



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**MODELOS BIMODALES
PARA CONDENSADO DE
BOSE EINSTEIN EN POZOS
ASIMÉTRICOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

**CRISTOPHER GERARDO HERNÁNDEZ
SALINAS**



DIRECTOR DE TESIS:

DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:

DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:

DRA. ROSARIO PAREDES GUTIÉRREZ



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Modelos bimodales para condensado de Bose
Einstein en pozos asimétricos

Autor: Cristopher Gerardo Hernández Salinas

Asesor: Dr. Pablo Barberis Blostein

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas
UNAM

November 12, 2010

CONTENTS

1. <i>Introducción</i>	3
2. <i>La Condensación de Bose-Einstein</i>	6
2.1 Historia y realización experimental	6
2.2 La ecuación de Gross-Pitaevskii	9
2.3 Soluciones de la ecuación de Gross-Pitaevskii	11
2.3.1 La aproximación de Thomas-Fermi.	11
2.3.2 El método variacional.	12
3. <i>La descripción cuántica del BEC</i>	18
3.1 La aproximación de 2 modos	20
3.2 Los modelos cuánticos de dos modos	21
3.2.1 El modelo canónico o estándar	21
3.2.2 Refinamientos del modelo	27
4. <i>El modelo extendido</i>	31
4.1 El caso simétrico	37
4.2 El caso asimétrico	41
4.2.1 El caso asimétrico con $\delta > 0$ y frecuencias idénticas	41
4.2.2 El caso asimétrico con distintas frecuencias	45
5. <i>Cálculos semi-clásicos</i>	57
5.1 Relación entre los Hamiltonianos clásico y cuántico	58
5.2 El Hamiltoniano Clásico en el espacio fase	61
5.3 Estructura del espectro	63
6. <i>Conclusiones y trabajo a futuro</i>	67

1. INTRODUCCIÓN

El Condensado de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés) es un conjunto de bosones con una fracción muy significativa de estos ocupando el estado de mínima energía. Los bosones son partículas de espín entero que, a diferencia de los fermiones, tienen la posibilidad de que dos o más de su tipo ocupen un mismo estado cuántico simultáneamente. Las funciones de onda de sistemas de bosones son simétricas al permutar partículas. El BEC se da a temperaturas extremadamente bajas (del orden de nano-kelvins), ya que el número de bosones en el estado base aumenta si disminuye la temperatura. Este sistema ha sido de gran interés en las últimas décadas, ya que abre las puertas a la observación de fenómenos de la mecánica cuántica a niveles macroscópicos.

La existencia del BEC fue predicha en 1925 por Einstein, quien identificó una transición de fase en la cual una fracción importante de partículas en un gas ideal de bosones ocupa abruptamente el estado base. Sin embargo, su realización y observación directa no llegó sino hasta 1995 [1]. Durante todo ese tiempo el BEC fue un elemento teórico muy útil para el entendimiento de fenómenos como la superfluidez y superconductividad. A pesar de que las colisiones en los sistemas físicos no son despreciables, estos presentan transiciones de fase similares a las predichas por la teoría de sistemas cuánticos ideales de Einstein. Desde su realización, el BEC ha probado ser una plataforma muy importante para el estudio de sistemas cuánticos macroscópicos.

La función de onda de un gas bosónico de N partículas sin interacciones entre sí y en el estado base es simplemente el producto simetrizado de N funciones de onda individuales en el estado base; cada una de las cuales satisfacen la ecuación de Schrödinger para una partícula. Sin embargo, para una descripción teórica del BEC más realista no se utiliza una función de onda como la antes mencionada. Bajo ciertas condiciones, las cuales serán explicadas en el siguiente capítulo, la función de onda de un BEC está determinada por la conocida y celebrada ecuación de Gross-Pitaevskii. Esta ecuación tiene la forma de una ecuación de Schrödinger con el potencial químico como valor propio en lugar de la energía. Además incluye un término no lineal proporcional a la amplitud al cuadrado de la función de onda.

La ecuación de Gross-Pitaevskii (GP) ha probado ser de gran utilidad para describir el comportamiento de un BEC en condiciones muy diversas. Por ejemplo, cuando se disminuye la intensidad de la trampa que confina al BEC la interacción repulsiva entre los átomos provoca una expansión balística, fenómeno utilizado por Cornell, Wieman y sus colaboradores en JILA para obtener fácilmente imágenes del condensado [1, 2, 3]. Murray Holland y John Cooper, teóricos de JILA, usaron la ecuación GP para describir el perfil de densidad durante el proceso de expansión del condensado y obtuvieron

resultados cercanos a los valores experimentales con un margen de error menor al 5 por ciento [4].

Los grados de libertad de un BEC pueden ser internos o externos. A ambos tipos de grados de libertad se les llama modos en analogía a los modos de un oscilador armónico. A los sistemas BEC con varios modos se les llama multimodales. Bajo ciertas condiciones es posible considerar al BEC como un sistema de dos modos o bimodal, en lo que se conoce como la aproximación de dos modos. Estos dos modos se pueden deber al espín de las partículas o a su localización en un pozo doble de potencial. El presente trabajo se enfocará en describir el segundo caso.

La descripción cuántica del BEC se basa en modelos de segunda cuantización, que sirven para calcular propiedades del condensado tales como el espectro energético. También funciona para describir teóricamente fenómenos como el tunelaje oscilante entre dos condensados confinados en un pozo doble de potencial, fenómeno análogo al efecto Josephson que se da en la superconductividad.[5].

El modelo cuantizado más recurrente para describir dos condensados en un pozo simétrico de potencial es nombrado el “modelo canónico” [6]. Es mencionado extensamente en la literatura ya que es el caso no trivial más sencillo. Ananikian y colegas introducen un modelo más general al que llaman “Improved 2 Model (I2M)”, que incluye varios términos que siempre eran ignorados, pero que tienen efectos importantes [7]. El I2M es válido únicamente para pozos simétricos.

El objetivo de este trabajo es generalizar los modelos existentes para que puedan ser aplicados al caso asimétrico. Primero obtendré explícitamente la función de onda de cada modo utilizando soluciones de la ecuación de GP obtenidas por métodos variacionales. A partir de estas funciones de onda es posible construir los coeficientes que determinan al modelo cuántico. Obtenemos explícitamente el caso canónico para condensados separados más allá de cierta distancia. Para el caso general de pozo simétrico el modelo expuesto aquí es idéntico al I2M excepto por la definición de los parámetros. La novedad que hay en el procedimiento mostrado aquí es que es aplicable a BECs atrapados en pozos asimétricos, caso que aparentemente ha sido muy poco estudiado desde un punto de vista puramente cuantizado [8]. El método aquí expuesto nos permite hacer predicciones acerca del espectro energético para pozos asimétricos.

La estructura de este trabajo es la siguiente: esta introducción es el primer capítulo. En el segundo capítulo se hace una reseña de la historia del BEC y se explica como se obtiene la función de onda resolviendo la ecuación de GP por dos caminos distintos: el método variacional y la aproximación de Thomas-Fermi. En el tercer capítulo se darán las bases para construir los modelos cuantizados del BEC, los cuales a su vez dependen de la solución de la ecuación de GP. En este capítulo se introduce un nuevo modelo, el cual es llamado “Extended 2 Mode Model” o E2M y que es uno de los resultados originales de esta tesis. En el capítulo cuarto se aplicará el modelo E2M a BECs atrapados en pozos dobles asimétricos, se mostrarán las dificultades que aparecen al aplicar este procedimiento y su resolución, junto con los espectros energéticos resultantes. En el capítulo quinto se hará un análisis de la contraparte clásica del Hamiltoniano E2M. Esto nos permite explicar algunas características cualitativas de

los espectros energéticos obtenidos con este modelo.

2. LA CONDENSACIÓN DE BOSE-EINSTEIN

2.1 *Historia y realización experimental*

La primer teoría del comportamiento colectivo de entidades cuánticas fue desarrollada por S. Bose, y esta aplicaba a fotones únicamente. Una teoría más general, conocida hoy como estadística de Bose-Einstein, fue desarrollada por Albert Einstein para cualquier sistema de muchos cuerpos con masa y con espín entero, a los cuales se les conoce hoy en día como bosones. Los bosones son partículas que pueden estar en el mismo estado simultáneamente. La función de onda total de un colectivo de bosones está construida de tal forma que es simétrica ante el intercambio de dos partículas cualquiera.

En 1925 Einstein se dio cuenta de que su teoría de muchos cuerpos predice una transición de fase muy peculiar para un gas de bosones sin interacción interna. Esta consiste en la aparición de un estado de la materia macroscópico en el que una fracción muy importante de sus átomos ocuparían el estado base. Tal estado es conocido hoy en día como condensado de Bose-Einstein (BEC por sus siglas en inglés). Para lograrlo es necesario que el gas sea enfriado más allá de una cierta temperatura crítica, la cual es del orden de nano-kelvins. Tuvieron que pasar siete décadas desde que el BEC fuera predicho hasta su observación experimental. Esto se debe a que las técnicas de enfriado capaces de llegar a las temperaturas necesarias no existieron durante todo ese tiempo.

La temperatura crítica está dada por la condición de que la longitud de onda de De Broglie λ_{db} sea comparable a la distancia intermedia entre los átomos. La longitud de onda de De Broglie está dada por $\lambda_{db}^2 = \hbar^2 / (2\pi m k_B T)$, donde m es la masa de las partículas, \hbar es la constante de Planck dividida entre 2π , k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en grados Kelvin. Si esta condición se cumple, las funciones de onda atómicas se superponen tanto que los átomos individuales no pueden ser distinguidos.

Si la temperatura del sistema es mayor que la de transición, la distribución de velocidades de las partículas es muy similar a la de Maxwell-Boltzmann para un gas en equilibrio térmico. Al acercarse a la temperatura crítica del BEC la distribución de velocidades se vuelve un pico afilado centrado en la velocidad cero. Esto muestra un tránsito abrupto de una fracción importante de átomos hacia el estado base, signo de una transición de fase [1, 2].

Desde la década de los ochenta varios grupos se habían dado a la tarea de enfriar y comprimir nubes de átomos para lograr la condensación de Bose Einstein. Durante años sus esfuerzos fueron insuficientes, a pesar de que habían concebido e implementado ideas nuevas e ingeniosas para enfriar cada vez más y más los átomos. La búsqueda finalizó

cuando un grupo de Colorado liderado por Eric Cornell, Carl Wieman y colaboradores lograron condensar átomos de rubidio 87 con un arreglo de dispositivos magneto-ópticos y esquemas de enfriamiento evaporativo. Fue Wieman quien inicio la búsqueda exhaustiva del BEC y Cornell brindo una pieza decisiva para el descubrimiento, un nuevo tipo de trampa magneto-óptica rotante.

El enfriamiento evaporativo es un procedimiento fundamental para la observación del BEC. La idea consiste en bajar el potencial de la trampa magnética permitiendo escapar a los átomos más energéticos del sistema. Esto se debe hacer lentamente para permitir que los átomos más fríos alcancen el equilibrio térmico por medio de colisiones. El procedimiento antes descrito se repite varias veces, bajando cada vez más el potencial. Una variación de esta técnica es llamada “evaporación rf - inducida”, la cual consiste en lanzar señales de radiofrecuencia al condensado para cambiar la orientación del espín en los átomos de las capas exteriores (y más energéticas) de la muestra lo cual los hace escapar de la trampa. La energía de transición en este proceso varía según la posición del átomo debido a la inhomogeneidad del campo magnético en la trampa. Haciendo bajar la frecuencia de la señal uno puede inducir un proceso evaporativo sin bajar los campos magnéticos de la trampa, permitiendo la obtención de una muestra mejor confinada.

Otro elemento crucial en la realización del BEC es el enfriamiento láser, desarrollado por Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji, y William D. Phillips, ganadores del premio Nobel de física de 1997 por su descubrimiento. El enfriamiento láser consiste en aplicar dos láseres propagándose en direcciones opuestas sobre una muestra gaseosa. La frecuencias de dichos láseres deben de estar ligeramente corridas al rojo con respecto a las frecuencias de absorción de los átomos. A causa del efecto Doppler, los átomos cuya velocidad esté en dirección a uno de los láseres verán su luz con una frecuencia corrida al azul, abriendo la posibilidad de que estos absorban un fotón. Al re-emitir un fotón los átomos tendrán una energía menor que la original, suponiendo que el fotón sea emitido en la misma dirección que la velocidad del átomo. Bajo estas condiciones los átomos de la muestra experimentan un fuerza efectiva de tipo disipativo sobre el eje de propagación. Para realizar enfriamiento láser es necesario aplicar tres pares de láseres sobre los 3 ejes espaciales (ver figura 2.1).

En los primeros intentos de realización del BEC se utilizó hidrógeno, que permanece como un gas aun a bajísimas temperaturas. Posteriormente se utilizaron átomos alcalinos, que a muy bajas temperaturas están en una fase solida pero pueden ser llevados a un estado gaseoso meta-estable. A estos átomos se les aplica enfriamiento láser en una trampa magneto-óptica. Cuando el enfriamiento láser deja de ser efectivo se aplica el enfriamiento evaporativo desarrollado para el hidrógeno recientemente. El grupo de Wieman utilizó este esquema a pesar de que muchos teóricos le dijeron que era imposible [10].

El grupo de Wolfgang Ketterle en el MIT se dedicó al enfriamiento de átomos de sodio. Ketterle junto con Pritchard introdujeron una innovación llamada la trampa magneto-óptica oscura, que reduce la cantidad de tiempo que las partículas están en estados excitados. Esta técnica, aunque más efectiva que las trampas comunes, aun es

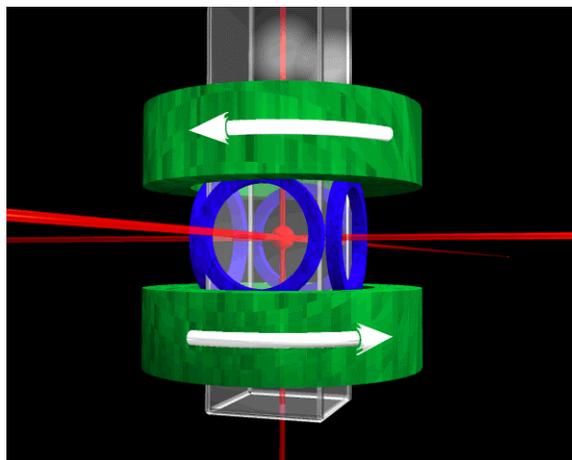


Fig. 2.1: .Esquema de la realización experimental de un BEC. La corriente, que esta representada por las flechas blancas, fluye por las bobinas (en color verde) y genera el campo magnético necesario para confinar a los átomos del condensado. Los seis haces de luz que inciden en el centro de la cámara son los encargados de implementar el enfriamiento evaporativo. (fuente: <http://spot.colorado.edu/~cwieman/>).

insuficiente. Se requiere además de una trampa cuadrupolar producida por dos espiras en sentidos opuestos para llevar a cabo el enfriamiento evaporativo. Sin embargo, estas trampas cuadrupolares tenían un punto donde la dirección de campo cambia bruscamente, provocando que muchas partículas cambiaran su orientación de espín y fueran lanzadas fuera de ésta rápidamente. Una solución fue enfocar un haz de láser hacia el punto de cambio abrupto, provocando que una fuerza dipolar alejara a los átomos de ese sitio. Esto dejó al grupo de Ketterle más cerca pero no fue suficiente en ese momento.

Cornell tuvo la idea de añadir un campo magnético rotante para evitar que los átomos se acercaran al punto de cambio brusco. Este campo es, en promedio temporal, una trampa armónica. Con este campo, el problema de los cambios de espín se reduce dramáticamente y se incorpora también un efecto adicional de enfriamiento evaporativo. Esto último se debe a que los átomos que cambian su espín y son expulsados tienden a ser los más energéticos. Con esto se logró llegar a temperaturas del orden de 200nk con ^{87}Rb en el estado $F=1$. Poco tiempo después Cornell y su grupo obtuvieron evidencia suficientemente firme como para anunciar que observaron el BEC con Rubidio 87 en el estado $F=2$. En ese mismo año (1995), Ketterle y su grupo lograron el condensado de átomos de sodio [11].

En ese momento otro grupo dirigido por Randall Hulet en Texas obtuvo evidencia indirecta de un condensado de ^7Li . Tal condensado es muy diferente a los anteriores ya que los átomos que lo conforman tienen amplitud de dispersión negativa (interacciones atractivas). Se creía que los condensados con amplitud de dispersión negativa no eran posibles ya que una amplitud negativa implica frecuencias de excitación complejas e

inestabilidad que llevaba al colapso. Posteriormente se demostró teóricamente que esta clase de condensados es estable si el número de átomos es pequeño [12].

La búsqueda había terminado, pero las investigaciones apenas habían comenzado. Éstas abarcan espectroscopía láser en el condensado, interacción de la luz con materia coherente, etc. Mientras el tiempo avanza, el estudio de los condensados se ha bifurcado en una gran cantidad de direcciones. Se ha logrado la formación de solitones (ver por ejemplo: [13]) y vorticidad en gases confinados [14]. El uso de condensados como fuentes coherentes de ondas de materia para interferometría ha sido de gran importancia para realizar mediciones precisas [15].

2.2 La ecuación de Gross-Pitaevskii

Para un gas muy diluido de N partículas confinado en un volumen \mathcal{V} , el alcance de las interacciones interatómicas r_0 es mucho menor que la distancia promedio entre los átomos, dada por $d = (N/\mathcal{V})^{1/3}$. En tal caso sabemos que las colisiones de átomos por pares son predominantes y que podemos despreciar cualquier tipo de colisiones de orden mayor. Además, a las bajas temperaturas de BEC, los efectos de estas colisiones no dependen de detalles específicos tales como el ángulo de incidencia. Estos efectos solo dependen de la amplitud de dispersión a_s , que corresponde a una onda s .

En un estado completamente condensado todos los bosones se encuentran en el mismo estado $\phi(r)$. Por lo tanto, el estado del sistema de N partículas estará dado por:

$$\Phi(r_1, r_2 \dots r_n) = \prod_{i=1}^N \phi(r_i), \quad (2.1)$$

donde $\phi(r_i)$ está normalizada a 1 para toda i . La función de onda 2.1 no contiene correlaciones entre las partículas debido a las interacciones de corto alcance. El efecto de estas interacciones será tomado en cuenta usando un potencial efectivo $U(r - r')$.

El Hamiltoniano del sistema es:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + V(r_i) + \sum_{i < j} U(r_j - r_i) \right], \quad (2.2)$$

donde p_i y $V(r_i)$ son el momento y la energía potencial externa de la i -ésima partícula, mientras que $U(r_j - r_i)$ es el potencial de interacción entre las partículas i -ésima y j -ésima. Para dispersión de bajas energías, $U(r - r')$ es un potencial de contacto entre esferas duras para pares de partículas $U(r - r') = g\delta(r - r')$, donde $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ [16]. La forma del potencial $V(r_i)$ será especificada más adelante. El valor esperado de la energía está dado por:

$$\begin{aligned} E &= N \int \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi(r)|^2 + V(r)|\phi(r)|^2 dr \\ &+ \frac{N(N-1)}{2} \int \phi(r)^* \phi(r')^* U(r - r') \phi(r) \phi(r') dr dr', \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde el factor de $\frac{N(N-1)}{2}$ que multiplica al término de interacción proviene del número de pares posibles que se pueden formar con N partículas.

Se define la función de onda del condensado como:

$$\Psi(r) = N^{1/2}\phi(r), \quad (2.4)$$

función que a veces se le conoce en la literatura como “parámetro de orden” [17] y se le interpreta como la distribución de partículas en el condensado. A partir de esta función se define la densidad de partículas $n(r)$:

$$n(r) = |\Psi(r)|^2, \quad (2.5)$$

y la normalización de $\Psi(r)$ está dada por el número de partículas total:

$$N = \int n(r)dr = \int |\Psi(r)|^2 dr. \quad (2.6)$$

Utilizando la forma explícita del potencial de interacción y despreciando los términos de orden $1/N$ podemos expresar la energía en términos de una funcional de $\Psi(r)$:

$$E = \int \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi(r)|^2 + V(r)|\Psi(r)|^2 + \frac{g}{2} |\Psi(r)|^4 dr. \quad (2.7)$$

Ahora, para encontrar la forma de $\Psi(r)$ es necesario minimizar la energía 2.7 con la restricción de que N sea una constante. Para ese propósito utilizamos un multiplicador de Lagrange μ asociado al número de partículas N . N también puede expresarse como una funcional de $\Psi(r)$ gracias a la ecuación 2.6. Así pues, al minimizar la variación de la cantidad $E - \mu N$ obtenemos que la función $\Psi(r)$ debe de cumplir con la ecuación:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi(r) + V(r)\Psi(r) + g|\Psi(r)|^2\Psi(r) = \mu\Psi(r), \quad (2.8)$$

donde el término Laplaciano proviene de realizar una integración por partes. La cantidad μ es el potencial químico, cuya definición es la usual de física estadística: $\mu = \partial E/\partial N$ y que para gases sin interacción correspondería a la energía por partícula. La ecuación 2.8 es la celebrada “ecuación de Gross-Pitaevskii” (GP) estacionaria. Esta tiene la forma de una ecuación de Schrödinger no lineal cuyo valor propio no es la energía sino el potencial químico. Al igual que la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Gross-Pitaevskii tiene una contraparte dependiente del tiempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\Psi(r) + V(r)\Psi(r) + g|\Psi(r)|^2\Psi(r) = i\hbar \frac{\partial\Psi(r)}{\partial t}, \quad (2.9)$$

conocida simplemente como “ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo” o “TDGPE” por sus siglas en inglés. La función $\mathcal{V}(r)$ es el potencial que confina al condensado. Si este se trata de un pozo doble entonces puede ser descompuesto en dos potenciales armónicos de la forma:

$$V_0(r) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2), \quad (2.10)$$

donde m es la masa correspondiente al tipo de partículas que componen al BEC y ω_i para $i=1,2,3$ son las frecuencias del oscilador armónico para cada dimensión espacial.

2.3 Soluciones de la ecuación de Gross-Pitaevskii

Al ser no lineal, la ecuación GP 2.8 generalmente no puede ser resuelta de forma analítica, sino numérica, y con soluciones no ortogonales. Sin embargo, existen otras maneras de atacar el problema. Las dos más comunes son la aproximación de Thomas-Fermi y el método variacional. Es importante enumerar los métodos para solucionar GP ya que más adelante supondremos que las funciones que dan forma a los modos de cada pozo son soluciones de GP y es importante saber cual solución es útil para nuestros fines y cual no.

2.3.1 La aproximación de Thomas-Fermi.

Si el condensado cuenta de un número de partículas N lo suficientemente grande y sus interacciones internas son repulsivas, entonces el término de energía cinética es despreciable comparado con el término de energía potencial externa $V(r)$ y las interacciones que son proporcionales a $|\Psi(r)|^2$ [18]. Por lo tanto, una buena aproximación para la función de onda del condensado se obtiene despreciando el término que representa a la energía cinética en la ecuación GP desde un principio:

$$(V(r) + g|\Psi(r)|^2)\Psi(r) = \mu\Psi(r), \quad (2.11)$$

en donde μ es el potencial químico. Eliminando el factor común $\Psi(r)$ se obtiene como solución:

$$n(r) = |\Psi(r)|^2 = \frac{\mu - V(r)}{g}. \quad (2.12)$$

Existe una región del espacio tal que $\mu - \mathcal{V}(r) < 0$. Como la densidad de partículas no puede ser negativa, en esta región se define que $|\Psi(r)|^2 = 0$. La región en la que $|\Psi(r)|^2 > 0$ es limitada, y su frontera estará dada por la ecuación:

$$\mu - V(r) = 0, \quad (2.13)$$

que aplicando la expresión explícita del potencial 2.10, nos da la extensión espacial del BEC para cada eje de coordenadas:

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.14)$$

Las ecuaciones 2.14 solo podrán ser evaluadas hasta que se determine el valor del potencial químico. Este se calcula a partir de la condición de normalización 2.6, la cual nos da una relación entre μ y N . Integrando la función de onda dada por 2.12 con el potencial 2.10 obtenemos:

$$N = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{2\mu}{m\omega_0^2} \right)^{3/2} \frac{\mu}{g}, \quad (2.15)$$

donde ω_0 es el promedio geométrico de las frecuencias, el cual se define como $\omega_0 = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$. Despejando el potencial químico de 2.15 se obtiene:

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na_s}{l} \right)^{2/5} \hbar\omega_0, \quad (2.16)$$

donde l se define como $l = \sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ y a_s es la amplitud de dispersión correspondiente a ondas S. Sustituyendo 2.16 en 2.14 se obtiene la longitud de los ejes.

2.3.2 El método variacional.

Otra manera de llegar a la solución de la ecuación GP 2.8 es por medio de cálculo variacional para determinar una forma aproximada del estado base. Si no existieran interacciones interatómicas, la función de onda para el estado base correspondiente al potencial 2.10 consistiría en una gaussiana de la forma:

$$\Psi_0(r) = \frac{\sqrt{N}}{\pi^{3/4}(l_1l_2l_3)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2l_1^2} - \frac{y^2}{2l_2^2} - \frac{z^2}{2l_3^2}}, \quad (2.17)$$

donde los parámetros l_1 , l_2 y l_3 son las longitudes de oscilador armónico, las cuales están definidas en función de las frecuencias del potencial 2.10:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}}, \\ l_2 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_2}}, \\ l_3 &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_3}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Podemos imaginar que las colisiones con dispersión $a > 0$ hacen que la distancia promedio entre partículas aumente, provocando que el condensado se expanda sin alterar drásticamente su forma original. Así pues, se postula una Gaussiana como función de prueba, con parámetros variacionales a_1, a_2 y a_3 que ocupan el lugar de las longitudes del oscilador armónico 2.18:

$$\Psi(a_1, a_2, a_3) = \frac{\sqrt{N}}{\pi^{3/4}(a_1 a_2 a_3)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2a_1^2} - \frac{y^2}{2a_2^2} - \frac{z^2}{2a_3^2}}. \quad (2.19)$$

Al sustituir esta función de prueba en la ecuación del valor esperado de la energía 2.7 se obtiene:

$$E(a_1, a_2, a_3) = N \sum_{i=1}^3 \hbar \omega_i \left(\frac{l_i^2}{4a_i^2} + \frac{a_i^2}{4l_i^2} \right) + \frac{N^2 g}{2(2\pi)^{3/2} a_1 a_2 a_3}, \quad (2.20)$$

que se minimiza con respecto a las 3 variables a_1, a_2 y a_3 . Para simplificar se definen las variables adimensionales $\alpha_i = a_i/l_i$ con $i = 1, 2$ y 3 , dando como resultado un sistema de 3 ecuaciones acopladas:

$$\frac{1}{2} \hbar \omega_i \left(\alpha_i^2 - \frac{1}{\alpha_i^2} \right) + \frac{N^2 g}{2L^3 (2\pi)^{3/2} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

en donde $i = 1, 2$ y 3 , $L = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ es una longitud promedio y $\omega_0 = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$ es el promedio geométrico de las frecuencias de la trampa.

Si suponemos que el número de partículas en la trampa es lo suficientemente grande como para que la energía de interacción sea mucho mayor a $\hbar \omega_i$ para toda i , entonces es posible despreciar el término $1/\alpha_i^2$. Esto permite escribir las soluciones del sistema de ecuaciones 2.21 en forma cerrada, lo cual no es posible para las soluciones exactas. El resultado de resolver este sistema de ecuaciones para las α_i con esta aproximación es:

$$\alpha_i^5 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N a_s}{L} \left(\frac{\omega_0}{\omega_i} \right)^5, \quad (2.22)$$

y recordando que $\alpha_i = a_i/l_i$, tenemos que las longitudes variacionales son:

$$a_i^5 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N a_s}{L} l_i \left(\frac{\omega_0}{\omega_i} \right)^5. \quad (2.23)$$

Contar con expresiones cerradas para a_i es útil ya que es posible derivar a su vez expresiones para la energía y el potencial químico. Todas estas expresiones simplifican

los cálculos de los coeficientes del modelo aquí desarrollado. Podemos saber cuantas partículas debe tener el sistema para que las expresiones cerradas 2.23 sean una buena aproximación. Para esto se define el error relativo como la diferencia entre las soluciones exactas, denotadas como $h_i(N)$ para $i = 1, 2, 3$, y la soluciones aproximadas a_i para $i = 1, 2, 3$ dadas por 2.23, divididas por $h_i(N)$:

$$\zeta_i(N) = \frac{h_i(N) - a_i(N)}{h_i(N)} = 1 - \frac{a_i(N)}{h_i(N)}. \quad (2.24)$$

El error relativo total $\zeta(N) = (\zeta_1(N)\zeta_2(N)\zeta_3(N))^{\frac{1}{3}}$ nos da una idea del grado de precisión de esta aproximación. En la figura 2.2 se puede apreciar el comportamiento de la función $\zeta_1(N)$. Esta función disminuye conforme el número de partículas N aumenta, tendiendo a cero en forma asintótica. Para $N < 25$ la función de error es mayor a 0.3, lo cual indica que la formula 2.23 difiere de la solución exacta por más de treinta por ciento del valor de esta última. Si se desea que el valor de $\zeta(N)$ sea de 0.20, indicando que 2.22 tiene un error de 20 por ciento, entonces es suficiente con que el sistema tenga 50 partículas. Más adelante se verá que, cualitativamente, el comportamiento es muy similar en sistemas con $N = 50$ y $N = 500$, indicando que un error de 20 por ciento es aceptable.

Al sustituir 2.23 en 2.20 obtenemos que la energía total por partícula es:

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/5} \left(\frac{Na_s}{L}\right)^{2/5} \hbar\omega_0, \quad (2.25)$$

y el potencial químico es:

$$\mu = \frac{7}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/5} \left(\frac{Na_s}{L}\right)^{2/5} \hbar\omega_0. \quad (2.26)$$

En la figura 2.3 se ilustra la forma de la funciones 2.12 y 2.19. En la aproximación de Thomas-Fermi, la función de onda es cero fuera de una región acotada por 2.14 y su valor máximo es μ/g . Por otro lado, la función de onda calculada con el método variacional decae asintóticamente si r tiende a infinito.

En el capítulo siguiente se analizará un sistema de un BEC atrapado en un pozo doble de potencial, el cual será tratado como dos condensados en pozos de potencial armónicos de la forma 2.10. Esta clase de potenciales tiene dos valores libres: la localización del centro del pozo armónico x_0 y su altura con respecto al cero de la energía V_0 . En general los valores de los centros de los pozos armónicos, etiquetados como x_{0a} y x_{0b} simplemente son los mínimos del pozo doble original. Si el pozo doble es simétrico, las alturas de los mínimos de los pozos armónicos, etiquetadas como V_{0a} y V_{0b} , son iguales. En este caso es posible redefinir la energía de referencia de nuestro sistema de tal forma que Va y Vb sean cero. Para un pozo asimétrico tenemos que V_{0a} y V_{0b} son diferentes, pero obtendremos los mismos resultados si estudiamos un sistema donde

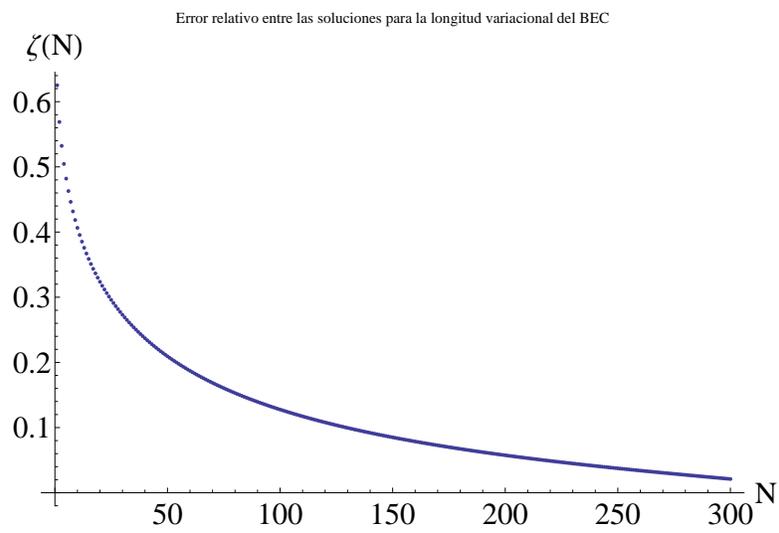


Fig. 2.2: Error relativo $\zeta(N)$ graficado contra el número de partículas. Nótese que este error relativo decae conforme N aumenta. Si se desea que la fórmula 2.23 tenga un error menor a 0.2, es necesario que el sistema tenga más de 50 partículas

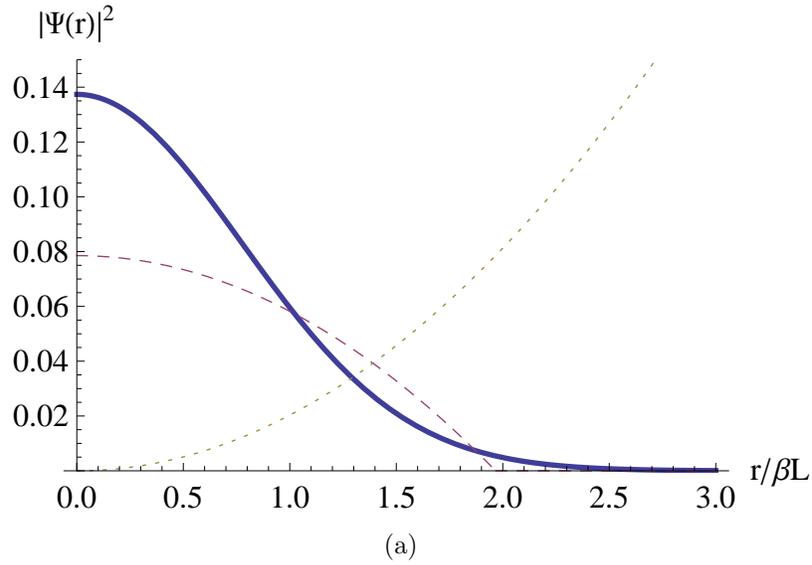


Fig. 2.3: Comparación entre las soluciones de la ecuación de Gross-Pitaevskii para un oscilador isotrópico. La solución de Thomas-Fermi (graficada en segmentos) termina abruptamente, mientras que la solución variacional (línea gruesa) tiende asintóticamente a cero. El potencial armónico $V(r)/g$ está graficado con una línea punteada. Las funciones de onda están dadas en unidades de $N^{1/2}/(\beta a)^{3/2}$, donde $\beta = (Na_s/L)^{1/2}$ y a es la longitud variacional 2.23. El potencial químico es el valor máximo de la función de onda de Thomas-Fermi

la menor de las dos sea cero y a la otra le asignamos un valor $\delta = V_{0_a} - V_{0_b}$. Ahora, hay que recordar que este parámetro δ influye en el potencial químico del sistema:

$$\begin{aligned}\mu_a &= \mu[N_a], \\ \mu_b &= \mu[N_b] + \delta,\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde $\mu[N_a]$ y $\mu[N_b]$ están dados por 2.16 o por 2.26, según la aproximación escogida. Estos están evaluados en los números de partículas N_a y N_b respectivamente. Aunque N_a y N_b serán determinados hasta el capítulo cuatro, sabemos que el pozo con mayor elevación contiene menos partículas y por lo tanto: $N_a > N_b$ [19]. Los potenciales químicos 2.27 representan a la energía necesaria para introducir una partícula a cada pozo. Por esto la diferencia entre estos potenciales químicos de cada pozo no debe ser muy grande ya que, de lo contrario, uno de estos carecería completamente de partículas. Con tal de evitar esto, al parámetro δ deberá ser pequeño comparado con μ_a , por ejemplo: $\delta = 0.1\mu_a$.

3. LA DESCRIPCIÓN CUÁNTICA DEL BEC

Para el análisis cuántico de un sistema de muchas partículas se introducen los operadores de campo bosónicos $\hat{\Psi}(r)$ y $\hat{\Psi}^\dagger(r)$, que aniquilan y crean partículas en el punto r respectivamente. Esta clase de objetos son estudiados en teoría cuántica de campos. No revisaremos los detalles de esta con mucha profundidad ya que esto está más allá del objetivo de esta tesis. Es suficiente con recordar el hecho de que, en mecánica clásica de medios continuos, un campo $\pi(r)$ es conjugado canónico de un campo $\eta(r)$ si el corchete de Poisson entre ellos es [20]:

$$\{\eta(r), \pi(r')\} = \delta(r - r'), \quad (3.1)$$

en contraste con la mecánica de variables discretas, donde el corchete de Poisson entre dos variables conjugadas es 1. Cuando $\eta(r)$ y $\pi(r')$ son promovidos a operadores, el corchete de Poisson se vuelve un conmutador en el caso de operadores de campo bosónicos y un anticonmutador para campos fermiónicos. Con estas bases, se definen los operadores de campo bosónicos $\hat{\Psi}(r)$ y $\hat{\Psi}^\dagger(r)$ de tal forma que cumplen con la relación de conmutación:

$$[\hat{\Psi}(r), \hat{\Psi}^\dagger(r')] = \delta(r - r'). \quad (3.2)$$

Así como una función de onda puede ser expresada como una expansión en una base de funciones $\{\phi_j(r)\}$ con coeficientes A_j :

$$\psi(r) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \phi_j(r), \quad (3.3)$$

de forma análoga, los operadores bosónicos pueden ser expresados como una expansión en una base de operadores \hat{a}_j (de los que se hablara más adelante):

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(r) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(r) \hat{a}_j, \\ \hat{\Psi}^\dagger(r) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^*(r) \hat{a}_j^\dagger, \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde el lugar de los coeficientes es ocupado por las funciones $\alpha_j(r)$. Estas funciones de onda son una base y cumplen que:

$$\int_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(r)|^2 = 1. \quad (3.5)$$

La base del espacio de Hilbert está dada por estados definidos por el número de partículas que hay en cada estado disponible:

$$|n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots |n_j\rangle \dots, \quad (3.6)$$

donde n_j es el número de partículas ocupando en el estado j -ésimo y \otimes es el producto exterior. Esta base es ortonormal y completa:

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2, \dots, n_j \dots | n'_1, n'_2, \dots, n'_j \dots \rangle &= \delta_{n_1, n'_1} \delta_{n_2, n'_2} \dots \delta_{n_j, n'_j}, \\ \sum_{n_1, n_2, \dots, n_j, \dots} |n_1, n_2, \dots, n_j \dots\rangle \langle n_1, n_2, \dots, n_j \dots| &= 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Los operadores bosónicos \hat{a}_j^\dagger y \hat{a}_j son los que conforman la base de los operadores principales definida en 3.4, los cuales crean y aniquilan una partícula en el estado j -ésimo. Estos operadores cumplen con las reglas de conmutación $[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] = \delta_{j,k}$, reglas que cumplen los operadores de creación y aniquilación de un oscilador armónico. La acción de los operadores \hat{a}_j y \hat{a}_k^\dagger sobre estados de la base es:

$$\begin{aligned} \hat{a}_j |n_1, n_2, \dots, n_j \dots\rangle &= \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1 \dots\rangle, \\ \hat{a}_j^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j \dots\rangle &= \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1 \dots\rangle, \\ \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j |n_1, n_2, \dots, n_j \dots\rangle &= n_j |n_1, n_2, \dots, n_j + 1 \dots\rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

en donde $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$ es denominado como el operador de número correspondiente al estado j -ésimo. Como los operadores correspondientes a diferentes modos conmutan entre sí, entonces los estados propios totales 3.6 son simultáneamente estados propios de $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \forall j$.

El operador Hamiltoniano del sistema en términos de los operadores de campo $\hat{\Psi}(r)$ y $\hat{\Psi}^\dagger(r')$ es [22]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= - \int \frac{\hbar^2}{2m} \hat{\Psi}^\dagger(r) \nabla^2 \hat{\Psi}(r) dr + \int \hat{\Psi}^\dagger(r) \mathcal{V}(r) \hat{\Psi}(r) dr \\ &+ \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}^\dagger(r') U(r - r') \hat{\Psi}(r') \hat{\Psi}(r) dr, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde $\mathcal{V}(r)$ es el potencial total del sistema y $U(r-r')$ es un potencial de interacción por pares. Nótese que este operador tiene una forma muy parecida a la de un valor promedio del Hamiltoniano de la mecánica cuántica usual. A causa de esto, la descripción desarrollada en esta sección es conocida como “segunda cuantización”, siendo la cuantización del campo electromagnético una de sus aplicaciones más comunes. Es posible transformar al Hamiltoniano 3.9 en una funcional que depende de $\hat{\Psi}(r)$ y $\nabla\hat{\Psi}(r)$. Para esto se realiza una integración por partes en el término de energía cinética y se introduce explícitamente la forma del potencial de interacción $U(r-r') = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}\delta(r-r')$. El operador resultante es:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\hat{\Psi}^\dagger(r)\nabla\hat{\Psi}(r)dr + \int \hat{\Psi}^\dagger(r)\mathcal{V}(r)\hat{\Psi}(r)dr + \frac{g}{2} \int |\hat{\Psi}(r)|^4 dr, \quad (3.10)$$

3.1 La aproximación de 2 modos

En mecánica cuántica estándar, un sistema de dos niveles es aquel cuyo espacio de Hilbert solo tiene dos dimensiones. Dicho de otra forma, el espacio del Hilbert está generado por una base de dos estados linealmente independientes. En general esta clase de sistemas son subespacios de un espacio de dimensión mayor, cuyas dimensiones adicionales son ignoradas. Ejemplos de estos sistemas serían un átomo con dos niveles de energía en interacción con un campo electromagnético, o sistemas con espín 1/2 en los cuales se ignoran las coordenadas espaciales.

Aquí el sistema consiste en un BEC confinado en un potencial de pozo doble. Usualmente este sistema es aproximado por dos BECs que interactúan entre sí y que están atrapados en pozos de potencial armónicos 2.10 centrados en los mínimos del potencial de pozo doble [6]. El pozo de la derecha será etiquetado con la letra (A) y el de la izquierda con (B). La base del espacio de Hilbert para este sistema es de la forma :

$$|n_{A_1}, n_{A_2}, \dots, n_{A_j}, \dots\rangle \otimes |n_{B_1}, n_{B_2}, \dots, n_{B_j}, \dots\rangle = |n_{A_1}\rangle \otimes |n_{A_2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{A_j}\rangle \dots \otimes |n_{B_1}\rangle \otimes |n_{B_2}\rangle \otimes \dots \otimes |n_{B_j}\rangle \dots, \quad (3.11)$$

y el operador de campo 3.4 se escribe como:

$$\hat{\Psi}(r) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(r)\hat{a}_i + \beta_j(r)\hat{b}_j, \quad (3.12)$$

donde $\alpha_i(r)$ y $\beta_j(r)$ son funciones de onda localizadas en los pozos A y B correspondientes a las energías E_{a_j} y E_{b_j} . El operador \hat{a}_i aniquila una partícula con función de onda $\alpha_i(r)$ en A y \hat{b}_i aniquila una partícula con función de onda $\beta_i(r)$ en B. La aproximación de dos modos consiste en considerar únicamente a los dos modos con energías más bajas y suponer que los modos correspondientes a otros estados excitados no son accesibles para el sistema. Para que esta aproximación sea aplicable es necesario que

los números de ocupación de los estados excitados sean muy pequeños. Se supondrá que esta condición se satisface debido a las bajas temperaturas de un BEC. Bajo esta aproximación la base del espacio de Hilbert se reduce a:

$$|n_{A_1}, 0, \dots, 0, \dots\rangle \otimes |n_{B_1}, 0, \dots, 0, \dots\rangle = |n_a\rangle \otimes |n_b\rangle, \quad (3.13)$$

donde, por simplicidad, los números de ocupación de los estados base son etiquetados como n_a y n_b . Como se desprecian los modos con energías superiores, se considera que $\alpha_i(r) = 0$ y $\beta_j(r) = 0$ para toda i y j mayores que uno. Por lo tanto, el operador de campo 3.12 se escribe como:

$$\hat{\Psi}(r) = \alpha(r)\hat{a} + \beta(r)\hat{b}, \quad (3.14)$$

donde $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son las funciones de onda correspondientes a los estados base de cada pozo y \hat{a} y \hat{b} son los operadores que aniquilan partículas en el estados $|n_a\rangle$ y $|n_b\rangle$.

Para conocer la forma explícita de 3.14 es necesario conocer $\alpha(r)$ y $\beta(r)$. En ausencia de interacciones, estas funciones serían soluciones de la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico simple. Con colisiones, las ecuaciones de Schrödinger que determinan a estas funciones incluyen ahora un término de la forma $U(r - r')$. Este problema fue resuelto en el capítulo dos, donde se mostró que la ecuación de Gross Pitaevskii 2.8 nos da la solución al problema de un sistema con interacciones internas. Por lo tanto, es adecuado suponer que $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son soluciones de la ecuación GP. No es práctico tratar de escribir $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ como combinaciones lineales de funciones propias del oscilador armónico, ya que estas tendrían un número infinito de términos.

La suposición de que $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son soluciones de la ecuación GP está respaldada en la literatura (ver por ejemplo [6], [7] y [23]). En especial, en [7] se muestra que esta suposición está de acuerdo con soluciones numéricas de la ecuación GP dependiente del tiempo. Sin embargo, ellos utilizan combinaciones simétricas y antisimétricas de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ como soluciones de la ecuación GP, como se explicará en la siguiente sección.

3.2 Los modelos cuánticos de dos modos

3.2.1 El modelo canónico o estándar

El llamado modelo canónico o modelo de Bose-Hubbard es el modelo cuántico para un BEC de dos modos más común en la literatura. Esto se debe a que es un modelo muy simplificado pero que contiene buena parte de la física del problema [24]. Para deducirlo se parte de que el potencial $\mathcal{V}(r)$ que confina al BEC es un pozo doble simétrico con mínimos en $r_1 = (-d, 0, 0)$ y $r_2 = (d, 0, 0)$. La simetría del potencial permite fijar la energía cero de tal forma que: $V(r_{1(2)}) = 0$. El potencial de pozo doble total $\mathcal{V}(r)$ se descompone en aproximaciones parabólicas $\tilde{V}^{(1)}(r) = V_{osc}(r - r_1)$ y $\tilde{V}^{(2)} = V_{osc}(r - r_2)$, donde $V_{osc}(r)$ está dado por la ecuación 2.10 [6].

Se denota como $u_0(r)$ a la solución de la ecuación de Schrödinger para el potencial $\tilde{V}_{osc}(r)$ con energía E_0 . Por lo tanto, las soluciones para los modos locales de cada pozo son $\alpha(r) = u_0(r - r_1)$ y $\beta(r) = u_0(r - r_2)$, las cuales cumplen que:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\alpha(r) + \tilde{V}^{(1)}(r)\alpha(r) &= E_0\alpha(r), \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\beta(r) + \tilde{V}^{(2)}(r)\beta(r) &= E_0\beta(r). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Estos modos locales no son ortogonales:

$$\int \alpha^*(r)\beta(r)d^3r = \epsilon, \quad (3.16)$$

en donde ϵ es la superposición entre los modos de cada pozo. Esta superposición es despreciable si suponemos que la extensión del modo $u_0(r)$ es mucho menor que la separación entre mínimos del potencial $V(r)$. Si se trata a ϵ como un parámetro perturbativo, a orden cero podemos considerar que los modos son ortogonales [6]. Cabe aclarar que todas las integrales presentes en esta tesis se realizan sobre todo el espacio a menos que se indique lo contrario.

Es posible construir combinaciones simétricas y antisimétricas de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$:

$$\Phi_{\pm}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(r) \pm \beta(r)]. \quad (3.17)$$

Las funciones $\Phi_+(r)$ y $\Phi_-(r)$ son útiles ya que son muy similares a las soluciones propias para los estado base y excitado en el potencial global $V(r)$ [6]:

$$H_0\Phi_{\pm}(r) = \left[\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + \mathcal{V}(r)\right]\Phi_{\pm}(r) = E_{\pm}\Phi_{\pm}(r), \quad (3.18)$$

donde los niveles energéticos E_{\pm} se estiman por medio del valor esperado de H_0 con respecto a Φ_{\pm} :

$$\langle \Phi_{\pm}^* | H_0 | \Phi_{\pm} \rangle = \frac{1}{2} \int (\alpha \pm \beta)^* H_0 (\alpha \pm \beta) dr \quad (3.19)$$

$$= \int |\alpha|^2 (E + \mathcal{V} - \tilde{V}^{(1)}) + \beta^* (E + \mathcal{V} - \tilde{V}^{(1)}) \alpha \quad (3.20)$$

$$+ \alpha^* (E + \mathcal{V} - \tilde{V}^{(2)}) \beta + \beta^* (E + \mathcal{V} - \tilde{V}^{(2)}) \beta dr \quad (3.21)$$

$$= E_0(1 \pm \epsilon) + \mathcal{S} + \mathcal{R}. \quad (3.22)$$

donde, por la simetría del potencial y de las funciones modales, \mathcal{S} y \mathcal{R} están definidos como:

$$\mathcal{S} = \int \alpha^*(r)[\mathcal{V}(r) - \tilde{V}^{(1)}(r)]\alpha(r)d^3r = \int \beta^*(r)[V(r) - \tilde{V}^{(2)}(r)]\beta(r)d^3r, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{R} = \int \beta^*(r)[\mathcal{V}(r) - \tilde{V}^{(1)}(r)]\alpha(r)d^3r = \int \alpha^*(r)[V(r) - \tilde{V}^{(2)}(r)]\beta(r)d^3r. \quad (3.24)$$

Si siguiendo la derivación de [6], suponemos que $\epsilon \ll 1$ y que $\mathcal{R} \gg \mathcal{S}$. Esta última suposición se debe a que $V - \tilde{V}^1$ se desvanece en la región en la que $|\alpha|^2$ esta localizada, mientras que en la región complementaria donde $V - \tilde{V}^1$ tiene un valor apreciable, $|\alpha|^2$ decae exponencialmente. Esto no sucede con el producto $\alpha^*\beta$, el cual esta localizado en una región más extensa que $|\alpha|^2$. Con todas estas suposiciones, la energía propia es $E_{\pm} = E_0 \pm \mathcal{R}$.

Se puede probar que las funciones $\Phi_+(r)$ y $\Phi_-(r)$ son ortogonales:

$$\begin{aligned} \int \Phi_+^*(r)\Phi_-(r)d^3r &= \int (\alpha^*(r) + \beta^*(r))(\alpha(r) - \beta(r))d^3r \\ &= \int \alpha^2(r) - \beta^2(r) - \alpha^*(r)\beta(r) + \beta^*(r)\alpha(r)dr = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde se utilizó que las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ están normalizadas a uno y se asumió que ϵ es un número real.

Los operadores de creación y aniquilación para cada modo se definen como:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \int \alpha^*(r)\hat{\Psi}(r)d^3r, \\ \hat{a}_i^\dagger &= \int \alpha(r)\hat{\Psi}^\dagger(r)d^3r, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $\Psi(r)$ es el operador de campo 3.4. Los operadores c_i son tales que $[c_i, c_j^\dagger] = \delta_{ij}$ a orden cero en ϵ . En la aproximación de dos modos, el operador de campo puede ser expresado en función de los modos localizados $\alpha(r)$ y $\beta(r)$, o de sus combinaciones simétrica y asimétrica $u_+(r)$ y $u_-(r)$:

$$\hat{\Psi}(r) = \alpha(r)\hat{a} + \beta(r)\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}([\Phi_+(r) + \Phi_-(r)]\hat{a} + [\Phi_+(r) - \Phi_-(r)]\hat{b}). \quad (3.27)$$

Si se toma el operador de dos modos 3.27 en función de Φ_{\pm} y se sustituye en 3.10, los términos de energía potencial y cinética del operador Hamiltoniano se ven como:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \int (\Phi_+(r) + \Phi_-(r))^* H_0(\Phi_+(r) + \Phi_-(r))d^3r \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &+ \int (\Phi_+(r) - \Phi_-(r))^* H_0(\Phi_+(r) - \Phi_-(r))d^3r \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &+ \int (\Phi_+(r) + \Phi_-(r))^* H_0(\Phi_+(r) - \Phi_-(r))d^3r \hat{a}^\dagger \hat{b} \\ &+ \int (\Phi_+(r) - \Phi_-(r))^* H_0(\Phi_+(r) - \Phi_-(r))d^3r \hat{b}^\dagger \hat{a}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde H_0 esta dado por la ecuación 3.18. Utilizando la propiedad de ortogonalidad 3.25 se llega a que:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= \left(\int \Phi_+(r)^* H_0 \Phi_+(r) d^3r + \int \Phi_-(r)^* H_0 \Phi_-(r) d^3r \right) (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) \\
&+ \left(\int \Phi_+(r)^* H_0 \Phi_+(r) d^3r - \int \Phi_-(r)^* H_0 \Phi_-(r) d^3r \right) (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) \\
&= (E_+ + E_-) (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) + (E_+ - E_-) (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a}) \\
&= E_0 (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}) + \mathcal{R} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})
\end{aligned} \tag{3.29}$$

El Hamiltoniano de interacción o de segundo orden se ve como:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 &= \frac{g}{2} \int |\Psi(r)|^4 d^3r = \frac{g}{2} \int (a^\dagger \alpha^*(r) + c_2^\dagger \beta^*(r))^2 (a\alpha(r) + b\beta(r))^2 d^3r \\
&\approx \frac{g}{2} \int (a^\dagger)^2 (a)^2 |\alpha(r)|^4 + (c_2^\dagger)^2 (b)^2 |\beta(r)|^4 d^3r
\end{aligned} \tag{3.30}$$

donde al pasar al segundo renglón se mantuvieron únicamente los términos de auto interacción de cada pozo. Esto se debe a que los factores que multiplican a los términos cruzados son integrales de productos de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ (por ejemplo: $\int |\alpha(r)|^2 |\beta(r)|^2 dr$), que son de segundo orden en ϵ . Por argumentos de simetría se puede decir que $\int |\alpha(r)|^4 d^3r = \int |\beta(r)|^4 d^3r = \int |u_0(r)|^4 d^3r$, lo que implica:

$$\frac{g}{2} \int |\Psi(r)|^4 d^3r \approx \frac{g}{2} \int |u_0(r)|^4 d^3r [(a^\dagger)^2 (a)^2 + (b^\dagger)^2 (b)^2] \tag{3.31}$$

Después de agrupar términos, el Hamiltoniano resultante es:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = E_0 (a^\dagger a + b^\dagger b) + \frac{\hbar \Omega}{2} (ab^\dagger + ba^\dagger) + \hbar \kappa ((a^\dagger)^2 a^2 + (b^\dagger)^2 b^2), \tag{3.32}$$

en donde $\Omega = 2\mathcal{R}/\hbar$ es la frecuencia de oscilación entre los dos modos, dada por la separación entre las energías propias E_\pm , y $\kappa = (g/2\hbar) \int |u_0(r)|^4 dr$.

El operador del número de partículas total es $\hat{N} = a^\dagger a + b^\dagger b$. Por construcción, cada uno de los términos del Hamiltoniano 3.32 conmutan individualmente con \hat{N} , lo cual nos dice que esta es una constante de movimiento. Además, es conveniente definir los operadores de Schwinger:

$$\begin{aligned}
J_x &= \frac{1}{2} (a^\dagger b + b^\dagger a), \\
J_y &= \frac{i}{2} (a^\dagger b - b^\dagger a), \\
J_z &= \frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

los cuales cumplen las reglas de conmutación usuales para operadores de momento angular:

$$[J_m, J_n] = i\hbar\epsilon_{lmn}J_l. \quad (3.34)$$

Se define el operador de momento angular total o invariante de Casimir como análogo a un sistema con momento angular $j = N/2$:

$$J^2 = \frac{\hat{N}}{2}\left(\frac{\hat{N}}{2} + 1\right). \quad (3.35)$$

La nueva base está formada por los estados propios comunes del operador J_z y J^2 :

$$\begin{aligned} J_z|J, m\rangle &= m|J, m\rangle, \\ J^2|J, m\rangle &= J(J+1)|J, m\rangle, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde m es valor propio de J_z que representa la diferencia entre el número de partículas de un modo y del otro. Los operadores de escalera se definen como:

$$\begin{aligned} J_+ &= a^\dagger b, \\ J_- &= a^\dagger b, \end{aligned} \quad (3.37)$$

cuya acción es:

$$\begin{aligned} J_+|j, m\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}|j, m+1\rangle, \\ J_-|j, m\rangle &= \sqrt{(j-m+1)(j+m)}|j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Escribiendo 3.32 en términos de los operadores 3.33 se obtiene:

$$\hat{H} = \hbar\Omega\hat{J}_x + 2\hbar\kappa\hat{J}_z^2, \quad (3.39)$$

donde el término E_0N no es considerado ya que es una constante. Es conveniente clasificar al Hamiltoniano 3.39 según el orden de magnitud de la relación κ/Ω [17, 23]:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\Omega} &< \frac{1}{N} && \text{(Rabi)}, \\ \frac{1}{N} &< \frac{\kappa}{\Omega} < N && \text{(Josephson)}, \\ N &< \frac{\kappa}{\Omega} && \text{(Fock)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

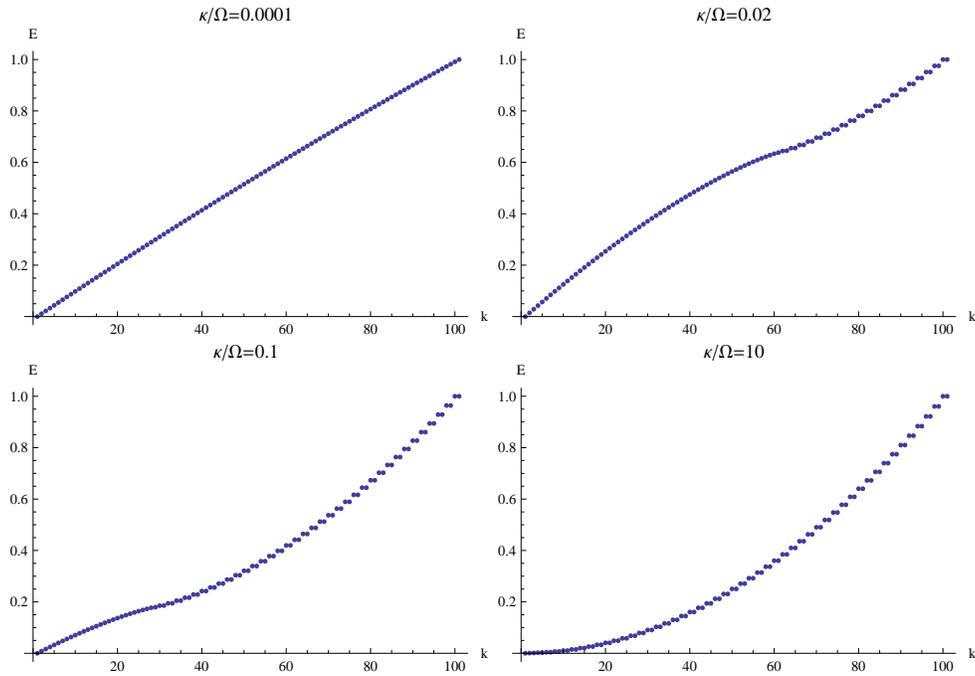


Fig. 3.1: Espectro de energía para el modelo canónico para diferentes valores de κ/Ω con $N=100$ y $J=50$. Los valores están ordenados de menor a mayor con respecto a una etiqueta k , la cual va de 0 a 101. Nótese que número de estados degenerados aumenta conforme el cociente κ/Ω aumenta

Esta clasificación es importante ya que los regímenes 3.40 están relacionados con las propiedades físicas de los sistemas descritos por 3.39. Las fluctuaciones entre los números de partículas de cada pozo, dadas por $(\Delta J_z)^2$, son fuertes en el régimen de Rabi pero disminuyen en gran medida en el régimen de Josephson, desapareciendo en el régimen de Fock [23]. En el régimen de Rabi, las interacciones son prácticamente inexistentes y el sistema puede ser visto como N partículas independientes entre sí. Además, el estado base está dado por una distribución de Poisson en la base $|j, m\rangle$. En el régimen de Fock, la energía de interacción es dominante, y como no hay fluctuaciones, el sistema tiene un número bien definido de átomos en cada pozo.

Transitar entre los regímenes puede ser relativamente fácil si, por ejemplo, se ajusta la altura de la barrera que divide al pozo doble. Esto se debe a que κ solo depende de la interacción entre las partículas de un mismo pozo mientras que Ω es altamente sensible a la altura de la barrera. Es posible que la primera realización experimental realizada en el MIT en 1997 corresponda al régimen extremo de Fock [17]. Al realizarse cierta transformación canónica al Hamiltoniano 3.39, en el régimen de Rabi este se vuelve equivalente al de un péndulo cuya longitud depende del momento angular; mientras que en Fock y Josephson la longitud del péndulo está fija. Esto se verá con más detalle en el capítulo cinco.

La diferencia entre los regímenes es evidente en las figuras 3.1, donde se ilustran los espectros energéticos de 3.39 graficados para diferentes valores del cociente κ/Ω . Las energías están ordenadas de menor a mayor y re-escaladas de tal forma que su rango va de cero a uno. El eje horizontal de las gráficas está dado en términos de una etiqueta "k" que ordena a las energías de menor a mayor, es decir, $E_k < E_{k+1} \quad \forall k$. El valor máximo de k es el mismo valor de la dimensión de la base $|j, m\rangle$, o sea que los valores de k corren desde 1 hasta $2J + 1$. En la figura 3.1 k va de 1 a 101. En la primer figura, correspondiente al régimen de Rabi ($\kappa/\Omega=0.0001$), el espectro consiste de energías equidistantes similares a los estados propios de J_x , cuya contribución es proporcional a Ω . En las siguientes dos figuras, correspondientes al régimen de Josephson ($\kappa/\Omega=0.02$ y $\kappa/\Omega=0.1$), podemos observar la aparición de parejas de energías con valores muy cercanos, a las cuales llamaremos degenerados, en la región superior del espectro. Esta región aumenta su tamaño conforme aumenta el valor del cociente κ/Ω . Finalmente, en la cuarta figura, correspondiente al régimen de Fock ($\kappa/\Omega=10$), los estados degenerados ocupan la totalidad del espectro. Esto se debe a que la contribución de J_z^2 , proporcional a κ , es predominante en este régimen, haciendo despreciable la contribución de J_x .

3.2.2 Refinamientos del modelo

En [7] se explora el rango de validez del modelo de dos modos canónico, al cual llaman "Standard 2 Mode (S2M) model", y se desarrolla un modelo al cual llaman "Improved 2 Mode (I2M) model" que es aplicable a condiciones más diversas, como interacciones interatómicas más fuertes. Las ecuaciones que surgen de ambos modelos tienen la misma forma pero su parametrización es distinta. Esto se debe a que el I2M incluye términos a segundo orden en el producto de las funciones que son despreciados en el S2M. Además, se argumenta que si el número de partículas es lo suficientemente grande entonces la repulsión entre ellas provocará que la función de onda aumente su extensión. Por tal motivo los parámetros del modelo I2M deben depender del número de partículas N , en contraste con los parámetros del S2M que son considerados como constantes. Se comparan los resultados obtenidos para las frecuencias de tunelaje entre los dos pozos con los modelos de dos modos, modelos multi-modales y la solución numérica de la TDGPE 2.9. Ambos modelos de dos modos se desvían de los resultados de la TDGPE, pero el acuerdo es más persistente con los resultados del modelo I2M, mientras que los del modelo S2M divergen de la solución numérica conforme aumenta la intensidad de las colisiones. Se muestra que el modelo I2M aplicado a experimentos permite calcular las frecuencias del tunelaje de partículas con un error menor a la incertidumbre experimental, mientras que el modelo S2M presenta el fenómeno conocido como "self-trapping", en el que la función de onda permanece localizada en uno de los pozos de potencial. Todos estos resultados del modelo I2M son obtenidos sin cuantizar el número de partículas, aunque también se deduce una versión del modelo en segunda cuantización.

Para derivar el modelo I2M en segunda cuantización se define una función simétrica $\Phi_+ = [\alpha(r) + \beta(r)]/\sqrt{2}$ y otra antisimétrica $\Phi_- = [\alpha(r) - \beta(r)]/\sqrt{2}$, en donde $\alpha(r)$

y $\beta(r)$ son las funciones de onda localizadas en cada pozo y normalizadas a 1. En términos de estas funciones, la aproximación de dos modos 3.14 en el modelo I2M se ve como:

$$\hat{\Psi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_+ + \Phi_-)\hat{c}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_+ - \Phi_-)\hat{c}_2. \quad (3.41)$$

Se usan funciones simétricas y antisimétricas ya que esto provoca que una buena cantidad de las integrales se anulen:

$$\begin{aligned} \int \Phi_+ \Phi_- dr &= \int [|\alpha|^2 - |u_2|^2] dr = 0, \\ \int \Phi_+^3 \Phi_- dr &= \int [\alpha^4 + 2\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^3 - \beta^4] dr = 0, \\ \int \Phi_-^3 \Phi_+ dr &= \int [\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 2\alpha\beta^3 - \beta^4] dr = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde se uso que:

$$\begin{aligned} \int |\alpha|^k dr &= \int |\beta|^k dr, \\ \int \alpha^3 \beta dr &= \int \alpha \beta^3 dr, \end{aligned} \quad (3.43)$$

relaciones que provienen de la simetría del problema. Se puede ver que las integrales 3.42 se desvanecen si se observa que el producto de una función simétrica (Φ_+) y una antisimétrica (Φ_-) elevada a una potencia impar es a su vez una función impar. Se sabe además que Φ_+ y Φ_- son buenas aproximaciones a los estados base y excitado del potencial total. Se asume entonces que Φ_+ y Φ_- satisfacen la ecuación GP estacionaria:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\Phi_{\pm}(r) + \mathcal{V}(r)\Phi_{\pm}(r) + gN|\Phi_{\pm}(r)|^2\Phi_{\pm}(r) = \mu_{\pm}\Phi_{\pm}(r) \quad (3.44)$$

donde \mathcal{V} es el potencial de doble campana y N es un parámetro clásico que ocupa el lugar del número total de partículas en el BEC (dado en términos cuánticos por $\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1 + \hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2$). Esto implica que las funciones Φ_+ y Φ_- tienen una dependencia en N . Cabe destacar que $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ no son soluciones de la ecuación 3.44, a pesar de ser combinaciones lineales de $\Phi_+(r)$ y $\Phi_-(r)$. Esto se debe a que a que 3.44 es una ecuación diferencial no lineal.

Siguiendo la derivación que se hace en [7], al sustituir 3.41 en el Hamiltoniano 3.10, se obtiene que los términos de primer orden son:

$$\begin{aligned}
H_{1I2M} &= \frac{1}{2} \left[\left(\int (\Phi_+ + \Phi_-) H_0 (\Phi_+ + \Phi_-) dr \right) a^\dagger a \right. \\
&+ \left(\int (\Phi_+ - \Phi_-) H_0 (\Phi_+ - \Phi_-) dr \right) b^\dagger b \\
&+ \left(\int (\Phi_+ + \Phi_-) H_0 (\Phi_+ - \Phi_-) dr \right) a^\dagger b \\
&+ \left. \left(\int (\Phi_+ - \Phi_-) H_0 (\Phi_+ + \Phi_-) dr \right) b^\dagger a \right], \tag{3.45}
\end{aligned}$$

donde $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mathcal{V}(r)$. Utilizando las ecuaciones de Gross-Pitaevskii 3.44 sabemos que $H_0 \Phi_\pm(r) = (\mu_\pm - gN |\Phi_\pm(r)|^2) \Phi_\pm(r)$. Aplicamos esta propiedad de las funciones $\Phi_\pm(r)$ sobre los coeficientes que multiplican a $a^\dagger a$ (signo positivo) y a $b^\dagger b$ (signo negativo):

$$\int (\Phi_+ \pm \Phi_-) H_0 (\Phi_+ \pm \Phi_-) dr = \tag{3.46}$$

$$\int [\Phi_+ (\mu_+ - gN |\Phi_+|^2) \Phi_+ \pm \Phi_- (\mu_+ - gN |\Phi_+|^2) \Phi_+ \tag{3.47}$$

$$\pm \Phi_+ (\mu_- - gN |\Phi_+|^2) \Phi_- + \Phi_- (\mu_- - gN |\Phi_-|^2) \Phi_-] dr \tag{3.48}$$

$$= \mu_+ + \mu_- - gN \left(\int |\Phi_-|^4 dr + \int |\Phi_+|^4 dr \right), \tag{3.49}$$

donde los términos cruzados se desvanecen por causa de las propiedades 3.42. El procedimiento para determinar los coeficientes para $a^\dagger b$ y $b^\dagger a$ es el mismo excepto por cambios de signo en los términos que provienen de $H_0 \Phi_- = (\mu_- - gN |\Phi_-|^2) \Phi_-$. Así pues, el Hamiltoniano de colisiones a primer orden es:

$$\begin{aligned}
H_{1I2M} &= \frac{1}{2} [(a^\dagger a + b^\dagger b)(\mu_+ - \gamma_{++} + \mu_- - \gamma_{--}) \\
&+ (a^\dagger b + b^\dagger a)(\mu_+ - \gamma_{++} - \mu_- + \gamma_{--})], \tag{3.50}
\end{aligned}$$

en donde se definieron los parámetros:

$$\gamma_{ij} = gN \int |\Phi_i|^2 |\Phi_j|^2 \quad (i, j = +, -). \tag{3.51}$$

Los términos de interacción de segundo orden son:

$$\begin{aligned}
H_{2I2M} &= \frac{1}{4} (a^\dagger a^\dagger a a (+)^4 + b^\dagger b^\dagger b b (-)^4 \\
&+ (a^\dagger a^\dagger a b + a^\dagger a^\dagger b a + b^\dagger b^\dagger a a + b^\dagger a^\dagger a a) (+)^3 (-) \\
&+ (b^\dagger a^\dagger a b + b^\dagger a^\dagger b a + b^\dagger b^\dagger a a + a^\dagger b^\dagger a b + a^\dagger b^\dagger b a + a^\dagger a^\dagger b b) (+)^2 (-)^2 \\
&+ (b^\dagger b^\dagger a a + b^\dagger b^\dagger b b + b^\dagger a^\dagger b b + a^\dagger b^\dagger b b) (+)^1 (-)^3, \tag{3.52}
\end{aligned}$$

con los parámetros:

$$(+)^i(-)^j = \int (\Phi_+ + \Phi_-)^i (\Phi_+ - \Phi_-)^j dr, \quad (3.53)$$

Los parámetros $(+)^i(-)^j$ son de segundo orden con respecto a la superposición de las funciones modales y son despreciados en el modelo S2M, excepto cuando $i = j$. Al escribir $H_{I2M} = H_{0S2M} + H_{1S2M}$ en términos de los operadores de momento angular definidos en la sección anterior se obtiene:

$$\hat{H}_2 = -(B - \frac{\Delta\gamma}{2N})\hat{J}_x + \frac{A+C}{N}\hat{J}_z^2 + \frac{2C}{N}\hat{J}_x^2. \quad (3.54)$$

donde se definieron:

$$\begin{aligned} A &= \frac{10\gamma_{+-} - \gamma_{++} - \gamma_{--}}{4}, \\ B &= \Delta\mu - \frac{\Delta\gamma}{2}, \\ C &= \frac{\gamma_{++} + \gamma_{--} - 2\gamma_{+-}}{4}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

con:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \gamma_{++} - \gamma_{--}, \\ \Delta\mu &= \mu_+ - \mu_-. \end{aligned} \quad (3.56)$$

A simple vista, la forma del Hamiltoniano en el modelo I2M es muy similar a la del modelo S2M. La principal diferencia es un termino proporcional a J_x^2 , el cual ya había sido incluido en el modelo S2M sin darle la importancia debida. En el I2M, este término está multiplicado por un parámetro C llamado “interaction tunneling”, el cual disminuye la energía de tunelaje cuando hay una superposición considerable entre las funciones de onda de cada pozo. Al comparar 3.39 con 3.54 obtendremos la equivalencia entre los nuevos parámetros y los del modelo S2M:

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow B - \frac{\Delta\gamma}{2N}, \\ \kappa &\rightarrow \frac{2(A+C)}{N}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como los parámetros 3.51, 3.55 y 3.56 dependen de integrales de Φ_{\pm} , estos también dependen del parámetro N . Esto no sucede en el modelo S2M ya que éste asume que las funciones modales son simplemente las soluciones de cada pozo de potencial sin considerar colisiones. En el modelo I2M las colisiones son incluidas al utilizar funciones modales que son soluciones de la ecuación GP. Algunos resultados del modelo I2M en segunda cuantización, como su espectro energético, son mostrados en [23] y serán analizados en el siguiente capítulo.

4. EL MODELO EXTENDIDO

El principal objetivo de esta tesis es desarrollar un modelo que sea aplicable en una mayor variedad de situaciones que el modelo I2M. Este modelo será llamado el “modelo extendido de 2 modos” o “E2M”. Para deducir al modelo E2M se utilizarán directamente las funciones que representan a los modos locales $\alpha(r)$ y $\beta(r)$, las cuales están centradas en los mínimos locales de cada potencial y están normalizadas a 1. El objetivo del modelo E2M es que, a diferencia del I2M, sea aplicable también a un potencial de pozo doble asimétrico. Para determinar la forma de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ supondremos que son soluciones de la ecuación GP estacionaria:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\alpha(r) + V_1(r)\alpha(r) + g N_a|\alpha(r)|^2\alpha(r) = \mu_\alpha\alpha(r), \quad (4.1)$$

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\beta(r) + V_2(r)\beta(r) + g N_b|\beta(r)|^2\beta(r) = \mu_\beta\beta(r), \quad (4.2)$$

donde los potenciales $V_1(r)$ y $V_2(r)$ son aproximaciones armónicas alrededor de los mínimos locales del potencial de doble campana $\mathcal{V}(r)$. La función $\alpha(r)$ está centrada en uno de los mínimos del potencial, y $\beta(r)$ en el otro. Hay que aclarar que N_a y N_b no son los números de partículas en cada pozo (dados por $a^\dagger a$ y $b^\dagger b$) sino unos parámetros que están relacionados con la forma de los modos $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ y que están definidos de tal forma que son consistentes con el número total de partículas N . Por tal motivo se asume que cumplen la relación $N = N_a + N_b$.

En el modelo S2M se supone que la superposición entre $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ es pequeña. Esto permitía desprestigiar los términos segundo orden en la superposición. Al igual que en el modelo I2M, esta suposición ya no será aplicada en la derivación del modelo E2M aquí presentada, lo cual nos permite obtener resultados más generales.

Por comodidad, de aquí en adelante se omitirán los sombreros arriba de los operadores. Aplicando la aproximación de dos modos 3.14 al Hamiltoniano 3.10 se deduce que los términos de interacción de primer orden, denotados como H_1 , son:

$$\begin{aligned} H_1 &= a^\dagger a \left(\int \alpha^*(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mathcal{V}(r) \right] \alpha(r) dr \right) \\ &+ b^\dagger b \left(\int \beta^*(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mathcal{V}(r) \right] \beta(r) dr \right) \\ &+ a^\dagger b \left(\int \alpha^*(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mathcal{V}(r) \right] \beta(r) dr \right) \end{aligned}$$

$$+ b^\dagger a \left(\int \beta^*(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mathcal{V}(r) \right] \alpha(r) dr \right). \quad (4.3)$$

Como las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son solución de las ecuaciones de Gross-Pitaevskii 4.1 y 4.2, podemos usar estas ecuaciones para cambiar los términos de energía cinética que aparecen en 4.3 por términos que involucran a los potenciales externos y a los potenciales químicos, de forma similar a la que se hizo para el modelo I2M. Así pues, tenemos que H_1 se ve como:

$$\begin{aligned} H_1 &= a^\dagger a \left(\int |\alpha(r)|^2 [\mu_\alpha + \mathcal{V}(r) - V_1(r) - gN_a |\alpha(r)|^2] dr \right) \\ &+ b^\dagger b \left(\int |\beta(r)|^2 [\mu_\beta + \mathcal{V}(r) - V_2(r) - gN_b |\beta(r)|^2] dr \right) \\ &+ a^\dagger b \left(\int \alpha^*(r) [\mu_\beta + \mathcal{V}(r) - V_1(r) - gN_b |\beta(r)|^2] \beta(r) dr \right) \\ &+ b^\dagger a \left(\int \beta^*(r) [\mu_\alpha + \mathcal{V}(r) - V_2(r) - gN_a |\alpha(r)|^2] \alpha(r) dr \right), \end{aligned} \quad (4.4)$$

mientras que los términos de interacción de segundo orden, denotados como H_2 , son:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{g}{2} \left(a^\dagger a^\dagger a a \int |\alpha(r)|^4 dr + b^\dagger b^\dagger b b \int |\beta(r)|^4 dr + 4a^\dagger b^\dagger a b \int |\alpha(r)|^2 |\beta(r)|^2 dr \right. \\ &+ (2a^\dagger a^\dagger a b \int |\alpha(r)|^2 \alpha^*(r) \beta(r) dr + a^\dagger a^\dagger b b \int (\alpha^*(r))^2 \beta^2(r) dr \\ &\left. + 2a^\dagger b^\dagger b b \int \alpha^*(r) |\beta(r)|^2 \beta(r) dr + h.c. \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

El Hamiltoniano total esta dado por $H = H_1 + H_2$. Al comparar H_1 (dado por la ecuación 4.4) y H_2 (ecuación 4.5) con el Hamiltoniano más general de dos modos:

$$\begin{aligned} H_1 &= \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \lambda_1 a^\dagger b + \lambda_2 b^\dagger a \\ H_2 &= U_a a^\dagger a^\dagger a a + U_b b^\dagger b^\dagger b b + U_{ab} a^\dagger b^\dagger a b \\ &+ (\mu_1 a^\dagger a^\dagger a b + \Lambda a^\dagger a^\dagger b b + \mu_2 a^\dagger b^\dagger b b + h.c.), \end{aligned} \quad (4.6)$$

se obtienen los coeficientes en función de las integrales de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$. Los coeficientes de primer orden son:

$$\begin{aligned} \omega_a &= \int |\alpha(r)|^2 [\mu_\alpha + (\mathcal{V}(r) - V_1(r)) - gN_a |\alpha(r)|^2] dr, \\ \omega_b &= \int |\beta(r)|^2 [\mu_\beta + (\mathcal{V}(r) - V_2(r)) - gN_b |\beta(r)|^2] dr, \\ \lambda_1 &= \int \alpha^*(r) [\mu_\beta + (\mathcal{V}(r) - V_2(r)) - gN_b |\beta(r)|^2] \beta(r) dr, \\ \lambda_2 &= \int \beta^*(r) [\mu_\alpha + (\mathcal{V}(r) - V_1(r)) - gN_a |\alpha(r)|^2] \alpha(r) dr, \end{aligned} \quad (4.7)$$

y los de segundo orden:

$$\begin{aligned}
U_a &= \frac{g}{2} \int |\alpha(r)|^4 dr, \\
U_b &= \frac{g}{2} \int |\beta(r)|^4 dr, \\
U_{ab} &= 2g \int |\alpha(r)|^2 |\beta(r)|^2 dr, \\
\mu_1 &= g \int |\alpha(r)|^2 \alpha^*(r) \beta(r) dr, \\
\mu_2 &= g \int \alpha^*(r) |\beta(r)|^2 \beta(r) dr, \\
\Lambda &= \frac{g}{2} \int (\alpha^*(r))^2 \beta^2(r) dr.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para conocer los valores de estos parámetros es necesario saber la forma explícita de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ y de los potenciales $\mathcal{V}(\vec{r})$, $V_1(\vec{r})$ y $V_2(\vec{r})$. Se va a asumir que los potenciales locales son potenciales armónicos dados por la ecuación 2.10:

$$\begin{aligned}
V_1(\vec{r}) &= V_0(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{m}{2} [\omega_1^2 (x + \frac{d}{2})^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2], \\
V_2(\vec{r}) &= V_0(\vec{r} - \vec{r}_2) + \delta = \frac{m}{2} [(\omega'_1)^2 (x - \frac{d}{2})^2 + (\omega'_2)^2 y^2 + (\omega'_3)^2 z^2] + \delta,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde ω_1 , ω_2 y ω_3 son las frecuencias que caracterizan al potencial $V_1(\vec{r})$; y ω'_1 , ω'_2 y ω'_3 son las frecuencias de $V_2(\vec{r})$. El parámetro d es la separación entre los mínimos de los potenciales $V_1(\vec{r})$ y $V_2(\vec{r})$, los cuales están localizados en los puntos $\vec{r}_1 = (-d/2, 0, 0)$ y $\vec{r}_2 = (d/2, 0, 0)$. Además, $V_2(\vec{r})$ también está determinado por un parámetro δ que representa una diferencia de potencial entre los mínimos de $V_1(\vec{r})$ y $V_2(\vec{r})$, es decir, $\delta = V_2(\vec{r}_2) - V_1(\vec{r}_1)$. El potencial de pozo doble $\mathcal{V}(\vec{r})$ se construye como una función definida por partes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\vec{r}) &= V_1(\vec{r}) \text{ para } r < x_0, \\
\mathcal{V}(\vec{r}) &= V_2(\vec{r}) \text{ para } r > x_0,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde x_0 es la intersección entre $V_1(\vec{r})$ y $V_2(\vec{r})$.

La forma de $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ se obtendrá al resolver las ecuaciones 4.1 y 4.2 por medio de alguno de los métodos aproximados descritos en el capítulo dos. Debido a su simplicidad, es tentador utilizar las funciones de onda de la aproximación de Thomas-Fermi (T-F). Sin embargo, hay que notar que las funciones de onda T-F caen a cero en forma abrupta a distancias mayores a R_1 (la cual está definida por la ecuación 2.14) medidas desde su máximo (ver figura 4.1). Así pues, si los mínimos del potencial $\mathcal{V}(\vec{r})$ están separados por una distancia mayor a $2R_1$, la superposición entre las funciones de onda T-F cae a cero completamente. Esta es una gran desventaja de esta aproximación ya

que, las intensidad de las interacciones entre los BEC de cada pozo depende de la superposición que hay entre las funciones. Por esta razón se recurre a la aproximación variacional, en la cual $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ están dadas en tres dimensiones por funciones gaussianas. Dichas funciones decaen a cero de forma asintótica conforme la distancia a su centro aumenta. Estas funciones son de la forma 2.19:

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}}(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(x + \frac{d}{2})^2}{2a_1^2} - \frac{y^2}{2a_2^2} - \frac{z^2}{2a_3^2}\right], \\ \beta(r) &= \frac{1}{\pi^{\frac{3}{4}}(b_1 b_2 b_3)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(x - \frac{d}{2})^2}{2b_1^2} - \frac{y^2}{2b_2^2} - \frac{z^2}{2b_3^2}\right],\end{aligned}\quad (4.11)$$

donde a_i y b_i para $i = 1, 2, 3$ son las longitudes variacionales de la forma (2.23):

$$\begin{aligned}a_i^5 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_a a_s}{L} l_i \left(\frac{\omega_0}{\omega_i}\right)^5, \\ b_i^5 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_b a_s}{L'} l'_i \left(\frac{\omega'_0}{\omega'_i}\right)^5,\end{aligned}\quad (4.12)$$

donde $l_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}}$, $L = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$ y $\omega_0 = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{\frac{1}{3}}$ para a_i , y $l'_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega'_i}}$, $L' = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega'_0}}$ y $\omega'_0 = (\omega'_1 \omega'_2 \omega'_3)^{\frac{1}{3}}$ para b_i . Las longitudes variacionales 4.12 dependen de los números N_a y N_b pero no de las coordenadas espaciales x y z . Las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ están centradas en $\vec{r}_1 = (-d/2, 0, 0)$ y $\vec{r}_2 = (d/2, 0, 0)$ debido a que los potenciales 4.9 y 4.10 tienen sus mínimos centrados en esos mismos puntos.

Con toda esta información es posible obtener expresiones analíticas para la mayoría de los coeficientes 4.7 y 4.8. Se enumeran primero los coeficientes de segundo orden, ya que estos dependen únicamente de las funciones 4.11, y no del potencial, provocando que sus expresiones sean relativamente sencillas:

$$\begin{aligned}U_a &= \frac{g}{2(2\pi)^{3/2} a_1 a_2 a_3}, \\ U_b &= \frac{g}{2(2\pi)^{3/2} b_1 b_2 b_3}, \\ U_{ab} &= 4\Lambda = \frac{2g e^{-\frac{d^2}{a_1^2 + b_1^2}}}{\pi^{3/2} \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)}}, \\ \mu_1 &= \frac{2g\sqrt{2} b_1 b_2 b_3 e^{-\frac{3d^2}{2(a_1^2 + 3b_1^2)}}}{\pi^{3/2} \sqrt{a_1 a_2 a_3 b_1 (a_1^2 + 3b_1^2) b_2 (a_2^2 + 3b_2^2) b_3 (a_3^2 + 3b_3^2)}}, \\ \mu_2 &= \frac{2g\sqrt{2} a_1 a_2 a_3 e^{-\frac{3d^2}{2(3a_1^2 + b_1^2)}}}{\pi^{3/2} \sqrt{a_1 a_2 a_3 b_1 (3a_1^2 + b_1^2) b_2 (3a_2^2 + b_2^2) b_3 (3a_3^2 + b_3^2)}}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Los coeficientes de primer orden son:

$$\begin{aligned}\omega_a &= \chi_\alpha - 2N_a U_a, \\ \omega_b &= \chi_\beta - 2N_b U_b,\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \chi_1 - N_a \mu_1, \\ \lambda_2 &= \chi_2 - N_b \mu_2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

donde:

$$\begin{aligned}\chi_\alpha &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\beta(\mu_a + (V - V_1)) dx \right) dy \right) dz, \\ \chi_\beta &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\beta(\mu_b + (V - V_2)) dx \right) dy \right) dz, \\ \chi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha|^2(\mu_a + (V - V_1)) dx \right) dy \right) dz, \\ \chi_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\beta|^2(\mu_b + (V - V_2)) dx \right) dy \right) dz.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Las expresiones analíticas para χ_1 , χ_2 , χ_α y χ_β son excesivamente extensas y no serán mostradas aquí, con excepción de algunos casos particulares que serán analizados más adelante.

El Hamiltoniano E2M expresado en términos de los operadores de momento angular 3.33 toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}H_{E2M} &= 2[\mu_2(N - 1) + \lambda]J_x + 2(U_b - \frac{U_{ab}}{2} + \Lambda)J_z^2 + 4\Lambda J_x^2 \\ &+ (\omega_a - \omega_b)J_z + (U_a - U_b)[J_z^2 + (N - 1)J_z] \\ &+ (\mu_1 - \mu_2)[(\frac{N}{2} + J_z)J_x - J_- J_x],\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde se asumió que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ para cumplir con la hermiticidad de H_{E2M} .

Para calcular las energías propias del Hamiltoniano E2M 4.17 es necesario expresarlo en forma matricial. Dicha matriz será expresada en la base 3.36 de los operadores de momento angular definidos en 3.33, cuya forma es $|J, m\rangle$.

Así pues, los elementos de esta matriz son de la forma:

$$H_{l,m} = \langle J, l | \hat{H}_{E2M} | J, m \rangle =$$

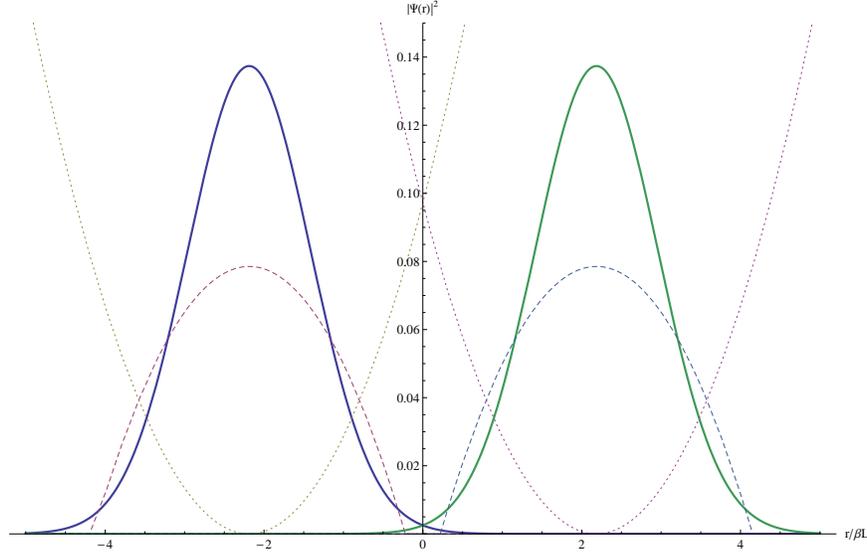


Fig. 4.1: Soluciones aproximadas de la ecuación G-P para un pozo doble de potencial (línea punteada). Las funciones dadas por el ansatz variacional (línea gruesa) tienen superposición aun a largas distancias, cosa que no sucede con Thomas Fermi (línea discontinua)

$$\begin{aligned}
& [\omega_a(J+l) + \omega_b(J-l) + U_{ab}(J^2 - l^2) \\
& + U_{aa}(J+l-1)(J+l) + U_{bb}(J-l-1)(J-l)]\delta_{l,m} \\
& + [\lambda\sqrt{(J-l+1)(J+l)} + \mu_1(J+l-1)\sqrt{(J-l+1)(J+l)} \\
& + \mu_2(J-l)\sqrt{(J-l+1)(J+l)}]\delta_{l-1,m} \\
& + [\lambda\sqrt{(J-l)(J+l+1)} + \mu_1(J+l)\sqrt{(J-l)(J+l+1)} \\
& + \mu_2(J-l-1)\sqrt{(J-l)(J+l+1)}]\delta_{l+1,m} \\
& + \Lambda\sqrt{(J-l-1)(J-l)(J+l+1)(J+l+2)}\delta_{l+2,m} \\
& + \Lambda\sqrt{(J-l+1)(J-l+2)(J+l-1)(J+l)}\delta_{l-2,m}, \tag{4.18}
\end{aligned}$$

donde $l, m = -J, -J+1, \dots, 0, \dots, J$. Finalmente se diagonaliza la matriz 4.18 para obtener sus energías propias, las cuales forman el espectro energético del Hamiltoniano E2M. Hay que recordar que $J = N/2$, donde N es el número total de partículas. La dimensión de la base $|J, m\rangle$ es $2J+1 = N+1$ y por lo tanto también será el tamaño del espectro de energías propias. La dimensión de la matriz $H_{l,m}$ será $(2J+1)^2 = (N+1)^2$.

En resumen, a partir de las funciones modales $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ y del potencial $\mathcal{V}(\vec{r})$ se calcularon expresiones analíticas de los coeficientes 4.7. Se sustituyen los valores experimentales necesarios para calcular el valor numérico de los coeficientes por medio de dichas expresiones analíticas. A partir de estos coeficientes se construye el Hamiltoniano E2M de dos modos en su forma matricial (ver ecuación 4.18) y posteriormente se

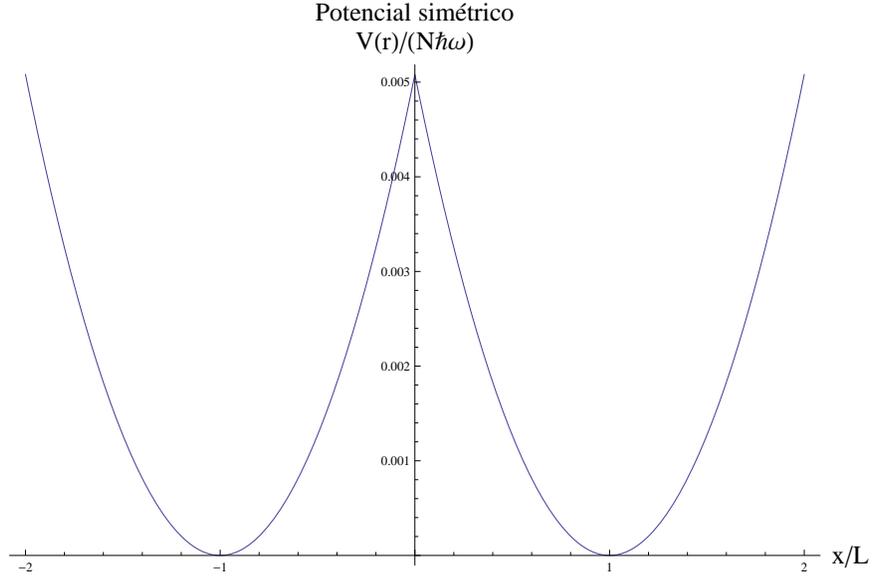


Fig. 4.2: Potencial para el caso completamente simétrico graficado para $d=L$

calculan sus valores propios. Todo lo anterior se realizó por medio de varios programas escritos en el paquete computacional simbólico *Mathematica*.

4.1 El caso simétrico

El caso simétrico es aquel en el que el potencial $\mathcal{V}(r)$ es tal que $\delta = 0$ y $\omega_i = \omega'_i \quad \forall i$. Bajo estas condiciones tenemos que $\mathcal{V}(-r) = \mathcal{V}(r)$, es decir, el potencial es simétrico (ver figura 4.2). También sucede que la intersección está en $x_0 = 0$.

La hermiticidad del operador H exige que λ_1 y λ_2 sean iguales. Para un potencial simétrico, dicha igualdad se cumple si y solamente si $N_\alpha = N_\beta$. Una consecuencia de esto es que $a_i = b_i \quad \forall i$, $\mu_a = \mu_b$ y $\beta(r) = \alpha(r - d)$. Esto provoca a su vez que $\omega_a = \omega_b$, $\mu_2 = \mu_1 = \mu$ y $U = U_a = U_b$. Para este caso, las expresiones analíticas de los coeficientes χ_a , χ_b , χ_1 y χ_2 son:

$$\begin{aligned}\chi_a = \chi_b &= \mu_a - \frac{a_1 d e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}} m \omega_1^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4} d^2 m \omega_1^2 \xi\left[\frac{d}{2a_1}\right], \\ \chi_1 = \chi_2 &= \frac{e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}} (2\sqrt{\pi} \mu_a - a_1 d m \omega_1^2)}{2\sqrt{\pi}},\end{aligned}\tag{4.19}$$

donde

$$\xi[z] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt,\tag{4.20}$$

la cual es conocida como *función de error complementaria*, la cual cumple que $\xi[0] = 1$ y que $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi[z] = 0$. Así pues, los coeficientes de primer orden en el caso completamente simétrico son:

$$\begin{aligned}\omega_a = \omega_b &= \mu_a - \frac{a_1 d e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}} m \omega_1^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{1}{4} d^2 m \omega_1^2 \xi\left[\frac{d}{2a_1}\right] - N_a \frac{g}{\sqrt{2a_1 a_2 a_3} \pi^{3/2}}, \\ \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 &= \mu_a e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}} - \frac{a_1 d m \omega_1^2 e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}}}{2\sqrt{\pi}} - N_a \frac{g e^{-\frac{3d^2}{8a_1^2}}}{(2\pi)^{3/2} a_1 a_2 a_3},\end{aligned}\quad (4.21)$$

donde $N_a = N_b = N/2$. Vale la pena señalar que si la distancia d entre los mínimos de $\mathcal{V}(r)$ crece, entonces λ decae a cero (ver figura 4.7), mientras que ω_a tiende a un valor finito:

$$\begin{aligned}\lim_{d \rightarrow \infty} \omega_a &= \mu_a - N_a \frac{g}{\sqrt{2a_1 a_2 a_3} \pi^{3/2}}, \\ \lim_{d \rightarrow \infty} \lambda &= 0.\end{aligned}\quad (4.22)$$

El Hamiltoniano cuántico E2M en términos de operadores de momento angular (4.17) para el pozo doble simétrico se reduce a:

$$H_{E2M} = 2[\mu(N-1) + \lambda]J_x + (2U - \frac{U_{ab}}{2})J_z^2 + U_{ab}J_x^2. \quad (4.23)$$

Nótese que el Hamiltoniano E2M para el pozo doble simétrico 4.23 tiene la misma forma que el Hamiltoniano 3.54 correspondiente al modelo I2M introducido en [7], salvo por la forma en la que se obtienen los coeficientes. Para el modelo E2M los regímenes de Rabi, Josephson y Fock se definen como:

$$\begin{aligned}\frac{4U - U_{ab}}{2n((N+1)\mu + \lambda)} &< \frac{1}{N^2} \quad (Rabi), \\ \frac{1}{N^2} &< \frac{4U - U_{ab}}{2n((N+1)\mu + \lambda)} < 1 \quad (Josephson), \\ 1 &< \frac{4U - U_{ab}}{2n((N+1)\mu + \lambda)} \quad (Fock).\end{aligned}\quad (4.24)$$

En la primer columna (izquierda) de la figura 4.3 se ilustran los espectros energéticos de 4.23 para condensados atrapados en un pozo doble simétrico. Estos espectros corresponden a diferentes separaciones entre los mínimos del potencial y fueron calculados con los siguientes parámetros experimentales [25]:

$$\begin{aligned}
a_s &= 6 * 10^{-7} cm, \\
m &= 1.445 * 10^{-22} g, \\
\omega_1 &= 2\pi * 132 Hz, \\
\omega_2 &= 2\pi * 132 Hz, \\
\omega_3 &= 2\pi * 373 Hz,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

que corresponden a los experimentos con Rubidio 87 realizados por Cornell y Wieman en 1995 [26]. Como se dijo arriba, estos espectros son idénticos a los obtenidos con el modelo I2M. Esto se debe a que, para el caso simétrico, tanto el Hamiltoniano 4.23 como sus coeficientes tiene la misma forma para ambos modelos, con la única diferencia de que los coeficientes del modelo E2M no son calculados con soluciones simétricas y antisimétricas. Numéricamente, la única fuente de discrepancia es la manera en la que se calculan las funciones modales. En la fuente original del modelo I2M [7], estos se calculan por medio de la resolución numérica de la ecuación GP. Lo mismo sucede en [23], donde se muestra explícitamente la forma de los espectros I2M. Así pues, las posibles diferencias entre los espectros 4.3 y los del I2M no serán analizadas aquí, ya que la resolución numérica de la ecuación GP esta fuera del objetivo de esta tesis. Las figuras de las segunda columna (centro) son los espectros para el modelo S2M que se incluyen para propósitos comparativos. Ambos espectros fueron re-escalados de tal forma que la energía del estado base es cero y el último excitado vale uno, siendo graficados con respecto a un valor k que los ordena de menor a mayor. Cabe aclarar que los espectros del modelo S2M no fueron calculados con la parametrización original de [6], si no con la parametrización del modelo E2M desarrollada en este capítulo. Esto significa que los parámetros dependen del número N y de la distancia entre los condensados, siendo además calculados con las mismas cantidades experimentales. Las figuras en la tercer columna (derecha) son una comparación cuantitativa entre los espectros I2M y S2M. Esta consiste simplemente en calcular la diferencia entre las energías propias para cada valor de k . La máxima diferencia tiene un valor de un 25 por ciento del total y ocurre a una distancia de L entre los condensados, donde L es el promedio geométrico de las longitudes del oscilador armónico definidas en 2.18. A una distancia de $6L$ la diferencia es de 0.15 por ciento. Para $d = L$ y $d = 2L$, los espectros del modelo E2M tienen únicamente estados no degenerados que corresponden al régimen de Rabi, mientras que el S2M muestra espectros como los encontrados en el régimen de Josephson. A partir de $d = 3L$ los espectros de ambos modelos tienen una región de estados equidistantes y una región superior con estados casi degenerados, aunque estas regiones son de diferente tamaño según la distancia. Estos casos corresponden al régimen de Josephson. Para distancias más grandes, como $d=5L$, el régimen correspondiente es el de Fock y se puede observar que todos los estados están organizados en parejas degeneradas.

En la figura 4.4 se muestran los espectros del modelo E2M para valores experimentales $N = 1150$, $\omega_1 = 2\pi 78$, $\omega_2 = 2\pi 66$ y $\omega_3 = 2\pi 90$ [27]. El comportamiento cualitativo es el mismo que se observa en la figura 4.3: a partir de cierta distancia el

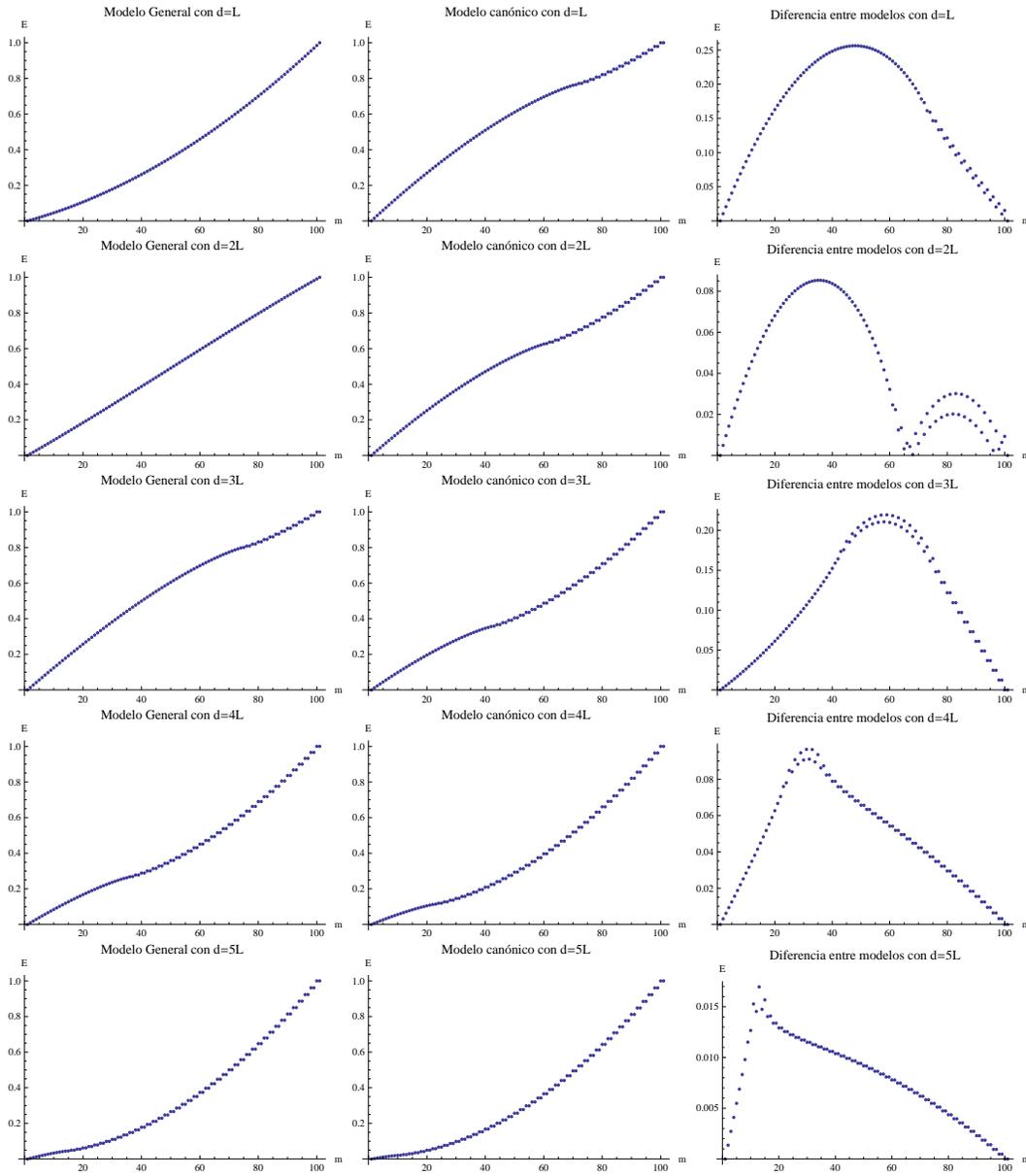


Fig. 4.3: Espectros energéticos para el caso simétrico en función de la distancia. En la primera columna (derecha) se muestran las gráficas del modelo E2M (o modelo general) para el pozo simétrico. En la segunda se muestran las gráficas del modelo S2M o canónico (también llamado modelo de Bose-Hubbard). Se observa que los espectros del modelo S2M contienen algún número de estados degenerados en cualquier situación. En cambio, el modelo I2M no tiene degeneración si ambos condensados están muy cerca uno del otro. El valor de N es 100, y por lo tanto, $J = 50$. El número m representado en el eje horizontal es un índice que ordena a los niveles de energía de menor a mayor y que va de 0 a 100. La tercer columna muestra la diferencia entre los espectros E2M y S2M.

espectro se divide en una región con energías equidistantes y otra con energías organizadas por parejas. Se incluyen recuadros con acercamientos a las diversas regiones: el recuadro de abajo muestra un acercamiento de la región inferior del espectro y el recuadro de arriba muestra un acercamiento a la región superior. Estos acercamientos son necesarios ya que para $N = 1150$ los puntos son demasiado cercanos y no es posible apreciar a simple vista las diferencias entre las energías de las distintas regiones. Por este motivo, la gráficas de capítulos posteriores serán realizadas con $N = 100$, mientras que las frecuencias seguirán siendo $\omega_1 = 2\pi 78$, $\omega_2 = 2\pi 66$ y $\omega_3 = 2\pi 90$.

4.2 El caso asimétrico

El potencial de pozo doble $\mathcal{V}(\vec{r})$ es asimétrico si el nivel de los mínimos y/o el ancho de las aproximaciones armónicas es diferente para cada pozo. Esto significa que dicho potencial esta caracterizado por al menos dos parámetros, uno de los cuales es el número δ que cambia el nivel de energía relativo entre los dos mínimos, y otro que modifica las anchuras. Las anchuras se modifican cambiando las frecuencias de los potenciales armónicos. Este caso es de interés ya que, experimentalmente, los potenciales asimétricos son mucho más fáciles de lograr que los potenciales simétricos, mientras que los estudios teóricos de dichos sistemas son escasos [8]. Aquí se presenta el estudio de un BEC confinado en un potencial asimétrico dividido en dos casos, los cuales serán analizados en las siguientes dos secciones. El primero de dichos casos será el caso en el que las frecuencias de $V_1(r)$ y $V_2(r)$ son iguales pero el parámetro δ es diferente de cero. El segundo caso consiste en frecuencias distintas para $V_1(r)$ y $V_2(r)$ con $\delta \geq 0$.

4.2.1 El caso asimétrico con $\delta > 0$ y frecuencias idénticas

Esta sección estará dedicada a estudiar el caso de un BEC en un potencial $\mathcal{V}(r)$ tal que sus componentes $V_1(r)$ y $V_2(r)$ tienen las mismas frecuencias $\omega_i = \omega'_i$ para $i = 1, 2, 3$, y cuyos mínimos tienen diferente energía potencial, es decir. $\delta > 0$. Vale la pena recordar que δ tiene unidades de energía, ya que es una constante aditiva presente en el potencial. De aquí en adelante, δ será dado en fracciones de la energía total por partícula ϵ_J , la cual esta dada por:

$$\epsilon_J = \frac{E[J]}{J} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{J a_s}{L}\right)^{\frac{2}{5}} h * \Omega * J, \quad (4.26)$$

donde $J = N/2$ y $E[J]$ es la energía total definida en la ecuación 2.25. ϵ_J representa la energía por partícula para un BEC con la mitad de las partículas del BEC total.

En este caso, tenemos que la igualdad $\lambda_1 = \lambda_2$ se cumple si y solamente si $N_a = N_b$, independientemente del valor de δ y de d (ver figura 4.6). Para explicar esto conviene recordar que $\mu_\alpha = \mu[N_a]$ y $\mu_\beta = \mu[N_b] + \delta$, donde $\mu[N]$ se define en la ecuación 2.26. Por esto, las ecuaciones de Gross-Pitaevskii para $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ se ven como:

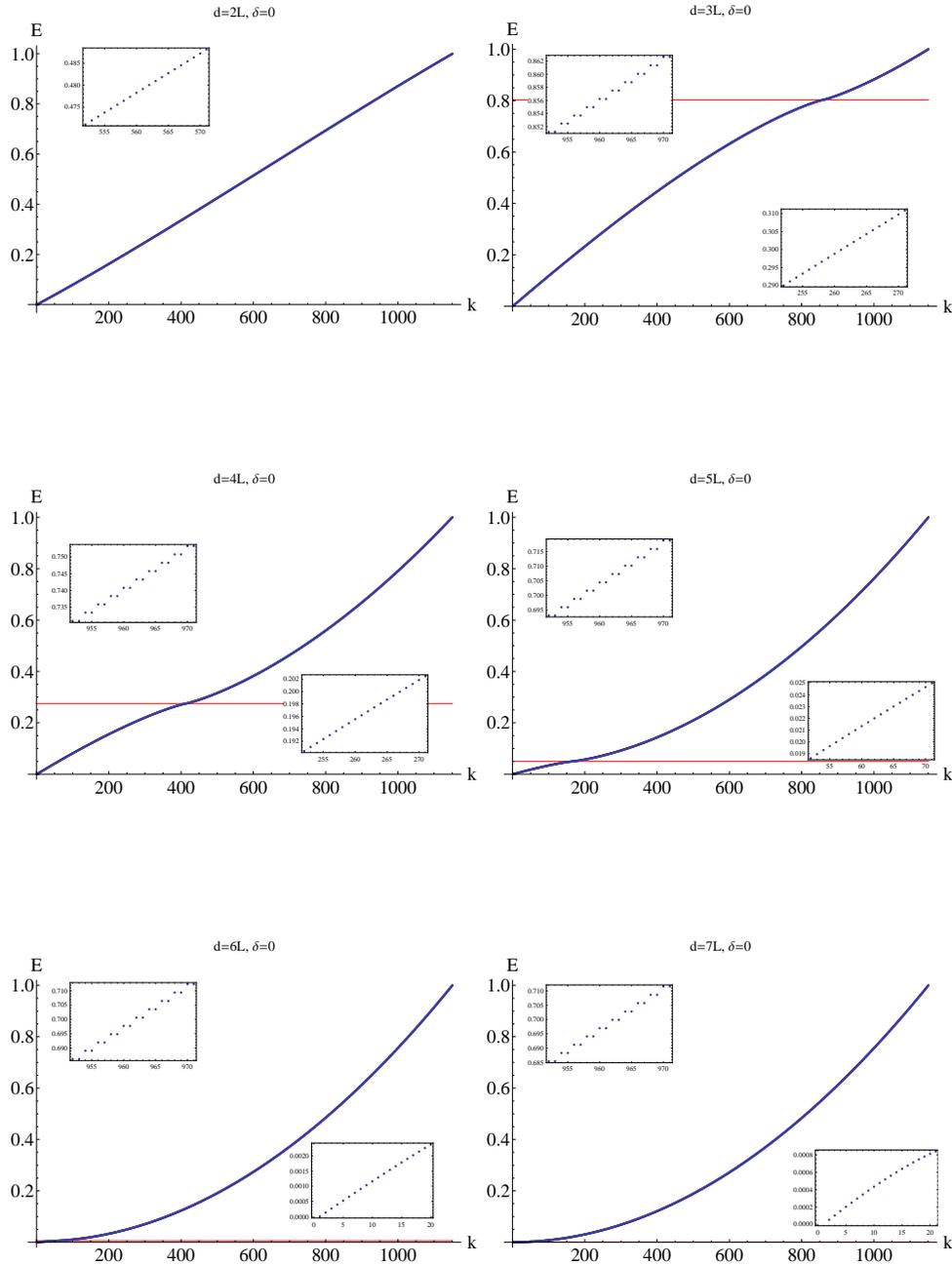


Fig. 4.4: Espectros de energía para un BEC en un pozo doble simétrico con $N = 1150$ partículas para diferentes separaciones d . Se puede observar que el comportamiento cualitativo es el mismo que cuando se tiene un sistema con $N = 100$ partículas. En el recuadro de la parte superior se muestra un acercamiento a la región con estados degenerados, la cual se encuentra arriba de la línea roja. El recuadro de la parte inferior muestra un acercamiento a la región con estados equidistantes cuyo límite superior está dado por la línea roja.

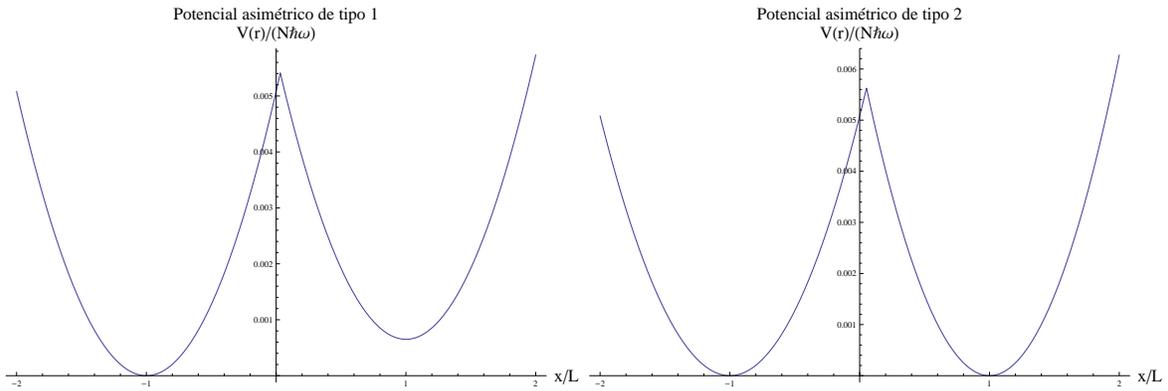


Fig. 4.5: Esquemas de un pozos asimétricos. La asimetría está dada por la diferencia entre las alturas de los mínimos, etiquetada como δ (Tipo 1) o por la anchura de la campana determinada por las frecuencias del potencial armónico (Tipo 2). La separación entre los dos mínimos está dada por d

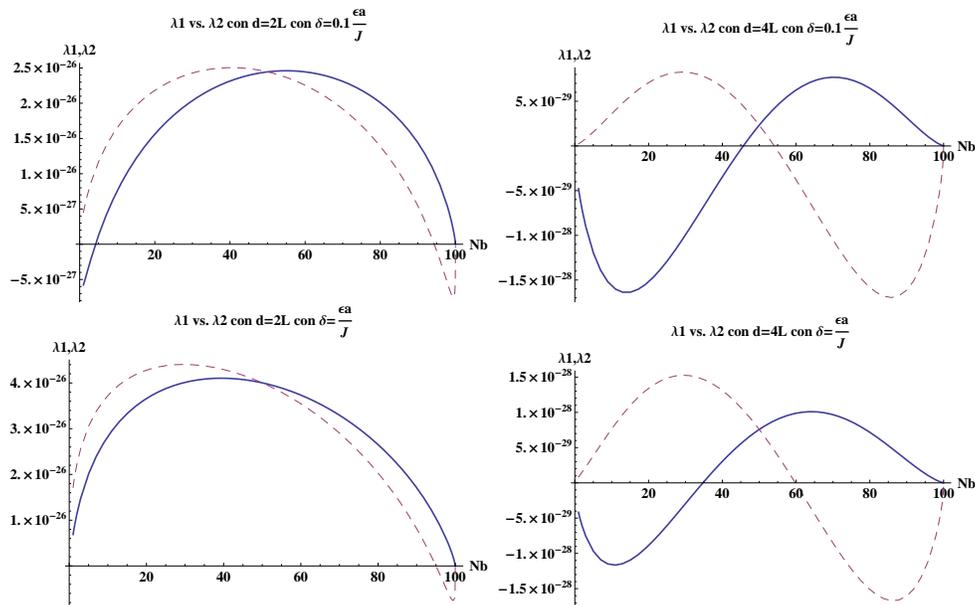


Fig. 4.6: Comportamiento de λ_1 (línea gruesa) y λ_2 (línea discontinua) vs. N_b . La intersección de ambas curvas determina el valor de N_b tal que en $\lambda_1 = \lambda_2$. Las figuras fueron realizadas con $d=2L$ y $d=4L$, para $\delta = 0.1ea/J$ y $\delta = ea/J$, y en ellas se puede notar que $N_b=N_a=50$, que es la mitad del número de partículas total. En general, para caso asimétrico, la intersección siempre es en $N_b = N/2$, independientemente del valor de δ y de la distancia entre los pozos d . Nótese que ocurre otra intersección en $N_b = 100$. Sin embargo, esta no es válida para nuestro problema, ya que N_a y N_b deben cumplir que $N_a + N_b = 100$.

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\alpha(r) + V_0(\vec{r} - \vec{r}_1)\alpha(r) + gN_a|\alpha(r)|^2\alpha(r) = \mu[N_a]\alpha(r), \quad (4.27)$$

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\beta(r) + (V_0(\vec{r} - \vec{r}_2) + \delta)\beta(r) + gN_b|\beta(r)|^2\beta(r) = (\mu[N_b] + \delta)\beta(r), \quad (4.28)$$

donde $V_0(r)$ esta definido en la ecuación 2.10. Se puede observar que el término que multiplica a δ en la ecuación 4.28 es el mismo tanto en el lado derecho como en el izquierdo. Esto hace que la ecuación 4.28 se vea como:

$$-\frac{1}{2}\nabla^2\beta(r) + V_0(\vec{r} - \vec{r}_2)\beta(r) + gN_b|\beta(r)|^2\beta(r) = \mu[N_b]\beta(r), \quad (4.29)$$

la cual es equivalente a la ecuación 4.27 excepto por una traslación. Una consecuencia directa de esto es que las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$ son tales que $\beta(r) = \alpha(r - d)$, tal y como sucede en el caso simétrico. Esto significa que $a_i = b_i \forall i$, lo que implica a su vez que $N_a = N_b$. Así pues, los coeficientes de segundo orden cumplen que: $U_a = U_b$, y $\mu_1 = \mu_2$. La integral sobre todo el espacio de $\alpha^2(V(r) - V_1(r))$ es diferente a la de $\beta^2(V(r) - V_1(r))$, causando que $\omega_a \neq \omega_b$. Al igual que en el caso simétrico, las expresiones analíticas de los coeficientes de primer orden siguen siendo suficientemente simples como para poder presentarlas aquí:

$$\lambda = e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}} \left(\mu_a - \frac{a_1 d m \omega_1^2}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\delta}{a_1 d m \omega_1^2}\right)^2} + \frac{1}{2} \delta \xi \left[\frac{\delta}{a_1 d m \omega_1^2} \right] \right) - \frac{g N_a e^{-\frac{3d^2}{8a_1^2}}}{(2\pi)^{3/2} a_1 a_2 a_3}, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \omega_a &= \mu_a - \frac{a_1 e^{-\frac{\left(d + \frac{2\delta}{d m \omega_1^2}\right)^2}}{\delta}}{4d\sqrt{\pi}} - \frac{a_1 d e^{-\frac{\left(d + \frac{2\delta}{d m \omega_1^2}\right)^2}}{m \omega_1^2}}{8\sqrt{\pi}} \\ &+ \frac{1}{2} \delta \xi \left[\frac{d + \frac{2\delta}{d m \omega_1^2}}{2a_1} \right] - \frac{1}{8} a_1^2 m \omega_1^2 \xi \left[\frac{d + \frac{2\delta}{d m \omega_1^2}}{2a_1} \right] - \frac{g N_a}{2\sqrt{2} a_1 a_2 a_3 \pi^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \omega_b &= \mu_a + \delta - \frac{a_1 d e^{-\frac{d^2}{2a_1^2} + \frac{d\left(d + \frac{4\delta}{d m \omega_1^2}\right)}{4a_1^2} - \frac{\delta^2}{a_1^2 d^2 m^2 \omega_1^4}}{2\sqrt{\pi}} m \omega_1^2 \\ &- \frac{1}{2} \delta \xi \left[\frac{d - \frac{2\delta}{d m \omega_1^2}}{2a_1} \right] + \frac{1}{4} d^2 m \omega_1^2 \xi \left[\frac{d - \frac{2\delta}{d m \omega_1^2}}{2a_1} \right] - \frac{g N_a}{2\sqrt{2} a_1 a_2 a_3 \pi^{3/2}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Al igual que en el caso simétrico, ω_a y ω_b tienen valores límites diferentes de cero cuando d tiende a infinito. Estos valores son:

$$\begin{aligned}\lim_{d \rightarrow \infty} \omega_a &= \mu_a - \frac{gN_a}{2\sqrt{2}a_1a_2a_3\pi^{3/2}}, \\ \lim_{d \rightarrow \infty} \omega_b &= \mu_a + \delta - \frac{gN_a}{2\sqrt{2}a_1a_2a_3\pi^{3/2}}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Por otro lado tenemos que λ tiende a cero si d tiende a infinito independientemente del valor de δ . Esto se puede apreciar en la figura 4.7, en la cual se muestra λ en función de d con $\delta = 0.1\epsilon_N/J$ (línea segmentada inferior), $\delta = 0.2\epsilon_N/J$ (línea segmentada superior), y la curva correspondiente a λ cuando δ tiende a infinito (línea gruesa superior). Esta presente también la curva correspondiente al caso simétrico $\delta = 0$, (línea gruesa inferior). Se puede notar que para cualquier valor de d , el valor de λ es mayor conforme δ crece, siendo la curva correspondiente al caso simétrico la que es menor a todas las demás. Esto nos dirige a la figura 4.8, en la cual se presenta a λ en función de δ para $d=2L$ (línea gruesa), $3L$ (línea delgada) y $4L$ (línea segmentada). Se aprecia que, para un valor fijo de d , λ crece conforme aumenta δ , llegando a un valor asintótico de:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \lambda = -\frac{e^{-\frac{3d^2}{8a_1^2}} gN_a}{2\sqrt{2}a_1a_2a_3\pi^{3/2}} + e^{-\frac{d^2}{4a_1^2}} \mu_a,\tag{4.34}$$

aclarando que el modelo aquí presentado deja de ser válido para valores de δ mucho mayores que ϵ_N/J . Esto se debe a que los niveles de energía involucran a δ como una constante aditiva, y si esta es muy grande la aproximación de dos modos utilizada en esta tesis deja de ser válida.

En la figura 4.9 se presentan los espectros correspondientes a este caso. En cada una de los cuadros se presentan tres espectros calculados con un valor de d fijo, pero con distintos valores de δ . Es posible observar que, para una separación entre mínimos $d = L$ los espectros son muy difíciles de distinguir. La única diferencia apreciable es que el espectro para $\delta = \epsilon_N/J$ tiene una curvatura ligeramente menor. Los espectros mostrados en las figuras subsiguientes muestran una diferencia perceptible entre los casos con distintas δ . En particular se nota que tanto el espectro simétrico $\delta = 0$ como el asimétrico con $\delta = 0.1\epsilon_N/J$ cuentan con niveles energéticos organizados por parejas. En el caso simétrico estas parejas están conformadas por energías del mismo valor o degeneradas. En contraste, los espectros calculados con $\delta = \epsilon_N/J$ no presentan dicha estructura para ningún valor de d o δ .

4.2.2 El caso asimétrico con distintas frecuencias

El caso asimétrico más general es aquel en el que las anchuras de los potenciales armónicos $V_1(r)$ y $V_2(r)$ son diferentes entre sí, lo cual afecta al potencial de doble campana $\mathcal{V}(r)$. La anchura σ de un potencial armónico $V(r)$ se define como la diferencia entre las dos soluciones de la ecuación $V(x, 0, 0) = \eta$ donde $\eta > 0$ es una constante.

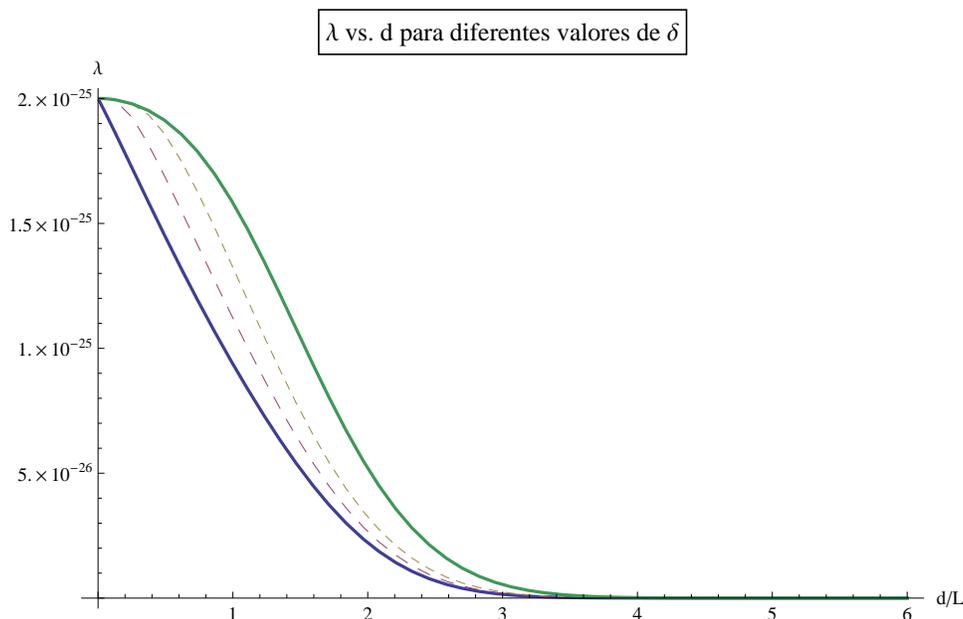


Fig. 4.7: Aquí se presentan las gráficas de la función λ con respecto a d para diferentes valores de δ . Se puede apreciar que si la distancia d entre los mínimos del potencial tiende a infinito, entonces λ tiende a cero independientemente del valor de δ .

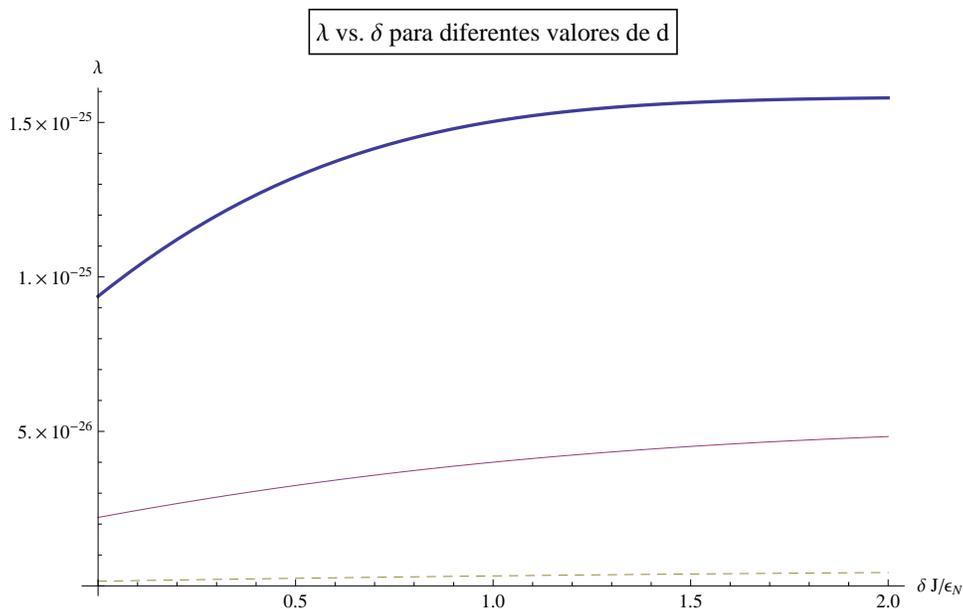


Fig. 4.8: Aquí se presentan las gráficas de la función λ con respecto a δ para $d = L$ (línea gruesa), $d = 2L$ (línea delgada) y $d = 3L$ (línea segmentada) fija. Se puede apreciar que si $\delta \rightarrow \infty$, entonces λ tiende a un valor asintótico que depende del valor de d .

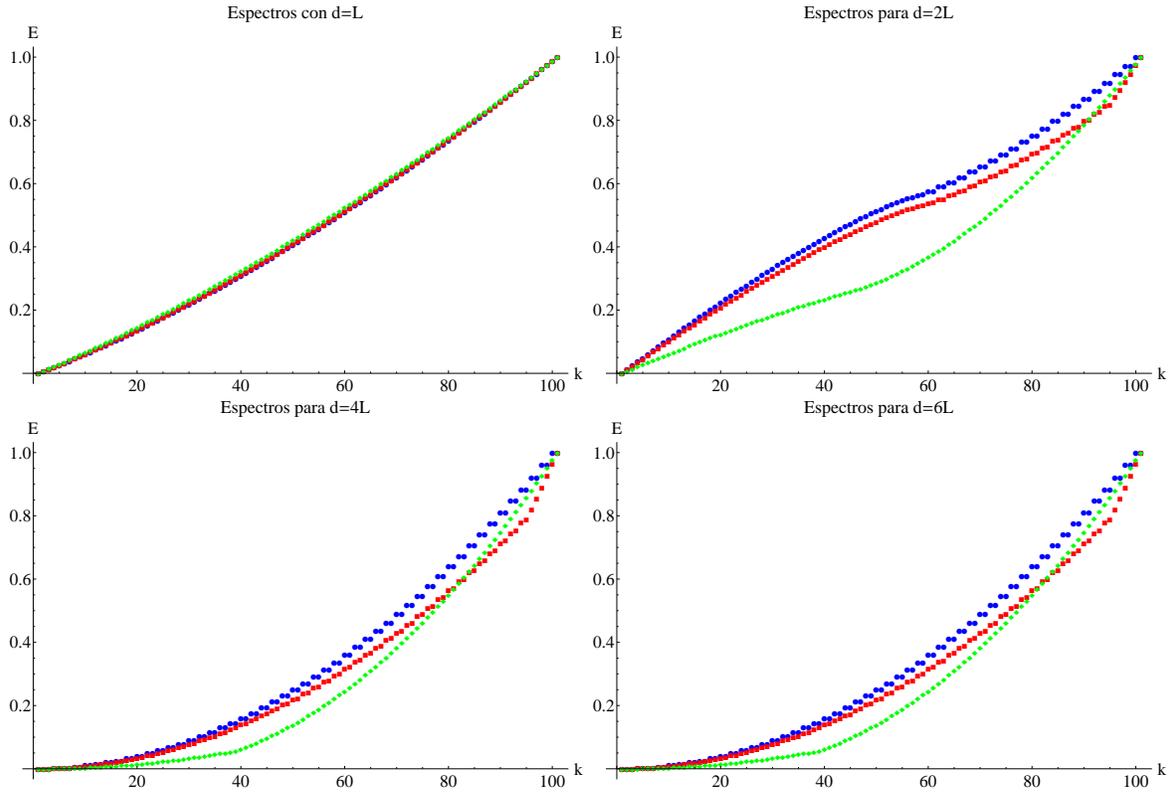


Fig. 4.9: Espectros de energía para el pozo asimétrico con $N = 100$ partículas y con frecuencias tales que $\omega_i = \omega'_i$. Las figuras representan espectros calculados a una distancia $d = 1L, 2L, 4L$ y $6L$ respectivamente. Los espectros graficados con marcadores redondos corresponden al caso simétrico, los marcadores cuadrados corresponden al caso correspondiente a $\delta = 0.1\epsilon_N/J$, y los marcadores con forma de rombo corresponden a $\delta = \epsilon_N/J$. Para $d = L$ los espectros con diferentes valores de δ son extremadamente parecidos, destacando el espectro correspondiente a $\delta = \epsilon_N/J$ por tener una concavidad ligeramente menor a los otros dos. Las diferencias entre los espectros con diferentes valores de δ son más evidentes para $d \geq 2L$.

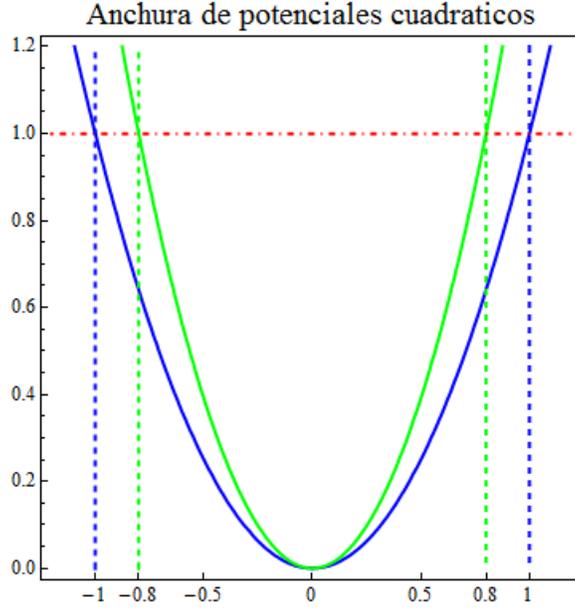


Fig. 4.10: Graficado en azul esta un potencial armónico de la forma $V_1(x) = x^2$, y en verde $V_2(x) = \frac{x^2}{\kappa^2}$, con $\kappa = 0.8$ y $\eta = 1$. Los puntos de intersección entre las parábolas y la línea $y = 1$ corresponden a los valores $X_{1\pm} = \pm 1$ y $X_{2\pm} = \pm 0.8$, los cuales son proyectados en el eje x . Para estos potenciales tenemos que $\sigma_1 = 2$ y $\sigma_2 = 1.6$.

Dichas soluciones serán denotadas como X_+ y X_- , con $\sigma = |X_+ - X_-|$. En el caso de los potenciales $V_1(r)$ y $V_2(r)$, sus anchuras σ_1 y σ_2 están determinadas únicamente por las frecuencias armónicas de cada potencial. Es decir, si estas anchuras no son iguales entre si, entonces tenemos que $\omega_i \neq \omega'_i$. Por simplicidad se supondrá que las únicas frecuencias que son diferentes entre si son ω_1 y ω'_1 . Esto nos permite tratar al potencial $\mathcal{V}(r)$ como un potencial en una dimensión sobre el eje x . La frecuencia ω_1 de $V_1(r)$ permanecerá en su valor original, dejando a σ_1 como referencia mientras que se define $\omega'_1 = \omega_1/\kappa$, donde κ es el parámetro que modula la anchura de $V_2(r)$. Así pues, $X_{1\pm}$ y $X_{2\pm}$ están dados por:

$$\begin{aligned} X_{1\pm} &= \frac{\pm 2\sqrt{2}\sqrt{\eta} + d\sqrt{m}\omega_1}{2\sqrt{m}\omega_1}, \\ X_{2\pm} &= \frac{\pm 2\sqrt{2}\kappa\sqrt{\eta} + d\sqrt{m}\omega_1}{2\sqrt{m}\omega_1}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde se supone que $\delta = 0$ para que haya consistencia de la definición de η para $V_1(r)$ y $V_2(r)$. Las anchuras σ_1 y σ_2 están dadas por:

$$\sigma_1 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\eta}}{\omega_1\sqrt{m}},$$

$$\sigma_2 = k \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\eta}}{\omega_1\sqrt{m}}, \quad (4.36)$$

las cuales dependen de la segunda derivada o curvatura de los potenciales, que son $\partial^2 V_1(r)/\partial x^2 = m\omega_1^2$ y $\partial^2 V_2(r)/\partial x^2 = m\omega_1^2/k^2$. El cociente entre las anchuras σ_2/σ_1 es igual al parámetro κ . De hecho, este parámetro es el único que determina una diferencia relativa entre las anchuras de $V_1(r)$ y $V_2(r)$. η puede ser cualquier valor siempre y cuando $\eta > 0$. Para ver como cambia la anchura conforme cambia κ se presenta una gráfica de dos potenciales cuadráticos simples de la forma $V_1(x) = x^2$ y $V_2(x) = x^2/\kappa^2$, con $\kappa = 0.9$. La anchura se define como la intersección de $V_1(r)$ y $V_2(r)$ con $\eta = 1$. Los valores $X_{1\pm} = \pm 1$ y $X_{2\pm} = \pm 0.8$ están proyectados al eje x con líneas verticales discontinuas. El cociente entre los valores $\sigma_1 = 2$ y $\sigma_2 = 1.6$ es precisamente $\kappa = 0.8$

En este caso, para cumplir la condición de hermiticidad $\lambda_1 = \lambda_2$ es necesario que los valores de N_a y N_b sean diferentes entre si según los parámetros del potencial $\mathcal{V}(r)$. Tal y como se ve en la figura 4.13, los valores de N_a y N_b claramente dependen de los valores de d y de k . Sin embargo, al igual que en el caso presentado en la capítulo anterior ($\kappa = 1$ con diferente δ) N_a y N_b son independientes de δ . Esto se puede apreciar en la figura 4.11, en la cual se muestran gráfica de las funciones λ_1 y λ_2 contra N_b . Para obtener estas gráficas se escogió el valor $d = 3L$ con $\kappa = 0.9, 1.1$ y $\delta = 0, 0.1\epsilon_N/J, \epsilon_N/J$. La columna de la derecha muestra las gráficas correspondientes al caso $\kappa = 0.9$ y en la columna izquierda esta el caso $\kappa = 1.1$. Las dos gráficas de la parte superior fueron calculadas con $\delta = 0$, mientras que las de en medio fueron calculadas con $\delta = 0.5\epsilon_N/J$ y las gráficas inferiores con $\delta = \epsilon_N/J$. Al igual que en los casos anteriores, el valor aceptable de N_b es aquel donde $\lambda_1 = \lambda_2$, que en las figuras se ve como la intersección de las dos curvas.

A partir de las gráficas 4.11 se puede apreciar que el valor de N_b en el cual se da dicha intersección es diferente según el valor de κ . Para $\kappa = 0.9$ la intersección entre λ_1 y λ_2 se da con un valor de N_b que esta cerca de 55, mientras que para $\kappa = 1.1$ la intersección se da con un valor de N_b cercano a 45. Se puede apreciar también que si bien los valores de λ_1 y λ_2 crecen de forma monótona con respecto a delta, el punto de intersección no cambia con respecto a dicho parámetro. En general, para valores de κ menores a uno tenemos que la intersección se da en un valor de N_b mayor a la mitad del numero de partículas total N , mientras que para κ mayor a 1 la intersección se da en un valor de N_b menor a la mitad del numero total de partículas (ver figuras 4.12). Además, numéricamente se comprobó que cualquier relación funcional entre el valor de intersección en N_b y las variables d o κ será inmutable con respecto a cambios en δ .

En las figuras 4.13 podemos ver más gráficas de λ_1 y λ_2 contra N_b , las cuales fueron realizadas con $\delta = 0.1\epsilon_N/J$, con valores de $d = 1L, 2L, 3L, 4L$, y con $\kappa = 0.9$ (columna izquierda), $\kappa = 1$ (centro) y $\kappa = 1.1$ (columna derecha). Se puede notar que el valor de intersección en N_b es menor a $N/2$ para $\kappa = 1.1$ y mayor a $N/2$ para $\kappa = 0.9$, tal y como se describe en la figura 4.12. Aparentemente el valor de intersección en N_b no cambia mucho. Sin embargo, al realizarse una gráfica de N_b contra d (ver figura 4.14),

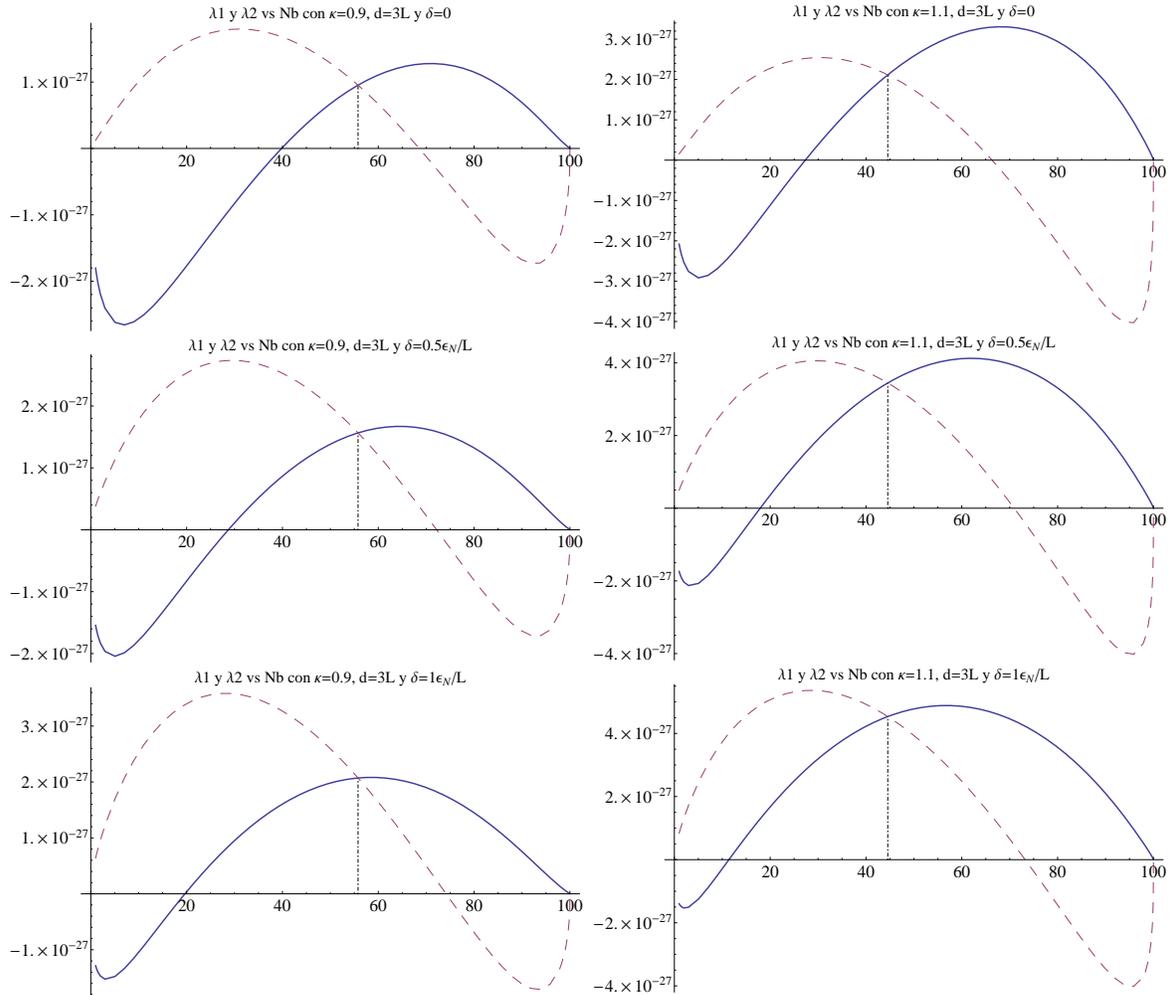


Fig. 4.11: Comportamiento de las funciones λ_1 (línea sólida) y λ_2 (línea discontinua) en función del número N_b . Es fácil ver que el valor de N_b correspondiente a la intersección entre λ_1 y λ_2 depende de κ , pero no de δ

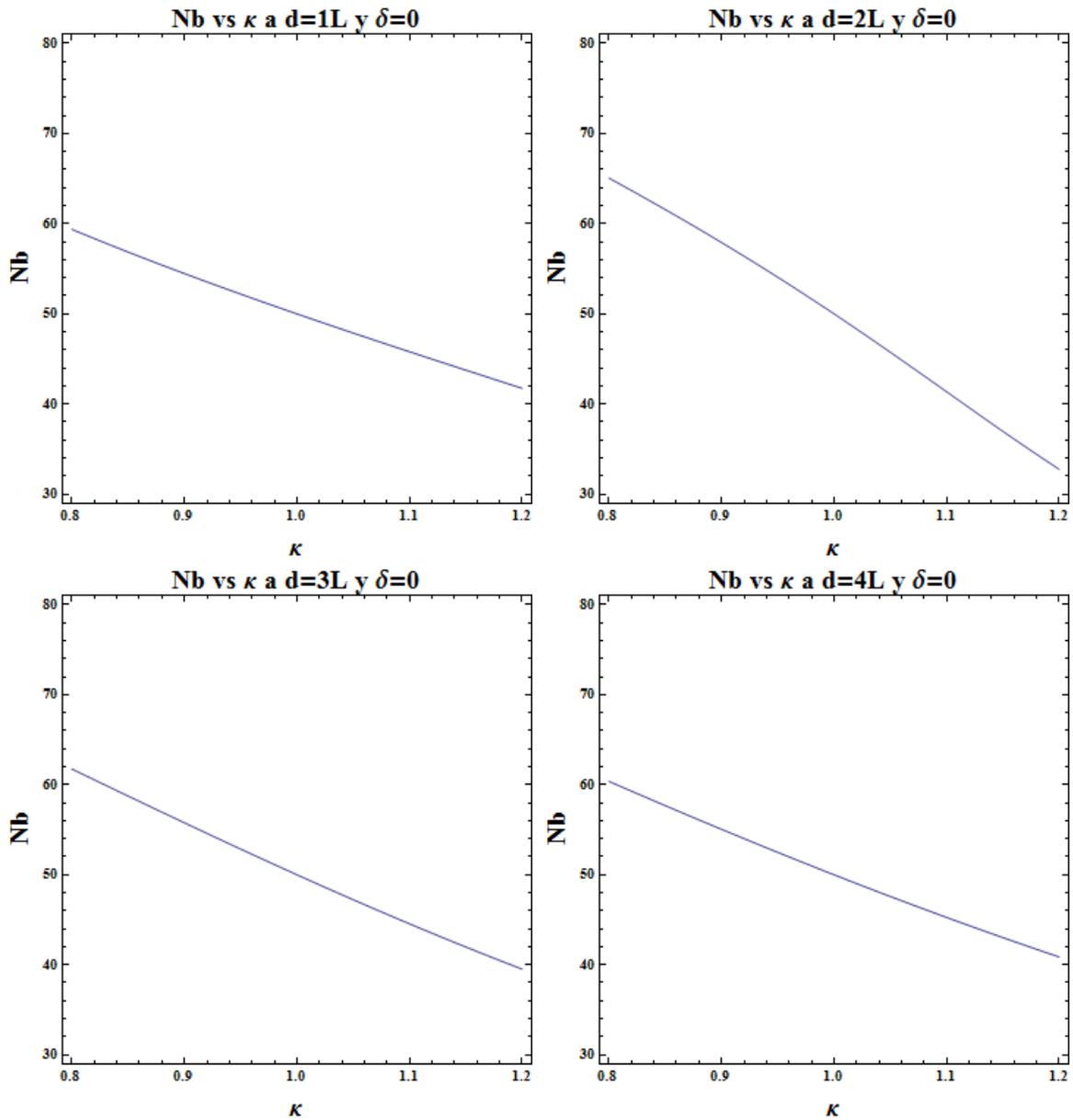


Fig. 4.12: Aquí se muestra el comportamiento del valor de N_b que es solución de $\lambda_1 = \lambda_2$ en función de κ . El dominio de los valores de κ esta centrado en $\kappa = 1$. Nótese que el valor de N_b en la intersección de λ_1 y λ_2 es decreciente con respecto a κ . El valor $\kappa = 1$ corresponde a $N=50$, tal y como se vio en el caso simétrico

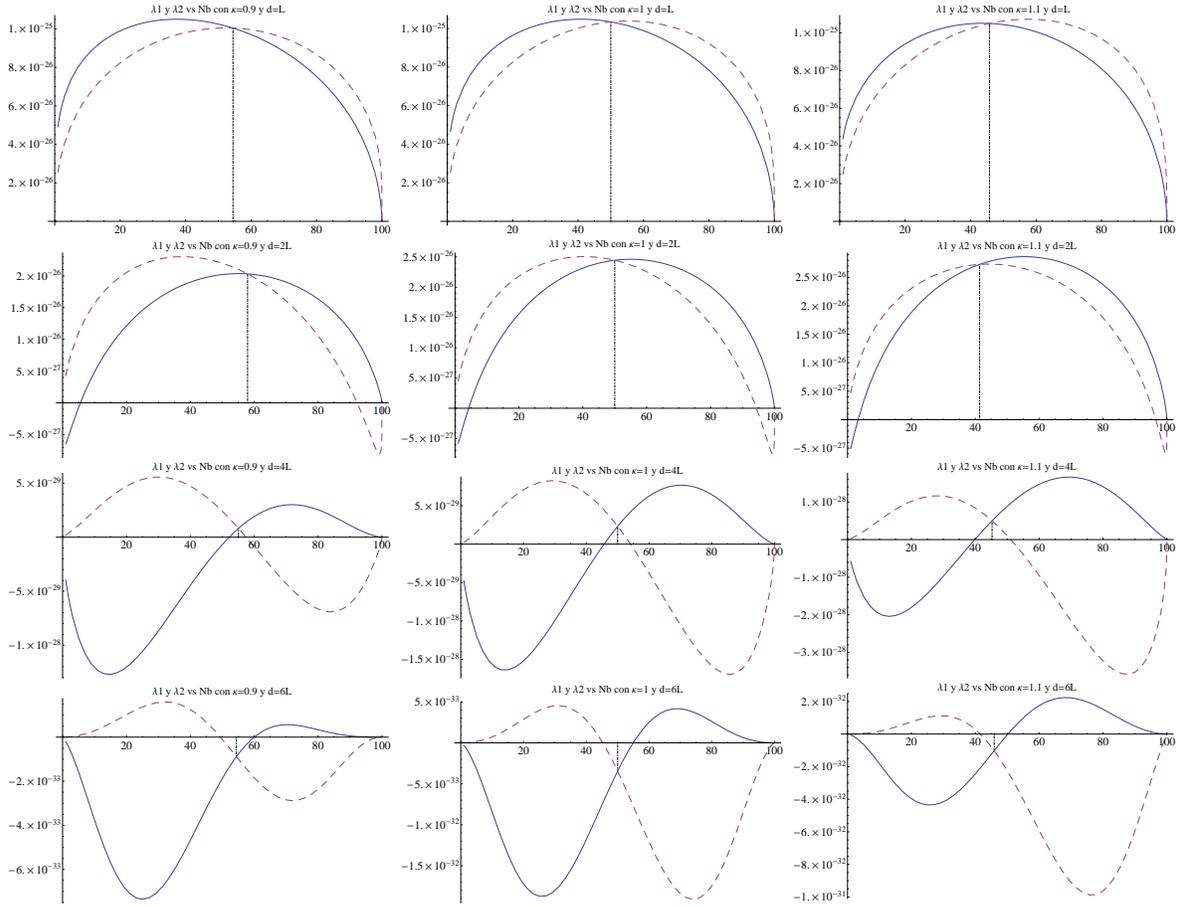


Fig. 4.13: Aquí se muestran gráficas de λ_1 y λ_2 contra N_b . En la columna izquierda se muestran gráficas correspondientes a $\kappa = 0.9$, en la columna central a las de $\kappa = 1$, y en la columna de la derecha a las de $\kappa = 1.1$. Todas las gráficas se realizaron con $\delta = 0.1\epsilon_N/J$. Los valores de d son $L, 2L, 4L, 6L$ y están ordenados de arriba hacia abajo en orden creciente. Se puede observar que el cambio de N_b con respecto a d es menos perceptible que el cambio con respecto a κ . Llama la atención que para $d = 6L$, λ_1 y λ_2 toman valores negativos, si bien mucho menores en valor absoluto que los correspondientes a $d = L$.

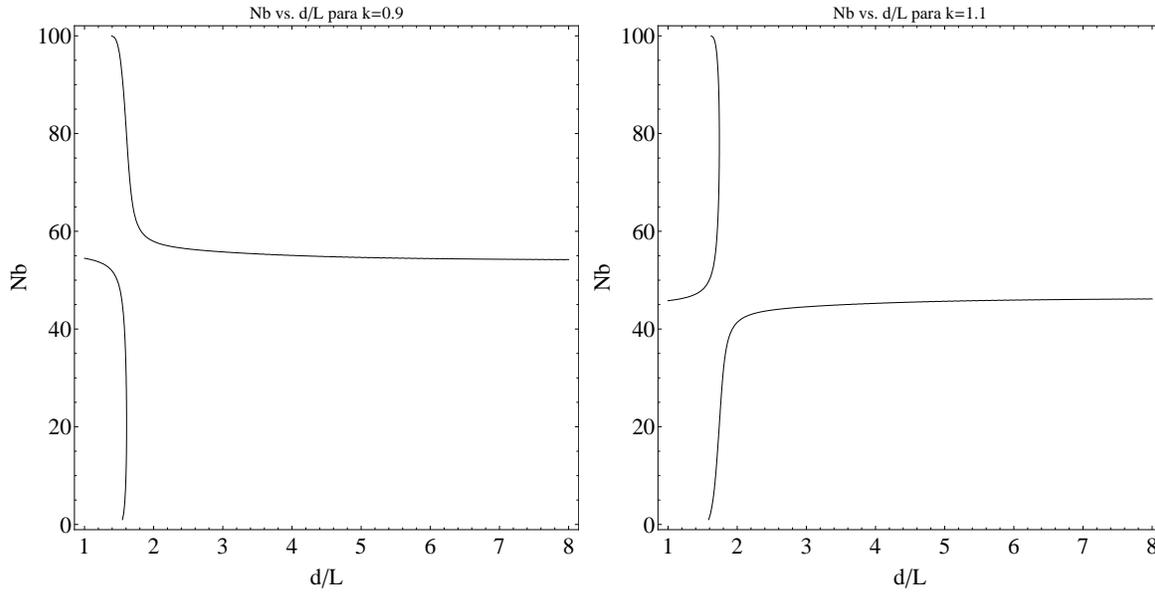


Fig. 4.14: Gráficas de N_b contra d . Estas gráficas presentan una bifurcación localizada alrededor del punto $d = 1.7L$, lo que implica que hay ciertos valores de d que permiten dos soluciones a la condición de hermiticidad. Para valores de d mayores a $2L$, el valor de N_b permitido cambia muy poco.

aparece una bifurcación para un conjunto de valores de d localizados entre L y $2L$. Esto significa que hay más de dos valores de N_b que cumplen con $\lambda_1 = \lambda_2$. Esto se hace más evidente en las figuras 4.15, en la cual se presentan nuevamente gráficas del tipo λ_1 y λ_2 contra N_b , pero en esta ocasión con valores que se encuentran en el dominio de d donde se encuentra la bifurcación. Dichos valores son $d = 1.67L, 1.72L, 1.77L, 1.82L$, con $\delta = 0.1\epsilon_N/J$ y $\kappa = 1.1$. Las gráficas de λ_1 y λ_2 correspondientes a los dos primeros valores de d tienen dos puntos de intersección. Esto significa que hay dos valores de N_b que cumplen con la condición de hermiticidad, y que los valores de d están en la bifurcación. Los dos últimos valores de d corresponden a gráficas fuera de la bifurcación, es decir, con un solo valor de N_b que cumple con la condición de la hermiticidad. Un estudio más detallado de esta bifurcación será realizado en trabajos posteriores.

Los espectros correspondientes a este caso están en la figura 4.16. En un solo cuadro se graficados simultáneamente los espectros correspondientes a $\delta = 0, 0.1\epsilon_N/J, 1\epsilon_N/J$. En la columna de la izquierda están las gráficas de $\kappa = 0.9$ y en la de la derecha $\kappa = 1.1$. Los valores de d manejados son $d = 1L, 2L, 4L$ en orden descendente. Se puede notar que para $d = L$, los espectros son muy similares, con excepción del espectro correspondiente a $\delta = \epsilon_N/J$, el cual se distingue por tener una curvatura ligeramente menor. Para $d = 2L$ y $\kappa = 0.9$ vemos que hay un punto de inflexión en todos los espectros y no hay ninguna organización de energía por parejas. para $d = 2L$ y $\kappa = 1.1$ si hay parejas de estados energéticos con $\delta = 0$ y $\delta = 0.1\epsilon_N/J$, pero solo para este último valor son perceptibles. Para los dos casos anteriores se ve que el espectro $\delta = \epsilon_N/J$ es

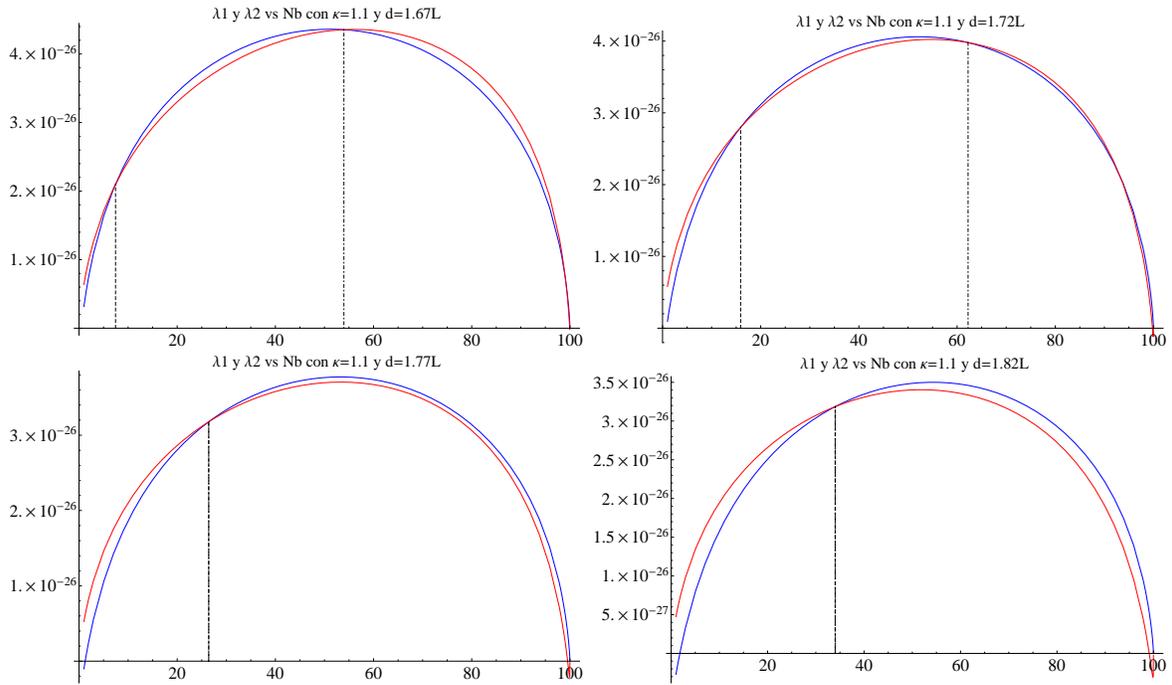


Fig. 4.15: Gráfica de λ_1 y λ_2 con $\delta = 0.1\epsilon_N/J$ y $\kappa = 1.1$ con valores de d cercanos a la bifurcación que aparece en las figuras de N_b contra d . Para $d=1.67L$ y $1.72L$ las gráficas se cruzan en dos sitios distintos, lo cual significa que hay 2 valores de N_b que cumplen con $\lambda_1 = \lambda_2$. Para $d = 1.77L$ y $1.82L$ solo hay una solución, lo cual significa que estos valores ya no pertenecen a la bifurcación.

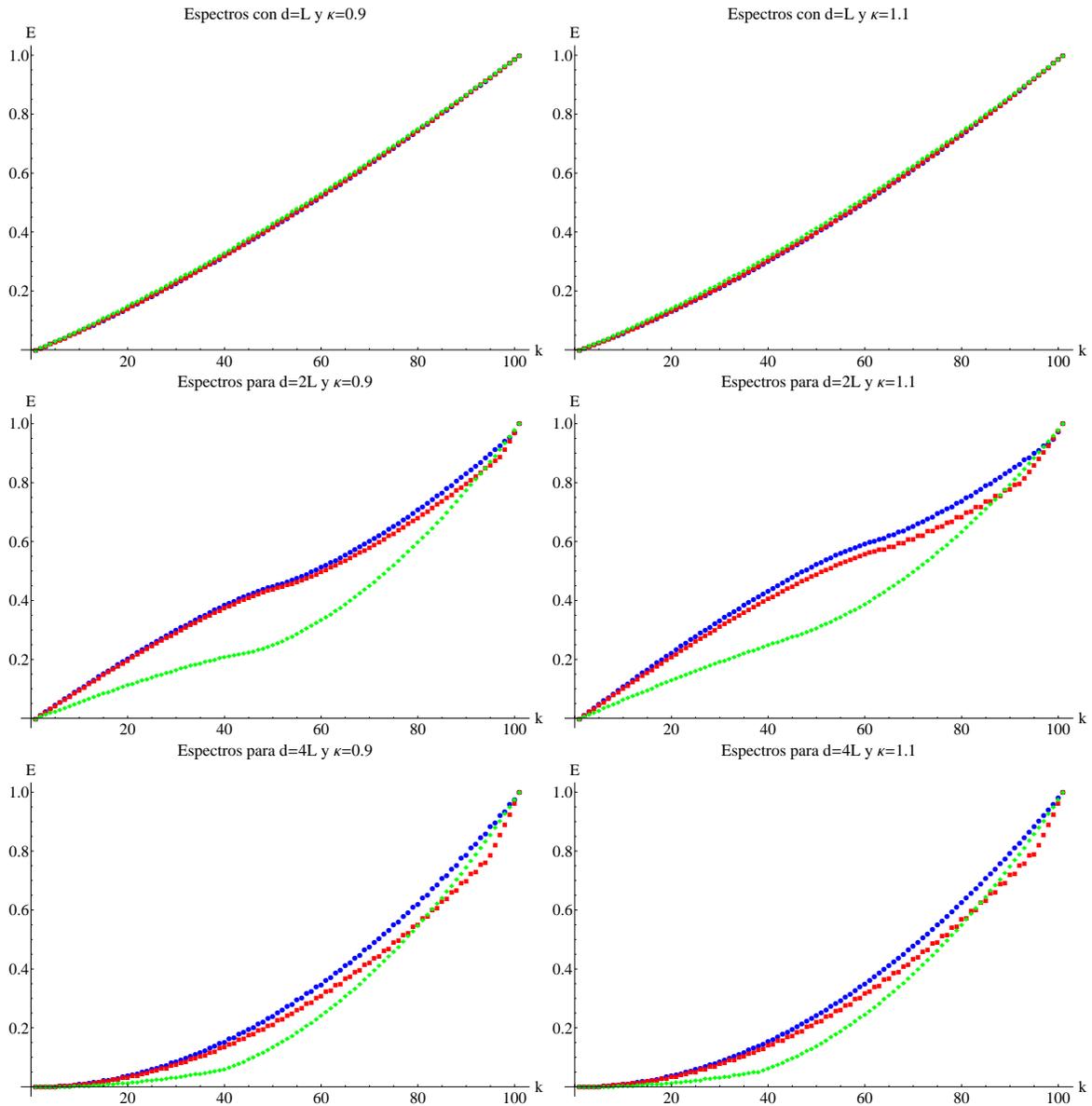


Fig. 4.16: Espectros de energía para el pozo asimétrico con $N = 100$ partículas. La primera columna fue calculada con el coeficiente de anchura relativa $k=0.9$ y la segunda columna con $\kappa = 1.1$. Cada una de las figuras representa espectros calculados a una distancia de fija $d = 1L, 2L$, y $4L$. Los espectros graficados con marcadores redondos corresponden al caso simétrico, los marcadores cuadrados corresponden al caso correspondiente a $\delta = 0.1\epsilon_N/J$, y los marcadores con forma de rombo corresponden a $\delta = \epsilon_N/J$. Al igual que en el caso $\kappa = 1$, si $d = L$ entonces los espectros con diferentes valores de δ son extremadamente parecidos, exceptuando que el espectro correspondiente a $\delta = \epsilon_N/J$ tiene concavidad ligeramente menor a los otros dos. Para valores $d \geq 2L$, las diferencias entre los espectros con diferentes valores de δ se hacen más fáciles de ver.

muy diferente de los otros dos.

Para $\kappa = 0.9$ y $d = 4L$ no hay puntos de inflexión perceptibles en los espectros de $\delta = 0$ y $\delta = 0.1\epsilon_N/J$ y hay una cierta organización por parejas, perceptible principalmente para $\delta = 0.1\epsilon_N/J$. Para $\delta = \epsilon_N/J$ si hay un punto de inflexión. En el caso $\kappa = 1, 1$ y $d = 4L$, al igual que en el caso con $\kappa = 0.9$, el único espectro con punto de inflexión es el que tiene $\delta = \epsilon_N/J$. Los otros dos no tiene puntos de inflexión y el de $\delta = 0.1\epsilon_N/J$ tiene estructuras por parejas.

5. CÁLCULOS SEMI-CLÁSICOS

La descripción de muchos cuerpos desarrollada en los capítulos anteriores nos permite determinar todas las cantidades físicas relevantes y la dinámica del BEC con toda la precisión permitida por la aproximación de dos modos. Sin embargo, es posible aproximar el Hamiltoniano cuántico a uno clásico. En la literatura este Hamiltoniano ha sido útil para conocer algunas de las cantidades observables : el desbalance de población y la fase relativa entre los condensados A y B, que son las más utilizadas para estudiar este sistema tanto teórica como experimentalmente [23]. Aquí utilizaremos este Hamiltoniano para entender la estructura del espectro energético. En este capítulo se verá que, para el doble pozo simétrico, es posible escoger coordenadas en las que el Hamiltoniano E2M clásico tiene la forma del Hamiltoniano que describe el movimiento de una partícula en un potencial sinusoidal. Esto permite que la física sea accesible con la intuición adquirida en mecánica clásica.

Como se vio en el capítulo anterior, el espectro energético de un BEC en un pozo doble simétrico está dividido en una región con energías inferiores en donde los niveles son casi equidistantes; y una de mayores energías, donde los niveles aparecen como dobletes degenerados. En este capítulo veremos que estas dos regiones están asociadas a dos regiones en el espacio fase del Hamiltoniano E2M clásico. La parte inferior del espectro está asociada a una región en el espacio fase que contiene trayectorias cerradas. La parte superior del espectro está asociada con una región que contiene trayectorias abiertas. Como el Hamiltoniano H_{E2M} clásico es similar al de un péndulo, la región con trayectorias cerradas corresponde a un péndulo que oscila alrededor del punto de equilibrio y no tiene suficiente energía para dar una vuelta completa. La región con trayectorias abiertas corresponde a un régimen de libración, donde el péndulo da vueltas completas. La región de oscilación en el espacio fase corresponde a oscilaciones de Josephson entre los condensados [23]. La región de libración corresponde a un fenómeno conocido como “self-trapping”, en donde la mayoría de las partículas queda atrapada en uno de los pozos y se suprime el tunelaje entre los dos condensados.

Para el caso asimétrico, el análisis del espacio fase clásico nos indica la existencia de tres regiones. Una región inferior con estados equidistantes, otra con parejas cuyos valores energéticos son cercanos pero no los suficiente como para llamarlas degeneradas, y una tercera región con valores que siguen una forma cuadrática.

5.1 Relación entre los Hamiltonianos clásico y cuántico

Usualmente, los Hamiltonianos de segunda cuantización están dados en el llamado “ordenamiento normal”, en el cual los productos de operadores se organizan de tal forma que los operadores de creación siempre van a la izquierda de los de aniquilación [28]. Este ordenamiento es el que se maneja usualmente en la literatura incluyendo a los capítulos previos de esta tesis. Sin embargo, para asociar un Hamiltoniano clásico a uno cuántico se debe recordar que, a diferencia de las variables clásicas, los operadores cuánticos no siempre conmutan entre si. Por este motivo hay una ambigüedad al asociar un producto de variables clásicas con producto de operadores cuánticos. Esta ambigüedad se resuelve si todo producto de operadores no conmutativos se re-escribe en una forma equivalente que incluya todas las permutaciones posibles entre operadores. Si un operador cuántico está escrito de esta forma se dice que está en un ordenamiento “simetrizado”. Llevar un Hamiltoniano cuántico a un orden simetrizado se logra por medio de las reglas de conmutación, por ejemplo $b^\dagger b = 1/2(b^\dagger b + b b^\dagger - 1)$. El Hamiltoniano E2M con ordenamiento simetrizado se escribe como:

$$\begin{aligned}
H_{E2M} = & \frac{1}{2}\omega_a(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1) + \frac{1}{2}\omega_b(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger - 1) + \lambda(\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
& + U_a\left(\frac{1}{6}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2}\right) \\
& + U_b\left(\frac{1}{6}(\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}\hat{b}^\dagger) - (\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger) + \frac{1}{2}\right) \\
& + U_{ab}\left(\frac{1}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{a}\hat{b}^\dagger + \hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) - (\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{b}\hat{b}^\dagger) + 1\right) \\
& + \mu_1\left(\frac{1}{3}(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b}) - (\hat{a}^\dagger\hat{b}) + \frac{1}{3}(\hat{b}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}) - (\hat{a}\hat{b}^\dagger)\right) \\
& + \mu_2\left(\frac{1}{3}(\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b}\hat{b}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger\hat{b}) + \frac{1}{3}(\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{a} + \hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{a}) - (\hat{a}\hat{b}^\dagger)\right) \\
& + \Lambda(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{b}\hat{b} + \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{a}\hat{a})
\end{aligned} \tag{5.1}$$

El siguiente paso para obtener la contraparte clásica de nuestro Hamiltoniano 5.1 es cambiar los operadores \hat{a} y \hat{b} por sus equivalentes clásicos. Para encontrar a estos equivalentes clásicos se usa la definición estándar de los operadores \hat{a} y \hat{b} para osciladores armónicos con $\hbar = 1$ [29]:

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \sqrt{\frac{m_a\nu_a}{2}} \left(\hat{x}_a + \frac{i\hat{p}_a}{m_a\nu_a} \right), & \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m_a\nu_a}{2}} \left(\hat{x}_a - \frac{i\hat{p}_a}{m_a\nu_a} \right), \\
\hat{b} &= \sqrt{\frac{m_b\nu_b}{2}} \left(\hat{x}_b + \frac{i\hat{p}_b}{m_b\nu_b} \right), & \hat{b}^\dagger &= \sqrt{\frac{m_b\nu_b}{2}} \left(\hat{x}_b - \frac{i\hat{p}_b}{m_b\nu_b} \right),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde \hat{x}_s, \hat{p}_s , con $s = a, b$ son los operadores de posición y de momento de los osciladores armónicos A y B respectivamente. Los parámetros ν_s y m_s con $s = a, b$ son parámetros

correspondientes a las frecuencias y masas de los osciladores. Conviene recordar que las variables de ángulo-acción pueden simplificar al Hamiltoniano en gran medida. Por lo tanto, en lugar de utilizar directamente las posiciones y momentos definidos en 5.2, se utilizaran unas variables de ángulo-acción correspondientes al oscilador armónico (ver [20]), dadas por la transformación canónica:

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{(2I_a)^{\frac{1}{2}}}{(m_a\nu_a)^{\frac{1}{4}}} \cos \phi_a, & p_a &= (2I_a)^{\frac{1}{2}}(m_a\nu_a)^{\frac{1}{4}} \sin \phi_a, \\ x_b &= \frac{(2I_b)^{\frac{1}{2}}}{(m_b\nu_b)^{\frac{1}{4}}} \cos \phi_b, & p_b &= (2I_b)^{\frac{1}{2}}(m_b\nu_b)^{\frac{1}{4}} \sin \phi_b, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde I_a e I_b son impulsos generalizados y ϕ_a y ϕ_b son sus coordenadas canónicas conjugadas. El Hamiltoniano clásico de dos osciladores no acoplados es independiente de los parámetros de masa y frecuencia si es expresado en estas coordenadas. Para encontrar la transformación de los operadores de creación y aniquilación en variables ángulo acción clásicas, en 5.2 se aplican las reglas de correspondencia entre operadores y variables clásicas: $\hat{x}_a \rightarrow x_a$, $\hat{x}_b \rightarrow x_b$, $\hat{p}_a \rightarrow p_a$ y $\hat{p}_b \rightarrow p_b$. Posteriormente, en las expresiones resultantes se realiza el cambio de variables definido en 5.3. Las reglas de correspondencia finales son:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow I_a^{1/2} e^{i\phi_a}, & a^\dagger &\rightarrow I_a^{1/2} e^{-i\phi_a}, \\ b &\rightarrow I_b^{1/2} e^{i\phi_b}, & b^\dagger &\rightarrow I_b^{1/2} e^{-i\phi_b}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

las cuales fueron introducidas por Heisenberg [30]. Siguiendo la derivación de [31], se sustituye 5.4 en 5.1, dando como resultado:

$$\begin{aligned} H_{E2M}(I_a, I_b, \phi_a, \phi_b) &= \frac{1}{2}(U_a + U_b + 2U_{ab} - \omega_a - \omega_b) \\ &+ I_a\omega_a + I_b\omega_b + I_a(I_a - 2)U_a + I_b(I_b - 2)U_b \\ &+ (I_bI_a - 2I_b - 2I_a)U_{ab} + 2I_aI_b\Lambda \cos [2(\phi_a - \phi_b)] \\ &+ 2\sqrt{I_aI_b}(\lambda + (I_a - 1)\mu_1 + (I_b - 1)\mu_2) \cos [\phi_a - \phi_b], \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde los términos $(U_a + U_b + 2U_{ab} - \omega_a - \omega_b)$ son constantes y son incluidos para que la definición del cero en la energía sea consistente con los niveles de energía cuánticos. El Hamiltoniano clásico de dos osciladores armónicos acoplados expresado en coordenadas de ángulo acción 5.3 solo depende de los momentos, no de las coordenadas. Sin embargo, se puede observar que el Hamiltoniano 5.5 depende tanto de coordenadas como de momentos, y esto se debe a que este no describe al problema de los dos osciladores independientes. Para un pozo doble simétrico (modelo I2M), la forma de 5.5 es tal

que sólo es función de dos variables: $z = I_a - I_b$ y $\psi = \phi_a - \phi_b$, que corresponden a la diferencia de población y la diferencia de fase entre los dos BECs, variables muy utilizadas en los estudios teóricos y experimentales de este sistema [23]. z es el límite clásico de $2J_z$, ya que $a^\dagger a - b^\dagger b \rightarrow I_a - I_b$ bajo las transformaciones 5.4. En general, los momentos en el Hamiltoniano E2M 5.5 no puede ser expresados en términos de $z = I_a - I_b$ únicamente, pero las coordenadas angulares si aparecen en la forma $\phi_a - \phi_b$. Esto sugiere la existencia de una transformación canónica en la que el Hamiltoniano sea independiente de una coordenada, a la cual se le llama coordenada ignorable. Este nuevo sistema de coordenadas es conveniente ya que la existencia de una coordenada ignorable implica que su momento canónico conjugado es una cantidad conservada. Para encontrar una transformación canónica como la mencionada anteriormente se propone la función generadora de tipo dos [20]:

$$F_2(P, Q, \phi_a, \phi_b) = P(\phi_b - \phi_a) + Q\phi_a, \quad (5.6)$$

que depende de los ángulos del sistema de coordenadas original y de los impulsos del sistema nuevo, denotados como P y Q . A este tipo de funciones se las llama funciones generadoras de tipo dos. La transformación de coordenadas para una función de tipo dos está dada por:

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{\partial F_2(P, Q, \phi_a, \phi_b)}{\partial \phi_a} & I_b &= \frac{\partial F_2(P, Q, \phi_a, \phi_b)}{\partial \phi_b} \\ \psi &= \frac{\partial F_2(P, Q, \phi_a, \phi_b)}{\partial P} & \chi &= \frac{\partial F_2(P, Q, \phi_a, \phi_b)}{\partial Q} \end{aligned} \quad (5.7)$$

dando como resultado que la transformación de coordenadas es $I_a = Q - P$, $I_b = P$, $\chi = \phi_a$ y $\psi = \phi_b - \phi_a$. El Hamiltoniano resultante es:

$$\begin{aligned} H_{E2M}(P, Q, \psi) &= \frac{1}{2}(U_b + U_a(1 + 2(Q - P - 2)(Q - P)) - \omega_a - \omega_b) \\ &+ 2(U_{ab}(1 + P(Q - P - 2) - 2(Q - P)) + (Q - P)\omega_a + P((P - 2)U_b + \omega_b)) \\ &+ 4\sqrt{P}\sqrt{Q - P}(\lambda + (Q - P - 1)\mu_1 + (-1 + P)\mu_2) \cos[\psi] \\ &+ 4P(-P + Q)\Lambda \cos[2\psi]). \end{aligned} \quad (5.8)$$

La coordenada ignorable es χ , por lo que sabemos que su variable conjugada $Q = I_a + I_b$ es una cantidad conservada. Para conocer el valor de esta cantidad conservada simplemente hay que recordar que

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger - 1 + \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b} \hat{b}^\dagger - 1). \quad (5.9)$$

Al sustituir 5.4 en 5.9 se obtiene que $N = I_a + I_b - 1$, y por lo tanto $Q = N + 1$, donde N es la contraparte clásica del operador de número total de partículas. Al

dejar fija la variable Q el problema se reduce a un Hamiltoniano de una dimensión sin dependencia explícita del tiempo, el cual siempre es integrable debido a que la energía es una cantidad conservada. El espacio fase, parametrizado por (P, ψ) , es de dimensión dos.

Si aplicamos este tratamiento al modelo S2M del capítulo tres, este toma la forma:

$$H_{S2M} = \omega N + \kappa N^2 + \kappa(P - 2(1 + n))P - 2\Omega\sqrt{P(Q - P)}\cos\psi, \quad (5.10)$$

y el caso simétrico del modelo E2M, que es equivalente al modelo I2M con parámetros diferentes, se escribe como:

$$\begin{aligned} H_{E2M}(P, N + 1, \psi) &= N^2U + N(\omega - 8\Lambda) - 4\Lambda \\ &+ 2(U - 2\Lambda)(P - 1)P + N(4\Lambda - 2U)P \\ &+ 2(\lambda + (N - 1)\mu)\sqrt{(N + 1 - P)P}\cos[\psi] \\ &+ 2\Lambda(N + 1 - P)P\cos[2\psi]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nótese que los términos $\omega N + \kappa N^2$ y $N^2U + N(\omega - 8\Lambda) - 4\Lambda$ son constantes. Estas constantes no deben ser ignoradas si se desea hacer comparaciones entre los distintos modelos de forma consistente.

5.2 El Hamiltoniano Clásico en el espacio fase

Al graficar la superficie hamiltoniana de 5.8 en el espacio tridimensional (P, ψ, E) (donde E es la energía), se podrá observar la existencia de un punto silla (ver figura 5.1), el cual es un punto con pendiente cero sin ser ni máximo ni mínimo localmente. Las coordenadas de este punto silla serán denotadas como (P_c, ψ_c) . Estas coordenadas se obtienen resolviendo las ecuaciones :

$$\frac{\partial H_{E2M}(P, N + 1, \psi)}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial H_{E2M}(P, N + 1, \psi)}{\partial \psi} = 0, \quad (5.12)$$

con la condición de que las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 H_{E2M}(P, N + 1, \psi)}{\partial^2 P}, \quad \frac{\partial^2 H_{E2M}(P, N + 1, \psi)}{\partial^2 \psi}, \quad (5.13)$$

sean de diferente signo.

La separatriz que divide las trayectorias en el espacio fase pasa por el punto silla [7]. Como H es constante a lo largo de una trayectoria la ecuación de la separatriz es

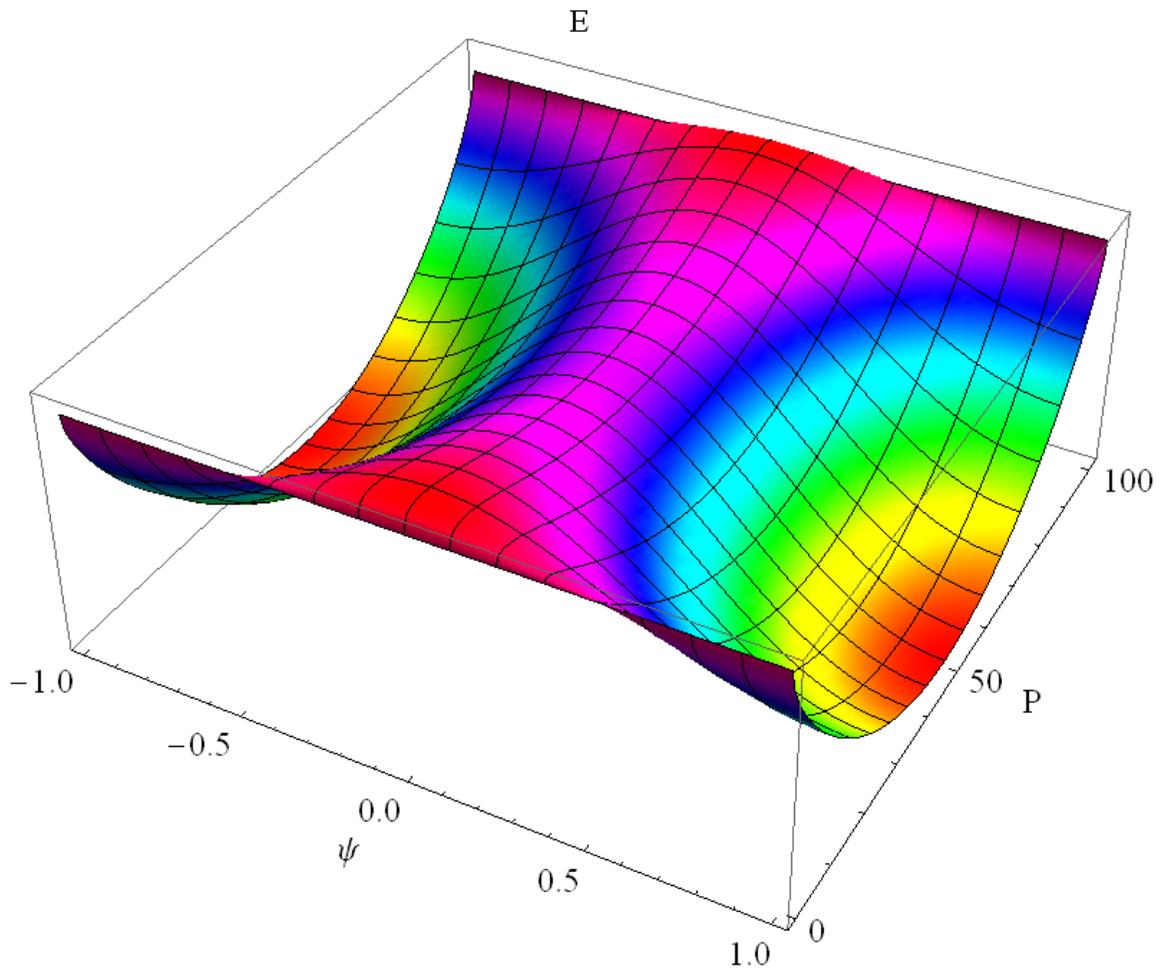


Fig. 5.1: Superficie Hamiltoniana para el pozo simétrico. Nótese la aparición de un punto silla en la región central, el cual indica la existencia de una separatriz.

$H_{E2M}(P, N + 1, \psi) = E_c$, donde $E_c = H_{E2M}(P_c, N + 1, \psi_c)$ es el valor de la energía en el punto crítico.

Para el caso simétrico, las ecuaciones mostradas en 5.12 tienen como solución a los valores $\psi_c = 0$ y $P_c = \frac{N+1}{2}$. Al insertar estos valores de P_c y ψ_c en el Hamiltoniano I2M clásico 5.11 se obtiene que la energía crítica para el caso simétrico es:

$$E_c = \frac{1}{2}(n(n-2) - 1)U + (n+1)\lambda - \left(\frac{5}{2} - 5n + \frac{3n^2}{2}\right)\Lambda + (n^2 - 1)\mu + n\omega \quad (5.14)$$

Es posible obtener una formula analítica de los valores críticos P_c y ψ_c que apliquen para el caso asimétrico. Sin embargo, éstas involucran a los parámetros $\omega_a, \omega_b, \lambda, U_a, U_b, U_{ab}, \Lambda$ y resultan ser excesivamente extensas, tal y como sucede con las expresiones de λ_1 y λ_2 para casos asimétricos. Las trayectorias en el espacio fase P, ψ son curvas de nivel del Hamiltoniano. Las trayectorias están dadas por la ecuación es $H(P, N + 1, \psi) = E_i$, donde E_i son los niveles de energía cuánticos calculados de en el capítulo anterior. Como las trayectorias en el espacio fase nunca se cruzan, es posible graficarlas juntas para un conjunto de parámetros dado. Gráficas de estas trayectorias aparecen en las figuras 5.2 y 5.3, las cuales serán analizadas en la próxima sección.

5.3 Estructura del espectro

En el caso simétrico, la separatriz (línea solida) divide al espacio fase en dos regiones, una región con curvas cerradas similares a las trayectorias de un péndulo en oscilación y otra con curvas abiertas que corresponden a un péndulo en rotación (ver figura 5.2). Como se vio en el capítulo anterior, en especial en la figura 4.4, los espectros energéticos respectivos (primera columna de la figura 4.4) también están divididos en dos regiones. La región inferior está poblada con niveles de energía no degenerados y corresponde a la región de oscilación en el espacio fase. La región superior tiene niveles de energía acomodados en dobletes casi degenerados, asociados a la región de rotación.

Gracias a la representación clásica es posible determinar la energía que divide a ambas regiones (también en línea solida), que no es más que la energía crítica E_c correspondiente a la separatriz. Esta energía es relevante físicamente ya que nos dice cuales energías corresponden a oscilaciones de Josephson y cuales a self-trapping. Si los condensados están muy cerca ($d = L$) E_c es mayor a cualquier energía del espectro, lo que indica que todo el espacio fase contiene curvas cerradas. Esto se puede ver en los espectros energéticos ilustrados en la columna izquierda de 5.2. El valor E_c disminuye conforme la distancia d entre los mínimos aumenta, provocando la aparición de curvas abiertas en el espacio fase y de estados degenerados en el espectro, tal y como se ve en la segunda figura ($d = 2L$) de 5.2. El número de estados degenerados y de curvas abiertas aumenta conforme d crece. Cuando d es muy grande estos ocupan todo el espectro y el espacio fase.

Algunos ejemplos de espacios fase del pozo doble asimétrico se ilustran en la figuras 5.3. Si los mínimos se encuentran a distancias cortas (o sea cercanas a $d = L$) la

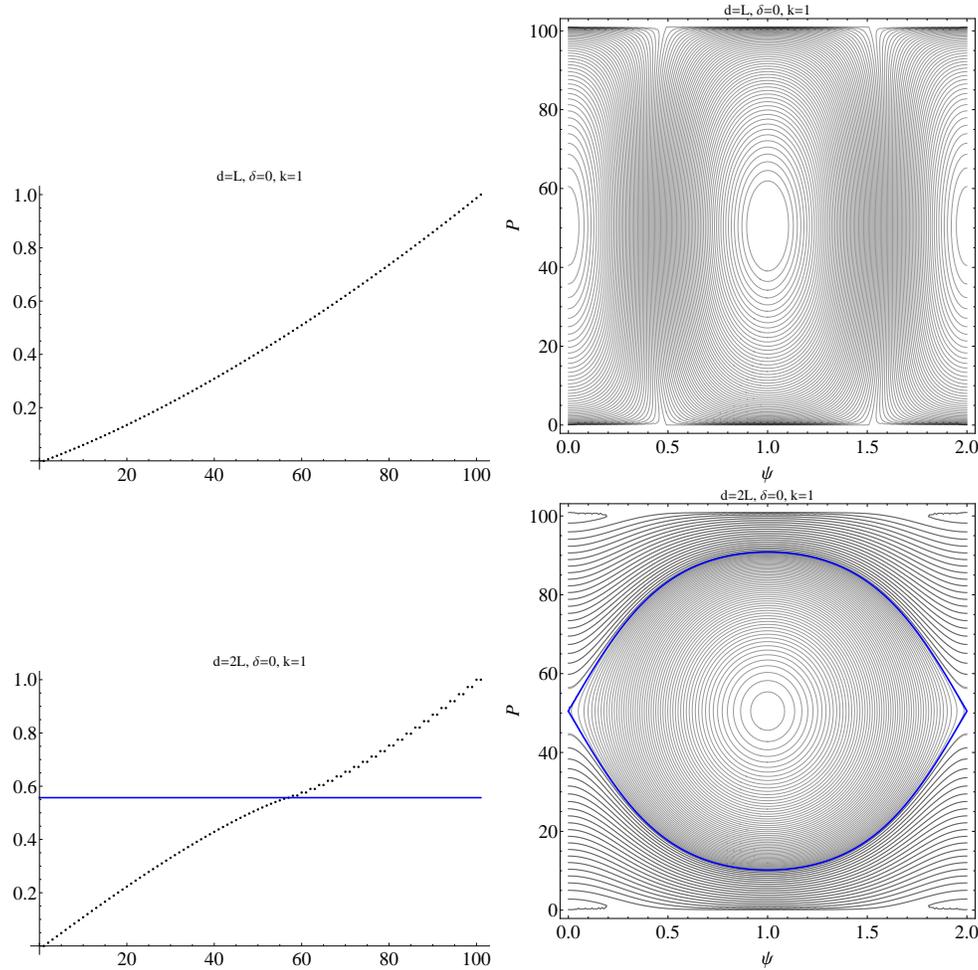


Fig. 5.2: Trayectorias clásicas del Hamiltoniano para el pozo simétrico $\delta = 0$ y $\kappa = 0$ con $d = L$, $d = 2L$. Para el caso $d = L$ todas las trayectorias son cerradas, y estas corresponden a energías no degeneradas. En la figura $d = 2L$ hay dos regiones : una con trayectorias abiertas y otras con trayectorias cerradas. Las separatriz esta marcada con una línea gruesa. En el espectro existen energías solitarias y energías acomodadas por parejas, las cuales están divididas por la energía E_c correspondiente a la separatriz.

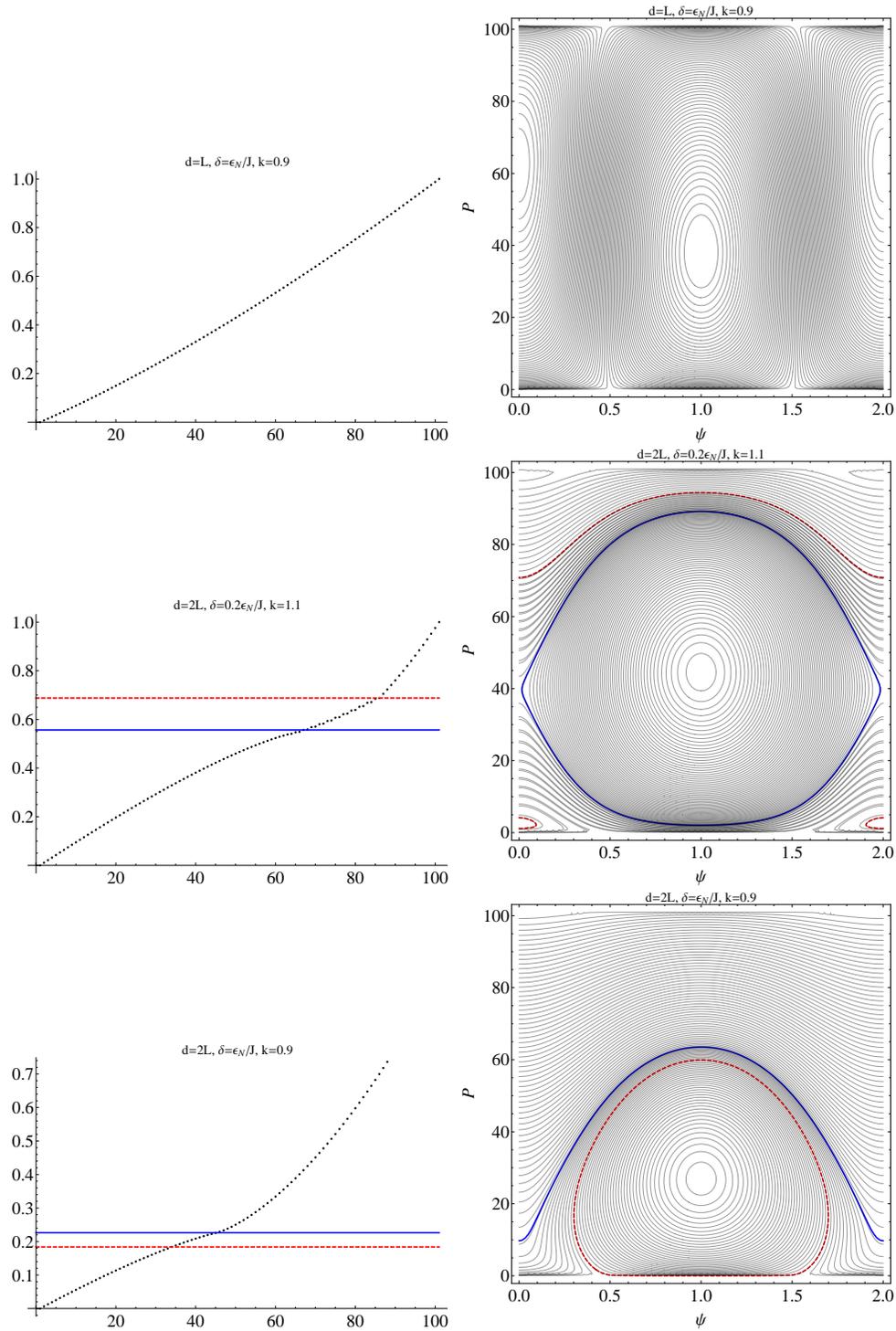


Fig. 5.3: Trayectorias clásicas del Hamiltoniano para el pozo asimétrico. Los casos presentados son : $\delta = \epsilon_N/J$, $d = L$ y $\kappa = 0.9$; $\delta = 0.2\epsilon_N/J$, $d = 2L$ y $\kappa = 1.1$; y $\delta = \epsilon_N/J$, $d = 2L$ y $\kappa = 0.9$. En la columna izquierda se presentan los espectros correspondientes.

estructura es similar a la observada en el pozo simétrico, con excepción de que los centros de las trayectorias no están localizados en el mismo lugar. Este tipo de estructura se observa independientemente del valor de δ y de κ . La figuras de la parte superior en 5.3 ilustran un espectro y un espacio fase de este tipo, con $\delta = \epsilon_N/J$, $d = L$ y $\kappa = 0.9$.

Las dos figuras intermedias de 5.3 son el espectro y el espacio fase para $\delta = 0.2\epsilon_N/J$, $d = 2L$ y $\kappa = 1.1$. Se observa que aparecen tres regiones en el espacio fase. La separatriz (línea sólida) delimita una región con curvas cerradas y otra con curvas abiertas, tal y como sucede en el caso simétrico. La región con curvas cerradas en el estado fase corresponde a una región con estados equidistantes en el espectro. Sin embargo, la región con curvas abiertas está dividida a su vez en dos regiones, cuya separación esta marcada por una línea discontinua. La región del espacio fase que no esta encerrada por la línea discontinua se distingue porque sus curvas tienen un espaciamiento mayor que las curvas en la región encerrada por la separatriz y la línea discontinua. Esta última región corresponde a la parte intermedia del espectro, delimitada por una línea gruesa correspondiente a la separatriz en el espacio fase y una línea discontinua con la misma energía de su trayectoria clásica correspondiente. Las energías de esta región forman parejas no degeneradas. Las energías mayores a la de la línea discontinua son equidistantes y están más separadas entre si que las energías pertenecientes a regiones inferiores del espectro.

En las dos figuras inferiores de 5.3 se ilustra el caso $\delta = \epsilon_N/J$, $d = 2L$ y $\kappa = 0.9$. Para este valor de δ las trayectorias se han deformado, provocando que la separatriz (línea gruesa) encierre también curvas abiertas. El espectro carece de energías organizadas por parejas. La separatriz indica ahora un cambio de curvatura en el espectro. La línea discontinua representa a la trayectoria cerrada más grande y que encierra al resto. La energía correspondiente a esta línea discontinua indica solo un pequeño cambio en la curvatura.

6. CONCLUSIONES Y TRABAJO A FUTURO

Los modelos de dos modos son de gran utilidad cuando estos son aplicables. Aquí se propone uno llamado E2M que aspira a generalizar a los modelos ya existentes, en particular al I2M, aumentando su rango de validez. La novedad que tiene el modelo E2M es que abarca a los BECs confinados en pozos asimétricos, cuyos estudios teóricos son más bien escasos. Esto es relevante ya que las trampas asimétricas son más fáciles de lograr que las simétricas[32]. El estudio teórico del pozo doble asimétrico presentado aquí introduce algunas dificultades que no aparecen en los estudios teóricos previos. El mayor de estos es el problema de la hermiticidad del Hamiltoniano, algo de lo que no había que preocuparse cuando se trata con trampas simétricas. Dicho problema fue resuelto satisfactoriamente replanteando el papel de los parámetros que aparecen como números de partículas en la ecuación GP. Los autores de modelo I2M [7] muestran que sus resultados son más precisos comparándolos con los obtenidos de la ecuación TDGPE resuelta numéricamente. Esa es una prueba que aun resta por hacerse al modelo E2M.

En el caso de los espectros energéticos, aquí se muestra la forma que estos tienen en el caso asimétrico. Esto es algo que, según mi conocimiento, no había aparecido en la literatura previamente. De momento no hay manera de saber que tanto corresponden estos espectros con la realidad, ya que tampoco existen mediciones experimentales reportadas en la literatura, ni siquiera para el caso simétrico. La utilidad de la representación clásica para conocer más a fondo la física del del BEC confinado en un pozo doble simétrico es evidente aquí. La estructura del espectro para el pozo doble simétrico es algo ya bien conocido, así como su relación con el fenómeno del self-trapping. Sin embargo, aun no hay mucho que decir acerca de interpretación física de la estructura del espectro asimétrico. La estructura de espacio fase del pozo doble asimétrico tiene similitudes al caso simétrico. Sin embargo, la interpretación dinámica que nos dice que la región dentro de la separatriz representa estados con oscilaciones de Josephson y que la región exterior representa estados con self-trapping probablemente tenga que ser modificada, especialmente por la aparición de tres regiones para algunos casos.

BIBLIOGRAPHY

- [1] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wiemann y E.A. Cornell, *Science* 269, 198 (1995).
- [2] K.B. Davis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969.(1995).
- [3] C.C. Bradley, C.A. Sackett y R.G.Hulet, *Phys. Rev. Lett.* 78, 985 (1997).
- [4] M. Holland, J. Cooper, *Phys. Rev. A* 53, R1954 (1996).
- [5] B. D. Josephson, *Phys. Lett.* 1A, 251 (1962).
- [6] G. J. Milburn, J. Corney, E. M. Wright, D. F. Walls, *Phys. Rev. A* 55, 4318 (1997).
- [7] D. Ananikian and T. Bergeman, *Physical Review A* 73, 013604 (2006).
- [8] A. I. Streltsov, O. E. Alon, L. S. Cederbaum, *Phys. Rev. A* 73, 063626 (2006)
- [9] *Ver Statistical mechanics : an advanced course with problems and solutions*, R. Kubo, Elsevier Science Publishing Company (1965).
- [10] *Gaseous Bose-Einstein condensate finally observed*, *Physics Today*, pp 17- 20, (Agosto 1995).
- [11] K. B. Davis, M. -O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969–3973 (1995)
- [12] P. A. Ruprecht *et al.*, *Phys. Rev. A* 51, 4704 (1995). F. Dalfovo, S. Stringari, *Phys. Rev. A* 53, 2477 (1996). R. J. Dodd *et al.*, *Phys. Rev. A* 54, 661 (1996).
- [13] P. D. Drummond, K. V. Kheruntsyan, and H. He *Phys. Rev. Lett.* 81, 3055 (1998)
- [14] Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari, *Rev. Mod. Phys.* 80, 1215 (2008).
- [15] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* 87, 160406 (2001).

-
- [16] A. Griffin, D. W. Snoke, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Cambridge University Press (1996).
- [17] A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. 73, 307 (2001)
- [18] C.J. Pethick and H. Smith, *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press (1997)
- [19] G. Theocharis, P.G. Kevrekidis, D.J. Frantzeskakis, and P. Schmelcher. Phys. Rev. E 74, 056608 (2006)
- [20] *Classical Mechanics*, Third Edition, H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, Addison-Wesley.
- [21] *An Introduction to Quantum Field Theory*, M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Perseus Books Publishing (1995)
- [22] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, McGraw-Hill, New York, (1971).
- [23] R. Gati and M. K. Oberthaler, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 40 R61–R89 (2007).
- [24] D. Jaksch, H.-J. Briegel, J.I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 81, 3108 (1998)
- [25] V. I. Yukalov, E. P. Yukalova, and V. S. Bagnato Phys. Rev. A 56, 4845 (1997).
- [26] J.R. Ensher, D.S. Jin, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. 77 , 4984 (1996)
- [27] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. 95, 010402 (2005).
- [28] S. Weinberg, *The quantum theory of fields, Vol. 1 Foundations*, Cambridge University Press, (1995)
- [29] Ver por ejemplo: J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1994)
- [30] W. Heisenberg, Z. Phys. 33, 879 (1925). Para una traducción al inglés ver el libro *Sources of Quantum Mechanics*, B.L. van Der Waerden, Dover Publications, (1967)
- [31] L. Benet, F. Leyvraz and T.H. Seligman, Phys. Rev. E 68, 045201 (2003)
- [32] D. Masiello, S. B. McKagan and W. P. Reinhardt Phys. Rev. A 72 063624 (2005)