



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

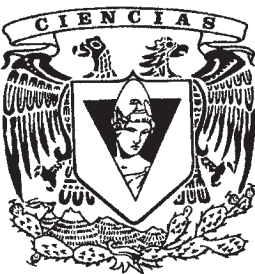
**EL MÉTODO WKB PARA UNA ECUACIÓN  
DE SCHRÖDINGER NO LINEAL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO**

**P R E S E N T A :  
PEDRO CERVERA GÓMORA**

**DIRECTOR DE TESIS  
DRA. MARÍA DE LOS ÁNGELES SANDOVAL ROMERO**



**MÉXICO D.F.**

**2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
Secretaría General  
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
**Presente**

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**El Método WKB para una ecuación de Schrödinger No Lineal**

realizado por **Cervera Gómora Pedro** con número de cuenta **0-9455699-7** quien ha decidido titularse mediante la opción de tesis en la licenciatura en Física. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Propietario Dra. María de los Ángeles Ortíz Flores

Propietario M. en C. Augusto Cabrera Manuel

Propietario Dra. María de los Ángeles Sandoval Romero  
Tutora

Suplente Dr. Luis Octavio Silva Pereyra

Suplente M. en I. Orlando Hernández Cristobal

Atentamente,

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Ciudad Universitaria, D. F., a 24 de septiembre de 2010

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES

**Señor sinodal:** antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

# Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	III
<i>In memoriam</i>	V
Introducción	VII
<b>1. De Sobolev, de Schwartz y de Semigrupos</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios de Sobolev . . . . .	1
1.2. Espacios de Schwartz . . . . .	8
1.3. Semigrupos . . . . .	13
1.4. Miscelanea matemática . . . . .	19
<b>2. Espacios de Evolución</b>	<b>21</b>
2.1. El grupo de Schrödinger en espacios del tipo $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ . . . . .	21
<b>3. Estimaciones de Strichartz</b>	<b>31</b>
3.1. La ecuación de Schrödinger . . . . .	31
3.2. Estimaciones de Strichartz . . . . .	53
<b>4. Óptica Geométrica</b>	<b>65</b>
4.1. Óptica Geométrica: La deducción física . . . . .	65
4.2. Óptica Geométrica: la generalización matemática . . . . .	69
<b>5. El método WKB</b>	<b>77</b>
5.1. WKB para la ecuación de Schrödinger lineal . . . . .	77
5.2. Un caso de Ecuación de Schrödinger no lineal . . . . .	90
5.3. Método WKB para una ecuación de Schrödinger no lineal . . . . .	93

5.4. Conclusiones . . . . .	116
<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>

# Dedicatoria

*A mis padres, a mi hermana y esos diablillos, que sé que lo harán en grande: Fausto, Lael, Dami y Leonardo.*



# Agradecimientos

Este es un conjunto no ordenado, por lo que nadie puede asegurar tener prioridad en la forma que aparecen.

A la directora de tesis: María de los Ángeles Sandoval Romero por su apoyo, paciencia; el haber sido correctora de estilo y editora de esta tesis; sin ignorar su amistad.

A Susana Bravo: por su apoyo, confianza y porque su *e-zape* fue un motor para mi, también por estar al pendiente de mis progresos. A Elizabeth Martínez: por su apoyo, confianza, también estuvo al pendiente. A Uriel Jiménez y su familia, al igual que Orlando Hernández, por su confianza, apoyo, aventuras, porque estuvieron siempre al pendiente.

A los amigos de la facultad: Elio Martínez, Marco Barragán, Lety Plascencia, Roberto Hinojosa, Roberto Ponce, David Bucio, Felipe Rivera, Walter Tejeda, Orlando Baca, Armando Resendiz, Alejandro Lugo, Carlos González, Tania Arce, Erick López, Norma Sánchez, Zulema, Giselle, Gil, su hermano el “Barbón” y en particular a su mami, doña Aurora, que dio una oración para que todo saliera a pedir de boca; Jorge Pineda: al matemático Chucho. Mardonio Islas.

A mis profesores de la UNAM, entre ellos Adrián Meza.

A Miguel Socolovsky que me mostró el maravilloso mundo de la física matemática.

A Alexander Turbiner cuyas palabras fueron motivantes para mi.

A Pam Béjar, sus papás, su hermana. A Paloma Duarte, su tía Laura, sus papás, Lalito; la familia Flores-Vázquez: Gaby, Pau, José, sus padres, Richie, Bernardo, sus papás, “Toti” y sus padres, Tito y su mamá. A Héctor Guerrero y familia. La Familia de Maribel Espinoza Zurutuza. La familia Guadarrama, la familia Luyando, la familia Mc’Kersher, la Familia Gutiérrez, la familia Maldonado.

A *můj bratr* Mario Sánchez y su esposa Gema por son tantas cosas... Sus



padres y hermanas de Mario, gracias por las buenas vibras desde Querétaro y Madrid. *Můj bratr* Edgar Bermejo, Merari, que hizo las imágenes, los padres de ella, su hermana, gracias por ese apoyo y confianza.

A Adriana Velazco, que me dio ideas para saber como estructurar una tesis.

Los sinodales, que contribuyeron al mejoramiento y entendimiento de lo aquí expuesto.

A la UNAM, por tantas cosas.

A todos gracias-*díky-danke-thank you*.

# *In memoriam*

*A mis Abuelos: Esperanza, José, Joaquina, Rafael. Al maestro Marcos Moshinsky, Manuel Lozano, Alberto Barajas, Julieta Verdugo. Vero Flores Vázquez, Homero Hernández., mi tía Carmelita Gómora, Osvaldo Gómora y al “pelón” Alonso Manzanares.*

# Introducción

*El mito y la ciencia tienen una similitud y una diferencia. La similitud es que tratan de explicar. La diferencia es que el mito trata de explicarlo todo, mientras la ciencia va particularizando: la biología una cosa, la física otra. . .*

*Claude Lévi-Strauss*

La descripción de la naturaleza que se hace a través de la física requiere de ecuaciones, las cuales generalmente son ecuaciones diferenciales parciales u ecuaciones diferenciales ordinarias. Dependiendo del tipo de fenómeno a modelar se usa un tipo de ecuación; las ecuaciones empleadas pueden ser lineales o no lineales y por eso hablamos de fenómenos lineales y no lineales.

Los fenómenos que se estudian mediante ecuaciones diferenciales los llamaremos lineales, si la derivada de mayor orden es una función lineal de las derivadas de órdenes menores, ello nos permite aplicar el principio de superposición. Este principio posibilita analizar un problema como la suma de varios subproblemas, es decir partimos el problema en subproblemas.

Los fenómenos no lineales son aquellos en los cuales no se puede aplicar el principio de superposición y no es lineal el operador, en algunos casos la función que es solución a la ecuación está en composición con otra función que forma la ecuación.

Los fenómenos que no son lineales han cobrado importancia desde el siglo XIX; un ejemplo de ello serían los fluidos, en particular los trabajos de Navier y Stokes sobre hidrodinámica, que al modificar las ecuaciones de Euler, introdujeron términos no lineales, logrando con ello describir la viscosidad de un fluido; La obra de Osborne Reynolds de 1883 reveló la importancia de considerar torbellinos, aún en un tubo rectilíneo [18], entregando ecuaciones que ya no son lineales.

Las ecuaciones no lineales presentan un doble interés: están las aplicaciones y la cuestión matemática.

La mecánica cuántica no podía ser la excepción, presentándose también en ella fenómenos no lineales.

En 1961 L.P. Pitaevski estudiando la superfluidéz del helio líquido descubrió la siguiente ecuación [6]:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + |u|^2 u = 0, \quad (1)$$

en el cual  $|u|^2 u$  es el responsable de la no linealidad.

Así como el conocimiento sobre aerodinámica ha mejorado el diseño de aviones (en particular los supersónicos), la ecuación de Schrödinger<sup>1</sup> no lineal también lo ha hecho en el área de telecomunicaciones (por mencionar una) con la ecuación deducida por Akira Hasegawa y Frederick Tappert de 1973:

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha u\right) + \frac{1}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma |u|^2 u = 0,$$

usada en las fibras ópticas para pulsos luminosos de picosegundo [6]. La ecuación Akira-Tappert es una ecuación de Schrödinger dado que tiene un operador de temporal y el hamiltoniano, no es lineal por el término  $\gamma |u|^2 u$ . Si reflexionamos sobre el influjo que poseen las telecomunicaciones en está era global, difícilmente podríamos concebirlas sin las fibras ópticas.

Dado que este trabajo de tesis tiene como objetivo principal el estudio de una clase de ecuación de Schrödinger no lineal en el contexto de lo que se conoce como el Método WKB, detallaremos a continuación la elaboración de dicho trabajo.

Existen distintas clases de Ecuaciones de Schrödinger no lineales, la que estudiaremos será una que posea un potencial, con condiciones a la frontera y un nuevo término:  $\varepsilon^\kappa f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon$ , que es el responsable que deje de ser lineal la ecuación de Schrödinger, con esto la ecuación ha estudiar será:

$$i\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u_\varepsilon = V(x, t)u_\varepsilon + \varepsilon^\kappa f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon,$$

con estas condiciones a la frontera:

$$u_\varepsilon|_{t=0} = a_0^\varepsilon e^{\frac{i\phi_0(x)}{\varepsilon}}.$$

---

<sup>1</sup>La ecuación de Schrödinger es una ecuación diferencial parcial u ordinaria (si es unidimensional), que se define como la suma de un operador diferencial que está relacionado con la parte temporal y multiplicado por i, más un operador que se llama Hamiltoniano; en el capítulo 3 se detalla la ecuación.

La no linealidad  $\varepsilon^\kappa f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon$  depende de dos parámetros:  $\varepsilon$  y  $\kappa$ , ambos determinan el tipo de solución. ¿Qué tipo de solución será propuesto para la ecuación mencionada? Se planteará como solución un *ansatz*<sup>2</sup> del tipo empleado en la óptica geométrica:

$$u_\varepsilon(t, x) = Ae^{i\phi(t, x)}.$$

El cual será expandido en series de potencias sobre la amplitud, para investigar el proceder dinámico del sistema.

Ahora para justificar el uso de éste *ansatz* se hará un procedimiento parecido al usado en el método WKB para la ecuación de Schrödinger lineal, el cual consiste en introducir un *ansatz* en la ecuación de Schrödinger se hace el álgebra y se llega a otra ecuación, que es una ecuación de Hamilton-Jacobi que depende de la fase, esta fase se expande en serie de potencias para hallar la solución. Aquí se hará algo análogo, es por ello que se considera un método WKB no lineal para un tipo de ecuación de Schrödinger no lineal.

El primero que ideó esta aproximación fue Sir Harold Jeffreys (1891-1989) en 1923, para la llamada mecánica cuántica primitiva. Sin embargo su nombre actual es un acrónimo de tres físicos: George Wentzel (1898-1978), Anthony Kramers (1894-1952) y Léon Brillouin (1889-1969). Lo propusieron en 1926. Cada uno independiente del otro y sin que hubiera un conocimiento previo al trabajo de Jeffreys.

¿Qué tipo de ecuación se podrá resolver por el método WKB no lineal? Para responder a la pregunta necesitaremos establecer las condiciones de aplicabilidad y ello recaerá en el Teorema 27 del Capítulo 5, haciendo de este teorema el *centro productivo* de esta tesis, ya que para su demostración “produce” un aprendizaje de varios temas de matemáticas alejados de las materias básicas de matemáticas impartidas en la carrera de física a nivel licenciatura y nos forzará a volver a deducir algunos conceptos de física, para una total comprensión del método propuesto.

En el Capítulo 1 de esta tesis, se abordan temas exclusivamente matemáticos, sin ninguna aplicación. Comenzamos con la discusión del concepto de Espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ : es el conjunto formado por cierto tipo de funciones, que poseen derivadas débiles. Esta derivada débil nos posibilita calcular derivadas de ciertas funciones con un número finito de discontinuidades, la derivada se calcula alrededor de la vecindad donde se localiza la

---

<sup>2</sup>*ansatz*: germanismo que significa formulación; se emplea para designar a un tipo de solución que es propuesto para resolver cierto tipo de ecuaciones.

discontinuidad, por lo que generaliza la clase de funciones con las que se trabaja y así poder seguir operando en el universo de las ecuaciones diferenciales. La ventaja que ofrece el trabajar con los espacios de Sobolev radica en que sus funciones y las derivadas débiles de estas funciones pertenecen al mismo espacio. Es en  $\mathbb{R}^N$ , con  $N \in \mathbb{N}$  y es en este tipo de espacio es donde se desarrollará todo el trabajo, salvo que se indique lo contrario.

Los teoremas de encaje establecen que ciertos espacios de Sobolev están contenidos en otros espacios que pueden ser  $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^N)$ , facilitando el estudio de las funciones, ya que si se demuestra que la función  $u$  está en un determinado espacio de Sobolev, es automático saber que está contenido en otro tipo de espacio.

Todo espacio de Sobolev es un espacio de Banach, pero no todo espacio de Banach es un espacio de Sobolev. Algunos espacios de Sobolev son espacios de Hilbert, un ejemplo  $\mathbb{W}^{2,p}$  el cual denotaremos por  $\mathbb{H}^2$ , es en esta intersección donde la mecánica cuántica posee su lenguaje. Hay que destacar que no todo espacio de Hilbert es espacio de Sobolev y viceversa.

Si tuviésemos que hablar de un concepto matemático que estuviera rodeado de “misticismo” ese sería la delta de Dirac, el cual tiene varias deducciones intuitivas, que en este trabajo se definirán formalmente, para ello introduciremos los espacios de Schwartz, que lo forman las funciones de clase de Schwartz, cuya peculiaridad es su rápido decrecimiento junto con todas sus derivadas cuando se toma el límite  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Tenemos una ecuación del siguiente tipo:

$$\frac{du(t)}{dt} = \hat{A}u(t),$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, donde  $\hat{A}$  es un operador, que está en un espacio de Banach, algunas veces el operador  $\hat{A}$  es acotado y otras veces no es acotado. En esta tesis los operadores serán acotados.

Este tipo de ecuaciones diferenciales engloban lo que se llama teoría de semigrupos; acoje este nombre al cumplir con casi todos los axiomas de un grupo uniparamétrico, salvo el que no retenga el inverso en su definición. Estos semigrupos poseen un generador, el cual será bien definido.

Algunas ecuaciones de Schrödinger, que nos describen la dinámica del sistema, tienen por solución a semigrupos, una muestra sería  $\tau(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$  en el cual el operador  $\hat{A}$  es el operador conocido como Hamiltoniano ( $\hat{H}$ );  $t$  es el

parámetro identificado como el tiempo y  $t \geq 0$ .  $\tau(t)$  es un semigrupo, que en física lo nombran el operador de evolución temporal <sup>3</sup>. Se cierra el capítulo con el teorema Hille-Yosida, que garantiza la existencia de un generador para el tipo de semigrupo estudiado en esta tesis.

Cierra este capítulo con una sección que se ha llamado Miscelanea matemática, en ella se enuncian sin demostración dos lemas, que como serán usados varias para las demostraciones de los principales teoremas, se ve la necesidad de tenerlos dentro del texto, estos son: el Lema de Gronwall y el Lema de Moser; adicional será el dar una fórmula de integración por partes.

En el Capítulo 2 se hace la introducción del grupo de Schrödinger, que se define como  $U(t) = e^{-i\Delta t}$   $t \in \mathbb{R}$ , siendo  $\Delta$  el Laplaciano en  $\mathbb{R}^N$ , el cual es el encargado de la evolución en el tiempo. Introduciremos un par de operadores  $\hat{\Gamma}$  y  $\hat{G}$ , ambos están definidos en términos de  $U(t)$ . Se mostrarán algunos de sus efectos sobre funciones a través de tres Lemas.

Los espacios con los que vamos a lidiar, aparte de los descritos en el Capítulo 1, serán los llamados espacios de evolución,  $\mathcal{L}(P)$ ; está es una forma sintética de escribir a los espacios  $\mathcal{L}^{r,p}$ ;  $P$  es un 2-vector, que se define:  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r})$ ; con una norma  $\| \|u(t, x)\|_r \|_p$ , que es la norma de la norma de una función  $u(t, x)$  sobre  $I \times \mathbb{R}^N$ , la notación obedece a que la función no es unidimensional, por lo que se toma la norma con respecto a una variable y queda una función que depende de otra(s) variable(s), por lo que se toma la norma con respecto a esa otra(s) variable(s). Una vez definidos estos espacios, tendremos la oportunidad de ver como actúa el grupo de Schrödinger en estos espacios.

El Capítulo 3 consta de dos secciones, siendo el objetivo establecer el teorema de las estimaciones de Strichartz. La primera sección expone algunos conceptos básicos de la mecánica cuántica y apoyados en la parte histórica, se hará una formulación heurística de la ecuación de Schrödinger lineal, ya que ella se postula, no hay forma de definirla. Toda la primera parte aporta lo que se necesita para establecer las estimaciones de Strichartz.

Las estimaciones de Strichartz nos indican cuando una solución para una ecuación de Schrödinger no lineal, cuya solución sea del tipo  $\tau(t)\varphi(x)$ , está acotada, ya que  $\tau(t)$  puede generar inestabilidad.

En el Capítulo 4 cuyo título: Óptica Geométrica, nos remite al tratamiento de la luz como rayos. Bajo esta idea es como vamos a derivar la ecuación fundamental de la óptica geométrica: la ecuación de la eikonal. Para la de-

---

<sup>3</sup>En el capítulo 3 se da una interpretación física de la información que proporciona.

ducción de tan importante ecuación vamos a partir de la ecuación de onda clásica, pues no perdamos de vista que estamos tratando con partículas de comportamiento ondulatorio y esto nos obliga a comprender desde la física estas ideas. En la segunda sección se busca la generalización matemática, para que nos de la pauta a seguir en las ecuaciones cuya solución sea un *ansatz* del tipo  $u_\varepsilon(x, t) = a^\varepsilon(x, t)e^{\frac{iP^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}}$ .

El Capítulo 5 está conformado por tres secciones. En la primera se deduce el método WKB para una ecuación de Schrödinger lineal. Culmina esta primera sección con la aplicación al efecto túnel.

En la segunda sección se elabora una escueta descripción de los capacitores cuánticos, estos capacitores se pueden formar cuando se tienen dos barreras de potencial de anchos distintos, creando entre ellos un pozo, que se llena de electrones por efecto túnel, su condición de fermiones crea un potencial y es por este potencial que la ecuación de Schrödinger, que modela a los capacitores, pierde su linealidad.

La última sección: se ubica el *centro productor*, es decir el Teorema 27, ese enunciado que nos describe las condiciones a exigir tanto a las condiciones a la frontera como al término que crea la no linealidad; asegura la existencia y unicidad de la solución dada por la variante al método WKB que se propone; nos permite medir el orden de la no linealidad a través de la función  $G$  y además es una fase.

Lista de símbolos a usar.

- $\mathfrak{I}$  Operador identidad.
- $\tau(t)$  Operador unitario, que está relacionado con la evolución temporal. En algunos casos puede ser el operador de evolución temporal de la mecánica cuántica.
- $\Delta$  El operador laplaciano.
- $\langle, \rangle$  Producto punto.



# Capítulo 1

## De Sobolev, de Schwartz y de Semigrupos

### 1.1. Espacios de Sobolev

Ya se mencionó en la introducción a la derivada débil, que es la que nos permite derivar de forma débil a ciertas funciones discontinuas en la vecindad que contiene a la discontinuidad, ahora la definiremos, posteriormente a esta se suministrará el cálculo de una derivada débil sobre una función y daremos un ejemplo de una función que no goza de derivada débil.

Comenzaremos por definir que es un multi-índice y las funciones de prueba, ya que serán fundamentales para la definición de espacio de Sobolev.

**DEFINICIÓN 1** (Multi-índice). *Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in (\mathbb{N} \cup 0)^N$ , tal que cumple:*

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N, \\ D_x^\alpha &= D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_N}^{\alpha_N}, \\ \partial_{x_i}^\alpha &= \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

$D_x = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$  donde  $\partial_x^\alpha$  es la derivada parcial.

**DEFINICIÓN 2** (Funciones de Prueba). *Sean  $U \subset \mathbb{R}^N$  y  $\phi(U) \in C_0^\infty$ . Establecemos que  $\phi(U)$  es distinta de cero junto con todas sus derivadas en la vecindad de  $U$ .  $\phi$  es cero junto con todas sus derivadas en el complemento de la vecindad de  $U$ .*

**DEFINICIÓN 3** (Derivada Débil). *Supongamos  $u, v \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$   $U \subset \mathbb{R}^N$  y  $\alpha$  es un multi-índice. Decimos que  $v$  es la  $\alpha$ -ésima derivada parcial y débil de  $u$ , escrita como  $D^\alpha u = v$  si cumple que:*

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^\alpha \int_U v \phi dx. \quad (1.2)$$

para todas las funciones de prueba  $\phi \in C_0^\infty(U)$ .

**Ejemplos:**

Sean  $N = 1, U = (0, 2)$  con

$$u(x) = \begin{cases} x & : 0 < x \leq 1, \\ 1 & : 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

definimos

$$v(x) = \begin{cases} 1 & : 0 < x \leq 1, \\ 0 & : 1 < x < 2. \end{cases}$$

por demostrar que  $u'(x) = v(x)$  i.e.  $\int_0^2 u \phi' dx = - \int_0^2 v \phi dx$  definamos a  $\phi \in C_c^\infty(U)$  entonces la integral se escribe:

$$\int_0^2 u \phi' dx = \int_0^1 x \phi' dx + \int_1^2 1 \phi' dx, \quad (1.3)$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} x\phi|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + \phi|_1^2 - \int_1^2 0\phi dx = \\ 1\phi(1) - 0\phi(0) + 1\phi(2) - 1\phi(1) - \int_0^1 \phi dx = \\ 0 - \int_0^1 \phi dx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Pero  $v(x) = 1$  de  $0 < x \leq 1$  y cero en  $(1,2)$ , así que

$$- \int_1^2 0\phi dx - \int_0^1 \phi dx = - \int_0^2 v \phi dx, \quad (1.5)$$

como  $\phi$  es una función de soporte con compacto en  $(0,2)$ , entonces  $\phi(2) = 0$  por lo tanto (1.3) y (1.4) son iguales.

No todas las funciones discontinuas en un punto tienen derivada débil, para tal fin introduzcamos a:

$$u(x) = \begin{cases} x & : 0 < x \leq 1, \\ 2 & : 1 < x < 2. \end{cases}$$

con el objetivo de exhibir que no existe  $v \in \mathcal{L}_{loc}^1(U)$  tal que  $\int_0^2 u\phi' dx = -\int_0^2 v\phi dx$ . Sea  $\phi \in C_c^\infty(u)$

$$\begin{aligned} \int_0^2 u(x)\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 2\phi' dx = x\phi|_0^1 - \int_0^1 \phi dx + 2\phi|_1^2 = \\ &= 1\phi(1) - 0\phi(0) + 2(\phi(2) - \phi(1)) - \int_0^1 \phi dx = -\int_0^1 \phi dx + \phi(1) + 2\phi(2) - 2\phi(1) = \\ &= -\int_0^1 \phi dx - \phi(1), \quad \text{por lo tanto} \\ &= -\int_0^2 v(x)\phi dx = -\int_0^1 \phi dx - \phi(1). \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\forall \phi$  función de prueba. Ahora sea la sucesión  $\{\phi\}_{m=1}^\infty$  de funciones de prueba que satisfacen:

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_m \leq 1, \\ \phi_m(1) = 1, \\ \phi_m(x) \rightarrow 0, \quad \forall x \neq 1. \end{cases}$$

reemplazando  $\phi$  por  $\phi_m$  en el resultado (1.6) se tiene:

$$\begin{aligned} \phi(1) = \int_0^2 v(x)\phi dx - \int_0^1 \phi dx &\Rightarrow \phi_m(1) = \int_0^2 v(x)\phi_m dx - \int_0^1 \phi_m dx \\ &\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \int_0^2 v(x)\phi_m dx - \int_0^1 \phi_m dx \right]. \end{aligned} \tag{1.7}$$

por lo tanto  $1 = 0$ , encontrando una contradicción.

q. e. d.

Definamos lo que son los espacios de Sobolev

**DEFINICIÓN 4** (Espacios de Sobolev  $\mathbb{W}^{k,p}(U)$ ). *Es el conjunto de todas las funciones  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U \subset \mathbb{R}^N$ , tal que para cualquier multi-índice  $\alpha$*

con  $|\alpha| \leq k$  ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ),  $\exists D^\alpha u$  en un sentido débil y pertenece a  $\mathcal{L}^p(U)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ . Este tipo de espacios poseen norma, que se define como:

$$\|u(x)\|_{\mathbb{W}^{k,p}(U)} := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{|\alpha| \leq k} \int_U |D^\alpha u|^p dx} & : 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha u| & : p = \infty. \end{cases}$$

**COMENTARIO 1.** La norma del espacio  $\mathcal{L}^p(U)$  es menor que la norma del espacio de Sobolev  $\mathbb{W}^{k,p}(U)$ , i.e.

$$\|u\|_{\mathcal{L}^p} \leq C \|u\|_{\mathbb{W}^{k,p}} \quad (1.8)$$

**LEMA 1** (Unicidad de la derivada débil). La  $\alpha$ -ésima derivada débil parcial de  $u$ , si existe, es única.

**Demostración**

Supongamos que la función  $u(x)$  tiene dos derivadas débiles distintas  $v(x)$  y  $w(x)$ , sea  $\phi \in C_c^\infty(U)$ , ahora

$$\begin{aligned} 0 = u(x) - u(x) &\Rightarrow \int_U 0 D^\alpha \phi dx = \int_U u D^\alpha \phi dx - \int_U u D^\alpha \phi dx \\ 0 &= (-1)^\alpha \int_U v \phi dx - (-1)^\alpha \int_U w \phi dx \quad (1.9) \\ 0 &= (-1)^\alpha \int_U (v - w) \phi dx. \end{aligned}$$

Por lo que inferimos que  $v = w$ , concluyendo que es única la derivada débil. q.e.d.

¿Qué tipo de espacio forman los espacios de Sobolev?

**TEOREMA 1.** El espacio de Sobolev  $\mathbb{W}^{k,p}(U)$  con  $k = 1, 2, \dots$  y  $1 \leq p \leq \infty$  es un espacio de Banach.

**Demostración**

Sea  $\{u(x)_n\}_{n=0}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{W}^{k,p}(U)$ , entonces

$$\int_U u_n D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U D^\alpha u_n \phi dx, \quad (1.10)$$

pero

$$D^\alpha u_n \in \mathcal{L}^p(U) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha u_n = D^\alpha u. \quad (1.11)$$

Por demostrar  $\lim_{n \rightarrow \infty} D^\alpha u_n = D^\alpha u \quad \forall \alpha$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in \mathcal{L}^p(U) \Rightarrow \|D^\alpha(u - u_n)\| \rightarrow 0, \quad D^\alpha u_n = D^\alpha u, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (1.12)$$

Todo esto porque  $D^\alpha u \in \mathcal{L}^p(U)$  y éste es un espacio de Banach. Ahora supongamos que  $m \geq n \geq n_0$  y  $\|u_m - u_n\| < \varepsilon$ , ahora tomemos:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = \|u - u_n\| < \varepsilon, \quad (1.13)$$

ahora al tomar  $n \geq n_0$ , entonces el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| \rightarrow 0$ .

q. e. d.

**TEOREMA 2** (Propiedades de la derivada débil). *Asumamos que  $u, v \in \mathbb{W}^{k,p}(U)$ ,  $|\alpha| \leq k$ , entonces:*

i)  $D^\alpha u \in \mathbb{W}^{k,p}(U)$  y  $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$ , para todo multi-índice  $\alpha, \beta$  con  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ .

ii) Para toda  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y con ellos podemos hacer la siguiente combinación lineal  $\lambda u + \mu v$  entonces

$$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v,$$

con  $|\alpha| \leq k$ .

iii) Si  $V$  es un subconjunto abierto de  $U$ , entonces  $u \in \mathbb{W}^{k,p}(V)$ .

iv) Si  $\zeta \in C_0^\infty(U)$  entonces  $\zeta u \in \mathbb{W}^{k,p}(U)$  y se tiene la siguiente versión de la fórmula de Leibniz:

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u. \quad (1.14)$$

Donde  $\binom{\alpha}{\beta}$  es el coeficiente binomial.

**COMENTARIO 2.** Si  $p = 2$  usualmente se escribe

$$\mathbb{H}^k(u) = \mathbb{W}^{k,2}(U)$$

con  $k = 0, 1, \dots$ .  $\mathbb{H}^k(U)$  es un espacio de Hilbert; si  $k = 0$ , entonces  $\mathbb{H}^0(U) = \mathcal{L}^2(U)$ .

Concluyendo: Todo espacio de Sobolev es un espacio de Banach; algunos espacios de Sobolev son espacios de Hilbert.

Una función  $u$  que pertenece a determinado espacio de Sobolev (supongamos  $\mathbb{W}^{1,k}(\mathbb{R}^N)$ , por mencionar alguno), ¿podrá pertenecer esta función  $u$  a otro espacio, como por ejemplo el espacio  $C(\mathbb{R}^N)$ , o a  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ ? Los teoremas de encaje<sup>1</sup> responden afirmativamente a la pregunta. Estos serán enunciados sin demostración, para las demostraciones invitamos al lector a consultar [5] o [10]. Se darán las siguientes definiciones, que nos serán útiles para enunciar los teoremas.

**DEFINICIÓN 5** (Homeomorfismo). *Se dice que entre dos espacios hay un homeomorfismo si existe una aplicación  $f : \mathbb{X}$  a  $\mathbb{Y}$  continua, biyectiva y su inversa  $f^{-1} : \mathbb{Y}$  a  $\mathbb{X}$  también es continua (usaremos el símbolo  $\hookrightarrow$  para tal fin) así  $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{Y}$ . El homeomorfismo dicho en palabras asegura la existencia de una biyección que respeta la estructura topológica.*

**DEFINICIÓN 6** (Inmersión o encaje). *Sean  $\mathbb{X}$  y  $\mathbb{Y}$  dos espacios topológicos, decimos que  $\mathbb{X}$  está inmerso en  $\mathbb{Y}$  si  $\mathbb{X}$  es homeomorfo a un subespacio de  $\mathbb{Y}$ .*

**DEFINICIÓN 7.** *Si  $1 \leq p < N$ , el conjugado de Sobolev de  $p$  se define*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}. \quad (1.15)$$

Notemos que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad p^* > p. \quad (1.16)$$

**TEOREMA 3** (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Demos por supuesto que se cumple  $1 \leq p < N$ , entonces existe una constante  $C$  que depende de  $N$  y  $p$  tal que se cumple:*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|Du\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}, \quad (1.17)$$

$$\forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^N).$$

Esto fue hecho para  $\mathcal{L}^{p^*}(\mathbb{R}^N)$  y  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$ . ¿Qué sucede si es  $\mathbb{W}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ , es decir en quién se encaja?

---

<sup>1</sup>Los primeros teoremas de este tipo fueron demostrados por Sergei Sobolev (1908-1989) en la tercera década del siglo XX.

**TEOREMA 4** (Estimaciones para  $\mathbb{W}^{1,p}(U)$ ,  $1 \leq p < N$ ). *Sea  $U$  un subconjunto acotado y cerrado de  $\mathbb{R}^N$  y supongamos que  $\partial U$  es  $C^1$ . Asumiendo que  $1 \leq p < N$  y  $u \in \mathbb{W}^{1,p}(U)$ , entonces  $u \in \mathcal{L}^{p^*}$  con la estimación*

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{\mathbb{W}^{1,p}(U)}. \quad (1.18)$$

Donde  $C$  depende solamente de  $p$ ,  $N$  y  $U$ .

**TEOREMA 5** (Desigualdad General de Sobolev). *Sea  $U$  un subconjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^N$ , con una frontera  $C^1$ . Asumamos que  $u \in \mathbb{W}^{k,p}(U)$ , tenemos dos casos:*

i) Si  $k < \frac{N}{p}$ , entonces  $u \in \mathcal{L}^q(U)$ , donde  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{N}$  con la estimación

$$\|u\|_{\mathcal{L}^q(U)} \leq C \|u\|_{\mathbb{W}^{k,p}(U)}. \quad (1.19)$$

Con  $C$  una constante que depende de  $k$ ,  $q$ ,  $N$  y  $U$ ; en otras palabras  $\mathbb{W}^{k,p}(U) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(U)$ .

ii) Si  $k > \frac{N}{p}$ , entonces  $u \in C^{k - [\frac{N}{q}] - 1, \gamma}(\bar{U})$ , donde

$$\gamma = \begin{cases} k - [\frac{N}{q}] - 1 & : \text{ si } \frac{N}{q} \notin \mathbb{Z}, \\ \text{ si } \frac{N}{p} \in \mathbb{Z} & : \Rightarrow 0 < \gamma < 1. \end{cases}$$

con la estimación:

$$\|u\|_{C^{k - [\frac{N}{q}] - 1, \gamma}(\bar{U})} \leq C \|u\|_{\mathbb{W}^{k,p}(U)}. \quad (1.20)$$

al igual que el caso i)  $C$  es una constante y se tiene la siguiente inmersión de  $\mathbb{W}^{k,p}(U) \hookrightarrow C^{k - [\frac{N}{q}] - 1}(\bar{U})$ .

**COROLARIO 1.** *Sea  $C_{b,u}(\bar{I}, \mathbb{X})$  el espacio de Banach de las funciones uniformemente continuas y acotadas que van de  $\bar{I} \rightarrow \mathbb{X}$ , donde  $\bar{I}$  es la cerradura de  $I$ , entonces se tiene el siguiente encaje:*

$$\mathbb{W}^{1,1}(I, \mathbb{X}) \hookrightarrow C_{b,u}(\bar{I}, \mathbb{X}).$$

**TEOREMA 6.** *Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{X})$ , entonces se tienen las siguientes propiedades*

i)  $f \in \mathbb{W}^{1,p}(I, \mathbb{X})$ ,

ii)  $\exists g \in \mathcal{L}^p(I, \mathbb{X})$  tal que  $f(t) = f(s) + \int_s^t g(\sigma) d\sigma$  para a.a.,  $t \in I$ .

iii)  $f$  es absolutamente débil continua y  $f'$ , en casi todo punto y está en  $\mathcal{L}^p(I, \mathbb{X})$  con  $\mathbb{X}$  un espacio topológico.

Cerramos esta primera sección con la siguiente definición

**DEFINICIÓN 8.** *Los espacios  $\mathbb{W}^{-k,p}(U)$  son los espacios duales a  $\mathbb{W}^{k,p}(U)$ .*

**COMENTARIO 3.** *Sean  $u \in \mathbb{H}^m(U)$  y  $v \in \mathcal{L}^2(U)$ , entonces podemos definir un producto escalar (usaremos la notación  $\langle, \rangle$ ) mediante la siguiente ecuación*

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^m(U), \mathbb{H}^{-1}(U)} = \operatorname{Re} \int_U u(x) \overline{v(x)} dx \quad (1.21)$$

de aquí se deduce la siguiente desigualdad:

$$\|u(x)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \|u(x)\|_{\mathbb{H}^m(U)} \|u(x)\|_{\mathbb{H}^{-1}(U)} \quad (1.22)$$

En general no se identifica a  $\mathbb{H}^m(U)$  con  $\mathbb{H}^{-m}(U)$ , pero  $\mathcal{L}^2(U) \subset \mathbb{H}^{-m}(U)$ .

## 1.2. Espacios de Schwartz

Definamos a  $C(\mathbb{R}^N)$  como el espacio de las funciones continuas de  $\mathbb{R}^N$  a  $\mathbb{R}$  y a  $C^*(\mathbb{R}^N)$  como su espacio dual.

**DEFINICIÓN 9** (Delta de Dirac). *Sea  $\delta_\varepsilon$  una funcional que pertenece a  $C^*(\mathbb{R}^N)$  y  $g \in C(\mathbb{R}^N)$ , tal que cumple la funcional la siguiente propiedad:*

$$\delta_\varepsilon(g) = g(\varepsilon), \quad (1.23)$$

con  $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ . Es decir la funcional  $\delta_\varepsilon$  hace que se evalúe el valor  $\varepsilon$  en la función  $g$ , a esta funcional es lo que llamamos delta de Dirac.

**COMENTARIO 4.**  *$g(\varepsilon)$  es acotada, ello se deduce de la siguiente desigualdad.*

$$|g(\varepsilon)| \leq \sup |g(x)| = \|g(x)\|_{C(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.24)$$

Sea  $C_N(\mathbb{R}^N)$  el espacio de todas las funciones continuas sobre  $\mathbb{R}^N$  que tiene norma finita y está se define:

$$\|g\|_{C_N(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left\| \frac{g(x)}{(1 + |x|^N)} \right\|. \quad (1.25)$$

Denotando al espacio dual de  $C_N(\mathbb{R}^N)$  como  $C_N^*(\mathbb{R}^N)$ .

Antes de seguir necesitaremos las siguientes definiciones y teoremas, que serán enunciados sin demostración.



**DEFINICIÓN 10.** Sea  $s \in \mathbb{X}^*$  y  $u \in \mathbb{X}$ , definimos a  $s[u] = \langle s, u \rangle$  como el producto escalar, se usará de aquí en adelante la notación  $\langle, \rangle$ .

**TEOREMA 7.** Sea  $\mathbb{X}$  un espacio vectorial lineal normado, y  $\mathbb{X}^*$  su espacio dual,  $\|u\|$  es la norma de  $\mathbb{X}$ , entonces la norma de  $\|s\|$ , i.e. la norma del espacio dual sera:

$$\|s\| = \sup_{0 \neq u \in \mathbb{X}} \frac{|\langle s, u \rangle|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} |\langle s, u \rangle|. \quad (1.26)$$

**TEOREMA 8.** El espacio  $\mathbb{X}^*$  siempre es un espacio de Banach, independiente de si  $\mathbb{X}$  lo es.

La demostración se puede consultar en [16].

**TEOREMA 9.** La  $\delta_\varepsilon$ , delta de Dirac, pertenece a  $C_N^*(\mathbb{R}^N)$ .

**Demostración**

Sea  $|\delta_\varepsilon(g)| = \sup_{\varepsilon \neq 0} \frac{|\langle \delta_\varepsilon(g), \varepsilon \rangle|}{\|\varepsilon\|} = \frac{|\langle g(\varepsilon), \varepsilon \rangle|}{\|\varepsilon\|} \leq \frac{\|g(\varepsilon)\| \|\varepsilon\|}{\|\varepsilon\|} = |g(\varepsilon)| = (1 + |\varepsilon|)^N \left| \frac{g(\varepsilon)}{(1+|\varepsilon|^N)} \right| \leq ((1 + |\varepsilon|)^N) \|g\|_{C_N(\mathbb{R}^N)}$ . **q. e. d.**

**DEFINICIÓN 11** (Espacios de Schwartz). Llamaremos  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  al espacio de todas las funciones  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$  que junto con sus derivadas tienden a cero cuando el límite tiende al infinito y lo hacen más rápido que cualquier potencia de  $|x|$ . Más precisamente, para cualquier  $N \in \mathbb{N}$  y cualquier multi-índice  $\alpha$  se define la siguiente norma.

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |\varepsilon|)^N |\partial^\alpha f(x)|, \quad (1.27)$$

entonces podemos ver a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  equipado con la norma (1.27) de la siguiente forma:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mid \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \forall N, \alpha\}. \quad (1.28)$$

Al espacio dual de las funciones de clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  lo llamaremos Espacio de Distribuciones Temperadas y la letra  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  lo designará.

**DEFINICIÓN 12** (Transformada de Fourier para Distribuciones Temperadas). Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ , a  $\mathfrak{F}$  la transformada de Fourier de cualquier  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ . Definimos la aplicación de la transformada de Fourier sobre cualquiera de estas funcionales como:

$$\mathfrak{F}T(\varphi) := T\mathfrak{F}(\varphi). \quad (1.29)$$

Como ejemplo<sup>2</sup> a la definición 8 tomemos a la delta de Dirac ( $\delta_\varepsilon$ ) y calculemos su transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\delta_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \delta_\varepsilon(\varphi) e^{-ip \cdot x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} e^{-i\varepsilon \cdot x}. \quad (1.30)$$

**DEFINICIÓN 13** (Derivada Generalizada). *Tomemos  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ,  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ , y  $D^\alpha$  la derivada, con  $\alpha$  el multi-índice entonces*

$$D^\alpha T(\varphi) := (-1)^\alpha T(D^\alpha \varphi). \quad (1.31)$$

El siguiente teorema nos esclarece la preservación de una de las propiedades de la derivada de la transformada de Fourier, que ahora actúa en el espacio  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ .

**TEOREMA 10.** *Sea  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  y  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ , entonces al aplicar la transformada de Fourier a la derivada de  $T(\varphi)$  se obtiene:*

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial T(\varphi)}{\partial x_j}\right) = ix_j \mathfrak{F}(T(\varphi)). \quad (1.32)$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left(\frac{\partial T(\varphi)}{\partial x_j}\right) &= \mathfrak{F}((-1)T \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) = -T \mathfrak{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \\ &= -T(-ix_j \mathfrak{F}(\varphi)) = ix_j T \mathfrak{F}(\varphi) = ix_j \mathfrak{F}(T(\varphi)). \end{aligned} \quad (1.33)$$

q. e. d.

Nos hallamos en condiciones de definir los espacios  $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$  y  $\mathbb{H}^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ , son conocidos como Espacios de Energía.

**DEFINICIÓN 14.** *Sea  $s \in \mathbb{R}$ , entonces definimos los espacios*

$$\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \mid (1 + |\varepsilon|^2)^{\frac{s}{2}} \mathfrak{F}u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \quad (1.34)$$

---

<sup>2</sup>El resultado al que a continuación se llega ha motivado que informalmente se diga que la transformada de Fourier de una constante es la delta de Dirac, pero la definición de la transformada de Fourier no admite la existencia de la transformada de Fourier para la función constante, pues la función constante no es integrable en  $\mathbb{R}^N$ .

equipados con la norma  $\|u\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)} = \|(1 + |\varepsilon|^2)^{\frac{s}{2}} \mathfrak{F}u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)}$ . Se puede definir de forma más general los espacios

$$\mathbb{H}^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \mid \mathfrak{F}^{-1}(1 + |\varepsilon|^2)^{\frac{s}{2}} \mathfrak{F}u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)\}, \quad (1.35)$$

equipados con norma igual a:  $\|u\|_{\mathbb{H}^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |\varepsilon|^2)^{\frac{s}{2}} \mathfrak{F}u\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}$ .

Los espacios  $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$  y  $\mathbb{H}^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  son espacios de Hilbert, la demostración no es trivial, por lo que sólo vamos a demostrar que los  $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$  lo son.

**LEMA 2** (Plancharel). *Sea  $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , la transformada de Fourier de  $u$  pertenece a  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$  y además se tiene la siguiente igualdad:*

$$\|\mathfrak{F}u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.36)$$

**COROLARIO 2** (Plancharel). *Sea  $f \in \mathbb{W}^{s,2}(\mathbb{R}^N)$ , con  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ . Dado que  $D^\alpha T f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , para toda  $|\alpha| \leq s$  entonces*

$$\|\mathfrak{F}D^\alpha T f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)} = \|D^\alpha T f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.37)$$

Se procederá a demostrar que la norma del espacio  $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$  es equivalente a la norma definida en los espacios de Sobolev  $\mathbb{W}^{k,2}(\mathbb{R}^N)$ , con ello la conclusión es inmediata de que los espacios  $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$  son espacios de Hilbert. Para simplificar la notación se usará  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^2$ , lo mismo para los espacios de Sobolev  $\mathbb{W}^{k,2}(\mathbb{R}^N) = \mathbb{W}$ .

Para la prueba emplearemos:

$\|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|(ik)^\alpha \mathfrak{F}u(k)\|_{\mathcal{L}^2}^2$ . Hagamos un cambio de variable:  $\beta = ik$  entonces  $|\beta| = k$ . Ahora demostremos que  $|\beta|^{|\alpha|} \leq C(1 + |\beta|^2)^{\frac{k}{2}}$  con  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , analizaremos dos casos  $|\beta| \leq 1$  y  $|\beta| > 1$ .

caso  $|\beta| \leq 1$

$$|\beta|^{|\alpha|} \leq |\beta| \leq 1 \leq 1 + |\beta^2|^{\frac{k}{2}} \leq (1 + |\beta^2|)^{\frac{k}{2}}. \quad (1.38)$$

caso  $|\beta| > 1$

$$|\beta|^{|\alpha|} \leq (|\beta^2|)^{\frac{k}{2}} \leq 1 + (|\beta^2|)^{\frac{k}{2}} \leq (1 + |\beta^2|)^{\frac{k}{2}}. \quad (1.39)$$

Así,

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|\beta^{|\alpha|} \mathfrak{F}u\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|(1 + |\beta^2|)^{\frac{k}{2}} \mathfrak{F}u\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq c \|(1 + k^2)^{\frac{k}{2}} \mathfrak{F}u\|_{\mathcal{L}^2}^2. \quad (1.40)$$

Utilizando el hecho de que

$$\|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^p} = \|(1 + q^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^p}, \quad (1.41)$$

como consecuencia del teorema de Plancharel y aplicándolo para  $p = 2$ , se tiene:

$$\|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}^2 \leq c\|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2. \quad (1.42)$$

Falta exhibir que  $\|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq c\|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}^2$ . Nuevamente aplicando el teorema de Plancharel obtenemos la igualdad:

$$\|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \|(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2. \quad (1.43)$$

Tomando la definición de norma de  $\mathcal{L}^2$

$$\|(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |q|^2)^k |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq. \quad (1.44)$$

Consideremos los casos  $|q| \leq 1$  y  $|q| > 1$ .

El caso  $|q| \leq 1$

$$|q| \leq 1 \leq (1 + |q|^2)^k \leq 2^k, \quad (1.45)$$

multiplicando a (1.45) por  $|\mathfrak{F}u(q)|^2$  e integrando sobre todo  $\mathbb{R}^N$  con respecto a  $q$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |q|^2)^k |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq \leq \int_{\mathbb{R}^N} 2^k |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq. \quad (1.46)$$

el otro caso:  $|q| > 1$

$$|q| > 1 \implies |q| < (1 + q^2)^k < (q^2 + q^2)^k < 2^k q^{2k},$$

*mutatis mutandis* como en el caso anterior: tomamos a (1.46) por  $|\mathfrak{F}u(q)|^2$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |q|^2)^k |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq < \int_{\mathbb{R}^N} 2^k q^{2k} |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq. \quad (1.47)$$

como  $\|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| |q|^{|\alpha|} \mathfrak{F}u(k) \|_{\mathcal{L}^2}$  por definición se tiene:

$$\sum \int |q|^{2|\alpha|} |\mathfrak{F}u(k)|^2 dq = \int \sum |q|^{2|\alpha|} |\mathfrak{F}u(k)|^2 dq.$$

De (1.44) para  $|q| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}}\mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} 2^k |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq \leq \\ c \int_{\mathbb{R}^N} |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq &\leq c \int_{\mathbb{R}^N} \sum |q|^{2k} |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq = c\|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Si  $|q| > 1$ :

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}} \mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} 2^k q^{2k} |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq \leq \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^N} \sum |q|^{2k} |\mathfrak{F}u(q)|^2 dq = c \|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Por lo tanto

$$\|\mathfrak{F}^{-1}(1 + |q|^2)^{\frac{k}{2}} \mathfrak{F}u(q)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq c \|u\|_{\mathbb{W}^{k,2}}.$$

q. e. d.

### 1.3. Semigrupos

Introduzcamos las siguientes definiciones:  $\mathbb{B}(\mathbb{X}) = \{\hat{A} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X} \mid \hat{A} \text{ es un operador acotado y que posee norma}\}$ ,  $\mathbb{X}$  es un espacio de Banach. Ahora definamos la siguiente ecuación:

$$\frac{du(t)}{dt} = \hat{A}u(t). \quad (1.50)$$

Donde  $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$  y  $u \in \mathbb{X}$ . Observándola uno se pregunta si podría ser su solución parecida a la de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, esta intuición es respaldada por el siguiente teorema:

**TEOREMA 11.** *Sea  $\hat{A} \in \mathbb{B}(X)$  y sea  $u \in \mathbb{X}$ , entonces si  $t \in \mathbb{R}^+$*

$$e^{t\hat{A}}u_o = u(t), \quad (1.51)$$

*es solución a la ecuación:*

$$\frac{du(t)}{dt} = \hat{A}u(t), \quad u(0) = u_o, \quad (1.52)$$

*y es única.*

**Demostración**

Ésta se hará en cuatro etapas,

1° Definiremos a  $e^{t\hat{A}} = \sum_k (\frac{1}{k!}) t^k \hat{A}^k$  y demostraremos que la serie es convergente.

2° La siguiente igualdad:  $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$

3°  $u(t)$  es solución.

4° Demostración de la unicidad.

Una vez descrito el proceder comencemos la demostración.

1° Sea  $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$  y con su norma construyamos la siguiente serie, así se tiene:

$$\sum \frac{1}{k!} |t|^k \|\hat{A}\|^k. \quad (1.53)$$

Esta serie está conformada por escalares, por lo que se puede usar criterios de convergencia de series de números reales y es mediante el criterio de la razón que se demostrará su convergencia:

$$\frac{\frac{1}{(k+1)!} |t|^{k+1} \|\hat{A}\|^{k+1}}{\frac{1}{k!} |t|^k \|\hat{A}\|^k} = \frac{1}{(k+1)} |t| \|\hat{A}\|, \quad (1.54)$$

ahora tomando el límite del resultado previo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)} |t| \|\hat{A}\| \rightarrow 0, \quad (1.55)$$

concluyendo que es convergente.

Tomemos la norma de la serie original

$$\left\| \sum_k \left(\frac{1}{k!}\right) t^k \hat{A}^k \right\|, \quad (1.56)$$

aplicándole la siguiente desigualdad tenemos:

$$\left\| \sum_k \left(\frac{1}{k!}\right) t^k \hat{A}^k \right\| \leq \sum_k \left(\frac{1}{k!}\right) t^k \|\hat{A}^k\| \leq \sum_k \left(\frac{1}{k!}\right) t^k \|\hat{A}\|^k < \infty.$$

Con ello demostramos la convergencia de (1.56), concluyendo la demostración del primer punto.

2° Previo a la demostración vamos a introducir el Teorema Binomial: Sean  $\hat{S}$  y  $\hat{T}$  un par de operadores acotados, entonces se tiene:

$$(\hat{S} + \hat{T})^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!}. \quad (1.57)$$

Sea  $e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\hat{A})^n$  y  $\hat{S}$  y  $\hat{T}$  un par de operadores acotados, entonces tomando la suma de los operadores y usando la definición de  $e^{\hat{A}}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
e^{\hat{S}+\hat{T}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\hat{S} + \hat{T})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n! \sum_{j+k=n} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} = \\
&\sum_{j+k=0} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} + \sum_{j+k=1} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} + \sum_{j+k=2} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} + \sum_{j+k=3} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} + \sum_{j+k=4} \frac{\hat{S}^j \hat{T}^k}{j!k!} + \dots, \\
&\hspace{15em} \text{expandiendo} \\
&\frac{\hat{S}^0 \hat{T}^0}{0!0!} + \frac{\hat{S}^1 \hat{T}^0}{1!0!} + \frac{\hat{S}^0 \hat{T}^1}{0!1!} + \frac{\hat{S}^0 \hat{T}^2}{0!2!} + \frac{\hat{S}^2 \hat{T}^0}{2!0!} + \frac{\hat{S}^1 \hat{T}^1}{1!1!} + \frac{\hat{S}^3 \hat{T}^0}{3!0!} + \frac{\hat{S}^2 \hat{T}^1}{2!1!} + \\
&\hspace{10em} \frac{\hat{S}^1 \hat{T}^2}{1!2!} + \frac{\hat{S}^0 \hat{T}^3}{0!3!} + \frac{\hat{S}^1 \hat{T}^2}{1!2!} + \frac{\hat{S}^2 \hat{T}^1}{2!1!} + \frac{\hat{S}^3 \hat{T}^0}{3!0!} + \dots, \\
&\hspace{15em} \text{agrupando} \\
&\frac{\hat{T}}{0!} \left( \frac{\hat{S}^0}{0!} + \frac{\hat{S}^1}{1!} + \frac{\hat{S}^2}{2!} + \frac{\hat{S}^3}{3!} + \dots \right) + \frac{\hat{T}^1}{1!} \left( \frac{\hat{S}^0}{0!} + \frac{\hat{S}^1}{1!} + \frac{\hat{S}^2}{2!} + \frac{\hat{S}^3}{3!} + \dots \right) + \\
&\hspace{10em} \frac{\hat{T}^2}{2!} \left( \frac{\hat{S}^0}{0!} + \frac{\hat{S}^1}{1!} + \frac{\hat{S}^2}{2!} + \frac{\hat{S}^3}{3!} + \dots \right) + \dots, \\
&\left( \frac{\hat{T}^0}{0!} + \frac{\hat{T}^1}{1!} + \frac{\hat{T}^2}{2!} + \frac{\hat{T}^3}{3!} + \dots \right) \left( \frac{\hat{S}^0}{0!} + \frac{\hat{S}^1}{1!} + \frac{\hat{S}^2}{2!} + \frac{\hat{S}^3}{3!} + \dots \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{T}^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{S}^j}{j!}.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

q. e. d.

Habiendo demostrado la igualdad ( $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$ ) y tomando la norma a ambas partes de la igualdad y usando (1.53) se llega a lo siguiente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [e^{\|\hat{A}\|\hat{B}\|} - e^{\|\hat{A}\|+\|\hat{B}\|}] \rightarrow 0. \tag{1.59}$$

$$3^\circ \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{e^{h\hat{A}-\mathcal{J}}}{h} - \hat{A} \right\| \rightarrow 0.$$

$$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)\hat{A}} - e^{t\hat{A}}}{h} u_0 = \frac{e^{t\hat{A}} e^{h\hat{A}} - e^{t\hat{A}}}{h} u_0 = \frac{(e^{h\hat{A}} - \mathcal{J})}{h} e^{t\hat{A}} u_0$$

tomemos la diferencia

$$\begin{aligned} \frac{(e^{h\hat{A}} - \mathfrak{I})}{h} e^{t\hat{A}} u_0 - \hat{A}u(t) &= \frac{(e^{h\hat{A}} - \mathfrak{I})}{h} u(t) - \hat{A}u(t) = \\ \left[ \frac{(e^{h\hat{A}} - \mathfrak{I})}{h} - \hat{A} \right] u(t) &= \left[ \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{k!}) h^k \hat{A}^k - \mathfrak{I} - \hat{A}}{h} \right] u(t) = \\ \left[ \frac{\mathfrak{I} + \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k!}) h^k \hat{A}^k - \mathfrak{I} - \hat{A}}{h} \right] &= \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k!}) h^{k-1} \hat{A}^k - \hat{A} \right] u(t). \end{aligned} \quad (1.60)$$

tomando la norma de (1.60) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k!}) |h|^{k-1} \hat{A}^k - \hat{A} \right\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k!}) |h|^{k-1} \hat{A}^k \right\| - \|\hat{A}\| = \\ \| |h|^{-1} |h|^{1-1} \hat{A} \| + \sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{k!}) |h|^{k-1} \|\hat{A}\|^k &- \|\hat{A}\| = \sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{k!}) |h|^{k-1} \|\hat{A}\|^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.61)$$

con la siguiente desigualdad queda demostrada esta tercera parte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{(e^{h\hat{A}} - \mathfrak{I})}{h} - \hat{A} \right\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n (\frac{1}{k!}) |h|^{k-1} \|\hat{A}\|^k \rightarrow 0. \quad (1.62)$$

4° Unicidad

Supongamos que existe otra solución de la ecuación y llamémosla  $v(t)$ . Como  $v(t)$  y  $u(t)$  son soluciones, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} - \frac{dv(t)}{dt} &= 0, \\ \hat{A}u(t) - \hat{A}v(t) &= \hat{A}[u(t) - v(t)] = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

como esto es válido para toda  $\hat{A} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$  inferimos que  $u(t) = v(t)$ .

q.e.d.

Definamos ahora el concepto de semigrupo.

**DEFINICIÓN 15.** Una familia uniparamétrica  $\{\hat{E}_t\}_{t \geq 0}$  de operadores en  $\mathbb{B}(\mathbb{X})$  es llamado semigrupo si y solo si:

- $\hat{E}_t \hat{E}_s = \hat{E}_{s+t}$  si  $s \geq 0$  y  $t \geq 0$ ,



- $\hat{E}_0 = \mathfrak{J}$ .

DEFINICIÓN 16.  $\hat{E}_t$  es fuertemente continuo si

$$\hat{E}_t x \quad (1.64)$$

es continuo en  $t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{X}$ .

DEFINICIÓN 17 (Generador Infinitesimal). Sea  $\hat{A}$  un operador, éste será un generador infinitesimal de  $\{\hat{E}_t\}$  si es cerrado,  $\text{Dom}(\hat{A})$  es denso en  $\mathbb{X}$ , y consiste de aquellas  $x \in \mathbb{X}$  para las cuales existen:

$$\frac{d\hat{E}_t x}{dt} = \hat{A}\hat{E}_t x, \quad t \geq 0 \quad (1.65)$$

y

$$\hat{A}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \mathfrak{J}]x. \quad (1.66)$$

TEOREMA 12. Diferentes generadores infinitesimales generan diferentes semigrupos.

**Demostración**

Supongamos que  $\hat{A}$  genera a dos semigrupos  $\{\hat{E}_t\}$  y  $\{\hat{K}_t\}$  tal que  $\{\hat{E}_t\} \neq \{\hat{K}_t\}$ . Por definición de generador  $\hat{A} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \mathfrak{J}]$  y por otro lado  $\hat{A} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{K}_t - \mathfrak{J}]$ , Pero  $\hat{A} - \hat{A} = 0$ , entonces se tiene, usando la definición

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \mathfrak{J}] - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{K}_t - \mathfrak{J}] &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \mathfrak{J} - \hat{K}_t + \mathfrak{J}] &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \hat{K}_t] &= 0. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Como el límite existe entonces se concluye que  $\hat{E}_t = \hat{K}_t$ .

q. e. d.

DEFINICIÓN 18. Un semigrupo  $\{\hat{E}_t\}$  de operadores lineales acotados en  $\mathbb{B}(\mathbb{X})$  es fuertemente continuo si:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \hat{E}_t x = x \quad \forall x \in \mathbb{B}(\mathbb{X}). \quad (1.68)$$

Y designaremos a este semigrupo como  $C_o$ .

Basandonos en la definición anterior podemos establecer la propiedad conmutativa entre el semigrupo  $\hat{E}_t$  con su generador infinitesimal  $\hat{A}$ ,

**TEOREMA 13.** *Sea  $\{\hat{E}_t\}$  un semigrupo de operadores acotados, fuertemente continuo, entonces*

$$\frac{d\hat{E}_t x}{dt} = \hat{A}\hat{E}_t x = \hat{E}_t \hat{A}x. \quad (1.69)$$

**Demostración**

Se hará en dos partes: Primera parte

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{E}_t x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \mathfrak{J}] \hat{E}_t x = \\ & \hat{E}_t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t - \mathfrak{J}] x = \\ & \hat{E}_t \hat{A}x. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Segunda parte:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{E}_t x}{dt} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_{(t+h)} x - \hat{E}_t x] = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t \hat{E}_h x - \hat{E}_t x] = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_t [\hat{E}_h - \mathfrak{J}]] x = \\ & \hat{E}_t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\hat{E}_h - \mathfrak{J}] x = \\ & \hat{E}_t \hat{A}x. \end{aligned} \quad (1.71)$$

y por la primera parte de la demostración.

**q.e.d.**

La duda es si  $\hat{A}$  siempre genera a un cierto tipo de semigrupos y por el teorema Hille-Yosida sabemos que es verdad.

**TEOREMA 14** (Teorema Hille-Yosida). *Todo semigrupo uniparamétrico fuertemente continuo  $\hat{E}_t$  de operadores en  $\mathbb{B}(\mathbb{X})$  tiene un generador infinitesimal.*

Una transformación puede poseer una inversa, por lo que si el semigrupo de transformaciones acepta la inversa en todo el espacio donde está definido, el semigrupo extiende su estructura a un grupo, fijando a la inversa como  $\hat{T}_t^{-1} = \hat{T}_{-t}$  en resumen:

**DEFINICIÓN 19.** Sea  $U(t)$  un grupo uniparamétrico que cumple  $\|U(t)\| \leq 1$ , a éste se le llamará grupo de contracciones. En particular si  $\{U(t)\}$  es un semigrupo, será un semigrupo de contracciones.

**DEFINICIÓN 20.** Sea  $\mathbb{X}^*$  el dual del espacio  $\mathbb{X}$  y tomando el producto interno  $\langle x^*, x \rangle$ , donde  $x \in \mathbb{X}$  y  $x^* \in \mathbb{X}^*$ , éste producto interno es para cada  $x \in \mathbb{X}$ , podemos definir al conjunto  $F(x)$  como:

$$F(x) = \{x^* \in \mathbb{X}^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x\| = \|x^*\|^2\}. \quad (1.72)$$

**DEFINICIÓN 21.** Un operador lineal  $\hat{A}$  es disipativo si para cada  $x \in \text{Dom}(\hat{A})$  hay una  $x^* \in F(x)$  tal que  $\text{Re}\langle \hat{A}x, x \rangle \leq 0$ .

**TEOREMA 15.** Sea  $\hat{A}$  un operador lineal cerrado y densamente definido. Si  $\hat{A}$  y  $\hat{A}^*$  son disipativos, entonces  $\hat{A}$  es un generador infinitesimal del semigrupo  $C_o$  de contracciones en  $\mathbb{B}(\mathbb{X})$ .

La teoría es muy rica, para mayor información se puede consultar [12], también [16] es una excelente introducción al tema.

## 1.4. Miscelanea matemática

Comenzaremos con el lema de Gronwall, ya que varias veces lo vamos a usar.

**LEMA 3** (Lema de Gronwall, forma diferencial). Sea  $\eta(t)$  una función positiva definida, absolutamente continua en el intervalo  $[0, T]$ , que satisface en casi todo punto de  $t$  a la desigualdad diferencial:

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \quad (1.73)$$

donde  $\phi$  y  $\psi$  son positivas definidas y que se pueden sumar en el intervalo  $[0, T]$ , entonces se tiene:

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} [\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds], \quad (1.74)$$

para toda  $t \in [0, T]$

En particular si  $\eta' \leq \phi\eta$  en  $[0, T]$  y  $\eta(0) = 0$ ,

$$\eta \equiv 0 \quad \text{en} \quad [0, T]. \quad (1.75)$$

**LEMA 4** (Lema de Mosser). *Sea  $G$  una función suave, que  $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , tal que  $G(0) = 0$ . Entonces existe una función  $c : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , tal que para toda  $u \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$  se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\|G(u)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)} \leq c(\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)})\|u\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)} \quad (1.76)$$

**TEOREMA 16** (Fórmula de integración por partes). *Sean  $u, v$  dos funciones que son  $C^1(\bar{U})$ , entonces se cumple:*

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = - \int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial U} uv \nu^i dS, \quad (1.77)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ .

# Capítulo 2

## Espacios de Evolución

### 2.1. El grupo de Schrödinger en espacios del tipo $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$

Comenzaremos este capítulo estudiando a la familia  $U_t = e^{-i\Delta t}$ , donde  $\Delta$  es el operador laplaciano. El operador laplaciano no está acotado, pero siempre lo podemos hacer auto adjunto, esto implica que  $e^{-i\Delta t}$  se defina a través del calculo funcional. El cálculo funcional queda fuera del marco de esta tesis, por lo cual no ahodaremos en sus resultados.

La familia de  $U_t$  forma un grupo unitario, que se conoce como el Grupo de Schrödinger. En la siguiente proposición demostraremos este hecho.

**PROPOSICIÓN 1.** *Sea  $U_t = e^{i\Delta t}$  donde  $t \in \mathbb{R}$  y  $\Delta$  el laplaciano en  $\mathbb{R}^N$ ,  $U_t$  forma un grupo.*

**Demostración**

Demostraremos que  $U_t$  forma un semigrupo y que éste posee inverso, por lo que forma un grupo.

1) Por demostrar que  $U_t U_s = U_{t+s}$

$$U_t U_s = e^{i\Delta t} e^{i\Delta s} = e^{i\Delta(t+s)} = U_{t+s}$$

2) Por demostrar que  $U_0 = \mathfrak{I}$

$$U_t U_0 = e^{i\Delta t} e^{i\Delta 0} = e^{i\Delta(t+0)} = e^{i\Delta t} = U_t \text{ De aquí se infiere que } U_0 = \mathfrak{I}$$

Mostraremos que tiene inverso, *i.e.*  $U_{-t} = U_t^{-1}$

$$U_t U_{-t} = e^{i\Delta t} e^{i\Delta(-t)} = e^{i\Delta(t-t)} = e^{i\Delta 0} = \mathfrak{I}$$

$$U_{-t} U_t = e^{i\Delta(-t)} e^{i\Delta t} = e^{i\Delta(-t+t)} = e^{i\Delta 0} = \mathfrak{I}$$

q.e.d.

**DEFINICIÓN 22.** Sea  $I = [0, T]$ , que incluso puede ser  $[0, \infty)$ . Sea  $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , entonces definimos a los siguientes operadores como:

$$(\hat{\Gamma}\phi)(t) = U_t\phi, \quad t \in I. \quad (2.1)$$

$$(\hat{G}f)(t) = \int_0^t U_{(t-\tau)}f(\tau)d\tau. \quad (2.2)$$

Los siguientes espacios son con los que vamos a trabajar y por ello los vamos a definir e identificaremos a  $\mathbb{H}^k = \mathbb{W}^{k,2}$ :

**DEFINICIÓN 23.** Sea  $C(I, \mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N))$  el conjunto de las funciones continuas que van del intervalo  $I$  al espacio  $\mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N)$ .

El espacio  $C^1(I, \mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N))$  es el conjunto de las funciones continuas cuyas derivadas también son continuas y que van del intervalo  $I$  al espacio  $\mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N)$ .

El espacio  $AC(I, \mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N))$  es el conjunto de las funciones absolutamente continuas, que van del intervalo  $I$  al espacio  $\mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N)$

Los siguientes lemas nos indican la importancia de los operadores (2.1) y (2.2).

**LEMA 5.**  $\hat{\Gamma}$  es un operador acotado de  $\mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N)$  a  $C(I, \mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(I, \mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N))$  y satisface a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Gamma}\phi = i\Delta\hat{\Gamma}\phi = i\hat{\Gamma}\Delta\phi. \quad (2.3)$$

**LEMA 6.** Sea  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N))$ , entonces  $\hat{G}f \in C(I, \mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N)) \cap AC(I, \mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N))$  y satisface:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{G}f = i\Delta\hat{G}f + f = i\hat{G}\Delta f + f. \quad (2.4)$$

$AC$  la clase de funciones absolutamente continuas.

**LEMA 7.** Sea  $v, f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{H}^k(\mathbb{R}^N))$  asumamos que  $v$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}v = i\Delta v + f. \quad (2.5)$$

entonces  $v \in AC(I, \mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N))$  tal que  $v(0) \in \mathbb{H}^{k-2}(\mathbb{R}^N)$  existe, con  $v = \hat{\Gamma}v(0) + \hat{G}f$ .

Consideremos (y definiremos) los espacios  $\mathcal{L}^p$ , que además poseen la medida de Lebesgue, así que:

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} < \infty \text{ y } 1 < p < \infty\},$$

$$\text{donde } \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} = \sqrt[p]{\int_{\mathbb{R}^N} \|f\|^p dx}. \quad (2.6)$$

Estamos interesados en estudiar la dinámica de un sistema, por lo que vamos a trabajar con funciones que evolucionan en el tiempo, esto nos lleva a usar espacios normados tipo (2.6), y vamos a construir una “composición” de dichos espacios con una norma más sofisticada, así nuestros espacios serán:

**DEFINICIÓN 24.** Sean  $1 < p < \infty$  y  $1 \leq r \leq \infty$ . Definimos los espacios  $\mathcal{L}^{p,r}$  de la siguiente forma

$$\mathcal{L}^{p,r} = \mathcal{L}^r(I; \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)) := \{f(t, x) : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{\mathcal{L}^{p,r}} < \infty\}. \quad (2.7)$$

La norma de estos espacios está definida como

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p,r}} = \| \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} \|_{\mathcal{L}^r(I)} = \sqrt[r]{\int_0^T \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)}^r dt}. \quad (2.8)$$

Por las condiciones  $1 < p < \infty$  y  $1 \leq r \leq \infty$  se tiene que  $0 < \frac{1}{p} < 1$  y  $0 \leq \frac{1}{r} \leq 1$ , entonces el punto  $(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}) \in (0, 1) \times [0, 1]$  y denotemos al cuadrado semiabierto  $(0, 1) \times [0, 1]$  como  $\square$ , entonces  $(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}) \in \square$ , entonces podemos renombrar a nuestros espacios  $\mathcal{L}^{p,r}$  como  $\mathcal{L}(P)$ , donde  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r})$ , de este modo la norma  $\mathcal{L}^{p,r} = \mathcal{L}(P) := \| \| \cdot \| \| : P \| \|$ .

**DEFINICIÓN 25.** Sean  $P$  y  $P'$  unos puntos de  $\square$ , decimos que son duales el uno al otro si y sólo si

$$P + P' = (1, 1). \quad (2.9)$$

**COMENTARIO 5.** Notemos que como  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r})$  y  $P' = (\frac{1}{p'}, \frac{1}{r'})$ , entonces está definición sería equivalente a pedir que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad (2.10)$$

pero esto es equivalente a pedir:

$$\frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{2} = \frac{1}{2}, \quad (2.11)$$

que en forma condensada quiere decir

$$\frac{P_1 + P_2}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (2.12)$$

En otras palabras la propiedad de dualidad de  $P$  y  $P'$  es equivalente a pedir que el punto medio del segmento que va de  $P$  a  $P'$  es el centro  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , que es el centro de  $\square$ .

**PROPOSICIÓN 2** (Desigualdad de Hölder). Sean  $P, Q \in \square$ , cuya suma  $P + Q \in \square$  y sea  $f \in \mathcal{L}(P)$  y  $g \in \mathcal{L}(Q)$ , entonces tenemos, para este espacio, la desigualdad

$$|||fg : P + Q||| \leq |||f : P||| |||g : Q|||. \quad (2.13)$$

**Demostración**

Tomemos la parte izquierda de la propuesta a desigualdad y usando las definiciones de  $P$  y  $Q$  se tiene:

$$|||fg : P + Q||| = |||fg : \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{r'}\right)||| = |||fg|||_{\mathcal{L}^{\frac{pq}{q+p}}} |||_{\mathcal{L}^{\frac{rr'}{r+r'}}},$$

Aplicando la desigualdad de Hölder<sup>1</sup> a  $|||fg|||_{\mathcal{L}^{\frac{pq}{q+p}}}$  se tiene:

$$|||fg|||_{\mathcal{L}^{\frac{pq}{q+p}}} |||_{\mathcal{L}^{\frac{rr'}{r+r'}}} \leq |||f|||_{\mathcal{L}^p} |||g|||_{\mathcal{L}^q} |||_{\mathcal{L}^{\frac{rr'}{r+r'}}},$$

ahora aplicamos la desigualdad de Hölder a la parte temporal:

$$|||f|||_{\mathcal{L}^p} |||g|||_{\mathcal{L}^q} |||_{\mathcal{L}^{\frac{rr'}{r+r'}}} \leq |||f|||_{\mathcal{L}^p} |||_{\mathcal{L}^r} |||g|||_{\mathcal{L}^q} |||_{\mathcal{L}^{r'}}.$$

Por lo tanto

$$|||fg : P + Q||| \leq |||f : P||| |||g : Q|||.$$

q. e. d.

<sup>1</sup>La desigualdad de Hölder se define: sean  $1 < p < q < s \leq \infty$ , tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$ , si  $f \in \mathcal{L}^p$  y  $g \in \mathcal{L}^q$  entonces  $fg \in \mathcal{L}^s$  y

$$||fg||_{\mathcal{L}^s} \leq ||f||_{\mathcal{L}^p} ||g||_{\mathcal{L}^q}.$$



PROPOSICIÓN 3. Sea  $f \in \mathcal{L}(P)$  y  $k > 0$ , entonces

$$|||f^k : kP||| = |||f : P|||^k. \quad (2.14)$$

Demostración

$$\begin{aligned} |||f^k : kP||| &= |||f^k : (\frac{k}{p}, \frac{k}{r})||| = |||f^k|||_{\mathcal{L}^{\frac{p}{k}}} |||_{\mathcal{L}^{\frac{r}{k}}} = \left\| \sqrt[k]{\int (f^k)^{\frac{p}{k}} dx} \right\|_{\mathcal{L}^{\frac{r}{k}}} = \\ &= \left\| \left( \sqrt[p]{\int (f)^p dx} \right)^k \right\|_{\mathcal{L}^{\frac{r}{k}}} = |||f|||_{\mathcal{L}^p}^k |||_{\mathcal{L}^{\frac{r}{k}}} = \sqrt[k]{\int_0^T |||f|||_{\mathcal{L}^p}^{\frac{r}{k}} dt} = \left( \sqrt[r]{\int_0^T |||f|||_{\mathcal{L}^p}^r dt} \right)^k = \\ &= |||f : P|||^k. \end{aligned}$$

q. e. d.

PROPOSICIÓN 4. Sea  $\lambda \in [0, 1]$  y  $f$ , entonces

$$|||f : \lambda P + (1 - \lambda)Q||| \leq |||f : P|||^\lambda |||f : Q|||^{1-\lambda}. \quad (2.15)$$

Demostración

$$\begin{aligned} |||f : \lambda P + (1 - \lambda)Q||| &= |||f^\lambda f^{1-\lambda} : \lambda P + (1 - \lambda)Q||| \leq \\ &= |||f^\lambda : \lambda P||| |||f^{1-\lambda} : (1 - \lambda)Q||| = |||f : P|||^\lambda |||f : Q|||^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

q. e. d.

PROPOSICIÓN 5. Si  $R$  está en el segmento  $\overline{PQ}$ , entonces  $\mathcal{L}(P) \cap \mathcal{L}(Q) \subset \mathcal{L}(R) \subset \mathcal{L}(P) + \mathcal{L}(Q)$ .

Demostración

Sea  $f \in \mathcal{L}(P) \cap \mathcal{L}(Q)$ , si  $f \in \mathcal{L}(P) \Rightarrow |||f : P||| \leq \infty$  y  $f \in \mathcal{L}(Q) \Rightarrow |||f : Q||| \leq \infty$ .  $|||f^\lambda : \lambda P + (1 - \lambda)Q||| \leq |||f : P|||^\lambda |||f : Q|||^{1-\lambda} \leq \infty$ ,  $\forall \lambda$  y que  $\lambda$  cumple:  $0 \leq \lambda \leq 1$ , entonces  $|||f : \lambda P + (1 - \lambda)Q||| < \infty$ , si y solo si  $f \in \mathcal{L}(\lambda P + (1 - \lambda)Q)$   $f$  esta en cualquier  $R \subset \lambda P + (1 - \lambda)Q$  esto cualquier  $R$  que este es el segmento  $\overline{PQ}$  si  $f \in \mathcal{L}(R)$  lo cual implica que  $f \in \mathcal{L}(\lambda P + (1 - \lambda)Q)$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$  si  $\lambda = 0$ .  $f \in \mathcal{L}(Q)$  si  $\lambda = 1$   $f \in \mathcal{L}(P) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(P) + \mathcal{L}(Q)$ .

q. e. d

COMENTARIO 6. Entre  $\mathcal{L}(P)$  y  $\mathcal{L}(Q)$  no siempre hay una relación de inclusión entre ambos, al menos que  $T < \infty$  y además  $P$  y  $Q$  estén sobre la misma línea vertical, por ejemplo  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r})$ ,  $Q = (\frac{1}{p}, \frac{1}{s})$ . Si  $r > s$  se tiene:

$$\mathcal{L}(P) \subset \mathcal{L}(Q) \quad \text{con} \quad ||| : Q||| \leq T^\vartheta ||| : P|||, \quad \vartheta = \frac{1}{s} - \frac{1}{r} \quad \vartheta > 0. \quad (2.16)$$

$\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}^{2,\infty}$  i.e.  $B := (\frac{1}{2}, 0)$ ; el incluye  $C(I, \mathcal{L}^2)$  con subespacios cerrados; la notación será  $\overline{\mathcal{L}(B)}$ .

Anunciaremos sin demostración el siguiente lema, el cual nos habla de la densidad de los espacios  $\mathcal{L}(P)$ .

**LEMA 8.** *Sea  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r}) \in \square$ , si  $r < \infty$ , entonces las funciones suaves con soporte compacto son densas en  $\mathcal{L}(P)$ .*

Sea  $l$  un segmento semiabierto que conecta  $B = (\frac{1}{2}, 0)$  y  $C = (\frac{1}{2} - \frac{1}{m}, \frac{1}{2})$ , donde  $l$  es cerrado en  $B$  y abierto en  $C$ . Por lo que la ecuación de  $l$  es:

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{mr} = \frac{1}{2}. \quad (2.17)$$

con  $\frac{1}{2} - \frac{1}{m} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ . La deducción de (2.17) es consecuencia de la geometría analítica, ya que la pendiente es  $M = -\frac{m}{2}$  con  $x = \frac{1}{p}$ ,  $y = \frac{1}{r}$  y tomando al punto  $B$  se obtiene la ecuación mencionada.

Para el caso  $m = 1$ , tenemos que hacer otras consideraciones, pues tenemos que estar dentro del cuadrado, he de ahí que el punto sea  $C(0, \frac{1}{4})$  y el intervalo igual  $0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ , por lo que la ecuación de  $l$  será:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}. \quad (2.18)$$

Sea  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r}) \in l$  su punto dual es  $P' = (\frac{1}{p'}, \frac{1}{r'})$  que está en el segmento dual  $l'$  que se forma conectando a  $B' = (\frac{1}{2}, 1)$  con  $C' = (\frac{1}{2} + \frac{1}{m}, \frac{1}{2})$ . Nuevamente en el caso en que  $m = 1$ , se tendrá el punto  $C' = (1, \frac{3}{4})$ , con su ecuación igual a:

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{p'} = \frac{5}{4}. \quad (2.19)$$

Las rectas  $l$  y  $l'$  son paralelas por lo que al tomar el dual de  $p$  y  $p'$  lo que lo que hacemos es una reflexión, tomando al centro de cuadrado.

Una desigualdad de gran utilidad para poder conocer como es que los operadores  $\Gamma$  y  $G$  operan en estos espacios de evolución  $\mathcal{L}(P)$  es la estimación  $\mathcal{L}^p - \mathcal{L}^{p'}$ , que es un tipo de estimación de Strichartz, dicha estimación es:

$$\|U_t \phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c|t|^{-N(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\phi\|_{\mathcal{L}^{p'}}, \quad t \neq 0. \quad (2.20)$$

Donde  $c$  depende de  $N, p, q$ ; si  $t \neq 0$  y  $p \geq 2$ ,  $U_t$  no envía  $\mathcal{L}^p$  en si mismo para  $p \neq 2$ , sino al espacio adjunto  $\mathcal{L}^{p'}$ , donde  $p' = \frac{p}{p-1}$ . Su demostración será postergada hasta la última parte del capítulo 3.

Si  $t \neq 0$   $U_t \phi \in \mathcal{L}^p$  y es continua con respecto de  $t$ .

En el capítulo anterior se definió lo que era un grupo uniparamétrico, en éste capítulo será de vital importancia estudiar el grupo

$$U_t = e^{i\Delta t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ahora demostraremos que  $U_t$  es un grupo unitario en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ .  $U_t$  nos permite construir soluciones para la Ecuación de Schrödinger no lineal y que no es estacionaria y posee la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i(\Delta u - f(u)), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (2.21)$$

donde  $f(u)$  es una función dada.

Antes de demostrar que  $U_t$  es un operador unitario se anunciará la siguiente definición de los espacios de Hilbert, que será útil en la demostración del teorema.

**DEFINICIÓN 26.** *Sea  $\mathfrak{h}$  un espacio de Hilbert, sea  $\hat{A} \in \mathfrak{h}$  decimos que es simétrico si  $Dom(\hat{A}) = \mathfrak{h}$  (donde  $Dom(\hat{A})$  es la cerradura del dominio) y  $\hat{A} \subset \hat{A}^*$ , i.e.  $\langle \hat{A}x, y \rangle = \langle x, \hat{A}y \rangle \quad \forall x, y \in Dom \hat{A}$ .  $\hat{A}$  es autoadjunto si  $\hat{A} = \hat{A}^*$ . Un operador  $U$  acotado en  $\mathfrak{h}$  se llama unitario si  $U^* = U^{-1}$ .*

**TEOREMA 17.** <sup>2</sup>  $\Delta$  (el laplaciano) es un generador infinitesimal de un grupo  $C_0$  de operadores unitarios en el espacio  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$  si, y sólo si  $i\Delta$  es autoadjunto.

#### Demostración

Dadas las hipótesis del teorema sabemos, por la definición (26), que  $\Delta$  es densamente definido en  $Dom(\Delta)$ . Ahora si tomamos  $-\Delta x$  y jugamos con la definición de generador infinitesimal:

$$\begin{aligned} -\Delta x &= - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} [U_t - \mathfrak{I}]x = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{-t} [U_{t-x} - x] = \\ & \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} [U_t^* x - x] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} [U_t^* - \mathfrak{I}]x = \Delta^* x. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De aquí tenemos que  $\Delta = -\Delta^*$ , por lo tanto  $i\Delta = (i\Delta)^*$ , con ello se llega a que  $i\Delta$  es autoadjunto.

---

<sup>2</sup>Este es un caso particular del Teorema de Stone [12], para su generalización basta reemplazar a  $\Delta$  por  $\hat{A}$  y al espacio  $\mathcal{L}^2$  por un espacio de Hilbert.

Tomando las siguientes igualdades:  $i\Delta = (i\Delta)^* = -i\Delta$ , para toda  $x \in \text{Dom}\Delta$ , se tiene:

$$\langle i\Delta x, x \rangle = \langle x, (i\Delta)^* x \rangle = -\langle x, i\Delta x \rangle = -\overline{\langle i\Delta x, x \rangle}, \quad (2.23)$$

por lo tanto

$$\text{Re}\langle i\Delta x, x \rangle = 0, \quad (2.24)$$

con lo que se concluye que  $i\Delta$  es disipativo.

Como  $i\Delta = -i\Delta$ , entonces  $\text{Re}\langle i\Delta x, x \rangle = 0$  para toda  $x \in \text{Dom}(i\Delta) = \text{Dom}(-i\Delta)$  así que también  $\Delta^*$  es disipativo.

Del teorema (15) se deduce que  $i\Delta$  es un generador infinitesimal para un semigrupo de contracciones.

Ya que se demostró al principio de éste capítulo que  $U_t$  es un grupo, entonces  $i\Delta$  genera a  $U_t$  si  $t \geq 0$  y  $i\Delta^*$  genera a  $U_{-t}$  si  $t < 0$ .

Por otro lado  $U_t^{-1} = U_t$  entonces  $U_t^{-1} = \frac{1}{U_t}$ , tomando la norma y sabiendo que son contracciones, por ser  $C_o$  (ver definición (18) del capítulo 1), así tenemos que  $\|U_t^{-1}\| \leq 1$ , por otro lado  $\|U_t\| \leq 1$  implica que  $\frac{1}{\|U_t\|} \geq 1$ , pero  $\|U_t^{-1}\| = \|\frac{1}{U_t}\| \geq 1$ , por lo tanto  $\|U_t\| = 1$ , de aquí se sigue que  $\text{Ran}(U_t) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ .

q. e. d.

Nota: En los siguientes lemas se hará evidente la importancia del grupo de Schrödinger para la construcción de la solución a la ecuación de Schrödinger no lineal.

**LEMA 9.**  $\hat{\Gamma}$  es un operador acotado de  $\mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}(P)$  con  $P \in l$  y su dual  $\hat{\Gamma}^* : \mathcal{L}(Q) \rightarrow \mathcal{L}^2$  ( $Q \in l'$ ) está acotada también. Las cotas son independientes de  $T$ , y son uniformes para  $P$  ó  $Q$  en subconjuntos compactos de  $l$  ó de  $l'$  respectivamente.

**LEMA 10.** El operador  $\hat{G} : \mathcal{L}(Q) \rightarrow \mathcal{L}(P)$  ( $Q \in l' \in l$ ) es acotado. La cota es independiente de  $T$  y es uniforme para cualquier subconjunto compacto.

La demostración empezará con el lema (10) y después probaremos el lema (9).

**Demostración**

Sea  $P = (\frac{1}{p}, \frac{1}{r}) \in l$  y  $Q = P' = (\frac{1}{p'}, \frac{1}{r'}) \in l'$ , usando la desigualdad (2.20)

$$\begin{aligned} \|(\hat{G}f)(t)\|_{\mathcal{L}^p} &= \left\| \int U(t-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{\mathcal{L}^p} = \\ & \int \|U(t-\tau)f(\tau)\|_{\mathcal{L}^p} d\tau \leq \int c|t-\tau|^{-\frac{2}{r}} \|t-\tau\|_{\mathcal{L}^{p'}} d\tau, \end{aligned} \quad (2.25)$$

con  $N(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ , así que usando la ecuación (2.17) se tiene:  $N(\frac{1}{p} + \frac{2}{Nr} - \frac{1}{p}) = \frac{2N}{Nr} = \frac{2}{r}$ . Ahora  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$  entonces  $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{r}$ , así al tomar  $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{2}{r}$ , y usando la desigualdad de Sobolev

$$|||\hat{G}f : P||| \leq c|||f : P'|||,$$

Para cada  $t \in I$  se tiene la siguiente acotación

$$\begin{aligned} \|(\hat{G}f)(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \left( \sqrt{\int_0^T (\hat{G}f)(t) d\tau} \right)^2 = \int_0^T (\hat{G}f)(\tau)^2 d\tau = \\ &= \int_0^T \int_0^T \langle f(\tau), U(\tau - \tau')f(\tau') \rangle d\tau d\tau' = 2\text{Re} \int_0^T \langle f(t), \hat{G}f(t) \rangle d\tau \leq \\ &2 \int_0^T \|f(\tau)\|_{\mathcal{L}^{p'}} \|(\hat{G}f)(t)\|_{\mathcal{L}^p} d\tau \leq c|||f : P'||||(\hat{G}f)(t) : P||| \leq c|||f : P'|||^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Interpolando se obtiene que  $\hat{G}$  mapea a  $\mathcal{L}(p')$  a cualquier  $(Q)$  con  $Q$  en el segmento  $PB$ . Por la dualidad  $\hat{G}$  ahora mapea  $\mathcal{L}(Q')$  con  $Q' \in l'$  a  $\mathcal{L}(P)$ , y  $P$  está en el segmento  $QC$ . Tomando un cambio de notación de lo anterior,  $\hat{G}$  es acotada de  $\mathcal{L}(Q')$  a cualquier  $\mathcal{L}(P)$  con  $P$  en el segmento  $QB$ . Concluyendo que  $\hat{G}$  está acotada en cualquier  $\mathcal{L}(Q)$  con  $Q \in l'$  a cualquier  $\mathcal{L}(P)$  con  $P \in l$ . La uniformidad de  $c$  i.e la cota es independiente de  $T$  se demuestra por la convexidad entre  $P$  y  $Q$ .

q. e. d.

**Demostración lema (9)**

Sea  $\hat{\Gamma}f = \int_0^T U(-t)f(t)dt$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{\Gamma}^*f\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \int |\hat{\Gamma}^*f|^2 dz = \sqrt{\int \left[ \int_0^T U(-t)f(t)dt \right]^2 dz} = \\ &\sqrt{\int \int_0^T f^2(t)dt} = \sqrt{\int \int \langle f(t), f(t) \rangle dt dt} \leq \\ &c|||f(t) : P'||||f(t) : P'||| = |||f(t) : P'|||^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Por lo tanto

$$\|\hat{\Gamma}^*f\|_{\mathcal{L}^2} \leq c|||f(t) : P'|||.$$

q. e. d.



# Capítulo 3

## Estimaciones de Strichartz

*Cierto, ni la ciencia ni la técnica son neutrales: expresan una visión del mundo y, a la vez, son capaces de modificar esa visión.*

*Octavio Paz*

### 3.1. La ecuación de Schrödinger

En esta primera sección se hará una formulación heurística para la ecuación de Schrödinger. La ecuación de Schrödinger no tiene forma de deducirse, se postula. La heurística que se presentará en esta primera sección tiene su origen en la relación que existe entre los fenómenos cuánticos y el fenómeno ondulatorio.

Algunos de los principales resultados de la mecánica cuántica serán presentados, para alcanzar tal fin, simultáneamente a la deducción, se hará un pequeño bosquejo histórico, para exhibir, aunque breve, el origen de tan fascinantes ideas. Recomendamos para el amante de la historia el libro de Juan Manuel Sánchez Ron [14] y el de Emilio Segrè, el autor cuenta anécdotas personales con algunos de los protagonistas de este capítulo [17].

El 19 de octubre de 1900 Max Planck (1858-1947) presentó en la reunión de la Academia Prusiana una nueva ecuación que ajustaba con los datos experimentales al problema de radiación del cuerpo negro. Rubens, al igual que Lummer y Pringsheim, revelaron la veracidad de tal fórmula al confrontarla con los datos de los experimentos<sup>1</sup>. Planck publicó la ecuación en un artículo

---

<sup>1</sup>Lummer y Pringsheim pensaron que existían diferencias entre la nueva ley de radiación

que tituló “Sobre una mejora de la ecuación de Wien para el espectro”; esta ecuación en su honor se nombró *ley de radiación de Planck*

$$u(\lambda, T) = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{\frac{b}{\lambda T}} - 1}. \quad (3.1)$$

El siguiente pasó que dio es el justificar su ecuación de un modo físico, por lo que en diciembre de 1900 descubrió la “fórmula mágica”, como la llamó Hermann Weyl (1885-1955) [20]

$$E = h\nu, \quad (3.2)$$

donde  $E$  es la energía,  $h$  la hoy conocida constante de Planck, cuyo valor es  $6,6256 \times 10^{-34} Js$  y  $\nu$  la frecuencia de los osciladores, estos fueron una idea que Planck había introducido para justificar su fórmula, esto no le convencería a Einstein, por lo cual regreso al problema de la catastrofe del ultravioleta, más adelante se cuenta esta historia. La consecuencia de la “fórmula mágica” llevaría a replantear la concepción que del mundo se tenía y abriría el entendimiento del mundo atómico, subatómico y mas allá.

Albert Einstein (1879-1955) en 1905, su *annus mirabilis*, publicó cinco artículos fundamentales en la historia de la física del siglo XX. En el artículo: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des lichts betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, cuya traducción es: Sobre un punto de vista heurístico relativo a la producción y transformación de la luz, Einstein, usando la ley de Wien (ya que seguía siendo válida para ciertas frecuencias) encontraba una expresión como la que obtuvo Planck (3.2)<sup>2</sup>, así la luz consistiría en un cuanto de energía, conocido en la actualidad como fotón. Pero entonces la luz deja de ser exclusivamente como una onda y se le vuelve a atribuir la naturaleza de partícula.

El efecto fotoeléctrico es la emisión de electrones por una sustancia bajo la acción de la luz; descubierto por Heinrich Hertz (1857-1894) en 1887, al estar investigando la naturaleza de las ondas electromagnéticas. Al año siguiente y por período aproximado de tres años Alesandr Stolétov (1839-1896) estudió el efecto fotoeléctrico, estableciendo sus principios:

- El mayor efecto es causado por los rayos ultravioletas,

---

y los datos, pero fueron errores de cálculo que ellos cometieron y reconocieron, disipando las dudas que pudieran surgir.

<sup>2</sup>La expresión que él dedujo está escrita así:  $E = \frac{R\beta}{N}\nu$ , donde  $\frac{R\beta}{N}$  tiene el valor de la constante de Planck.



- La intensidad de la corriente crece con el aumento de la iluminación de la placa,
- Las cargas, emitidas bajo la acción de la luz, son negativas.

En el año de 1898 Sir J. J. Thomson (1856-1940) y Philipp Lenard (1862-1947) identifican estas cargas negativas con los electrones. Lenard continúa haciendo estudios sobre este fenómeno y halló que la fotocorriente no dependía del gas. En 1902 observó que la máxima velocidad con que salen emitidos los electrones no depende de la intensidad de la luz. La explicación al efecto fotoeléctrico no la suministraba la teoría de Maxwell, ya que ella enuncia la continuidad en el espacio de la onda electromagnética y de la experiencia se sabía que no acontecía. De estos conocimientos estaba al tanto Albert Einstein, tan es así que el 16 de noviembre de 1905 Einstein agradecía el artículo que Lenard le había enviado.

Albert Einstein para solucionar el fenómeno vía la teoría corpuscular, postuló que el momento del fotón está definido a través de la longitud de onda, cuya ecuación es:

$$P = \frac{h}{\lambda} \quad (3.3)$$

donde  $P$  es el momento,  $h$  la constante de Planck, y  $\lambda$  la longitud de onda. Aplicando el principio de conservación de la energía, llego a la ecuación:

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}mv^2 + \phi$$

Ella establece que la energía cinética con que es liberado el electrón ( $\frac{1}{2}mv^2$ ), proviene de la energía del fotón ( $\hbar\omega$ . Siendo  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  y  $\omega = 2\pi\nu$ ), gastándose parte de esta energía en “vencer” a la función de trabajo ( $\phi$ ), que es la que mantiene amarrado al electrón a la superficie del metal, manifestándose en la solución la cuantización.

Fueron Ehrenfest y Poincaré, ambos, usando distintos argumentos e independiente el uno del otro, quienes demostraron en 1911 que sólo la discontinuidad podría explicar la ley de radiación; escribió Poincaré en *Journal de Physique*: *Por consiguiente cualquiera que sea la ley de radiación, si se supone que la radiación total es finita, nos vemos conducidos a una función  $\omega$  que presenta discontinuidad análogas a las que da la hipótesis de los cuantos.* Ehrenfest creó su razonamiento usando la estadística, que había aprendido de su maestro Boltzmann.

El duque Louis de Broglie (1892-1987) en su tesis doctoral de título: *recherches sur la théorie des quanta*, y escrito bajo la dirección de Paul Langevin, defendida en la Sorbona, el 25 de noviembre de 1924, ante importantes sinodales como Élie Cartan, Jean Perrin, Charles Maugin y Paul Langevin. En ella (la tesis doctoral) estableció que los electrones poseen un comportamiento de onda y partícula, con una relación igual a:

$$P = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.4)$$

Que es idéntica a la que encontró Einstein para el fotón, sólo que de Broglie lo había hallado para un electrón.

El año de 1923 y no el de 1924, es cuando ideó estos conceptos imprescindibles para la mecánica cuántica; él mismo señaló *muchos autores... atribuyen al descubrimiento de la mecánica ondulatoria<sup>3</sup> la fecha de 1924 porque es la de mi tesis, pero en realidad este descubrimiento es de 1923 porque mi tesis no hacía más que desarrollar las ideas contenidas en mis notas de septiembre y octubre de 1923*. La última nota que presentó el 8 de octubre de 1923 sus ideas convergen en la ley de Planck, citándolo: *una correspondencia hoy clásica entre el principio de mínima acción, aplicado al movimiento de un corpúsculo, y el principio de Fermat aplicado a la propagación de su onda asociada. Así, a partir de estos meses de septiembre y octubre de 1923, estuve en posesión de algunos de los principios fundamentales de la mecánica ondulatoria*. Opuesto a lo que se podría suponer la famosa ecuación (3.4) no aparecerán en las notas que presentó ante la Académie de Sciences, sino en su tesis doctoral.

Clinton Joseph Davisson (1881-1950) laboraba en el Departamento de Ingeniería de Western Electric<sup>4</sup> y es en el año de 1927 cuando Davisson y Lester Germer (1896-1971) observaron la difracción del electrón. En Inglaterra Sir George Paget Thomson (1892-1975), que en esos momentos era profesor de filosofía natural en la Universidad de Aberdeen, Escocia, notaba lo mismo: la difracción del electrón; Era hijo de Sir J. J. Thomson. Thomson hijo y Davisson instauraban la veracidad de la hipótesis de de Broglie y a la postre compartirían el premio Nobel de física.

El proceder de las partículas nos lleva a inferir que son ondas, induciéndonos a retener el paradigma ondulatorio, para servirnos de los conceptos de

<sup>3</sup>La llamó *mecánica ondulatoria*, el nombre de mecánica cuántica fue introducido en 1926 (*circa*) por Max Born.

<sup>4</sup>Posteriormente serían los Laboratorios Bell Telephone.

energía, momento, etc. y ello traerá importantes consecuencias.

El 16 de noviembre de 1925 le escribía Erwing Schrödinger (1887-1961) a Alfred Landé (1888-1976) *Recientemente he estado dedicado profundamente a la ingeniosa tesis de Louis de Broglie. Es extraordinariamente estimulante, aunque no obstante algo en ella es muy difícil de digerir. He intentado en vano hacerme una imagen de la onda de fase de un electrón en una órbita elíptica.* Derivado de la erudición que adquirió Schrödinger sobre la teoría de de Broglie produjo que Peter Debye lo invitara a hablar de la teoría de de Broglie, en uno de los coloquios que dirigía en el ETH. Felix Bloch (1905-1983) recuerda: *dio una maravillosamente clara exposición de cómo de de Broglie asociaba una onda con una partícula y cómo él podía obtener las reglas de cuantización de Niels Bohr y Sommerfeld exigiendo que se incluyese un número entero de ondas en una órbita estacionaria.* Al término del coloquio, Debye le objetó a Schrödinger la necesidad de tener una ecuación para ondas. Semanas después, en una conferencia dada en el mismo coloquio, bajo el título de *Quantisierung als Eigenwertproblem* (Cuantización como un problema de eigenvalores), Schrödinger mostraba la ecuación que Debye le había objetado, es decir la Ecuación de Schrödinger.

Para la formulación heurística de la ecuación de Schrödinger para la partícula libre (aquella que no es afectada por un potencial).<sup>5</sup> partiremos de la solución de la ecuación de ondas clásica:

$$\Psi(\bar{x}, t) = A_0 e^{i(\frac{2\pi\bar{e}\cdot\bar{x}}{\lambda} - \omega t)}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^N, \quad \bar{e} \text{ vector unitario y } t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.5)$$

tomando  $P = \frac{h}{\lambda}$  y  $E = h\nu$  (para introducir el fenómeno cuántico) y sustituyéndolas en (3.5)

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{x}, t) &= A_0 e^{i(\frac{2\pi P\bar{e}\cdot\bar{x}}{h} - \frac{E2\pi}{h}t)} \\ \Psi(\bar{x}, t) &= A_0 e^{i(\frac{2\pi}{h}(\bar{P}\cdot\bar{x} - Et))}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

haciendo  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  y sustituyendo en la última ecuación de (3.6)

$$\Psi(\bar{x}, t) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\bar{P}\cdot\bar{x} - Et)}. \quad (3.7)$$

Recordando la ecuación de onda homogénea:

$$\Delta\Phi(x, t) - \frac{\partial^2\Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

<sup>5</sup>Aclaremos: este no es el camino que siguió el profesor Schrödinger, para esos detalles consultar [14].

vamos a aplicar el operador diferencial del lado izquierdo de (3.8) a la solución de la forma (3.7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\bar{P} \cdot \bar{x} - Et)} = \\ &= -\frac{i}{\hbar} E A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\bar{P} \cdot \bar{x} - Et)}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} E \Psi,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \left(-\frac{i}{\hbar} E\right)^2 A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\bar{P} \cdot \bar{x} - Et)}, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -\frac{E^2}{\hbar^2} \Psi,\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta \Psi &= -\frac{1}{\hbar^2} A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(\bar{P} \cdot \bar{x} - Et)}, \\ \Delta \Psi &= -\frac{\|\bar{P}\|^2}{\hbar^2} \Psi,\end{aligned}\tag{3.11}$$

reescribiendo (3.9):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E \Psi,\tag{3.12}$$

y reescribiendo (3.11):

$$\begin{aligned}\Delta \Psi &= -\frac{\|\bar{P}\|^2}{\hbar^2} \Psi, \\ -\hbar^2 \Delta \Psi &= \|\bar{P}\|^2 \Psi,\end{aligned}\tag{3.13}$$

recordando que  $E = \frac{\|\bar{P}\|^2}{2m}$  y sustituyendo esta expresión en (3.13)

$$E \Psi = -\frac{\hbar^2 \Delta \Psi}{2m},\tag{3.14}$$

igualando (3.14) con (3.9)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi,\tag{3.15}$$

*i.e.*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = 0.\tag{3.16}$$

Esta es la ecuación de Schrödinger lineal para una partícula libre.

Werner Heisenberg (1901-1976) nos lega (entre muchas cosas) el uso del potencial en la mecánica cuántica. Si una partícula está sometida a un campo eléctrico (por ejemplo) podemos conocer su comportamiento a través de introducir en la ecuación (3.16) el potencial de Coulomb. Generalizando lo comentado, para cualquier tipo de potencial, el cual designaremos con la letra  $V(x)$ , se introduce en la ya referida ecuación (3.16), que en lo sucesivo nombraremos Ecuación de Schrödinger Lineal para una partícula con potencial<sup>6</sup>:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi = 0. \quad (3.17)$$

Esta ecuación es válida para una partícula con una velocidad mucho menor que la luz, por lo cual recibirá el apelativo de mecánica cuántica no relativista y tiene una aplicabilidad para longitudes comprendidas entre  $1 \times 10^{-9}\text{m}$  a  $1 \times 10^{-15}\text{m}$ .

¿Qué interpretación física merecerá  $\Psi$ ? Regresemos a los experimentos: en el efecto fotoeléctrico, al incidir la luz ultravioleta, la parte que es reflejada son fotones, salen con una dirección y su distribución espacial es inhomogénea, por lo que si se busca a un fotón en la posición  $(x, y, z)$ , hay que “encerrarlo” en un paralelepípedo  $dx dy dz$  en un determinado tiempo; si fuera el efecto fotoeléctrico, los electrones también tiene una distribución inhomogénea en el espacio, por lo que también necesitaríamos usar el paralelepípedo para poder hallarlo en alguna parte del espacio a un cierto instante de tiempo. Esto nos induce a pensar que la ubicación de alguna manera es azarosa. Para ver cual es la interpretación de  $\Psi$  nos basaremos en la historia, en esta parte Max Born (1882-1970) es el protagonista principal, pues en 1926 dio su interpretación, que le valdría el premio nobel de física.

Se emprendió, una vez establecida a  $\Psi$  como solución, darle su interpretación física; Erwing Schrödinger pensaba, según describe Born: *Creía que su teoría ondulatoria hacía posible un retorno a la física clásica determinista; propuso...abandonar por completo el modelo de partículas y considerar a los electrones como una distribución continua de densidades  $|\Psi|^2$  (o densidad eléctrica  $e|\Psi|^2$ )*

*A la vista de los hechos experimentales esta interpretación nos parecía,*

---

<sup>6</sup>El potencial también puede depender del tiempo  $V(x, t)$ , que en esta tesis no se estudiará.

al grupo de Gotinga, inaceptable.

Para dar la interpretación física a la función de onda, Max Born, se entusiasmó en una idea de Einstein, en la cual Einstein intentaba explicar la dualidad de las partículas *considerando el cuadrado de la amplitud óptica de la onda como la densidad de probabilidad de la existencia de fotones*, en cierta región del espacio. Siguiendo el razonamiento de Einstein, en la cual él habla del *Gespensterfeld* (campo fantasma), que le funciona para determinar la probabilidad de que los fotones sigan cierta trayectoria. Born reflexionó sobre la naturaleza probabilística de esta interpretación, citando sus palabras:  $|\Psi|^2$ , *debía de representar la densidad de probabilidad de los electrones (u otras partículas)*. A Max Born le resultaba fácil la implementación de esta idea, no así su demostración. Para dar con la demostración, Born pensó en los trenes de onda secundarios que se forma en la superficie del agua que choca con un barco y extrapoló la misma idea para explicar el fenómeno del choque con un haz de electrones con un átomo pesado, de esta manera concluyó (citándolo de nuevo): *el cuadrado de la amplitud de esta onda esférica, a una distancia grande del centro de dispersión, determina entonces la probabilidad relativa de dispersión en función de la dirección, si, además, el átomo dispersor puede ocupar diversos estados estacionarios, la ecuación de Schrödinger suministra automáticamente la probabilidad de excitación de los estados; el electrón se dispersa con pérdida de energía, es decir inelásticamente*.

Wentzel, en 1926, usando estas ideas, dedujo la fórmula de dispersión de Rutherford para la partícula  $\alpha$ , afianzando el éxito de la propuesta de Born.

En general si  $\Psi$  es la solución a la ecuación de Schrödinger (3.17), la probabilidad de hallar a una partícula en un punto del espacio sera:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \|\Psi\|^2 dx dy dz = 1 \quad (3.18)$$

desprendiéndose que  $\Psi$  por si sola no tiene significado físico, sino  $\|\Psi\|^2$  y entonces esto indica de que  $\Psi$  es una densidad de probabilidad [20]. Como  $\Psi \in \mathbb{C}$ , entonces  $\|\Psi\|^2 = \bar{\Psi}\Psi$ .

El 4 de diciembre de 1926 escribió Einstein una carta a Born que incluía un comentario sobre su interpretación probabilística de  $|\Psi|$

*La mecánica obliga a que se la respete. Pero una voz interior me dice que todavía no es el non plus ultra. La teoría nos aporta muchas cosas, pero apenas nos acerca al secreto del Viejo. De todas maneras, yo estoy convencido de que él, al menos, no juega a los dados.*

Con esta cita de la carta de Einstein a Born, de donde se deriva la expresión popular “Dios no juega a los dados”, terminamos la parte histórica, claro que faltan muchos temas por contar, como sería el desarrollo de la mecánica matricial, por mencionar uno, no obstante la intención es hacer un relato corto centrado en la ecuación de Schrödinger; para más detalles de la historia consultar [14] y [17].

Ya que estamos hablando de probabilidades necesitamos también conocer el comportamiento promedio de las partículas. Antes de buscar esto necesitamos el formalismo de la mecánica cuántica, y para ello hablaremos de operadores cuánticos<sup>7</sup>. Tomemos (3.9)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi, \quad (3.19)$$

desde el punto de vista operacional, esta ecuación nos dice que los siguientes operadores son iguales:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi, \quad (3.20)$$

considerando (3.11).

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= -\frac{\|P\|^2}{\hbar} \Psi \\ -\hbar \Delta \Psi &= -P \cdot P \Psi \\ i\nabla \cdot (-i\hbar \nabla \Psi) &= P \cdot (P \Psi), \end{aligned} \quad (3.21)$$

inferimos que:

$$-i\hbar \nabla = \hat{P}. \quad (3.22)$$

Para introducir a la ecuación de Schrödinger empleamos los conceptos de energía, momento, pero hay más cantidades físicas que se usan en la mecánica cuántica (el momento angular, por ejemplo) por lo que a cualquier cantidad física le llamaremos observable y dado que la energía y el momento han sido representados por operadores, podemos deducir que cada observable tiene asociado un operador.

Regresemos a la evidencia experimental sobre las observables: al hacer las mediciones de estas nos arrojan valores que son números reales, ello obliga a que los operadores cumplan una circunstancia análoga: poseer eigenvalores reales.

---

<sup>7</sup>Fueron introducidos en 1926 por Max Born y Norbert Wiener (1894-1964), en el MIT, donde cambiaron el concepto de matriz por el de operador.

**DEFINICIÓN 27.** Un operador  $\hat{A}$  se llamará hermitiano  $\iff \langle \hat{A}\Psi, \Psi \rangle$  es real para todo  $\Psi \in \mathcal{L}^2$ .

Ahora el teorema, que a continuación se enunciará, nos permitirá saber el tipo preciso de operador a emplear en la mecánica cuántica.

**TEOREMA 18.** Sea  $\hat{A}$  un operador asociado a una observable, si existen  $\Psi, f \in \mathcal{L}^2$  tales que

$$\langle \Psi, \hat{A}\Phi \rangle = \langle f, \Phi \rangle \quad \Phi \in D(\hat{A}), \quad (3.23)$$

entonces  $\Psi \in D(\hat{A})$  y  $\hat{A}\Psi = f$ .

La propiedad de  $\hat{A}$  descrita por el Teorema 18 no es compartida por todos los operadores hermitianos, los que cumplen el teorema se les llama *auto adjuntos*.

Del teorema se concluye que todo operador auto adjunto implica ser un operador hermitiano, pero un operador hermitiano no implica ser un operador auto adjunto<sup>8</sup>, por ejemplo:  $\hat{M}\Psi = i\frac{d\Psi}{dx}$  con  $Dom(\hat{M})$  igual al conjunto de las funciones continuamente diferenciables que se anulan cuando  $|x|$  es larga y en  $|x| = 0$ , ver [?].

Conocemos ya el tipo de operador requerido y el hecho de que tengamos probabilidades en la medición de la mecánica cuántica nos lleva a aplicar el concepto de espectación matemática, el cual nos dice que dada una variable aleatoria podemos calcular su probabilidad. Mediante el uso de la función de densidad de probabilidad podemos definir el valor esperado de un operador como sigue:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{A}\Psi\bar{\Psi}d\bar{x}, \quad (3.24)$$

identificado al operador con la variable aleatoria y lo que nos da el valor esperado es el promedio.

Notemos que si  $\Psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$  y centramos nuestra atención en los operadores acotados, entonces es de esperar que  $\langle \hat{A} \rangle$  sea finita.

La siguiente lista provee a los principales operadores de la Mecánica Cuántica.

- Energía Cinética  $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,
- Energía  $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,

---

<sup>8</sup>cf. Con cualquier texto de mecánica cuántica.



- Energía Potencial  $\hat{V} = V$ ,
- Hamiltoniano  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ ,
- Momento  $\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ,
- Posición  $\hat{x} = x$ .

Para concluir deduzcamos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, tomemos nuevamente la ecuación dependiente del tiempo de Schrödinger (3.17)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi = 0, \quad (3.25)$$

para tal fin utilizemos la técnica de separación de variables, propongamos a  $\Psi(x, t) = \tau(t)\psi(x)$  y sustituyámoslo en (3.17)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \tau \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \tau \psi}{\partial x^2} &= -V\tau\psi \\ i\hbar \psi \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -V\tau\psi, \end{aligned} \quad (3.26)$$

multiplicando esta última por  $(\tau\psi)^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar \psi}{\tau \psi} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\tau \hbar^2}{\tau \psi 2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -V \frac{\tau \psi}{\tau \psi} \\ \frac{i\hbar}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -V, \\ \frac{i\hbar}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m \psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ambos lados de la última ecuación son independientes, pues el lado izquierdo depende de  $t$  y el lado derecho depende de  $x$ , esto obliga a introducir una constante de acoplamiento para que tenga sentido tal igualdad; a esta constante la designaremos por la letra  $E$  y le daremos un significado físico después de resolver la parte temporal, pues esta nos dará la clave para saber que significa  $E$ . Usando esta constante para hacer la separación de la parte espacial de la parte temporal, se obtiene para la parte temporal:

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} &= E \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= -\frac{i\tau E}{\hbar}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

De esta ecuación podemos concluir que  $E$  es la energía del sistema. Seguimos con la deducción.

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -V + E \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{2m}{\hbar^2} (-V + E) \psi, \end{aligned} \quad (3.29)$$

por lo que la ecuación estacionaria de Schrödinger es:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (V - E) \psi = 0. \quad (3.30)$$

La solución a la ecuación (3.28) es

$$\tau(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (3.31)$$

y la solución a la ecuación estacionaria de Schrödinger dependerá del potencial, padeciéndose de una solución universal. Para soluciones de ciertos tipos de potenciales se puede consultar [4], [9], [13], [20].

Retomemos la ecuación (3.17) y utilizemos  $\hat{H}$  para el Hamiltoniano (como se dio en la lista de principales operadores) quedando escrita la ecuación de Schrödinger de “forma compacta” como:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi. \quad (3.32)$$

Recapitulemos: Si no hay una dependencia del potencial con el tiempo una forma de resolver la ecuación de Schrödinger es usando separación de variables, la limitante radica en que la solución obtenida es una solución estacionaria, esto es que ya no depende del tiempo, lo que ha nosotros más nos atañe es conocer las soluciones dinámicas en el tiempo.

La solución dinámica para (3.32) podría ser

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \varphi(x), \quad (3.33)$$

con  $t \geq 0$  un parámetro real, que en física identificamos con el tiempo;  $\hat{H}$  el operador Hamiltoniano. Hemos hallado un problema: ¿cómo manejar correctamente a  $\Psi(x, t)$ ? Analizemos: ya no tenemos una constante, sino un

operador que es  $\hat{H}$ , y no sólo eso ¿es realmente una solución? Por último de serlo ¿en qué se difiere esta solución de separación de variables?

Respondamos en orden las preguntas:

1)  $\Psi(x, t)$ , está es la composición de un operador con una función, y nos da otro operador. Al operador  $e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$  que de ahora en adelante se denominara con la letra griega  $\tau(t)$ . El dominio de éste es  $Dom(\tau(t)) = \mathbb{H}^s$ , y está en un espacio de Sobolev porque necesitamos trabajar con las derivadas. El hecho de que sea un operador lo acredita el cálculo funcional. A  $\tau(t)$  en física se le llama operador de evolución temporal y nos dice que en un estado inicial cuántico la evolución temporal esta dada por la acción de un operador unitario sobre este estado inicial.

2) La legitimidad de  $\Psi$  como solución de (3.32) es otorgada por la teoría de semigrupos, de ahí que  $\tau(t)$  sea un semigrupo, a continuación agregaremos la demostración de ello.

**Demostración**

i)  $\tau(0) = \mathfrak{I}$ .

$$e^{-\frac{i\hat{H}0}{\hbar}} = e^0 = \mathfrak{I}. \quad (3.34)$$

ii)  $\tau(t+z) = \tau(t)\tau(z)$ .

$$\begin{aligned} \tau(t+z) &= e^{-\frac{i\hat{H}(t+z)}{\hbar}} = \\ &= e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar} - \frac{i\hat{H}z}{\hbar}} = \\ &= e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} e^{-\frac{i\hat{H}z}{\hbar}} = \\ &= \tau(t)\tau(z). \end{aligned} \quad (3.35)$$

**q. e. d.**

Conocedores de que un semigrupo posee un generador, en este caso identificamos a  $\hat{H}$  como tal, sin que influya el que sea lineal o no, lo que si es que  $V(x)$  necesita ser independiente del tiempo.

3) El operador  $\tau(t)$  actúa sobre una función  $\varphi$ , el resultado  $\tau(t)\varphi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , no se debe interpretar como un producto de funciones.

Vamos a formalizar lo antes descrito en el contexto de un Hamiltoniano libre, al cual llamaremos  $H_o = \Delta$ , de forma más precisa  $H_o$  está definido por:

$$\begin{cases} Dom(\hat{H}_o) = \{u \in \mathbb{H}_0^1(\Psi); \Delta u \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}, \\ \hat{H}_o u = \Delta u \quad \forall u \in Dom(\hat{H}_o). \end{cases}$$

Entonces vamos a mostrar que efectivamente la solución a la Ecuación de Schrödinger correspondiente esta dada por  $u(t) = e^{-i\hat{H}_o t}\varphi$  o de forma más simple su escritura  $u(t) = \tau(t)\varphi$  donde  $\tau(t) = e^{-i\hat{H}_o t}$  y es un semigrupo uniparamétrico de isometrías.

**TEOREMA 19.** *Dada  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ,  $u(t) = \tau(t)\varphi$  es la única solución de el problema*

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, \mathcal{L}^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, D(\hat{H}_o)^*) \\ i\frac{du}{dt} + \Delta u = 0 \quad \text{en } D(\hat{H}_o)^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

más aún  $\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ .

**Demostración**

$\tau(t)$  es un grupo uniparamétrico de isometrías, entonces por el Teorema Hille-Yosida existe un generador, procederemos a demostrar que  $\Delta = \hat{H}_o$  es el generador.  $u(t)$  es diferenciable, por la hipótesis de que  $u(t) \in C^1$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ i \left( \frac{\tau(t+h)\varphi - \tau(t)\varphi}{h} \right) \right\} + \Delta \tau(t)\varphi = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ i \left( \frac{\tau(t)\tau(h)\varphi - \tau(t)\varphi}{h} \right) \right\} + \tau(t)\Delta\varphi = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ i\tau(t) \left( \frac{\tau(h)\varphi - \varphi}{h} \right) \right\} + \tau(t)\Delta\varphi = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \tau(t) \left[ i \left( \frac{\tau(h)\varphi - \varphi}{h} \right) + \Delta\varphi \right] \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \tau(t) \left[ i \left( \frac{\tau(h) - \mathfrak{I}}{h} \right) + \Delta \right] \varphi \right\} = \\ &= \left\{ \tau(t) \left[ i \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\tau(h) - \mathfrak{I}}{h} \right) + \Delta \right] \varphi \right\}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

De aquí se concluye que  $\lim_{h \rightarrow 0} i \left( \frac{\tau(h) - \mathfrak{I}}{h} \right) \rightarrow \Delta, \forall \varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  y  $\tau(t) \forall t \in \mathbb{R}^+$ . Con esto  $\Delta$  es un generador. Para demostrar la unicidad resta usar lo que se exhibió de la teoría de semigrupos, de la §4 del capítulo 1, en la que se afirma que el generador es único.

Para demostrar que  $\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$ , sólo hay que usar la definición de  $u(t)$  y el hecho de que es una  $\tau(t)$  isometría en  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ , entonces:

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^2} = \|\tau(t)\varphi\|_{\mathcal{L}^2} = \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$$

q. e. d.

Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , entonces  $\tau(t)$  puede ser expresada en variables de Fourier. Más explícitamente si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  y  $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ , entonces definiremos a  $\mathfrak{F}u(t)$  como:

$$\mathfrak{F}u(\varepsilon) = e^{-4\pi^2 i |\varepsilon|^2 t} \mathfrak{F}\varphi(\varepsilon), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad y \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^N. \quad (3.37)$$

Derivando a (3.37) con respecto a  $t$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} i \frac{d\mathfrak{F}u(t)}{dt} &= i \frac{d e^{-4\pi^2 i |\varepsilon|^2 t}}{dt} \mathfrak{F}\varphi(\varepsilon) = -4i\pi^2 i |\varepsilon|^2 e^{-4\pi^2 i |\varepsilon|^2 t} \mathfrak{F}\varphi(\varepsilon) = \\ &= 4\pi^2 |\varepsilon|^2 e^{-4\pi^2 i |\varepsilon|^2 t} \mathfrak{F}\varphi(\varepsilon) = 4\pi^2 |\varepsilon|^2 \mathfrak{F}u(t), \\ i \frac{d\mathfrak{F}u(t)}{dt} &= 4\pi^2 |\varepsilon|^2 \mathfrak{F}u(t), \end{aligned} \quad (3.38)$$

por lo tanto

$$i \frac{d\mathfrak{F}u(t)}{dt} - 4\pi^2 |\varepsilon|^2 \mathfrak{F}u(t) = 0. \quad (3.39)$$

Por otro lado usando  $\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) = (2\pi i \varepsilon_i)^2 \mathfrak{F}$ , con  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $\varepsilon = 2\pi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

Así se obtienen las siguientes igualdades:

$$\mathfrak{F}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{F}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n (2\pi i \varepsilon_i)^2 \mathfrak{F}u = -|2\pi \varepsilon|^2 \mathfrak{F}u. \quad (3.40)$$

También se tiene:

$$\mathfrak{F}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \mathfrak{F}u}{\partial x_i^2}\right). \quad (3.41)$$

$$-(2\pi |\varepsilon|)^2 \mathfrak{F}u(t) = \mathfrak{F}\left(\sum \frac{\partial^2 u(t)}{\partial x_i^2}\right) = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (\mathfrak{F}(u(t))) = \Delta \mathfrak{F}u$$

Así, combinando estos dos últimos resultados podemos concluir que:

$$i \frac{d\mathfrak{F}u}{dt} + \Delta \mathfrak{F}u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Como las condiciones iniciales  $u(0) = \varphi$ , se deduce que  $u(t) = \tau(t)\varphi$ , por lo que

$$\mathfrak{F}(\tau(t)\varphi)(\varepsilon) = e^{-4\pi^2 i |\varepsilon|^2 t} \mathfrak{F}\varphi(\varepsilon) \quad (3.42)$$

Todo esto fue hecho para la partícula libre, si la ecuación de Schrödinger no es homogénea, entonces hay una relación entre la solución a la partícula libre y la de la ecuación que no es homogénea y esta dada por el principio de Duhamel [5].

**TEOREMA 20.** *Sea  $I$  un intervalo abierto, acotado y  $0 \in I$ . Sea  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$ ,  $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N))$  con  $u \in C(I, \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N))$ , entonces  $u$  satisface*

$$u(t) = \tau(t)\varphi + i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds, \quad (3.43)$$

para  $t \in I \Leftrightarrow u \in \mathbb{W}^{1,1}(I, \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N))$  y

$$\begin{cases} i \frac{du}{dt} + \Delta u + f = 0, & \forall t \in I, \\ u(0) = \varphi. \end{cases}$$

adicionalmente  $f \in C(I, \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N))$ , entonces  $u \in C^1(I, \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N))$

**Demostración**

$\Rightarrow$ )

Propongamos a:

$$u(t) = \tau(t)\varphi + i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds$$

es claro que  $u(0) = \varphi$ .

Sabemos que  $\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$ , a su vez tomemos  $I \in (0, T)$  y también que  $\|u(x, t_0)\|_{\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)} < \infty \quad \forall t_0 \in I$ , por lo que

$$\|u(x, t)\|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} < \infty, \quad (3.44)$$

y tomando la norma de (3.44) con respecto a

$$\| \|u(x, t)\|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} \|_{\mathbb{W}_t^{1,1}(I)} < \infty, \quad (3.45)$$

integrando a (3.44) con respecto a  $dt$  sobre el intervalo  $(0, T)$ :

$$\int_0^T \| \|u(x, t)\|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} \| dt < \infty \quad (3.46)$$

tomemos la derivada de (3.44) con respecto al tiempo e integrémosla con respecto a  $dt$  sobre el mismo intervalo  $((0, T))$

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt} \|u(x, t)\|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} \right| dt < \infty \quad (3.47)$$

el que sean finitas (3.46) y (3.47) se deduce de (3.44), más aún (3.46) y (3.47) son las definiciones de  $\mathcal{L}^1(I)$ . Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(x, t)\|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} &= \left\| \frac{d}{dt} u(x, t) \right\|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} = \\ \| -\Delta u(x, t) - f \|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} &\leq \| \Delta u(x, t) \|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} + \| f \|_{\mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)} < \infty \end{aligned} \quad (3.48)$$

$\Leftrightarrow$ )

Por hipótesis  $u \in \mathbb{W}^{1,1}(I, \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N))$  y por los teoremas de encaje de Sobolev se obtiene:  $\mathbb{W}^{1,1} \hookrightarrow C_{b,u}(\bar{I}, \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N))$ . Ahora demostremos que (3.43) es la solución, recordemos la ecuación:

$$u(t) = \tau(t)\varphi + i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds$$

retomando también la ecuación no homogénea de Schrödinger:

$$i \frac{du}{dt} = -\Delta u - f$$

Para  $\tau(t)\varphi$  es solución a la ecuación homogénea, por lo que bastará demostrar que cumple  $i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds$  ser solución a la ecuación no homogénea de Schrödinger.

Vamos a hacer uso de la siguiente identidad:

$$\int_r^t \tau(s)ds = \tau(r) - \tau(t). \quad (3.49)$$

Cuya demostración vamos a dar.

$$\begin{aligned} -\Delta \int_r^t \tau(s)\varphi ds &= i \frac{d}{ds} \int_r^t \tau(s)\varphi ds = i[\tau(t)\varphi - \tau(r)\varphi] \Rightarrow \\ \Delta \int_r^t \tau(s)\varphi ds &= -i[\tau(t)\varphi - \tau(r)\varphi] = i[\tau(r)\varphi - \tau(t)\varphi]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

El último término es consecuencia de que el operador Laplaciano es un operador cerrado, lo cual demostraremos a continuación y después podremos justificar el último paso de (3.49)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Delta(x_n - x_m)\| = \|\Delta(x_n - x)\| = \|\Delta x_n - \Delta x\|, \quad (3.51)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta(x_n - x_m)\| = \|\Delta(x - x_m)\| = \|\Delta x - \Delta x_m\|, \quad (3.52)$$

restando (3.51) con (3.52) y tomando el valor absoluto, además de saber que se cumple esta desigualdad, se tiene:

$$\left| \|\Delta x_n - \Delta x\| - \|\Delta x - \Delta x_m\| \right| \leq \|\Delta x_n - \Delta x + \Delta x - \Delta x_m\| = \|\Delta x_n - \Delta x_m\|. \quad (3.53)$$

de aquí se infiere que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x_n \rightarrow \Delta x$ .

Ahora tomemos una sucesión de Cauchy  $\varphi_n$  y apliquemosla a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \int_r^t \tau(s) \varphi_n ds \rightarrow \Delta \int_r^t \tau(s) \varphi_n ds. \quad (3.54)$$

En particular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_r^t \tau(s) \varphi_n ds \rightarrow \int_r^t \tau(s) \varphi_n ds \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\tau(r) - \tau(t)) \varphi_n \rightarrow (\tau(r) - \tau(t)) \varphi, \quad (3.55)$$

por lo tanto

$$\int_r^t \tau(s) ds = \tau(r) - \tau(t).$$

Con esto demostramos la identidad, por lo cual seguiremos con la demostración.

Consecuencia de la identidad (3.49) tenemos esta otra identidad:

$$\int_r^t \tau(t-s) ds = i(\tau(t-t) - \tau(t-r)) = i(\tau(0) - \tau(t-r)) = i(\mathfrak{J} - \tau(t-r)). \quad (3.56)$$



Por otro lado: sea  $v(t) = i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds$ ,

$$\begin{aligned} v(t) &= i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds = v(t) = i \left[ \int_0^t \tau(t-s)[f(0) + \int_0^t f'(r)dr]ds \right] = \\ &= i \left[ \int_0^t \tau(t-s)f(0)ds + \int_0^t \tau(t-s) \int_0^t f'(r)drds \right] = \\ &= i \left[ \int_0^t \tau(t-s)f(0)ds + \int_0^t \left[ \int_r^t \tau(t-s)ds \right] f'(r)dr \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ahora aplicando el operador Laplaciano y usando la identidad (3.56) se llega:

$$\begin{aligned} \Delta v(t) &= i \left[ i(\mathfrak{J} - \tau(t))f(0)ds + i \int_0^t (\mathfrak{J} - \tau(t))f'(r)dr \right] = \\ &= i \left[ i f(0) - i \tau(t)f(0) + i f(t) - i f(0) - i \int_0^t \tau(t-r)f'(r)dr \right] = \\ i \left[ -i \tau(t)f(0) + i f(t) - i \int_0^t \tau(t-r)f'(r)dr \right] &= \tau(t)f(0) - f(t) + \int_0^t \tau(t-r)f'(r)dr. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Por otro lado si  $v(t) = i \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds$ , introduciendo el siguiente cambio de variable en  $v(t)$ :  $t-s = t'$ , con lo cual se concluye que  $s = t-t'$  y se tiene que  $ds = dt'$ , por lo que se obtiene:

$$-i \int_t^0 \tau(t')f(t-t')dt' = i \int_0^t \tau(s)f(t-s)ds. \quad (3.59)$$

Es con esta última definición de  $v(t)$  con la que vamos a trabajar, así tomando su derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dv(t)}{dt} &= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^{t+h} \tau(s)f(t+h-s)ds - \int_0^t \tau(s)f(t-s)ds \right) = \\ &= i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^t \tau(s)(f(t+h-s) - f(t-s))ds + \int_0^{t+h} \tau(s)f(t+h-s)ds \right) = \\ i \int_0^t \tau(s) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t+h-s) - f(t-s))ds &+ i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \tau(s)f(t+h-s)ds = \\ &= i \int_0^t \tau(s)f'(t-s)ds + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \tau(s)f(t+h-s)ds. \end{aligned} \quad (3.60)$$

En la última integral vamos a introducir un cambio de variable: sea  $\omega = t + h$  y definamos a:

$$H(\omega) = i \int_t^\omega \tau(s) f(\omega - s) ds,$$

ahora combinando esta definición de  $H(\omega)$  con esta última integral se obtiene:

$$i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} \tau(s) f(t+h-s) ds = i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (H(t+h) - H(t)) = iH'(t) = i\tau(t)f(0). \quad (3.61)$$

Por lo tanto

$$\frac{dv(t)}{dt} = [i\tau(t)f(0) + i \int_0^t \tau(s) f'(t-s) ds]. \quad (3.62)$$

Multiplicando a (3.62) por  $i$  se obtiene:

$$i \frac{dv(t)}{dt} = -\tau(t)f(0) - \int_0^t \tau(s) f'(t-s) ds. \quad (3.63)$$

Comparando (3.62) con (3.58):

$$\begin{aligned} i \frac{dv(t)}{dt} &= -\tau(t)f(0) - \int_0^t \tau(s) f'(t-s) ds - f + f = \\ &= -(\tau(t)f(0) - \int_0^t \tau(t-s) f'(s) ds - f) - f = -\Delta - f. \end{aligned} \quad (3.64)$$

q. e. d.

Se ha referido varias propiedades del operador de evolución temporal, sin embargo se pueden formular dos preguntas, la primera: ¿Cómo está acotada la norma  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$  de  $\tau(t)\varphi$  cuando se mapea a otro espacio y con respecto a quién se compara está norma?, la segunda: ¿Qué acaece con  $\tau(t)\varphi$  i.e. con la onda en el  $\lim_{t \rightarrow \infty}$ ? La respuesta a la primera cuestión la brinda el siguiente teorema que es una estimación fundamental.

**TEOREMA 21.** *Sea  $p \in [2, \infty)$  y  $t \neq 0$ , entonces  $\tau(t)$  mapea a  $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N)$  de forma continua a  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$  y*

$$\|\tau(t)\varphi\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi|t|)^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N). \quad (3.65)$$

La demostración del teorema se apoya en el siguiente lema, lo anunciaremos y demostraremos, para proseguir con la demostración del Teorema.

LEMA 11. Dada  $t \neq 0$ , definimos la función  $K_t$  por

$$K_t(x) = \left(\frac{1}{4\pi it}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{ix|2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.66)$$

Entonces se sigue que  $\tau(t)\varphi = K_t \star \varphi$ , i.e.

$$\tau(t)\varphi(x) = \left(\frac{1}{4\pi it}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{ix-y|2}{4t}} \varphi(y) dy, \quad (3.67)$$

$\forall t \neq 0$  y  $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ .

**Demostración**

Calculando la convolución:

$$K_t \star \varphi = \varphi \star K_t = (4\pi it)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) e^{\frac{ix-y|2}{4t}} dy, \quad (3.68)$$

por otro lado

$$\mathfrak{F}K_t \mathfrak{F}\varphi = e^{-4i\pi^2|\varepsilon|^2 t} \mathfrak{F}\varphi = \mathfrak{F}(\tau(t)\varphi)(\varepsilon). \quad (3.69)$$

Esto último por (3.42).

Aplicando la transformada inversa de Fourier en los extremos de la igualdad (3.69), llegamos a:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(K_t \star \varphi) &= \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(\tau(t)\varphi(\varepsilon)) \implies \\ K_t \star \varphi &= (\tau(t)\varphi)(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.70)$$

por lo tanto

$$\tau(t)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{4\pi it}\right)^{\frac{N}{2}} \varphi(y) e^{\frac{ix-y|2}{4t}} dy.$$

q. e. d.

**Demostración del Teorema**

Dado que  $\|\tau(t)\varphi(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\tau(t)\varphi(x)|$ , se tiene entonces:

$$\begin{aligned} |\tau(t)\varphi(x)| &\leq \left|\frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}}\right| \int_{\mathbb{R}^N} |e^{\frac{-ix-y|2}{4t}}| |\varphi(y)| dy = \\ &\frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)| dy = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\text{por lo tanto} \quad \|\tau(t)\varphi(x)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Ahora con lo que hemos establecido la desigualdad de  $\mathcal{L}^1 - \mathcal{L}^\infty$ . Considerando el caso general, esto es  $\tau(t)$  mapea  $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N)$  continuamente en  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)$  *i.e.*  $\varphi \in \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow \|\tau\varphi\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} < \infty$ .

Veamos que  $\tau(t)$  mapea  $\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N)$  en  $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$  apliquemos el teorema Riesz-Thorin: sea  $p_0 = p_1 = 1$ ,  $q_0 = q_1 = \infty$ , por lo que  $\mathcal{L}^{p_0}(\mathbb{R}^N, \lambda) \cap \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^N, \lambda) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ , por otro lado  $\mathcal{L}^{q_0}(\mathbb{R}^N, \lambda) \cap \mathcal{L}^{q_1}(\mathbb{R}^N, \lambda) = \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$ . Así se tiene  $\|T\varphi\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M_0 \|\varphi\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)}$ , identificamos a  $M_0 = (4\pi it)^{\frac{N}{2}}$  y a  $T = \tau(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N))$ , entonces como  $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$  y para toda  $s \in (0, 1)$   $T\varphi \in \mathcal{L}^{q_s}$  y

$$\|T\varphi\|_{\mathcal{L}^{q_s}(\mathbb{R}^N)} \leq C_s \|\varphi\|_{\mathcal{L}^{p_s}(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.72)$$

Por otro lado  $\frac{1}{p_s} = 1$ ,  $\frac{1}{q_s} = 0$ , esto implica que  $\frac{1}{p_s} + \frac{1}{q_s} = 1$ . Ahora

$$C_s = \left( \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}} \right)^{1-s} \left( \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{N}{2}}} \right)^s, \quad (3.73)$$

identificamos a  $q_s = p$  y a  $p_s = p'$ , así sustituyendo en (3.72), obtenemos:

$$\|T\varphi\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_s \|\varphi\|_{\mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.74)$$

Otro caso sería cuando se tiene:  $q_s = p$  y  $p_s = p'$ , para el coeficiente  $C_s = (4\pi|t|)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})^2} = \mu_0^{1-s} \mu_1^s = (4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}$ , entonces  $(4\pi|t|)^{\frac{N}{2}} = 1$ .

Ahora para  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 2$ ;  $q_0 = q_1 = \infty$ , si  $\tau(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^\infty)$ , así

$$\begin{aligned} \|\tau(t)\varphi\|_{\mathcal{L}^1} &\leq M_0 \|\varphi\|_{\mathcal{L}^\infty}; & |\tau(t)\varphi\|_{\mathcal{L}^2} &\leq M_1 \|\varphi\|_{\mathcal{L}^\infty}, \\ & & \forall \varphi \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2 & \quad s \in (0, 1) \end{aligned} \quad (3.75)$$

así llegamos

$$\|\tau(t)\varphi\|_{\mathcal{L}^p} \leq C_s \|\varphi\|_{\mathcal{L}^{p'}}. \quad (3.76)$$

Ahora:  $\frac{1}{p} = 1 - \frac{s}{p}$ ;  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 - \frac{s}{2}$ ;  $\frac{1}{p'} = 0$ ;  $\frac{1}{p} + \frac{s}{2} + \frac{1}{p'} = 1$ ;  $\frac{s}{2} = 1 - \frac{1}{p}$ ;  $s = 2 - \frac{2}{p} = 2(1 - \frac{1}{p})$ . Por otro lado

$$(4\pi|t|)^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} = (4\pi|t|)^{-\frac{N}{2}} M_1^s, \quad (3.77)$$

donde  $M_1^s = (4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}$ , por lo que (3.77) es igual

$$(4\pi|t|)^{-\frac{N}{2}(s-1)} = (4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}, \quad (3.78)$$

$M_1^s = ((4\pi|t|)^{\frac{-N}{2}})^s (4\pi|t|)^{\frac{N}{2}}$  y  $M_1 = (4\pi|t|)^{-\frac{N}{2}} 4\pi|t|$ ; y los exponentes se definen:  $-\frac{s}{2} = \frac{1}{p} \Rightarrow s = -\frac{2}{p}$  por lo tanto  $s = 1 - \frac{2}{p}$ , al igual  $s = 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$  por lo

tanto  $\frac{s}{2} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ ;  $-\frac{N}{2}(s) = \frac{N}{p} - \frac{N}{2}$ ;  $\frac{N}{p} = \frac{N}{2}(1 - s) = -\frac{N}{2}(s - 1)$ ;  $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^2$ .  
Llegando a:

$$\|\tau(t)\varphi(x)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{N}{2}} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{N}{2}} (4\pi|t|)^{\frac{N}{2s}} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.79)$$

q. e. d.

Con esto hemos respondido a la primera pregunta que nos plantemos sobre como está acotada la solución de la ecuación de Schrödinger. Para responder a la otra pregunta, en donde queremos saber que pasa en el límite de la solución en el tiempo, esto es  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t)\varphi$ , es fácil notar que teniendo el resultado del teorema, éste límite es igual a cero.

El teorema se puede extender para espacios de Sobolev, como lo atestigua el siguiente corolario.

**COROLARIO 3.** *Si  $t \neq 0$ , entonces*

$$\|\tau(t)\varphi\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi|t|)^{-N(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\varphi\|_{H^{s,p'}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \quad (3.80)$$

donde  $s \in \mathbb{R}$  y  $2 \leq p < \infty$ .

**Demostración**

Lo haremos para la primera derivada y para derivadas de orden mayor el resultado es análogo.

Sea  $t \neq 0$ ,  $u = \tau(t)\varphi$  y  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ , entonces aplicando (3.37) que

$$\mathfrak{F}^{-1}(w\mathfrak{F}(u(t))) = e^{-4\pi^2 i|\varepsilon|^2} \mathfrak{F}(w\varphi(\varepsilon)) = \mathfrak{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 i|\varepsilon|^2} \mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(w\varphi(\varepsilon))) = \tau(t)(\mathfrak{F}^{-1}(w\mathfrak{F}(\varphi))). \quad (3.81)$$

Y sabemos del teorema 3.65 que:

$$\|\mathfrak{F}^{-1}(w\mathfrak{F}(u(t)))\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|\mathfrak{F}^{-1}(w\mathfrak{F}(\varphi))\|_{\mathcal{L}^{p'}}. \quad \text{q. e. d.} \quad (3.82)$$

## 3.2. Estimaciones de Strichartz

Se refirió en la introducción que las estimaciones de Strichartz nos permitían saber sobre la convergencia en norma de las soluciones de la ecuación de Schrödinger no lineal, debido a que el generador de la isometrías  $\tau(t)$

puede originar inestabilidad en  $\mathcal{L}^p$ , por ello se necesita un criterio que nos faculte saber si está acotada o no  $\tau(t)\varphi$ . Por lo que el resultado del teorema (3.65) es una estimación de este tipo. Procederemos a estimar soluciones en espacios más generales, como son los espacios de evolución, que previamente definimos (ver el capítulo 2).

**DEFINICIÓN 28.** Decimos que el par  $(q, r)$  es admisible si

$$\frac{2}{q} = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right), \quad (3.83)$$

y  $2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2}$  con:

$$\begin{cases} 2 \leq r \leq \infty, & N = 1, \\ 2 \leq r \leq \infty, & N = 2. \end{cases}$$

Si  $(q, r)$  es un par admisible, entonces  $2 \leq q \leq \infty$ .

**PROPOSICIÓN 6.** El par  $(\infty, 2)$  siempre es admisible, ya que  $q = \infty$  y  $r = 2$ .

*Demostración*  $\frac{2}{\infty} = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$  por lo tanto  $0 = N(0)$ .

q.e.d.

**PROPOSICIÓN 7.** Si  $N \geq 3$  el par  $(2, \frac{2N}{N-2})$  es admisible.

*Demostración* sean

$$\begin{cases} q = 2, \\ r = \frac{2N}{N-2}. \end{cases}$$

sustituyendo  $\frac{2}{2} = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{2N}{N-2}}\right)$  entonces  $1 = N\left(\frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N}\right) = N\left(\frac{4}{4N}\right) = 1$ .

q.e.d.

**TEOREMA 22** (Estimaciones de Strichartz). *Se tienen el siguiente par de propiedades:*

- Para toda  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , la función  $t \mapsto \tau(t)\varphi$  pertenece a

$$\mathcal{L}^q(\mathbb{R}, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}, \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)), \quad (3.84)$$

para cada par admisible  $(q, r)$ . Más aún, existe una constante  $C$  tal que

$$|||\tau(t)\psi : S||| \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}, \quad (3.85)$$

para cada  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , con  $S = (\frac{1}{q}, \frac{1}{r})$  (siguiendo la notación de Kato, introducida en el segundo capítulo).

- Sea  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  (acotada o no),  $J = \bar{I}$  y  $t_0 \in J$ . Si  $(\gamma, \rho)$  es un par admisible y  $f \in \mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$ , entonces para cada par admisible  $(q, r)$ , la función

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_{t_0}^t \tau(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in I, \quad (3.86)$$

pertenece a  $\mathcal{L}^q(I, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(J, \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N))$ . Más aún, existe una constante  $C$  independiente de  $I$  tal que

$$\|\|\Phi_f : R\|\| \leq C\|\|f : R'\|\|. \quad (3.87)$$

Con  $R = (\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\gamma})$  y  $R' = (\frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\gamma'})$ .

Antes de demostrar este teorema insistiremos en justificar un poco más su uso. Introducimos los pares admisibles porque suponemos que es invariante ante la reescala  $(t, x) \mapsto (\lambda^2 t, \lambda x)$ , por eso les exige a  $p, r$  y  $N$  cumplan con la regla (3.83). A su vez lo que se hace es comparar la parte espacial de la solución con la solución general en  $\mathcal{L}^p$ , y cerciorarse que esté acotada, evitando de esta forma la inestabilidad, ya referida con anterioridad.

Previo a la demostración de la estimación de Strichartz, vamos a enunciar sin demostración el siguiente teorema sobre los potenciales de Riesz, y definir a estos.

**DEFINICIÓN 29** (Potenciales de Riesz). Sea  $\alpha$  un entero y  $1 < q' < \infty$ , así definimos

$$(I_\alpha f)x = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)dy. \quad (3.88)$$

Donde  $\gamma(\alpha)$  se define:

$$\gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{N}{2} - \frac{\alpha}{2})}. \quad (3.89)$$

**TEOREMA 23.** Sean  $0 < \alpha < N$ ,  $1 \leq q' < q < \infty$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'} - \frac{\alpha}{N}$

i) Si  $f \in \mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R}^N)$ , entonces la integral definida como (3.88) converge absolutamente en casi todo punto  $x$ .

ii) Si  $1 < q'$  entonces:

$$\|I_\alpha(f)\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^N)} \leq A_{q',q} \|f\|_{\mathcal{L}^{q'}(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.90)$$

### Demostración de la Estimación de Strichartz

Aclaremos: no se estudiara el caso de los extremos ( $r = \frac{2N}{N-2}$  o  $\rho = \frac{2N}{N-2}$ ) para ello consultar el artículo [11].

Definamos los siguientes operadores  $\Psi$  y  $\Theta_t$ :

$$\Psi_f(s) = \int_s^T \tau(s-t)f(t)dt \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.91)$$

$$\Theta_{t,f}(s) = \int_0^t \tau(s-\sigma)f(\sigma)d\sigma \quad \forall s \in [0, T]. \quad (3.92)$$

$\Psi_f$  y  $\Theta_{t,f}$  son continuas de  $\mathcal{L}_{loc}^1([0, T], \mathbb{H}^{-1}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{H}^{-1})$ .

Sean  $(q, r)$  pares admisibles, los mapeos  $\Psi_f(s)$ ,  $\Phi_f(s)$  y  $\Theta_{t,f}(s)$ , son continuos de  $\mathcal{L}^{q'}((0, T), \mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^N))$  a  $\mathcal{L}^q((0, T), \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N))$ . Vamos a demostrar Por densidad, necesitamos solamente considerar a  $f \in C_c([0, T], \mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^N))$ . La demostración que a continuación se ofrece es para  $\Phi_f$  ya que es el resultado relevante, la demostraciones de  $\Phi_f(s)$  y  $\Theta_{t,f}(s)$  son análogas. Por el teorema (3.65)

$$\begin{aligned} \|\Phi_f(t)\|_{\mathcal{L}^r} &= \left\| \int_s^T \tau(s-t)f(t)dt \right\|_{\mathcal{L}^r} \leq \\ &\int_0^t (4\pi|t-s|)^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} dt \leq \int_0^T |t-s|^{-\frac{2}{q}} \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} dt, \end{aligned} \quad (3.93)$$

Es decir:

$$\|\Phi_f(t)\|_{\mathcal{L}^r} \leq \int_0^T |t-s|^{-\frac{2}{q}} \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} dt,$$

de esta última ecuación podemos notar que el lado derecho define un potencial de Riesz (3.88) y por el teorema (23) se tiene:

$$\begin{aligned} |||\Phi_f(t) : S||| &\leq A_{q',q} \left\| \int_0^T |t-s|^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} dt \right\|_{\mathcal{L}^{q'}} \\ |||\Phi_f(t) : R||| &\leq C_{q,q'} |||f(s) : R' |||. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Ahora veamos los exponentes: vemos que  $-\frac{2}{q} = -n + \alpha$ , y  $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'} - \frac{\alpha}{N}$ , lo cual muestra una dependencia de  $q'$  con  $q$ , por lo que se obtiene:

$$|||\Phi_f(t) : S||| \leq C_q |||f(s)|||. \quad (3.95)$$



$\forall (q, r)$  pares admisibles, vamos a demostrar que  $\Phi_f, \Psi_f, \Theta_{t,f}$  son continuos de  $\mathcal{L}^{q'}((0, T), \mathcal{L}^{r'}(\mathbb{R}^N))$  a  $C([0, T], \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N))$ . Por la densidad de  $\overline{C_c([0, T], \mathcal{L}^{r'})} = \mathcal{L}^{q'}([0, T], \mathbb{R}^N)$ , solamente necesitamos considerar el caso  $f \in C_c([0, T], \mathcal{L}^{r'})$ . Por el encaje  $\mathcal{L}^{r'} \hookrightarrow \mathbb{H}^{-1}$  y aplicando el operador  $(\mathfrak{J} - \varepsilon\Delta)^{-1}$ , se sigue que  $f \in C_c([0, T], \mathcal{L}^{r'}) \cap C_c([0, T], \mathcal{L}^2)$ . Vamos a demostrar que esto implica que  $\Phi_f \in C([0, T], \mathcal{L}^2)$

$$\begin{aligned}
\|\Phi_f(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \left\langle \int_0^t \tau(t-s)f(s)ds, \int_0^t \tau(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma \right\rangle_{\mathcal{L}^2} = \\
&= \int_0^t \int_0^t \langle \tau(t-s)f(s), \tau(t-\sigma)f(\sigma) \rangle_{\mathcal{L}^2} dsd\sigma = \\
&= \int_0^t \int_0^t \langle f(s), \tau(t-s)^* \tau(t-\sigma)f(\sigma) \rangle_{\mathcal{L}^2} dsd\sigma = \\
&= \int_0^t \int_0^t \langle f(s), \tau(-t+s)\tau(t-\sigma)f(\sigma) \rangle_{\mathcal{L}^2} dsd\sigma = \\
&= \int_0^t \int_0^t \langle f(s), \tau(-t+s+t-\sigma)f(\sigma) \rangle_{\mathcal{L}^2} dsd\sigma = \\
&= \int_0^t \int_0^t \langle f(s), \tau(s-\sigma)f(\sigma) \rangle_{\mathcal{L}^2} dsd\sigma = \\
&= \int_0^t \langle f(s), \int_0^t \tau(s-\sigma)f(\sigma) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds = \\
&= \int_0^t \langle f(s), \Theta_{t,f}(s) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Ahora aplicando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\langle f(s), \Theta_{t,f} \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \|f(s)\Theta_{t,f}(s)\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} \|\Theta_{t,f}(s)\|_{\mathcal{L}^r}, \quad \frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1, \\
\int_0^t \langle f(s), \Theta_{t,f} \rangle_{\mathcal{L}^2} ds &\leq \int_0^t \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} \|\Theta_{t,f}(s)\|_{\mathcal{L}^r} ds \leq \\
\| \|f\|_{\mathcal{L}^{r'}} \| \| \mathcal{L}^{q'}(0,T) \| \| \Theta_{t,f} \|_{\mathcal{L}^r} \| \mathcal{L}^q(0,T) \| &, \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1 \tag{3.97} \\
&\leq \| \|f : R' \| \| \| \Theta_{t,f} : R \| \| \\
&\leq \| \|f : R' \| \| C \| \|f : R' \| \| \\
&\leq C \| \|f : R' \| \|^2.
\end{aligned}$$

en el cuarto renglón tenemos para  $\Theta_{t,f}$  también se cumple una desigualdad

análoga a (3.95), lo cual justifica las desigualdades, concluyendo que:

$$\|\Phi_f(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C \|f : R'\|^2.$$

Vamos a demostrar que  $\forall (q, r)$  par admisible,  $\Phi_f$  es continua de  $\mathcal{L}^1((0, T), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N))$  a  $\mathcal{L}^q((0, T), \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N))$ .

Sea  $f \in \mathcal{L}^1((0, T), \mathcal{L}^2)$  y consideremos a  $\varphi \in C_c([0, T], \mathcal{D}(\mathbb{R}^N))$ , así tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \Phi_f(t), \varphi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} dt &= \int_0^T \int_0^t \langle \tau(t-s)f(s), \varphi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds dt = \\ &= \int_0^T \int_0^t \langle f(s), \tau(s-t)\varphi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds dt = \\ &= \int_0^T \langle f(s), \int_0^t \tau(s-t)\varphi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds dt = \\ &= \int_0^T \langle f(s), \Psi_\varphi(s) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Ahora aplicaremos la desigualdad Cauchy-Schwartz,

$$|\langle f(s), \Psi_\varphi(s) \rangle_{\mathcal{L}^2}| \leq \|f(s)\|_{\mathcal{L}^2} \|\Psi_\varphi(s)\|_{\mathcal{L}^2}, \quad (3.99)$$

integrando ambos lados con respecto a  $s$  sobre  $[0, T]$

$$\int_0^T |\langle f(s), \Psi_\varphi(s) \rangle_{\mathcal{L}^2}| ds \leq \int_0^T \|f(s)\|_{\mathcal{L}^2} \|\Psi_\varphi(s)\|_{\mathcal{L}^2} ds, \quad (3.100)$$

Aplicando ahora la desigualdad de Hölder:

$$\int_0^T \|f(s)\|_{\mathcal{L}^2} \|\Psi_\varphi(s)\|_{\mathcal{L}^2} ds \leq \left( \int_0^T (\|f(s)\|_{\mathcal{L}^2})^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^T (\|\Psi_\varphi(s)\|_{\mathcal{L}^2})^q ds \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.101)$$

donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  con  $1 \leq p, q \leq \infty$ , consideremos el caso  $p = 1$  y  $q = \infty$

$$\left| \int_0^T \langle \Phi_f(t), \varphi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} dt \right| \leq \|f : S\| \|\Psi_\varphi : B\|. \quad (3.102)$$

Definamos los siguientes pares admisibles  $(\gamma, \rho)$  y  $(q, r)$  con  $\theta \in [0, 1]$ , tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{\rho} + \frac{1-\theta}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{\gamma} + \frac{1-\theta}{\infty}, \quad (3.103)$$

$$\|\Phi_f\|_{\mathcal{L}^q([0,T],\mathcal{L}^r)} \quad P = q, Q = r \quad \Rightarrow \quad (3.104)$$

$P$  es un 2-vector, así que  $(\frac{1}{r}, \frac{1}{q})$ , como (3.103) llegamos a:

$$\left(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\infty}\right).$$

Identificamos a  $R = (\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\gamma})$  y  $Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\infty})$ , entonces definimos a  $P = Q + R$ .

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \|\|\Phi_f : \theta P\|\| &= \|\|\Phi_f^\theta \Phi_f^{1-\theta} : \theta(R+Q)\|\| \leq \|\|\Phi_f^\theta : \theta R\|\| \|\|\Phi_f^{1-\theta} : (1-\theta)Q\|\| = \\ \|\|\Phi_f : R\|\|^\theta \|\|\Phi_f : Q\|\|^{1-\theta} &\leq C \|\|f : (\frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\gamma'})\|\|^\theta \|\|f : (\frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\gamma'})\|\|^{1-\theta} \leq C \|\|f : R'\|\|. \end{aligned} \quad (3.105)$$

si  $R' = (\frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\gamma'})$

por lo tanto:

$$\|\|\Phi_f : R\|\| \leq C \|\|f : R'\|\|. \quad (3.106)$$

y con ello se ha demostrado la aseveración *ii*) del teorema.

Para la primera aseveración del teorema, vamos a definir:

$$\Lambda_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-s)f(s)ds \quad \text{y} \quad \Gamma_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(-t)f(t)dt. \quad (3.107)$$

tomemos la norma de  $\|\Lambda_f(t)\|_{\mathcal{L}^r}$

$$\begin{aligned} \|\Lambda_f(t)\|_{\mathcal{L}^r} &\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-s)f(s)ds \right\|_{\mathcal{L}^r} = \sqrt[r]{\int_0^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tau(t-s)f(s)ds \right)^r d\tilde{s}} \leq \\ &\int_0^T \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\tau(t-s)f(s)|^r ds d\tilde{s} \right) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\tau(t-s)f(s)\|_{\mathcal{L}^r} ds. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Sean  $(q, r)$  pares admisibles  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_f(t)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \tau(-s)f(s)ds, \int_{-\infty}^{\infty} \tau(-\sigma)f(\sigma)d\sigma \right\rangle = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tau(-s)f(s), \tau(-\sigma)f(\sigma) \rangle ds d\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(s), \tau(-s)^* \tau(-\sigma)f(\sigma) \rangle ds d\sigma = \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(s), \tau(s-\sigma)f(\sigma) \rangle ds d\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(s), \Lambda_f(t) \rangle ds d\sigma. \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tau(-t)\varphi, \psi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} dt \right| &= \langle \varphi, \int_{-\infty}^{\infty} \tau(-t)\psi(t) ds \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle \varphi, \Gamma_\psi \rangle_{\mathcal{L}^2} \leq |\langle \varphi, \Gamma_\psi \rangle_{\mathcal{L}^2}| \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2} \|\Gamma_\psi\|_{\mathcal{L}^2} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2} \|\psi : S'\|. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Ahora definamos:

$$\|\tau(t)\psi(t) : S\| = \sup \left\{ \int_0^T \langle \tau(t)\varphi, \psi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} ds; \varphi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^N), \|\psi : S'\| = 1 \right\}.$$

así aplicando el supremo a (3.110), se obtiene:

$$\begin{aligned} \sup \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tau(-t)\varphi, \psi(t) \rangle_{\mathcal{L}^2} dt &\leq \sup C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2} \|\psi : S'\| \\ \|\tau(t)\psi : S'\| &\leq C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

q.e.d.

**COROLARIO 4.** Sea  $I = (T, \infty)$  para alguna  $T \geq -\infty$  ( $I = (-\infty, T)$  para alguna  $T \leq \infty$ ) y sea  $J = \bar{I}$ . Sea  $(\gamma, \rho)$  un par admisible, y sea  $f \in \mathcal{L}^\gamma(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$ . Se sigue que la función

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_t^\infty \tau(t-s)f(s)ds \quad (\text{si } I = (\infty, T), \Phi_f(t) = \int_t^{-\infty} \tau(t-s)f(s)ds). \quad (3.112)$$

tomará sentido para cada  $t \in J$  como el límite uniforme en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ , cuando  $m \rightarrow \infty$  ( $m \rightarrow -\infty$ ) de las funciones

$$\Phi_f^m(t) = \int_t^m \tau(t-s)f(s)ds, \quad \forall t \in J. \quad (3.113)$$

Tenemos además que para cada par admisibles  $(q, r)$ ,  $\Phi_f \in \mathcal{L}^q(I, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(J, \mathcal{L}^2((\mathbb{R}^N)^N))$ . Más aún, existe una constante  $C$  tal que

$$\|\Phi_f\|_{\mathcal{L}^q(I, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N))} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))}, \quad \forall f \in \mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N)). \quad (3.114)$$

**Demostración**

Tomemos  $I = (T, \infty)$ , sea  $j, m \in \mathbb{Z}$ ,  $T < j < m$ ,  $\forall t \in J$ , entonces tomando

las siguientes sucesiones  $\Phi(t)_f^m$  y  $\Phi(t)_f^j$ , tomando la norma:

$$\begin{aligned}
& \|\Phi(t)_f^m - \Phi(t)_f^j\|_{\mathcal{L}^2} = \|\tau(m-t)(\Phi(t)_f^m - \Phi(t)_f^j)\|_{\mathcal{L}^2} = \\
& \|\tau(m-t)\left(\int_t^m \tau(t-s)f(s)ds - \int_t^j \tau(t-s)f(s)ds\right)\|_{\mathcal{L}^2} = \\
& \left\| \int_t^m \tau(m-t)\tau(t-s)f(s)ds - \int_t^j \tau(m-t)\tau(t-s)f(s)ds \right\|_{\mathcal{L}^2} = \\
& \left\| \int_t^m \tau(m-t+t-s)f(s)ds - \int_t^j \tau(m-t+t-s)f(s)ds \right\|_{\mathcal{L}^2} = \\
& \left\| \int_t^m \tau(m-s)f(s)ds - \int_t^j \tau(m-s)f(s)ds \right\|_{\mathcal{L}^2} = \left\| \int_j^m \tau(m-s)f(s)ds \right\|_{\mathcal{L}^2}.
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Por la estimación de Strichartz (3.87), sabemos que existe una cota para el último término de arriba, por lo que

$$\|\Phi(t)_f^m - \Phi(t)_f^j\|_{\mathcal{L}^2} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}((j,\infty),\mathcal{L}^{\rho'})}. \tag{3.116}$$

por lo que  $\Phi(t)_f^m$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{L}^\infty(I, \mathcal{L}^2)$  tal que

$$\|\Phi(t)_f^m\|_{\mathcal{L}^\infty(I, \mathcal{L}^2)} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}((j,\infty),\mathcal{L}^{\rho'})}. \tag{3.117}$$

Pero entonces también es una sucesión de Cauchy en  $C(J, \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N))$  Tomemos un par admisible  $(q, r)$ , se sigue también de la misma estimación (3.87) la existencia de una  $C$  tal que

$$\|\Phi(t)_f^m\|_{\mathcal{L}^q(I, \mathcal{L}^r)} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}((j,\infty),\mathcal{L}^{\rho'})} \tag{3.118}$$

para  $j \in \mathbb{N}, j \geq T$ , definamos a  $f_j \in \mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$  como

$$f_j(t) = \begin{cases} f(t) & : \text{ si } t \leq j \\ 0 & : \text{ si } t > j \end{cases}$$

así en el  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j \rightarrow f$  y  $f \in \mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))$ . Como tenemos (3.117) y por la definición de  $f_j$  podemos ver que:

$$\Phi_{f_j}(t) \rightarrow \Phi_f(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N), \tag{3.119}$$

$$\|\phi(t)_f^m - \phi_f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f_j - f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}} \lim_{j \rightarrow \infty} C\|f_j - f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}} \rightarrow 0 \tag{3.120}$$

por lo tanto

$$\|\Phi_{f_j}(t) - \Phi_f(t)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0.$$

uniformemente en  $t \in J$

Si  $m \geq j$  se tiene lo siguiente:

$$\Phi_{f_j}^m(t) = \int_t^m \tau(t-s)f_j = \int_t^j \tau(t-s)f(s)ds + \int_j^m 0ds, \quad (3.121)$$

por lo que notamos que  $\Phi_{f_j}^m$  es independiente de  $m$ . Si  $T \leq j \leq k$ , deducimos de (3.118) que

$$\|\Phi_{f_j} - \Phi_{f_j}\|_{\mathcal{L}^q(I, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N))} \leq C\|f_j - f_k\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))} \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}((j,k), \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))}$$

En particular  $\Phi_{f_j}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{L}^q(I, \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N))$ . Como tenemos por (3.118) entonces tiene  $\Phi_{f_j}$  un límite  $\psi$  tal que:

$$\|\psi\| \leq C\|f\|_{\mathcal{L}^{\gamma'}(I, \mathcal{L}^{\rho'}(\mathbb{R}^N))}. \quad (3.122)$$

Por lo tanto existe una subsucesión, la cual llamaremos  $f_j$ , tal que  $\Phi_{f_j}(t) \rightarrow \psi(t)$  en  $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^N)$  para toda a.a.  $t \in I$ ., se infiere que  $\psi(t) = \Phi_f(t)$  a.e. en  $I$ .

**q. e. d.**

En el capítulo 2 se habló de la estimación de Strichartz (2.20):

$$\|U(t)\phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c|t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\phi\|_{\mathcal{L}^{p'}} \quad t \neq 0,$$

que no se demostró, en este contexto será más fácil su demostración con el siguiente argumento: aplicaremos el teorema de interpolación [15], para ello se les asignará los siguientes valores a las variables descritas por el teorema  $p_1 = 1, p_2 = 2, q_1 = \infty, q_2 = 2, M_1 = c|t|^{-\frac{N}{2}}, M_2 = 1$ . Usando las ecuaciones de los coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}; & \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2} & \text{sustituyendo :} \\ \frac{1}{p} &= \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}; & \frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} & (3.123) \\ \frac{1}{p} &= 1 + \frac{\theta}{2}; & \frac{1}{q} &= \frac{\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} = \frac{q-1}{q}$  rememorando la hipótesis ( $\mathcal{L}^{p'}$ , con  $p' = \frac{p}{p-1}$ ), concluimos que  $q = p$ , por lo tanto  $\theta = \frac{2}{p}$ , entonces sustituyendo estos valores en la estimación:

$$\begin{aligned} \|U(t)\phi\|_{\mathcal{L}^p} &\leq c|t|^{-N(\frac{1}{2})(1-\frac{2}{p})} \mathbf{1}^{(1-\frac{2}{p})} \|\phi\|_{\mathcal{L}^{p'}} \Rightarrow \|U(t)\phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c|t|^{-N(\frac{1}{2})(1-\frac{2}{p})} \|\phi\|_{\mathcal{L}^{p'}} = \\ &\|U(t)\phi\|_{\mathcal{L}^p} \leq c|t|^{-N(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|\phi\|_{\mathcal{L}^{p'}} \quad t \neq 0. \end{aligned} \tag{3.124}$$

q. e. d.





# Capítulo 4

## Óptica Geométrica

### 4.1. Óptica Geométrica: La deducción física

*Se llama óptica la parte de la física que estudia la naturaleza de la luz y las leyes de su emisión, propagación e interacción con la substancia.* [19]. La parte de la óptica que estudia a la luz propagándose como rayos se le llama óptica geométrica. Estos rayos son las líneas por donde se propaga la luz. Nacida en el siglo XVII, su gran progreso lo recibe por parte de Sir Willian Howard Hamilton y Carl Friedich Gauß.

Hamilton escribía: *Adoptemos la teoría de Huygens (ondulatoria), o la de Newton (emisión), o cualquier otra, para explicar las leyes que gobiernan la propagación de los rayos luminosos, podemos considerar que esas mismas leyes, así como las propiedades y las relaciones de las trayectorias de la luz, merecen un estudio aparte al que puede llamarse óptica matemática*

Óptica geométrica o matemática, nosotros la denominaremos con el primer nombre.

Hamilton concibe un desarrollo similar a la mecánica analítica, adaptando las ideas del cálculo variacional, como la acción, anotaba: *así se tiene el producto del índice del medio por el desplazamiento elemental ds.*

Tanto el principio de Fermat y el de Huygens continúan vigentes en la teoría de Hamilton. Lo que se debe destacar, para nuestra orientación, es la facultad de hablar de onda o de partícula, hecho fundamental en el desarrollo de la mecánica cuántica. Para detalles históricos consultar [18].

Derivemos la ecuación de la óptica geométrica, ¿con qué fin? Determinadas teorías matemáticas han tenido su raíz en la física y el fin de esta

deducción es presentar el origen físico del método de la óptica geométrica de las ecuaciones diferenciales parciales.

Haciendo dicha deducción a partir de un problema de la óptica emergerá la ecuación de la eikonal, la cual será fundamental en las §5.1 y §5.3. El modo en que se buscará la solución al problema físico será la forma en que atacaremos todos los problemas en el resto de la tesis.

Partamos de la ecuación de onda clásica homogénea

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Con  $c$  la velocidad de la luz,  $n$  el índice de refracción del medio. Propongamos como solución a (4.1) una onda monocromática

$$\Phi(\vec{r}, t) = \phi(r)e^{-i\omega t}, \quad (4.2)$$

sustituyendo (4.2) en (4.1). Parte espacial:

$$\Delta\phi(\vec{r}) = \Delta\phi(\vec{r})e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} \Delta\phi(\vec{r}). \quad (4.3)$$

Parte temporal:

$$\begin{aligned} -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\phi(\vec{r})e^{-i\omega t}}{\partial t^2} &= \\ -\phi(\vec{r}) \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial e^{-i\omega t}}{\partial t} \right) &= \\ -\phi(\vec{r}) \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial -i\omega e^{-i\omega t}}{\partial t} &= \\ \phi(\vec{r}) \frac{n^2}{c^2} \omega^2 e^{-i\omega t}. & \end{aligned} \quad (4.4)$$

ligando la parte espacial y temporal

$$\Delta\phi(\vec{r})e^{-i\omega t} + \phi(\vec{r}) \frac{n^2}{c^2} \omega^2 e^{-i\omega t} = 0, \quad (4.5)$$

por lo tanto

$$\Delta\phi(\vec{r}) + \phi(\vec{r}) \frac{n^2\omega^2}{c^2} = 0. \quad (4.6)$$

Donde (4.6) es la ecuación de Helmholtz, que para resolverse se propone una solución de la siguiente forma

$$\phi(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\frac{\omega}{c}L(\vec{r})}. \quad (4.7)$$

Calculando primero  $\Delta\phi(\vec{r})$ , con  $A(\vec{r})$  la amplitud de la onda y  $L(\vec{r})$  la fase, para simplificar la notación omitiremos  $(\vec{r})$  de  $\Delta\phi(\vec{r})$ ,  $A(\vec{r})$  y  $L(\vec{r})$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta A e^{i\frac{\omega}{c}L} &= \nabla \cdot (\nabla A(\vec{r}) e^{i\frac{\omega}{c}L}) = \\
 &= \nabla \cdot \left( (\nabla A + iA \frac{\omega}{c} \nabla L) e^{i\frac{\omega}{c}L} \right) = \\
 (\Delta A + \frac{i\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L + \frac{i\omega}{c} A \Delta L) e^{i\frac{\omega}{c}L} &+ (\nabla A + iA \frac{\omega}{c} \nabla L) (\frac{i\omega}{c} \nabla L) e^{i\frac{\omega}{c}L} = \quad (4.8) \\
 (\Delta A + \frac{i\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L + \frac{i\omega}{c} A \Delta L + \frac{i\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L - A \frac{\omega^2}{c^2} \|\nabla L\|^2) e^{i\frac{\omega}{c}L} &= \\
 (\Delta A + 2\frac{i\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L + \frac{i\omega}{c} A \Delta L - A \frac{\omega^2}{c^2} \|\nabla L\|^2) e^{i\frac{\omega}{c}L}. &
 \end{aligned}$$

Sumando el segundo término del lado izquierdo de (4.6) se consigue:

$$\begin{aligned}
 (\Delta A + 2\frac{i\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L + \frac{i\omega}{c} A \Delta L - A \frac{\omega^2}{c^2} \|\nabla L\|^2) e^{i\frac{\omega}{c}L} + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} A e^{i\frac{\omega}{c}L} &= 0, \quad (4.9) \\
 \Delta A + 2\frac{i\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L + \frac{i\omega}{c} A \Delta L - A \frac{\omega^2}{c^2} \|\nabla L\|^2 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} A &= 0.
 \end{aligned}$$

Agrupando la partes real e imaginaria respectivamente:  
real:

$$\Delta A - A \frac{\omega^2}{c^2} \|\nabla L\|^2 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} A = 0, \quad (4.10)$$

imaginaria:

$$2\frac{\omega}{c} \nabla A \cdot \nabla L + \frac{\omega}{c} A \Delta L = 0. \quad (4.11)$$

multiplicando (4.10) por  $\frac{c^2}{\omega^2} A^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\Delta A}{A} - \|\nabla L\|^2 + n^2 &= 0, \quad (4.12) \\
 \|\nabla L\|^2 &= n^2 + \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\Delta A}{A}.
 \end{aligned}$$

Recordando que:  $\frac{\lambda}{2\pi} = \lambda_0 = \frac{c}{\omega}$  induce a que (4.12) este escrita de la siguiente manera:

$$\|\nabla L\|^2 = n^2 + \lambda_0^2 \frac{\Delta A}{A}. \quad (4.13)$$

En 1905, Einstein, en su teoría especial de la relatividad, estableció que la velocidad de la luz es constante para todos los observadores inerciales; el

valor de su velocidad en el vacío es de  $3 \times 10^8 \frac{m}{s}$ , esto se calcula con la ecuación  $c = \lambda\nu$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $\lambda$  la longitud de onda (m) y  $\nu$  es la frecuencia (Hz).

Una característica de la radiación electromagnética visible estriba en que la longitud de onda es pequeña y por lo dicho en el párrafo anterior, podemos despreciar el tamaño de  $\lambda$ , *i.e.*  $\lambda \rightarrow 0$ , entregándonos una primera aproximación de la propagación de la luz; si  $\lambda \rightarrow 0$  entonces la frecuencia se vuelve muy alta, con lo cual:

$$\begin{aligned} \|\nabla L\|^2 &= n^2, \\ \|\nabla L\| &= n\|\vec{r}'\|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

que es la ecuación de la eikonal.<sup>1</sup>

Definamos los frentes de onda como las superficies de nivel  $L(\vec{r}) = \text{cte}$ .

Como tenemos la ecuación de la eikonal, entonces la constante es igual a  $n$  por lo tanto  $L(\vec{r}) = n$

Consideremos una curva ortogonal  $\bar{x} = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  a  $L(\vec{r})$  en algún punto, donde  $s$  es la parametrización de la longitud de arco de la curva, entonces por la ecuación de la Eikonal tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = n \frac{\partial x^i}{\partial s}, \quad i = \{1, 2, 3\}. \quad (4.15)$$

Si derivamos con respecto a  $s$  ambos lados de (4.15)

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial s} \left( n \frac{\partial x^i}{\partial s} \right), \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial n}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial s} \left( n \frac{\partial x^i}{\partial s} \right). \quad (4.17)$$

Pues  $x'(s) = \left( \frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds} \right)$  es tangente a la curva  $\bar{x}$  en dicho punto. Y estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Cerramos esta sección con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \|\nabla L\| \\ n &= \frac{dL}{ds} \end{aligned} \quad (4.18)$$

<sup>1</sup>Del griego  $\epsilon\iota\kappa\tilde{\omega}\nu$  que significa imagen

## 4.2. Óptica Geométrica: la generalización matemática

Ahora generalizaremos lo que se dedujo de §4.1. Empleemos nuevamente a la ecuación de onda clásica y homogénea, que pertenece al conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad \mathbb{R}^N \times [0, \infty), \quad (4.19)$$

definamos a  $u(x, t) = u_\varepsilon(x, t)$  con  $\varepsilon > 0$ , éste último un parámetro, el cual haremos tender a cero. Propongamos el siguiente *ansatz* como solución

$$u_\varepsilon(x, t) = a^\varepsilon(x, t) e^{\frac{iP^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}}. \quad (4.20)$$

Agregemos las siguientes hipótesis:  $a^\varepsilon(x, t)$  es una sucesión de amplitudes las cuales en el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a^\varepsilon(x, t) = a(x, t)$ , la amplitud final cuando la frecuencia es muy alta. De manera análoga  $P^\varepsilon(x, t)$  como sucesión de fases, que en  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P^\varepsilon(x, t) = P(x, t)$ , cuando la frecuencia es muy elevada. Identificando a  $a(x, t)$  y a  $P(x, t)$  la amplitud y la fase, respectivamente, de la solución propuesta.

Una pausa: uno de los métodos “populares” para resolver ecuaciones diferenciales parciales es el de separación de variables, que no se empleará ¿por qué? Porque requerimos conocer la evolución espacio temporal, *i.e.* la dinámica total del sistema. Retornando, sustituyamos (4.20) en (4.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u_\varepsilon &= 0, \\ \frac{\partial^2 a^\varepsilon(x, t) e^{\frac{iP^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}}}{\partial t^2} - \Delta a^\varepsilon(x, t) e^{\frac{iP^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Calculando el primer término del lado izquierdo de (4.21)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 a^\varepsilon(x, t) e^{\frac{iP^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}}}{\partial t^2} = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a^\varepsilon e^{\frac{iP^\varepsilon(x, t)}{\varepsilon}}}{\partial t} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} = \quad (4.22) \\
\left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial t^2} \right) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} &+ \left( \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right) \left( \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} = \\
&= \left[ \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right] e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

El segundo término del lado izquierdo de (4.21)

$$\begin{aligned}
\Delta a^\varepsilon e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} &= \\
\nabla(\nabla a^\varepsilon e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}}) &= \\
\nabla \left[ (\nabla a^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \nabla P^\varepsilon) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} \right] &= \quad (4.23) \\
\left( \Delta a^\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \nabla P^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \Delta P^\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \nabla P^\varepsilon - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla P^\varepsilon)^2 \right) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} &= \\
\left( \Delta a^\varepsilon + \frac{2i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \nabla P^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \Delta P^\varepsilon - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla P^\varepsilon)^2 \right) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} &.
\end{aligned}$$

por lo que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ , esta se reescribirá como:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right] \\
&- \left( \Delta a^\varepsilon + \frac{2i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \nabla P^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \Delta P^\varepsilon - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla P^\varepsilon)^2 \right) e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} = 0. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Como queremos que (4.24) sea igual a cero  $\forall(x, t)$  entonces necesitamos que:

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right] \\
&- \left( \Delta a^\varepsilon + \frac{2i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \nabla P^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \Delta P^\varepsilon - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla P^\varepsilon)^2 \right) = 0. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Examinando la estructura de la ecuación (4.25) notamos lo complejo que será averiguar la solución. Tomemos por ello la parte real de ésta y consigui-mos:

$$\frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \Delta a^\varepsilon + \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla P^\varepsilon)^2 = 0, \quad (4.26)$$

multipliquemos (4.26) por  $\varepsilon^2$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \Delta a^\varepsilon + \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla P^\varepsilon)^2 \right) &= 0 \\ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta a^\varepsilon \right) &= a^\varepsilon \left( \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - (\nabla P^\varepsilon)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

tomando el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  y aplicando las hipótesis sobre las sucesiones, conseguimos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta a^\varepsilon \right) \right] &= a \left( \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 - (\nabla P)^2 \right) \\ 0 &= a \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 - a (\nabla P)^2 \\ -a \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 &= -a (\nabla P)^2 \\ \frac{\partial P}{\partial t} \pm |\nabla P| &= 0, \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Notemos entonces que (4.28) es una ecuación del tipo Hamilton-Jacobi. Recordemos que éste formalismo nos da indicaciones sobre el frente de onda, cuya fase está dada por la integral de tiempo de la lagrangiana clásica del sistema. Esta ecuación, la Hamilton-Jacobi, nos dice que al imponer el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  la longitud de onda se puede despreciar, ya que la frecuencia es muy alta y como vimos en la sección anterior, esto hace que podamos hacer uso del concepto de rayos, estos vienen con la solución (4.15).

Introduzcamos el siguiente operador para generalizar (4.19)

$$L = \sum_{k,j=1}^n a^{kl}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}, \quad a^{kl} = a^{lk}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n, \quad (4.29)$$

ahora la ecuación (4.19) queda para trabajar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k,j=1}^n a^{kl}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad (4.30)$$

propongamos como solución el mismo *ansatz* y sustituyámoslo en la ecuación (4.30)

$$\frac{\partial^2 a^\varepsilon e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}}}{\partial t^2} - \sum_{k,j=1}^n a^{kl}(x) \frac{\partial^2 a^\varepsilon e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}}}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad (4.31)$$

extrapolando las soluciones obtenidas para (4.18) llegamos

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 \right. \\ & \left. - \left( \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{2i}{\varepsilon} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial^2 P^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \right) \right] e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}} = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

suprimiendo a  $e^{\frac{iP^\varepsilon}{\varepsilon}}$ , por las razones antes expuestas y *mutatis mutandis* como se procedió con (4.24), la parte real de (4.32) es:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = 0 \\ & \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} \left( \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_l} \right) \quad (4.33) \\ & a^\varepsilon \left( \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_l} \right). \end{aligned}$$

nuevamente veremos su comportamiento en el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  de (4.33)

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ a^\varepsilon \left( \left( \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial P^\varepsilon}{\partial x_l} \right) = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial t^2} - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial^2 a^\varepsilon}{\partial x_k \partial x_l} \right) \right] \\ & a \left( \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 - \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_l} \right) = 0 \\ & \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)^2 = \sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_l} \quad (4.34) \\ & \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right) = \sqrt{\sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_l}}. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial P}{\partial t} \pm \sqrt{\sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_l}} = 0, \quad \mathbb{R}^N \times (0, \infty]. \quad (4.35)$$



La ecuación deducida (4.35) es nuevamente del tipo Hamilton-Jacobi, agregando más sobre esta ecuación: la primera sería que es más sencilla de resolver, pues en algunos casos lo que se tiene es una ecuación diferencial parcial de primer orden, cuya solución la podemos hallar por métodos ya conocidos.

La inquietud hace emerger el siguiente cuestionamiento: ¿cómo se propaga una perturbación de éste tipo en el espacio y tiempo, dada la condición inicial? El siguiente teorema otorga la respuesta

**TEOREMA 24.** *Asumamos  $u$  es una solución suave para la ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico  $\frac{\partial P}{\partial t} \pm \sqrt{\sum_{k,j=1}^n a^{kl} \frac{\partial P}{\partial x_k} \frac{\partial P}{\partial x_l}} = 0$ . Si  $u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$ , en  $C_0$ , entonces  $u \equiv 0$  dentro del cono  $C$ .*

**Demostración**

Definamos al operador de energía<sup>2</sup> como:

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{C_t} u_t + \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} u_{x_i} u_{x_j} dx,$$

He introduzcamos los siguientes conjuntos:  $C_t = \{x | q(x) \leq t_0 - t\}$  que es la sección transversal de  $C$  al tiempo  $t$ .  $C := \{(x, t) | P(x, t) < 0\} = \{(x, t) | q(x) < t_0 - t\}$ .

Derivemos la ecuación del operador de energía

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} &:= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{C_t} u_t^2 + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \right) = \\ &\frac{1}{2} \int_{C_t} 2u_t u_{tt} + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j t} dx - \frac{1}{2} \int_{\partial C_t} (u_t^2 + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \frac{1}{|D_q|} ds. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Sean:

$$\begin{aligned} A &= \int u_t u_{tt} + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j t} dx, \\ B &= -\frac{1}{2} \int_{C_t} (u_t^2 + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \frac{ds}{|D_q|}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

---

<sup>2</sup>Éste operador lleva el nombre de operador de energía porque se derivó del concepto de energía de la física, más sin embargo no siempre nos da información sobre la energía del sistema.

tomemos  $a^{ij}u_{x_i}u_{x_jt}$  y hagamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} ((a^{ij}u_{x_i})u_t)_{x_j} &= (a^{ij}u_{x_i})_{x_j}u_t + (a^{ij}u_{x_i}u_{x_jt}) \\ (a^{ij}u_{x_i}u_{x_jt}) &= ((a^{ij}u_{x_i})u_t)_{x_j} - (a^{ij}u_{x_i})_{x_j}u_t. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Introduzcamos en  $A$  y usando la fórmula de integración por partes (ver la §4 del Capítulo 1, el Teorema de Fórmula de integración por partes, ecuación (1.77):

$$\begin{aligned} A &= \int_{C_t} u_t u_{tt} - \sum (a^{ij}u_{x_i})_{x_j} u_t + \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij}u_{x_i}) \nu^j u_t ds \\ &= \int_{C_t} u_t (u_{tt} - \sum (a^{ij}u_{x_i})_{x_j}) + \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij}u_{x_j}) \nu^j u_t ds, \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde  $\nu^j$  es la  $j$ -ésima es la entrada del vector normal unitario a  $\partial C_t$ . Desarrollando  $(a^{ij}u_{x_i})_{x_j} = a^{ij}_{x_j}u_{x_i} + a^{ij}u_{x_i x_j}$  sustituyendo en (4.39) tenemos que:

$$= \int_{C_t} u_t (u_{tt} - \sum a^{ij}_{x_j} u_{x_i} - \sum a^{ij} u_{x_i x_j}) + \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij} u_{x_i}) \nu^j u_t ds. \quad (4.40)$$

Reencontrándonos con el conocido operador  $u_{tt} - \sum a^{ij}u_{x_i x_j} = 0$  por lo tanto

$$A = - \int_{C_t} u_t \sum a^{ij}_{x_j} u_{x_i} + \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij} u_{x_i}) \nu^j u_t ds. \quad (4.41)$$

Apliquemos la desigualdad de Cauchy-Schwartz generalizada (ver [5] apéndice B.2) a la parte de la frontera y excluyendo la parte dependiente del tiempo se tiene:

$$| \sum a^{ij} u_{x_i} \nu^j | \leq \sqrt{\sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}} \sqrt{\sum a^{ij} \nu^i \nu^j}, \quad (4.42)$$

tomando que  $q = t_0 - t$  sobre  $\partial C_t$  y  $\nu = \frac{Dq}{|Dq|}$  (apoyándonos en que el gradiente siempre es perpendicular a la superficie de nivel)

$$| \sum a^{ij} u_{x_i} \nu^j | \leq \sqrt{\sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}} \left| \frac{1}{|Dq|} \right|. \quad (4.43)$$

esto último se cumple porque

$$\begin{cases} \sum a^{ij} q_{x_i} q_{x_j} = 1 & q > 0 \in R^N - \{0\} \\ q(x_0) = 0. \end{cases}$$

Arribamos al siguiente resultado

$$\sum a^{ij} \nu^i \nu^j = \sum a^{ij} \frac{q_{x_i} q_{x_j}}{|Dq|^2} = \frac{1}{|Dq|^2}, \quad (4.44)$$

con la desigualdad de Cauchy y tomando el valor absoluto de  $|A|$

$$\begin{aligned} |A| &= \left| - \int u_t \sum a_{x_j}^{ij} u_{x_i} + \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij} u_{x_i}) \nu^j u_t ds \right| \\ &\leq \left| \int u_t \sum a_{x_j}^{ij} u_{x_i} dx \right| + \left| \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij} u_{x_i}) \nu^j u_t ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int |u_t|^2 + \frac{1}{2} \left| \int \sum a_{x_j}^{ij} u_{x_i} dx \right| + \left| \int_{\partial C_t} \sum (a^{ij} u_{x_i}) \nu u_t ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int |u_t|^2 + \frac{1}{2} \int \left| \sum a_{x_j}^{ij} u_{x_i} \right| dx + \int_{\partial C_t} \left| \sum a^{ij} u_{x_i} \right| |u_t| ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int |u_t|^2 + \frac{1}{2} \int \left| \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right| \left| \sum a^{ij} \right| dx + \frac{1}{2} \int_{C_t} \sqrt{\sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}} |u_t| \frac{1}{|Dq|} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int |u_t|^2 + \int \left| \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right| \frac{1}{2} \int \left| \sum a^{ij} \right| dx + \frac{1}{2} \int_{\partial C_t} (u_t^2 + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \frac{1}{|Dq|} ds \\ &\leq C \left( \frac{1}{2} \int |u_t|^2 + \int \left| \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \right| \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial C_t} (u_t^2 + \sum a^{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \frac{1}{|Dq|} ds, \end{aligned} \quad (4.45)$$

*i.e.*

$$\begin{aligned} |A| \leq Ce(t) + B &\Rightarrow A - B \leq Ce(t) \\ \frac{de(t)}{dt} &\leq Ce(t). \end{aligned} \quad (4.46)$$

aplicando lo que se dijo de  $C$  y  $C_t$

$$e(0) = 0.$$

ahora aplicando el lema de Gronwall [5] a la implicación de (4.46) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} \leq Ce(t) \quad \in [0, T] \quad \text{y} \quad e(0) = 0, \\ \Rightarrow e(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

y usando la hipótesis  $u_t \equiv 0 \equiv Du \Rightarrow u \equiv 0$ .

q. e. d.



# Capítulo 5

## El método WKB

*La evidencia empírica nunca puede establecer la existencia matemática; ni puede la necesidad de una demostración de existencia ser descartada por el físico como un “rigor” innecesario. Sólo una prueba matemática de existencia puede asegurar que la descripción matemática de un fenómeno tiene sentido.*

*Richard Courant*

### 5.1. WKB para la ecuación de Schrödinger lineal

Del Principio de Correspondencia, propuesto en 1918, por Niels Bohr <sup>1</sup> sabemos que algunos fenómenos cuánticos se pueden reducir a casos de la física clásica, tomando  $\lim \hbar \rightarrow 0$ . De manera innata se cuestiona uno ¿podrían existir casos en donde las partículas se comporten de una forma “clásica”? Sin embargo lo que más podemos aspirar en este caso es que dicha partícula se comporte de forma “aproximadamente clásica” y es a este comportamiento al que llamamos “semiclásico”.

En este contexto una pregunta fundamental que queremos resolver es el de encontrar soluciones de la ecuación de Schrödinger lineal mediante apro-

---

<sup>1</sup>El embrión del Principio de Correspondencia se puede rastrear en el artículo donde propone el modelo atómico cuántico para el hidrógeno, en el año de 1913. Ese mismo año (1913) Bohr en una conferencia dada ante la Sociedad de Física de Copenhague hacia hincapié en que “debía existir una correspondencia entre la teoría cuántica y la electrodinámica clásica, aunque limitada a la igualdad de las frecuencias en el caso de vibraciones de baja frecuencia”.

ximaciones a una solución clásica de una ecuación de ondas. Este tipo de método para hallar soluciones es lo que llamamos método WKB o método de aproximación semiclásica<sup>2</sup>. En lo subsecuente vamos a describir de forma detallada dicho método.

Cómo queremos hacer una aproximación clásica consideraremos una solución en que se pueda usar un *ansatz* del tipo propuesto en geometría óptica:

$$\psi(S) = Ae^{\frac{iS}{\hbar}}, \quad (5.1)$$

donde  $S$  es la fase y  $A$  la amplitud.

Como solución para la ecuación estacionaria de Schrödinger lineal y unidimensional.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V\psi = E\psi. \quad (5.2)$$

introduzcamos (5.1) en (5.2)

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} Ae^{\frac{iS}{\hbar}} + VAe^{\frac{iS}{\hbar}} &= EAe^{\frac{iS}{\hbar}}, \\ \frac{-A\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} e^{\frac{iS}{\hbar}} \right) + VAe^{\frac{iS}{\hbar}} &= EAe^{\frac{iS}{\hbar}}, \\ \frac{-A\hbar^2}{2m} \frac{d}{dx} \left( \frac{i}{\hbar} \frac{d}{dx} S e^{\frac{iS}{\hbar}} \right) + VAe^{\frac{iS}{\hbar}} &= EAe^{\frac{iS}{\hbar}}, \\ \frac{-A\hbar^2}{2m} \left( \frac{i}{\hbar} \frac{d}{dx} S + \frac{A}{2m} \left( \frac{d}{dx} S \right)^2 \right) e^{\frac{iS}{\hbar}} + AVe^{\frac{iS}{\hbar}} &= AEe^{\frac{iS}{\hbar}}, \\ \frac{-i\hbar A}{2m} \frac{d^2}{dx^2} S + \frac{A}{2m} \left( \frac{d}{dx} S \right)^2 + AV &= AE, \end{aligned} \quad (5.3)$$

como  $\hbar$  es un parámetro, así en el límite  $\hbar \rightarrow 0$  de (5.3).

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{d}{dx} S \right)^2 + V = E. \quad (5.4)$$

Esta es una ecuación del tipo Hamilton-Jacobi y depende de  $S$ , que ésta es la función característica de Hamilton. El gradiente de  $S$  da:

$$P = \frac{d}{dx} S. \quad (5.5)$$

---

<sup>2</sup>El caso que estudiaremos en esta sección será el unidimensional y lineal, ya que el objetivo principal, por este momento, es exhibir el método WKB.

Así combinando (5.4) y (5.5)

$$\begin{aligned}\frac{A}{2m} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 &= (E - V)A, \\ \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 &= 2m(E - V), \\ \frac{dS}{dx} &= \sqrt{2m(E - V)}, \\ P &= \sqrt{2m(E - V)},\end{aligned}\tag{5.6}$$

que es la forma clásica del momento.

Para que la solución de (5.4) dependa directamente del parámetro  $S$ , deberá depender de  $\hbar$ . Si hacemos una expansión en series de Taylor en torno a  $\hbar$ , entonces podemos reescribir a  $S$  como:

$$S = S_0 + i\hbar S_1 + (i\hbar)^2 S_2 + \dots,\tag{5.7}$$

El hecho de introducir  $i$  en la expansión es para obligar a que aparezcan dos ecuaciones, una sería del tipo Hamilton-Jacobi y la otra ecuación de tipo transporte. Sustituyendo en (5.3)

$$\begin{aligned}-\frac{i\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} (S_0 + i\hbar S_1 + (i\hbar)^2 S_2 + \dots) + \frac{1}{2m} \left( \frac{d}{dx} (S_0 + i\hbar S_1 + (i\hbar)^2 S_2 + \dots) \right)^2 + \\ V = E, \\ -\frac{i\hbar}{2m} \left( \frac{d^2}{dx^2} S_0 + i\hbar \frac{d^2}{dx^2} S_1 + (i\hbar)^2 \frac{d^2}{dx^2} S_2 + \dots \right) + \\ \frac{1}{2m} \left( \left( \frac{d^2}{dx^2} S_0 \right)^2 + 2i\hbar \frac{d}{dx} S_0 \frac{d}{dx} S_1 - 2\hbar^2 \frac{d}{dx} S_2 \frac{d}{dx} S_0 - i\hbar^3 \frac{d}{dx} S_1 \frac{d}{dx} S_2 + \dots \right) + \\ V - E = 0.\end{aligned}\tag{5.8}$$

Agrupando términos y considerando solo hasta la primera potencia tenemos que:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_0}{dx} \right)^2 + V = E\tag{5.9}$$

y

$$\frac{-i\hbar}{2m} \frac{d^2 S_0}{dx^2} + \frac{i\hbar}{m} \frac{dS_1}{dx} \frac{dS_0}{dx} = 0.\tag{5.10}$$

(5.9) es una ecuación Hamilton-Jacobi y (5.10) es una de transporte, con  $i$  y  $\hbar$  la constante de Planck. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2}{2m} + V &= E, \\ \left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 &= 2m(E - V), \\ \frac{dS_0}{dx} &= \sqrt{2m(E - V)},\end{aligned}\tag{5.11}$$

ahora integrando

$$\begin{aligned}\int \frac{dS_0}{dx} dx &= \int P dx, \\ S_0 &= \int P dx.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Tomemos ahora (5.10)

$$\frac{-i\hbar}{2m} \frac{d^2 S_0}{dx^2} + \frac{i\hbar}{m} \frac{dS_1}{dx} \frac{dS_0}{dx} = 0,\tag{5.13}$$

multiplicando por  $\frac{m}{i\hbar}$  se obtiene:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \frac{d^2 S_0}{dx^2} + \frac{dS_1}{dx} \frac{dS_0}{dx} &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 S_0}{dx^2} &= \frac{dS_1}{dx} \frac{dS_0}{dx}, \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 S_0}{dx^2} \left(\frac{dS_0}{dx}\right)^{-1} &= \frac{dS_1}{dx},\end{aligned}\tag{5.14}$$

reescribiendo el lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \frac{dS_0}{dx} = \frac{dS_1}{dx},\tag{5.15}$$

retomando  $P = \left(\frac{dS_0}{dx}\right)$  e integrando, concluimos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int \frac{d \ln P}{dx} dx &= \int \frac{dS_1}{dx} dx, \\ \ln \sqrt{P} &= S_1.\end{aligned}\tag{5.16}$$



Ahora tomemos los dos primeros términos de (5.7), hay que resaltar que la serie diverge, sin embargo si tomamos pocos términos es posible hallar un valor pequeño del parámetro  $\hbar$  tal que la suma sea finita y el valor de  $S$  no difieran mucho, esta es la idea intuitiva. Regresemos:

$$S = S_0 + i\hbar S_1, \quad (5.17)$$

sustituyendo (5.12) y (5.16) en (5.17)

$$S = \int P dx + i\hbar \ln \sqrt{P}, \quad (5.18)$$

poniendo en nuestro *ansatz* en (5.1) y (5.18)

$$\begin{aligned} \psi(s) &= A e^{\frac{iS}{\hbar}} = \\ &= \pm A e^{\frac{i}{\hbar} (\int P dx + i\hbar \ln \sqrt{P})} = \\ &= \frac{\pm A}{\sqrt{P}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int P dx} = \\ &= \frac{\pm A}{\sqrt[4]{2m(E-V)}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int \sqrt{2m(E-V)} dx}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

El valor positivo significa que la onda va a la derecha y el negativo se refiere a que la onda va hacia la izquierda; todo esto se valida si  $E > V$ .

Si  $V > E$  se tendría que el comportamiento del argumento de la exponencial sería real y sólo la parte negativa posee sentido, porque decae, mientras que la parte positiva crece de forma monótona, esto puede producir que la función no pertenezca a  $\mathcal{L}^2$  y con ello no se podría garantizar la normalización.

Proponemos una nueva solución como:

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt[2]{P}} e^{\frac{1}{\hbar} \int P(x') dx'}. \quad (5.20)$$

La siguiente figura (Figura 5.1) que se encuentra en la siguiente página, nos servirá de apoyo en nuestra derivación.

En dicha figura observamos un potencial  $V(x)$  que varía de forma suave. Como hay que evitar regiones en las que  $E = V$ , tenemos que  $x$  debe estar fuera de las regiones sombreadas.

Esto nos permitirá construir las soluciones exclusivamente en 3 regiones: si  $x < x'_1$ ,  $x''_1 < x < x_2$  y  $x > x''_2$ . Lo cual vamos a proceder a desarrollar,

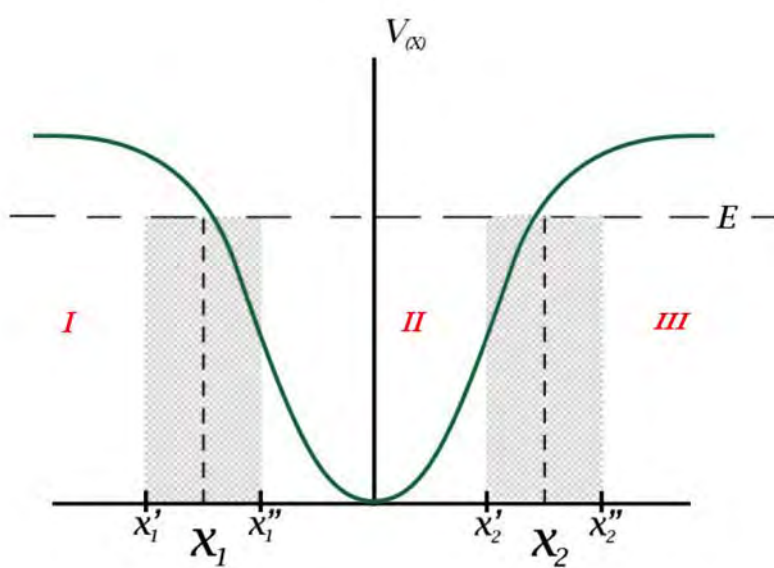


Figura 5.1: Potencial (la curva), las regiones prohibidas (la zonas que están rayadas) y  $E$  energía.

pero como al final queremos una solución única  $\forall x \in \mathbb{R}$  entonces tendremos que idear una forma adecuada de “zurcido” de soluciones.

Si  $E > V$  entonces la ecuación (5.19) es válida, recordemos que tomamos a  $p \in \mathbb{R}$ , así que esta ecuación describe a la partícula en la región II ( $\psi_{II}$ ). Como (5.19) es una suma de exponenciales imaginarias, las vamos a reescribir como funciones trigonométricas, en donde las constantes de integración serán una amplitud y una fase, por lo que se obtendrá:

$$\psi_{II} = \frac{A_2}{\sqrt{p}} \text{sen} \left[ \frac{1}{\hbar} \int_{x''_1}^{x'_2} p(x') dx' + \alpha \right], \quad x \in [x''_1, x'_2]. \quad (5.21)$$

En las regiones I y III el potencial ahora es mayor que la energía, *i.e.*  $V > E$  esto lleva a que  $p$  sea imaginario, entonces las ecuaciones quedan escritas como:

$$\psi_{III} = \frac{1}{\sqrt{|p|}} \left[ A_3 e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} + B_3 e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p(x')| dx'} \right], \quad (5.22)$$

para la región I las ecuaciones son análogas.

Definimos a  $|p| = \sqrt{2m(V - E)}$ .

Su interpretación física: dentro de la región II la función de onda oscila, mientras que fuera de ésta (regiones I y III) la función de onda decae exponencialmente.

Antes de “zurcir” las soluciones construyamos un criterio para saber cuando podemos aplicar un *ansatz* de éste tipo y validar todo lo dicho hasta ahora.

Si el potencial varía de forma suave con la distancia entonces la reflexión no se da de forma abrupta, implicando que la longitud de onda con respecto a la distancia casi no varíe, es natural, por lo anteriormente comentado, que se considere lo siguiente:

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \ll 1. \quad (5.23)$$

Sin olvidar la relación de Broglie (3.4), la cual usaremos en (5.23)

$$\begin{aligned} \left| \frac{d(\hbar/P)}{dx} \right| &\ll 1, \\ \left| \frac{\hbar}{P^2} \frac{dP}{dx} \right| &\ll 1, \end{aligned} \quad (5.24)$$

derivando (5.6) con respecto a  $x$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\sqrt{2m(E-V)}}{dx}, \quad (5.25)$$

$$\frac{mF}{\sqrt{2m(E-V)}} = \frac{dV}{dx} = \frac{mF}{P},$$

sustituyendo ésta expresión en (5.23), se concluye

$$\left| \frac{\hbar}{P^2} \frac{mF}{P} \right| \ll 1, \quad (5.26)$$

$$\left| \frac{\hbar mF}{P^3} \right| \ll 1.$$

Basados en que  $F = \frac{\partial V}{\partial x}$ .

El criterio para la aplicación de WKB es (5.26), con él podemos determinar cuando usar está aproximación semiclásica.

Para “zurcir” las soluciones necesitamos encontrar que tan anchas o delgadas pueden ser las regiones sombreadas de la figura (5.1), es decir una vecindad alrededor de donde  $V(x) = E$ , consideremos a  $V(x)$  como una serie de potencias (rememoremos que se ha considerado su suavidad), alrededor de  $x_2$  (para el caso  $x_1$  es análogo)

$$V(x) = V(x_2) + (x - x_2) \frac{dV(x)}{dx} + \dots, \quad (5.27)$$

dispondremos sólo de los dos primeros términos.

Sustituyendo los dos primeros términos en (5.6)

$$P = \sqrt{2m(x - x_2 F)}, \quad (5.28)$$

Introduzcamos en (5.26) a (5.28)

$$\left| \frac{\hbar mF}{P^3} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{\hbar mF}{\sqrt{2m(x - x_2 F)}^3} \right| \ll 1,$$

$$\left| \frac{\hbar}{\sqrt{(2m(x - x_2)F)^3}} \right| \ll 1, \quad (5.29)$$

$$\left| \frac{\hbar}{\sqrt{2mF}} \right|^{\frac{3}{2}} \ll |x - x_2|,$$

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\hbar^2}{mF} \right| \ll |x - x_2|.$$

Con esto último sabemos que tan ancha es la vecindad.

Tomemos los dos primeros términos de la serie (5.27) para su sustitución en (3.30)

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2 d^2\psi}{2m dx^2} + (V(x_2) + (x - x_2)\frac{dV(x)}{dx})\psi &= E\psi, \\ \frac{-\hbar^2 d^2\psi}{2m dx^2} &= (E - V(x - x_2) - (x - x_2)\frac{dV(x)}{dx})\psi, \end{aligned} \quad (5.30)$$

ignorando el término  $(E - V(x_2))$ , ya que nos interesa, como se dijo anteriormente, la componente alrededor de  $x_2$ , queda de esta forma la ecuación de Schrödinger como:

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2 d^2\psi}{2m dx^2} &= -(x - x_2)\frac{dV}{dx}\psi, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{2m}{\hbar^2}(x - x_2)\frac{dV}{dx}\psi. \end{aligned} \quad (5.31)$$

pero (5.31) es la ecuación de Airy y sus soluciones analíticas ya están reportadas en la literatura (ver el apéndice del libro [9]). Más concretamente la forma como se pueden hallar las soluciones es mediante el siguiente procedimiento:

Definamos el siguiente de cambio de variable.

$$\hat{x} = x - x_2, \quad (5.32)$$

entonces si  $x = x_2$  se tiene que  $\hat{x} = 0$ , por lo tanto definimos a:

$$\alpha^3 = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{dV(0)}{dx}, \quad (5.33)$$

$$\alpha\hat{x} = y. \quad (5.34)$$

y con ellos redefiniremos (5.31)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dx} &= \frac{d\psi}{dy} \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{d\psi}{dy}, \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \frac{d}{dy} \left( \alpha \frac{d\psi}{dy} \right) = \alpha^2 \frac{d^2\psi}{dy^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

entonces (5.31) bajo la triada de cambios de variable (5.32), (5.33), (5.34) adquirirá la forma:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{d^2\psi}{dy^2} &= \alpha^3 \frac{y}{\alpha} \psi, \\ \frac{d^2\psi}{dy^2} &= y\psi. \end{aligned} \quad (5.36)$$

de este modo es fácil deducir que las soluciones (funciones de Airy) son:

$$\psi(y) = Ai(y) \simeq |y|^{\frac{-1}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}|y|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad y \ll -1, \quad (5.37)$$

y

$$\psi(y) = Ai(y) \simeq \frac{1}{2} y^{\frac{-1}{4}} e^{\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}} \quad y \gg 1. \quad (5.38)$$

De aquí se llega a:

$$\psi = \frac{A}{\sqrt{P}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\hbar} \int P dx + \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.39)$$

Esta es la ecuación que “zurce” las soluciones, ahora analizemos lo que nos dice: en el interior del potencial la función de onda oscila y en la parte externa al potencial decae la función de onda, por lo que al “zurcir” las soluciones lo que se tiene es que conforme cerramos el radio de la vecindad alrededor de  $x_2$  (o  $x_1$  según sea el caso) nos desfasa  $\frac{\pi}{4}$  a la función de onda.

Demos una aplicación: Una de las predicciones de la mecánica cuántica que entra en contradicción con la mecánica clásica es el efecto túnel. El efecto consiste en que un grupo de partículas atraviesan una barrera de potencial, siendo que su energía cinética es menor que la de la barrera de potencial.

Las aplicaciones del efecto túnel van desde la explicación teórica de la radiación nuclear  $\alpha$ , esta teoría fue presentada por George Gamow (1904-1968), en el año de 1928; aplicaciones tecnológicas como el microscopio de efecto túnel.

Se deducirá el coeficiente de transmisión del efecto túnel a través del método WKB.

Supongamos un potencial repulsivo que posee una suave variación, que cumple con (5.26) y en los puntos de retorno satisface (5.29).

Establezcamos las ecuaciones para cada una de las regiones, basandonos en la gráfica (Figura 5.2) que sucede a las ecuaciones.

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{P}} \left( A_1 e^{i\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} P dx + \frac{\pi}{4}\right)} + B_1 e^{-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} P dx + \frac{\pi}{4}\right)} \right), \quad x < x_1, \quad (5.40)$$

$$\psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{P}} \left( (A_1 + B_1) e^{\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |P| dx} + \frac{i}{2} (A_1 - B_1) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |P| dx} \right), \quad x > x_1, \quad (5.41)$$

$$\psi_{III} = \frac{1}{\sqrt{P}} \left( A_3 e^{i\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x P dx + \frac{\pi}{4}\right)} + B_3 e^{-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x P dx + \frac{\pi}{4}\right)} \right), \quad x > x_2, \quad (5.42)$$

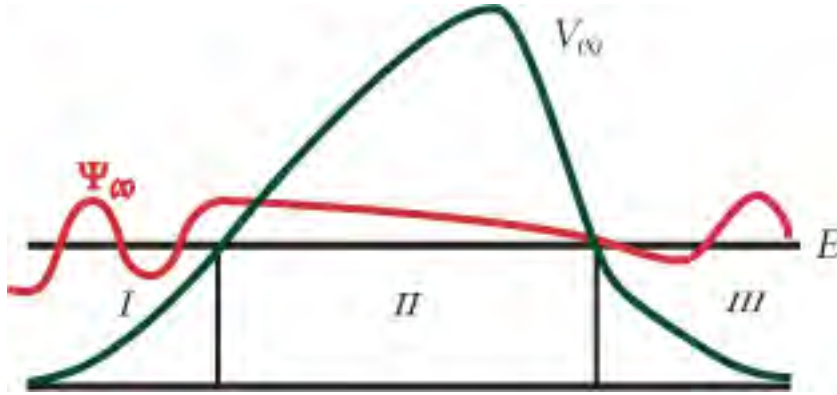


Figura 5.2: Potencial típico que modela el efecto túnel; donde  $V(x)$  es el potencial,  $\psi(x)$  es la función de onda y  $E$  la energía.

$$\psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{P}} \left( (A_3 + B_3) e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |P| dx} - \frac{i}{\hbar} (A_3 - B_3) e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |P| dx} \right), \quad x < x_2. \quad (5.43)$$

Supongamos viajan sólo a la derecha las partículas, por lo que  $B_3 = 0$ , con ello se concluye que (5.40)

$$\psi_{II} = \frac{A_3}{\sqrt{P}} \left( e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |P| dx} - \frac{i}{2} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |P| dx} \right). \quad (5.44)$$

Recurramos nuevamente cambios de variable, estos serán:

$$\int_x^{x_2} |P| dx = \int_{x_1}^{x_2} |P| dx - \int_{x_1}^x |P| dx, \quad (5.45)$$

y

$$J = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |P| dx. \quad (5.46)$$

con lo que  $\psi_{II}$  se reescribe:

$$\psi_{II} = \frac{A_3}{\sqrt{P}} \left( e^{(J - \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |P| dx)} - \frac{i}{2} e^{(-J + \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |P| dx)} \right). \quad (5.47)$$

Igualando los coeficientes de (5.47) con los de (5.41)

$$\frac{i}{2} (A_1 - B_1) = A_3 e^J, \quad (5.48)$$

$$A_1 + B_1 = -\frac{i}{2}A_3e^{-J}, \quad (5.49)$$

despejando  $A_1$  de (5.49) (con el objetivo de hallar a estos coeficientes)

$$A_1 = \frac{-i}{2}A_3e^{-J} - B_1, \quad (5.50)$$

sustituyendo en (5.48)

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\left(\frac{-i}{2}A_3e^{-J} - 2B_1\right) &= A_3e^J, \\ \frac{1}{4}A_3e^{-J} - iB_1 &= A_3e^J, \\ -iB_1 &= A_3\left(e^J - \frac{1}{4}e^{-J}\right), \\ B_1 &= iA_3\left(e^J - \frac{1}{4}e^{-J}\right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Y ahora  $A_1$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{i}{2}A_3e^{-J} - \left(i = A_3e^J - \frac{iA_3}{4}e^{-J}\right) = \\ &= -\frac{i}{2}A_3e^{-J} - iA_3e^J + \frac{iA_3}{4}e^{-J} = \\ &= -iA_3\left(e^J + \frac{1}{4}e^{-J}\right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Para deducir la expresión del coeficiente de transmisión usaremos la definición del coeficiente de transmisión, que a continuación se definirá (para más detalles consultar [4],[9], [13], [20]). Con este coeficiente describiremos el paso de la función de onda a través de la barrera de potencial. Esta es la definición del coeficiente de transmisión.

$$T = \frac{|j_{trans}|}{|j_{inc}|}, \quad (5.53)$$

donde  $j_{trans}$  es el flujo transmitido y  $j_{inc}$  el flujo incidente. Por lo que al



sustituir los coeficientes en la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \\
 &= \frac{|\frac{1}{2}i(A_1 - B_1)e^{-J}|^2}{|-iA_3(e^J + \frac{1}{4}e^{-J})|^2} = \\
 &= \frac{|\frac{1}{2}[-i(e^J + \frac{1}{4}e^{-J}) - i(e^J - \frac{1}{4}e^{-J})]e^{-J}|^2}{|e^J + \frac{1}{4}e^{-J}|^2} = \\
 &= \frac{|\frac{1}{2}[-i - \frac{i}{4}e^{-2J} - i + \frac{i}{4}e^{-2J}]|^2}{|e^J + \frac{1}{4}e^{-J}|^2} = \\
 &= \frac{|\frac{-2i}{2}|^2}{|e^J + \frac{1}{4}e^{-J}|^2} = \\
 &= (e^J + \frac{1}{4}e^{-J})^{-2}.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Aproximando mediante el binomio de Newton a (5.54)

$$(e^J + \frac{1}{4}e^{-J})^{-2} = e^{-2J} - \frac{1}{2}e^{-4J} + \dots, \tag{5.55}$$

se advierte que la mayoría de los términos se van reduciendo, por ello sólo consideremos a  $e^{-2J}$  para el estudio, hallando de esta forma nuestro coeficiente de transmisión:

$$T \approx e^{-2J}, \tag{5.56}$$

y tomando la definición de  $J$ , concluimos

$$T = e^{\frac{1}{\hbar} \int |P| dx}. \tag{5.57}$$

Como colofón de (5.57): La tunelación no sólo depende de la barrera, sino también de la masa que lo está atravesando, como ejemplo: si consideramos una barrera de potencial y sobre ella inciden electrones, cuya masa es de  $9,10938 \times 10^{-31}$  kg cada uno, no será el mismo comportamiento que si fueran protones de masa igual a  $1,67262 \times 10^{-27}$  kg (cada uno); Como es de esperarse  $E$  influye en la transmisión.

Si el pozo de potencial está rodeado por una barrera (un suceso así serían partículas dentro del núcleo atómico)<sup>3</sup> el ancho de la barrera traerá como

---

<sup>3</sup>Otro caso que será planteado en la §5.2 es el del capacitor cuántico, que nos conducirá a una ecuación que ya no es lineal.

consecuencia que la transmisividad sea menor, motivando a que el tiempo de permanencia de la partícula sea mucho mayor en el pozo, sin olvidar que todo esto se ha hecho para onda estacionaria.

## 5.2. Un caso de Ecuación de Schrödinger no lineal

En la §5.1 aplicamos el método WKB al efecto túnel, que se produce cuando una partícula atraviesa una barrera de potencial, lo que nos lleva a deducir un coeficiente de transmisión (5.57). Invade la curiosidad: ¿podría haber casos en que una partícula(s) atravesasen dos barreras (o incluso más)? De ser así ¿qué comportamiento adquieren y qué tipo de ecuación aparece?.

La respuesta parcial sería la *muralla almenada*, que son una serie de pozos dobles, que aparecen en la teoría de Kroning-Penney, entre una de sus características es ser lineal, pero no ahondaremos en el tema para ello consultar [9]. Otro modelo donde se tienen barreras dobles de potencial que aparecen en la física y electrónica son las llamadas heteroestructuras, estas son combinaciones de heterouniones. La heterounión es la interfase<sup>4</sup>, que en nuestro caso, se forma entre dos materiales de estado sólido, constituidas por semiconductores cristalinos que no son similares (también lo pueden formar aislantes o metales); una peculiaridad de la energía del electrón en el estado sólido son las brechas, es decir bandas de energías prohibidas, donde el electrón no puede estar y bandas donde el electrón tiene una energía cinética definida.

En un semiconductor los electrones que están en la banda de valencia pasan a la banda de conducción, esto nos permite considerar a una nube de electrones atravesando una de estas dobles barreras. La interfase se puede modelar mediante un pozo de potencial, por conducto de un potencial que genera a las barreras y en medio de estas al pozo, el potencial será:

$$V(x) = V_0(\chi_{[a,b]} + \chi_{[c,d]}). \quad (5.58)$$

donde  $\chi_{[a,b]}$  es una función característica; hay un intervalo en (5.58) donde la función característica vale cero, ese es el pozo. La gráfica (Figura 5.3), la cual es unidimensional (después se justificará porqué) con  $a < b < c < d$ , los intervalos son asimétricos.

<sup>4</sup>Una interfase se produce cuando se juntan dos materiales, *e.g.* gas-metal.

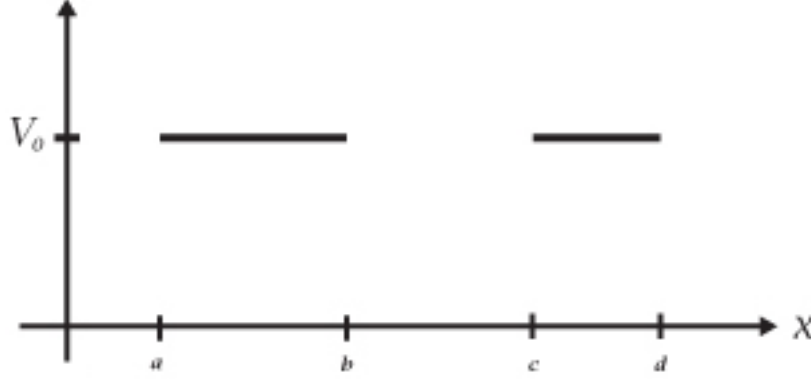


Figura 5.3: Potencial del capacitor cuántico. Podemos ver que hay una asimetría entre los intervalos.

Los estados que forman los electrones dentro del pozo obedecen al principio de exclusión de Pauli, que les induce una energía extra. Los estados de resonancia provocan que la nube electrónica permanezca un tiempo prolongado, tal como se mencionó al final de la §5.1, debido a esto el pozo se comporta como un capacitor cuántico<sup>5</sup>. El término de interacción de los electrones dentro del pozo, formado por las interfases, está dado por el siguiente potencial.

$$V_p = \int \frac{e^2}{\varepsilon|r-r'|} \Psi^*(r', t) \Psi(r', t) dr'. \quad (5.59)$$

Escribamos la ecuación de Schrödinger para éste caso, con ambos potenciales (5.58) y (5.59):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) + V_p \right] \Psi. \quad (5.60)$$

Las condiciones iniciales  $u(x, 0)$  es un paquete gaussiano, tal que a  $t = 0$  y  $V_p \approx 0$  (ecuación (5.59)) y  $\Psi$  se definirá:

$$\Psi(r, t) \equiv \langle \Psi(r, t) \rangle \approx u(x, y) \phi(y, z) e^{\frac{-i}{\hbar} E_{\parallel} t}, \quad (5.61)$$

$\phi(y, z)$  es solución de la partícula libre en el plano paralelo a las interfaces, y normalizada a la unidad.  $\langle \Psi(r, t) \rangle$  es el valor esperado para un estado de muchos cuerpos al tiempo  $t$ .

<sup>5</sup>No es el único modo de contruirlos, otro es con un MOS, que consiste en un metal-óxido-semiconductor.

La integral (5.59) se puede aproximar como sigue

$$\int \frac{e^2}{\varepsilon|r-r'|} \Psi^*(r', t) \Psi(r', t) dr' \simeq \alpha Q[u] \chi_{[b,c]}, \quad (5.62)$$

siendo  $\alpha = \frac{e^2}{C}$  y  $C$  define la capacitancia. El computo de  $C$  proviene de la integración sobre el plano  $zy$ , promediado sobre el potencial y el ancho del pozo.

$$Q[u] = \int |u(x, t)|^2 dx. \quad (5.63)$$

Nos describe desde la física a la carga atrapada en el pozo al tiempo  $t$ ;  $Q[u]$  es un término adimensional. ¿Qué presenciamos? Ya no es lineal  $Q[u]$ .

Sustituyendo (5.63) en (5.60) ( $\phi(y, z)$  ya no va a jugar un papel preponderante, en breve se describirá porqué), eliminando  $e^{\frac{-i}{\hbar} E_{\parallel} t}$  tenemos reescrita (5.60)<sup>6</sup>

$$i\hbar \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) + \alpha Q[u] \chi_{[b,c]} \right] u(x, t). \quad (5.64)$$

esta es una ecuación unidimensional, que no es estacionaria, por lo que explica la dinámica del capacitor cuántico.

Llegó el momento de justificar ¿por qué se reduce al caso unidimensional? En el límite semiclásico se separan los grados de libertad, observamos que en las zonas no lineales, es decir las interfaces, todo estado puede ser suprimido, ya que la nube de electrones sólo las atraviesa, por eso  $\phi(x)$  ya no es relevante. Es dentro del pozo y una vez establecidos los electrones, que al no estar en reposo (según nos indica el principio de incertidumbre) induce la creación de los estados metaestables. Estos estados metaestables pueden ser reformulados en términos de ecuaciones diferenciales ordinarias, describiendo la evolución no lineal en las regiones débilmente acopladas a las ecuaciones de Schrödinger estándar, que describen la propagación en las regiones lineales, pues la parte estacionaria no ejerce mucha influencia sobre la dinámica del capacitor cuántico; si cancelamos el término no lineal (5.62) entonces la ecuación de Schrödinger referida se reduciría a una ecuación lineal.

<sup>6</sup>cf. Sólo con la forma de la ecuación de Schrödinger del modelo Kroning-Penning.

### 5.3. Método WKB para una ecuación de Schrödinger no lineal

En la §5.2 se describió una ecuación de Schrödinger no lineal, con un potencial externo (5.58) y un término no lineal (5.63) y esta ecuación describe el proceder dinámico de un capacitor cuántico, otro ejemplo sería la ecuación de Pitaevski (1), cuya catalogación cae en las ecuaciones no lineales, siendo  $u|u|^2$  el otorgante de tal condición. Se ha hecho mención de este par de ecuaciones a modo de ilustración, motivo por el cual se ha prescindido del acto de resolverlas.

Ahora lo que se hará es escudriñar la solución a un tipo de ecuación de Schrödinger no lineal por conducto del método WKB, ello obliga a presentar mas adelante al Teorema 27, que es el que acredita la aplicabilidad de dicho método.

Partiendo de la Ecuación Completa de Schrödinger Lineal, con condiciones iniciales, el caso no lineal que consideraremos será el siguiente:

$$i\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u_\varepsilon = V(x, t)u_\varepsilon + \varepsilon^\kappa f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon, \quad (5.65)$$

$$u_\varepsilon|_{t=0} = a_0^\varepsilon e^{\frac{i\phi_0(x)}{\varepsilon}}. \quad (5.66)$$

donde  $V(x, t)$  es el potencial,  $f$  el término no lineal que además consideraremos es local, notemos que  $f$  no depende de  $\kappa$ ;  $\phi_0$  la fase (que en esta tesis no dependa de  $\varepsilon$ , para tal caso consultar a [1], [2].); la amplitud  $a_0^\varepsilon$ .

El método de la óptica geométrica, estudiado en el capítulo 4 y §5.1 (método WKB), servirán de base para formular la solución, y una vez hallada, nos suministrará información sobre el comportamiento de  $u_\varepsilon$ , al tomar el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , siendo éste el llamado límite semiclásico. Como se mencionó en el capítulo 4 §4.1, la óptica geométrica describe el movimiento de la luz como rayos, en el caso de la Ecuación de Schrödinger, el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  habla de “trayectorias clásicas”, así se relacionan la física clásica y la mecánica cuántica. Hay que esclarecer el entre comillado a la palabra trayectoria clásica, ya que por trayectoria estamos refiriendonos al hecho de que en el espacio fase no se tiene una curva continua, como sería en el caso clásico, sino una banda, en la cual es probable que la partícula esté evolucionando, el ancho mínimo lo determina  $\varepsilon$ , según especifica el principio de incertidumbre; Las “trayectorias”

están dadas por el flujo del hamiltoniano

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} x(t, y) &= \varepsilon(t, y) \quad ; x(0, y) = y, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(t, y) &= -\nabla_x V(t, x(t, y)) \quad ; \varepsilon(0, y) = \nabla \phi_0(y). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Para la no linealidad que es invariante de norma es posible describir la solución con una fase y un sólo armónico, proporcionado por el dato inicial, de esta manera se tiene:  $u_\varepsilon \approx ae^{\frac{i\phi(x)}{\varepsilon}}$ .

Se han mencionado dos parámetros:  $\kappa$  y  $\varepsilon$ , cuando se toma el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  se obtiene la expansión asintótica y esto nos permitirá describir la relevancia de los efectos no lineales dados por  $\kappa$ , esta es la correlación entre ambos parámetros. Para conocer la expansión asintótica, a diferencia de lo que se hace en el caso WKB de la ecuación de Schrödinger lineal, que se expande la fase, ahora será expandida la amplitud  $a^\varepsilon(x, t)$  ( $\varepsilon$  en la amplitud no es un exponente), motivo por el cual nuestro *ansatz* será:

$$u_\varepsilon(x, t) = a^\varepsilon(x, t)e^{\frac{i\Phi(x, t)}{\varepsilon}}. \quad (5.68)$$

que es parecida a (5.1). ¿Por qué la amplitud? Primero no sustituiremos (5.68) en la ecuación estacionaria de Schrödinger, sino en (5.65), con el objetivo de averiguar la evolución dinámica del sistema, ya que a distintos instantes de tiempo tenemos diferentes tamaños en la amplitud de la onda, está es la diferencia con lo hecho en la §5.1; Las soluciones  $u_\varepsilon$  están contenidas en espacios de Sobolev  $\mathbb{H}^s$ . Escribamos (5.68) como series de potencias en torno a la amplitud

$$u_\varepsilon(x, t) \sim (a_0(x, t) + \varepsilon a_1(x, t) + \varepsilon^2 a_2(x, t) + \dots)e^{\frac{i\Phi(x, t)}{\varepsilon}}. \quad (5.69)$$

Cuando se derivó la ecuación (3.17) se observó que el potencial no era único, el caso que no es lineal no está dispensado de ello, por lo que nos obliga a restringir el tipo de potencial  $V$ , la forma que debe tener  $f(|u_\varepsilon|^2)$ , así como el perfil tanto de la fase inicial como de la amplitud. Anunciaremos las primeras condiciones que debe satisfacer el potencial y la fase inicial  $\phi_0$  independiente de  $V$ , una relación válida para el caso lineal y el que no es lineal.

Suposición 1: geométrica

- $V \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^N)$  y  $\frac{\partial^\alpha V}{\partial x^\alpha} \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}_t; \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_2^N))$  tan pronto como  $|\alpha| \geq 2$ .

- $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  y  $\frac{\partial^\alpha \phi_0}{\partial x} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$  tan pronto como  $|\alpha| \geq 2$ .

El nexa entre el término no lineal y la amplitud:

Suposición 2:analítica

- $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ .
- $\exists a_0 \in \mathbb{H}^\infty := \bigcap_{\geq 0} \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N)$ , tal que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_0^\varepsilon \rightarrow a_0$  en  $\mathbb{H}^s \quad \forall s$ .

Suposición 3: homogeneidad de la parte no lineal (es un caso particular, el cual no siempre se exige.)

- $f(|u_\varepsilon|^2)u_\varepsilon = \lambda |u_\varepsilon|^{2\sigma} u_\varepsilon \quad \lambda \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ .

esto ayuda a describir la influencia de  $\kappa$  en la solución y en el comportamiento asintótico de  $u_\varepsilon$ ;  $\kappa$  es visto como el tamaño inicial de la función de onda. En el caso homogéneo  $\sigma \in N > 0$  corresponde a la no linealidad suave,  $\lambda = 0$  se reduce al caso lineal.

Considerando la suposición 1) uno puede construir (en analogía a lo discutido para el caso lineal (capítulo 3)) un semigrupo fuertemente continuo  $u_\varepsilon(t, s)$ , tal que  $u_{\varepsilon_{lin}}(t, x) = u_\varepsilon(t, s)\varphi^\varepsilon(x)$ , (donde *lin* significa lineal), es solución a la ecuación de Schrödinger

$$i\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon_{lin}}(t, x)}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u_{\varepsilon_{lin}}(t, x) = V u_{\varepsilon_{lin}}(t, x). \quad (5.70)$$

$$u_{\varepsilon_{lin}}(s, t) = \varphi^\varepsilon(x). \quad (5.71)$$

$u_\varepsilon(t, t) = \mathcal{I}$  y  $u_\varepsilon(t, s)$  cumple las siguientes propiedades:

- El mapeo  $(t, s) \mapsto u_\varepsilon(t, s)$  es fuertemente continua
- $u_\varepsilon(t, s)^* = u_\varepsilon(t, s)^{-1}$ ,
- $u_\varepsilon(t, \tau)u_\varepsilon(\tau, s) = u_\varepsilon(t, s)$ ,
- $u_\varepsilon(t, s)$ , es unitario en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N) : \| u_\varepsilon(t, s)\varphi^\varepsilon \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)} = \| \varphi^\varepsilon \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)}$ .

Otra propiedad que posee  $u_\varepsilon(t, s)$

$$\| u_\varepsilon(t, s)u_\varepsilon(t, s)^* \varphi \|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} < \frac{C}{(\varepsilon|t-s|)^{\frac{n}{2}}} \| \varphi \|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)}, \quad (5.72)$$

la estimación de dispersión, provee que  $|t - s| \leq \delta$ , donde  $C$  y  $\delta > 0$  son independientes de  $\varepsilon$ , esta es una estimación de Strichartz, con el par admisible  $(p, 2\sigma + 2)$ , donde  $p = \frac{4\sigma+4}{n\sigma}$ ,  $\sigma$  definido como en la suposición 3. Así que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C}{(\varepsilon|t - s|)^{\frac{n}{2}}} \|\varphi\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{N})} \rightarrow \infty. \quad (5.73)$$

Podemos observar que se parece a la ecuación (3.65). En el caso semiclásico, este límite, es llamado “límite dispersivo”.

Hasta ahora no hemos dicho nada sobre la fase, por lo que ahora es el momento de establecer quien esa fase. Por el *ansatz* sabemos que la fase  $(\Phi(x, t))$  es una función del tiempo y del espacio, esto obliga a que se le “restringa”. Para ello se excluirá el caso en que la fase y la amplitud son dependientes. La forma en que se abordará será haciendo una analogía con algunos casos lineales de la mecánica cuántica, ya que en ciertas situaciones  $\phi_{eik}$  es una fase y determina la manera en que la amplitud inicial  $a_0$  es transportada *i.e.* satisface la siguiente ecuación de transporte

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a + \frac{1}{2} a \Delta \phi_{eik} = 0, \quad (5.74)$$

con esta condición inicial

$$a(x, t) |_{t=0} = a_0. \quad (5.75)$$

Por lo que en el caso no lineal que se está estudiando será la función de la eikonal la fase de la función de onda que buscamos establecer como solución. Esta forma de asociarlas quedará confirmada mediante el lema que a continuación se enunciará y se demostrará. El lema demuestra que existe la solución a la ecuación de la eikonal (una ecuación del tipo Hamilton-Jacobi), donde el potencial es el de la ecuación de Schrödinger no lineal a resolver y la fase inicial es precisamente la misma que la de la ecuación de Schrödinger a estudiar, más aún la relación se fortalece ya que a través de éste lema podremos demostrar el Teorema 27.

**LEMA 12.** *Bajo la suposición 1, existe  $T > 0$  y una única solución  $\phi_{eik} \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$  del problema con valor inicial:*

$$\frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla_x \phi_{eik}|^2 + V(t, x) = 0, \quad (5.76)$$

$$\phi_{eik} |_{t=0} = \phi_0. \quad (5.77)$$

*y la solución es tal que  $\partial_x^\alpha \phi_{eik} \in \mathcal{L}^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$  cuando  $|\alpha| \geq 2$ .*



Antes de iniciar con la demostración del Lema vamos a necesitar los siguientes teoremas, los cuales se anunciarán sin demostración (consultar [2]).

**TEOREMA 25.** *Supongamos que la suposición 1 es satisfecha. Sea  $t \in [0, T]$  y  $\theta_0$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^N$ , definamos:*

$$\theta_t := \{x(t, y) \in \mathbb{R}^N, y \in \theta_0\} \quad \text{y} \quad \theta := \{(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N, x \in \theta_t\}.$$

*Supongamos, que para  $t \in [0, T]$ , el mapeo*

$$\theta_0 \ni y \mapsto x(t, y) \in \theta_t,$$

*es biyectiva y la denotaremos por  $y(t, x)$  a su inversa. Asumamos también que*

$$\nabla_x y \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\theta),$$

*entonces existe una única función  $\theta \in (t, x) \mapsto \phi_{eik}(t, x) \in \mathbb{R}$  que es solución a y satisface a  $\nabla_x^2 \phi_{eik} \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\theta)$ , más aún*

$$\nabla \phi_{eik}(t, x) = \xi(t, y(t, x)). \quad (5.78)$$

**TEOREMA 26.** *Supongamos que la función  $\mathbb{R}^N \ni y \mapsto x(y) \in \mathbb{R}^N$  satisface a*

$$|\det \nabla_y x| \geq C_0 > 0 \quad \text{y} \quad |\partial_y^\alpha x| \leq C, \quad |\alpha| = 1, 2.$$

*por lo tanto  $x$  es biyectiva*

**Demostración del lema (12)**

El resultado de la existencia y unicidad sigue de dos resultados que incluso son válidos para condiciones más débiles de las que pedimos, que son las suposición 1 y la suposición 2. En dichos resultados podemos observar que la solución  $\phi_{eik}$  es también parte importante del sistema definido como flujo del Hamiltoniano (5.67).

En lo que sigue daremos con detalle los pasos a aplicar para poder garantizar las hipótesis de los Teoremas 25 y 26 y así tener nuestro resultado.

Tomando el flujo Hamiltoniano (5.67) y diferenciándolo con respecto a  $y$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} x(t, y) \right] = \xi(t, y); & x(0, y) = y. \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, y) \right] = -\nabla_x V(t, x(t, y)); & \xi(0, y) = \nabla \phi_0(y). \end{cases}$$

⇒

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} x(t, y) = \frac{\partial}{\partial y} \xi(t, y); & \frac{\partial}{\partial y} x(0, y) = \mathbf{i}, & (1) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \xi(t, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \nabla_x V(t, x(t, y)) = \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \xi(t, y) = -\nabla_x^2 V(t, x(t, y)) \frac{\partial}{\partial y} x(t, y); & \frac{\partial}{\partial y} \xi(0, y) = \nabla^2 \phi_0(y), & (2) \end{cases}$$

integrando con respecto al tiempo a (1) y (2) de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} x(s, y) ds &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \xi(s, y) ds, \\ \frac{\partial}{\partial y} x(s, y)|_0^t &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \xi(t, y) dt \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} x(t, y) - \frac{\partial}{\partial y} x(0, y) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \xi(s, y) ds, \\ \frac{\partial}{\partial y} x(t, y) - \mathbf{i} &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial y} \xi(s, y) ds. \end{aligned} \quad (5.79)$$

hagamos a  $\mathcal{P} = |\frac{\partial}{\partial y} x(t, y)| + |\frac{\partial}{\partial y} \xi(s, y)|$ , como  $\mathcal{P} \geq 0$ , aplicando el lema de Gronwall, llegamos a que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\leq C_T + C_T \int_0^t \mathcal{P} ds \Rightarrow \\ |\frac{\partial}{\partial y} x(t, y)| + |\frac{\partial}{\partial y} \xi(s, y)| &\leq C_T + C_T \int_0^t (|\frac{\partial}{\partial y} x(t, y)| + |\frac{\partial}{\partial y} \xi(s, y)|) ds. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Como  $\|\mathcal{P}\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C' \|\mathcal{P}\|$ , entonces

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} x(t) \right\|_{\mathcal{L}^\infty} + \left\| \frac{\partial}{\partial y} \xi(t) \right\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C'(t), \quad (5.81)$$

de manera similar

$$\|\partial_y^\alpha x(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|\partial_y^\alpha \xi(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C(\alpha, t), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \geq 1. \quad (5.82)$$

Demostremos por inducción a (5.82). Sea  $|\alpha| = 1$ , entonces

$$\|\partial_y^1 x(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|\partial_y^1 \xi(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C(1, t), \quad (5.83)$$

validada por (5.81). Propongamos la hipótesis de inducción  $|\alpha| = n-1$ , según ésto obtenemos

$$\|\partial_y^\alpha x(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} + \|\partial_y^\alpha \xi(t)\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C(\alpha, t). \quad (5.84)$$

Demostremoslo para  $|\alpha| = n$

$$\begin{aligned} \|\partial_y^{1,2,\dots,n-1,n}x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} + \|\partial_y^{1,2,\dots,n-1,n}\xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} &= \|\partial_y^{1,2,\dots,n-1}\partial_y^n x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} + \\ \|\partial_y^{1,2,\dots,n-1}\partial_y^n \xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} &\leq \|\partial_y^{1,2,\dots,n-1}x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} \|\partial_y^n x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} + \\ \|\partial_y^{1,2,\dots,n-1}\xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} \|\partial_y^n \xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} &\leq C\|\partial_y^n x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} + \|\partial_y^n \xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Integrando la primera ecuación parte de  $\mathbf{1}$

$$\det \nabla_y x(t, y) = \det(\mathfrak{J} + \int_0^t \nabla_y \xi(s, y)) ds, \quad (5.86)$$

haciendo  $t' \approx 0 \Rightarrow \int_0^t \nabla_y \xi(s, y) ds \approx 0$ , llegamos a:

$$|\det \nabla_y x(t, y)| = |\det \mathfrak{J}| \quad \text{por lo tanto} \quad |\det \nabla_y x(t, y)| = 1, \quad (5.87)$$

llegando a que:

$$|\det \nabla_y x(t, y)| \geq C_0, \quad \forall (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N. \quad (5.88)$$

Concluimos  $|\det \nabla_y x(t, y)| \geq C_0$  y  $|\partial_y^\alpha x(t)|$  *i.e.*

$$\|\partial_y^\alpha x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} + \|\partial_y^\alpha \xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} \leq C(\alpha, t) \quad \Rightarrow \|\partial_y^\alpha x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} \leq C(\alpha, t) - \|\partial_y^\alpha \xi(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty}, \quad (5.89)$$

por lo tanto  $\exists C$  tal que

$$\|\partial_y^\alpha x(t)\|_{\mathcal{L}_y^\infty} \leq C(\alpha, t). \quad (5.90)$$

Por lo cual  $x(t)$  es biyectiva e invertible. Aplicando el Teorema 26 para verificar que  $\nabla_x y \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(\theta)$  diferenciando la relación con respecto a  $x$ ,  $x(t, y(t, x)) = x$ , se consigue:

$$\begin{aligned} \nabla_x y(t, x) \nabla_y x(t, y(t, x)) &= \mathfrak{J} \quad \text{por lo tanto} \\ \nabla_x y(t, x) &= \nabla_y x(t, y(t, x))^{-1}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

En particular si son matrices

$$\nabla_x y(t, x) = \frac{1}{\det \nabla_y x(t, x)} \text{adj}(\nabla_y x(t, y(t, x))). \quad (5.92)$$

Donde  $\text{adj}(\nabla_y x(t, y(t, x)))$  es el adjunto de  $\nabla_y x(t, y(t, x))$ . De (5.81) y (5.84) inferimos que  $\nabla_x y(t, x) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \forall t \in [0, T]$  Del teorema 25 se deduce que

$\phi_{eik}$  es suave, local en el tiempo y global en el espacio;  $\phi_{eik} \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$  y que sea subcuadrática se deriva de (5.82), (5.84) y (5.92)

q. e. d.

Regresemos al estudio de (5.65)  $\kappa$  clasifica en casos<sup>7</sup> la influencia de la no linealidad, el primer caso es el subcrítico si  $\kappa > 1$  y si  $\kappa = 1$  se llamará crítico, estos serán los casos a estudiar.

Supongamos válido (5.68) he introduzcamos (5.65):

1.<sup>a</sup> Parte temporal

$$\begin{aligned}
 & i\varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}}{\partial t} = \\
 i\varepsilon \left[ \left( \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} \right) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \left( \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} \right) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \right] &= \tag{5.93} \\
 i\varepsilon \left[ \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} \right] e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} &= \\
 \left[ i\varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} - a^\varepsilon \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} \right] e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} &.
 \end{aligned}$$

2.<sup>a</sup> Parte espacial

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = \\
 & \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\nabla a^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}) = \\
 & \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla \cdot ((\nabla a^\varepsilon) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}) = \\
 & \frac{\varepsilon^2}{2} (\nabla \cdot (\nabla a^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik})) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = \\
 \frac{\varepsilon^\varepsilon}{2} ((\Delta a^\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \Delta \phi) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + (\Delta a^\varepsilon + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik}) \cdot (\frac{i}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik}) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}) &= \\
 \frac{\varepsilon^2}{2} (\Delta a^\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{ia^\varepsilon}{\varepsilon} \Delta \phi_{eik} + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} - \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon^2} (\nabla \phi_{eik})^2) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} &= \\
 (\frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a^\varepsilon + \frac{i\varepsilon}{2} \nabla \cdot a^\varepsilon \nabla \phi_{eik} + \frac{i\varepsilon}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} + \frac{i\varepsilon}{2} \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} - a^\varepsilon (\nabla \phi_{eik})^2) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} &. \tag{5.94}
 \end{aligned}$$

3.<sup>a</sup> Parte del potencial y término no lineal

<sup>7</sup>El caso  $0 \leq \kappa < 1$  no se estudiará en esta tesis, para ello consultar [1], [2].

$$\begin{aligned}
Va^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \varepsilon^\kappa f(|a^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}|^2) a^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = \\
(Va^\varepsilon + \varepsilon^\kappa f(|a^\varepsilon|^2 a^\varepsilon)) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}.
\end{aligned} \tag{5.95}$$

reuniendo las últimas partes de 1,2 y 3, de lo anteriormente deducido, llegamos a:

$$\begin{aligned}
(i\varepsilon \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} - a^\varepsilon \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a^\varepsilon + i\varepsilon \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{i\varepsilon}{2} a^2 \Delta \phi_{eik} f - a^\varepsilon (\nabla \phi_{eik})^2) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = \\
(Va^\varepsilon + \varepsilon^\kappa f(|a^\varepsilon|^2 a^\varepsilon)) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}},
\end{aligned} \tag{5.96}$$

eliminando a  $e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}$  (tenemos a la ecuación Hamilton-Jacobi que al ser igual a cero no ejerce influencia) por lo que la ecuación (5.96) multiplicado por  $\frac{1}{\varepsilon}$  nos da:

$$i \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon + i \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{i a^\varepsilon}{2} \Delta \phi_{eik} = \varepsilon^{\kappa-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \tag{5.97}$$

ahora multiplicamos  $-i$

$$\frac{\partial a^\varepsilon}{\partial t} + \frac{a^\varepsilon}{2} \Delta \phi_{eik} + \nabla a^\varepsilon \cdot \nabla \phi_{eik} = \frac{i\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i\varepsilon^{\kappa-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \tag{5.98}$$

apliquemos la expansión a la ecuación (5.98):

$$a_0^\varepsilon \sim a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots \tag{5.99}$$

Pues recordemos que la expansión será sobre la amplitud, en lugar de la fase. Aplicando está en la ecuación (5.98)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots)}{\partial t} + \\
& \frac{a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots}{2} \Delta \phi_{eik} + \\
& \nabla(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots) \cdot \nabla \phi_{eik} = \\
& \frac{i\varepsilon}{2} \Delta(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots) - i\varepsilon^{\kappa-1} f(|(a_0(x) \\
& + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots)|^2) (a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots).
\end{aligned} \tag{5.100}$$

veamos el efecto del parámetro  $\kappa \geq 1$  en (5.100)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots)}{\partial t} + \nabla(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots) \cdot \nabla \phi_{eik} \\ \frac{(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots)}{2} \Delta \phi_{eik} = \\ \frac{i\varepsilon}{2} \Delta(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots) = \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\begin{cases} -if(\|a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots\|^2)(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots) & \kappa = 1, \\ -i\varepsilon^{\kappa-1} f(\|a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots\|^2)(a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \cdots) & \kappa > 1. \end{cases}$$

tomando el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos de (5.101) la siguiente ecuación

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a_0 + a_0 \Delta \phi_{eik} = \quad (5.102)$$

$$\begin{cases} -f(\|a_0\|^2)a_0 & \kappa = 1, \\ 0 & \kappa > 1. \end{cases}$$

Esta es una ecuación de transporte, podemos ver que aparece la función eikonal  $\phi_{eik}$ .

Si  $\kappa > 1$  (subcrítico) los efectos no lineales no ejercen influencia. Si  $\kappa = 1$  (crítico) el efecto no lineal tiene influencia.  $\phi_{eik}$  es solución de la ecuación de la ecuación Eikonal del Lema (12).

Si  $u_\varepsilon$  es solución de (5.65) y (5.66) requerimos de un teorema o criterio, análogo a (5.26), ya que éste nos indica cuando emplear el método WKB para el caso de la ecuación de Schrödinger lineal. Por conducto del siguiente teorema, al que en la introducción llamamos el *centro productor*, pues la tesis a girado en torno a él, avalá a  $u_\varepsilon$  como la solución, nos indica su unicidad y existencia y de éste surgirá una función  $G$  que medirá el orden de la no linealidad.

**TEOREMA 27.** *Supongamos que las suposiciones 1 y 2 (vease la página 94) son satisfechas. Sea  $\kappa \geq 1$ , entonces para toda  $\varepsilon \in (0, 1]$  el problema de Cauchy: (5.65) y (5.66) tiene una única solución  $u_\varepsilon \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}^N) \cap C([0, T]; \mathbb{H}^s)$  para toda  $s > \frac{N}{2}$  ( $T$  definida como en el Lema 12). Más aún existe una  $a$  y  $G \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ , independientes de  $\varepsilon$ , donde  $a \in C([0, T]; \mathcal{L}^2 \cap$*

$\mathcal{L}^\infty$ ) y  $G$  es real con  $G \in ([0, T]; \mathcal{L}^\infty)$  tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| u_\varepsilon - a e^{i\varepsilon^{\kappa-1}G} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \|_{\mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty)} \rightarrow 0, \quad (5.103)$$

a soluciona el problema de valor inicial

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a + \frac{1}{2} a \Delta \phi_{eik} = 0, \quad a|_{t=0} = a_0, \quad (5.104)$$

y  $G$  depende de la no linealidad a través de  $f$ . En particular si  $\kappa > 1$ , entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| u_\varepsilon - a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \|_{\mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty)} \rightarrow 0. \quad (5.105)$$

y no hay efecto no lineal presente, destacando el orden de comportamiento  $u_\varepsilon$ . Si  $\kappa = 1$ , los efectos de los términos no lineales están presentes, destacando su orden, medido por  $G$ .

#### Demostración

Vamos hacer un pequeño bosquejo del proceder en la demostración del Teorema 27.

Vamos a definir a:

$$a^\varepsilon(t, x) := u_\varepsilon(t, x) e^{-\frac{i\phi_{eik}(t, x)}{\varepsilon}}, \quad (5.106)$$

el cual hará que la Ecuación de Schrödinger no Lineal que estamos estudiando sea equivalente a (5.107) y  $u_\varepsilon$  soluciona a (5.65) y (5.66)  $\Leftrightarrow a^\varepsilon(t, x)$  soluciona

$$\frac{\partial}{\partial t} a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = i \frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\kappa-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \quad (5.107)$$

$$a^\varepsilon|_{t=0} = a_0^\varepsilon. \quad (5.108)$$

Mostrado que  $a^\varepsilon$  es solución, procederemos a demostrar, mediante la Proposición 8, que  $a^\varepsilon$  está acotada en  $\mathcal{L}^\infty$  y más aún  $a^\varepsilon \in C^\infty \cap C$ .

El siguiente paso será introducir a  $\tilde{a}^\varepsilon$  y probaremos el Corolario 5 que dice: la diferencia en norma entre  $a^\varepsilon$  y  $\tilde{a}^\varepsilon$  converge a cero en el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ . Este resultado es clave para demostrar la convergencia de la solución propuesta y además nos permite tener la expresión para el cálculo de la solución a la ecuación de Schrödinger no Lineal, dado que vamos a aproximar a  $u_\varepsilon$  mediante  $\tilde{a}^\varepsilon$ .

Para el calcular a  $\tilde{a}$  vamos a usar el flujo hamiltoniano (5.67), para hallar a  $x(t, y)$  con ello se calcula el determinante  $J_t(y) = \det \nabla_y x(t, y)$ , con éste determinante definiremos a:

$$A^\varepsilon(t, y) := \tilde{a}^\varepsilon(t, x(t, y)) \sqrt{J_t(y)}, \quad (5.109)$$

con está ecuación, que es diferenciable, podremos deducir la expresión de  $G$ , establecer la convegerencia de la solución y la expresión matemática de  $\tilde{a}$ .

Expuesto esto empecemos la demostración:

Sustituyamos a (5.106) en (5.65). Como hemos procedido en otras ocasiones primero haremos la parte temporal, después la espacial y finalmente la parte de los potenciales.

1.<sup>a</sup> Parte temporal

$$\begin{aligned} i\varepsilon \frac{\partial a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}}{\partial t} &= i\varepsilon \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} a \right) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \left( \frac{ia}{\varepsilon} \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} \right) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \right] = i\varepsilon \left[ \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{ia}{\varepsilon} \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} \right] e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = \\ &= \left[ i\varepsilon \frac{\partial a}{\partial t} - a \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} \right] e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

2.<sup>a</sup> Parte espacial

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} &= \frac{\varepsilon^2}{2} \nabla \cdot (\nabla a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}) = \frac{\varepsilon^2}{2} (\nabla \cdot ((\nabla a) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \frac{ia}{\varepsilon} \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial x} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}})) \\ \frac{\varepsilon^2}{2} (\nabla \cdot (\nabla a + \frac{ia}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik}) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ (\Delta a + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{ia}{\varepsilon} \Delta \phi_{eik}) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \right. \\ (\nabla a + \frac{ia}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik}) \cdot (\frac{i}{\varepsilon} \nabla \phi_{eik}) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \left. \right\} &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \Delta a + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{ia}{\varepsilon} \Delta \phi_{eik} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\varepsilon} \nabla a \cdot \nabla \phi_{eik} - \frac{a}{\varepsilon^2} (\nabla \phi_{eik})^2 \right\} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = \\ \left\{ \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a + i\varepsilon \nabla a \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{ia}{\varepsilon} \Delta \phi_{eik} - a (\nabla \phi_{eik})^2 \right\} &e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

3.<sup>a</sup> Parte de potenciales

$$V a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} + \varepsilon^\kappa f(|a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}|^2) a e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = (V a + \varepsilon^\kappa f(|a|^2) a) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}. \quad (5.112)$$

reuniendo las tres partes:

$$\left\{ i\varepsilon \frac{\partial a}{\partial t} - a \frac{\partial \phi_{eik}}{\partial t} + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a + i\varepsilon \nabla a \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{ia}{\varepsilon} \Delta \phi_{eik} - a (\nabla \phi_{eik})^2 \right\} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} = (V a + \varepsilon^\kappa f(|a|^2) a) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}. \quad (5.113)$$



Multiplicando por  $\frac{1}{\varepsilon}$  y  $-i$  a (5.113) se tiene:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla a \cdot \nabla \phi_{eik} + \frac{a}{2} \Delta \phi_{eik} = \frac{i\varepsilon}{2} \Delta a - \varepsilon^{\kappa-1} f(|a|^2) a. \quad (5.114)$$

Por construcción  $a^\varepsilon$  es solución a (5.65), lo importante ahora es establecer el acotamiento de  $a^\varepsilon$  en  $\mathbb{H}^s$ , para ello nos serviremos de la siguiente proposición.

**PROPOSICIÓN 8.** *Supongamos que se cumplen las suposiciones 1 y 2. Sea  $\kappa \geq 1$ . Para toda  $\varepsilon \in (0, 1]$ , la ecuación (5.107) tiene una solución única  $a^\varepsilon$  pertenece al espacio  $C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N) \cap C([0, T]; \mathbb{H}^s)$  para toda  $s \geq \frac{N}{2}$ . Más aún,  $a^\varepsilon$  está acotada en  $\mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathbb{H}^s)$  uniformemente en  $\varepsilon \in (0, 1]$  para toda  $s \geq 0$*

**Demostración de la proposición (8)**

$\forall s \geq 0$ . Sean:  $s \geq \frac{N}{2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  y  $s = |\alpha|$ . Aplicando  $\partial_x^\alpha$  a (5.107) tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial t} a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} \right) &= i \frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\kappa-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \\ \partial_x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} a^\varepsilon + \partial_x^\alpha \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^\alpha a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} &= i \frac{\varepsilon}{2} \partial_x^\alpha \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\kappa-1} \partial_x^\alpha f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.115)$$

desarrollando a (5.115)

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_x^\alpha a^\varepsilon + (\partial_x^\alpha \nabla \phi_{eik}) \cdot \nabla a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon + \frac{1}{2} \partial_x^\alpha a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} + \frac{1}{2} a^\varepsilon \partial_x^\alpha \Delta \phi_{eik} &= \\ \frac{i\varepsilon}{2} \partial_x^\alpha \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\kappa-1} \partial_x^\alpha (f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.116)$$

Si definimos a  $R_\alpha^\varepsilon$ :

$$R_\alpha^\varepsilon = [\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla, \partial_x^\alpha] a^\varepsilon - \frac{1}{2} \partial_x^\alpha (a^\varepsilon \Delta \phi_{eik}). \quad (5.117)$$

entonces (5.116) queda como:

$$\partial_t \partial_x^\alpha a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon = \frac{i\varepsilon}{2} \partial_x^\alpha \Delta a^\varepsilon - i \varepsilon^{\kappa-1} \partial_x^\alpha (f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon) + R_\alpha^\varepsilon. \quad (5.118)$$

Tomando el producto interno con  $\partial_x^\alpha a^\varepsilon$  llegamos a:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + \langle \nabla_{eik} \phi \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle &= \frac{i\varepsilon}{2} \langle \Delta \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle \\ &\quad - i\varepsilon^{\kappa-1} \langle \partial_x^\alpha f(|a^\varepsilon|^2 a^\varepsilon), \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + \langle R_\alpha^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle, \quad \Rightarrow \\ \partial_t \langle \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon &= \frac{i\varepsilon}{2} \langle \Delta \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle - i\partial_x^\alpha \varepsilon^{\kappa-1} \langle f(|a^\varepsilon|^2 a^\varepsilon, a^\varepsilon) \rangle + \\ &\quad \langle R_\alpha^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Tomando la parte real de esta última igualdad tenemos que el término  $\frac{i\varepsilon}{2} \langle \Delta \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle$  es cero por ser imaginario, ya que el Laplaciano siempre es real y entonces se tiene que es un imaginario puro el término.

Por otro lado notemos que:

$$\left| \operatorname{Re} \int \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 \Delta \phi_{eik} \right|. \quad (5.120)$$

pues:

$$\begin{aligned} \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon &= \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} = \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 = \\ &\quad \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} = \\ (\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon) \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} + \partial_x^\alpha a^\varepsilon (\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon}) &= \quad (5.121) \\ (\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon) \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} + \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} (\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon) &= \\ 2\operatorname{Re}(\overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} (\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon)), & \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2} \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 = \operatorname{Re}(\overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} (\nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon)).$$

retomando (5.121)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \int \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 \right| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\partial \mathbb{R}^N} \phi_{eik} \nabla |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 \Delta \phi_{eik} \right| = \\ &\quad \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_x^\alpha a^\varepsilon|^2 \Delta \phi_{eik} \right|. \end{aligned} \quad (5.122)$$

consecuencia de aplicar una de las identidades de Green.

Por otro lado la parte temporal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \partial_x^\alpha a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (\partial_x^\alpha a^\varepsilon \cdot \partial_x^\alpha a^\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial t} (\partial_x^\alpha a^\varepsilon) \partial_x^\alpha a^\varepsilon + \partial_x^\alpha a^\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \partial_x^\alpha a^\varepsilon = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \partial_x^\alpha a^\varepsilon \partial_x^\alpha a^\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Entonces

$$\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} (\partial_x^\alpha a^\varepsilon \cdot \partial_x^\alpha a^\varepsilon) = \int \frac{\partial}{\partial t} \partial_x^\alpha a^\varepsilon \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon}, \quad (5.124)$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\partial_x^\alpha a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int \frac{\partial}{\partial t} \partial_x^\alpha a^\varepsilon \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon}.$$

y para la parte de los potenciales

$$-i\varepsilon^{\kappa-1} \langle \partial_x^\alpha a^\varepsilon f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + \langle R_\alpha^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle.$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} -i\varepsilon^{\kappa-1} \langle \partial_x^\alpha a^\varepsilon f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + \langle R_\alpha^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle &\leq \\ \varepsilon^{\kappa-1} \|f(a^\varepsilon) a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} - i\varepsilon^{\kappa-1} \langle \partial_x^\alpha a^\varepsilon f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + & \\ \langle R_\alpha^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle \|_{\mathcal{L}^2} + \|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \|\partial_x^\alpha a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}, & \end{aligned} \quad (5.125)$$

utilizando:  $\|u\|_{\mathbb{H}^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial_x^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2}$  nos conduce a:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\kappa-1} \|f(a^\varepsilon) a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} - i\varepsilon^{\kappa-1} \langle \partial_x^\alpha a^\varepsilon f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle + \langle R_\alpha^\varepsilon, \partial_x^\alpha a^\varepsilon \rangle \|_{\mathcal{L}^2} + \\ \|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \|\partial_x^\alpha a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \leq \varepsilon^{\kappa-1} \|f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}. \end{aligned} \quad (5.126)$$

obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\partial_x^\alpha a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq C \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}^2 + \varepsilon^{\kappa-1} \|f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}, \quad (5.127)$$

Nota: Se ha hecho uso de:

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\partial_x^\alpha a^\varepsilon} \nabla \phi_{\varepsilon ik} \cdot \nabla \partial_x^\alpha a^\varepsilon \leq C \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}^2.$$

Aplicando la desigualdad de Moser, concluimos

$$\|f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq C (\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty}) \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Vamos a demostrar que  $\|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \leq C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}$ . Como las derivadas (hasta de orden dos) de  $\phi_{eik}$  son acotadas en  $\mathcal{L}^2$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} &= \|(\nabla\phi_{eik} \cdot \nabla)\partial_x^\alpha a^\varepsilon - \frac{1}{2}\partial_x^\alpha(a^\varepsilon \Delta\phi_{eik})\|_{\mathcal{L}^2} \leq \\ &\|\nabla\phi_{eik} \cdot \nabla\partial_x^\alpha a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} + \frac{1}{2}\|\partial_x^\alpha a^\varepsilon \Delta\phi_{eik}\|_{\mathcal{L}^2} \leq C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

Estamos a punto de llegar al punto que queremos: la aplicación del lema de Gronwall y demostrar que  $\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C(s, \|a_0^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s})$ . Retomemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}^2 &\geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 \quad \Rightarrow \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}^2 &\leq C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}^2 + C\varepsilon^{\kappa-1}\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + C\|R_\alpha^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} &\leq C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + C\varepsilon^{\kappa-1}\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty} + C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \\ &\leq \left( \frac{C}{\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty}} + \frac{C\varepsilon^{\kappa-1}}{\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}} \right) \|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}, \end{aligned} \quad (5.129)$$

haciendo un cambio de variable  $C = \left( \frac{C}{\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty}} + \frac{C\varepsilon^{\kappa-1}}{\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}} \right)$  concluimos:

$$\frac{d}{dt} \|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq C\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty}\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + C\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}.$$

Si  $\kappa \geq 1$  esto implica que  $C$  será independiente de  $\varepsilon$ , y a la inversa, si es independiente de  $\varepsilon$ , implica que  $\kappa \geq 1$ .

Ahora si aplicamos el lema de Gronwall concluimos que

$$\|a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty} \leq C(s, \|a_0^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}) \quad \forall s \in [0, T],$$

por lo tanto:

$$a^\varepsilon \in \mathcal{L}^\infty([0, T], \mathbb{H}^s).$$

Con esto demostramos la proposición.

Demostraremos el siguiente corolario, que establecerá el resultado del Teorema 27

**COROLARIO 5.** *Sean válidas las suposiciones 1 y 2, sea  $\kappa \geq 1$ , entonces*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^\infty([0, T], \mathbb{H}^s)} \longrightarrow 0, \quad \forall s \geq 0, \quad (5.130)$$

donde  $\tilde{a}^\varepsilon$  es solución a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{a}^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \tilde{a}^\varepsilon + \frac{1}{2} \tilde{a}^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = -i\varepsilon^{\kappa-1} f(|\tilde{a}^\varepsilon|^2) \tilde{a}^\varepsilon, \quad \tilde{a}^\varepsilon|_{t=0} = a_0. \quad (5.131)$$

**Demostración**

Como  $\tilde{a}^\varepsilon$  es solución a la ecuación (5.131), entonces  $\tilde{a}^\varepsilon \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^N)$  por la proposición recientemente demostrada, así también  $\tilde{a}^\varepsilon$  está uniformemente acotada en  $\mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathbb{H}^s)$  con  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $\forall s \geq 0$ .

Usemos el siguiente *ansatz*  $w^\varepsilon = a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon$ , demostraremos que satisface a la ecuación: (si  $\tilde{a}^\varepsilon$  es solución se tiene)

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{a}^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \tilde{a}^\varepsilon + \frac{1}{2} \tilde{a}^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = -i\varepsilon^{\kappa-1} f(|\tilde{a}^\varepsilon|^2) \tilde{a}^\varepsilon, \quad (5.132)$$

como  $a^\varepsilon$  lo es, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = i\frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i\varepsilon^{\kappa-1} f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon. \quad (5.133)$$

Tomando la diferencia de (5.107) y (5.131)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^\varepsilon + \frac{1}{2} a^\varepsilon \Delta \phi_{eik} - \frac{\partial}{\partial t} \tilde{a}^\varepsilon - \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla \tilde{a}^\varepsilon - \frac{1}{2} \tilde{a}^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = \\ i\frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i\varepsilon^{\kappa-1} (f(|a^\varepsilon|^2) a^\varepsilon - f(|\tilde{a}^\varepsilon|^2) \tilde{a}^\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.134)$$

agrupando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon) + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla (a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon) + \frac{1}{2} (a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon) \Delta \phi_{eik} = \\ i\frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i\varepsilon^{\kappa-1} (F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)), \end{aligned} \quad (5.135)$$

donde se hizo el cambio de variable  $F(a) = f(|a|^2)a$ , haremos una más  $w^\varepsilon = a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon$ , así se tiene que la ecuación (5.135), junto con las condiciones iniciales.

$$\frac{\partial}{\partial t} w^\varepsilon + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla w^\varepsilon + \frac{1}{2} w^\varepsilon \Delta \phi_{eik} = i\frac{\varepsilon}{2} \Delta a^\varepsilon - i\varepsilon^{\kappa-1} (F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)). \quad (5.136)$$

Tomando el producto punto con  $w^\varepsilon$  para buscar la estimación de energía.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} w^\varepsilon, w^\varepsilon \right\rangle + \langle \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla w^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle + \frac{1}{2} \langle w^\varepsilon \Delta \phi_{eik}, w^\varepsilon \rangle = \\ i\frac{\varepsilon}{2} \langle \Delta a^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle - i\varepsilon^{\kappa-1} \langle (F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)), w^\varepsilon \rangle, \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle w^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle + \frac{1}{2} \nabla \phi_{\varepsilon ik} \cdot \nabla \langle w^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle + \frac{1}{2} \Delta \phi_{\varepsilon ik} \langle w^\varepsilon, w^\varepsilon \rangle \leq \\ \varepsilon \|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} + \varepsilon^{\kappa-1} \|F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}^2} \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}. \end{aligned} \quad (5.138)$$

La parte derecha de (5.138) es consecuencia de la desigualdad Cauchy-Schwartz. Por las propiedades del espacio de Hilbert se escribe (5.138) igual a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 + c \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 + c_1 \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}^2 \leq \varepsilon \|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2} + \varepsilon^{\kappa-1} \|F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}^2} \|w^\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2}, \quad (5.139)$$

y por las propiedades de las normas en los espacios de Sobolev.

$$\frac{\partial}{\partial t} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + c \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + c_1 \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq \varepsilon \|\Delta a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon^{\kappa-1} \|F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)\|_{\mathbb{H}^s}. \quad (5.140)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq c \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \varepsilon^{\kappa-1} \|F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)\|_{\mathbb{H}^s}. \quad (5.141)$$

Usando el hecho de que  $F \in C^1$  se tiene:

$$\|F(a^\varepsilon) - F(\tilde{a}^\varepsilon)\|_{\mathbb{H}^s} \leq c(\|a^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}, \|\tilde{a}^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}) \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s}. \quad (5.142)$$

*i.e.* porque  $F'(\xi) = \left\| \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \right\| = c(\|a\|, \|b\|)$ .

Resta demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq c(s) \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + c(s) \varepsilon$$

tomemos que

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} &\leq e^{c(s) \int_0^t dw} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \int_0^t c(s) \varepsilon dw \\ &\leq e^{c(s)t} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + c(s) \varepsilon t, \end{aligned} \quad (5.143)$$

tomando la derivada

$$\frac{d}{dt} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq \frac{d}{dt} e^{c(s)t} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + \frac{d}{dt} c(s) \varepsilon t, \quad (5.144)$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} \leq c(s) \|w^\varepsilon\|_{\mathbb{H}^s} + c(s) \varepsilon.$$

aplicando el lema de Gronwall obtenemos

$$\|a_0^\varepsilon - a_0\|_{\mathbb{H}^s} \longrightarrow 0.$$

Con esto demostramos el corolario.

Regresando a la demostración del Teorema.

Introduzcamos el determinante de Jacobi

$$J_t(y) = \mathbf{det} \nabla_y x(t, y), \quad (5.145)$$

y definamos

$$A^\varepsilon(t, y) := \tilde{a}^\varepsilon(t, x(t, y)) \sqrt{J_t(y)}. \quad (5.146)$$

Como  $\tilde{a}^\varepsilon$  es diferenciable, entonces podemos construir la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} A^\varepsilon = -i\varepsilon^{\kappa-1} f(J_t^{-1}(y) |A^\varepsilon|^2) A^\varepsilon. \quad (5.147)$$

Siendo esta una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, su solución es:

$$A^\varepsilon(t, y) = a_0(y) e^{-i\varepsilon^{\kappa-1} \int_0^t f(J_s^{-1}(y) |a_0(y)|^2) ds}. \quad (5.148)$$

De aquí inferimos que la expresión de  $G(t, x)$  está dada por:

$$G(t, x) = - \int_0^t f(J_s^{-1}(y) |a_0(y)|^2) ds, \quad (5.149)$$

Donde podemos notar que (5.149) depende de  $f$  (la no linealidad) y esta a su vez dependiente de  $J_t(y) = \mathbf{det} \nabla_y x(t, y)$  (el determinante de Jacobi).

Ya estamos en condiciones de establecer el acotamiento de  $u_\varepsilon$ .

Ahora como:

$$\tilde{a}^\varepsilon(t, x) \sqrt{J_t(y)} = A^\varepsilon(t, y) = a_0(y) e^{i\varepsilon^{\kappa-1} G(t, x)}. \quad (5.150)$$

Sustituyendo a  $a_0(x) = a(t, x) \sqrt{J_t(y)}$  en (5.150), se obtiene:

$$\tilde{a}^\varepsilon(t, x) \sqrt{J_t(y)} = A^\varepsilon(t, y) = a(t, x) \sqrt{J_t(y)} e^{i\varepsilon^{\kappa-1} G(t, x)}, \quad (5.151)$$

por lo tanto:

$$\tilde{a}^\varepsilon(t, x) = a(t, x) e^{i\varepsilon^{\kappa-1} G(t, x)}. \quad (5.152)$$

Recordando que:  $a^\varepsilon := u_\varepsilon e^{-\frac{i\phi_{eik}(t,x)}{\varepsilon}}$ ; tomando la diferencia entre  $a^\varepsilon$  y  $\tilde{a}^\varepsilon$  y como  $e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}}$  es isométrica, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| a^\varepsilon - \tilde{a}^\varepsilon \|_{\mathcal{L}^\infty([0,T]; \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| (a^\varepsilon - ae^{i\varepsilon^{\kappa-1}G}) e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \|_{\mathcal{L}^\infty([0,T]; \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| a^\varepsilon e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} - ae^{i\varepsilon^{\kappa-1}G} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \|_{\mathcal{L}^\infty([0,T]; \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| u_\varepsilon - ae^{i\varepsilon^{\kappa-1}G} e^{\frac{i\phi_{eik}}{\varepsilon}} \|_{\mathcal{L}^\infty([0,T]; \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.153)$$

q. e. d.

**COMENTARIO 7.** *Extendiendo un poco más la interpretación de  $G(t, x)$ . Si  $\kappa = 1$  entonces el orden del efecto lineal está descrito por  $G$ , ahora dado que  $G$  aparece en*

$$e^{i\varepsilon^{\kappa-1}G(t,x)}. \quad (5.154)$$

*Se infiere que  $G$  es una fase de cambio, generada por la no linealidad.*

*A la ecuación (5.154) la definiremos como:*

$$\hat{J} := e^{i\varepsilon^{\kappa-1}G(t,x)}.$$

*Y éste es un operador unitario; A manera de ejemplo: Si fuera un láser lo analizado,  $G$  nos daría la fase de auto modulación.*

*$G$  destaca el orden de los efectos no lineales, dado que*

$$\tilde{a}(t, x) - a(t, x) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1}). \quad (5.155)$$

Si los tiempos en los que nos interesa estudiar la evolución son muy pequeños, esto nos constriñe a introducir unos coeficientes  $a^i$  con  $i = 0, 1, 2, \dots$  para que describan el comportamiento asintótico de la solución  $a^\varepsilon(t, x)$ .

Así cuando  $t \approx 0$  a  $a^\varepsilon$  se le fijara el tiempo igual a cero (*i.e*  $t = 0$ ) y siempre lo escribiremos como  $a^\varepsilon(0, x) = a_0(x)$ , también se puede expandir como  $a^\varepsilon(0, x) \sim a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \dots$ <sup>8</sup>, por lo que los coeficientes de la amplitud para tiempos pequeños serán siempre escritos como  $a_i(x)$   $i = 1, 2, \dots$

Estos coeficientes  $a^i$  están acotados por los términos de la expansión de  $a_0(x)$ .

---

<sup>8</sup>No hay que confundir esta expansión con la expansión (5.99.), ya que ésta es cuando el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ .



El primer coeficiente ( $a^0$ ) se define como:

$$a^0(t, x) = \begin{cases} a(t, x) & : \text{ si } \kappa \geq 2, \\ a(t, x)e^{iG(t, x)} & : \text{ si } \kappa = 1, \end{cases}$$

y debe cumplir con:

$$a^0 \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{si } \exists s > \frac{N}{2}.$$

Se justifica esta definición del primer coeficiente por el hecho de que al ser el tiempo muy cercano a cero y dado que  $\kappa$  juega un papel decisivo en la solución  $\tilde{a}^\varepsilon = a(t, x)e^{i\varepsilon^{\kappa-1}G(t, x)}$ , entonces decimos que para el primer caso ( $\kappa \geq 2$ ) la contribución del término  $G$  se vuelve despreciable. Si  $\kappa = 1$  entonces el término  $G$  no es tan despreciable y por eso tiene un rol en la definición de  $a^0$ .

Para el segundo término  $a^1$  deberá cumplir con:

$$a^1 \in \mathbb{H}^{s-2}(\mathbb{R}^N)$$

y ser solución a:

$$\frac{\partial}{\partial t} a^1 + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla a^1 + \frac{1}{2} a^1 \Delta \phi_{eik} = \frac{i}{2} \Delta a^0 + S_\kappa, \quad (5.156)$$

siendo  $S_\kappa$  igual a:

$$S_\kappa = \begin{cases} 0 & : \text{ si } \kappa \geq 3 \\ -if(|a^0|^2)a^0 & : \text{ si } \kappa = 2 \\ -if(|a^0|^2)a^1 - 2if'(|a^0|^2)a^0 \text{Re}(\bar{a}^0 a^1) & : \text{ si } \kappa = 1. \end{cases}$$

Hagamos el cálculo de que  $a^1$  soluciona a (5.156), para ello primero haremos la expansión en serie de Taylor de  $f$ , pues por la suposición 2 es válido y vamos a usar la suma de los dos primeros términos propuestos, *i.e.*  $a^0 + \varepsilon a^1$ ,

entonces:

$$\begin{aligned}
& i\varepsilon^{\kappa-1}[f(|a^0|^2)(a^0 + \varepsilon a^1) + f'(|a^0|^2)|a^0 + \varepsilon a^1|^2(a^0 + \varepsilon a^1)] = \\
& i\varepsilon^{\kappa-1}[f(|a^0|^2)a^0 + f(|a^0|^2)\varepsilon a^1 + f'(|a^0|^2)|a^0 + \varepsilon a^1|^2(a^0 + \varepsilon a^1)] = \\
i\varepsilon^{\kappa-1}[f(|a^0|^2)a^0 + f(|a^0|^2)\varepsilon a^1 + f'(|a^0|^2)(|a^0|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1) + \varepsilon^2 |a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1)] = \\
& f(|a^0|^2)\varepsilon a^1 + f'(|a^0|^2)|a^0 + \varepsilon a^1|^2(a^0 + \varepsilon a^1)] = \\
& i\varepsilon^{\kappa-1}[f(|a^0|^2)a^0 + f(|a^0|^2)\varepsilon a^1 \\
& + (f'(|a^0|^2)|a^0|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1)f'(|a^0|^2) + \varepsilon^2 f'(|a^0|^2)|a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1)] = \\
& i\varepsilon^{\kappa-1}f(|a^0|^2)a^0 + i\varepsilon^{\kappa-1}f(|a^0|^2)\varepsilon a^1 \\
& + (i\varepsilon^{\kappa-1}f'(|a^0|^2)|a^0|^2 + 2i\varepsilon^{\kappa-1}\varepsilon \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1)f'(|a^0|^2) + i\varepsilon^{\kappa-1}\varepsilon^2 f'(|a^0|^2)|a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1) = \\
& i\varepsilon^{\kappa-1}f(|a^0|^2)a^0 + i\varepsilon^{\kappa}f(|a^0|^2)a^1 \\
& + (i\varepsilon^{\kappa-1}f'(|a^0|^2)|a^0|^2 + 2i\varepsilon^{\kappa} \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1)f'(|a^0|^2) + i\varepsilon^{\kappa+1}f'(|a^0|^2)|a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1).
\end{aligned} \tag{5.157}$$

Una vez hecha la expansión en serie de Taylor, procederemos a sustituir a  $a^0 + \varepsilon a^1$  en (5.107)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(a^0 + \varepsilon a^1) + \nabla \phi_{eik} \cdot \nabla(a^0 + \varepsilon a^1) + \frac{1}{2}(a^0 + \varepsilon a^1)\Delta \phi_{eik} = \\
& i\frac{\varepsilon}{2}\Delta(a^0 + \varepsilon a^1) - i\varepsilon^{\kappa-1}f(|a^0 + \varepsilon a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1) = \\
\frac{\partial}{\partial t}a^0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}a^1 + \nabla \phi_{eik} \nabla a^0 + \varepsilon \nabla \phi_{eik} \nabla a^1 + \frac{1}{2}a^0 \Delta \phi_{eik} + \varepsilon a^1 \Delta \phi_{eik} = & \tag{5.158} \\
& i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^0 + i\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta a^1 - i\varepsilon^{\kappa-1}f(|a^0 + \varepsilon a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1).
\end{aligned}$$

En esta ecuación nuevamente aparece la ecuación Hamilton-Jacobi y eso hace que desaparezcan esos términos que la definen. Ahora sustituiremos (5.157) con lo que esta ecuación (5.158) queda como:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}a^1 + \varepsilon \nabla \phi_{eik} \nabla a^1 + \varepsilon a^1 \Delta \phi_{eik} = i\frac{\varepsilon}{2}\Delta a^0 + \\
& i\frac{\varepsilon^2}{2}\Delta a^1 - i\varepsilon^{\kappa-1}[i\varepsilon^{\alpha-1}f(|a^0|^2)a^0 + i\varepsilon^{\kappa}f(|a^0|^2)a^1 \\
& + (i\varepsilon^{\kappa-1}f'(|a^0|^2)|a^0|^2 + 2i\varepsilon^{\alpha} \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1)f'(|a^0|^2) + i\varepsilon^{\kappa+1}f'(|a^0|^2)|a^1|^2)(a^0 + \varepsilon a^1)],
\end{aligned} \tag{5.159}$$

multiplicando a ésta por  $\varepsilon^{-1}$  se llega a:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon} \left[ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} a^1 + \varepsilon \nabla \phi_{eik} \nabla a^1 + \varepsilon a^1 \Delta \phi_{eik} = i \frac{\varepsilon}{2} \Delta a^0 + \right. \\
& \left. i \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta a^1 - i \varepsilon^{\kappa-1} [i \varepsilon^{\kappa-1} f(|a^0|^2) a^0 + i \varepsilon^{\kappa} f(|a^0|^2) a^1 \right. \\
& \left. + (i \varepsilon^{\kappa-1} f'(|a^0|^2) |a^0|^2 + 2i \varepsilon^{\kappa} \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1) f'(|a^0|^2) + i \varepsilon^{\kappa+1} f'(|a^0|^2) |a^1|^2) (a^0 + \varepsilon a^1) \right] = \\
& \frac{\partial}{\partial t} a^1 + \nabla \phi_{eik} \nabla a^1 + \frac{1}{2} a^1 \Delta \phi_{eik} = \frac{i}{2} \Delta a^0 + \\
& i \frac{\varepsilon}{2} \Delta a^1 - i \varepsilon^{\kappa-2} f(|a^0|^2) a^0 - i \varepsilon^{\kappa-1} f(|a^0|^2) a^1 - \\
& i \varepsilon^{\kappa} f'(|a^0|^2) |a^0|^2 a^0 - 2i \varepsilon^{\kappa-1} \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1) f'(|a^0|^2) a^0 - \\
& i \varepsilon^{\kappa+1} f'(|a^0|^2) |a^1|^2 a^0 - 2i \varepsilon^{\kappa} \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1) f'(|a^0|^2) a^1 - \\
& i \varepsilon^{\kappa+1} f'(|a^0|^2) |a^0|^2 a^1 - i \varepsilon^{\kappa+1} f'(|a^0|^2) |a^1|^2 a^1.
\end{aligned} \tag{5.160}$$

Ahora tomando el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$  a la anterior ecuación, se llega:

$$\frac{\partial}{\partial t} a^1 + \nabla \phi_{eik} \nabla a^1 + \frac{1}{2} a^1 \Delta \phi_{eik} = \frac{i}{2} \Delta a^0 + S_{\kappa}, \tag{5.161}$$

$$S_{\kappa} = \begin{cases} 0 & : \text{ si } \kappa \geq 3 \\ -i f(|a^0|^2) a^0 & : \text{ si } \kappa = 2 \\ -i f(|a^0|^2) a^1 - 2i f'(|a^0|^2) a^0 \operatorname{Re}(\bar{a}^0 a^1) & : \text{ si } \kappa = 1. \end{cases}$$

q. e. d.

El teorema que a continuación se enuncia muestra que los términos  $a^0 + \varepsilon a^1$  están acotados por  $a_0(x) + \varepsilon a_1(x)$ .

**TEOREMA 28.** *Supongamos validas las suposiciones 1 y 2, y también que se cumple (5.156). Entonces  $\exists C > 0$  tal que*

$$\|a^{\varepsilon} - a^0 - \varepsilon a^1\|_{\mathcal{L}^{\infty}([-T, T]; \mathbb{H}^{s-4})} \leq C(\varepsilon + \|a_0^{\varepsilon} - a_0 - \varepsilon a_1\|_{\mathbb{H}^{s-4}}). \tag{5.162}$$

### Resumen para el cálculo de la solución WKB no lineal:

Se coloca en forma de lista, estamos suponiendo que la ecuación cumple con las suposiciones 1 y 2

- Si  $\kappa \geq 1$  se aplica éste método.
- Con las ecuaciones de flujo (5.67) se calcula  $x(t, y)$ .

- Aplicando el determinante de Jacobi se conoce a  $a(t, x) = \frac{1}{\sqrt{J_t(y(t, x))}} a_0(y(t, x))$ , donde  $y(t, x)$  es una inversión de  $x(t, x)$ , que además es un difeomorfismo.
- Calculamos  $G(t, x)$  mediante la ecuación (5.149).
- Una vez que tenemos estos cálculos se sustituyen en la ecuación de  $\tilde{a}$ .

Si el tiempo es muy pequeño, entonces estos son los pasos a seguir:

- $a^0 = a(t, x)$ , si  $\kappa \geq 2$ ; En el caso de que  $\kappa = 1$  se necesitarán tanto a  $a(t, x)$  como a  $G$ .
- $a^1(t, x)$  será hallada al solucionar la ecuación (5.156).

Si se desean hacer cálculos de términos mayores, basta repetir los pasos para el cálculo de  $a^1$ .

**COMENTARIO 8.** *La densidad de probabilidad queda escrita por  $\rho^\varepsilon = |u_\varepsilon|^2 = |a^\varepsilon|^2$ . De aquí se desprende como se puede normalizar la función de onda.*

**COMENTARIO 9.** *La densidad de corriente tiene la siguiente forma<sup>9</sup>*

$$J^\varepsilon = \varepsilon \text{Im}(\bar{u}_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = |a^\varepsilon|^2 \nabla \phi + \varepsilon \text{Im}(\bar{a}^\varepsilon \nabla a^\varepsilon).$$

## 5.4. Conclusiones

El Teorema 27 erigió al método WKB como un suministrador de la solución a una ecuación de Schrödinger no lineal con potencial externo  $V$ , que éste cumple con la suposición (1) llamada geométrica y un término no lineal  $\varepsilon^\kappa f(|u|^2)u_\varepsilon$  que satisface la suposición (2) llamada analítica, algunas veces la suposición (3), llamada homogénea.

Tal como se dijo en la introducción tuvimos la necesidad de aprender nuevos temas de matemáticas, como serían algunos temas de análisis funcional, ecuaciones diferenciales parciales, etc., para poder hacer la demostración del Teorema 27.

Para la aplicación del método WKB tanto en el caso lineal como el que no es lineal: ambos emplean el *ansatz*  $u(x, t) = Ae^{i\phi}$ ; el potencial es suave, es

<sup>9</sup>*cf.* la fórmula dada con la cualquier libro de mecánica cuántica.

decir que es de clase  $C^\infty$ ; otra coincidencia radica: la aparición de la ecuación Hamilton-Jacobi y una ecuación de transporte. Entre ambos la disimilitud estriba: En el caso lineal la amplitud se mantiene constante y la expansión se hace sobre la fase, comunicándonos acerca del estado estacionario del sistema; en el caso no lineal la fase no es una constante, lo cual nos lleva a restringirla a través de pedirle que sea solución a la ecuación de la eikonal (5.76); la interpretación: la función de la eikonal sirve de “guía” a la función de onda. En cuanto a la expansión está se hace sobre la amplitud, porque la función de onda no es estacionaria y con ello indagamos en la dinámica del caso estudiado. Tanto en el método WKB para el caso lineal, como en el caso no lineal, las soluciones son aproximaciones. En el caso que no es lineal la solución  $u_\varepsilon$  se aproxima mediante la ecuación  $\tilde{a}^\varepsilon$ .

El parámetro  $\kappa \geq 0$  clasifica el tipo de no linealidad que se tiene y vemos sus efectos en el  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ ; el orden de los efectos no lineales está dado por medio de la función  $G$ , que a su vez es una fase.

Para cuando el tiempo es muy pequeño, se proponen dos términos (pueden ser más) que serían el de grado cero ( $a^0$ ) y el grado uno ( $a^1$ ). El cálculo de  $a^0$  requiere conocer a  $a(t, x)$ , si  $\kappa \geq 2$ , en el caso en que  $\kappa = 1$ , para el mismo término, se necesitarán tanto a  $a(t, x)$  como a  $G$ . Para  $a^1(t, x)$  será hallada al solucionar la ecuación (5.156). El computo para términos de grado mayor es *mutatis mutandis* de lo realizado para  $a^1(t, x)$ .

Destaquemos que no hay forma de reducir la solución dada por el método WKB no lineal a la solución WKB del caso lineal.

El que la solución pertenezca al espacio de Sobolev permite garantizar que las derivadas cumplan con los axiomas de probabilidad, hecho indispensable para la mecánica cuántica.



# Bibliografía

- [1] Carles, Rémi: **Semi-Classical Analysis for Nonlinear Schrödinger Equations**, WorldScientific, Singapur, 2008
  
- [2] Carles, Rémi: **WKB Analysis for Nonlinear Schrödinger Equations with Potencial**, *Commun. Math. Phys.* **269**, 195-221, 2007
  
- [3] Cazenave. Thierry: **Semilinear Schrödinger Equations**, Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003
  
- [4] Chacón, Elpidio (Elaborador): **Apuntes del curso de Mecánica Cuántica de Marcos Moshinsky**, Las Prensas de Ciencias, UNAM, México, 2008
  
- [5] Evans, Lawrence: **Partial Differential Equations**, American Mathematical Society, Graduate Text in Mathematics, Vol 19, Estados Unidos, 1998
  
- [6] Fujioka, Jorge: **NLS una Introducción a la Ecuación no Lineal de Schrödinger**, Serie FENOMECC, Vol 4, México, 2003
  
- [7] Jona-Lasinio, Presilla, Sjöstrand: **On the Schrödinger Equation with Concentrated Nonlinearities**, *Annals of Physics*, **240**, 1-21, 1995

- 
- [8] Kato, Tosio: *Nonlinear Schrödinger Equations*, *Journal of Evolution Equation* **1**, 4 Dec 2001
- [9] de Llano, Manuel: *Mecánica Cuántica*, Las Prensas de Ciencias, UNAM, México, 1.<sup>a</sup> edición, 1996
- [10] Maslov, V. P.: *Métodos Operacionales*, MIR, Moscú, 1982
- [11] Keel, M. y Tao, T.: *Endpoint Strichartz Inequalities*, *Amer. J. Math.* **120**, 955-980, 1998.
- [12] Pazy, A.: *Semigroups of linear operators and applications to partial equations*, Springer Verlag, Berlín, 1983
- [13] de la Peña, Luis: *Introducción a la Mecánica Cuántica*, Fondo de Cultura Económica, UNAM, Colección Ediciones Científicas Universitarias, Serie Texto Científico Universitario, 3.<sup>a</sup> ed, México, 2006
- [14] Sánchez, Ron Juan Manuel: *Historia de la Física Cuántica*, Crítica, serie Drakontos, Tomo I, España, 2001
- [15] Schechter, Martin: *Operator Methods in Quantum Mechanics*, Dover, Estados Unidos, 2002
- [16] Schechter, Martin: *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1971
- [17] Segrè, Emilio: *From X-Rays to Quarks, Modern Physicist and Their Discoveries*, Dover, Estados Unidos, 2007



- 
- [18] Taton, René (Director): *Historia General de las Ciencias*, Órbis, Vol 8, España, 1988
- [19] Yavorski, B. M., Detlaf, A. A.: *Prontuario de física*, Mir, Moscú, 1988
- [20] Weyl, Hermann: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, Estados Unidos, 1950