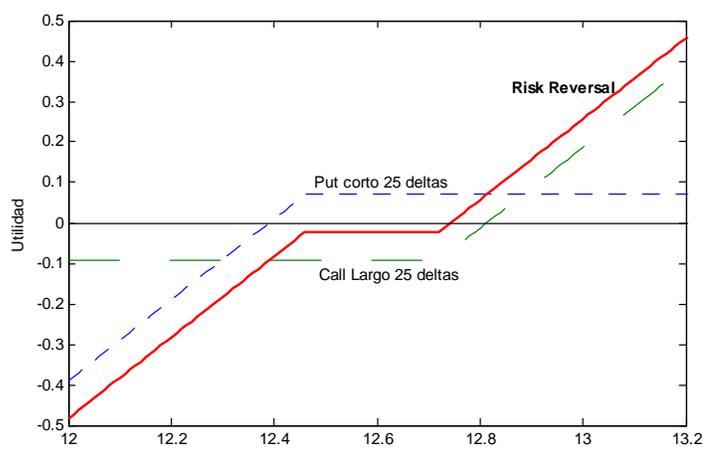


Figura 4.6: Payoff de un Risk Reversal



Es importante señalar que el Butterfly y el risk reversal suelen cotizarse para deltas de .25 ó .10 por lo cual pueden involucrar opciones con precios de ejercicio lejanos al ATM forward. Esto permite que a partir de sus precios, se obtenga mucha información sobre la curva smile (smirk). Resolviendo de las siguientes ecuaciones se pueden obtener cinco nodos de la curva smile:

$$\begin{aligned} atm &= \sigma_{50}, rr = \sigma_{25} - \sigma_{75}, btf = \frac{(\sigma_{25} + \sigma_{75})}{2} - \sigma_{50} \Rightarrow \\ \sigma_{25} &= rr + \sigma_{75} \text{ y } btf = \frac{(rr + 2\sigma_{75})}{2} - \sigma_{50} \Rightarrow \\ \sigma_{75} &= (btf + \sigma_{50}) - \frac{rr}{2} \text{ y } \sigma_{25} = \frac{rr}{2} + (btf + \sigma_{50}) \end{aligned}$$

análogamente para las estructuras con 10 y 90 deltas.

El método utilizado en el presente trabajo para la interpolación de la curva smile en la que se supone que la volatilidad está en función del precio de ejercicio como lo establece *Shmiko(1993)* será mediante splines<sup>1</sup> cúbicos como lo proponen *Campa, Chang y Reider (1997)*. Una de las ventajas de este método es la posibilidad de extrapolar niveles de volatilidad para precios de ejercicio alejados del nivel actual del subyacente. La interpolación de la curva smile se escoge de tal forma que pase lo más cerca posible a las cotizaciones observadas para las opciones, obteniendo una curva smile continua en la que cada delta tiene asociada un nivel de volatilidad.

Una vez que se tienen las volatilidades implícitas del mercado para los cinco nodos se aplicará una interpolación mediante splines cúbicos para obtener la curva continua  $\sigma(\Delta_{call(dual)})$  que es dos veces diferenciable:

En función de las deltas y volatilidades obtenidas se tiene que encontrar la volatilidad

---

<sup>1</sup>Los splines cúbicos se componen de piezas de polinomios definidos como una función cuyas dos primeras derivadas son continuas en los nodos.

Figura 4.7: Curvas Smile para el Peso Mexicano

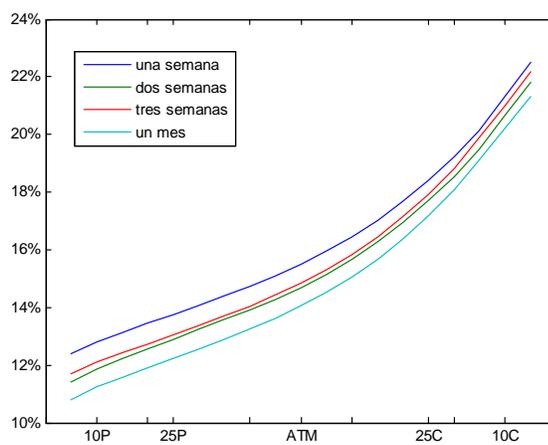


Figura 4.8: Curva smile Continua para una Semana

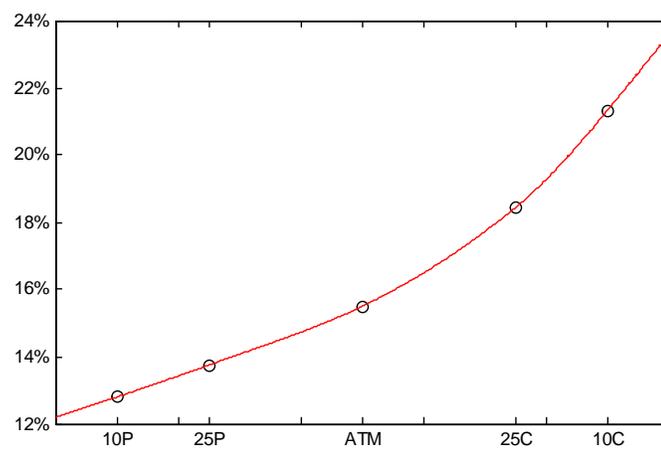
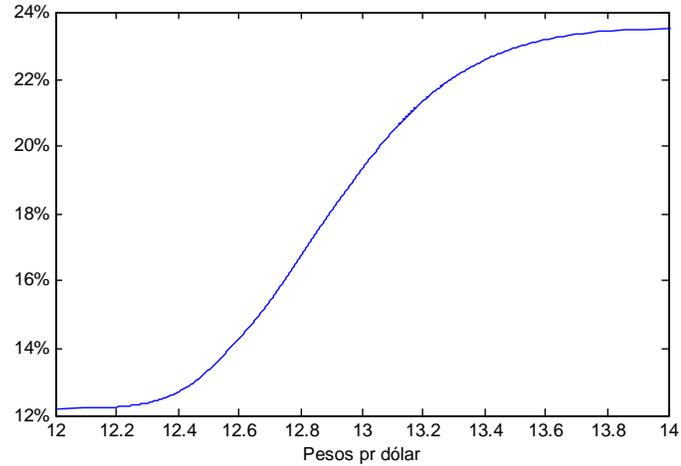


Figura 4.9: Función  $\sigma(K)$  Volatilidad VS Precio de Ejercicio

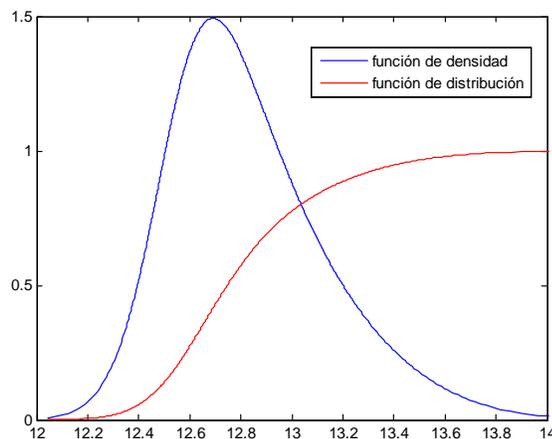
implícita que le corresponde a cada precio de ejercicio. Es decir, se tiene que hacer una transformación en donde la volatilidad implícita esté expresada en términos del precio de ejercicio  $\sigma(K)$  y no en términos de delta por lo que se utiliza la fórmula de  $\Delta_{call(dual)}$  reemplazando los valores obtenidos de volatilidades y deltas para resolver la siguiente ecuación y obtener la función  $\sigma(K)$  monótona continua y dos veces diferenciable:

$$K = \frac{S_0}{\exp[\sigma\sqrt{T}\mathbb{N}^{-1}(\exp(r_d T)\Delta_{call(dual)}) - (r_d - r_f - \sigma^2/2)T]}$$

Una vez que se obtiene la curva smile en función de los precios de ejercicio, la etapa final consiste en calcular mediante el resultado de *Breeden y Litzenberger* la función de densidad para el activo subyacente.

Para esta etapa se sustituye en el resultado de *Breeden y Litzenberger* los precios de ejercicios  $K$  asociados con su volatilidad  $\sigma(K)$  obteniendo para cada  $K$  el valor de su función de densidad y de distribución. Cabe señalar que, dado que no se puede estimar

Figura 4.10: Distribución Implícita en las Opciones



todo el dominio de esta distribución, ya que está acotada a los niveles para los cuales se estimaron las funciones mediante los splines, *Shimko (1993)*, sugiere ajustar las colas de la distribución utilizando el supuesto de lognormalidad y utilizando como parámetro de desviación estándar la del último precio de ejercicio calculado tanto del lado derecho como del izquierdo.

Es importante destacar que cuando el risk reversal y el butterfly son cero implica que la curva smile es una línea horizontal, con lo cual el precio del activo subyacente tendría una distribución lognormal con media igual al precio forward. Esto muestra que a diferencia del método paramétrico, en la interpolación de la curva smile la media de la distribución que se estima no necesariamente coincide con la cotización forward. Es en este sentido en el que no se puede asegurar que la distribución de probabilidad obtenida excluya oportunidades de arbitraje. Lo anterior refleja que la media de la distribución de probabilidad estimada no considera únicamente el diferencial de tasas, sino que además incorpora desviaciones

que el mercado anticipa respecto a los supuestos de lognormalidad implícitos en la fórmula *Black-Scholes*. Esto puede ser de gran utilidad para conocer una aproximación a la prima de riesgo implícita en los risk reversals y butterfly.

Algunos de los ejemplos más claros de cómo puede variar esta distribución implícita se pudieron observar en la crisis crediticia de 2008 y 2009; las siguientes gráficas comparan la distribución observada al inicio de la crisis el 10 de octubre de 2008 cuando el peso presentó una fuerte corrección al alza y motivó que el Banco de México instrumentara subastas extraordinarias para compensar la demanda de corporativos y subastas diarias de 400mdd para promover una salida ordenada de capitales extranjeros. La forma de la distribución dada la elevada volatilidad es muy plana en comparación con la actual y más aún en comparación con la observada antes de septiembre de 2008, por lo que se anticipaban niveles del tipo de cambio inclusive superiores a 16 pesos por dólar. En la segunda gráfica se muestra el sesgo a la depreciación en febrero de 2009 cuando algunos Hedge Funds especulaban en contra del peso y su posterior corrección tras las intervenciones directas realizadas por el Banco de México. Probablemente la mayor utilidad que presentan estas distribuciones es el reflejar el sentimiento de los mercados permitiendo una adecuada toma de decisiones.

#### **4.4.3. Las Colas de la Distribución**

En el estudio de *Arild(2002)* compara tres maneras de confrontar el problema de colas en la distribución implícita:

- La primera es extrapolar a la izquierda y a la derecha la curva smile para completar

Figura 4.11: Distribuciones del Peso Mexicano en 2008

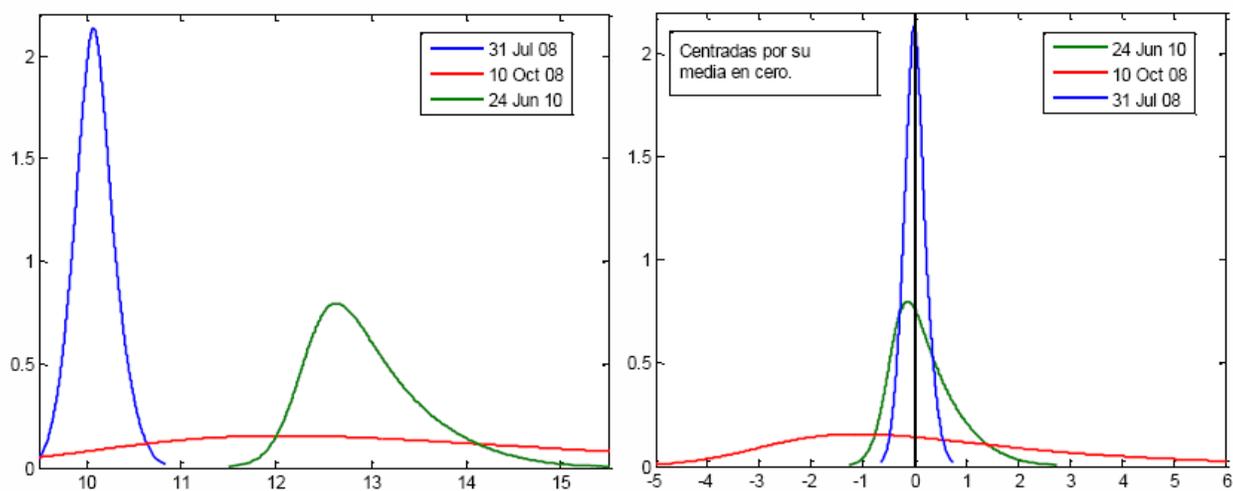
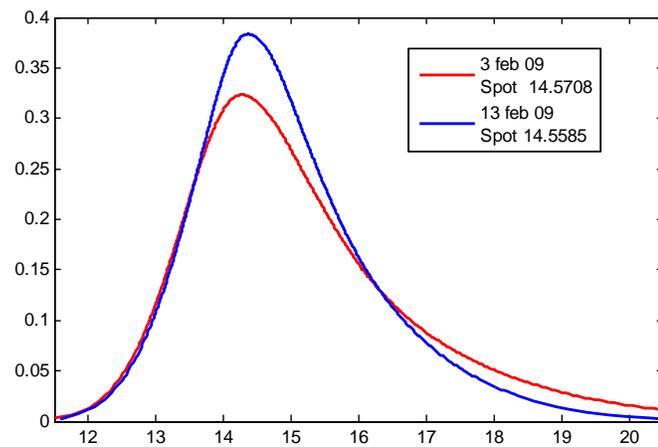


Figura 4.12: Distribución del Peso Mexicano en 2009



las colas de la distribución. El problema de este método radica en tener que ajustar la función de densidad para que su integral no sea mayor a uno.

- El segundo método es asumir que la volatilidad a partir de precios muy fuera del dinero tanto para calls o puts sea constante al último valor estimado. Este método fue propuesto por *Bliss y Panigirtzoglou (1999)*.
- El tercer procedimiento es ajustar distribuciones lognormales a las colas de la distribución implícita. Este tercer mecanismo es equivalente a asumir que el smile es constante fuera de un rango de observaciones; fue propuesto inicialmente por *Shimko(1993)* y ha sido aplicado por otros autores como *Anderson y Lomakka (2001)*. Sin embargo no detallan explícitamente cómo aplicar este método.

*Arild(2002)* sugiere completar con colas lognormales directamente en la función de densidad obtenida asumiendo tanto para la cola derecha como para la izquierda que los últimos valores de volatilidad estimados en la interpolación permanecen constantes. Adicionalmente a este mecanismo y dados los niveles elevados de volatilidad que se pueden observar para los precios de opciones call fuera del dinero se sugiere dividir la función de densidad obtenida entre su integral para obtener una nueva función de densidad en la que se garantice que su integral sea uno.

#### **4.4.4. Reflexiones en Cuanto la Conveniencia de Utilizar la Mezcla de Lognormales o la Interpolación de la Curva Smile**

En cuanto a qué método proporciona un mejor ajuste, la evidencia es inconclusa. Por un lado *Bliss y Panigirtzoglou (2000)* elaboraron distribuciones de probabilidad para la

cotización de la libra esterlina y el índice accionario FTSE 100 y concluyen que el método de interpolación de la curva smile propuesto por *Malz (1997)* es el más adecuado para las pruebas que realizaron. Por otro lado, *McManus (1999)* comparó diversos métodos paramétricos y no paramétricos; y concluye que el más recomendable es la mezcla de lognormales. Cabe señalar que el presente trabajo no pretende encontrar o concluir qué método es más adecuado, ya que en ocasiones, por la escasez de información no se pueden aplicar ambas metodologías.

## Capítulo 5

# Distribución Implícita con Expectativa en Tasas de Interés y Curva Smile

### 5.1. Extracción de Probabilidad Cambios en las Tasas de Interés

Una de las variables que tiene mayor incidencia en el mercado de cambios son las tasas de interés, tanto en pesos como en dólares, principalmente influidas por las decisiones de política monetaria. Con la finalidad de proponer un modelo que incorpore las expectativas en las tasas de interés, es necesario estimar el nivel en el que se encontrarán dichas tasas en el futuro. Para poder llevar a cabo esta estimación es necesario utilizar la información contenida en la curva de tasas de interés, la cual relaciona las tasas de interés y sus

plazos correspondientes, para una moneda en una fecha específica. La curva de tasas de interés incorpora en sus cotizaciones las decisiones de política monetaria, las cuales pueden modificar su forma, tanto en los niveles de tasa como en su pendiente, dependiendo de las expectativas sobre la evolución de las tasas de interés futuras. Además, también puede ser afectada por otros determinantes como la tasa de interés real, la tasa de inflación y la prima de riesgo.

Para poder extraer los niveles de tasas implícitos en la curva de rendimientos es necesario construir una curva continua utilizando los niveles de tasas conocidos para diferentes plazos. Para el estudio nos enfocaremos en plazos menores a un año. Existen diversos modelos para estimar la curva de rendimiento a partir de una muestra de precios, los que se pueden clasificar en modelos paramétricos y modelos no paramétricos. Los modelos paramétricos permiten construir la curva de tasas de interés a partir de la estimación de un conjunto de parámetros que permiten replicar la forma funcional de la curva de rendimiento, a partir de una muestra de tasas, siendo los más usados los propuestos por *Nelson & Siegel (1987)*, *Svensson (1994)* que es una extensión del primero y los modelos Spline. Los modelos de Nelson y Siegel - Svensson proponen una función continua para describir la trayectoria de la tasa de interés forward, en función de un conjunto de parámetros y del plazo de vencimiento, a partir de los cuales se puede estimar una función para obtener la tasa de interés para cada plazo.

Los modelos polinómicos, utilizan los nodos conocidos de la curva para ajustar un polinomio de tercer grado para construir cada segmento que une dos nodos de manera suavizada (i.e. en cada nodo la primera y segunda derivada deben ser iguales). El trabajo

pionero de este enfoque es el de *Mc Culloch (1971)*, y más recientemente los trabajos de *Fisher, Nychka, y Zervos (1995)*, *Waggoner (1997)*, *Li, DeWetering, Lucas, Brenner, y Shapiro (2001)*. Desde el punto de vista del análisis monetario, la curva de rendimiento permite extraer las expectativas para las tasas de corto plazo que tienen los agentes al encontrar las tasas forward para determinados periodos con base en la curva construida previamente. Esta metodología la aplicaremos tanto para las tasas en pesos como en dólares.

### **5.1.1. Información Contendida en las Tasas de Interés en Dólares de Corto Plazo**

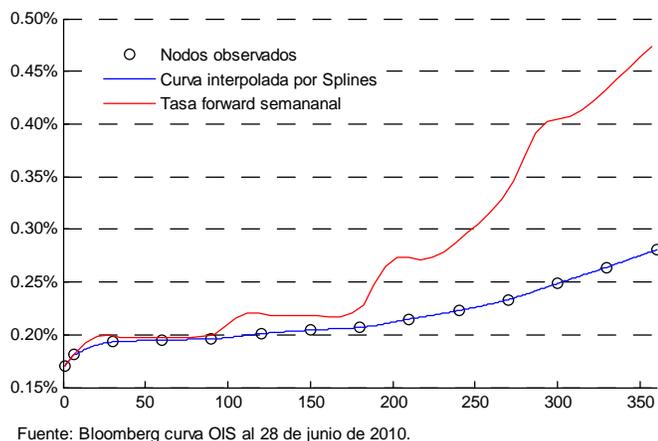
En el mercado estadounidense existen varios instrumentos que podrían utilizarse para extraer la información contenida en las tasas de rendimiento, debido a su liquidez, inclusive en los periodos de astringencia crediticia observados en 2008, se seleccionó la tasa OIS (overnight index swap) que, a diferencia de lo ocurrido con los futuros sobre la tasa de política monetaria del Banco de la Reserva Federal (Fed Funds) y Libor, no presentó grandes disrupciones en su formación de precios en la crisis pasada.

Partiendo de un nodo inicial a un día que es la tasa de Fed Funds y con datos de tasas OIS para una semana, un mes, dos meses, hasta un año se puede interpolar una curva mediante splines y posteriormente encontrar la tasa forward para periodos semanales.

### **5.1.2. Información en los Swaps Cambiarios y de Tasa de Interés**

Para el caso del peso, probablemente el primer instrumento en el que se pensaría son los CETES los cuales son bonos cupón cero; sin embargo presentan la desventaja de que su corta duración dificulta su operación, al ser adquiridos frecuentemente los inversionistas

Figura 5.1: Curva OIS Interpolada con Splines



mantiene este instrumento hasta su vencimiento. Otra tasa que se pudiera utilizar sería la Tasa de interés interbancaria de equilibrio (TIIE) la cual se cotiza diariamente para 28 y 91 días y se podría extender a mayor plazo si se utilizan los swap de TIIE los cuales cotizan múltiplos de 3 meses. Es importante mencionar que los contratos de TIIE incluyen en sus cotizaciones 40pb de cuota IPAB, los cuales deben descontarse para extraer los niveles implícitos de la tasa de fondeo. Los datos que se obtengan de los Swap de tasa de interés (IRS) nos permitirán conocer las expectativas sobre la tasa de fondeo para un periodo determinado, la cual también estaría influenciada por las expectativas de inflación.

Sin embargo existe otra tasa en pesos que incorpora perspectivas sobre el futuro del tipo de cambio reflejadas en las fluctuaciones debidas a la dirección de los flujos de capital, esta tasa es la implícita en los swaps cambiarios, la cual puede presentar fluctuaciones que la alejen de la tasa de fondeo. En el caso del mercado mexicano los swaps de divisa tienen un gran volumen y son especialmente líquidos en el corto plazo.

Figura 5.2: Curva TIIE Interpolada por Splines

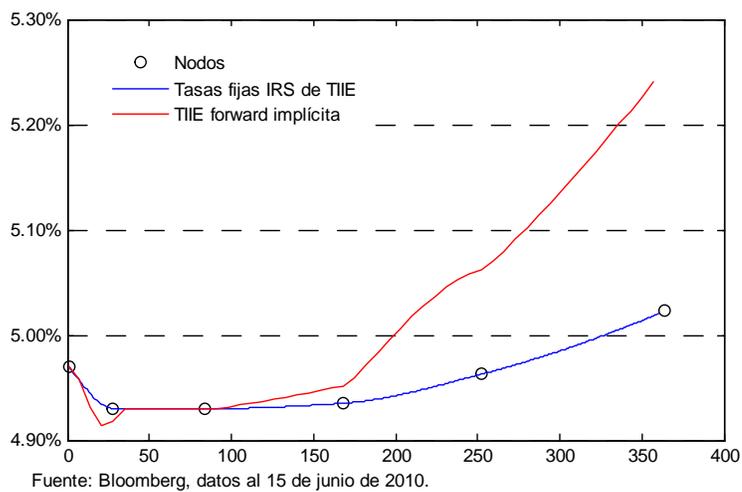


Figura 5.3: Comparación entre la Curva Forward CETES y TIIE

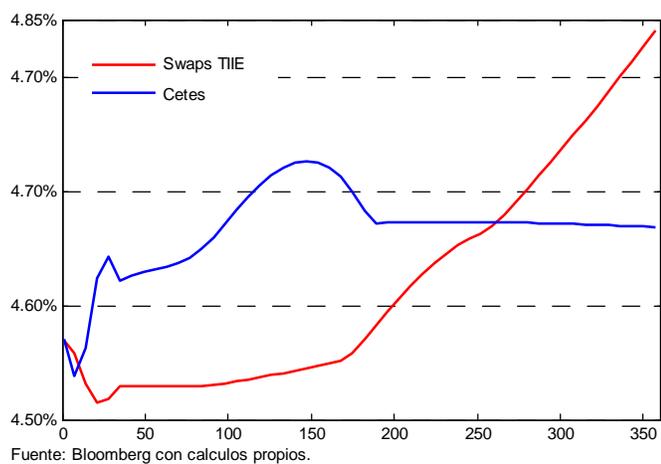
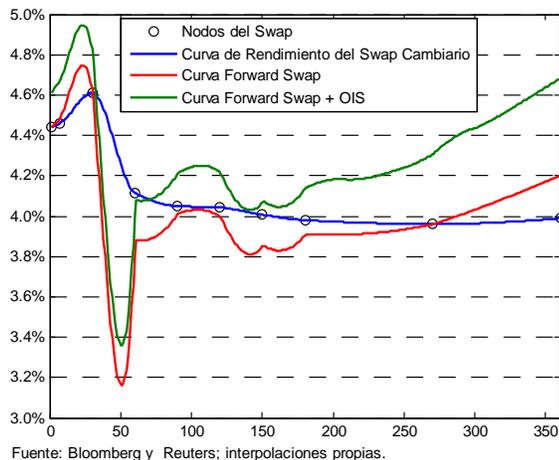


Figura 5.4: Interpolación Curva Forward del Swap Cambiario



A la diferencia entre la tasa de fondeo implícita en los swaps de TIIE y la implícita en los swaps de tipo de cambio por su naturaleza la nombraremos como el sesgo forward para el tipo de cambio. Es importante resaltar que esta diferencia no proviene de una prima por liquidez o por riesgo crédito, ya que una medida de estas primas es el diferencial entre la tasa Libor y OIS que históricamente es de 10pb; actualmente ha fluctuado entre 10-15pb y durante lo crisis llegó a ser mayor a 200pb, sin embargo esto no explica las diferencias observadas en particular porque en fechas recientes se tienen tasas inferiores a las de referencia *Genber(2009)* que sugiere que estas diferencias en los swaps pueden ser explicadas por la dirección en los flujos de capital. Anecdóticamente se sabe que la tasa de fondeo en pesos en los swaps bajo condiciones normales es de 10pb por arriba de fondeo.

## 5.2. Simulación Montecarlo

Como se sabe, la simulación Montecarlo ha sido utilizada en el ámbito financiero para realizar valuación de activos, cálculo de riesgos, pruebas de estrés, entre otras aplicaciones, por lo que se ha seleccionado como metodología para estimar la distribución implícita en el tipo de cambio.

El método Montecarlo busca estimar el valor esperado  $\mu = \mathbb{E}(X)$  de una variable aleatoria  $X$ , en nuestro caso el rendimiento del tipo de cambio, asumiendo una distribución  $f_X$ . En particular se selecciona la normal ya que no existe evidencia estadística para descartar esta distribución.

### 5.2.1. Antecedentes Matemáticos

Para una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.)  $X_1, X_2, \dots$ , y definimos la suma parcial  $\{S_n\}$  como:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

con  $S_0 = 0$ . Y definimos la media muestral de  $S_n$  como:

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

#### **Lema.: Ley fuerte de los grandes números**

Para una familia de variables aleatorias i.i.d.  $X_1, X_2, \dots$ , suponemos que  $\mu = E(X)$  existe entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mu$$

con probabilidad uno. Esta ley asegura que  $\bar{X}_n$  converge a la media poblacional  $\mu$  desconocida para muestras suficientemente grandes.

Para una familia de variables aleatorias i.i.d.  $X_1, X_2, \dots$ , suponemos que  $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ , denotemos  $\mu = \mathbb{E}(X_1)$  y  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ . entonces para  $S_n$  se tiene que:

$$\mathbb{E}[S_n] = n\mu, \text{Var}[S_n] = n\sigma^2$$

■

### Lema: Teorema central del límite

Para una familia de variables aleatorias i.i.d.  $X_1, X_2, \dots$ , con media  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2 > 0$  definimos:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

entonces las medias muestrales normalizadas convergen en distribución a una normal estándar i.e.

$$Z_n \xrightarrow{d} \mathbb{N}(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Z_n \leq x] = \mathbb{N}(x; 0, 1) \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

esta expresión significa que la función de distribución de la variable aleatoria  $Z_n$  converge puntualmente a una distribución Gaussiana con media cero y varianza uno. ■

### 5.2.2. La Idea de Montecarlo

Para cualquier variable aleatoria  $X$ , una función real  $h(\cdot)$ , la composición  $h(X)$  es una variable aleatoria. Si  $X_1, X_2, \dots$ , son variables aleatorias i.i.d., también lo serán  $h(X_1), h(X_2), \dots$ , y por la ley de los grandes números se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(X_1) + h(X_2) + \dots + h(X_n)}{n} = \mathbb{E}[h(X_1)]$$

con probabilidad uno.

Para explicar la idea de la simulación Montecarlo se debe considerar la integral definida  $I = \int_0^1 g(x)dx$ . Suponiendo que se conoce la función  $g(x)$ , pero la integral es difícil de calcular. Sean  $X_1, X_2, \dots$ , variables aleatorias i.i.d con función de densidad  $f(x)$  entre  $[0, 1]$  entonces se puede estimar la integral  $I$  para una  $n$  suficientemente grande:

$$I = \int_0^1 \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \mathbb{E}[h(X_1)], \quad h(x) = \frac{g(x)}{f(x)},$$

Esto es, para  $X_1, X_2, \dots, X_n$  generadas de  $f(x)$ , la integral  $I$  es aproximada por la media muestral para  $n$  suficientemente grande:

$$I \approx \bar{Z}_n = \frac{h(X_1) + h(X_2) + \dots + h(X_n)}{n}$$

Asimismo, se puede calcular el intervalo de confianza para  $I$  basados en el teorema del límite central considerando la siguiente probabilidad:

$$\mathbb{P}[|\bar{Z}_n - I| \leq \varepsilon] = \alpha, \quad \varepsilon > 0,$$

para un coeficiente de confianza  $\alpha$ . Por el teorema del límite central,  $\bar{Z}_n$  tiene una distribución normal con media  $I = \mathbb{E}[h(X_1)]$  y varianza  $\sigma^2/n$ , donde  $\sigma^2 = \text{Var}[h(X_1)]$ . Se sigue que:

$$\mathbb{P} \left[ \frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{Z}_n - I}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right] = \alpha$$

Además, la variable aleatoria normalizada  $\sqrt{n}(\bar{Z}_n - I)/\sigma$  puede ser aproximada por una variable normal estándar. Por consiguiente, denotando el  $100(1 - \alpha)$  el percentil de la distribución normal estándar por  $x_\alpha$  se tiene  $\sqrt{n}\varepsilon/\sigma = x_\alpha$  y se sigue que

$$\varepsilon = x_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

y por lo tanto el intervalo de confianza

$$\left[ \bar{Z}_n - x_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{Z}_n + x_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Si  $\sigma^2$  es desconocido, la normalización puede realizarse con un estimador insesgado para la varianza:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (h(X_i) - \bar{Z}_n)^2$$

El resultado anterior puede verse desde otro punto de vista si se conoce el coeficiente de confianza  $\alpha$  y el intervalo con  $\epsilon > 0$ . Entonces el problema es saber cuántas muestras deben considerarse para garantizar este nivel de confianza, i.e.

$$n = \left( \frac{\sigma x_{\alpha/2}}{\epsilon} \right)^2$$

Considere un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias i.i.d. con media finita  $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ . Una realización de  $X_i$  es una muestra  $x_i$  para algún  $\varpi \in \Omega$ . De acuerdo con la ley de los grandes números se sigue que todas las realizaciones de  $x_i = X_i$  se tiene que la media  $\mu$  puede ser estimada por casi todas las realizaciones  $x_i$  de las variables i.i.d  $X_i$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \mu$$

### 5.2.3. Modelo para el Comportamiento de Precios de Activos

El movimiento Browniano está asociado al análisis de movimientos que evolucionan en el tiempo de manera casi desordenada y difícil de prever. Este juega un rol importante en la teoría de los procesos aleatorios, en particular por proporcionar modelos relativamente simples en los diversos problemas teóricos o aplicados.

Supongamos que observamos el movimiento de una partícula browniana, la cual tiene movimiento sobre una recta, y brinca a la derecha o a la izquierda con la misma longitud  $\delta$ . Definimos  $x_i$  como variable aleatoria que toma el valor  $\delta$  o  $-\delta$  al brincar la partícula a cualquiera de los dos lados. Las probabilidades de moverse a la derecha o izquierda son estacionarias, esto es, que esas probabilidades son las mismas en todo tiempo. Entonces expresamos estas probabilidades como:

$$(P_r x_i = dP_r) = p, (P_r x_i = -dP_r) = q$$

donde  $p + q = 1$ ,  $p$  y  $q$  son independientes de  $i$ , de manera que las variables  $x_i$  también son independientes. La caminata aleatoria se presenta por una sucesión de variables aleatorias  $(X_n, n > 0)$ , que constituyen un proceso estocástico discreto donde:

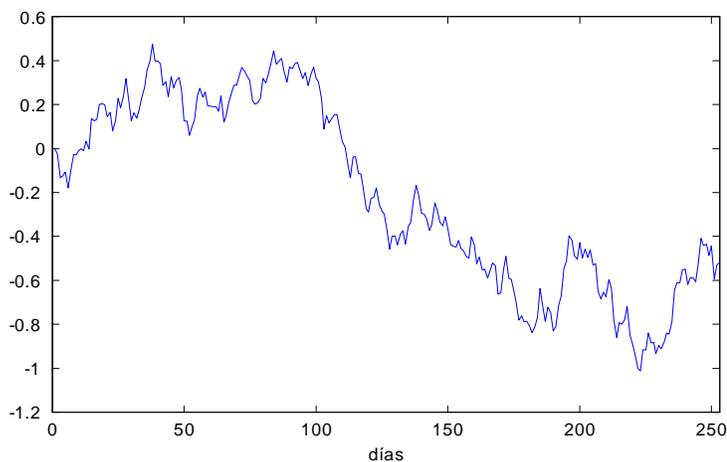
$$X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

que nos indica la posición de la partícula en el  $n$ -ésimo paso. Una definición formal se da a continuación:

El *Movimiento Browniano* es un proceso estocástico  $X(t); t \geq 0$  con las siguientes propiedades :

- I) Cada incremento  $X(t + s) - X(s)$  se distribuye normal con media  $\mu t$  y varianza  $\sigma^2 t$ ;  $\mu$  y  $\sigma$  son parámetros fijos.
- II) Para cada  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , los incrementos  $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$  son variables independientes con distribuciones dadas en (I).
- III)  $X(0) = 0$

Figura 5.5: Movimiento Browniano Estándar



El *Movimiento Browniano* también conocido como *Proceso de Wiener* puede ser expresado como:

$$\Delta Z = z\sqrt{\Delta t}$$

donde  $z \sim N(0, 1)$  y  $\Delta t$  es la magnitud de los intervalos de tiempo en los que está dividido el periodo  $T$ , obtenemos el *Proceso de Wiener* considerando el siguiente límite  $\Delta t \rightarrow 0$

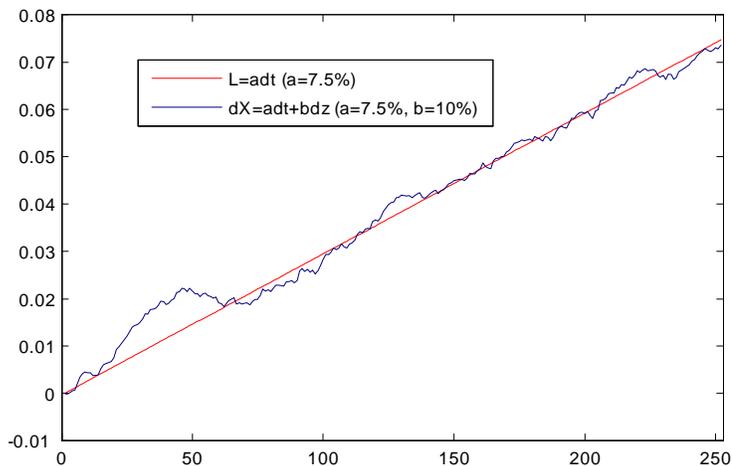
$$\partial Z = z\sqrt{\partial t}$$

Podemos considerar un *Proceso de Wiener* con media (tendencia)  $a\partial t$  y varianza  $b^2\sigma^2\partial t$ , definiendo para una variable  $X$  el *Proceso Generalizado de Wiener* en términos de  $\partial Z$  como sigue:

$$\partial X = a\partial t + b\partial Z$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes, la derivada de  $X$  respecto al tiempo es igual a  $a$  ( $\frac{\partial X}{\partial t} = a$ ), de esta manera  $X$  tiene una tasa de crecimiento esperada de  $a$  por unidad de tiempo, el

Figura 5.6: Proceso Generalizado de Wiener



segundo término ( $b$ ) representa la volatilidad en la trayectoria de  $X$ .

El *Movimiento Geométrico Browniano* se define a continuación:

Sea  $X(t)$  el movimiento Browniano con  $\mu \geq 0$  y varianza  $\sigma^2$ . El proceso estocástico definido por:

$$Y_t = e^{X_t}, 0 \leq t$$

es llamado *Movimiento Geométrico Browniano*. Observemos que los valores de  $Y(t)$  son no negativos. La esperanza de  $Y(t)$  puede ser deducida partiendo de la expresión:

$$\mu_y = e^{\frac{1}{2}\sigma_x^2 + \mu_x}$$

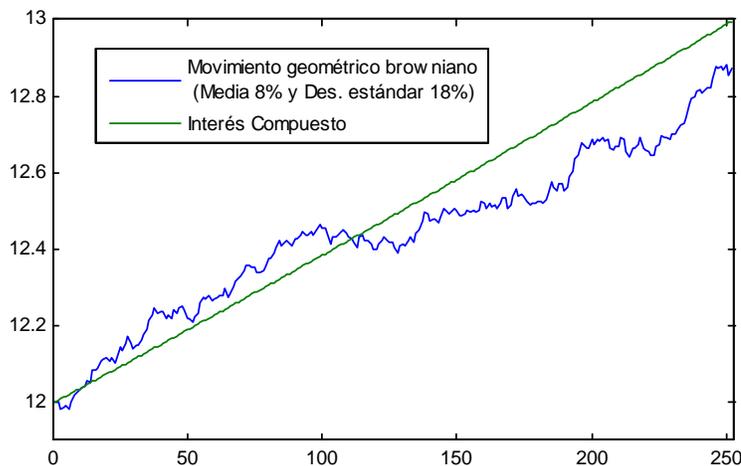
con lo cual tenemos:

$$E(Y(t)|Y(0) = y_0) = y_0 e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2})}$$

y varianza:

$$\text{var}(Y(t)|Y(0) = y_0) = y_0^2 e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2})} [e^{(\sigma^2 t)} - 1]$$

Figura 5.7: Movimiento Geométrico Browniano



Sabemos que  $Y(t)$  es una *distribución lognormal* con media y varianza mostradas anteriormente.

Y su función de densidad es:

$$g(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}, \quad y > 0.$$

y para cada  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  las relaciones de transformaciones sucesivas

$$Y(t_2)/Y(t_1), \dots, Y(t_n)/Y(t_{n-1})$$

son variables aleatorias e independientes

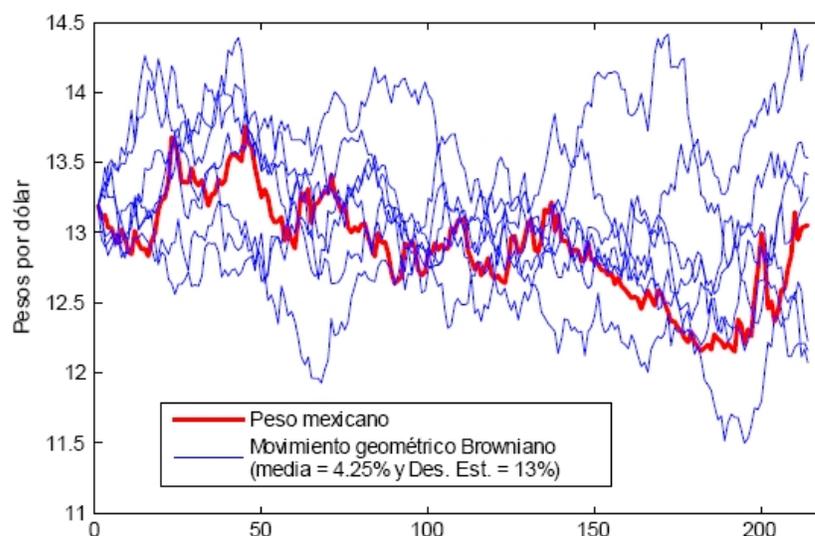
En un esquema de tipo de cambio flotante como el que tiene el peso mexicano, es deseable que el tipo de cambio presente un comportamiento semejante al de un movimiento geométrico browniano con las siguientes características:

$$S_t = S_{t-1} e^{X_t}$$

$$X_t = \mu dt + \sigma dz,$$

donde:  $X_t$  son los rendimientos logarítmicos del peso - dólar,  $S_t$  es el tipo de cambio en el tiempo  $t$ ,  $\mu = r_d - r_f$  con la tasa doméstica libre de riesgo  $r_d$  y la tasa foránea libre de riesgo

Figura 5.8: Simulación MGB para el Peso Mexicano



$r_f$ , la desviación estándar de los rendimientos  $\sigma$ ,  $\partial t \rightarrow 0$  y  $\partial z \sim \mathbb{N}(0, \partial t)$ . Las ecuaciones establecen al rendimiento en el tipo de cambio como función de dos variables; la primera es la tendencia derivada del diferencial de tasas y la segunda es el ruido proveniente de noticias u otros eventos que afectan a los activos financieros. Dado el proceso estocástico nos es posible generar un número  $n$  suficientemente grande para estimar los posibles valores que puede alcanzar el tipo de cambio en un periodo  $t$ . Se realizó la prueba de *Wald Wolfowitz* para determinar si los rendimientos logáritmicos del peso son independientes tras la cual no hay evidencia estadística para rechazar el supuesto de variables independientes al 95% de confianza.

Adicionalmente, se puede modificar el modelo anterior si dejamos de suponer que  $r_d$  y  $r_f$  son constantes y en su lugar se incorporan sus trayectorias implícitas en las curvas

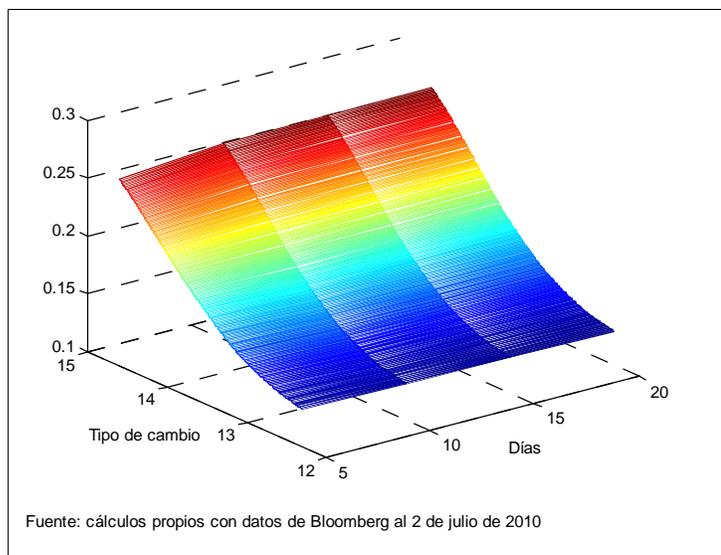
de rendimiento de cada moneda.

$$X_t = (r_d(t) - r_f(t))\partial t + \sigma\partial z$$

Finalmente, se complementará el modelo realizando una modificación popular al suponer que la volatilidad, al igual que la tasas, son una función determinística que depende del tiempo y en el caso de la volatilidad también del nivel del subyacente  $\sigma(t, S_{t-1})$ , esto permite incorporar la información contenida en la superficie de volatilidad. Así se puede expresar el modelo de la siguiente forma:

$$X_t = (r_d(t) - r_f(t))\partial t + \sigma(t, S_{t-1})\partial z$$

Figura 5.9: Superficie de Volatilidad para el Peso Mexicano



Sin embargo se deberá hacer el mismo tratamiento realizado con las tasas con la volatilidad con la finalidad de encontrar los niveles de volatilidad forward para un plazo determinado. Una desventaja que puede presentar este modelo es el cambio en el nivel de la

Figura 5.10: Superficie de Volatilidad Implícita por Día para el Peso

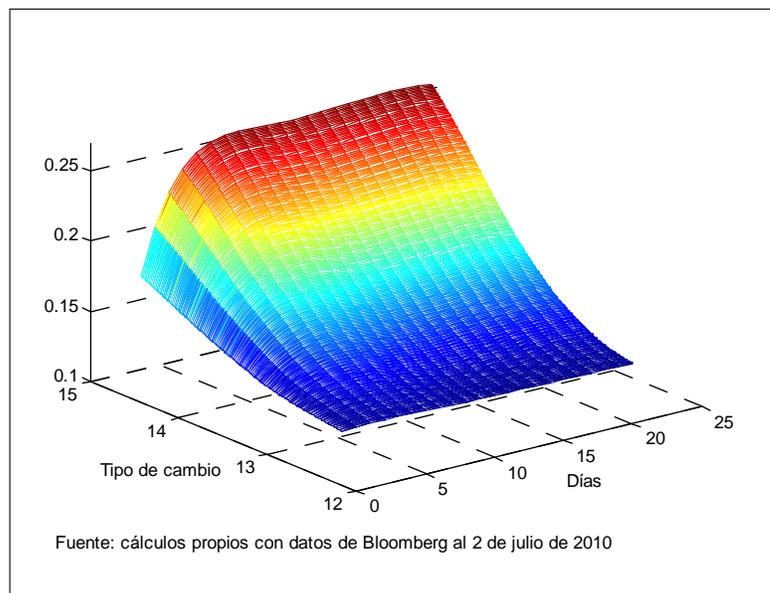
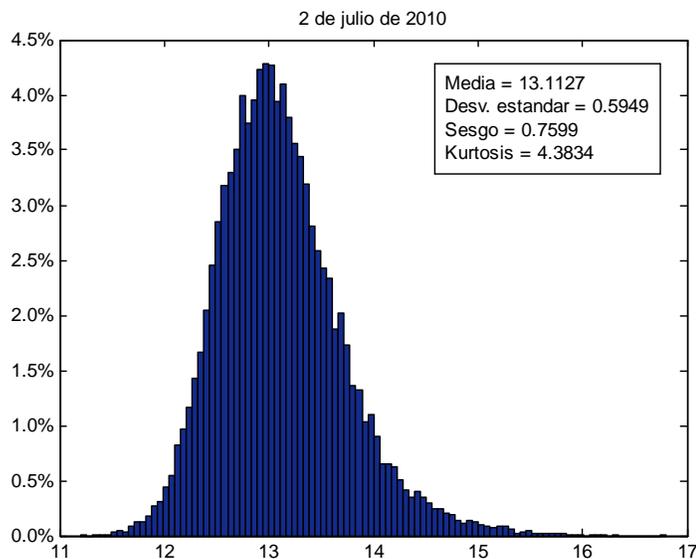


Figura 5.11:

Figura 5.12: Histograma Implícito del Peso Mexicano a un Mes



volatilidad, que estaría asociado a cambios en los precios, lo que generaría una correlación entre estas variables. Estudios empíricos sugieren que los niveles del tipo de cambio tienden a incrementarse cuando la volatilidad aumenta y viceversa sin que exista una correlación perfecta. Para correr las simulaciones se generarán por lo menos 25,000 simulaciones lo que nos da un error menor a 1 %.

Las simulaciones realizadas permiten el calcular intervalos para cada día en los que se espera se encuentre el tipo de cambio dada la estructura de tasas de interés y de la volatilidad implícita en las opciones a diferentes plazos.

Figura 5.13: Histogramas Implícitos del Peso Durante la Crisis

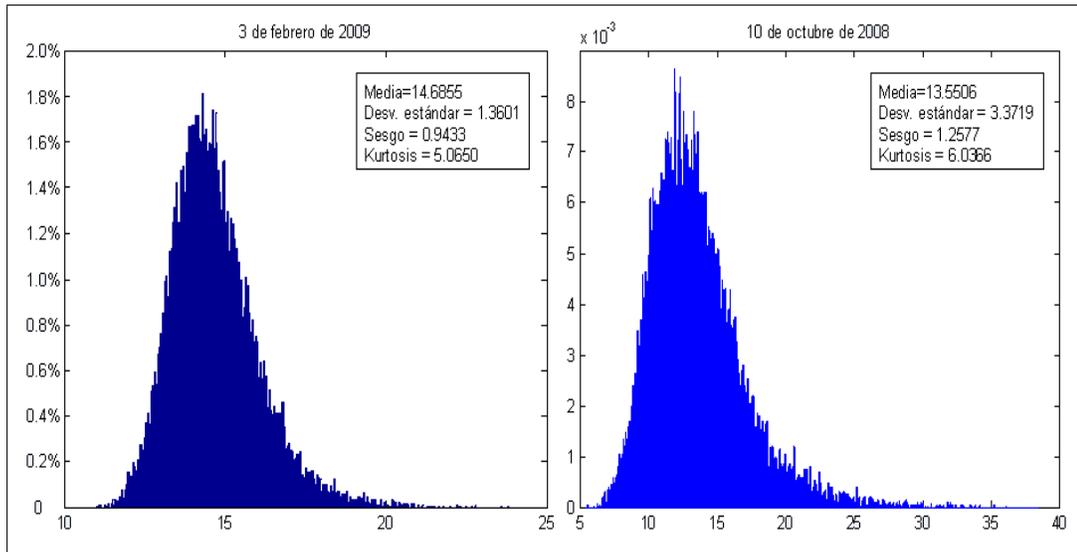
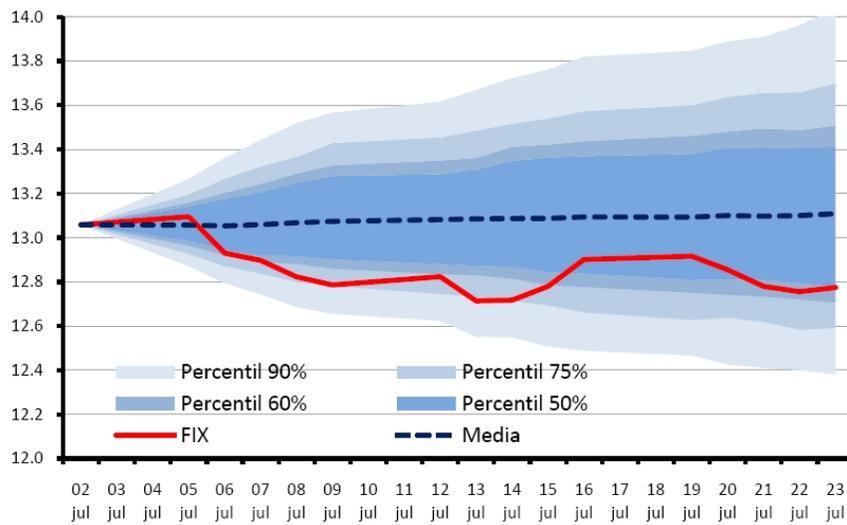


Figura 5.14: Intervalos para el Peso Mexicano (2 de julio de 2010)



### 5.3. Comparación de las Diferentes Metodologías

Con la finalidad de corroborar la precisión de las estimaciones realizadas por el método no paramétrico y la densidad estimada mediante la simulación Montecarlo, se realizó un backtesting y utilizando la prueba Kupiec se determinó si los modelos mencionados son adecuados para el comportamiento del peso mexicano. Adicionalmente, con los datos obtenidos de la simulación Montecarlo se ajustó por máxima verosimilitud una distribución lognormal y mediante el método de momentos una distribución Beta Generalizada del tipo II. La motivación detrás de los ajustes de estas distribuciones es el hecho de poder determinar si una distribución de probabilidades ampliamente estudiada, de la cual se conocen la mayoría de sus propiedades puede explicar el comportamiento del tipo de cambio. La elección por la lognormal se debe a los supuestos de *Black & Scholes* y aunque, como se muestra en la *tabla Kupiec*, no se puede rechazar que el comportamiento provenga de una normal, al comparar los primeros cuatro momentos de las distribuciones obtenidas por el método de interpolación de la curva smile y de la simulación Montecarlo, nos sugieren que la distribución debe tener un mayor sesgo y kurtosis que el observado en la lognormal. Por esta razón se buscó una función con cuatro parámetros donde la distribución lognormal fuera un caso particular, y por sus aplicaciones para explicar el comportamiento de varios activos financieros se seleccionó la distribución Beta Generalizada del tipo II; ésta demostró su poder de ajuste en activos como índices accionarios y tasas de interés en el documento publicado por *Albota, Karam y Tunaru (2005)*.

La distribución Beta Generalizada del tipo II (GB2) desarrollada por *Bookstaber y McDonald (1987)* se caracteriza por depender de cuatro parámetros, lo que facilita el

<b>Tabla Kupiec</b>	
	Region de No rechazo
Modelo	50 - 75
No Paramétrico	64
S. Montecarlo	65
Lognormal	67
Beta Generalizada II	64

Cuadro 5.1: Tabla Kupiec

incorporar la información del sesgo y la kurtosis dentro de esta distribución, además de que, a diferencia de la lognormal, ésta puede tener sesgos negativos, lo cual suele ocurrir con frecuencia en algunas monedas como el Euro e índices accionarios como el S&P 500 mientras que para el peso ocurre con poca frecuencia:

$$GB2(x; a, b, p, q) = \frac{|a|x^{ap-1}}{b^{ap}B(p, q)[1 + (x/b)^a]^{p+q}}, \text{ para } x > 0 \quad (5.1)$$

$$\text{donde } B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (5.2)$$

Esta familia de distribuciones contiene funciones de densidad bien conocidas como la lognormal, log-t, log-Cauchy, etc; los momentos de la beta generalizada pueden obtenerse del siguiente resultado:

$$\mathbb{E}_{GB2}(X^m) = \frac{b^m B(p + \frac{m}{a}, q - \frac{m}{a})}{B(p, q)}$$

Así, el forward que no permitiría oportunidades de arbitraje es:

$$F = \mathbb{E}_{GB2}(X) = \frac{bB(p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a})}{B(p, q)}$$

De acuerdo con *Rebonato (2004)* los precios para el call y put europeos se pueden expresar

como:

$$\begin{aligned} Call_{GB2}(K, T) &= FI_z \left( q - \frac{1}{a}, p + \frac{1}{a} \right) - KI_z(q, p) \\ Put_{GB2}(K, T) &= KI_{1-z}(q, p) - FI_{1-z} \left( q - \frac{1}{a}, p + \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\lambda p)^a}{1 + \left( \frac{\lambda p}{K} \right)^a} \\ \lambda &= \frac{B(p, q)}{B \left( p + \frac{1}{a}, q - \frac{1}{a} \right)} \end{aligned}$$

y

$$I_z(p, q) = \frac{B_z(p, q)}{B(p, q)}$$

donde  $B_z$  es aproximado por:

$$B_z(p, q) = \frac{z^p}{p} F_1^2(p, 1 - q, 1 + 1 + p; z)$$

donde  $F_1^2(a, b, x; z)$  es la función hipergeométrica.

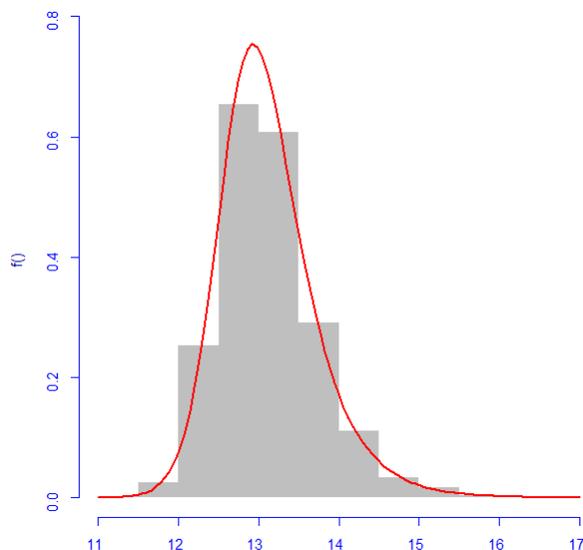
Las griegas pueden ser calculadas en una forma similar a la que como se efectúa con los parámetros de Black-Scholes.

La estimación de los parámetros se realizó utilizando el método conocido como GAMLSS<sup>1</sup> (Generalized Additive Models for Location Scale and Shape) en el caso de la distribución GB2, el cual presentó mayor estabilidad al realizar las estimaciones en

---

<sup>1</sup>El método GAMLSS por sus siglas en inglés Generalized Additive Models for Location Scale and Shape es un modelo estadístico basado en modelos de regresión múltiple semiparamétrica desarrollado por Rigby y Stasinopoulos que permite la estimación de los parámetros de una distribución sin las limitaciones de los modelos tradicionales. Asume observaciones independientes  $y_i$  de una distribución  $f(y_i, \mu_i, \sigma_i, \nu_i, \tau_i)$  donde cada uno de cuatro parámetros puede obtenerse en función de la variable explicativa. Los dos primeros parámetros por lo general caracterizan la localización y la escala mientras que los parámetros restantes determinarán la forma de la distribución como lo hace el sesgo y la kurtosis.

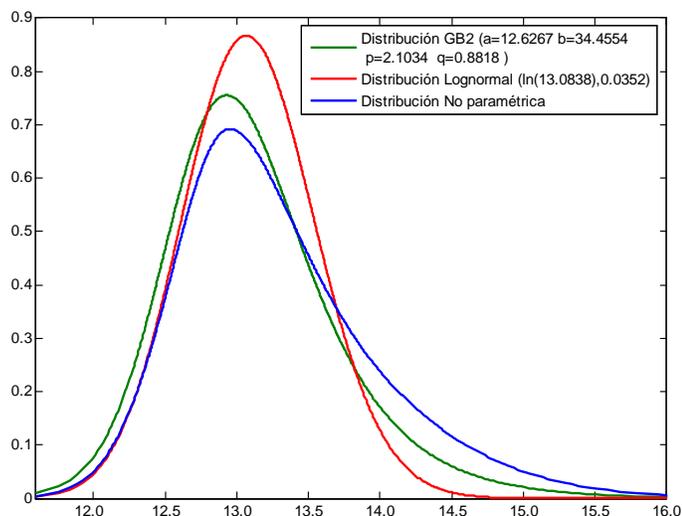
Figura 5.15: Histograma y GB2 del MXN (2 jul)



contraste con el de máxima verosimilitud simple el cual fue utilizado satisfactoriamente para calcular los parámetros de las distribuciones lognormales. A continuación se muestran las distribuciones estimadas con los datos de la simulación junto con la distribución obtenida mediante el método no paramétrico.

La distribución GB2 presenta ventajas en comparación con el método no paramétrico debido a que el cálculo de sus momentos es más sencillo en términos computacionales y presentan una mayor estabilidad a lo largo del tiempo. Además, sus parámetros estimados capturan la información de la media, desviación estándar, sesgo y kurtosis, por lo que, como se muestra más adelante presentan un comportamiento asociado a estas estadísticas. El parámetro  $a$  se relaciona directamente con la media, el  $b$  tiene una relación inversa con la desviación estándar, mientras que el  $p$  está asociado al sesgo y  $q$  a la kurtosis. Se efectuó la prueba de Kolmogorov para verificar la bondad de ajuste, no siendo posible rechazar

Figura 5.16: Comparación entre GB2 , Lognormal y no Paramétrica



que los datos de Montecarlo provengan de la distribución GB2.

En el gráfico anterior se observa que el sesgo obtenido por el método no paramétrico, la simulación y la distribución GB2 llega a ser ligeramente negativo en los meses de mayo y julio de 2008 cuando se alcanzaron niveles por debajo de 10 pesos por dólar. Asimismo, los niveles más altos se observan en octubre de 2008 cuando la formación en los precios era completamente errática. El comportamiento de la kurtosis también es similar al obtenido por el método no paramétrico.

A continuación se muestran las gráficas de cuantiles de las distribuciones ajustadas en las que la GB2 es semejante en comparación con los datos de la simulación.

Finalmente, es importante mencionar que la distribución estimada GB2 presenta una ventaja sobre la obtenida por el método no paramétrico ya que el intervalo de confianza del 90% es más estrecho en comparación con el obtenido de la distribución no paramétrica y ambas presentaron igual precisión en la muestra analizada entre el 2008 y 2010.

Figura 5.17: Parámetros Estimados GB2 para el Peso

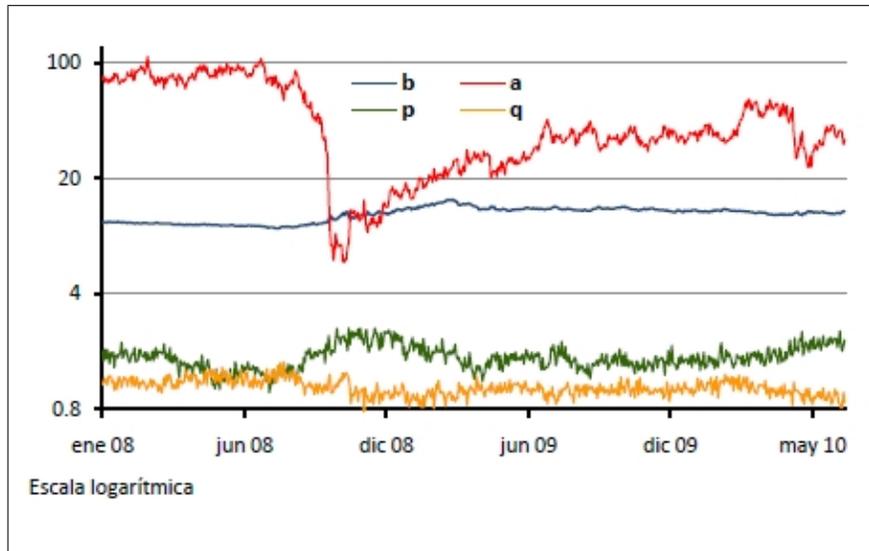


Figura 5.18: Momentos de la Distribución GB2 del Peso

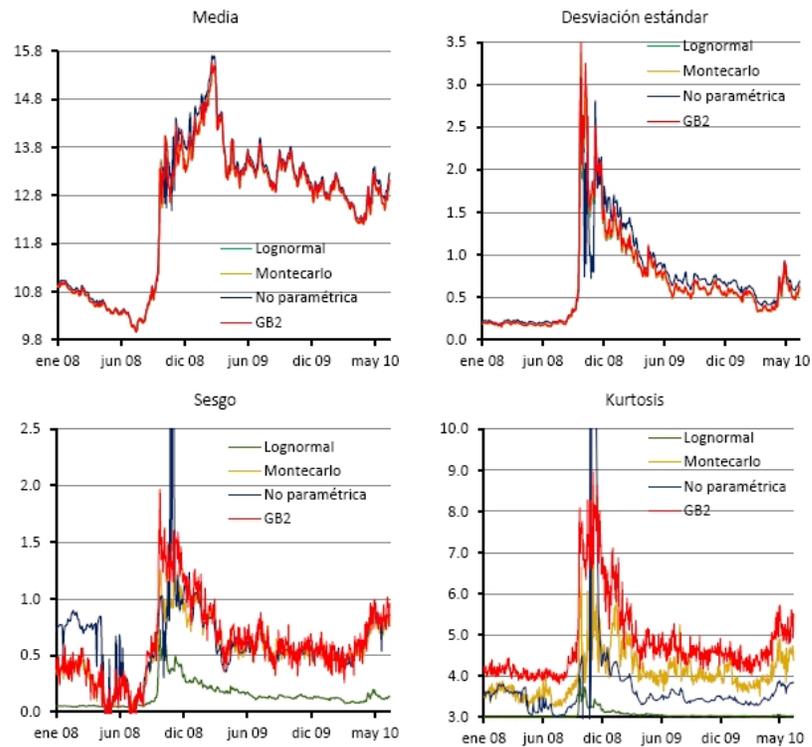


Figura 5.19: Gráfica Q-Q GB2 del Peso (2 jul)

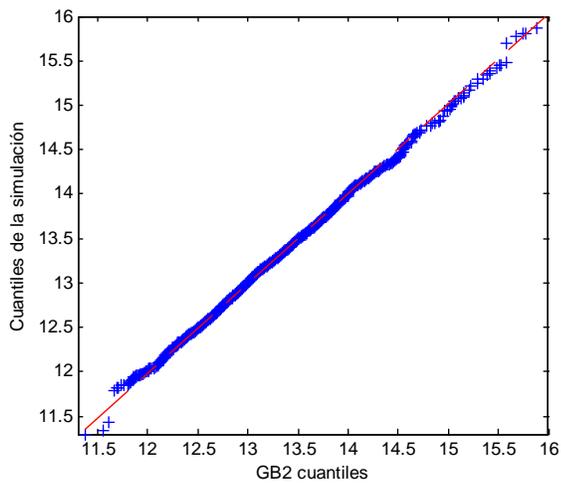


Figura 5.20: Gráfica Q-Q Lognormal del Peso (2 jul)

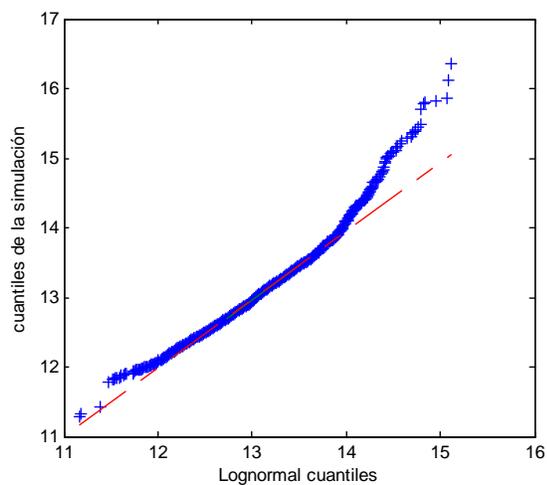
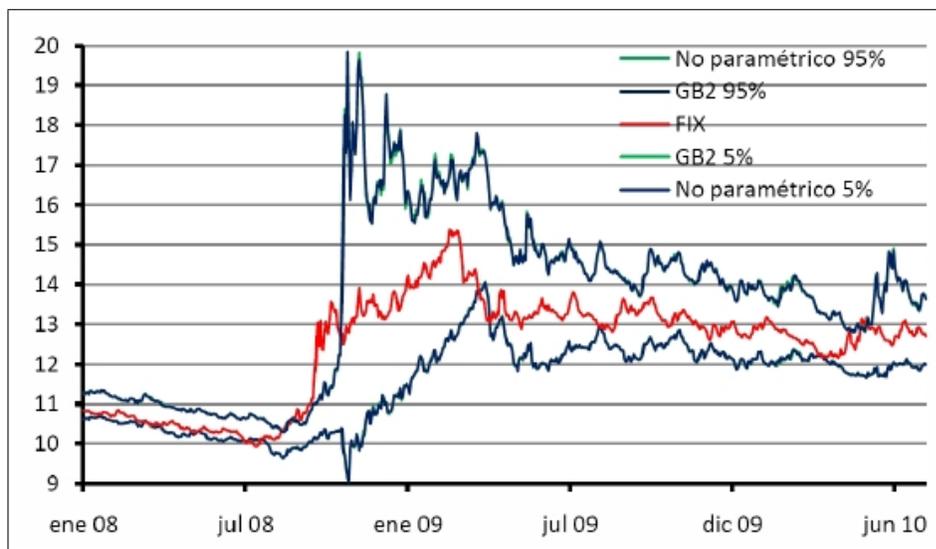


Figura 5.21: Intervalos de Confianza al 95 % para el Peso



Respecto a los parámetros estimados, se buscó identificar la sensibilidad a errores de cómputo y a los datos por lo que se realizaron regresiones sobre el mismo parámetro con un solo rezago en las que se obtuvieron coeficientes de significancia elevados para los parámetros  $a$  y  $b$ , aunque para  $p$  y  $q$  la significancia cercana a 40 %. Sin embargo, se realizó esta misma prueba para la media, desviación estándar, sesgo y kurtosis obtenidos de las distribuciones GB2 y las obtenidas del método no paramétrico para los que para la media y la varianza presenta un alto grado de significancia, por lo que se puede entender que no presentan fuertes fluctuaciones de un día al otro por cambios en los datos. Por otra parte el sesgo y la kurtosis obtenidos del método no paramétrico presentan una significancia menor a 50 % en contraste con 86 % de los obtenidos de la distribución, lo anterior se puede interpretar como mayor sensibilidad al cambio en los precios de las opciones por parte de la distribución no paramétrica en relación a la GB2. Los resultados son congruentes con la mayor dispersión observada en las estadísticas obtenidas de las distribuciones no

paramétricas, por lo que el ajuste realizado con la distribución GB2 nos permite obtener estadísticas menos volátiles.

## Capítulo 6

# Análisis y Aplicaciones

En esta sección se utilizan los datos obtenidos de las distribuciones para definir un índice de riesgo para activos denominados en pesos que incorporan los agentes en las cotizaciones de las opciones. Los datos se refieren al periodo comprendido entre enero de 2008 y julio de 2010. Para las siguientes aplicaciones se utilizó la siguiente metodología para obtener distribuciones para el peso mexicano con el horizonte de un mes:

1. Calcular las curvas de rendimiento forward tanto en pesos como en dólares a un mes existentes al día de la estimación.
2. Calcular la superficie de volatilidades utilizando los smiles (smirks) para opciones de una dos tres y cuatro semanas que se encontraban vigentes al día de la estimación.
3. Una vez que contamos con niveles de tasas de interés tanto en pesos como en dólares para cada día así como un nivel de volatilidad para cada día, se procede a realizar la

simulación Montecarlo sobre la ecuación:

$$X_t = (r_d(t) - r_f(t))\partial t + \sigma(t, S_{t-1})\partial z$$

donde  $r_d(t)$  y  $r_f(t)$  corresponden a las tasas calculadas en el inciso anterior tanto en pesos como en dólares en el tiempo  $t$  y  $\sigma(t, S_{t-1})$  es la volatilidad correspondiente al último nivel del subyacente y al tiempo  $t$  que se calculo en la superficies de volatilidades. Esto último permite que el modelo incorpore mayor volatilidad conforme el precio del subyacente se aleja de su punto inicial lo que es consistente con periodos en los que la formación de precios es errática como ocurrió en octubre de 2008.

4. Finalmente con los datos de la simulación se estiman los cuatro parámetros que definen a esta distribución utilizando el método conocido como GAMLSS. Una vez que tenemos los parámetros de la distribución se puede trabajar con ella y calcular sus diferentes momentos fácilmente.

## 6.1. Prima de Riesgo Cambiario Estimada en las Distribuciones Implícitas del Peso Mexicano

*Diaz de León-Casanova (2004)* menciona que uno de los temas que mayor atención ha recibido en la literatura económica y financiera ha sido el análisis de los tipos de cambios y la posible presencia de una prima de riesgo. Al respecto, es común asumir que existe perfecta movilidad de capitales, lo cual implica que los portafolios con instrumentos de deuda denominados en moneda doméstica y externa son ajustados de manera instantánea. Si adicionalmente se supone que no existe riesgo de crédito, ni posibilidad de que se impongan

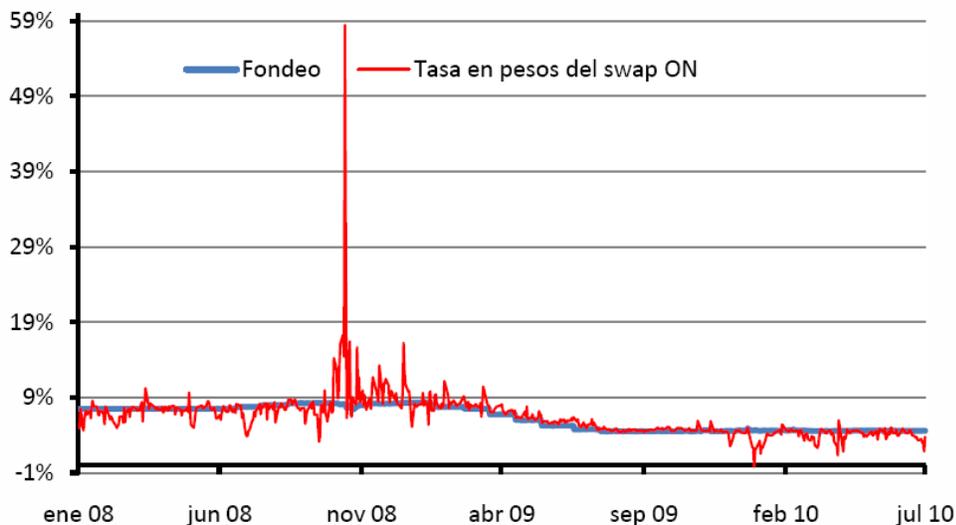
controles de capital, se tiene lo que se conoce como paridad cubierta de tasas de interés. En este caso, la tasa de interés en moneda doméstica es igual a la tasa externa más una prima forward sobre el tipo de cambio (que incluye la expectativa de depreciación y una posible prima de riesgo cambiario). A su vez, si se asume que existe perfecta sustitución entre los instrumentos de deuda domésticos y externos, se tiene el caso de la paridad descubierta de tasas de interés. En este caso, la tasa de interés doméstica es igual a la tasa de interés externa más la expectativa de depreciación. Bajo la paridad descubierta de tasas de interés y bajo riesgo neutral, el tipo de cambio justo para determinado periodo será determinado por el diferencial de tasas:

$$F_0 = S_0 \exp^{(r_d - r_f)T}$$

Sin embargo, y contrario a lo que la teoría sugiere, sobre que las tasas domésticas son las tasas libres de riesgo en el mercado, la tasa en pesos presenta fluctuaciones como consecuencia de las perspectivas que tienen los agentes respecto al comportamiento del peso hacia el futuro por lo que la tasa  $r_d$  puede variar en relación a estos flujos. Esta fluctuación constituye un indicador del posicionamiento de los agentes extranjeros en el peso similar a la posición especulativa de Chicago, ya que cuando existe suficiente interés por pesos, la tasa en esta moneda implícita en los forwards o swaps tiende a disminuir y viceversa. Cabe señalar que en ocasiones un desalineamiento de esta tasa se debe únicamente a la renovación de posiciones tras un vencimiento importante.

Bajo los supuestos de riesgo neutral el tipo de cambio forward debería ser la media de la distribución futura del peso; sin embargo la estructura de *smirk* en el caso del peso incorpora una prima de riesgo por tener posiciones en esta moneda, por lo que la media

Figura 6.1: Tasa de Fondeo y Tasa Swap en Pesos



obtenida en las distribuciones de la sección anterior no corresponden a la media bajo los supuestos de riesgo neutral. Por lo anterior, se puede expresar la media de la siguiente forma al incorporar una prima de riesgo que afecte al forward para igualarlo con la media de la distribución:

$$\mathbb{E}(TC) = F_0 e^{\phi} \quad (6.1)$$

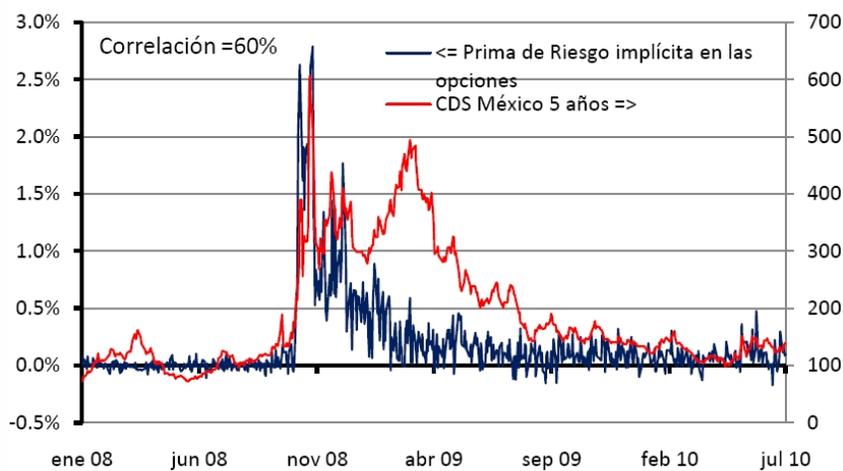
por lo que una vez conocida la media se puede calcular la prima de riesgo que incorporan los agentes a activos mexicanos al calcular:

$$\phi = \ln \left( \frac{\mathbb{E}(TC)}{F_0} \right) \quad (6.2)$$

La prima de riesgo fue calculada utilizando las distribuciones estimadas a un mes y los forwards con plazo de un mes; este indicador de riesgo presenta correlación con otros indicadores de riesgo como los CDS de 5 años para México.

Así, la prima de riesgo calculada puede interpretarse como el rendimiento adicional

Figura 6.2: Prima de Riesgo en Opciones y CDS



Fuente: datos CDS de Bloomberg, calculos propios.

que requiere un inversionista para mantener su exposición en pesos con una distribución de probabilidad con mayor sesgo a la depreciación. Cabe señalar que la prima de riesgo propuesta sólo considera el rendimiento adicional que un inversionista neutral al riesgo demandaría por mantener activos denominados en una moneda sin considerar riesgos crediticios directamente. Además, se hace referencia a un inversionista neutral al riesgo debido a que sólo necesita ser compensado por la diferencia entre las medias de las distribuciones de probabilidad, y no por momentos superiores de la distribución de probabilidad (desviación, sesgo y kurtosis). Es importante señalar que en gran medida el comportamiento de la prima está asociado al sesgo y a la desviación estándar de la distribución.

## 6.2. Distribución de los Rendimientos del Tipo de Cambio y su Aplicación al Valor en Riesgo.

Una vez que se conoce la distribución del tipo de cambio, es deseable comparar las distribuciones en diferentes periodos, sin embargo debido a los niveles en los que se encuentre cotizando el tipo de cambio en cada momento se dificulta la comparación. Para solucionar esto se podrían comparar las distribuciones de los rendimientos esperados del tipo de cambio para un periodo determinado. Para obtener la distribución de los rendimientos partiendo del supuesto que el peso tiene una distribución GB2 se realiza la siguiente transformación:

$$S \sim GB2(x; a, b, p, q) = \frac{|a|S^{ap-1}}{b^{ap}B(p, q)[1 + (S/b)^a]^{p+q}}, \text{ con } S > 0$$

y sea

$$U = \ln(S/S_0) = \ln(S) - \ln(S_0) \implies S = \exp[U + \ln(S_0)]$$

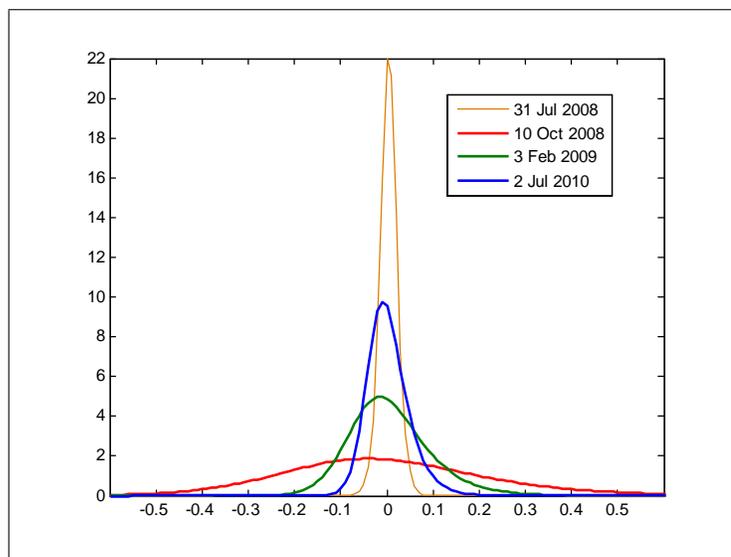
sustituyendo  $S$  en la distribución y si se multiplica por  $\frac{\partial S}{\partial U}$ , obtenemos la distribución para los rendimientos:

$$U \sim \frac{|a| \exp[U + \ln(S_0)]^{ap}}{b^{ap}B(p, q) \left[ 1 + \left( \frac{\exp[U + \ln(S_0)]}{b} \right)^a \right]^{p+q}} = LGB2, \text{ con } -\infty < U < \infty$$

Esta distribución permitirá comparar las distribuciones como se muestra a continuación para cuatro momentos:

Una vez conocida la distribución de los rendimientos es posible adaptar la metodología del valor en riesgo (VaR) para utilizar esta distribución. Debido a la Kurtosis y el sesgo incorporados en la distribución, los valores que se obtienen del VaR para las divisas son superiores a los obtenidos bajo el supuesto de normalidad y el riesgo es asimétrico para

Figura 6.3: Distribuciones de los Rendimientos del Peso Mexicano



una depreciación que para una apreciación, obteniéndose pérdidas esperadas más grandes en el caso de una depreciación. Esta última particularidad no se presenta en distribuciones simétricas como la normal o la *t* de Student. A continuación se presentan algunos ejemplos en los que se contrasta la metodología clásica normal con los resultados obtenidos utilizando la distribución calculada *LGB2* para el VaR mes para una posición larga dólares y otra corta dólares.

$$VaR_{95\%} = LGB2^{-1}(95\%)$$

$$VaR_{5\%} = LGB2^{-1}(5\%)$$

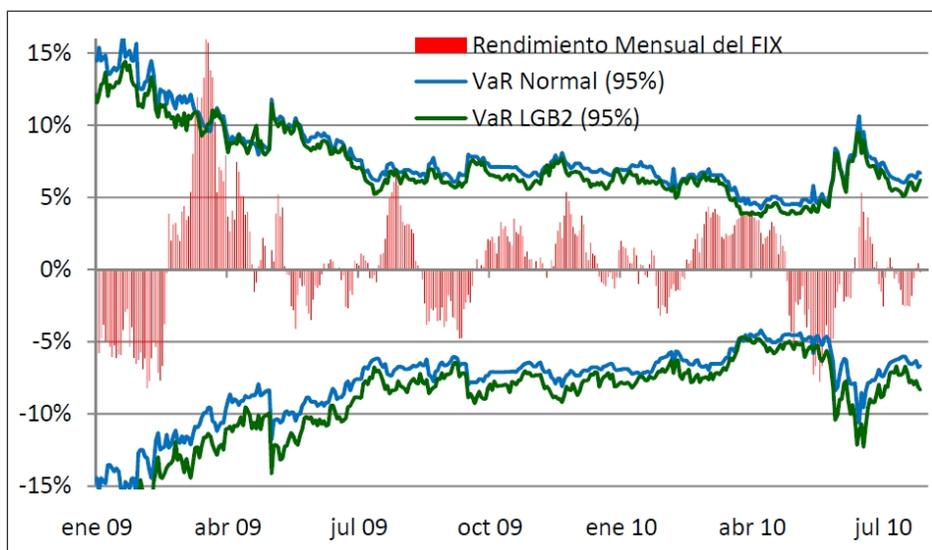
Después de haber observado un ajuste importante en el tipo de cambio en los últimos meses de 2008, donde hubo considerables excesos del VaR en el periodo de la muestra comprendido entre enero de 2009 a julio de 2010 (muestra de 395 días), el VaR normal presentó 17 observaciones que lo excedieron mientras que en los intervalos calculados

Tabla de Valores en Riesgo al 95 % de confianza						
Fecha	Largo dólares			Corto dólares		
	Máx. pérdida mensual 15.7% (mar-abr 09)			Máx. pérdida mensual 23.4% (sep-oct 08)		
	VaR Normal	VaR LGB2'	Gan /Pérdida	VaR Normal	VaR LGB2'	Gan/Pérdida
31 jul 08	-3.2 %	-2.8 %	2.45 %	-3.2 %	-3.5 %	-2.45 %
10 oct 08	-32.7 %	-35.9 %	-2.33 %	-32.7 %	-41.4 %	2.33 %
3 feb 09	-14.8 %	-12.5 %	3.58 %	-14.8 %	-17.2 %	-3.58 %
2 jul 10	-7.4 %	-6.4 %	-2.95 %	-7.4 %	-8.7 %	2.95 %

Cuadro 6.1: Valor en Riesgo

con la *LGB2* sólo 13 observaciones estuvieron fuera del intervalo.

Figura 6.4: Comparación del VaR Periodicidad Mensual



Respecto al VaR para derivados con subyacente el tipo de cambio como forwards y futuros puede ser adaptado para el uso de esta distribución; sin embargo para el caso de las opciones se deberían considerar las fórmulas de valuación propuestas por *Rebonato (2004)* para, en base a éstas, calcular la Delta y Gamma para la determinación de su valor en riesgo.

## Capítulo 7

# Conclusión

En el estudio realizado se probó la racionalidad de los supuestos ocupados por el modelo de *Black-Scholes* entre los que se debe mencionar la importancia de normalidad para un periodo corto de tiempo, pues la distribución de los rendimientos no es constante en el tiempo debido a las fluctuaciones que presenta la desviación estándar en ocasiones muy significativas. La importancia de un adecuado pronóstico de la volatilidad, motivó un análisis del poder predictivo de la volatilidad implícita a la que cotizan las opciones, siendo significativo entre una semana y tres meses; posteriormente su eficiencia disminuye.

Utilizando las volatilidades implícitas a una semana se realizó la prueba de causalidad de Granger mediante la cual se probó la causalidad entre incrementos en la volatilidad y fluctuaciones en los precios del subyacente de gran magnitud, pudiendo construirse un modelo de alerta temprana de grandes fluctuaciones cuando la volatilidad cotiza por arriba de su promedio móvil por más de 1.64 veces su desviación estándar de 250 días y su velocidad de incremento conocida como *vol of vol* es superior a su percentil del 75%. Esta señal

indicaría un posible evento de gran magnitud en los próximos 5 días hábiles.

Una vez que se conoce la eficiencia de la volatilidad para anticipar movimientos futuros del subyacente se instrumentaron metodologías en las que se utiliza directa o indirectamente la volatilidad. En el método paramétrico se busca estimar una distribución basada en la suma de lognormales utilizando las primas encontradas en los mercados organizados. Lamentablemente, como se expuso en las secciones, la liquidez en los mercados organizados de derivados tanto en México como en los Estados Unidos no es la óptima por lo que la distribución obtenida no cambia sustancialmente del modelo teórico y presenta ciertas desventajas como es el hecho de pocas fechas de vencimiento y de valuaciones para un rango acotado de precios.

En contraparte, en los mercados OTC la liquidez para los cortos plazos es buena, entre una y dos vols, aún después de la crisis. Tras la crisis desaparecieron participantes importantes y a raíz de los problemas que presentaron los corporativos en octubre de 2008 han permanecido parcialmente fuera del mercado de volatilidades. Del mercado OTC se pueden obtener las cotizaciones para diferentes precios de ejercicio y fechas, lo que permite construir mediante interpolación la curva smile e inclusive una superficie de volatilidades al incluir su estructura temporal. Utilizando la curva smile se pueden obtener una función que asocie a un determinado tipo de cambio una volatilidad y utilizando el resultado de *Breeden y Litzenberger*, obtener la distribución asumiendo que para precios mayores y menores a los implícitos en la curva smile la volatilidad es igual a la que tiene asociada el precio más cercano. Dada la estructura de la curva smile que en general sesga las cotizaciones del peso hacia la depreciación al asignar mayor volatilidad a niveles más altos de tipo de cambio las

distribuciones que se obtienen presentan un mayor sesgo y kurtosis que la lognormal. Aunque este método demostró ser bastante asertivo en sus estimaciones al realizar el backtesting el cálculo de sus momentos requiere de integración numérica por lo que se deben seleccionar adecuadamente los intervalos para la integración.

En las últimas secciones del trabajo se propone ajustar la distribución beta generalizada II para el peso mexicano a partir de una muestra obtenida mediante simulaciones Montecarlo. La simulación incorpora la información de implícita de la dinámica diaria de los rendimientos en la superficie de volatilidad y de las expectativas sobre las tasas de interés de corto plazo incorporadas en las cotizaciones de las curvas local y foránea de tasas de interés, así como en la curva de tasas implícitas en pesos de los swaps cambiarios. La simulación se genera bajo los supuestos de normalidad aunque a diferencia del modelo tradicional, la información de las tasas y de la volatilidad no son constantes y dependen de una función determinística que captura las perspectivas futuras de los agentes. El ajuste obtenido por esta distribución es el mismo que el que se obtuvo con el método no paramétrico, sin embargo, el cálculo de sus estadísticas es más simple en términos computacionales y los intervalos de confianza obtenidos en general son más estrechos.

La información obtenida de los derivados tiene un papel fundamental para medir el pulso de los mercados por parte de los reguladores financieros, en particular los bancos centrales y los modelos descritos proponen un índice de riesgo que se encuentra implícito en las distribuciones obtenidas y basado en el diferencial entre la media de la distribución y la media teórica bajo los supuestos de riesgo neutral.

Por último, se plantea una transformación para obtener la distribución de los

rendimientos a partir de la función de densidad del tipo de cambio, mediante la cual se pueden realizar comparaciones de las distribuciones, eliminando el problema causado por la posición de la distribución que es determinado en gran medida por el nivel del tipo de cambio spot. Una vez que se conoce la distribución de los rendimientos, es posible replantearse el cálculo del Valor en Riesgo para divisas el cual no es simétrico para una posición corta que para una larga dólares, siendo casi siempre mayor para posiciones cortas por el sesgo a la depreciación. El desempeño del VaR calculado con la distribución denominada LGB2 obtenida después de la transformación es ligeramente mejor que el obtenido con una distribución normal.

Para el tipo de cambio, los ejercicios realizados en este trabajo permiten apreciar cómo los sesgos a la depreciación que exhibe la función de densidad del peso así como su kurtosis, cambian en respuesta al sentimiento de los agentes de mercado y al entorno en el que se encuentra. Los resultados obtenidos fueron similares a los obtenidos en otros documentos de investigación realizados para otros subyacentes.

Al terminar este proyecto se buscó dar nuevas herramientas que sean de utilidad y puedan ser incorporadas a modelos de toma de decisiones económicas, financieras y pruebas de estrés que frecuentemente se llevan a cabo en la industria financiera y no financiera donde las fluctuaciones de la moneda representan un riesgo significativo. No obstante la línea de investigación sobre este tema es muy amplia, y puede extenderse al uso de cópulas en el caso de divisas en que la operación dominante sea contra varias divisas y no sólo contra el dólar. Se espera que este estudio contribuya a comprender mejor el mercado cambiario mexicano desde un enfoque financiero y probabilístico.

## Capítulo 8

# Anexos

### 8.1. Cálculo Estocástico y Lema de Îto

Sea  $Z(t)$  un Movimiento Browniano estándar con  $\sigma^2 = 1$  y  $\mu = 0$  y denotemos  $\Delta Z$  el cambio en  $Z(t)$  durante el incremento del tiempo  $\Delta t$ , dado que todos los incrementos están normalmente distribuidos con varianza  $\sigma^2 t$  y media  $\mu t$  por ser un movimiento browniano, entonces:

$$\Delta Z(t) = Z(t + \Delta t) - Z(t) = z\sqrt{\Delta t}, \quad (2.1)$$

Donde  $z$  es una variable aleatoria con distribución normal estándar. En el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , se puede expresar a (2.1) como:

$$\partial Z(t) = z\sqrt{\partial t},$$

Nótese que  $E(\partial Z(t)) = 0$  y  $var(\partial Z) = \partial t$ ; también nos interesa conocer el comportamiento de  $(\partial Z(t))^2$  y  $\partial t \partial Z(t)$ . Las medias y varianzas de  $\Delta Z^2$  y  $\Delta t Z$  se representan a continuación:

$$E((\Delta Z)^2) = var(\Delta Z) + [E(\Delta Z)]^2 = (\Delta t),$$

$$\text{var}((\Delta Z)^2) = E[(Z(t + \Delta t) - Z(t))^4] - (E[(\Delta Z)^2])^2 = o(\Delta t)$$

donde la función  $o(\Delta t) \rightarrow 0$

$$\text{y } E[\Delta t \Delta Z] = E[\Delta t(Z(t + \Delta t) - Z(t))] = 0,$$

$$\text{var}(\Delta t \Delta Z) = E[\Delta t^2(Z(t + \Delta t) - Z(t))^2] - (E[\Delta t(Z(t + \Delta t) - Z(t))])^2 = o(\Delta t)$$

La forma del diferencial correspondiente sobre lo antes citado es:

$$E[(\partial Z)^2] = \partial t, \text{var}[(\partial Z)^2] = o(\partial t),$$

$$\text{y } E[\partial t \partial Z] = 0, \text{var}[\partial t \partial Z] = o(\partial t).$$

Ahora supongamos que  $o(\partial t)$  es esencialmente 0, entonces  $(\partial Z)^2$  y  $\partial t \partial Z$  son no estocásticas, por lo cual, las varianzas son cero. Por tanto:

$$(\partial Z)^2 = \partial t \text{ y } \partial t \partial Z = 0$$

La generalización del Movimiento Browniano puede ser escrita con la forma estocástica diferencial siguiente:

$$\partial X(t) = \mu \partial t + \sigma \partial Z(t),$$

donde  $\mu$  es la tendencia y  $\sigma^2$  la varianza del proceso. Usando los resultados  $(\partial Z)^2 = \partial t$  y  $\partial t \partial Z = 0$ , es interesante observar que:

$$(\partial X(t))^2 = \sigma^2 \partial t.$$

con esto sabemos que  $\partial X$  es una variable aleatoria, sin embargo  $(\partial X)^2$  no lo es.

De manera formal escribimos a continuación el *Lema de Itô*:

**Lema.** *Lema de Íto:* Sea  $u(X, t)$  una función no aleatoria continua, con derivadas parciales continuas y sea  $X(t)$  un proceso estocástico definido por:

$$\partial X(t) = a(X, t)\partial t + b(X, t)\partial Z(t),$$

donde  $\partial Z(t)$  es un movimiento browniano estándar. Entonces, el proceso estocástico

$$Y(t) = u(X(t), t)$$

presenta la siguiente forma de diferencial estocástica:

$$\partial Y(t) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t)\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}b(X, t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) \partial t + b(X, t)\frac{\partial u}{\partial X}\partial Z(t)$$

■

Cabe señalar que  $\partial Y$  es un proceso de Wiener con tendencia  $\frac{\partial u}{\partial t} + a(X, t)\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}b(X, t)^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$  y varianza  $b(X, t)\frac{\partial u}{\partial X}$ , aplicando el *Lema de Íto* a la fórmula para modelar los precios de las acciones definida como:

$$\partial S = \mu S dt + \sigma S \partial Z$$

donde  $S$  es el precio de la acción obtenemos:

$$\partial Y(t) = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \mu S \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \right) \partial t + \sigma S \frac{\partial u}{\partial S} \partial Z(t)$$

si definimos  $u$  como:

$$u(S, t) = \ln(S),$$

tenemos que,

$$dY = \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dZ$$

donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes y  $S$  sigue un proceso generalizado Wiener entonces  $\ln(S)$  estará normalmente distribuida, de hecho con  $S_T$  como el precio de la acción al tiempo  $T$  se tiene:

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma\sqrt{T}\right] \implies$$

$$\ln(S_T) \sim \Phi\left[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

El resultado anterior muestra que  $\ln(S_T)$  es normalmente distribuido lo que implica que  $S_T$  tiene una distribución *Lognormal*.

## 8.2. Fórmula Black-Scholes

A principios de los años setenta, Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton hicieron una contribución fundamental en la valuación de las opciones sobre acciones. Esto dio paso a lo que se conoce hoy como el modelo Black-Scholes. Este modelo ha tenido una gran influencia en la forma en que los operadores del mercado valúan y realizan operaciones con las opciones. Desde entonces el crecimiento en el campo de los productos derivados, así como en la ingeniería financiera en los años ochenta y noventa del siglo XX ha sido impactante. Los supuestos sobre el mercado financiero hechos por Black y Scholes cuando derivaron su fórmula de valuación de opciones fueron los siguientes:

1. La negociación de valores financieros es continua en el tiempo,
2. La tasa de interés libre de riesgo  $r$ , es constante en un cierto plazo,
3. No hay dividendos sobre las acciones durante la vida de la opción,

4. No existen costos de transacción o impuestos en la compra o venta del activo o la opción,
5. Todos los activos son perfectamente divisibles,
6. Los inversionistas pueden prestar o pedir prestado a la misma tasa de interés libre de riesgo,
7. No hay oportunidades de arbitrajes libres de riesgos.

La evolución del precio del activo  $S$  al tiempo  $t$  sigue un Movimiento Geométrico Browniano

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dw$$

Donde  $\sigma$  es la volatilidad,  $\mu$  es la media,  $dw$  sigue un proceso estándar de Wiener; además  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes. Integrando tenemos

$$S = S(t) - S(0) = \mu t + \sigma [w(t) - w(0)]$$

Despejando el precio del subyacente

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma [w(t) - w(0)]$$

Ahora consideremos un portafolio  $\Pi$  formado por el precio  $V$  de un derivado sobre el subyacente  $S$  y cierta cantidad  $\Delta$  del activo subyacente  $S$  (posición corta). El valor del portafolio  $\Pi$  está dado por:

$$\Pi = V - \Delta S$$

El precio de la opción es una función del activo  $S$  y tiempo  $t$ . Puesto que  $V$  y  $\Pi$  son variables aleatorias se puede aplicar el Lema de Itô (visto en el apartado anterior) para obtener sus

diferenciales estocásticas como sigue

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \quad (2.2)$$

Si escogemos  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  (notemos que  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$  cambia continuamente en el tiempo), entonces eliminaremos la aleatoriedad del portafolio.

Sustituyendo  $\Delta$  en (2.2) tenemos:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \right) dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \\ d\Pi &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \end{aligned} \quad 2.3$$

De esta manera, el modelo es determinista, ya no depende del azar. Por lo tanto, el rendimiento será la tasa de interés libre de riesgo. Fijamos  $d\Pi = r\Pi dt$  y lo expresamos como sigue:

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \quad (2.4)$$

Ahora igualamos las ecuaciones (2.3) y (2.4)

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \quad (2.5)$$

reorganizando términos, obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.5)$$

Es así como se presenta la ecuación parcial diferencial parabólica, llamada la Ecuación de *Black-Scholes (1973)*.

Esta ecuación puede ser satisfecha por el precio de cualquier derivado sobre un bien subyacente que no paga dividendos. Se establece una cartera libre de riesgo que conste de una posición de la opción y una posición corta en el bien subyacente. En ausencia de oportunidades de arbitraje, el rendimiento de la cartera debe ser la tasa de interés libre de riesgo. La razón por la cual puede establecerse una cartera libre de riesgo es que el precio de las acciones y el precio de la opción están afectados por la misma incertidumbre que son los movimientos del precio de las acciones o bienes. En un cierto periodo el precio de la opción está perfectamente correlacionado con el precio del bien subyacente. Cuando se establece una cartera apropiada de acciones y de la opción, la ganancia o pérdida de la posición de las acciones, siempre compensa el beneficio o pérdida de la posición de la opción, de manera que el valor total de la cartera al final de un cierto periodo es conocido con certeza.

Un camino para derivar las fórmulas de Black-Scholes es resolviendo la ecuación diferencial (2.5). Otra aproximación es estableciendo condiciones iniciales y utilizando el argumento de riesgo neutral como sigue.

En el caso de una opción *call* europea, las condiciones iniciales son:

$$c = \max(S - K, 0)$$

donde  $t = T$  y  $K$  es el precio de ejercicio.

El valor esperado de la opción al vencimiento, dentro de un mundo neutral al riesgo es:

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

del argumento de valuación de riesgo neutral, tenemos que el precio de la opción *call* europea,  $c$ , es la esperanza del valor descontado con la tasa de interés libre de riesgo:

$$c = e^{-(rT)} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

**Resultado.** Para llegar a nuestra fórmula de Black-Scholes para una opción *call* europea, probaremos antes el siguiente resultado:

Si  $V$  es lognormal y la desviación estándar de  $\ln V$  es  $s$ , entonces:

$$E[\max(V - K, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \quad (2.6)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln[E(V)/K] + s^2/2}{s}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(V)/K] - s^2/2}{s}$$

y  $E$  denota el valor esperado.

Definimos  $f(V)$  como la función de densidad de  $V$ .

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_K^\infty (V - K)f(V)dV \quad (2.7)$$

La variable  $\ln V$  tiene distribución normal con desviación estándar  $s$ . Entonces tenemos que la media de  $\ln V$  es  $m$ , donde:

$$m = \ln[E(V)] - s^2/2 \quad (2.8)$$

Ahora definimos  $Q$  una nueva variable de la siguiente forma:

$$Q = \frac{\ln V - m}{s} \quad (2.9)$$

Esta variable tiene una distribución normal con media 0 y desviación estándar de 1. Denotamos  $h(Q)$  como la función de densidad de  $Q$  como sigue:

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(Q^2/2)} \quad (2.10)$$

Usamos la ecuación (2.10) para convertir el lado derecho de la expresión en (2.6) en una integral sobre  $Q$  en lugar de una integral sobre  $V$ :

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} (e^{(Qs+m)} - K)h(Q)dQ \quad (2.11)$$

o bien:

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} e^{Qs+m}h(Q)dQ - K \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} h(Q)dQ \quad (2.12)$$

Ahora

$$\begin{aligned} e^{Qs+m}h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-Q^2+2Qs+2m)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-s)^2+2m+s^2]/2} \\ &= \frac{e^{(m+\frac{s^2}{2})}}{\sqrt{2\pi}} e^{[-(Q-s)^2]/2} \\ &= e^{m+s^2/2}h(Q-s) \end{aligned}$$

Y esto significa que la ecuación (2.12) queda como sigue:

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+\frac{s^2}{2}} \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} h(Q-s)dQ - K \int_{(\ln K - m)/s}^{\infty} h(Q)d(Q) \quad (2.13)$$

Si definimos  $N(x)$  como la probabilidad de que una variable con media 0 y desviación estándar de 1 sea menor que  $x$ , entonces la primera integral en la ecuación (2.13) es:

$$1 - N[(\ln K - m)/s - s]$$

o bien

$$N[(-\ln K + m)/s + s]$$

Sustituyendo a  $m$  como se expresa en la ecuación (2.8) tenemos:

$$N\left(\frac{\ln[E(V)/K] + s^2/2}{s}\right) = N(d_1) \quad (2.14)$$

El procedimiento se aplica de manera similar a la segunda integral en la ecuación (2.13)

obteniendo como resultado  $N(d_2)$ . Así, la ecuación (2.13) queda como sigue:

$$E[\max(V - K, 0)] = \exp^{m+s^2/2} N(d_1) - KN(d_2) \quad (2.15)$$

Por último sustituimos  $m$  como la expresión (2.8) lo indica y de esta manera llegamos a nuestro resultado deseado:

$$E[\max(V - K, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \quad (2.16)$$

Ahora consideremos una opción *call* sobre un subyacente que no paga dividendos, y tiene vencimiento en  $T$ . Su precio strike es  $K$ , la tasa libre de riesgo  $r$ , el precio del subyacente al inicio es  $S_0$  y la volatilidad es  $\sigma$ . Como habíamos definido anteriormente, el precio del *call*,  $c$ , está dado por:

$$c = \exp^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \quad (2.17)$$

donde  $S_T$  es el precio del subyacente al tiempo  $T$  y  $\hat{E}$  denota la esperanza dentro de un mundo neutral. Bajo el proceso estocástico asumido por Black-Scholes,  $S_T$  tiene una distribución lognormal, entonces  $\hat{E}(S_T) = S_0 \exp^{rT}$  y la desviación estándar del  $\ln S_T$  es  $\sigma\sqrt{T}$ .

Utilizando ahora el resultado anterior, la ecuación (2.17) implica que:

$$c = \exp^{-rT} [S_0 \exp^{rT} N(d_1) - KN(d_2)] \quad (2.18)$$

o bien

$$c = S_0 N(d_1) - K \exp^{-rT} N(d_2) \quad (2.19)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \left[ \hat{E}(S_T)/K \right] + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (2.20)$$

y

$$d_2 = \frac{\ln \left[ \hat{E}(S_T)/K \right] - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (2.21)$$

Como una interpretación a la ecuación (2.18), se puede escribir

$$c = \exp^{-rT} [S_0 N(d_1) \exp^{rT} - K N(d_2)] \quad (2.22)$$

donde  $N(d_2)$  es la probabilidad de que la opción sea ejercida, y la expresión  $S_0 N(d_1) \exp^{rT}$  es el valor esperado de una variable, dando como resultado  $S_T$  si  $S_T > K$  y 0 en otro caso. La fórmula de Black-Scholes es teóricamente correcta al ser utilizada en la práctica, si  $r$  es una función conocida de tiempo dada estocásticamente, el precio del subyacente es lognormal y la volatilidad es elegida apropiadamente. ■

### 8.3. Valuación de Opciones Europeas sobre el Tipo de Cambio

Las opciones de tipo de cambio (en el futuro opciones FX, por Foreign Exchange) han brindado un nuevo mecanismo para el control de riesgo, al mismo tiempo se han convertido en un instrumento especulativo, donde la fuente principal de riesgo proviene de la fluctuación en la paridad de las monedas.

La liquidación de una opción FX es mediante la entrega de un monto fijo de la moneda extranjera. En el modelo de Black-Scholes el subyacente liquidable es un activo que

no paga dividendos, la diferencia que existe entre subyacentes se puede observar al comparar los precios forward de equilibrio para ambos.

Podemos calcular la prima de estos instrumentos mediante la modificación al modelo de *Black & Scholes* propuesta por *Garman & Kohlhagen (1983)* para opciones sobre divisas.

**Demostración.** Para el siguiente desarrollo consideremos lo siguiente:

$S_0$  = precio del subyacente en el tiempo  $t = 0$

$\sigma$  = volatilidad del subyacente

$T$  = plazo de la opción

$r_d$  = tasa doméstica libre de riesgo

$r_f$  = tasa foránea libre de riesgo

$K$  = precio de ejercicio

$S_t$  = precio del subyacente en el tiempo  $t$

$\Pi$  = La prima de la opción Call = precio justo =  $\mathbb{E}((S_T - K)^+)e^{-r_d T}$ , recordemos que para este cálculo se tomarán en consideración los supuestos de la teoría de riesgo neutral y las siguientes hipótesis de mercado eficiente:

- 1) La información del pasado se refleja en las cotizaciones actuales.
- 2) El mercado responde inmediatamente a la nueva información.

Supongamos el siguiente proceso estocástico donde  $dt \rightarrow 0$ :

$$\frac{dS}{S} = \sigma dz + \mu dt, \text{ donde } \Phi \sim \mathbb{N}(0, 1), dz = \Phi dt \text{ i.e. } dz \sim \mathbb{N}(0, dt).$$

Sea  $f(S_t)$  una función suave de  $S_t$  en este caso el logaritmo natural y utilizando el

*Lema de Itô:*  $df = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} dS_t^2$  entonces:

dado que  $dS_t^2 = (\sigma S_t dz + \mu S_t dt)^2 = S_t^2 \sigma^2 dt + \mu^2 S_t^2 dt^2 + 2\sigma\mu S_t^2 dz dt$ , sabemos que  $\mu^2 S_t^2 dt^2 + 2\sigma\mu S_t^2 dz dt$  es muy cercano a cero y lo denotaremos como  $o$  entonces:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial S_t}(\sigma S_t dz + \mu S_t dt) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (S_t^2 \sigma^2 dt + o) \Rightarrow \\ df &= \frac{\partial f}{\partial S_t}(\sigma S_t dz + \mu S_t dt) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} (S_t^2 \sigma^2 dt + o) \Rightarrow \\ df &= \frac{1}{S_t}(\sigma S_t dz + \mu S_t dt) - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (S_t^2 \sigma^2 dt) \Rightarrow \\ df &= \sigma dz + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt \Rightarrow \end{aligned}$$

dado un precio de ejercicio de la opción  $K$  y a  $\mu = r_d - r_f$  para incorporar el diferencial de tasas se tiene:

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &\sim \mathbb{N}\left[\left(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt, \sigma^2 dt\right] \\ \frac{\ln(S_t) - \left(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt}{\sigma\sqrt{dt}} &\sim \mathbb{N}[0, 1] \end{aligned}$$

como hemos mencionado la prima de la opción o el precio justo es:

$$\text{Prima} = \Pi = \mathbb{E}[(S_T - K)^+] e^{-r_d T}$$

realizando la valuación bajo el principio de riesgo neutral y recordemos que la esperanza matemática de una función  $F(\cdot)$  de  $\Phi$  es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(\Phi)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\Phi) e^{-\frac{1}{2}\Phi^2} d\Phi \\ S_T &= S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\Phi} \\ \mathbb{E}[(S_T - K)^+] e^{-r_d T} &= e^{-r_d T} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi\sigma\sqrt{T}} - K) \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \right]^+ \Rightarrow \\ \mathbb{E}[(S_T - K)^+] e^{-r_d T} &= e^{-r_d T} \left[ \int_a^{\infty} (S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi\sigma\sqrt{T}} - K) \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \right], \end{aligned}$$

donde  $a$  es tal que  $\Rightarrow S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi \sigma \sqrt{T}} - K \geq 0$

$$S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi \sigma \sqrt{T}} = K \Rightarrow \Phi = \frac{\ln(K) - \ln(S_0) - (r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} = a$$

$$\mathbb{E}[(S_T - K)^+] e^{-r_d T} = e^{-r_d T} \left[ \int_a^{\infty} S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi \sigma \sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \right] - e^{-r_d T} \left[ \int_a^{\infty} K \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \right]$$

$$\text{sea } I_1 = -e^{-r_d T} \int_a^{\infty} K \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \text{ e } I_2 = -e^{-r_d T} \left[ \int_a^{\infty} S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi \sigma \sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \right] \Rightarrow$$

$$I_1 = -e^{-r_d T} K \int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi = -e^{-r_d T} K \mathbb{N}(-a) = -e^{-r_d T} K \mathbb{N}(d_2) \text{ y}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$I_2 = e^{-r_d T} \left[ \int_a^{\infty} S_0 e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T + \Phi \sigma \sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi \right] = S_0 e^{-r_d T} e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_a^{\infty} e^{\Phi \sigma \sqrt{T}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\Phi^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi =$$

$$I_2 = S_0 e^{-r_d T} e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_a^{\infty} \frac{e^{[-\frac{1}{2}\Phi^2 + \Phi \sigma \sqrt{T} - \frac{\sigma^2 T}{2}]} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi =$$

$$= S_0 e^{-r_d T} e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T} \int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Phi - \sigma \sqrt{T})^2} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi = S_0 e^{-r_d T} e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} \int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Phi - \sigma \sqrt{T})^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi$$

$$I_2 = S_0 e^{-r_d T} e^{(r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} \int_{a - \sigma \sqrt{T}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Phi)^2}}{\sqrt{2\pi}} d\Phi = S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(-a + \sigma \sqrt{T}) \text{ y}$$

$$-a + \sigma \sqrt{T} = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} + \sigma \sqrt{T} = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1$$

$\therefore \Pi_{Call} = \mathbb{E}[(S_T - K)^+] e^{-r_d T} = S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(d_1) - e^{-r_d T} K \mathbb{N}(d_2)$ , donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

analogamente para el Put se tendría:

$\therefore \Pi_{Put} = \mathbb{E}[(K - S_t)^+] e^{-r_d T} = e^{-r_d T} K \mathbb{N}(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(-d_1)$ , donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ y } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

■

### 8.3.1. Paridad Put-Call

Una importante relación entre el put y el call europeo se da considerando los siguientes portafolios:

*Portafolio A:* compro un call ( $c$ ) y mantengo una cantidad  $K \exp(-r_d T)$  en efectivo,

*Portafolio C:* compro un put ( $p$ ) y una fracción de la divisa ( $S_0 e^{-r_f T}$ )

Así, ambas valen  $\max(S_T, K)$  al vencimiento de la opción  $\Rightarrow$  ambas deben tener el mismo valor presente.

*Portafolio A* al tiempo  $T$  el call  $c = \max(-K + S_T, 0) + K = \max(S_T, K)$

*Portafolio C* al vencimiento  $= p + S_T = \max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T)$

$$\Rightarrow c + K e^{-rdT} = p + S_0 e^{-r_f T} \quad (\text{Paridad Put - Call})$$

Esta relación es conocida como *Paridad Put-Call* y permite conocer el precio del put o del call en función del otro siempre y cuando éstos sean estilo europeo.

### 8.3.2. Relación con el Precio Forward o Futuro

En el artículo publicado por Fischer Black en (1976) extendió el modelo Black&Scholes para opciones europeas, asumiendo los mismos supuestos de log normal se tiene:

Recordemos que el precio del forward depende del diferencial de tasas y se expresa

$F_0 = S_0 \exp^{(r_d - r_f)T}$  partiendo de esta fórmula se puede reescribir el valor de las opciones

como:

$$\Pi_{Call} = [S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(d_1) - e^{-r_d T} K \mathbb{N}(d_2)] \frac{e^{r_d T}}{e^{r_d T}} = [S_0 e^{(r_d - r_f) T} \mathbb{N}(d_1) - K \mathbb{N}(d_2)] e^{-r_d T}$$

$$\Pi_{Call} = F_0 e^{-r_d T} \mathbb{N}(d_1) - K e^{-r_d T} \mathbb{N}(d_2)$$

$$\Pi_{Put} = [e^{-r_d T} K \mathbb{N}(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} \mathbb{N}(-d_1)] \frac{e^{r_d T}}{e^{r_d T}} = [K \mathbb{N}(-d_2) - S_0 e^{(r_d - r_f) T} \mathbb{N}(-d_1)] e^{-r_d T}$$

$$\Pi_{Put} = K e^{-r_d T} \mathbb{N}(-d_2) - F_0 e^{-r_d T} \mathbb{N}(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(F_0/K) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \Rightarrow \quad (8.1)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(F_0/K) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (8.2)$$

Notemos que la fórmula Black 1976 no requiere que el vencimiento de la opción sea igual al vencimiento del futuro. En su publicación asume que el precio de los futuros poseen la misma propiedad de lognormalidad asumida para el tipo de cambio y que el futuro y su subyacente presentan la misma volatilidad.

Las opciones de futuros son más atractivas para los inversionistas que aquellas sobre el subyacente ya que son más baratas y convenientes sobre los futuros, lo cual es cierto para la mayoría de los subyacentes. Otra ventaja es que las operaciones de futuros y opciones de futuros son acordados en conjunto lado a lado en la misma bolsa de mercaderías. Esto facilita las coberturas, el arbitraje y la especulación lo cual tiende a hacer los mercados más eficientes.

Notemos que cuando  $K = F_0$  el valor del call y del put es el mismo, cuando ocurre esto se dice que el Call y el Put son ATM (at the money).

## 8.4. Opciones Americanas sobre Tipo de Cambio:

En la práctica el uso de opciones americanas para el tipo de cambio peso dólar también es frecuente sin embargo es más frecuente que el uso de opciones europeas. La prima de las opciones americanas es superior a la de las europeas al otorgar el derecho a los propietarios de ejercerlas en cualquier día durante la vigencia de la opción. Existen diferentes métodos de valuación para estos instrumentos, entre los que se encuentran los árboles binomiales y trinomiales y el método de *Barone-Adesi & Whaley*, que se basa en el modelo de *Garman-Kohlhagen* para opciones europeas; asimismo el modelo recursivo presentado a continuación se basa en el modelo descrito anteriormente, así como en los supuestos de *Black-Scholes* para estimar el precio de las opciones.

Estas opciones pueden ser expresadas como una suma de opciones europeas ponderadas por su probabilidad de ser ejercidas en un día determinado. Si se supiera que no es conveniente ejercer durante todos los días previos al vencimiento, el valor de la opción americana debería de ser igual al de una opción europea con mismas fecha de vencimiento es decir:

$$A(K, T)_{call} = \Pi_{call}(K, T) \quad (8.3)$$

así, se conoce el valor esperado que tendría la opción un día antes de la fecha de vencimiento dado que no hubo oportunidad de ejercerla antes:

$$\mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} = \Pi_{call}(K, T) \exp[r_d(T - 1)/360] \quad (8.4)$$

para que hubiera existido posibilidad de ejercicio en el día previo al vencimiento la utilidad debe ser superior al valor esperado de ejercerla al día siguiente lo que implica que:

$$S_{T-1} > K + \mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} = K_{T-1}^* \quad (8.5)$$

al incorporar este supuesto el valor esperado de la opción en el día  $T - 1$  debe ser:

$$\mathbb{E}[(S_{T-1} - K_{T-1}^*)^+]_{T-2} = \Pi_{call}(K_{T-1}^*, T - 1) \exp[r_d(T - 2)/360] \quad (8.6)$$

si se sabe que se podrá ejercer antes del día previo al vencimiento el valor del call americano es:

$$A(K, T)_{call} = \Pi_{call}(K, T) + \Pi_{call}(K_{T-1}^*, T - 1) \mathbb{P}[S_{T-1} > K_{T-1}^*] \quad (8.7)$$

siguiendo este razonamiento se puede definir:

$$K_{T-2}^* = K + \mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} + \mathbb{E}[(S_{T-1} - K_{T-1}^*)^+]_{T-2} \mathbb{P}[S_{T-1} > K_{T-1}^*] \quad (8.8)$$

$$K_{T-3}^* = K + \mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} + \mathbb{E}[(S_{T-1} - K_{T-1}^*)^+]_{T-2} \mathbb{P}[S_{T-1} > K_{T-1}^*] + \quad (8.9)$$

$$+ \mathbb{E}[(S_{T-2} - K_{T-2}^*)^+]_{T-3} \mathbb{P}[S_{T-1} > K_{T-2}^*] \quad (8.10)$$

$$\vdots \quad (8.11)$$

$$K_2^* = K + \mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} + \dots + \mathbb{E}[(S_3 - K_3^*)^+]_1 \mathbb{P}[S_3 > K_3^*] \quad (8.12)$$

$$K_1^* = K + \mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} + \dots + \mathbb{E}[(S_2 - K_2^*)^+]_1 \mathbb{P}[S_2 > K_2^*] \quad (8.13)$$

donde el vector  $\bar{K} = (K, K_{T-1}^*, K_{T-2}^*, \dots, K_1^*)$  son los tipos de cambio mínimos para el ejercicio de la opción americana desde  $T$  hasta 1; una vez que se tienen los tipos de cambio es posible calcular el valor de una opción americana con la siguiente ecuación:

$$A(K, T)_{call} = \Pi_{call}(K, T) + \Pi_{call}(K_{T-1}^*, T - 1) \mathbb{P}[S_{T-1} > K_{T-1}^*] + \Pi_{call}(K_{T-2}^*, T - 2) \mathbb{P}[S_{T-2} > K_{T-2}^*] + \quad (8.14)$$

$$+ \dots + \Pi_{call}(K_2^*, 2) \mathbb{P}[S_2 > K_2^*] + \Pi_{call}(K_1^*, 1) \mathbb{P}[S_1 > K_1^*] \quad (8.15)$$

Finalmente, para calcular las probabilidades asumiremos que  $S_t \sim \text{LogNormal}[\ln(S_0) + (r_d - r_f - \sigma)t/360, \sigma^2 t/360]$  con  $t = 1, \dots, T$ .

Análogamente se puede realizar una estructura similar para el Put americano donde al conocer que no puede ejercer al vencimiento el Put vale :

$$A(K, T)_{put} = \Pi_{put}(K, T) \quad (8.16)$$

así, se conoce el valor esperado que tendría la opción un día antes de la fecha de vencimiento dado que no hubo oportunidad de ejercerla antes:

$$\mathbb{E}[(K - S_T)^+]_{T-1} = \Pi_{put}(K, T) \exp[r_d(T - 1)/360] \quad (8.17)$$

para que hubiera existido posibilidad de ejercicio en el día previo al vencimiento, la utilidad debe ser superior al valor esperado de ejercerla al día siguiente, lo que implica que:

$$S_{T-1} < K - \mathbb{E}[(S_T - K)^+]_{T-1} = K_{T-1}^{**} \quad (8.18)$$

al incorporar este supuesto el valor esperado de la opción en el día  $T - 1$  debe ser:

$$\mathbb{E}[(K_{T-1}^{**} - S_{T-1})^+]_{T-2} = \Pi_{put}(K_{T-1}^{**}, T - 1) \exp[r_d(T - 2)/360] \quad (8.19)$$

si se sabe que se podrá ejercer antes del día previo al vencimiento el valor del put americano es:

$$A(K, T)_{put} = \Pi_{put}(K, T) + \Pi_{put}(K_{T-1}^{**}, T - 1) \mathbb{P}[S_{T-1} < K_{T-1}^{**}] \quad (8.20)$$

siguiendo este razonamiento se puede definir:

$$K_{T-2}^{**} = K + \mathbb{E}[(K - S_T)^+]_{T-1} + \mathbb{E}[(K_{T-1}^{**} - S_{T-1})^+]_{T-2} \mathbb{P}[S_{T-1} < K_{T-1}^{**}] \quad (8.21)$$

$$K_{T-3}^{**} = K + \mathbb{E}[(K - S_T)^+]_{T-1} + \mathbb{E}[(K_{T-1}^{**} - S_{T-1})^+]_{T-2} \mathbb{P}[S_{T-1} < K_{T-1}^{**}] + \quad (8.22)$$

$$+ \mathbb{E}[(K_{T-2}^{**} - S_{T-2})^+]_{T-3} \mathbb{P}[S_{T-1} < K_{T-2}^{**}] \quad (8.23)$$

$$\vdots \quad (8.24)$$

$$K_2^{**} = K + \mathbb{E}[(K - S_T)^+]_{T-1} + \dots + \mathbb{E}[(K_3^{**} - S_3)^+]_1 \mathbb{P}[S_3 < K_3^{**}] \quad (8.25)$$

$$K_1^{**} = K + \mathbb{E}[(K - S_T)^+]_{T-1} + \dots + \mathbb{E}[(K_2^{**} - S_2)^+]_1 \mathbb{P}[S_2 < K_2^{**}] \quad (8.26)$$

donde el vector  $\bar{K} = (K, K_{T-1}^{**}, K_{T-2}^{**}, \dots, K_1^{**})$  son los tipos de cambio máximos para el ejercicio de la opción americana desde  $T$  hasta 1; una vez que se tienen los tipos de cambio es posible calcular el valor de una opción americana con la siguiente ecuación:

$$A(K, T)_{put} = \Pi_{put}(K, T) + \Pi_{put}(K_{T-1}^*, T - 1) \mathbb{P}[S_{T-1} < K_{T-1}^*] + \Pi_{put}(K_{T-2}^*, T - 2) \mathbb{P}[S_{T-2} < K_{T-2}^*] + \quad (8.27)$$

$$+ \dots + \Pi_{put}(K_2^*, 2) \mathbb{P}[S_2 < K_2^*] + \Pi_{put}(K_1^*, 1) \mathbb{P}[S_1 < K_1^*] \quad (8.28)$$

Este modelo presenta dos características importantes para los fines de este trabajo, el primero es que nos permite expresar el valor de una opción americana en función de opciones europeas e indica los tipos de cambio a partir de los cuales es óptimo ejercer antes del vencimiento. Lamentablemente, la paridad put-call se da únicamente cuando se trata de opciones europeas, sin embargo, existe una relación para las opciones americanas:  $S_0 - K < Call - Put < S_0 - Ke^{-rt}$ .

## 8.5. Códigos Matlab

### 8.5.1. Estimación Lognormal (método paramétrico)

*Dadas las cotizaciones de las opciones call y put en el mercado se estiman los parámetros de la distribución lognormal*

```
function f = singlelog(x)

% Datos de las primas y strikes para los calls y puts

P=[

12.5    0.304

12.6    0.345

12.7    0.39

12.8    0.439

12.9    0.493

13     0.55

13.1    0.611

13.2    0.677

13.3    0.747

13.4    0.82

13.5    0.897

];

C=[

12.5    0.497

12.6    0.435
```

12.7 0.376

12.8 0.321

12.9 0.272

13 0.226

13.1 0.184

13.2 0.148

13.3 0.117

13.4 0.089

13.5 0.066

];

Call=C(:,2);

Put=P(:,2);

StrikeC=C(:,1);

StrikeP=P(:,1);

S=12.7090; %precio del actual subyacente

%calculo de d1 y d2 según Black & Scholes

dC1=(-log(StrikeC)+x(1)+x(2).^2)./x(2);

dC2=dC1-x(2);

dP1=(-log(StrikeP)+x(1)+x(2).^2)./x(2);

dP2=dP1-x(2);

% calls y put de Black&Scholes

SCalls=(exp(-.045\*20/360).\*((exp(x(1)+x(2)^2/2).\*normcdf(dC1)-StrikeC.\*normcdf(dC2))));

```

SPuts=(exp(-.045*20/360).*((-exp(x(1)+x(2)^2/2).*normcdf(-dP1)+StrikeP.*normcdf(-dP2))));
f = [(SCalls-Call); (SPuts-Put); (exp(x(1)+(x(2).^2)/2)-12.75)];

% se busca encontrar lasolución mediante el metodo de mínimos cuadrados no
lineales.

% donde x=(x1,x2), x1= media y x2=desv. estándar.

[x,fval] = lsqnonlin(@ singlelog,x,[1,0],[9,.3])

%x1 esta entre 1 y 9 y x2 entre 0 y la raíz de 0.3.

```

### 8.5.2. Estimación Lognormal (método paramétrico)

*Dadas las cotizaciones del mercado de las opciones se estiman los parametros de una suma de dos lognormales*

```

function f = DoblelogM(x)

%datos del strike, prima put, prima call

P=[
12.4224    0.166    0.529
12.5000    0.199    0.481
12.5786    0.235    0.436
12.6582    0.275    0.396
12.7389    0.319    0.359
12.8205    0.365    0.325
12.9032    0.415    0.294
12.9870    0.466    0.266

```

```

13.0719    0.522    0.240
13.1579    0.578    0.217
13.2450    0.638    0.195
13.3333    0.700    0.176
13.4228    0.762    0.159
13.5135    0.827    0.143

```

```
];
```

```
C=[P(:,1),P(:,3)];
```

```
P=[P(:,1),P(:,2)];
```

```
Call=C(:,2);
```

```
Put=P(:,2);
```

```
StrikeC=C(:,1);
```

```
StrikeP=P(:,1);
```

```
S=12.69;
```

```
%calculo de las d1, d2, d3 y d4 deacuerdo con modificacion a B&S para suma
```

```
%de lognormales
```

```
dC1=(-log(StrikeC)+x(1)+x(2).^2)./x(2);
```

```
dC2=dC1-x(2);
```

```
dC3=(-log(StrikeC)+x(3)+x(4).^2)./x(4);
```

```
dC4=dC3-x(4);
```

```
dP1=(-log(StrikeP)+x(1)+x(2).^2)./x(2);
```

```
dP2=dP1-x(2);
```

```

dP3=(-log(StrikeP)+x(3)+x(4).^2)./x(4);
dP4=dP3-x(4);

% calls y puts de B&S
SCalls=x(5).*(exp(-.045*84/360).*((exp(x(1)+x(2)^2/2).*normcdf(dC1)-StrikeC.*normcdf(dC2)
+(1-x(5)).*(exp(-.045*84/360).*((exp(x(3)+x(4)^2/2).*normcdf(dC3)-StrikeC.*normcdf(dC4))))))
SPuts=x(5).*(exp(-.045*84/360).*((-exp(x(1)+x(2)^2/2).*normcdf(-dP1)+StrikeP.*normcdf(-dP
+(1-x(5)).*(exp(-.045*84/360).*((-exp(x(3)+x(4)^2/2).*normcdf(-dP3)+StrikeP.*normcdf(-dP4)
f = [SCalls-Call; SPuts-Put; (exp(x(1)+(x(2).^2)/2)-12.7193)];

% se busca encontrar lasolución mediante el metodo de mínimos cuadrados no
lineales.

% donde x=(x1,x2,x3,x4,x5), x1= media primera lognormal, x2=desv. estándar
primera lognormal, x3= media segunda lognormal,
x4=desv. estándar segunda lognormal y x5 es la ponderación de la prima lognormal
en la suma.

[x,fval] = lsqnonlin(@ doblelog,x,[1,x(4)*.25,1,0,0],[9,4*x(4),9,0.3,1])
se condiciona a que .25*x4<x2<4*x4, a que x4 este entre 0 y raíz de 0.3; x1 y x3
entre 1 y 9 y 0<x5<1.

```

### 8.5.3. Estimación Método No Paramétrico (Curva Smile)

*Dadas las cotizaciones de la volatilidad de las opciones a diferentes deltas, los niveles más recientes del subyacente y de las tasas de interés así como de la fecha de vencimiento ( $t$ ) se obtiene lo siguiente: la función de densidad (PDF), la función de distribución*

(CDF), los niveles implícitos del subyacente (TC) y las siguientes estadísticas: la media, la desviación estándar, el sesgo y la kurtosis (STATS). Delta = [.1 .25 .5 .75 .9]; smile se obtiene de la volatilad con los risk reversal y butterflies con la función smiledata().

```
function [PDF,CDF,TC,STATS]=DensidadPeso (DELTA,SMILE,S,rf,rd,t)
pp = interp1(DELTA,SMILE,'cubic','pp'); %interpolación por splines cubicos
XI=0:.00125:1;
YI=PPVAL(pp,XI);
f=S*exp((rd-rf)*t);
F=f.*ones(801,1);
F=F';
TC = desdelta(S,1:-.00125:0,rd,rf,t,YI);
[PDF,CDF,STATS]= BreedenLitzenberger (F,TC,YI,t,rd);
```

*Función smiledata construye el smile a partir de las cotizaciones de la volatilad*

```
function smile5p=smiledata(s50,rr25,rr10,btf25,btf10)
s1=(btf10+s50)-rr10/2;
s2=(btf25+s50)-rr25/2;
s3=s50;
s5=(btf10+s50)+rr10/2;
s4=(btf25+s50)+rr25/2;
smile5p=[s1,s2,s3,s4,s5];
```

*La función desdelta relaciona a la volatilad con su precio de ejercicio asociado a*

*la delta*

```

function X = desdelta(S,d,rd,rf,t,s)

dexp=d.*exp(rd*t);

nidexp=norminv(dexp);

srt=s.*t^(.5);

nidexpst=nidexp.*srt;

nidexpsts2t=nidexpst+((srt).^2)./2-rd*t+rf*t;

enidexpsts2t=1./exp(nidexpsts2t);

fenidexpsts2t=S.*enidexpsts2t;

X=fenidexpsts2t;

```

*La función BreedenLitzenberger aplica este resultado y regresa la distribución implícita*

```

function [f,F,DN,Df,STATS]= BreedenLitzenberger (F,X,S,t,r)

S2T= (S.^2).*(t);

ST=S2T.^(.5);

lST=length(S);

d2=(log(F./X)-(S2T)/2)./(S2T.^(.5));

nd2=normpdf(d2,0,1);

Nd2=normcdf(d2,0,1);

f=exp(-r*t).*nd2./(ST.*X);

F1=1-exp(-r*t).*Nd2;

for i=1:length(F1)

    if F1(i)>1

        F1(i)=1;
    end
end

```

```
        f(i)=0;
    end
    if F1(i)<0
        F1(i)=0;
        f(i)=0;
    end
end
end
F=F1;
Y=[];
f1=[];
F2=[];
for i=1:1:length(X)
    if X(i)>0 && X(i)< 35
        Y=[Y,X(i)] ;
        f1=[f1,f(i)];
        F2=[F2,F1(i)];
    end
end
end
N=[];
for i=round(min(Y)*1000)/1000:0.001:min(round(max(Y)*1000)/1000);
    N=[N,i];
end
end
```

```

pp = spline(Y,F2);
FN=ppval(pp,N);
N2=[];
fN2=[];
FN2=[];
for k=1:length(N)-1
    fN2=[fN2,FN(k+1)-FN(k)];
    FN2=[FN2,FN(k+1)];
    N2=[N2,N(k)];
end
fp=FN2(1)
for j=min(N2)-.001:-.001:min(N2)-5
    fN2=[fp/5000,fN2];
    N2=[j,N2];
end
fp=1-FN(length(N))
for j=max(N2):.001:max(N2)+5
    fN2=[fN2,fp/5000];
    N2=[N2,j];
end
pp = spline(Y,f1);
FUN=@(xx) ppval(pp,xx);

```

```

A=quad(FUN,min(Y),max(Y));
FUN=@(xx) xx.*ppval(pp,xx)./A;
m=quad(FUN,min(Y),max(Y));
FUN=@(xx)((xx-m).^2).*ppval(pp,xx)./A;
sigma=quad(FUN,min(Y),max(Y));
sigma=sqrt(sigma);
FUN=@(xx)((xx-m).^3).*ppval(pp,xx)./A ;
skw=quad(FUN,min(Y),max(Y));
skw=skw/(sigma^3);
FUN=@(xx)((xx-m).^4).*ppval(pp,xx)./A ;
kurtosis=quad(FUN,min(Y),max(Y));
kurtosis=kurtosis/(sigma^4);
STATS=[A m sigma skw kurtosis];
DN=N2;
Df=fN2;

```

#### 8.5.4. Estimación Método Montecarlo

*La función tasa forward obtiene los niveles de las tasas forward dada una curva de rendimiento (i) que contempla los periodos (p)*

```

function [w r]=tasafoward3M(p,i)
w=1:65;
hold on
ie=log(1+i.*p./360).*360./p;

```

```

%plot(p,ie,'ko')

y = interp1(p,ie,w,'pchip');

%plot(w,y)

r=[i(1)];

y1=[y(1)];

for j=2:1:65

    y1=[y1,y(j)*j-y(j-1)*(j-1)];

end

r=[y1];

%plot(w,r,'r-')

```

*La función supsmile dadas las cotizaciones de volatilidad a diferentes deltas y vencimientos construye la superficie de volatilidades en función de las deltas y vencimientos*

```

function [w,s,S]=supsmile3M(V)

delta=[.9 .75 .5 .25 .1];

time=[1 5 10 15 22 44 65];

x=2;

y=1;

S=ones(65,17);

S(1,:)=S(1,:).*V(1,1);

for i=2:1:65

y=1;

for j=.1:.05:.9

```

```
w = interp2(delta,time,V,j,i,'spline');  
S(x,y)=w;  
y=y+1;  
end  
x=x+1;  
end  
mesh(1:1:65,.1:.05:.9,S');  
w=1:360;  
s=ones(65,17);  
s(1,:)=S(1,:);  
x=1;  
y=1;  
for j=.1:.05:.9  
y=1;  
for i=2:1:65  
sig=S(i,x)*i-S(i-1,x)*(i-1);  
s(i,x)=sig;  
y=y+1;  
end  
x=x+1;  
end  
hold on
```

```
mesh(1:1:65,.1:.05:.9,s');
```

*La función supsmileK1M dadas las cotizaciones de volatilidad a diferentes deltas y vencimientos; y el tipo de cambio construye la superficie de volatilidades en función de los vencimientos y precios de ejercicio*

```
function [Ms,ms,K1Msmile]=supsmileK1M(fix,rd,rf,V)

delta=[.9 .75 .5 .25 .1];

d=.05:.05:.95;

X=d;

smile=interp1(delta,V,d,'cubic');

j=1;

for i=.05:.05:.95

X(j) = desdelta(fix,d(j),rd,rf,1/12,smile(j));

j=j+1;

end

j=1;

K1Msmile=[];

for i=1:5

K1Msmile=[K1Msmile desdelta(fix,delta(j),rd,rf,1/12,smile(j))] ;

j=j+1;

end

Ms=max(X);

ms=min(X);
```

*La función DMonteCarlo1M partiendo de las cotizaciones de la volatilidad dada una delta y vencimiento, del tipo de cambio, la estructura tesas de interés foranes y locales realiza N simulaciones, el parametro j intica el día al que se esta haciendo la estimación dado que en la base dedatos los reglones continen la información para cada día.*

```
function [TC, MCS, smile, smilef,A]=DMonteCarlo1M(DATA,N,j)

smile=[];

A=[];

%for j=13:13

for i=0:3

S=smiledata(DATA(j,4+i),DATA(j,10+i),DATA(j,16+i),DATA(j,22+i),DATA(j,28+i));

smile=[smile;S];

end

ml=[DATA(j,3),DATA(j,3),DATA(j,3),DATA(j,3),DATA(j,3)];

smile=[ml;smile];

[Ms,ms,K1Msmile]=supsmileK1M(DATA(j,1),DATA(j,70),DATA(j,38),smile(5,:));

K=round(ms*100)/100:.01:round(Ms*100)/100;

delta=[.9 .75 .5 .25 .1];

SK=[];

for i=2:5

[Ms,ms,K1Msmile]=supsmileK1M(DATA(j,1),DATA(j,67+i-2),DATA(j,35+i-2),smile(i,:));

sk=interp1(K1Msmile,smile(i,:).^2,K,'cubic');

sk=sqrt(sk);
```

```
SK=[SK,sk'];  
  
end  
  
mesh([5 10 15 20],K,SK)  
  
hold on  
  
ml=K.*DATA(j,3)./K;  
  
SK=[ml',SK];  
  
%mesh([1 5 10 15 20],K,SK)  
  
y=1;  
  
S=ones(22,length(K));  
  
time=[0 5 10 15 22];  
  
for i=1:1:22  
  
y=1;  
  
for x=round(ms*100)/100:.01:round(Ms*100)/100;  
  
w = interp2(time,K,SK.^2,i,x,'spline');  
  
if w<0  
  
w=0;  
  
end  
  
S(i,y)=sqrt(w);  
  
y=y+1;  
  
end  
  
end  
  
md=1:1:22;
```

```

mesh(md,K,S')

smilef=S;

for i=2:1:22

for x=1:length(K);

sf2=(S(i,x).^2).*i-sum(smilef(1:i-1,x).^2);

if sf2<0

sf2=0;

end

smilef(i,x)=sqrt(sf2);

end

end

if min(smilef)<=0

for i=1:1:22

for x=1:length(K);

if smilef<=0

smilef(i,x)=sqrt(interp2(1:1:22,K,smilef.^2,i,K(x),'spline'));

end

end

end

end

end

%mesh(md,K,smilef')

[w r]=tasafoward3M([1 5 10 15 22],DATA(j,58:62));

```

```

FIX=DATA(j,1);
MCS=ones(N,22);
for n=1:N
MCS(n,1)=FIX;
for i=2:22
x=wwol(MCS(n,i-1),S(i,:),K,r(i));
DFIX=r(i)/260+normrnd(0,1)*S(i,x)*sqrt(1/260);
MCS(n,i)=round(MCS(n,i-1)*exp(DFIX)*10000)/10000;
end
end
TC=MCS(:,22);
A=[A TC];
%end
smile=S;

```

## 8.6. Funcion GAMLSS de R

*Generalized Additive Models for Location, Scale and Shape (GAMLSS) son modelos de regresión paramétrica usados por primera vez por Rigby y Stasinopoulos (2001, 2005) y Akantziliotou (2002) buscando resolver algunas limitaciones de los modelos lineales generalizados (GLM) y aditivos generalizados (GAM), Nelder y Weddeburn (1972) y Hastie y Tibshirani (1990) respectivamente.*

*En GAMLSS se relaja el supuesto de distribución de la familia exponencial para*

*las variables explicativas y se reemplazó por una familia general de distribuciones que incluyen mayor sesgo y kurtosis.*

GB2 {gamlss.dist} R Documentation

The generalized Beta type 2 distribution for fitting a GAMLSS

Description

This function defines the generalized t distribution, a four parameter distribution. The response variable is in the range from zero to infinity. The functions dGB2, GB2, qGB2 and rGB2 define the density, distribution function, quantile function and random generation for the generalized beta type 2 distribution.

Usage

```
GB2(mu.link = "log", sigma.link = "identity", nu.link = "log",
    tau.link = "log")
dGB2(y, mu = 1, sigma = 1, nu = 1, tau = 0.5, log = FALSE)
pGB2(q, mu = 1, sigma = 1, nu = 1, tau = 0.5, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)
qGB2(p, mu = 1, sigma = 1, nu = 0, tau = 0.5, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)
rGB2(n, mu = 1, sigma = 1, nu = 0, tau = 0.5)
```

Arguments

`mu.link` Defines the `mu.link`, with "identity"link as the default for the `mu` parameter.

`sigma.link` Defines the `sigma.link`, with "log"link as the default for the `sigma` parameter.

`nu.link` Defines the `nu.link`, with `"log"` link as the default for the `nu` parameter.

`tau.link` Defines the `tau.link`, with `"log"` link as the default for the `tau` parameter.

`y,q` vector of quantiles

`mu` vector of location parameter values

`sigma` vector of scale parameter values

`nu` vector of skewness `nu` parameter values

`tau` vector of kurtosis `tau` parameter values

`log, log.p` logical; if TRUE, probabilities `p` are given as  $\log(p)$ .

`lower.tail` logical; if TRUE (default), probabilities are  $P[X \leq x]$ , otherwise,  $P[X > x]$

`p` vector of probabilities.

`n` number of observations. If  $\text{length}(n) > 1$ , the length is taken to be the number required

#### Details

The probability density function of the Generalized Beta type 2, (GB2), is defined as

$$f(y|\mu,\sigma,\nu,\tau)=\text{abs}(\sigma)*y^{\{\sigma*\nu-1\}}(\mu^{(\sigma*\nu)}*\text{Beta}(\nu,\tau)(1+(y/\mu)^{\sigma})^{-\nu})$$

where  $y>0$ ,  $\mu>0$ ,  $-\text{Inf}<\sigma<\text{Inf}$ ,  $\nu>0$  and  $\tau>0$ . .

#### Value

`GB2()` returns a `gamlss.family` object which can be used to fit the GB2 distribution in the `gamlss()` function. `dGB2()` gives the density, `pGB2()` gives the distribution function, `qGB2()` gives the quantile function, and `rGB2()` generates random deviates.

## Warning

The qSHASH and rSHASH are slow since they are relying on golden section for finding the quantiles

## Note

## Author(s)

Bob Rigby and Mikis Stasinopoulos

## Examples

## GB2() #

```
y<- rGB2(200, mu=5, sigma=2, nu=1, tau=1)
```

```
library(MASS)
```

```
truehist(y)
```

```
fx<-dGB2(y=seq(0.01, 20, length=200), mu=5 ,sigma=2, nu=1, tau=1)
```

```
lines(seq(0.01,20,length=200),fx)
```

```
# something funny here
```

```
histDist(y, family=GB2, n.cyc=60)
```

```
integrate(function(x) x*dGB2(y=x, mu=5, sigma=2, nu=1, tau=1), 0, Inf)
```

```
mean(y)
```

```
curve(dGB2(y=x, mu=5 ,sigma=2, nu=1, tau=1), 0.01, 20, main = "The GB2
density mu=5, sigma=2, nu=1, tau=4")
```

## Results

```
***** GAMLSS Version 2.0-0 *****
```

For more on GAMLSS look at <http://www.gamlss.com/>

Type `gamlssNews()` to see new features/changes/bug fixes.

```
> png(filename="images/GB2_ %03d.png",width=480, height=480)

> ### Name: GB2

> ### Title: The generalized Beta type 2 distribution for fitting a GAMLSS

> ### Aliases: GB2 dGB2 pGB2 qGB2 rGB2

> ### Keywords: distribution regression

>

> ### ** Examples

>

> GB2() #

GAMLSS Family: GB2 Generalized beta 2 (i.e. of the second kind)

Link function for mu : log

Link function for sigma: identity

Link function for nu : log

Link function for tau : log

> y<- rGB2(200, mu=5, sigma=2, nu=1, tau=1)

> library(MASS)

> truehist(y)

> fx<-dGB2(y=seq(0.01, 20, length=200), mu=5 ,sigma=2, nu=1, tau=1)

> lines(seq(0.01,20,length=200),fx)

> # something funny here

> histDist(y, family=GB2, n.cyc=60)
```

GAMLSS-RS iteration 1: Global Deviance = 1182.88

GAMLSS-RS iteration 2: Global Deviance = 1182.658

GAMLSS-RS iteration 60: Global Deviance = 1181.015

Family: c("GB2", "Generalized beta 2 (i.e. of the second kind)")

Fitting method: RS()

Call: gamlss(formula =  $y \sim 1$ , family = FA, n.cyc = 60)

Mu Coefficients:

(Intercept)

1.888

Sigma Coefficients:

(Intercept)

1.645

Nu Coefficients:

(Intercept)

-0.01600

Tau Coefficients:

(Intercept)

0.3428

Degrees of Freedom for the fit: 4 Residual Deg. of Freedom 196

Global Deviance: 1181.02

AIC: 1189.02

SBC: 1202.21

## Bibliografía

- [1] Arild Syrdal (2002); “A Study of Implied Risk-Neutral Density Functions in the Norwegian Option Market”; Working Paper; Norges Bank.
- [2] Áron Gereben & Klára Pintér (2005); "Implied volatility of foreign exchange options: is it worth tracking?"; MNB Occasional Papers 2005/39, Magyar Nemzeti Bank (The Central Bank of Hungary).
- [3] Bahra, Bhupinder (1997); “Implied risk-neutral probability density functions from optionprices: theory and application”; Working Paper 66; Bank of England.
- [4] Barone-Adesi, G. and Whaley, R. E. (1987); “Efficient Approximation of American Option Values”; The Journal of Finance. Vol. 42. June. (301-320).
- [5] Benavides, G. (2004); “Predictive Accuracy of Futures Option Implied Volatility: The Case of the Exchange Rate Futures Mexican Peso - US Dollar”. Working paper.
- [6] Benavides, Guillermo. y Mora Israel (2006); “Parametric vs. Non-Parametric Methods for Estimating Option Implied Risk-Neutral Densities: The Case of the Exchange Rate Mexican Peso-US Dollar and Mexican Interest Rates “; Ensayos Revista de Economía, Vol. 27, No. 1, May 2008.

- [7] Black, F. y M. Scholes (1973); “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”; *Journal of Political Economy*; 81.
- [8] Bliss, Robert R. y Nikolaos Panigirtzoglou (2000); “Testing the stability of implied probability density functions”; Working Paper; Bank of England.
- [9] Breeden, D. y R. Litzenberger (1978); “Prices of State-Contingent Claims Implicit in Options Prices”; *The Journal of Business*; 51. Abe, Marcos, Chang, Eui y Tabak, Benjamin (2006); *Forecasting Exchange Rate Density Using Parametric Models: The Case of Brazil*; *Revista Brasileira de Finanças* 2007.
- [10] Buff, Robert (2002); “Uncertain Volatility Models – Theory and Applications”; Springer Finance.
- [11] Campa, José y Chang, Kevin (1997); “Implied exchange rate distribution evidence from OTC option markets”; NBER Working Paper.
- [12] Cincibuch, Martin (2004); “An Interpretation of Czech FX Options”; *Czech Journal of Economics and Finance*, 54.
- [13] Clews, Roger, Nikolaos Parigirtzoglou y James Proudman (2000); “Recent developments in extracting information from option markets”; *Monetary Instruments and Markets Division*; Bank of England Quarterly Bulletin.
- [14] Díaz de León, Alejandro y Casanova, Martha Elena; “Expectativas del mercado implícitas en los precios de instrumentos derivados: aplicaciones al mercado cambiario y petrolero”; Working Papers No 2004-01; Banco de México.

- [15] De Lara Haro, Alfonso (2005); "Medición y Control de riesgos financieros", tercera edición; Limusa.
- [16] Duclaud González de Castila, Javier, Galán Medina, Manuel y Garcia Tamés, Alonso; "Una estrategia de acumulación de reservas mediante opciones de venta de dólares. El caso del banco de México"; Banco de México.
- [17] Fouque, Jean Pierre, Papanicolaou, George y Siscar, Ronnie (1998); "Derivatives in financial markets with stochastic volatility"; Cambridge University Press.
- [18] Garman, M.B. and Kohlhagen, S. W. (1983). "Foreign Currency Option Values". Journal of International Money and Finance". Vol. 2.
- [19] Hull, John C. (1997); "Options, Futures, and other Derivatives"; Third Edition, Prentice Hall.
- [20] Kijima, Masaaki (2002); "Stochastic Processes with Applications to Finance"; Chapman & Hall.
- [21] Lan ZHANG, Per A. MYKLAND; ".A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility With Noisy High-Frequency Data"; Diciembre 2005 American Statistical Association.
- [22] Luenberger, David (1997); "Investment Science"; Oxford University Press, USA.
- [23] Magnus Andersson, Magnus Lomakka (2001); "Evaluating implied RNDs by some new confidence interval estimation techniques"; Journal of banking and finance; Vol. 29.

- [24] Malz, A M (1996); "Using option prices to estimate realignment probabilities in the European Monetary System: the case of sterling-mark", *Journal of International Money and Finance*, 15.
- [25] Malz, A M (1997); "Option-implied probability distributions and currency excess returns"; *Federal Reserve Bank of New York Reports*, No 32.
- [26] Malz, Allan. M. (1997); "Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate From Option Prices"; *Journal Of Derivatives*; Vol. 5.
- [27] Malz, Allan.M (2000); "Do Implied Volatilities Provide Early Warning of Market Stress?"; *Risk Metrics Journal*; Vol. 1.
- [28] Mc Manus, Des (1999); "The Information Content of Interest Rate Futures Options"; *Working Paper 99-15*; Bank of Canada.
- [29] Mc Culloch (1971) "Measuring the Term Structure of Interest Rates"; *Journal of Business* 44.
- [30] Melick, William R. y Charles P. Thomas (1997); "Using options prices to infer PDF's for asset prices: an application to oil prices during the Gulf Crisis"; *International Finance Discussion Paper 541*; Board of Governors of the Federal Reserve System.
- [31] Mikis Stasinopoulos, Robert A. Rigby; "Generalized Additive Models for Location Scale and Shape (GAMLSS) in R"; *Journal of Statistical Software*; December 2007, Volume 23, Issue 7.

- [32] Mood, Alexander, Boes, Duane y Graybill, Franklin (1974); "Introduction to the theory of statistics", third edition; Mc Graw Hill.
- [33] Olli Castrén 2005; "Estimating and analysing currency options implied risk-neutral density functions for the largest new EU member states"; Working Paper Series NO. 440.
- [34] Prasanna Gai y Nicholas Vaus (2005); "Measuring investors' risk appetite"; Working Paper no.283; Bank of England.
- [35] Rebonato, R. (1999). "Volatility and Correlation". JohnWiley & Sons, New York.
- [36] Sidaoui, José Julián (2003); "Policies for international reserve accumulation under a floating Exchange rate regime: the experience of México (1995-2003)"; BIS Papers No. 23.
- [37] Shreve, Steven (1997); "Stochastic Calculus and Finance"; Berkeley;
- [38] Shimko, D. (1993). Bounds of probability, Risk 6.
- [39] Tunaru, R. & Albot, G. (2005); "An Investigation of parametric risk neutral density estimation"; Cass Business School Working Paper
- [40] Waggoner, D F (1997); "Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices"; working paper, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- [41] Weinberg, Steven (2001); " Interpreting the volatility smile: an examination of the information content of option prices"; International Finance Discussion Papers No 706; Board of Governors of the Federal Reserve System.

- [42] Werner, Alejandro y Milo, Alexis (1998); “Acumulación de reservas internacionales a través de venta de opciones: el caso de México”, Documento de investigación No. 9801; Banco de México.
- [43] Workshop held at the BIS (1999); “Estimating and interpreting probability density functions”; monetary and economic department; bank for international settlements.
- [44] Zbigniew Kozikowski (2007); “Finanzas Internacionales”; Segunda edición; Mc Graw Hill.