

**Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales**

Simulación Numérica de Ensayos de  
Compresión para Determinar las  
Propiedades Mecánicas de Materiales  
Celulares

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
*Maestro en Ciencia e Ingeniería en Materiales*

Presenta

Ing. Humberto Ramiro López Cervantes

Director de Tesis:

Dr. Rafael Schouwenaars Franssens



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

Cuando el corazón esta vacío,  
lo que tengas en la cabeza no importa.

---

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres. A mi madre porque la fuerza con la que trabajas me enseña día con día a nunca rendirme, a no detenerme hasta alcanzar lo que me propongo, a trabajar con honestidad y respeto, por confiar en mí. A mi padre porque me enseñaste el valor de la disciplina y a asumir la responsabilidad de mis actos, pero sobre todo agradezco el amor, cariño y comprensión que siempre me demostraron.

A mis hermanos. José Luis por mostrarme el valor de amar tu profesión. Nohemí por no rendirte a pesar de todo, por conservar tu alegría y ganas de disfrutar las cosas simples de la vida. A mi tía Rosalía gracias por los sus consejos.

A mis mejores amigos. Arturo por todos los consejos, apoyo y por enseñarme la importancia de tomar las decisiones analizando y evaluando las opciones objetivamente, siempre tomando la decisión más práctica. Othón por el apoyo que siempre me brindaste, por escucharme y aconsejarme en los momentos más difíciles. Paco gracias por escucharme y apoyarme cuando lo he necesitado, pero sobre todo les agradezco su amistad.

Ara, porque desde el momento en que te conocí te convertiste en una importante motivación en mi vida, que a pesar del tiempo y circunstancias estas en mi mente y corazón.

A mis compañeros de la UDIATEM, Dr. Victor Hugo, Armando, Sofía, Osvaldo, Niño, Edgar, Efraín, Nacho, Jorge, Lázaro, David, Hugo, Agus, Carlos, Roberto, Pacosan y Germán por permitirme formar parte del grupo y por esos excelentes viernes de fútbol. Yolanda gracias por tus consejos. Bere por la alegría con la que llenabas el cubículo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por concederme la mejor instrucción durante estos años. A CONACYT por los recursos necesarios para el desarrollo del proyecto.

Dr. Armando Ortiz por el apoyo brindado a lo largo de mi estancia en el grupo.

Fernando por el tiempo y paciencia que me brindaste a lo largo del desarrollo de este trabajo.

A mi tutor, el Dr. Rafael Schouwenaars por las enseñanzas que a lo largo de este tiempo fueron determinantes en mi formación, el tiempo, dedicación y conocimientos fundamentales para el desarrollo de este trabajo, pero sobre todo le agradezco la confianza y apoyo que ha puesto en mí.

A los miembros del jurado, Dr. Arturo Barba, Dr. Bernardo Hernández, Dr. Abel Camacho y Dr. Fernando Velázquez, por el tiempo que se tomaron para revisar este trabajo y por sus comentarios.

Finalmente quiero agradecer a todas las personas que voluntaria, pero sobretodo involuntariamente, hicieron posible la elaboración de esta tesis.

# ÍNDICE

<b>I.</b>	<b>SÓLIDOS CELULARES</b>	
I.1	Introducción	1
I.2	La estructura de los sólidos celulares	2
I.3	Estructura Celular Tipo Panal de Miel y Espumas	2
I.4	Propiedades de los Sólidos Celulares	5
I.5	Aplicación de los sólidos celulares	6
	a) Aislamiento térmico	7
	b) Empaquetamiento	7
	c) Estructural	8
	d) Flotabilidad	8
<b>II.</b>	<b>ANATOMÍA Y MECÁNICA DEL HUESO</b>	
II.1	Introducción	10
II.2	Composición del hueso	10
	II.2.1 Matriz Orgánica	11
	II.2.2 Fibrillas de colágeno	11
	II.2.3 Células Oseas	11
	II.2.4 Componentes no colagénicos	12
	II.2.5 Matriz Orgánica	13
II.3	Estructura	14
II.4	Clasificación	14
	II.4.1 Hueso Compacto	16
	II.4.2 Hueso Esponjoso	17
II.5	Propiedades Mecánicas del Hueso	18
	II.5.1 Propiedades Mecánicas del Hueso Trabecular	18
	II.5.2 Propiedades Estructurales	19
<b>III.</b>	<b>MODELADO NÚMÉRICO DEL HUESO TRABECULAR</b>	21
III.1	Diagrama de Voronoi	21
	III.1.1 Por crecimiento de círculos	23
	III.1.2 Por el método de las mediatrices	25
	III.1.3 Construcción del diagrama de Voronoi 3D	30
III.2	Aspectos generales del método de elemento finito	34
<b>IV.</b>	<b>MODELOS DE HUESO TRABECULAR EN ABAQUS®</b>	
IV.1	Módulo de Elasticidad	45
VI.2	Módulo de Rigidez a Corte	46
VI.3	Coeficiente de Poisson	47
VI.4	Construcción 3D de los modelos de hueso trabecular	48
VI.5	Estructura del archivo .inp	52
	IV.5.1 Modelo	53

---

# Índice

---

IV.5.2	Heading	53
IV.5.3	Impresión de datos	54
IV.5.4	Geometria	54
IV.5.5	Propiedades del Material	57
IV.5.6	Perfil de analisis	57
<b>V.</b>	<b>MEF APLICADO AL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE VORONOI 3D</b>	<b>60</b>
V.1	Ecuaciones diferenciales características	61
V.1.1	Elementos Armadura	61
V.1.1	Elementos Viga	62
V.2	Reformulación del problema en forma variacional	64
V.2.1	Ecuaciones de elemento armadura usando el método de Galerkin	65
V.2.2	Ecuaciones de elemento viga usando el método de Rayleigh-Ritz	69
V.2.3	Elementos Marco en el Espacio	73
V.2.4	Transformación de un sistema de coordenadas locales a globales	78
<b>VI.</b>	<b>POST-Procesamiento</b>	<b>82</b>
VI.1	Tensor de Esfuerzos	84
VI.2	Esfuerzo de Von Mises	88
VI.3	Introducción del concepto de falla	89
VI.4	Historia	91
VI.5	Determinación de la Curva Esfuerzo-Deformación para una compresión virtual	92
<b>VI.</b>	<b>Análisis de resultados y conclusiones</b>	<b>95</b>
VII.1	Modelos simulados en ABAQUS®	96
VII.1.1	Sobre el modulo de elasticidad	98
VII.1.2	Sobre el modulo de rigidez	101
VII.1.3	Sobre el coeficiente de Poisson	102
VII.2	Modelos simulados mediante FEM programado en Mathematica®	104
VII.3	Conclusiones	107
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		<b>A - C</b>

---

# I. Sólidos Celulares

## I.1 Introducción

Un sólido celular es aquel que está formado por una red interconectada de placas y soportes sólidos, los cuales forman las aristas y caras de las celdas. Tres estructuras típicas son las que se muestran en la Figura I.1. La más simple (Figura I.1.a) es un arreglo en dos dimensiones de polígonos, los cuales llenan un área plana como las celdas hexagonales de los panales abeja. Por esta razón a este tipo de materiales celulares bidimensionales se les conoce con ese nombre. Con frecuencia las celdas son poliédros, los cuales llenan un espacio tridimensional; se pueden encontrar tales materiales celulares tridimensionales en las espumas (Gibson, 1988). Si el sólido del cual está hecho la espuma, contiene únicamente aristas de celdas (es decir que las celdas están conectadas a través de caras abiertas), se dice que la espuma es de celda abierta (Figura I.1.c). Si las caras son también sólidas, entonces cada una de las celdas está aislada de sus vecinos, se dice entonces que es un material celular de celda cerrada (Figura I.1.b). Por supuesto, algunas espumas son parcialmente abiertas o parcialmente cerradas.

Una de las características más importantes de un sólido celular es la densidad relativa,  $\frac{\rho^*}{\rho^s}$ , que es, la densidad del material celular,  $\rho^*$ , dividida por la del sólido del cual están hechas las paredes de la celda,  $\rho^s$ . Existen espumas de ultra-baja-densidad que pueden llegar a tener una densidad relativa tan baja como 0.001. Son utilizadas espumas poliméricas para amortiguar, empaquetar y aislar, teniendo densidades relativas que se encuentran entre 0.05 y 0.2; el corcho está en 0.14 aproximadamente; muchas maderas blandas se encuentran entre 0.15 y 0.40. Conforme la densidad relativa aumenta, el espesor de las paredes de las celdas aumentan y los espacios porosos se reducen. La transición entre un material celular y un material que se define como un sólido que contiene sólo unos poros aislados se da para una densidad relativa mayor a 0.3 (Gibson, 1988).



Figura I.1 Ejemplos de sólidos celulares: a) Un panal de bidimensional: b) Espuma tridimensional de celdas cerradas: c) Espuma tridimensional de celdas abiertas (<http://www.sciencephoto.com>)

## 1.2 La estructura de los sólidos celulares

La estructura de las celdas ha fascinado a los filósofos naturales por más de 300 años. Hooke examinaba su forma, Kelvin analizaba su empaquetamiento y Darwin reflexionaba sobre su origen y funciones. El tema es importante porque las propiedades de los sólidos celulares dependen directamente de la forma y la estructura de las celdas. El objetivo principal es caracterizar el tamaño, la forma y la topología, es decir, la conectividad de las paredes de las celdas y de los espacios porosos (Gibson, 1988).

La característica estructural más importante de un sólido celular, como ya se mencionó, es la densidad relativa. La fracción de espacio poroso en la espuma es la porosidad; ésta es simplemente  $(1 - \frac{\rho^*}{\rho_s})$ . En primera instancia se podría suponer que el tamaño de la celda también es un parámetro importante; en ocasiones sí lo es, sin embargo, la mayoría de las propiedades mecánicas y térmicas dependen débilmente del tamaño de la celda. La forma de la celda es un parámetro de mayor importancia; cuando las celdas son equiaxiales las propiedades son isotrópicas, pero cuando las celdas son (ligeramente) alargadas o aplanadas, las propiedades dependen de la dirección.

Hay una importante distinción topológica. La primera es entre las celdas en dos dimensiones (en las cuales las paredes de las celdas tiene un común generador, como en las celdas paneles de abeja) y las celdas tridimensionales, en las cuales las paredes de las celdas tienen orientaciones aleatorias en el espacio (como una espuma). La distinción es útil: el modelado de las propiedades en dos dimensiones es mucho más simple que en el espacio tridimensional; sin embargo, gran parte del análisis puede extenderse usando argumentos de aproximación, para la compleja geometría de las espumas. En tres dimensiones es posible también hacer la distinción entre celdas abiertas y cerradas. Detalles topológicos sutiles – la conectividad<sup>1</sup> de las aristas y caras, por ejemplo – tienen un profundo e importante efecto en las propiedades de los sólidos celulares.

## 1.3 Estructura celular tipo panal de miel y espumas

Los rangos de las estructuras de los sólidos celulares van del orden casi-perfecto en los panales de miel de las abejas, a las desordenadas redes tridimensionales de las esponjas y espumas. Cuando, alrededor de 1660, Robert Hooke perfeccionaba su microscopio, uno de los primeros materiales que examinó fue el corcho. Lo que vió, lo llevó a identificar la unidad básica de la planta y la estructura biológica; esto fue lo que él llamó “la celda”. En su libro *Micrographia* (Hooke, 1664) lo documenta así:

*I no sooner discern'd these (which were indeed the first microscopical pores I ever saw, and perhaps, that were ever seen, for I had no met with any writer or person that had made any*

---

<sup>1</sup> La conectividad de las caras de las celdas es el número de caras que coinciden en una arista; ésta es usualmente tres pero puede ser de hasta seis. La conectividad de las aristas de las celdas es el número de aristas que coinciden en un nodo o vértice: usualmente tres en los panales de abeja y cuatro en las espumas; sin embargo, puede ser mucho mayor.

mention of them before this) but me thought I had in the discovery of them, presently hinted to me the true and intelligible reason of all phenomena of cork.

Hooke realizó cuidadosos dibujos de las celdas del corcho en el que se muestran formas aproximadamente hexagonales en el plano y formas tipo caja en el plano normal a éste (Figura I.2). Las celdas se apilan en largas filas, con muchas paredes delgadas “como películas de cera en un panal de abeja”.

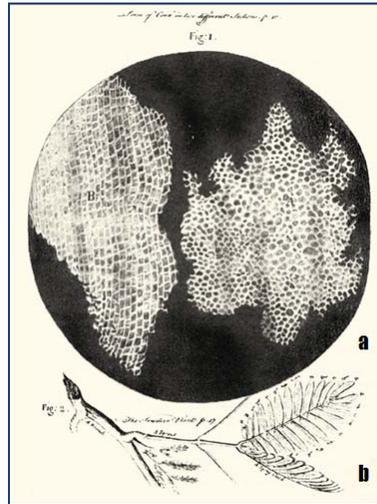


Figura I.2 a) Secciones radical y b) tangencial del corcho observadas por Robert Hooke (1664)

Y si alguna vez hubo una estructura que fascinara a los matemáticos, físicos y biólogos, esa fue la de los panales (Figura I.3). Ésta es ciertamente la conformación celular más estudiada de todas, y una de las más bellas. Euclides (3<sup>er</sup> siglo A.C.) admiraba su regularidad, y Plinio (A.D 77) habla de los hombres que dedicaron su vida a su estudio. La literatura es vasta –Thompson (1961) enlista más de 30 tratados eruditos sobre el tema, publicados antes de 1860 e incluye obras de hombres de la altura de Maclaurin (1742), Georges Louis Leclere Buffon (1753) y Chales Darwin (1859). La regularidad de las celdas de las abejas es notable (aunque no es perfecta como generalmente se cree), y esto ayuda a sintetizar los sólidos celulares tipo panal de abeja en dos dimensiones.



Figura I.3 Paneles de miel de abejas (<http://www.sciencephoto.com>)

Los materiales celulares tipo paneles son manufacturados de metal o papel para los núcleos de los paneles sándwich y de cerámicos para soportes para catalizadores y componentes de los intercambiadores de calor (Figura 1.4). Muchos de ellos con celdas hexagonales como las de las abejas; entonces la conectividad de las aristas es tres. Los paneles con celdas cuadradas o triangulares, con una conectividad de cuatro o seis pueden ser hechos, pero son menos eficientes en el sentido del uso de sólido para encerrar el mismo volumen de poros. Un panel aleatorio (como una espuma de jabón entre dos placas de vidrio) tiene pequeñas celdas con tan sólo tres de sus lados y celdas grandes con hasta nueve lados (éste no es límite superior); pero si la conectividad es fija (esto es, tres en el caso de la espuma de jabón) el promedio del número de aristas por celda es determinado por las leyes topológicas las cuales este trabajo no contempla abordarlas.

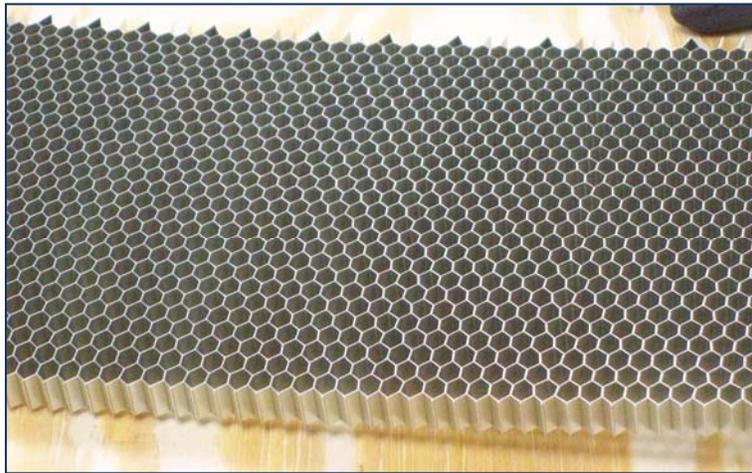


Figura 1.4 Intercambiadores de calor de aluminio utilizando el concepto de Paneles.  
(<http://www.sciencephoto.com>)

El estudio de la geometría de los sólidos celulares tridimensionales (que llamaremos espuma) tiene una calidad casi tan distinguida como la de los paneles. Plateau (1873), en su tratado sobre la geometría en el espacio, identifica la forma de la celda como un rombododecaedro. Es ciertamente una posible partición del espacio para un arreglo de celdas con esa forma, pero ésta no es la forma más eficiente de hacerlo. Durante más de un siglo, se pensó que la celda que llenaba el espacio minimizando el área superficial por unidad de volumen era el “Kelvin’s tetrakaidecahedron” con caras ligeramente curvadas (Kelvin, 1887) (Figura 1.5). Recientemente, usando *software* computacional para la minimización de áreas superficiales (Brakke, 1992), Weaire y Phelan (1994) identificaron una celda unitaria de incluso un área superficial por unidad de volumen de aproximadamente 0.3%. La celda unitaria está formado por 6 celdas de 14 lados (con 12 caras pentagonales y 2 hexagonales) y dos dodecaedros pentagonales, todos con igual volumen. Los 14 lados de las celdas son organizados en tres ejes ortogonales con las celdas de 12 lados que se encuentran en los intersticios entre ellas, dando una red estructural cubica. Únicamente las caras hexagonales son planas; todas las caras pentagonales son caras curvadas. Pero la eficiencia del llenado del espacio no es el único factor que influye en la forma de las celdas, y cuando otros factores dominan, la forma de la celda puede ser muy diferente a cualquiera de éstos dos tipos.

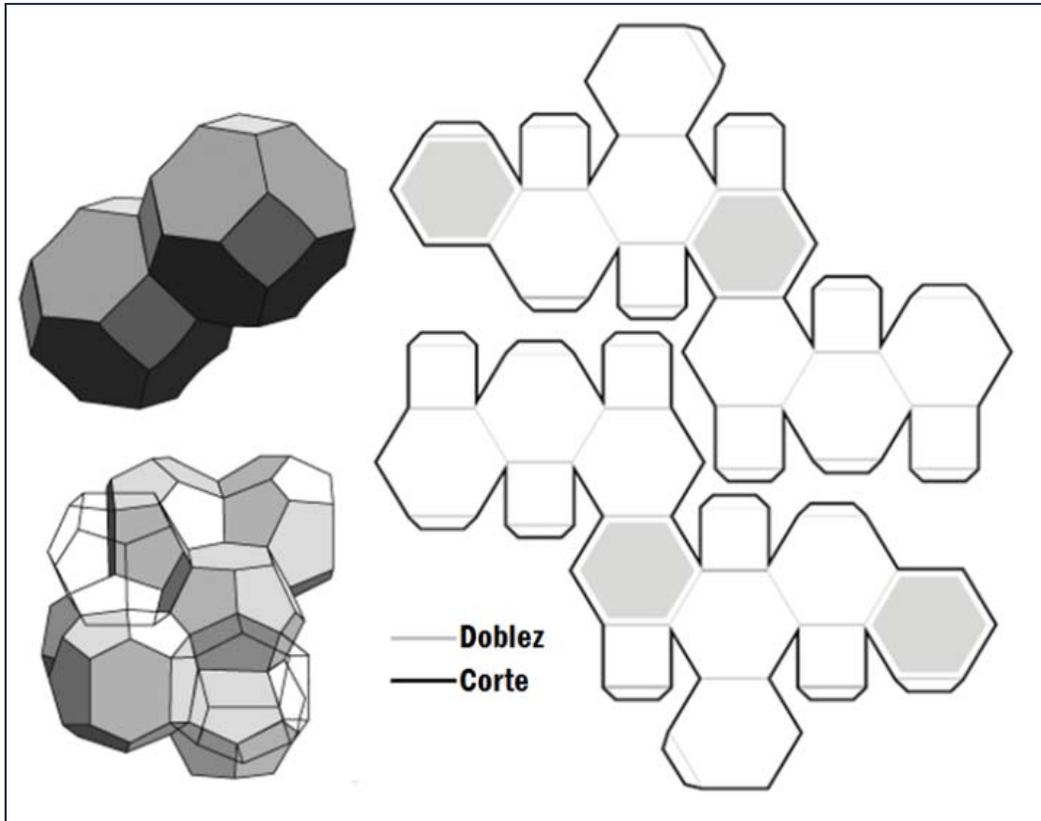


Figura I.5 Tetracaidecaedro de Kelvin (<http://es.wikipedia.org>)

## I.4 Propiedades de los sólidos celulares

Las espumas tienen un amplio rango de propiedades disponibles para aplicaciones ingenieriles. La Figura I.6 muestra el rango de estas cuatro propiedades: la densidad, la conductividad térmica, el modulo de Young y la rigidez. La barra café muestra el rango que abarca la propiedad para los sólidos convencionales. La barra roja muestra el rango posible para espumas. Este enorme rango de valores de propiedades crea aplicaciones para espumas que no pueden ser fácilmente llenadas por los sólidos convencionales, y ofrecen un potencial para la inventiva ingenieril. Las bajas densidades permiten el diseño de componentes ligeros y rígidos tales como paneles sándwich, grandes estructuras portátiles y todo tipo de componentes con flotabilidad. La baja conductividad térmica permite un aislamiento térmico seguro y económico que puede ser mejorado únicamente por métodos costosos basados en el uso del vacío. La baja rigidez hace a las espumas ideales para un amplio rango de aplicaciones de amortiguamiento; por ejemplo, espumas elastoméricas que son los materiales estándar para asientos. La baja rigidez y la gran deformación en compresión hacen a las espumas atractivas para aplicaciones de absorción de energía; hay un inmenso mercado para sólidos celulares para la protección de todo desde computadoras hasta desechos peligrosos. En la siguiente sección se discute con un poco más de detalle las aplicaciones para las espumas.

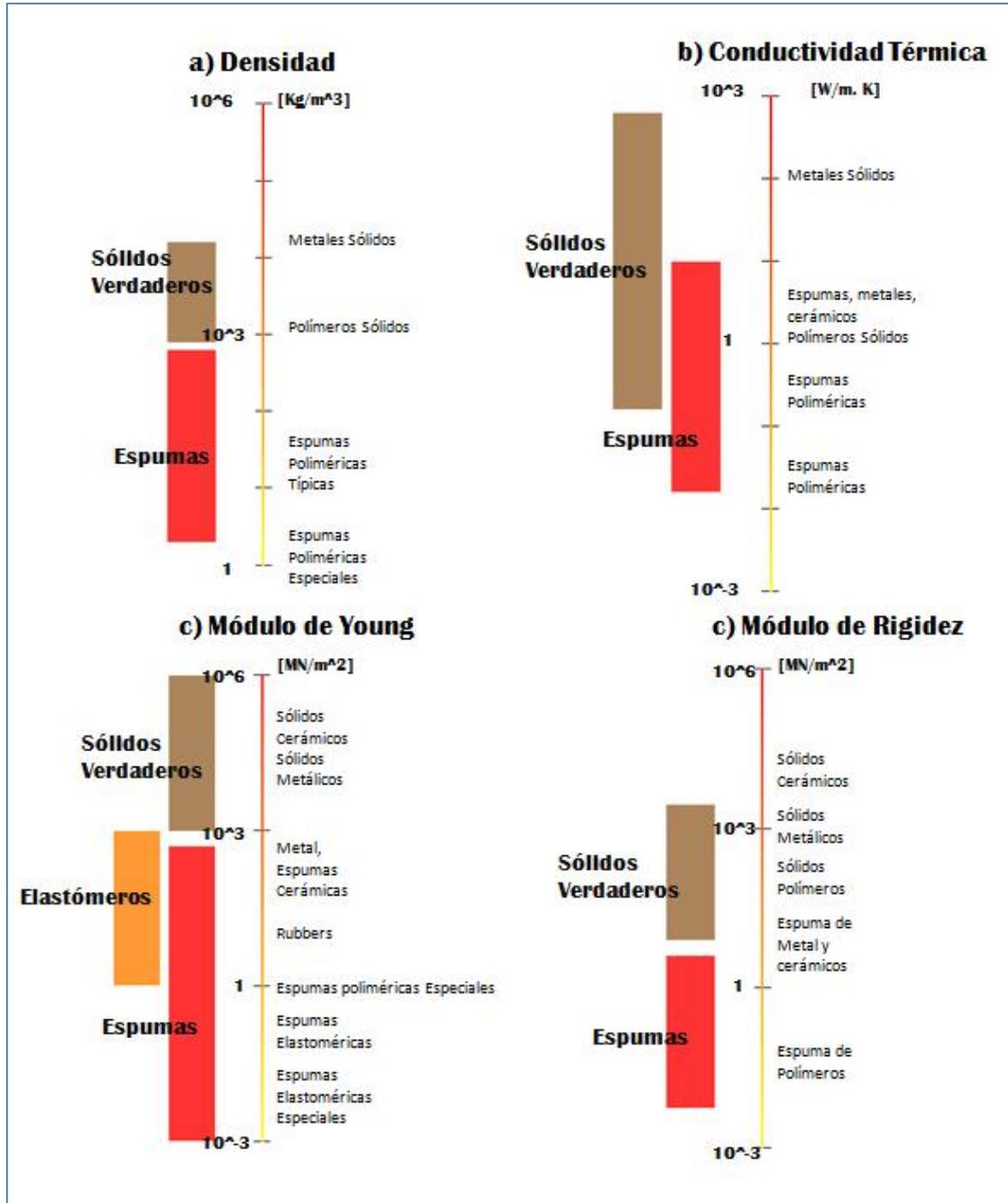


Figura 1.6 El rango de las propiedades disponibles a) densidad , b) conductividad térmica, c) modulo de Young (Gibson, 1988)

## 1.5 Aplicación de los sólidos celulares

Los cuatro diagramas de la Figura 1.6 se relacionan con las cuatro áreas de mayor aplicación de los materiales celulares: Aislamiento térmico, empaquetamiento, usos estructurales y de flotabilidad. Entre ellas, se encuentra las aplicaciones de la mayor cantidad de espumas fabricadas hoy en día.

### a) Aislamiento térmico

La mayor aplicación para espumas poliméricas o de vidrio son las de aislamiento térmico. Productos tan sencillos como las tazas desechables de café hasta los elaborados aislamientos utilizados en cohetes para viajes espaciales, explotan la baja conductividad térmica de las espumas. Los edificios modernos, sistemas de transporte (camiones y vagones de tren de refrigeración) e incluso barcos (particularmente los diseñados para transportar gas natural líquido) aprovechan también esta propiedad. Una particular ventaja de las espumas para la investigación de la ultra baja temperatura es su baja masa térmica la que reduce la cantidad de refrigerante necesario para enfriar el aislante. Lo mismo ocurre para altas temperaturas, en el diseño de hornos y estufas: una gran parte de la energía disipada en los hornos es usada para aumentar la temperatura de las estructuras a su nivel de funcionamiento, la baja masa térmica aumenta considerablemente su eficiencia. La masa térmica de las espumas es proporcional a la densidad relativa, por lo que sólo en un pequeño porcentaje depende del sólido del cual está hecho. (Gibson, 1988)

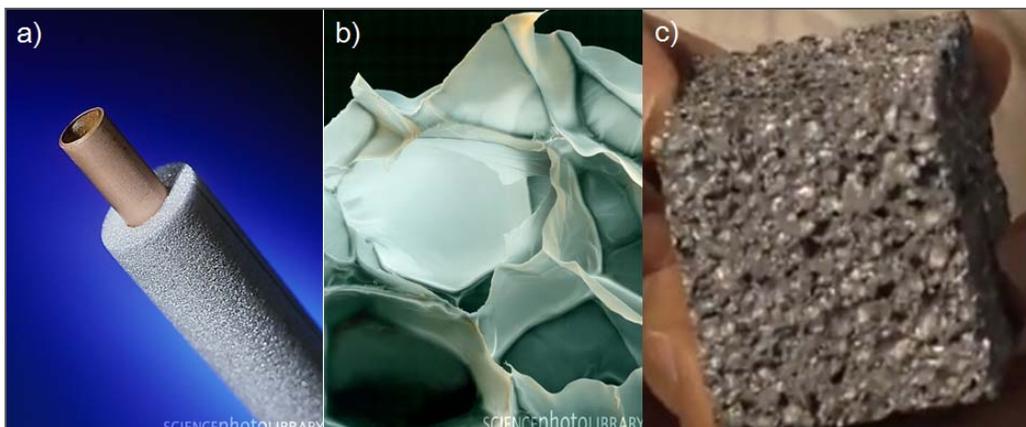


Figura 1.7 Ejemplo de materiales celulares aplicados a aislamiento termico. a) Espuma aislante para tubos de cobre. b) Styrodur: espuma de poliestireno extruido, cuyas celdas (espacios que se ven aquí) se llenan de aire, lo que lo hace un excelente aislante térmico. c) Espuma de aluminio. (<http://www.sciencephoto.com>)

### b) Empaquetamiento

El segundo mayor uso que se le ha dado a los sólidos celulares es el empaquetamiento. Un paquete efectivo debe tener la capacidad de absorber la energía de los impactos o las fuerzas generadas por la desaceleración sin que el contenido sufra esfuerzos perjudiciales. Las espumas son particularmente adecuadas para ello. La Figura 1.4 muestra que la rigidez de una espuma puede ser ajustada sobre un amplio rango siendo esto controlado por la densidad relativa. Además, las espumas pueden ser sometidas a grandes deformaciones de compresión (mayor o igual a 0.7) bajo un esfuerzo prácticamente constante; además, la gran cantidad de energía que puede ser absorbida sin generar esfuerzos elevados.

Se debe notar que las espumas ofrecen también un conjunto de ventajas secundarias para el empaquetamiento. La baja densidad se traduce en paquetes ligeros, reduciendo los costos de manipulación y envío. El bajo costo por unidad de volumen y facilidad de amoldamiento, significa que un artículo con una forma compleja puede ser completamente embebido en un paquete de espuma, protegiéndolo económicamente. Actualmente, las

espumas que se usan ampliamente para el empaquetamiento son el poliestireno, poliuretano y polietileno (Gibson, 1988).

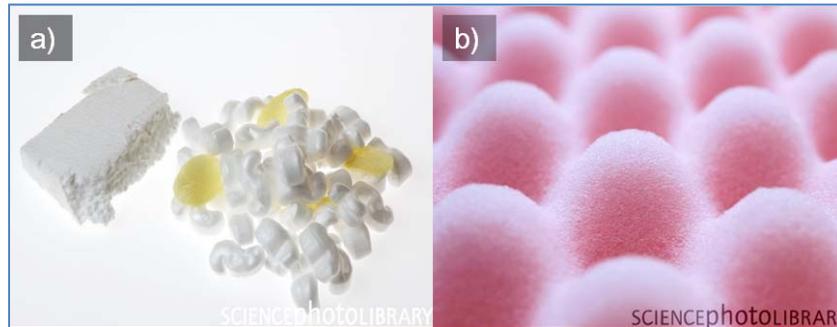


Figura 1.8 a) Material para embalaje de poliestireno. b) Espuma para empaquetar. Se utiliza como relleno durante la manipulación y transporte de mercancías frágiles (<http://www.sciencephoto.com/>).

### c) Estructural

Muchos materiales naturales estructurales son materiales celulares: madera, hueso trabecular y coral. Todos ellos soportan grandes cargas estáticas y cíclicas, por largos periodos de tiempo. El uso de materiales celulares naturales para estructuras para el ser humano ha sido a lo largo de toda su historia. La madera sigue siendo el material estructural más usado en términos volumétricos. El entendimiento de la forma en que las propiedades dependen de la densidad y de la dirección de la carga puede llevar a mejorar los diseños con madera. El interés de la mecánica del hueso trabecular se deriva de la necesidad de entender las enfermedades de los huesos e intentar desarrollar materiales para reemplazar el hueso dañado, incrementado el uso de espumas y paneles sintéticos usados en aplicaciones estructurales específicamente (Gibson, 1988).

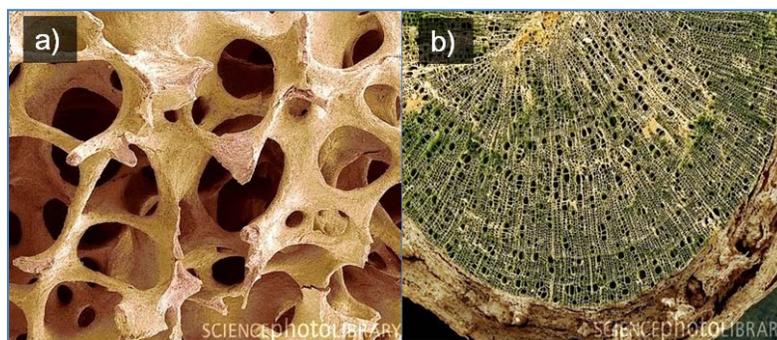


Figura 1.9 Ejemplos de materiales celulares utilizados como elementos estructurales. a) Hueso trabecular obtenido de una micrografía electrónica de barrido (SEM) . b) Tallo de madera. ([http://www.sciencephoto.com](http://www.sciencephoto.com/))

### d) Flotabilidad

Los materiales celulares encontraron en la flotabilidad marina uno de sus primeros mercados. Hoy en día las espumas plásticas de celda cerrada se utilizan para el soporte de estructuras flotantes y como flotadores en barcos. Las espumas son mucho más tolerantes al daño que las bolsas y cámaras de flotación, ya que sus celdas cerradas pueden mantener la

flotabilidad aun cuando existen extensos daños, éstos se ven afectados por inmersiones profundas en agua y no se corroen u oxidan. El equipo para flotación es comúnmente hecho de espumas de poliestireno, polietileno, cloruro de polivinil o silicones. Las espumas para flotación son caracterizadas por un factor de flotabilidad,  $B$ , el cual es usado para calcular el volumen de espuma requerida en una cierta aplicación.

$$B = \frac{\rho_{agua} - \rho_{espuma}}{\rho_{agua}} \quad (1.1)$$

Tomando la densidad del agua como  $1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  y que la densidad de una espuma típica es de aproximadamente  $40 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  un factor típico de flotabilidad es 0.96.

A lo largo del capítulo se ha puesto en evidencia la presencia de los materiales celulares en muy diversas áreas de aplicación y en la naturaleza misma. Dada la amplitud de este tema, el presente trabajo tratará específicamente un tipo de material celular, el *hueso trabecular o esponjoso*. Se toma este material celular en específico, debido a que en los últimos años ha surgido la necesidad de contar con información precisa acerca de las propiedades mecánicas del hueso trabecular, ya que este conocimiento es pieza fundamental para el diseño de prótesis, desarrollo de materiales que lo puedan sustituir, evaluación del deterioro con la edad y causas de fractura.

Con respecto al modelado del hueso trabecular se tiene como precedente el uso del concepto geométrico de *celdas de Voronoi* utilizado para aproximarse a la mesoestructura de este material celular; la aplicación de este concepto ha sido trabajada en dos (Ramirez, 2007. Ruiz, 2008) y tres dimensiones (Bustillo-López, 2008) entregando buenos resultados en ambos enfoques. Este trabajo seguirá la línea del modelado del hueso trabecular en tres dimensiones, ya que el trabajo previo entregó varias herramientas que serán utilizadas a lo largo de este trabajo. Por un lado dejó un programa capaz de generar diversas estructuras de Voronoi y exportarlas en un archivo adecuado para ensayarlas en la paquetería de elemento finito ABAQUS®, un archivo *.bat* con la secuencia de órdenes para encadenar el programa que genera el archivo *.inp* y ABAQUS®, de tal manera que como salida se obtiene el campo de desplazamientos de la estructura. Esto permitirá en un trabajo futuro realizar múltiples ensayos sin necesidad de ingresar manualmente cualquier tipo de datos.

Dado este panorama es importante conocer el objeto de análisis y la herramienta básica que se utilizará a lo largo del trabajo, es decir el diagrama de Voronoi, por lo cual en el siguiente capítulo se desarrollan estos conceptos.

## II. ANATOMÍA Y MECÁNICA DEL HUESO

### II.1 Introducción

El hueso es un tipo de tejido conectivo especializado, caracterizado por su rigidez y dureza como producto de las sales impregnadas en su estructura. Además, es un material auto-reparable capaz de adaptar su masa, forma y propiedades a los requerimientos mecánicos y metabólicos. (Cowin, 2001)

El esqueleto en el ser humano lo conforman alrededor de 208 huesos formados por tejido óseo, cartílagos, médula ósea y el periostio. Estos huesos se pueden clasificar en:

- Huesos largos: huesos duros y densos que brindan resistencia, estructura y movilidad, por ejemplo el fémur.
- Huesos cortos: con mediciones de largo, ancho y alto aproximadamente iguales, como los de las manos y pies
- Huesos planos: están compuestos de una capa de hueso esponjoso entre dos capas delgadas de hueso compacto. Su forma es aplanada, no redondeada, por ejemplo los huesos del cráneo y las costillas

Las principales funciones del hueso son: *la protección de órganos internos, el almacenamiento, el soporte, el movimiento y la regulación iónica*. Éstas lo hacen de suma importancia para estudios biomecánicos. En este trabajo se estudia el comportamiento mecánico del hueso con base en su estructura.

### II.2 Composición del hueso

El tejido óseo está compuesto en un 65% de sustancia mineral, 35% matriz orgánica celular y agua. La fase mineral del hueso está formada por pequeños cristales en forma de agujas, placas y barras localizadas dentro y entre fibras de colágeno (Cowin, 2001). El mineral es en gran parte hidroxapatita impura,  $(Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2)$ , conteniendo también constituyentes tales como carbonato, citrato, magnesio, fluoruros y estroncio incorporado dentro de los arreglos de los cristales o adsorbidos en la superficie del cristal. Sustancias ajenas tales como

polifosfatos, bisfosfonatos, polifosfatos, radionucleidos que pueden ser incorporados con una alta afinidad (Cowin, 2001).

### II.2.1 Matriz orgánica

La matriz orgánica se forma en un 90% de colágeno y aproximadamente un 10% de varias proteínas no colágenas. Las funciones de las proteínas no colágenas no es clara.

### II.2.2 Fibrillas de colágeno

Las fibrillas de colágeno están formadas por un ensamble de moléculas filamentosas las cuales están a su vez formadas por tres cadenas polipeptídicas acomodadas en una configuración helicoidal. Estas cadenas pueden incluir una variedad de secuencias de aminoácidos, de modo que las moléculas pueden mostrar diversidad. El colágeno tipo I se presenta en fibrillas estriadas de 20 a 100 nm de diámetro, agrupándose para formar fibras colágenas mayores. Sus subunidades mayores están constituidas por cadenas  $\alpha$  de dos tipos, que difieren ligeramente en su composición de aminoácidos y en su secuencia. Se les designa como cadena  $\alpha_1$  y cadena  $\alpha_2$ . Las moléculas son ensambladas de tal manera que le dan a las fibras el bandeo periódico característico (repetiéndose axialmente cada 66.8 nm aproximadamente). Las moléculas son estabilizadas por fuerzas intra e intermoleculares, las cuales son esenciales para su característica resistencia a la tracción (Cowin, 2001).



Figura II.1 Fibrillas de Colágeno

(<http://www.electronicafacil.net/ciencia/Article13251.html>).

### II.2.3 Células óseas

Las células que se pueden encontrar en la matriz ósea son:

- a) *Células progenitoras óseas*: células no especializadas derivadas del mesénquima, que es el tejido del que derivan todos los tejidos conectivos. Se encuentran en

la capa interna del periostio, en el endostio y en los canales del hueso que contienen los vasos sanguíneos. A partir de ellas se generan los osteoblastos y los osteocitos

- b) *Osteoblastos*: son células que forman el tejido óseo pero que han perdido la capacidad de dividirse por mitosis. Segregan colágeno y otros materiales utilizados para la construcción del hueso. Se encuentran en las superficies óseas y a medida que segregan los materiales de la matriz ósea, ésta los va envolviendo, convirtiéndolos en osteocitos.
- c) *Osteocitos*: son células óseas maduras, derivadas de los osteoblastos que constituyen la mayor parte del tejido óseo. Al igual que los osteoblastos, han perdido la capacidad de dividirse. Los osteocitos no segregan materiales de la matriz ósea y su función de mantener las actividades celulares del tejido óseo como el intercambio de nutrientes y productos de desecho.
- d) *Osteoclastos*: son células derivadas de monocitos circulantes que se asientan sobre la superficie del hueso y proceden a la destrucción de la matriz ósea (resorción ósea). (Difiore,1949)

## II.2.4 Componentes no colagénicos

Los componentes no colagénicos del hueso incluyen proteínas no colagénicas, proteoglicanos, fosfolípidos, glicoproteínas y fosfoproteínas. Además, la matriz calcificada contiene factores de crecimiento y enzimas tales como la fosfatasa alcalina y la metaloproteinasas. La distribución y cantidad de las proteínas no colagénicas son variables de acuerdo al tipo de hueso y las zonas de la matriz ósea en las que se encuentran localizadas: cantidades importantes de sialoproteína ósea y osteopontina se encuentran presentes en las líneas de cemento y en parches discretos interfibrilares, el tejido óseo es el único que contiene la glicoproteína ácida ósea. Como se puede observar, la función de los componentes no colagénicos puede variar. El grado de calcificación puede ser un factor que contribuya a ello, mientras que la calcificación puede ser, por sí misma, influenciada por las proteínas no colagénicas. Los proteoglicanos pueden tener un efecto regulador, pero su papel como inhibidores o promotores del proceso de calcificación es aún objeto de debate. Los fosfolípidos, que están presentes en la calcificación de la matriz, también se considera que tiene un papel importante en la calcificación.

Varios factores de crecimiento están implicados en la diferenciación de las células óseas y el reclutamiento. Una de las sustancias de especial interés es la proteína morfogenética ósea, que tiene propiedades osteoinductivas y se encuentra en la matriz calcificada.

### II.2.5 Matriz inorgánica

La composición inorgánica del hueso se forma de hidroxiapatita carbonatada con una baja cristalinidad. La matriz está prevista inicialmente para el osteoide no mineralizado (fabricado por los osteoblastos). La mineralización involucra osteoblastos conteniendo vesículas con fosfatasa alcalina, lo que rompe con los grupos fosfato y actúan como los focos para la deposición del calcio y fosfatos; entonces, las vesículas se rompen y actúan como centro para el crecimiento de los cristales. Concretamente, la fase mineral del hueso está formada por estructuras globulares y placas, distribuidas entre las fibrillas de colágeno de los huesos. (Cowin, 2001)

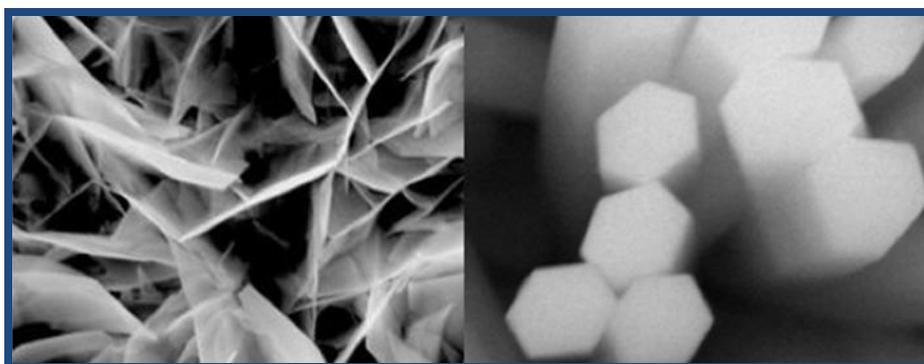


Figura II.2 SEM de hidroxiapatita sobre implante metálico con recubrimiento electroquímico. ([www.sciencephoto.com](http://www.sciencephoto.com))

### II.3 Estructura

La estructura de un hueso largo se compone de diferentes tipos de tejido (Figura II.3). La *diáfisis* es la parte alargada del hueso, la *epífisis* se encuentra en los extremos o terminaciones del hueso, la *metáfisis* es la unión de la diáfisis con las epífisis, el *cartílago articular* es una fina capa de cartílago hialino que recubre la epífisis donde el hueso se articula con otro hueso (reduce la fricción y absorbe los impactos y vibraciones), el *periostio* es la membrana que rodea la superficie del hueso no cubierta por cartílago (esencial en el crecimiento óseo, en su reparación y en su nutrición) y la *cavidad medular* es un espacio cilíndrico situado en la parte central de la diáfisis, dicha cavidad está tapizada por el *endostio*, una membrana que contiene las células osteoprogenitoras.

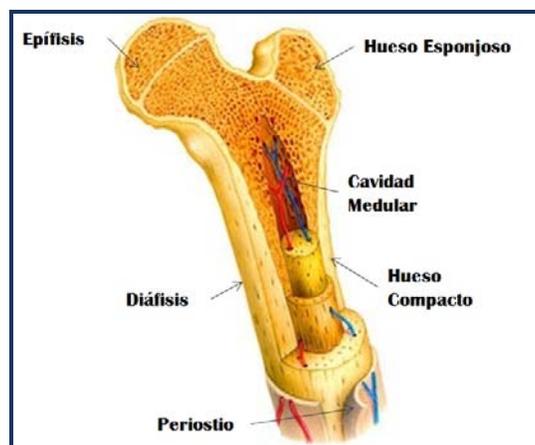


Figura II.3 Esquema de un hueso largo  
 (<http://cienciasnaturales-bio.blogspot.com>)

## II.4 Clasificación

El hueso tiene una estructura jerárquica y propiedades mecánicas vinculadas a las diversas funciones de cada hueso, tal y como lo había propuesto Katz (An & Draughn, 2000) en 1970 y recientemente ampliado por Rho et al y Hoffer et al. Se puede hablar entonces de una primera clasificación del hueso a partir de los niveles jerárquicos antes mencionados, lo cuales se muestran en la Tabla 1.

Una de las razones por las cuales se separa el hueso completo y los bloques de tejido óseo es que las propiedades mecánicas de estos dos niveles son marcadamente diferentes. Por ejemplo, las propiedades mecánicas en flexión de un hueso largo son determinadas por la densidad y forma tubular del hueso, mientras que para un corte de hueso cortical los factores que intervienen son la densidad y la dirección osteonal. Esto determina la importancia de dicha división.

### NIVELES JERARQUICOS DEL HUESO (An&Draughn, 2000)

Nivel	Elementos (Muestras)	Principales factores que determinan la resistencia mecánica del hueso
<b>Macroestructura (Hueso Completo)</b>	Fémur, húmero, vertebra, hueso frontal, calcáneo, etc.	Macroestructura tal como la forma tubular, forma de la sección transversal y porosidad de hueso largo.
<b>Arquitectura (Nivel Tejido)</b>	Hueso compacto, hueso esponjoso	Densidad, porosidad, orientación de los osteones, fibras de colágeno, trabéculas.
<b>Microestructura (Nivel trabecular u osteonal)</b>	Osteones, trabéculas	Dirección de carga, con máxima resistencia a lo largo de su eje axial.

<b>Submicroestructura (Nivel Lamelar)</b>	Lamelas, Fibras grandes de colágeno	Las fibrillas de colágeno-AH forman dentro de las grandes fibras de colágeno o en las lámelas con direcciones preferenciales. La orientación de las fibrillas define la dirección de máxima o mínima resistencia para la dirección de carga.
<b>Ultraestructura (Nanoestructura)</b>	Fibrillas y moléculas de colágeno, componentes minerales.	Los cristales de hidroxapatita (HA) están embebidos entre los extremos de las moléculas de colágeno contiguas. Este componente rígido de HA y el colágeno flexible proporcionan un material que es superior en cuanto a las propiedades mecánicas a cualquiera de ellos solos, es más dúctil que la hidroxapatita, permitiendo mayor absorción de energía, y mayor rigidez que el colágeno, lo que nos lleva tener un gran soporte de carga.

Sin embargo, el nivel en el cual se trabajará es el de *Arquitectura (Nivel del Tejido)*; esto por el enfoque, alcances y aplicación del trabajo. Dentro de este nivel se hará una clasificación basada en la porosidad de este tejido. El hueso no es totalmente sólido, sino que tiene pequeños poros entre sus componentes, formando pequeños canales por donde circulan los vasos sanguíneos encargados del intercambio de nutrientes. En función del tamaño de estos poros, el hueso se clasifica en compacto y esponjoso, también conocido como hueso trabecular.

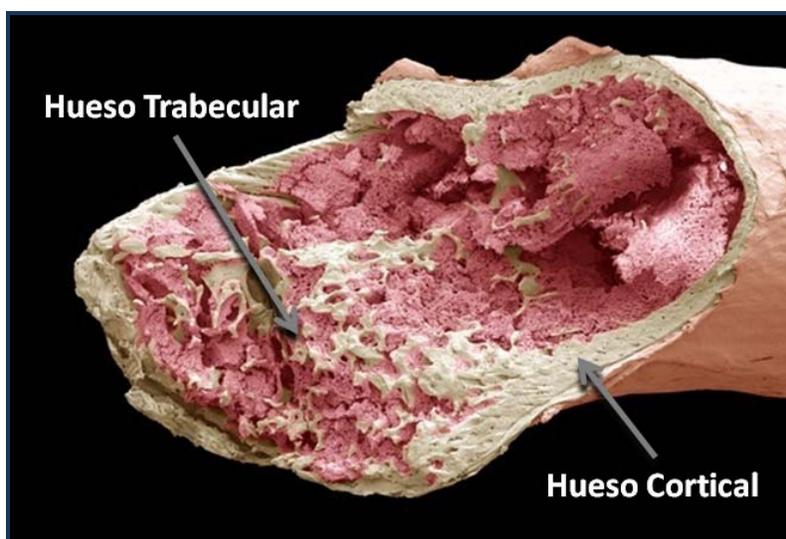


Figura II.4 Hueso trabecular/Hueso cortical  
(Fotografía de Paul Crompton ©Escuela de Medicina, Universidad de Wales)

## II.4.1 Hueso compacto

El hueso compacto, también conocido como *cortical*, constituye la mayor parte de la diáfisis de los huesos largos así como de la parte externa de todos los huesos del cuerpo. El hueso compacto es el que se encarga de brindar soporte y protección.

Dicha estructura presenta un 10% de porosidad y tiene una estructura de láminas o anillos concéntricos alrededor de canales centrales llamados canales de Havers (miden de 30 a 70  $\mu\text{m}$  de diámetro) que se extienden longitudinalmente. Los canales de Havers están conectados con otros canales llamados canales de Volkmann que perforan el periostio. Ambos canales son utilizados por los vasos sanguíneos, linfáticos y nervios para extenderse por el hueso.

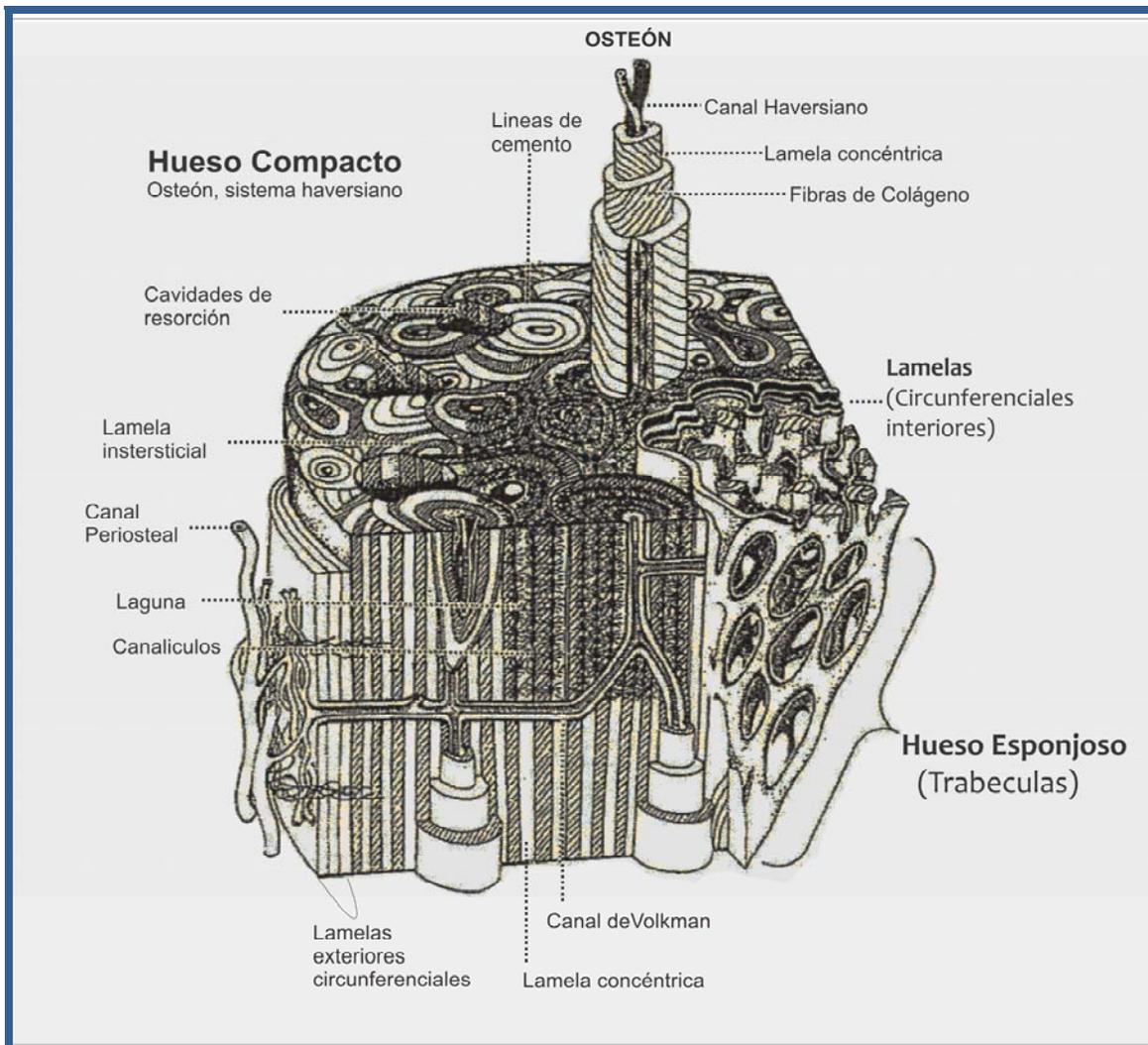


Figura II.5 Diagrama de las estructuras óseas en el hueso cortical (Weiss, 1988)

Entre las láminas concéntricas de matriz mineralizada hay pequeños orificios o lacunae donde se encuentran los osteocitos. Para que estas células puedan intercambiar nutrientes con el líquido intersticial, cada lacunae dispone de una serie de canalículos por donde se extienden prolongaciones de los osteocitos. Los canalículos están conectados entre sí y a los canales de Havers.

## II.4.2 Hueso esponjoso

A diferencia del hueso compacto, el hueso esponjoso no contiene osteones, sino que las láminas intersticiales están dispuestas de forma irregular formando un arreglo de placas y barras llamadas trabéculas. Estas placas y barras tienen un espesor menor a 0.2 mm y forman una estructura esponjosa. En el caso de trabéculas de espesor mayor a 0.2 mm suelen aparecer estructuras similares a los osteones.

Tiene la misma composición que el hueso compacto pero con una porosidad que varía entre 50 y 90%. Dentro de las trabéculas están los osteocitos que yacen en sus orificios o lacunae con canalículos que irradian desde las mismas. En este caso, los vasos sanguíneos penetran directamente en el hueso esponjoso y permiten el intercambio de nutrientes con los osteocitos.

El hueso esponjoso es el principal constituyente de las epífisis de los huesos largos, sin embargo, mientras que en un hueso largo se puede encontrar hasta un 90% de hueso cortical y solo 10% de hueso trabecular, en otros como las vértebras la proporción es de 62% y 38% respectivamente.

El hueso trabecular tiene una velocidad de restitución 10 veces mayor (es decir, la pérdida y formación de hueso) que el hueso cortical: en un adulto sano, cerca del 25% del hueso trabecular se degrada y es reemplazado anualmente, en comparación al 3% en el hueso cortical. Esto se debe a que el hueso trabecular tiene una mayor superficie y un contacto más cercano con la médula, aumentando su vulnerabilidad a los cambios en el micro-ambiente óseo. Esta velocidad de restitución mayor significa que los huesos compuestos principalmente de hueso tipo trabecular (cadera y vértebras) pueden ser áreas de alto riesgo para fracturas en la vejez.

## II.5 Propiedades mecánicas del hueso

El tejido óseo posee dos características importantes desde el punto de vista mecánico:

1. Por una parte se puede considerar un material compuesto resultado de la unión de dos fases: una orgánica y otra inorgánica. Esta estructura proporciona una gran resistencia que se ve aumentada por la disposición alternante de la hidroxiapatita en las fibras de colágeno.
2. Su porosidad variable en función de la zona del hueso analizada lo hace un material anisotrópico. La anisotropía implica propiedades mecánicas diferentes dependiendo de la dirección de las sollicitaciones ejercidas sobre él. La porosidad y la orientación de las trabéculas contribuyen a este efecto.

El tejido óseo soporta mejor las cargas de compresión que las de tracción. Sin embargo, la inserción de ligamentos y la acción de los músculos transforman las cargas de tracción en cargas de compresión.

La presión ejercida sobre un hueso incide directamente sobre las trabéculas. La presencia de unas membranas formadas de colágeno y calcio en la superficie de las trabéculas permite distribuir en forma homogénea y en todas direcciones, la carga recibida. Las membranas localizadas debajo del cartílago (subcondral) son especialmente importantes ya que absorben y distribuyen las cargas provenientes de la articulación. Dichas cargas se repartirán a través del hueso esponjoso hacia el hueso cortical (Ballesteros, 2004).

El hueso posee un comportamiento viscoelástico, recuperándose de la deformación con una cierta lentitud si no se rebasa el límite elástico. Al aumentar la velocidad de aplicación de la fuerza, el hueso se deforma menos y se fractura antes.

### II.5.1 Propiedades mecánicas del hueso trabecular

La naturaleza porosa del hueso esponjoso, con columnas y placas óseas y cavidades llenas de médula (una estructura de dos fases) lleva a que se tenga que hacer una descripción mecánica para propiedades estructurales y materiales. Sin embargo, dada la complejidad de este tipo de análisis, una gran simplificación de este complejo tejido que ha tenido buenos resultados (Gibson, 1997, Ruiz, 2010, Ramirez, 2007) es, la de considerarlo un arreglo de estructural de vigas, donde las vigas representan a la trabéculas del hueso esponjoso, como se muestra en la figura II.6

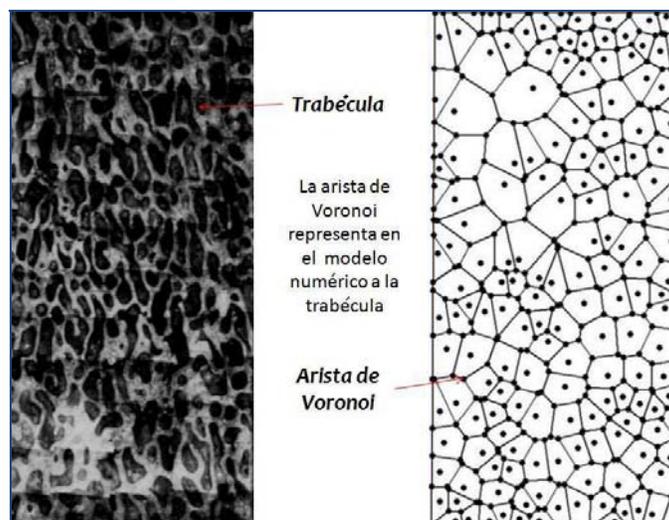


Figura II.6 Aproximación de la geometría del hueso trabecular utilizando el concepto geométrico conocido como diagrama de Voronoi. (Ruiz, 2010)

## II.5.2 Propiedades estructurales

Las propiedades estructurales del hueso trabecular son comúnmente medidas por ensayos de compresión, tracción o flexión. La frase común “Propiedades mecánicas del hueso trabecular” significa o se refiere a las propiedades estructurales macroscópicas. Se sabe que el módulo de elasticidad y rigidez para ensayos de tracción son más pequeños que los obtenidos en ensayos de compresión.

Debido a que el presente trabajo se enfoca al análisis del hueso esponjoso, se dedicará esta sección para describir de manera particular las propiedades mecánicas de este tipo de hueso.

En los huesos largos, el hueso esponjoso es el que permite absorber la energía de impacto que se produce en las articulaciones distribuyendo las cargas mecánicas hacia el hueso cortical. La estructura tubular del hueso cortical le permite soportar la compresión, tracción, flexión y torsión o la combinación de ellas, reduciendo posibles fracturas. El hueso esponjoso se encuentra de igual manera en los cuerpos vertebrales, en donde su principal función es la de absorber las cargas (E. Ramírez, 2007).

La resistencia del hueso esponjoso es un factor determinante para la fractura del hueso, ya que es en esta zona donde se observa de manera más clara el efecto de enfermedades como la osteoporosis. No obstante, sus propiedades elásticas permiten determinar las condiciones de carga en las regiones de falla del hueso esponjoso; además, determinan el comportamiento mecánico del hueso esponjoso bajo condiciones comunes de actividad. Los experimentos

muestran que durante tales actividades, el comportamiento del hueso puede ser considerado dentro del rango lineal.

La gráfica esfuerzo-deformación del hueso puede ser dividida en dos regiones: la región de deformación elástica y la región de deformación permanente (Turner, 1993). Dentro de la región elástica, la deformación en el hueso aumenta con el incremento de la carga y regresa a su forma original al dejar de aplicar la carga. Los efectos viscosos durante su deformación son debidos a fluidos en la matriz del hueso que causan pérdidas en la energía elástica, pero, de no considerar una aproximación matemática que trate al hueso elásticamente, el análisis de esfuerzos resultaría sumamente complicado.

La pendiente de la curva esfuerzo-deformación dentro de la región elástica del hueso define el módulo de Young, el cual representa la rigidez intrínseca del material compuesto. En el hueso esponjoso en cambio, cada una de las trabéculas del material tiene su propio módulo y en conjunto forman una estructura que tiene su propia rigidez. Por lo tanto, en el hueso esponjoso se puede hablar de *módulo material* (para indicar la rigidez de cada trabécula), y de *módulo estructural* (para indicar la rigidez del conjunto de trabéculas).

El hueso esponjoso se considera un material anisotrópico ya que existe una dirección preferencial en las trabéculas causando que el módulo de Young varíe en función de la dirección en la que se analice. El módulo de Young también varía dependiendo de la región que se examine, convirtiéndolo así en un material no homogéneo. Experimentalmente se han registrado valores para el modulo de elasticidad del hueso esponjoso desde 0.76 hasta 20 GPa (Keaveny, 1993).

A diferencia del hueso cortical, el hueso esponjoso, como ya se ha mencionado, posee una estructura irregular basada en una red de vigas (trabéculas) orientadas de manera aleatoria debido a su crecimiento natural y a la habilidad de adaptación del hueso a las cargas a las que está sujeto. La aplicación de la teoría de celdas de Voronoi se considera una opción factible para generar una aproximación de esta geometría y obtener así una estructura que presente un comportamiento elástico estadísticamente similar al del hueso esponjoso. Dada la importancia de este concepto, el siguiente capítulo se dedica a la descripción de los aspectos generales de esta herramienta geométrica.

## III. Modelado numérico del hueso trabecular

El presente capítulo tiene por objetivo describir dos conceptos fundamentales que fueron usados a lo largo del trabajo en el modelado del hueso trabecular. El primero de ellos es el diagrama de Voronoi, ya que ésta es la herramienta principal en la construcción de la arquitectura del hueso esponjoso. Se dará una breve definición de la herramienta, su relación con la arquitectura del objeto de análisis, los métodos de construcción en dos dimensiones y, por último se describe su construcción en tres dimensiones así como la posibilidad de manipulación de las estructuras creadas. El segundo aspecto a describir es el método utilizado para determinar las propiedades mecánicas del hueso trabecular; como se mencionó en el capítulo anterior, en este trabajo se ha hecho una gran simplificación del hueso trabecular, se le considera para su modelado como un arreglo estructural de barras, las cuales representan a las trabeculas del hueso esponjoso. Para determinar el comportamiento mecánico de este arreglo estructural se toma como principal herramienta el *Método de Elementos Finitos*. De este método se extraen tres conceptos que son de suma importancia para la comprensión de la metodología seguida, estos son *elementos viga*, *armadura* y *marco*. Por lo anterior, se dará una breve descripción de este método, así como la descripción detallada de los tres conceptos que se usan.

### III. 1 Diagrama de Voronoi

Los diagramas de Voronoi fueron discutidos por primera vez por Peter Lejeune-Dirichlet en 1850, pero fue hasta mucho después (en 1908) que estos diagramas fueron descritos por Georgy F. Voronoi (Hiyoshi, 2000).

El diagrama de Voronoi se define como una estructura geométrica que representa información de proximidad acerca de un conjunto de puntos u objetos, es decir, el diagrama de Voronoi de un conjunto de objetos geométricos es una partición del espacio en celdas, cada una de las cuales contiene una colindancia con sus puntos más cercanos. Se puede decir entonces que un diagrama de Voronoi consiste en la subdivisión del plano en regiones tales que todos los puntos de esa región están más cerca del nodo al que está asociada que de ningún otro.

Los diagramas de Voronoi permiten dividir una región en polígonos que dependen de la configuración de los puntos muestreados. Si los datos son regularmente espaciados en red, entonces se producirá un arreglo de polígonos cuadrados. Si los puntos están irregularmente

espaciados se produce un arreglo de áreas poligonales irregulares, como se observa en la figura III.1

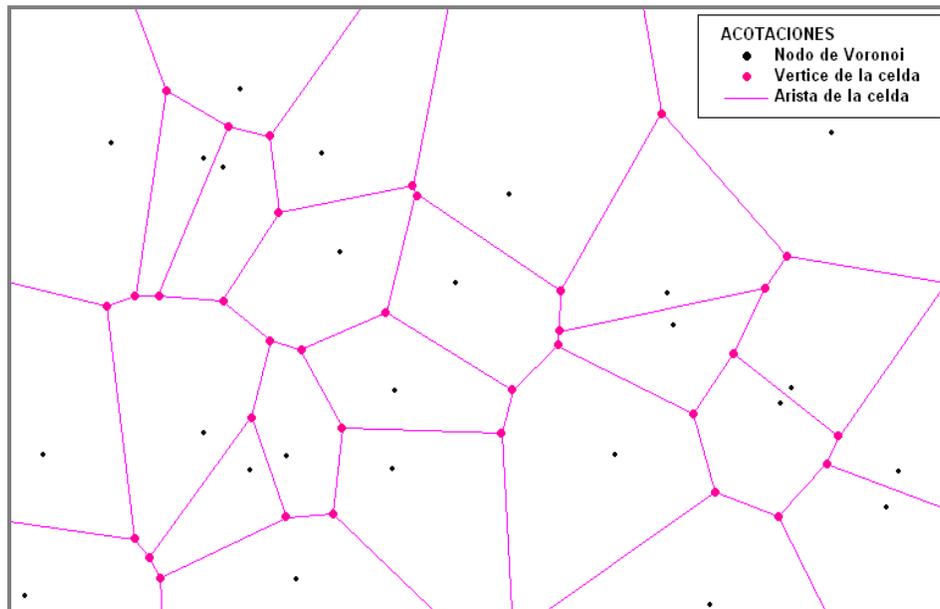


Figura III.1 Diagrama de Voronoi de un muestreo de puntos aleatorios en dos dimensiones creado en la paquetería DELONE (Desarrollado por Alfredo Vegas Acitores. Sin publicar)

Estas estructuras geométricas tienen numerosas aplicaciones en diversas áreas que van desde la arqueología hasta la navegación robótica. Por ejemplo, los diagramas de Voronoi son esenciales en la solución del problema de la comunicación inalámbrica. Dado un conjunto de subestaciones: ¿Cómo pueden ser pre-procesadas de modo que para cualquier llamada celular la estación más cercana lleve la llamada? El diagrama de Voronoi da respuesta a esta pregunta con base a su principal cualidad: la información de proximidad que proporciona (Oncina-Vidal, 1996). Sin embargo, el área de aplicación que es de interés para este trabajo es la biomecánica, dado que en las investigaciones de los últimos años se han tenido resultados satisfactorios, donde los diagramas de Voronoi han sido el método de generación de la arquitectura trabecular del hueso (Silva y Gibson (1997), Ramírez (2007), Ruiz(2009 )), donde se apostó por generar la geometría de primer nivel para aproximar el comportamiento mecánico de un modelo numérico al comportamiento mecánico del hueso trabecular.

Un aspecto que vale la pena subrayar, es que la similitud que existe entre la arquitectura del hueso trabecular y los diagramas de Voronoi no es la única existente en la naturaleza, hay varios ejemplos donde dichos diagramas tienen cierta aproximación con algunas geometrías propias de ella. En la figura III.2 se muestran como las marcas del caparazón de una tortuga siguen aproximadamente las líneas de lo que es el diagrama de Voronoi.

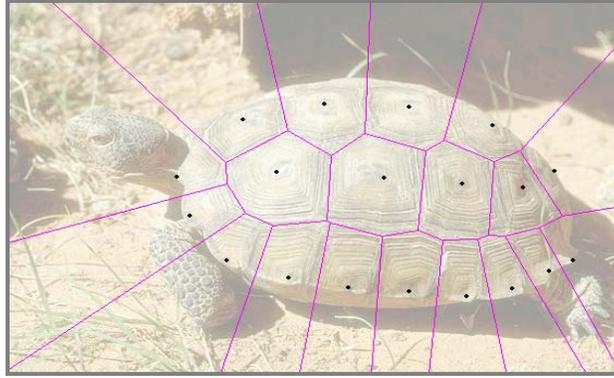


Figura III.2 Celdas de Voronoi en la naturaleza. Imagen creada en la paquetería DELONE (Desarrollado por Alfredo Vegas Acitores. Sin publicar)

Dada la importancia que el diagrama de Voronoi representa para este trabajo, se presentaran a continuación dos métodos diferentes para la generación de este diagrama en el espacio bidimensional, por la facilidad que el plano presenta para la explicación de dicha generación además de que ambos métodos pueden ser interpolados con cierta facilidad al espacio tridimensional.

### III.1.1 Por crecimiento de círculos

El método de generación por medio de círculos se basa precisamente en el crecimiento de ellos con una misma velocidad, y que cumplan con la condición de ocupar el espacio no ocupado por otro círculo. Para ilustrar el método, se construirá el diagrama de Voronoi del conjunto de puntos que se muestra en la figura siguiente.

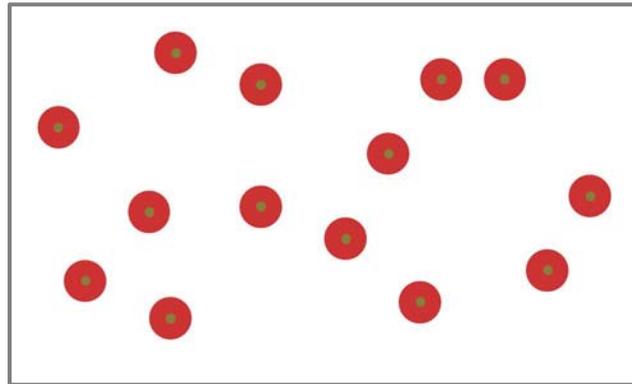


Figura III.3 Conjunto de puntos aleatorios.

Como se observa en la figura III.3, se han colocado círculos en cada uno de los nodos de Voronoi círculos, el objetivo es que los radios crezcan a la misma velocidad hasta formar el diagrama. Se puede observar con cierta facilidad que si se tiene un solo punto o nodo de Voronoi la región que le corresponderá será todo el plano. Si se trata de un conjunto de dos nodos, la unión de los puntos de intersección ( $c_1$  y  $c_2$ ) de los perímetros de los círculos, formará la arista de la celda de Voronoi, tal como se muestra en la figura III.4.

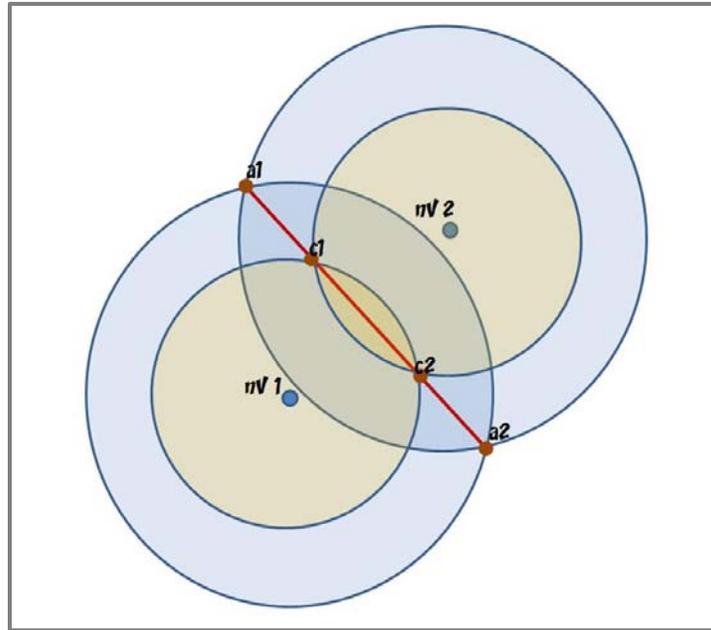


Figura III.4 Formación de la arista de Voronoi para dos puntos en el plano.

Siguiendo con el conjunto de puntos aleatorios, el proceso es consecutivo y se sigue aumentando el diámetro de los círculos. En la figura siguiente se observa como comienzan a formarse las intersecciones entre círculos vecinos, estas ayudaran a formar las aristas de Voronoi.

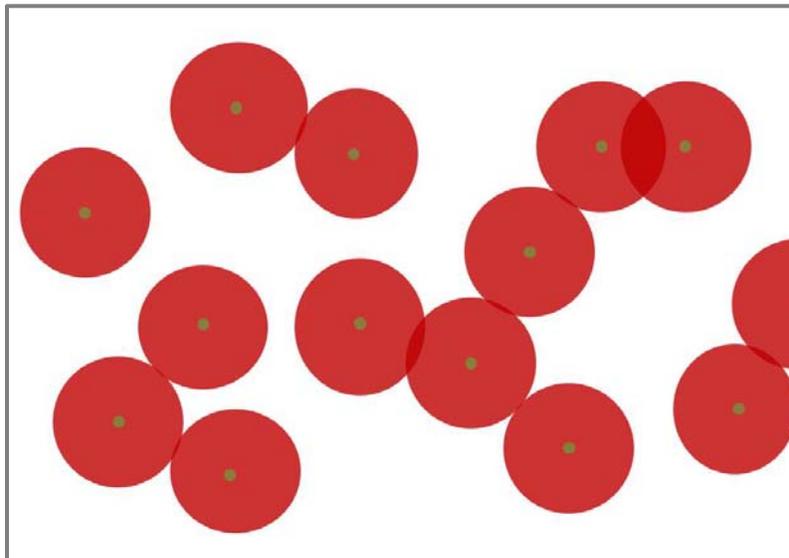


Figura III.5 Comienza la intersección de los círculos adyacentes

Se observa que conforme aumenta el diámetro de los círculos se van formando todas las aristas de Voronoi del conjunto de puntos, así mismo al concluir el crecimiento de ellos se habrá ocupado todo el plano. En la figura siguiente se muestra el consecuente crecimiento de los círculos.

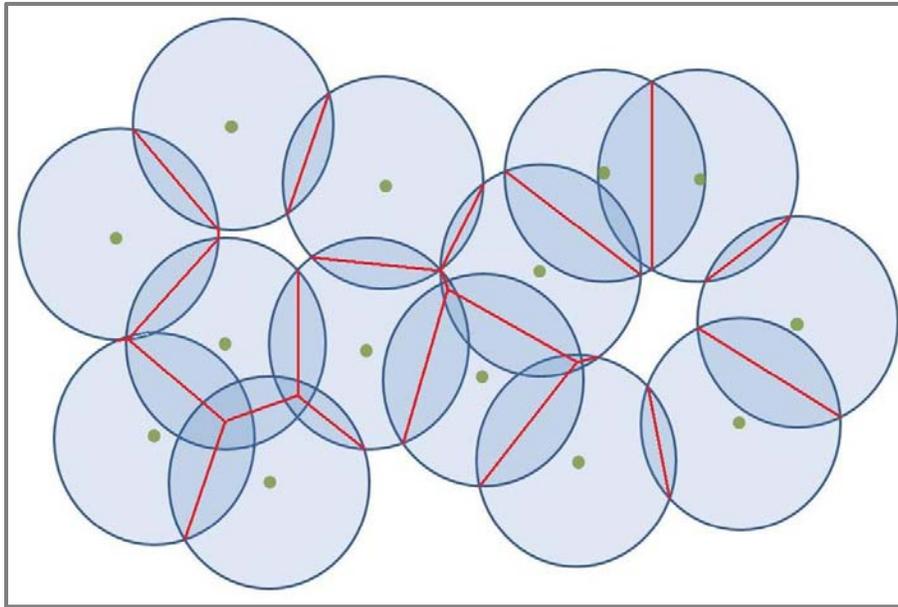


Figura III.6 Crecimiento de círculos.

Al terminar el proceso de crecimiento de los círculos auxiliares, se eliminan dejando únicamente las aristas del diagrama como se muestra a continuación.

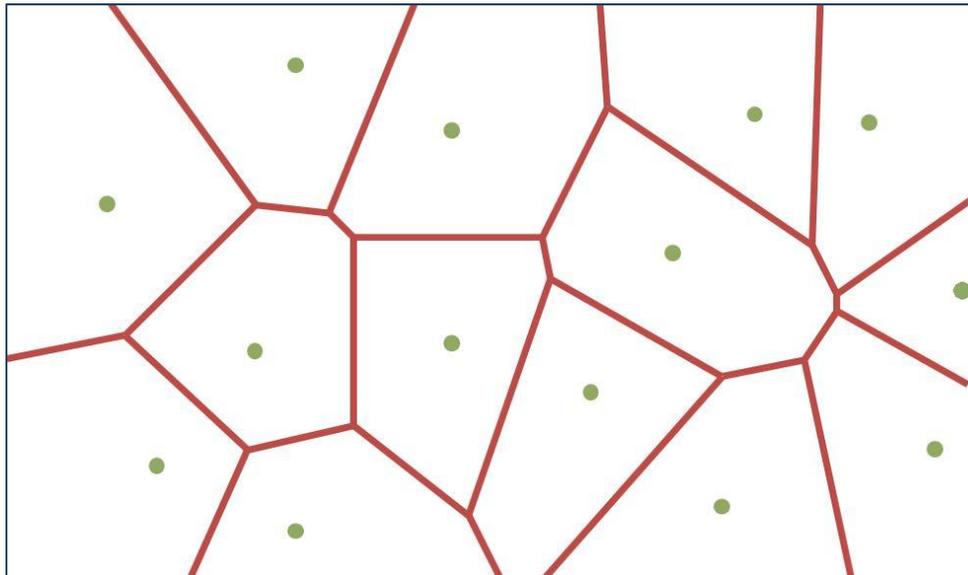


Figura III.7 Diagrama de Voronoi

### III.1.2 Método de mediatrices

Para ejemplificar el método de generación por medio de mediatrices, en esta sección del trabajo se llevará a cabo la metodología de construcción de dichas celdas a partir de un conjunto de puntos aleatorios. Dicho conjunto se muestra a continuación.

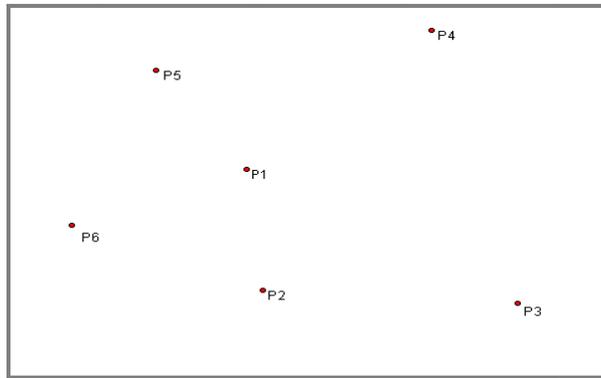


Figura III.8 Distribución de puntos aleatorios

Como principio para la construcción del diagrama es importante observar y determinar la colindancia que existe entre los puntos con base en los cuales se generaran las celdas correspondientes. Para el conjunto de puntos mostrados en la figura III.8, se observa que los vecinos más próximos para los siguientes puntos están dispuestos de la siguiente forma.

- ∞ P<sub>1</sub> vecinos: P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>5</sub> y P<sub>6</sub>
- ∞ P<sub>2</sub> vecinos: P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub> y P<sub>6</sub>
- ∞ P<sub>3</sub> vecinos: P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> y P<sub>4</sub>
- ∞ P<sub>4</sub> vecinos: P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub> y P<sub>5</sub>
- ∞ P<sub>5</sub> vecinos: P<sub>1</sub>, P<sub>4</sub> y P<sub>6</sub>
- ∞ P<sub>6</sub> vecinos: P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> y P<sub>5</sub>

Con la determinación de la colindancia entre puntos, es posible comenzar con la generación de las celdas, para ésto se escoge cualquiera de los seis puntos, el orden en que se escoge el punto de inicio no altera el diagrama de Voronoi final. Dado esto, para comenzar la construcción de dicho diagrama, se escoge P<sub>2</sub> del cual se observa que tiene proximidad con P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub> y P<sub>6</sub>. En primera instancia se escoge P<sub>2</sub> con cualesquiera los puntos con que tiene proximidad, en este caso se toma P<sub>2</sub> y P<sub>3</sub> con estos puntos se traza una recta y se determina también el punto medio  $mp_1$  de dicha recta como se muestra la siguiente figura III.9

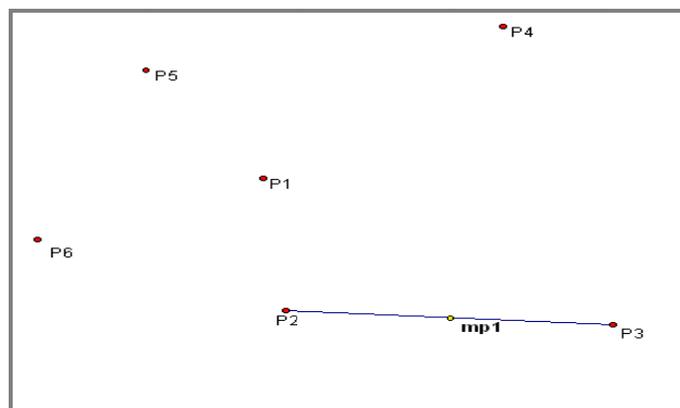


Figura III.9 Segmento de recta P<sub>2</sub>P<sub>3</sub> y punto medio

A continuación se determinan también los segmentos de recta  $P_2P_1$  y  $P_2P_6$ , estableciendo también los puntos medios de dichos segmentos  $mp_2$  y  $mp_3$  (figura III.10)

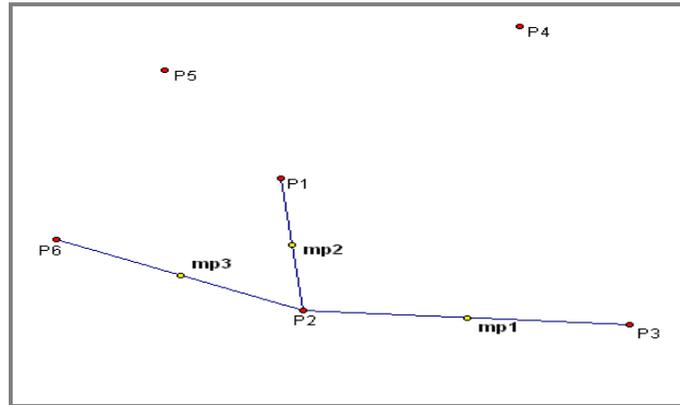


Figura III.10 Segmentos de recta y puntos medios

Con las rectas y los puntos medios determinados, se obtienen las rectas perpendiculares  $perp_1$ ,  $perp_2$  y  $perp_3$  en el punto medio correspondiente a los tres segmentos de recta anteriormente dibujados, como se muestra a continuación.

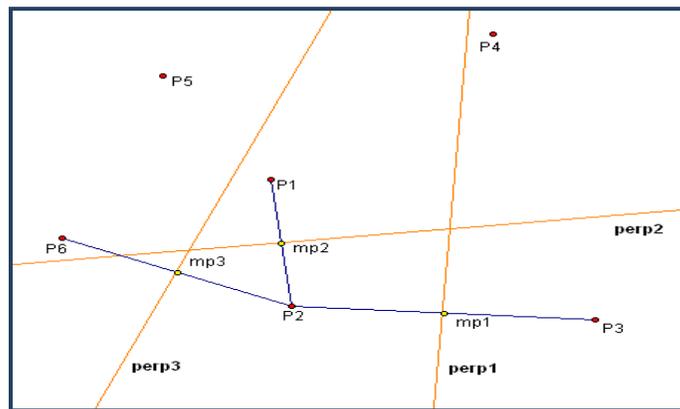


Figura III.11 Recta perpendiculares a las recta mp en los puntos medios

A partir de las tres rectas perpendiculares se observa que existe un polígono que rodea al punto  $P_2$ , eliminando los segmentos de recta sobrantes que no son parte del diagrama, se tiene delimitada la primera celda. (Figura III.12)

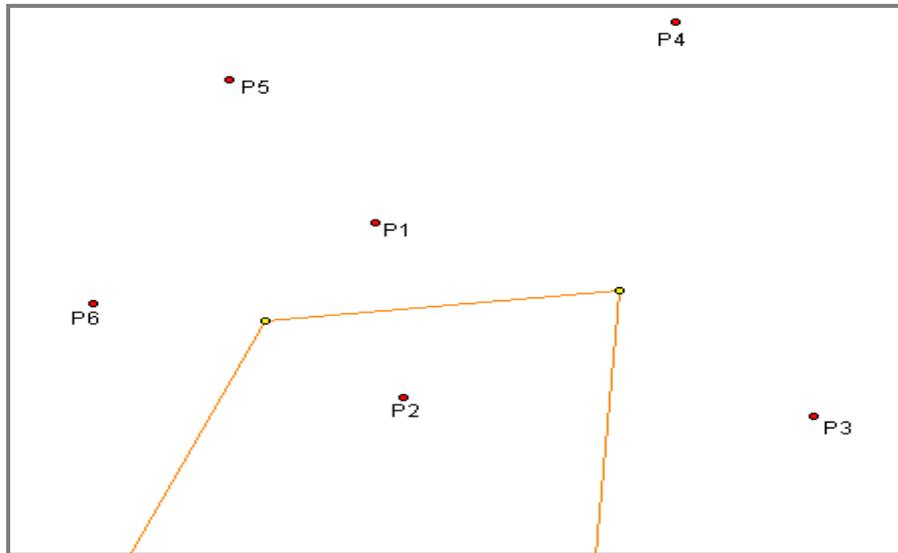


Figura III.12 Delimitación de la celda de Voronoi

Con la determinación de este polígono se termina con el trabajo en el punto  $P_2$ . Se pasa entonces con el punto  $P_6$ , siguiendo la metodología antes explicada, se determina la celda correspondiente a este punto, es decir se establecen los segmentos de recta  $P_6P_1$  y  $P_6P_5$  así como los puntos medios  $mp_4$  y  $mp_5$  correspondientes a cada segmento de recta (figura III.13), el segmento  $P_6P_2$  no es necesario dado que ya se obtuvo el segmento de recta que separa a estos dos puntos.

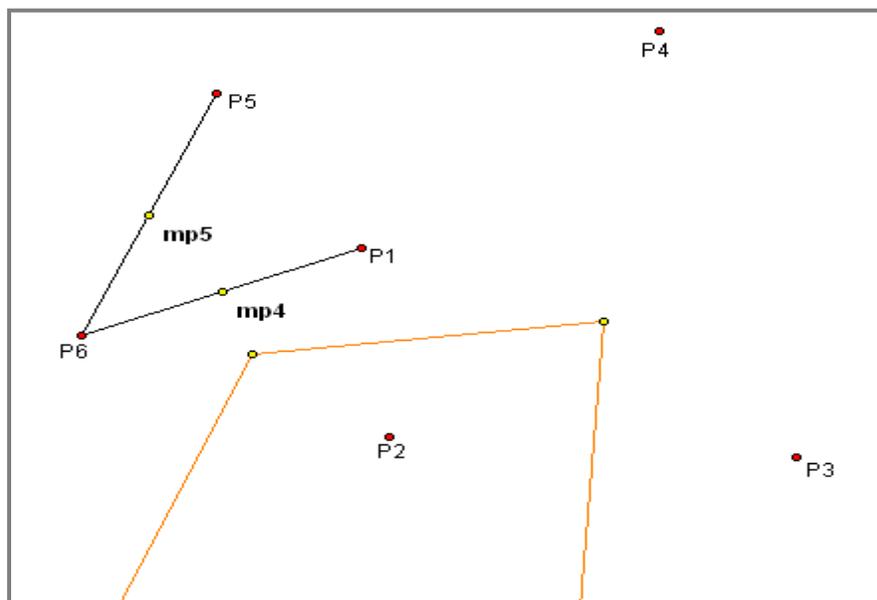


Figura III.13 Segmentos generadores de la celda de Voronoi

Siguiendo con el procedimiento antes explicado se obtienen las perpendiculares en el punto medio correspondiente, ocultando los elementos no necesarios en el diagrama, es decir los segmentos de recta  $P_6P_1$  y  $P_6P_5$  así como los puntos medios  $mp_4$  y  $mp_5$ .

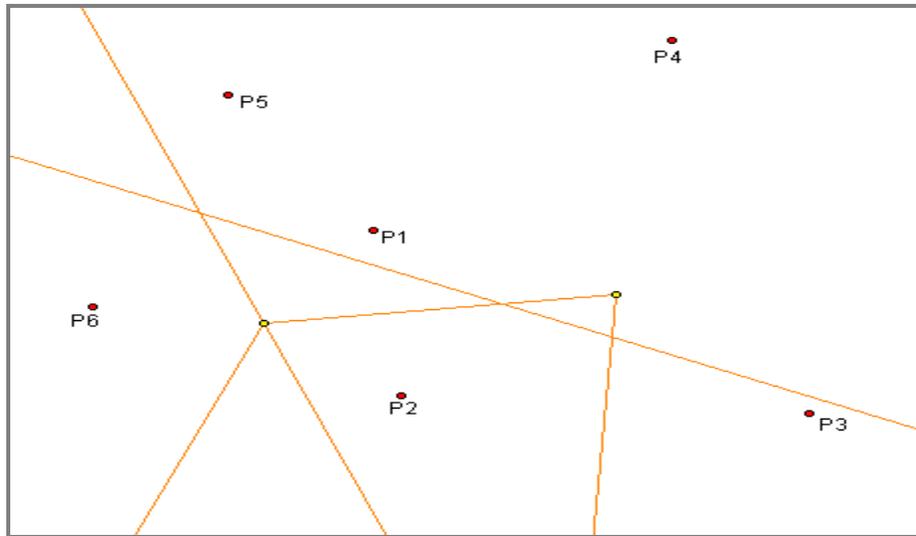


Figura III.14 Líneas perpendiculares a los segmentos mp en sus respectivos puntos medios

En la figura III.14 es posible observar nuevamente que con la generación de las rectas perpendiculares se forma un conjunto de rectas que rodean a P6, éstas forman la nueva celda de Voronoi, por lo que es necesario definir adecuadamente la celda correspondiente al nodo P6 eliminando los segmentos de recta sobrantes. (figura III.15)

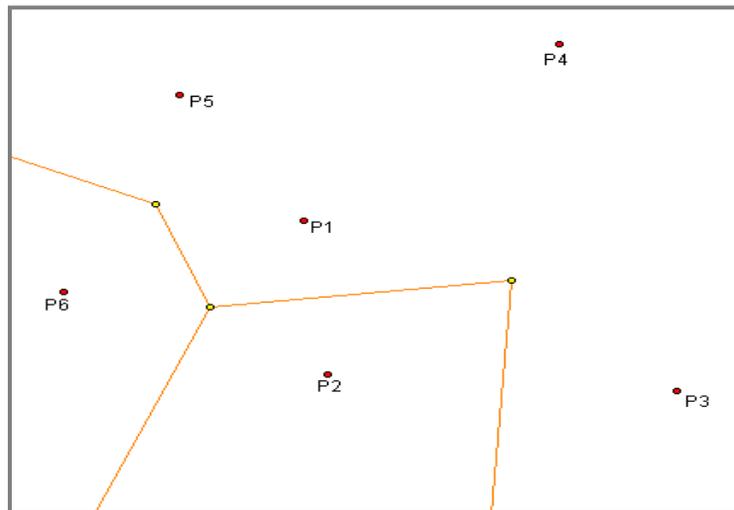


Figura III.15 Acotación de la nueva celda

Para los puntos P<sub>5</sub>, P<sub>4</sub> y P<sub>3</sub> se sigue el mismo procedimiento, obteniendo segmentos de rectas con sus puntos vecinos, determinando puntos medios y las perpendiculares correspondientes. De esta manera se obtiene el diagrama de Voronoi para el conjunto de puntos aleatorios.

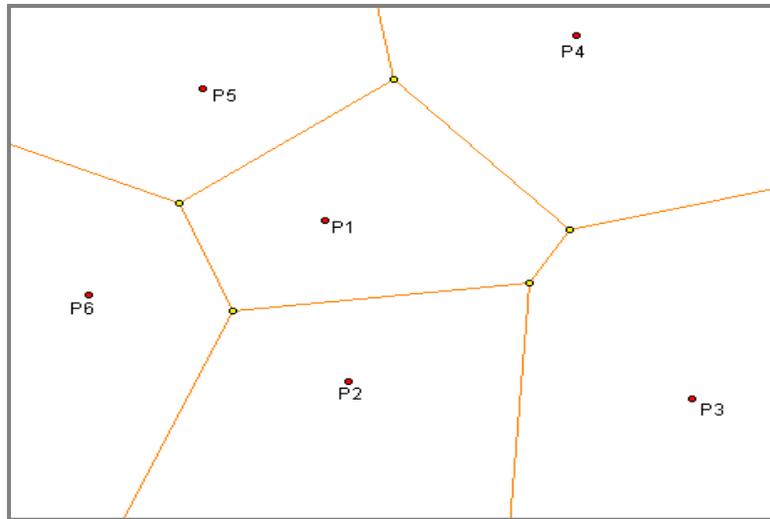


Figura III.16 Diagrama de Voronoi

Siguiendo con el procedimiento explicado se genera el diagrama de Voronoi para cualquier conjunto de puntos. Con base en esta metodología es posible construir un algoritmo para implementar un programa capaz de generar dichas estructuras. Sin embargo, por el tipo de procedimiento que sigue sería ineficiente, por lo que existe una gran diversidad de programas y algoritmos que son capaces de generar los diagramas en forma eficiente dado que existe detrás de ellos trabajo de investigación arduo y de mucho tiempo en el que se han ampliado y desarrollado este tema, es por esto que el presente trabajo no pretende profundizar, sólo dar los principios básicos.

### III.1.3 Construcción del diagrama de Voronoi 3D

La construcción del diagrama de Voronoi en tres dimensiones puede realizarse utilizando cualquiera de los dos métodos descritos anteriormente, pero extrapolando los elementos al espacio tridimensional, es decir, de círculos a esferas y de rectas a planos. Al igual que en dos dimensiones se requiere de un conjunto de puntos a partir de los cuales se generará el diagrama. Para los alcances de este trabajo el diagrama de Voronoi se construyó a partir de un arreglo de puntos inicial con simetría cúbica simple y sus variantes los cuales se construyen introduciendo un parámetro aleatorio al arreglo inicial de puntos. Se escoge esta estructura debido a que es un patrón sencillo de puntos; en trabajos posteriores podría trabajarse con estructuras de mayor complejidad para observar las diferencias que presentan los distintos comportamientos. En la figura siguiente se muestra el patrón que seguirán los nodos de Voronoi.

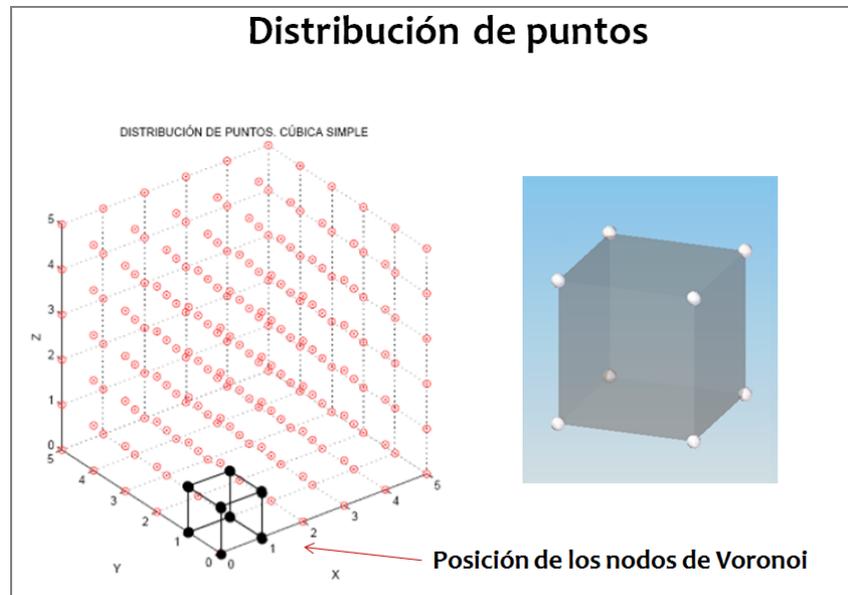


Figura III.17 Distribución de puntos para la construcción del diagrama de Voronoi.

Matemáticamente, el conjunto de puntos, puede ser representado como una matriz que llamaremos *Matriz de Generación* con las siguientes características.

$$\text{MatrizDeGeneración} = \begin{bmatrix} x_{n1} & y_{n1} & z_{n1} \\ x_{n2} & y_{n2} & z_{n2} \\ x_{n3} & y_{n3} & z_{n3} \\ x_{n4} & y_{n4} & z_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{nn} & y_{nn} & z_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Donde  $n$  representa el numero de nodos y las tres columnas corresponde a las tres coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  de los nodos. Además de esta matriz, se definen dos matrices más, una de ellas es la *Matriz de Perturbación* que tiene por objeto desordenar de manera aleatoria los puntos o semillas de generación del diagrama de Voronoi, está matriz tiene la siguiente forma.

$$\text{MatrizDePerturbación} = \begin{bmatrix} a(0,\sigma)_{n1} & a(0,\sigma)_{n1} & a(0,\sigma)_{n1} \\ a(0,\sigma)_{n2} & a(0,\sigma)_{n2} & a(0,\sigma)_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a(0,\sigma)_{nn} & a(0,\sigma)_{nn} & a(0,\sigma)_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Donde los valores  $a(0,\sigma)$  de la matriz son números aleatorios que se generan a partir de una distribución normal con media igual a cero y una desviación estándar  $\sigma$ , en este trabajo se ocuparán valores de 0.1, 0.2 y 0.3 para la desviación estándar. Esta matriz tiene igual número de renglones  $n$  que la matriz de generación; lograr entonces el desorden de los puntos implica únicamente sumar ambas matrices.

$$\text{NodosDesordenados} = \begin{bmatrix} X_{n1} & X_{n1} & X_{n1} \\ X_{n2} & X_{n2} & X_{n2} \\ X_{n3} & X_{n3} & X_{n3} \\ X_{n4} & X_{n4} & X_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{nn} & X_{nn} & X_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a(0,\sigma)_{n1} & a(0,\sigma)_{n1} & a(0,\sigma)_{n1} \\ a(0,\sigma)_{n2} & a(0,\sigma)_{n2} & a(0,\sigma)_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a(0,\sigma)_{nn} & a(0,\sigma)_{nn} & a(0,\sigma)_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

En la figura siguiente se muestra de manera visual el efecto que tiene la matriz de perturbación. Se observa como transforma un conjunto ordenado de puntos en uno aleatorio: en este caso se usó como valor para la desviación estándar 0.3.

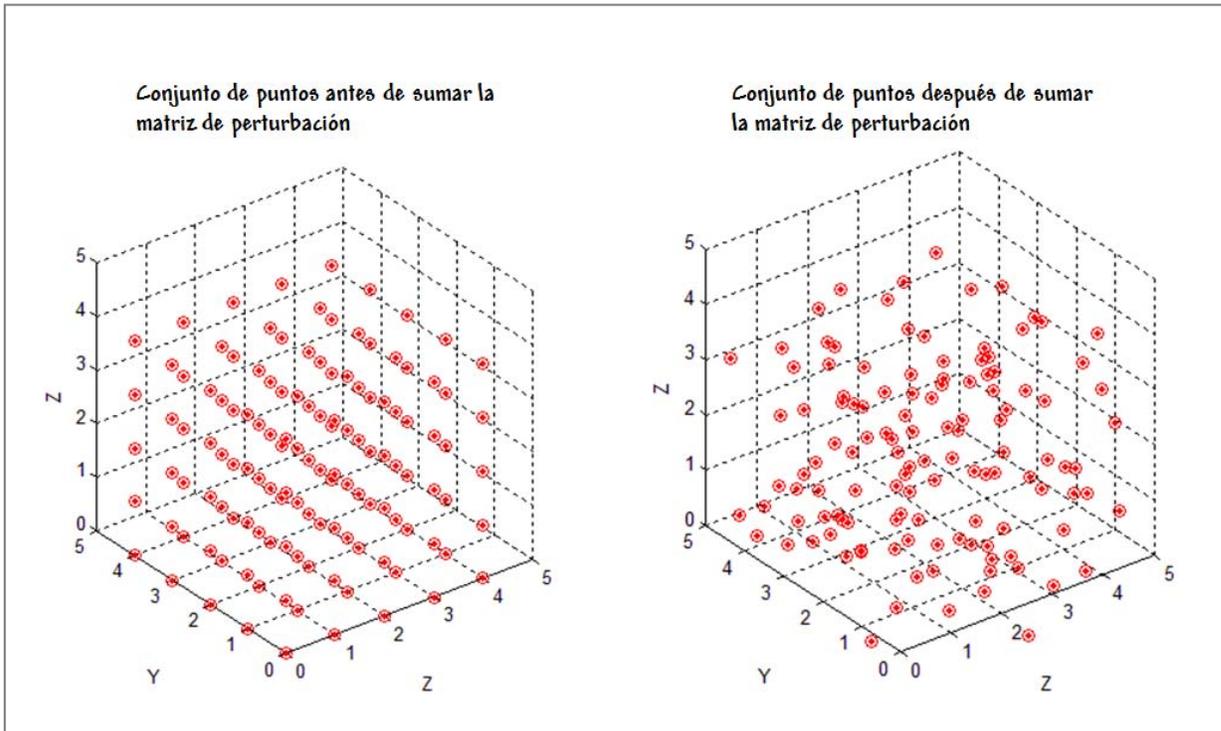


Figura III.18 Comparación de un conjunto de puntos antes y después de sumarle la Matriz de Perturbación

La tercera matriz de la que se hará uso es una matriz que se llamará a *Matriz de Transformación*, esta es una matriz de 3x3 que contiene únicamente elementos en la diagonal principal.

$$\text{MatrizDeTransformación} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & f_z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Lo que se busca con esta matriz es pasar de un sistema cúbico a un sistema ortotrópico. La forma de lograrlo es multiplicando ambas matrices.

$$MatrizTransformada = \begin{bmatrix} X_{n1} & X_{n1} & X_{n1} \\ X_{n2} & X_{n2} & X_{n2} \\ X_{n3} & X_{n3} & X_{n3} \\ X_{n4} & X_{n4} & X_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{nn} & X_{nn} & X_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y & 0 \\ 0 & 0 & f_z \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Para ilustrar lo que provoca al conjunto de puntos la multiplicación de esta matriz, se dará a  $f_y$  el valor de 0.5. El efecto se muestra en la siguiente figura.

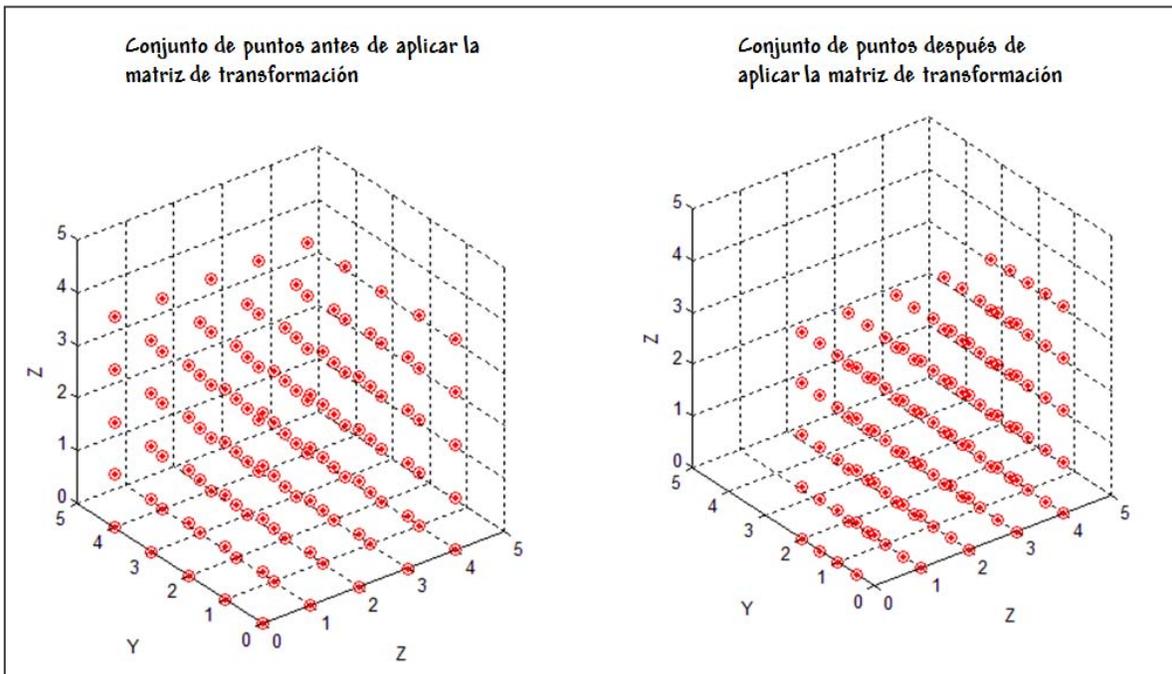


Figura III.19 Comparación de un conjunto de puntos antes y después de multiplicarle la Matriz de Transformación.

El valor que se le dió a  $f_y$  fue de 0.5 lo que provocó que el conjunto de puntos se “comprimiera” en la dirección  $y$ . Siendo así, la matriz “estira” o “comprime” al conjunto de puntos.

Con el manejo de estas tres matrices se pueden manipular, a partir de un mismo conjunto de puntos, una gran variedad de estructuras de Voronoi y observar el efecto que tienen tanto la *Matriz de Perturbación* como la *Matriz de Transformación* en las propiedades mecánicas de la estructura que se modela.

### III.2 Aspectos Generales del Método de Elementos Finitos

Al utilizar el método de elementos finitos a través de una paquetería comercial, se requiere conocer los principios básicos que lo rigen y la metodología de solución en la cual se basa. Ya que a lo largo de este trabajo se ocupa ABAQUS® como una paquetería comercial para realizar análisis estructurales, se presentará a continuación el proceso que se sigue para este tipo de problemas, sin profundizar en los detalles matemáticos, y que internamente realiza ABAQUS®. Antes de entrar en el tema, se presenta una definición del Método de Elementos Finitos (MEF):

El MEF permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales que caracterizan el comportamiento físico del problema dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados **elementos finitos**. El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. En cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados **nodos**. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama **malla**.

De la definición anterior se puede ver que el principio básico del método de elementos finitos, es la discretización del problema, esto quiere decir que se divide un gran problema en problemas pequeños para poder resolverlo. Para el presente trabajo, el gran problema a resolver es saber el comportamiento de una estructura (Material celular: *Hueso Esponjoso*) al ser sometida a una sollicitación mecánica y los pequeños problemas son conocer el comportamiento de los componentes que la forman (trabéculas), con esto queda definido, que el dominio es un volumen específico de hueso esponjoso y los subdominios son las trabéculas. En este punto es importante detenerse para analizar una estructura de hueso trabecular, para lo cual se muestra la figura III.20.

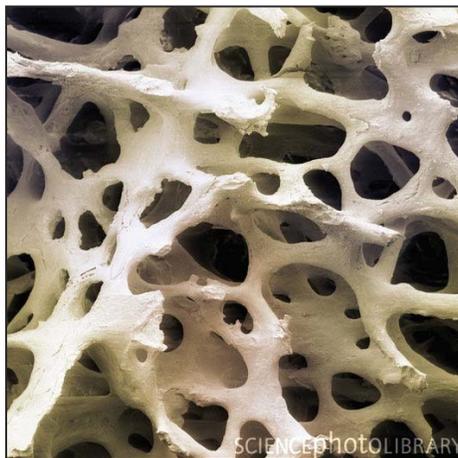


Figura III.20 Hueso Esponjoso ([www.photoscience.com](http://www.photoscience.com)).

Como puede observarse en la figura anterior y como ya se mencionó en el capítulo II, el hueso esponjoso tiene una mesoestructura compleja, por lo cual se utiliza el concepto de celdas de Voronoi como una herramienta para aproximarse a ella. Otro aspecto que debe

mencionarse es la geometría de las trabéculas, la cual, como se muestra en la figura III.21. En ella se observa que tienen geometrías distintas y complejas que dificultarán enormemente el posterior trabajo matemático si se trataran de modelar respetando su geometría, por lo cual, para en este trabajo se hará otra simplificación, la cual es que cada uno de los elementos del hueso trabecular son cilindros de sección circular constante.



Figura III.21 Hueso Esponjoso. Se muestra la geometría irregular de las trabéculas. ([www.sciencephoto.com](http://www.sciencephoto.com))

A partir de las simplificaciones anteriores, el tipo modelo que se trabajó a lo largo del proyecto se muestra en la figura III.22 (b)

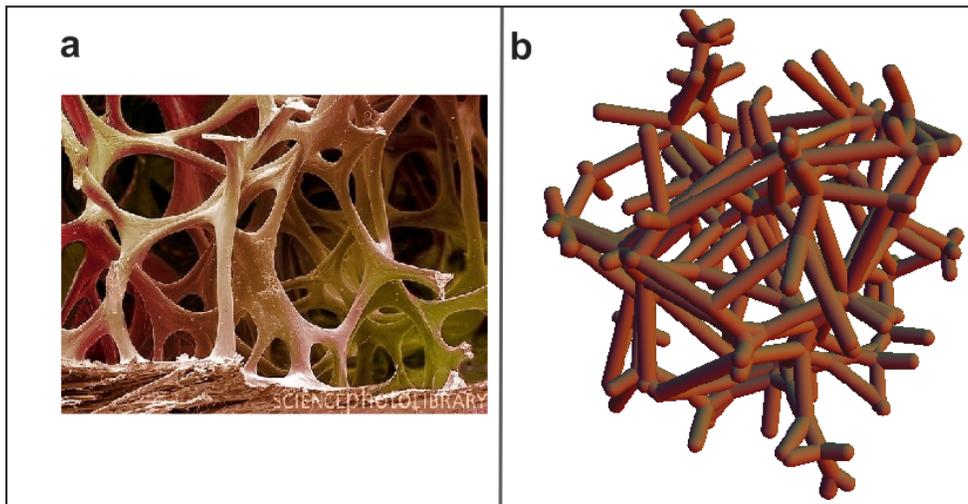


Figura III.22 a) Hueso Trabecular. ([www.sciencephoto.com](http://www.sciencephoto.com)) b) Modelo tridimensional basado en el concepto de Voronoi. Simplificación del hueso trabecular.

Habiendo hecho esto, puede establecerse que los **elementos finitos** que se trabajaron son barras de sección transversal circular constante.

Ahora, retomando la definición del MEF, otro concepto introducido fue **nodos** estos son puntos representativos de los elementos. Para este trabajo de tesis cada elemento se define únicamente por dos nodos, los puntos extremos de cada barra. Estos nodos son los puntos donde se conocen las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales, de ahí su importancia. Aplicando estos dos conceptos a una estructura se tendría lo que se observa en la figura III.23.

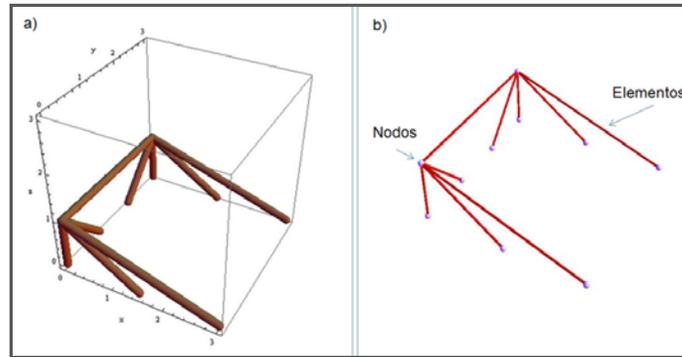


Figura III.23 Estructura mallada de nueve elementos.

A la izquierda de la figura se muestra la estructura que se pretende modelar, se establece que los elementos finitos se definirán por dos nodos y serán barras de sección circular constante, por lo cual, a la derecha se muestra a la estructura después de haber definido tanto nodos como elementos. Teniendo definido los nodos se tiene ya la malla de la estructura, ya que ésta se define con el conjunto de nodos del sistema.

Teniendo lo anterior, el siguiente paso es elegir qué tipo de formulación matemática se le asignará a cada uno de los componentes de la estructura, para lo cual es indispensable establecer bajo qué tipo de solicitaciones mecánicas estarán sometidos. En este trabajo se considera que cada uno de los componentes puede estar sometidos a compresión o tensión, flexión y torsión o la combinación de todos ellos, el tipo de elemento capaz de dar la información adecuada al estar bajo este estado de esfuerzos es el **Elemento Marco** ya que tienen doce grados de libertad, seis desplazamientos ( $d_1, d_2, d_3, d_7, d_8, d_9$ ) y seis rotaciones ( $d_4, d_5, d_6, d_{10}, d_{11}, d_{12}$ ) definidos en cada elemento.

Es importante establecer en este punto la notación que se manejará a lo largo del trabajo en cuanto a los grados de libertad (desplazamiento y rotaciones), se representarán con la letra **d** indistintamente desplazamientos y rotaciones, diferenciándose únicamente por un número que seguirá después de dicha letra, por ejemplo si se tiene un elemento con dos nodos y cuatro grados de libertad se tendrán  $d_1, d_2, d_3$  y  $d_4$ , los primeros dos corresponden al primer nodo y los últimos al segundo, los desplazamientos serán asignarán a las primeras **d**'s (en este caso  $d_1$  y  $d_3$ ) mientras que las rotaciones serán  $d_2$  y  $d_4$ . En la figura III.24 se muestran gráficamente los grados de libertad de un elemento marco.

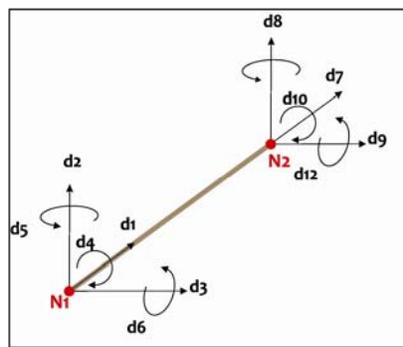


Figura III.24 Elemento Marco con sus correspondientes doce grados de libertad.

Para determinar la formulación matemática de estos elementos, debe establecerse que se trabajó considerando pequeños desplazamientos y considerando que puede aplicarse el principio de superposición, con ello la formulación matemática de los elementos *Marco* se construye a partir de las ecuaciones de dos tipos elementos, elementos **Viga y Armadura**. Se determina de esta manera, ya que la suma de las características de estos dos tipos de elementos dan como resultado las características de los elementos de interés. Por la importancia de ellos en este trabajo se describen y se presentan a continuación las ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento.

Primero se definirá una **armadura**. Este tipo de elementos tiene dos grados de libertad que son los desplazamientos axiales de sus correspondientes nodos como se muestra en la figura III.25. El que tenga dos grados de libertad involucra necesariamente que este tipo de elementos tienen reacción únicamente en compresión o tensión, ya que sólo pueden dar la información adecuada cuando están sometidos a este estado de esfuerzos.

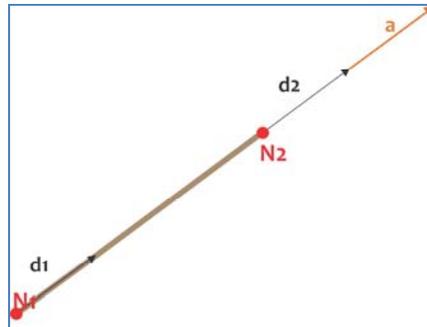


Figura III.25 Elemento Armadura con sus dos grados de libertad ( $d_1$  y  $d_2$  desplazamiento axiales)

La ecuación diferencial que caracteriza a estos elementos armadura y la cual debe resolverse es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( AE \frac{\partial u}{\partial a} \right) = 0; \quad a_0 < a < a_L \quad (3.6)$$

Donde  $E$  corresponde al modulo de elasticidad del elemento armadura mientras que  $A$  corresponde al área transversal del mismo. Aquí es importante mencionar otra importante característica del MEF, la cual es que permite transformar un problema de *cálculo diferencial* a un problema de *Algebra Lineal*, dicho problema es determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales definido de la siguiente forma:

$$K d = f \quad (3.7)$$

Donde  $K$  es la **matriz de rigidez** que es característica del elemento finito y que define la geometría y propiedades materiales de este,  $d$  es el vector que contiene los grados de libertad del elemento (desplazamientos y/o rotaciones) y  $f$  es el vector de cargas presentes en el elemento. El sistema correspondiente a una armadura es:

$$[K_{Armadura} (2 \times 2)] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Esta ecuación se obtiene a través del análisis del equilibrio de fuerzas y la introducción del concepto de la *forma débil de una ecuación diferencial* los cuales se presentará más adelante en este trabajo, al igual que la forma exacta de la matriz de rigidez para Armaduras. Lo importante de esta ecuación es que resolverla permitirá determinar  $u(a)$ , que es la función de desplazamiento axial, la cual es fundamental para poder determinar la ecuación de *elemento finito marco*.

Otro elemento importante de conocer es el elemento *viga*. Este tipo de elemento en 2 dimensiones tiene 4 grados de libertad por elemento: 2 rotaciones ( $d_2, d_4$ ) y dos desplazamientos ( $d_1, d_3$ ). Este elemento es capaz de tener reacciones a cargas normales a su eje y momentos flexionantes. Se tiene una restricción para las vigas, la cual es que la sección transversal debe ser simétrica con respecto al plano de flexión. Antes de pasar a la formulación matemática se establece que la rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se tomará como positiva.

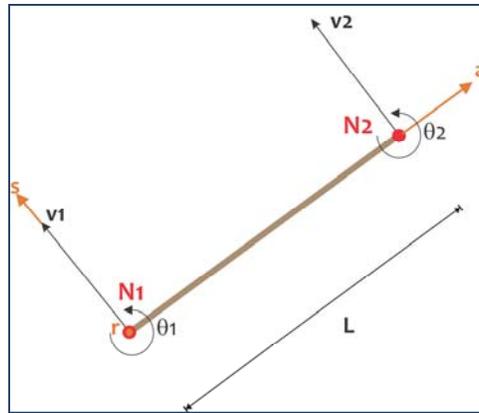


Figura III.26 Elemento Viga en 2D

La ecuación diferencial que caracteriza a estos elementos viga y la cual debe resolverse es la siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial a^2}) = 0 \quad a_0 \prec a \prec a_L \quad (3.9)$$

Donde E corresponde al modulo de elasticidad del elemento viga, I el momento de inercia y el elemento  $v(a)$  corresponde a la función que relaciona los desplazamientos transversales y las rotaciones. La ecuación de elemento finito tiene la siguiente forma:

$$[K_{viga} (4 \times 4)] \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Al igual que la matriz de rigidez de los elementos armadura, esta matriz de rigidez se mostrará explícitamente en el siguiente capítulo. Un elemento viga en 3D implica que se tienen dos ejes perpendiculares ( $s$  y  $r$ ) al eje de la viga como se muestra en la figura III.27.

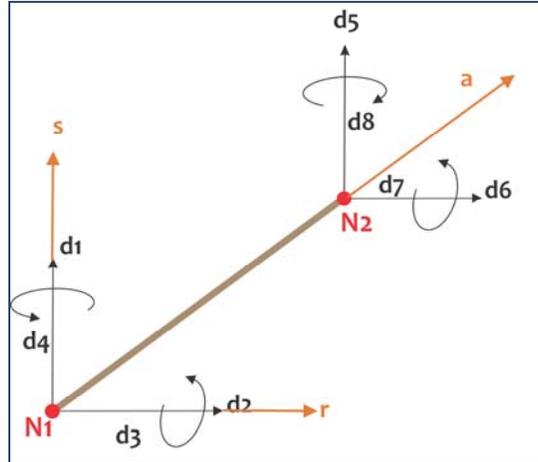


Figura III.27 Elemento viga en 3D

Al tener dos ejes perpendiculares se tiene que determinar además de la función  $v(a)$  que relaciona dos desplazamientos transversales ( $d_1$  y  $d_5$ ) y dos rotaciones ( $d_3$  y  $d_7$ ) en torno al eje local  $r$ , otra función  $w(a)$  que relaciona dos desplazamientos transversales ( $d_2$  y  $d_6$ ) y dos rotaciones ( $d_4$  y  $d_8$ ) pero en torno al eje local  $s$ , la cual se obtiene considerando una ecuación diferencial similar a la ocupada para determinar la función  $v(a)$  pero tomando en cuenta que los desplazamientos  $d_2$  y  $d_6$ , producen una rotación en el sentido de las manecillas del reloj y por lo tanto negativa. Un elemento marco en tercera dimensión, implica la existencia de un momento torsionante, en este punto sólo se establecerá que puede ser determinado por la rotación sobre el eje local  $a$  cuya función es  $\psi(a)$ .

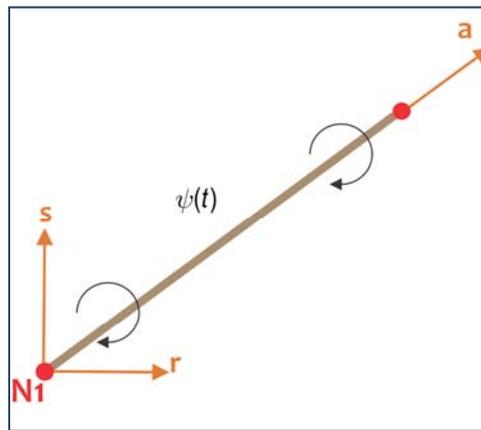


Figura III.28 Torsión en un elemento Marco 3D

Tomando los conceptos previos y el concepto de energía de deformación se determina la *matriz de rigidez de un elemento marco en tres dimensiones*; más adelante se describirá explícitamente la forma en que se determina, por el momento sólo se muestra la forma que tiene.

$$K_{\text{marco}} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_s}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_s}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{4EI_s}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{2EI_s}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_r}{L} & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_r}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} & 0 & \frac{12EI_r}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_s}{L^3} & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_s}{L^3} & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{2EI_s}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_s}{L^2} & 0 & \frac{4EI_s}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_r}{L} & 0 & -\frac{6EI_r}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_s}{L} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Se observa que la matriz involucra propiedades mecánicas y características geométricas como ya se había mencionado. Cada matriz de rigidez corresponde a un elemento marco y por lo tanto cada uno de ellos está relacionado con una ecuación de elemento finito como se muestra a continuación

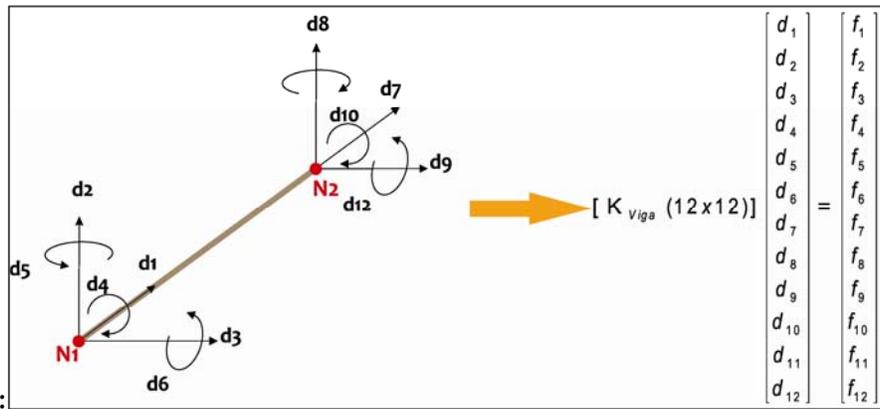


Figura III.29 Elemento marco con su correspondiente ecuación de elemento finito.

Se tiene una matriz de rigidez por cada elemento. A esta matriz se le conoce como *matriz de rigidez local*, cuando se analiza una estructura que se compone de varios elementos debe determinarse una matriz de rigidez de toda la estructura para determinar el

comportamiento de ella, a esta matriz se le conoce como *matriz de rigidez global* para determinar esta matriz es necesario introducir el concepto de **Ensamble de Matrices**.

Para ejemplificar este concepto se utiliza la siguiente estructura, esta estructura se compone de tres elementos marco cada uno definido por sus dos nodos, cada nodo con sus correspondientes 6 grados de libertad, por lo que se tienen veinticuatro grados de libertad como incógnitas para esta estructura, la cual se muestra en la figura III.30.

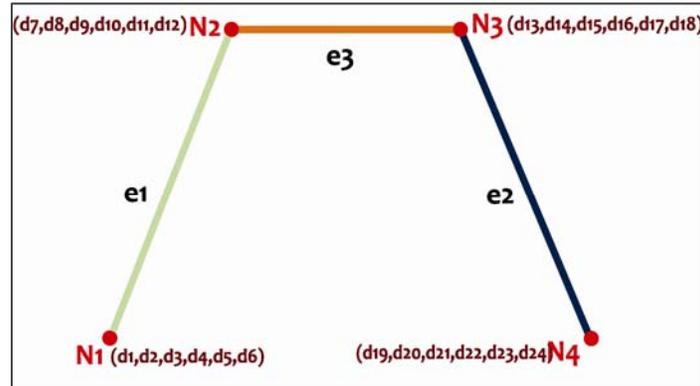


Figura III.30 Estructura compuesta con tres elementos marco.

A continuación se muestran representativamente las matrices de rigidez de los elementos mostrando los grados de libertad que le corresponden.

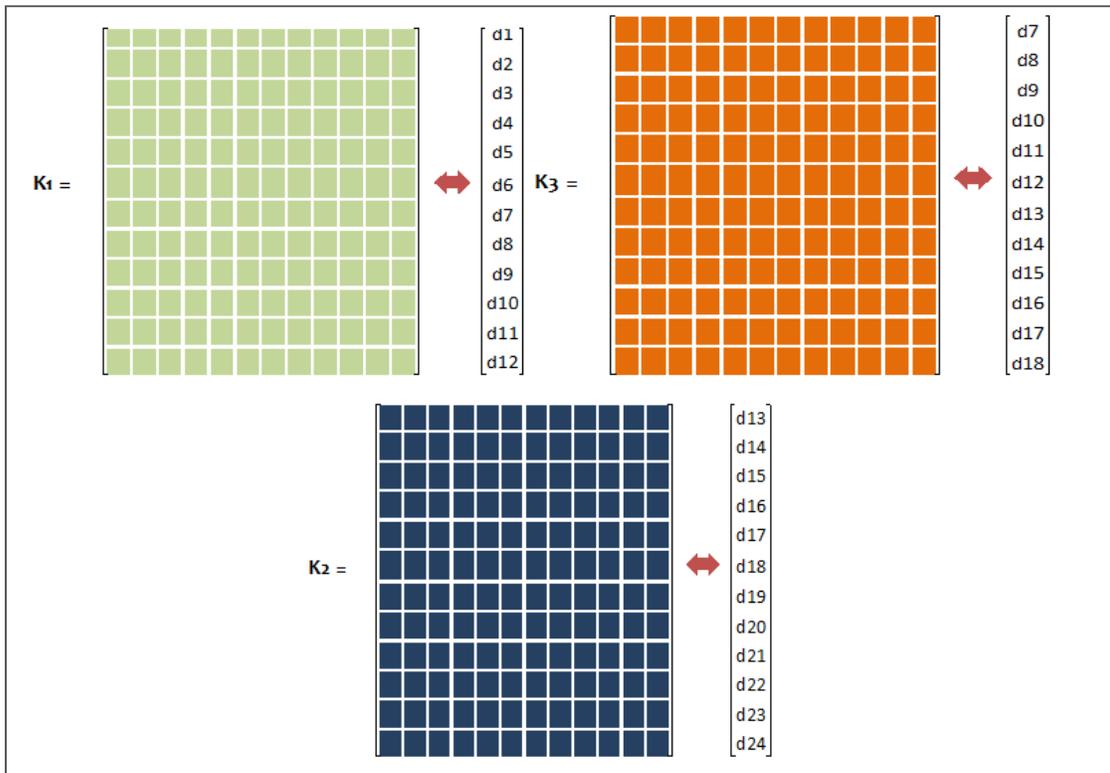


Figura III.31 Matrices locales de los elementos.



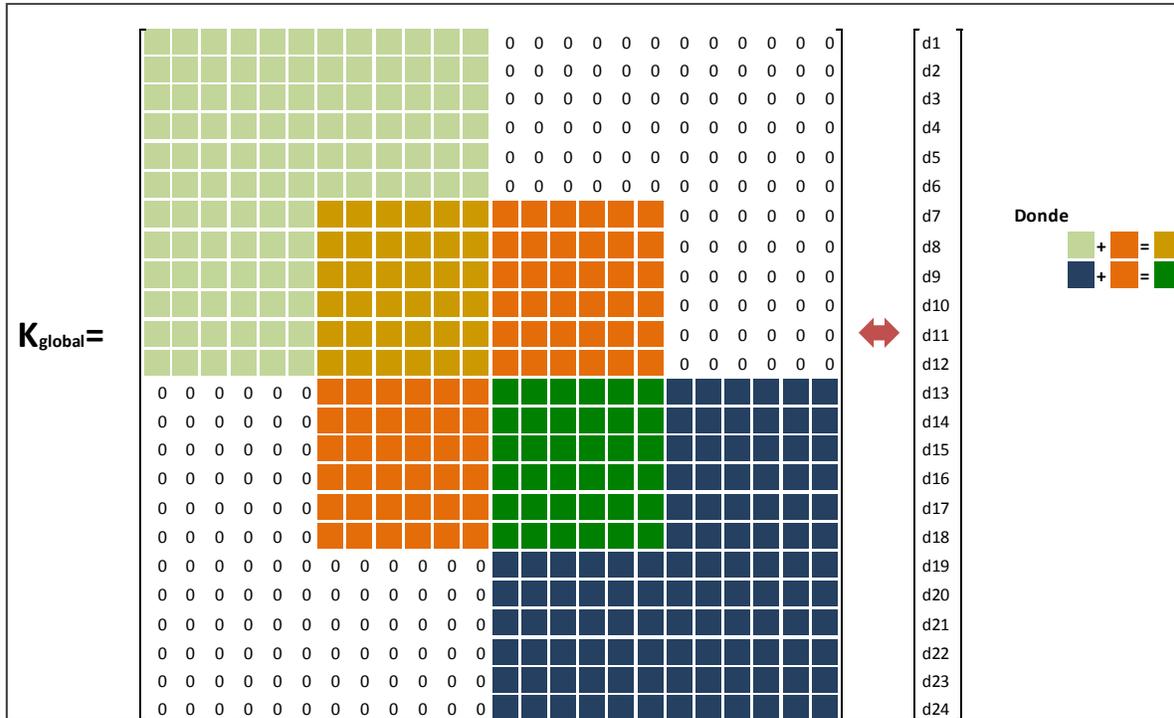


Figura III.33 Matriz de Rigidez Global. A la derecha los grados de libertad asociados

Completando este paso, se puede armar el sistema de ecuaciones global, donde el vector de incógnitas son los grados de libertad correspondientes a la estructura y el vector de términos independientes son las fuerzas presentes en ella.

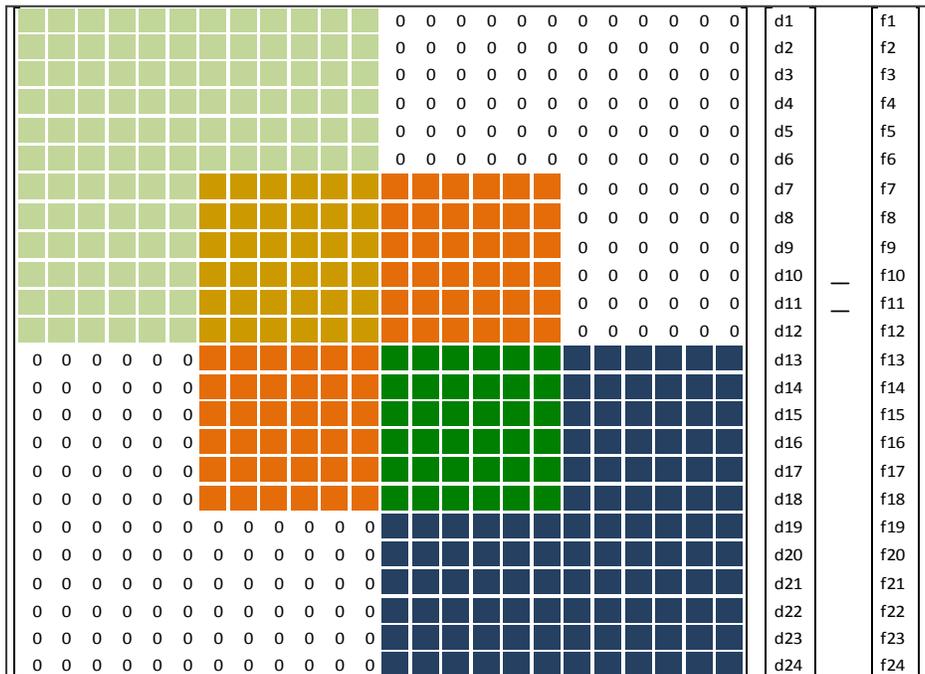


Figura III.34 Sistema de ecuaciones lineales.

Con la obtención del sistema de ecuaciones y la solución del mismo se termina propiamente con el método numérico, ya que, conociendo los grados de libertad, se pueden obtener las funciones de desplazamiento de todos los nodos, a partir de las cuales se puede iniciar el Post-Proceso donde se calculan los esfuerzos y deformaciones, que es lo que se verá en el capítulo siguiente.

## IV. Modelos 3D de hueso trabecular en ABAQUS®

Como sabemos el hueso trabecular es un material anisotrópico, lo que significa que sus propiedades mecánicas son diferentes para diversas direcciones. En este trabajo se analizará el comportamiento anisotrópico de los modelos tridimensionales basados en las celdas de Voronoi de hueso trabecular, introduciendo el concepto de ortotropía, que es una forma común de anisotropía, donde el comportamiento mecánico queda caracterizado por una serie de constantes elásticas asociadas a tres direcciones mutuamente perpendiculares. Esto quiere decir que, como una simplificación de la anisotropía del hueso trabecular, se considera para el desarrollo de este trabajo que se tiene un material ortotrópico.

Para observar este comportamiento se simularon ensayos de compresión y deslizamiento en tres direcciones mutuamente perpendiculares (x, y, z), con lo que se determinaron tres propiedades mecánicas en las tres direcciones: módulo de elasticidad, modulo de rigidez a corte y coeficiente de Poisson.

### IV.1 Módulo de elasticidad

El grado con que una estructura se deforma depende de la magnitud de la sollicitación impuesta. Para muchos materiales sometidos a cargas de tracción pequeñas, el esfuerzo y la deformación son proporcionales según la relación:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.1)$$

Esta relación se conoce con el nombre de Ley de Hooke, y la constante de proporcionalidad, E es el **módulo de elasticidad**, o módulo de Young.

La determinación del módulo de elasticidad para las probetas es de gran importancia debido a que éste es una medida de la rigidez del material, en este caso, de la estructura (**módulo aparente**).

Esta propiedad se determinó para las probetas virtuales, mediante las simulaciones de ensayos de compresión uniaxial en tres direcciones (x, y, z) en la paquetería de ABAQUS®. Para esto, el ensayo se dividió en diez pasos, en cada uno de ellos se aplica una decima parte del desplazamiento aplicando. Con ello se determinaron las fuerzas de reacción de los nodos de la cara superior de la estructura, que al sumarse corresponden a la fuerza de reacción resultante. Se sabe que el esfuerzo se define como:

$$\sigma = F/A \quad (4.2)$$

En donde  $A$ , corresponde al área no deformada en la cual se aplica la fuerza, que para el caso de las probetas corresponde al área de la cara superior.

Para determinar las deformaciones, se obtuvo el cociente entre los desplazamientos cada 0.1 s que corresponden a 0.05 mm (ya que la simulación transcurre en 1 s y el desplazamiento total es de 0.5 mm) y la altura de la probeta.

Finalmente, se realizó una regresión lineal con estos datos a través de Excel® para obtener la pendiente de la recta  $\sigma$ - $\epsilon$  que corresponde al módulo de elasticidad estructural o **Modulo Aparente**.

Como se mencionó al inicio de este capítulo, se busca observar el comportamiento de las propiedades mecánicas para diferentes direcciones, por lo cual, sobre una misma probeta virtual se realizaron ensayos de compresión uniaxial en las tres direcciones cartesianas, para calcular los tres módulos de Young  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$ .

## IV.2 Módulo de rigidez a corte

Cuando una fuerza  $F$  que actúa sobre el cuerpo es paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta otro tipo de deformación denominada cortante en el que no hay cambio de volumen pero si de forma. Si originalmente la sección transversal del cuerpo tiene forma rectangular, bajo un esfuerzo cortante se convierte en un paralelogramo.

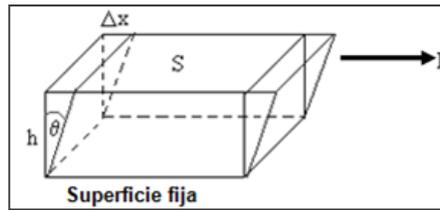


Figura IV.1 Esfuerzo Cortante considerando que la dirección de la fuerza cortante es paralela a la de  $x$

Se define el esfuerzo como  $F/S$ , la razón entre la fuerza tangencial y el área  $S$  no deformada de la cara sobre la que se aplica. La deformación cortante, se define como la razón  $\Delta x/h$ , donde  $\Delta x$  es la distancia horizontal que se desplaza la cara sobre la que se aplica la fuerza y  $h$  es la altura del cuerpo, tal como se observa en la figura IV.1. El **módulo de rigidez  $G$**  es una propiedad mecánica de cada material, siendo dicha propiedad la rigidez de un cuerpo ante esfuerzos cortantes.

Considerando pequeños ángulos de desplazamiento se define lo siguiente.

$$\text{deformación cortante} = \frac{\Delta x}{h} \dots \dots \quad (4.3)$$

$$G = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta x/h} \quad (4.4)$$

El módulo de rigidez para las probetas se calculó mediante ensayos de deslizamiento donde se aplicó un desplazamiento cortante a los nodos de la cara superior de la muestra simulando la fuerza cortante. Se extrajeron de ABAQUS® las reacciones en la dirección del

deslizamiento y mediante el cociente entre éstas y el área de la cara superior de la probeta, se obtuvo el esfuerzo cortante.

La deformación se obtuvo mediante el cociente entre los desplazamientos de 0.05 mm cada 0.1 s y la altura de la probeta.

Finalmente, el módulo de rigidez para cada probeta se obtuvo mediante la aplicación de la ecuación anterior.

Al igual que para el Modulo de elasticidad, esta propiedad mecánica fue calculada para tres direcciones diferentes lo cual implica que la deslizamiento cortante se aplicó en las direcciones (x, y, z) para obtener tres módulos de rigidez a corte  $G_{xy}$ ,  $G_{yz}$  y  $G_{zx}$ .

### IV.3 Coeficiente de Poisson

Cuando un material se somete a un esfuerzo de compresión uniaxial, se produce una deformación  $\epsilon$  en la dirección de la carga aplicada. Como resultado, se producirá un aumento en las direcciones laterales perpendiculares a la aplicación de la carga.

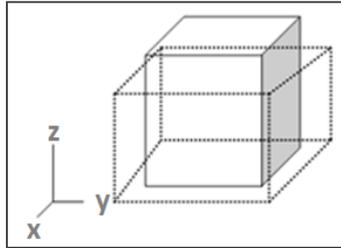


Figura IV.2 Deformación en un cubo al aplicarse una fuerza de compresión en la dirección z

Si la dirección de compresión es z se tendrá la deformación en esta dirección  $\epsilon_{zz}$  y el aumento en las cargas laterales relacionadas con las deformaciones  $\epsilon_{xx}$  y  $\epsilon_{yy}$ . Considerando esto se define el coeficiente de Poisson como se muestra:

$$\nu = \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} \quad (4.5)$$

Debido a que en las probetas virtuales las deformaciones  $\epsilon_{xx}$  y  $\epsilon_{yy}$  no son iguales se calculó el promedio de éstas para determinar el coeficiente de Poisson expresado a continuación:

$$\nu_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} \right) \quad (4.6)$$

Cuando la dirección de compresión es x, el coeficiente de Poisson será:

$$\nu_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}} \right) \quad (4.7)$$

De manera similar, cuando la compresión es en dirección de y:

$$v_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}} \right) \quad (4.8)$$

Habiendo definido las propiedades, lo que le sigue es describir como se construyeron las estructuras de Voronoi 3D para poder aplicar observar el comportamiento ortotrópico de dichas estructuras.

#### IV.4 Construcción de los modelos 3D de hueso trabecular

Se construyeron tres estructuras de Voronoi para simular que la estructura es girada y cambiada de dirección en la cual se realiza el ensayo mecánico. Para construir estas estructuras se ocuparon una estructura base y la matriz de transformación mencionada en el capítulo anterior. Esta matriz tomó tres configuraciones diferentes las cuales se muestran a continuación:

$$T1 = \begin{bmatrix} 0.841 & 0 & 0 \\ 0 & 0.841 & 0 \\ 0 & 0 & 1.414 \end{bmatrix} \quad T2 = \begin{bmatrix} 1.414 & 0 & 0 \\ 0 & 0.841 & 0 \\ 0 & 0 & 0.841 \end{bmatrix} \quad T3 = \begin{bmatrix} 0.841 & 0 & 0 \\ 0 & 1.414 & 0 \\ 0 & 0 & 0.841 \end{bmatrix}$$

Del capítulo anterior se observa que la matriz  $T1$  comprime a los nodos o semillas de Voronoi de la estructura y, por lo tanto, a ella en  $1/\sqrt[4]{2}$  en las direcciones x y y mientras que la alarga en  $\sqrt[2]{2}$  en la dirección de z, la forma en que se escogieron estos números es arbitraria ya que únicamente extendió y comprimió a la estructura en las tres direcciones cartesianas con el objeto de simular un “giro” de las estructura, no se gira propiamente ya que no se aplica una matriz de rotación. Las matrices  $T2$  y  $T3$  cumplen una función similar. Las estructuras base a las cuales se aplican estas matrices se muestran en la figura Figura IV.3

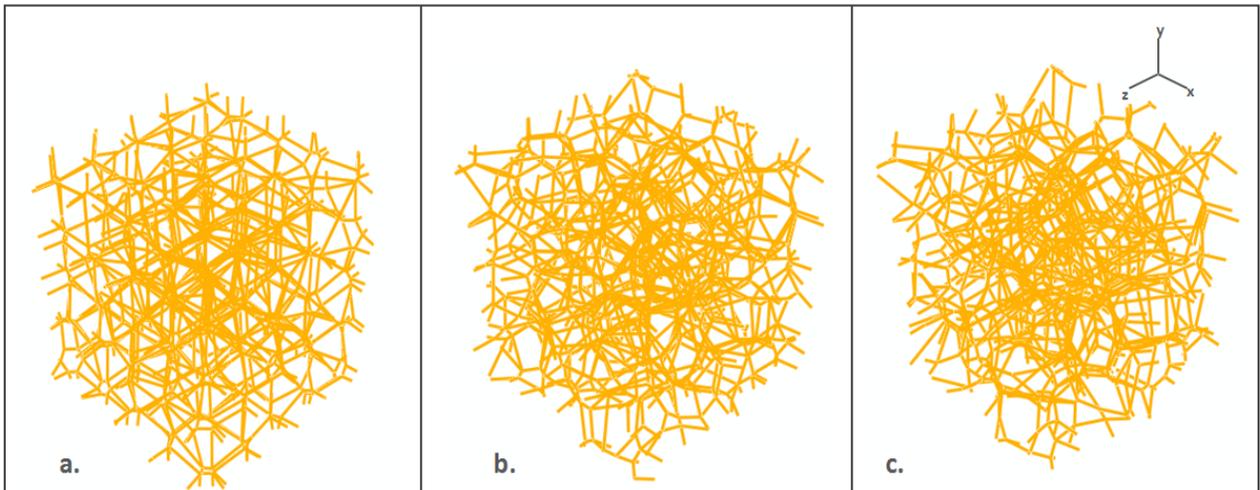


Figura IV.3 Estructuras Base. a) estructura basada en la simetría cubica simple con una desviación estándar de 0.1. b) estructura basada en la simetría cubica simple con una desviación estándar de 0.2. c) estructura basada en la simetría cubica simple con una desviación estándar de 0.3

Para observar gráficamente que le produce a una estructura base la multiplicación de la matriz de transformación T1, se muestra la figura IV.4.

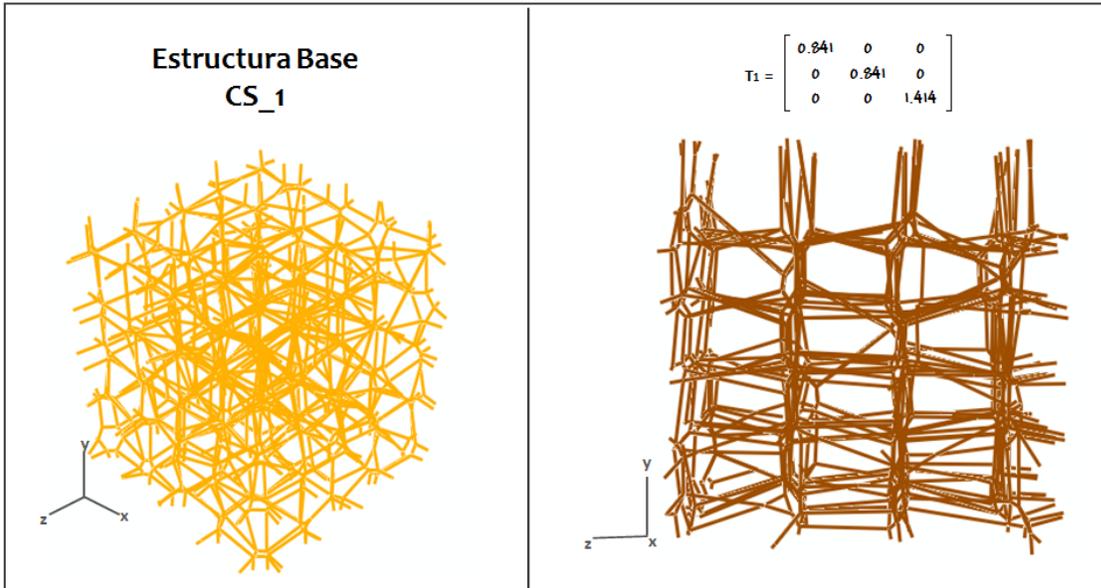


Figura IV.4 Estructuras base antes (ver Figura IV.3) y después de aplicar la matriz de Transformación.

Se observa que la estructura sufre un evidente alargamiento en la dirección z, el encogimiento en las direcciones x, y es menos evidente pero sin dejar existir. Ahora, la estructura después de haber aplicado la matriz de transformación T1 es la estructura con la que se trabajó y a la que se simulará girar, para ello se requiere crear las dos estructuras faltantes las cuales se muestran a continuación.

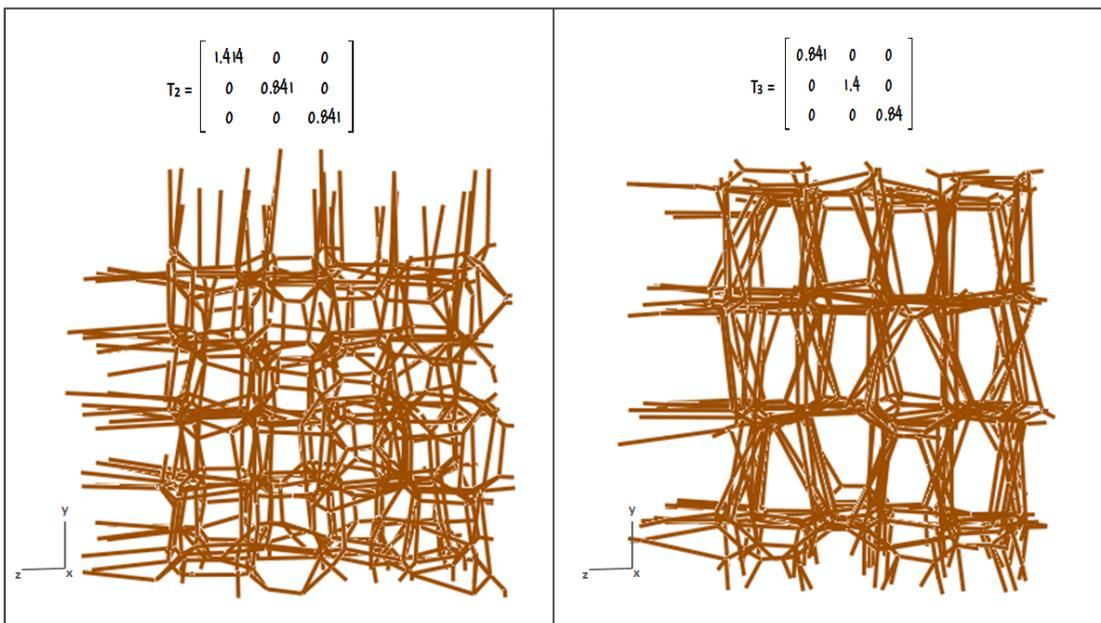


Figura IV.5 Estructura base después de aplicar las matrices de transformación T2 y T3.

Observando las figuras IV.4 y IV.5 las tres estructuras después de haber aplicado las matrices de transformación tienen configuraciones diferentes bajo el mismo sistema de referencia; sin embargo, si las analizamos detenidamente se puede observar que las tres estructuras son la misma pero girada en cierto sentido. Para verlo gráficamente se toma primero la estructura T1 (estructura base después de aplicar la matriz de transformación T1) orientándola como se muestra a la izquierda de la figura IV.6.

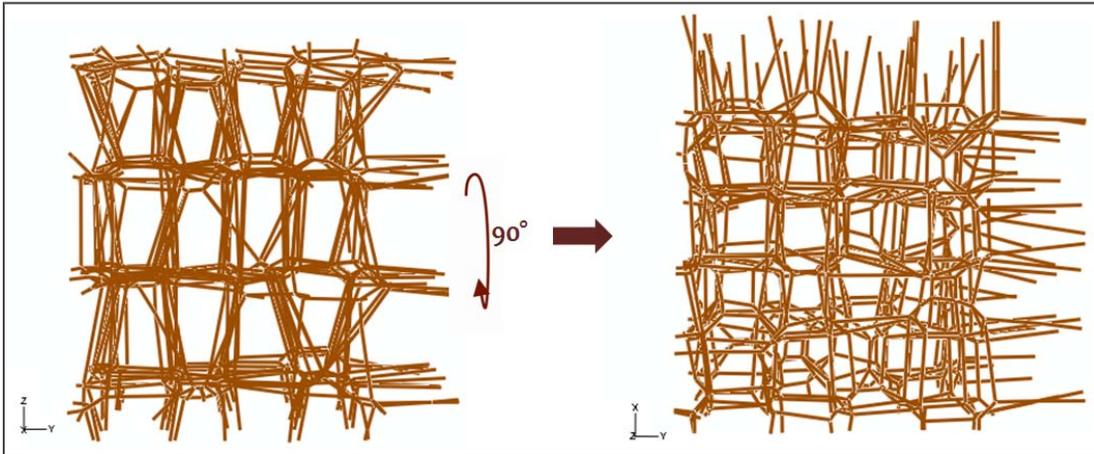


Figura IV.6 A la izquierda la estructura T1, a la derecha la estructura girada 90° en el sentido que indica la flecha sobre el eje y

Se observa que después de girar a la estructura T1, se llega a la estructura T2, es decir que al aplicar las matrices de transformación se evita por un lado redefinir nodos, lo que implicaría modificar el algoritmo de generación de las estructuras para con ello poder aplicar correctamente las condiciones de frontera ya que los nodos superiores de la estructura no cambian.

Para dejar este proceso explícito se muestra como se llega a las estructura T3.

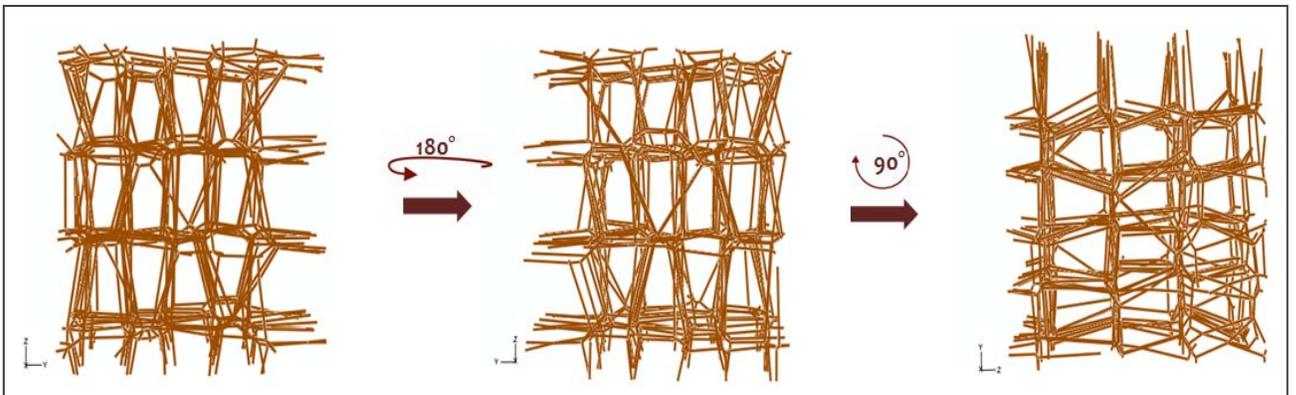


Figura IV.7 Ilustración de la secuencia de giros para llegar a las estructura T3

De forma similar se modifican las estructuras base cúbica Simple con desviación estándar 0.2 y 0.3 las cuales se muestran a continuación.

Para las estructuras generadas a partir de la base cúbica simple con desviación estándar 0.2 se muestran en la figura IV.8.

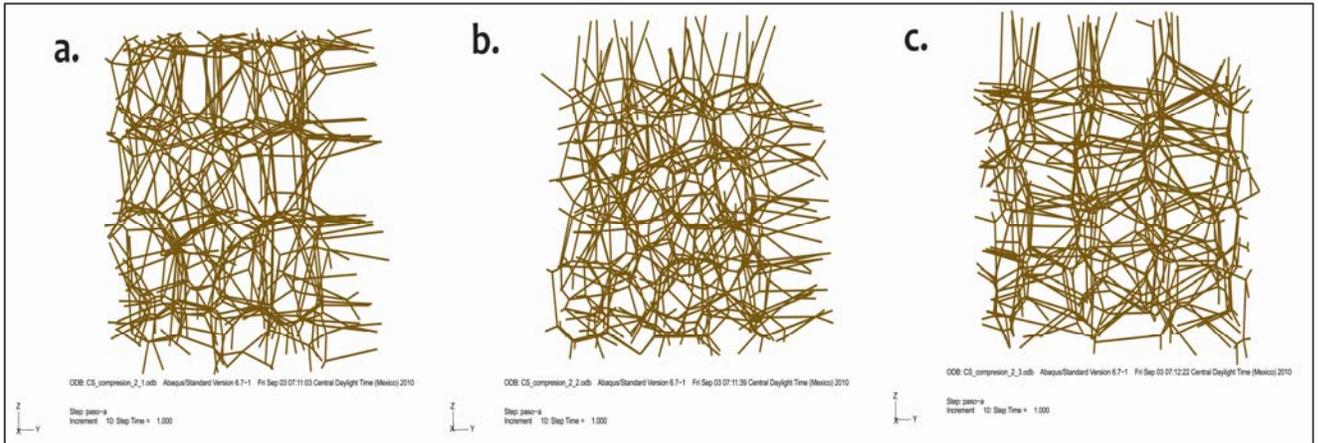


Figura IV.8 Estructuras construidas a partir de la estructura base Cúbica Simple con desviación estándar 0.2; a) estructura construida con la matriz T1; b) estructura construida con la matriz T2; a) estructura construida con la matriz T3

Para las estructuras generadas a partir de la base cúbica simple con desviación estándar 0.3 se tienen las estructuras presentadas en la figura IV.9.

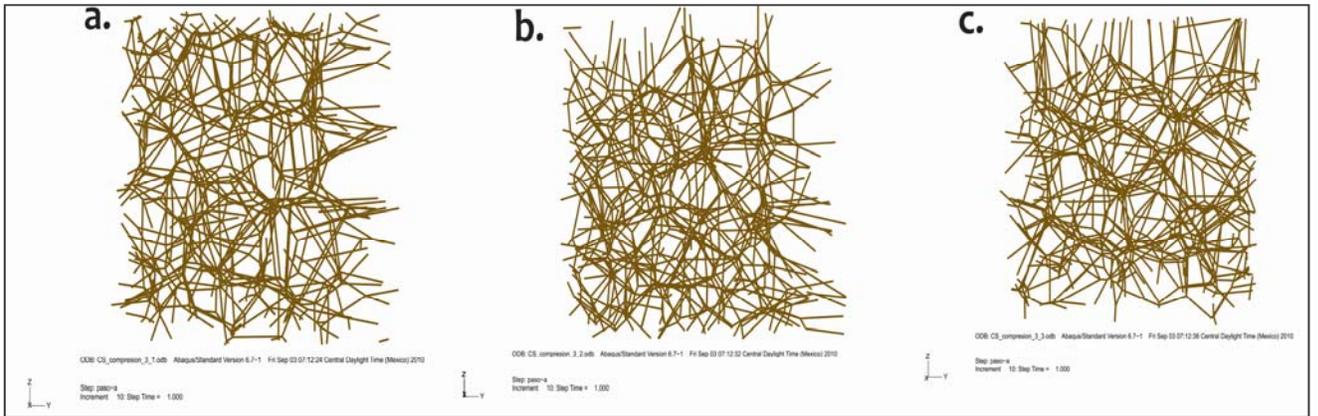


Figura IV.9 Estructuras construidas a partir de la estructura base cubica simple con desviación estándar 0.2; a) Estructura construida con la matriz T1; b) Estructura construida con la matriz T2; c) Estructura construida con la matriz T3

Estas son las probeta virtuales con las que se trabajarán. El siguiente paso es describir la forma en que se simularon los ensayos mecánicos virtuales, para lo cual se utilizó, la paquetería de elemento finito ABAQUS® y archivos .inp que son archivos de líneas de comandos. En las siguientes secciones se muestra la forma en que se construyeron dichos archivos.

## IV.5 Estructura del Archivo .inp

El archivo de entrada o *input file* es el medio de comunicación entre el preprocesador, por lo general ABAQUS/CAE®, y el software de análisis, Abaqus/Standard o Abaqus/Explicit®. Este archivo contiene una descripción completa del modelo sujeto a simulación numérica. El archivo de entrada es un archivo de texto que tiene una interfaz intuitiva basada en el formato de KEYWORDS, por lo que es fácil de modificar con un editor de texto. Si es necesario; de hecho, análisis simples pueden especificarse fácilmente tecleando directamente el archivo de entrada mediante un procesador de textos y cambiando la extensión .txt por .inp. Los KEYWORDS contienen la información necesaria para definir la malla, las propiedades del material, las condiciones de frontera y el control sobre las salidas del programa. Si se utiliza un preprocesador como abaqus/CAE®, las modificaciones deben hacerse a través de éste, el cual, al finalizar el modelo, generará automáticamente el archivo .inp para su análisis.

Dada la gran cantidad de nodos y elementos que ocupa cada una de las estructuras de Voronoi, no es factible construir el archivo .inp desde un editor de texto o construir la estructura desde ABAQUS/CAE®, por ello en el trabajo previo a éste (Investigación *in silico* de las propiedades mecánicas del hueso trabecular, 2008) se construyó un programa en MATLAB® capaz de generar la estructura de Voronoi y entregar como salida el archivo .inp listo para simularlo en ABAQUS®, con la estructura y palabras clave adecuadas. Este programa permitirá, en un futuro, realizar múltiples archivos .inp con diferentes estructuras y propiedades, sin necesidad de constantemente cambiar parámetros, aumentando con ello el número de simulaciones virtuales con lo cual podrán determinarse propiedades promedio de los materiales celulares ensayados.

A lo largo del presente capítulo, se explicará la estructura e instrucciones principales que se emplearon para realizar los ensayos en las estructuras de Voronoi. Sin embargo, antes de comenzar con ello es importante precisar que el software no maneja unidades específicas ni verifica la consistencia en éstas. Durante el modelado, se debe tener cuidado de ser consistentes con las dimensiones que se manejen al definir la geometría, mallas, propiedades de los materiales, cargas o cualquier condición que se defina para crear un modelo

### IV.5.1 Modelo de elementos finitos

La estructura de un archivo *inp* en ABAQUS®, debe contar con toda la información que describe el problema y los resultados que se quieren obtener de éste. Dicha información debe contener, al menos, la geometría, el mallado, las propiedades de los materiales, tipo de análisis, cargas, condiciones de frontera y salidas del sistema.

Las instrucciones o KEYWORDS siempre van anteceditas de un asterisco (\*) y precedidos por los parámetros de dicha instrucción. La instrucción y sus parámetros deben ser separados mediante el uso de comas. Por ejemplo:

```
*ELEMENT, TYPE=T2D2
```

\*ELEMENT es la instrucción que define un tipo de elemento para conectar los nodos, mientras que TYPE=T2D2 indica el tipo de elemento a utilizar. Los KEYWORDS comúnmente van seguidos por líneas de información, las cuales, a diferencia de éstos, no requieren ningún

tipo de símbolo al inicio, aunque sus elementos deben separarse mediante el uso de comas. En caso de requerir agregar información dentro del *inp* a modo de comentarios, deben colocarse dos asteriscos (\*\*) al inicio de la línea.

### IV.5.2 Heading (Encabezado)

La primera instrucción en un archivo *inp* debe de ser el **HEADING** (o encabezado). En esta instrucción se puede agregar una breve descripción del modelo que permita identificar al *inp* posteriormente. En algunos casos, es recomendable agregar una descripción del sistema de unidades, propiedades o características que ayuden a entender el modelo. Para el caso particular del análisis de la estructura de Voronoi se estableció dicha instrucción de la siguiente forma:

```
*Heading  
Hueso Trabecular  
Caracterización de una estructura de Voronoi
```

### IV.5.3 Impresión de datos

La instrucción *\*PREPRINT* permite controlar la información que se desea imprimir en un archivo de salida con extensión *.dat*. Dicha instrucción presenta la siguiente estructura:

```
*PREPRINT, ECHO=YES, MODEL=YES, HISTORY=YES
```

En el caso particular de los ensayos sobre las estructuras de Voronoi, se dejaron todas las opciones activadas.

### IV.5.4 Geometría

Una vez definido el título para el archivo *inp* y activadas las opciones de impresión de datos, se deben introducir los datos para describir la geometría del modelo. En esta sección se deben ingresar los nodos y elementos que conforman la malla. En caso de contar con una geometría compuesta de varias piezas, se deben introducir de manera separada asignándole un nombre a cada una de ellas mediante la instrucción *\*Part* obedeciendo a la siguiente estructura:

```
*Part, name=pieza1  
**Geometría  
*End Part
```

Para luego ser ensambladas en la sección *Assembly*.

Gracias a que la geometría de la estructura de Voronoi fue generada como una sola pieza, no fue necesario generar piezas que debieran ser ensambladas posteriormente, de modo que las coordenadas de los nodos se ingresaron directamente en la sección de Ensamble (*Assembly*).

Para este análisis en particular se tiene especial interés en conocer los niveles de esfuerzos en las vigas durante los ensayos, las fuerzas de reacción en los nodos donde se aplica el desplazamiento y los desplazamientos en las fronteras del cubo que se tiene de muestra, para lo cual se investigaron diversos tipos de requerimientos de salida en la sección “output request”. Para las fuerzas de reacción y desplazamientos de nodos no hubo mayor problema, sin embargo obtener los niveles de esfuerzo resultaba un problema, por lo que realizando varias modificaciones al archivo *inp* se observó que la única manera de obtener los niveles de esfuerzo fue generando una pieza sin geometría dentro de la sección *\*Part* para luego agregar la instrucción *\*instance* dentro de la sección *Assembly*.

Los parámetros de la instrucción *\*instance* son: el nombre del elemento (*name=instance1*) y la pieza a que hace referencia (*part=pieza1*).

Para poder asignar un nombre al ensamble se utiliza la instrucción *\*Assembly*, cuyo parámetro es *name=Assembly1*. La línea de comando para definir la geometría del problema resulta de la siguiente forma:

```
** PARTS
*Part, name=alambre
*End Part
** ASSEMBLY
*Assembly, name=Assembly
*Instance, name=alambre-1, part=alambre
```

Para definir la malla, se debe utilizar la instrucción *\*NODE* para ingresar un listado con el número y coordenadas de cada uno de los nodos que componen dicha malla. Esta lista debe iniciar en 1 seguido de las coordenadas (x, y, z) del primer nodo. Como se muestra a continuación:

```
*Node
101,0.30272, 0.85190, 0.93839
102,0.16037, 0.87313, 1.06490
103,0.85156, 0.49795, 0.29212
104,...
```

Para definir el tipo de elemento a utilizar y la relación de adyacencia entre nodos, se utiliza la instrucción *\*ELEMENT* cuyos datos deben ser ingresados a manera de lista bajo el formato que se muestra a continuación.

*<número de elemento>, <nodo 1>, <nodo 2>*

Donde *nodo 1* y *nodo 2* son los extremos del elemento.

El tipo de elemento que se utilizó pertenece al grupo **Vigas de Euler-Bernoulli** (*B23*, *B23H*, *B33* y *B33H*). Este tipo de elementos no permite deformación cortante transversal; las secciones planas permanecen planas y normales al eje de la viga. Estas vigas son usadas solo para modelar vigas esbeltas: las dimensiones de la sección transversal serán pequeñas comparadas con la distancia a lo largo de su eje. Las vigas de Euler-Bernoulli usan funciones de interpolación cúbica, con lo cual se obtiene buena precisión en los resultados, en especial en casos que involucran cargas distribuidas a lo largo de la viga.

El elemento BEAM B33 se asignó mediante el parámetro `type=B33` y se agruparon en un set (conjunto) mediante el parámetro `elset=VOR01`. El bloque completo de la instrucción \*ELEMENT para asignar el tipo de elemento en los ensayos sobre la estructura de Voronoi se muestra a continuación:

```
*Element, type=B33, elset=VOR01
101,101, 102
102,101, 760
103,102, 760
104,...
```

Finalmente, se requiere asignar una sección y definir las propiedades del material del cual están constituidos los elementos asignados en la malla. Para el elemento B33 se debe utilizar la instrucción \*Beam General Section, asignando en su parámetro `elset` el nombre del conjunto de elementos generado anteriormente. Las trabéculas para el modelado se aproximaron como cilindros de sección transversal circular cuyas características se muestran a continuación.

Tabla IV.1 Características asignadas a los elementos VIGA B33

CARACTERÍSTICAS PARA LOS ELEMENTOS B33	
Radio	0.075 [mm]
Coefficiente de Poisson	0.29
Modulo de Young	18.1 [Gpa]

De las características anteriores es importante mencionar dos aspectos, el primero de ellos es que la propiedad geométrica que se le asigna, es decir el radio de las vigas, fue tomado de mediciones experimentales (Ramirez, 2007) donde este valor se encontró entre los grosores trabeculares más pequeños; el segundo aspecto son las propiedades mecánicas que se le asignan a las trabéculas. Estas propiedades son de hueso cortical, ya que si bien se está considerando que el hueso esponjoso puede simplificarse como un arreglo de vigas (Gibson, 1985) también se considera que dichas vigas son un material sólido, elástico e isotrópico de propiedades similares a las de hueso cortical, esto con el fin de simplificar el análisis (Kim, 2002). A partir de lo anterior se le asignaron propiedades de hueso cortical reportadas en la literatura (Cuppone, 2004). La instrucción y los parámetros para asignar estas propiedades quedan como se muestra en el bloque de instrucciones siguiente.

```
*Beam General Section, elset=VOR01, poisson = 0.29, section=CIRC
0.075
0.,0.,-1.
18100
```

En el tercer renglón de esta sección de instrucciones se define la orientación de la sección transversal de las vigas, esta orientación se definirá en términos de un eje local que sigue la regla de la mano derecha ( $t, n_1, n_2$ ) donde  $t$  es la tangente sobre el eje del elemento, positiva desde el primer al segundo nodo;  $n_1$  y  $n_2$  son vectores que definen las direcciones locales 1 y 2 de la sección, como se muestra en la figura IV.10 (Esta figura no presenta la geometría que se utilizan para los modelos que se desarrollará a lo largo de la tesis, la cual es una sección circular).

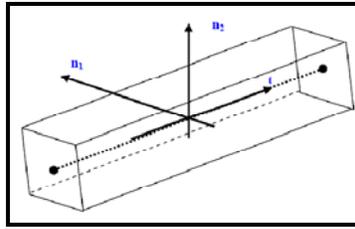


Figura IV.10 Definición del eje local

Una vez definida la geometría, elementos, sección y propiedades de la malla, se debe finalizar la instrucción `*instance` mediante el comando `*End instance`. Antes de finalizar la sección de ensamble, se definieron conjuntos de nodos pertenecientes a las caras de la estructura de Voronoi, sobre las cuales se van a establecer las condiciones de frontera (BASE y DESPLAZAMIENTO); también es importante determinar estos conjuntos de nodos debido a que se extraerán de ellos los desplazamientos y reacciones que se presenten ante las condiciones impuestas. Para generar estos sets (conjuntos) de nodos, se debe utilizar la instrucción `*Nset` cuyo parámetro es: `nset=name`, y las líneas de información para dicha función es una lista con los números de los nodos que se desea agregar al set. Los números de nodo deben ir separados por comas y el número de nodos por línea no debe ser mayor a quince. Los sets de nodos que se crearon y la sintaxis utilizada es la siguiente:

```
*Nset, nset=BASE
761, 766, 769 ...
*Nset, nset=DESPLAZAMIENTO
1074, 1075, 1076 ...
*Nset, nset=X_inf
837, 841, 842 ...
*Nset, nset=X_sup
764, 765, 767 ...
*Nset, nset=Y_inf
807, 811, 812 ...
*Nset, nset=Y_sup
762, 763, 775 ...
*Nset, nset=pivote
770
*End Assembly
```

Los conjuntos creados corresponden a los nodos que se encuentran en los diferentes planos de corte, el set `pivote` es un caso especial dado que solo contiene un nodo, el cual es extraído del set empotrado y que sirve como apoyo en los ensayos de compresión y deslizamiento. La tabla IV.3 muestra a que plano pertenecen los diferentes sets.

Tabla IV.3 Sets y plano al que pertenecen los nodos de dichos conjunto.

Set	Plano de corte
EMPOTRADO	z=0.123
DESPLAZAMIENTO	z=4.987
x_inf	x=4.987
x_sup	x=0.123
y_inf	y=4.123
y_sup	y=0.123

### IV.5.5 Propiedades del material

En ésta sección se definen las propiedades de los materiales de las piezas involucradas en el análisis. Para definir las propiedades de un material, se emplea la instrucción `*Material` cuyo parámetro es: `name=material1`. En las líneas de información de dicha función, se debe especificar el tipo de propiedades que se va a definir ya que en algunos casos es necesario establecer propiedades térmicas, elásticas, plásticas, eléctricas, entre otras, de acuerdo a los modelos que correspondan. ABAQUS® cuenta con una amplia gama de modelos que incluyen algunos no lineales. Para éste caso se utilizó el modelo de elasticidad lineal.

### IV.5.6 Perfil del análisis

El objetivo de esta sección dentro del `inp` es definir los diferentes eventos en que se desarrollará la simulación, así como definir el tipo de análisis que se desea realizar y las condiciones de carga y frontera a las que estará sujeta la estructura. Para este caso, se busca simular el desplazamiento unidireccional de una de las caras de la celda de Voronoi, este proceso solo requiere de un evento y debe definirse mediante el comando `*STEP`, cuyo único parámetro será el nombre del mismo mediante el comando “name” antes empleado para otros comandos. Luego de haber definido el evento para la simulación, es necesario especificar el tipo de análisis que se desea realizar, los más comunes son: *estático* y *dinámico*. En este caso, lo que se desea obtener es la respuesta estática en estado permanente de la estructura bajo las condiciones de desplazamiento, el comando para definir un análisis estático es `*STATIC` y las líneas de información para este comando definen el tiempo de duración del evento y los incrementos de tiempo para el análisis.

Los comandos empleados para definir el evento y tipo de análisis a realizar para la caracterización de la estructura de Voronoi, con sus parámetros y líneas de información se muestran a continuación:

```
*Step, name=paso-1
*Static
0.1, 1.0, 1e-05, 0.1
```

Los siguientes datos que se deben introducir en la sección de `*STEP` son: condiciones de frontera, cargas y salidas del sistema, y pueden ser ingresados en cualquier orden.

En este caso se comenzará por definir las condiciones de frontera las cuales se utilizan para restringir movimiento en los nodos o a definir un desplazamiento conocido sobre ellos. En algunos casos, se utilizan para definir simetría en el modelo. Dichas condiciones, deben ser introducidas mediante el comando `*BOUNDARY` y especificando el nodo (o set de nodos) sobre el cual se va a aplicar, el número correspondiente al grado de libertad que se desea restringir y el desplazamiento. Es decir:

```
*Boundary
<nodo>, <grado de libertad>, <desplazamiento>
```

La convención de enumeración utilizada para los grados de libertad en ABAQUS® es la siguiente:

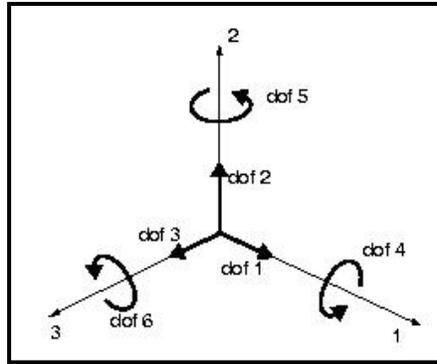


Figura IV.11 Convención de ABAQUS de enumeración para los grados de libertad.

Las condiciones de frontera que se utilizaron para la estructura de Voronoi, dependiendo del ensayo que se simuló, fueron:

⇒ **COMPRESIÓN.** Desplazamiento de 0.5 milímetros (corresponde aproximadamente al 10% de la altura de la muestra) en el sentido negativo de la dirección 3 para el set *DESPLAZAMIENTO*, restricción de movimiento en dirección 3 para los nodos en la base de la estructura (set *EMPOTRADO*) y empotrado para el nodo central de la base con el fin de evitar que la estructura gire. Las líneas de comando son las siguientes:

```
*Boundary
DESPLAZAMIENTO, 3, -0.5
*Boundary
EMPOTRADO, 3, 0
*Boundary
pivote, encastre
```

⇒ **DESLIZAMIENTO.** Desplazamiento de 0.5 milímetros en el sentido negativo de la dirección 2 para el set *DESPLAZAMIENTO*, restricción de movimiento en las direcciones 2 y 3 para los nodos en la base de la estructura (set *EMPOTRADO*) y empotramiento para el nodo central de la base con el fin de evitar que la estructura gire. Las líneas de comando son las siguientes:

```
*Boundary
DESPLAZAMIENTO, 2, -0.5
*Boundary
EMPOTRADO, 2, 3, 0
*Boundary
pivote, encastre
```

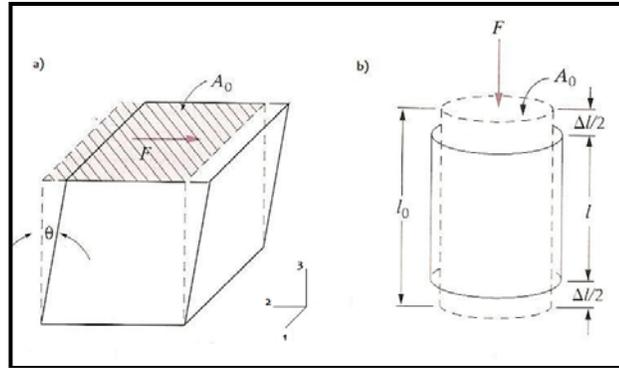


Figura IV.12 a) Ensayo de deslizamiento. b) Ensayo de compresión (Callister, 2004)

Los ensayos se definieron en dos archivos *inp* diferentes. Para los fines de este trabajo, no fue necesario definir ningún tipo de cargas, presiones o temperaturas, de modo que solo resta definir las salidas que se desean obtener. El comando mediante el cual se puede definir el tipo de salida que se requiere es *\*OUTPUT* y sus parámetros son: *history* y *field*. El parámetro *field* se emplea para generar gráficas de contorno o gráficas de deformación de superficies, mientras que el parámetro *history* se emplea para variables que se desean observar mediante una gráfica de tipo X-Y.

Para éste modelo, se utilizaron los parámetros de salida predefinidos, empleando el parámetro *variable=preselect* para ambos tipos de respuesta. Las líneas de comando y sintaxis se muestran a continuación:

```
** OUTPUT REQUESTS
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
*Output, history, variable=PRESELECT
```

Una vez que se han definido todos los datos necesarios para el evento, se utiliza el comando *\*END STEP* para marcar el final del evento.

Con esto se tienen ya definidas las estructuras de dos archivos *inp* para simular dos ensayos mecánicos a las muestras virtuales cúbicas. Los resultados obtenidos de estos ensayos serán presentados en el capítulo dedicado a ello.

# V. MEF aplicado al análisis de estructuras de Voronoi 3D

Si bien la paquetería de ABAQUS® mediante el uso del archivo *.inp*, permite determinar las propiedades mecánicas de las estructuras tridimensionales de Voronoi a través de ensayos mecánicos virtuales de manera sencilla, este tipo de archivos se limitan a la aplicaciones previstas en la paquetería comercial por lo cual en cierto momento resulta complejo introducir nuevos elementos y ciertos conceptos tales como el de falla que es de suma importancia para este trabajo. Dada la limitada flexibilidad de la paquetería comercial, se optó por programar el método de elemento finito enfocándolo al análisis de estructuras e introduciendo un criterio de falla, ocupando la paquetería Mathematica®, por lo cual es importante conocer las bases de la formulación matemática del método aplicado.

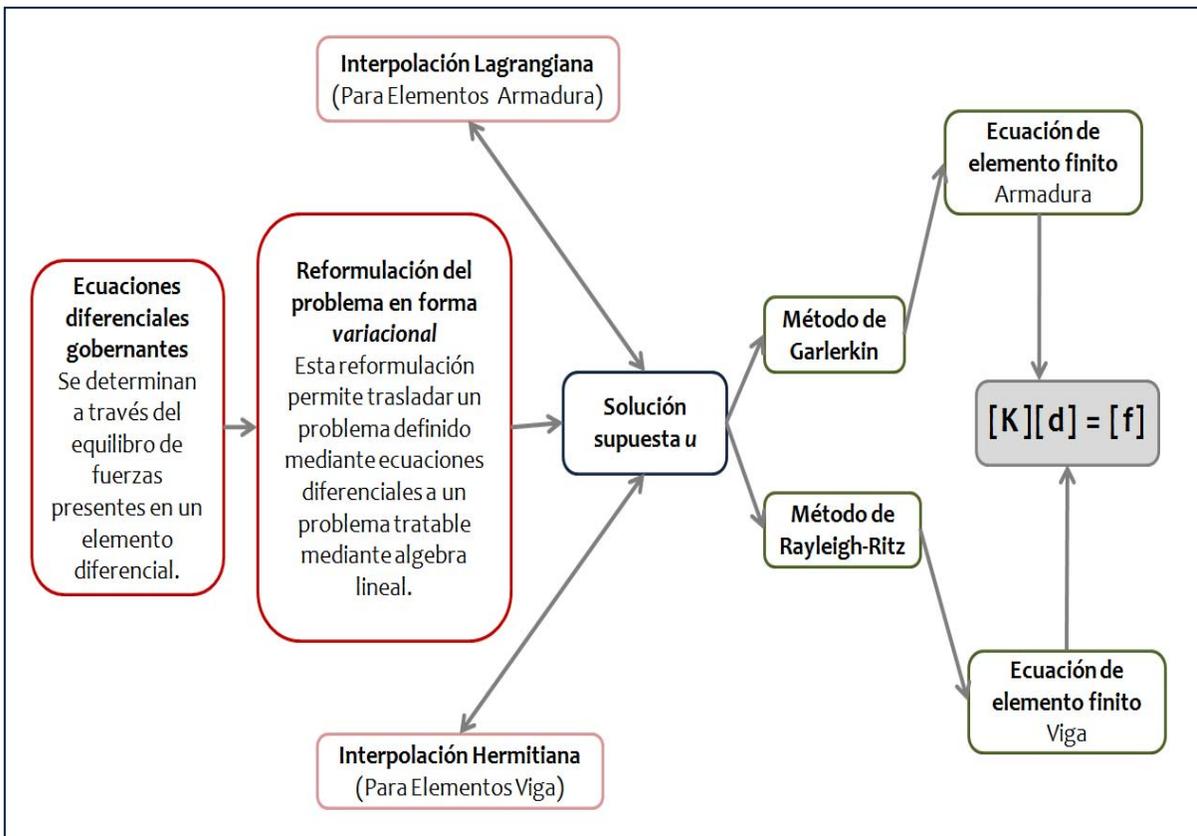


Figura V.1 Esquema para llegar de las ecuaciones diferenciales características de los elementos a las ecuaciones de elemento finito de los mismos.

En el diagrama anterior se esquematiza la forma en que se llega a la ecuaciones de elemento finito a partir de las ecuaciones diferenciales características de los elementos con los cuales se desea trabajar; en este caso se deducirán únicamente para los elemento viga y los elementos armadura ya que esto permitirá observar el metodo en general y además las formulaciones obtenidas para estos elementos servirán para obtener la ecuación de elemento finito de los Marco usando tambien el concepto de *Energía de Deformación*.

Se definirán en primera instancia, para seguir el orden del esquema de la figura V.1, las ecuaciones diferenciales características de los elementos viga y armadura.

## V.1 Ecuaciones Diferenciales Características

### V.1.1 Elementos Armadura

Antes de comenzar con el análisis debe hacerse notar que a lo largo de este trabajo se utilizará  $a$  para referirse a la coordenada axial de los elementos y  $t$  para hablar del tiempo. Ya que el elemento *armadura* sólo tiene reacción a cargas axiales se analizará al estar sometido a una carga axial distribuida  $q(a, t)$  la cual puede variar a lo largo de la barra y puede ser también función del tiempo. Por la presencia de esta carga se presenta un desplazamiento axial denotado por  $u(a, t)$ , dado lo anterior se tendrá que la armadura depende de los siguientes parámetros:  $A$ , el área de la sección transversal y  $E$ , su módulo de elasticidad.

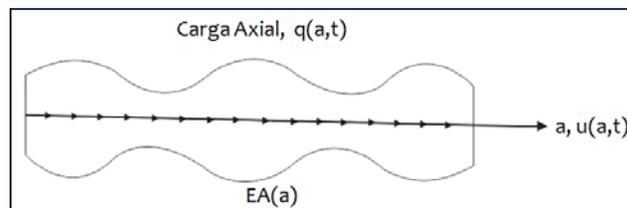


Figura V.2 Barra cargada axialmente.

La ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento de este elemento se obtiene analizando el equilibrio de fuerzas en un elemento diferencial como se muestra en la figura.

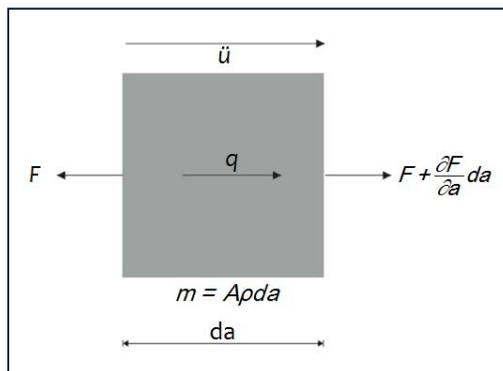


Figura V.3 Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de una barra cargada axialmente.

Si se denota a la densidad por  $\rho$  y  $a$  la aceleración con  $\ddot{u}$ , el equilibrio de fuerzas se expresa de la siguiente manera:

$$A(a)\rho da \ddot{u}(a,t) + F = qda + F + \frac{\partial F}{\partial a} da \Rightarrow A\rho \ddot{u} = q + \frac{\partial F}{\partial a} \quad (5.1)$$

Introduciendo el concepto de esfuerzo axial se tiene que  $F=A \sigma_x$ . Ya que una de las consideraciones que se hacen en este trabajo es que las *trabéculas de hueso esponjoso* son de un material linealmente elástico, es posible relacionar de esta forma el esfuerzo axial  $\sigma_x$ .

Suponiendo también que se manejarán desplazamientos muy pequeños, la deformación axial está relacionada con la primera derivada del desplazamiento axial, como sigue:

$$F = AE \frac{\partial u}{\partial a} \quad (5.2)$$

Sustituyendo esta última en la ecuación de equilibrio, la ecuación diferencial característica de los elementos armadura es:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( AE \frac{\partial u}{\partial a} \right) + q = A\rho \ddot{u} \quad (5.3)$$

Debido a los alcances de este trabajo, no se considera que la barra esté sometida a cargas dinámicas y no a cargas distribuidas, se tiene entonces un caso de análisis estático y la ecuación de equilibrio es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( AE \frac{\partial u}{\partial a} \right) = 0; \quad a_0 < a < a_L \quad \text{Ecuación gobernante para un elemento armadura} \quad (5.4)$$

### V.1.2 Elementos viga

Un elemento viga solo tiene reacción a cargas transversales, por lo cual, para determinar su ecuación diferencial gobernante, se hará el equilibrio de fuerzas considerando únicamente las siguientes sollicitaciones mecánicas.

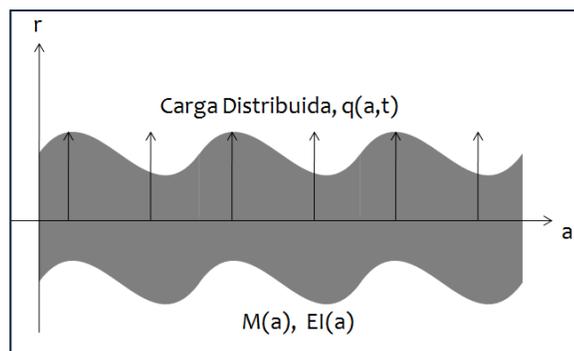


Figura V.4 Elemento viga.

Donde  $q(a, t)$  es la carga transversal distribuida sobre la viga que depende de la coordenada axial  $a$  y del tiempo  $t$ ,  $m(a)$  es la masa por unidad de longitud,  $E$  es el modulo de Young y  $I(a)$  es el segundo momento de inercia del área. Considerando estas solicitaciones mecánicas el diagrama de cuerpo libre para un elemento diferencial es el siguiente:

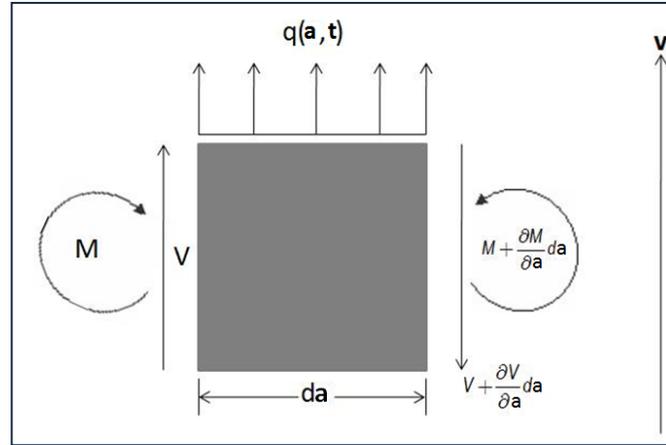


Figura V.5 Fuerzas que actúan en un elemento diferencial de un elemento viga.

En el que  $\ddot{v}$  es la aceleración en dirección transversal y  $V$  es la fuerza en dirección transversal al eje.

Del diagrama se obtiene que el equilibrio de fuerzas es:

$$m da \ddot{v}(a, t) = q(a, t)da + V - (V + \frac{\partial V}{\partial a})da \Rightarrow m\ddot{v}(a, t) + \frac{\partial V}{\partial a} = q(a, t) \quad (5.5)$$

La sumatoria de momentos para el elemento diferencial es:

$$-q(a, t)da \frac{da}{2} - M - Vda + M + \frac{\partial M}{\partial a}da = 0 \quad (5.6)$$

Si se desprecian los términos de orden  $dt^2$ , se obtiene:  $V = \frac{\partial M}{\partial a}$  (5.7)

Ya que se considera que en la flexión de vigas una sección plana antes de la flexión se mantiene plana y normal al eje neutro después de la flexión, el desplazamiento axial en un punto y sobre el eje neutro está dada por:

$$u(a) = -r \frac{dv}{da} \quad (5.8)$$

La deformación axial  $\epsilon_t$  es por tanto:  $\epsilon_a = \frac{du}{da} = -r \frac{d^2v}{da^2}$  (5.9)

Como ya se mencionó, los elementos que se pretenden modelar, en este caso las *trabéculas del hueso*, se consideraran como elementos linealmente elásticos, por lo que el

esfuerzo axial  $\sigma_a$  y la deformación están relacionados por el módulo de Young de la siguiente forma:

$$\sigma_a = E \varepsilon_a = -Er \frac{d^2r}{da^2} \quad (5.10)$$

Así, el esfuerzo axial debido a la flexión varía linealmente sobre la sección transversal. El esfuerzo máximo de compresión se da en la parte superior y el máximo esfuerzo de tensión se da en la parte inferior. Tomando las fuerzas que provocan momento sobre la sección transversal, se obtiene que:

$$M(a) = - \int \sigma_a r dA = \int Er \frac{d^2v}{da^2} r dA = E \frac{d^2v}{da^2} \int r^2 dA = EI \frac{d^2v}{da^2} \quad (5.11)$$

Donde A es el área de la sección transversal y  $I = \int_A r^2 dA$  es el segundo momento de inercia del área. Usando esta expresión, es posible relacionar el momento y el esfuerzo cortante a través de:

$$V = \frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \right) \quad (5.12)$$

Sustituyendo la derivada de V dentro de la primera ecuación de equilibrio, se puede escribir a la ecuación gobernante como sigue:

$$m\ddot{v}(a,t) + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \right) = q(a,t) \quad (5.13)$$

Ya que a lo largo de este trabajo se considera un análisis estático, la fuerza de inercia es cero. Además no se considera aplicación de cargas directamente, por lo cual la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \right) = 0 \quad \text{Ecuación gobernante para un elemento viga} \quad (5.14)$$

## V.2 Reformulación del problema en forma variacional

La reformulación del problema en forma variacional permite llevar el problema definido por ecuaciones diferenciales a un problema tratable mediante métodos del álgebra lineal para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, a través de reescribir las ecuaciones en forma integral. Existen varios métodos para esto, entre ellos el *Metodo de Galerkin* y *Rayleigh-Ritz*; ambos requieren de una formulación integral equivalente, sin embargo, se basan en diferentes conceptos para llegar a ella, el *Metodo de Galerkin* introduce el concepto de *forma débil* mientras que el segundo utiliza el concepto de *Energía Potencial*. A continuación se presentará la forma de llegar a las ecuaciones de elemento finito aplicando estos métodos. (Bhatti, 2005)

### V.2.1 Ecuaciones de elemento armadura usando el método de Galerkin

En este punto se tiene ya la ecuación diferencial gobernante para los elementos armadura, siendo esta la que se busca solucionar llevándola a una forma que pueda resolverse mediante el álgebra lineal. Para hacer esto, Galerkin parte de proponer una solución que se denotará con  $\tilde{u}(a)$ , la cual puede tener cualquier forma: esta solución obviamente no satisficará completamente a la ecuación, es decir:

$$\frac{d}{da} \left( AE \frac{d\tilde{u}}{da} \right) + q \neq 0 \quad (5.15)$$

Como se puede observar se utilizó la forma de la ecuación en la que se descarta la dependencia del tiempo pero no la de una carga distribuida. Al no satisfacer completamente a la ecuación diferencial el error de la solución supuesta será diferente de cero.

$$e(a) = \frac{d}{da} \left( AE \frac{d\tilde{u}}{da} \right) + q \neq 0 \quad (5.16)$$

El error total, llamado *residuo*, para todo el dominio solución se obtiene por la integración de  $e(a)$  sobre éste. Para evitar que errores negativos se cancelen con positivos en diferentes puntos, se multiplica por una función de ponderación. Ya que se tienen  $n$  parámetros desconocidos, los cuales corresponde a los grados de libertad de un elemento armadura, se necesitan  $n$  funciones de ponderación para establecer el *residuo ponderado de Galerkin* con lo cual se tiene:

$$\int_{a_1}^{a_2} e(a) w_i(a) da = 0; \quad i=0,1,\dots,n \quad (5.17)$$

Esta forma se conoce como la *forma débil* de la ecuación diferencial. Considerando la ecuación diferencial para los elementos armadura, se tendría que la forma débil es la siguiente:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left( q w(a) + \frac{d}{da} \left( AE \frac{d\tilde{u}(a)}{da} \right) w(a) \right) da = 0 \quad (5.18)$$

Ahora bien, para las funciones de ponderación  $w(a)$  se usarán funciones de interpolación. Estas funciones se determinan considerando que la solución supuesta de la ecuación diferencial es un polinomio de grado uno entre las desconocidas nodales, es decir, los desplazamientos en los extremos del elemento armadura. Existen varios métodos de interpolación entre ellos la *interpolación de Lagrange*; esta función es útil ya que formula para  $n$  datos un polinomio que pase por cada uno de ellos, para la aplicación que se pretende dar  $n$  es igual a dos ya que para cada elemento hay dos parejas de puntos, la posición y el grado de libertad nodal, es decir se tiene  $\{\{s_1, u_1\}, \{s_2, u_2\}\}$ . (Bhatti, 2005) Se tiene entonces que la fórmula para la interpolación de Lagrange enfocado a la aplicación que se le pretende dar es la siguiente:

$$u(a) = \sum_{i=1}^{n=2} L_i(a) u_i = (L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad \dots) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv N^T d \quad (5.19)$$

Donde  $L_i(a)$  son las funciones de interpolación Lagrangiana dadas por la siguiente fórmula:

$$L_i(a) = N_i = \prod_{\substack{j=1; \\ j \neq i}}^{n=2} \frac{a - a_j}{a_i - a_j} \quad (5.20)$$

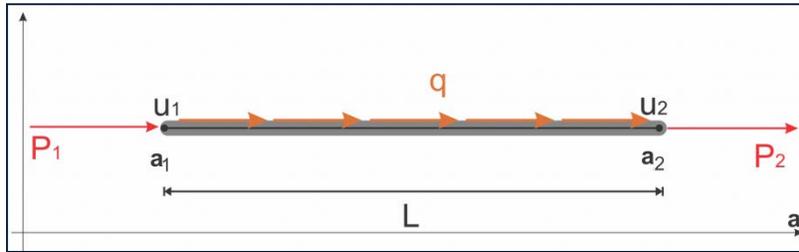


Figura V.6 Elemento con dos nodos extremos con su correspondientes grados de libertad.

Donde  $P_1$  y  $P_2$  son cargas nodales en dirección axial,  $a_1$  y  $a_2$  corresponden a la coordenadas axiales de los nodos,  $u_1$  y  $u_2$  son los desplazamientos nodales y  $q$  la carga axial distribuida sobre la viga.

Tomando al elemento armadura y sus parámetros, mostrados en la figura V.6, se tiene que la solución supuesta tiene la siguiente forma.

$$\tilde{u}(a) = (N_1 \quad N_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \equiv N^T d \quad (5.21)$$

Donde  $N_1$  y  $N_2$  son:

$$N_1 = \frac{a - a_2}{a_1 - a_2} = -\frac{a - a_2}{L}; \quad (5.22); \quad N_2 = \frac{a - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a - a_1}{L} \quad (5.23)$$

Para la subsecuente deducción de las ecuaciones de elemento finito se requerirá  $\tilde{u}'(a)$  por lo tanto, diferenciando con respecto a  $t$  se tiene:

$$\tilde{u}'(a) = (N'_1 \quad N'_2) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \equiv B^T d \quad (5.24)$$

$$N'_1 = \frac{1}{a_1 - a_2} = -\frac{1}{L}; \quad (5.25); \quad N'_2 = \frac{1}{a_2 - a_1} = \frac{1}{L} \quad (5.26)$$

Se tiene entonces la forma de la solución supuesta, lo único que se requiere para conocerla completamente es determinar las incógnitas o grados de libertad nodales, es decir,  $u_1$  y  $u_2$ . Con esto se tienen ya las funciones de interpolación necesarias para llegar a las ecuaciones de elemento finito. Regresando entonces a la forma débil de la ecuación diferencial gobernante para los elementos armadura e incorporando las funciones de interpolación Lagrangiana, se tiene que la forma débil tiene la siguiente forma:

$$\int_{a_1}^{a_2} (q N_i + \frac{d}{da} (A E \frac{d\tilde{u}(a)}{da}) N_i) da = 0 \quad (5.27)$$

Por comodidad no se usará la tilde para la solución supuesta y cuando en algún punto se refiera a la solución exacta se hará explícito. Ahora, aplicando la integración por partes a la expresión anterior se llega a:

$$A E N_i(a_2) u'(a_2) - A E N_i(a_1) u'(a_1) + \int_{a_1}^{a_2} (q N_i - A E u' N_i) da = 0 \quad (5.28)$$

De la expresión anterior, se puede observar que los dos primeros términos involucran valores específicos de cargas nodales. Dada esta situación, en este punto es oportuno establecer cuáles son las condiciones de frontera en un elemento *armadura*, las cuales se establecerán suponiendo que en los extremos existen cargas  $P_1$  y  $P_2$  las cuales se muestran en la figura V.6.

$$-A E u'(a_1) = P_1; \quad (5.29)$$

$$-A E u'(a_2) = P_2; \quad (5.30)$$

Tomando las condiciones de frontera, la expresión se reduce a:

$$P_1 N_i(a_2) + P_2 N_i(a_1) + \int_{a_1}^{a_2} (q N_i - A E u' N_i) da = 0 \quad (5.31)$$

Con las dos funciones de interpolación, las dos ecuaciones de elementos finitos para los elementos armadura, son las siguientes:

$$\int_{a_1}^{a_2} (q N_1(a) - A E u' N'_1(a)) da + P_1 N_1(a_1) + P_2 N_1(a_2) = 0 \quad (5.32)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} (q N_2(a) - A E u' N'_2(a)) da + P_1 N_2(a_1) + P_2 N_2(a_2) = 0 \quad (5.33)$$

Las funciones de interpolación de Lagrange tienen la propiedad que cuando  $N_1(a_1)=1$ ,  $N_1(a_2)=0$ ,  $N_2(a_1)=0$  y  $N_2(a_2)=1$ , si se toma en cuenta esto y, usando notación matricial, las expresiones anteriores quedan formuladas de la siguiente manera:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left( \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right) \mathbf{q} - \begin{pmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{pmatrix} AE u'(a) \, da + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Sustituyendo la forma matricial de  $u'(t)$  se tiene lo siguiente:

$$\int_{a_1}^{a_2} \left( \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \end{matrix} \right) \mathbf{q} - \begin{pmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{pmatrix} AE \begin{pmatrix} N'_1 & N'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} da + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

o

$$\int_{a_1}^{a_2} \mathbf{N} \mathbf{q} \, da + \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{B} AE \mathbf{B}^T \mathbf{d} \, da + \mathbf{r}_p = \mathbf{0} \quad (5.36)$$

A partir de esta forma, se pueden definir los siguientes términos:

$$\mathbf{k} = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{B} AE \mathbf{B}^T \mathbf{d} \, da \quad (5.37)$$

$$\mathbf{r}_q = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{N} \mathbf{q} \, da \quad (5.38)$$

$$\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Escribiendo explícitamente las ecuaciones de interpolación, derivadas e integrales las expresiones anteriores se escriben de la siguiente forma:

$$\mathbf{k} = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{B} AE \mathbf{B}^T \mathbf{d} \, da = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} AE \frac{1}{L^2} da & -\int_{a_1}^{a_2} AE \frac{1}{L^2} da \\ -\int_{a_1}^{a_2} AE \frac{1}{L^2} da & \int_{a_1}^{a_2} AE \frac{1}{L^2} da \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{r}_q = \int_{a_1}^{a_2} \mathbf{N} \mathbf{q} \, da = \begin{pmatrix} \int_{a_1}^{a_2} \frac{a-a_2}{L} q \, da \\ \int_{a_1}^{a_2} \frac{a-a_1}{L} q \, da \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Para este trabajo  $\mathbf{r}_q$  corresponde a cero ya que no se consideran cargas distribuidas,  $\mathbf{k}$  se conoce como la *matriz de rigidez* del elemento armadura,  $\mathbf{r}_p$  es el vector de cargas puntuales, cada elemento está caracterizado por estas matrices. La ecuación de elemento para cada elemento es:

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{r}_p \quad \text{Ecuación de elemento finito para armaduras} \quad (5.42)$$

La ecuación de elemento finito para el elemento de la figura V.6, es la siguiente:

$$\frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

Donde se observa que ésta depende únicamente de la longitud del elemento y de las cargas en sus nodos. Esta es la ecuación de elemento finito para un elemento; cuando se tiene un arreglo estructural, cada una de las matrices debe ensamblarse como ya fue mostrado en el capítulo anterior, al ensamblarse lo que se tendrá es un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son los desplazamientos axiales nodales.

### V.2.2 Ecuaciones de elemento viga usando el método de Rayleigh-Ritz

Como ya fue mencionado anteriormente el método de Rayleigh-Ritz se basa en consideraciones energéticas para llegar a la forma equivalente integral de ecuaciones diferenciales, para problemas estructurales la *energía potencial* es usada de manera exitosa para llegar a esta forma. Dado que el problema que se trabaja a lo largo de esta tesis es un problema estructural se definirá a continuación la energía potencial para vigas en flexión.

Para vigas elásticas lineales la deformación y esfuerzo axial por flexión se definen como (Bhatti, 2005):

$$\epsilon_a = \frac{du}{da} = -y \left( \frac{d^2v}{da^2} \right); \quad (5.44)$$

$$\sigma_a = -E \epsilon_a \left( \frac{d^2v}{da^2} \right) \quad (5.45)$$

Donde  $v$  es el desplazamiento transversal al eje de la viga. De esta manera la energía de deformación para un elemento viga con coordenadas extremas en  $a_1$  y  $a_2$  se puede escribir como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_a \epsilon_a dV = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \int_A E s \left( \frac{d^2v}{da^2} \right) s \left( \frac{d^2v}{da^2} \right) dA da = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} EI \left( \frac{d^2v}{da^2} \right)^2 da \quad (5.46)$$

Donde  $s$  es la coordenada transversal al eje de la viga.

La energía potencial de las fuerzas aplicadas es igual al trabajo negativo realizado por las fuerzas externas aplicadas.

$$W = \int_{a_1}^{a_2} q v \, da + \sum P_i v(a_i) \quad (5.47)$$

Donde  $v(a_i)$  es el desplazamiento transversal en el punto donde se aplica la fuerza  $P_i$ . Así, la energía potencial para una viga debido a la flexión se escribe de la siguiente forma:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} EI \left( \frac{d^2 v}{da^2} \right)^2 da - \int_{a_1}^{a_2} q v \, da - \sum P_i v(a_i) \quad (5.48)$$

Se puede demostrar, que la función  $v(a)$  minimiza la energía potencial y es además solución de la ecuación diferencial de segundo orden característica de los elementos viga.

Ahora, desarrollando la expresión anterior considerando los datos de figura V.7 se llega a que la energía potencial es la siguiente:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} EI \left( \frac{d^2 v}{da^2} \right)^2 da - \int_{a_1}^{a_2} q v \, da - F_1 v_1 - M_1 \theta_1 - F_2 v_2 - M_2 \theta_2 \quad (5.49)$$

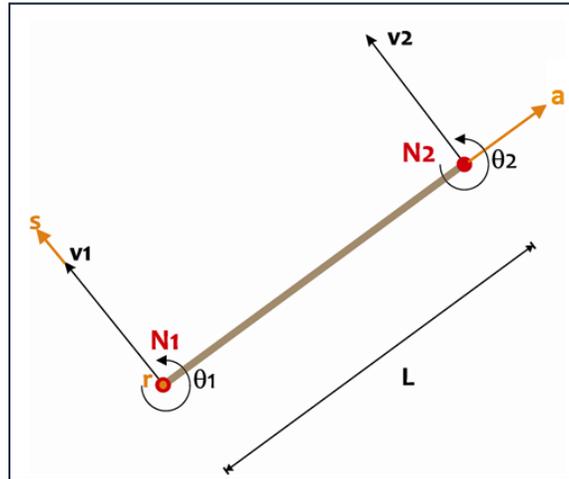


Figura V.7 Elemento Viga

Antes de continuar con la deducción de las ecuaciones de elemento finito para las vigas, hay que establecer la forma en que se determinarán las funciones de los grados de libertad a lo largo del elemento cuando se conocen los valores del desplazamiento transversal y rotación en los nodos. Como se observa en la figura V.7 los elementos se definen únicamente por dos nodos, teniendo para un elemento viga dos grados de libertad por nodo, el desplazamiento vertical  $v$  y la rotación  $\theta$ , donde la rotación es  $\theta \equiv dv/dt$ , la forma de relacionarlos es a través de una función de interpolación como la de Lagrange. Sin embargo, ésta solo relaciona los valores de la función, el problema en este punto es que se requiere no solo relacionar el valor de la

función sino además el de su primera derivada, que en este caso corresponde a la rotación, por lo cual se recurre a la interpolación Hermitiana. Esta función de interpolación determina un polinomio conociendo los valores de la función y sus primeras derivadas para  $n$  puntos. La fórmula de la interpolación Hermitiana para esta aplicación, es la siguiente

$$v(a) = \sum_{i=1}^{n=2} P_i(a) v_i + \sum_{i=1}^{n=2} Q_i(a) \theta_i \equiv \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & P_2 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{N}^T \mathbf{d} \quad (5.50)$$

Donde

$$P_i(a) = (1 - 2L'_i(a_i) (a - a_i)) L_i^2(a); \quad (5.51)$$

$$Q(a) = (a - a_i) L_i^2(a) \quad (5.52)$$

Y  $L$  corresponde a la función de interpolación de Lagrange. Se puede observar también que sólo evalúa hasta  $n=2$  ya que solo se tienen dos nodos por elemento.

Los elementos que se manejarán a lo largo de este trabajo, tienen como datos los mostrados en las figura V.7, por lo cual puede establecerse una forma general de la función  $v(a)$ . Siguiendo la fórmula de interpolación Hermitiana y Lagrangiana, y recordando que se puede colocar un sistema de referencia local en cada elemento donde el origen se encuentra en el nodo 1, los valores de  $t_1$  y  $t_2$  son 0 y  $L$  correspondientemente, la función  $v(a)$  en forma vectorial es la siguiente.

$$v(a) = \begin{pmatrix} \frac{(L + 2a_1) (L - a)^2}{L^3} & \frac{(L - a)^2 a^2}{L^2} & \frac{(3L - 2a) a^2}{L^3} & \frac{(a - L) a^2}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

Conociendo el valor de  $L$  (Longitud del elemento) y los valores de las incógnitas o grados de libertad se conoce completamente  $v(a)$ . Regresando entonces a la formulación de la energía potencial, se observa que se requiere conocer  $d^2v/da^2$  así como su cuadrado, tomando la forma vectorial desarrollada se obtiene que:

$$\frac{d^2v}{da^2} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12a}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6a}{L^2} & \frac{6}{L^2} + \frac{12a}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6a}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \mathbf{d} \quad (5.54)$$

Donde:

$$\mathbf{BB}^T = \begin{pmatrix} \frac{36(L-2a)^2}{L^6} & \frac{12(sL-3a)(L-2a)}{L^5} & -\frac{36(L-2a)^2}{L^6} & \frac{12(L-3a)(L-2a)}{L^5} \\ \frac{12(sL-3a)(L-2a)}{L^5} & \frac{4(2L-3a)^2}{L^4} & -\frac{12(L-3a)(L-2a)}{L^5} & \frac{4(L-3a)(2L-3a)}{L^4} \\ -\frac{36(L-2a)^2}{L^6} & -\frac{12(L-3a)(L-2a)}{L^5} & \frac{36(L-2a)^2}{L^6} & -\frac{12(L-3a)(L-2a)}{L^5} \\ \frac{12(L-3a)(L-2a)}{L^5} & \frac{4(L-3a)(L-2a)}{L^4} & -\frac{12(L-3a)(L-2a)}{L^5} & \frac{4(L-3a)^2}{L^4} \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

Usando la información anterior, la energía de deformación puede ser escrita como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{d}^T \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \, ds = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{d} \, ds \equiv \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \quad (5.56)$$

Donde:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{E} \mathbf{I} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \, da = \mathbf{E} \mathbf{I} \begin{pmatrix} \int_0^L \frac{36(L-2a)^2}{L^6} & \int_0^L \frac{12(sL-3a)(L-2a)}{L^5} & \dots \\ \int_0^L \frac{12(sL-3a)(L-2a)}{L^5} & \int_0^L \frac{4(2L-3a)^2}{L^4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Llevando a cabo la integración obtenemos que:

$$\mathbf{k} = \mathbf{E} \mathbf{I} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

Ya que a lo largo de este trabajo se manejan únicamente cargas puntuales, se analizará a continuación el trabajo realizado por ellas:

$$W_p = -F_1 v_1 - M_1 \theta_1 - F_2 v_2 - M_2 \theta_2 = \begin{pmatrix} F_1 & M_1 & F_2 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{r}_p^T \mathbf{d} \equiv \mathbf{d}^T \mathbf{r}_p \quad (5.59)$$

La energía potencial puede entonces escribirse como sigue:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_q^T \mathbf{d} - \mathbf{r}_p^T \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \left( \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_p \right) \quad (5.60)$$

Las condiciones necesarias para la energía obtener la energía potencial mínima:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \left( \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} - \mathbf{r}_p \right) + \frac{1}{2} \mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

Así las ecuaciones de los elementos viga son las siguientes:

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{r}_q + \mathbf{r}_p \Rightarrow \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

Como puede observarse las ecuaciones de elemento finito, obtenidas a partir del método de Galerkin o del de Rayleigh Ritz, se reducen a un sistema de ecuaciones algebraicas, de la misma forma ocurre para un elemento *Marco*. Ya que este tipo de elementos son la combinación de los elementos *viga* y *armadura* se utilizarán parte de las formulaciones planteadas para estos elementos para llegar a las ecuaciones de elemento finito de los elementos *marco*.

### V.2.3 Elementos marco en el espacio

Como ya se mencionó en el capítulo anterior los elementos marco son elementos caracterizados para dar la información adecuada al estar sometidos a un estado de esfuerzo de compresión o tensión axial, flexión y torsión. Considerando que un elemento *marco* está sometido a estos estados de esfuerzos y debe dar la información adecuada para su conocer su comportamiento, este elemento tiene asignado seis grados de libertad; tres translaciones y tres rotaciones, como se muestra en la Figura V.8. Los grados de libertad en el sistema de coordenadas locales se definen como sigue:

- d1, d2, d3      Desplazamientos en el nodo 1
- d4, d5, d6      Rotaciones en el nodo 1
- d7, d8, d9      Desplazamientos en el nodo 2
- d10, d11, d12    rotaciones en el nodo 2

Cabe mencionar que los desplazamientos nodales y las fuerzas aplicadas son positivos cuando estas ecuaciones actúan en el sentido positivo de los ejes coordenados. Para los momentos aplicados y rotaciones las direcciones positivas se asignan de acuerdo a la regla de la mano derecha.

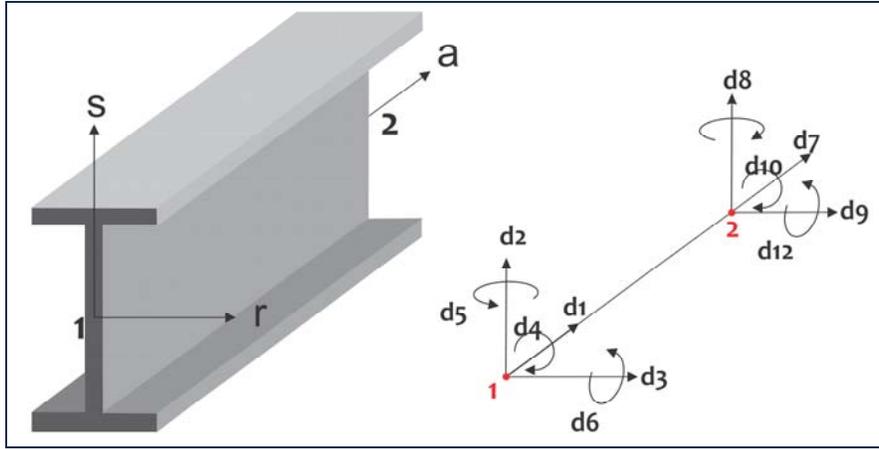


Figura V.8 Grados de libertad para un elemento marco en el espacio.

En la figura V.8 se muestra un elemento marco con una sección transversal I con el objeto de que se pueda visualizar la asignación de los ejes coordenados locales en un elemento marco, sin embargo, la sección transversal que se manejará para este trabajo será una *sección circular constante*.

Ahora, para llegar a la ecuación de elemento finito de un elemento *marco* en el espacio se aplicará el método de Rayleigh-Ritz; para ello se requieren conocer las funciones de los desplazamientos axiales, transversales y las rotaciones correspondientes, se utilizarán como anteriormente se hizo la interpolación de Lagrange y Hermitiana para relacionar los grados de libertad asociados a los desplazamiento correspondientes. Cabe mencionar que al igual que los elementos viga y armadura, los elementos marco se definen únicamente por dos nodos.

Los desplazamientos axiales están relacionados con los grados de libertad  $d_1$  y  $d_2$  a través de la interpolación Lagrangiana como sigue:

$$u(a) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{L} & \frac{a}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}; \quad (5.63)$$

La carga aplicada en el plano local  $s$ - $a$  produce el desplazamiento  $v(a)$  en la dirección local  $s$  y las rotaciones sobre el eje  $r$  ( $\theta = dv/da$ ). A partir de la flexión en la viga la función de forma  $v(a)$  está relacionada con los grados de libertad nodales  $d_2$ ,  $d_6$ ,  $d_8$  y  $d_{12}$ , a través de la función de interpolación hermitiana, como sigue:

$$v(a) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3} & a - \frac{2a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} & \frac{3a^2}{L^2} - \frac{2a^3}{L^3} & -\frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_6 \\ d_8 \\ d_{12} \end{pmatrix}; \quad (5.64)$$

Estas cargas causan momentos flexionantes sobre el eje  $r$  y fuerza cortante normal a la dirección  $a$ :

$$M_r(a) = EI_r \left( \frac{d^2 v}{da^2} \right); \quad (5.65)$$

$$V_a(a) = \frac{dM_r}{da} = EI_r \left( \frac{d^3 v}{da^3} \right) \quad (5.66)$$

Para las fuerzas aplicadas en el plano  $r$ - $a$ , el desplazamiento  $w(a)$  es en la dirección local  $r$  y las rotaciones  $\varphi$  son sobre el eje  $s$ . La situación es esencialmente la misma que en el caso anterior excepto que un desplazamiento positivo en la dirección  $r$  produce una rotación en el sentido de las manecillas del reloj sobre el eje  $s$ . Así, con la convención de signos adoptada para vigas la rotación está relacionada con el desplazamiento transversal  $w(a)$  con un signo negativo.

$$\varphi(a) \equiv -\frac{\partial w}{\partial a} \quad (5.67)$$

Las funciones de forma de elemento finito para esta situación son las mismas que para una viga bajo flexión excepto por el cambio en el signo para los términos de rotación. De esta manera la función de forma  $w(a)$  está relacionado con los grados de libertad nodales  $d_3$ ,  $d_5$ ,  $d_9$  y  $d_{11}$  como sigue:

$$v(a) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3} & -\left(a - \frac{2a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2}\right) & \frac{3a^2}{L^2} - \frac{2a^3}{L^3} & -\left(-\frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_6 \\ d_8 \\ d_{12} \end{pmatrix}; \quad (5.68)$$

Estas cargas causan momentos flexionantes sobre el eje  $s$  y fuerzas cortantes normales a la dirección  $r$ .

$$M_s(a) = -EI_s \left( \frac{d^2 w}{da^2} \right); \quad (5.69)$$

$$V_r(a) = -\frac{dM_s}{da} = EI_s \left( \frac{d^3 w}{da^3} \right) \quad (5.70)$$

Los elementos marco en el espacio están generalmente sujetos a momento torsionante. La ecuación diferencial que gobierna elementos que están sujetos a torsión es una ecuación diferencial de segundo orden similar a una de un problema de deformación axial. Suponiendo que los momentos torsionantes son aplicados únicamente en los extremos de los elementos el problema puede describirse en términos de la siguiente ecuación diferencial:

$$GJ \frac{d^2 \psi}{da^2} = 0 \quad (5.71)$$

Donde  $\psi(a)$  es la rotación de la sección sobre el eje  $a$ ,  $G$  es modulo de rigidez a corte y  $J$  es el momento torsional. De la similaridad de esta ecuación a la correspondiente a un problema de deformación axial, se puede utilizar la interpolación de Lagrange para relacionar los grados de libertad  $d_4$  y  $d_{10}$  de la siguiente manera:

$$\psi(a) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{L} & \frac{a}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_4 \\ d_{10} \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

El momento torsionante por unidad de longitud se relaciona con el ángulo de torsión por la siguiente ecuación:

$$M_a(a) = GJ \frac{d\psi}{da} \quad (5.73)$$

Combinando las deformaciones axiales y la flexión en los planos  $r$ - $a$  y  $s$ - $a$ , y los efectos debido a la torsión, la energía de deformación total en un elemento marco se puede escribir como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{du}{da} \right)^2 da + \frac{1}{2} \int_0^L EI_r \left( \frac{d^2v}{da^2} \right)^2 da + \frac{1}{2} \int_0^L EI_s \left( \frac{d^2w}{da^2} \right)^2 da + \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left( \frac{d\psi}{da} \right)^2 da \quad (5.74)$$

Es conveniente expresar esta ecuación en forma matricial como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{du}{da} & \frac{d^2v}{da^2} & \frac{d^2w}{da^2} & \frac{d\psi}{da} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{da} \\ \frac{d^2v}{da^2} \\ \frac{d^2w}{da^2} \\ \frac{d\psi}{da} \end{pmatrix} da \quad (5.75)$$

Donde:

$E$  Modulo de Young

$G$  Modulo Cortante

$A$  Área de la sección transversal

$J$  Constante torsional (Para una sección transversal circular  $J = I_{max} + I_{min} = I_p$ )

$I_p$  Momento Polar de inercia

$I_s = I_{min}$  Momento de inercia de la sección transversal sobre el eje  $s$  (mínimo momento de inercia)

$I_r = I_{max}$  Momento de inercia de la sección transversal sobre el eje  $r$  (máximo momento de inercia)

L Longitud del momento

Usando las funciones de interpolación desarrolladas, las derivadas requeridas se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{da} \\ \frac{d^2v}{da^2} \\ \frac{d^2w}{da^2} \\ \frac{d\psi}{da} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12a}{L^3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12a}{L^3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{12} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{B}^T \mathbf{d} \quad (5.76)$$

Donde:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12a}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a}{L^3} - \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} - \frac{12a}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6a}{L^2} - \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L^2} + \frac{12a}{L^3} & 0 & \frac{4}{L} - \frac{6a}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{L^2} - \frac{12a}{L^3} & 0 & \frac{2}{L} - \frac{6a}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

De esta manera la energía de deformación puede ser escrita como sigue:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{d}^t \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T da \quad \mathbf{d} \equiv \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} \quad (5.78)$$

Donde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{pmatrix}; \quad (5.79)$$

Por lo que se expresa  $\mathbf{k}$  como sigue:

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}^T da \quad (5.80)$$

Realizando las multiplicaciones e integraciones correspondientes, se obtiene la matriz de rigidez de los elementos marco en el sistema de coordenadas locales, la cual fue mostrada en el capítulo III en la página 41, donde se observa que todos los parámetros son constantes, variando únicamente la longitud para cada elemento.

Como también ya fue mencionado a lo largo de este trabajo no se aplican cargas distribuidas, únicamente se trabaja con cargas puntuales y el vector de cargas puntuales para estos elementos tiene la siguiente forma.

$$\mathbf{q}_p = \begin{pmatrix} F_{a1} \\ F_{s1} \\ F_{r1} \\ M_{a1} \\ M_{s1} \\ M_{r1} \\ F_{t2} \\ F_{s2} \\ F_{r2} \\ M_{a2} \\ M_{s2} \\ M_{r2} \end{pmatrix} \quad (5.81)$$

Donde los primeros tres renglones corresponden a las fuerzas y momentos localizados en el primer nodo mientras que los últimos seis corresponde al segundo nodo. De igual manera que para vigas y armaduras, se tiene aquí la matriz de rigidez y vector de cargas puntuales para un elemento marco en un sistema de referencia local. Cuando se tiene un arreglo estructural se tiene por cada elemento su correspondiente vector de cargas y matriz de rigidez; para llevar a cabo el ensamble y determinar el sistema de ecuaciones global se requiere que todos los elementos estén referidos a un sistema de referencia global, se requiere una matriz de transformación de coordenadas, para ello se describe a continuación este cambio de coordenadas.

#### V.2.4 Transformación de un sistema de coordenadas locales a globales

La matriz de rigidez y el vector de cargas han sido calculados en términos del sistema de coordenadas locales. Ya que los diferentes elementos marco en el espacio tienen generalmente sistema de coordenadas locales diferentes, antes de poder ensamblar las matrices se deben transformar tanto las matrices como los vectores a un sistema de coordenadas globales que sea común a todos los elementos marco. En el sistema de coordenadas globales  $x$ ,  $y$  y  $z$  los desplazamientos y rotaciones nodales se identifican con la siguiente notación:

- $u_1, v_1, w_1$  son los desplazamiento en  $x, y$  y  $z$  en el nodo 1
- $\theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}$  son las rotaciones sobre  $x, y$  y  $z$  en el nodo 1
- $u_2, v_2, w_2$  son los desplazamiento en  $x, y$  y  $z$  en el nodo 2

$\theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}$  son las rotaciones sobre x,y y z en el nodo 2

Las correspondientes fuerzas y momentos en el sistema de coordenadas globales son las siguientes.

$F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}$  Son las fuerzas aplicadas en el sistema global x,y y z en el nodo 1

$M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}$  Son los momentos sobre los ejes del sistema global x,y y z en el nodo 1

$F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}$  Son las fuerzas aplicadas en el sistema global x,y y z en el nodo 2

$M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}$  Son los momentos sobre los ejes del sistema global x,y y z en el nodo 2

La matriz de transformación se determina de la consideración de que las tres componentes de desplazamiento y rotación en cada vector son cantidades vectoriales. Así, la matriz de transformación es una matriz de 12x12 que contiene cuatro matrices de rotación idénticas (de 3x3) como se muestra a continuación.

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

Donde  $\mathbf{H}$  es una matriz de rotación para el espacio tridimensional de 3x3 y  $\mathbf{0}$  es la matriz cero de 3x3. Las matrices de rotaciones  $\mathbf{H}$  llevan las cantidades vectoriales de un sistema de coordenadas locales a un sistema de coordenadas globales.

Con la consideración de que se trabaja con pequeños desplazamientos, las rotaciones, desplazamientos, fuerzas y momentos nodales son cantidades vectoriales y pueden ser transformadas usando la matriz  $\mathbf{H}$ . En la forma matricial la transformación puede ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} a \\ s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_a & m_a & n_a \\ l_s & m_s & n_s \\ l_r & m_r & n_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad (5.83)$$

Donde:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} l_a & m_a & n_a \\ l_s & m_s & n_s \\ l_r & m_r & n_r \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

Donde  $l_a$  es el coseno del ángulo entre los ejes  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$ . Los otros términos siguen la misma idea. Así nueve cosenos directores se necesitan para establecer la matriz  $\mathbf{H}$  para cada elemento marco en el espacio.

Usando la matriz de transformación, las ecuaciones de los elementos en el sistema de coordenadas locales pueden llevarse al sistema de coordenadas globales de la siguiente forma:

$$\mathbf{k}_{Local} \mathbf{d}_{Local} = \mathbf{r}_{Local} \Rightarrow \mathbf{k}_{Local} \mathbf{T} \mathbf{d} = \mathbf{r}_{Local} \quad (5.85)$$

Multiplicando ambos lados por  $\mathbf{T}^T$ , se obtiene

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k}_{Local} \mathbf{T} \mathbf{d} = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_{Local} \quad (5.86)$$

Debe notarse que  $\mathbf{T}^T \mathbf{r}_{Local}$  es la transformación que lleva al vector de cargas del sistema de coordenadas locales al sistema de coordenadas globales, siguiendo con las ecuaciones de los elementos en término de los grados de libertad globales y las cargas nodales en las direcciones globales:

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{r} \quad (5.87)$$

Donde:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_{Local} \mathbf{T}; \quad \mathbf{r} = \mathbf{T}^T \mathbf{r}_{Local} \quad (5.88)$$

Con el concepto de transformación de un sistema de referencial local a uno global, ensamble de matrices y vectores, se pueden construir ya las ecuaciones de elemento finito globales que corresponde a un sistema de ecuaciones globales.

$$\mathbf{K}_{marco} \mathbf{d} = \mathbf{r}_p \quad (5.89)$$

Donde  $\mathbf{K}_{marco}$  es la matriz de rigidez global, la cual como ya pudo observarse contiene únicamente parámetros geométricos,  $\mathbf{d}$  el vector de grados de libertad o vector de incógnitas, y  $\mathbf{r}_p$  el vector de cargas puntuales, que para la iteración uno es igual al vector cero  $\mathbf{0}$ . Con esto se tiene el sistema de ecuaciones a resolver, sólo faltan agregar las condiciones de frontera. Ya que lo que se pretende simular son ensayos de compresión, se imponen dos distintas condiciones de frontera, para lo cual hay hacer la distinción entre dos grupos de nodos, estos son los nodos **Base** y los nodos **Techo**, en la figura V.9 se visualiza dicha distinción.

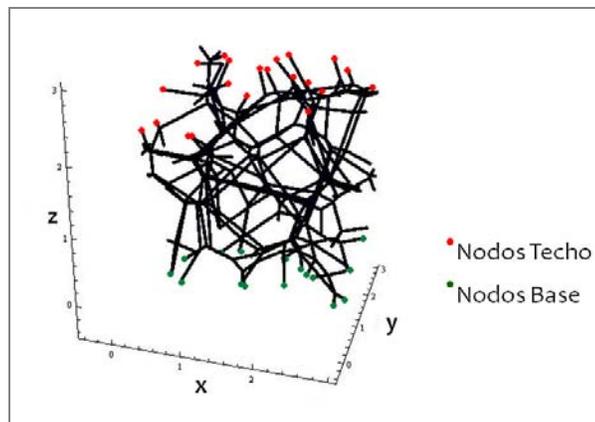


Figura V.9 Estructura de Voronoi. Distinción entre dos grupos de nodos, *Nodos Techo* y *Nodos Base*.

- ∅ Los nodos **Base** como su nombre lo indica son la base de la estructura y simulan estar sobre una superficie fija, por lo cual únicamente se les restringe el movimiento en la dirección z
- ∅ Los nodos **Techo** son la parte superior de la estructura, a estos nodos en un ensayo de compresión se les impone un desplazamiento negativo en dirección z

Las dos condiciones se manejan de la siguiente forma.

$$\{ \{GDLrest_1, MagDrest_1\}, \{GDLrest_2, MagDrest_2\}, \dots \}$$

Donde  $GDLrest$  es el número del grado de libertad que se restringe, un desplazamiento o/y una rotación, y  $MagDrest$  es la magnitud que se le asigna a ese grado de libertad como imposición. Las condiciones de frontera se introducen directamente en el sistema de ecuaciones global, con lo que se tendrán antes de comenzar a resolver el sistema el valor de esas incógnitas. Por ejemplo si se tiene un solo elemento marco, definido por dos nodos y se requiere empotrar el nodo uno e imponer un desplazamiento en la dirección z de 5 unidades los grados de libertad se manejan de la siguiente forma.

$$\{ \{1,0\}, \{2,0\}, \{3,0\}, \{4,0\}, \{5,0\}, \{6,0\}, \{3,5\} \}$$

Donde la parte sombreada corresponde a las restricciones del nodo uno y la parte sin sombrar a las restricciones del nodo dos.

Con esto se tienen todos los parámetros para resolver el sistema de ecuaciones y determinar el campo de desplazamientos y rotaciones en cada iteración.

## VI. POST-Procesamiento

Con la solución del sistema de ecuaciones y determinación del campo de desplazamientos y rotaciones, mostrado en el capítulo anterior se termina propiamente la solución del sistema por el método de análisis por elementos finitos. La etapa que sigue es la del post-proceso en la que los resultados obtenidos son tratados para obtener representaciones gráficas, animaciones y el cálculo de magnitudes derivadas, que permitirán extraer conclusiones del sistema. Para este trabajo, esta etapa incluirá el cálculo del tensor de esfuerzos en la viga, esfuerzo de Von Mises para los elementos y la curva esfuerzo-deformación para la estructura.

El cálculo de estas magnitudes permite hacer las simulaciones de los ensayos de compresión e introducir el concepto de falla.

Dada la importancia que tienen los ensayos de compresión en la esta etapa de Post-procesamiento se presenta a continuación la lógica establecida para los dichos ensayos. (Ver figura VI.1)

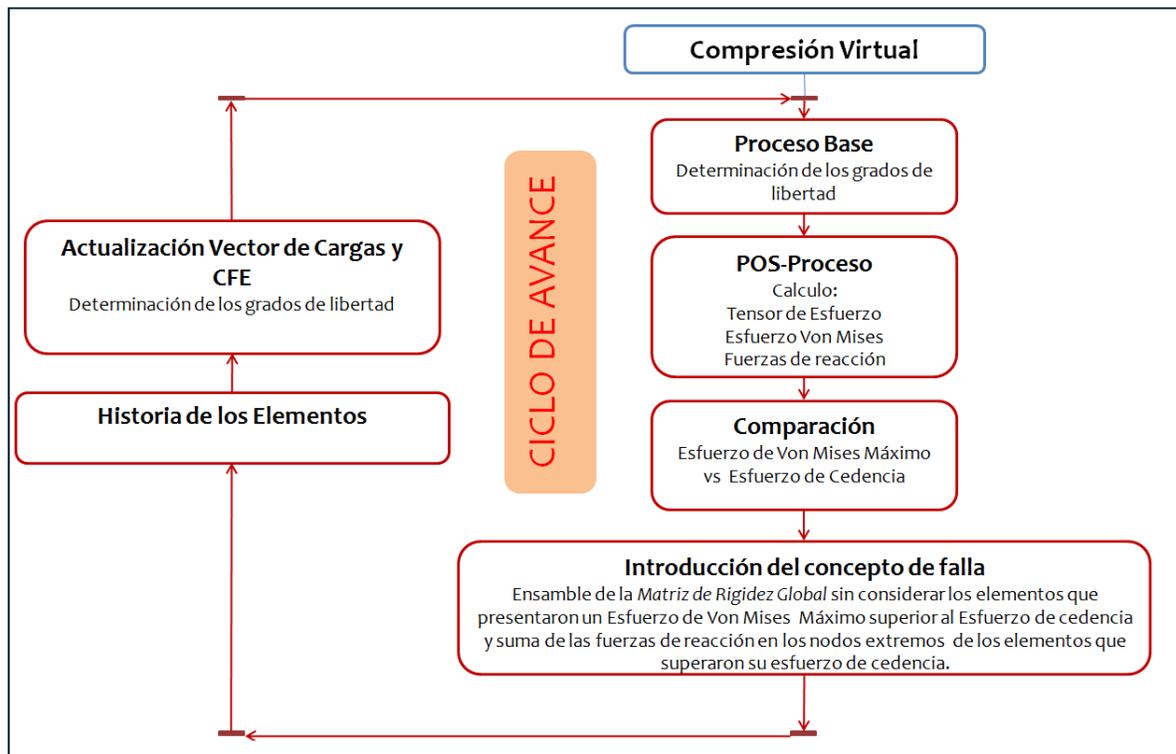


Figura VI.1 Diagrama de Flujo del Proceso de Compresión Virtual.

Como se observa los ensayos de compresión se simularon a través de la aplicación del método de análisis por elementos finitos, el método fue programado en la paquetería

Mathematica. Para simularlos sobre las estructuras de Voronoi se utiliza un ciclo iterativo, en este caso un **ciclo DO**, con el cual se divide todo el proceso en pequeños incrementos, es decir, primero se define el desplazamiento total que se va a realizar en el ensayo de compresión, después dependiendo de qué tan pequeños se requieren los incrementos, se establece el número de pasos del ciclo, es decir, si la estructura va a comprimirse  $1[U_L]$  y va a aplicarse en cinco pasos, en cada uno de ellos la estructura se comprimirá  $\frac{1}{5} [U_L]$ , al final del ciclo la estructura se habrá comprimido la unidad que se definió previamente.

En el diagrama de la figura VI.1 se muestran seis procesos, cada uno de ellos entrega una serie de resultados específicos en cada iteración; esta forma de realizar la simulación permite conocer cuál es el comportamiento de la estructura a lo largo del ensayo y con los datos que se obtienen se puede construir el diagrama Esfuerzo – Deformación y de esta manera determinar el *módulo de young aparente* de la estructura.

En las secciones siguientes se describen los seis procesos, la conexión entre cada uno de ellos y los datos que se obtienen.

Antes de comenzar, debe establecerse que se tienen como datos principales dos listas a las que se asignan el nombre de *Lista Nodos* y *Lista Elementos*, que tienen las características siguientes:

**Lista Nodos**= { {Nodo\_1,  $x_1$   $y_1$   $z_1$ }, {Nodo\_2,  $x_2$   $y_2$   $z_2$ }, {Nodo\_3,  $x_3$   $y_3$   $z_3$ }, ... , {Nodo\_n,  $x_n$   $y_n$   $z_n$ } }

**Lista Elementos**= { {Elemento\_1, No.nod<sub>1a</sub>, No.nod<sub>2a</sub>}, {Elemento\_2, No.nod<sub>1b</sub>, No.nod<sub>2b</sub>}, ..., { Elemento\_n, No.nod<sub>1n</sub>, No.nod<sub>2n</sub>} }

Para obtener las salidas deseadas se requiere conocer las funciones de desplazamiento, momento y fuerzas, las cuales se determinan utilizando las formulas de interpolación hermitinana y lagrangiana. Estas funciones son:

- ⊗ Las funciones de distribución del desplazamiento axial ( $u(a)$ ), desplazamiento transversal en la dirección local  $s$  ( $v(a)$ ), desplazamiento transversal en la dirección local  $r$  ( $w(a)$ ) y la rotación sobre el eje local  $t$  ( $\psi(a)$ ).

Las funciones de momentos y fuerzas se determinaron a partir de las relaciones presentadas en el capítulo III es decir:

- ∞ Para el momento de flexión sobre el eje  $r$

$$M_r(a) = EI_r \left( \frac{d^2 v}{da^2} \right); \tag{6.1}$$

- ∞ El momento de flexión sobre el eje  $s$

$$M_s(a) = EI_s \left( \frac{d^2 w}{da^2} \right); \tag{6.2}$$

∞ Momento de torsión.

$$M_a(a) = GJ \frac{d\psi}{da}; \quad (6.3)$$

∞ La fuerza axial

$$F_{axial}(a) = E \left( \frac{du(a)}{da} \right) a \quad (6.4)$$

Con la determinación de las fuerzas y momentos que actúan sobre un elemento es posible calcular:

- ∅ El tensor de esfuerzo de cada elemento.
- ∅ Esfuerzo de Von Mises Mises máximo de cada elemento.

Dada la importancia que tiene el tensor de esfuerzos para el cálculo del esfuerzo de Von Mises presente en los elementos que determinará que elementos han superado su esfuerzo de cedencia, se muestra a continuación la forma en que se determinó.

## VI.1 Tensor de Esfuerzos

Para la determinación del tensor de esfuerzos, se considera que cada elemento *Marco* está sometido a las siguientes sollicitaciones:

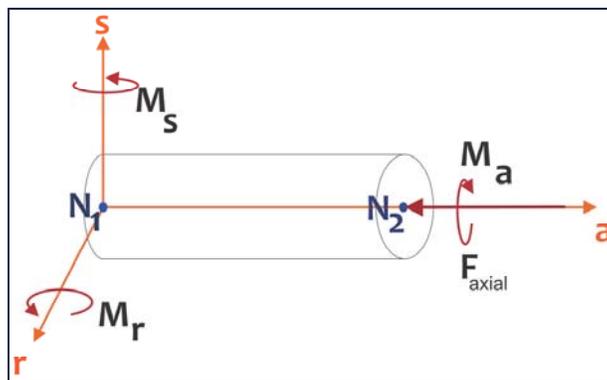


Figura VI.2 Sollicitaciones a las que está sometido un elemento *Marco*.

Tomando en cuenta estas sollicitaciones y que las deformaciones que se manejan a lo largo de este trabajo son muy pequeñas, el estado de esfuerzos de cada elemento *Marco* puede determinarse como la suma de tres estados de esfuerzos:

∞ **Compresión o extensión simple.**

Para compresión o extensión simple se tiene que el tensor de esfuerzos es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\text{axial}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6.5)$$

Donde:

$$\sigma_{\text{axial}} = E \cdot a \cdot \frac{du(a)}{da} \quad (6.6)$$

### ∞ Torsión

El tensor de esfuerzos para un estado de torsión se determina considerando lo siguiente:

- El ángulo de rotación debido al momento torsionante es muy pequeño, se considera también que cada punto de la sección transversal tiene una rotación de cuerpo rígido sobre  $a$ , esto matemáticamente queda expresado de la siguiente manera:  
Sea  $b$  el desplazamiento de un punto del elemento y  $r$  un vector de posición sobre cualquier punto del mismo, se puede expresar lo siguiente:

$$b = (\theta \mathbf{e}_a) \times (a \mathbf{e}_a + s \mathbf{e}_s + r \mathbf{e}_r) \quad (6.7)$$

$$b = \theta (r \mathbf{e}_r - s \mathbf{e}_s) \quad (6.8)$$

Con lo cual se observa que:

$$\theta = \theta(a) \quad (6.9)$$

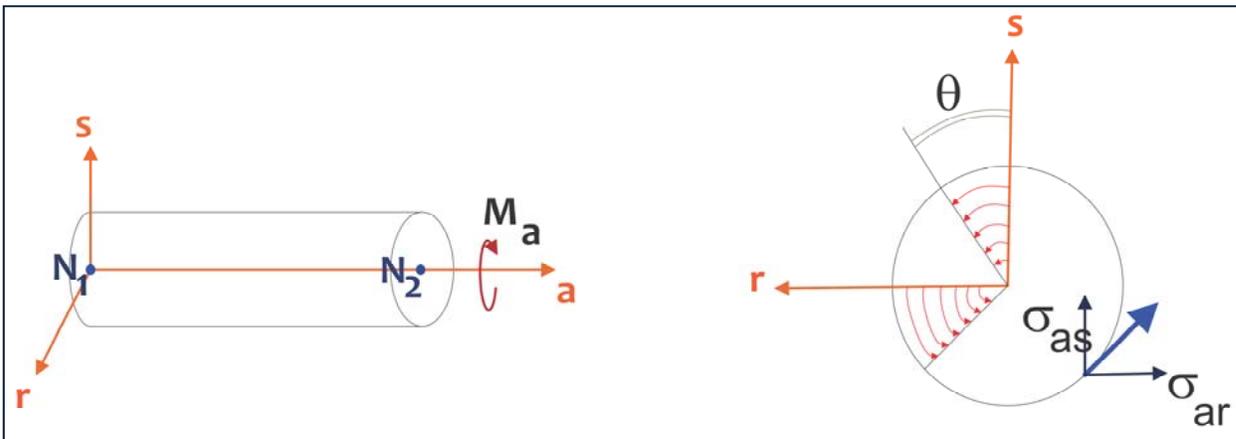


Figura VI.3 Elemento sometido a torsión.

Con esto se observa que la rotación solo depende de la dirección local  $a$ . Ahora, de la *Ley de Hooke Generalizada* las componentes del tensor diferentes de cero son:

$$\sigma_{as} = \sigma_{sa} = -\mu r \frac{\partial \theta}{\partial a}; \quad (6.10)$$

$$\sigma_{ar} = \sigma_{ra} = -\mu s \frac{\partial \theta}{\partial a} \quad (6.11)$$

Donde  $\mu$  es la constante de Lamé.

En términos del momento de torsión, el tensor de esfuerzos queda como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{M_a r}{I_p} & \frac{M_a s}{I_p} \\ -\frac{M_a r}{I_p} & 0 & 0 \\ \frac{M_a s}{I_p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

### Flexión

Cada uno de los elementos marco también está sometido a flexión, los momentos que lo provocan en este caso son  $M_s$  y  $M_r$ , en la figura siguiente se muestra cual es la distribución de esfuerzos que provocan estos momentos en un elemento Marco.

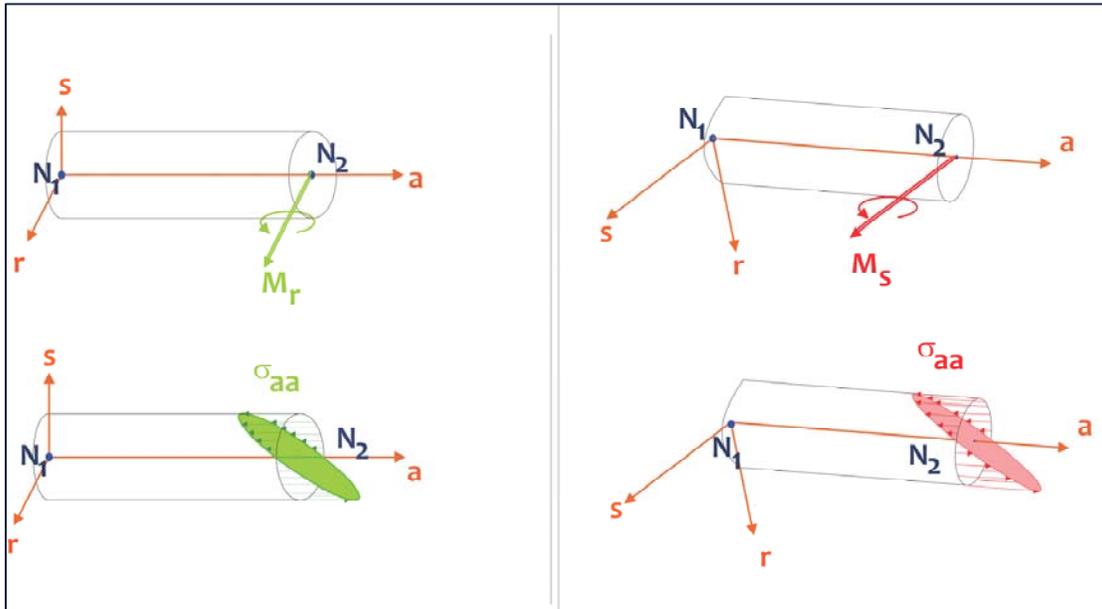


Figura VI.4 Elemento Marco sujeto a flexión y su correspondiente distribución de esfuerzos.

Para este problema, se establece que el estado de esfuerzos correspondiente es estáticamente equivalente a un par de flexión:

$$M_R = M_s \mathbf{e}_s + M_r \mathbf{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad M_L = -M_R \quad (6.13)$$

Considerando el estado de esfuerzos asociado con una extensión simple, tentativamente se considera que  $\sigma_{aa}$  es la única componente diferente de cero en el tensor de esfuerzos y que es también una función cualquiera de  $a$ .

Para satisfacer el equilibrio, se requiere que:

$$\frac{\partial \sigma_{aa}}{\partial t} = 0 \quad (6.14)$$

Por lo tanto  $\sigma_a = \sigma_{aa}(a,s)$ , las correspondientes deformaciones son:

$$\varepsilon_{aa} = \frac{1}{E} \sigma_{aa}; \quad \varepsilon_{ss} = \varepsilon_{rr} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{aa}; \quad \varepsilon_{as} = \varepsilon_{ar} = \varepsilon_{sr} = 0 \quad (6.15)$$

Dado que al inicio de este análisis se hicieron consideraciones sobre el estado de esfuerzos, se debe comprobar su validez a través de la compatibilidad de las mismas. Sustituyendo las deformaciones en las ecuaciones de compatibilidad se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{aa}}{\partial s^2} = 0; \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{aa}}{\partial r^2} = 0; \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{aa}}{\partial r \partial s} = 0 \quad (6.18)$$

La cual se cumple únicamente si  $\sigma_{aa}$  es una función lineal de la forma:

$$\sigma_{aa} = \alpha + \beta s + \gamma r \quad (6.19)$$

Se tiene ya una posible distribución del esfuerzo, considerando ahora las condiciones de fronteras naturales en tracción, es decir, la superficie lateral es una superficie libre de tracción, en el extremo  $\mathbf{a}_1 = \text{Long}_{\text{Elemento}}$ , se tiene una superficie de tracción:

$$\mathbf{a} = \sigma_{aa} \mathbf{e}_a \quad (6.20)$$

Lo cual lleva el siguiente sistema de fuerzas:

$$R_a = \int \sigma_{aa} dA = \alpha \int dA + \beta \int s dA + \gamma \int r dA = \alpha A \quad (6.21)$$

$$R_s = R_r = 0 \quad (6.22)$$

$$M_a = 0 \quad (6.23)$$

$$M_s = \int r \sigma_{aa} dA = \alpha \int r dA + \beta \int s r dA + \gamma \int r^3 dA = \beta I_{rs} + \gamma I_{ss} \quad (6.24)$$

$$M_r = - \int s \sigma_{aa} dA = -\alpha \int s dA - \beta \int s^2 dA + \gamma \int r s dA = -\beta I_{rr} - \gamma I_{sr} \quad (6.25)$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal,  $I_{ss}$ ,  $I_{rr}$  y  $I_{sr}$  son los momentos y productos de inercia de la sección transversal. Considerando que a largo de este trabajo únicamente se trabaja con una sección transversal circular los ejes  $r$  y  $s$  coinciden con sus ejes principales. En este caso  $I_{sr}=0$ . En este caso de las dos últimas ecuaciones se obtiene que:

$$\beta = -\frac{M_r}{I_{rr}}; \quad (6.26)$$

$$\alpha = \frac{M_s}{I_{ss}} \quad (6.27)$$

$$\therefore \sigma_{aa} = \frac{M_s}{I_{ss}} r - \frac{M_r}{I_{rr}} s \quad (6.28)$$

Por lo tanto el tensor de esfuerzos para este estado es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{M_s}{I_{ss}} r - \frac{M_r}{I_{rr}} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Teniendo los tres tensores de esfuerzos y considerando que en este trabajo se manejan pequeñas deformaciones puede aplicarse el principio de superposición y el tensor que se manejar para los elementos Marco es el siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{axial} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{M_a r}{I_p} & \frac{M_a s}{I_p} \\ -\frac{M_a r}{I_p} & 0 & 0 \\ \frac{M_a s}{I_p} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{M_s}{I_{ss}} r - \frac{M_r}{I_{rr}} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{axial} + \frac{M_s}{I_{ss}} r - \frac{M_r}{I_{rr}} s & -\frac{M_a r}{I_p} & \frac{M_a s}{I_p} \\ -\frac{M_a r}{I_p} & 0 & 0 \\ \frac{M_a s}{I_p} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

## V.2 Esfuerzo de Von Mises

El esfuerzo de Von Mises se calcula para cada elemento *Marco* que conforma la estructura, se utiliza la siguiente definición de esfuerzo de Von Mises tomando la notación de las coordenadas locales del elemento, con lo cual queda expresado de la siguiente manera.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{aa} - \sigma_{ss})^2 + (\sigma_{ss} - \sigma_{rr})^2 + (\sigma_{aa} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{as}^2 + \sigma_{sr}^2 + \sigma_{ra}^2))} \quad (6.32)$$

Los valores que se introducen en esta definición son los valores del tensor de esfuerzos calculados anteriormente, con lo cual esta relación queda en función de las tres coordenadas locales  $r, s$  y  $a$  es decir  $\sigma_{VM} = \sigma_{VM}(r, s, a)$ , el esfuerzo de Von Mises para tres puntos del elemento, los extremos y el centro, es decir.

$$a = 0; \quad a = \frac{\text{Long}_{\text{elem}}}{2}; \quad a = \text{Long}_{\text{elem}} \quad (6.33)$$

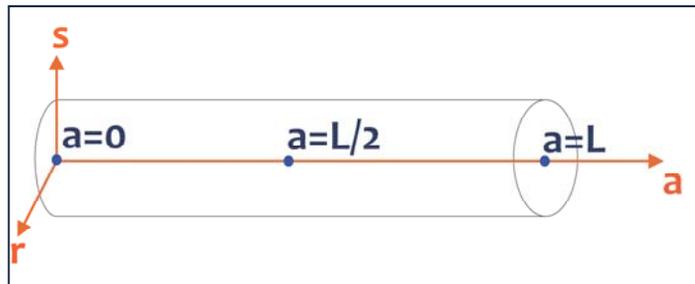


Figura VI.5 Puntos en los cuales se calcula el esfuerzo de Von Mises

Con esto se obtienen tres relaciones para cada elemento *Marco*, las cuales quedan en función de  $r$  y  $s$ , por facilidad se transforman estas coordenadas a cilíndricas tomando la siguiente definición:

$$r = R \times \text{Cos } \theta \quad (6.34)$$

$$s = R \times \text{Sen } \theta \quad (6.35)$$

$$a = a \quad (6.36)$$

Como el objetivo es determinar donde se encuentra el máximo valor del esfuerzo de Von Mises para cada elemento, se calcula para la fibra externa del mismo, por lo tanto se le asigna a  $R$  el valor del radio del elemento, se tienen en este punto tres relaciones generadas de la definición del esfuerzo de Von Mises todas en función de  $\theta$ . Para determinar en qué valor de  $\theta$  se encuentra el máximo, se derivan las tres expresiones, se igualan a cero y se resuelve la ecuación determinando el valor de  $\theta$ , con esto se tienen tres valores, se comparan estos valores y determina cual es el mayor, el cual se asigna como valor del esfuerzo de Von Mises para el elemento para un estado de esfuerzos específico.

### V.3 Introducción del concepto de falla

En este punto se tienen ya asignados los esfuerzos de Von Mises Máximos presentes en cada elemento, conociendo estos valores la primera parte para la introducción del concepto de falla es un proceso de comparación y eliminación, el cual, en el código del programa se reduce a un ciclo iterativo, donde se comparan los esfuerzos de Von Mises Máximos de cada elemento con el *Valor Crítico*, si estos esfuerzos son iguales o superiores a este valor crítico se retiran de la estructura y se sustituye por al elemento por dos condiciones de frontera nodales. Al asignar una fuerza nodal se simula el caso de un viga que no endurece ni debilita, otra opción sería retirar el elemento y reducir las fuerzas a cero, lo que será equivalente a la fractura del mismo. Este proceso sigue así hasta comparar todos los elementos de la estructura.

Ahora, cuando un elemento se retira de la estructura lo que implica es que se elimina de lista de elementos, se reenumera dicha lista, en caso de que al borrar un elemento algún nodo que pertenecía a dicho elemento ya no pertenece a ningún otro se borra de la lista de nodos es decir, se eliminan sus coordenadas, llevando a reenumerar también esa lista. De esta manera, en la iteración siguiente a la eliminación del elemento, la matriz de rigidez correspondiente a esa iteración se construye sin considerar ni las coordenadas ni la relación de nodos que conformaban al elemento que superó el esfuerzo de cedencia. Hacer esto conlleva que a partir de que el elemento supero su esfuerzo de cedencia, dejó de aportar cualquier resistencia a la estructura, sin embargo se sabe que la trabécula al superar su esfuerzo de cedencia, al estar sometida a pequeñas deformaciones, no se fracturará de inmediato; para introducir este efecto en el modelo de elemento finito, en el paso siguiente a la fractura del elemento se colocan en los nodos que formaban dicho elemento las fuerzas y momentos de reacción presentes en el paso en que la estructura se fracturó, esto implica agregar cargas y momentos en el vector de cargas.

Por ejemplo para la estructura de la figura V.12, si en el paso dos se observa que el esfuerzo máximo del elemento cuatro supera el esfuerzo de cedencia, se borran de la lista de elementos y nodos, las relaciones correspondientes. Con lo cual en el paso numero tres se construye el sistema de ecuaciones sin considerar este elemento.

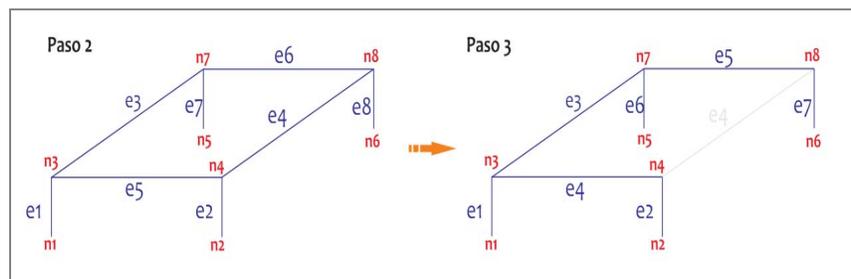


Figura VI.6 Estructura después de retirar el elemento cuatro

En el paso tres se agrega al vector de cargas puntuales, las fuerzas y momentos en los nodos que formaban el elemento, considerando la correspondiente reenumeración en ambas listas. Representativamente se hace lo mostrado en la figura siguiente.

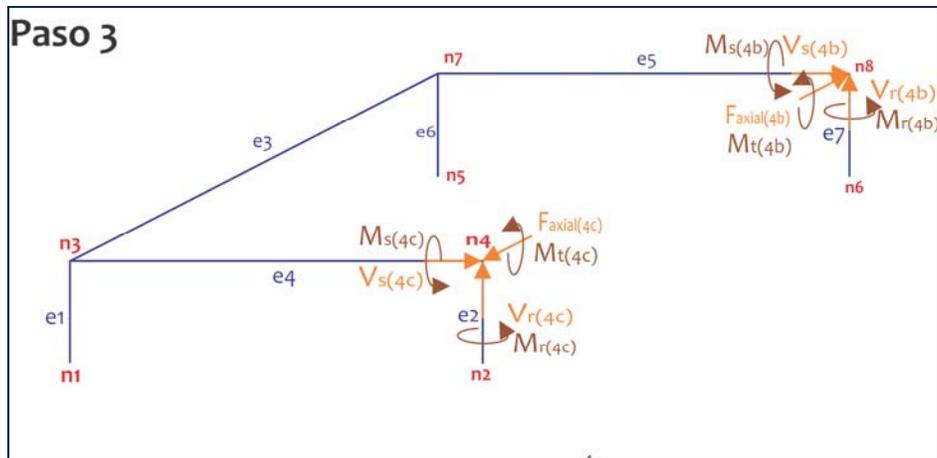


Figura VI.7 Estructura que se analizará para el paso tres.

## V.4 Historia

Ya que en cada iteración se crean nuevas lista de Nodos y Elementos, dependiendo si existen elementos que superaron el esfuerzo crítico, estas estructuras no tienen ninguna referencia de que hayan sufrido un desplazamiento en los nodos *Techo* en iteraciones anteriores, ya que se le imponen nuevas condiciones frontera, es decir, la fracción del desplazamiento que le corresponde dependiendo de la iteración y se crean nuevas matrices de rigidez, por lo cual, la manera de conservar la *Historia* del ensayo es sumando en cada iteración las funciones de forma del paso anterior es decir se sigue la siguiente lógica:

Se calculan primero las funciones de forma, correspondientes al paso en que se encuentra la iteración es decir:

- $v(a)$  paso actual
- $w(a)$  paso actual
- $u(a)$  paso actual
- $\psi(a)$  paso actual

Con estas funciones ya calculadas se determina las funciones totales para este paso, en las cuales se toman las funciones de forma del paso actual y del anterior, como sigue:

$$\begin{aligned}
 v(a)_{TOTAL} &= v(a)_{ACTUAL} + PRE v(a) \\
 w(a)_{TOTAL} &= w(a)_{ACTUAL} + PRE w(a) \\
 u(a)_{TOTAL} &= u(a)_{ACTUAL} + PRE u(a) \\
 \psi(a)_{TOTAL} &= \psi(a)_{ACTUAL} + PRE \psi(a)
 \end{aligned}$$

Con esto, se considera que la estructura conserva la historia a lo largo del ensayo.

## V.5 Determinación de la curva esfuerzo-deformación para una compresión virtual

Para determinar la curva Esfuerzo-Deformación a partir de un ensayo virtual de compresión, se utilizaron, por una parte, las funciones de las fuerzas presentes en cada uno de los elementos ( $V_a(\mathbf{a})$ ,  $V_r(\mathbf{a})$  y  $F_{axial}(\mathbf{a})$ ) y se identificaron nuevamente los *Nodos Techo*, esto con el objetivo de determinar la *fuerza de reacción total* correspondiente a la imposición de desplazamiento. Para calcular esta *fuerza total*, se determina primero a qué elementos pertenecen cada uno de los *Nodos Techo*, habiendo hecho esto se conocen ya las funciones correspondientes a esos elementos; después se identifica en qué posición se encuentra los nodos en cada uno de los elementos a los cuales pertenecen, es decir, si se encuentran en el extremo  $a=0$  o  $a=Long_{Elemento}$ , como ya se mencionó los elementos fueron creados en sistema de coordenadas locales cuando el nodo corresponde al origen del elemento el valor de su coordenada local es  $a=0$  de lo contrario  $a$  es igual a la longitud del elemento, con esta información se evalúan las funciones de las fuerzas correspondiente a cada nodo y a cada elemento. Con esto se tiene, por cada elemento que contiene a un *Nodo Techo* sus correspondientes tres relaciones  $V_a(a)$ ,  $V_r(a)$  y  $F_{axial}(a)$  evaluadas en el adecuado valor de  $a$ , estas fuerzas se encuentran definidas en un sistema de coordenadas locales, sin embargo, para determinar la curva esfuerzo-deformación de cada elemento *Marco* se requiere conocer únicamente la componente en dirección  $z$  de dichas fuerzas y de esta forma se pueden sumar para determinar la fuerza de reacción total en la superficie donde se impone la restricción de movimiento. Por lo tanto, se multiplica cada valor de las fuerzas por la matriz de transformación  $H$ , para obtener la componente  $z$ , con ellos se pueden sumar la componente para determinar la  $F_{r3}$  de ese elemento, como se muestra en la figura VI.8.

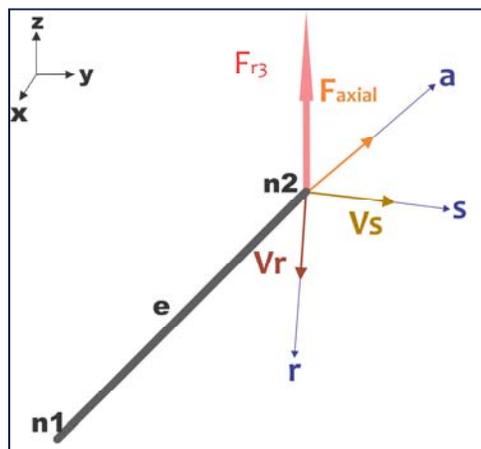


Figura VI.8 En la figura se muestra las tres fuerzas consideradas para determinar la fuerza de reacción  $F_{r3}$  ( La fuerza en la dirección de  $z$  ) en este caso esta  $F_{r3}$  se observa en color rojo.

Se determina esta fuerza  $F_{r3}$  para cada elemento techo, como se muestra en la figura VI.9.

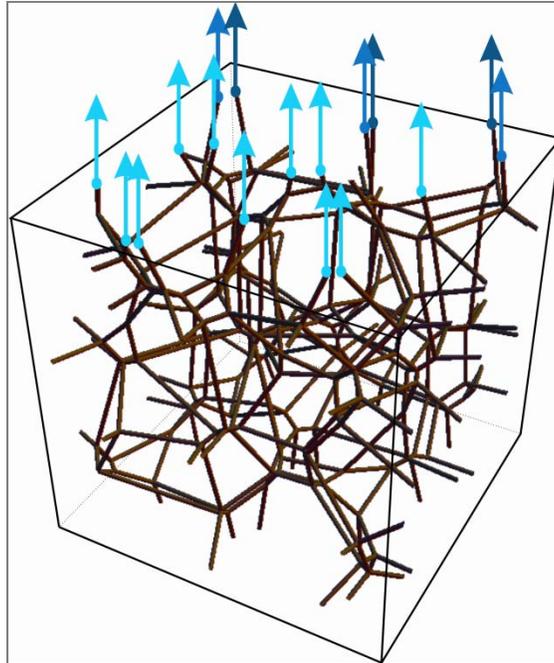


Figura VI.9 Proyecciones de la fuerzas en dirección z de las fuerzas locales  $V_r$ ,  $V_s$  y  $F_{axial}$  en una estructura de Voronoi

Con estas fuerzas, realizando la suma algebraica se determina la fuerza de reacción total en la dirección z. (Figura VI.10)

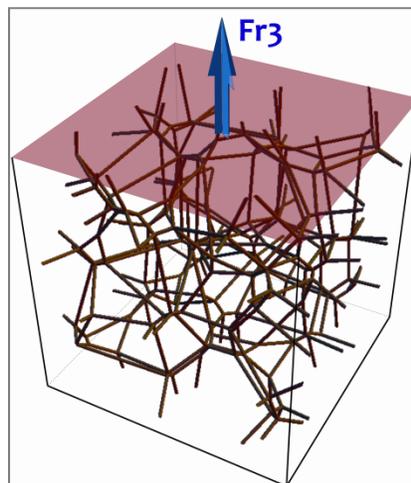


Figura VI.10 Fuerza de reacción total en dirección z.

Tomando esta fuerza de reacción y tomando como área de acción la sombreada en rojo de la figura VI.10 se determina el esfuerzo debido a la imposición de desplazamiento. Cada incremento de desplazamiento se define como:

$$np = \text{No Pasos} \tag{6.37}$$

$$DT = \text{Desplazamiento Total} \quad \Rightarrow \quad dp = \frac{DT}{np} \quad (6.38)$$

Donde  $dp$  es el desplazamiento por paso.

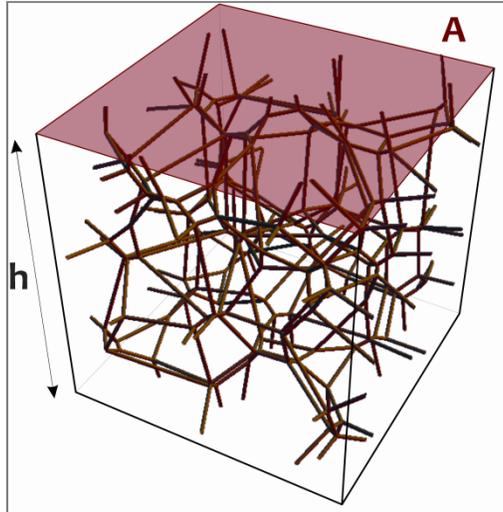


Figura VI.11 Área y Altura para el cálculo del modulo de Young,

El área roja **A** mostrada en la figura VI.11 se utiliza para el cálculo del esfuerzo, mientras que la altura **h** se utiliza para el cálculo de la deformación, como se muestra a continuación:

$$\text{Deformacion} = \frac{(h - dp) - h}{h} \quad (6.39)$$

$$\text{Esfuerzo} = \frac{A}{F_{r3}} \quad (6.40)$$

Donde  $F_{r3}$  corresponde a la fuerza de reacción del paso.

Esto conforma la metodología propuesta para introducir por un lado el elemento *Marco*, que son elementos adecuados para un análisis estructural como éste y por otro lado permite introducir el concepto de falla, mediante el proceso descrito, el cual entrega buenos resultados ya que la estructuras creadas presentan un comportamiento interesante que es la no linealidad.

## VII. Análisis de resultados y conclusiones

Antes de comenzar con el análisis de los resultados obtenidos en esta trabajo, se presentarán a continuación los resultados de la tesis “Investigación *in silico* de las propiedades mecánicas del hueso trabecular”, ya que a partir de dichos resultados se pudieron definir cuáles eran los parámetros más importantes en el modelado de hueso esponjoso. La tesis se enfocó en la construcción de diagramas de Voronoi variando su geometría, esto se hizo tomando tres diferente arreglos de puntos iniciales: arreglo inicial cúbico simple, cúbico centrado en las caras y cúbico centrado en el cuerpo, los cuales fueron perturbados mediante la introducción de un número aleatorio que seguía la distribución estadística normal, con ello se construyeron doce estructuras de Voronoi las cuales al ser ensayadas en una compresión virtual en Abaqus® presentaron los módulos de elasticidad mostrados en la figura VII.1.

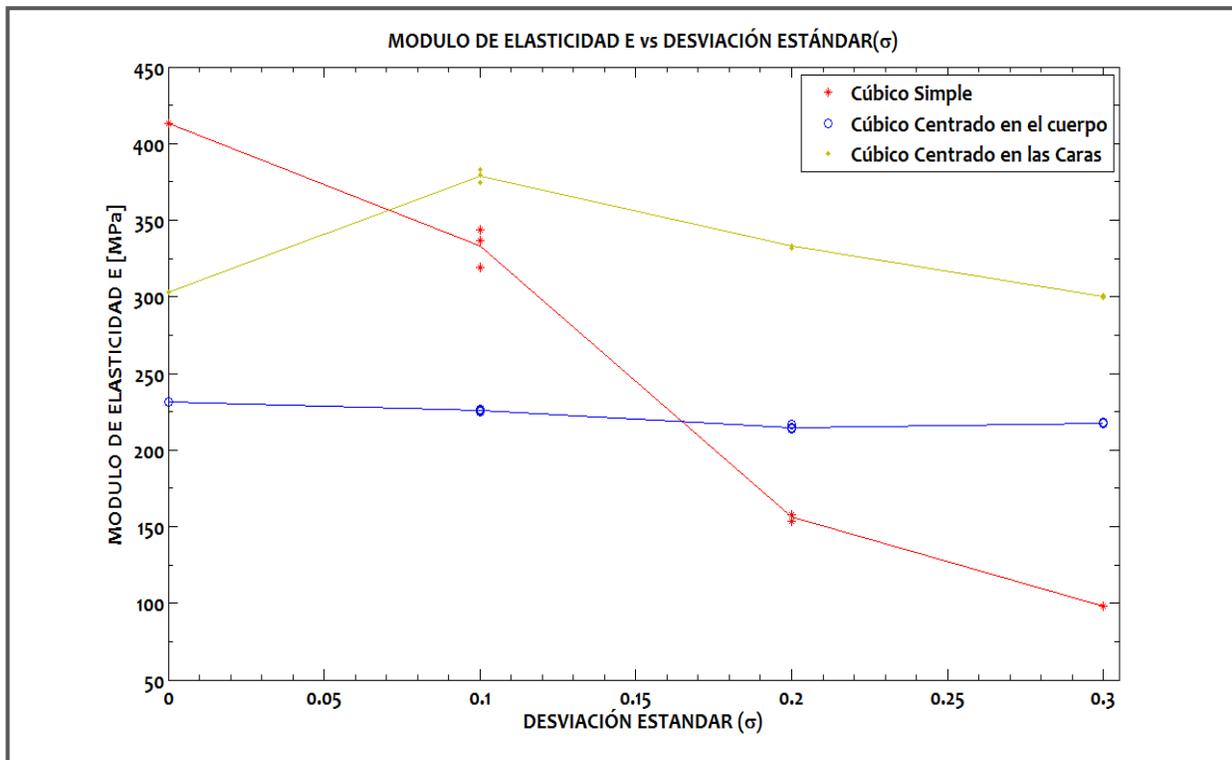


Figura VII.1 Módulo de Elasticidad (E) vs Desviación estándar ( $\sigma$ )

En esta gráfica se observa la enorme importancia que presenta la geometría en la variación del módulo de elasticidad. También se observa que el parámetro aleatorio juega un papel importante en la variación del módulo de elasticidad sobre todo para la estructura de Voronoi con un arreglo de nodos cúbico simple.

Al realizar ensayos de deslizamiento virtual en Abaqus® se observó también que la variación del modulo de rigidez a corte es función primordialmente de la geometría de la que se trató, no dejando de lado que el parámetro aleatorio interviene en esta variación pero en menor magnitud, como se puede observar en la gráfica figura VII.2.

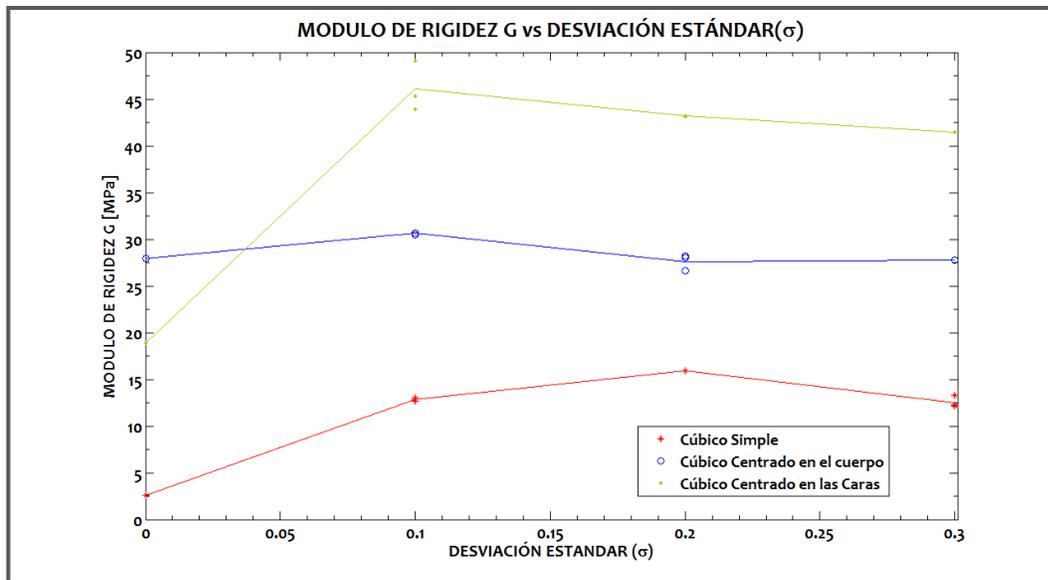


Figura VII.2 Módulo de Rigidez (G) vs Desviación estándar (σ)

Además de determinar la importancia de la geometría de las celdas de Voronoi en las propiedades mecánicas de éstas, se observó que la estructura de Voronoi creada a partir de un arreglo de puntos cúbico simple presenta, desde el punto de vista mesoestructural, una mayor semejanza con la arquitectura del hueso trebecular, es por ello que el presente trabajo se enfocó en el análisis de estructuras de Voronoi creadas a partir de un arreglo de puntos iniciales cúbico simple.

Ahora, a partir de este punto se realizará el análisis de resultados de esta tesis, el cual se dividirá en dos partes. En la primera de ellas se analizarán las propiedades mecánicas obtenidas de los ensayos de compresión y deslizamiento programados en los archivos `.inp` y ejecutados en las paquetería de análisis por elementos finitos Abaqus®; lo que se buscó en esta primera parte fue observar como cambiaban el modulo de elasticidad  $E$ , el modulo de rigidez  $G$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  con respecto a la dirección en que se realizaba el ensayo virtual mecánico, de esta manera se pudo asociar el concepto de ortotropía a las estructuras de Voronoi generadas. En la segunda parte se analizará el resultado de introducir el concepto de falla, de la forma en que ya fue explicado, en la curva esfuerzo deformación, también se explicará la forma en que se determinó el modulo de elasticidad para estas curvas ya que presentan un comportamiento no lineal.

## VII.1 Modelos simulados en Abaqus®

Antes de comenzar con el análisis de resultados es importante establecer en este punto las propiedades mecánicas asignadas a los modelos de Abaqus®. Considerando que la esperanza de vida en México es 75.4 años (INEGI, 2010) se escogieron las propiedades mecánicas en un rango de edad en el cual se terminó el mayor proceso de crecimiento de los huesos y antes de comenzar con enfermedades que merman las propiedades mecánicas del hueso tal como la osteoporosis, este rango es entre 20 - 30 años aproximadamente. Las propiedades asignadas a los elementos se muestran en la tabla VII.1.

Edad: 20 - 30 Años					
Módulo de Elasticidad GPa		Resistencia Máxima MPa		Deformación Máxima %	
Tracción	17/18.9	Tracción	140/161	Tracción	3.4/4
Compresión	18.1	Compresión	209		

Tabla VII.1 Datos de especímenes húmedos a temperatura ambiente (Fémur/Tibia). (Burstein et al., 1976)

El coeficiente de Poisson asignado fue de 0.29 que se encuentra reportado en la literatura (Cuppone, 2004). Los elementos utilizados de la librería de Abaqus® fueron los elementos viga B33, estos elementos tienen asignado un comportamiento elástico lineal, se definieron únicamente por dos nodos por lo cual utilizan una interpolación lineal para la determinación del campo de desplazamientos a lo largo del elemento.

Como ya se mencionó, se crearon estructuras las cuales fueron alargadas en las tres direcciones coordenadas con el objeto de simular que se giraron, para de esta forma realizar los ensayos mecánicos en las direcciones x, y y z. Para una estructura con arreglo cúbica simple y desviación estándar 0.1 se tienen la siguientes configuraciones.

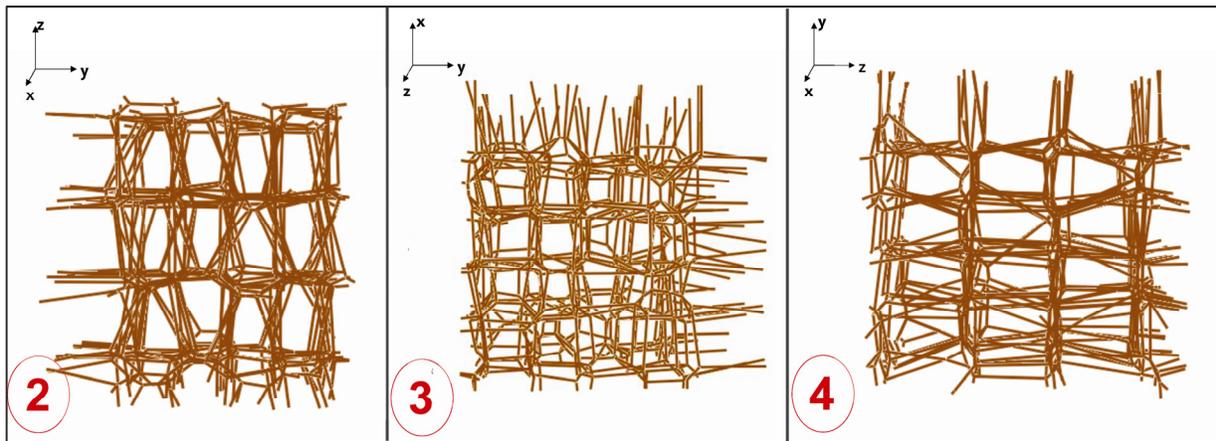


Figura VII.3 Dirección de aplicación de los ensayos de compresión, en la estructura con simetría cúbica simple con desviación estándar 0.1

Para la estructura con simetría cúbica simple y desviación estándar 0.2 se muestra en la figura VII.4.

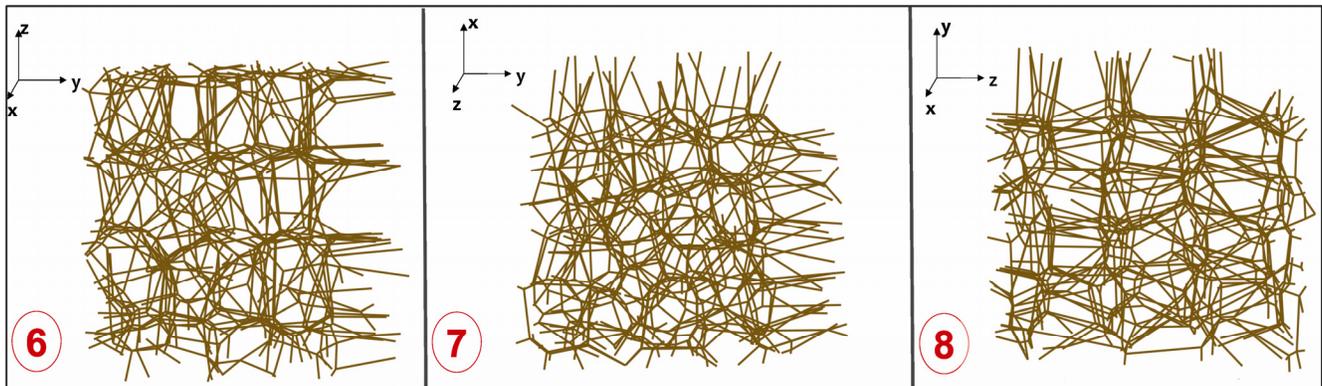


Figura VII.4 Dirección de aplicación de los ensayos de compresión, en la estructura con simetría cúbica simple con desviación estándar 0.2

Por último la estructura con simetría cúbica simple y desviación estándar 0.3 se observa en la figura VII.5.

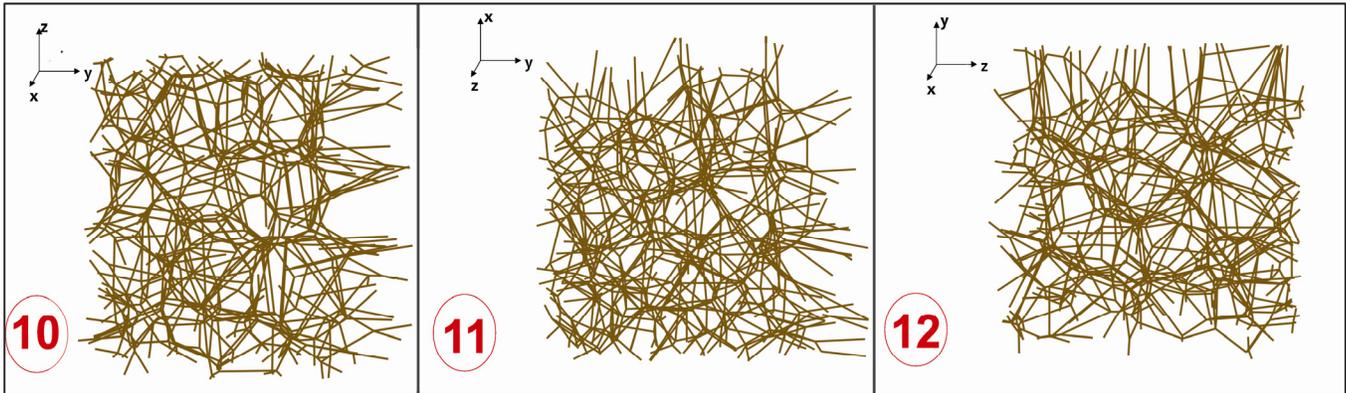


Figura VII.5 Dirección de aplicación de los ensayos de compresión, en la estructura con simetría cúbica simple con desviación estándar 0.3

En las figuras anteriores se muestran a las estructuras con simetría cúbica simple con desviación estándar 0.1, 0.2 y 0.3 “giradas” para realizar los ensayos virtuales en las tres direcciones coordenadas. Para la determinación del módulo de elasticidad se realizaron ensayos de compresión en las tres direcciones, los resultados obtenidos de ellos se presentan y discuten a continuación.

### VII.1.1 Sobre el módulo de elasticidad

En la siguiente tabla se presentan los módulos de elasticidad para las diferentes estructuras, el renglón sombreado es el modulo de elasticidad para la estructura base correspondiente a cada simetría.

Módulo de Young E MPa						
Dirección de aplicación	Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.1		Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.2		Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.3	
	1	240.8	5	119.0	9	73.8
z	2	193.8	6	86.8	10	65.7
x	3	149.3	7	71.1	11	62.5
y	4	130.7	8	73.0	12	62.5

Tabla VII.2 Módulo de elasticidad.

En la tabla VII.2 se puede observar, por un lado, que al aumentar el grado de perturbación de la estructura disminuye el módulo de elasticidad de ésta, desde 240.8 MPa hasta 62.5 MPa, esto independientemente de la dirección en la cual se determina el modulo. Esta disminución puede ser atribuida por un lado, a que cuando se tiene a la estructura con el grado de perturbación más pequeño, la estructura tiene un arreglo regular de sus componentes, es decir conservan cierta alineación a la dirección en la cual aplica el desplazamiento de nodos. Al tener esta alineación, la resistencia a deformarse se incrementa, lo que lleva a obtener para las estructuras con simetría cúbica simple y desviación estándar 0.1, los módulos de elasticidad de mayor magnitud.

Al aumentar el grado de perturbación, los elementos estructurales pierden la regularidad y comienzan a tomar posiciones diferentes a la dirección de aplicación del desplazamiento lo que provoca

que las fuerzas de reacción tengan que descomponerse dada su posición para actuar en la dirección adecuada; esto provoca que su resistencia a deformarse en la dirección de compresión disminuya, con lo que se ve también disminuido el módulo de elasticidad.

En las Figuras VII.3, VII.4 y VII.5 se observa como la perturbación provoca que la estructura pierda regularidad y los elementos estructurales tomen posiciones que merman su capacidad de reacción en la dirección sobre la cual se aplica el desplazamiento. La disminución del módulo de elasticidad con respecto al grado de perturbación se observa con mayor facilidad en la figura VII.6.

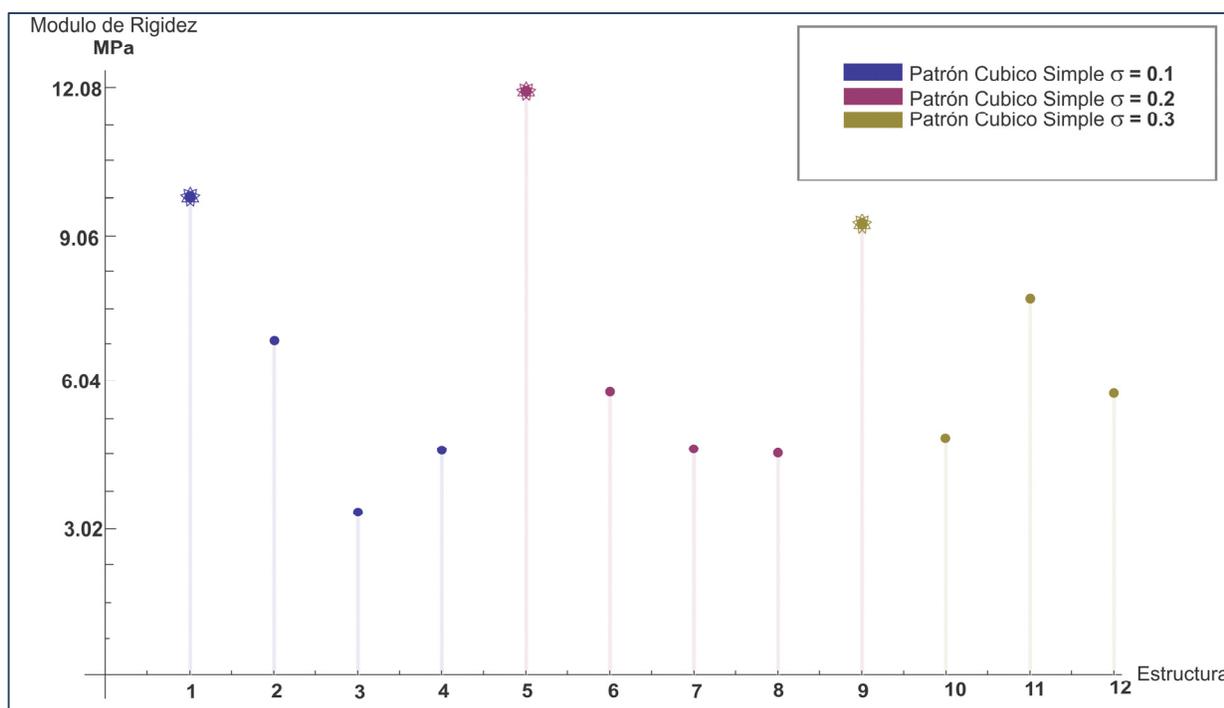


Figura VII.6 Módulo de elasticidad de las 12 estructuras virtuales ensayas.

De la figura anterior, en el eje horizontal de la gráfica se tiene el número de la estructura ensayada, el número esta adjunto a las figuras VIII.3, VII.4 y VII.5, (los números 1, 5 y 9 corresponden a las estructuras base). En la gráfica se hace evidente que las estructuras base tiene el módulo de elasticidad mayor para cada grado de perturbación, esto se debe a la compleja interacción entre la longitud del elemento que disminuye su rigidez individual y la alineación de los mismo en dirección de carga que aumenta la rigidez del arreglo estructural.

Ahora vamos a analizar el comportamiento de la estructura mostrada en la figura VII.3, en ella se observa que la configuración 2 corresponde a una donde los elementos presentan una alineación preferente en dirección de z y elementos más largos. Tomando en cuenta que la rigidez de un elemento estructural frente a una fuerza cortante, axial y flexional son inversamente proporcional a su longitud, se esperaría entonces que esta configuración presentaría el módulo de elasticidad más pequeño, ya que tiene elementos más largos en la dirección z que en las direcciones x y y, donde en un principio se esperaba que al realizar los ensayos de compresión virtual en esas direcciones se obtendrían los módulos de elasticidad mayores dada la longitud de sus elementos estructurales. Este comportamiento se observa también para las estructuras de las figuras VII.2 y VII.3, es decir, las configuraciones que tienen los elementos estructurales más largos y alineados en dirección del ensayo de compresión virtual tienen también el modulo de elasticidad mayor. (Cowin, 2001) Con estos resultados se puede plantear como una

primera hipótesis que la disminución de la rigidez individual de los elementos se ve compensada en mayor medida con la alineación de estos en la dirección donde se presenta una carga. Esto puede dar explicación a la razón por la cual el hueso trabecular al estar sometido a cargas constantes en un dirección en especial, las trabéculas de éste se alinean en dicha dirección. Otro aspecto que es importante analizar en esta misma estructura (Figura VII.1) es el hecho de que los módulos de elasticidad  $E_x$  y  $E_y$  deberían tener magnitudes muy similares ya que la alineación y longitud de sus elementos es prácticamente la misma, variando en un pequeña proporción por la introducción de un parámetro aleatorio, si se toma la configuración 2 y se gira sobre el eje  $x$  noventa grados se obtendrá una configuración como la 3, por lo cual se esperaba que los módulos de elasticidad ya mencionados fueran prácticamente iguales, sin embargo hay una disminución del módulo de elasticidad de la configuración 3 con respecto a la 2. Haciendo uso del POST-Procesamiento de Abaqus® se observó la simulación del ensayo de compresión virtual para ambas configuraciones así como el campo de desplazamientos, con esto se detectó que la configuración 3 presentaba una diferencia importante con respecto a la configuración 2, ésta es que al realizar los cortes para obtener la probeta virtual, cinco nodos de la base de la configuración 3 quedaron libres, por lo que estos nodos no tenían ninguna restricción de desplazamiento, esta falta de restricción se vió reflejada directamente en el modulo de elasticidad de la estructura, ya que al restringir a estos nodos el desplazamiento en la dirección del ensayo mecánico se obtuvo un aumento de 8 MPa en su módulo de elasticidad, disminuyendo con esto la marcada diferencia existente entre los módulos  $E_x$  y  $E_y$ , al realizar los cortes virtuales también hay pérdida de elementos de manera aleatoria, esto también es un factor que provoca la ya mencionada diferencia.

Para la estructura de la figura VII.4, se observa, como ya fue mencionado, que la configuración 6 que tiene alineados sus elementos en la dirección del ensayo de compresión y elementos más largos, tiene el mayor modulo de elasticidad. Los modulos de elasticidad  $E_x$  y  $E_y$  como se esperaba, son muy parecidos ya que las estructuras en esas direcciones tienen el arreglo de elementos prácticamente iguales. Al final observamos que al aumentar el grado de perturbación con la desviación estándar de 0.3, los módulos de elasticidad tienen magnitudes similares, es decir la longitud y alineación de sus elementos dan como resultado que las fuerzas de reacción en un ensayo de compresión sean similares, lo cual se ve reflejado en la magnitud del módulo de elasticidad.

## VII.1.2 Sobre el módulo de rigidez

En la gráfica VII.7 se presentan los módulos de rigidez para las diferentes estructuras, los puntos con marcas características son los módulos de rigidez de las estructuras base.

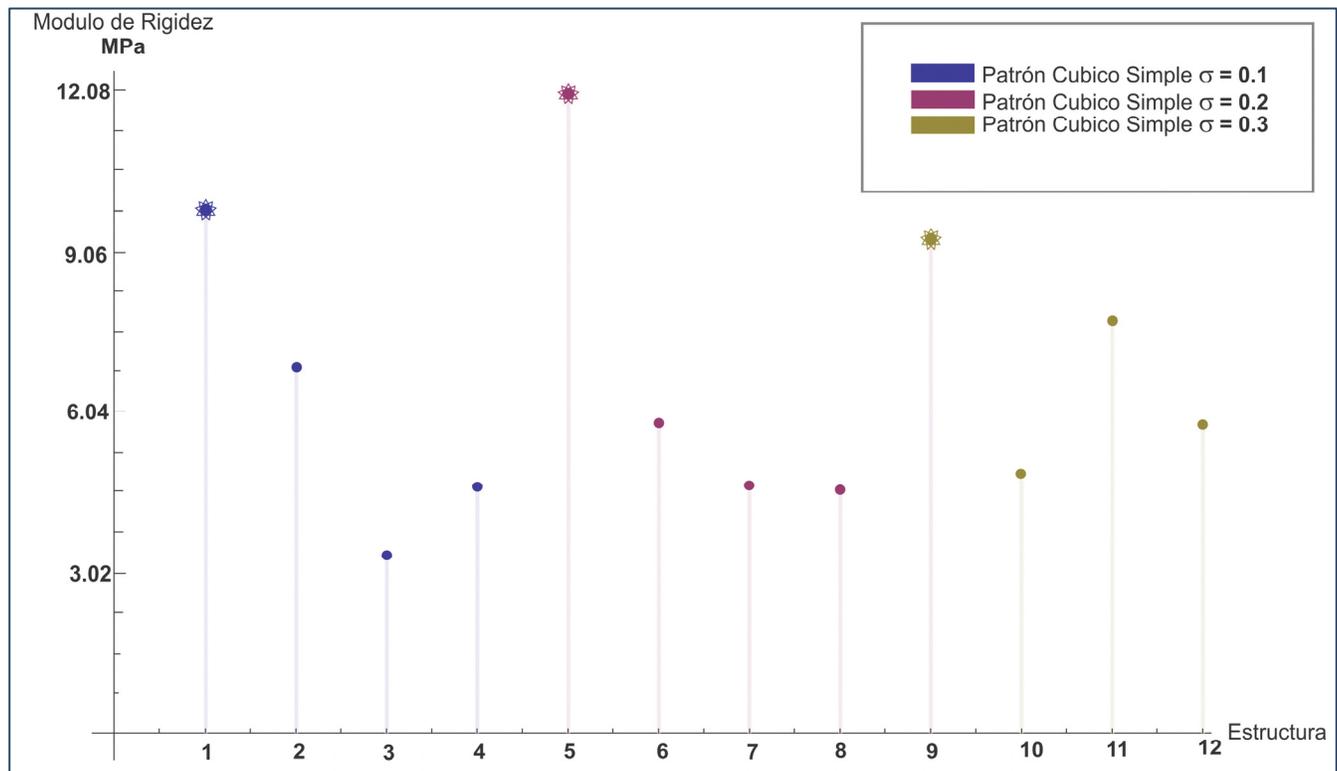


Figura VII.7 Módulo de rigidez de las 12 estructuras virtuales ensayas.

Como se puede observar en la gráfica anterior el comportamiento del módulo de rigidez no parece guardar ninguna relación con el grado de perturbación, es decir no aumentan o disminuye con respecto a éste. Lo que se puede observar en primera instancia es que nuevamente las estructuras base son las que presentan el mayor módulo de rigidez al corte, lo cual se atribuye a la ya mencionada interacción de la longitud de los elemento y alineación de los mismos en la dirección de la carga. Ahora, analizando el comportamiento del módulo de rigidez para la estructura de la figura VII.3 se puede observar que la configuración 1 tiene el mayor módulo de rigidez, esto reafirma la primer hipótesis, en la que se planteó que la disminución de la rigidez individual de los elementos debido a su longitud se ve compensada en mayor medida con la alineación de estos, en este caso la alineación no es dirección de la carga sino perpendicular, ya que al tener a los elementos alineados en dirección  $z$  y aplicar un desplazamiento en dirección  $y$ , esta alineación incrementa la resistencia a la deformación en la dirección del ensayo de corte. Para las configuraciones 3 y 4, de esta misma figura, se observa también la influencia de la alineación de las vigas en dirección perpendicular a la dirección del ensayo de deslizamiento, en cuanto mayor sea el numero de “columnas verticales” (representadas por las líneas moradas en la figura VII.8) mayor es la resistencia al corte. Las configuraciones 2 y 4 presentan el módulo de rigidez de mayor magnitud siendo también éstas las que poseen mayor numero de “columnas” alineadas en dirección perpendicular a la dirección de corte.

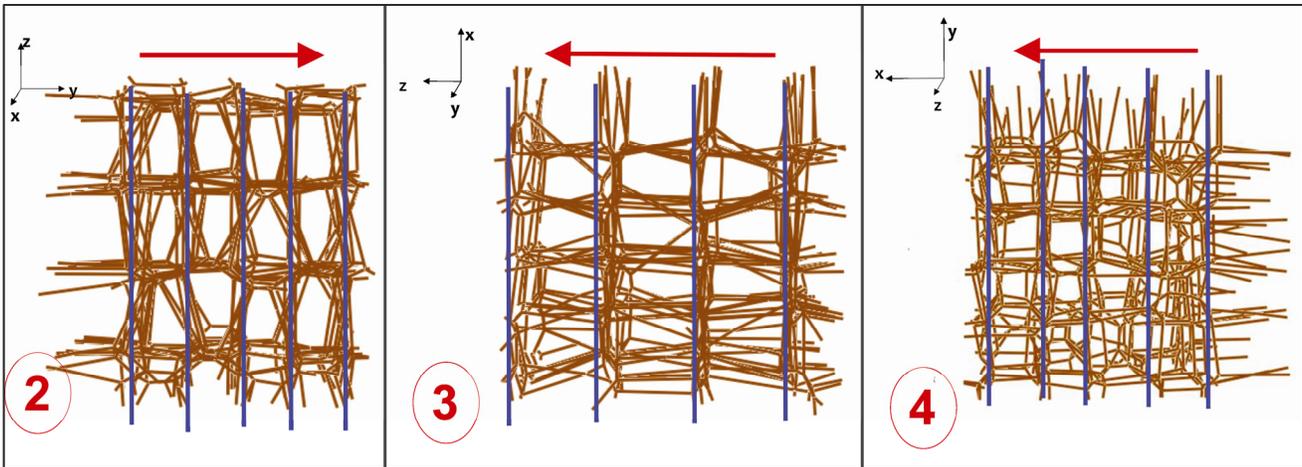


Figura VIII.8 Comparación del número de “columnas” alineadas en dirección perpendicular a la dirección de corte.

Cabe mencionar que las configuraciones 3 y 4 se giraron en el sentido de las manecillas del reloj en torno a su eje vertical, esto con el objeto de observar con mayor facilidad la influencia de la alineación de sus elementos. El comportamiento de la estructura tetragonal y perturbación de 0.2, mostrada en la figura VII.4 muestra un comportamiento similar al mostrado por la estructura antes discutida, esto se debe a que a pesar de tener un grado de perturbación sigue existiendo cierta alineación de sus elementos lo que se ve reflejado en la gráfica de la figura VII.7, sin embargo la diferencia entre las magnitudes es menor por la presencia misma del grado de perturbación. Para la estructura de la figura VII.5 se esperaba un comportamiento similar a los anteriores, sin embargo el grado de perturbación en este caso genera que la estructura no muestre una alineación de sus elementos en alguna dirección preferencial por lo que se hace difícil predecir su comportamiento, lo que se puede observar de estas configuraciones es que su número de elementos aumenten con respecto a las configuraciones anteriores, provocando un aumento en el módulo de rigidez.

En la tabla VII.7 se muestran los valores del módulo de rigidez para las configuraciones discutidas.

Módulo de Rigidez (G) MPa						
Dirección de aplicación	Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.1		Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.2		Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.3	
	1	10.5	5	12.0	9	9.2
y	2	6.9	6	5.8	10	4.9
z	3	3.3	7	4.6	11	7.7
x	4	4.6	8	4.5	12	5.8

Tabla VII.3 Modulo de Rigidez

### VII.1.3 Sobre el coeficiente de Poisson

Los resultados obtenidos para el coeficiente de Poisson en la mayoría de los casos son cercanos a los reportados en la literatura. Para el hueso trabecular, el coeficiente de Poisson reportado es de 0.3 mientras que los valores obtenidos en las probetas de Voronoi oscilan entre 0.105 hasta 0.37, exceptuando la configuración 2. Los resultados obtenidos para las diferentes estructuras se muestran a continuación.

<b>Coefficiente Poisson</b>						
	<b>Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.1</b>		<b>Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.2</b>		<b>Arreglo inicial Tetragonal Perturbación = 0.3</b>	
	<b>1</b>	0,26	<b>5</b>	0,37	<b>9</b>	0,28
<b>v<sub>zx</sub></b>	2	0,04	6	0,23	10	0,29
<b>v<sub>xy</sub></b>	3	0,14	7	0,29	11	0,30
<b>v<sub>zy</sub></b>	4	0,21	8	0,22	12	0,26

Tabla VII.4 Coeficiente de Poisson

La desviación estándar no promueve una tendencia en el coeficiente de Poisson según los resultados obtenidos.

En este punto es importante mencionar que estos valores corresponden a casos especiales dentro de una gran gama de estructuras de Voronoi creadas por este método, por lo cual, sería importante tener valores promedio para poder hacer un análisis a detalle. Esto requiere la creación de múltiples estructuras y ensayos, para lo cual se recurriría al encadenamiento del programa para generar las estructuras de Voronoi con ABAQUS® con lo cual se podrían realizar un gran número de ensayos y obtener valores promedio, este encadenamiento se tiene en este momento a través de un archivo .bat, sin embargo, por los objetivos de esta tesis no se desarrolló a detalle.

## VII.2 Modelos simulados mediante FEM programado en Mathematica®

A través de la metodología descrita en el capítulo VI, se realizaron ensayos de compresión virtual a las tres estructuras basadas en la simetría cúbica simple para tres grados de dispersión, es decir, es con una desviación estándar de 0.1, 0.2 y 0.3. Las características de estas estructuras se presentan en la tabla VII.5 .

Estructura	No. Nodos	No. Elementos	Radio de la sección transversal mm	$I_R$ mm <sup>4</sup>	$I_S$ mm <sup>4</sup>	J mm <sup>4</sup>
CS $\sigma=0.1$	273	398	75 x 10 <sup>-3</sup>	24.85 x 10 <sup>-6</sup>	24.85 x 10 <sup>-6</sup>	49.7 x 10 <sup>-6</sup>
CS $\sigma=0.2$	277	402				
CS $\sigma=0.3$	256	355				

Tabla VII.5 Características de los modelos para FEM

Las propiedades mecánicas asignadas a los elementos marco fueron las mismas que se asignaron a los modelos ensayos en ABAQUS®.

Tomando estas propiedades se determinó, para cada uno de los modelos, el módulo de Young aparente. En la tabla VII. 6 se enlistan las propiedades determinadas.

Estructura	Módulo de Young MPa	Desplazamiento Total mm (Compresion)
CS $\sigma=0.1$	289.534	0.027
CS $\sigma=0.2$	144.513	0.024
CS $\sigma=0.3$	58.133	0.08

Tabla VII.6 Propiedades determinadas de los ensayos de compresión virtual

Ya que esta propiedad mecánica fue calculada a partir de un programa de elemento finito que fue construido tomando una importante consideración, la cual es que los elementos que alcanzan su límite de cedencia ya no contribuyen a la estructura con su matriz de rigidez, sin embargo que aporta resistencia a la estructura con la adición al vector de cargas de las doces reacciones (momentos y fuerzas) ultimas, de sus correspondientes nodos extremos, es importante comparar estos resultados con los que entrega un programa convencional de elemento finito, en este caso se ocupó para hacer esta comparación ABAQUS® (ver tabla VII.7).

Estructura	Módulo de Young MPa	Desplazamiento Total mm (Compresion)
CS $\sigma=0.1$	132.53	0.027
CS $\sigma=0.2$	69.846	0.024
CS $\sigma=0.3$	47.927	0.08

Tabla VII.7 Resultados obtenidos en ABAQUS

Comparando los valores del Modulo de Young correspondientes a cada estructura, se observa que el valor obtenido con ABAQUS® es menor que el calculado a través del programa de elemento finito desarrollado en este trabajo. Por un lado, se atribuye esta diferencia a que los modelos generados en ABAQUS®, si bien ocupan elementos con las mismas propiedades mecánicas y geométricas, se utilizan elementos B33, es decir elementos viga con interpolación cúbica, estos elementos en general se

caracterizan por tener reacción a cargas únicamente en dirección transversal al eje de la viga, lo cual lleva a tener diez grados de libertad por elemento, se está despreciando entonces en los modelos evaluados en ABAQUS® la capacidad de las vigas de tener reacción en la dirección axial a ella, lo cual se ve reflejado en la inferior magnitud del Módulo de Young de los modelos con vigas B33. Se puede observar también que la diferencia entre los módulos de Young es importante; para la estructura CS  $\sigma=0.1$  la diferencia es de 157.004 MPa la cual es la mayor. Esto es debido a que esta estructura tiene una desviación estándar pequeña y la mayor cantidad de elementos están alineados en dirección a z, esto implica que la capacidad de reacción en dirección axial es de suma importancia. Al utilizar elementos B33 se desprecia esta reacción, de aquí la gran diferencia en magnitudes para esta estructura en especial. Para las dos estructuras faltantes se observa que la diferencia disminuye ya que la estructura es más irregular, lo cual lleva a que los elementos alineados con la dirección z disminuyan y con ello la diferencia entre los módulos de Young.

Las gráficas de esfuerzo-deformación obtenidas para las estructuras de Voronoi ya mencionadas se muestran en las figuras subsecuentes; donde se marca con una estrella la deformación para la cual falla el primer elemento.

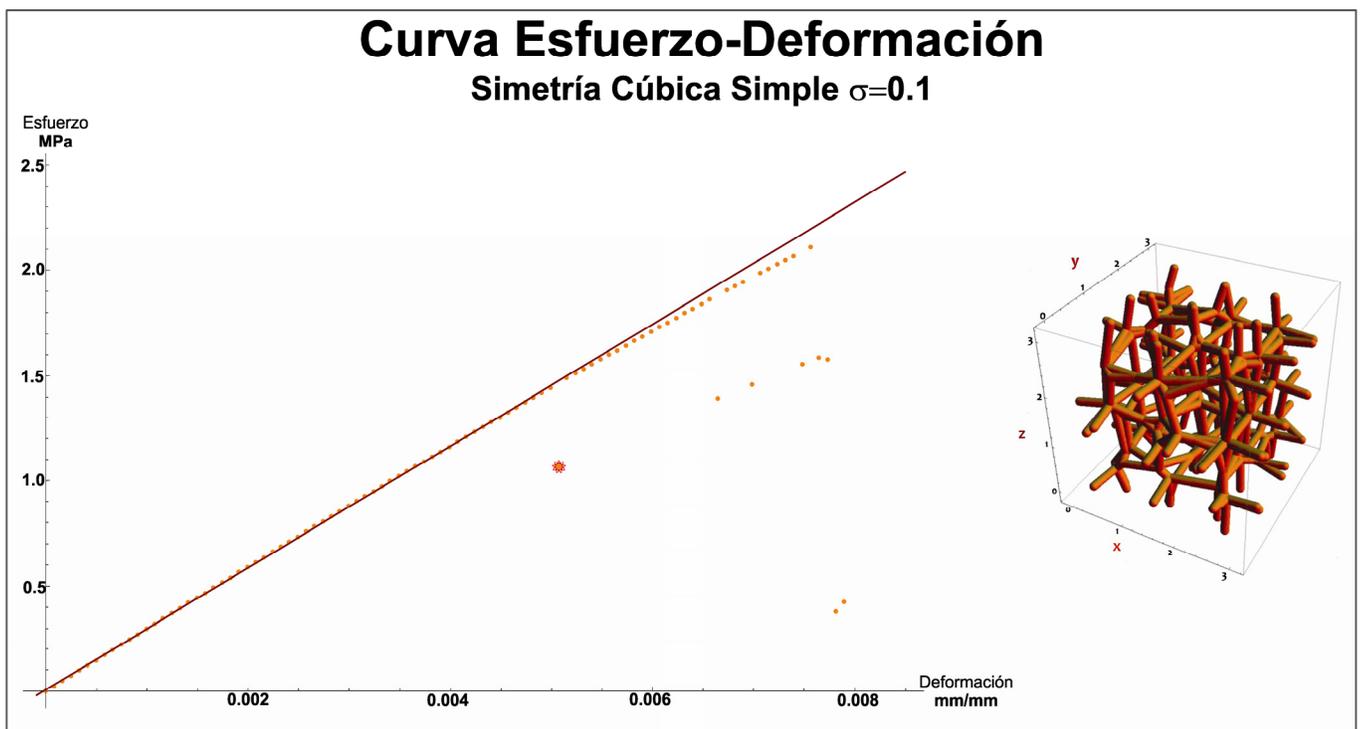


Figura VII.9 Estructura basada en la geometría cúbica simple con desviación estándar 0.1

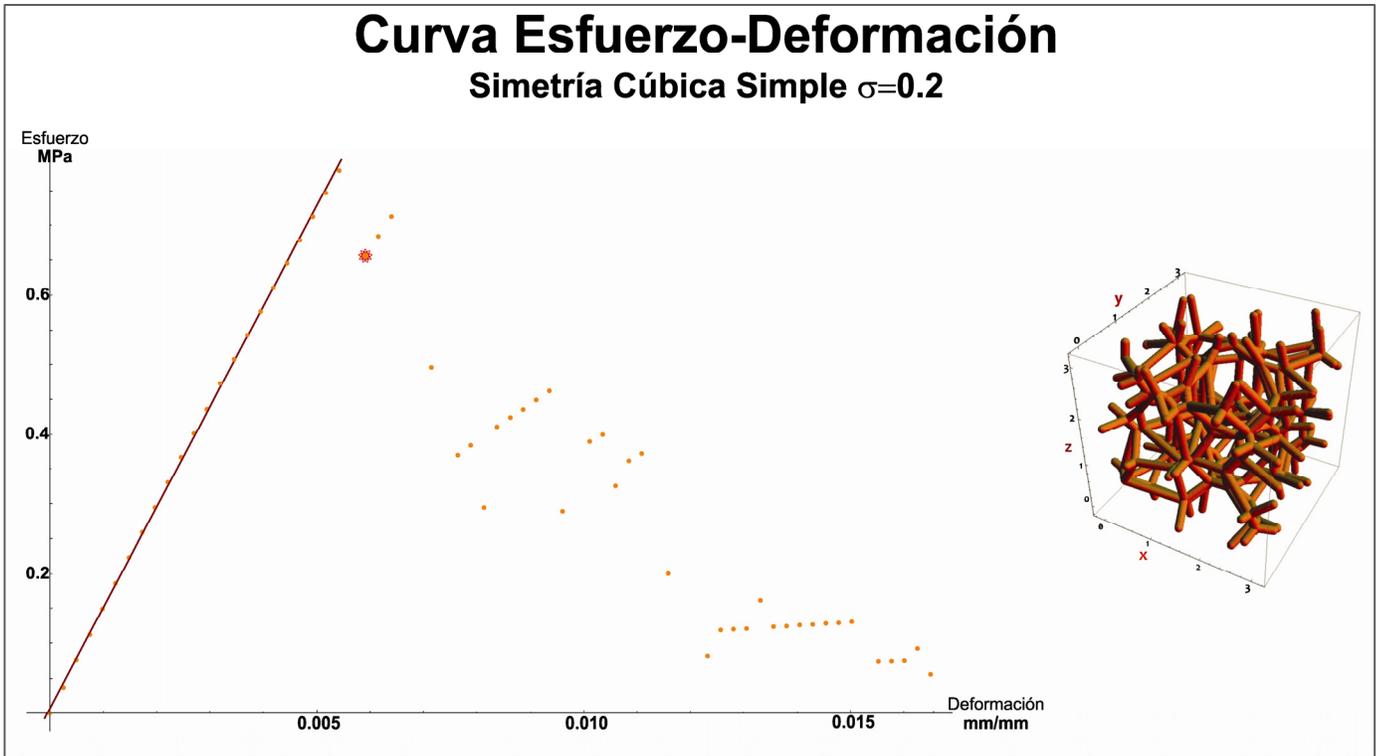


Figura VII.10 Estructura basada en la geometría cúbica simple con desviación estándar 0.2

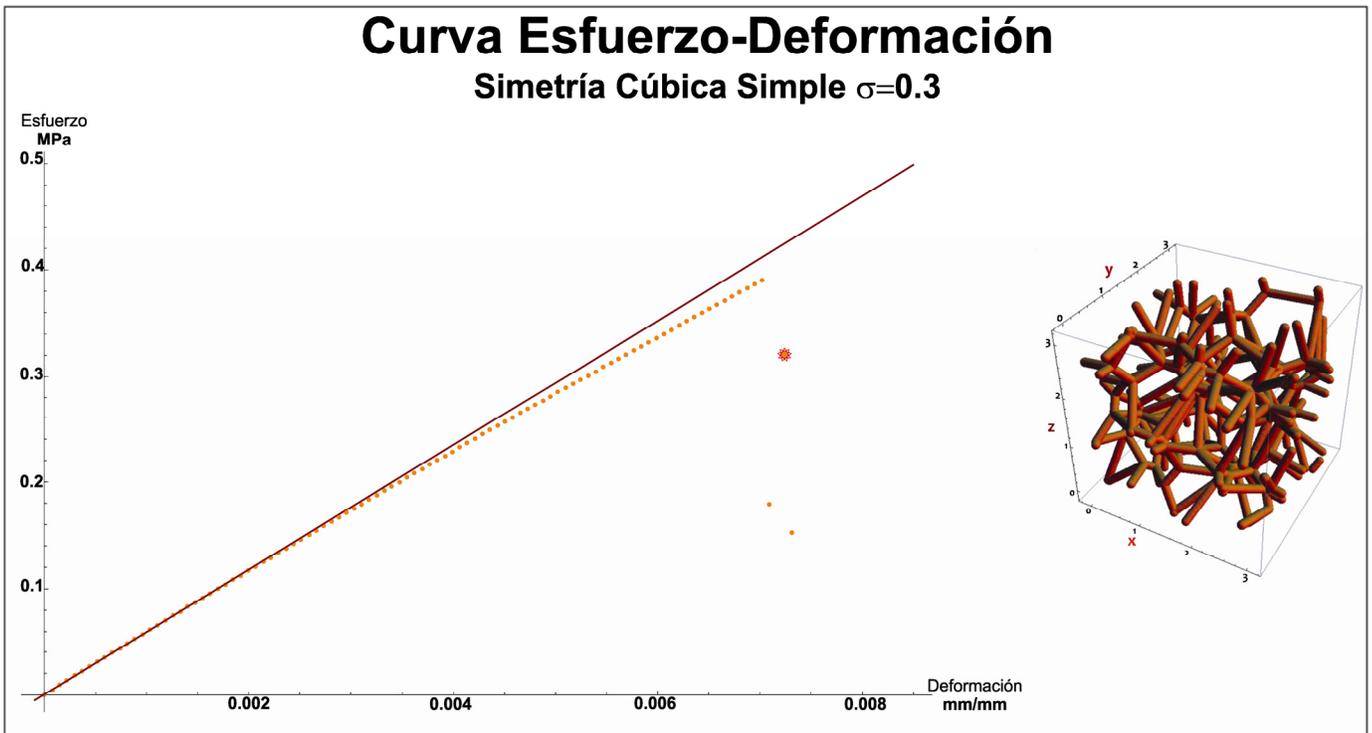


Figura VII. 11 Estructura basada en la geometría cúbica simple con desviación estándar 0.3

Se observa que para las graficas correspondientes a las figuras VII.9 y VII.11 el comportamiento de los datos siguen una tendencia no lineal, por lo cual, para poder determinar a partir de qué punto comienza este comportamiento para lo cual se utilizó una regresión lineal y asignar con ello la línea que pase por la mayoría de los puntos.

En cuanto al comportamiento presentado por la estructura CS  $\sigma=0.2$  se puede observar que es un comportamiento errático, ya que a partir del primer elemento comienza un colapso de la estructura, lo cual se ve reflejado en la caída de la magnitud de la fuerza de reacción de manera importante. Este comportamiento, en el cual la fuerza de reacción cae abruptamente cuando un elemento a alcanzado su esfuerzo de cendencia, es un reacción errónea del programa ya que si bien cuando un elemento “falla” se retira su matriz de rigidez del ensamble global, se sustituye en su lugar las correspondientes fuerzas de reacción en el vector de cargas, esto se hizo con el afán evitar esta caída en la fuerza de reacción. Para las estructuras CS  $\sigma=0.1$  y CS  $\sigma=0.3$  también se observa esta caída en la fuerza de reacción, sin embargo con re-cálculo de la matriz de rigidez se rectifica esta caída siguiendo el comportamiento esperado, pero el arreglo estructural presentado para estructura CS  $\sigma=0.2$  no permite esta rectificación llevando a que la estructura colapse como se muestra en la grafica de la figura VII.10, por lo cual el modelo lineal y el modulo de Young calculado para esta estructura se deben toman con cierta reserva dado el comportamiento anteriormente descrito.

Ya que uno de los objetivos de este trabajo es aproximarse al comportamiento mecánico de los sólidos celulares a través de la mesoestructura de éstos, es importante hacer la comparación de los módulos de Young reportados en la literatura, en ella se reporta rangos amplios para esta propiedad mecánica, para femur de cabra se tiene el rango de 234 MPa hasta 770MPa, para vertebras de cerdo se tienen valores entre 610 MPa y 1550 MPa, para fémur de humano 190 MPa hasta 1610 MPa y el rango puede ser 0.1 MPa a 200 MPa dependiendo de la dirección en la cual se aplica la carga. Como puede observarse el rango es muy amplio y los módulos de Young obtenidos a través del programa desarrollado entran en estos rangos, sin embargo esta comparación es una referencia que debe de tomarse con reserva.

## VII.3 Conclusiones

A partir de lo anterior, del trabajo desarrollado a lo largo de la investigación y de los resultados obtenidos de ella puede concluirse lo siguiente:

- Con respecto al modelado en ABAQUS® se puede decir que la metodología planteada por este método permitió determinar los parámetros que influyen en la variación de las propiedades mecánicas, esté caso la geometría inicial (estructuras construidas de un arreglo inicial de puntos cúbico simple, cúbico centrado en la cara, cúbico centrada en el cuerpo y su variación tetragonal) demostró tener una importante influencia, así como el grado de distorsión. Por otro lado, el trabajo utilizando paquetería comercial de FEM deja la base para en un futuro trabajar el ya mencionado encadenamiento de eventos, para realizar gran cantidad de ensayos y con ello determinar propiedades mecánicas promedio de las estructuras que se pretendan analizar.
- La programación del método por elementos finitos y de elementos Marco para simular ensayos de compresión sobre estructuras de Voronoi es factible de desarrollar. A lo largo de este trabajo se presentó la metodología para su generación así como manipulación. La hipótesis manejada a lo largo de la investigación, en la cual se retiran elementos de la estructura pero siguen aportando resistencia al conjunto por sus reacciones ultimas, es una hipótesis sensata que

permite obtener un comportamiento no lineal de la estructura aproximándose de esta manera al comportamiento real de una estructura trabecular.

- La programación del método permite una completa manipulación de los datos, desde conocer las matrices de rigidez locales de los elementos hasta reconocer en que paso de un ciclo iterativo un elemento alcanzó su esfuerzo de cedencia, determinar de este elemento sus funciones de forma, reacciones en sus nodos extremos, manipulación de la matriz de rigidez global y del sistema de ecuación global, en el paso en el que falló el elemento. Esta manipulación permite tener mayor control de los datos y conocer la formulación a partir de la cual de la cual se obtuvieron dichos datos. Permite de manera sencilla crear un elemento nuevo, con nueva formulación y construir las estructuras de Voronoi con estos nuevos elementos

A partir de estos dos puntos se puede concluir que la investigación desarrollada y presentada a lo largo de este trabajo representa un avance importante en cuanto al modelado del hueso trabecular ya que logró generarse el comportamiento no lineal que se buscaba. Por otro lado se sabe que existen muchos puntos que quedan aun propensos de mejorarse, uno de ellos y que fue una gran limitante para generar un mayor número de modelos es el tiempo de cálculo para cada estructura, ya que cada simulación de cien pasos llevaba un tiempo aproximado de 48 horas, ya que se resolvían cien veces un sistema de ecuaciones de 5000 incógnitas, esto es por el algoritmo manejado, en el cual en cada iteración se recalculaba la matriz de rigidez y se resolvía el correspondiente sistema de ecuaciones. Para solucionar este problema existe un método de optimización para el método de elemento finito que se conoce como *Malla Fija* este método consiste en reciclar la matriz de rigidez global, es decir, se calcularía una vez en el primer paso y en cada iteración si un elemento ya no pertenece a la estructura simplemente su matriz de rigidez se desensambla de la matriz de rigidez global implementado esto en la metodología anteriormente presentada se ahorraría el tiempo en que se recalcula las matrices de rigidez globales en cada paso.

Otra aspecto que vale la pena mejorar es la forma en que se construyen las estructuras de Voronoi, a lo largo de la investigación se trabajaron con estructuras generadas a partir de nodos regulares y que fueron posteriormente perturbados, una propuesta que se tiene, es utilizar una herramienta como lo es la imagenología por resonancia magnética la cual permite obtener imágenes como las mostradas en la figura VII.12, estas fueron tomadas de un espesor de 1 [mm] y se obtuvieron 28 de éstas por lo cual cada corte es de un espesor de 0.03 [mm].

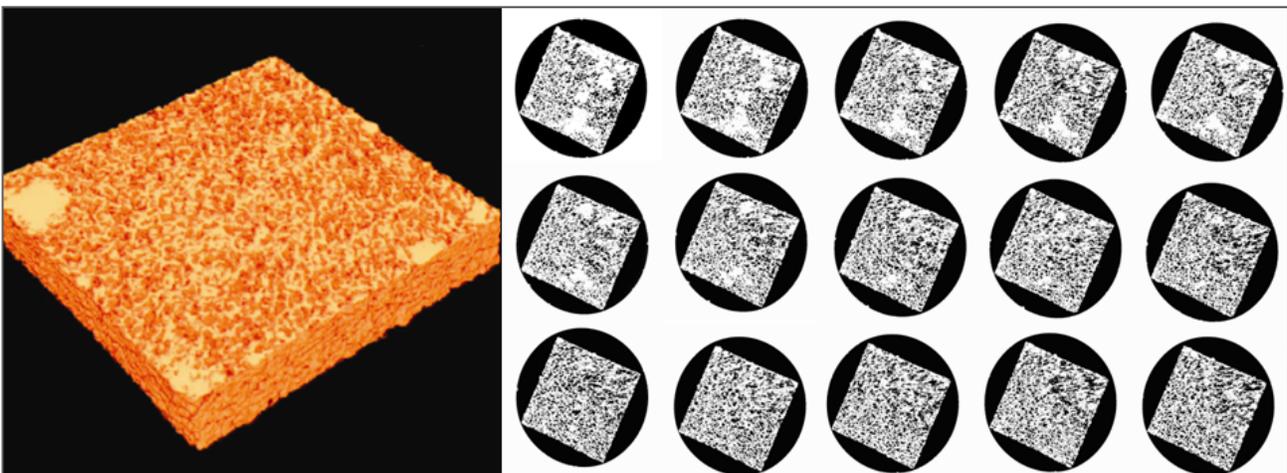


Figura V.12 Secuencia de imágenes obtenidas a través de una resonancia magnética nuclear.

A cada una de estas imágenes puede determinarle el centro de sus poros, a partir de determinar su posición en  $x$ ,  $y$  y  $z$ , se recurriría a la estadística para encontrar que distribución puede acoplarse al conjunto de puntos generados a partir de los poros, con ello pueden construirse estructuras de Voronoi que tuvieran mayor relación con estructuras reales de hueso trabecular.

# Bibliografía

Abellanas M., Hernández G., Bajuelos A. L., Matos I., and Palop B. (2009); *The embracing Voronoi diagram and closest embracing number*. Departamento de Matemática Aplicada. Facultad de Informática, U.P.M., Madrid, España.

Banu B. K., Saam Morshed, Klaus E. and Harry K. G. (2008.); *Advanced Imaging Of Bone Macrostructure and Microstructure in Bone Fragility and Fracture Repair*. The Journal of Bone & Joint Surgery.

Bhatti M. A. (2005); *Fundamental Finite Element Analysis and Application: With Mathematica and Matlab Computations*. Wiley, John & Sons, Incorporated. University of Iowa.

Bhatti M. A. (2005); *Advance Topics in Finite Element Analysis of Structures: With Mathematica and Matlab Computations*. Wiley, John & Sons, Incorporated. University of Iowa.

Bustillo E., López H. (2008); *Tesis: Investigación in silico de las Propiedades Mecánicas del Hueso Trabecular*. México, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Calvo Nestor (2004). *Utilidades e inutilidades del diagrama de Voronoi: Interpolación con coordenadas laplacianas*. Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería. Santa Fe, Argentina.

De Berg Mark (2008); *Computational Geometry*. Berlín, Springer.

Dieter H. Pahr and Philippe K. Zysset (2008); *A comparison of enhanced continuum FE with micro FE models of human vertebral bodies*. Insitute of Lightweight Design and Structural Biomechanics. Viena University of Technology. Gusshausstrasse.

Gibson Lorna J., F. A. Michael (1988); *Cellular solids : structure & properties*. Pergamon Press.

H.X. Zhu and H. Windle(2001); *Effects of irregularity on the high strain compression of open-cell foams*. Department of Metallurgy, Cambridge University, Pembroke Street.

Hiyoshi H., *Study on interpolation based on Voronoi diagrams*, Ph.D. Thesis, Dept. Mathematical Engineering and Information Physics, Univ. Tokyo, 2000.

Huang J-S., L.J. Gibson(2002); *Creep of open-cell Voronoi foams*. Department of Civil Engineering National Cheng Kung University.

I. P Lucia. (2005). *Tesis Doctoral: Modelos en Bioingeniería: Caracterización de imágenes estáticas y dinámicas*. Facultad de ingeniería. Universidad Nacional de Mar de Plata. Argentina.

- J.S. Daniel y D. B. Joseph (2003). *Biomechanics: Principles and applications*. CRC PRESS. USA.
- Narváez M. (2004); *Tesis: Métodos para el Análisis de la Microestructura y Propiedades Mecánicas del Hueso Esponjoso*. México, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Presas M. y Llorca J. (2005); *Simulación Numérica tridimensional de la fractura de materiales celulares*. Departamento de Ciencia de Materiales. Universidad Politécnica de Madrid. E. T. S. de Ingenieros de Caminos. 28040, Madrid.
- Oncina Carratalá Jose, Vidal Ruiz Enrique (1996); *Tesis Doctoral: Algoritmos de búsqueda de vecinos más próximos en espacios métricos*. España, Universidad Tecnica de Valencia.
- R. R. Esther, R. F. Antonio (2004); *Caracterización mecánica del material óseo*. Universidad Alfonso X El sabio. Escuela Politécnica Superior.
- Ramírez E. I. (2007); *Desarrollo de un modelo micromecánico para la predicción de las propiedades de hueso mediante paquetería de elemento finito*. México, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Ruiz O. (2008); *Efecto en la Resistencia Mecánica del Hueso Esponjoso al Variar la densidad y la arquitectura trabecular*. Mexico, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Ruiz O. (2008); *Análisis mediante paquetería de elemento finito del efecto de la arquitectura trabecular y de la densidad trabecular en las propiedades mecánicas de hueso femoral y vertebral*. s.l., Congreso internacional de metalurgia y materiales, Instituto tecnológico de Saltillo.
- Ruiz O., R. Schouwenaars, Ramirez E. I., Victor. H. J. Armando. O. (2010); *Analysis of the architecture and mechanical properties of cancellous bone using 2D Voronoi cell based models*. Facultad de Ingenieria. UNAM.
- Shulmeister V., M.W.D. Van der Burg, Van der Giessen E., Marissen R. (1997); *A numerical study of low-density elastomeric open-cell foams*. Delft University of Technology, Laboratory for Engineering Mechanics.
- Tlahuetl M. A. (2007); *Tesis: Estudio del Comportamiento Mecánico del Hueso Esponjoso y su Modelado mediante Software de Elemento Finito*. México, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- X.E. Guo and C.H. KIM (2002); *Mechanical consequence of trabecular bone loss and its treatment: A Three-dimensional model simulation*. Bone bioengineering laboratory. Department of biomedical engineering. Columbia University. New York, NY, USA.
- X.Y. Gan, C. Chen, Y.P. Shen (2005); *Three-dimensional modeling of the mechanical property of linearly elastic open cell foams*. The state Key Laboratory. School of Civil Engineering and Mechanics.

Yuehwei H. An, Draughn Robert A. (2000); *Mechanical Testing of Bone and the Bone-Implant Interface*. CRC Press

<http://www.electronicafacil.net/ciencia/Article13251.html>