UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TESINA:

CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN EN ESPACIOS MÉTRICOS SEPARABLES Y MOVIMIENTO BROWNIANO

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A

GUILLERMO GARRO GÓMEZ

DIRECTORA DE LA TESINA:

DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA

MÉXICO, D.F. **Septiembre, 2010**

Convergencia en distribución en espacios métricos separables y Movimiento Browniano

Guillermo Garro Gómez

Índice general

Prefacio

Este trabajo pretende profundizar en algunos temas estudiados en los cursos de maestría del posgrado en Ciencias Matemáticas de la UNAM, en las áreas de análisis y probabilidad. La intensión del texto es que pueda servir de apoyo en un curso avanzado de análisis matemático y probabilidad. Los requisitos: un curso de análisis matemático y un curso básico de teoría de la probabilidad. Puede servir tener conocimiento de la teoría de espacios métricos.

El texto se centra, de forma extensiva, en la teoría clásica entorno al concepto de *convergencia en distribución*, y está basado en los textos señalados en la bibliografía.

En primer lugar se exponen con todo detalle los requerimientos con los cuales puede enfocarse dicha teoría. Finalmente, en la última parte se incluye un material en donde se expone una aplicación de la teoría al proceso estocástico de trayectorias continuas más importante, el Movimiento Browniano.

Introducción

El concepto de convergencia en distribución (o convergencia débil) ha adquirido una importancia vital para la teoría probabilística actual. En prácticamente todas las ciencias (incluso aquellas no matemáticas) se reconoce esta importancia a través del famoso *Teorema de límite central*, el cual establece, como caso particular, que si X_j, $j \in \mathbb{N}$, son variables aleatorias independientes, con indéntica distribución, con media 0 y varianza 1, y $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Es decir, la distribución de las variables aleatorias S_n converge a una distribución normal de parámetros 0 y 1. Por otro lado, de este mismo teorema depende la prueba de existencia de uno de los procesos estocásticos de trayectorias continuas más importantes para toda la ciencia (desde las matemáticas y física, hasta la biología y las finanzas), el Movimiento Browniano.

En términos generales, para una función de distribución F es siempre posible encontrar una ley P, es decir, es posible encontrar un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y una variable aleatoria X tal que $P = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ y $F(x) = P(-\infty, x]$. De modo que es posible identificar el modo de convergencia en distribución con el modo de convergencia en ley (*Teorema de Helly-Bray*).

La importancia de este hecho radica en dos aspectos. Por un lado, los criterios para determinar convergencia son bastante amplios (*Teorema de Portmanteau*) como para permitir una aplicación más ágil, como en la construcción de Movimiento Browniano, descrita en la parte dos de este texto.

Ahora bien existe un interés teórico ligado al modo de convergecia en ley. La métrica ρ, introducida por Prohorov en los años 50 del siglo pasado, sobre el espacio de todas las leyes definidas sobre un mismo espacio métrico completo y saparable (como por ejemplo $\mathbb{R}$), logra caracterizar topológicamente el modo de convergencia en ley. Más aun, el espacio de todas las leyes es completo bajo esta métrica (*Teorema de Prohorov*). Dudley, más recientemente, logro otro tanto con la introducción de una métrica β. La primera parte del presente trabajo está dedicada a desarrollar estas ideas.

Parte I

Convergencia en Distribución

Capítulo 1

Convergencia de Leyes sobre espacios Métricos

En este capítulo entramos ya en el concepto de convergencia en ley y en distribución. Esencialmente se trata de establecer un criterio de covergencia en ley (*Teorema de Portmanteau*), y otro resultado que relaciona los conceptos de convergencia en ley y convergencia en distribución (*Teorema de Helly-Bray*). También revisaremos brevemente los modos de convegencia casi segura y en probabilidad.

1.1. Convergencia casi segura y en probabilidad

En esta sección definimos los conceptos básicos de convergencia en probabilidad y casi segura, en su concideración más general. Asimismo estudiamos las relaciones que existen entre estos modos de convergencia.

Definición 1.1.1. *Sea* $(S, \mathcal{O})$ *un espacio topológico,* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $X_n, X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{B}(S))$, $n = 1, ...,$ *variables aleatorias. Entonces* X_n *converge* **casi seguramente** *a* X *sii* $\mathbb{P}[X_n \to X] = 1$. *Notación:* $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

En [Kal] pág 3, puede encontrarse una prueba del resultado siguiente

Teorema 1.1.1. *Si* $(S, \mathcal{O})$ *y* $(T, \mathcal{T})$ *son espacios topológicos con bases numerables (segundo contables) entonces*

$$\mathcal{B}(\mathcal{S} \times \mathcal{T}, \mathcal{O} \otimes \mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathcal{S}, \mathcal{O}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{T}, \mathcal{T}).$$

Aquí $\mathcal{O} \otimes \mathcal{T}$ denota la topología producto sobre $S \times T$. Y $\mathcal{B}(S, \mathcal{O}) \otimes \mathcal{B}(T, \mathcal{T})$ denota la σ-álgebra producto (ver [Kal] pág 3).

En un espacio métrico (S, d), la métrica $d : S \times S \to \mathbb{R}$ es continua respecto la topología producto de la topología generada por d consigo misma. Por tanto la métrica d es $(\mathcal{B}(S \times S)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, (S, d) un espacio métrico separable (segundo contable, equivalentemente, [Wil], pág. 112) y $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, d)$ dos variables aleatorias (i.e. funciones $(\mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}(S))$-medibles, donde $\mathcal{B}(S)$ es la σ-álgebra de Borel para la topología que genera d), entonces la composición $d(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es variable aleatoria. En efecto, dado que X y Y son $(\mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}(S))$-medibles, entonces $(X, Y) : \Omega \to S \times S$ es $(\mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S))$-medible, puesto que $(X, Y)^{-1}(B \times S) = X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ y $(X, Y)^{-1}(S \times B) = Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para todo $B \in \mathcal{B}(S)$, y $\{S \times B, B \times S : B \in \mathcal{B}(S)\}$ es la clase que genera $\mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S)$. Ahora, como (S, d) es separable, $\mathcal{B}(S) \otimes \mathcal{B}(S) = \mathcal{B}(S \times S)$. Por lo tanto $d(X, Y)$ es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible.

En todo lo que sigue consideraremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y (S, d) un espacio métrico el cual contiene un subconjunto denso numerable (i.e. separable).

Definición 1.1.2. *Sean $X_n, X : \Omega \to S$, $n = 1, ...,$ variables aleatorias. Entonces X_n* **converge en probabilidad** *sii*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[d(X_n, X) > \epsilon] = 0.$$

Notación: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Existe una profunda e importante relación entre los modos de convergencia en probabilidad y casi segura, que exponemos en siguiente resultado clásico.

Teorema 1.1.2. *Sean X_n, $n = 1, ...$ y X variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y con valores en (S, d). Entonces $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si y sólo si, para toda subsucesión $X_{n(k)}$ existe una subsubsucesión $X_{n(k(r))}$ tal que $X_{n(k(r))} \xrightarrow{c.s.} X$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $\{X_{n(k)}\}_{k \geq 1}$, una subsucesión de $\{X_n\}_{n \geq 1}$. Es fácil notar que $X_{n(k)} \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Para cada $r \in \mathbb{N}$ elegimos $k(r)$ tal que

$$\mathbb{P}\left[d(X_{n(k(r))}, X) > \frac{1}{r}\right] < \frac{1}{r^2}.$$

Entonces

$$\sum_r \mathbb{P}\left[d(X_{n(k(r))}, X) > \frac{1}{r}\right] < \sum_r \frac{1}{r^2} < \infty.$$

Por el *Lema de Borel-Cantelli*,

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{r \to \infty} \left(d(X_{n(k(r))}, X) > \frac{1}{r}\right)\right] = 0.$$

De modo que

$$\mathbb{P}\left[\liminf_{r \to \infty} \left(d(X_{n(k(r))}, X) \leq \frac{1}{r}\right)\right] = 1.$$

Ahora bien, si $\omega \in \liminf_{r\to\infty} \left(d(X_{n(k(r))}, X) \leq \frac{1}{r} \right)$, entonces existe $R \geq 1$ tal que

$$0 \leq d(X_{n(k(r))}(\omega), X(\omega)) \leq \frac{1}{r},$$

para todo $r \geq R$. De este modo

$$\lim_{r\to\infty} d(X_{n(k(r))}(\omega), X(\omega)) = 0,$$

entonces $\omega \in \big(X_{n(k(r))} \to X,\, r \to \infty\big)$. Así $\mathbb{P}[X_{n(k(r))} \to X,\, r \to \infty] = 1$, i.e. $X_{n(k(r))} \to X$ c.s.

$\Leftarrow$] Ahora supongamos que X_n no converge en probabilidad a X. Para alguna $\epsilon > 0$ y alguna $\delta > 0$ existe una subsucesión $X_{n(k)}$ tal que

$$\mathbb{P}[d(X_{n(k)}, X) > \epsilon] > \delta \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, tenemos que para alguna subsubsucesión $X_{n(k(r))} \xrightarrow{c.s.} X$. Entonces

$$\mathbf{1}_{\{d(X_{n(k(r))}, X) > \epsilon\}} \to 0 \quad \text{ c. s.},$$

se sigue del *Teorema de convergencia dominada* que

$$\mathbb{P}[d(X_{n(k(r))}, X) > \epsilon] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{d(X_{n(k(r))}, X) > \epsilon\}}] \to 0 < \delta,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. □

Como consecuencia inmediata apuntamos en siguiente corolario.

Corolario 1.1.1. *Si* $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ *entonces* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Ejemplo 1.1.1. Supongamos que X_n es una sucesión de variables aleatorias independientes tales que

$$\mathbb{P}[X_n = x] = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x = 1, \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tenemos entonces que dicha sucesión converge en probabilidad a $X \equiv 0$, pero no converge casi seguramente a X.

En efecto, para cada $\epsilon > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \epsilon] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = 1] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

luego $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Ahora bien, definimos

$$C = \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 = X(\omega)\},$$

y para $\epsilon > 0$ arbitraria también definimos los subconjuntos

$$B(n,\epsilon) = \{\omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| = X_m(\omega) < \epsilon,\ m \geq n\},$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, y sea $B(\epsilon)$ la unión (sobre n) de estos subconjuntos.

De modo que $C \subseteq B(\epsilon)$. En efecto, si $\omega \in C$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende tanto de ϵ como de ω) tal que $X_m(\omega) < \epsilon$, para toda $m \geq n_0$. Luego $\omega \in B(n_0, \epsilon)$, es decir $C \subseteq B(n_0, \epsilon) \subseteq B(\epsilon)$.

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[B(n,\epsilon)] &= \prod_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}[X_m < \epsilon] \\
&= \prod_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}[X_m = 0] \\
&= \prod_{m=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \\
&= \lim_{n\leq k\to\infty} \prod_{m=n}^{k} \left(\frac{m-1}{m}\right),
\end{aligned}$$

pero

$$\prod_{m=n}^{k} \left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1-1}{n+1} \cdots \frac{k-1}{k} = \frac{n-1}{k},$$

de donde

$$\mathbb{P}[B(n,\epsilon)] = 0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[B(\epsilon)] = 0,$$

entonces la sucesión no converge casi seguramente a $X \equiv 0$.

1.2. Convergencia en ley

Definición 1.2.1. *Sea $(S, \mathcal{O})$ un espacio topológico.*

i) Una **ley** *P es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{B}(S)$.*

iii) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Si $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{B}(S))$ es una variable aleatoria, entonces la **ley de** *X* **sobre** *$(S, \mathcal{B}(S))$ se define como la medida $P_X := \mathbb{P} \circ X^{-1}$.*

Observación 1.1. *P_X es una medida de probabilidad sobre $(S, \mathcal{B}(S))$.*

Ejemplo 1.2.1. Si $x \in \mathbb{R}$ es fijo, la ley **punto de masa** está definida como

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.2.2. Consideremos $\mathbb{R}$ con topología usual y la densidad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2)$ (densidad gaussiana parámetros 0 y 1), entonces $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

es también una ley sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definición 1.2.2. *Sea $(S, \mathcal{O})$ un espacio topológico.*

i) Sea $C_b(S)$ el conjunto de todas las funciones reales, continuas y acotadas definidas sobre S. Sean también P_n y P, $n = 1, \ldots,$ leyes sobre $(S, \mathcal{B}(S))$. Decimos que P_n **converge en ley** *a P sii*

$$\forall\, f \in C_b(S) \qquad \int f dP_n \to \int f dP.$$

Notación: $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$.

ii) Sean X_n y X variables aleatorias con valores en $(S, \mathcal{O})$ (definidas sobre espacios de probabilidad no necesariamente iguales). Entonces X_n **converge en distribución o en ley** *a X (notación: $X_n \xrightarrow{d} X$ ó $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ó $X_n \xrightarrow{w} X$ ó $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$) sii la familia de leyes P_n de X_n converge a la ley P de X.*

Ejemplo 1.2.3. El conocido *Teorema Central de Límite* es una caso especial donde se da una convergencia en distribución. Su enunciación es la siguiente: Si X_n, $n \in \mathbb{N}$, son variables aleatorias (definidas sobre un mismo espacio de probabilidad) independientes, idénticamente distribuidas, con media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma^2 > 0$, entonces la sucesión de variables aleatorias $S_n := \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)/\sigma\sqrt{n}$ converge en ley a una variable aleatoria cuya distribución es normal con parámetros 0 y 1.

Ejemplo 1.2.4. Sean X_n variables aleatorias reales tales que $\mathbb{P}[X_n = n] = 1$. Si $P_n := \mathbb{P} \circ X_n^{-1}$, entonces $P_n = \delta_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \cos \pi t$. Entonces

$$\int f(t)dP_n(t) = \cos \pi n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto no existe convergencia en ley.

Ejemplo 1.2.5. Sean X_n, $n = 1, \ldots$ variables aleatorias con distribución uniforme sobre el intervalo $(0, 1/n)$. Entonces, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada,

$$\int f(t) dP_n(t) = \int_0^{1/n} f(x) dt,$$

luego, si $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f(t) dP_n(t) = 0.$$

Entonces $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$, donde $X \equiv 0$.

Como primer hecho fundamental apuntamos el siguiente teorema, cuya prueba es sorprendentemente sencilla.

Teorema 1.2.1. *Si P_n y P son leyes tales que para toda subsucesión $P_{n(k)}$ existe una subsubsucesión $P_{n(k(r))}$ tal que $P_{n(k(r))} \xrightarrow{\mathcal{L}} P$, entonces $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$.*

Demostración. Si no sucede así, entonces para alguna $f_0 \in C_b(S)$

$$\int f_0 dP_n \nrightarrow \int f dP.$$

Existe por tanto $\epsilon_0 > 0$ tal que para alguna subsucesión $P_{n(k)}$:

$$\left| \int f_0 dP_{n(k)} - \int f_0 dP \right| > \epsilon_0 \quad \forall\, k,$$

luego $P_{n(k)}$ no tiene subsubsucesiones convergentes a la ley P, lo cual es una contradicción a la hipótesis. □

El teorema siguiente es un corolario, menos evidente, del hecho anterior.

Teorema 1.2.2. *Si X_n y X, $n = 1, \ldots$, son variables aleatorias con valores en un espacio métrico separable (S, d), definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, entonces $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$.*

Demostración. Para una subsucesión $X_{n(k)}$ tomamos alguna subsubsucesión $X_{n(k(r))}$ tal que $X_{n(k(r))} \to X$ c.s. (*Teorema 1.1.2*). Ahora sea $f \in C_b(S)$. Entonces existe $M > 0$ tal que

$$|f(X_{n(k(r))})| \le M \quad \forall\, r = 1, \ldots$$

Luego

$$\int |f(X_{n(k(r))})| d\mathbb{P} \le M\mathbb{P}[\Omega] = M < \infty.$$

Por otro lado, dado que f es continua y $X_{n(k(r))} \to X$ c.s. $(r \to \infty)$, entonces $f(X_{n(k(r))}) \to f(X)$, c.s. $(r \to \infty)$. Así, por el *Teorema de convergencia dominada*,

$$\int f dP_{n(k(r))} = \int f(X_{n(k(r))}) d\mathbb{P} \to \int f(X) d\mathbb{P} = \int f dP,$$

donde $P_{n(k(r))}$ es la ley de $X_{n(k(r))}$ y P es la ley de X. De modo que $P_{n(k(r))} \xrightarrow{\mathcal{L}} P$. Finalmente por el *Teorema 1.2.1*, $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$, i.e. $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$. □

Corolario 1.2.1. *Sean X_n, $n = 1, ...,$ y X variables aleatorias con valores sobre un espacio métrico separable (S, d) y definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ ó $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, entonces $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.*

Teorema 1.2.3. *Sean $(S, \mathcal{O})$ y $(R, \mathcal{T})$ dos espacios topológicos, P y P_n, $n \in \mathbb{N}$ medidas de probabilidad definidas en $(S, \mathcal{B}(S, \mathcal{O}))$ y sea $h : (S, \mathcal{O}) \to (R, \mathcal{T})$ una función continua. Consideremos las medidas de probabilidad $Q := P \circ h^{-1}$ y $Q_n := P_n \circ h^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ definidas en $(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{R}))$. Si $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ entonces $Q_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Q$.*

Demostración. Sea $f \in C_b(R)$. Entonces según el *Lema de substitución* ([Kal] pág. 12)

$$\int_R f\,d\,Q_n = \int_S f \circ h\,dP_n.$$

Y dado que $f \circ h \in C_b(S)$, la última expresión de la igualdad anterior converge a $\int_S f \circ h\,dP$, es decir

$$\int_R f\,d\,Q_n \to \int_S f \circ h\,dP = \int_R f\,d\,Q.$$

□

1.3. Criterios de convergencia en ley. El Teorema de Portmanteau.

El teorema estudiado en esta sección establece los criterios usados para determinar cuando existe convergencia en ley.

Definición 1.3.1. *Sea (S, d) un espacio métrico. Si μ está definida sobre $\mathcal{B}(S)$, un conjunto medible A es llamada* **conjunto de continuidad** *si $\mu(\partial A) = 0$, donde ∂A es la frontera del conjunto A.*

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}$ con la métrica usual y la ley δ_x para $x \in \mathbb{R}$ fijo. Si $A = [a, b]$ entonces A es conjunto de continuidad si y sólo si $x \neq a$ y $x \neq b$.

Teorema 1.3.1 (Portmanteau)**.** *Para leyes P_n, P, $n = 1, 2, ...,$ sobre un espacio métrico (S, d) las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(a) $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$.

(b) Para toda función acotada uniformemente continua $f : S \to \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f dP_n = \int f dP.$$

(c) Para todo subconjunto $U \subset S$ abierto, $\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq P(U)$.

(d) Para todo subconjunto $F \subset S$ *cerrado,* $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \leq P(F)$.

(e) Para todo conjunto de continuidad A *de* P, $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$.

(f) Para toda función medible $f : S \to \mathbb{R}$, *acotada y continua* P*-c.s,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f dP_n = \int f dP.$$

Demostración. El orden de la prueba será el siguiente:

(a) $\Rightarrow$ *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Leftrightarrow$ *(d)* $\Rightarrow$ *(e)* $\Rightarrow$ *(a)* y *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* $\Rightarrow$ *(a)*.

(a) $\Rightarrow$ *(b)*. Es obvio.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*. Sea U abierto, $F := S \backslash U$ y $d(x,F) := \inf_{y\in F}\{d(x,y)\}$ para cada $x \in S$. Dado que $d(x,F)$ es una función uniformemente continua, las funciones $f_m(x) = \min\{1, m\cdot d(x,F)\}$, $m \in \mathbb{N}$, son uniformemente continuas y acotadas. Además $f_m \uparrow \mathbf{1}_U$. En enfecto, dado que $m < m+1$, entonces $md(x,F) \leq (m+1)d(x,F)$. Si $1 \leq md(x,F)$, entonces $1 \leq (m+1)d(x,F)$, luego

$$f_m(x) = 1 = f_{m+1}(x).$$

Ahora, si $md(x,F) < 1$, entonces

$$f_m(x) = md(x,F) \leq \begin{cases} 1 \\ \text{y} \\ (m+1)d(x,F), \end{cases}$$

por tanto $f_m(x) \leq f_{m+1}(x)$.

Por otro lado, si $x \in F$, entonces $d(x,F) = 0$, por tanto

$$f_m(x) = 0 = \mathbf{1}_U(x).$$

Si $x \notin F$ $(x \in U)$, entonces

$$f_m(x) = \min\{1, md(x,F)\} \leq 1 = \mathbf{1}_U(x)$$

Es decir $f_m(x) \leq \mathbf{1}_U(x)$.

Ahora probaremos la convergencia. Si $x \in F$ $(x \notin U)$, entonces $d(x,F) = 0$, luego $f_m(x) = 0$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0 = \mathbf{1}_U(x).$$

Si $x \notin F$ $(x \in U)$, entonces $d(x,F) > 0$, por ello existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} d(x,F) &> \frac{1}{m} > 0 \quad \forall\, m \geq M \\ \Rightarrow\ md(x,F) &> 1 \quad \forall\, m \geq M \\ \Rightarrow\quad f_m(x) &= 1 \quad \forall\, m \geq M. \end{aligned}$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} f_m(x) = 1 = \mathbf{1}_U(x)$.

Para cada m consideremos $F_m := f_m^{-1}(\{1\})$. Tenemos que

$$\int f_m dP = \int_{F_m} f_m dP + \int_{S\setminus F_m} f_m dP \geq \int_{F_m} f_m dP.$$

Pero $\int_{F_m} f_m dP = P(F_m)$ (dado que $x \in F_m \Leftrightarrow f_m(x) = 1$), por tanto

$$\int f_m dP \geq P(F_m).$$

Por otro lado, como $\mathbf{1}_U \geq f_m$, entonces

$$P_n(U) = \int \mathbf{1}_U dP_n \geq \int f_m dP_n.$$

Tomando límite inferior cuando $n \to \infty$,

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq \lim_{n\to\infty} \int f_m dP_n = \int f_m dP \geq P(F_m) \tag{1.1}$$

Ahora bien, si $x \in F_m$ entonces $f_m(x) = 1$, y como

$$1 \geq f_{m+1}(x) \geq f_m(x) = 1,$$

entonces $f_{m+1}(x) = 1$, luego $x \in F_{m+1}$. Por tanto $F_m \subset F_{m+1}$.

Si $x \in \bigcup_m F_m$, entonces existe M natural tal que $f_M(x) = 1 > 0$, luego $x \notin F$, i.e. $x \in U$. Por tanto $\bigcup_m F_m \subset U$.

Y si $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_d(x; r) \subset U$. Entonces

$$d(x, y) > r > 0 \quad \forall\, y \in F.$$

Existe así $M \in \mathbb{N}$ tal que $Md(x, y) > 1$. Por tanto $f_M(x) = 1$. Luego $x \in \bigcup_m F_m$. Es decir $U \subset \bigcup_m F_m$. De donde $U = \bigcup_m F_m$.

De este modo $P(U) = \lim_{m\to\infty} P(F_m)$. Es decir, para $\epsilon > 0$ arbitrario existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(F_m) \geq P(U) - \epsilon \quad \forall\, m \geq M.$$

Comparando con (1.1),

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq P(U) - \epsilon.$$

Si $\epsilon \to 0$, $\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq P(U)$.

(c) $\Rightarrow$ *(d)*. Sea $F \subset S$ cerrado, entonces $U := S\setminus F$ es abierto, por tanto

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq P(U).$$

Pero $P_n(U) = 1 - P_n(F)$ y $P(U) = 1 - P(F)$, de donde

$$\begin{aligned}1 - P(F) &= P(U)\\ &\le \liminf_{n\to\infty} P_n(U) = 1 - \limsup_{n\to\infty} P_n(F),\end{aligned}$$

por tanto

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F).$$

(d) $\Rightarrow$ *(c)*. Sea $U \subset S$ abierto, entonces $F := S\backslash U$ es cerrado, por tanto

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F).$$

Pero $P_n(F) = 1 - P_n(U)$ y $P(F) = 1 - P(U)$, de donde

$$\begin{aligned}1 - P(U) &= P(F)\\ &\ge \limsup_{n\to\infty} P_n(F) = 1 - \liminf_{n\to\infty} P_n(U),\end{aligned}$$

por tanto

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \ge P(U).$$

(d) $\Rightarrow$ *(e)*. Sea $A \in \mathcal{B}(S)$, entonces

$$\begin{aligned}P(\mathrm{int}A) &\le \liminf_{n\to\infty} P_n(\mathrm{int}A) && \text{(pues } (c) \text{ también es cierto)},\\ &\le \liminf_{n\to\infty} P_n(A) && \text{(pues } \mathrm{int}A \subset A),\\ &\le \limsup_{n\to\infty} P_n(A)\\ &\le \limsup_{n\to\infty} P_n(\overline{A}) && \text{(pues } A \subset \overline{A}),\\ &\le P(\overline{A}) && \text{(por } (d)).\end{aligned}$$

Ahora, si A es un conjunto de continuidad para P, entonces

$$P(\overline{A}) = P(\mathrm{int}A \cup \partial A) = P(\mathrm{int}A) + P(\partial A) = P(\mathrm{int}A),$$

luego, $\lim_{n\to\infty} P_n(A)$ existe y

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(\mathrm{int}A) \tag{1.2}$$

Pero

$$P(A) = P(A \cap \partial A) + P(A\backslash\partial A) = P(A\backslash\partial A) = P(\mathrm{int}A),$$

por lo tanto

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A).$$

(e) $\Rightarrow$ *(a)*. Consideremos primero $f \in C_b(S)$ no negativa. Para $y \in \mathbb{R}$ definimos $G_y := \{x \in S : f(x) \ge y\} = f^{-1}([y,\infty))$, y $F_y := \{x \in S : f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\})$, $y \in \mathbb{R}$.

Sea $\xi \in \partial G_y$. Supongamos que $f(\xi) > y$. Entonces para el abierto $V := f^{-1}(-\delta + f(\xi), f(\xi) + \delta) \subset S$ donde $\delta = f(\xi) - x$, tenemos que $\xi \in V$ pero $V \cap (S \backslash G_y) = \{x \in S : f(x) < y\} = \emptyset$, lo cual es una contradiccón. De modo que $f(\xi) \leq y$. Análogamente puede probarse que $f(\xi) \geq y$, con lo que $f(\xi) = y$. Esto es $\partial G_y \subset F_y$.

Antes de continuar, notamos que esta última contensión puede ser estricta. En efecto, si consideramos $S = \mathbb{R}$ con la topología discreta dada por la métrica $d(x, y) = \mathbf{1}_x(y) = \mathbf{1}_y(x)$, y consideramos la función no negativa, continua y acotada $f(x) = \mathbf{1}_{\{1\}}(x)$, entonces $G_0 = S$, de donde $\partial G_0 = \emptyset$, pero $F_0 = S\backslash\{1\}$.

Ahora, continuando con nuestra demostración, si y_1 y y_2 son puntos en $\mathbb{R}$ tales que $y_1 \neq y_2$, entonces, $F_{y_1} \cap F_{y_2} = \emptyset$. Supongamos que el conjunto $E := \{y \in \mathbb{R} : P(F_y) > 0\}$ es infinito no numerable. Si consideramos los subconjuntos $E_m := \{y \in \mathbb{R} : P(F_y) > 1/m\}$, $m \in \mathbb{N}$, entonces $E_m \uparrow E$. Luego, si E es no numerable, debe existir $M \in \mathbb{N}$ tal que E_M es no numerable. Y como $E_m \subset E_{m+1}$, entonces E_m es no numerable para toda $m \geq M$. Sea $y_m \in E_m$ para $m \geq M$ tal que $y_m \neq y_n$ si $n \neq M$ $(n, m \geq M)$. Entonces

$$1 \geq P\left(\bigcup_{m \geq M} F_{y_m}\right) = \sum_{m \geq M} P(F_{y_m}) \geq \sum_{m \geq M} \frac{1}{m} = \infty,$$

lo cual es una contradicción. De modo que E es a lo sumo numerable. Luego, $\lambda(E) = 0$, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Además, si $y \in \mathbb{R}\backslash E$ entonces

$$0 \leq P(\partial G_y) \leq P(F_y) = 0,$$

es decir, G_y es un conjunto de continuidad para la ley P.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $h_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $h_n(y) = P_n(G_y)$. Sea también la función $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $h(y) = P(G_y)$. Para $y \in \mathbb{R}\backslash E$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} h_n(y) = \lim_{n\to\infty} P_n(G_y) = P(G_y) = h(y).$$

Es decir $h_n \xrightarrow{c.s.} h$. Así, por el *Teorema de convergencia dominada*,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty h_n(y)dy = \int_0^\infty h(y)dy.$$

Pero

$$\int_0^\infty h_n(y)dy = \int_0^\infty P_n(G_y)dy = \int_0^\infty P_n(f^{-1}[y, \infty))dy = \int_S f dP_n,$$

y del mismo modo

$$\int_0^\infty h(y)dy = \int_S f dP.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

Para el caso general $f \in C_b(S)$, basta aplicar lo demostrado arriba a las funciones $\Lambda(f_n) - f_n$ y $\Lambda(f) - f$, donde $\Lambda(g) = \sup\{|g(x)| : x \in S\}$.

(e) $\Rightarrow$ *(f)*. Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos

$$D := \{x \in S : f \text{ es discontinua en } x\}.$$

Supongamos que $P(D) = 0$ (i.e. f es continua P-c.s.).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la ley sobre $\mathbb{R}$ dada por $F_n := P_n \circ f^{-1}$, y la ley $F := P \circ f^{-1}$. Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un conjunto de continuidad para F. Entonces $F(\partial B) = P(f^{-1}(\partial B)) = 0$. Observamos que

$$\partial f^{-1}(B) = (\partial f^{-1}(B) \cap D) \cup (\partial f^{-1}(B) \backslash D) \subset D \cup (\partial f^{-1}(B) \backslash D).$$

Ahora bien, si $x \in \partial f^{-1}(B) \backslash D$, entonces f es continua en x, por tanto para toda vecindad abierta $V \subset \mathbb{R}$ centrada en $f(x)$ existe una bola abierta $U \subset S$ centrada en x tal que $U \subset f^{-1}(V)$. Pero además $x \in \partial f^{-1}(B)$, entonces $U \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \neq U \cap f^{-1}(\mathbb{R} \backslash B)$. Luego $f^{-1}(V \cap B) \neq \emptyset \neq f^{-1}(V \cap (\mathbb{R} \backslash B))$. Entonces $V \cap B \neq \emptyset \neq V \cap (\mathbb{R} \backslash B)$. Así, $f(x) \in \partial B$, o equivalentemente, $x \in f^{-1}(\partial B)$.

Por lo tanto $\partial f^{-1}(B) \subset D \cup f^{-1}(\partial B)$. De este modo $P(\partial f^{-1}(B)) = 0$ (i.e. $f^{-1}(B)$ es un conjunto de continuidad para P). Entonces

$$\lim_{n \to \infty} F_n(B) = \lim_{n \to \infty} P_n(f^{-1}(B)) = P(f^{-1}(B)) = F(B).$$

Por *(a)* se sigue que $F_n \xrightarrow{\mathcal{L}} F$.

Ahora, si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$h(x) = \begin{cases} -\Lambda(f) & \text{si } x < -\Lambda(f), \\ x & \text{si } |x| \leq \Lambda(f), \\ \Lambda(f) & \text{si } x > \Lambda(f) \end{cases}$$

donde $\Lambda(f) = \sup\{|f(x)| : x \in S\}$, entonces $\int_{\mathbb{R}} h dF_n \to \int_{\mathbb{R}} h dF$, por convergencia en ley y dado que h es continua y acotada. Pero

$$\int_{\mathbb{R}} h dF_n = \int_{\mathbb{R}} h \circ f dP_n = \int_S f dP_n,$$

([Kal], pág 12) y del mismo modo,

$$\int_{\mathbb{R}} h dF = \int_S f dP.$$

Entonces $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$.

(f)$\Rightarrow$ *(a)*. Es obvio. $\square$

Ejemplo 1.3.2. Consideremos $S = \mathbb{R}$ con métrica usual, las leyes $P_n \equiv \delta_{1/n}$ y $P_0 \equiv \delta_0$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Entonces

$$\int f P_n = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int f dP_n = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = f(0) = \int f dP_0,$$

luego $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$.

Ahora si $U = (0,\infty)$, entonces $P_n(U) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\liminf_{n\to\infty} P_n(U) = 1 > 0 = P_0(U)$.

Por otro lado, si $F = (-\infty, 0]$, entonces $P_n(F) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\limsup_{n\to\infty} P_n(F) = 0 < 1 = P_0(F)$.

Entonces las desigualdades en *(c)* y *(d)* del teorema anterior no pueden ser remplazadas por igualdades.

Corolario 1.3.1. *Si P y Q son dos leyes definidas sobre (S,d) que satisfacen*

$$\int f dP = \int f dQ \quad \forall f \in C_b(S),$$

entonces $P \equiv Q$.

Demostración. Definimos $P_n \equiv Q$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$, luego, por el *Teorema de Portmanteau*,

$$P(U) \leq Q(U),$$

para todo abierto U en S. Intercambiando los papeles de P y Q concluimos también que

$$Q(U) \leq P(U),$$

de modo que $P(U) = Q(U)$ para todo abierto U en S. Luego $P \equiv Q$. □

Corolario 1.3.2. *Si $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ y $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Q$, entonces $P \equiv Q$.*

Demostración. Para toda $f \in C_b(S)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int f dP_n = \int f dP = \int f dQ,$$

luego, por el corolario anterior $P \equiv Q$. □

1.4. El Teorema de Helly-Bray

Definición 1.4.1. *Si P es una ley sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ entonces la* **función de distribución** *de P se define como*

$$F(t) = P((-\infty, t]),$$

para toda $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.4.1 (Helly-Bray)**.** *Si P_n y P son leyes sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ con funciones de distribución F_n y F, respectivamente, entonces $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ si y sólo si $F_n(t) \to F(t)$ para todo punto t de continuidad de F.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(-\infty, t] \backslash (-\infty, t-1/n] = (t-1/n, t] \quad \forall\, n \in \mathbb{R}.$$

De modo que

$$P[(t-1/n, t]] = P[(-\infty, t]] - P[(-\infty, t-1/n]] = F(t) - F(t-1/n).$$

Por otro lado

$$\{t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(t - \frac{1}{n}\,, t\right] \quad \text{ y } \quad \left(t - \frac{1}{n+1}\,, t\right] \subset \left(t - \frac{1}{n}\,, t\right] \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto

$$P[\partial(-\infty, t]] = P(\{t\}) = \lim_{n\to\infty} P((t-1/n, t]] = \lim_{n\to\infty} \{F(t) - F(t-1/n)\}.$$

Si F es continua en t, entonces

$$\lim_{x\to t^-} F(x) = F(t).$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} F\left(t - \frac{1}{n}\right) = F(t).$$

Por tanto

$$F(t) - F(t-1/n) \to 0 \quad \text{ cuando } \quad n \to \infty.$$

De modo que $P[\partial(-\infty, t]] = 0$, i.e. $(-\infty, t]$ es un conjunto de continuidad para P.

Ahora, si $P[\partial(-\infty, t]] = P[\{t\}] = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{F(t) - F(t-1/n)\} = 0,$$

luego, F es continua en t.

Hemos probado que F es una función continua en t si y sólo si $(-\infty, t]$ es un conjunto de continuidad para P.

Luego, por el *Teorema de Portmanteau* (*Teorema 1.3.1*), tenemos que para t punto de continuidad de F,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty} P_n[(-\infty, t]] = P[(-\infty, t]] = F(t).$$

$\Leftarrow$] Primero haremos algunas observaciones. Supongamos que $a < b$ y que a y b son puntos de continuidad para F. Entonces

$$\begin{aligned} P([a,b]) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left\{\left(a-\frac{1}{n},b\right]\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{P((-\infty,b]) - P((-\infty,a-1/n])\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{F(b) - F(a-1/n)\} \\ &= F(b) - F(a) \qquad \text{(por continuidad de } F \text{ en } a\text{),} \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} P((a,b)) &= P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(a,b-\frac{1}{n}\right]\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left\{\left(a,b-\frac{1}{n}\right]\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{P((-\infty,b-1/n]) - P((-\infty,a])\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\{F(b-1/n) - F(a)\} \\ &= F(b) - F(a) \qquad \text{(por continuidad de } F \text{ en } b\text{).} \end{aligned}$$

De modo que $P(\partial[a,b]) = P(\{a,b\}) = 0$. Entonces $[a,b]$ es un conjunto de continuidad para P.

Ahora bien, si (a,b) es no vacío en $\mathbb{R}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{b-a}{2} > \frac{1}{N+n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definimos ahora los conjuntos

$$A_1 := \left(a+\frac{1}{N+1},\frac{b+a}{2}\right], \quad B_1 := \left[\frac{b+a}{2},b-\frac{1}{N+1}\right),$$

y para $k > 1$,

$$A_k := \left(a+\frac{1}{N+k},a+\frac{1}{N+k-1}\right], \quad B_k := \left[b-\frac{1}{N+k-1},b-\frac{1}{N+k}\right).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $a_k \in A_k$ y $b_k \in B_k$ tal que a_k y b_k son puntos de continuidad de F. Sea $C_k := [a_k, b_k]$. Entonces $C_k \subset (a,b)$, así $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subset (a,b)$. Ahora sea $x \in (a,b)$. Entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ y existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$a + \frac{1}{N+k_1-1} \leq x \quad \text{ y } \quad x \leq b - \frac{1}{N+k_2-1}.$$

Sea $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Entonces

$$a_{k_0} \leq a + \frac{1}{N + k_0 - 1} \leq x \leq b - \frac{1}{N + k_0 - 1} \leq b_{k_0},$$

es decir $x \in [a_{k_0}, b_{k_0}] = C_{k_0}$. De donde $(a,b) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Es decir, todo intervalo (a,b) puede expresarse como una unión numerable de intervalos cerrados cuyos puntos extremos son puntos de continuidad de F.

En general, si U es un abierto en $\mathbb{R}$, existen intervalos abiertos (a_i, b_i), a_i, b_i en $\mathbb{Q}$, tales que $U = \bigcup_j (a_j, b_j)$, pues $\{(r,q) : r, q \in \mathbb{Q}\}$ es una base numerable para la topología usual en $\mathbb{R}$. Pero por lo hecho arriba existen intervalos cerrados C_k^j tales que $(a_j, b_j) = \bigcup_k C_k^j$ y cuyos puntos extremos son puntos de continuidad de F, para toda $j \in \mathbb{N}$. De modo que $U = \bigcup_j \bigcup_k C_k^j$. Esta unión es numerable y escogiendo una numeración adecuada podemos poner

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

donde $C_i = [a_i, b_i]$ y a_i, b_i son puntos de continuidad de F.

Si definimos $V_m = \bigcup_{i=1}^{m} [a_i, b_i]$ para cada $m \in \mathbb{N}$, $V_m \uparrow U$. Es decir, dada $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(V_M) > P(U) - \epsilon.$$

Ahora bien,

$$0 \leq P(\partial V_M) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{M} \partial C_i\right) = 0,$$

por tanto V_M es un conjunto de continuidad para P. Luego,

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq \liminf_{n\to\infty} P_n(V_M) = \lim_{n\to\infty} P_n(V_M) > P(U) - \epsilon.$$

Haciendo $\epsilon \to 0$, tenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(U) \geq P(U),$$

entonces por el *Teorema de Portmanteau* (*Teorema 1.3.1*), $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$. □

Proposición 1.4.1. *Si (S,d) es un espacio métrico, $p \in S$, y X_n, $n = 1, ...$, son variables aleatorias con valores en S y definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tales que $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$, donde X es la variable aleatoria constante p (cuya ley es δ_p), entonces $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.*

Demostración. Si definimos $f_k(x) := \max\{0, 1 - kd(x,p)\}$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $0 \leq f_k(x) \leq 1$ y además f_k es continua, luego $f_k \in C_b(s)$.

Por otra parte, sea $A_k := \{x \in S : d(x,p) < \frac{1}{k}\}$. Si para $x \in S$ tenemos que $f_k(x) = 0$, entonces $1 - kd(x,p) \leq 0$, es decir $1/k \leq d(x,p)$, luego $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 0$. Pero si $f_k(x) = 1 - kd(x,p)$, entonces $1 - kd(x,p) > 0$, esto es $1/k > d(x,p)$, luego $\mathbf{1}_{A_k}(x) = 1 \geq 1 - kd(x,p) = f_k(x)$. Entonces $f_k(x) \leq \mathbf{1}_{A_k}(x)$. Por lo tanto $f_k(X_n) \leq \mathbf{1}_{A_k}(X_n)$.

De este modo,

$$\int f dP_n = \int f(X_n) d\mathbb{P} \leq \int \mathbf{1}_{A_k}(X_n) d\mathbb{P} = \mathbb{P}\left(d(X_n,p) < \frac{1}{k}\right) \leq 1,$$

y como $\int f dP_n \to \int f_k d\delta_p = 1$ si $n \to \infty$, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(d(X_n,p) < \frac{1}{k}\right) = 1,$$

por lo tanto $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. $\square$

Ejemplo 1.4.1. Consideremos $S = \mathbb{R}$ con métrica usual y el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $2^{n-1} \leq j < 2^n$, definimos $X_j := \mathbf{1}_{[j/2^{n-1},(j+1)/2^{n-1})}$, y $X \equiv 0$. Puede observarse que $\{X_j\}$ no converge c.s. a X. Ahora bien,

$$F_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{si } t \in [0,1), \\ 1 & \text{si } t \geq 1, \end{cases}$$

y la distribuión de X es

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{j\to\infty} F_j(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Luego, por el *Teorema de Helly-Bray* (*Teorema 1.4.1*), $\mathcal{L}(X_j) \to \mathcal{L}(X) = \delta_0$. Y por la proposición anterior, $X_j \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Si X_n, $n = 1,2...$, y X son variables aleatorias sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y F_n, $n = 1,2,...$, y F son las respectivas funciones de distribución asociadas a las leyes determinadas por estas variables aleatorias, entonces, por el *Teorema de Helly-Brey*, $X_n \xrightarrow{d} X$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ para todo punto t de continuidad de F. Generalmente, la convergencia en distribución se establece de este modo.

Capítulo 2

Regularidad y Tensión

En este capítulo revisaremos algunos aspectos técnicos para introducir más adelante la métrica de Lévy-Prohorov y la métrica de Dudley.

Definición 2.1. *Si $(S, \mathcal{O})$ es un espacio topológico entonces la σ-álgebra de Borel en S se define como $\mathcal{B}(S) := \sigma(\mathcal{O})$. Algunas veces también se usa la notación $\mathcal{B}(S, \mathcal{O})$.*

Si (S, d) es un espacio métrico, la σ-álgebra de Borel para la topología generada por la métrica d es generada por la clase de toda las bolas abiertas $B(x, r)$, $x \in S$ y $r > 0$.

Definición 2.2. *Sea $(S, \mathcal{O})$ un espacio topológico y μ una medida sobre alguna σ-álgebra $\mathcal{F}$ en S. Entonces un conjunto $A \in \mathcal{F}$ es llamado* **regular** *si*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto }, K \subset A, K \in \mathcal{F}\}.$$

La medida μ es llamada **tensa** *si es finita y S es regular.*

El conjunto $A \in \mathcal{F}$ es llamado **regular cerrado** *si*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ cerrado }, F \subset A, F \in \mathcal{F}\}.$$

Entonces μ es llamada **regular** *(***regular cerrada***) si todo conjunto en $\mathcal{F}$ es regular (regular cerrado).*

Ejemplo 2.1. *Cualquier medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ es tensa. En efecto, $\mathbb{R}^k$ es la unión contable de los compactos $K_n := \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.2. *Sea S el semirayo $[0, \infty)$ y consideremos $\mathcal{O}$ la topología cuyos elementos básicos son el conjunto vacío $\emptyset$, los conjuntos de la forma $[0, a) \cup [1, \infty)$, donde $0 < a \leq 1$, y los conjuntos singulares $\{b\}$, donde $b > 1$. Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles sobre $S = [0, \infty)$, y para cada $A \in \mathcal{F}$, sea $\mu(A) = \int_A \exp(-x)\lambda(dx)$ donde λ es la medida de Lebesgue sobre $(S, \mathcal{F})$.*

Bajo estas condiciones μ es tensa pero no es regular. En efecto, los conjuntos $K_x := [0, x] \cup [1, \infty)$, $0 < x < 1$, son compactos, y $\mu(K_x) = 1 + \exp(-1) - \exp(-x)$; luego, $1 = \mu(S) = \sup_{0<x<1} \mu(K_x)$. Sin embargo, el conjunto $(1, \infty)$ no es regular, dado que si $K \subset (1, \infty)$ es compacto entonces es finito, por tanto $\mu(K) = 0$.

Ejemplo 2.3. *Sean S, $\mathcal{O}$, $\mathcal{F}$ y μ como el ejercicio anterior. El conjunto $[1,\infty)$ es regular (de hecho es compacto), pero no es regular cerrado ($F \subset [1,\infty)$ es cerrado, si y sólo si $F = \emptyset$). Por otro lado, el conjunto $[0,2]$ es regular cerrado (de hecho es un conjunto cerrado), pero no es regular.*

Recordemos que un espacio topológico $(S,\mathcal{O})$ se dice que es de *Hausdorff* si para cualesquiera dos puntos distintos x y y en S, existen dos conjuntos abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Teorema 2.1. *Sea $(S,\mathcal{O})$ un espacio topológico de Hausdorff, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra en S y μ una medida finta y tensa en $\mathcal{F}$. Definimos la clase*

$$\mathcal{R} := \{A \in \mathcal{S} : A \text{ y } S\backslash A \text{ son regulares }\}.$$

Entonces $\mathcal{R}$ es σ-álgebra. Lo mismo es verdadero si remplazamos regular *por* regular cerrado.

Demostración. Tenemos que S es regular, por hipótesis. Ahora, $\emptyset = S\backslash S$ es compacto, por tanto es también regular. Luego $S \in \mathcal{R}$.

Por otro lado, $A \in \mathcal{R}$ si y sólo si $S\backslash A \in \mathcal{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea ahora $A_n \in \mathcal{R}$, y $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Sea también $\epsilon > 0$ y escogemos en $\mathcal{F}$ conjuntos compactos K_n y L_n, $K_n \subset A_n$, $L_n \subset S\backslash A_n$, tales que

$$\mu(A_n\backslash K_n) \leq \frac{\epsilon}{3^n} \quad \text{y} \quad \mu((S\backslash A_n)\backslash L_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $B_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_n$, entonces $B_m \uparrow A$. Por tanto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(B_M) > \mu(A) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $K = \bigcup_{n=1}^{M} K_n$. Entonces K es compacto y además $K \subset A$. Por otra parte

$$\begin{aligned} x \in B_M\backslash K &\Rightarrow x \in B_M \text{ y } x \notin K \\ &\Rightarrow \exists\, j \in \{1,...,M\} \text{ tal que } x \in A_j \text{ y } x \notin K_n \,\forall\, n = 1,...,M \\ &\Rightarrow x \in A_j \text{ y } x \notin K_j \text{ para algún } j \in \{1,...,M\} \\ &\Rightarrow x \in A_j\backslash K_j \text{ para algún } j \in \{1,...,M\} \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{M} A_n\backslash K_n, \end{aligned}$$

es decir $B_M\backslash K \subset \bigcup_{n=1}^{M} A_n\backslash K_n$. De modo que

$$\mu(B_M) - \mu(K) = \mu(B_M\backslash K) \leq \sum_{n=1}^{M} \mu(A_n\backslash K_n) \leq \epsilon \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{3^n} = \frac{\epsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{3^M}\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces $\mu(B_M) < \mu(K) + \epsilon/2$, luego

$$\mu(A) - \frac{\epsilon}{2} < \mu(B_M) < \frac{\epsilon}{2} + \mu(K),$$

de donde
$$\mu(A) - \mu(K) < \epsilon.$$
Esto prueba que A es regular.

Sea $L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n$. Los conjuntos K_n y L_n son cerrados, por ser compactos en un espacio de Hausdorff ([Wil], pág. 119), luego uniones finitas e intersecciones numerables de estos conjuntos son cerradas también. Ahora bien, $L \subset L_1$, y L_1 es compacto, entonces L es compacto pues es cerrado ([Wil], pág. 119). Además,

$$\begin{aligned}
(S\backslash A)\backslash L &= \Big(S\backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)\backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \\
&= \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} S\backslash A_k\Big)\backslash \bigcap L_n \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} S\backslash A_k\Big)\backslash L_n \\
&\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (S\backslash A_n)\backslash L_n,
\end{aligned}$$

de donde

$$\mu(S\backslash A) - \mu(L) = \mu((S\backslash A)\backslash L) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((S\backslash A_n)\backslash L_n) < \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon.$$

Esto prueba que $S\backslash A$ es regular. Luego $A \in \mathcal{R}$. □

Es fácil notar que cualquier espacio métrico (S, d) es un espacio de Hausdorff. A partir de este hecho y el teorema anterior, podemos mostrar el enunciado siguiente.

Teorema 2.2. *En cualquier espacio métrico (S, d), cualquier medida finita sobre $\mathcal{B}(S)$ es regular cerrada. Si además es tensa, entonces es regular.*

Demostración. Sea μ una medida de Borel finita sobre S. Sea $U \subset S$ un abierto y consideremos el cerrado $F = S\backslash U$. Recordemos que $d(x, F) := \text{ínf}\{d(x, y) : y \in F\}$. Definimos

$$F_n := \{x : d(x, F) \geq 1/n\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

El conjunto F_n es cerrado, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $F_n \uparrow U$. Entonces la σ-álgebra del teorema anterior para regularidad cerrada contiene a todos los abiertos y por tanto contiene también a $\mathcal{B}(S)$. Luego μ es regular cerrada.

Ahora supongamos que μ es tensa. Para $\epsilon > 0$ dada, tomamos un compacto $K \subset S$ en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $\mu(S\backslash K) < \epsilon/2$. Y si $B \in \mathcal{B}(S)$ tomamos un cerrado $F \subset S$ tal que $\mu(B\backslash F) < \epsilon/2$. Como (S, d) es un espacio de Hausdorff, K es cerrado, así $L := K \cap F$ es cerrado, y como $L \subset K$, nuevamente dado que (S, d) es de Hausdorff, L es compacto. Ahora bien, $L \subset B$, y

$$\begin{aligned} \mu(B) - \mu(L) &= \mu(B \backslash L) \\ &= \mu((B \backslash K) \cup (B \backslash F)) \\ &\leq \mu(B \backslash K) + \mu(B \backslash F) \\ &\leq \mu(S \backslash K) + \mu(B \backslash F) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que B es regular. □

Corolario 2.1. *Si μ y ν son dos medidas de Borel finitas sobre el espacio métrico (S, d) tales que $\mu(F) = \nu(F)$ para todo cerrado $F \subset S$, entonces $\mu \equiv \nu$.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{B}(S)$, entonces, dado que μ y ν son regulares cerradas, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sup\{\mu(F) : F \text{ cerrado }, F \subset E\} \\ &= \sup\{\nu(F) : F \text{ cerrado }, F \subset E\} \\ &= \nu(E). \end{aligned}$$

□

Recordemos que un espacio topológico $(S, \mathcal{O})$ es *separable* si existe un conjunto denso $D \subset S$ numerable cuya clausura es S (i.e. $\overline{D} = S$). Decimos también que $(S, \mathcal{O})$ es *segundo contable* si la topología $\mathcal{O}$ tiene una base numerable. En un espacio métrico (S, d) ambas propiedades son equivalentes ([Wil], pág. 112). Un espacio métrico es *completo* si todo sucesión de Cauchy en S converge en S. Así, si K es un subespacio cerrado de un espacio métrico completo, entonces K es también completo.

Por otro lado, el espacio métrico (S, d) está *totalmente acotado* si para toda $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $F \subset S$ tal que para toda $x \in S$ existe $y \in F$ para el cual $d(x, y) < \epsilon$. Un espacio métrico (S, d) es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado ([Wil], pág. 298).

Teorema 2.3. *Sea (S, d) un espacio métrico separable y completo. Si μ es una medida finita sobre $\mathcal{B}(S)$ entonces es tensa.*

Demostración. Sea $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto denso numerable en S. Para $\delta > 0$ y $x \in S$, sea el conjunto cerrado $\overline{B}_d(x; \delta) := \{y \in S : d(x, y) \leq \delta\}$.

Para $m \in \mathbb{N}$ fija, definimos $E_k := \bigcup_{n=1}^{k} \overline{B}_d(x_n; 1/m)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $E_k \uparrow S$; es decir, $S \backslash E_k \downarrow \emptyset$. Y dado que μ es finita, entonces es continua en el vacío ([Coh], pág 11). Por lo tanto existe $k(m) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(S \backslash E_{k(m)}) < \frac{\epsilon}{2^m}.$$

Sea $K := \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k(m)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{k(m)} \overline{B}_d(x_n; 1/m)$ y sea $\delta > 0$. Elegimos un número $M \in \mathbb{N}$ tal que $1/M < \delta$. Sea $F = \{x_1, x_2, ..., x_{k(M)}\} \subset X$. Como $K \subset \bigcup_{m=1}^{k(M)} \overline{B}_d(x_n; 1/M)$, entonces para toda $z \in K$ existe $j \in F$ tal que $d(x_j, z) \leq \frac{1}{M}$, esto es $z \in \overline{B}_d(x_j; 1/M)$). Por lo tanto K es totalmente acotado. Ahora, como $E_{k(m)}$ es cerrado para toda $m \in \mathbb{N}$, K es cerrado. De modo que K es completo, pues (S, d) es completo; entonces K es compacto.

Ahora, $S \backslash K = \bigcup_{m=1}^{\infty} S \backslash E_{k(m)}$, entonces

$$\mu(S \backslash K) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(S \backslash E_{k(m)}) \leq \epsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \epsilon.$$

Esto prueba que μ es tensa. □

Corolario 2.2 (Teorema de Ulam). *Sobre cualquier espacio métrico (S, d) separable y completo cualquier medida finita sobre $\mathcal{B}(S)$ es regular.*

Ejemplo 2.4. *Cualquier medida finita sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ es regular.*

Daremos ahora una definición y un resultado el cual será de gran utilidad posteriormente.

Definición 2.3. *Dadas dos álgebras $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ sobre un conjunto S, donde $(S, \mathcal{T})$ es un espacio topológico de Hausdorff, y una función μ definida sobre $\mathcal{D}$ finita, no negativa y finitamente aditiva sobre $\mathcal{D}$, decimos que μ es* **regular sobre $\mathcal{V}$ para $\mathcal{D}$** *si para todo $B \in \mathcal{V}$,*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B,\ K \in \mathcal{D},\ K \ \textit{compacto}\}.$$

Teorema 2.4. *Sea $(S, \mathcal{T})$ un espacio topológico de Hausdorff. Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}$ son dos álgebras, μ es finita y finitamente aditiva sobre $\mathcal{D}$, y regular sobre $\mathcal{V}$ para $\mathcal{D}$, entonces μ es contablemente aditiva sobre $\mathcal{V}$.*

Demostración. Si μ es finitamente aditiva sobre $\mathcal{D}$, lo es también en $\mathcal{V}$. Supongamos que μ no es contablemente aditiva sobre $\mathcal{V}$, entonces no es continua en el vacío ([Coh], pág 12). Así, existen conjuntos $C_i \in \mathcal{V}$, $i \geq 1$, tales que $C_i \downarrow \emptyset$ y $\mu(C_i) > \delta$, para alguna $\delta > 0$.

Ahora, para cada C_i, sea $K_i \in \mathcal{D}$ un conjunto compacto tal que $K_i \subset C_i$, y $\mu(C_i \backslash K_i) < \delta/3^i$. Entonces, para cada n,

$$\mu(K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n) = \mu(C_n) - \mu[C_n \backslash (K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n)],$$

pero

$$\begin{aligned} C_n \backslash (K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n) &= (C_n \backslash K_1) \cup (C_n \backslash K_2) \cup \cdots \cup (C_n \backslash K_n) \\ &\subset (C_1 \backslash K_1) \cup (C_2 \backslash K_2) \cup \cdots \cup (C_n \backslash K_n), \end{aligned}$$

por tanto

$$\mu[C_n \backslash (K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n)] \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i \backslash K_i) < \delta(1 - 1/3^n) < \delta/2,$$

de donde

$$\mu(K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n) > \mu(C_n) - \delta/2 > \delta - \delta/2 = \delta/2.$$

De este modo, si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $J_n = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n$, entonces $J_n \neq \emptyset$, es un conjunto cerrado (en un espacio de Hausdorff, los conjuntos compactos son cerrados), y $J_{n+1} \subset J_n \subset K_1$. Además

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset.$$

De donde $K_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S \backslash J_n = S$, esto es, los conjuntos $S \backslash J_n$ forman una cubierta abierta de K_1. Pero K_1 es compacto, entonces dicha cubierta puede reducirse a una cubierta finita, y dado que $S \backslash J_n \subset S \backslash J_{n+1}$,debe existir un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_1 \subset S \backslash J_{n_0}$. Así, $J_{n_0} = J_{n_0} \cap K_1 = \emptyset$, lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 3

Métricas para Convergencia de Leyes

En este capítulo introducimos la métrica de Lévy-Prohorov y la métrica Dudley para el espacio de las leyes definidas sobre un espacio métrico.

Primero introducimos un nuevo conjunto y revisaremos algunas de sus propiedades.

Definición. *Sea (S, d) un espacio métrico. Para un conjunto $A \subset S$ y $\epsilon > 0$ definimos*

$$A^\epsilon := \{y \in S : d(x, y) < \epsilon \text{ para alguna } x \in A\}.$$

El conjunto A^ϵ se conoce como ϵ-vecindad de A.

Proposición. *Sea $A \subset S$.*

i) El conjunto A^ϵ es abierto.

ii) El conjunto A^ϵ es medible.

iii) $A \subset A^\epsilon$.

iv) Si $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$, entonces $A^{\epsilon_1} \subset A^{\epsilon_2}$. Y si $A_1 \subset A_2$ y $\epsilon > 0$, entonces $A_1^\epsilon \subset A_2^\epsilon$.

v) $(S \backslash A^\epsilon)^\epsilon \subset S \backslash A$.

vi) Si $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, entonces $(A^\epsilon)^\delta \subset A^{\epsilon+\delta}$.

vii) Si $F \subset S$ es un conjunto cerrado, entonces $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^{1/n}$.

viii) Si P es una ley sobre S y A es un conjunto de continuidad para P, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que

$$P(A^\delta \backslash A) < \epsilon \quad y \quad P\big((S \backslash A)^\delta \backslash (S \backslash A)\big) < \epsilon.$$

Demostración. i). Si $y \in A^\epsilon$, entonces existe $x \in A$ tal que $d(x,y) < \epsilon$. Sea $\delta = \epsilon - d(x,y) > 0$. Si $z \in B_d(y;\delta)$,

$$d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \epsilon - d(x,y) + d(y,x) = \epsilon,$$

luego $z \in A^\epsilon$. Por tanto $B_d(y;\delta) \subset A^\epsilon$.

ii). A^ϵ es abierto, luego es medible.

iii). Si $y \in A$, entonces $d(y,y) = 0 < \epsilon$, por tanto $y \in A^\epsilon$.

iv). Si $y \in A^{\epsilon_1}$, entonces para alguna $x \in A$ se tiene que $d(y,x) < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$, luego $d(y,x) < \epsilon_2$, por tanto $y \in A^{\epsilon_2}$. Ahora, si $x \in A_1^\epsilon$ entonces existe $y \in A_1 \subset A_2$ tal que $d(x,y) < \epsilon$, luego $x \in A_2^\epsilon$.

v). Sea $y \in (S \backslash A^\epsilon)^\epsilon$, entonces existe $x \in S\backslash A^\epsilon$ tal que $d(y,x) < \epsilon$. Si suponemos que $y \in A$, entonces $x \in A^\epsilon$, lo cual es una contradicción, por tanto $y \in S\backslash A$.

vi). Si $y \in (A^\epsilon)^\delta$, entonces existe $x \in A^\epsilon$ tal que $d(y,x) < \delta$. Luego, también existe $z \in A$ tal que $d(x,z) < \epsilon$. Por tanto

$$d(y,z) \leq d(y,z) + d(x,z) < \epsilon + \delta,$$

de modo que $y \in A^{\epsilon+\delta}$.

vii). Sea $F \subset S$ un cerrado. Entonces $F \subset F^{1/n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, luego $F \subset \cap_n F^{1/n}$. Ahora bien, si $x \notin F$, entonces existe $r > 0$ tal que $x \in B_d(x;r) \subset S\backslash F$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < r$, entonces para toda $y \in F$, $d(x,y) > r > 1/N$, luego $x \notin F^{1/N}$, por lo tanto $x \notin \cap_n F^{1/n}$.

viii). Sea P una ley sobre S y A un conjunto de continuidad para P. Entonces $S\backslash A$ es también un conjunto de continuidad para P (dado que $\partial A = \partial\, S\backslash A$). Por el inciso anterior $\overline{A}^{1/n} \downarrow \overline{A}$ y $\overline{S\backslash A}^{1/n} \downarrow \overline{S\backslash A}$. Si $\epsilon > 0$ entonces existe n tal que

$$\begin{aligned} P(A^{1/n}\backslash A) &= P(A^{1/n}) - P(A) \\ &\leq P(\overline{A}^{1/n}) - P(A) \\ &= P(\overline{A}^{1/n}) - P(\overline{A}) \\ &= P(\overline{A}^{1/n}\backslash \overline{A}) < \epsilon, \end{aligned}$$

y del mismo modo, para alguna m,

$$P((S\backslash A)^{1/m}\backslash(S\backslash A)) < \epsilon.$$

Sea $0 < \delta < \min\{1/n, 1/m, \epsilon\}$, entonces

$$P(A^\delta\backslash A) < \epsilon \quad \text{y} \quad P((S\backslash A)^\delta\backslash(S\backslash A)) < \epsilon.$$

$\square$

3.1. Métrica ρ de Lévy-Prohorov

Definición 3.1.1 (Métrica de Lévy-Prohorov)**.** *Si P y Q son leyes sobre el espacio métrico (S,d), definimos*

$$\rho(P,Q) := \inf\{\epsilon > 0 : P(A) \leq Q(A^\epsilon) + \epsilon \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(S)\}.$$

Observación 3.1.1. *Si $\epsilon = 1$, entonces*

$$P(A) \leq 1 \leq Q(A^1) + 1,$$

para todo $A \in \mathcal{B}(S)$. Luego, la expresión para ρ tiene sentido. Y además $\rho(P,Q) \leq 1$.

Teorema 3.1.1. *Para cualquier espacio métrico (S,d), ρ es una métrica sobre el espacio de todas las leyes sobre S.*

Demostración. En primer lugar, es claro que $\rho(P,Q) \geq 0$. Por otra parte, dada la *Observación 3.1.1*, tenemos que $\rho(P,Q) \leq 1 < \infty$.

Ahora, como $A \subset A^\epsilon$ para todo $A \in \mathcal{B}(S)$ y para toda $\epsilon > 0$, tenemos que

$$P(A) \leq P(A^\epsilon) \leq P(A^\epsilon) + \epsilon, \quad \forall\, A \in \mathcal{B}(S) \quad \text{y} \quad \forall\, \epsilon > 0,$$

por lo tanto $\rho(P,P) = 0$.

Supongamos que $\rho(P,Q) > 0$, y sea $\epsilon > 0$ tal que $\rho(P,Q) > \epsilon$.

Entonces existe $A \in \mathcal{B}(S)$ tal que

$$1 - P(S\backslash A) = P(A) > Q(A^\epsilon) + \epsilon = 1 - Q(S\backslash A^\epsilon) + \epsilon,$$

de donde

$$Q(S\backslash A^\epsilon) > P(S\backslash A) + \epsilon \geq P((S\backslash A^\epsilon)^\epsilon) + \epsilon,$$

por lo tanto $\rho(Q,P) \geq \rho(P,Q)$. Luego $\rho(Q,P) > 0$, y si intercambiamos los papales para P y Q en todo lo anterior, entonces $\rho(P,Q) \geq \rho(Q,P)$, por lo tanto $\rho(P,Q) = \rho(Q,P)$. Además, si $\rho(P,Q) = 0$, entonces $\rho(Q,P) = 0$, luego $\rho(P,Q) = \rho(Q,P)$.

Sea $F \subset S$ un conjunto cerrado. Si suponemos que $\rho(P,Q) = 0$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < 1/n$ y $P(F) \leq Q(F^\epsilon) + \epsilon$. Por tanto $F^\epsilon \subset F^{1/n}$ y

$$P(F) \leq Q(F^\epsilon) + \epsilon < Q(F^{1/n}) + \frac{1}{n}.$$

Si $n \to \infty$, $P(F) \leq Q(F)$. Intercambiando los papeles de P y Q, entonces $Q(F) \leq P(F)$. Luego $P(F) = Q(F)$. Entonces $P \equiv Q$ (*Corolario 2.1*).

Ahora, si M, P y Q son leyes sobre S, $\rho(M,P) < \epsilon$ y $\rho(P,Q) < \delta$, entonces para cualquier $A \in \mathcal{B}(S)$, se tiene que

$$M(A) \leq P(A^\epsilon) + \epsilon \leq Q((A^\epsilon)^\delta) + \delta + \epsilon \leq Q(A^{\epsilon+\delta}) + \epsilon + \delta,$$

de modo que $\rho(M,Q) \leq \epsilon + \delta$. Entonces haciendo $\epsilon \downarrow \rho(M,P)$ y $\delta \downarrow \rho(P,Q)$, tenemos que

$$\rho(M,Q) \leq \rho(M,P) + \rho(P,Q).$$

□

Ejemplo 3.1.1. Para dos masas puntuales, δ_x y δ_y, tenemos que

$$\rho(\delta_x, \delta_y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\delta_x(A) \leq \delta_y(A^\epsilon) + \epsilon$, para toda $A \in \mathcal{B}(S)$. Por la *Observación 1*, podemos suponer que $0 < \epsilon \leq 1$. En particular tenemos que para $x \in A$, entonces

$$1 = \delta_x(A) \leq \delta_y(A^\epsilon) + \epsilon. \tag{3.1}$$

Si $A = \{x\}$, entonces $y \in A^\epsilon$ si y sólo si $d(x, y) < \epsilon \leq 1$. Por lo tanto si sucede que $d(x, y) > 1$, entonces $y \notin A^\epsilon$, se sigue de (3.1) que $\epsilon = 1$. Luego $\rho(\delta_x, \delta_y) = 1 = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$. Por otra parte, si $d(x, y) \leq 1$ y suponemos que $\epsilon < d(x, y)$, entonces $y \notin \{x\}^\epsilon$, luego de (3.1), $1 \leq \epsilon < 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $d(x, y) \leq \epsilon$, de donde $d(x, y) \leq \rho(\delta_x, \delta_y)$.

Si $\eta \geq d(x, y)$ entonces $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \eta + \epsilon$.Elegimos $A = \{x\}$, por tanto $d(y, x) < \epsilon$.Entonces $d(x, y) \leq \rho(\delta_x, \delta_y)$ Si existe η tal que $d(x, y) < \eta < \rho(\delta_x, \delta_y)$. Entonces para algún $A \in \mathcal{B}(S)$, $\delta_x(A) > \delta_y(A^\eta) + \eta$. Entonces $\delta_x(A) = 1$ y $\delta_y(A^\eta) = 0$. Esto es $x \in A$ y $y \notin A^\eta$, por tanto $d(y, z) \geq \eta$ para toda $z \in A$, en particular $d(x, y) \geq \eta$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $\rho(\delta_x, \delta_y) = d(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}$. □

En general no resulta sencillo manejar la métrica de Prohorov, sin embargo, un caso relativamente fácil es cuando las leyes en cuestión derivan de ciertas distribuciones uniformes.

Ejemplo 3.1.2. Sea $\epsilon > 0$.Si P_x denota la ley derivada de una distribución uniforme sobre $(0, x)$, entonces

$$\rho(P_1, P_{1+\epsilon}) = \frac{\epsilon}{2 + \epsilon}.$$

Demostración. Primero observamos que si $0 < x \leq y$ y si $A \subset (0, x)$ es un conjunto de Borel, entonces $P_y(A) \leq P_x(A)$, dado que $f_y(z) = \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} = f_x(z)$, para todo $z \in (0, x)$, donde f_y y f_x son las respectivas funciones de densidad para las distribuciones uniformes.

Sea $0 < \delta \leq \epsilon$. Denotemos $I = (0, 1)$. Si $E \subset I$ entonces

$$I^\delta \backslash (I \backslash E)^\delta \subset \left[I^\delta \backslash (I \backslash E)^\delta \right]^\delta \subset I^\delta \backslash (I \backslash E) = E.$$

En particular, si $E = I \backslash F$, donde $F \subset I$ es un conjunto de Borel,

$$I^\delta \backslash F^\delta \subset I \backslash F. \tag{3.2}$$

De este hecho y de la observación hecha arriba,

$$P_{1+\epsilon}(I^\delta \backslash F^\delta) \leq P_{1+\epsilon}(I \backslash F) \leq P_{1+\delta}(I \backslash F) \leq P_1(I \backslash F).$$

Luego,

$$\begin{aligned} P_1(F) - P_{1+\epsilon}(F^\delta) &= 1 - P_1(I \backslash F) - \left[P_{1+\epsilon}(I^\delta) - P_{1+\epsilon}(I^\delta \backslash F^\delta) \right] \\ &= 1 - P_{1+\epsilon}(I^\delta) + P_{1+\epsilon}(I^\delta \backslash F^\delta) - P_1(I \backslash F) \\ &\leq 1 - P_{1+\epsilon}(I^\delta). \end{aligned}$$

En general, sea F un conjunto de Borel en $\mathbb{R}$. Tenemos,

$$\begin{aligned} P_1(F) - P_{1+\epsilon}(F^\delta) &= P_1(F \cap I) - P_{1+\epsilon}(F^\delta) \\ &\leq P_1(F \cap I) - P_{1+\epsilon}\big[(F \cap I)^\delta\big] \\ &\leq 1 - P_{1+e}(I^\delta). \end{aligned}$$

En términos precisos, $1 - P_{1+e}(I^\delta) = 1 - \dfrac{1+\delta}{1+\epsilon} = \dfrac{\epsilon - \delta}{1+\epsilon}$. Por tanto,

$$P_1(F) - P_{1+\epsilon}(F^\delta) \leq \frac{\epsilon - \delta}{1+\epsilon},$$

para todo $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\square$

3.2. Métrica β de Dudley

Para toda función $f : S \to \mathbb{R}$, definimos

$$||f||_L = \sup\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} : x \neq y \right\},$$

la cual llamaremos *semi-norma de Lipschitz*. También definimos

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + \|f\|_L,$$

la cual, en el espacio $BL(S,d)$ de todas las funciones tales que $\|f\|_{BL} < \infty$, srá llamada *norma de Lipschitz-acotada*. (Ver Apéndice A).

Definición 3.2.1 (Métrica β de Dudley)**.** *Si P y Q son dos leyes sobre S, y $f : S \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces definimos*

$$\int f d(P - Q) := \int f dP - \int f dQ,$$

siempre y cuando alguna de las dos integrales exista. También definimos

$$\beta(P,Q) := \sup\left\{ \left| \int f d(P - Q) \right| : \|f\|_{BL} \leq 1 \right\}.$$

Teorema 3.2.1. *Para cualquier espacio métrico (S,d), β es una métrica sobre el conjunto de todas las leyes sobre $(S, \mathcal{B}(S))$.*

Demostración. En primer lugar, si $\|f\|_{BL} \leq 1$ entonces $\|f\|_\infty \leq 1$, por lo tanto

$$0 \leq \left| \int f d(P - Q) \right| \leq \left| \int f dP \right| + \left| \int f dQ \right| \leq \int |f| dP + \int |f| dQ \leq 2 < \infty,$$

así $0 \leq \beta(P,Q) < 2 < \infty$.

Además,

$$\left|\int f d(P-Q)\right| = \left|\int f dP - \int f dQ\right| = \left|\int f dQ - \int f dP\right| = \left|\int f d(Q-P)\right|,$$

por lo tanto $\beta(P,Q) = \beta(Q,P)$.

Si M, P y Q son tres leyes sobre S y $\|f\|_{BL} \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int f d(P-Q) &= \int f dP - \int f dQ \\ &= \int f dP - \int f dM + \int f dM - \int f dQ \\ &= \int f d(P-M) + \int f d(M-Q),\end{aligned}$$

de modo que

$$\left|\int f d(P-Q)\right| \leq \left|\int f d(P-M)\right| + \left|\int f d(M-Q)\right|,$$

por lo tanto $\beta(P,Q) \leq \beta(P,M) + \beta(M,Q)$.

Supongamos ahora que $\beta(P,Q) = 0$. Sea F un conjunto cerrado y consideremos $f_m(x) := \text{mín}\{1, md(x,F)\}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Tenemos que para $x \neq y$

$$|d(x,F) - d(y,F)| \leq d(x,y),$$

por lo tanto

$$\frac{|md(x,F) - md(y,F)|}{d(x,y)} \leq m,$$

de modo que $\|m\, d(\cdot,F)\|_L \leq m$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\|f_m\|_{BL} &= \|f_m\|_L + \|f_m\|_\infty \\ &\leq \text{máx}\{\|m\, d(\cdot,F)\|_L, \|1\|_L\} + 1 \qquad (\textit{Teorema A.1}) \\ &\leq m+1.\end{aligned}$$

Entonces si consideramos $f'_m := \frac{1}{m+1} f_m$ tenemos que $\|f'_m\|_{BL} \leq 1$ y

$$\frac{1}{m+1}\left|\int f_m d(P-Q)\right| = \left|\int f'_m d(P-Q)\right| = 0,$$

de donde

$$\int f_m dP = \int f_m dQ,$$

y dado que $f_m \uparrow \mathbf{1}_U$, donde $U = S \backslash F$, entonces

$$P(U) = \int \mathbf{1}_U dP = \int \mathbf{1}_U dQ = Q(U),$$

luego $P(F) = Q(F)$. Entonces, por regularidad (*Corolario 2.1*) $P \equiv Q$. $\square$

Ejemplo 3.2.1. Sea (S, d) un espacio métrico y $x, y \in S$. Entonces

$$\beta(\delta_x, \delta_y) = \frac{d(x,y)}{\frac{1}{2}d(x,y)+1}$$

Demostración. Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$ y $\beta(\delta_x, \delta_y) = 0$, así el resultado es obvio. Supongamos ahora que $x \neq y$. Primero observamos que si $\xi \in S$ y $f : S \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f = \mathbf{1}_A$ donde $A \subset S$ es medible, entonces

$$\int f(x)\delta_\xi(dx) = \delta_\xi(A) = \mathbf{1}_A(\xi) = f(\xi).$$

De donde puede concluirse que para toda función medible $f : S \to \mathbb{R}$,

$$\int f(x)\delta_\xi(dx) = f(\xi).$$

Por lo tanto $\beta(\delta_x, \delta_y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : \|f\|_{BL} \leq 1\}$.

Ahora hagamos otra observación. Si $\|f\|_{BL} \leq 1$, entonces

$$\|f\|_\infty + \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leq 1,$$

de donde

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)\big(1 - \|f\|_\infty\big).$$

Para facilitar notación, hacemos $\epsilon = d(x,y)/\big(\frac{1}{2}d(x,y)+1\big)$. Por lo tanto $0 \leq \epsilon \leq 2$ y $\big(1 - \frac{1}{2}\epsilon\big)d(x,y) = \epsilon$. Definimos $g : S \to \mathbb{R}$ como

$$g(s) = \min\left\{\epsilon, \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right)d(s,y)\right\}.$$

Entonces $0 \leq g(s) \leq \epsilon$, $g(y) = 0$ y $g(x) = \epsilon$.

Por otra parte, $\|g\|_L = \big(1 - \frac{1}{2}\epsilon\big)$. En efecto, si $s, t \in S$ y suponemos primero que $g(t) = \big(1 - \frac{1}{2}e\big)d(t, y)$, entonces

$$\begin{aligned} g(s) - g(t) &\leq \left(1 - \frac{1}{2}e\right)d(s,y) - \left(1 - \frac{1}{2}e\right)d(t,y) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}e\right)(d(s,y) - d(t,y)) \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2}e\right)d(s,t) \qquad \text{(desigualdad del triángulo)}, \end{aligned}$$

y si $g(t) = \epsilon$, entonces

$$g(t) - g(s) \leq \epsilon - \epsilon = 0 \leq \left(1 - \frac{1}{2}e\right)d(s,t).$$

Intercambiando los papeles de t y s concluimos que

$$|g(s) - g(t)| \leq \left(1 - \frac{1}{2}e\right)d(s,t),$$

luego, si $s \neq t$,
$$\frac{|g(s) - g(t)|}{d(s,t)} \leq 1 - \frac{1}{2}e.$$
Y cuando $t = x$ y $s = y$ esta cota se alcanza:
$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} = 1 - \frac{1}{2}e.$$
De manera que $\|g\|_L = 1 - \frac{1}{2}e$.

Definimos ahora la función $h : S \to \mathbb{R}$ dada por $h(s) = g(s) - \frac{1}{2}\epsilon$. Entonces, por lo anterior, $\|h\|_\infty = \frac{1}{2}\epsilon$; y dado que $|h(s) - h(t)| = |g(s) - g(t)|$, se sigue que $\|h\|_L = 1 - \frac{1}{2}e$. Así,
$$\|h\|_{BL} = \|h\|_\infty + \|h\|_L = \frac{1}{2}\epsilon + 1 - \frac{1}{2}e = 1.$$
Además,
$$|h(x) - h(y)| = \epsilon = \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) d(x,y) = (1 - \|h|_\infty)d(x,y).$$
Ahora, si para otra función $f : S \to \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_{BL} \leq 1$ se tiene que $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$, entonces $\|f\|_\infty \geq \epsilon/2$ (de lo contrario, i.e. $\|f\|_\infty < \epsilon/2$, se seguiría que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, lo cual es una contradicción). De manera que
$$\epsilon \leq |f(x) - f(y)| \leq d(x,y)\big(1 - \|f\|_\infty\big) \leq \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon\right) d(x,y) = \epsilon.$$
Así, concluimos que $\beta(\delta_x, \delta_y) = \epsilon$. □

3.3. Convergencia para las métricas ρ y β

Antes de continuar, hacemos un par de observaciones más respecto a los conjuntos A^ϵ.

Proposición 3.3.1. *Si $F \subset S$ y $\epsilon > 0$, entonces existe una función $g \in BL(S,d)$ tal que*
$$\mathbf{1}_F(x) \leq g(x) \leq \mathbf{1}_{F^\epsilon}(x) \quad \forall\, x \in S.$$
Más aún, $\|g\|_{BL} \leq 1 + \epsilon^{-1}$.

Demostración. Definimos $g(x) := \text{máx}\left\{0, 1 - \dfrac{d(x,F)}{\epsilon}\right\}$. Entonces
$$\begin{aligned}
\|g\|_{BL} &= \|g\|_L + \|g\|_\infty \\
&\leq \left\| \text{máx}\left\{0, 1 - \frac{d(\cdot,F)}{\epsilon}\right\}\right\|_L + 1 \\
&\leq \left\| 1 - \frac{d(\cdot,F)}{\epsilon}\right\|_L + 1 && (\textit{Teorema A.1}).
\end{aligned}$$

Si $x \neq y$, entonces

$$
\begin{aligned}
|d(x,F) - d(y,F)| &\leq d(x,y) \\
\Rightarrow \quad \left| \frac{d(x,F)}{\epsilon} - \frac{d(y,F)}{\epsilon} \right| &\leq \frac{d(x,y)}{\epsilon} \\
\Rightarrow \quad \left| 1 - \frac{d(x,F)}{\epsilon} - \left(1 - \frac{d(y,F)}{\epsilon} \right) \right| &\leq \frac{d(x,y)}{\epsilon} \\
\Rightarrow \quad \frac{\left| 1 - \frac{d(x,F)}{\epsilon} - \left(1 - \frac{d(y,F)}{\epsilon} \right) \right|}{d(x,y)} &\leq \frac{1}{\epsilon},
\end{aligned}
$$

por lo tanto $\left\| 1 - \dfrac{d(\cdot,F)}{\epsilon} \right\|_L \leq \dfrac{1}{\epsilon}$. Luego $\|g\|_{BL} \leq \frac{1}{\epsilon} + 1 < \infty$. Entonces $g \in BL(S,d)$.

Ahora, si $x \notin F$, entonces $\mathbf{1}_F(x) = 0 \leq g(x)$. Y si $x \in F$, entonces $d(x,F) = 0$, por lo tanto $g(x) = 1 = \mathbf{1}_F(x)$.

Si $x \notin F^\epsilon$, entonces $d(x,y) \geq \epsilon$, para toda $y \in F$, por lo tanto $d(x,F) \geq \epsilon$, luego $1 - d(x,F)/\epsilon \leq 0$, por lo tanto $g(x) = 0 = \mathbf{1}_{F^\epsilon}(x)$. Y si $x \in F^\epsilon$, entonces $g(x) \leq 1 = \mathbf{1}_{F^\epsilon}(x)$. □

Teorema 3.3.1. *Si P y Q son leyes sobre S, entonces $\rho(P,Q) \leq 2\beta(P,Q)^{1/2}$.*

Demostración. Si $P = Q$, entonces de forma inmediata

$$0 = \rho(P,Q) \leq 2\beta(P,Q)^{1/2} = 0.$$

Supongamos por lo tanto que $P \neq Q$. Sea $A \in \mathcal{B}(S)$ no vacío y $\epsilon > 0$. Consideramos
$g(x) := \text{máx}\left\{ 0, 1 - \dfrac{d(x,A)}{\epsilon} \right\}$, entonces $\|g\|_{BL} \leq 1 + \epsilon^{-1}$ y además $\mathbf{1}_A \leq g \leq \mathbf{1}_{A^\epsilon}$, de donde

$$Q(A) = \int \mathbf{1}_A dQ \leq \int g dQ.$$

Ahora,

$$\int g dQ = \int g dQ - \int g dP + \int g dP = \int g dP - \left(\int g d(P-Q) \right),$$

por lo tanto

$$\int g dQ = \left| \int g dQ \right| \leq \left| \int g dP \right| + \left| \int g d(P-Q) \right| = \int g dP + \left| \int g d(P-Q) \right|.$$

Pero,

$$\left| \int g d(P-Q) \right| = \|g\|_{BL} \left| \int \frac{g}{\|g\|_{BL}} d(P-Q) \right| \leq \|g\|_{BL} \beta(P,Q) \leq (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q),$$

y además

$$\int g dP \leq \int \mathbf{1}_{A^\epsilon} dP = P(A^\epsilon),$$

de este modo

$$Q(A) \leq \int g dQ \leq P(A^\epsilon) + (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q).$$

Si $\epsilon \geq (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q)$, entonces

$$Q(A) \leq P(A^\epsilon) + \epsilon,$$

por lo tanto $\rho(P,Q) \leq \epsilon$.

Ahora, si $\epsilon \leq \alpha := (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q)$, entonces $A^\epsilon \subset A^\alpha$, de donde $P(A^\epsilon) \leq P(A^\alpha)$, por lo tanto

$$Q(A) \leq P(A^\alpha) + \alpha,$$

entonces, $\rho(P,Q) \leq \alpha = (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q)$.

Lo anterior prueba que

$$\rho(P,Q) \leq \text{máx}\{\epsilon, (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q)\}.$$

Entonces si escogemos ϵ tal que $\beta(P,Q) \leq \epsilon^2$, se tiene que

$$(1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q) \leq \epsilon + \epsilon^2,$$

de donde

$$\rho(P,Q) \leq \text{máx}\{\epsilon, (1+\epsilon^{-1})\beta(P,Q)\} \leq \text{máx}\{\epsilon, \epsilon+\epsilon^2\} = \epsilon + \epsilon^2.$$

Ahora, elegimos exactamente $\epsilon^2 = \beta(P,Q)$. Si $\beta(P,Q) \leq 1$, entonces $\epsilon \leq 1$, luego $\epsilon + \epsilon^2 \leq 2\epsilon$, por tanto

$$\rho(P,Q) \leq 2\epsilon = 2\beta(P,Q)^{1/2}.$$

□

Teorema 3.3.2. *Sea (S,d) un espacio métrico completo separable y P_n, P leyes sobre $(S, \mathcal{B}(S))$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(a) $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$

(b) $\int f dP_n \to \int f dP$, *para toda* $f \in BL(S,d)$.

(c) $\beta(P_n, P) \to 0$.

(d) $\rho(P_n, P) \to 0$.

Demostración. (a) ⇒ (b). Si $M := \|f\|_{BL} < \infty$, entonces $\|f\|_\infty \leq M$ y $\|f\|_L \leq M$, por lo tanto f es acotada y además

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leq M, \qquad \text{para toda } x, y \in S,\ x \neq y,$$

de donde se sigue que f también es continua, por tanto $f \in C_b(S)$. De aquí se sigue *(b)*.

(b) ⇒ (c). Sea $\epsilon > 0$. Por el *Teorema de Ulam* (*Corolario 2.2*), podemos escoger $K \subset S$ compacto tal que $P(K) > P(S) - \epsilon = 1 - \epsilon$. Dado que $B_K := \{f \in \mathbb{R}^K : \|f\|_{BL} \leq 1\}$ está totalmente acotado (*Lema A.2*), entonces existe un conjunto finito $\{f_1, ..., f_r\} \subset B_K$ tal que para toda $f \in B_K$ existe $j \in \{1, ..., r\}$ tal que $\|f - f_j\|_\infty < \epsilon$, i.e. $\sup_{z \in K} |f(z) - f_j(z)| < \epsilon$.

Ahora, si $x \in K^\epsilon$ y $y \in K$ es tal que $d(x,y) < \epsilon$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_j(x)| &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| \\
&\leq \|f\|_L d(x,y) + \epsilon + \|f_j\| d(x,y) \\
&\leq 3\epsilon,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\sup\{|f(x) - f_j(x)| : x \in K^\epsilon\} \leq 3\epsilon$.

Por otro lado, si consideramos $g(x) := \text{máx}\{0, 1 - d(x,K)/\epsilon\}$ (por tanto $\mathbf{1}_K \leq g \leq \mathbf{1}_{K^\epsilon}$), entonces para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tenemos

$$\int g dP - \int g dP_n < \epsilon,$$

de donde

$$1 - 2\epsilon = 1 - \epsilon - \epsilon < P(K) - \epsilon = \int g dP - \epsilon < \int g dP_n \leq \int \mathbf{1}_{K^\epsilon} dP_n = P_n(K^\epsilon),$$

de modo que $1 - P_n(K^\epsilon) = P_n(S \backslash K^\epsilon) \leq 2\epsilon$.

Si $f \in B_K$ y f_j como antes, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \int f d(P_n - P) \right| &= \left| \int f dP_n - \int f_j dP_n + \int f_j dP - \int f dP + \int f_j dP_n - \int f_j dP \right| \\
&= \left| \int (f - f_j) dP_n - \int (f - f_j) dP + \int f_j d(P_n - P) \right| \\
&\leq \int |f - f_j| dP_n + \int |f - f_j| dP + \left| \int f_j d(P_n - P) \right| \\
&= \int |f - f_j| d(P_n + P) + \left| \int f_j d(P_n - P) \right|.
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\int |f - f_j| d(P_n - P) &= \int_{K^\epsilon} |f - f_j| d(P_n + P) + \int_{S\setminus K^\epsilon} |f - f_j| d(P_n + P)\\ &\leq 3\epsilon \int_{K^\epsilon} d(P_n + P) + \int_{S\setminus K^\epsilon} |f| d(P_n + P) + \int_{S\setminus K^\epsilon} |f_j| d(P_n + P)\\ &\leq 3\epsilon \left(\int_S dP_n + \int_S dP \right) + 2 \int_{S\setminus K^\epsilon} d(P_n + P)\\ &= 6\epsilon + 2[P_n(S\setminus K^\epsilon) + P(S\setminus K^e)]\\ &\leq 6\epsilon + 2[2\epsilon + \epsilon]\\ &= 12\epsilon.\end{aligned}$$

Y si eleginos n adecuadamente grande, entonces $\left| \int f_j d(P_n - P) \right| < \epsilon$, por tanto

$$\left| \int f d(P_n - P) \right| \leq 13\epsilon,$$

de donde se sigue *(c)*.

(c) ⇒ (d). Para leyes P_n y P tales que $\beta(P_n, P) \to 0$ $(n \to \infty)$, tenemos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \rho(P_n, P) \leq 2 \left(\lim_{n\to\infty} \beta(P_n, P) \right)^{1/2} = 0,$$

por lo tanto $\rho(P_n, P) \to 0$ si $n \to \infty$.

(d) ⇒ (a). Sea A un conjunto de continuidad para P y $\epsilon > 0$. Entonces tomamos $0 < \delta < \epsilon$ tal que $P(A^\delta \setminus A) < \epsilon$ y $P(A^{c\delta} \setminus A^c) < \epsilon$. Como $\rho(P_n, P) \to 0$, entonces elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(P_n, P) < \delta$, entonces para alguna $0 < \eta < \delta$ tenemos que

$$P_n(A) \leq P(A^\eta) + \eta \leq P(A^\delta) + \delta \leq P(A) + \epsilon + \epsilon = P(A) + 2\epsilon,$$

y del mismo modo se prueba que

$$P_n(A^c) \leq P(A^c) + 2\epsilon.$$

De esta manera

$$|P_n(A) - P(A)| \leq 2\epsilon,$$

luego $P_n(A) \to P(A)$. Y por el *Teorema de Portmanteau* (*Teorema 1.3.1*), $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$. □

Corolario 3.3.1. *Supongamos que P_{nk} y P_n son leyes sobre el espacio métrico completo separable S tales que $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$ y para cada n, $P_{nk} \xrightarrow{\mathcal{L}} P_n$, entonces existe una subsucesión $P_{nk(n)}$ tal que $P_{nk(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(P_n, P_0) < \epsilon/2$, para toda $n \geq N$. Pero para cada $n \geq N$ también existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\beta(P_{nk}, P_n) < \epsilon/2$ para toda $k \geq k(n)$. De modo que

$$\beta(P_{nk(n)}, P_0) \leq \beta(P_{nk(n)}, P_n) + \beta(P_n, P_0) < \epsilon, \quad \forall\, n \geq N,$$

de donde se sigue que $P_{nk(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$. □

Corolario 3.3.2. *Sea $(S, \mathcal{T})$ cualquier espacio topológico separable (con un subconjunto denso contable). Supongamos que las leyes $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ sobre S y que $\mathcal{F}$ es una familia de funciones equicontinuas uniformemente acotada. Entonces $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ uniformemente sobre $\mathcal{F}$, esto es,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \left\{ \left| \int f d(P_n - P) \right| : f \in \mathcal{F} \right\} = 0.$$

Demostración. Sea $d(x, y) := \sup\{|f(x) - f(y) : f \in \mathcal{F}\}$ para cada $x, y \in S$. Entonces d es una pseudométrica sobre S.

En efecto, en primer lugar, como la familia $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, existe $0 < M < \infty$ tal que $\|f\|_\infty < M$ para toda $f \in \mathcal{F}$. De modo que

$$0 \leq |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M < \infty,$$

para toda $f \in \mathcal{F}$ y para todo $x, y \in S$. Entonces $0 \leq d(x, y) < \infty$ para todo $x, y \in S$.

Por otra parte, es claro que $d(x, y) = d(y, x)$ y $d(x, x) = 0$ para todo $x, y \in S$.

Ahora, si $x, y, z \in S$ y $f \in \mathcal{F}$, entonces

$$|f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|,$$

de donde se sigue que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Finalmente, si $d(x, y) = 0$, entonces $|f(x) - f(y)| = 0$, es decir $f(x) = f(y)$, para toda $f \in \mathcal{F}$, pero esto no implica necesariamente que $x = y$.

Pero podemos definir la relación E como

$$xEy \quad \Leftrightarrow \quad d(x, y) = 0.$$

Entonces E es de equivalencia. En efecto, dado que $d(x, x) = 0$, entonces xEx para toda $x \in S$. Y si xEy entonces $d(y, x) = d(x, y) = 0$, luego yEx. Por último, si xEy y yEz, entonces

$$0 \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = 0,$$

luego xEz.

Sea $T := S/E$ el espacio cociente de esta relación de equivalencia y sea $G : S \to S/E$ el mapeo natural (tal que a cada $x \in S$ le asigna su clase de equivalencia Gx). Sobre T definimos $e(Gx, Gy) := d(x, y)$. Entonces e es una métrica sobre T. En primer lugar, es claro que $0 \leq e(Gx, Gy) < \infty$. Ahora, $e(Gx, Gx) = 0$ y

$$e(Gx, Gy) = d(x, y) = d(y, x) = e(Gy, Gx).$$

Además,

$$e(Gx, Gz) = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = e(Gx, Gy) + e(Gy, Gz).$$

Por último, si $e(Gx, Gy) = 0$, entonces $d(x, y) = 0$, luego $x \in Gy$ (o si se prefiere $y \in Gx$), por tanto $Gx = Gy$.

Para cada $f \in \mathcal{F}$, definimos la función $h_f : T \to \mathbb{R}$ como $h_f(Gx) = f(x)$. Y consideramos la clase $\mathcal{H} := \{h_f : f \in \mathcal{F}\}$. Entonces $\mathcal{H}$ es una clase de funciones uniformemente equicontinua y acotada. En efecto,

$$|h_f(Gx) - h_f(Gy)| = |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) = e(Gx, Gy),$$

entonces, si para $\epsilon > 0$ se tiene que $e(Gx, Gy) < \epsilon$, entonces $|h_f(Gx) - h_f(Gy)| < \epsilon$. Y por otra parte,

$$\begin{aligned} \|h_f\|_\infty &= \sup\{h_f(Gx) : Gx \in T\} \\ &= \sup\{f(x) : x \in S\} \\ &\leq M, \end{aligned}$$

para toda $h_f \in \mathcal{H}$.

Entonces podemos suponer que d es una métrica.

Ahora, (S, d) es separable. En efecto, consideremos D un subconjunto denso en $(S, \mathcal{T})$. Sea $x \in S$ y $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{F}$ es una familia de funciones equicontinua entonces existe una vecindad abierta U de x tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \forall\, f \in \mathcal{F} \quad \forall\, y \in U,$$

por lo tanto

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in \mathcal{F}\} < \epsilon \quad \forall\, y \in U,$$

entonces $U \subset B_d(x; \epsilon)$. Ahora, como D es denso en el espacio topológico $(S, \mathcal{T})$, entonces existe $z \in D$ tal que $z \in U$, luego $z \in B_d(x; \epsilon)$. Por lo tanto D es denso en en el espacio métrico (S, d). De modo que (S, d) es separable.

Entonces si consideramos la norma Lipschitz respecto la métrica d, tenemos que para $f \in \mathcal{F}$,

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_L + \|f\|_\infty \leq \|f\|_L + M,$$

pero como $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ entonces $\|f\|_L \leq 1$, de modo que

$$\|f\|_{BL} \leq 1 + M,$$

para cada $f \in \mathcal{F}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\sup\left\{\left|\int f d(P_n - P)\right| : f \in \mathcal{F}\right\} &= (1+M)\cdot\sup\left\{\left|\int \frac{f}{1+M} d(P_n - P)\right| : f \in \mathcal{F}\right\} \\
&\leq (1+M)\cdot\sup\left\{\left|\int f d(P_n - P)\right| : \|f\|_{BL} \leq 1\right\} \\
&= (1+M)\cdot\beta(P_n, P),
\end{aligned}$$

y por el teorema anterior, (parte *(a)* $\Rightarrow$ *(c)*), tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\{\left|\int f d(P_n - P)\right| : f \in \mathcal{F}\right\} = 0$$

$\square$

Capítulo 4

Teorema de Prohorov

Finalmente, en este capítulo concluimos con la exposición del *Teorema de Prohorov*, el cual afirma las condiciones suficientes para que el espacio de las leyes sobre (S, d) sea completo bajo las métricas ρ y β.

4.1. Teorema de Le Cam

Definición 4.1.1. *Una familia $\mathcal{P}$ de leyes sobre un espacio topológico $(S, \mathcal{O})$ es* **uniformemente tensa** *sii para toda $\epsilon > 0$ existe $K \subset S$ compacto tal que*

$$P(K) > 1 - \epsilon,$$

para toda $P \in \mathcal{P}$.

Observación 4.1.1. *Una ley P sobre S es tensa si y sólo si la familia $\{P\}$ es uniformemente tensa.*

Ejemplo 4.1.1. La sucesión de leyes $\{\delta_n\}_{n\geq 1}$ no es uniformemente tensa en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\epsilon = 1$. Si $K \subset \mathbb{R}$ es compacto entonces es acotado; así podemos escoger $n_0 \geq 1$ tal que $n \notin K$. Luego $\delta_{n_0}(K) = 0 = 1 - \epsilon$.

Lema 4.1.1. *Si (S, d) es un espacio métrico y K es compacto en (S, d), entonces K es separable.*

Demostración. Si K es compacto, entonces es totalmente acotado. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subconjunto finito $F_n \subset K$ tal que para todo $x \in K$, existe $y \in F_n$ tal que $d(x, y) < 1/n$. Sea $F = \bigcup_n F_n$. Entonces F es denso numerable en K. En efecto, si $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$, luego, para todo $x \in K$ existe $y \in F_N \subset F$ tal que $d(x, y) < 1/N < \epsilon$. $\square$

Teorema 4.1.1 (Teorema de Le Cam)**.** *Sea (S, d) un espacio métrico y supongamos que $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$, donde P_n es una ley tensa, $n = 0, 1, ...$ Entonces la sucesion $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es uniformemente tensa. Si (S, d) es separable y completo, entonces cualquier sucesión convergente de leyes sobre S es uniformemente tensa.*

Demostración. Sea $n \geq 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un compacto $K_{nm} \subset S$ tal que

$$1 - P_n(K_{nm}) = P_n(S) - P_n(K_{nm}) < \frac{1}{m}.$$

De modo que si $K_n = \bigcup_m K_{nm}$, entonces $P_n(K_n) = 1$.

Ahora K_{nm} es separable (por compacidad), para cada n y cada m. Entonces $K := \bigcup_n K_n = \bigcup_n \bigcup_m K_{nm}$ lo es. Por lo tanto, si $T := \overline{K}$, entonces T es separable. Además, $P_n(S \backslash T) = 0$, para toda $n \geq 0$.

Sea $f : T \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Por el *Teorema de Tietze* ([Wil], pág 103) existe una función $g : S \to \mathbb{R}$ continua y acotada tal que $g|_T = f$. Además, como T es cerrado, entonces $T \in \mathcal{B}(S)$, por lo tanto $\mathcal{B}(T) \subset \mathcal{B}(S)$. Tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\int_T f dP_n &= \int_T g dP_n \\
&= \int_T g dP_n + \int_{S \backslash T} g dP_n \\
&= \int_S g dP_n,
\end{aligned}$$

para toda $n \geq 0$. Luego,

$$\int_T f dP_n = \int_S g dP_n \to \int_S g dP_0 = \int_T f dP_0 0.$$

Esto es, las leyes P_n restringidas a T convergen a la misma ley P_0.

Sean M y Q cualesquiera de las leyes P_n, $n \geq 0$. Definimos

$$F_S(M, Q) := \{\epsilon > 0 : M(A) \leq Q(A^\epsilon) + \epsilon, \forall\, A \in \mathcal{B}(S)\} \quad \text{y}$$

$$F_T(M, Q) := \{\epsilon > 0 : M(A) \leq Q(A^\epsilon) + \epsilon, \forall\, A \in \mathcal{B}(T)\}.$$

Entonces $F_S(M, Q) \subset F_T(M, Q)$. Por lo tanto

$$\text{ínf}\, F_T(M, Q) = \rho_T(M, Q) \leq \rho(M, Q) := \text{ínf}\, F_S(M, Q).$$

Supongamos que $\rho_T(M, Q) < \rho(M, Q)$. Entonces existe $0 < \eta \in F_T(M, Q)$ tal que

$$\rho_T(M, Q) \leq \eta < \rho(M, Q).$$

Por lo tanto, para algún $B \in \mathcal{B}(S)$ se tiene que $M(B) > Q(B^\eta) + \eta$. Pero

$$M(B) = M(B \cap (S \backslash T)) + M(B \backslash (S \backslash T)) = M(B \cap T),$$

y como $B \cap T \subset B$, se sigue que $(B \cap T)^\eta \subset B^\eta$, luego

$$M(B \cap T) > Q(B^\eta) + \eta \geq Q((B \cap T)^\eta) + \eta,$$

y como $B \cap T \in \mathcal{B}(T)$, entonces $\eta \notin F_T(M, Q)$, lo cual es una contradicción. De modo que $\rho(M, Q) = \rho_T(M, Q)$. Esto es, la métrica ρ se preserva.

Entonces, como $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0$ sobre el espacio métrico separable (T, d), tenemos que

$$\rho(P_n, P_0) = \rho_T(P_n, P_0) \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

Ahora, dada $\epsilon > 0$ escogemos un compacto $K_0 \subset S$ tal que $P_0(K_0) > 1 - \epsilon$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\delta(n) := \text{ínf}\{\delta > 0 : P_n(K_0^\delta) > 1 - \epsilon\}.$$

Supongamos que $\delta(n)$ no converge a 0. Entonces existe $\eta > 0$ y una subsucesión $n(k)$ tal que

$$\delta(n(k)) > \eta, \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$P_{n(k)}(K_0^\eta) \leq 1 - \epsilon < P_0(K_0) \quad \text{para toda } k \in \mathbb{N}.$$

Sea $0 < \gamma < \text{mín}\{\eta, P_0(K_0) - (1 - \epsilon)\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} P_{n(k)}(K_0^\gamma) + \gamma &< P_{n(k)}(K_0^\eta) + P_0(K_0) - (1 - \epsilon) \\ &\leq 1 - \epsilon + P_0(K_0) - (1 - \epsilon) \\ &= P_0(K_0), \end{aligned}$$

esto es, $P_{n(k)}(K_0^\gamma) + \gamma < P_0(K_0)$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\gamma \leq \rho(P_{n(k)}, P_0), \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

de donde $\rho(P_{n(k)}, P_0)$ no converge a 0, lo cual es una contradicción. Entonces $\delta(n) \to 0$. Definimos ahora

$$0 < \alpha(n) := \text{máx}\{1/n, \delta(n)\}, \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\alpha(n) \to 0$.

Por otro lado, como $\delta(n) \leq \alpha(n) < 2\alpha(n)$, entonces para algún $0 < \delta < 2\alpha(n)$,

$$1 - \epsilon < P_n(K_0^\delta) \leq P_n(K_0^{2\alpha(n)}).$$

Escogemos ahora compactos $K_n \subset K^{2\alpha(n)}$ con $P_n(K_n) > 1 - \epsilon$. Sea $L := \bigcup_{n \geq 0} K_n$. Entonces L es un conjunto compacto. En efecto, si $\{x_m\}$ es una sucesión L, entonces pueden suceder dos cosas:

I). Existe una infinidad de índices m para los cuales $x_m \in K_n$, para algún n particular. En tal situación, existe una subsucesión de tales índices convergente a algún punto en el compacto K_n particular.

II). $(\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}) \cap K_n$ son finitos, para toda $n \geq 0$. Entonces debe existir una subsucesión $n(k)$, con $n(k) \to \infty$ si $k \to \infty$, tal que $(\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}) \cap K_{n(k)} \neq \emptyset$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Escogemos $x_{m(k)} \in K_{n(k)}$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Como $K_{n(k)} \subset K^{2\alpha(n(k))}$, entonces existe $y_k \in K_0$ tal que

$$d(x_{m(k)}, y_k) < 2\alpha(n(k)), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

y como K_0 es compacto, entonces existe una subsucesión $y_{k(j)}$ tal que $y_{k(j)} \to y \in K_0 \subset L$, $j \to \infty$. Entonces, usando (4.1),

$$0 \leq d(x_{m(k(j))}, y) \leq d(x_{m(k(j))}, y_{k(j)}) + d(y_{k(j)}, y) \leq 2\alpha(n(k(j))) + d(y_{k(j)}, y) \to 0,$$

cuando $j \to \infty$.

En cualquiera de estos dos casos, existe una subsucesión de $\{x_m\}$ convergente en L. Luego L es compacto.

Y por otra parte,

$$P_n(L) \geq P_n(K_n) > 1 - \epsilon,$$

para toda $n \geq 0$. Entonces $\{P_0, P_1, ...\}$ es uniformemente tensa.

Ahora supongamos que (S, d) es separable y completo. Entonces por el *Teorema 2.3*, toda ley sobre S es tensa, luego, por lo hecho arriba, cualquier sucesión de leyes convergente es uniformemente tensa. □

Corolario 4.1.1. *Cualquier sucesión de leyes* $P_n \xrightarrow{\mathcal{L}} P$ *sobre* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ *es uniformemente tensa.*

Demostración. Por el *Ejemplo 2.1* , las leyes P_n, $n \in \mathbb{N}$, y P son tensas; y $\mathbb{R}^k$ es seprable y completo, entonces, por el teorema anterior la sucesión de leyes $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente tensa. □

4.2. Teorema de Prohorov

El siguiente resultado relaciona tensión uniforme con las dos métricas para leyes ya tratadas, la métrica de Prohorov ρ, y la métrica Lipschitz-acotada-dual (de Dudley) β.

Teorema 4.2.1. *Sea* (S, d) *un espacio métrico separable y completo. Sea* A *una familia de leyes sobre* S*. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

i) *A es uniformemente tensa.*

ii) *Cualquier sucesión P_n en A tiene una subsucesión $P_{n(k)}$ convergente en ley a alguna ley P sobre S.*

iii) *Para la métrica β sobre el conjunto de todas las leyes sobre S, A tiene una cerradura compacta. Lo mismo es cierto para la métrica ρ.*

iv) *A es totalmente acotado para β. Lo mismo es cierto para la métrica ρ.*

Demostración. i) $\Rightarrow$ ii). Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un compacto K_m tal que

$$P(K_m) > 1 - \frac{1}{m} \quad \forall\, P \in A.$$

Sea $\{P_n\}$ una sucesión de leyes en A. Para cada $m \in \mathbb{N}$ el espacio de funciones continuas $C(K_m) = C_b(K_m)$ con norma supremo es separable (Sea $D_m \subset C(K_m)$ un conjunto denso numerable. Entonces

$$\left\{ \left\{ \int f dP_n \right\}_{f \in D_m} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

es una sucesión en el producto cartesiano contable

$$L_m := \prod_{f \in D_m} [\text{ínf } f, \sup f],$$

de intervalos compactos en $\mathbb{R}$. Ahora, L_m con la topología producto es compacto (*Teorema de Tychonoff*, [Wil], pág 120) y metrizable ([Wil], pág 161). Entonces existe una subsucesión

$$\left\{ \left\{ \int f dP_{n(j)} \right\}_{f \in D_m} \right\}_{j \in \mathbb{N}}$$

convergente en L_m. De modo que $\displaystyle\int f dP_{n(j)}$ converge, cuando $j \to \infty$, para toda $f \in D_m$.

Ahora, si $f \in C(K_m)$ y $\epsilon > 0$, entonces escogemos una función $g \in D_m$ tal que $d_{\sup}(f, g) < \epsilon$. Por lo tanto

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in K_m,$$

entonces

$$\left| \int_{K_m} f dP_{n(j)} - \int_{K_m} g dP_{n(j)} \right| = \left| \int_{K_m} (f - g) dP_{n(j)} \right| \leq \int_{K_m} |f - g| dP_{n(j)} \leq \epsilon,$$

es decir

$$-\epsilon \leq \int_{K_m} f dP_{n(j)} - \int_{K_m} g dP_{n(j)} \leq \epsilon$$

de modo que

$$\int_{K_m} f dP_{n(j)} \leq \epsilon + \int_{K_m} g dP_{n(j)} \tag{4.2}$$

$$-\epsilon + \int_{K_m} g dP_{n(j)} \leq \int_{K_m} f dP_{n(j)}, \tag{4.3}$$

entonces de (4.2) tomamos límite superior cuando $j \to \infty$,

$$\limsup_{j \to \infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)} \leq \epsilon + \lim_{j \to \infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)} < \infty,$$

y de (4.3) tomamos límite inferior cuando $j \to \infty$,

$$\epsilon + \lim_{j \to \infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)} \leq \liminf_{j \to \infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)},$$

de modo que

$$0 \leq \limsup_{j\to\infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)} - \liminf_{j\to\infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)} \leq 2\epsilon.$$

Por lo tanto $\int_{K_m} f dP_{n(j)}$ converge cuando $j \to \infty$, para toda $f \in C(K_m)$.

Ahora consideramos la sucesión

$$\left\{ \left\{ \int f dP_n \right\}_{f\in D_m, m\geq 1} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

en el producto cartesiano contable $\prod_{m\geq 1} L_m = \prod_{m\geq 1} \prod_{f\in D_m} [\text{ínf} f, \sup f]$, el cual, de la misma manera, es compacto y metrizable. Por lo tanto existe una subsucesión

$$\left\{ \left\{ \int f dP_{n(j)} \right\}_{f\in D_m, m\geq 1} \right\}_{j\in\mathbb{N}}$$

convergente ($j \to \infty$). Por lo tanto $\left\{ \int f dP_{n(j)} \right\}_{f\in D_m}$ converge ($j \to \infty$) en L_m para toda $m \geq 1$. Por lo tanto $\int f dP_{n(j)}$ converge ($j \to \infty$), para toda $f \in D_m$ y para toda $m \geq 1$. Entonces, repitiendo el argumento del párrafo anterior, $\int f dP_{n(j)}$ converge ($j \to \infty$) para toda $f \in C(K_m)$ y para toda $m \geq 1$.

Ahora sea $f \in C_b(S)$. Entonces para cualquier $j \geq 1$ y $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_S f dP_{n(j)} - \int_{K_m} f dP_{n(j)} \right| &= \left| \int_{S\setminus K_m} f dP_{n(j)} \right| \\
&\leq \int_{S\setminus K_m} |f| dP_{n(j)} \\
&\leq \|f\|_\infty P_{n(j)}(S\setminus K_m) \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{m},
\end{aligned}$$

de modo que

$$\limsup_{j\to\infty} \int_S f dP_{n(j)} \leq \frac{\|f\|_\infty}{m} + \lim_{j\to\infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)}$$

$$\frac{\|f\|_\infty}{m} + \lim_{j\to\infty} \int_{K_m} f dP_{n(j)} \leq \liminf_{j\to\infty} \int_S f dP_{n(j)},$$

por lo tanto

$$0 \leq \limsup_{j\to\infty} \int_S f dP_{n(j)} - \liminf_{j\to\infty} \int_S f dP_{n(j)} \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{m},$$

para toda $m \geq 1$. Por lo tanto $\displaystyle\int_S f dP_{n(j)}$ converge ($j \to \infty$) para toda $f \in C_b(S)$. Este límite es denotado por $L(f)$.

Notamos que $C_b(S)$ es una lattice vectorial de Stone. En efecto, si $f, g \in C_b(S)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $cf + g$, $f \wedge g$ y $f \vee g$ son reales continuas y acotadas, es decir $cf + g$, $f \wedge g$ y $f \vee g \in C_b(S)$. Luego $C_b(S)$ es un espacio vectorial real. En particular, si $g \equiv 1$, entonces $g \in C_b(s)$ y $f \wedge 1 = f \wedge g \in C_b(S)$, para toda $f \in C_b(S)$.

Además, el operador L es una pre-integral de $C_b(S)$ a $\mathbb{R}$. En efecto, L es lineal, pues es un límite. Si $f \geq 0$, entonces $\displaystyle\int_S f dP_{n(j)} \geq 0$, por lo tanto $L(f) \geq 0$. Supongamos que $f_n \downarrow 0$ (puntualmente). Bajo esta situación, tenemos que

$$0 \leq \int f_{n+1} dP_{n(j)} \leq \int f_n dP_{n(j)} \quad \forall\, j \geq 1 \text{ y } \forall\, n \geq 1,$$

de modo que $L(f_{n+1}) \leq L(f_n)$, para toda $n \geq 1$. Ahora, si $f_1 \equiv 0$, entonces no hay nada que hacer. Supongamos entonces que existe $x \in S$ tal que $f_1(x) > 0$. Sea $M := \|f_1\|_\infty > 0$, entonces

$$0 \leq f_n(x) \leq M \quad \forall\, x \in S \text{ y } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\epsilon > 0$. Tomamos $r \in \mathbb{N}$ tal que $1/r < \epsilon/(2M)$. Entonces, por el *Teorema de Dini*, $f_n \downarrow 0$ uniformemente sobre K_r. Entonces para alguna $N \in \mathbb{N}$

$$0 \leq f_n(x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, x \in K_r \text{ y } \forall\, n \geq N,$$

luego, si $n \geq N$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_S f_n dP_m &= \int_{K_r} f_n dP_m + \int_{S \setminus K_r} f_n dP_m \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} P_m(K_r) + M P_m(S \setminus K_r) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + M \frac{1}{r} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

para toda $m \geq 1$. En particular,

$$0 \leq \int_S f_n dP_{n(j)} < \epsilon,$$

para toda $j \geq 1$. Por lo tanto $L(f_n) \downarrow 0$.

Entonces por el *Teorema de Stone-Daniell*, existe una medida no negativa P sobre S tal que $L(f) = \displaystyle\int f dP$, para toda $f \in C_b(S)$, la cual está definida sobre la σ-álgebra de Baire, pero como (S, d) es un espacio métrico, entonces dicha σ-álgebra coincide con $\mathcal{B}(S)$. Ahora, si hacemos $f \equiv 1$, entonces

$$\int f P_{n(j)} = 1 \quad \forall\, j \in \geq 1,$$

entonces $L(f) = P(S) = 1$. Por tanto P es una ley sobre S. De este modo $P_{n(j)} \xrightarrow{\mathcal{L}} P$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Sea $\overline{A}$ la clausura para A respecto a la métrica β. Sea $\epsilon > 0$ y P_n una sucesión de leyes en $\overline{A}$, entonces para cada $n \geq 1$ existe una ley $Q_n \in A$ tal que $\beta(P_n, Q_n) < \epsilon/2$. Por hipótesis existe una subsucesión $Q_{n(j)}$ y existe una ley P tal que $Q_{n(j)} \xrightarrow{\mathcal{L}} P$. Entonces para alguna $J \geq 1$, tenemos que

$$\beta(P_{n(j)}, P) \leq \beta(P_{n(j)}, Q_{n(j)}) + \beta(Q_{n(j)}, P) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para toda $j \geq J$. Luego $P_{n(j)} \xrightarrow{\mathcal{L}} P$. Entonces $\overline{A}$ es compacto.

La prueba para ρ es análoga.

iii) $\Rightarrow$ *iv)*. Supongamos que A tiene una clausura compacta, respecto a la métrica β. Entonces $\overline{A}$ es totalmente acotado. Esto es, si $\epsilon > 0$, existe $F := \{P_1, ..., P_k\} \subset \overline{A}$ tal que para toda ley $P \in \overline{A}$ existe $j \in \{1, ..., k\}$ tal que $\beta(P, P_j) < \epsilon/2$. Ahora, para toda $j = 1, ..., k$ existe una ley $Q_j \in A$ tal que $\beta(P_j, Q_j) < \epsilon/2$. Entonces, si $P \in A$, para alguna $j \in \{1, ..., k\}$,

$$\beta(P, Q_j) \leq \beta(P, P_j) + \beta(P_j, Q_j) < \epsilon,$$

luego, A es totalmente acotado para β.

La prueba para ρ es completamente análoga.

iv) $\Rightarrow$ *i)*. Supongamos que A es totalmente acotado para β. Entonces, dado que $\rho \leq 2\beta^{1/2}$, se sigue que A es totalmente acotado también para ρ. Luego, basta probar la implicación sólo para la métrica ρ.

Supongamos que A es totalmente acotado para ρ. Para $\epsilon > 0$ elegimos un conjunto finito $B \subset A$ tal que para toda $P \in A$, existe $Q \in B$ con $\rho(P, Q) < \epsilon/2$, esto es $A \subset B^{\epsilon/2}$. Cada $Q \in B$ es tensa, pues (S, d) es completo), luego existen compactos K_Q tales que $Q(K_Q) > Q(S) - \epsilon/2 = 1 - \epsilon/2$. Consideremos $K_B := \cup_{Q \in B} K_Q$. Entonces K_B es compacto y además

$$Q(K_B) > 1 - \frac{\epsilon}{2},$$

para toda $Q \in B$. Ahora, K_B es totalmente acotado (por ser compacto), entonces tomamos un conjunto finito $F := F(\epsilon) \subset S$ tal que $K_B \subset F^{\epsilon/2}$. De modo que

$$Q(F^{\epsilon/2}) \geq Q(K_B) > 1 - \frac{\epsilon}{2},$$

para toda $Q \in B$. Ahora, sea $P \in A$, entonces para alguna $Q \in B$, $\rho(P, Q) < \epsilon/2$. De modo que existe $0 < \eta < \epsilon/2$ tal que

$$Q(C) \leq P(C^{\eta}) + \eta \leq P(C^{\epsilon/2}) + \frac{\epsilon}{2},$$

para todo boreliano C en S. En particular, si $C = F^{\epsilon/2}$, entonces

$$1 - \frac{\epsilon}{2} < Q(F^{\epsilon/2}) \leq P((F^{\epsilon/2})^{\epsilon/2}) + \frac{\epsilon}{2} \leq P(F^{\epsilon}) + \frac{\epsilon}{2},$$

de donde $1-\epsilon < P(F^\epsilon)$, para toda $P \in A$.

Sea ahora $\delta > 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos $\epsilon(m) := \delta/2^m$. También consideramos

$$K := \bigcap_{m\geq 1} \overline{F(\epsilon(m))^{\epsilon(m)}}.$$

Entonces K es compacto.

En efecto, si $\{x_n\} \subset K$ es una sucesión, entonces

$$\{x_n\} \subset \overline{F(\epsilon(1))^{\epsilon(1)}},$$

luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_1^n \in F(\epsilon(1))^{\epsilon(1)}$, tal que

$$d(x_n, z_1^n) < \epsilon(1)$$

y existe también $w_1^n \in F(\epsilon(1))$ tal que

$$d(z_1^n, w_1^n) < \epsilon(1),$$

de donde

$$d(x_n, w_1^n) \leq d(x_n, z_1^n) + d(z_1^n, w_1^n) < 2\epsilon(1).$$

Y como $F(\epsilon(1))$ es finito, existe un $w_1 \in F(\epsilon(1))$ tal que para alguna subsucesión $\{x_{n(j)}\}$ se tiene que

$$d(x_{n(j)}, w_1) < 2\epsilon(1) \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Definimos $y_1 := x_{n(1)}$.

Ahora, es claro que $\{x_{n(j)}\} \subset \overline{F(\epsilon(2))^{\epsilon(2)}}$, entonces repitiendo el razonamiento anterior, para algún $w_2 \in F(\epsilon(2))$, existe una subsucesión $\{x_{n(j(k))}\}$ tal que

$$d(x_{n(j(k))}, w_2) < 2\epsilon(2) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Definimos $y_2 := x_{n(j(1))}$.

Continuamos este proceso para definir una subsucesión $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$.

Si $M \in \mathbb{N}$ y $n, k \geq M$, entonces para algún $w_M \in F(\epsilon(M))$,

$$d(y_n, y_k) \leq d(y_n, w_M) + d(w_M, y_k) < 4\epsilon(M).$$

Lo anterior, se sigue de que las subsucesiones de donde se extrae y_n y y_k (respectivamente) están contenidas (ambas) en la subsucesión tal que para cada elemento x_r de dicha subsucesión se tiene que $d(x_r, w_M) < 2\epsilon(M)$ (con $w_M \in F(\epsilon(M))$).

Sea $\eta > 0$. Entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\epsilon(M) := \frac{\delta}{2^M} < \frac{\eta}{4}.$$

Luego, si $n, k \geq M$, tenemos que

$$d(y_n, y_k) < 4\epsilon(M) < \eta.$$

Por lo tanto $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y como S es completo, existe $y \in S$ tal que $y_n \to y$. Pero K es cerrado, por tanto $y \in K$. Entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente en K. Luego K es compacto.

Por otra parte,

$$P(S \backslash K) \leq \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(S \backslash \overline{F(\epsilon(m))^{\epsilon(m)}}\Big) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta,$$

de donde

$$1 - \delta < P(K),$$

para toda $P \in A$. Luego, A es uniformemente tensa. □

Corolario 4.2.1. *En un espacio métrico (S, d), cualquier sucesión de leyes uniformemente tensa tiene una subsucesión convergente.*

Como último corolario apuntamos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.2 (Prohorov, 1956)**.** *Si (S, d) es un espacio métrico completo separable, entonces el conjunto de todas las leyes sobre S es completo para ρ y para β.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ el espacio de todas las métricas sobre S. Ahora, una sucesión de Cauchy en $\mathcal{P}$, ya sea para ρ o para β, está totalmente acotada (este un hecho general para espacios métricos), entonces, por el teorema anterior, existe una subsucesión convergente a una ley $P \in \cap P$, luego $\mathcal{P}$ es completo, ya sea para β o ρ. □

Parte II

Movimiento Browniano

Capítulo 5

Movimiento Browniano

5.1. Teorema de existencia de Kolmogorov

Aquí introducimos la noción básica de los procesos estocásticos. Además analizamos el teorema de existencia de Kolmogorov, de gran utilidad en la siguiente sección.

Definición 5.1.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio de medida y* T *un conjunto no vacío (por ejemplo* $T = \mathbb{N}$ *o* $T = \mathbb{R}^k$*). Un* **proceso estocástico** *sobre* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$ *es una sucesión de variables aleatorias* $X = \{X_t\}_{t \in T}$ *tales que* $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$*, para toda* $t \in T$.

Para $\omega \in \Omega$*, la* **trayectoria** *del proceso* X *en* ω *está definida por la función* $t \mapsto X_t(\omega)$.

Sea $T \neq \emptyset$. Consideremos para cada $t \in T$ un espacio métrico separable completo (S_t, d_t), y el espacio de medida $(S_t, \mathcal{B}_t)$, donde $\mathcal{B}_t := \mathcal{B}(S_t)$. Supongamos que para cada $F \subset T$ finito existe una ley P_F sobre

$$\left(\prod_{t \in F} S_t, \bigotimes_{t \in F} \mathcal{B}_t \right)$$

(Notación: $S_F = \prod_{t \in F} S_t$ y $\mathcal{B}_F = \bigotimes_{t \in F} \mathcal{B}_t$).

Para $F \subset G \subset T$ finitos consideramos la función proyección natural $f_{GF} : S_G \to S_F$.

Definición 5.1.2. *Las leyes* P_F *y* P_G *(con* $F \subset G \subset T$ *finitos) son* **consistentes** *si*

$$P_G \circ f_{GF}^{-1} = P_F.$$

Teorema 5.1.1 (Kolmogorov)**.** *Existe una medida de probabilidad* P_T *sobre* $(S_T, \mathcal{B}_T)$ *tal que* $P_T \circ f_{TF}^{-1} = P_F$*, para todo* $F \subset T$ *finito.*

Demostración. Sobre S_T definimos la familia

$$\mathcal{A} := \{A = f_{TF}^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_F,\ F \subset T \text{ finito}\} \subset \mathcal{B}_T.$$

Entonces $\mathcal{A}$ es álgebra sobre S_T. En efecto, es claro que $S_T = f_{TF}^{-1}(S_F) \in \mathcal{A}$, cualquiera que sea $F \subset T$ finito. Ahora, si $A = f_{TF}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ($B \in \mathcal{B}_F$ y $F \subset T$ finito), entonces $A^c = f_{TF}^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$, pues $B^c \in \mathcal{B}_F$. Finalmente, si

$$\begin{aligned} A &= f_{TF}^{-1}(B) \text{ con } F \subset T \text{ finito y } B \in \mathcal{B}_F \\ \text{y } D &= f_{TG}^{-1}(C) \text{ con } G \subset T \text{ finito y } D \in \mathcal{B}_G, \end{aligned} \tag{5.1}$$

entonces

$$\begin{aligned} A \cup D &= f_{TF}^{-1}(B) \cup f_{TG}^{-1}(C) \\ &= (f_{HF} \circ f_{TH})^{-1}(B) \cup (f_{HG} \circ f_{TH})^{-1}(C) \quad \text{donde } H = F \cup G \text{ finito} \\ &= \Big[f_{TH}^{-1}\big(f_{HF}^{-1}(B)\big)\Big] \bigcup \Big[f_{TH}^{-1}\big(f_{HG}^{-1}(C)\big)\Big] \\ &= f_{TH}^{-1}\big(f_{HF}^{-1}(B) \cup f_{HG}^{-1}(C)\big), \end{aligned}$$

y dado que $f_{HF}^{-1}(B) \cup f_{HG}^{-1}(C) \in \mathcal{B}_H$, se sigue que $A \cup D \in \mathcal{A}$.

Ahora bien, para cada $A = f_{TF}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, con $B \subset S_F$ medible, sea $P_T(A) := P_F(B)$. Entonces

i) P_T está bien definida.

ii) P_T es finita y contablemente aditiva en $\mathcal{A}$.

Para probar *i)*, sean $A, D \in \mathcal{A}$ como en (5.1) y tales que $A = D$. Entonces

$$A = f_{TH}^{-1}\big(f_{HF}^{-1}(B)\big) = f_{TG}^{-1}\big(f_{HG}^{-1}(C)\big) = D,$$

de donde

$$f_{HF}^{-1}(B) = f_{TH}\big(f_{TH}^{-1}\big(f_{HF}^{-1}(B)\big)\big) = f_{TH}\big(f_{TG}^{-1}\big(f_{HG}^{-1}(C)\big)\big) = f_{HG}^{-1}(C),$$

luego, por consistencia,

$$P_F(B) = P_H(f_{HF}^{-1}(B)) = P_H(f_{HG}^{-1}(C)) = P_G(C).$$

Lo cual prueba que P_T está bien definida.

En cuanto a *ii)*, es claro que P_T es una función finita. Ahora, para probar que es finitamente aditiva, consideremos A y D como en (5.1) y $A \cap D = \emptyset$. Tenemos que

$$\emptyset = A \cap D = f_{TH}^{-1}\big(f_{HF}^{-1}(B) \cap f_{HG}^{-1}(C)\big),$$

donde $H = F \cup G$. Entonces $f_{HF}^{-1}(B) \cap f_{HG}^{-1}(C) = \emptyset$. De este modo

$$\begin{aligned} P_T(A \cup D) &= P_H(f_{HF}^{-1}(B) \cup f_{HG}^{-1}(C)) \\ &= P_H(f_{HF}^{-1}(B)) + P_H(f_{HG}^{-1}(C)) \\ &= P_T(A) + P_T(D). \end{aligned}$$

Por otra parte, para probar que P_T es contablemente aditiva, supongamos que no sucede así, entonces existen conjuntos $W_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, y un número

$\epsilon > 0$ tales que $W_n \downarrow \emptyset$ y $P_T(W_n) > \epsilon$. En otras palabras, existen conjuntos finitos $F(n) \subset T$ y conjunto de Borel $B_n \in S_{F(n)}$ tales que $W_n = f^{-1}_{TF(n)}(B_n)$. Podemos suponer que $F(n) \subset F(n+1)$. La razón es la siguiente. Si no sucede así, consideramos el conjunto $F'(2) = F(1) \cup F(2)$ (finito), de este modo

$$W_2 = f^{-1}_{TF(2)}(B_2) = f_{TF'(2)}(B_2 \times (\prod_{t \in F(1)\setminus F(2)} S_t)),$$

Renombramos $F(2)$ por $F'(2)$ y B_2 por $B_2 \times (\prod_{t \in F(1)\setminus F(2)} S_t)$, así $F(1) \subset F(2)$. De esta manera seguimos sucesivamente.

Para $m \leq n$, definimos las funciones $f_{nm} = f_{n,m} = f_{F(n)F(m)}$. Entonces

$$\begin{aligned} W_n = f^{-1}_{TF(n)}(B_n) \subset W_m &= f^{-1}_{TF(m)}(B_m) \\ &= (f_{nm} \circ f_{TF(n)})^{-1}(B_m) \\ &= f^{-1}_{TF(n)}(f^{-1}_{nm}(B_m)), \end{aligned}$$

de donde $B_n \subset f^{-1}_{nm}(B_m)$.

Para simplificar la notación, también definimos $P_n := P_{F(n)}$, para cada n (y así $P_T(W_n) = P_n(B_n)$). Elegimos ahora compactos $K_n \subset B_n$ tales que $P_n(B_n\setminus K_n) < \epsilon/3^n$. Definimos también

$$C_n := \bigcap_{m=1}^{n} f_{nm}(K_m) \subset f_{nn}(K_n) = K_n \subset B_n.$$

Cada C_n es cerrado y por ello compacto dado que K_n lo es.

Ahora,

$$B_n\setminus C_n = \bigcup_{m=1}^{n} B_n\setminus f^{-1}_{nm}(K_m) \subset \bigcup_{m=1}^{n} f^{-1}_{nm}(B_m\setminus K_m),$$

de donde

$$P_n(B_n\setminus C_n) \leq \sum_{m=1}^{n} \epsilon/3^m = \epsilon(1 - 1/3^n) < \epsilon/2,$$

y dado que,

$$\epsilon < P_T(W_n) = P_n(B_n) = P_n(C_n) + P_n(B_n\setminus C_n),$$

se sigue

$$\epsilon/2 = \epsilon - \epsilon/2 < P_n(C_n).$$

Luego, $C_n \neq \emptyset$.

Por otro lado, para $n \geq r$,

$$f^{-1}_{rn}(C_n) = f^{-1}_{rn}\left(\bigcap_{m=1}^{n} f^{-1}_{nm}(K_m)\right) = \bigcap_{m=1}^{n} f^{-1}_{rm}(K_m) \supset C_r,$$

de este modo $f_{rn}(C_r) \subset C_n$. Concluimos que $f_{rj}(C_r) = f_{nj}(f_{rn}(C_r)) \subset f_{nj}(C_n)$, si $j \geq n \geq r$. Además, como $f_{rj}(C_r) \neq \emptyset$ (dado que $C_r \neq \emptyset$), entonces la familia de conjuntos

$$D_n = \bigcap_{r \geq n} f_{rn}(C_r),$$

forma una sucesión de compactos no vacíos (pues se trata de intersecciones de una sucesión decrecientes de compactos no vacíos).

Escogemos $x_1 \in D_1$. Tenemos,

$$\begin{aligned} f_{n+1,n}(D_{n+1}) &= f_{n+1,n}\left(\bigcap_{r>n} f_{r,n+1}(C_r)\right) \\ &= \bigcap_{r>n} f_{n+1,n}\, f_{r,n+1}(C_r) \\ &= \bigcap_{r>n} f_{rn}(C_r) \\ &= D_n. \end{aligned}$$

De modo que podemos elegir $x_n \in D_n$ de forma recursiva mediante $x_n = f_{n+1,n}(x_{n+1})$. Luego, si $m > n$,

$$\begin{aligned} f_{m,n}(x_m) &= f_{n+1,n} f_{n+2,n+1} \cdots f_{m-1,m-2} f_{m,m-1}(x_m) \\ &= f_{n+1,n} f_{n+2,n+1} \cdots f_{m-1,m-2}(x_{m-1}) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &= f_{n+1,n}(x_{n+1}) \\ &= x_n. \end{aligned}$$

Para toda $u \in F(n)$, sea $x_n(u)$ la coordenada de $x_n \in D_n \subset S_{F(n)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideramos $x \in S_T$ tal que $x(u) = x_n(u)$ si $u \in F(n)$, para alguna $n \geq 1$, y si $x \notin \bigcup_n U_n$ sea $x(u) \in S_u$ algún punto fijo. Entonces $f_{TF(n)}(x) = x_n$ y dado que $D_n \subset B_n$, se sigue

$$x \in f_{TF(n)}^{-1}(B_n) = W_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Lo cual no es posible. De modo que P_T es contablemente aditiva.

Finalmente, por el *Teorema de extensión de Carathedory*, existe un extensión de P_T (la cual seguiremos denotando por P_T) a $\sigma(\mathcal{A})$. Pero $\mathcal{B}_T = \sigma(\mathcal{A})$. □

5.2. Procesos Gaussianos

En esta parte empezaremos por definir un proceso Gaussiano y demostrar un teorema de existencia de procesos Gaussianos.

Recordemos algunas definiciones y resultados básicos. Un vector aleatorio k-dimensional $X = (X_1, ..., X_k)$ se dice que tiene distribución o ley gaussiana finito dimensional, si para cada vector escalar no nulo $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ el producto $\alpha \cdot X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$ es una variable aleatoria con distribución normal (o gaussiana). Es fácil probar que si $X = (X_1, ..., X_k)$ es un vector aleatorio, la matriz de varianzas-covarianzas $C = (Cov(X_i, X_j))_{i,j}$ es definida positiva.

Definición 5.2.1. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ es llamado* **Gaussiano** *si para cualquier conjunto finito $F \subset T$, la ley $P_F := \mathcal{L}(\{X_t\}_{t\in F})$ sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^F)$ es Gaussiana.*

Teorema 5.2.1. *Sea T un conjunto no vacío, $m : T \to \mathbb{R}$ una función y $C : T \times T \to \mathbb{R}$ una matriz simétrica y definida positiva (es decir tal que $C(s,t) = C(t,s)$ y si $F \subset T$ es finito, entonces $\{C(s,t)\}_{d,t\in F}$ es una matriz definida positiva). Entonces existe un espacio de probabibilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso Gaussiano $\{X_t\}_{t\in T}$ definido en él con función de media m y matriz de covarianzas C.*

Demostración. Si $\{Y_t\}$ es un proceso Gaussiano con media 0 y matriz de covarianzas C, entonces el proceso definido por $X_t = Y_t + m$, es Gaussiano con media m y matriz de covarianzas C. De modo que el resultado basta probarlo para el caso en que $m = 0$.

Sea $F \subset T$ finito no vacío y denotemos por C_F la restricción de C a $F \times F$. Consideremos la ley normal P_F sobre $\mathbb{R}^F$ de media 0 y matriz de covarianzaz C_F. Del mismo modo consideremos la ley normal P_G para $G \subset F$. Ahora, para $t = (t_j)_{j\in G} \in \mathbb{R}^G$ definimos $t' = (t'_j)_{j\in F} \in \mathbb{R}^F$ donde $t'_j = t_j$ si $j \in G$ y $t'_j = 0$ si $j \in F\backslash G$. Entonces

$$\langle t, f_{FG}(x)\rangle_{\mathbb{R}^G} = \langle t', x\rangle_{\mathbb{R}^F},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^F$; y además

$$\langle C_F(t'), t'\rangle_{\mathbb{R}^F} = \langle C_G(t), t\rangle_{\mathbb{R}^G}.$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\varphi_{P_F\circ f_{FG}^{-1}}(t) &= \int_{\mathbb{R}^G} \exp(i\langle t, x\rangle_{\mathbb{R}^G}) dP_F \circ f_{FG}^{-1}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^F} \exp(i\langle t, f_{FG}(x)\rangle_{\mathbb{R}^G}) dP_F(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^F} \exp(i\langle t', x\rangle_{\mathbb{R}^F}) dP_F(x) \\
&= \varphi_{P_F}(t'),
\end{aligned}$$

pero como se sabe,

$$\begin{aligned}
\varphi_{P_F}(t') &= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C_F(t'), t'\rangle_{\mathbb{R}^F}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\langle C_G(t), t\rangle_{\mathbb{R}^G}\right) \\
&= \varphi_{P_G}(t).
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $P_F \circ f_{FG}^{-1} = P_G$.

Entonces las leyes P_F, $F \subset T$ finito, forman una familia de leyes consistentes, luego, por el *Teorema de Kolmogorov* se sigue la existencia de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que $\mathbb{P} \circ f_{TF}^{-1} = P_F$. Para cada $t \in T$ consideramos la v.a. X_t con ley $\mathbb{P} \circ f_{T\{t\}}^{-1}$ distribuida $N(0, C(t,t))$. Es fácil notar que $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso Gaussiano. $\square$

5.3. Movimiento Browniano: Construcción Isonormal

Teorema 5.3.1. *Para cualquier espacio $(H, \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con producto interior existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso Gaussiano*

$$L := \{L(f)\}_{f \in H}$$

definido en éste con media $\mathbb{E}L(f) = 0$ y covarinza $\mathbb{E}L(f)L(g) = \langle f, g \rangle$. Dicho proceso es lineal c.s. Es decir,

$$L(cf + g) = cL(f) + L(g) \quad c.s.$$

Demostración. Consideremos la matriz $C = \{\langle f, g \rangle\}_{f,g \in H}$. Entonces C es simétrica y definida positiva (por las propiedades del producto interior). Por el teorema de existencia de Kolmogorov para procesos Gaussianos se sigue la existencia del espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y de dicho proceso Gaussiano. Ahora bien, por propiedades del producto interior, puede mostararse que

$$\mathbb{E}[L(cf + g) - cL(f) + L(g)]^2 = 0,$$

de donde se sigue que $L(cf + g) = cL(f) + L(g)$ c.s. $\square$

Definición 5.3.1. *Sea $(H, \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio con producto interior. Un* **proceso isonormal** *es un proceso Gaussiano $L := \{L(f)\}_{f \in H}$ con media $\mathbb{E}L(f) = 0$ y covarinza $\mathbb{E}L(f)L(g) = \langle f, g \rangle$.*

Definición 5.3.2. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$, donde T es un espacio topológico, es llamado* **continuo por trayectorias** *si para todo $\omega \in \Omega$ la aplicación $t \to X_t(\omega)$ es continua.*

Definición 5.3.3. *Un* **movimiento Browniano** *o* **proceso de Wiener** *es un proceso estocástico Gaussino sobre $T = [0, \infty)$ continuo por trayectorias, con media 0 y covarioanza $\mathbb{E}(X_s X_t) = \min\{s, t\}$.*

Antes de probar el teorema de existencia enunciaremos un lema útil.

Lema 5.3.1. *Para cualquier $c > 0$, si P es una ley $N(0,1)$ entonces*

i) $P([c, \infty)) \leq \exp(-c^2/2)$.

ii) Si P_σ es una ley $N(0,\sigma^2)$, entonces

$$P_\sigma([c,\infty)) = P([c/\sigma,\infty)).$$

Demostración. i). Si $x \geq c$, entonces $x^2 - c^2 \geq (x-c)^2$, de donde se sigue que $\exp\Big(-\frac{x^2-c^2}{2}\Big) \leq \exp\Big(-\frac{(x-c)^2}{2}\Big)$, así

$$\begin{aligned}
\exp\Big(\frac{c^2}{2}\Big)P([c,\infty)) &= \int_c^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{x^2-c^2}{2}\Big)dx \\
&\leq \int_c^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-c)^2}{2}\Big)dx \\
&\leq \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-c)^2}{2}\Big)dx \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ii).

$$\begin{aligned}
P_\sigma([c,\infty)) &= \int_c^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)dx \\
&= \int_{\frac{c}{\sigma}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{u^2}{2}\Big)du \qquad\qquad (\text{con } u = x/\sigma) \\
&= P([c/\sigma,\infty)).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.3.2 (Wiener)**.** *Existe un espacio de probabiliad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y un movimiento Browniano $Z = \{Z_t\}_{t\in T}$, donde $T = [0,\infty)$, definido en dicho espacio.*

Demostración. Sea H el espacio de Hilbert $L^2([0,\infty),\lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue en $[0,\infty)$. Consideremos el proceso isonormal L sobre H y el espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ donde está definido dicho proceso. Para $t \in [0,\infty)$ definimos $X_t := L(\mathbf{1}_{[0,t]})$. Entonces $\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}L(\mathbf{1}_{[0,t]}) = 0$ (por definición de proceso isonormal) y $\mathbb{E}X_sX_t = \langle \mathbf{1}_{[0,s]}, \mathbf{1}_{[0,t]}\rangle = \text{mín}\{s,t\}$.

Ahora bien, si $0 \leq s \leq t$, entonces

$$X_t - X_s = L(\mathbf{1}_{[0,t]}) - L(\mathbf{1}_{[0,s]}) = L(\mathbf{1}_{[0,t]} - \mathbf{1}_{[0,s]}) = L(\mathbf{1}_{(s,t]}),$$

de donde

$$\mathbb{E}(X_t - X_s)^2 = \langle \mathbf{1}_{(s,t]}, \mathbf{1}_{(s,t]}\rangle = t - s.$$

Entonces $X_t - X_s$ tiene ley $N(0, t-s)$.

Ahora, tomemos primero $t \in [0,1]$ y su expansión binaria $t = \sum_{j\geq 1} t_j/2^j$, donde $t_j \in \{0,1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el número

$$t(n) := \sum_{j=1}^n \frac{t_j}{2^j}.$$

Entonces $t(n) \in \{0, 1/2^n, ..., (2^n-1)/2^n, 1\}$. En efecto, consideremos todos los índices t_j iguales a 1, digamos que $t_{j_1} = t_{j_2} = \cdots = t_{j_k} = 1$ y $t_j = 0$ si $j \neq j_1, ..., j_k$. Entonces

$$\begin{aligned}
t(n) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{j_i}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} 2^{p_i}}{2^{\sum_{i=1}^{k} j_i}} \qquad\qquad (\text{donde } p_i = j_1 + \cdots + j_{i-1} + j_{i+1} + \cdots + j_k) \\
&= \frac{\left(2^{n-\sum_{i=1}^{k} j_i}\right) \sum_{i=1}^{k} 2^{p_i}}{2^n} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{k} 2^{n-j_i}}{2^n}.
\end{aligned}$$

Además $t(n) - t(n-1)$ o bien es cero o bien es $1/2^n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$\mathcal{V}_n := \{X_{j/2^n} - X_{(j-1)/2^n} : j = 1, ..., n^n\} \cup \{0\}.$$

De manera que $X_{t(n)} - X_{t(n-1)} \in \mathcal{V}_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Es claro además que V tiene ley $N(0, 1/2^n)$ para toda $V \in \mathcal{V}_n$ excepto si $V = 0$.

Por otro lado, es claro que

$$\big(\sup\{|V| : V \in \mathcal{V}_n\} \geq n^{-2}\big) \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} \big(|X_{i/2^n} - X_{(j-1)/2^n}| \geq n^{-2}\big).$$

De este modo

$$\mathbb{P}\big(\sup\{|V| : V \in \mathcal{V}_n\} \geq n^{-2}\big) \leq \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{P}\big(|X_{i/2^n} - X_{(j-1)/2^n}| \geq n^{-2}\big).$$

Ahora bien, si P_n es una ley $N(0, 1/2^n)$ y P es una ley $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{P}\big(|X_{i/2^n}) - X_{(j-1)/2^n}| \geq n^{-2}\big) &= 2^n P_n\big(\{x : |x| \geq n^{-2}\}\big) \\
&= 2^{n+1} P_n\big([n^{-2}, \infty)\big) \\
&= 2^{n+1} P\big([2^{n/2} n^{-2}, \infty)\big) \\
&\leq 2^{n+1} \exp\big(-2^n/2n^4\big).
\end{aligned}$$

Para una n suficientemente grande, $2^n > 4n^5$, de donde se deduce que $-2n > -2^n/2n^4$. Entonces, dado que $2 < e$,

$$\exp\big(-2^n/2n^4\big) < \exp\big(-2n\big) < 2^{-2n},$$

por lo tanto,

$$2^{n+1}\exp\big(-2^n/2n^4\big) < 2^{-2n+n+1} = 2^{1-n}.$$

Luego, para n suficientemente grande,

$$\mathbb{P}\big(\sup\{|V| : V \in \mathcal{V}_n\} \geq n^{-2}\big) \leq 2^{1-n}.$$

Y dado que $\sum_n 2^{1-n} < \infty$, se sigue del lema de Borel-Cantelli que existe $E \subset \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}[E] = 1$ y tal que si $\omega \in E$ entonces para algún $n_0 = n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ se tiene que $|V(\omega)| \leq n^{-2}$, para toda $V \in \mathcal{V}_n$, con $n \geq n_0$, en particular

$$|X_{t(n)}(\omega) - X_{t(n-1)}(\omega)| \leq n^{-2} \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Luego, si $\omega \in E$ y $m \geq n \geq n_0$, entonces

$$|X_{t(m)}(\omega) - X_{t(n)}(\omega)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |X_{t(k)}(\omega) - X_{t(k-1)}(\omega)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} k^{-2},$$

por lo tanto, si $n, m \to \infty$, $|X_{t(m)}(\omega) - X_{t(n)}(\omega)| \to 0$. Es decir, la sucesión $\{X_{t(n)}(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, para todo $\omega \in E$.

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_t - X_{t(n)}$ o bien es la v.a. constante cero (cuando $t = t(n)$) o bien tiene ley $N(0, t - t(n))$ (cuando $t > t(n)$). En el primer caso, $\mathbb{P}[|X_t - X_{t(n)}| > \epsilon] = 0$, para una $\epsilon > 0$ dada. En el segundo caso, sean $P_{t-t(n)}$ una ley $N(0, t - t(n))$ y P una ley $N(0,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|X_t - X_{t(n)}| > \epsilon] &= 2\mathbb{P}[X_t - X_{t(n)} > \epsilon] \\
&= 2P_{t-t(n)}\big((\epsilon, \infty)\big) \\
&= 2P\big((\epsilon/\sqrt{t - t(n)}, \infty)\big),
\end{aligned}$$

y si $n \to \infty$, $t - t(n) \to 0$, de donde $P\big((\epsilon/\sqrt{t-t(n)}, \infty)\big) \to 0$, entonces $\mathbb{P}[|X_t - X_{t(n)}| > \epsilon] \to 0$. En otras palabras, $X_{t(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$. Por lo tanto, existe una subsucesión $X_{t(n_k)}$ tal que $X_{t(n_k)} \to X_t$ c.s., esto es, para alguna $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}[A] = 1$, se tiene que $X_{t(n_k)}(\omega) \to X_t(\omega)$ para todo $\omega \in A$. Entonces $X_{t(n)}(\omega) \to X_t(\omega)$ para todo $\omega \in E \cap A$ (observamos que $\mathbb{P}[A \cap E] = 1$).

Definimos la v.a. Z_t como

$$Z_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} X_{t(n)}(\omega) = X_t(\omega) & \text{si } \omega \in E \cap A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin E \cap A. \end{cases}$$

Finalmente, para probar que Z_t es continua por trayectorias sobre $[0,1]$, tomemos como antes $n \geq n_0$ y $\omega \in E \cap A$. Sea además $s, t \in [0,1]$ tal que $|s - t| \leq 2^{-n}$. Entonces para $s(n) = j/2^n$ y $t(n) = k/2^n$, tenemos que

$$|j - k| = 2^n|s(n) - t(n)| \leq 2^n|s - t| \leq 1,$$

por tanto, $|j - k|$ es 0 o es 1. De modo que

$$\begin{aligned}
|Z_s(\omega) - Z_t(\omega)| &\leq |Z_{s(n)}(\omega) - Z_{t(n)}(\omega)| + |Z_s(\omega) - Z_{s(n)}(\omega)| + |Z_t(\omega) - Z_{t(n)}(\omega)| \\
&\leq n^{-2} + 2\sum_{m>n} m^{-2},
\end{aligned}$$

entonces si $n \to \infty$, $|Z_s(\omega) - Z_t(\omega)| \to 0$. De donde se deduce la continuidad por trayectorias.

El proceso buscado es entonces $Z = \{Z_t\}_{t\in[0,1)}$.

Esta misma prueba se repite en cada uno de los intervalos $[k, k+1]$, $\in \mathbb{N}$, y concatenando las trayectorias de los procesos obtenidos se genera un M.B. sobre $[0, \infty)$. $\square$

Capítulo 6

Aplicaciones

En este cápítulo, estudiaremos el M.B. sobre $[0,1]$ desde un punto de vista centrado en las propiedades de sus trayectorias. De modo que pueda ser aproximado distributivamente por leyes definidas sobre un espacio de trayectorias bien determinado.

6.1. Aproximación al M.B.

En esta sección y la próxima revisamos un método de contrucción del M.B. en donde intervienen los conceptos estudiados en los capítulos anteriores. Dicha construcción tiene la virtud de la brevedad, y salvo la utilización de un lema bastante técnico, es en realidad bastante natural e intuitiva. Aunque será indispensable introducir el espacio métrico completo y separable de todas las funciones continuas sobrte le intervalo $[0,1]$ y asimismo requeriremos de los resultados clasicos derivados del *Teorema Central de Límite*. Siendo además la herramienta fundamental en virtud de la cual puede formularse la existencia y propiedades de una medida de probabilidad conocida como medida de Wiener, la cual caracteriza las trayectorias del M.B. Finalmente, en la última parte, revisamos algunas de las propiedades de dicha medida.

Considermos el espacio $C[0,1]$ de todas las funciones reales continuas definidas sobre el intervalo compacto $[0,1]$. Sobre este espacio definimos $d : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \text{máx}\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Entonces d define una métrica para $C[0,1]$ (lo cual es fácil de notar desde las propiedades de las funciones continuas sobre el compacto $[0,1]$ y de las propiedades del valor absoluto).

Por el *Teorema de Weiertrass* se sigue que $C[0,1]$ bajo la métrica d es un espacio completo en donde la familia $\mathcal{P}$ de polinomios definidos en $[0,1]$ es denso. Además, en virtud del hecho de que la familia de todos los polinomios con coeficientes racionales es denso numerable en $\mathcal{P}$, se sigue que $C[0,1]$ es también separable bajo la métrica d.

Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. reales independientes e idénticamente distribuidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con media finita μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ variables aleatorias $X^{(n)}$ con valores en $C[0,1]$ de la manera siguiente. Primero, $X_0^{(n)} \equiv 0$, y para $m = 1, ..., n$, consideramos

$$X_{m/n}^{(n)}(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(Y_k(\omega) - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

y extendemos $X_t^{(n)}$ de forma lineal sobre cada intervalo $[(m-1)/n, m/n]$, es decir,

$$\begin{aligned} X_t^{(n)}(\omega) &= n\left(t - \frac{m-1}{n}\right)\left(X_{m/n}^{(n)}(\omega) - X_{(m-1)/n}^{(n)}(\omega)\right) + X_{(m-1)/n}^{(n)}(\omega) \\ &= (nt - m + 1)\left(\frac{Y_m(\omega) - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) + X_{(m-1)/n}^{(n)}(\omega), \end{aligned} \tag{6.1}$$

cuando $t \in [(m-1)/n, m/n]$.

Lema 6.1.1. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 1, ..., n\}$. Entonces*

i) $\mathbb{E}[X_t^{(n)}] = 0$, *para toda* $t \in [0,1]$.

ii) $\mathbb{V}ar[X_{m/n}^{(n)}] = \dfrac{m}{n}$.

Lema 6.1.2. *Sea $t \in [0,1]$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}ar\left[(nt - m + 1)\frac{Y_m - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = 0,$$

donde $m \in \{1, ..., n\}$ es tal que $t \in [(m-1)/n, m/n]$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si $t = 0$, entonces, para cada n corresponde el número $m = 1$, de donde

$$(nt - m + 1)\frac{Y_m - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = 0.$$

Si $t = 1$, entonces para cada n coresponde el numero $m = n$, luego

$$\mathbb{V}ar\left[(nt - m + 1)\frac{Y_m - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] = \frac{1}{n},$$

de donde se sigue la convergencia a cero.

Supongamos que $0 < t < 1$. Para $n \in \mathbb{N}$ sea $m \in \{1, ..., n\}$ tal que $t \in [(m-1)/n, m/n]$. Entonces

$$m - 1 \leq tn \leq m,$$

de donde se sigue que $0 \leq tn - m + 1 \leq 1$. Luego,

$$(tn - m + 1)^2\left(\frac{Y_m - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 \leq \left(\frac{Y_m - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2.$$

De modo que

$$\mathbb{V}ar\left[(nt-m+1)\frac{Y_m-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right] \leq \frac{1}{n}.$$

□

Lema 6.1.3. *Sea $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_d \leq 1$. Entonces la sucesión de vectores aleatorios*

$$\left\{\left(X_{t_1}^{(n)} - X_{t_0}^{(n)}, ..., X_{t_d}^{(n)} - X_{t_{d-1}}^{(n)}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

converge en distribución a un vector aleatorio con coordenadas independientes normalmente distribuidas, con media 0, y varianza $t_j - t_{j-1}$.

Demostración. Definimos las funciones $[x]^*$ como "el máximo entero mayor o igual que x"; y $[x]_*$ como "el mínimo entero menor o igual que x", para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $0 < j \leq d$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$r_{j,n} = \frac{[nt_j]_*}{n} \quad \text{y} \quad U_{j,n} = X_{t_j}^{(n)} - X_{r_{j,n}}^{(n)}.$$

Para $0 \leq j < d$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$s_{j,n} = \frac{[nt_j]^*}{n} \quad \text{y} \quad V_{j,n} = X_{s_{j,n}}^{(n)} - X_{t_j}^{(n)}.$$

Tenemos que $nt_j \leq [nt_j]^*$, entonces $t_j \leq s_{j,n}$. También $[nt_j]_* \leq nt_j$ entonces $r_{j,n} \leq t_j$. Ahora, dado que $n(t_{j+1}-t_j) \to \infty$ cuando $n \to \infty$, se sigue que para valores de n suficientemente grandes, $[nt_j]^* < [nt_{j+1}]_*$, de donde $s_{j,n} < r_{j+1,n}$.

De modo que

$$t_0 \leq s_{0,n} < r_{1,n} \leq t_1 \leq s_{1,n} < r_{2,n} \leq \cdots \leq t_{d-1} \leq s_{d-1,n} < r_{d,n} \leq t_d.$$

Además,

$$X_{t_j}^{(n)} - X_{t_{j-1}}^{(n)} = \left(X_{r_{j,n}}^{(n)} - X_{s_{j-1,n}}^{(n)}\right) + U_{j,n} + V_{j-1,n}.$$

Ahora bien, por los lemas anteriores

$$\mathbb{E}[U_{j,n}] = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[V_{j-1,n}] = 0.$$

De la ecuación (6.1) tenemos

$$X_{t_j}^{(n)} = (nt_j - [nt_j]^* + 1)\left(\frac{Y_{[nt_j]^*} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) + X_{r_{j,n}}^{(n)}.$$

Entonces

$$\mathbb{V}ar[U_{j,n}] = \mathbb{V}ar[X_{t_j}^{(n)} - X_{r_{j,n}}^{(n)}] \leq \frac{1}{n}.$$

luego, $\mathbb{V}ar[U_{j,n}] \to 0$. Del mismo modo $\mathbb{V}ar[V_{j,n}] \to 0$.

Por otra parte, observamos que

$$X^{(n)}_{r_{j,n}} = \frac{\sum_{k=1}^{[nt_j]_*}(Y_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad X^{(n)}_{s_{j-1,n}} = \frac{\sum_{k=1}^{[nt_{j-1}]^*}(Y_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

De donde,

$$X^{(n)}_{r_{j,n}} - X^{(n)}_{s_{j-1,n}} = \frac{\sum_{k=[nt_{j-1}]^*}^{[nt_j]_*}(Y_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}},$$

Así,

$$\frac{\sqrt{t_j - t_{j-1}}}{\sqrt{r_{j,n} - s_{j-1,n}}}\left(X^{(n)}_{r_{j,n}} - X^{(n)}_{s_{j-1,n}}\right) = \sqrt{t_j - t_{j-1}}\left(\frac{\sum_{k=[nt_{j-1}]^*}^{[nt_j]_*}(Y_k - \mu)}{\sigma\sqrt{[nt_j]_* - [nt_{j-1}]^*}}\right),$$

luego, por el *Teorema de Central del Límite*,

$$\frac{\sqrt{t_j - t_{j-1}}}{\sqrt{r_{j,n} - s_{j-1,n}}}\left(X^{(n)}_{r_{j,n}} - X^{(n)}_{s_{j-1,n}}\right) \xrightarrow{d} N(0, t_j - t_{j-1}).$$

Ahora si $c_n = \dfrac{\sqrt{r_{j,n} - s_{j-1,n}}}{\sqrt{t_j - t_{j-1}}}$, entonces $c_n \to 1$, de modo que

$$X^{(n)}_{r_{j,n}} - X^{(n)}_{s_{j-1,n}} = c_n \cdot \frac{\sqrt{t_j - t_{j-1}}}{\sqrt{r_{j,n} - s_{j-1,n}}}\left(X^{(n)}_{r_{j,n}} - X^{(n)}_{s_{j-1,n}}\right) \xrightarrow{d} N(0, t_j - t_{j-1}).$$

□

Teorema 6.1.1. *Si la sucesión $X^{(n)}$ tiene alguna subsucesión convergente en distribución a W, entonces, W es un M.B.*

Demostración. Supongamos que $X^{(n_k)} \xrightarrow{d} W$, cuando $k \to \infty$. Consideremos una colección de números

$$0 \leq t_0 \leq t_i \leq \cdots \leq t_d \leq 1,$$

fijados arbitrariamente. Ahora consideramos la función $F : C[0,1] \to \mathbb{R}^d$ dada por

$$F(x) = (x(t_1) - x(t_0), x(t_2) - x(t_1), ..., x(t_d) - x(t_{d-1})).$$

Entonces F es continua.

Sea $Z^{(k)}_d = \left(X^{(n_k)}_{t_1} - X^{(n_k)}_{t_0}, ..., X^{(n_k)}_{t_d} - X^{(n_k)}_{t_{d-1}}\right)$ y $P_{Z^{(k)}_d}$ la distribución (o ley) del vector $Z^{(k)}_d$. Si $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, dP_{Z^{(k)}_d} = \int_{C[0,1]} f \circ F\, dP_{X^{(n_k)}},$$

entonces, según el *Teorema 1.2.3*, se sigue que $Z^{(k)}_d = F \circ X^{(n_k)} \xrightarrow{d} F \circ W$, esto es

$$\left(X^{(n_k)}_{t_1} - X^{(n_k)}_{t_0}, ..., X^{(n_k)}_{t_d} - X^{(n_k)}_{t_{d-1}}\right) \xrightarrow{d} \left(W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_d} - W_{t_{d-1}}\right)$$

Entonces, usando el lema anterior se siguen las proiedades que definen un M.B. (i.e W_t es normalmente distribuido, W tiene incrementos independientes y estacionarios). □

6.2. Medida de Wiener y Principio de Invarianza del M. B.

Si W es un M. B. sobre $[0,1]$ entonces el conjunto las trayectorias W define una aplicación medible del espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ al espacio métrico completo y separable $C[0,1]$ de todas las funciones continuas x definidas sobre el intervalo compacto $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. En esta última parte daremos una revisión general de la medidad de Wiener, la cual se define sobre $C[0,1]$ como la ley o distribución de W sobre $C[0,1]$.

Lema 6.2.1. *Para $z > 0$ y $j = 0, 1, ...,$*

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \Big(m \sup\{Q_n(x : |x(s) - x(j/m)| < z) : j/m \le s \le (j+1)/m\} \Big) = 0 \tag{6.2}$$

Demostración. Tenemos que

$$Q_n(x : |x(s) - x(j/m)| < z) = \mathbb{P}[|X_s^{(n)} - X_{j/m}^{(}n) > z].$$

Sean $k_1(n)$, $k_2(n)$ tales que satisfacen

$$\frac{k_1(n)}{n} \le \frac{j}{m} \le \frac{K_1(n)+1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{k_2(n)-1}{n} \le \frac{j+1}{m} \le \frac{k_2(n)}{n}$$

Dado que $X^{(n)}$ son lineales sobre cada intervalo de la forma $\Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big]$, $k = 1, 2..., n$ el supremo en (6.2) está acotado por arriba por el supremo de los números s de la forma $S = \frac{k}{n}$, $k_1 < k \le k_2(n)$. Para tales números s,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[|X_s^{(n)} - X_{j/m}^{(n)} > z] \le& \mathbb{P}[|X_s^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2] + \mathbb{P}[|X_{j/m}^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2] \\
\le& \mathbb{P}[|X_s^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2\,;\, |X_{k_2(n)/n}^{(n)} - X_s^{(n)}| \le z/4] \\
&+ \mathbb{P}[|X_s^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2\,;\, |X_{k_2(n)/n}^{(n)} - X_s^{(n)}| > z/4] \\
&+ \mathbb{P}[|X_{j/m}^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2] \\
\le& \mathbb{P}[|X_{k_2(n)/n}^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/4] \\
&+ \mathbb{P}[|X_s^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2; |X_{k_2(n)/n}^{(n)} - X_s^{(n)}| > z/4] \\
&+ \mathbb{P}[|X_{j/m}^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)}| > z/2].
\end{aligned}$$

Para los últimos tres términos de la desigualdad anterior deseamos obtener cotas superiores. Para el primer término usamos el hecho de que $X^{(n)}$ está construida por uniones de sumas de v.a independientes e idénticamente distribuidas con varianza finita. Sea Z una v.a. normal y sea G su función de distribución. Por el *Teorema Central del Límite*,

$$\Big(X_{k_2(n)/n}^{(n)} - X_{k_1(n)/n}^{(n)} \Big) \xrightarrow{d} \frac{Z}{\sqrt{m}}.$$

De modo que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X^{(n)}_{k_2(n)/n} - X^{(n)}_{k_1(n)/n}| > z/4] = 2(1 - G(\frac{z\sqrt{m}}{4})).$$

Usando la regla de l'Hospital, puede probarse fácilmente que $(1 - G(x)) < x^{-4}$ para x suficientemente grande. Luego, si m es escogido adecuadamente,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X^{(n)}_{k_2(n)/n} - X^{(n)}_{k_1(n)/n}| > z/4] \leq \frac{2 \cdot 4^4}{z^4 m^2}.$$

Ahora, usando la independencia de $(X^{(n)}_s - X^{(n)}_{k_1(n)/n})$ y $(X^{(n)}_{k_2(n)/n} - X^{(n)}_s)$, tenemos que la probabilidad

$$\mathbb{P}[|X^{(n)}_s - X^{(n)}_{k_1(n)/n}| > z/2; |X^{(n)}_{k_2(n)/n} - X^{(n)}_s| > z/4],$$

es igual a el producto

$$\mathbb{P}[|X^{(n)}_s - X^{(n)}_{k_1(n)/n}| > z/2]\mathbb{P}[|X^{(n)}_{k_2(n)/n} - X^{(n)}_s| > z/4] \leq \left(\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{z^2}{4^2}}\right)^2.$$

Finalmente, por la desigualdad de Chebyshev y la definición de $k_1(n)$ tenemos que

$$\mathbb{P}[|X_{k_1(n)/n} - X_{j/m}| > z] \leq \frac{4}{z^2 n},$$

de modo que $\mathbb{P}[|X_{k_1(n)/n} - X_{j/m}| > z] \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Usando los hechos anteriores tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X^{(n)}_s - X^{(n)}_{j/m}| > z] \leq \frac{c}{z^4 m^2},$$

donde c es una constante que no depende de m. De aquí se sigue el resultado. $\square$

Lema 6.2.2. *Para $z > 0$ y $j \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} m\, Q_n\left(\{x : \sup\{|x(s) - x(j/m)| : j/m \leq s \leq (j+1)/m\} > z\}\right) = 0$$

Lema 6.2.3. *Para $z > 0$,*

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} Q_n\left(\{x : \sup\{|x(u) - x(t)| : |t - u| \leq 1/m\}\}\right) = 0.$$

Demostración. Fijamos $z > 0$. Por el lema anterior,

$$\limsup_{n\to\infty} Q_n\left(\bigcup_{j=0}^{m-1} \{x : \max\{|x(s) - x(j/m)| : j/m \leq s \leq (j+1)/m\} > z\}\right)$$

tiende a cero cuando $m \to \infty$.

La prueba queda completa si en la expresión anterior se reemplaza z por $z/3$, y notando que si $|x(u) - x(t)| \geq z$ para algún t y u tales que $|t - u| \leq 1/m$, entonces por la desigualdad del triángulo, existe un entero $j \in \{0, 1, ..., m-1\}$ y un número real $s \in [j/m, (j+1)/m]$ tal que $x(s) - x(j/m)| > z/3$. $\square$

Lema 6.2.4. *La suscesión $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente tensa.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Necesitamos probar la existencia de un conjunto de Borel A de $C[0,1]$ con clausura compacta y para el cual $Q_n(A^c) < \epsilon$, para toda n. Nosotros incluiremos en A aquellas funciones que en 0 sean justamente 0. Entonces por el teorema de Arzelà-Ascoli, para que A tenga clausura compacto es necesario y suficiente que A un conjunto de funciones uiniformemente equicontinuas.

Por el lema anterior existe, para cada $k \in \mathbb{N}$, enteros p_k y r_k tales que

$$Q_n\left(\{x : \sup\{|x(u) - x(t)| : |t - u| \leq 1/m\} > 1/k\}\right) < \epsilon 2^{-k}, \tag{6.3}$$

para $m = p_k$ y $n \geq r_k$. Por monotonía de m, la última desigualdad es válidad para $m \geq p_k$ y $n \geq r_k$. Por el *Teorema de continuidad de la medida*, existe un entero q_k tal que (6.3) también es válida para $m \geq q_k$ y $n < r_k$. Consideremos $m_k := \text{máx}\{p_k, q_k\}$. Entonces, para cada n y k, (6.3) es válida siempre que $m = m_k$.

Sea

$$A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x : x(0) = 0 \text{ y } \text{máx}\{|x(u) - x(t)| : |t - u| \leq 1/m_k\} \leq 1/k\}.$$

De (6.3), $Q_n(A^c) < \epsilon$ para toda n. Resta probar que A es un conjunto de funciones equicontinuas. Sea $\gamma > 0$. Elegimos k tal que $1/k < \gamma$ y sea $\delta = 1/m_k$. Entonces para $x \in A$,

$$\text{máx}\{|x(u) - x(t)| : |t - u| \leq \delta\} < \gamma,$$

como se requiere. □

La tensión uniforme que acabamos de establecer tiene como consecuencia que toda subsucesión de $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene a su misma vez una subsucesión convergente (según el *Teorema 4.2.1*). En vista del *Lema 6.2.2* la existencia de tal sucesión convergente establece la existencia de la medida de Wiener Q sobre $C[0,1]$ (y, según el mismo *Lema 6.2.2* dicha medida es única). También por el *Lema 6.2.2*, todos los límites de subsucesiones convergentes son idénticos, y por ello, según *Teorema 1.2.1*, $Q_n \to Q$.

Las anteriores observaciones demuestran los siguientes teoremas.

Teorema 6.2.1. *La medida de Wiener sobre $C[0,1]$ existe y es única.*

Teorema 6.2.2 (Principio de Invarianza de Donsker)**.** *Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias reales independientes e idénticamente distribuidas con media finita μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $X^{(n)} \in C[0,1]$ de la manera siguiente:*

Para $m = 0, ..., n$, consideramos

$$X^{(n)}_{m/n} = \frac{\sum_{k=1}^{m}(Y_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}},$$

y extendemos $X^{(n)}$ a todo el intervalo $[0,1]$ de forma lineal sobre cada intervalo $[(m-1)/n, m/n]$, $m = 1, ..., n$. Sea Q_n la distribución de $X^{(n)}$. Entonces $Q_n \to Q$, donde Q es la medida de Wiener sobre $C[0,1]$.

6.3. Algunas observaciones

Consideremos una sucesión $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas cuyo rango es el conjunto $\{-1,1\}$ y tal que

$$\mathbb{P}[Y=-1]=\frac{1}{2}=\mathbb{P}[Y=1].$$

Para cada $x\in C[0,1]$, definimos la funcional M como

$$M(x):=\text{máx}\{x(t):0\leq t\leq 1\}.$$

La distribución R de M bajo la medida de Wiener Q es igual a la distribución de la variable $M\circ W$, donde W es un proceso de Wiener. Similarmente, si Q_n denota la distribución de $X^{(n)}$ donde $X^{(n)}$ está definida en términos de caminatas aleatorias como en el *Principio de Invarianza de Donsker*, entonces la distribución R_n de M bajo Q_n es la distribución de $M\circ X^{(n)}$. La funcional M es continua, así que $R_n\xrightarrow{\mathcal{L}}R$.

Teorema 6.3.1. *Sea Q la medida de Wiener sobre $C[0,1]$ y sea $M(x)$ la funcional definida antes. Entonces, para $c\geq 0$,*

$$Q(\{x:M(x)\leq c\})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^c e^{-u^2/2}du.$$

Demostración. Sea $n\in\mathbb{N}$ fijo. Consideremos el conjunto

$$E:=\{x\in C[0,1]:M(x)=x(m/n),\ \text{para alguna } m\in\{1,...,n\}\}.$$

Por la definición de $X^{(n)}$ es claro que $M(X^{(n)})=X^{(n)}_{m/n}$ para algún $m\in\{1,...,n\}$. Entonces

$$Q_n(E)=\mathbb{P}[X^{(n)}\in E]=\mathbb{P}[\Omega]=1.$$

Sea ahora $c\geq 0$. Definimos

$$D_m=\{x\in C[0,1]:x(m/n)\geq c>x(i/m),\ \text{para } i<m\}$$

y

$$D=\{x\in C[0,1]:M(x)\geq c\}.$$

Los conjuntos D_m son ajenos y $D=(D\cap E)\cup(D\cap E^c)$. Ahora, si $x\in D\cap E$, entonces $M(x)=x(m/n)$ para algún $m\in\{1,...n\}$ y $M(x)\geq c$. Sea $m_*=\text{mín}\{m\in\{1,...,n:x(m/n)\geq c\}$. De modo que $x\in D_{m_*}$. Por otra parte, es claro que $\cup_1^n D_m\cap D\cap E$. Por lo tanto $D\cap E=\cup_1^n D_m$. Así

$$Q_n(\{x:M(x)\geq c\})=Q_n\left(\bigcup_{m=1}^n D_m\right)=\sum_{m=1}^n Q_n(D_m).$$

Tenemos también

$$\begin{aligned}Q_n(D_m) = Q_n(D_m &\cap \{x : x(1) - x(m/n) > 0\}) \\ &+ Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) < 0\}) \\ &+ Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) = 0\}),\end{aligned}$$

ahora,

$$Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) > 0\}) = \mathbb{P}[(X^{(n)} \in D_m) \cap (X^{(n)} \in \{x : x(1) - x(m/n) > 0\})],$$

pero

$$(X^{(n)} \in \{x : x(1) - x(m/n) > 0\}) = \left(\sum_{k=m+1}^{n} Y_k > 0 \right),$$

por lo tanto $(X^{(n)} \in D_m)$ y $(X^{(n)} \in \{x : x(1) - x(m/n) > 0\})$ son independientes, de modo que

$$Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) > 0\}) = Q_n(D_m) Q_n(\{x : x(1) - x(m/n) > 0\}).$$

Y de forma análoga,

$$Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) < 0\}) = Q_n(D_m) Q_n(\{x : x(1) - x(m/n) < 0\}).$$

Por otra parte, es claro que

$$Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) > 0\}) = Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) < 0\}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}Q_n(D_m) = 2Q_n(D_m)&Q_n(\{x : x(1) - x(m/n) > 0\}) \\ &+ Q_n(D_m \cap \{x : x(1) - x(m/n) = 0\}).\end{aligned}$$

Sumando sobre m, obtenemos

$$Q_n(\{x : M(x) \geq c\}) = 2Q_n(\{x : x(1) > c\}) + Q_n(\{x : x(1) = c\}). \tag{6.4}$$

Ahora bien, sea $y \in C[0,1]$ tal que $y(1) \neq c$ y sea $0 < r < |y(1) - c|$. Si $\xi \in B_d(y; r)$ entonces

$$d(\xi, y) = \text{máx}\{|\xi(t) - y(t)| : t \in [0,1]\} < r < |c - y(t)|,$$

de donde $\xi(1) \neq c$. De modo que el conjunto $\{x : x(1) = c\}$ es cerrado en $C[0,1]$.

Por otra parte, para cualquier $x \in C[0,1]$ tal que $x(1) = c$ y $0 < r < \infty$ definimos $\xi, \psi \in C[0,1]$ como $\xi(t) = x(t) + r/2$ y $\psi(t) = x(t) - r/2$. Entonces $\xi, \psi \in B_d(x; r)$, $x(1) > c$ y $\psi(1) \leq c$. Luego, el conjunto $\{x : x(1) = c\}$ es también la frontera de $\{x : x(1) > c\}$. Entonces, como la distribución Q es continua, $Q(\{x : X(1) = c\}) = 0$, se sigue del *Teorema de Portmanteau*

$$Q_n(\{x : M(x) \geq c\}) \to 2Q(\{x : x(1)\}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_c^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Pero, por otro lado, según el *Principio de invarianza de Donsker*, tenemos que

$$Q_n(\{x : M(x) \geq c\}) \to Q(\{x : M(x) \geq c\}).$$

De aquí se sigue el resultado deseado. □

Teorema 6.3.2. *Sea $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. reales independientes e idénticamente distribuidas con media finita μ y varianza $0 < \sigma^2 < \infty$. Entonces para $c \geq 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max\left\{\sum_{k=1}^{m}(Y_k - \mu) : m = 1, ...n\right\} \geq c\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^c e^{-u^2/2} du.$$

Teorema 6.3.3. *Sea Q la medida de Wiener y sea λ la medida de Lebesgue sobre $[0,1]$. Entonces*

$$Q(\{x : \lambda(\{t \in [0,1]; x(t) = 0\}) = 0\}) = 1.$$

Demostración. La función $(t, x) \mapsto x(t)$ definida sobre $[0,1] \times C[0,1]$ es continua como función de t para cada x fijo y también como función de x para cada t fijo. Entonces es una función medible y por tanto la función indicadora de $\{(t, x) : x(t) = 0\}$ es medible. Por tanto, podemos aplicar el *Teorema de Fubini* a esta función indicadora. Entonces

$$\int_{C[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\{(t,x):x(t)=0\}} \lambda(dt)\right) dQ = 0.$$

□

Apéndice A

Norma Lipschitz-acotada

Consideremos (S, d) un espacio métrico. Recordemos que la *norma supremo* para cada función $f : S \to \mathbb{R}$ está definida por $||f||_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in S\}$.

Proposición A.1. *Para toda función $f : S \to \mathbb{R}$, definimos*

$$||f||_L = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x \neq y\right\}.$$

Entonces $||\cdot||_L$ es una semi-norma para el espacio de todas las funciones reales definidas sobre (S, d); y es llamada **semi-norma de Lipschitz**.

Proposición A.2. *Para toda función $f : S \to \mathbb{R}$, definimos*

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_\infty + \|f\|_L.$$

Sea también $BL(S, d)$ es subespacio de todas las funciones $f : S \to \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_{BL} < \infty$. Entonces $BL(S, d)$ es un espacio vectorial y $|| \cdot ||_{BL}$ es una norma en este espacio.

El espacio $BL(S, d)$ es llamado **espacio de funciones Lipschitz acotadas** *y $\| \cdot \|_{BL}$ es llamada* **norma de Lipschitz acotada**.

La demostración de estos hechos es completamente trivial.

Teorema A.1. *Para toda f y g en $BL(S, d)$,*

i) $\|fg\|_{BL} \leq \|f\|_{BL}\|g\|_{BL}$.

ii) $\| \max\{f, g\}\|_L \leq \max\{\|f\|_L, \|g\|_L\}$.

iii) $\| \min\{f, g\}\|_L \leq \max\{\|f\|_L, \|g\|_L\}$.

Demostración. Sean f y g funciones en $BL(S, d)$.

i). Claramente $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$.

Por otro lado, para cualquier x y y en S,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)(g(x) - g(y))| + |g(y)(f(x) - f(y))| \\ &\leq (\|f\|_\infty\|g\|_L + \|g\|_\infty\|f\|_L)d(x, y), \end{aligned}$$

de donde

$$\|fg\|_L \leq \|f\|_\infty \|g\|_L + \|g\|_\infty \|f\|_L.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{BL} &= \|fg\|_\infty + \|fg\|_L \\
&\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g\|_L + \|g\|_\infty \|f\|_L \\
&\leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g\|_L + \|g\|_\infty \|f\|_L + \|f\|_L \|g\|_L \\
&= (\|f\|_\infty + \|f\|_L)(\|g\|_\infty + \|g\|_L) \\
&= \|f\|_{BL} \|g\|_{BL}.
\end{aligned}$$

Lo cual prueba además que $fg \in BL(S, d)$.

ii). Sean x y y elementos en S. Entonces

$$\text{máx}\{f(x), g(x)\} - \text{máx}\{f(y), g(y)\} \leq \begin{cases} f(x) - f(y) & \text{si } g(x) \leq f(x) \\ g(x) - g(y) & \text{si } f(x) \leq g(x), \end{cases}$$

y del mismo modo

$$\text{máx}\{f(y), g(y)\} - \text{máx}\{f(x), g(x)\} \leq \begin{cases} f(y) - f(x) & \text{si } g(y) \leq f(y) \\ g(y) - g(x) & \text{si } f(y) \leq g(y). \end{cases}$$

de manera que

$$|\,\text{máx}\{f(x), g(x)\} - \text{máx}\{f(y), g(y)\}| \leq \text{máx}\{|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)|\},$$

de donde se sigue de forma inmediata que

$$\|\,\text{máx}\{f, g\}\|_L \leq \text{máx}\{\|f\|_L, \|g\|_L\}.$$

iii). De la parte anterior tenemos que

$$\|\,\text{mín}\{f, g\}\|_L = \|\,\text{máx}\{-f, -g\}\|_L \leq \text{máx}\{\|-f\|_L, \|-g\|_L\} = \text{máx}\{\|f\|_L, \|g\|_L\}.$$

□

Lema A.1. *Para $K \subset S$ definimos B_K como la familia de funciones $f : K \to \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_{BL} \leq 1$. Entonces B_K es una familia de funciones uniformemente equicontinua y cerrada para la norma supremo $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Sea f_n funciones en B_K y f una función tales que $f_n \to f$ (para $\|\cdot\|_\infty$). Sea también $\epsilon > 0$ y $x \neq y$ ($x, y \in K$). Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} d(x, y).$$

Entonces

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{2} d(x, y), \qquad \forall\, z \in K,$$

en particular

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} d(x,y) \quad \text{y} \quad |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2} d(x,y).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq \epsilon d(x,y) + |f_n(x) - f_n(y)| \end{aligned}$$

esto implica que

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} \leq \epsilon + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x,y)} \leq \epsilon + \|f_n\|_L,$$

luego,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} + \|f_n\|_\infty \leq \epsilon + \|f_n\|_L + \|f_n\|_\infty = \epsilon + \|f_n\|_{BL} \leq \epsilon + 1,$$

si $n \to \infty$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} + \|f\|_\infty \leq \epsilon + 1,$$

de modo que

$$\|f\|_{BL} = \|f\|_L + \|f\|_\infty \leq \epsilon + 1,$$

entonces si $\epsilon \to 0$,

$$\|f\|_{BL} \leq 1,$$

por lo tanto $f \in B_K$. Esto prueba que B_K es cerrada.

Ahora, sea $\eta > 0$ y supongamos que $d(x,y) < \eta$. Si $f \in B_K$ tenemos que $\|f\|_{BL} \leq 1$, por lo tanto $\|f\|_L \leq 1$, se sigue entonces que $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$. Entonces $|f(x) - f(y)| < \eta$. Luego B_K es una familia uniformemente equicontinua. □

Lema A.2. *Si $K \subset S$ es compacto, entonces B_K está totalmente acotada para $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. La familia B_K es uniformemente equicontinua y K es compacto, luego, por el *Teorema de Arzelá-Ascoli*, B_K está totalmente acotada para $\|\cdot\|_\infty$. □

Teorema A.2. *Si $K \subset S$ es compacto, entonces B_K es compacto.*

Demostración. $B_K \subset C_b(K)$, B_K es cerrada y $C_b(K)$ completo, por tanto B_K es completa, luego B_K es compacto. □

Bibliografía

[AtSu] Athreya, S. R.; Sunder, V. S. *Measure and Probability*. Hyderabad University, 2008.

[Che] Chernov, Nicolai. *Brownian Motion*. Providence University, Rhode Island. American Mathematical Society, 2009.

[Coh] Cohn, Donald L. *Measury Theory*. BirKhäuser, Boston, 1980.

[Con] Tudor, Constantin. *Procesos Estocásticos*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2002.

[Dud] Dudley, R.M. *Real analysis and probability*. Segunda Edición. Cambridge University Press. Cambridge, 2003.

[FrGr] Fristed, Bert; Gray, Lawrence, *A modern approach to probability theory*. Birkhäuser, Boston, 1997.

[Kal] Kallenberg, Olav. *Foundations of Modern Probability*. Segunda Edición. Springer, New York, 2002.

[KaSh] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E. *Brownian motion and stochastic calculus*. Segunda edición. Espringer Verlag, New York, 1991.

[LaRo] Laha, R. G.; Rohatgi, V. K. *Probability Theory*. J. Wiley, New York, 1979.

[MoPe] Möters, Peter; Peres, Yuval. *Brownian Motion*. Cambridge University. Cambridge, 2010.

[Wil] Willard, Stephen. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.