



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

RECONSTRUCCIÓN DE HACES GAUSSIANOS PARA  
MEJORAR LA RESOLUCIÓN ESPACIAL EN UN  
EXPERIMENTO DE DIFUSIÓN RAYLEIGH

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ALEJANDRO SANTIAGO CARREÑO RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DRA. CATALINA ELIZABETH STERN FORGACH



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
Secretaría General  
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
Presente

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**Reconstrucción de haces gaussianos para mejorar la resolución espacial en un experimento de difusión  
Rayleigh**

realizado por **Carreño Rodríguez Alejandro Santiago** con número de cuenta **4-0306067-6** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Física. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dr. Pablo Samuel Schabes Retchkiman

Propietario Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar

Propietario Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach  
Tutora

Suplente Dr. Arturo Olvera Chávez

Suplente Dr. Steven Peter Czitrom Baus

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Ciudad Universitaria, D. F., a 03 de septiembre de 2010

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES



FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE FÍSICA

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

*... pues la forma de todo el universo es de lo más perfecto, y, de hecho diseñado por el creador más sabio, nada ocurrirá en el mundo sin que destaque, de alguna manera, la presencia de una regla máxima o mínima.*

Leonhard Euler

Esta tesis se la dedico a las personas más importantes en mi vida.

A mis padres y mi hermana,  
por todo su apoyo:

Damián  
Alejandra  
Ana

A mi gran amor,  
por su paciencia:

Elizabeth

A mi gran amigo,  
por su confianza:

Jair

Gacias por su cariño.

Quiero agradecer a todas aquellas personas que formaron parte en la realización y conclusión de esta tesis. A quienes contribuyeron con ideas, opiniones y sus valiosos puntos de vista.

Con cariño y admiración a mi directora de tesis: Dra. Catalina Stern

A mis sinodales:

Dr. Pablo Schabes  
Dr. Victor Velázquez  
Dr. Arturo Olvera  
Dr. Steven Czitrom

Muy en especial al Dr. José Manuel Alvarado por su valiosa ayuda.

Mi gratitud al Fis. César Aguilar por sus comentarios y opiniones a lo largo de la construcción de este trabajo.

A la Fis. Yadira Salazar por su ayuda y por ser una excelente compañera de trabajo.

Gracias a todos, amigos y colegas.

# Índice general

Índice general	IV
Resumen	VI
Introducción	VII
<b>1. Fundamentos de la difusión Rayleigh</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes	1
1.2. Esparcimiento de luz por un medio transparente	2
1.2.1. El campo incidente	2
1.2.2. La propagación de una onda electromagnética en campo lejano	3
1.2.3. De los difusores individuales	7
1.2.4. Relación con las fluctuaciones de densidad	7
1.2.5. Factor de forma	9
1.3. Heterodinaje	10
1.3.1. Detección heterodina	10
<b>2. Diseño y montaje de un experimento para medir fluctuaciones de densidad</b>	<b>13</b>
2.1. La luz láser	13
2.1.1. El haz gaussiano	14
2.2. Óptica gaussiana	17
2.2.1. El haz gaussiano a través de una lente	17
2.3. Descripción general	18
2.3.1. El Láser	19
2.3.2. Modulador acusto-óptico	20
2.3.3. La zona de difusión	21
2.4. La detección	22
<b>3. Perfilómetro</b>	<b>24</b>
3.1. Sobre los sensores de luz	25
3.2. La fotorresistencia	25
3.2.1. Principio de Operación	26
3.2.2. Caracterización de una fotorresistencia	28

---

3.3. Construcción de un perfilómetro . . . . .	28
3.4. Perfil de un haz gaussiano . . . . .	29
3.4.1. Perfilometría . . . . .	30
3.5. Perfilometría del trayecto óptico . . . . .	32
3.5.1. Trayecto óptico del Oscilador Local y del Primario . . . . .	33
3.6. Aplicación a la zona de difusión . . . . .	34
3.6.1. Perfilometría de la zona de difusión . . . . .	35
3.6.2. Ángulo entre el Oscilador Local y el Primario . . . . .	38
<b>4. Aplicación a un chorro supersónico</b>	<b>42</b>
4.1. Estructura de un chorro supersónico . . . . .	43
4.2. Definición del tamaño del chorro a partir de sus espectros . . . . .	44
4.2.1. Las ondas acústicas . . . . .	49
4.3. Localización espacial en el chorro de aire . . . . .	53
4.4. Estructura real de un chorro supersónico . . . . .	54
<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Resumen

En este trabajo se presenta cómo a partir de los perfiles de intensidad de un haz gaussiano se puede reconstruir la trayectoria de propagación del haz utilizando un nuevo instrumento de medición llamado perfilómetro. Usando este instrumento se asegura que el perfil de intensidad del haz mantiene su forma gaussiana a lo largo de su trayecto.

Se hace una revisión de la difusión de luz por las moléculas de un medio transparente conocida como difusión Rayleigh. Se obtiene la reacción que existe entre la luz difundida por un conjunto de moléculas en un medio transparente. Se muestra cómo a partir de la mezcla de señales se obtiene la expresión para la corriente producida en un fotodetector colocado en una posición alejada del punto donde ocurre la dispersión de luz. Se advierte que la corriente es proporcional a la transformada de Fourier de las fluctuaciones de densidad en la zona de difusión.

Se describen los elementos principales de un montaje experimental usado para estudiar fluctuaciones de densidad dentro de un flujo supersónico. Se utiliza la óptica gaussiana para describir la trayectoria y comportamiento de un haz proveniente de un láser.

Se estudia el diseño y construcción del perfilómetro. Se usa este instrumento de medición para generar perfiles de intensidad a lo largo del trayecto óptico del sistema de difusión de luz utilizado para estudiar fluctuaciones de densidad en flujos supersónicos. Los resultados generados con el perfilómetro son utilizados para reconstruir la trayectoria real del trayecto óptico y se comparan con datos generados a partir de las ecuaciones para describir la propagación de haces gaussianos. Así mismo, se hace la reconstrucción de la zona de difusión.

Finalmente, se analizan algunos espectros del chorro supersónico obtenidos experimentalmente y se relacionan con la zona de difusión reconstruida. A partir de esta relación se delimita la estructura real de un chorro de aire supersónico proveniente de una boquilla con salida recta.

# Introducción

El estudio de fluctuaciones de densidad en chorros de aire supersónicos se puede hacer utilizando un sistema que utiliza la dispersión, o difusión, de la luz. El principio de operación de este sistema es una onda plana monocromática que atraviesa un medio transparente. La luz que es esparcida en una dirección específica es detectada por medio de una técnica de detección conocida como heterodinaje.

Desde hace tiempo en el laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias se tiene montado un experimento para medir fluctuaciones de densidad en un chorro de aire supersónico. Este sistema permite medir fluctuaciones de densidad dentro y fuera del chorro colocándolo en un punto conocido como la zona de difusión. En esta zona es donde se lleva a cabo el esparcimiento de la luz debido a las interacciones entre las moléculas del flujo de aire y los fotones del haz de luz incidentes sobre él. La luz que es esparcida en la zona de difusión es detectada en una dirección en particular. Esta dirección está determinada por el ángulo de cruce entre dos haces de luz conocidos como el *Oscilador Local* y el *Primario*. A su vez, el cruce de los haces forma un volumen de intersección que se conoce como volumen de difusión, este volumen tiene la forma de un romboide. Debido a esto se cuenta con una mejor resolución espacial en la dirección ortogonal al eje de propagación de alguno de los haces dentro del volumen de difusión.

Si un solo haz atraviesa el chorro de aire se lograría esparcir luz en todas las direcciones respecto al eje de propagación de dicho haz. El problema que implica usar un solo haz es que la luz esparcida es de muy baja intensidad para ser detectada por un fotodetector. Para superar este problema se usa la técnica de heterodinaje. Esta técnica consiste esencialmente, en mezclar un haz de referencia con la luz esparcida en el volumen de difusión, por esta razón el *Oscilador Local* se usa como un haz de referencia. Con este haz se fija la dirección de detección en el sistema de difusión, dada por el ángulo formado entre este haz y el *Primario*. El ángulo de difusión determina un vector de onda que se relaciona con el tamaño de las fluctuaciones que pueden ser medidas por el sistema de difusión.

A partir de la densidad espectral de la corriente que sale del fotodetector se puede obtener

información sobre las fluctuaciones de densidad en el chorro de aire supersónico. Para extraer la información de la densidad espectral es necesario que la luz proveniente del láser presente perfiles de intensidad gaussianos y frentes de onda planos en la zona de difusión. Entonces, es necesario medir en cualquier punto a lo largo de la trayectoria del haz el perfil de intensidad.

El objetivo de este trabajo es mostrar que se puede hacer la reconstrucción de un haz gaussiano proveniente de un láser utilizando un nuevo instrumento de medición llamado perfilómetro<sup>1</sup>. Utilizando este instrumento se puede medir el perfil de intensidad en cualquier punto dentro de la trayectoria del haz y con esto reconstruir su trayectoria de propagación. Dado que es posible medir en cualquier punto del haz, es interesante ver cómo se puede reconstruir la zona de difusión. La reconstrucción exacta del volumen de difusión permitirá localizar con mayor precisión las zonas en las que se producen las fluctuaciones de densidad que son el objetivo fundamental del experimento.

En el primer capítulo se hace una revisión de los principios físicos que gobiernan la difusión Rayleigh. Se muestra cómo se crea el esparcimiento de luz visto como una onda electromagnética en un medio transparente y la propagación de esta onda a una distancia mucho mayor que su longitud de onda. Se obtiene la relación que existe entre el campo electromagnético y un conjunto de dispersores mediante el factor de forma para un medio transparente. Al final de este primer capítulo se muestra que utilizando la técnica de heterodinaje se obtiene la expresión para la corriente que se produce en un fotodetector y su densidad espectral.

En el capítulo dos se describe el diseño y construcción de un sistema de difusión de luz. Se obtienen las ecuaciones y parámetros físicos más importantes que describen el comportamiento de un haz proveniente de un láser. También se describen los elementos principales que intervienen en la detección heterodina.

En el capítulo tres se describe el diseño y construcción del perfilómetro. Se presentan sus aplicaciones al montaje experimental descrito en el capítulo dos y se comparan valores experimentales con valores generados teóricamente.

En el cuarto capítulo se exponen las aplicaciones de los resultados obtenidos en el capítulo anterior y se usan en la caracterización del chorro de aire supersónico. Se describe la relación entre los espectros obtenidos por la difusión del chorro de aire en la zona de difusión a partir de la posición espacial de este respecto a esta zona.

La conclusión de este trabajo afirma que midiendo el perfil de intensidad a lo largo del trayecto óptico, del montaje experimental, el perfil mantiene su forma gaussiana. El resultado

---

<sup>1</sup>Existe otro instrumento de medición con el nombre de perfilómetro. Pero tal instrumento se aplica en mediciones de desgaste, rugosidad y otros defectos en diversos materiales. Las aplicaciones de este instrumento se realizan en disciplinas como la arquitectura, ingeniería civil e ingeniería mecánica entre otras.

principal es que se pueden aplicar las ecuaciones planteadas en el primer capítulo al montaje experimental. Aplicandose dichas ecuaciones es factible extraer información referente a los eventos aerodinámicos dentro del flujo de aire supersónico. Utilizando la reconstrucción de la zona de difusión se puede hacer un mapeo en la estructura del chorro de aire supersónico proveniente de una boquilla con salida recta.

# Capítulo 1

## Fundamentos de la difusión Rayleigh

El esparcimiento de la luz es un fenómeno observado cotidianamente por todo el mundo pues requiere solo de tres elementos que son: una fuente de luz como el sol, unas partículas esparcidoras como el aire y un detector como el ojo. El azul del cielo en el día o el rojo de un atardecer se deben al esparcimiento de la luz del sol por las moléculas de aire.

En este capítulo se hace una revisión del esparcimiento de una onda electromagnética plana por las moléculas de un medio transparente (Difusión Rayleigh<sup>1</sup>). Se muestra, utilizando la aproximación de campo lejano y la detección heterodina, cómo la luz que incide sobre un fotodetector y por lo tanto, la corriente que sale de él, contienen información del movimiento de los dispersores.

### 1.1. Antecedentes

En el laboratorio de acústica del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias, desde hace tiempo, se tiene montado un experimento para estudiar las fluctuaciones de densidad dentro y fuera de un chorro supersónico. Usando la detección heterodina de la luz difundida por el chorro en una dirección específica, es posible mostrar que la corriente que sale del detector es proporcional a la transformada de Fourier espacial, para un vector de onda determinado por el montaje óptico, en función del tiempo, de las fluctuaciones de densidad contenidas en el volumen de difusión (2.3.3 La zona de difusión).

---

<sup>1</sup>En este trabajo se consideran sinónimos las palabras *esparcimiento*, *dispersión* y *difusión*. Los inconvenientes de usar una u otra palabra derivan, por principio, de que la palabra en inglés *scattering* se traduce como: *dispersión* o *esparcimiento*. El concepto al que se refiere la palabra en inglés se entiende como: *la desviación de la luz por la variedad de uniformidades en el medio*. Varios especialistas recomiendan que *esparcimiento*, *dispersión* y *difusión* se usen para referirse a conceptos distintos.

La detección heterodina implica el uso de dos haces luminosos. El *Primario*, más potente, es el difundido por el aire en movimiento. El otro, llamado *Oscilador Local*, es el que se mezcla con la luz difundida sobre el detector. El ángulo al que se cruzan los haces se llama ángulo de difusión y determina el vector de onda de las fluctuaciones que se van a estudiar. En este trabajo el volumen de difusión está determinado por el cruce de estos dos haces. Para poder calibrar el experimento, es necesario verificar que el trayecto óptico se comporta como lo describen las ecuaciones. Además se requiere determinar con precisión el tamaño y la forma del volumen de difusión. Por ejemplo, debe asegurarse que los haces mantienen un perfil gaussiano en todo el trayecto óptico y que se cruzan en un punto de focalización donde las ondas pueden considerarse planas.

Para cumplir con este objetivo y como parte de este trabajo, se diseñó y construyó un instrumento bautizado como: *perfilómetro*. Como su nombre lo indica, con este instrumento es posible obtener el perfil radial de intensidades del haz, en cualquier punto a lo largo del trayecto óptico del experimento de difusión. Existen algunos perfilómetros en el mercado pero a un alto precio.

Existen otro tipo de medidores de la potencia luminosa llamados a veces “wattómetros”. Éstos carecen de resolución espacial y sólo dan medidas aproximadas de la potencia total del haz. Con este tipo de instrumentos no es posible determinar el perfil.

En este trabajo se usan ángulos de difusión muy pequeños. Al hacer un corte en el plano horizontal del camino óptico, se puede observar que el volumen de difusión tiene la forma de un rombo muy alargado, alrededor de 20 *cm* de largo por 0,4 *mm* de ancho. Dado que el diámetro de salida del chorro supersónico que se estudia es de 1,6 *mm*, y se estudian zonas cercanas a la salida de la boquilla, hay muy buena resolución espacial en una dirección y ninguna en la otra.

La reconstrucción exacta del volumen de difusión permitirá localizar con mayor precisión las zonas en las que se producen las fluctuaciones de densidad que son el objetivo fundamental del experimento.

## 1.2. Esparcimiento de luz por un medio transparente

### 1.2.1. El campo incidente

Es posible obtener directamente información de la distribución espacial de las partículas constituyentes de un medio transparente. Esto se logra con la dispersión de una onda electromagnética plana. Se define, entonces, al campo incidente como una onda plana monocromática con polarización lineal que incide sobre algún medio transparente. Este campo tiene un vector

de onda  $\vec{k}_0$  bien definido al igual que su frecuencia  $\omega_0$ . La ecuación que describe al campo es:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= u_0(\vec{r}')\vec{E}_0(\vec{r}')e^{-i\omega_0 t} \\ &= u_0(\vec{r}')\vec{E}_0e^{-i(\vec{k}_0\cdot\vec{r}'-\omega_0 t)} \\ &\text{con: } \vec{E}_0(\vec{r}') = \vec{E}_0e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}'}\end{aligned}\quad (1.1)$$

donde:  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{E}_0$  es un vector cuya dirección es la de la polarización y su magnitud es el máximo del campo eléctrico.

Este campo es modulado por un perfil con dependencia radial  $u_0(\vec{r}')$  multiplicado por una onda plana  $e^{i(\vec{k}_0\cdot\vec{r}'-\omega_0 t)}$  propagándose en la dirección de  $\vec{k}_0$  con número de onda dado por  $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ .

### 1.2.2. La propagación de una onda electromagnética en campo lejano

Las ecuaciones de Maxwell describen a las ondas electromagnéticas. En el sistema MKS tienen la forma[5]:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} &= \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} &= \mu_0 \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.2)$$

con  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  los campos eléctrico y de inducción magnética respectivamente. Las ecuaciones  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$  permiten la definición de un potencial vectorial  $\vec{\mathbf{A}}$  y un potencial escalar  $\Phi$ , tales que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}} &= \nabla \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) \\ \vec{\mathbf{E}} &= -\nabla\Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t)\end{aligned}\quad (1.3)$$

Considere una onda monocromática de frecuencia  $\omega_0$  que se propaga en la dirección  $\hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$  y que atraviesa un volumen pequeño de dispersión donde existen las fuentes  $\vec{\mathbf{J}}$  y  $\rho$ . Si la posición de observación es  $\vec{r}$ , el potencial vectorial para la onda dispersada en cualquier punto fuera del volumen se escribe como:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3r' \int dt' \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} - t) \quad (1.4)$$

donde  $\mu_0$  es la susceptibilidad magnética del vacío,  $V$  el volumen de dispersión,  $\vec{\mathbf{J}}$  es la densidad de corriente en el volumen y la función delta asegura la causalidad de la función en  $\vec{r}$  si la onda se propaga a velocidad  $c$ . Debido a que se considera una onda monocromática cuya variación en el tiempo es armónica de la forma  $e^{-i\omega_0 t}$ , se puede suponer también una variación armónica en las fuentes con la misma forma matemática. En este caso se pueden escribir las densidades de carga y corriente como:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r})e^{-i\omega_0 t} \\ \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathbf{J}}(\vec{r})e^{-i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (1.5)$$

De esta forma el potencial vectorial se escribe como:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega_0 t} \int_V \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i\frac{\omega_0}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.6)$$

Ahora se considera un volumen de dispersión cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda del campo incidente, esto es:  $r' = |\vec{r}'| \ll \lambda_0$  con  $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$  y  $k_0 = \frac{\omega_0}{c}$ . Se coloca  $\vec{r}$  en la situación de campo lejano, esto es considerar la siguiente condición[5]:

$$r' \ll \lambda_0 \ll r \quad (1.7)$$

En esta aproximación se pueden tomar los siguientes límites:

$$\begin{aligned} kr &\gg 1 \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &\cong r - \hat{r} \cdot \vec{r}' \\ \hat{r} &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \end{aligned} \quad (1.8)$$

La segunda condición en (1.8) se puede apreciar fácilmente en la figura 1.1. Utilizando estas condiciones en (1.6) el potencial vectorial se puede escribir como:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega_0 t} \vec{A}(\vec{r}) = e^{-i\omega_0 t} \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') e^{-i\vec{k}_d \cdot \vec{r}'} d^3 r' \quad (1.9)$$

con :  $\vec{k}_d = k_0 \hat{n} \approx k_0 \hat{r}$

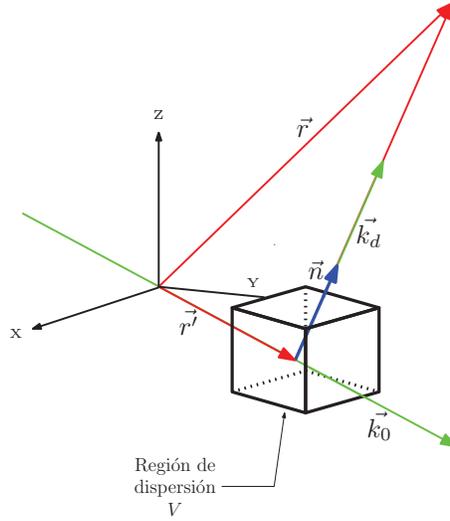


Figura 1.1: Región de dispersión

Si se toma en cuenta el lado izquierdo de la condición (1.7) se puede ver que  $k_0 r' \ll 1$ , y resulta conveniente utilizar un desarrollo en serie de la integral en (1.9) para obtener:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \sum_n \frac{(-ik_0 \hat{r} \cdot \vec{r}')^n}{n!} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \sum_n \frac{(-ik_0)^n}{n!} \int_V \vec{J}(\vec{r}') (\hat{r} \cdot \vec{r}')^n d^3 r' \end{aligned} \quad (1.10)$$

Ahora se puede tomar en cuenta sólo el primer término en (1.10) para obtener el potencial vectorial fuera de la fuente en la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \int_V \vec{J}(\vec{r}') d^3 r' \quad (1.11)$$

Tomando en cuenta la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.12)$$

y aplicándola a las fuentes armónicas en (1.5) se obtiene:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}) - i\omega_0 \rho(\vec{r}) = 0 \quad (1.13)$$

Se puede transformar la integral en (1.11) integrando por partes y recordando que la fuente está acotada en una región finita del espacio:

$$\int_V \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}') d^3 r' = - \int_V (\nabla \cdot \vec{\mathbf{J}}(\vec{r}')) \vec{r}' d^3 r' = -i\omega_0 \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r'$$

El potencial vectorial se escribe entonces como:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0\omega_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0r}}{r} \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r' \quad (1.14)$$

pero la integral en (1.14) es el momento dipolar eléctrico:

$$\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r' \quad (1.15)$$

Finalmente el potencial vectorial se puede escribir como:

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{r}) = -\frac{i\mu_0\omega_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0r}}{r} \vec{p} \quad (1.16)$$

Este potencial vectorial permite obtener los campos eléctrico y de inducción magnética para la posición en campo lejano. Usando las ecuaciones (1.2) y (1.3) se pueden relacionar los campos con el vector potencial, para el caso de fuentes armónicas planteado en (1.5) como:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{B}} &= \nabla \times \vec{\mathbf{A}}(\vec{r}, t) \\ \vec{\mathbf{E}} &= \frac{ic^2}{\omega_0} \nabla \times \vec{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Realizando los cálculos se obtienen los campos:

$$\vec{\mathbf{E}}_d(\vec{r}) = \frac{k_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ik_0r}}{r} (\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r} \quad (1.18)$$

$$\vec{\mathbf{B}}_d(\vec{r}) = \frac{\omega_0\mu_0k_0}{4\pi} \frac{e^{ik_0r}}{r} (\hat{r} \times \vec{p}) \quad (1.19)$$

donde  $c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$ . Estos campos son los campos dispersados a una posición  $\vec{r}$  por un volumen pequeño  $V$  determinado por la posición  $\vec{r}'$ .

### 1.2.3. De los difusores individuales

El campo incidente sobre el medio polariza cada una de las moléculas convirtiendo cada una de estas en difusor. La *difusión Rayleigh* es un proceso elástico ya que un dipolo eléctrico radia con la misma frecuencia que la del campo incidente. Además se cumple que la longitud de onda incidente  $\lambda_0$  es mayor que las dimensiones promedio del difusor. Como la difusión es elástica cada difusor emite como un dipolo con polarizabilidad escalar  $\alpha$  (la polarizabilidad puede tener una dependencia con la frecuencia[5]). Entonces se puede escribir el vector de polarización como:

$$\vec{p} = \epsilon_0\alpha(\omega_0)\vec{E}_0(\vec{r}') = \epsilon_0\alpha\vec{E}_0(\vec{r}') \quad (1.20)$$

Para un solo dispersor en la posición  $\vec{r}'$  dentro del campo incidente, se puede escribir el campo dispersado a la posición  $\vec{r}$  usando el campo eléctrico de la ecuación (1.19):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_d &= \vec{E}_d(\vec{r})e^{-i\omega_0t} \\ \text{con: } \vec{E}_d(\vec{r}) &= r_0^R \frac{e^{ik_0r}}{r} (\hat{r} \times \vec{E}_0(\vec{r}')) \times \hat{r} \end{aligned} \quad (1.21)$$

donde  $\hat{r}$  es un vector unitario en la dirección  $\vec{r}$  y  $r_0^R = \frac{\alpha k_0^2}{4\pi}$  es el radio de dispersión de Rayleigh de la partícula.

### 1.2.4. Relación con las fluctuaciones de densidad

El campo  $\vec{\mathbf{E}}_0$  incide sobre la región de dispersión en un volumen pequeño  $V$  y las moléculas del medio emiten un campo dispersado  $\vec{\mathbf{E}}_d$ . En la aproximación de campo lejano (figura 1.2) el campo dispersado por una sola molécula es el definido en la ecuación (1.21).

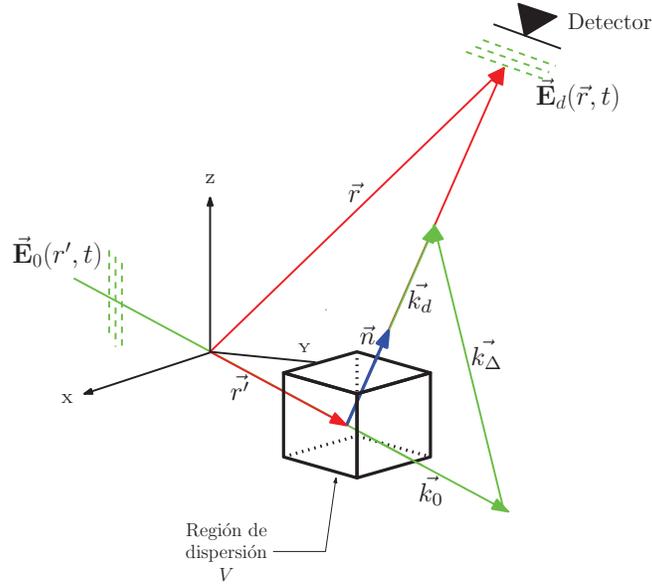


Figura 1.2: El volumen de dispersión para una densidad de dispersores  $n(\vec{r}, t)$

En la difusión Rayleigh, la longitud de onda incidente es mayor que el tamaño de los dispersores. Si además la longitud de onda es mayor que la distancia entre los dispersores, la distribución de estos en el volumen  $V$ , puede ser aproximada por una función de densidad  $n(\vec{r}', t)$  continua. Así, el campo total dispersado por la región puede ser determinado por una integral sobre la distribución continua de densidad  $n(\vec{r}', t)$ . Tomando en cuenta que el campo de la molécula en la posición  $\vec{r}'$  llega a la posición  $\vec{r}$  sobre el vector  $(\vec{r} - \vec{r}')$  con dirección  $\hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ , y considerando nuevamente esta dispersión como elástica, la condición (1.8) genera un desfase direccional de cada dispersor con la forma  $e^{ik_0\hat{n}\cdot\vec{r}'}$ . Entonces podemos escribir al campo total dispersado utilizando (1.21) y (1.1) con  $u_0(\vec{r}') = 1$  como:

$$\vec{E}_d = r_0^R \frac{e^{ik_0 r}}{r} e^{-i\omega_0 t} \int_V \left[ (\hat{n} \times \vec{E}_0) \times \hat{n} \right] n(\vec{r}', t) e^{-i\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}'} d^3 r' \quad \text{con : } \vec{k}_\Delta = k_0 \hat{n} - \vec{k}_0 \quad (1.22)$$

Cuando el campo incidente es uniforme podemos escribir el campo dispersado como:

$$\vec{E}_d = \vec{E}_{d0}(\vec{r}, t) \int_V d^3 r' n(\vec{r}', t) e^{-i\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}'} = \vec{E}_{d0}(\vec{r}, t) n(\vec{k}_\Delta, t) \quad (1.23)$$

donde  $n(\vec{k}_\Delta, t)$  es la transformada de Fourier espacial de la función de densidad y

$$\vec{E}_{d0}(\vec{r}, t) = r_0^R \frac{e^{ik_0 r}}{r} e^{-i\omega_0 t} \left[ (\hat{n} \times \vec{E}_0) \times \hat{n} \right] \quad (1.24)$$

es el campo de un solo dispersor colocado en el origen. Así se ha mostrado que el campo dispersado a la posición  $\vec{r}$  lleva consigo información sobre las moléculas dispersoras dentro del volumen  $V$  a través de la transformada de Fourier espacial de la densidad.

### 1.2.5. Factor de forma

La mayoría de los fotodetectores son sensibles a la intensidad del campo. Por tanto la corriente producida es proporcional al cuadrado del campo eléctrico el cual se puede obtener fácilmente de (1.23) como:

$$\left| \vec{E}_d \right|^2 = \left| \vec{E}_{d0}(\vec{r}, t) \right|^2 \left| n(\vec{k}_\Delta, t) \right|^2 \quad (1.25)$$

La corriente total resulta entonces proporcional al cuadrado del campo producido por un dispersor multiplicada por un factor que depende de las fluctuaciones de densidad  $\left| n(\vec{k}_\Delta, t) \right|^2$ . Siguiendo esta idea se define al factor de forma como:

$$S(\vec{k}_\Delta, t) = \frac{\left| n(\vec{k}_\Delta, t) \right|^2}{n_0 V} \quad (1.26)$$

donde  $n_0 V$  es el número de dispersores dentro de la región de observación  $V$ . Este factor de forma es dependiente del tiempo, sin embargo se puede definir un factor de forma estático por medio del promedio en el tiempo:

$$\begin{aligned} S(\vec{k}_\Delta) &= \frac{\left\langle \left| n(\vec{k}_\Delta, t) \right|^2 \right\rangle}{n_0 V} = \frac{1}{n_0 V} \left\langle \left| \sum_{i=1}^{n_0 V} e^{-\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}_i} \right|^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{n_0 V} \left\langle \sum_{i=1}^{n_0 V} \sum_{j=1}^{n_0 V} e^{-\vec{k}_\Delta \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.27)$$

### 1.3. Heterodinaje

La luz esparcida puede tener una intensidad muy baja que podría requerir de detectores optoelectrónicos de muy alta sensibilidad. Para superar este problema se recurre a una técnica de detección de bajas intensidades conocida como: *heterodinaje*. La técnica consiste básicamente en mezclar el campo dispersado  $\vec{\mathbf{E}}_d = \vec{E}_d(\vec{r}, t)$  con un campo eléctrico conocido  $\vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} = \vec{E}_{\text{OL}}(\vec{r}, t)$ .

El campo formado por  $\vec{\mathbf{E}}_d + \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}$  incide sobre la superficie de un fotodetector para así obtener información sobre los difusores. Un fotodetector transformará la intensidad luminosa, del campo mezclado, en una corriente eléctrica medible siendo, esta última, proporcional al cuadrado de los campos  $\vec{\mathbf{E}}_d$  y  $\vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}$ , que en ecuaciones queda como:

$$i(t) \propto |\vec{\mathbf{E}}_d + \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}|^2 = |\vec{\mathbf{E}}_d|^2 + |\vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}(\vec{r}, t)|^2 + \vec{\mathbf{E}}_d \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}^* + \vec{\mathbf{E}}_d^* \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} \quad (1.28)$$

Se puede observar que los primeros términos de la segunda igualdad son constantes en el tiempo. En términos de corriente eléctrica, se considerará que estos términos generarán una corriente directa, o continua, sobre el detector. Por los tanto se puede reescribir la ecuación (1.28) como:

$$i(t) \propto \vec{\mathbf{E}}_d \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}^* + \vec{\mathbf{E}}_d^* \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} \quad (1.29)$$

#### 1.3.1. Detección heterodina

En el caso del fotodiodo la “señal de entrada” es un flujo de fotones, mientras que la “señal de salida” es la corriente eléctrica dada por:

$$i(t) = \eta_e \frac{e^- P_e(t)}{\hbar \omega_0} \quad (1.30)$$

donde:  $\eta_e$  es la eficiencia cuántica y  $e^-$  es la carga eléctrica del electrón.

La potencia de entrada,  $P_e(t)$ , se puede calcular a partir del vector de Poynting  $\vec{\mathbf{S}} = \vec{S}(\vec{r}, t)$  e integrando sobre la superficie  $A$  del fotodiodo. Entonces se obtiene:

$$P_e(t) = \int_A \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\sigma} = \int_A \frac{1}{\mu_0 c} |\vec{\mathbf{E}}|^2 \hat{n} \cdot d\vec{\sigma} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_A |\vec{\mathbf{E}}|^2 \hat{n} \cdot d\vec{\sigma} \quad (1.31)$$

La detección heterodina consiste en mezclar la señal proveniente del campo dispersado con el campo de referencia en la superficie del detector. Usando las ecuaciones (1.30) y (1.31) se obtiene:

$$i(t) = \eta_e \frac{e^-}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_A |\vec{\mathbf{E}}|^2 \hat{n} \cdot d\vec{\sigma}$$

Como  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_d + \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}$  y conforme a la ecuación (1.29), la corriente se puede escribir como:

$$i(t) = \frac{\eta_e e^-}{\hbar\omega_0} r_0^R \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int_A \left( \vec{\mathbf{E}}_d \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}^* + \vec{\mathbf{E}}_d^* \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} \right) d\sigma \quad (1.32)$$

A partir de la reconstrucción de *Kirchhoff-Sommerfeld*, el campo en  $\vec{r}$  sobre un área  $A$  localizada por  $\vec{r}$  en la aproximación de campo lejano[1], se obtiene:

$$\vec{E}_{\text{OL}}(\vec{r}) = \frac{k_0}{2\pi i} \int_A \frac{e^{ik_0 r}}{r} \vec{E}_{\text{OL}}(\vec{r}') d\sigma \quad \text{y} \quad \vec{E}_{\text{OL}}^*(\vec{r}) = \frac{k_0}{2\pi i} \int_A \frac{e^{ik_0 r}}{r} \vec{E}_{\text{OL}}^*(\vec{r}') d\sigma$$

Sustituyendo en la ecuación (1.32) la aproximación anterior junto con los campos  $\vec{\mathbf{E}}_d$  y  $\vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}$ , se obtiene:

$$i(t) = \frac{\eta_e e^-}{\hbar\omega_0} r_0^R \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left( \vec{E}_0(\vec{r}') \vec{E}_{\text{OL}}^*(\vec{r}') e^{-i\omega_\Delta t} + \vec{E}_0^*(\vec{r}') \vec{E}_{\text{OL}}(\vec{r}') e^{i\omega_\Delta t} \right) \quad (1.33)$$

Los campos  $\vec{E}_d(\vec{r}')$  y  $\vec{E}_{\text{OL}}(\vec{r}')$ , siendo modulados por sus respectivos perfiles  $u_0(\vec{r}')$  y  $u_{\text{OL}}(\vec{r}')$ , se sustituyen en la ecuación anterior para obtener:

$$i(t) = \frac{\eta_e e^-}{\hbar\omega_0} r_0^R \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{\text{OL}} \left( U(\vec{r}') e^{i[\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}' - \omega_\Delta t]} + U^*(\vec{r}') e^{i[\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}' + \omega_\Delta t]} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{con: } \vec{k}_\Delta &= \vec{k}_{\text{OL}} - \vec{k}_0 \\ U(\vec{r}') &= u_0(\vec{r}') u_{\text{OL}}(\vec{r}') \end{aligned}$$

Integrando sobre un volumen pequeño de dispersión  $V$  se obtiene la corriente sobre el fotodiodo debido a un conjunto de dispersores en este volumen. Integrando  $i(t)$  sobre  $V$  y multiplicando por la función de densidad  $n(\vec{r}', t)$  (sección 1.1.5) la corriente se expresará como:

$$i(t) = \xi \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{\text{OL}} \int_V n(\vec{r}', t) \left( U(\vec{r}') e^{i[\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}' - \omega_\Delta t]} + U^*(\vec{r}') e^{i[\vec{k}_\Delta \cdot \vec{r}' + \omega_\Delta t]} \right) dV \quad (1.34)$$

$$\text{con: } \xi = \frac{\eta_e e^- r_0^R}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

Tomando la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la ecuación (1.35) se obtiene la densidad espectral de la corriente. A partir del análisis de densidad espectral se podrá obtener información acerca de los dispersores de luz. La densidad espectral se define

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} i(t)i(t+\tau)e^{-i\omega t} d\tau$$

entonces:

$$I(\omega) = \Lambda(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_{\text{ol}})^2 \int \left| W(\vec{k}_\Delta - \vec{k}) \right|^2 \left[ S(\vec{k}, \omega - \omega_\Delta) + S(\vec{k}, \omega + \omega_\Delta) \right] d^3k \quad (1.35)$$

$$\text{con: } \Lambda = \frac{n_0}{8\pi k_0^2} \left( \frac{\eta_e \vec{e} \cdot \vec{r}_0^R}{\hbar\omega_0} \right)^2 \frac{\epsilon_0}{\mu_0}$$

Las funciones  $W(\vec{k}_\Delta - \vec{k})$  y  $S(\vec{k}, \omega - \omega_\Delta)$  corresponden a las transformadas de Fourier[1] del perfil  $U(\vec{r})$  y del Factor de Forma, respectivamente.

## Capítulo 2

# Diseño y montaje de un experimento para medir fluctuaciones de densidad

En este capítulo se describen los elementos principales de una técnica que utiliza la detección heterodina de la luz difundida por un chorro supersónico para estudiar y medir las fluctuaciones de densidad para un vector de onda determinado por montaje óptico. En la primera parte se discute sobre la propagación de un haz proveniente de un láser a través de un medio homogéneo deduciendo las ecuaciones fundamentales y se analiza la solución más simple: el modo transversal electromagnético ( $TEM_{00}$ ). Se obtienen los parámetros físicos más importantes que determinan la propagación del haz y se muestra que esta es gaussiana. Se deducen las ecuaciones del efecto producido por una lente en la propagación del haz, comenzando para el caso en que se conocen los parámetros en el plano de la lente y después para el caso en que la cintura se encuentra a una distancia  $z$  del plano.

### 2.1. La luz láser

El haz de luz láser es similar en muchos aspectos a las ondas planas, emiten con una longitud de onda  $\lambda$ , solo que su distribución de intensidad no es uniforme, se concentra cerca del eje de propagación y sus frentes de fase están ligeramente curvados[8]. Para la propagación de haces con dsitribuciones de intensidad cerca del eje se usan las ecuaciones de Maxwell en un medio

isotrópico en ausencia de fuentes [14]:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_m \vec{\mathbf{E}}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} &= -\mu_m \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} &= \varepsilon_m \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Con  $\vec{\mathbf{H}}$  y  $\vec{\mathbf{E}}$  los campos magnético y eléctrico respectivamente,  $\varepsilon_m$  y  $\mu_m$  la función dieléctrica y susceptibilidad magnética del medio, estos últimos se consideran constantes en el tiempo pero pueden tener una dependencia con la posición.

Del conjunto de ecuaciones (2.1) es fácil obtener la ecuación de onda para el campo eléctrico:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{E}} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Esta ecuación describe la propagación del campo eléctrico en el medio.

Para un campo eléctrico con dependencia temporal y espacial la ecuación (2.2) se transforma en:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{\mathbf{E}} - \vec{k}^2(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3)$$

Conocida, también, como la ecuación de *Helmholtz* y donde:

$$\vec{k}^2(\vec{r}) = \omega_0^2 \mu(\vec{r}) \varepsilon(\vec{r})$$

### 2.1.1. El haz gaussiano

Es posible escribir el operador *Laplaciano* en coordenadas cilíndricas haciendo las transformaciones apropiadas:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \nabla_{r_\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r_\perp^2} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Para un haz viajando en la dirección  $z$  se propone a

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= \vec{E}_0(\vec{r})u(\vec{r})e^{-i\omega_0 t} \\ &= \vec{E}_0 e^{-ikz} u(\vec{r})e^{-i\omega_0 t} \\ &= \vec{E}_0 e^{-ikz} \Psi(r_\perp, z)e^{-i\omega_0 t}\end{aligned}\quad (2.5)$$

como solución a la ecuación de *Helmholtz* [8] donde  $\Psi$  es una función compleja y  $\vec{E}_0$  es el vector de polarización del campo eléctrico.

Sustituyendo la solución (2.5) en la ecuación (2.3), y usando el laplaciano en coordenadas cilíndricas (ec. (2.4)) fácilmente se obtiene:

$$\nabla_r^2 \Psi - 2ik(r) \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

Con la *aproximación de amplitud lentamente variable*<sup>1</sup> se puede despreciar el término  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$  dado que la sección transversal del haz es mucho más grande que la longitud de onda, entonces se dice que  $\Psi$  depende muy débilmente de  $z$ .

Es fácil comprobar que una solución<sup>2</sup> a la ecuación de onda es:

$$\Psi = e^{-i(P(z) + \frac{k}{2q(z)} r_\perp^2)} \quad (2.7)$$

donde  $P(z)$  es una función compleja que se asocia con la propagación del haz y  $q(z)$ , también compleja, se asocia con la variación de intensidad a la distancia  $r_\perp$  del eje óptico.

Al sustituir la solución (2.7) en la ecuación de onda (ec. (2.2)) resultará una ecuación en términos de potencias de  $r$ . Al comparar los términos de potencias de  $r$ , aparecen las relaciones<sup>3</sup>:

$$q' = 1 \text{ y } P' = \frac{-i}{q}$$

Al integrar  $q'$  se revela la forma funcional  $q(z) = z + q_0$  con la que es posible obtener la solución de  $P'$ . La integración de  $P'$  da como resultado

$$P(z) = -in \left( 1 + \frac{z}{q_0} \right)$$

<sup>1</sup>Estas aproximación se refiere a que  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial \Psi}{\partial z}$

<sup>2</sup>Existen otras soluciones más complicadas a la ecuación de onda que involucran variación azimutal.

<sup>3</sup> $q' = \frac{dq}{dz}$  y  $P' = \frac{dP}{dz}$

Susituyendo las funciones  $q(z)$  y  $P(z)$  dentro de la solución a la ecuación de onda se tendrá:

$$\Psi = \frac{q_0}{q_0 + z} e^{\left(-i \frac{k}{2(q_0+z)} r_{\perp}^2\right)} \quad \text{con } q_0 = -i \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = -iz_0 \quad (2.8)$$

donde  $z_0$  es conocido como la profundidad del campo o *rango de Rayleigh* y es la magnitud de  $q_0$ .

En el plano  $z = 0$  la ecuación (2.8) tendrá el valor:

$$\Psi|_{z=0} = e^{-\left(\frac{r_{\perp}}{w_0}\right)^2} \quad (2.9)$$

Claramente se ve que en el plano  $z = 0$  la función toma la forma de una distribución *gaussiana*.

Vista en una forma equivalente la ecuación (2.8) se puede describir como[14]:

$$\Psi(r_{\perp}, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + r_{\perp}^2}} e^{\left(-i \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right)} e^{\left(\frac{-r_{\perp}^2 \left(1 - i \frac{z}{z_0}\right)}{w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)}\right)}$$

De la ecuación anterior pueden definirse los parámetros que definen la propagación de un haz gaussiano:

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right) \quad (2.10)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right) = z \left(1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right) \quad (2.11)$$

$$\eta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right) \quad (2.12)$$

El parámetro  $w(z)$  se conoce como el ancho del haz (*spot size*) y  $w_0$  es la *cintura mínima* del haz en el plano  $z = 0$ . Es fácil ver que en el límite de  $z \rightarrow 0$  entonces  $w(z) \rightarrow w_0$  en la ecuación (2.10) y el radio de curvatura  $R(z)$  tiende a  $\infty$  en la ecuación (2.11). Es decir, el frente de onda es plano en el punto donde el ancho del haz  $w(z)$  es mínimo y físicamente es la cintura del haz. Esto hace que la propagación del haz sea como se muestra en la figura 2.1 para el caso  $\eta(z = 0) = 0$ .

Un haz con distribución de intensidad *gaussiana*, visto como solución, puede no ser la única solución a la ecuación de *Helmholtz*. Con frecuencia se le conoce a este haz como el “modo fundamental” debido a su forma de propagación; lo que indica que existen otros modos de

propagación[8] que también son solución a la ecuación (2.3). La mayoría de los láseres oscilan en el modo fundamental o modo  $TEM_{00}$  como también se le conoce.[8]

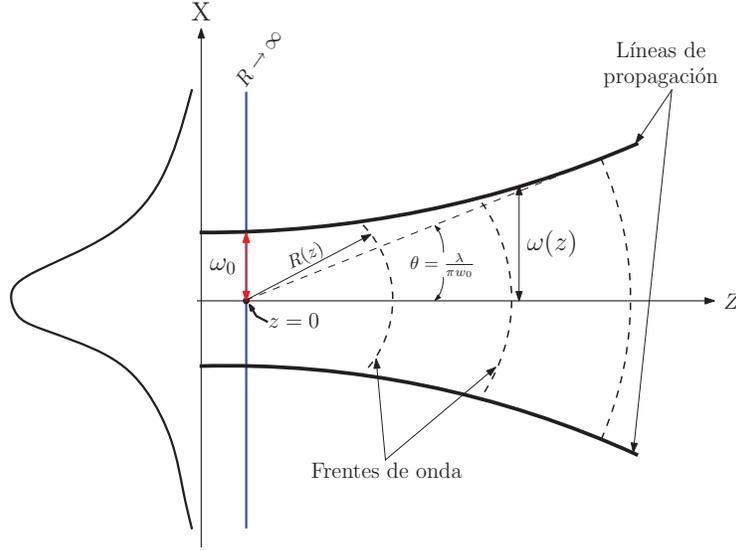


Figura 2.1: Propagación y parámetros de un haz gaussiano.

Finalmente, la solución completa a la ecuación de *Helmholtz*, combinando los parámetros (2.10), (2.11) y (2.12), queda:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\left[ \frac{r^2}{w^2(z)} + i \left( \frac{k}{2R(z)} - \eta(z) \right) \right]} e^{ikz} \quad (2.13)$$

donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . En esta ecuación la cintura del haz  $w(z)$  es la distancia al eje en la que la amplitud del campo comienza a decaer como  $\frac{1}{e}$ .

## 2.2. Óptica gaussiana

### 2.2.1. El haz gaussiano a través de una lente

Un haz con distribución de intensidad gaussiana y que oscila en el modo  $TEM_{00}$  se mantiene con esta forma al atravesar una lente delgada. El haz que emerge de la lente conserva su distribución de intensidad y el modo de oscilación. Una lente delgada o un conjunto de éstas son usadas para producir la cintura deseada.

En la figura 2.2 se muestra un haz con ancho  $w_{01}$  a una distancia  $z_1$  de la lente y un haz que emerge de la lente con una cintura  $w_{02}$  a una distancia  $z_2$  de la lente. Las ecuaciones que

describen este comportamiento[14] son las siguientes:

$$\frac{1}{w_{02}^2} = \frac{1}{w_{01}^2} \left(1 - \frac{z_1}{f}\right)^2 + \frac{1}{f^2} \left(\frac{\pi w_{01}}{\lambda}\right)^2 \quad (2.14)$$

$$z_2 = f + \frac{(z_1 - f) f^2}{(z_1 - f) + \left(\frac{\pi w_{01}}{\lambda}\right)^2} \quad (2.15)$$

Con estas ecuaciones es posible localizar exactamente la posición y el tamaño del nuevo haz emergido de la lente.

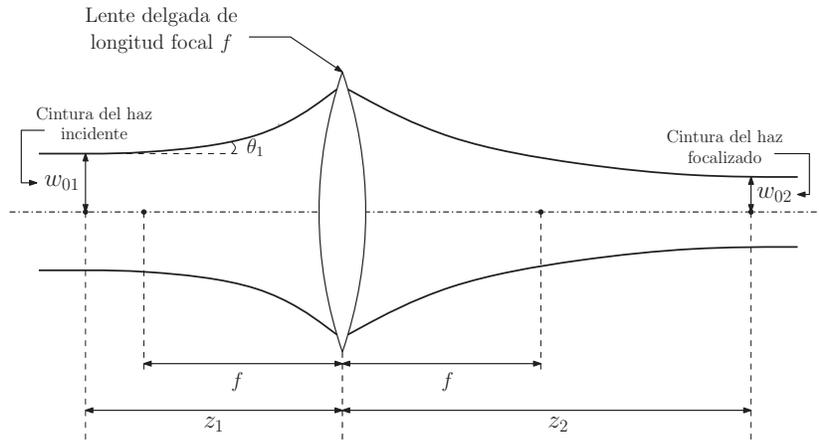


Figura 2.2: Focalización de un haz gaussiano.

Por otra parte, si la posición de  $w_{01}$  coincide con la distancia focal  $f$ , es decir, que  $f = z$  entonces se tendrá:

$$w_{02} \approx \frac{f\lambda}{\pi w_{01}} = f\theta_1 \quad (2.16)$$

$$z_2 = f \quad (2.17)$$

donde  $\theta_1$  representa el ángulo de divergencia del haz incidente.

Para un arreglo de dos lentes es fácil ver que se puede obtener  $w_{03} \frac{f_2}{f_1} w_{01}$  y es fácil generalizar esta reacción.

### 2.3. Descripción general

En la figura 2.3 se muestra el montaje experimental. La luz proveniente de un láser al hace incidir sobre un modulador acusto-óptico (MAO). Aquí se produce por difracción un segundo

haz llamado *Oscilador Local*, desplazado en frecuencia 110 MHz con respecto al haz *Primario* incidente.

Ambos haces se cruzan en el punto “de focalización”. La región de intersección de ambos haces forma el volumen de difusión. El haz *Primario* es difundido por el flujo que se quiere estudiar. La luz difundida en la dirección del *Oscilador Local* es detectada por un fotodiodo. A la mezcla de la señal difundida con el *OL* en la superficie del detector se le llama heterodinaje (ver sección 1.3.1). Se utiliza en este caso para resolver el problema de la baja intensidad de la luz difundida.

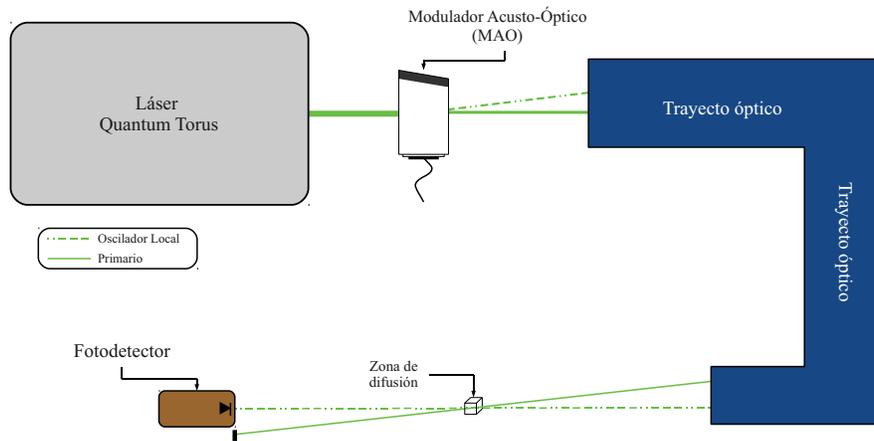


Figura 2.3: Esquema de un montaje experimental para la difusión Rayleigh

### 2.3.1. El Láser

El láser *Taurus* de estado sólido es una fuente de luz monocromática linealmente polarizada manufacturado por compañía *Quantum*. Oscila en el modo fundamental  $TEM_{00}$  con una longitud de onda de  $\lambda = 532\text{ nm}$ . El haz tiene un diámetro a la salida de  $0,850\text{ mm}$  además de una potencia de salida de  $325\text{ mW}$ . El láser fija electrónicamente la frecuencia de oscilación evitando saltos en el modo de oscilación.



Longitud de onda	532 nm
Modo espacial	$TEM_{00}$
Radio del haz ( $w$ )	0,425 mm
Ángulo de divergencia ( $\theta$ )	0,4 mrad
Potencia	325 mW
Longitud de coherencia	> 10 mtrs.
Polarización	vertical

Tabla 2.1: Características generales del láser *Torus*.

El haz producido por este láser es focalizado dentro del MAO cumpliendo con los requerimientos, de este último, para producir los ordenes de difracción.

### 2.3.2. Modulador acusto-óptico

En el MAO se crea una onda acústica estacionaria de 110 MHz. Esta onda actúa como rejilla de difracción de manera que cuando el haz gaussiano incide, se difracta siguiendo la ley de Bragg. El primer orden de difracción está desplazado en frecuencia 110 MHz, el segundo 220 MHz y así sucesivamente para los siguientes ordenes. Escogiendo el ángulo de incidencia de manera adecuada se puede lograr que el primer orden de difracción tenga mayor intensidad que los ordenes mayores (figura 2.4).

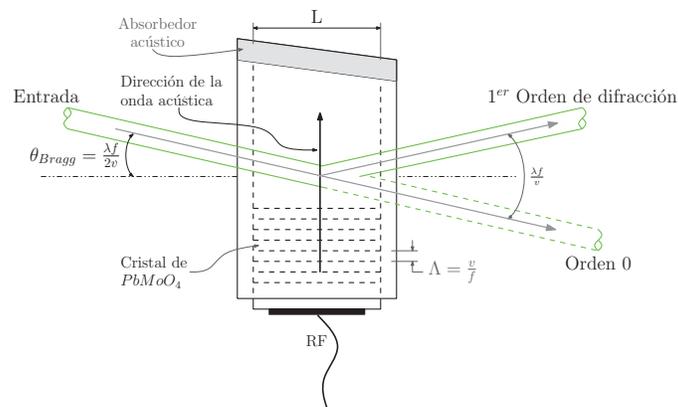


Figura 2.4: Esquema del Modulador Acusto-Óptico.

De esta manera se obtienen dos haces a la salida del MAO; el *Primario* que es la parte del haz incidente que no ha sido alterada y el *Oscilador Local* que esta desplazado y forma un ángulo de:

$$\sin(\theta_{Bragg}) \simeq \theta_{Bragg} = \frac{n\lambda_m}{2\Lambda} = \frac{n\lambda f}{2\eta v}$$

donde:

- $\lambda_m$  es la longitud de onda en el material fotoelástico
- $n$  el orden difractado
- $\Lambda$  el tamaño de la onda acústica dentro del material fotoelástico
- $f$  la frecuencia de la onda acústica
- $\lambda$  la longitud de onda del haz entrante
- $\eta$  el índice de refracción del cristal
- $v$  la velocidad acústica en el medio

Las especificaciones técnicas del MAO se muestran en la tabla 2.2.

Características	
Material de interacción	$PbMoO_4$ ( <i>Molibdato de Plomo</i> )
Longitud de onda	532 nm
Velocidad acústica	3,63 mm/ $\mu$ s
Polarización del haz incidente	vertical y lineal
Frecuencia central	110 MHz
Ancho de banda	50 MHz
Impedancia de entrada	50 $\Omega$
Tamaño de apertura	1 mm

Tabla 2.2: Características de operación del MAO.

### 2.3.3. La zona de difusión

Puede demostrarse que la zona de difusión está determinada por el cruce de los haces *Oscilador Local* y *Primario*[1]. En la figura 2.5 se muestra el vector de onda  $\vec{k}_\Delta$  de las fluctuaciones que se pueden estudiar definido por el ángulo entre los haces. En términos del campo eléctrico, el *Oscilador Local* así como el *Primario*, están modulados por un perfil gaussiano de intensidad  $u_{OL}$  y  $u_0$ , respectivamente. Entonces el campo tiene la forma:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} &= \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} u_{\text{OL}}(\vec{r}) e^{i[\vec{k}_{\text{OL}} \cdot \vec{r} - (\omega + \omega_{\Delta})t]} \\
&= \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}(\vec{r}) u_{\text{OL}}(\vec{r}) e^{-i(\omega + \omega_{\Delta})t} \\
\text{con: } \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}}(\vec{r}) &= \vec{\mathbf{E}}_{\text{OL}} e^{i\vec{k}_{\text{OL}} \cdot \vec{r}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

donde  $\omega_{\Delta}$  es el desplazamiento en frecuencia del *OL* respecto a la onda incidente.

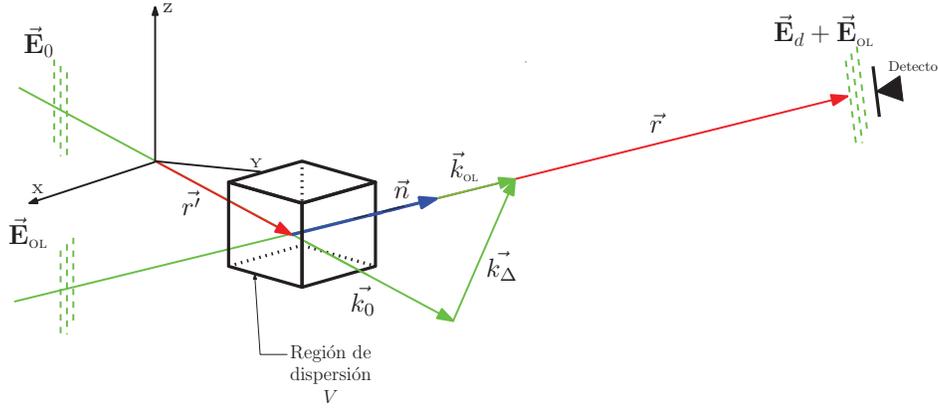


Figura 2.5: Cruce del OL y el Primario

Una función  $U(\vec{r}) = u_{\text{OL}}(\vec{r}')u_0(\vec{r}')$  define al volumen de observación. Esta función expresa la intensidad de luz en cada punto del volumen de difusión[11]. De la figura 2.5 es fácil encontrar que  $\vec{k}_{\Delta}$  se relaciona con  $\vec{k}_0$ , tomando  $|\vec{k}_0| = |\vec{k}_{\text{OL}}|$ , de la forma:

$$|\vec{k}_{\Delta}| = 2k_0 \text{Sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \tag{2.19}$$

En la zona de difusión donde se coloca el difusor de luz. En particular, en este tipo de montaje se usa un sistema de posicionamiento, en el plano X-Y, para el difusor respecto a la zona de difusión ya que espacialmente está fija. En otras palabras, el vector  $\vec{k}_{\Delta}$  es fijo para algún ángulo de difusión  $\theta$ .

## 2.4. La detección

Para detectar la señal dispersada, mezclada con el *OL*, se usa el fotodiodo **S5973** de la compañía *Hamamatsu*. Este fotodetector de *Si* es un elemento de respuesta rápida y de alta sensibilidad, ideal para la detección de la difusión Rayleigh. En la tabla 2.3 se muestran algunas

características del fotodiodo *Hamamatsu*.

Fotodiodo <i>Hamamatsu S5973</i>	
Diámetro de área activa	0.4 [mm]
Área activa efectiva	0.12 [mm <sup>2</sup> ]
Intervalo de respuesta espectral ( $\lambda$ )	320 a 1000 [nm]
Pico de máxima sensibilidad ( $\lambda_p$ )	760 [nm]
Fotosensitividad $s = \frac{\eta_e e^-}{h\nu_0}$ para $\lambda_p = 532$ nm	0.3 [A/W]
Eficiencia cuántica $\eta_e$	91 %
Frecuencia de respuesta ( $f_c$ )	1 GHz

Tabla 2.3: Características del fotodiodo *Hamamatsu S5973*

Para la detección de señales de baja intensidad por un fotodiodo se deben tomar en consideración algunos parámetros como: respuesta espectral, eficiencia cuántica, sensibilidad de detección, velocidad y frecuencia de respuesta, además del cociente de señal sobre ruido, entre otros.

## Capítulo 3

# Perfilómetro

La información de interés sobre las fluctuaciones de densidad está contenida en la densidad espectral de la corriente  $I(\omega)$ . Para extraer información es necesario que la ecuación (1.35) se pueda aplicar al montaje experimental del capítulo dos. Esto solo es posible si los haces son *gaussianos* y presentan frentes de onda planos en la zona de difusión, es decir, que ambos haces se cruzan en sus puntos de focalización.

En este capítulo se describe la construcción y aplicaciones de un nuevo instrumento capaz de medir, a partir de la intensidad luminosa, el perfil de los haces. Se ha bautizado a este nuevo instrumento con el nombre de: *perfilómetro*.

Se comienza con una breve exposición sobre la fotorresistencia como el elemento clave del perfilómetro, seguida por una descripción sobre la construcción de este instrumento. Se podrá notar que las mediciones hechas con el perfilómetro tienen una incertidumbre muy baja. Finalmente se muestran las aplicaciones del perfilómetro, como instrumento de medición.

Se hicieron mediciones dentro del trayecto óptico del haz y se compararon con datos teóricos generados a partir de un *script* de cómputo que combina las ecuaciones de propagación libre con la óptica para haces gaussianos. Para verificar el comportamiento de los haces se grafican los datos experimentales junto con los datos teóricos.

### 3.1. Sobre los sensores de luz

Los fotosensores, o sensores de luz, son aquellos que convierten las señales ópticas en algún tipo de señal eléctrica medible. Su funcionamiento se basa en el efecto fotoeléctrico. Se consideran detectores cuánticos porque su respuesta depende del número de fotones absorbidos, así es que dependen de la generación de electrones libres. Para producir tal efecto, en el material fotosensor el fotón incidente debe tener suficiente energía para liberar algún electrón. Pueden diseñarse fotosensores con capacidad de respuesta muy rápida que son ideales para la detección de señales ópticas en sistemas fotónicos, por ejemplo para un sistema de difusión Rayleigh.

La respuesta en amplitud a una longitud de onda corta es, regularmente, muy grande. Pero, cuando la longitud de onda se vuelve muy grande, la energía del fotón es muy baja para liberar electrones y la respuesta del fotosensor decae a cero. El espectro de respuesta es una característica importante y es comunmente especificada por el fabricante, al menos como un valor nominal. Conocer el espectro de respuesta permitiría manejar la potencia de salida de un láser, por ejemplo. Sin embargo, hacer calibraciones absolutas del espectro de respuesta es difícil y, regularmente, muy costoso.

Todos los fotosensores responden al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico,  $|E|^2$ . Si se piensa en el mecanismo que convierte la intensidad luminosa en una señal eléctrica se puede hacer una clasificación de sensores entre: fotosensores y termosensores.

Los fotosensores responden al número de fotones absorbidos mientras que los termosensores se basan en el efecto fototérmico con el que se convierte la energía lumínica en calor. La respuesta de los termosensores depende de la energía luminosa, más que del número de fotones. Por esto, este tipo sensores no pueden medir intensidades luminosas con alta resolución. Puede hacerse una subclasificación[6] de los fotosensores que puede ayudar a distinguirlos según su principio de operación: efecto fotoeléctrico externo y efecto fotoeléctrico interno. Los primeros son elementos fotoemisores y los segundos son elementos semiconductores.

### 3.2. La fotorresistencia

Al igual que todos los fotosensores basados en el efecto fotoeléctrico interno, la fotorresistencia (figura 3.1) es un sensor que responde a la potencia luminosa más que a la amplitud de la señal. La base de operación de un sensor de luz es que al incidir un fotón al menos un *electrón* sea desprendido de su átomo asociado. Entonces una fotorresistencia es un elemento eléctrico que cambia su resistencia eléctrica cuando se aplica luz sobre su superficie.

Con frecuencia el fabricante proporciona las características de operación. Es muy común

encontrar un rango de resistencia que va desde mega ohms ( $M\Omega$ ) en oscuridad hacia cientos de ohms ( $\Omega$ ) bajo máxima iluminación. Como la intensidad de luz afecta la resistencia, se usan estos elementos en aplicaciones como medidores fotográficos de luz, densímetros, colorímetros y aplicaciones similares. Si se conoce la *respuesta espectral* de una fotorresistencia se puede predecir su comportamiento a diferentes longitudes de onda.

El *Sulfuro de Cadmio* ( $CdS$ ) y el *Selenuro de Cadmio* ( $CdSe$ ) son ambos usados por su bajo costo, el ancho de su espectro de resolución y su alta sensibilidad. En la figura 3.1 se muestra la geometría típica de la fotorresistencia. Una película delgada de material policristalino es depositada en un sustrato aislante. Los electrodos son formados por la evaporación de un metal dentro del sustrato policristalino. Esta geometría resulta en un área, relativamente grande, de superficie sensible. El espacio entre electrodos, muy reducido, ayuda a darle una alta sensibilidad a este elemento. El reducido espacio entre electrodos ayuda a tener una ganancia alta<sup>1</sup>. Cuando este tipo de materiales son iluminados, los electrones liberados adquieren la misma energía que tiene los fotones incidentes y pasan de una banda de valencia a una banda de conducción.

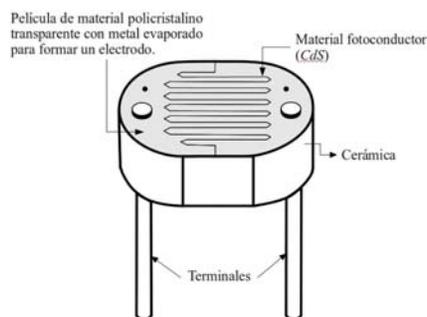


Figura 3.1: Componentes de una fotorresistencia.

Como en un conductor, cuando hay electrones libres significa que una corriente eléctrica puede fluir si se le aplica una diferencia de potencial. El incremento en la intensidad luminosa crea electrones libres, adicionales, que hacen que la resistividad de la fotorresistencia decaiga conforme se incrementa la intensidad luminosa.

### 3.2.1. Principio de Operación

La fotoconductividad puede pensarse como un *efecto fotoeléctrico interno*. Los electrones en la banda de valencia pueden ascender a una banda de conducción. Esto incrementa la conductivi-

<sup>1</sup>La ganancia para la fotoconductividad se define como  $G = \frac{\tau}{T}$  donde:  $\tau$  es el tiempo de vida media y  $T$  es el tiempo de transito en la region activa

dad de un material por la absorción de luz. Este fenómeno es conocido como: *fotconductividad*.

Para entender mejor el comportamiento de un material que presenta fotconductividad considérese la figura 3.2. Un semiconductor uniforme de longitud  $L$  es iluminado con luz monocromática y los fotones absorbidos forman huecos y electrones libres simultáneamente en el material fotoconductor. Al aplicar una diferencia de potencial  $V_0$  al circuito, se crea un campo eléctrico  $\vec{E} = \frac{V_0}{L}$  dentro del material. Bajo la influencia de este campo, los electrones y los huecos se mueven en dirección contraria, dando lugar a una corriente  $i_s$ .

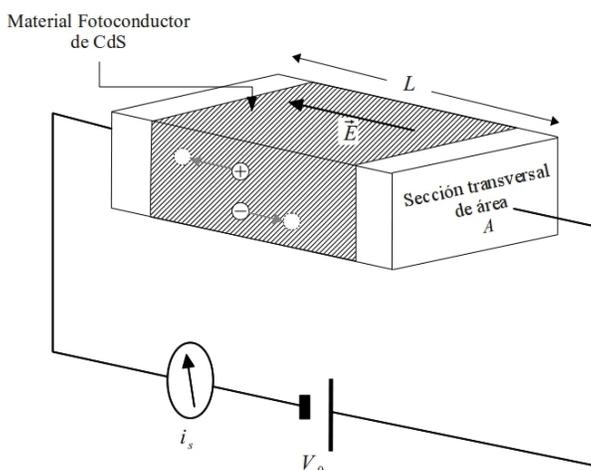


Figura 3.2: Diagrama del circuito de operación.

Una característica importante de la fotorresistencia es la presencia de una corriente de fondo  $i_0$ , si el elemento está en obscuridad total. Intrínsecamente en el semiconductor existen algunas contribuciones eléctricas, finitas, a la conductividad debido a los pares de electrones y huecos generados térmicamente.[10]

Los materiales fotoconductores más comunes, con su rango espectral, y de mayor sensibilidad operables a temperatura ambiente aparecen en la siguiente tabla.

Símbolo	Nombre	Rango espectral
CdS	<i>Sulfuro de Cadmio</i>	400-700 nm
CdSe	<i>Selenuro de Cadmio</i>	500-900 nm
PbS	<i>Sufuro de Plomo</i>	1-3.2 $\mu\text{m}$
PbSe	<i>Selenuro de Plomo</i>	1.5-5.2 $\mu\text{m}$

Tabla 3.1: Semiconductores comunes en la manufactura de fotorresistencias.

Las fotorresistencias se usan de manera importante en áreas como la fotometría, la termometría, la electrónica de control y otras aplicaciones que requieren precisión en mediciones lumínicas sin la necesidad de una respuesta rápida.

### 3.2.2. Caracterización de una fotorresistencia

La caracterización de una fotorresistencia es un proceso complicado. Una caracterización de este tipo de elementos requiere de instrumentos muy sofisticados y costosos. Como un láser sintonizable tanto en longitud de onda como en potencia, además, de un “wattómetro” con un rango de sensibilidad amplio para la potencia y longitud de onda.

Para realizar mediciones de intensidad es suficiente saber que el espectro de respuesta de la fotorresistencia (ver tabla 3.2.1) incluye la longitud de onda con la que se va a trabajar en el sistema de difusión.

## 3.3. Construcción de un perfilómetro

Por sus características la fotorresistencia es un elemento ideal para operar como un sensor de luz en función de la posición. Se diseñó entonces un instrumento capaz de trabajar con intensidades de luz grandes con una alta sensibilidad a los  $532\text{ nm}$  y sin la necesidad de otros instrumentos electrónicos de alta precisión. Su construcción es simple y es fácil de operar.

Un perfilómetro es un instrumento nuevo con el que se pueden determinar perfiles de intensidad de la sección transversal de un haz. Este instrumento posee un circuito de operación muy similar al de la figura 3.2, con la diferencia de tener además un diodo semiconductor para evitar una polarización equivocada. La figura 3.3 muestra un diagrama con el circuito de operación que usa el perfilómetro. Frente de la fotorresistencia se coloca una rejilla de difracción que restringe la cantidad de luz incidente sobre el material fotoconductor. No se produce difracción entre la rejilla y la fotorresistencia porque la distancia entre estas es muy corta ( $< 5\text{ mm}$ ). Juntos, el circuito de operación y la rejilla de difracción, pueden moverse transversalmente a la propagación del haz.

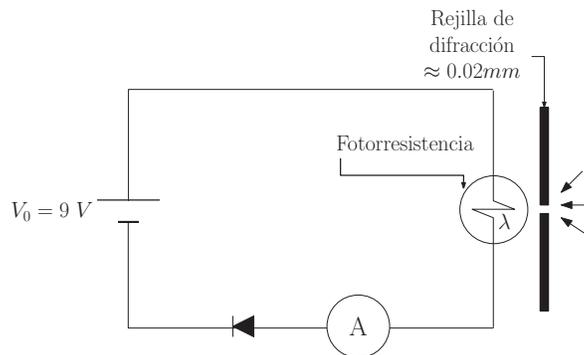


Figura 3.3: Diagrama y circuito del perfilómetro

Se consigue un desplazamiento transversal al haz con una plancha micrométrica y adicionalmente un movimiento longitudinal con un riel óptico (figura 3.4). Esta movilidad permitirá posicionar espacialmente el perfilómetro a una distancia  $z_n$  de la cabeza del láser. Se registra y se grafica la posición transversal contra la corriente que es proporcional a la intensidad luminosa.

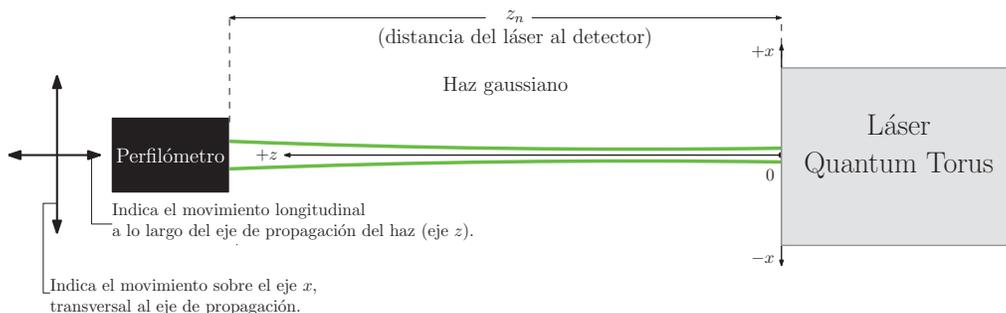


Figura 3.4: Movimientos realizados por el perfilómetro

### 3.4. Perfil de un haz gaussiano

El ancho de un haz *Guassiano* se propaga según la la función

$$w^2(z) = w_0^2 \left( 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right)$$

Los constructores de láseres, regularmente informan al usuario de las características del haz a la salida del aparato: potencia, ancho y polarización. Las características del láser *Torus* de la compañía *Quantum* estas se muestran en la siguiente tabla.

Láser <i>Torus</i>	
Potencia	325 <i>mW</i>
Radio del haz	0,425 <i>mm</i>
Polarización	vertical

Tabla 3.2: Características del haz a la salida.

En este caso fue muy importante hacer la perfilometría del haz libre ya que, contrariamente a lo acostumbrado, la medida a la salida del aparato dada por el fabricante aunque es correcta no corresponde a la cintura, es decir, a su punto de focalización.

Las perfilometrías se vuelven vitales debido a que para extraer la información física, a partir de la ecuación (1.35), es necesario asegurar que la forma del perfil es una función conocida, en este caso que sea un perfil con distribución de intensidad *gaussiana*.

### 3.4.1. Perfilometría

Una perfilometría es la gráfica del registro de datos de la posición del perfilómetro y la corriente, proporcional a la intensidad de luz. Al graficar los datos de una perfilometría se muestra el perfil de intensidad del haz en una posición  $z$  de la trayectoria del haz. A los datos de cada perfilometría se les ajusta una función gaussiana con la que se determina el radio del haz. En la figura 3.5 se muestra la gráfica de una perfilometría y la aproximación con una función gaussiana.

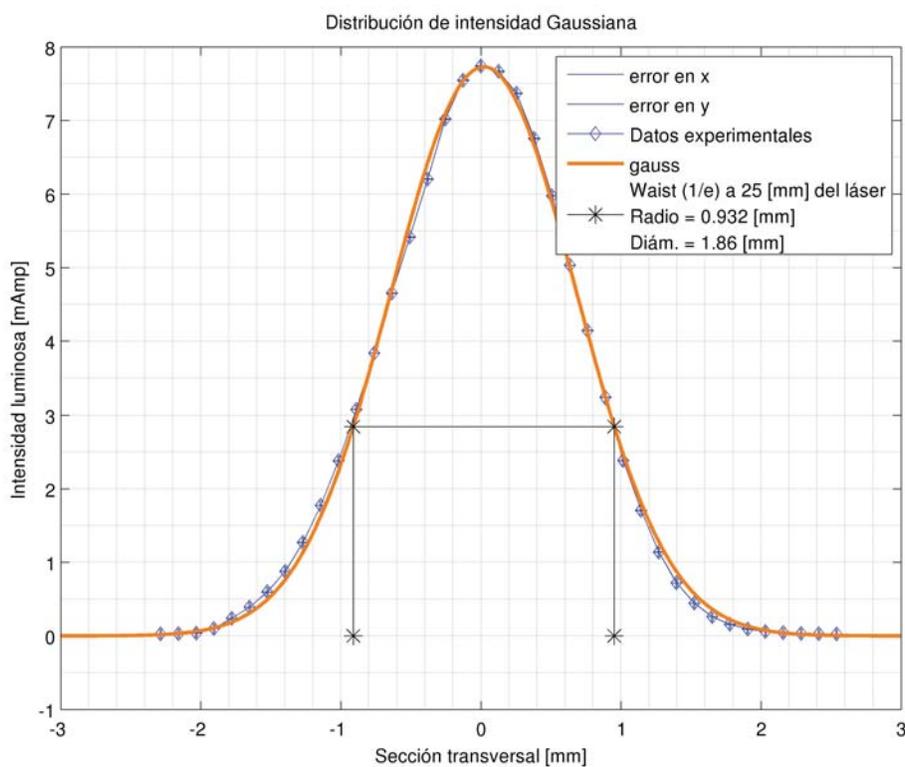


Figura 3.5: Datos experimentales y ajuste con una función gaussiana.

Los datos de la gráfica en la figura 3.5 fueron tomados a una distancia  $z_1 = 25\text{ mm} \pm 0,5\text{ mm}$  de la salida del láser. En la tabla 3.3 se muestran las incertidumbres de los instrumentos en la medición.

Eje	Incertidumbre	Unidades
$\Delta x$	$\pm 0,005$	mm
$\Delta y$	$\pm (y * 0,05\% + 0,0002)$	mAmps.

Tabla 3.3: Incertidumbres en las mediciones

Se usó la función  $g(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$ , como función de ajuste, con  $A$ ,  $x_0$ , y  $\sigma$  los parámetros del ajuste. En la tabla 3.4 aparecen los valores numéricos de los parámetros ajustados usando el programa *gnuplot*.

Parámetros finales	Error	% Error
A = 7,72849	$\pm 0,03825$	(0.4949 %)
$x_0 = -0,0202411$	$\pm 0,003766$	(18.61 %)
$\sigma = 0,658878$	$\pm 0,003766$	(0.5716 %)

Tabla 3.4: Parámetros finales del ajuste de la función  $g(x)$ .

Los valores de los parámetros en la tabla 3.4 se usan para obtener el ancho del haz en la posición  $z_1$ . Comparando la función  $g(x)$  con la función  $\Psi(z = 0) = e^{-\left(\frac{r_{\perp}}{w_0}\right)^2}$  se obtiene el valor de la cintura del haz en el punto  $z_1 = 25 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ , como se indica en la tabla 3.5.

Cintura del haz	Error	% Error
$w_{01} = 0,931 \text{ mm}$	$\pm 0,0053 \text{ mm}$	(0.571 %)

Tabla 3.5: Cintura del haz en  $z_1 = 25 \text{ mm}$ 

De la tabla 3.4 puede notarse claramente que el error en la aproximación de la función gaussiana a los datos de la perfilometría es muy bajo. Con esto se comprueba que el perfilómetro es un instrumento de gran precisión.

### 3.5. Perfilometría del trayecto óptico

Usando las ecuaciones (2.10), (2.14) y (2.15), y haciendo algunas suposiciones, se hizo un *script* para que Matlab o GNUplot grafique el trayecto óptico (figura 3.6). Con este script puede generarse cualquier dato de cualquier punto dentro del trayecto óptico para describir la propagación libre de un haz.

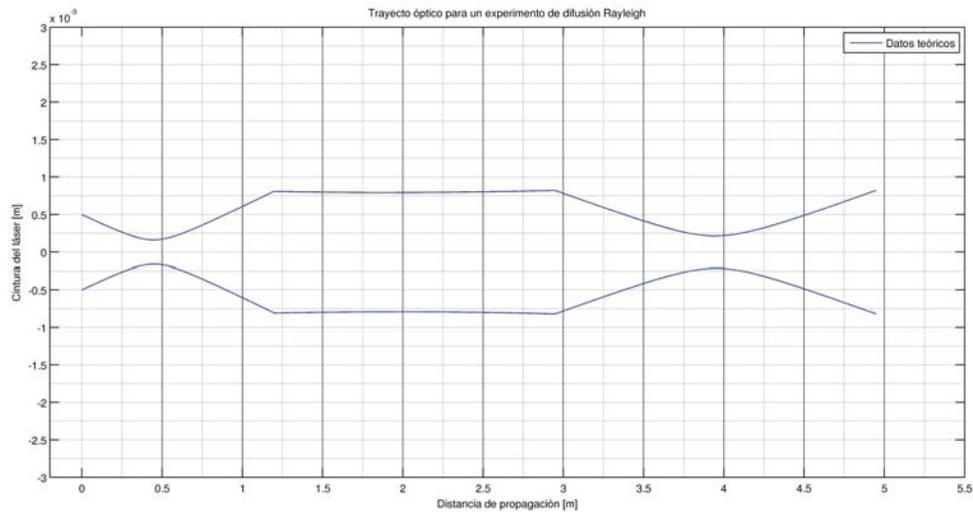


Figura 3.6: Trayecto óptico

Se debe comprobar experimentalmente que el haz sigue al modelo teórico trazado. Para esto se deben determinar las líneas de propagación del haz lo que significa que se debe determinar la cintura  $w(z)$  y la distancia  $z$  a la que este se encuentra. Para verificar el trayecto óptico fue necesario realizar perfilometrías tanto al *Oscilador Local* como al *Primario*.

### 3.5.1. Trayecto óptico del Oscilador Local y del Primario

Debido a que el sistema de difusión Rayleigh depende tanto del *Oscilador Local* como del *Primario*, se hacen perfilometrías de ambos haces a lo largo del trayecto óptico. Con esto se sigue verificando la gaussianidad de los haces después de cada elemento óptico.

Se hizo la suposición de que el *Oscilador Local* y el *Primario* se comportan de la misma manera a lo largo del trayecto. Sin embargo se comprobó que esto no necesariamente se cumple. Claramente puede verse en las figuras 3.7 y 3.8 que al principio del trayecto la cintura de cada uno de los haces no está exactamente en donde se había calculado sino que es mayor de lo previsto. Ambos siguen un comportamiento similar. Las incertidumbres de la medición, para el *Oscilador Local* y el *Primario*, se indican en la siguiente tabla.

Eje	Incertidumbre	Unidades
$\delta y$	$\pm 0,00005$	m
$\delta x$	$\pm 0,0005$	m

Tabla 3.6: Incertidumbres en las mediciones

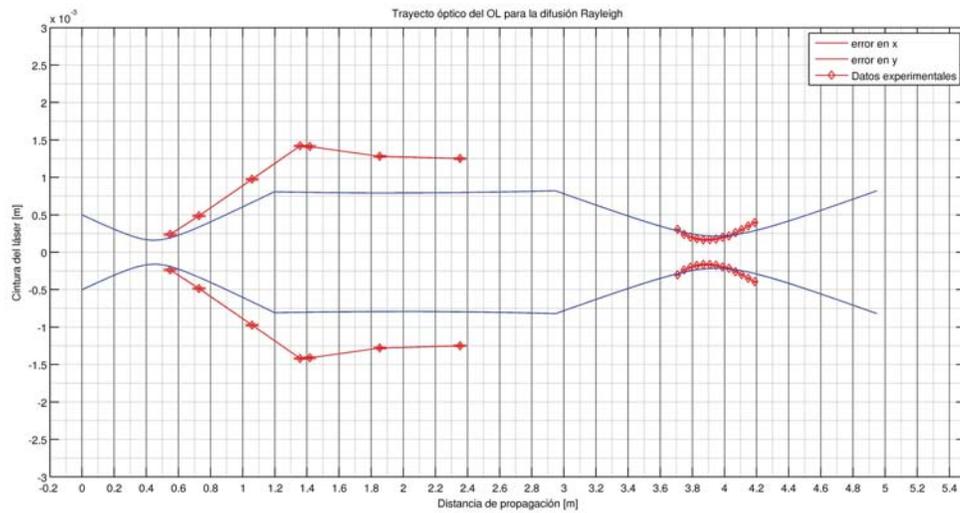


Figura 3.7: Comparación entre el trayecto experimental y el teórico del *O. L.*

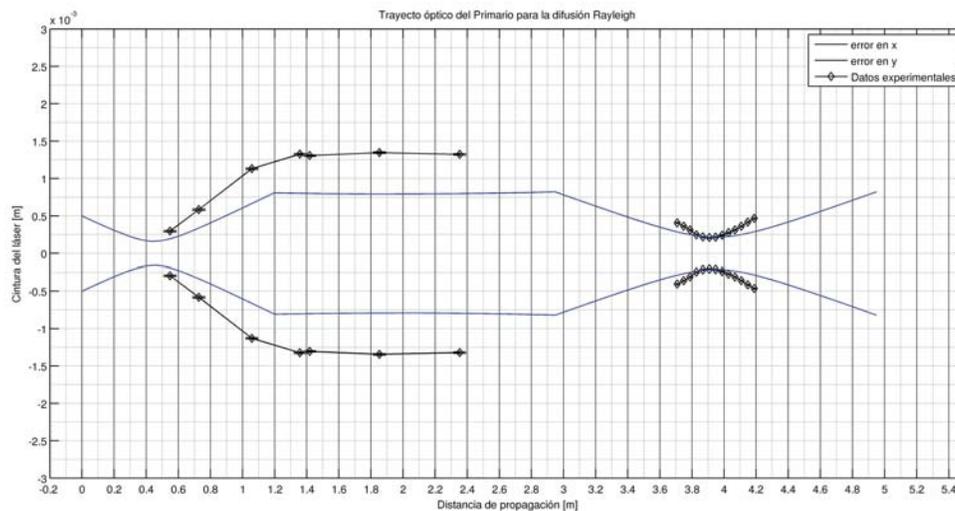


Figura 3.8: Comparación entre el trayecto experimental y el teórico del *Primario*

### 3.6. Aplicación a la zona de difusión

La parte de mayor interés dentro del montaje experimental es la zona de difusión. En este lugar es donde se lleva a cabo la difusión de luz de algún medio transparente en movimiento. Por esta razón es importante medir el tamaño de la cintura y la posición a la que se encuentra. Según los cálculos teóricos esta zona debe tener:

Variable	Valor	Unidades
$w_3 =$	0,2139	mm
$z_3 =$	3,9485	m

Tabla 3.7: Radio y posición del cintura en la zona de difusión

donde:  $w_3$  representa la cintura en la zona de difusión y  $z_3$  la distancia desde la salida del láser.

### 3.6.1. Perfilometría de la zona de difusión

La zona de difusión se contruye cruzando el *Oscilador Local* y el *Primario* en la zona de focalización. Esta zona es una parte fundamental en el proceso de difusión y se debe verificar su tamaño y posición.

En la figura 3.9 se muestra una perfilometría de la zona de difusión y en la tabla 3.8 los parámetros finales del ajuste con la función  $g(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$ .

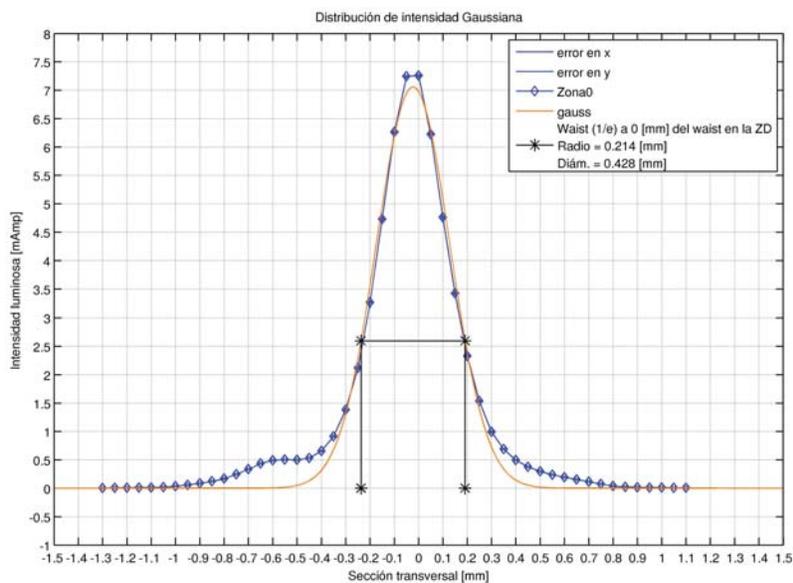


Figura 3.9: Perfilometría en la zona de difusión a 0 cm de la cintura.

Parámetros finales	Error	% Error
$A = 7,05668$	$\pm 0,126$	(1.786 %)
$x_0 = -0,022843$	$\pm 0,00312$	(13.66 %)
$\sigma = 0,151251$	$\pm 0,00312$	(2.063 %)

Tabla 3.8: Parámetros finales del ajuste de la función  $g(x)$ .

De la gráfica se puede notar que no focalizan en el cruce debido a que aparece una segunda gaussiana de menor intensidad. En una perfilometría en el punto donde se espera que esté la zona cruce debe aparecer una sola gaussiana. Esta perfilometría indicará que los haces se están focalizando en el mismo punto. Deben hacerse perfilometrías independientes para cada haz antes y después de  $z_3$ . Con esto se verifica la distancia de focalización de cada haz.

### 3.6.1.1. Perfilometría del Primario

En el caso del *Primario* su cintura se encuentra en  $z_3$ . Experimentalmente  $z_{3Prim} = 3,9085 m \pm 0,0005 m$ ; con una diferencia en  $|\Delta w_3| = 0,005 mm \pm 0,015 mm$  respecto al valor teórico. Es correcto suponer que el tamaño de la cintura del *Primario* en la zona de difusión es el mismo que el teórico (Tabla 3.7).

En la tabla 3.9 aparecen el tamaño y posición de la cintura del *Primario* en la zona de difusión.

Variable	Valores	Incertidumbres
$w_{3Prim} =$	$0,213 mm$	$\pm 0,005 mm$
$z_{3Prim} =$	$3,9085 m$	$\pm 0,0005 m$

Tabla 3.9: Tamaño y posición de la cintura del *Primario*.

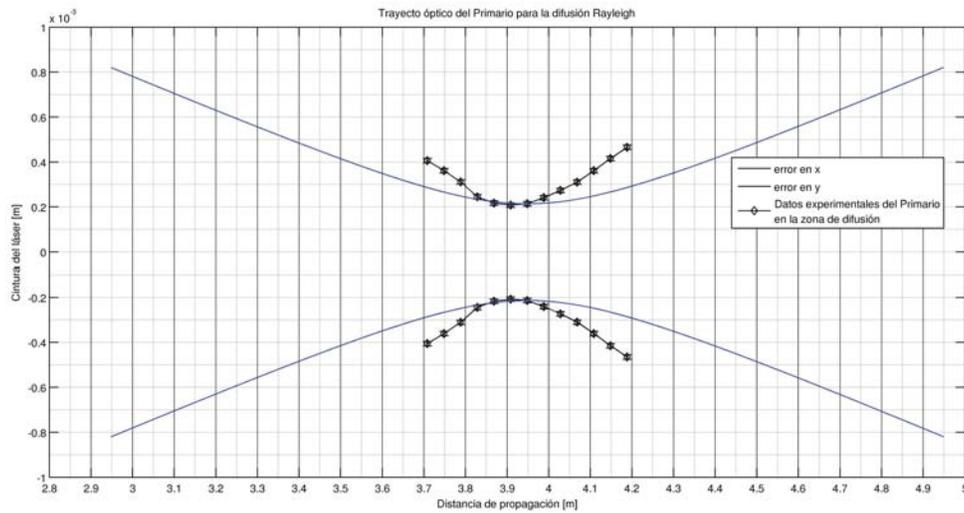


Figura 3.10: El *Primario* en la zona de difusión

### 3.6.1.2. Perfilometría del Oscilador Local

En la gráfica 3.11 es notable que la cintura del *Oscilador Local* es más pequeña que  $w_3$ . La diferencia entre el valor experimental y el teórico es  $|\Delta w_3| = 0,048 \text{ mm} \pm 0,015 \text{ mm}$ . La cintura de este haz está en  $z_{3OL} = 3,8685 \text{ m} \pm 0,0005 \text{ m}$ , es decir, un poco antes de lo calculado.

La diferencia con respecto a la distancia  $z_{3Prim}$  es de  $4 \text{ cm}$ , que será la distancia con la que la cintura del *Oscilador Local* estará desplazado respecto al *Primario*.

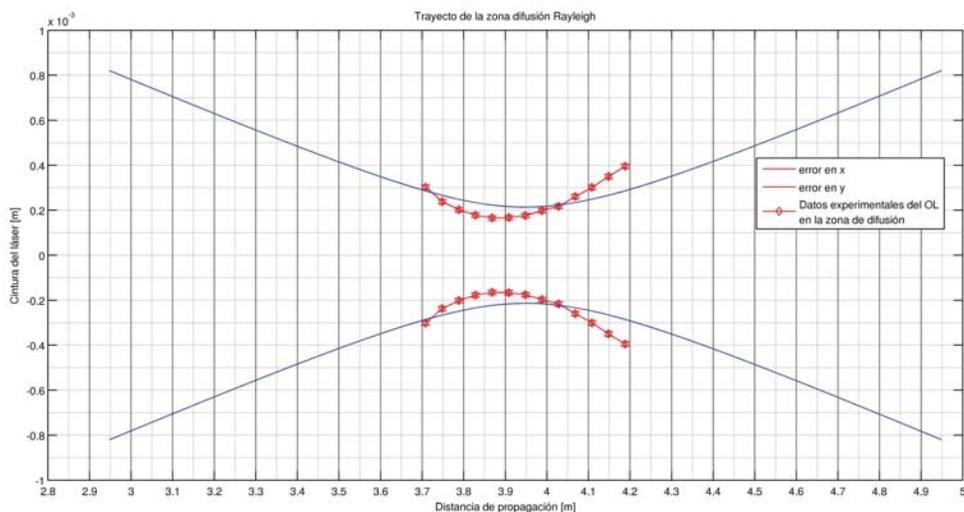


Figura 3.11: El *Oscilador Local* en la zona de difusión

En la tabla 3.10 están los datos que caracterizarán la focalización del *Oscilador Local*.

Variable	Valores	Incertidumbres
$w_{3OL} =$	$0,165 \text{ mm}$	$\pm 0,005 \text{ mm}$
$z_{3OL} =$	$3,8685 \text{ m}$	$\pm 0,0005 \text{ m}$

Tabla 3.10: Tamaño y posición de la cintura del *Oscilador Local*.

La información anterior sobre los haces ayudará a calcular el tamaño real de la zona de difusión además de colocar al medio de estudio con una mayor precisión dentro de la zona de difusión. Finalmente, se puede concluir que el tamaño de los haces se aproxima bastante a  $w_3$  pero la distancia real a la que se localiza la cintura no coincide con  $z_3$ . Todo lo anterior no hubiese sido posible de afirmar si no se verifica el trayecto óptico.

La zona de difusión es una especie de rombo muy largo y por lo mismo hay una mejor resolución espacial sobre el eje menor. El ancho de la zona es igual a  $0,416 \text{ mm} \pm 0,005 \text{ mm}$  y de una longitud igual a  $220 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$ . A partir de los datos experimentales anteriores se puede construir una gráfica de la zona de difusión usando un *script* para que Matlab lo grafique.

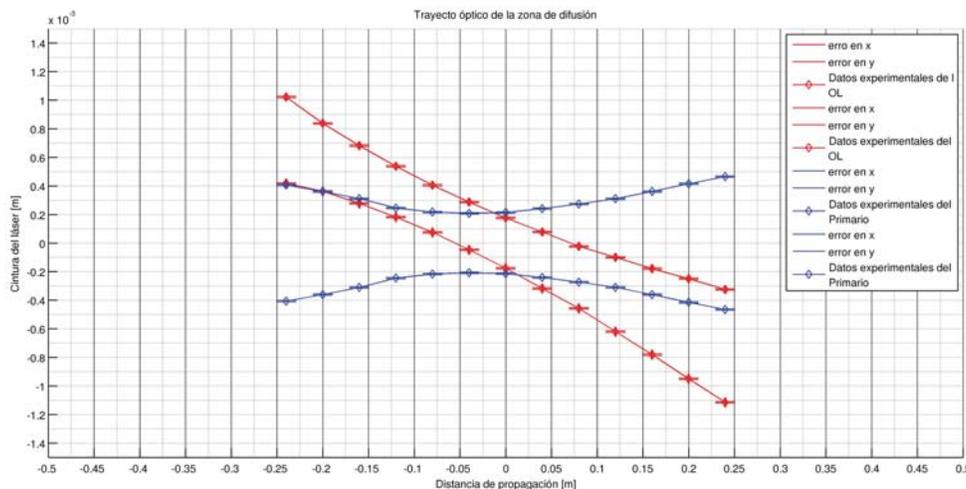


Figura 3.12: Zona de cruce entre el *Oscilador Local* y el *Primario*.

### 3.6.2. Ángulo entre el Oscilador Local y el Primario

La razón fundamental por la que el ángulo de cruce del *Oscilador Local* y el *Primario* es importante es que éste determina el tamaño de las fluctuaciones de densidad a las que el sistema

es sensible (ver ecuación (2.19)). Como se vió en la sección anterior, cruzando el *Oscilador Local* y el *Primario* se construye la zona de difusión. Haciendo perfilometrías antes, o después, de la zona de difusión se puede determinar fácilmente y con exactitud el ángulo de cruce entre haces. Estas perfilometrías se hacen en puntos alejados de la zona de difusión porque es más fácil distinguir los picos de intensidad entre el *Oscilador Local* y el *Primario*.

En la figura 3.13 se muestra una perfilometría antes de la zona de difusión en donde se distinguen claramente las intensidades de los dos haces. Se hizo un *script* para Matlab con el que se busca hacer ajustes gaussianos para cada pico usando la función  $g(x) = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2}$ . En la tabla 3.11 aparece el conjunto de parámetros finales del ajuste hecho por cada gaussiana.

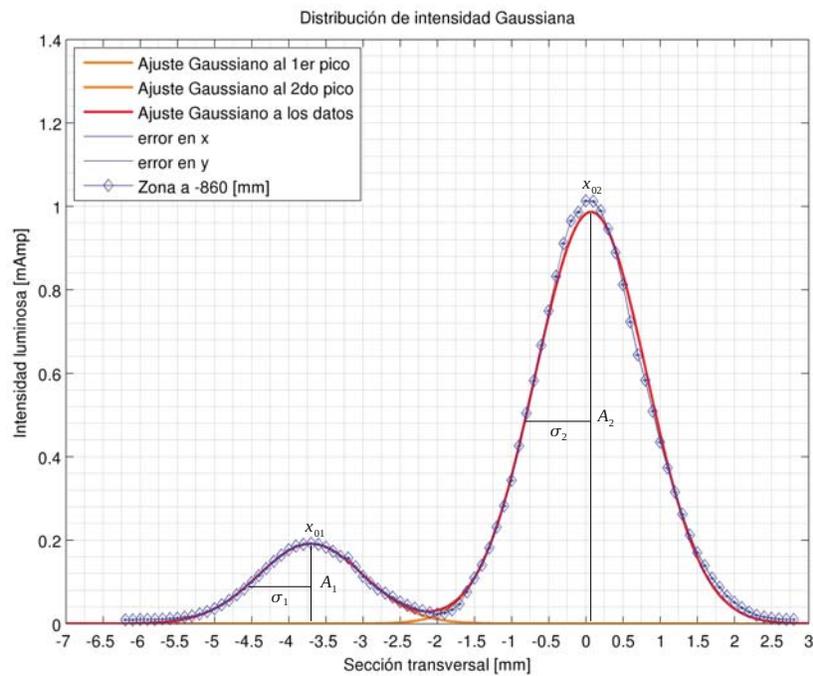


Figura 3.13: Perfilometría del ángulo entre haces.

Parámetros finales	Error	% Error
$A_1 = 0,1913$	$\pm 0,00018 [mAmps.]$	(0.094 %)
$x_{01} = -3,7026$	$\pm 0,00037 [mm]$	(0.099 %)
$\sigma_1 = 1,4155$	$\pm 0,00071 [mm]$	(0.049 %)
$A_2 = 0,9868$	$\pm 0,00029 [mAmps.]$	(0.029 %)
$x_{02} = 0,0707$	$\pm 0,00012 [mm]$	(0.169 %)
$\sigma_2 = 1,4948$	$\pm 0,00021 [mm]$	(0.014 %)

Tabla 3.11: Parámetros finales del ajuste.

Se hicieron perfilometrías como la que se muestra en la figura 3.13 en varios puntos y se hizo un ajuste con la función  $g(x)$ . De cada perfilometría con ajuste gaussiano se graficó la posición contra la distancia media entre picos ( $|x_2 - x_1|/2$ ). Al tomar la distancia media entre picos se pudo calcular la mitad del ángulo entre los haces. En la figura 3.14 se muestra la gráfica de la posición de la perfilometría contra la distancia media entre picos y el ajuste con una línea recta.

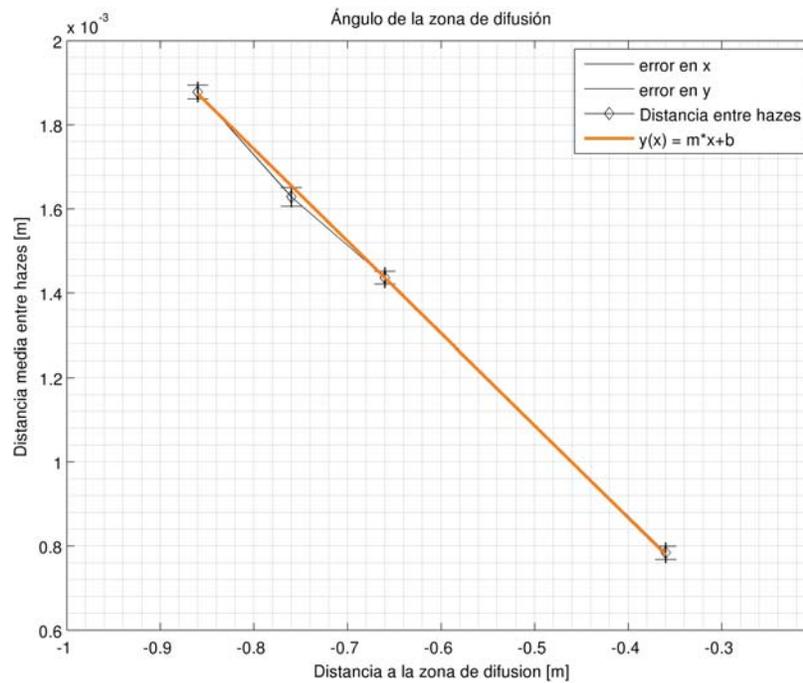


Figura 3.14: Línea de ajuste para calcular el ángulo entre haces.

Parámetros finales	Error	% Error
$m = -0,0021$	$\pm 0,00004595 [m]$	(2.12 %)
$b \approx 0$	$\pm 0 [m]$	(- - - %)

Tabla 3.12: Parámetros finales del ajuste con:  $y(x) = mx + b$ .

A partir del conjunto de parámetros finales de la tabla 3.12 se calcula el ángulo entre haces con:  $\theta = 2tg^{-1}(m)$ . El ángulo que se obtiene se muestra en la siguiente tabla.

Parámetros finales	Error	% Error
$\theta = 4,332$	$\pm 0,04595 [mrad]$	(1.06 %)

Tabla 3.13: Ángulo entre el *Oscilador Local* y el *Primario*.

Con el ángulo de la tabla 3.13 es posible determinar el tamaño de las fluctuaciones de densidad usando la ecuación (2.19). Finalmente, el tamaño de la fluctuación estará determinado por la ecuación (3.1)

$$\lambda_{\Delta} = \frac{2\pi}{|\vec{k}_{\Delta}|} \quad (3.1)$$

En la siguiente tabla se muestra el valor del tamaño de las fluctuaciones de densidad a las que el sistema de difusión Rayleigh es sensible.

Magnitud	Error	% Error
$\lambda_{\Delta} = 122,8$	$\pm 1,3 [\mu m]$	(1.06 %)

Tabla 3.14: Tamaño de las fluctuaciones detectadas.

## Capítulo 4

# Aplicación a un chorro supersónico

En el capítulo dos se menciona que aprovechando el sistema de posicionamiento, es posible estudiar la estructura de un chorro supersónico punto a punto. Sin embargo, en el capítulo 3 quedó claro que la zona de difusión no corresponde de ninguna manera a un punto, sino que es un romboide muy angosto y muy alargado. Dentro de ese rombo, la intensidad de la luz varía de manera gaussiana por lo que las colas deben tener poca intensidad. Se tiene muy buena resolución espacial en cualquier dirección perpendicular al eje óptico y muy mala resolución en la dirección paralela al mismo. La resolución espacial de las medidas es, por lo mismo, uno de los problemas a resolver al utilizar esta técnica.

El uso de ángulos de difusión muy pequeños aumenta la longitud del rombo y disminuye la resolución espacial en una de las direcciones. A partir de la ecuación (2.19), se puede notar que se requiere de ángulos de difusión pequeños para poder estudiar fluctuaciones de densidad a las frecuencias de interés. A medida que crece el ángulo, el vector de onda aumenta y la longitud de onda de las fluctuaciones que se pueden estudiar disminuye. Si se quiere estudiar la producción acústica del chorro, es necesario poder estudiar frecuencias de interés acústico. En nuestro montaje, esto corresponde a ángulos de difusión menores a 4 miliradianes (mrad).

En este capítulo se aplicarán algunos de los resultados del capítulo 3 al estudio de un chorro supersónico. En la sección 4.1 se hace una revisión de las características más importantes de este flujo. En la sección 4.2 se mostrará cómo se puede relacionar cada espectro, obtenido experimentalmente, con la zona de difusión y lo que de ahí se puede saber.

### 4.1. Estructura de un chorro supersónico

Se llama chorro a un flujo que sale de un orificio hacia un espacio abierto. En este caso se estudiará un chorro de aire supersónico, es decir, que sale a una velocidad mayor a la del sonido, proveniente de una boquilla con un orificio circular hacia un medio lleno de aire que no está en movimiento. En el momento en que sale del orificio, la sección transversal empieza a aumentar formando una estructura cónica. El eje del chorro coincide con el eje de simetría. La figura 4.1 muestra la estructura de un chorro supersónico. Mientras que el flujo en la orilla es frenado por el aire estacionario formando grandes estructuras vorticales, como las “donas” de un fumador. La parte del centro se ve apenas afectada y continua por varios diámetros casi con la misma velocidad a la que salió. En algunos casos se puede suponer que la parte central es casi laminar, mientras que la parte vortical, llamada capa de mezcla, se vuelve rápidamente turbulenta. A pesar de que la capa de mezcla va aumentando de tamaño, en los primeros ocho a doce diámetros, la velocidad central del flujo sigue siendo supersónica y se forma una estructura de choque. Finalmente, la capa de mezcla llena a todo el chorro volviéndolo totalmente turbulento. Eventualmente, la velocidad es subsónica y el flujo se abre más rápidamente.

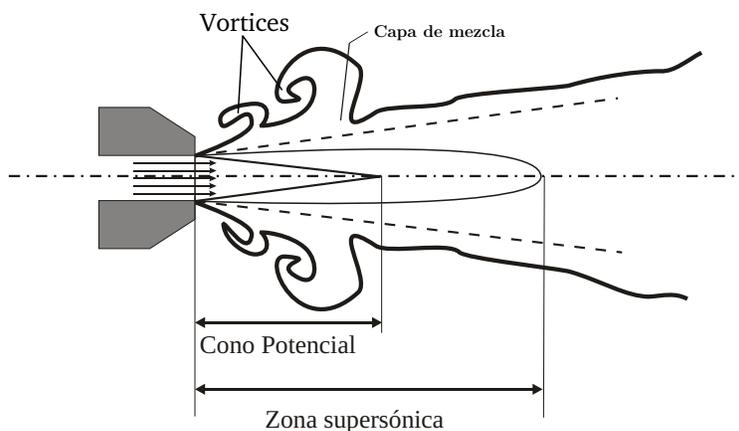


Figura 4.1: Estructura de un chorro supersónico.

Se sabe que el movimiento rápido del aire produce sonido aunque todavía no se sabe con exactitud cuáles son los eventos aerodinámicos que lo producen. Se espera entonces encontrar, dentro del chorro, fluctuaciones de densidad de dos orígenes diferentes: acústico y entrópico. La primeras se propagan a la velocidad del sonido y las segundas se deben a las fluctuaciones aleatorias dentro del chorro que son acarreadas por el flujo. Estos dos tipos de fluctuaciones se verán reflejadas en la densidad espectral en dos picos a frecuencias diferentes. Como se explicó en el capítulo 2, la técnica que aquí se utiliza es sensible al vector de onda  $\vec{k}_\Delta$ . Si se estudian

fluctuaciones perpendiculares al flujo, las de origen entrópico formarán un pico ancho centrado en el origen y las de origen acústico estarán centradas en una frecuencia tal que  $\frac{\omega}{|k_{\Delta}|}$  corresponda a la velocidad del sonido en el aire. En el caso de fluctuaciones paralelas al chorro, se espera que el pico entrópico esté desplazado en frecuencia por una cantidad correspondiente al efecto *Doppler*. Fuera del chorro se espera encontrar solamente fluctuaciones de origen acústico radiadas por el flujo, es decir, el patrón de radiación acústico.

## 4.2. Definición del tamaño del chorro a partir de sus espectros

En la figura 4.2 se muestran las posiciones del eje de la boquilla (visto desde arriba) en relación a la zona de difusión y en la figura 4.3 se muestran las mismas posiciones pero de la sección transversal de la boquilla a medida que esta se desplaza fuera de la zona de difusión. Los desplazamientos de la boquilla son intervalos de  $\approx 0,5\text{ mm}$ , muy cercanos al tamaño de  $w_0$ . El espectro que se observará en cada una de las posiciones de la boquilla corresponderá a fluctuaciones producidas por el chorro y que son detectadas dentro del romboide (figura 4.2)

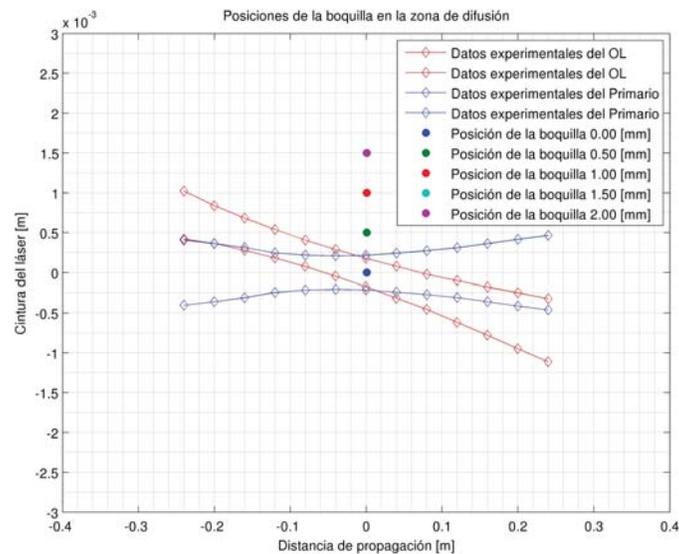


Figura 4.2: Posición de la boquilla con respecto a la zona de difusión.

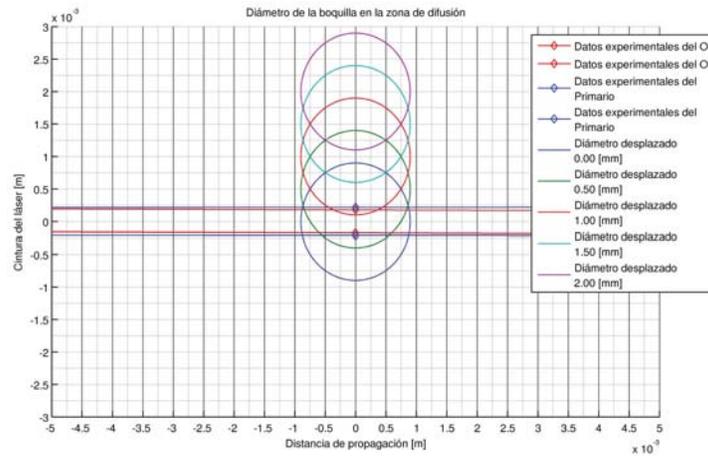


Figura 4.3: Desplazamientos de la boquilla en la zona de difusión.

Se espera que las fluctuaciones acústicas aparezcan a la frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \vec{v} \cdot \vec{k}_\Delta \tag{4.1}$$

donde:  $\vec{v}$  es la velocidad del sonido en el medio. En la siguiente tabla aparece el valor exacto del cálculo de la frecuencia acústica tomando  $\vec{v} = 330 \frac{m}{s}$ .

Magnitud	Error	% Error
$\nu = 2,729$	$\pm 0,029 [MHz]$	(1.06 %)

Tabla 4.1: Frecuencia acústica.

Se considerará que la frecuencia acústica está entre 2.2 y 2.7 Megahertz (MHz) debido a que hay factores físicos que pueden alterar la velocidad del sonido en el medio. Dentro del chorro las fluctuaciones acústicas deben ser acarreadas por el flujo. Se puede observar que el círculo verde está centrado en la zona de mezcla en donde se esperan fluctuaciones acústicas.

Para saber en que posición dentro del chorro de aire se tomó cada espectro se acordó lo siguiente. Se designó el eje  $y$  del chorro como el eje paralelo a la salida del flujo de aire. El eje  $x$  se designó como el eje perpendicular al flujo de aire. Por otra parte, cada espectro tomado se guardó con un nombre específico con la forma: **PXXYY**

donde:

- **P** significa posición

- **XX** corresponde a la posición medida en milímetros respecto al eje  $x$
- **YY** corresponde a la posición medida en milímetros respecto al eje  $y$

En la leyenda de cada espectro se especifica el ángulo entre el vector  $\vec{k}_\Delta$  y el eje del chorro. En la parte superior izquierda de cada espectro hay un diagrama con una vista del plano  $x$ - $y$  del chorro y la ubicación del vector  $\vec{k}_\Delta$  en el chorro de aire.

Las figuras 4.4 y 4.5 muestran una serie de espectros para fluctuaciones horizontales y perpendiculares al flujo, medidos justo a la salida del chorro. En todos los espectros se compara la señal adquirida (color azul) con una señal de referencia (color rojo). La señal de referencia es la señal que se toma sin flujo de aire. El primero de los espectros fue adquirido dentro de la línea central del chorro (círculo azul de la figura 4.3) y corresponde a fluctuaciones dentro del flujo. En este espectro se distinguen sólo las fluctuaciones que están en la misma dirección del vector  $\vec{k}_\Delta$ . En el segundo espectro (figura 4.5) sólo se distinguen las fluctuaciones de tipo entrópico.

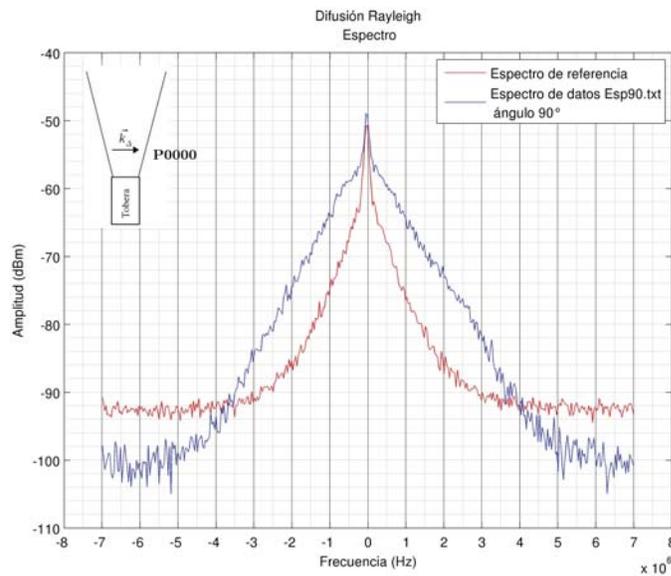


Figura 4.4: Espectro tomado en el punto: P0000

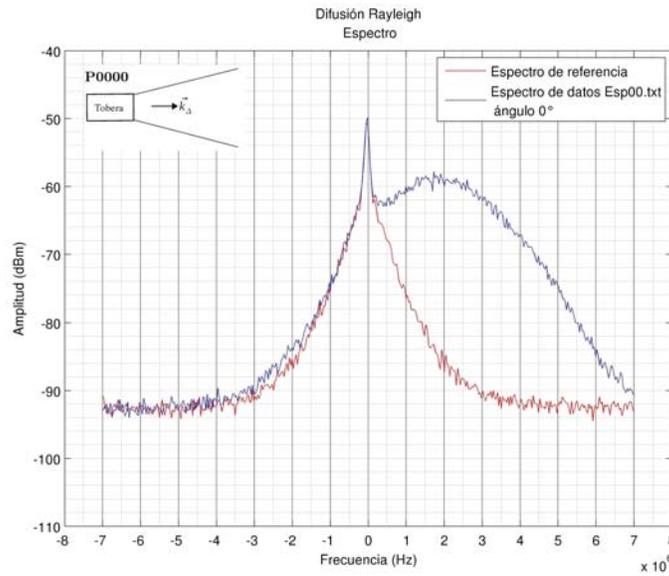


Figura 4.5: Espectro tomado en el punto: P0000

Lejos de la salida del chorro (a  $8\text{ mm}$ ) se tomaron los espectros en las posiciones P1603 y P1604. Estos espectros fueron obtenidos dentro de los círculos cian y morado (ver figura 4.3). El primero de los espectros en la figura 4.6 corresponde al punto P1603 con un ángulo de  $90^\circ$ . En dicho espectro es posible apreciar que a partir de  $2\text{ MHz}$  hay una pequeña protuberancia que provoca que el espectro tenga una apariencia asimétrica respecto a su centro. Esta pequeña protuberancia se debe a un pico acústico pero no es posible determinar si está dentro o fuera del flujo (ver figura 4.1).

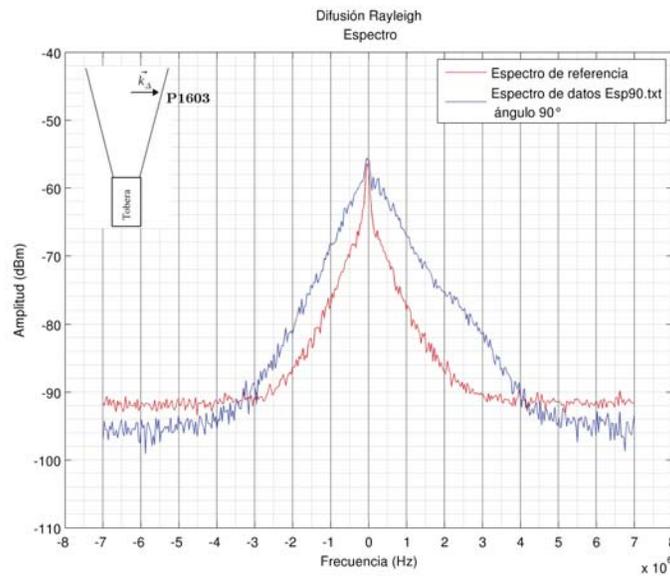


Figura 4.6: Espectro tomado en el punto: P1603

En el espectro de la figura 4.7 es posible observar un pico entrópico indicando que existe un flujo de aire importante en ese punto.

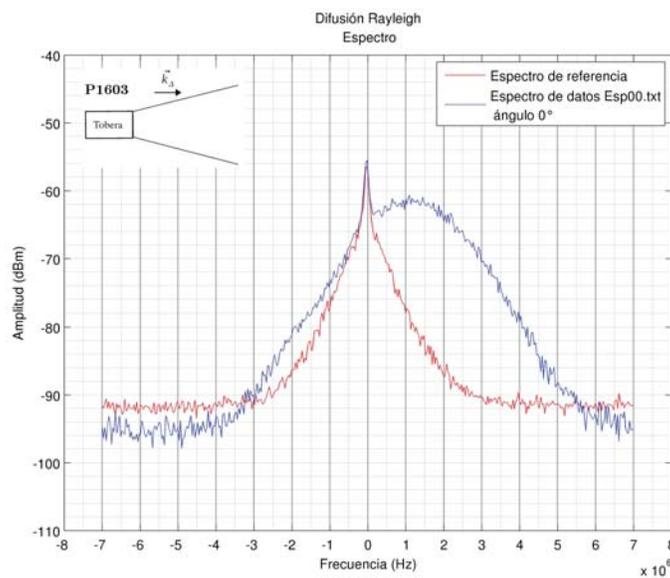


Figura 4.7: Espectro tomado en el punto: P1603

### 4.2.1. Las ondas acústicas

Un espectro con el vector  $\vec{k}_\Delta$  paralelo al flujo del chorro “no mostrará” un pico entrópico si es que el vector está en una posición fuera del chorro. Espacialmente estaría en una posición en la que posiblemente se ha rebasado la capa de mezcla.

Es posible determinar a partir de algunos espectros el punto donde el flujo de aire sigue su curso y las ondas acústicas ya no son acarreadas completamente por el flujo mismo. En el espectro de la figura 4.8 a partir de los 2 MHz hay un pico que bien puede corresponder a fluctuaciones del tipo acústico.

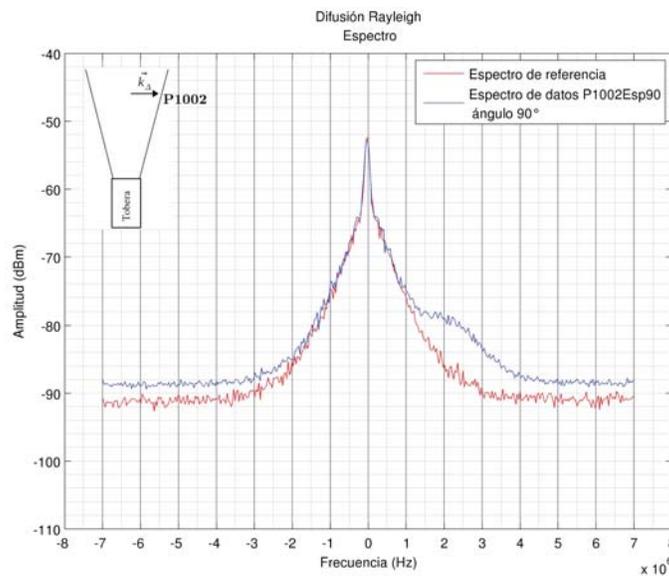


Figura 4.8: Espectro tomado en el punto: P1002

El espectro de la figura 4.9 es un espectro tomado con un ángulo de  $40^\circ$ . Existe una disminución de la amplitud en -2 decibeles (dBs) con respecto al espectro de la figura 4.8. Lo anterior indica que si se sigue girando la boquilla (aumentando el ángulo) las fluctuación acústicas serán cada vez más tenues.

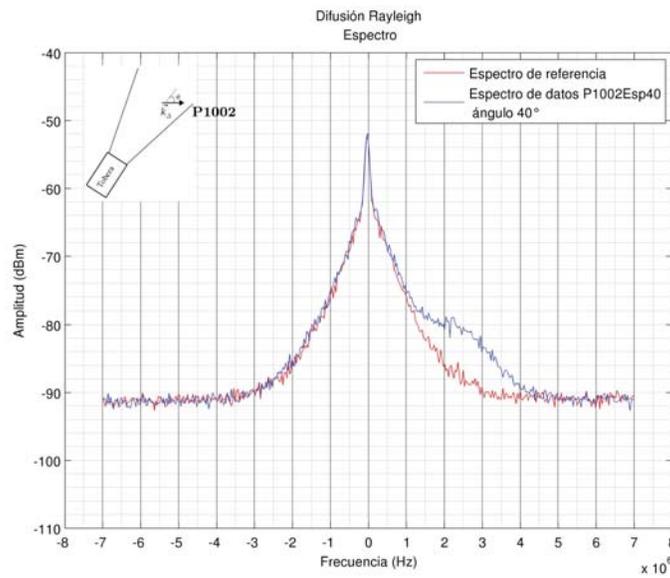


Figura 4.9: Espectro tomado en el punto: P1002

Cuando el vector  $\vec{k}_\Delta$  y el eje  $y$  son paralelos ya no se detecta algún tipo fluctuación entrópica y esto se puede constatar con el espectro de la figura 4.10.

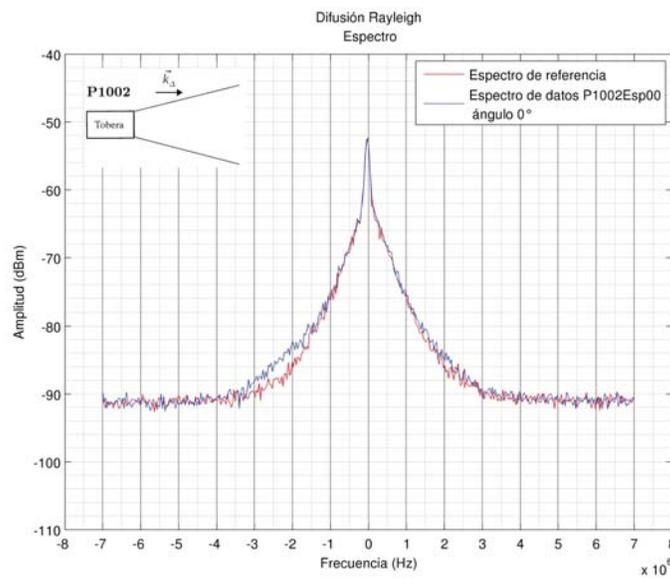


Figura 4.10: Espectro tomado en el punto: P1002

A partir de las figuras 4.8 y 4.10 se asegura que en ese punto sólo existen fluctuaciones del tipo acústico.

Por otra parte, en el punto P1604 también se puede ver claramente un pico acústico en el espectro de la figura 4.11. En este punto, suficientemente alejado de la salida de la boquilla, no existe un pico entrópico debido a que las fluctuaciones de densidad ya no son tan perceptibles por la zona de difusión.

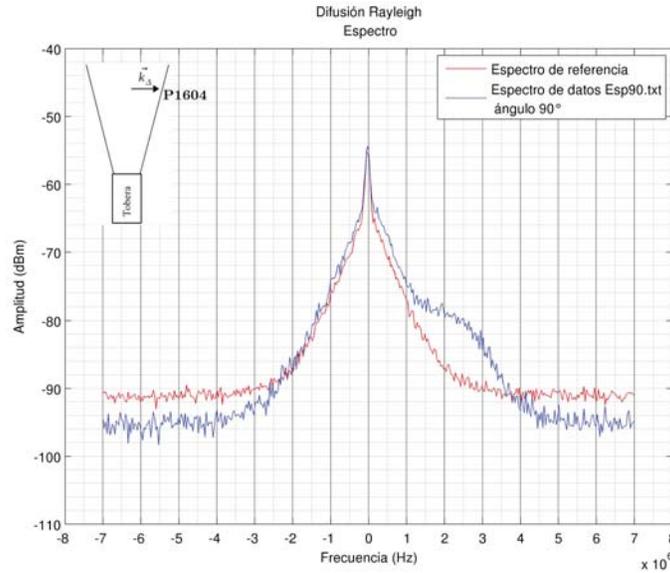


Figura 4.11: Espectro tomado en el punto: P1604

Al igual que el punto P1002 pero en el punto P1604 en el espectro de la figura 4.12 es posible notar una disminución de la amplitud, también por -2 dBs, a partir de los 2 MHz. En el ángulo  $0^\circ$  el pico entrópico desaparece esto último se puede ver en el espectro de la figura 4.13.

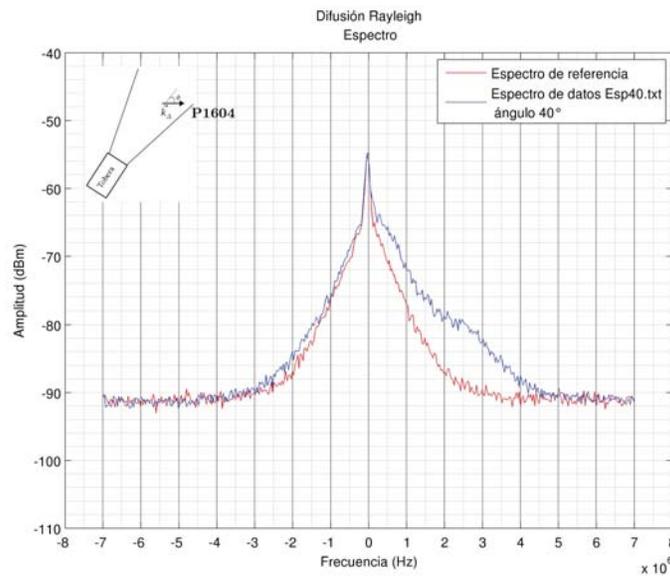


Figura 4.12: Espectro tomado en el punto: P1604

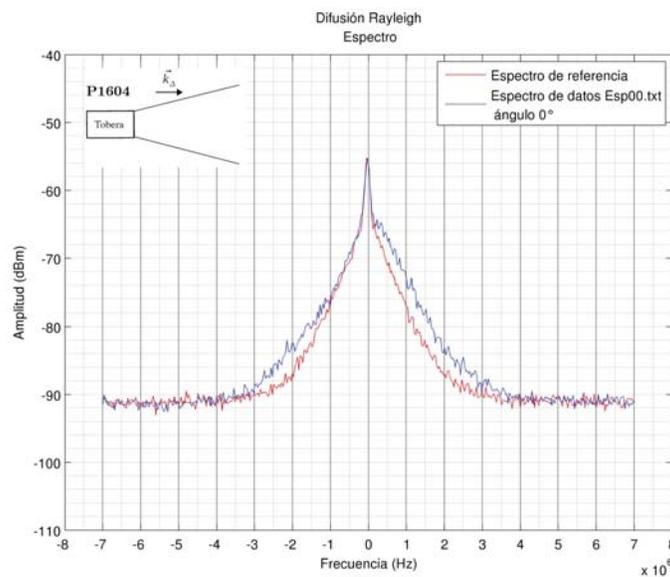


Figura 4.13: Espectro tomado en el punto: P1604

Se puede afirmar que en el punto P1604 solo se detectan fluctuaciones acústicas y las fluctuaciones entrópicas debidas al flujo son imperceptibles.

Es importante localizar la posición de los espectros en el chorro de aire y esto se logra usando técnicas especiales de visualización para fluidos.

### 4.3. Localización espacial en el chorro de aire

La técnica de *shadowgraph* permite visualizar flujos transparentes de una manera práctica y muy sencilla. Gracias a esta técnica fue posible obtener una imagen del flujo para observar con mayor claridad las zonas en donde se hicieron mediciones.

Se sabe que el diámetro de salida de la boquilla es igual a  $1,8\text{ mm} \pm 0,05\text{ mm}$ . Con esta información y con ayuda del programa *OpenOffice.org Dibujos* se logró hacer una imagen a escala del chorro de aire. En esta imagen (figura 4.14) se localizaron los puntos donde se obtuvieron espectros. Una imagen como esta es una referencia para la interpretación de resultados.

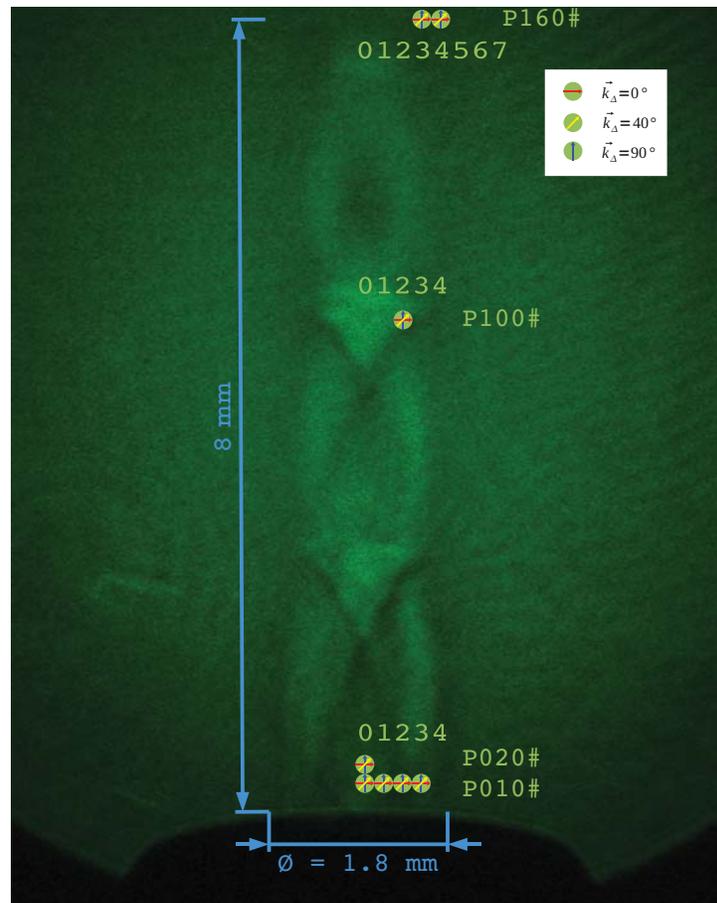


Figura 4.14: Localización espacial en el chorro.

Los puntos en donde se obtuvieron los espectros no están en una zona donde se creía que se trataba de la propagación de ondas acústicas. Se puede ver que algunos puntos están muy

próximos a las estructuras de choque, conocidas como: *líneas de Mach*.

#### 4.4. Estructura real de un chorro supersónico

Para obtener un flujo supersónico es necesario diseñar una boquilla con la forma y dimensiones adecuadas. La presión de entrada y la forma de la boquilla es fundamental para formar un flujo supersónico a la salida. La boquilla de *De Laval* es el diseño más común para formar flujos supersónicos. Consiste en una entrada convergente y una salida divergente (figura 4.15). Cuando el aire, a una presión conocida, entra a la boquilla ocurren dos alternativas. La primera es que el aire que entra se comprime en la zona estrecha y permanece como un flujo subsónico a la salida de la boquilla. Esto ocurrirá cuando la razón entre la presión de entrada y la presión exterior permanece debajo de un cierto valor “crítico”. Cuando la razón entre las presiones rebasa el valor “crítico” se presenta una segunda alternativa, que el flujo sea supersónico en la zona estrecha y se expanda a la salida de la boquilla.

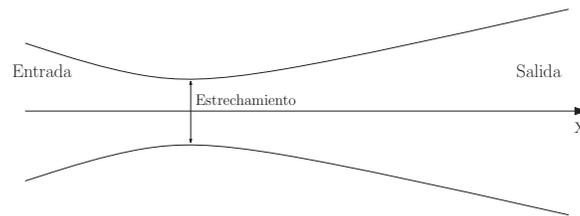


Figura 4.15: Boquilla de *De Laval*.

Es bien conocida la estructura de choque de un flujo supersónico[3] que se forma a partir de una boquilla “convergente-divergente” o boquilla de *De Laval*.

En el laboratorio de acústica de la Facultad de Ciencias se diseñó y contruyó una boquilla con una salida “recta”. En la figura 4.16 se muestra el esquema de la boquilla mencionada.

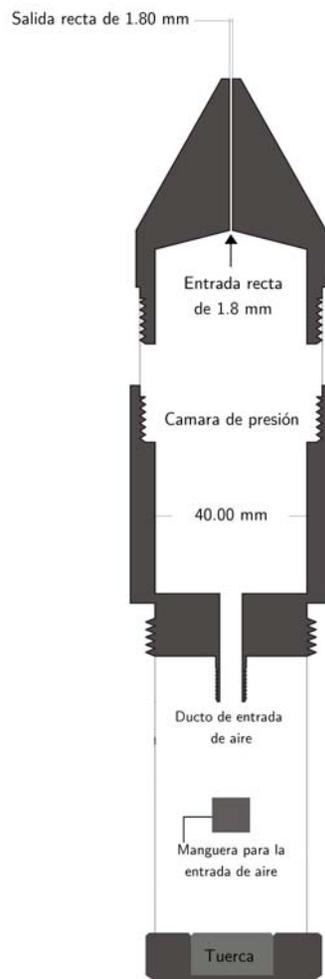


Figura 4.16: Esquema y ensamble de una boquilla con salida “recta”.

En la gran mayoría de la bibliografía sobre flujos supersónicos se incluye el diseño de boquillas para producirlos. En principio una boquilla como la de la figura 4.16 no debe producir un flujo supersónico. Sin embargo, la fotografía de la figura 4.14 prueba lo contrario ya que muestra una estructura de choque.

Usando la información de la sección 4.2, a partir de los espectros y con la fotografía de la figura 4.14 se trazarón líneas tocando los puntos en donde se observó que no se presentaba un pico entrópico, es decir, donde aparece una frecuencia acústica. El resultado de lo anterior se muestra en la figura 4.17.

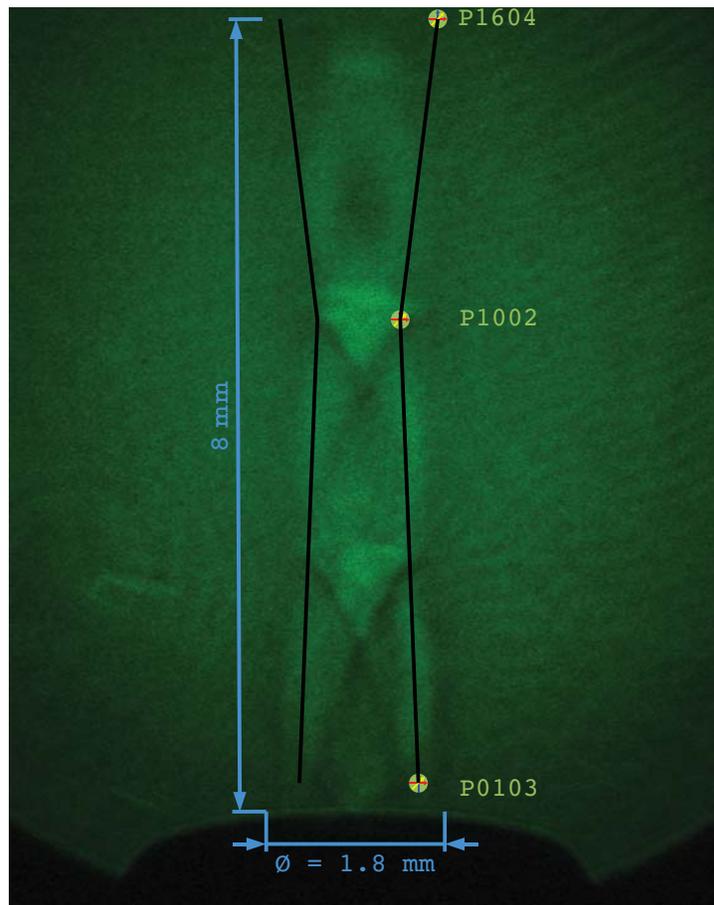


Figura 4.17: Patrón de emisión de un chorro supersónico.

La figura 4.17 da una idea clara de la estructura y los límites de un flujo supersónico a partir de una boquilla con salida recta. Es interesante notar que el flujo no se abre en forma cónica sino que tiene una zona donde se contrae. Es posible que en la zona supersónica aparezcan varias contracciones.

La información sobre algunos de los eventos aerodinámicos que ocurren a velocidades supersónicas está contenida en los espectros adquiridos en distintas posiciones a lo largo y ancho del flujo de aire. Para darle un sentido físico a los espectros, y sobre todo para describir y estudiar los eventos aerodinámicos de interés que ocurren a frecuencias específicas, es muy útil localizar espacialmente cualquier espectro. Conociendo el tamaño real del haz en la zona de difusión, y con ayuda de técnicas de visualización como el *shadowgraph*, la localización espacial de cualquier espectro se convierte en una tarea sencilla.

# Conclusiones

En el presente trabajo usando una fotorresistencia se diseñó y construyó un nuevo aparato llamado: *perfilómetro*. La fotorresistencia que compone el perfilómetro es un elemento electrónico que trabaja en muchos casos como interruptor. La fotorresistencia es un elemento ideal que puede soportar grandes intensidades luminosas.

En cualquier punto a lo largo de la trayectoria del haz dentro del montaje experimental del sistema de difusión se puede medir el perfil de intensidad luminosa. Lograrlo ayudó a mejorar la alineación de los elementos ópticos involucrados. También se midió el haz a lo largo de toda su trayecto comparando estas mediciones con un trayecto simulado teóricamente. Se observó, por la gráficas de la sección 3.5, que ambos trayectos no se comportan de la misma forma. Lo más importante de medir el perfil de intensidad es que se demostró que en cualquier parte de la trayectoria del montaje óptico el perfil de intensidad es *gaussiano* y por lo tanto las ecuaciones del capítulo 1 se pueden aplicar. La importancia de medir un perfil de intensidad es que para extraer la información sobre los eventos aerodinámicos ocurridos en la zona de difusión es necesario asegurar la gaussianidad del haz.

Se hicieron perfilometrías independientes tanto del *Oscilador Local* como del *Primario* al rededor del punto de focalización de ambos haces. Se pudo observar que el punto de focalización de los haces no coincidía. Sabiendo el punto de focalización de los haces se hicieron mediciones de la zona de difusión. Dicha zona se forma por el cruce del *Oscilador Local* y del *Primario*. Con las perfilometrías hechas a lo largo de la trayectoria de los haces se determinó con gran exactitud el ángulo de cruce entre ellos. Conocido este ángulo se pudo determinar el tamaño de la zona de difusión y la incertidumbre asociada a la medición. También se pudo reconstruir la forma real de la zona de cruce conociendo el ángulo de difusión se calculó el tamaño de las fluctuaciones de densidad que son detectadas por el montaje experimental.

Se usó el *shadowgraph* como una técnica óptica para la visualización de flujos transparentes. Con el apoyo de esta técnica se observó la estructura de choque dentro del chorro de aire supersónico. Se analizó la estructura del chorro de aire a partir de los espectros y de la imagen

obtenida con *shadowgraph* (fig. 4.14). En la literatura especializada no se maneja una boquilla con salida recta para producir flujos supersónicos. De hecho no se podría producir un flujo supersónico a partir de este tipo de boquilla. El resultado de analizar los espectros y la figura 4.14 del chorro de aire condujo a poder determinar la forma de la estructura de choque del chorro supersónico. Con lo demostrado en el presente trabajo, en particular en el capítulo 4, se tiene evidencia clara de que a partir de una boquilla con salida recta se obtiene un flujo supersónico y que además se puede delimitar su estructura de choque.

Dentro del capítulo 4 también se mostró que se puede obtener la forma y los límites del chorro supersónico. Esto es un resultado importante que confirma que a partir de boquillas con salida recta se obtienen flujos supersónicos. Además, los chorros producidos por este último tipo de boquillas tienen una forma de propagación particular. En la figura 4.17 se puede ver esto último. Se esperaba que la forma de propagación del chorro supersónico fuese parecida a un cono con su vértice en la punta de la boquilla (figura 4.1)

Como trabajo a futuro, el perfilómetro se automatizará y con esto será de mucha utilidad para la construcción y alineación de futuros sistemas de difusión. La caracteración de la fotorresistencia es un punto importante para mejorar el desempeño del perfilómetro pero esta caracterización tendrá que hacerse en algún laboratorio con instrumentos especiales. Otra de las bondades que ofrece el perfilómetro es que podría llegar a convertirse en un medidor de potencia, siempre y cuando se complete la caracterización de la fotorresistencia.

Completar el mapeo para conocer la estructura completa del chorro supersónico forma parte del trabajo a futuro. Antes de completar ese mapeo es igual de importante el reducir longitudinalmente el tamaño la zona de difusión. Con esa reducción se tendría la certeza de que sólo se están capturando los eventos aerodinámicos ocurridos dentro del chorro. Una primera aproximación para reducir la zona de difusión sería el cortar los haces en algún punto antes de formar esta zona. Ya se inicio este trabajo y pese a los resultados preliminares no se ha podido aplicar al montaje experimental.

# Bibliografía

- [1] CESAR AGUILAR ESPINOZA. “Diseño y construcción de un sistema de difusión Rayleigh para estudiar fluctuaciones de densidad en gases transparentes”. Tesis. UNAM (2003).
- [2] JOSÉ MANUEL CABRERA, FERNANDO JESÚS LÓPEZ Y FERNANDO AGULLÓ-LÓPEZ. “Óptica Electromagnética. Fundamentos”. Addison-Wesley Iberoamericana, E.U.A (1993).
- [3] R. COURANT Y K. O. FRIEDRICHS. “Supersonic flow and shock waves”. Springer-Verlag (1985).
- [4] JR. DIDOMENICO, M. Y O. SVELTO. Solid-state photodetection: A comparison between photodiodes and photoconductors. *Proceedings of the IEEE* **52**(2), 136–144 (Febrero 1964).
- [5] J. D. JACKSON. “Classical Electrodynamics”. John Wiley & Sons, USA (1975).
- [6] LIU JIA-MING. “Photonic Devices”. Cambridge University Press (2005).
- [7] A. V. KARCHENKO. “La diffusion de la lumière par les gaz: de la diffusion incohérente à la diffusion exacerbée; application à la vélocimétrie”. Tesis Doctoral, L'École Polytechnique, La France (2000).
- [8] H. KOGELNIK Y T. LI. Laser beams and resonators. *Applied Optics* **5**(10), 1550–1567 (1966).
- [9] JHON F. READY. “Industrial Applications of lasers”. Academic Press Inc, London (1978).
- [10] RICHARD S. QUIMBY. “Photonics and Lasers. An Introduction”. John Wiley & Sons, Inc. (2006).
- [11] C. STERN Y D. GRÉSILLON. Fluctuations de densité dans la turbulence d'un jet. observation par diffusion rayleigh et détection hétérodyne. *Le Journal de Physique* (44) (Diciembre 1983).

- [12] H. WEICHEL Y L.S. PEDROTTI. "A summary of useful laser equations". Número 2. Selected papers on laser design (SPEI Press Book) (1991).
- [13] JOHN WILSON Y JOHN HAWKERS. "Optoelectronics, an introduccion". Prentice Hall, Gran Bretaña, 3<sup>a</sup> edición (1998).
- [14] AMNON YARIV Y POCHI YEH. "Photonics. Optical Electronics in Modern Communications". Oxford University Press, USA, 6<sup>a</sup> edición (2007).