



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

IDENTIFICACIÓN PARAMÉTRICA  
TRIDIMENSIONAL DE UN EDIFICIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A:

JUAN MAURICIO ANGELES CERVANTES

TUTOR:

DR. LUIS AGUSTÍN ALVAREZ-ICAZA LONGORIA

MÉXICO, D.F. 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez  
Secretario: Dr. Yu Tang Xu  
Vocal: Dr. Luis Agustín Alvarez-Icaza Longoria  
1er. Suplente: Dr. José Alberto Escobar Sánchez  
2o. Suplente: Dr. David Murià Vila

La Tesis se realizó en:  
**Instituto de Ingeniería-UNAM**

DIRECTOR DE TESIS:

---

**Dr. Luis Agustín Alvarez-Icaza Longoria**



*A mi familia.*



## Agradecimientos

La presente investigación es el resultado de una etapa de estudio de mi vida, en la cual estuvieron involucradas muchas personas sin cuyo apoyo y cariño difícilmente hubiera llegado a su fin. Mi familia es parte fundamental de este apoyo, que siempre encontré en ellos cuando lo necesité. Gracias. Un agradecimiento con amor y cariño a Mireyda por acompañarme en esta etapa, aun en un periodo muy difícil que ambos logramos sortear con éxito. Muchas muchas gracias.

Deseo externar un especial agradecimiento a Lourdes por ayudarme a encontrar la paz y armonía en mi alma para reencontrar mi sendero. Muchas gracias por tu apoyo y cariño. Mi más sincera gratitud hacia ti.

También deseo agradecer a los miembros de mi comité tutorial su colaboración y ayuda. A Luis Álvarez Icaza por su apoyo y paciencia, sus atinados consejos de toda índole, tanto académica como administrativa para la realización de este trabajo. A José Alberto Escobar su entusiasta participación en este proyecto y las múltiples asesorías en el área de estructuras civiles. A Gerardo Espinoza las valiosas ideas que aportó a este trabajo. A los demás miembros del jurado les agradezco sus revisiones y comentarios que hicieron mejor este trabajo.

Agradezco a Rolando Carrera Méndez el gran trabajo dedicado a este proyecto, para la implementación de instrumentación, calibración de sensores, cableado y puesta en marcha de la mesa vibradora. Gracias a su invaluable aportación es posible tener una plataforma experimental en el Laboratorio de Control de Vibraciones en Edificios. Su ayuda fue determinante para lograr los resultados que aquí se presentan. Igualmente, agradezco a los miembros del Laboratorio de Electromecánica del Instituto de Ingeniería de la UNAM por su apoyo en la fabricación del modelo experimental. A René Jiménez por su gran ayuda a todas las interrogantes que surgieron sobre adquisición de datos. A todos ellos: Gracias.

A mis compañeros del Instituto de Ingeniería, en especial a los de la coordinación de Eléctrica y Computación por su amistad y cariño, por las aventuras y desventuras vividas.

Un especial agradecimiento a Edmundo Rocha Cózatl por despertar en mi el interés y la pasión por los sistemas dinámicos y el control.



Este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda que la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM otorgó a este proyecto a través de la beca de posgrado que recibí durante la realización de este trabajo. De igual forma, agradezco al Instituto de Ingeniería de la UNAM, por su apoyo económico y las facilidades otorgadas para la realización de esta investigación. A la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la formación que ahora poseo.

A todos muchas gracias.

Juan Mauricio Angeles Cervantes

Ciudad Universitaria, México, D. F., octubre 2010.

# Índice general

Índice de figuras	IX
Índice de cuadros	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	8
1.2. Objetivo . . . . .	11
1.3. Aportaciones del trabajo . . . . .	11
1.4. Organización del trabajo . . . . .	12
<b>2. Modelado matemático</b>	<b>15</b>
2.1. Introducción . . . . .	15
2.2. Modelo de un grado de libertad . . . . .	16
2.3. Modelo en tres dimensiones . . . . .	18
2.3.1. Hipótesis de diafragma de piso rígido . . . . .	18
2.3.2. Modelo de tres grados de libertad . . . . .	20
2.3.3. Matriz de rigidez en 3D . . . . .	22
2.3.4. Matriz de amortiguamiento en 3D . . . . .	23
2.3.5. Matriz de masa en 3D . . . . .	23
2.4. Análisis cinemático del diafragma . . . . .	25
2.4.1. Mediciones absolutas . . . . .	27
2.4.2. Variables rotacionales . . . . .	30
<b>3. Identificación paramétrica</b>	<b>33</b>
3.1. Introducción . . . . .	33
3.2. Identificación paramétrica . . . . .	34
3.3. Parametrización del modelo matemático . . . . .	35
3.3.1. Mínimos cuadrados . . . . .	35
<b>4. Resultados de identificación paramétrica</b>	<b>43</b>
4.1. Identificación paramétrica con datos simulados . . . . .	43
4.2. Identificación paramétrica con datos reales . . . . .	56
4.2.1. Edificio de oficinas de 54 pisos . . . . .	56

4.2.2. Edificio de un hospital universitario de 7 pisos . . . . .	61
<b>5. Observador adaptable</b>	<b>67</b>
5.1. Observador adaptable . . . . .	67
5.2. Esquema adaptable . . . . .	68
<b>6. Resultados del observador adaptable</b>	<b>83</b>
6.1. Frecuencias modales de la señal de excitación . . . . .	83
6.2. Resultados numéricos de modelo simulado . . . . .	87
6.3. Resultados numéricos para modelo <i>experimental</i> . . . . .	96
<b>7. Equipo experimental</b>	<b>105</b>
7.1. Plataforma experimental . . . . .	105
7.1.1. Centro de comando . . . . .	106
7.1.2. Panel de control . . . . .	108
7.1.3. Mesa vibradora X-Y . . . . .	110
7.1.4. Instrumentación . . . . .	111
7.1.5. Centro de adquisición de datos . . . . .	114
7.2. Modelo experimental . . . . .	120
7.2.1. Especificaciones de diseño . . . . .	120
7.2.2. Respuesta modal del modelo experimental . . . . .	124
<b>8. Conclusiones</b>	<b>131</b>
8.1. Resultados . . . . .	131
8.2. Trabajo a futuro . . . . .	133
<b>A. Características de los sismos</b>	<b>135</b>
<b>B. Condiciones iniciales y matrices de parámetros para el edificio simulado de seis pisos</b>	<b>137</b>
B.1. Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento . . . . .	137
B.2. Condiciones iniciales para mediciones <i>completas</i> . . . . .	141
B.3. Condiciones iniciales para mediciones <i>reducidas</i> . . . . .	142
<b>C. Respuesta de aceleraciones para edificio simulado de seis pisos y edificios instrumentados</b>	<b>143</b>
C.1. Aceleraciones de edificio simulado . . . . .	143
C.2. Aceleraciones para edificio de 54 pisos . . . . .	144
C.3. Aceleraciones del Hospital Universitario . . . . .	144
<b>D. Condiciones iniciales para edificios instrumentados</b>	<b>149</b>
D.1. Condiciones iniciales para edificio de oficinas de 54 pisos . . . . .	149
D.2. Condiciones iniciales para Hospital Universitario . . . . .	150

<b>E. Condiciones iniciales y matrices de parámetros para el edificio simulado de cinco pisos</b>	<b>153</b>
E.1. Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento . . . . .	153
E.2. Condiciones iniciales para observador adaptable . . . . .	157
<b>F. Conexiones de los sensores a las tarjetas de adquisición de datos</b>	<b>163</b>



# Índice de figuras

1.1. Mapa de zonas sísmicas . . . . .	2
1.2. Disipadores de energía . . . . .	4
1.3. Esquemas de control . . . . .	6
2.1. Sistema de un grado de libertad: (a) fuerza aplicada $p(t)$ ; (b) desplazamiento debido a un sismo . . . . .	16
2.2. Representación de un sistema de un GDL: (a) esquema de la estructura; (b) diagrama de cuerpo libre . . . . .	17
2.3. Grados de libertad (GDL) de diafragma de piso rígido . . . . .	19
2.4. Representación de un sistema de varios pisos . . . . .	21
2.5. Orientación de los marcos planos . . . . .	23
2.6. Esquema de movimientos de traslación y rotación . . . . .	26
2.7. Esquema simplificado de un edificio en 3D . . . . .	29
2.8. Diagrama con sensores en la dirección $X$ , y en la dirección $Y$ . . . . .	30
4.1. Edificio simulado: (a) instrumentación completa (b) instrumentación parcial	45
4.2. Aceleración en la dirección $X$ (N90E), SCT . . . . .	46
4.3. Aceleración en la dirección $Y$ (N00E), SCT . . . . .	46
4.4. Señal de error con mediciones completas . . . . .	47
4.5. Señal de error con mediciones parciales . . . . .	47
4.6. Aceleraciones estimadas con mediciones <i>completas</i> y mediciones <i>reducidas</i> .	48
4.7. Detalle de la estimación de salida . . . . .	49
4.8. Estimación del elemento (8, 14) de la matriz $M^{-1}K$ <i>completa</i> . . . . .	50
4.9. Estimación del elemento (2, 3) de la matriz $M^{-1}C$ <i>completa</i> . . . . .	50
4.10. Estimación del elemento (1, 2) de la matriz $M^{-1}K$ <i>reducida</i> . . . . .	51
4.11. Estimación del elemento (8, 4) de la matriz $M^{-1}C$ <i>reducida</i> . . . . .	51
4.12. Estimación de las frecuencias modales <i>completas</i> de la estructura . . . . .	53
4.13. Detalle de la estimación de las frecuencias modales <i>completas</i> de la estructura	53
4.14. Estimación de las frecuencias modales <i>reducidas</i> de la estructura . . . . .	54
4.15. Detalle de la estimación de las frecuencias modales <i>reducidas</i> de la estructura	54
4.16. Edificio de oficinas de 54 pisos . . . . .	57
4.17. Vista en planta del edificio (dimensiones en m) . . . . .	57
4.18. Norma del error de estimación del edificio de 54 pisos . . . . .	57

4.19. Aceleraciones reales-estimadas en el último piso del edificio de 54 pisos . . .	58
4.20. Evolución del elemento $M^{-1}K$ (1,1) . . . . .	59
4.21. Evolución del elemento $M^{-1}C$ (9,5) . . . . .	59
4.22. Estimación de las frecuencias modales <i>reducidas</i> del edificio de 54 pisos . .	60
4.23. Hospital Universitario . . . . .	62
4.24. Esquema del Hospital (dimensiones en m) . . . . .	62
4.25. Norma del error de estimación paramétrica del hospital . . . . .	62
4.26. Aceleraciones reales-estimadas en el último piso del hospital . . . . .	63
4.27. Evolución del elemento $M^{-1}K$ (4,6) . . . . .	64
4.28. Evolución del elemento $M^{-1}C$ (4,6) . . . . .	64
4.29. Estimación de las frecuencias modales <i>reducidas</i> del Hospital universitario .	65
6.1. Esquema de edificio simulado de 5 niveles . . . . .	84
6.2. Señal sísmica en la dirección $X$ con escala de tiempo completa . . . . .	85
6.3. Señal sísmica en la dirección $X$ con escala de tiempo reducida . . . . .	85
6.4. Señal sísmica en la dirección $Y$ con escala de tiempo completa . . . . .	86
6.5. Señal sísmica en la dirección $Y$ con escala de tiempo reducida . . . . .	86
6.6. Señales de desplazamiento: real, observado, observado adaptable . . . . .	88
6.7. Señales de velocidad: real, observado, observado adaptable . . . . .	89
6.8. Señales de aceleraciones absolutas: reales, estimadas, observadas adaptables	90
6.9. Señales de norma de error . . . . .	91
6.10. Comportamiento dinámico del elemento (5,5) de la matriz $M^{-1} K$ . . . . .	93
6.11. Comportamiento dinámico del elemento (2,6) de la matriz $M^{-1} C$ . . . . .	93
6.12. Frecuencias de oscilación del edificio simulado de cinco pisos . . . . .	95
6.13. Detalle del comportamiento de las frecuencias de oscilación . . . . .	95
6.14. Señales de desplazamiento: real, observado, observado adaptable . . . . .	97
6.15. Señales de velocidad: observado, observado adaptable . . . . .	98
6.16. Señales de aceleraciones absolutas: reales, estimadas, observadas adaptables	99
6.17. Señales de norma de errores . . . . .	100
6.18. Elemento (5,5) de la matriz $M^{-1} K$ . . . . .	102
6.19. Elemento (2,7) de la matriz $M^{-1} C$ . . . . .	102
6.20. Cálculo de las frecuencias mediante el observador adaptable . . . . .	103
7.1. Diagrama de plataforma experimental . . . . .	106
7.2. Panel de control . . . . .	109
7.3. Motores lineales en forma ortogonal . . . . .	110
7.4. Mesa vibradora . . . . .	111
7.5. Desplazamiento del vástago . . . . .	111
7.6. Mesa vibradora con LVDT . . . . .	112
7.7. Colocación de sensores en el diafragma . . . . .	114
7.8. Módulo de conexiones <i>SCB-68</i> . . . . .	116
7.9. Señal de LVDT no filtrada . . . . .	118
7.10. Señal de LVDT filtrada . . . . .	118
7.11. Señal de acelerómetro no filtrada . . . . .	118
7.12. Señal de acelerómetro filtrada . . . . .	118

7.13. Unión en la esquina de la estructura . . . . .	122
7.14. Unión de las vigas con las crucetas . . . . .	122
7.15. Unión de las crucetas: centro de masa . . . . .	122
7.16. Diafragma con centro de masa móvil . . . . .	123
7.17. Estructura de un edificio de 3 pisos . . . . .	123
7.18. Diagrama del modelo experimental (dimensiones en m) . . . . .	124
7.19. Modelo experimental de 5 pisos sobre la mesa vibradora . . . . .	125
7.20. Distribución de los acelerómetros en el modelo <i>experimental</i> . . . . .	126
7.21. Señal de barrido de frecuencias de 0,1 a 10 Hz medida en la mesa . . . . .	127
7.22. Señal de barrido de frecuencias de 0,1 a 10 Hz medida en la mesa . . . . .	127
7.23. Espectro de frecuencias de acelerómetros en el primer piso . . . . .	128
7.24. Espectro de frecuencias de acelerómetros en el segundo piso . . . . .	128
7.25. Espectro de frecuencias de acelerómetros en el tercer piso . . . . .	129
7.26. Espectro de frecuencias de acelerómetros en el cuarto piso . . . . .	129
7.27. Espectro de frecuencias de acelerómetros en el quinto piso . . . . .	130
C.1. Aceleraciones reales-estimadas en el primer piso, edificio simulado . . . . .	144
C.2. Aceleraciones reales-estimadas en el segundo piso, edificio simulado . . . . .	145
C.3. Aceleraciones reales-estimadas en el primer piso <i>reducido</i> de edificio de 54 pisos	146
C.4. Aceleraciones reales-estimadas en el segundo piso <i>reducido</i> de edificio de 54 pisos . . . . .	146
C.5. Aceleraciones reales-estimadas en el tercer piso <i>reducido</i> de edificio de 54 pisos	147
C.6. Aceleraciones reales-estimadas en el primer piso <i>reducido</i> de hospital . . . . .	147
C.7. Aceleraciones reales-estimadas en el segundo piso <i>reducido</i> de hospital . . . . .	148
F.1. Ruta de conexión entre los sensores y la tarjeta de adquisición de datos . . . . .	164
F.2. Diagrama de módulo de conexiones <i>SCB-68</i> . Cortesía de <i>National Instruments</i>	165





# Índice de cuadros

4.1. Frecuencias reales y estimadas [Hz] . . . . .	55
4.2. Frecuencias estimadas para edificio de 54 pisos [Hz] . . . . .	61
4.3. Frecuencias estimadas para el Hospital universitario [Hz] . . . . .	65
6.1. Polos y frecuencias modales del modelo simulado . . . . .	84
6.2. Frecuencias modales obtenidas mediante el observador adaptable . . . . .	94
7.1. Posición y valor de masa de cada piso . . . . .	123
7.2. Frecuencias modales del modelo <i>experimental</i> . . . . .	126
F.1. Posición de acelerómetros en el módulo de conexión <i>SCB-68</i> . . . . .	166
F.2. Posición de LVDT en el módulo de conexión <i>SCB-68</i> . . . . .	167



## Resumen

Este trabajo presenta dos importantes contribuciones relacionados con la protección sísmica de edificios: identificación paramétrica y observación de estados, ambas en tiempo real, y la construcción de un modelo matemático reducido en tres dimensiones de un edificio que sólo tiene instrumentado algunos de sus pisos y se encuentra bajo una excitación sísmica.

Se utiliza una adecuada parametrización del modelo matemático, tal que permite una significativa reducción en el orden de las matrices involucradas en el algoritmo. Esto es importante porque reduce el número de operaciones aritméticas necesarias para la solución del algoritmo, haciendo posible su implantación en tiempo real. Además, el observador de estados permite conocer las velocidades y desplazamientos de cada uno de los pisos instrumentados, considerando tres grados de libertad: dos desplazamientos ortogonales y una torsión cuyo eje de giro es perpendicular al plano formado por los primeros.

La construcción de un modelo matemático reducido es importante porque en la actualidad los edificios instrumentados no tienen sensores en todos sus pisos. Sin embargo, se hace necesario conocer un modelo matemático de ellos con sólo mediciones de aceleración.

Se hace una verificación analítica y experimental de los algoritmos propuestos.

Los resultados de este trabajo permiten su aplicación en propósitos de control de vibraciones o en una temprana detección de daños en edificios después de un evento sísmico.



# Capítulo 1

## Introducción

En años recientes la industria de la construcción ha visto en los grandes edificios una solución tanto para casas habitación como para oficinas en grandes ciudades, donde los espacios para construcción se han reducido considerablemente. La consecuencia de construir edificios que son cada vez más altos, es que se debe tener extremo cuidado en el diseño sísmico del mismo, así como en el diseño para cargas por viento. En el presente trabajo se consideran sólo los efectos que sufre una estructura de varios pisos por un sismo.

En todas las urbes del mundo, el diseño de los grandes edificios está determinado en gran parte por el suelo en el cual están soportados. La Fig. 1.1 muestra un mapa de las zonas sísmicas en el planeta. En el caso de México, se tiene una gran actividad sísmica que obliga a los ingenieros civiles a diseñar toda la estructura de tal forma que ésta soporte movimientos telúricos de cierta intensidad (Meli, 1985), (Chopra, 1995). Esto tiene validez si vemos que gran parte de la costa sur del país: Chiapas, Oaxaca, Guerrero y Michoacán, es de alta actividad sísmica. Los movimientos telúricos cuyos epicentros<sup>1</sup> se sitúan en esta franja de costa, frecuentemente llegan a la ciudad de México, provocando en algunos casos daños severos a las construcciones, y cuando el sismo es de gran magnitud, suceden catástrofes como la ocurrida el 19 de septiembre de 1985, en la cual decenas de edificios y construcciones colapsaron.

---

<sup>1</sup>Hipocentro o foco: punto en donde se origina el terremoto, este punto se puede situar a un máximo de unos 700 km hacia el interior terrestre. El epicentro es el punto de la superficie terrestre más próximo al foco del terremoto. Ver apéndice A.

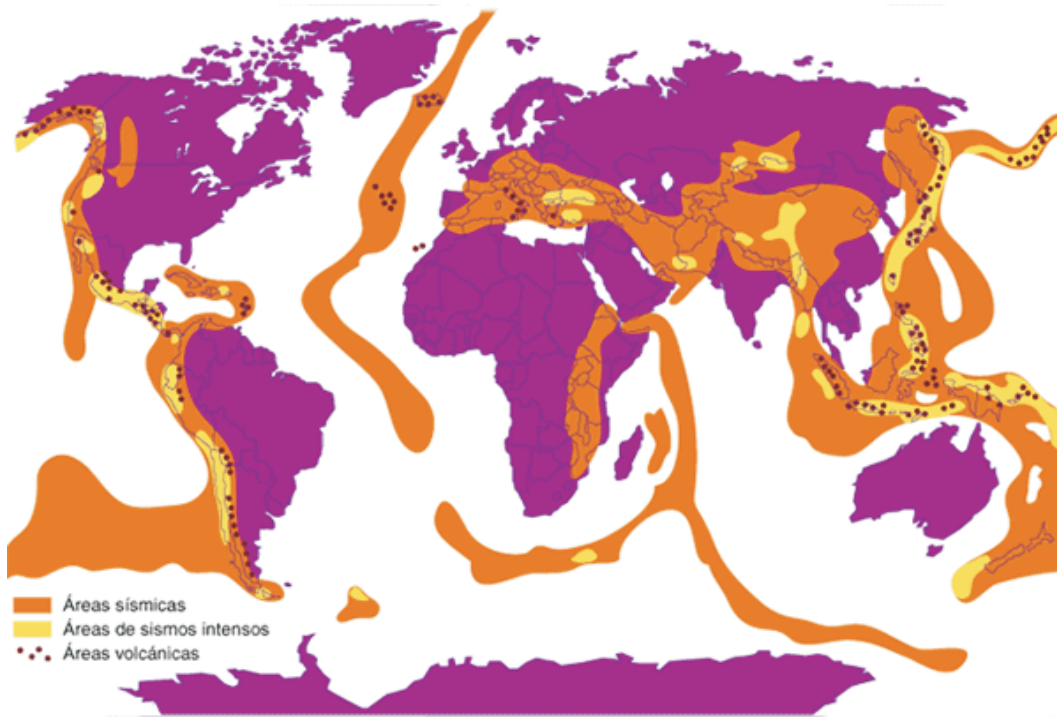


Figura 1.1: Mapa de zonas sísmicas

Como se observa en la Fig. 1.1, el problema de zonas sísmicas no es exclusivo de México. En varios países se han realizado esfuerzos por disminuir los daños estructurales provocados por sismos en las construcciones y mantener la estabilidad de éstas. Se han diseñado diversos mecanismos en edificios cuyo objetivo es disipar la energía sísmica de manera que sólo una pequeña parte afecte la construcción y ésta sea capaz de disiparla sin sufrir daños estructurales.

Basados en esta idea, surge la aplicación de esquemas de control a estructuras civiles, que consisten básicamente, en la modificación de las propiedades mecánicas de las mismas, para que éstas presenten una respuesta deseable ante la acción de fuerzas externas. La modificación de las propiedades mecánicas de una estructura incluye la variación del valor de su rigidez y/o amortiguamiento, de tal forma que se puedan reducir los niveles de excitación que se transmiten a ella.

Los métodos de diseño para proteger una estructura contra las fuerzas provocadas por los sismos están divididos, básicamente, en tres categorías:

1. Métodos de diseño basados en ductilidad.
2. Métodos de diseño basados en base aislada.
3. Métodos de control basados en la respuesta dinámica de la estructura.
  - Control pasivo.
  - Control activo.
  - Control híbrido.
  - Control semiactivo.

En la Fig. 1.2 se muestran diversos mecanismos que disipan la energía sísmica, basados en la respuesta dinámica de la estructura. En la parte superior del edificio se observa un amortiguador por masa activa (*Active Mass Damper, AMD*<sup>2</sup>), dispositivo que consta de una masa de varias toneladas y que es capaz de desplazarse en el plano. El objetivo es mantener el centro de gravedad en el centro geométrico de la estructura. Su funcionamiento es tal que si el edificio comienza a desplazarse hacia un extremo, la masa se recorrerá en la dirección opuesta. Se considera que es un mecanismo de control activo, pues es necesario aplicar energía para desplazar la masa y lograr los objetivos para los cuales fue diseñada.

Para el caso del **AMD**, su construcción y mantenimiento son muy costosos. Además, es claro que se requiere de grandes cantidades de energía para mover rápidamente una masa de varias toneladas; si se considera que el suministro de energía eléctrica es frecuentemente interrumpido en un sismo, los dispositivos para aportar esta energía sumarán un costo adicional en la implementación de este mecanismo. No obstante, para estos dispositivos de control activo la efectividad es buena, especialmente si los algoritmos de control son no lineales, pues con los lineales se presenta saturación en la señal de control para excitaciones muy grandes (Chen, W. y Scawthorn, C., 2003). En este ramo de los dispositivos de control activo también están los dispositivos de tendones activos o de abrazadera activa.

---

<sup>2</sup>Dispositivo de control activo que usa un actuador másico (reemplaza el resorte y el amortiguador en un amortiguador de masa sintonizada, *Tuned Mass Damper, TMD*), sensores y controladores, tal que la combinación del *AMD* y la estructura minimizan la respuesta a la vibración (Chen, W. y Scawthorn, C., 2003).



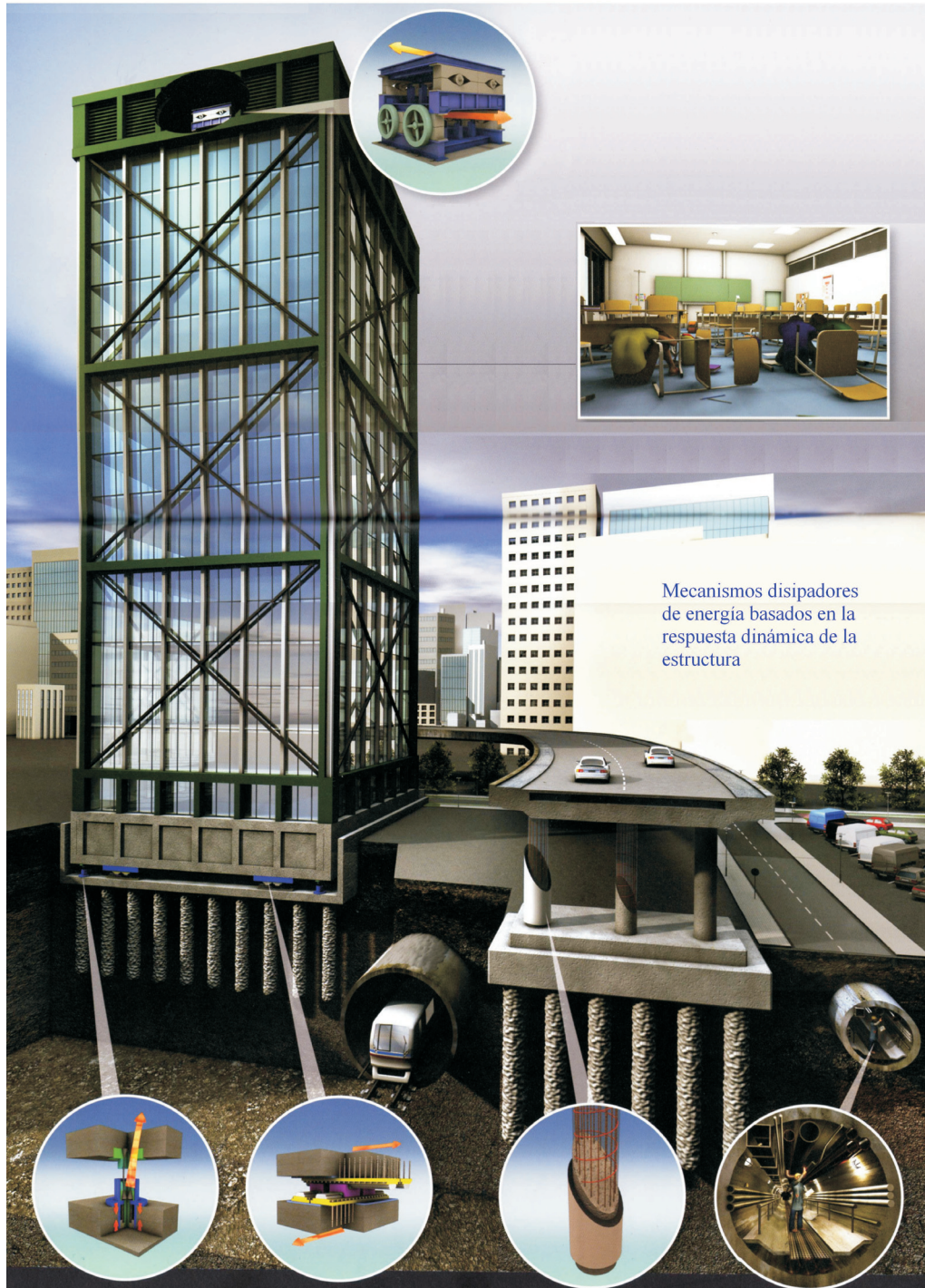


Figura 1.2: Disipadores de energía, cortesía de (Rubin, 2007)

En el caso de los dispositivos de control pasivo, se cuenta con aquellos que absorben las vibraciones o sistemas de aislamiento del suelo, y son dispositivos fijos instalados entre el edificio y el suelo. La energía necesaria para que el mecanismo funcione proviene del movimiento causado en la estructura por fuerzas externas, es decir, no requieren de inyección de energía extra para que disipen la energía sísmica. En estos sistemas no es posible modificar los parámetros y por tanto la respuesta dinámica ante cierta excitación. Una desventaja en estos dispositivos es que, si se considera que tanto la intensidad como la frecuencia de oscilación de un sismo son desconocidas, la disipación de energía no es eficiente. Una ventaja es su fácil mantenimiento, pues no usan sensores, *actuadores*, o controladores. Los dispositivos de control pasivo usados en estructuras son: amortiguador por masa sintonizada (*Tuned Mass Damper*, **TMD**<sup>3</sup>), amortiguadores con fluido viscoso, amortiguadores viscoelásticos, amortiguadores de fricción seca, cimiento deslizante y cimientos de balanceo, entre otros.

En la parte inferior del edificio, Fig 1.2, se observa un cimiento deslizante, cuya misión es, al igual que el **AMD**, disipar la mayor cantidad de energía posible. En la parte inferior izquierda se muestran cimientos de balanceo.

Los métodos de control híbrido son una combinación de los controles descritos en las líneas anteriores, por lo que tienen las ventajas y desventajas de ambos. Los resultados obtenidos con estos métodos son más confiables que los de un sistema activo, no obstante que este último pueda ser más complicado. Un ejemplo de un sistema híbrido es un **TMD** con actuadores activos colocados entre la masa **TMD** y su soporte (lo que incrementa la efectividad del **TMD**).

En la Fig. 1.3 se muestran esquemas de un **TMD** pasivo, un **AMD**, y un sistema híbrido: amortiguador por masa activa sintonizada (*Active Tuned Mass Damper*, **ATMD**).

Otro método es disipar energía mediante dispositivos de control semiactivo, que combinan las mejores características del control pasivo y del activo, obteniéndose la confianza de los dispositivos pasivos y, además, la versatilidad y adaptabilidad de los sistemas activos. Los dispositivos de control semiactivo tienen propiedades que pueden ser cambiadas en tiempo real, pero no pueden aportar energía a la estructura que va a ser controlada (Jiménez

---

<sup>3</sup>Dispositivo de control pasivo que usa el ajuste de la masa, el resorte y el amortiguador, tal que la combinación del *TMD* y la estructura maximizan la absorción de energía (Chen, W. y Scawthorn, C., 2003).

Fabián, René Enrique, 2006). Estos dispositivos han sido diseñados para utilizar las fuerzas generadas por superficies en fricción o están compuestos por algún líquido viscoso que disipa la energía. Una desventaja de estos dispositivos es la velocidad de disipación de la energía. No obstante, se han desarrollado dispositivos de **rigidez variable activa** o **amortiguador variable activo** que eliminan esta desventaja. En ellos el amortiguamiento puede ser cambiado drásticamente a través de válvulas de aceite, para lo cual se requiere de poca energía.

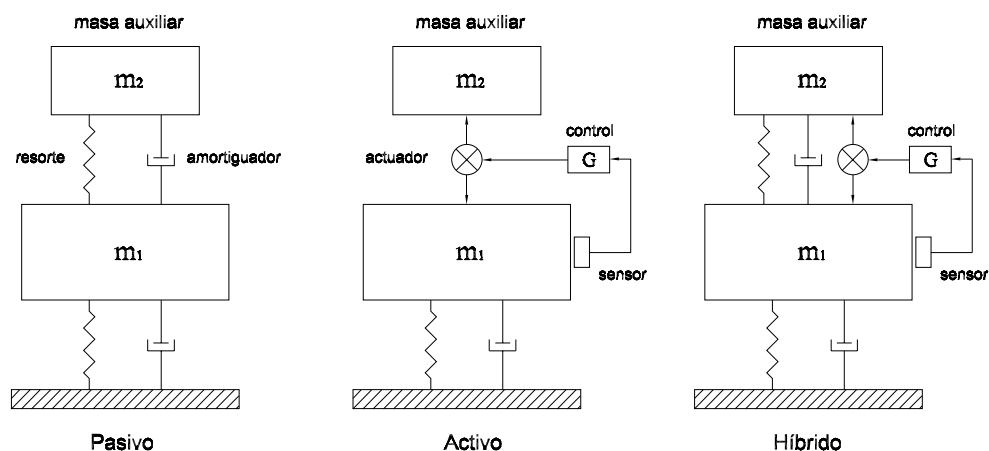


Figura 1.3: Esquemas de control

En este grupo de dispositivos se encuentran los amortiguadores magneto-reológicos (Yang, G., 2001), que son amortiguadores en los cuales es posible cambiar la viscosidad del fluido que se encuentra dentro de él, provocando que modifique el valor de la fuerza de oposición que presenta al movimiento. Estos amortiguadores tienen un aceite con partículas ferromagnéticas disueltas y una bobina; al aplicar un voltaje, la bobina genera un campo magnético que obliga a las partículas disueltas en el aceite a alinearse al campo, del tal forma que si se tiene un voltaje cero aplicado, las partículas están completamente desordenadas y la fuerza de oposición del amortiguador es mínima. Al aumentar el voltaje, aumenta el campo magnético dentro del amortiguador y las partículas comienzan a alinearse al mismo, provocando que la fuerza de oposición del amortiguador aumente gradualmente. Para un voltaje máximo aplicado, se observa un campo magnético máximo generado por la bobina, lo que implica una alineación completa de las partículas ferromagnéticas, y por tanto se

tiene una fuerza de oposición máxima.

En términos de energía consumida, estos amortiguadores requieren algunas decenas de watts, lo que representa una gran ventaja si, como ya se mencionó, ante un sismo no se cuenta con grandes recursos energéticos. Sin embargo, para aplicar el voltaje adecuado para una eficiente disipación de energía sísmica, es necesario conocer la respuesta dinámica que en esos momentos presenta el edificio y cómo se mueve el suelo. Lo anterior representa un reto, en especial el conocimiento de la respuesta dinámica de la estructura, pues es necesario conocer sus parámetros lo mejor posible: masas, coeficientes de amortiguamiento y de rigidez. Este trabajo se enfoca en el problema de conocer la respuesta dinámica de la estructura.

El conocimiento de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez, no es una tarea fácil si se considera que el edificio puede ser de varios pisos. Una opción es conocer los parámetros de diseño que utilizó el ingeniero civil para la construcción de la estructura, aunque existe el inconveniente de que el ingeniero civil diseña los parámetros del edificio para una determinada carga, que puede ser distinta a la carga real. Adicionalmente, los parámetros reales, una vez construido el edificio, tienen un valor diferente a los de diseño por diversas causas: incertidumbres en las propiedades de los materiales de construcción, masa del mobiliario, muros falsos de división, modificaciones estructurales mayores no contempladas en el diseño original, etc. Lo anterior no es problema para el diseñador, pues la estructura entonces soportará una carga mayor para la que fue diseñada, y por lo tanto no habrá problemas al construir el edificio. Sin embargo, en este caso los parámetros calculados serán distintos a los parámetros reales. Para un ingeniero en control, cuya necesidad es conocer la respuesta dinámica real del edificio y con cuyo conocimiento es posible controlar dispositivos semiactivos o activos para disipación de energía sísmica, dichos parámetros de diseño son de utilidad limitada.

Debido a lo anterior, el problema a resolver consiste en conocer los parámetros reales sin dañar al edificio. En este caso los métodos de identificación paramétrica son muy útiles pues sólo es necesario excitar la estructura y medir su comportamiento. Si la excitación es un sismo, entonces es posible realizar identificación paramétrica en tiempo real. Este trabajo se enfoca en resolver este problema, a través de elementos teóricos y validación experimental

en un modelo en laboratorio.

La *identificación paramétrica en línea*, también llamada en tiempo real, permite conocer los parámetros reales con cierta precisión a través de una excitación persistente aplicada al sistema, que en el caso de un edificio puede ser un sismo. A partir de esta identificación se crea un modelo matemático, y mediante un algoritmo, se generan controladores para un mejor desempeño de los dispositivos activos o semiactivos disipadores de energía sísmica. Este trabajo plantea la aplicación de identificación paramétrica en tiempo real a un edificio cuyo modelo matemático describe dos movimientos horizontales de desplazamiento, ortogonales entre sí, y uno de torsión, por cada uno de los pisos.

En un edificio real, en muchos casos, no se dispone de sensores de velocidad y posición de los pisos. El proceso con el cual es posible conocer estas variables, se le denomina *observación de estados*, que se logra con el conocimiento de las señales de excitación del sistema y las señales de la respuesta de éste a dicha excitación. Entonces, se plantea la recuperación de señales no medidas, pero que son necesarias: desplazamientos y velocidades de cada uno de los pisos, en tiempo real, al mismo tiempo que se realiza la identificación paramétrica.

## 1.1. Antecedentes

Los trabajos realizados en la identificación paramétrica de estructuras civiles son varios, como se pueden ver en los trabajos de Alvarez-Icaza y Jiménez (2003), Dyke, Spencer, Sain, y Carlson (1996), Li y Mau (1991), Safat (1995), Stewart y Fenves (1998) y referencias ahí citadas. En ellos se estudia el modelo de marco plano de un edificio, lo que implica que no puede describir las relaciones entre los diversos marcos que forman un edificio cuando éstos tienen diferente orientación. Además, los modelos basados en marco plano no permiten conocer la torsión que sufre cada uno de los pisos, y por ende no permiten conocer los efectos que provoca la torsión sobre la estructura.

Nagarajaiah y Li (2004) plantean un identificador paramétrico, así como un observador de estados, ambos requieren de los registros completos de la respuesta sísmica de la estructura, y con ello la necesidad de realizar el procesamiento fuera de línea. Además, el análisis que se realiza es en dos dimensiones, sin considerar los efectos de torsión. Wang, Lin, y Yen

(2007) determinan la rigidez y factor de amortiguamiento para un modelo basado en marco plano y excitado en una sola dirección, con el objetivo de detectar daño. En este caso es necesario conocer los datos de la respuesta dinámica de la estructura antes y después del evento sísmico y al realizar el procesamiento mediante análisis modal, fuera de línea, es posible determinar si existió daño. Yang y Huang (2005) plantean una identificación en línea de una estructura excitada en una sola dirección mediante un algoritmo basado en mínimos cuadrados. En este trabajo se usa una parametrización convencional de mínimos cuadrados, con el inconveniente de tener elementos matriciales grandes, aunque para un modelo de marco plano este no es un problema limitante en la identificación en línea, como queda demostrado en (Jiménez Fabián y Alvarez-Icaza, 2009), trabajo en el cual, además de realizar identificación paramétrica, se realiza la observación de los estados y control de un amortiguador magneto-reológico con la finalidad de minimizar los desplazamientos que sufre el edificio, cuando éste está sujeto a excitación sísmica unidireccional.

Otra vertiente de estudio para recuperar el modelo matemático de un edificio, es mediante un análisis basado en la respuesta en frecuencia de la estructura bajo una excitación ambiental, y con esto poder detectar cambios en los valores de rigidez o amortiguamiento. En este caso, es necesario tomar mediciones durante periodos largos de tiempo (horas) y procesar la información, Rainieri y Fabbrocino (2010) describen varios métodos basados, como se ha mencionado, en la respuesta en frecuencia, y en los casos que menciona la identificación sólo se realiza en una dirección, con lo cual no contempla la componente torsional. Arnst, Clouteau, Chebli, Othman, y Degrande (2006) plantean la recuperación de un modelo probabilístico basado en la respuesta en frecuencia del edificio, cuando éste se encuentra excitado por vibraciones que se transmiten por suelo y son originadas principalmente por: autos, trenes superficiales y subterráneos, tomando en cuenta la interacción suelo-estructura. Este trabajo contempla la torsión que sufre el edificio y determina las condiciones de las frecuencias modales que puede recuperar de forma confiable, así como las dimensiones del un modelo reducido de acuerdo al número de sensores disponibles. No obstante, todo este análisis se realiza fuera de línea. Curadelli, Riera, Ambrosini, y Amani (2008) describen un esquema para detección de daño mediante un análisis no lineal y reconstruyendo el factor de amortiguamiento, con una excitación ambiental, para lo cual no es necesario conocer los

parámetros; el modelo sólo se excita en una dirección, y el análisis se realiza fuera de línea, situación parecida se presenta en (Huang y Su, 2007). La identificación del modelo mediante redes neuronales es otra alternativa, como se describe en (González y Zapico, 2008), sin embargo, este proceso se realiza fuera de línea recuperando un modelo en una sola dirección.

De igual forma se han hecho estudios de edificaciones con bóvedas, con el objetivo de detectar posibles daños que colapsen a la construcción. Block, Ciblac, y Ochsendorf (2006) establecen un análisis cinemático y estático para determinar los posibles daños mediante un esquema interactivo, que establece las relaciones entre la geometría y las condiciones de equilibrio en tiempo real. No obstante, este esquema sólo permite analizar en dos dimensiones y no permite detectar los efectos dinámicos de la estructura.

Un modelo en tres dimensiones representa en forma más realista el comportamiento de un edificio, pues permite conocer tres movimientos por cada uno de los pisos: dos desplazamientos horizontales y ortogonales, y uno de torsión perpendicular a los dos primeros. De lo anterior, es importante que se trabaje en la identificación paramétrica con este tipo de modelos. Rodríguez Rocha y Barroso (2003) plantean la identificación de las relaciones de rigidez-masa para un edificio cuyo modelo está basado en uno de cortante, y donde se pueden considerar tres dimensiones. Este modelo no toma en cuenta el coeficiente de amortiguamiento, está enfocado a la detección de fallas y, además, se ejecuta fuera de línea.

Como se ha descrito, se ha trabajado en la identificación paramétrica del modelo de un edificio. Sin embargo, en forma general ésta se realiza fuera de línea, enfocada principalmente a detección de daño, y en no más de dos direcciones ortogonales entre si.

En el presente trabajo se reconstruye un modelo matemático que involucra tres grados de libertad (GDL) por piso, además, se analizan las condiciones mínimas sobre el número de acelerómetros para cada uno de los pisos, así como de la distribución de ellos. Es importante mencionar que no es necesario que se tengan mediciones en todos y cada uno de los pisos. Se muestra, mediante simulaciones y experimentos que con tener mediciones en algunos de ellos, es suficiente para obtener un modelo que permita conocer las primeras frecuencias de oscilación de la estructura, información muy importante para los ingenieros civiles.

El hecho de recuperar un modelo en tres dimensiones de un edificio en tiempo real, tiene gran importancia en la aplicación de esquemas de control con actuadores de disipación de

energía semiactivos, específicamente, amortiguadores magnetoreológicos logrando disminuir los desplazamientos que sufre un edificio cuando se encuentra bajo las fuerzas aplicadas por un sismo, y por consecuencia daños en el mismo. Alvarez-Icaza y Carrera (2003), Jiménez Fabián y Alvarez-Icaza (2009), Bahar, Pozo, Acho, Rodellar, y Barbat (2010b), Bahar, Pozo, Acho, Rodellar, y Barbat (2010a) son algunos de quienes han estudiado el tema de esquemas de control en tiempo real para los actuadores mencionados.

## 1.2. Objetivo

Realizar la identificación paramétrica, así como la recuperación de velocidades y desplazamientos en línea de un modelo de un edificio sujeto a excitación sísmica bidimensional, para generar un modelo matemático en tres dimensiones: dos desplazamientos ortogonales entre si, y una torsión perpendicular al plano formado por las dos primeras, a través de mediciones de aceleración en los pisos y en la base de la estructura.

## 1.3. Aportaciones del trabajo

Este trabajo contribuye al conocimiento del área de control de estructuras civiles por las siguientes razones:

1. Se trabaja con el modelo matemático de una estructura civil en tres dimensiones, bajo la hipótesis de diafragma de piso rígido, comportamiento lineal, base empotrada, y sin considerar la interacción suelo-estructura, logrando que el modelo recuperado con la identificación paramétrica cumpla las mismas características
2. Se presenta un algoritmo de identificación paramétrica modificado basado en el método de mínimos cuadrados que permite reducir de manera significativa el orden de las matrices involucradas, en especial el orden de la matriz de covariancia. Con ello la identificación en línea es más factible, lo cual permite implementar algoritmos de control en una estructura civil que esté sujeta a excitación sísmica
3. Mediante el algoritmo de identificación propuesto se conoce el valor de la relación de



parámetros de la estructura real: rigidez/masa y amortiguamiento/masa<sup>4</sup>, con mayor precisión que el valor obtenido mediante cálculos matemáticos

4. Se desarrolla un algoritmo de observación adaptable que, además de recuperar la relación de parámetros mencionada, permite recuperar las señales de velocidad y desplazamiento relativos de cada piso de la estructura con respecto a la base de la misma, con sólo mediciones de aceleración en la base y los pisos del edificio
5. Se determinan las condiciones mínimas del número de mediciones para obtener un modelo del edificio válido
6. La identificación de parámetros, así como la observación de estados, se realizan en tiempo real en un modelo experimental de varios pisos
7. Se muestra la validez experimental de los algoritmos propuestos
8. Se establece que es posible obtener un modelo reducido que determina suficientemente bien las primeras frecuencias de oscilación sin necesidad de tener mediciones en todos los pisos.

## 1.4. Organización del trabajo

En este primer capítulo se planteó el problema a resolver, así como los objetivos que se espera cumplir en este trabajo. Además, se dió una breve explicación de los métodos de control para estructuras civiles y de las características de los sismos.

En el siguiente capítulo se presenta el modelo matemático del sistema y las suposiciones que se hacen para obtenerlo, así como un análisis cinemático para obtener el número de mediciones necesarias para la determinación de los parámetros del sistema.

En el tercer capítulo muestra el método de identificación paramétrica usado, así como la parametrización usada, demostrando que es adecuada para resolver el problema de un sistema con múltiples grados de libertad y con numerosos parámetros.

---

<sup>4</sup>En adelante, por parámetros se hará referencia a la relación de rigidez/masa y amortiguamiento/masa, que son los elementos de las matrices  $M^{-1} K$  y  $M^{-1} C$ , respectivamente, que se describen con detalle en el capítulo 2.

El cuarto capítulo muestra simulaciones de identificación paramétrica considerando que se conocen los desplazamientos y velocidades que sufren los pisos de un edificio sujeto a excitación sísmica. Las simulaciones se muestran para dos casos: cuando no se tienen mediciones en todos los pisos y el caso donde se tienen mediciones completas. Aunado a esto, se muestran resultados de aplicar el algoritmo a datos de dos edificios instrumentados durante el sismo de Northridge de 1994 sucedido en la ciudad de Los Angeles, Cal, EUA.

En el quinto capítulo se expone un esquema de observador adaptable en el cual se recuperan tanto los parámetros como los desplazamientos y velocidades de un edificio sujeto a excitación sísmica, sólo con mediciones de aceleración, así como la demostración que el esquema es válido en ciertas condiciones.

En el capítulo sexto se muestran resultados del observador adaptable tanto en simulación como con datos reales obtenidos en el modelo experimental desarrollado para este trabajo.

El penúltimo capítulo describe el equipo experimental utilizado para obtener los resultados mostrados en el capítulo anterior. La mesa vibradora y los aditamentos asociados a su buen funcionamiento, así como el diseño y construcción del modelo experimental que fueron desarrollados e implementados durante el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, en el capítulo ocho se discuten los resultados obtenidos y se plantea el trabajo a seguir para implementar dispositivos de control semiactivo.



## Capítulo 2

# Modelado matemático

En este capítulo se presenta el modelo matemático en tres dimensiones (3D) para un edificio de varios pisos, explicando las condiciones para las cuales el modelo es válido. También se realiza un análisis cinemático del comportamiento de la losa de cada uno de los niveles.

### 2.1. Introducción

Al trabajar con modelos físicos, es conveniente tener un modelo matemático del mismo que cumpla con dos características básicas: simplicidad matemática y exactitud. La primera de ellas se refiere a que, desde el punto de vista matemático, sea simple para la manipulación matemática, así como para su solución. La segunda está referida a que la respuesta pronosticada por el modelo sea lo más parecida con la respuesta real del sistema ante ciertas excitaciones.

En teoría de control, es importante que el modelo matemático reproduzca lo más fielmente posible el comportamiento dinámico del sistema físico, pues de ello depende la eficiencia de los algoritmos de control. Sin embargo, en el proceso de modelación matemática se anulan ciertos efectos considerados despreciables o cuya influencia en el comportamiento dinámico es pequeña comparada con otros factores, o cuyos modelos matemáticos involucran no linealidades, que impliquen recurrir a aproximaciones, como los modelos lineales. Las inexactitudes inducidas o dinámicas no modeladas se pueden contemplar en el modelo

como perturbaciones externas que pueden ser acotadas o no acotadas.

Para el caso de un edificio de varios pisos, que está formado de varios marcos, el modelo matemático que lo representa en 3D se desarrolla a partir de un modelo de marco plano (Meli, 1985). Cuando el edificio está sujeto a fuerzas externas, este modelo es capaz de reproducir el movimiento de cada uno de los pisos del edificio en tres coordenadas: dos desplazamientos ortogonales, y una rotación cuyo eje de giro es ortogonal al plano formado por los dos primeros (Paz, 1997). Además, mediante un análisis cinemático es posible conocer, a través de mediciones de aceleración lineales, las variables rotacionales. Este modelo es válido bajo ciertas hipótesis, por lo que sólo es aplicable a edificios que cumplen aquéllas.

## 2.2. Modelo de un grado de libertad

El modelo de 3D contempla tres grados de libertad (GDL) por cada uno de los pisos: dos desplazamientos horizontales y ortogonales, y una torsión. Para que se mantenga la validez de este modelo, se debe cumplir la condición de diafragma rígido (Paz, 1997). Este modelo se desarrolla a través de un modelo de marco plano para un edificio, con un solo GDL por piso. Este sistema se puede representar como un sistema masa-resorte-amortiguador con  $n$  GDL, donde  $n$  es el número de pisos del edificio. El sistema está sujeto a fuerzas externas que se ejercen en cada uno de los pisos y están representadas por la fuerza  $p_i(t)$ , donde  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . La Fig. 2.1 muestra el caso de un solo nivel, y en la Fig. 2.2 se observa el diagrama de cuerpo libre.

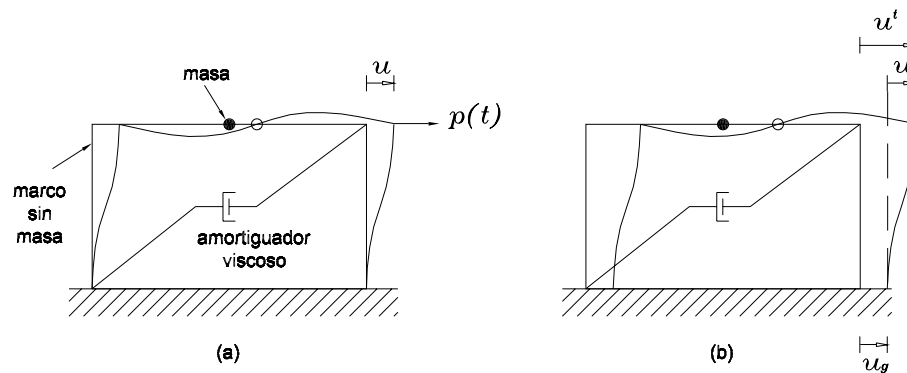


Figura 2.1: Sistema de un grado de libertad: (a) fuerza aplicada  $p(t)$ ; (b) desplazamiento debido a un sismo

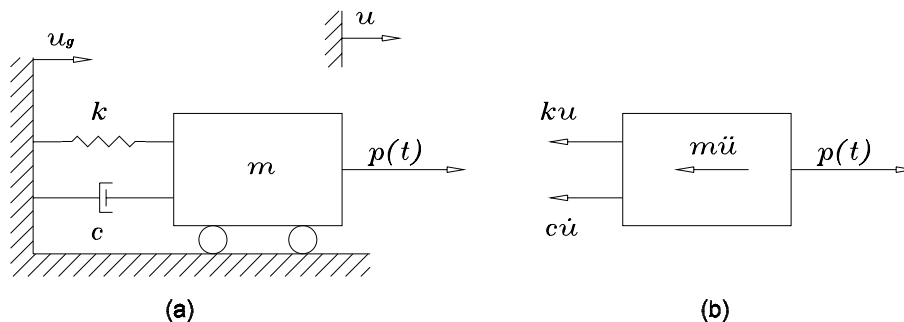


Figura 2.2: Representación de un sistema de un GDL: (a) esquema de la estructura; (b) diagrama de cuerpo libre

El desplazamiento del suelo está denotado por  $u_g$ , el desplazamiento total de la masa es  $u^t$ , y el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo está dado por  $u$ . Para cada instante de tiempo estos desplazamientos están relacionados por

$$u^t = u_g + u.$$

Considerando que la aceleración que sufre la estructura es la aceleración del suelo con respecto a un sistema inercial,  $\ddot{u}_g$ , más la aceleración de dicha estructura con respecto al suelo,  $\ddot{u}$ , entonces la aceleración total de ésta es

$$\ddot{u}^t = \ddot{u} + \ddot{u}_g. \quad (2.1)$$

Ahora, sea la fuerza de inercia  $F_i$ , la fuerza de amortiguamiento  $F_d$ , y la fuerza de rigidez  $F_s$ .

$$F_i = m\ddot{u}^t, \quad F_d = c\dot{u}, \quad F_s = ku, \quad (2.2)$$

donde  $m$  es la masa,  $c$  el coeficiente de amortiguamiento, y  $k$  el valor de rigidez<sup>1</sup>.  $u$  es el desplazamiento y  $\dot{u}$  la velocidad. Estos dos últimos son relativos, es decir, de la estructura con respecto al suelo.

Para que la estructura se encuentre en equilibrio, se debe de cumplir con el **Principio de d'Alembert**, que establece que *la suma de todas las fuerzas externas aplicadas a un cuerpo es igual a la fuerza de inercia de dicho cuerpo*, matemáticamente expresado para este caso es

$$F_i + F_d + F_s = 0,$$

<sup>1</sup>Nótese que se trata de relaciones constitutivas lineales con  $m > 0$ ,  $c \geq 0$  y  $k > 0$ .

y con las Ecs. (2.1) y (2.2), se obtiene

$$m(\ddot{u} + \ddot{u}_g) + c\dot{u} + ku = 0,$$

finalmente

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g. \quad (2.3)$$

Nótese que si referimos la ecuación al sistema del suelo, entonces la fuerza de inercia de la estructura referida a este sistema sólo contempla la aceleración relativa,  $\ddot{u}$ , y como consecuencia se deduce que la fuerza externa originada por el movimiento del suelo y aplicada a la estructura es

$$p(t) = -m\ddot{u}_g.$$

La Ec. (2.3) es el modelo matemático de una estructura de un GDL sujeta a excitación sísmica, como se observa en la Fig. 2.1. Para una estructura de varios GDL, la ecuación de movimiento se basa en la Ec. (2.3), sólo que ahora se aplica a los diversos GDL que se consideren en la estructura; es decir, a los  $n$  pisos del edificio. Bajo la suposición de que la estructura está sujeta a excitación sísmica bidimensional, entonces los GDL de una estructura, en 3D, de masa concentrada son seis: tres de desplazamiento lineal y tres de rotación; con lo anterior la Ec. (2.3), que es escalar, se convierte en una ecuación matricial

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{U}_g.$$

A la matriz  $M$  se le conoce como la matriz de masa, a  $C$  como matriz de amortiguamiento y a  $K$  como matriz de rigidez.

## 2.3. Modelo en tres dimensiones

### 2.3.1. Hipótesis de diafragma de piso rígido

La **hipótesis de diafragma de piso rígido**, que se considera para el modelado de la estructura, supone al piso como un cuerpo inderformable en el plano, donde la distancia relativa entre sus partículas es constante aun bajo los efectos de fuerzas externas. Lo anterior implica que las vigas de la estructura presentan una rigidez a la flexión infinita, motivando a

que la losa de cada piso se comporte como un plano rígido y no como una sábana bajo efectos de fuerzas externas, que pueden ser originadas intencionalmente, movimientos telúricos, viento, etc.

De acuerdo a lo anterior, aun si las vigas sufren deformaciones, se considera que éstas son pequeñas comparadas con las deformaciones de las columnas (Chopra, 1995). Además, si se considera al edificio como un sistema de parámetros concentrados<sup>2</sup>, entonces, el número de GDL por cada piso se reduce a sólo tres: dos desplazamientos horizontales ortogonales y una rotación perpendicular al plano que forman los desplazamientos. Esto origina que desde el punto de vista matemático, el orden de las matrices involucradas en el modelo matemático se reduzca. Con estas hipótesis queda claro que cualquier punto del diafragma se puede estudiar solamente con los tres GDL indicados.

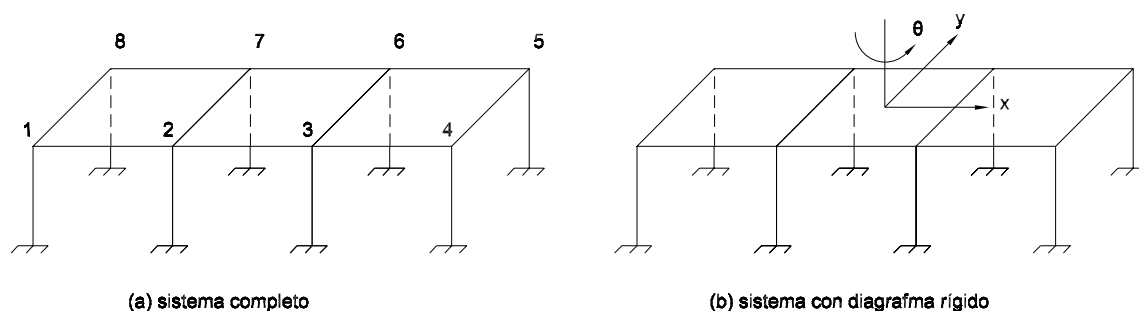


Figura 2.3: Grados de libertad (GDL) de diafragma de piso rígido

La Fig 2.3 (a) muestra una estructura de un solo nivel con ocho columnas. A los puntos donde se unen columnas con vigas se les denomina nodos, en este caso son ocho nodos, cada uno de ellos tiene seis GDL: tres desplazamientos ortogonales y tres rotaciones<sup>3</sup>, dando por resultado que el número total de GDL sea 48. Lo anterior implica que la matriz de rigidez  $K$  pertenece a un espacio de dimensión  $48 \times 48$  y cuyos elementos son números reales ( $K \in \mathcal{R}^{48 \times 48}$ ). Sin embargo, si se toma como verdadera la *hipótesis de diafragma de piso rígido*, Fig 2.3 (b), y donde además, se considera a la estructura como un *sistema dinámico de parámetros concentrados*, entonces sólo se tienen tres GDL: dos desplazamientos ortogonales

<sup>2</sup>Sistema en el cual el modelo matemático involucra un número finito de variables, y se representa por ecuaciones diferenciales ordinarias.

<sup>3</sup>Los desplazamientos se representan en el sistema cartesiano  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Las rotaciones son en cada uno de estos ejes.



$(x, y)$ , y una rotación  $(\theta)$  sobre el eje  $z$ , por lo que la matriz de rigidez  $K \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ , y todos los puntos del diafragma se pueden estudiar con los tres GDL seleccionados.

Para el caso de un edificio de  $n$  pisos, de acuerdo a lo anterior, cada piso tiene tres GDL, por lo que  $K \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}$ . De igual forma, la matriz de masa  $M$  y la matriz de amortiguamiento  $C$  tienen la misma dimensión que la matriz de rigidez  $K$ .

Entonces, para que el modelo matemático, que se describe a continuación represente de forma confiable el comportamiento real de un edificio sujeto a una excitación externa, se considera que la estructura cumple con:

- Hipótesis de diafragma de piso rígido
- Comportamiento lineal
- Base empotrada.

Además, no se consideran los efectos dinámicos de la interacción suelo-estructura.

### 2.3.2. Modelo de tres grados de libertad

Para un edificio de  $n$  pisos, del cual se desea obtener un modelo con tres GDL por piso, se aplica el mismo principio mostrado en la sección anterior. La Fig 2.4 muestra el esquema de una estructura de  $n$  pisos, de acuerdo a este diagrama, la matriz de rigidez  $K_d$  está dada por la Ec. (2.4), y la matriz de amortiguamiento  $C_d$ , Ec. (2.5), tiene la misma estructura. A este tipo de matrices se les conoce como tridiagonales y se puede observar que son simétricas. Además, estas matrices se obtienen para cada marco que forme al edificio, y cada una de ellas pertenece a un espacio de números reales de dimensión  $n \times n$ , es decir

$$K_d = K_d^T \in \mathcal{R}^{n \times n} \quad \text{y} \quad C_d = C_d^T \in \mathcal{R}^{n \times n}.$$

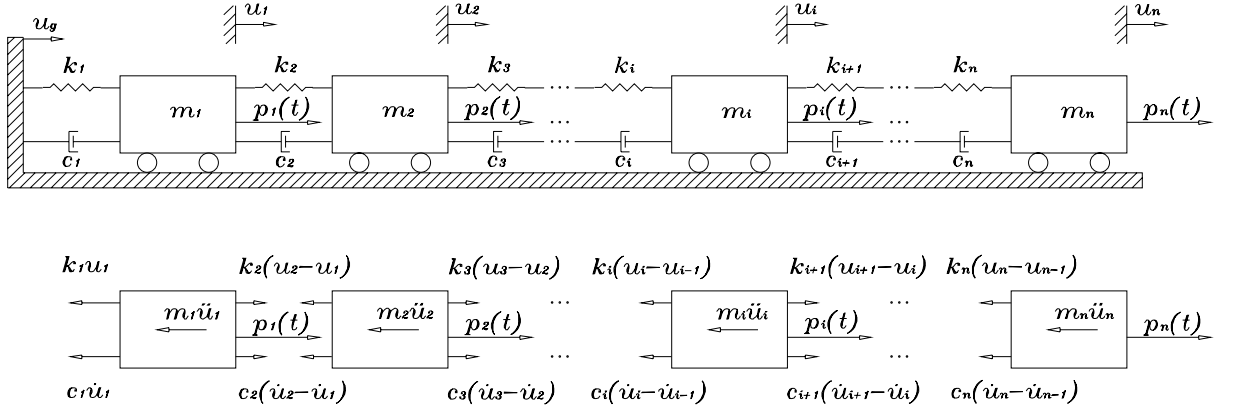


Figura 2.4: Representación de un sistema de varios pisos

$$K_d = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} > 0. \quad (2.4)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} + c_{n-1} & -c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.5)$$

### 2.3.3. Matriz de rigidez en 3D

En el caso del modelo en 3D, el edificio se excita con dos señales sísmicas ortogonales paralelas al plano del suelo. Esto provoca que la estructura sufra desplazamientos en el plano, que originan un movimiento de rotación que es perpendicular al plano de desplazamiento. Angeles Cervantes, Juan Mauricio (2004) desarrolla con detalle la forma cómo se calculan. La matriz de rigidez en 3D es

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad K = K^T > 0, \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \sum_{j=1}^f K_{dj} \cos^2 \beta_j && \in \mathcal{R}^{n \times n}, && k_{xx} = k_{xx}^T > 0, \\ k_{xy} = k_{yx} &= \sum_{j=1}^f K_{dj} \cos \beta_j \sen \beta_j && \in \mathcal{R}^{n \times n}, && k_{xy} = k_{xy}^T > 0, \\ k_{x\theta} = k_{\theta x} &= \sum_{j=1}^f K_{dj} r_j \cos \beta_j && \in \mathcal{R}^{n \times n}, && k_{x\theta} = k_{x\theta}^T > 0, \\ k_{yy} &= \sum_{j=1}^f K_{dj} \sen^2 \beta_j && \in \mathcal{R}^{n \times n}, && k_{yy} = k_{yy}^T > 0, \\ k_{y\theta} = k_{\theta y} &= \sum_{j=1}^f K_{dj} r_j \sen \beta_j && \in \mathcal{R}^{n \times n}, && k_{y\theta} = k_{y\theta}^T > 0, \\ k_{\theta\theta} &= \sum_{j=1}^f K_{dj} r_j^2 && \in \mathcal{R}^{n \times n}, && k_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}^T > 0, \end{aligned}$$

donde  $\beta_j$  es el ángulo que forma el marco  $j$  con respecto al sistema de referencia,  $K_{dj}$  es la matriz de rigidez de marco plano del marco  $j$ , y  $r_j$  es la distancia perpendicular del marco  $j$  al origen del sistema de referencia, Fig. 2.5.

Cada elemento de la matriz  $K$  es una matriz simétrica y tridiagonal que relaciona los efectos de cada GDL sobre otro GDL. Por ejemplo, la matriz  $k_{x\theta}$  representa los efectos de la rotación en el eje  $\theta$  sobre el eje  $x$  en todos los niveles del edificio.

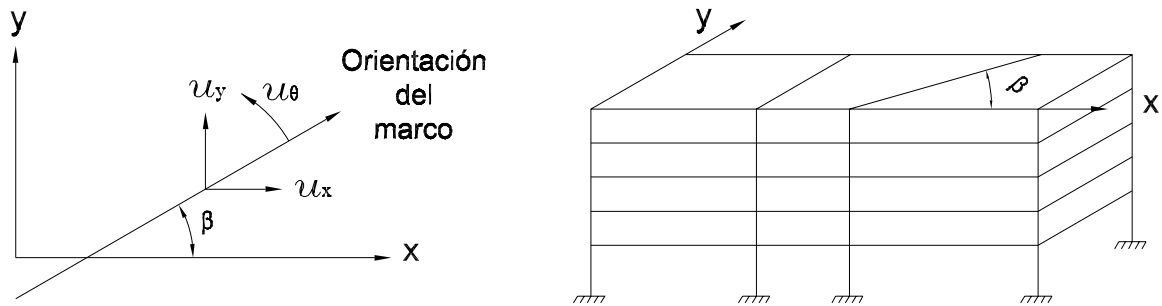


Figura 2.5: Orientación de los marcos planos

### 2.3.4. Matriz de amortiguamiento en 3D

Debido a que se requiere conocer con precisión el valor de amortiguamiento de una estructura civil, en este modelo se considera que la matriz de amortiguamiento  $C$  en 3D tiene la misma estructura que la matriz de rigidez  $K$ , Ec. (2.6), por lo que está determinada por:

$$C = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{x\theta} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{y\theta} \\ c_{\theta x} & c_{\theta y} & c_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad C = C^T \geq 0. \quad (2.7)$$

De la misma forma que en la Ec. (2.6), los elementos matriciales de la Ec. (2.7) pertenecen a  $\mathcal{R}^{n \times n}$ , son simétricos y tridiagonales.

### 2.3.5. Matriz de masa en 3D

La matriz de masa para un modelo en 3D involucra la masa concentrada (inercia traslacional), así como el momento polar de inercia (inercia rotacional), para cada uno de los niveles del edificio, pues es por esta última inercia que es posible conocer la rotación que sufre el diafragma cuando está sujeto a fuerzas externas.

La estructura de la matriz de masa en 3D está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad M = M^T > 0, \quad (2.8)$$

donde:

$$m_t = \sum_{j=i}^f m_j, \quad I_m = \left(\frac{m_t}{12}\right)(a^2 + b^2),$$

con  $a$  y  $b$  las dimensiones de la planta rectangular del edificio, y  $f$  el número de marcos del edificio.

La matriz  $m_t \in \mathcal{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal donde los valores de sus elementos son la suma de las masas de todos los marcos, de sus pisos correspondientes.

Para un edificio en el que su modelo considera tres GDL por piso: desplazamiento en  $x$ , desplazamiento en  $y$ , rotación en  $\theta$ , y además de  $n$  pisos, la Ec. (2.3) se convierte en una ecuación matricial:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{U}_g, \quad (2.9)$$

donde las matrices  $K$ ,  $C$  y  $M$  están dadas por las Ecs. (2.6), (2.7) y (2.8), respectivamente, y además:

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$u_x, u_y, u_\theta, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_\theta, \ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_\theta \in \mathcal{R}^{n \times 1},$$

con  $u_i$  un vector formado por los desplazamientos relativos en la dirección  $i$ ,  $\dot{u}_i$  un vector formado por las velocidades relativas en la dirección  $i$ , y  $\ddot{u}_i$  el vector de aceleración relativa en la dirección  $i$ ; en los tres casos es para cada uno de los pisos del edificio.  $\ddot{U}_g$  es el vector de aceleraciones del suelo aplicada a cada uno de los niveles de la estructura.

$$\ddot{U}_g = \begin{bmatrix} \ell_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times 1} & \ell_{n \times 1} \\ 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{gx} \\ \ddot{u}_{gy} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

donde  $\ell_{n \times 1}$  es un vector de *unos*, el elemento  $0_{n \times 1}$  es un vector de *ceros*, ambos pertenecen a un espacio de números reales de dimensión  $n \times 1$ .  $\ddot{u}_{gx}$  es la aceleración del sismo en la dirección  $X$ , y  $\ddot{u}_{gy}$  es la aceleración del sismo en la dirección  $Y$ .

Se asumirá que las señales  $U$ ,  $\dot{U}$ ,  $\ddot{U}$  y  $\ddot{U}_g$  son acotadas.

## 2.4. Análisis cinemático del diafragma

En un sistema real, las mediciones directas que se pueden obtener sólo son aceleraciones a través de acelerómetros. Éstos se colocan, generalmente, sobre los lados del diafragma. Sin embargo, estas mediciones no sólo detectan la aceleración lineal que se tiene en el punto de medición; la medición está formada por una componente de aceleración lineal y una componente de aceleración angular, esto sucede porque el acelerómetro no está colocado en el centro de rotación del diafragma. Además, no sólo mide la aceleración relativa de cada nivel, es decir, la aceleración del piso con respecto al suelo. El acelerómetro mide aceleración absoluta con respecto a un sistema inercial. De lo anterior se deduce que las mediciones de acelerómetros están formadas por varias componentes: aceleración torsional, aceleración lineal relativa, y aceleración lineal del suelo con respecto a un sistema inercial.

De la Ec. (2.9), las señales están separadas en componentes  $x$ ,  $y$  y  $\theta$ , éstas se pueden obtener a partir de mediciones absolutas de acelerómetros, para los cual es necesario un análisis cinemático del movimiento de un punto arbitrario sobre el diafragma.

Para tener mediciones que sólo muestren las componentes deseadas, es necesario trasladar las mediciones al centro de torsión de cada diafragma, sin embargo, se requiere tener el conocimiento de las variables de rotación: desplazamiento, velocidad y aceleración angulares de cada punto donde se colocan los acelerómetros.

Como se ha mencionado, el modelo de la estructura que se presenta en la Ec. (2.9) está basado en la hipótesis de diafragma de piso rígido, y esto provoca que con sólo tres

GDL se pueda conocer la cinemática de todo el diafragma. Para conocer la cinemática de cada uno de los puntos del diafragma, es necesario tener en cuenta que éste sufre un movimiento general de traslación, es decir, dos desplazamientos ortogonales y una rotación perpendicular al plano de movimiento. La Fig. 2.6 muestra cómo es el movimiento que sufre el diafragma. Éste se desplaza y rota con respecto al sistema cuyo origen es el punto  $N$ , este sistema representa al suelo que a su vez se desplaza con respecto al sistema cuyo origen es el punto  $O$  que es un sistema inercial: no se mueve. El punto  $P$  representa cualquier punto sobre el diafragma y del que se desea conocer cómo es su cinemática. El punto  $Q$  es el punto del centro de rotación del diafragma.

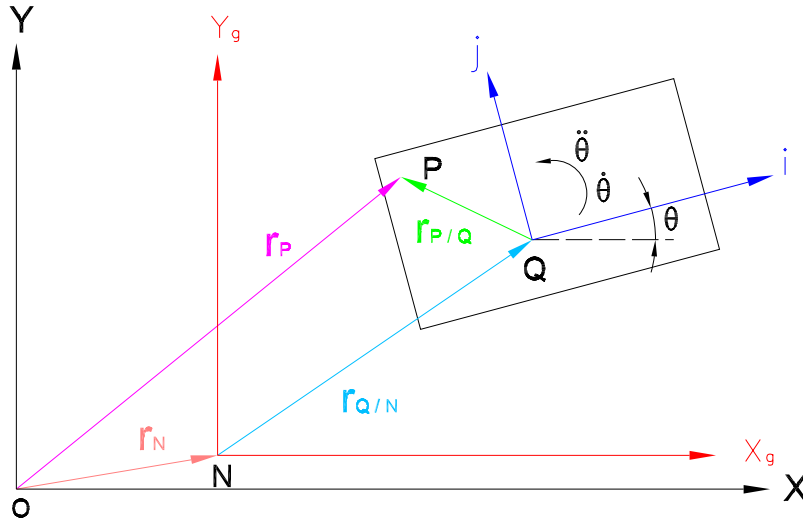


Figura 2.6: Esquema de movimientos de traslación y rotación

De acuerdo a lo anterior, es necesario conocer el desplazamiento, velocidad y aceleración del punto  $P$  con respecto al sistema inercial  $O$ . En el análisis siguiente la posición de los acelerómetros se asociará al punto  $P$ .

**Definición 2.1** Sea  $r_p$  el vector que define la posición del punto  $P$  con respecto al sistema inercial

$$r_p = r_N + r_{Q/N} + r_{P/Q}, \quad (2.10)$$

donde  $r_N$  es el vector de posición del punto  $N$ ,  $r_{Q/N}$  es el vector de posición del punto  $Q$  con respecto al punto  $N$ ,  $r_{P/Q}$  es el vector de posición del punto  $P$  con respecto al punto  $Q$  y  $r_p$  es la posición absoluta del punto  $P$ .

Si se deriva una y dos veces la Ec. (2.10) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{r}_p = \dot{r}_N + \dot{r}_{Q/N} + \dot{r}_{P/Q} + \dot{\theta} \times r_{P/Q}, \quad (2.11a)$$

$$\ddot{r}_p = \ddot{r}_N + \ddot{r}_{Q/N} + \ddot{r}_{P/Q} + \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times r_{P/Q}) + \ddot{\theta} \times r_{P/Q} + 2 \dot{\theta} \times \dot{r}_{P/Q}. \quad (2.11b)$$

El cuarto término de la Ec. (2.11a) es la velocidad tangencial; en la Ec. (2.11b), el cuarto término es la aceleración normal, el quinto la aceleración tangencial y el sexto la aceleración de Coriolis. No obstante, dado que el modelo matemático mostrado por la Ec. (2.9) se desarrolló bajo la hipótesis de diafragma de piso rígido, entonces la distancia relativa entre cualesquiera par de puntos de dicho diafragma se mantiene constante. Es por ello que  $\dot{r}_{P/Q} = 0$  y  $\ddot{r}_{P/Q} = 0$ , es decir, la velocidad y la aceleración del punto  $P$  con respecto al punto  $Q$  son nulas. De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones para la velocidad y aceleración absolutas del punto  $P$  son

$$\dot{r}_p = \dot{r}_N + \dot{r}_{Q/N} + \dot{\theta} \times r_{P/Q}, \quad (2.12a)$$

$$\ddot{r}_p = \ddot{r}_N + \ddot{r}_{Q/N} + \dot{\theta} \times (\dot{\theta} \times r_{P/Q}) + \ddot{\theta} \times r_{P/Q}. \quad (2.12b)$$

#### 2.4.1. Mediciones absolutas

Como ya se mencionó, los acelerómetros miden aceleraciones absolutas, con respecto al origen  $O$ , Fig. 2.6. Sin embargo, en la Ec. (2.9), los vectores  $U$ ,  $\dot{U}$  y  $\ddot{U}$  están formados por mediciones relativas: de cualquier punto  $P$  del diafragma con respecto al origen  $N$ .

De acuerdo a lo anterior, se separan las Ecs. (2.10) y (2.12) para cada componente:  $X$  y  $Y$  del vector  $r_p$ , y se les proyecta al sistema inercial de referencia, entonces



$$x_P = x_N + x_{Q/N} + x_{P/Q} \cos(\theta) - y_{P/Q} \text{sen}(\theta), \quad (2.13a)$$

$$y_P = y_N + y_{Q/N} + x_{P/Q} \text{sen}(\theta) + y_{P/Q} \cos(\theta), \quad (2.13b)$$

$$\dot{x}_P = \dot{x}_N + \dot{x}_{Q/N} - \dot{\theta} [x_{P/Q} \text{sen}(\theta) + y_{P/Q} \cos(\theta)], \quad (2.13c)$$

$$\dot{y}_P = \dot{y}_N + \dot{y}_{Q/N} + \dot{\theta} [x_{P/Q} \cos(\theta) - y_{P/Q} \text{sen}(\theta)], \quad (2.13d)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_P = \ddot{x}_N + \ddot{x}_{Q/N} + \dot{\theta}^2 [-x_{P/Q} \cos(\theta) + y_{P/Q} \text{sen}(\theta)] \\ - \ddot{\theta} [x_{P/Q} \text{sen}(\theta) + y_{P/Q} \cos(\theta)], \end{aligned} \quad (2.13e)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_P = \ddot{y}_N + \ddot{y}_{Q/N} - \dot{\theta}^2 [x_{P/Q} \text{sen}(\theta) + y_{P/Q} \cos(\theta)] \\ + \ddot{\theta} [x_{P/Q} \cos(\theta) + y_{P/Q} \text{sen}(\theta)]. \end{aligned} \quad (2.13f)$$

La Ecs. (2.13) representan los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del punto  $P$  en las direcciones  $X$  y  $Y$  respecto al sistema inercial  $O$ , es decir, mediciones absolutas. Para recuperar las variables cinemáticas de rotación del diafragma, es necesario tener dos mediciones en la misma dirección, por lo que se colocan acelerómetros en los puntos  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ , y aplicar a estos puntos las Ecs. (2.13). La Fig. 2.7 muestra un edificio de tres pisos con acelerómetros en la periferia de sus diafragmas, así como la simplificación para efecto de aplicar la Ec. (2.9).

$$X_A = X_N + X_{Q/N} + X_{A/Q} \cos(\theta) - Y_{A/Q} \text{sen}(\theta),$$

$$X_B = X_N + X_{Q/N} + X_{B/Q} \cos(\theta) - Y_{B/Q} \text{sen}(\theta),$$

$$Y_C = Y_N + Y_{Q/N} + X_{C/Q} \text{sen}(\theta) + Y_{C/Q} \cos(\theta),$$

$$Y_D = Y_N + Y_{Q/N} + X_{D/Q} \text{sen}(\theta) + Y_{D/Q} \cos(\theta),$$

$$\dot{X}_A = \dot{X}_N + \dot{X}_{Q/N} - \dot{\theta} [X_{A/Q} \text{sen}(\theta) + Y_{A/Q} \cos(\theta)],$$

$$\dot{X}_B = \dot{X}_N + \dot{X}_{Q/N} - \dot{\theta} [X_{B/Q} \text{sen}(\theta) + Y_{B/Q} \cos(\theta)],$$

$$\dot{Y}_C = \dot{Y}_N + \dot{Y}_{Q/N} + \dot{\theta} [X_{C/Q} \cos(\theta) - Y_{C/Q} \text{sen}(\theta)],$$

$$\dot{Y}_D = \dot{Y}_N + \dot{Y}_{Q/N} + \dot{\theta} [X_{D/Q} \cos(\theta) - Y_{D/Q} \text{sen}(\theta)],$$

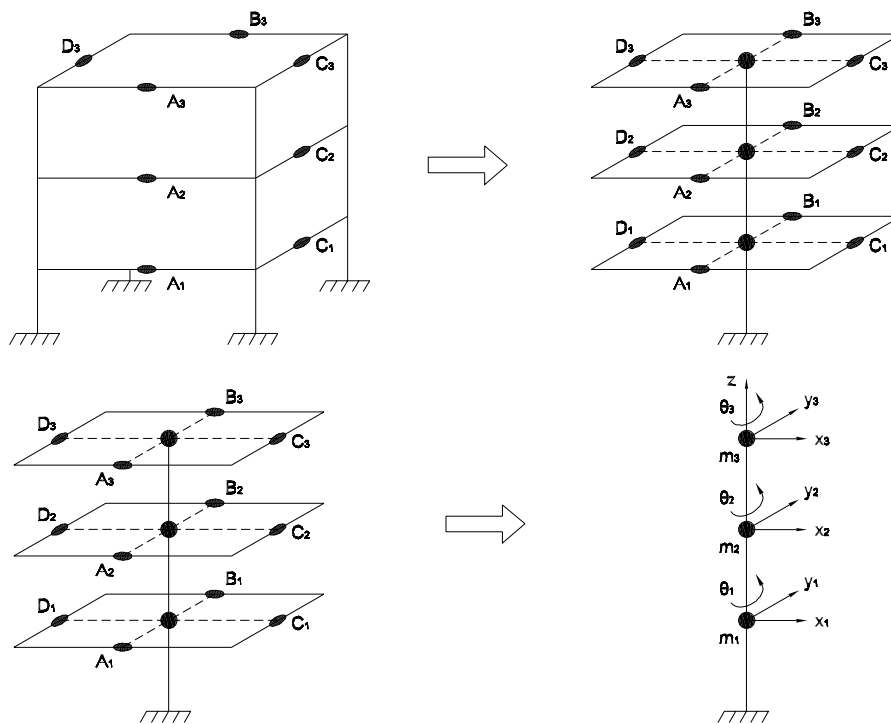


Figura 2.7: Esquema simplificado de un edificio en 3D

$$\begin{aligned}\ddot{X}_A &= \ddot{X}_N + \ddot{X}_{Q/N} + \dot{\theta}^2 [-X_{A/Q} \cos(\theta) + Y_{A/Q} \sin(\theta)] - \ddot{\theta} [X_{A/Q} \sin(\theta) + Y_{A/Q} \cos(\theta)], \\ \ddot{X}_B &= \ddot{X}_N + \ddot{X}_{Q/N} + \dot{\theta}^2 [-X_{B/Q} \cos(\theta) + Y_{B/Q} \sin(\theta)] - \ddot{\theta} [X_{B/Q} \sin(\theta) + Y_{B/Q} \cos(\theta)], \\ \ddot{Y}_C &= \ddot{Y}_N + \ddot{Y}_{Q/N} - \dot{\theta}^2 [X_{C/Q} \sin(\theta) + Y_{C/Q} \cos(\theta)] + \ddot{\theta} [X_{C/Q} \cos(\theta) + Y_{C/Q} \sin(\theta)], \\ \ddot{Y}_D &= \ddot{Y}_N + \ddot{Y}_{Q/N} - \dot{\theta}^2 [X_{D/Q} \sin(\theta) + Y_{D/Q} \cos(\theta)] + \ddot{\theta} [X_{D/Q} \cos(\theta) + Y_{D/Q} \sin(\theta)].\end{aligned}$$

$\ddot{X}_A$  y  $\ddot{Y}_C$  son las señales que miden los acelerómetros colocados en los puntos  $A$  y  $C$  en las direcciones  $X$ ,  $Y$ , respectivamente.  $\ddot{X}_N$  y  $\ddot{Y}_N$  son las señales que miden los acelerómetros colocados en el suelo en las direcciones  $X$ ,  $Y$ , respectivamente.

De lo anterior, es fácil deducir que para obtener las aceleraciones relativas, sólo es necesario medir la aceleración en los pisos en cuestión y restar la aceleración que tiene el suelo. De esta forma se obtienen los vectores  $U$ ,  $\dot{U}$  y  $\ddot{U}$  que se observan en la Ec. (2.9).

### 2.4.2. Variables rotacionales

Al hacer referencia a la Ec. (2.9), son necesarias las variables rotacionales de cada uno de los pisos: desplazamiento, velocidad y aceleración angular. Para conocer estas variables, se hace uso de las Ecs. (2.13) aplicada a los puntos  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ . La Fig 2.8 muestra la configuración de los sensores necesarios para calcular las variables rotacionales, tanto si se mide en la dirección  $X$ , o en la dirección  $Y$ .

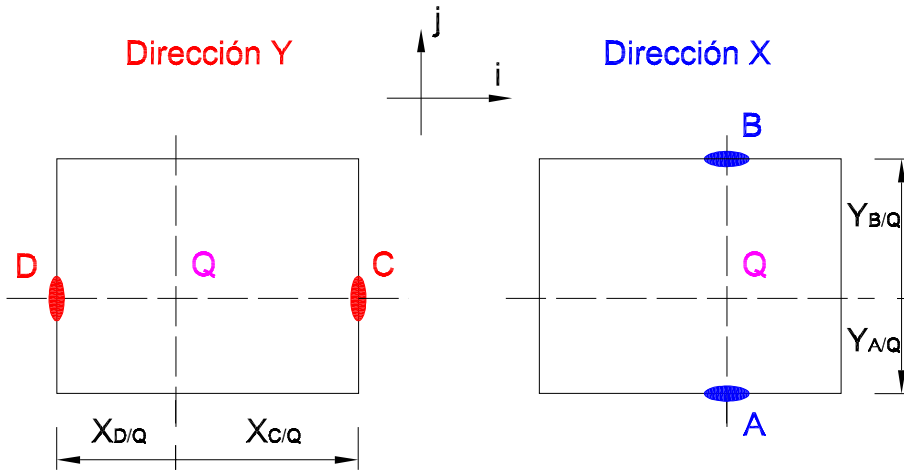


Figura 2.8: Diagrama con sensores en la dirección  $X$ , y en la dirección  $Y$

De estas ecuaciones es posible derivar la aceleración, velocidad y desplazamiento angular de cada piso si se realizan las siguientes diferencias:  $X_A - X_B$ ,  $\dot{X}_A - \dot{X}_B$  y  $\ddot{X}_A - \ddot{X}_B$ . Nótese que para este caso  $X_{A/Q} = X_{B/Q}$  y que  $Y_{B/Q} - Y_{A/Q} = Y_{B/A}$ , Fig 2.8, Así se obtiene

$$\text{sen } \theta = \frac{x_A - x_B}{y_{B/A}}, \quad (2.14a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}_A - \dot{x}_B}{y_{B/A} \cos \theta}, \quad (2.14b)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}_A - \ddot{x}_B + \dot{\theta}^2 y_{B/A} \text{sen } \theta}{y_{B/A} \cos \theta}. \quad (2.14c)$$

De la misma forma, si se realizan las diferencias:  $Y_C - Y_D$ ,  $\dot{Y}_C - \dot{Y}_D$  y  $\ddot{Y}_C - \ddot{Y}_D$ . Al igual que el caso anterior  $Y_{C/Q} = Y_{D/Q}$ ,  $X_{C/Q} - X_{D/Q} = X_{C/D}$ , por lo tanto

$$\text{sen } \theta = \frac{y_C - y_D}{x_{C/D}}, \quad (2.15a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}_C - \dot{y}_D}{x_{C/D} \cos \theta}, \quad (2.15b)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}_C - \ddot{y}_D + \dot{\theta}^2 x_{C/D} \text{sen } \theta}{x_{C/D} \cos \theta}. \quad (2.15c)$$

Con las Ecs. (2.14) - (2.15) es posible conocer las variables rotacionales del diafragma. Se puede observar que sólo es necesario conocer dos mediciones en la misma dirección separadas por la mayor distancia posible, como se observa en el término  $y_{B/A}$  de las Ecs. (2.14) que representa la distancia del punto  $B$  con respecto al punto  $A$  en el eje  $Y$ , así como del término  $x_{C/D}$ , de las Ecs. (2.15), que es la distancia entre el punto  $C$  y el punto  $D$  en el eje  $X$ ; pues entre mayor sean estas distancia, la precisión de los cálculos será mayor. Además, con estas mediciones es posible trasladar los valores de aceleración del punto  $P$  al punto  $Q$  que es el centro de rotación.

Las ecuaciones mostradas demuestran que para conocer las variables cinemáticas de un edificio de  $n$  pisos, es necesario tener tres mediciones por piso: dos en la misma dirección (lo más separadas posibles) y una más en la dirección ortogonal. Además, son necesarias dos señales de aceleración del suelo en direcciones perpendiculares y colineales con los ejes del sistema de referencia.

Con lo anterior se puede afirmar que para conocer la cinemática de un edificio de  $n$  pisos son necesarias  $3n + 2$  señales de aceleración.



## Capítulo 3

# Identificación paramétrica

En este capítulo se describe cómo se realiza la identificación paramétrica de un edificio según el modelo tridimensional propuesto en el capítulo anterior, y se prueba la convergencia del algoritmo de mínimos cuadrados propuesto.

### 3.1. Introducción

Si se conoce la estructura de un modelo, mediante la respuesta dinámica de éste se pueden determinar los valores de los parámetros del sistema. En algunos casos, estos valores pueden ser calculados de forma fácil mediante la aplicación de leyes fundamentales de la Física. Sin embargo, en algunos otros casos esto no es posible, entonces los valores de los parámetros se deducen por observación de la respuesta del sistema a cierta entrada conocida. Si se consideran parámetros invariantes en el tiempo, el conocimiento de éstos se realiza mediante técnicas de estimación que procesan las mediciones del sistema. Esto se puede realizar fuera de línea, es decir, el procesamiento se realiza después de que se tomaron las mediciones. A lo anterior se le conoce como *estimación paramétrica fuera de línea*. Para casos donde los parámetros cambian lentamente con respecto del tiempo o son constantes, el procedimiento se puede realizar en línea, es decir, el procesamiento de señales de entrada/salida se realiza en el mismo momento que se toman las mediciones. A estas técnicas se les conoce como *estimación paramétrica en línea*.

En este trabajo se usa una técnica de identificación paramétrica en línea, en la cual se

toman mediciones de aceleración en cada uno de los pisos del edificio, así como del suelo y se procesa la información con el objetivo de conocer el valor de los parámetros de una forma más precisa. En el capítulo 2, se demostró que sólo son necesarias tres mediciones de aceleración por piso. Sin embargo, no siempre se cuenta con los acelerómetros necesarios en cada piso, entonces se puede generar un modelo reducido de acuerdo al número de pisos que tengan los tres acelerómetros necesarios. Con esta idea, los modelos reducidos obtenidos permiten una buena aproximación de la respuesta dinámica de la estructura, en especial cuando se calculan las frecuencias principales de oscilación. Se presentan resultados al aplicar esta técnica, tanto a nivel simulación, como a nivel experimental.

### 3.2. Identificación paramétrica

La idea esencial de la estimación paramétrica en línea es la comparación de la respuesta del sistema  $Z(t)$ , con la salida de un modelo parametrizado  $\hat{Z}(\Phi(t), t)$ , cuya estructura es la misma que la del modelo del sistema. El vector de parámetros  $\Phi(t)$  se modifica constantemente hasta que el valor de  $\hat{Z}(\Phi(t), t)$  se aproxime al valor de  $Z(t)$  conforme el tiempo transcurre. Si esto sucede bajo condiciones de excitación persistente, los valores del vector de parámetros  $\Phi(t)$  tienden hacia los valores del vector de parámetros  $\Phi_0$  del modelo del sistema (Ioannou, P.A. y Sun, J., 1996).

Para realizar una identificación de parámetros, es necesario conocer los pasos que se tienen que realizar para lograr obtener resultados satisfactorios. El primer paso es elegir una apropiada parametrización del modelo del sistema, basada en minimizar el número de operaciones para solucionar el algoritmo, tal que el tiempo de solución sea mínimo. Esto es algo muy importante, pues de ello depende la eficiencia del algoritmo de estimación. En segundo lugar, elegir la ley de adaptación para generar el vector  $\Phi(t)$ . Esta ley es diseñada, usando consideraciones de estabilidad u optimización para minimizar la diferencia entre  $Z(t)$  y  $\hat{Z}(\Phi(t), t)$  con respecto a  $\Phi$  en cada instante de tiempo. Finalmente, se diseña la salida del sistema tal que las propiedades de la ley de adaptación impliquen que los valores de  $\Phi(t)$  se aproximen a los valores del vector de parámetros desconocidos del sistema,  $\Phi_0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para conocer los parámetros del modelo, existen varios algoritmos de estimación en línea. Entre ellos se encuentra el *Diseño de Lyapunov estrictamente real positivo*, el cual es aplicable a sistemas lineales. El método incluye la selección de un filtro con inversa propia y estable que fuerza una relación entrada/salida que es estrictamente positiva real (Ioannou, P.A. y Sun, J., 1996).

Otro esquema de adaptación es el *método del gradiente* (Åström, K.J. y Wittenmark, B., 1995). Este método involucra una ecuación algebraica del error de estimación que origina la elección de una función de costo apropiada  $J(\Phi(t))$  que es convexa sobre el espacio de  $\Phi(t)$  en cada instante de tiempo  $t$ .

Un método antiguo, que data del siglo XVIII, usado para determinar la órbita de los planetas es el de *mínimos cuadrados*. Lo que propone este método es adaptar un modelo matemático a una secuencia de datos medidos para minimizar la suma de los cuadrados de la diferencia entre los datos medidos y los calculados.

En este trabajo se hace uso de un esquema de mínimos cuadrados con una parametrización tal que reduce el orden de los elementos matriciales involucrados en el algoritmo, reduciendo con ello el número de operaciones aritméticas necesarias para la solución del mismo. Debido a lo anterior, con una computadora personal<sup>1</sup> se pueda aplicar el algoritmo en tiempo real para la obtención de los parámetros del sistema, que en este caso es un edificio cuyos parámetros a recuperar son los elementos de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$  del modelo matemático desarrollado en el capítulo 2.

### 3.3. Parametrización del modelo matemático

#### 3.3.1. Mínimos cuadrados

En este trabajo se hace uso del método de mínimos cuadrados aplicado al sistema (2.9), que representa el modelo en 3D de un edificio de  $n$  pisos. Sin embargo, se utiliza una parametrización tal que simplifica el orden de los elementos matemáticos involucrados, principalmente de la matriz de covariancia, y por consecuencia se tiene una simplificación importante en el tiempo de cálculo del algoritmo (Angeles Cervantes, Juan Mauricio, 2004), logrando

---

<sup>1</sup>Las características de esta computadora se describen en el capítulo 7.



que la implementación de la identificación paramétrica para un sistema de múltiples GDL, como lo es un edificio en 3D, sea factible en tiempo real.

Sea el sistema (3.1), y sean  $M, C, K \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}$  matrices constantes, donde los elementos de éstas son desconocidos

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{U}_g. \quad (3.1)$$

Una forma de parametrizar el modelo es asumir que los vectores  $\ddot{U}, \ddot{U}_g, \dot{U}$  y  $U$  son señales medidas<sup>2</sup>. Bajo esta consideración, se obtiene:

$$\ddot{U} + \ddot{U}_g = -M^{-1}KU - M^{-1}C\dot{U}, \quad (3.2)$$

donde ahora los parámetros del modelo son los elementos de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ . Entonces, de acuerdo a la Ec. (3.2), los parámetros a identificar son los elementos de las matrices mencionadas.

**Teorema 3.1** *Sea el sistema (3.1), con  $K, C, M \in \mathcal{R}^{q \times q}$  y  $M$  una matriz no singular. Sea la parametrización del sistema*

$$\begin{aligned} Z &= \ddot{U} + \ddot{U}_g && \in \mathcal{R}^{q \times 1}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} && \in \mathcal{R}^{q \times 2q}, \\ \Upsilon &= \begin{bmatrix} -U^T & -\dot{U}^T \end{bmatrix}^T && \in \mathcal{R}^{2q \times 1}, \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la matriz de parámetros reales, tal que la salida real es

$$Z = \Phi \Upsilon. \quad (3.3)$$

Sea  $\hat{\Phi}$  la matriz de parámetros estimados del sistema (3.1) tal que la salida estimada está dada por

$$\hat{Z} = \hat{\Phi} \Upsilon. \quad (3.4)$$

Entonces el algoritmo de estimación formado por las Ecs. (3.5) y (3.6)

$$\dot{P} = \delta P - P \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2} P, \quad (3.5)$$

---

<sup>2</sup>En este capítulo no se aborda el problema de observación de los estados de la Ec. (3.1), es decir, velocidades y desplazamientos relativos, denotados por  $\dot{U}$  y  $U$ , respectivamente.

$$\dot{\hat{\Phi}}^T = P \Upsilon \varepsilon^T, \quad (3.6)$$

con  $P = P^T > 0 \in \mathcal{R}^{2q \times 2q}$ ,  $P(0) > 0$ ,  $\delta \geq 0 \in \mathcal{R}$ ,  $h^2 = 1 + \Upsilon^T \Upsilon \in \mathcal{R}$  satisfacen  $\Upsilon/h \in \mathcal{L}_\infty$ , garantizan que el error normalizado de estimación

$$\varepsilon = \frac{Z - \hat{Z}}{h^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

*Demostración.* Sea  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}^{q \times 2q}$  el error paramétrico y sea  $\tilde{\Phi}_r \in \mathcal{R}^{1 \times 2q}$  el vector de error paramétrico correspondiente al renglón  $r$  de la matriz  $\tilde{\Phi}$ , es decir,

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{12} & \cdots & \tilde{\phi}_{12q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\phi}_{q1} & \tilde{\phi}_{q2} & \cdots & \tilde{\phi}_{q2q} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_r = \Phi_r - \hat{\Phi}_r = \left[ \tilde{\phi}_{r1} \quad \tilde{\phi}_{r2} \quad \cdots \quad \tilde{\phi}_{r2q} \right]. \quad (3.8)$$

Sea  $\varepsilon \in \mathcal{R}^{q \times 1}$  el vector de error de estimación y sea  $\varepsilon_r \in \mathcal{R}$  el elemento  $r$  del vector  $\varepsilon$  correspondiente al renglón  $r$  de los sistemas (3.3) y (3.4), esto es

$$\varepsilon = \frac{Z - \hat{Z}}{h^2} = \frac{\Phi \Upsilon - \hat{\Phi} \Upsilon}{h^2} = \frac{\tilde{\Phi} \Upsilon}{h^2},$$

$$\varepsilon_r = \frac{Z_r - \hat{Z}_r}{h^2} = \frac{\Phi_r \Upsilon - \hat{\Phi}_r \Upsilon}{h^2} = \frac{\tilde{\Phi}_r \Upsilon}{h^2}. \quad (3.9)$$

Sea  $V$  la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T. \quad (3.10)$$

La derivada temporal de  $V$  es

$$\dot{V} = \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \dot{\tilde{\Phi}}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{P}^{-1} \tilde{\Phi}_r^T. \quad (3.11)$$

Si en la Ec. (3.6) sólo se toma  $\dot{\tilde{\Phi}}_r$ , el renglón  $r$ , y se usan las Ecs. (3.8) y (3.9) se tiene

$$\dot{\tilde{\Phi}}_r^T = \dot{\Phi}_r^T - \dot{\hat{\Phi}}_r^T = 0 - P \Upsilon \varepsilon_r^T = -\frac{1}{h^2} (P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T). \quad (3.12)$$

Se usa ahora la identidad

$$P P^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} P P^{-1} = \dot{P} P^{-1} + P \dot{P}^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{P}^{-1} = -P^{-1} \dot{P} P^{-1}.$$

Con la Ec. (3.5)

$$\begin{aligned}\dot{P}^{-1} &= -P^{-1} \left( \delta P - P \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2} P \right) P^{-1}, \\ \dot{P}^{-1} &= -\delta P^{-1} + \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Sustituyendo las Ecs. (3.12) y (3.13) en la Ec. (3.11)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{h^2} \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{h^2} \tilde{\Phi}_r P^{-1} P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T \\ &\quad + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \left( -\delta P^{-1} + \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_r^T \\ &= -\frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T \\ &= -\frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T,\end{aligned}\tag{3.14}$$

nuevamente con las Ecs. (3.9) y (3.10)

$$\dot{V} = -\sum_{r=1}^q \varepsilon_r \varepsilon_r^T - \delta V,\tag{3.15}$$

$$\dot{V} = -\varepsilon^T \varepsilon - \delta V.\tag{3.16}$$

Para  $\delta > 0$ , se tiene que  $\dot{V} < 0$  lo que implica estabilidad asintótica, por lo que  $V \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y si esto sucede, entonces  $\tilde{\Phi}_r \rightarrow 0$  y por lo tanto  $\varepsilon_r \rightarrow 0$  lo que implica que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Cuando  $\delta = 0$ , se hace uso del siguiente Lema.

**Lema 3.1 (Lema de Barbalat para análisis de estabilidad)** (*Slotine, Jean-Jacques E. y Weiping, Li., 1991, pag. 125*). Si una función escalar  $V(t, x)$  satisface las siguientes condiciones:

1.  $V(t, x)$  es acotada por debajo,
2.  $\dot{V}(t, x)$  es negativa semi-definida,
3.  $\dot{V}(t, x)$  es uniformemente continua en el tiempo,

entonces  $\dot{V}(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

De la Ec. (3.10) se tiene que  $V$  es acotada por debajo puesto que el mínimo valor que puede tomar es cero. De la Ec. (3.16),  $\dot{V}$  es negativa semi-definida si  $\delta = 0$ , y por último para demostrar que  $\dot{V}$  es uniformemente continua, se tiene que mostrar que  $\ddot{V}$  es acotada. Para ello, se obtiene la derivada temporal de la Ec. (3.15)

$$\ddot{V} = - \sum_{r=1}^q \dot{\varepsilon}_r \varepsilon_r^T - \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \dot{\varepsilon}_r^T - \delta \dot{V}.$$

Si se hace uso de las Ecs. (3.9), (3.12) y (3.15), se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{V} &= - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \dot{\tilde{\Phi}}_r \Upsilon \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \Upsilon^T \dot{\tilde{\Phi}}_r^T - \delta \dot{V} \\ &= \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \delta \dot{V} \\ &= \frac{1}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T \\ &\quad + \frac{1}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \delta \dot{V} \\ &= \frac{2}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \delta \left( - \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \varepsilon_r^T - \delta V \right) \\ &= \frac{2}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T + \delta \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \varepsilon_r^T + \delta^2 V \\ &= \frac{2}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T \\ &\quad + \frac{\delta}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T + \delta^2 V. \end{aligned} \tag{3.17}$$

El término  $\dot{\Upsilon}$  es la derivada temporal de  $\Upsilon$ , y está dado por:

$$\dot{\Upsilon} = \begin{bmatrix} -\dot{U}^T & -\ddot{U}^T \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^{2q \times 1},$$

donde las señales  $\dot{U}$  y  $\ddot{U}$  son señales acotadas, y por lo tanto  $\dot{\Upsilon}$  es acotada.

La Ec. (3.17) está formada por señales acotadas:  $\tilde{\Phi}_r$ ,  $\Upsilon$  y  $P$ , por tanto, la función de Lyapunov  $V$  también es acotada, lo que implica que  $\dot{V}$  es acotada.

Por lo tanto  $V$  cumple las condiciones del lema 3.1, lo que implica que:

$$\dot{V} = -\varepsilon^T \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

De acuerdo con lo anterior, la única posibilidad de que  $\dot{V} \rightarrow 0$  es que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , con lo cual se garantiza que las señales de salida de la planta estimada  $\hat{Z}$ , son iguales a las señales de salida de la planta real  $Z$ .  $\square$

Las Ecs. (3.5)-(3.6) permiten recuperar la matriz de parámetros estimados  $\hat{\Phi}$ , que está formada por las matrices  $\widehat{M^{-1}K}$  y  $\widehat{M^{-1}C}$ , con la ventaja de que el orden de la matriz de covariancia está relacionado con el número de elementos del vector regresor  $\Upsilon$  y no con el número de parámetros a estimar, si se observa el orden de la matriz  $\Phi$ , el número de parámetros desconocidos es de  $18n^2$ . Esto muestra que esta parametrización es muy adecuada para el caso de estudio, puesto que si se requiere realizar la identificación paramétrica en línea, el número de operaciones numéricas necesarias para la solución de las Ecs. (3.5)-(3.6) será menor que para el caso de una parametrización convencional.

Las dimensiones de los elementos involucrados en una parametrización convencional de un edificio de  $n$  pisos, donde  $M^{-1}K, M^{-1}C \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}$ , son los siguientes:

$$Z \in \mathcal{R}^{3n \times 1}, \quad \Upsilon \in \mathcal{R}^{3n \times 18n^2}, \quad \Phi \in \mathcal{R}^{18n^2 \times 1}, \quad \varepsilon \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$P \in \mathcal{R}^{18n^2 \times 18n^2}. \quad (3.18)$$

Ahora se muestra el orden de los elementos que se forman con la parametrización de la Ec. (3.3) del mismo sistema (3.1), así como el orden de los elementos del algoritmo de estimación (3.5)-(3.6)

$$Z \in \mathcal{R}^{3n \times 1}, \quad \Upsilon \in \mathcal{R}^{6n \times 1}, \quad \Phi \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}, \quad \varepsilon \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$P \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}. \quad (3.19)$$

Como se observa las dimensiones de las matrices involucradas en el cálculo son menores con la parametrización propuesta, la reducción sustancial de las dimensiones, en especial

de la matriz de covarianza, Ec. (3.19), permite implementar este algoritmo en tiempo real, pues es claro que el número de operaciones matemáticas necesarias para resolver las Ecs. (3.5)-(3.6) será menor que si se resolviese la parametrización convencional, y de igual forma, el tiempo de procesamiento será menor, con la ventaja de que no será necesario tener una computadora con gran capacidad de cálculo. Es decir, una computadora de gama alta que se puede conseguir en el mercado será suficiente para procesar toda la información.



## Capítulo 4

# Resultados de identificación paramétrica

En este capítulo se muestran resultados de simulación de la aplicación del algoritmo de identificación paramétrica propuesto en el capítulo 3. Primeramente, se presentan los resultados en simulación del modelo de un edificio ficticio, seguidos de los resultados de identificación sobre datos reales de dos edificios de varios niveles.

### 4.1. Identificación paramétrica con datos simulados

En la sección anterior se mostró una parametrización adecuada para realizar e implementar identificación paramétrica en línea de edificios usando un modelo matemático que considera tres GDL por piso, Ec. (3.1): dos desplazamientos ortogonales, y una rotación. No obstante, esta ecuación se desarrolla bajo el supuesto que las señales de aceleración, velocidad y desplazamiento se localizan en el centro de rotación del diafragma. Las Ecs. (2.14)-(2.15) demuestran que son necesarias dos mediciones de aceleración en la misma dirección, y una medición más en la dirección perpendicular a las dos primeras.

En un edificio los acelerómetros se colocan en la periferia del diafragma, pero, entonces se requiere trasladar estas señales de la periferia al centro de torsión, para esto se hace uso del análisis cinemático que se desarrolló en el capítulo 2. Además, se requieren dos acelerómetros



más en la base del edificio. Por lo tanto para realizar identificación paramétrica completa en un edificio de  $n$  pisos y cuyo modelo considere tres GDL por nivel, son necesarios  $3n + 2$  acelerómetros.

Sin embargo, en un edificio instrumentado no siempre se tienen tres acelerómetros en cada nivel, y si los hubiera, no siempre están en la configuración requerida. En la mayoría de los casos sólo se instrumentan los pisos que proporcionan la mayor cantidad de información posible con base en las mediciones que se obtiene de ellos. Como un primer paso se considera que el edificio tiene instrumentados todos sus pisos, para después estudiar el caso en el cual sólo se pueden obtener mediciones de algunos pisos. Esto último puede ocurrir por: limitación en el número de acelerómetros, imposibilidad de colocar instrumentos de medición en algún o algunos pisos, número limitado en canales de adquisición de datos, etc.

En la Fig. 4.1, se observa un esquema de un edificio de 6 pisos a escala, formado por cuatro marcos, con el cual se trabajó a nivel simulación. Los parámetros de los marcos para este edificio simulado se tomaron de (Jiménez Fabián, René Enrique, 2002)<sup>1</sup>. Con este modelo se trabaja en dos casos: en el primero se considera instrumentación *completa* para todos y cada uno de los niveles, y en el segundo caso sólo se tiene instrumentos en tres pisos: primero, segundo y último. Para este último caso, el edificio se considera de tres niveles, pues no es posible tener información de los pisos no instrumentados, por lo que se trabaja con la siguiente hipótesis:

**Hipótesis 4.1** *Un edificio con instrumentación reducida, se considerará como una estructura cuyo número total de pisos será igual al número de pisos instrumentados de forma completa. Cada piso condensado estará formado por el nivel instrumentado y todos aquellos pisos no instrumentados situados debajo de él, y limitados en la parte inferior por otro piso instrumentado o por el suelo.*

Para el caso en el cual se tiene instrumentación *completa*, como se ha mencionado en la sección anterior, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez pertenecen a  $\mathcal{R}^{3n \times 3n}$ , siendo  $n$  el número de pisos total de la estructura. Ahora, para el caso de instrumentación

---

<sup>1</sup>Los valores de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez en 3D, así como los valores iniciales de las Ecs. (3.5)-(3.6), se pueden consultar en el apéndice B.

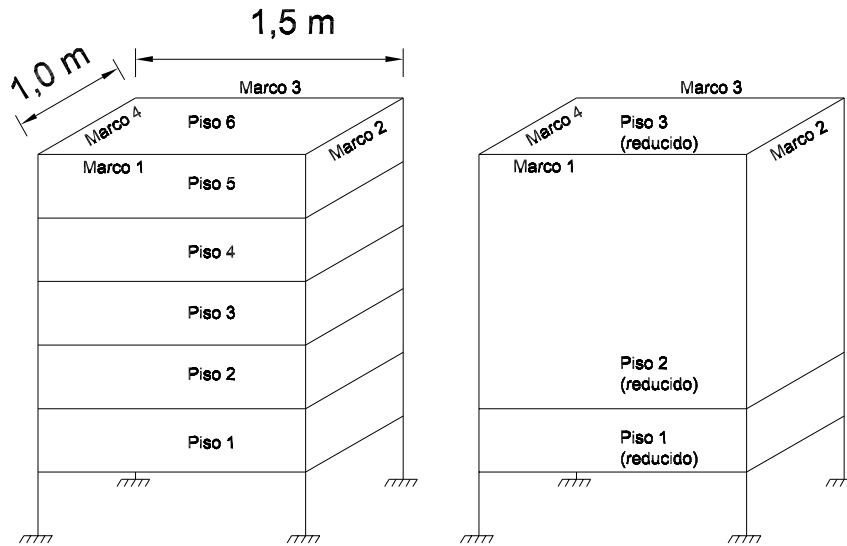


Figura 4.1: Edificio simulado: (a) instrumentación completa (b) instrumentación parcial

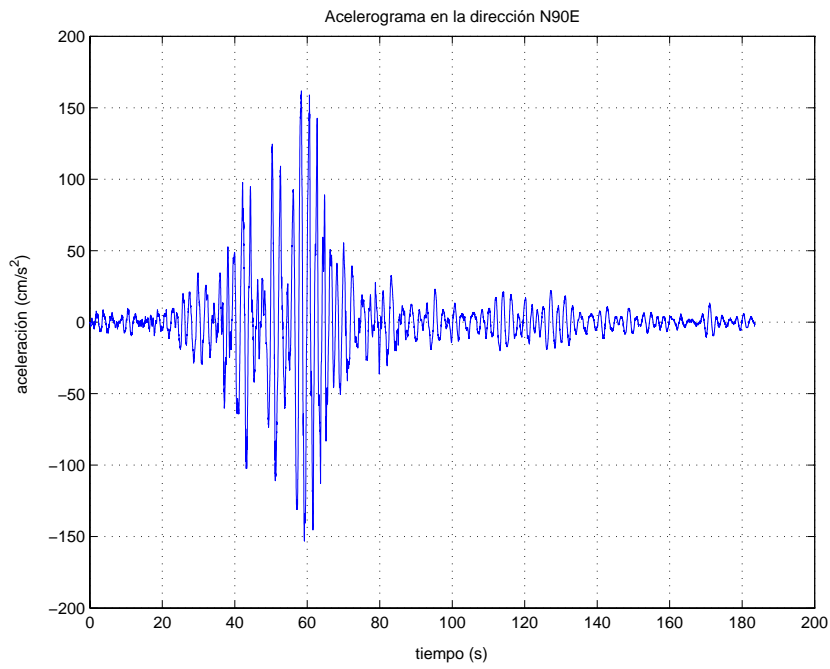
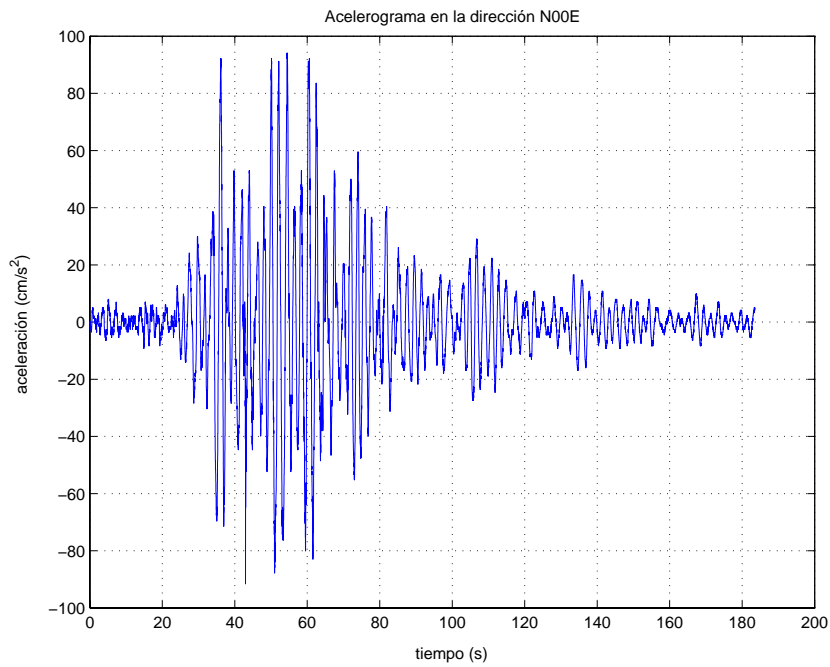
*reducida*, tomando en cuenta la Hipótesis 4.1, la dimensiones de las matrices pertenecen a  $\mathcal{R}^{3n_r \times 3n_r}$ , donde  $n_r$  es el número de pisos en los cuales se tiene instrumentos.

La excitación bajo la cual está sujeto este modelo, es el sismo registrado en la ciudad de México el 19 de septiembre de 1985. Las Figs. 4.2 y 4.3 muestran los acelerogramas para las direcciones *N90E* y *N00E* del sismo mencionado. Los registros se tomaron de la estación de SCT<sup>2</sup>.

Al aplicar el sismo de SCT al modelo, y al resolver las Ecs. (3.5)-(3.6), se obtienen los parámetros estimados, así como la señal del error normalizado de estimación.

La Figs. 4.4 y 4.5, muestran la norma del error de estimación, para ambos casos: instrumentación *completa* e instrumentación *reducida*. Se observa que para el primer caso, el error tiende a cero; como se demostró en el capítulo 3, logrando que la rapidez de convergencia de salida sea alta, en este caso de la aceleración absoluta de cada GDL. Esto nos muestra que el desempeño del algoritmo (3.5)-(3.6) es muy bueno. La Fig. 4.6 muestra el comportamiento de las aceleraciones estimadas, en ella se observa que la aceleración estimada con mediciones en los seis niveles converge rápidamente al valor real. Así mismo, la aceleración estimada con sólo mediciones en tres niveles también converge rápidamente a la señal real.

<sup>2</sup>Secretaría de Comunicaciones y Transportes.

Figura 4.2: Aceleración en la dirección  $X$  (N90E), SCTFigura 4.3: Aceleración en la dirección  $Y$  (N00E), SCT

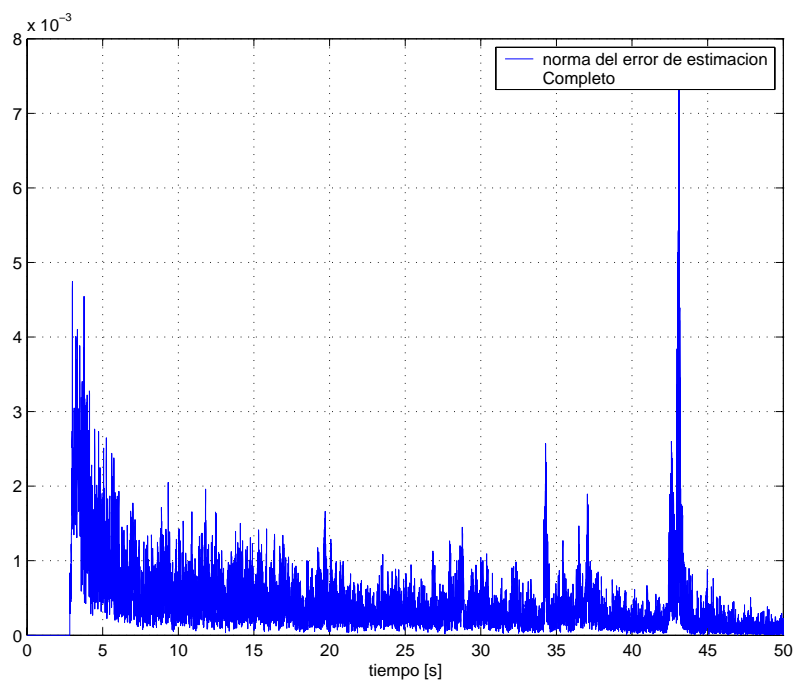


Figura 4.4: Señal de error con mediciones completas

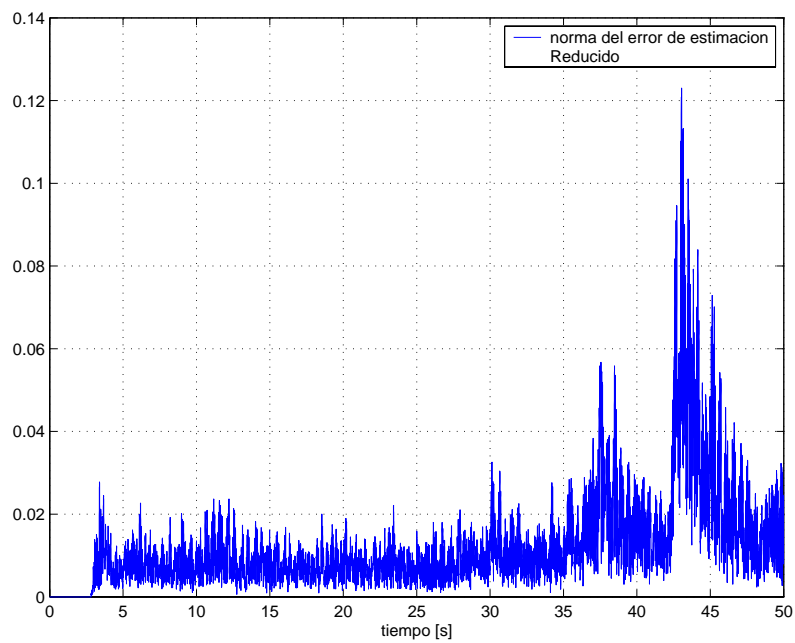


Figura 4.5: Señal de error con mediciones parciales

En la Fig. 4.7 se observa un acercamiento al comportamiento de la aceleración en el eje  $X$  durante los primeros segundos de la estimación. Nótese que las señales estimadas siguen en un corto periodo de tiempo a la señal medida<sup>3</sup>.

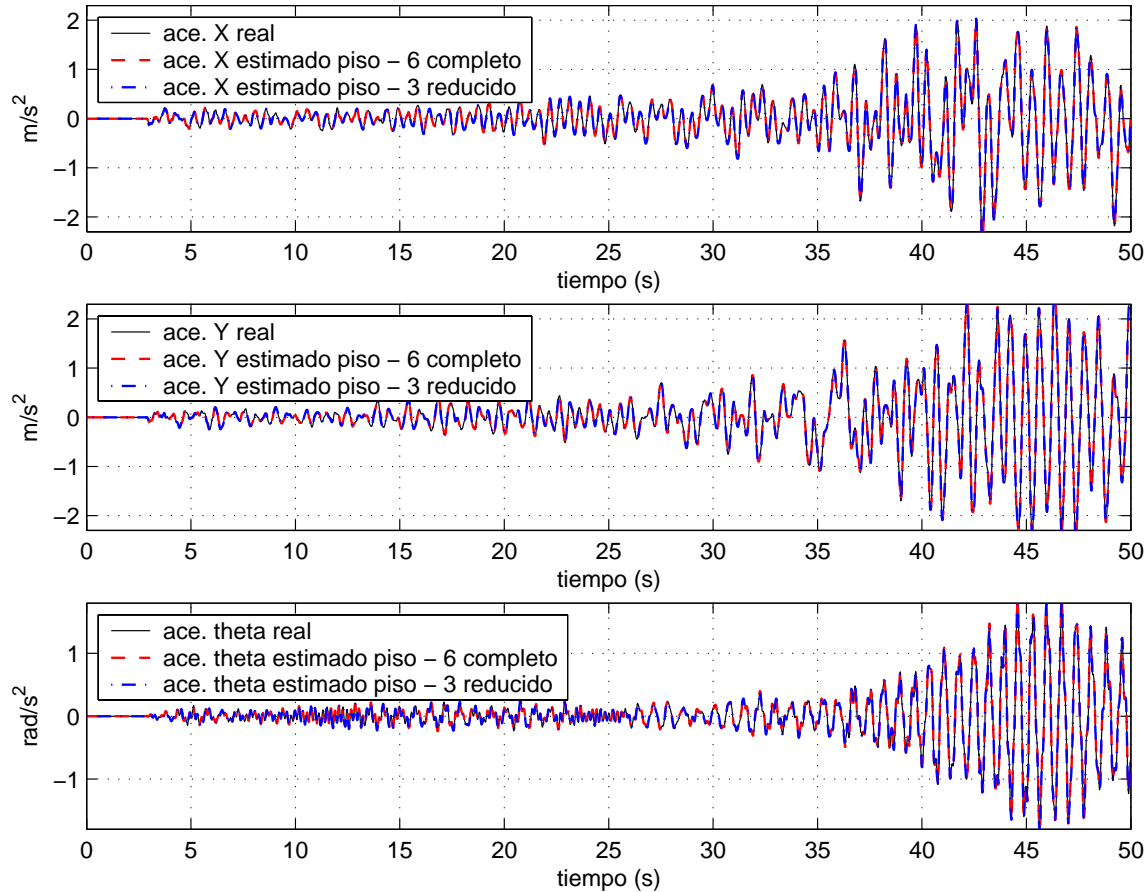


Figura 4.6: Aceleraciones estimadas con mediciones *completas* y mediciones *reducidas*

La Fig. 4.6 confirma lo que indican las Figs. 4.4 y 4.5: La norma del error de salida tiende a cero. Sin embargo, a pesar que el error de salida es pequeño, la convergencia de los parámetros es lenta comparada con la convergencia del error de salida. Además, los elementos de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$  que deberían tener un valor de cero de acuerdo al modelo matemático, Ec. (2.9), en el proceso de identificación paramétrica comienzan a tomar valores no nulos. Ejemplo de este comportamiento se observa en las Figs. 4.8 y 4.9, donde

<sup>3</sup>Para conocer el comportamiento de las aceleraciones del primer al sexto piso, tanto para mediciones *completas* como mediciones *reducidas*, consúltese el apéndice C.

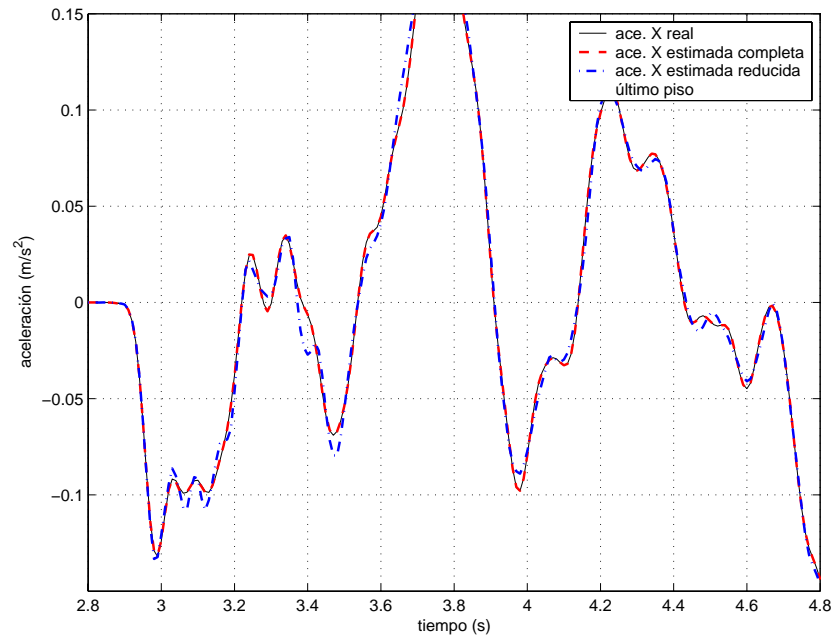


Figura 4.7: Detalle de la estimación de salida

se muestra la convergencia del elemento  $(8, 14)$  de la matriz  $M^{-1}K$ , y el elemento  $(2, 3)$  de la matriz  $M^{-1}C$  del modelo reconstruido con instrumentación *completa*, respectivamente. Los valores de los parámetros estimados tienden al valor real, no obstante, el tiempo de convergencia es muy grande comparado con el tiempo de convergencia de valor de salida.

Para el caso de instrumentación *reducida*, la lenta convergencia de los parámetros también se presenta, pero el valor de éstos se ajusta a un modelo *reducido* que representa a un edificio de tres niveles. Las Figs. 4.10 y 4.11 muestran la convergencia del elemento  $(1, 2)$  de la matriz  $M^{-1}K$  y  $(8, 4)$  de la matriz  $M^{-1}C$ , respectivamente. En este caso, además que la convergencia es lenta, el valor final del elemento sigue cambiando con respecto del tiempo. Sin embargo, a pesar de estas variaciones, el valor de salida de este modelo *reducido* es muy cercano al valor real, como se observa la aceleración de salida en las Figs. 4.6 y 4.7.

Tanto en el caso de instrumentación *completa*, como en este último, sólo se muestra el comportamiento de dos parámetros para cada uno de ellos. Un comportamiento similar se obtiene para los 648 parámetros del modelo reconstruido para seis niveles, y para los 162 elementos de las matrices representativas de un modelo de tres pisos.

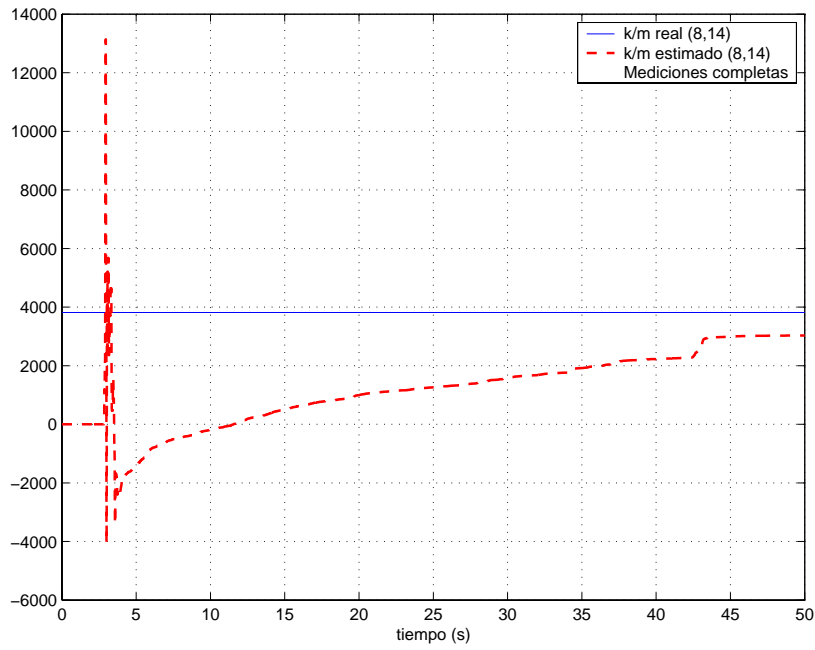


Figura 4.8: Estimación del elemento (8,14) de la matriz  $M^{-1}K$  completa

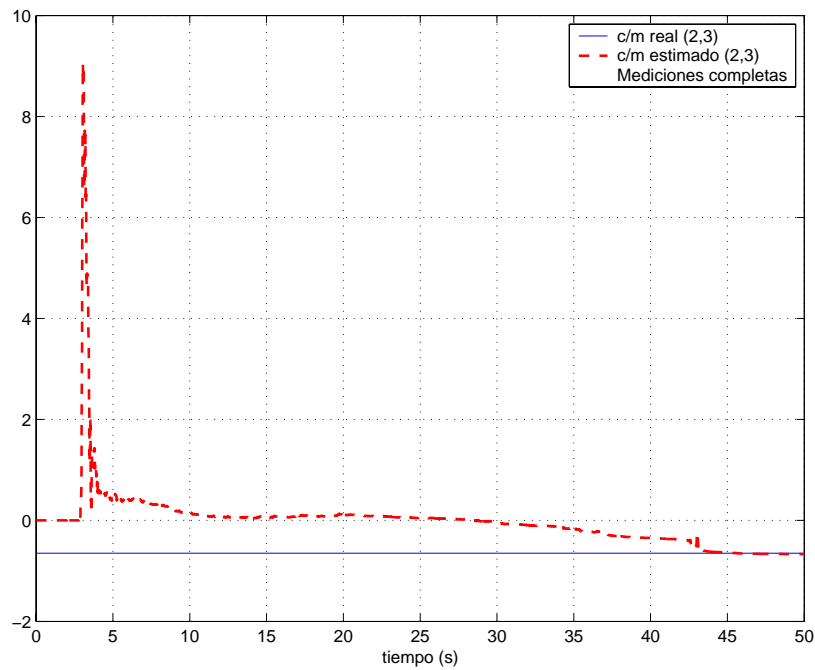


Figura 4.9: Estimación del elemento (2,3) de la matriz  $M^{-1}C$  completa

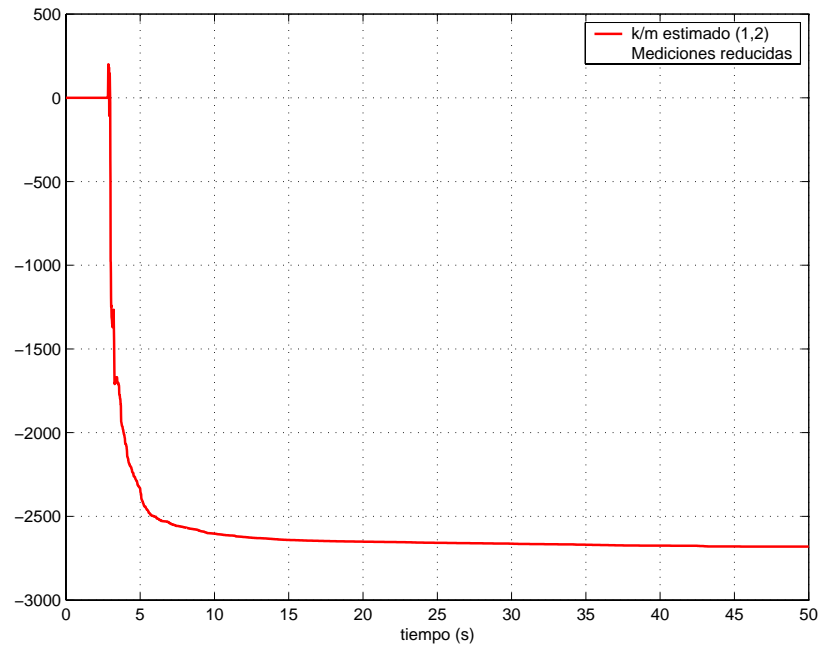


Figura 4.10: Estimación del elemento (1, 2) de la matriz  $M^{-1}K$  reducida

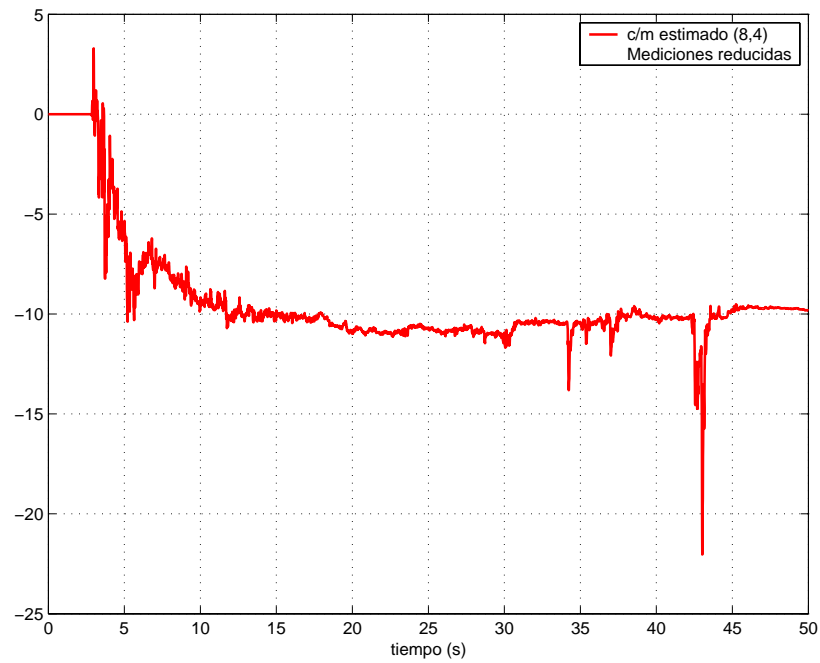


Figura 4.11: Estimación del elemento (8, 4) de la matriz  $M^{-1}C$  reducida



Para que los parámetros logren llegar al valor real, es necesario que exista excitación persistente con una suficiente riqueza frecuencial que, desafortunadamente, no se puede garantizar para una excitación sísmica. Si no existen suficientes frecuencias en la excitación, entonces difícilmente los parámetros convergerán a su valor real.

Tanto para el caso de instrumentación *completa* como instrumentación *reducida*, el número de GDL de cada modelo reconstruido es igual al número de frecuencias modales del mismo. Para el primer caso se tienen 18 frecuencias modales y 9 para el segundo. La Fig. 4.12 sólo muestra las 9 primeras frecuencias reales, así como el mismo número de frecuencias estimadas con instrumentación *completa*. Se observa que la convergencia hacia el valor real de la frecuencia se obtiene en pocos segundos.

El hecho de que las frecuencias converjan rápidamente mas no así los parámetros, indica, como se ha mencionado, que éstos toman valores tales que logran que el error de salida sea mínimo, como lo muestran las Figs. 4.4 y 4.5. Sin importar que los elementos nulos de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$  comiencen a tomar valores diferentes de cero, la matriz reconstruida devuelve las frecuencias fundamentales reales del sistema en un periodo pequeño de tiempo, para ambos casos: instrumentación *completa* e instrumentación *reducida*.

La Fig. 4.13 muestra con mayor detalle que la convergencia de las frecuencias modales se logra en 2 segundos, aproximadamente, a partir de que comienza el proceso de identificación paramétrica. Para lograr una convergencia en este tiempo, es necesario tener condiciones iniciales adecuadas de la matriz de covariancia  $P$  de la Ec. (3.5). Saber cuáles son las condiciones iniciales adecuadas a priori el conocimiento de los parámetros es difícil, se requiere de un conocimiento previo del valor aproximado de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$  del modelo de la estructura.

Para el caso de instrumentación *completa*, se logra recuperar la mayoría de las frecuencias reales, no así para el caso de instrumentación *reducida*, en el cual sólo se recuperan las primeras frecuencias de la estructura, en este caso cinco. La Fig. 4.14 expone cómo es la convergencia de la estimación de las frecuencias mediante un modelo *reducido* del edificio. Nótese que esta convergencia se obtiene en 2 segundos aproximadamente, Fig 4.15, aunque los parámetros no tienen una convergencia adecuada, como se muestra en los ejemplos de las Figs. 4.10 y 4.11.

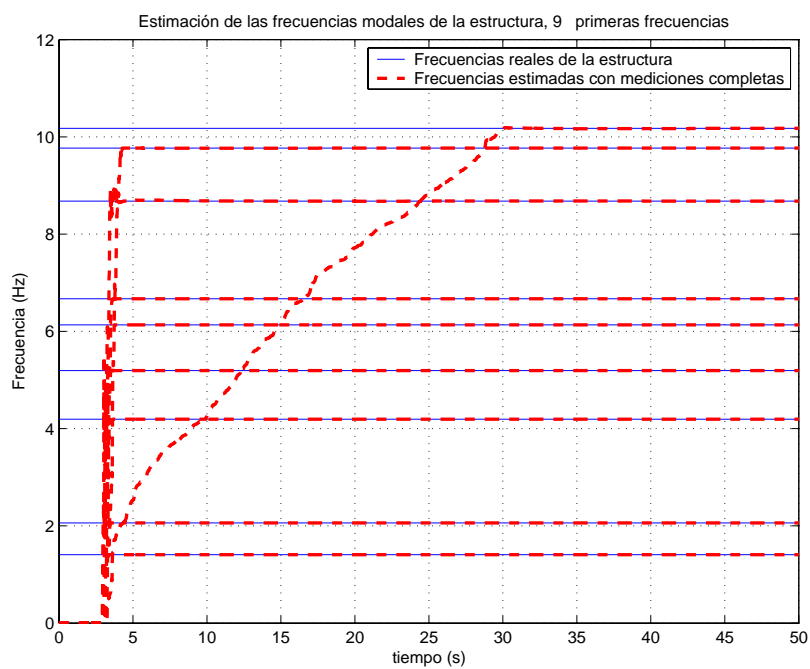


Figura 4.12: Estimación de las frecuencias modales *completas* de la estructura

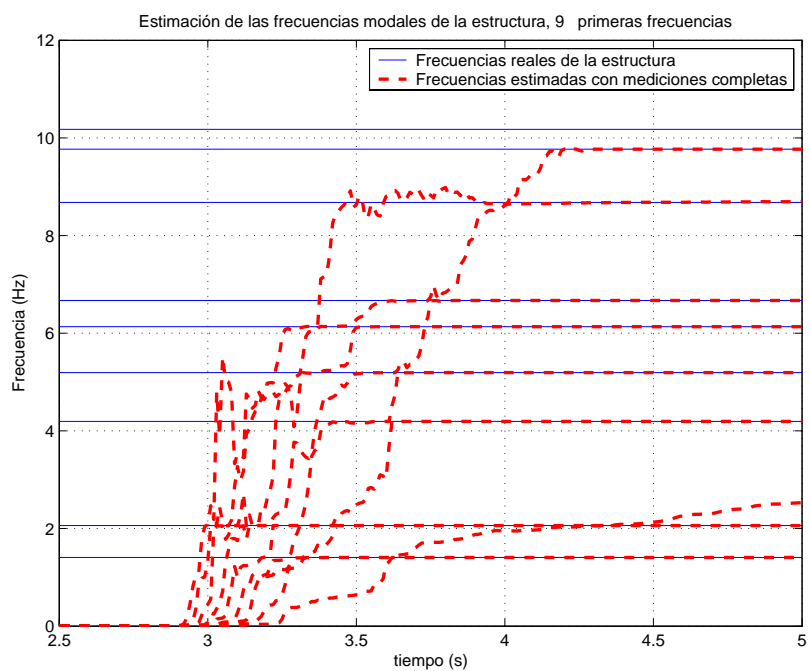


Figura 4.13: Detalle de la estimación de las frecuencias modales *completas* de la estructura

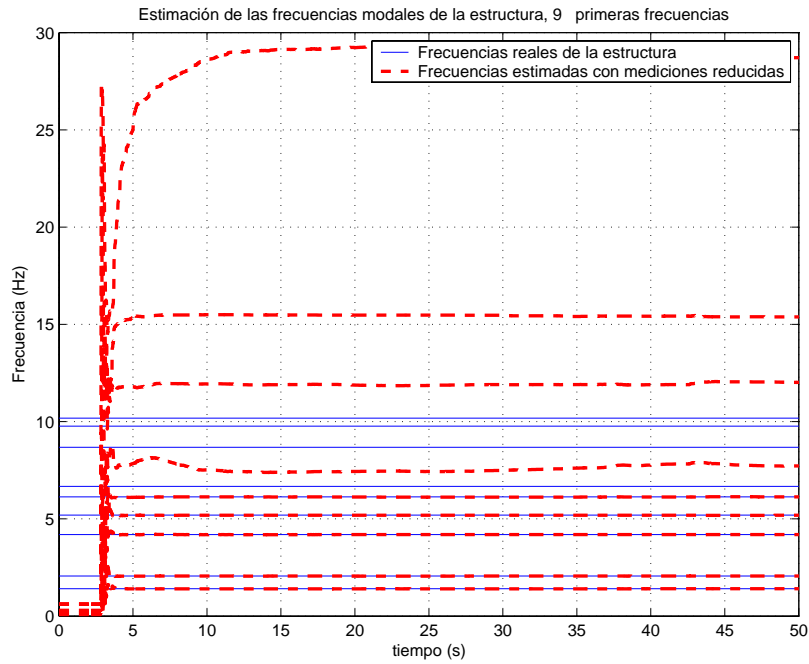


Figura 4.14: Estimación de las frecuencias modales *reducidas* de la estructura

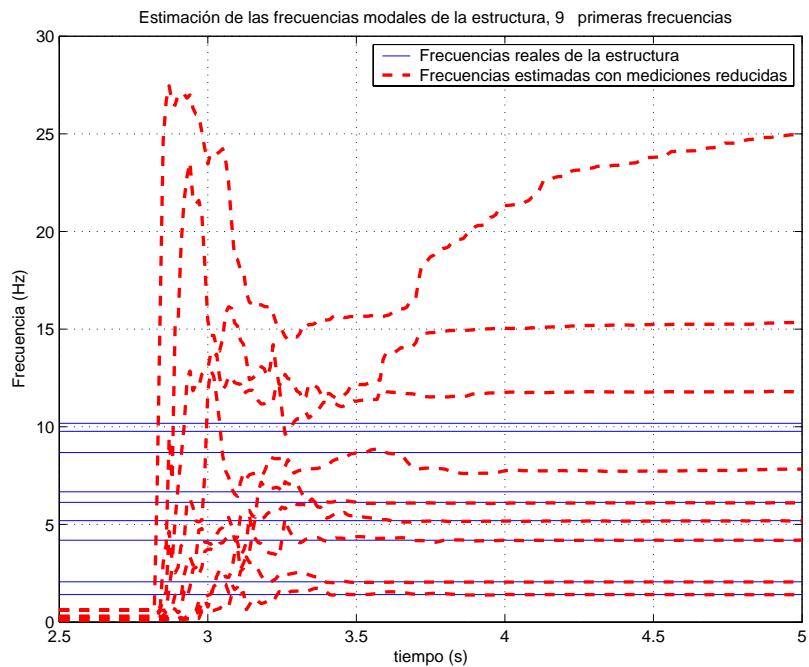


Figura 4.15: Detalle de la estimación de las frecuencias modales *reducidas* de la estructura

Es importante mencionar, que los parámetros para ambos casos: instrumentación *completa* e instrumentación *reducida*, no son los mismos. En el caso reducido, los parámetros obtenidos mediante identificación representan la condensación de los pisos involucrados. La convergencia de los parámetros para el primer caso es más lenta debido a que el número de parámetros del modelo es mayor que en el segundo caso, 648 y 162, respectivamente. No obstante lo anterior, ambos modelos reconstruidos devuelven la misma dinámica del sistema real: aceleración real de cada GDL de cada piso y frecuencias fundamentales.

La tabla 4.1 muestra las frecuencias modales que se recuperan con instrumentación *completa* y con instrumentación *reducida* después de 50 segundos de excitación. Nótese que las frecuencias *completas* alcanzan casi todas las frecuencias reales, con excepción de las tres últimas frecuencias superiores. El hecho de que no alcance éstas últimas es debido a que no existe excitación persistente suficiente. Con instrumentación *reducida* se recuperan las primeras cinco frecuencias reales, no así las frecuencias superiores de la estructura.

Cuadro 4.1: Frecuencias reales y estimadas [ $Hz$ ]

real	estimado	
	<i>completo</i>	<i>reducido</i>
1,406	1,406	1,406
2,060	2,060	2,060
4,194	4,194	4,193
5,192	5,192	5,187
6,133	6,133	6,107
6,670	6,670	7,414
8,680	8,680	11,88
9,768	9,768	15,35
10,18	10,18	29,27
11,49	11,51	
12,83	12,83	
15,08	15,08	
15,57	15,57	
16,77	16,75	
24,63	24,63	
32,73	27,86	
38,41	32,70	
42,57	38,07	

Estos resultados muestran que aun sin disponer de instrumentos en todos los pisos del

edificio, es posible recuperar las primeras frecuencias modales con instrumentación en sólo algunos de ellos. Además, esta recuperación de frecuencias se logra de forma rápida, aunque los parámetros no convergan completamente a su valor real, Figs. 4.14 y 4.15.

Para los ingenieros civiles estas primeras frecuencias de oscilación son muy importantes para el diseño de estructuras sujetas a sismos (Chopra, 1995), pues las frecuencias de oscilación de éstos, así como del terreno, generalmente, son bajas. Las altas frecuencias casi no repercuten en el diseño.

Los resultados de simulación indican que el error de estimación para instrumentación *completa* tiende a cero, como se demostró en el capítulo 3, en el caso de instrumentación *reducida* el error disminuye en menor proporción que en el primer caso. No obstante, aun para este caso es posible recuperar los primeros modos de vibración de la estructura, indicando que no es necesario instrumentar todos los pisos de un edificio para obtener esta información.

## 4.2. Identificación paramétrica con datos reales

En esta sección se presentan los resultados de la aplicación del algoritmo (3.5)-(3.6) a las mediciones de dos edificios de varios pisos en los cuales sólo se tienen mediciones completas en algunos de ellos, ambos están localizados en Los Angeles, Cal, EUA. Las mediciones corresponden al sismo de Northridge ocurrido en enero de 1994 (Naeim, 1994).

### 4.2.1. Edificio de oficinas de 54 pisos

El primer caso es un edificio de oficinas de 54 pisos, Fig 4.16, el cual tiene instrumentado cuatro pisos y en cada uno de ellos se cuenta con dos mediciones paralelas y una más en la dirección perpendicular, además de dos mediciones perpendiculares entre si en la base; configuración requerida para que el algoritmo de identificación paramétrica funcione<sup>4</sup>, como se mencionó en el capítulo 2, Fig. 2.8.

La Fig. 4.17 muestra un esquema en planta de los cuatro pisos instrumentados: 20, 36, 48, 54. Este edificio se puede representar como un edificio de 4 pisos, de tal forma que los

---

<sup>4</sup>Ver el apéndice D para conocer las condiciones iniciales usadas para la solución del algoritmo (3.5)-(3.6) y cuyos resultados son los que se muestran.

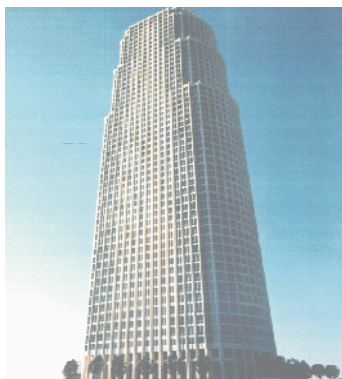


Figura 4.16: Edificio de oficinas de 54 pisos

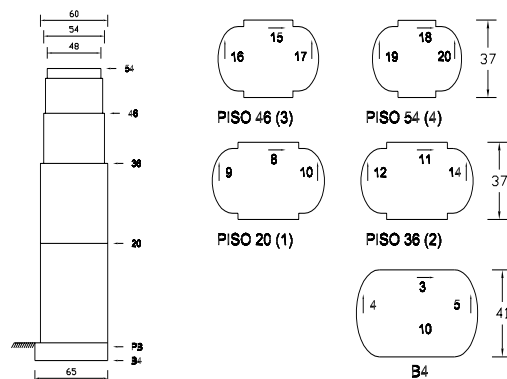


Figura 4.17: Vista en planta del edificio (dimensiones en m)

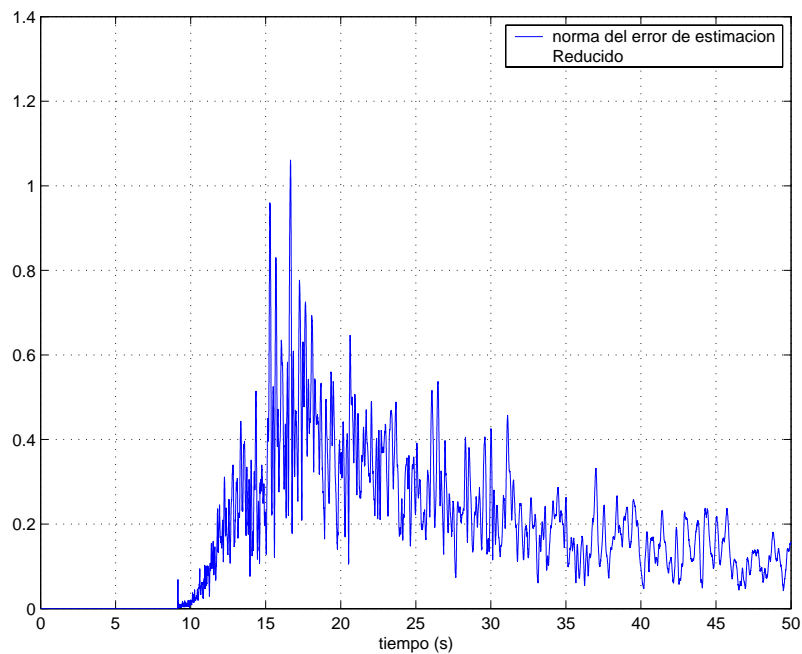


Figura 4.18: Norma del error de estimación del edificio de 54 pisos

pisos comprendidos entre el piso 1 y el piso 20 se consideran como un solo primer piso *reducido*; lo mismo ocurre para los tres pisos *reducidos* restantes.

Al aplicar el algoritmo de identificación paramétrica, Ecs. (3.5)-(3.6), a los datos de mediciones de aceleración (Naeim, 1994) de este edificio, se obtienen los siguientes resultados.

En la Fig. 4.18 se muestra la norma del error de estimación,  $\|\varepsilon\|_2$ , que es relativamente

pequeña, y que disminuye conforme transcurre el tiempo, que es lo que demuestra el teorema 3.1. Esto se corrobora en la Fig. 4.19 donde se observan que las aceleraciones estimadas y las aceleraciones reales en las direcciones  $X$ ,  $Y$  y  $\theta$ , donde las aceleraciones estimadas alcanzan valores muy parecidos a las aceleraciones reales en 1 segundo, aproximadamente. Esto muestra que el algoritmo es eficiente para disminuir el error paramétrico, Ec. (3.7), aun en edificios donde no se cuente con todos los pisos instrumentados, como lo es este edificio de 54 pisos.

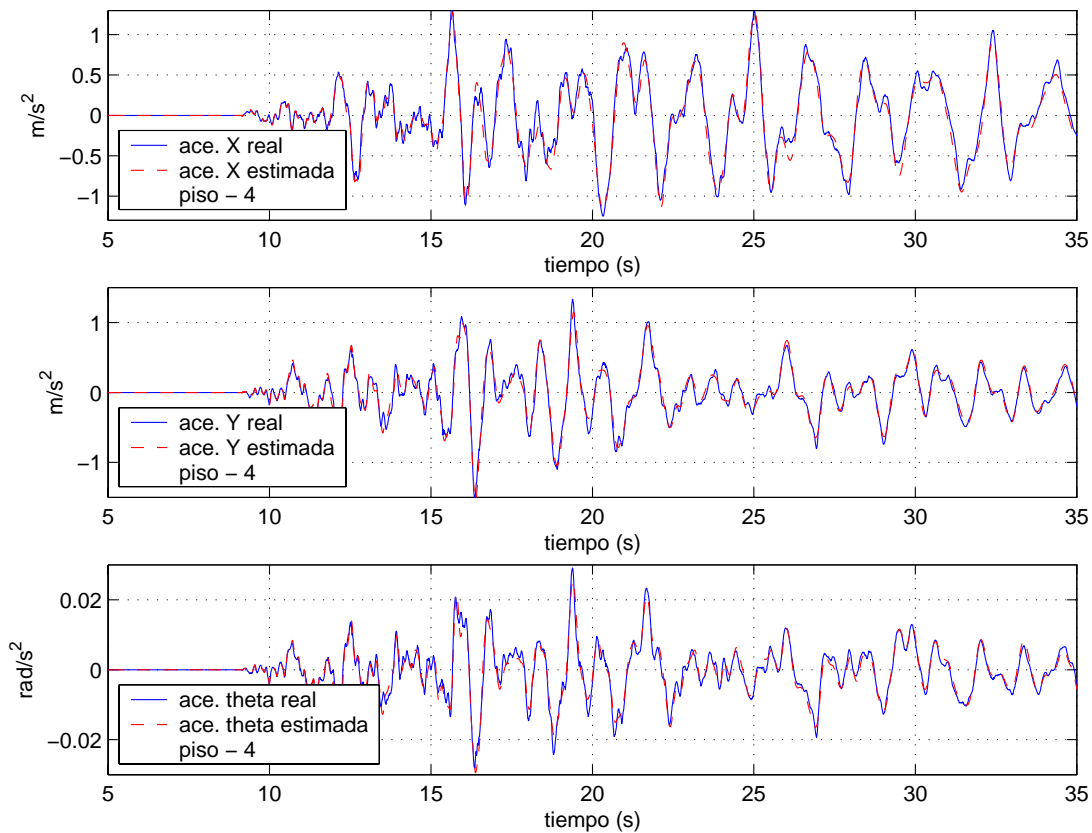
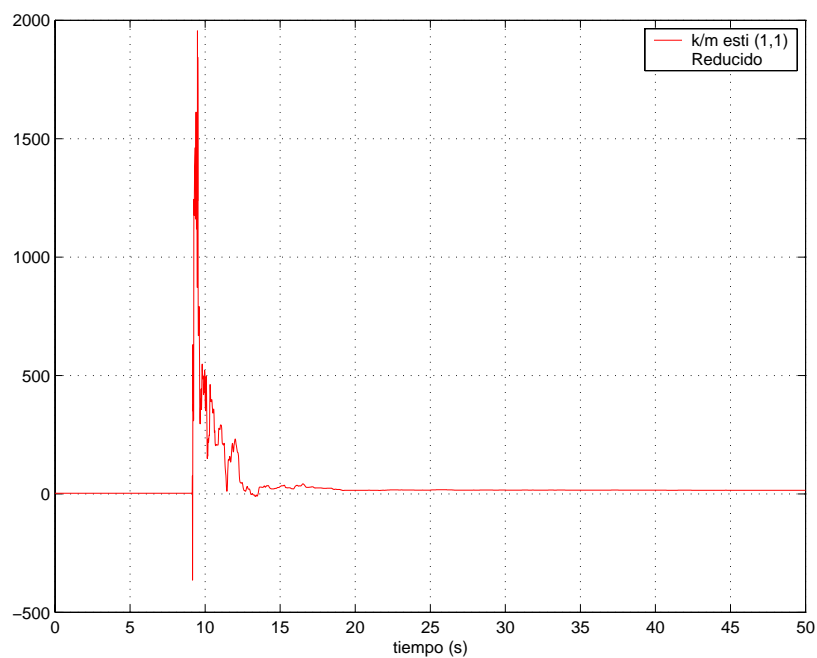
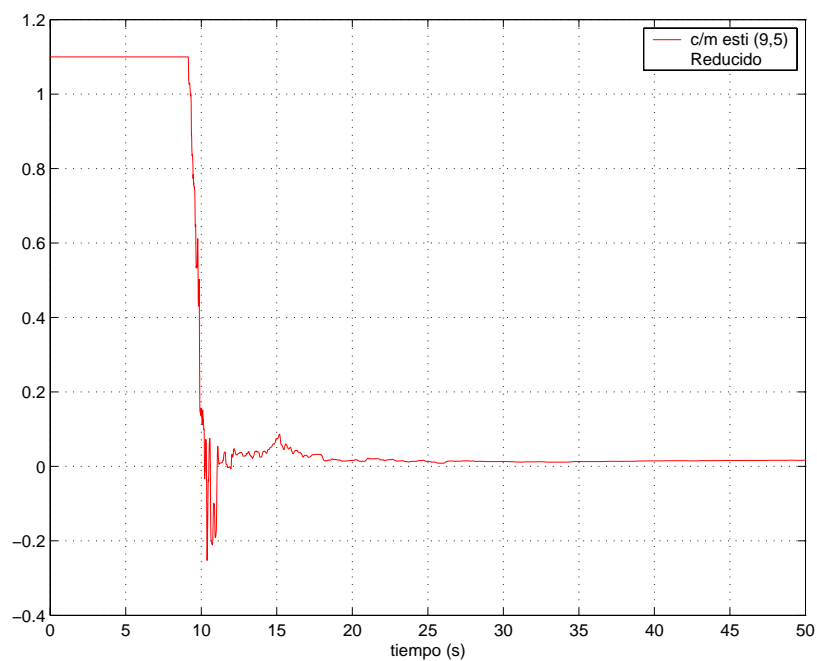


Figura 4.19: Aceleraciones reales-estimadas en el último piso del edificio de 54 pisos

La convergencia de parámetros se da en pocos segundos, como se aprecia en las Figs. 4.20 y 4.21, que muestran la evolución en el tiempo del elemento (1,1) de la matriz  $M^{-1}K$  y del elemento (9,5) de la matriz  $M^{-1}C$ , respectivamente. En ambos casos se observa que la convergencia paramétrica ocurre en 10 segundos, aproximadamente. Es importante recalcar que si se tratase de reconstruir el modelo *completo* de los 54 pisos del edificio, además de

Figura 4.20: Evolución del elemento  $M^{-1}K(1,1)$ Figura 4.21: Evolución del elemento  $M^{-1}C(9,5)$



requerir muchas más mediciones, se tendrían matrices de rigidez, amortiguamiento y masa de una dimensión de  $162 \times 162$ . Cuando se reduce el modelo a cuatro pisos, se construye un modelo cuyas matrices son de orden  $12 \times 12$ . El modelo *reducido* es más simple pero es suficiente para conocer las frecuencias dominantes en el comportamiento dinámico del edificio. En ingeniería civil se usan métodos como los de condensación estática y dinámica (Paz, 1997), cuyo propósito también es obtener modelos de orden reducido. Además de la simplicidad ganada en el proceso de identificación, es claro que un modelo *reducido* también es conveniente para propósitos de control de vibraciones en tiempo real.

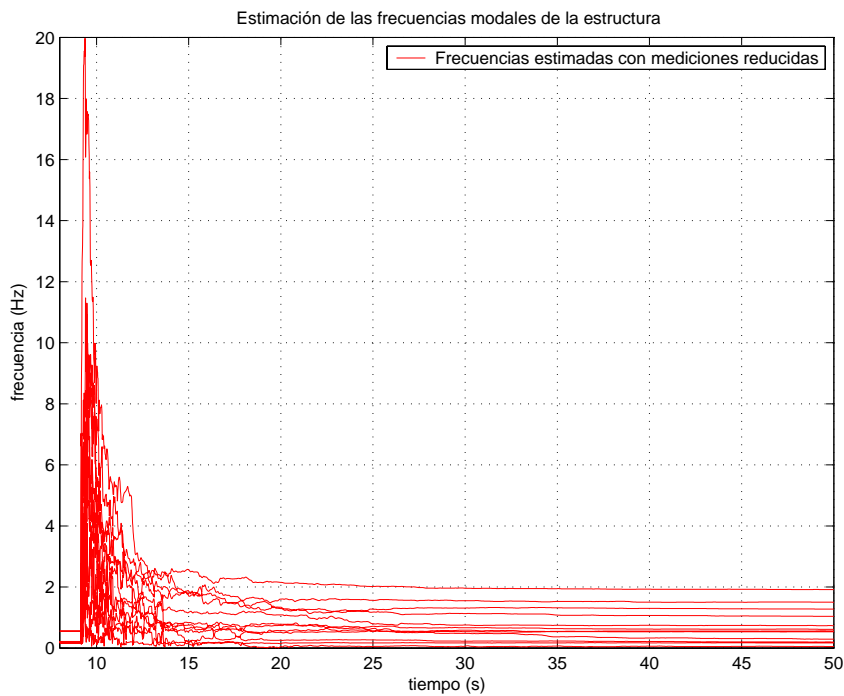


Figura 4.22: Estimación de las frecuencias modales *reducidas* del edificio de 54 pisos

El hecho que la convergencia paramétrica sea relativamente lenta, no es impedimento para que exista convergencia de las frecuencias modales. En la Fig. 4.22 se observa la convergencia de las frecuencias estimadas, obteniéndose éstas a través de los parámetros estimados. La tabla 4.2 muestra los valores de las frecuencias estimadas en el segundo 50, cuyos valores no cambiaron sustancialmente a partir del segundo 25.

Cuadro 4.2: Frecuencias estimadas para edificio de 54 pisos [ $Hz$ ]

0,052
0,170
0,199
0,290
0,533
0,559
0,614
0,734
1,040
1,277
1,500
1,915

#### 4.2.2. Edificio de un hospital universitario de 7 pisos

Para el caso del hospital universitario que es de 7 niveles, Fig. 4.23, se le aproxima con un modelo *reducido* de 3 pisos, puesto que de la Fig. 4.24 se observa que la distribución de los acelerómetros permite este nivel de aproximación. Además, en esta figura se indica entre paréntesis el número de pisos equivalente en el modelo *reducido*. A pesar de que este edificio tiene una alta asimetría en planta, el algoritmo de identificación funciona con un desempeño aceptable<sup>5</sup>. La convergencia paramétrica se alcanza en 5 segundos, aproximadamente, y es capaz de reproducir las aceleraciones medidas.

La Fig. 4.25 muestra la evolución en el tiempo de la norma del error paramétrico, Ec. (3.7), que disminuye a través del tiempo, demostrando que el algoritmo de identificación paramétrica usado es eficiente aun para edificios en los cuales no se tienen mediciones en todos y cada uno de sus niveles.

En la Fig. 4.26 se observan las aceleraciones en las coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $\theta$  para el último piso *reducido*, que corresponde al séptimo piso del edificio. Nótese que la aceleración estimada mediante el algoritmo (3.5)-(3.6) se aproxima mucho a la aceleración real desde el momento en que se activa el proceso de identificación paramétrica, a los 7,5 segundos, aproximadamente.

---

<sup>5</sup>Las condiciones iniciales del algoritmo cuando se aplica a los datos de este edificio, se pueden consultar en el apéndice D. Los resultados mostrados surgen a partir de aquéllas.



Figura 4.23: Hospital Universitario

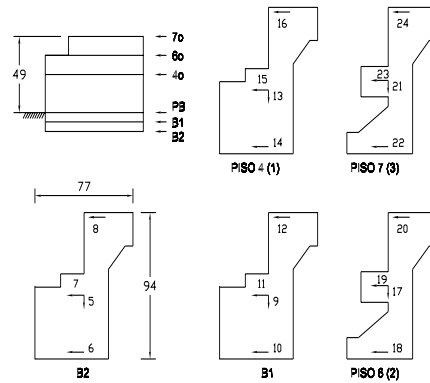


Figura 4.24: Esquema del Hospital (dimensiones en m)

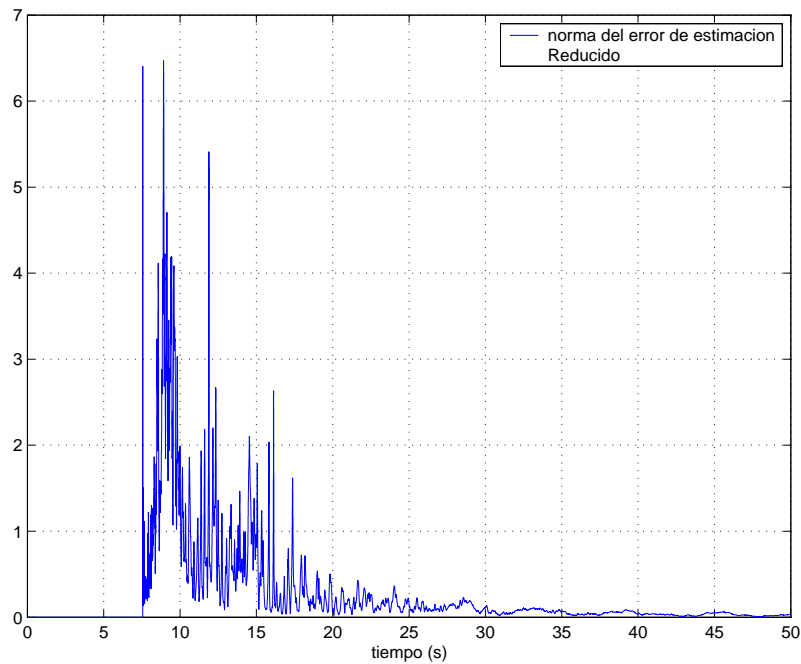


Figura 4.25: Norma del error de estimación paramétrica del hospital

La convergencia paramétrica es igualmente aceptable, como lo muestran las Figs. 4.27 y 4.28, donde se observa la evolución en el tiempo del elemento (4,6) de la matriz  $M^{-1}K$  y del elemento (4,6) de la matriz  $M^{-1}C$ , respectivamente. El hecho de que la planta sea asimétrica no es impedimento para reconstruir un modelo en 3D basado en un modelo de marco plano y bajo la hipótesis de diafragma de piso rígido.

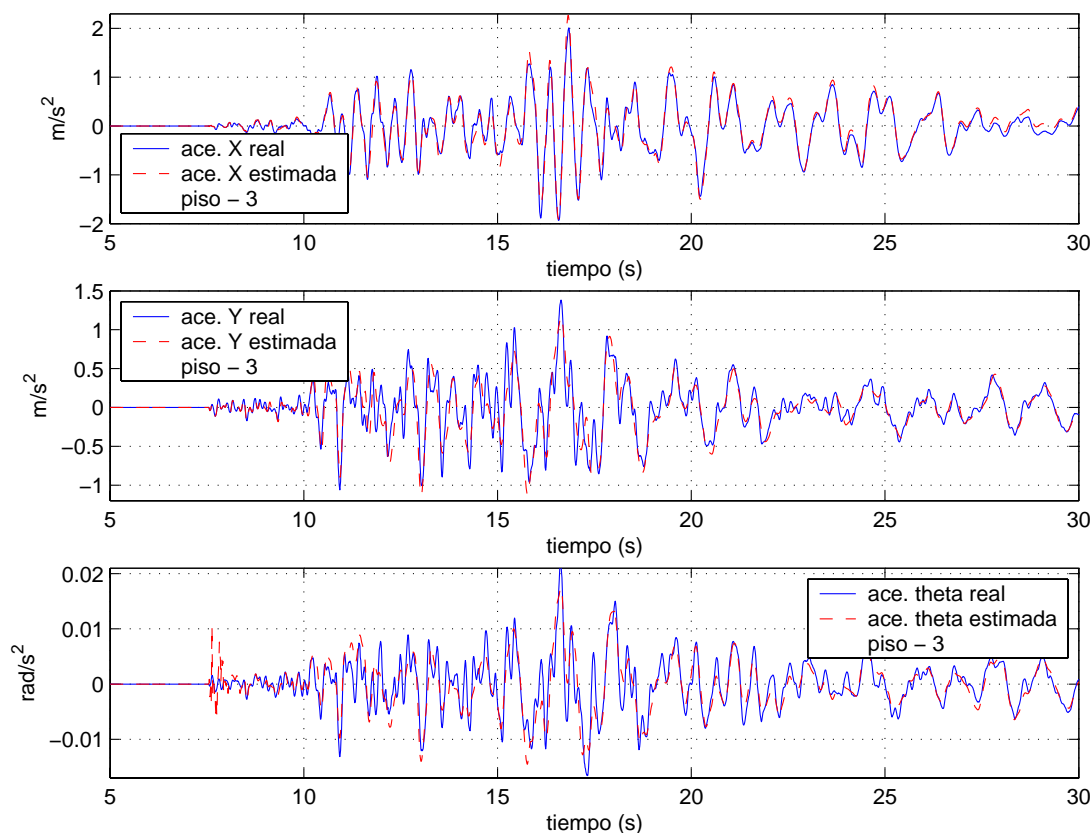


Figura 4.26: Aceleraciones reales-estimadas en el último piso del hospital

Al igual que el caso anterior, la convergencia de las frecuencias modales se obtiene de forma rápida, como lo muestra la Fig. 4.29, notándose que los valores de dichas frecuencias no cambian drásticamente después del segundo 17. Este hecho muestra que a pesar de que los parámetros aun no converjan a un determinado valor, las frecuencias modales sí convergen, lo cual indica que los parámetros se ajustan para reconstruir un modelo matemático que determina la salida del sistema, en este caso las aceleraciones de cada uno de los pisos instrumentados, bajo una cierta excitación, movimiento sísmico. La tabla 4.3 indica los valores de las frecuencias modales en el segundo 50.

La diferencia notoria entre ambos ejemplos, es que debido a la asimetría de las plantas del hospital, éste tiende a tener una rotación mayor en la planta que la rotación que sufre una planta simétrica, como la del edificio de 54 pisos. Esta diferencia se hace notar en la excitación que se tiene en el sistema en la coordenada  $\theta$ , pues entre mayor sea ésta en

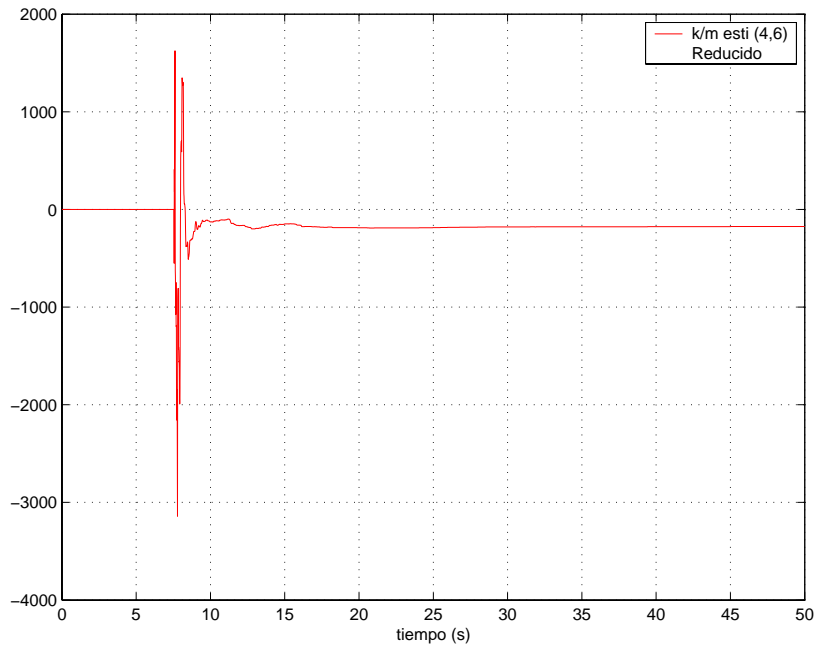


Figura 4.27: Evolución del elemento  $M^{-1}K(4,6)$

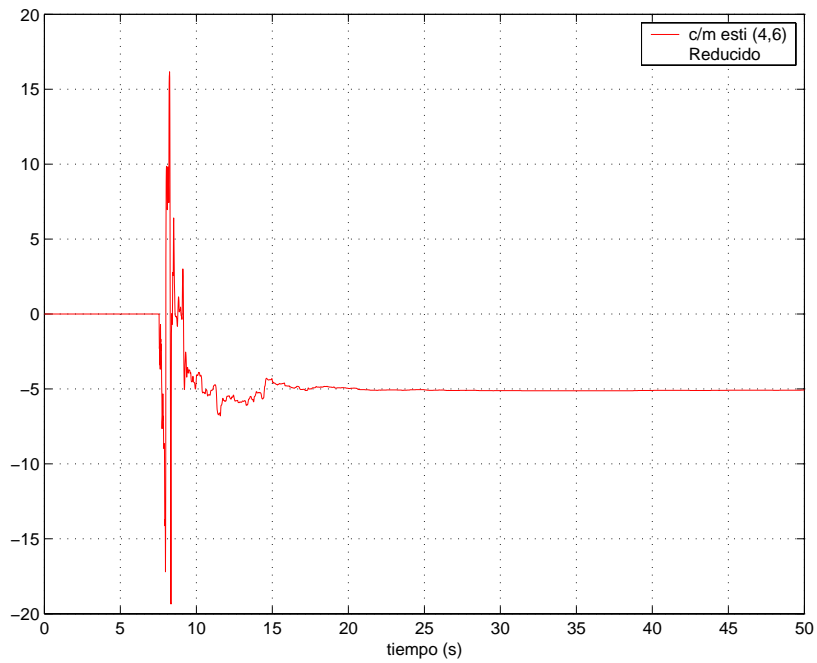


Figura 4.28: Evolución del elemento  $M^{-1}C(4,6)$

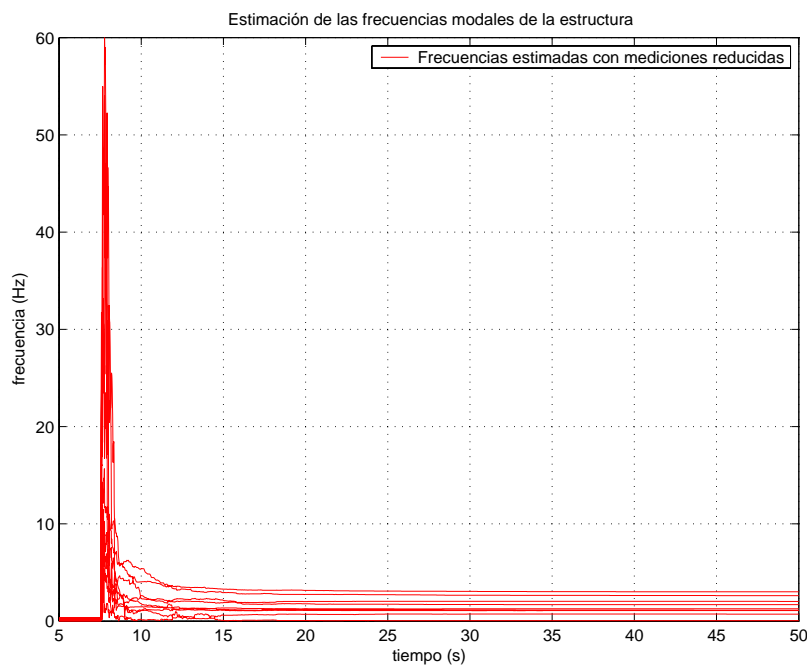


Figura 4.29: Estimación de las frecuencias modales *reducidas* del Hospital universitario

Cuadro 4.3: Frecuencias estimadas para el Hospital universitario [ $Hz$ ]

---

0,046  
0,724  
1,085  
1,116  
1,273  
1,700  
2,030  
2,619  
3,011

---

posición y velocidad, se podrá identificar los parámetros correspondientes a esta coordenada con mayor precisión.

El desempeño del algoritmo de identificación paramétrica con datos reales ha sido muy bueno, pues es capaz de reconstruir las aceleraciones medidas, al mismo tiempo que se logra la convergencia para todos los parámetros del modelo en 3D de un edificio. Esto ocurre a pesar de que los datos de los edificios han sido sujetos a procesos de filtrado e interpolación.

El método no requiere una instrumentación extensiva de los edificios, pues aun cuando no se cuenta con la información de todos los pisos del edificio, es posible reconstruir un modelo *reducido* que permite conocer las principales componentes de la respuesta dinámica del edificio, tal como los primeros modos de vibración de la estructura. Además, permite reconstruir modelos matemáticos de edificios nuevos o ya construidos que pudieron haber sufrido modificaciones en sus parámetros estructurales por daño o adecuaciones.

La estructura del método lo hace particularmente atractivo para su uso en aplicaciones de identificación y control en tiempo real, por ejemplo en esquemas de control activo y semiactivo.

## Capítulo 5

# Observador adaptable

En el presente capítulo se demuestra la viabilidad de aplicar un esquema adaptable para recuperar velocidades y desplazamientos relativos de los pisos con respecto a la base, así como las relaciones de rigidez/masa y amortiguamiento/masa, que en este caso son los parámetros del sistema. Se hace uso de una variación del algoritmo de identificación paramétrica usado en el capítulo 3. Para resolver este algoritmo, son necesarias las señales de velocidad y desplazamiento de cada uno de los GDL de la estructura, que generalmente no se tienen disponibles en un sistema real, por lo que se hace necesario un esquema que permita conocerlas a partir de mediciones de aceleración.

### 5.1. Observador adaptable

En el capítulo 3 se demostró que el algoritmo representado por las Ecs. (3.5)-(3.6) permite obtener convergencia paramétrica, y que, además, requiere menor procesamiento de datos para su solución, debido a la reducción del tamaño de los elementos matriciales involucrados. Sin embargo, el algoritmo requiere conocer los desplazamientos y velocidades relativas de cada uno de los GDL de los pisos del edificio de estudio, es decir, cómo son los desplazamientos y velocidades de cada piso con respecto a la base. En un edificio real, como se ha mencionado, es raro que se disponga de mediciones directas de estas dos variables, usualmente sólo se cuenta con mediciones de aceleración longitudinales. Además, las aceleraciones medidas son absolutas; los acelerómetros colocados en cada uno de los pisos



registran la aceleración del piso con respecto a la base más la aceleración de la base con respecto a un sistema inercial, Fig. 2.6. En el capítulo 2 se demostró que son necesarias tres mediciones de aceleración por piso para obtener las aceleraciones de los tres GDL por cada nivel de la estructura y dos mediciones de aceleración en la base, colineales con los ejes del sistema de referencia. Aunado a ello se dedujeron las ecuaciones necesarias para obtener las mediciones relativas a partir de las absolutas.

Por lo anterior, no es posible utilizar las Ecs. (3.5)-(3.6). Para obtener los valores de los parámetros, es necesario conocer los valores de velocidad y desplazamiento relativos de cada GDL. En este sentido, se hace imperativo conocer de alguna forma estas dos variables. Un esquema capaz de realizar esta tarea es un *observador de estados*, sin embargo, para que éste funcione es necesario conocer los parámetros, que a su vez son desconocidos. Por otro lado, para conocer los parámetros se utiliza un esquema de *identificación paramétrica* que requiere el conocimiento de los estados para su buen funcionamiento, es decir, el conocimiento de velocidad y desplazamiento relativos de cada GDL.

Como se describe es necesario tener un esquema que sea capaz de estimar los parámetros a la vez que calcula los estados. Este esquema es un *observador adaptable*.

A continuación se propone un observador adaptable demostrándose la convergencia paramétrica y la convergencia de los estados.

## 5.2. Esquema adaptable

Sea el sistema (5.1), que representa a una edificio de  $n$  pisos y tres GDL por cada uno de ellos: dos desplazamientos ortogonales,  $X$  y  $Y$ , y una rotación,  $\theta$ , perpendicular al plano formado por los dos primeros. Nótese que este sistema es el mismo representado por la Ec. (2.9).

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M \ddot{U}_g, \quad (5.1)$$

donde las matrices  $K$ ,  $C$  y  $M$  están dadas por las Ecs. (2.6), (2.7) y (2.8), respectivamente, y además:

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$u_x, u_y, u_\theta, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_\theta, \ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_\theta \in \mathcal{R}^{n \times 1},$$

donde  $n$  es el número de pisos.  $U$ ,  $\dot{U}$  y  $\ddot{U}$  son desplazamientos, velocidades y aceleraciones relativas, respectivamente.  $\ddot{U}_g$  es el vector de aceleraciones que sufre el suelo, aplicada a cada uno de los pisos del edificio.

$$\ddot{U}_g = \begin{bmatrix} \ell_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times 1} & \ell_{n \times 1} \\ 0_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{gx} \\ \ddot{u}_{gy} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

donde  $\ell_{n \times 1}$  es un vector de *unos*, el elemento  $0_{n \times 1}$  es un vector de *ceros*, y ambos pertenecen a un espacio de números reales de dimensión  $n \times 1$ .  $\ddot{u}_{gx}$  es la aceleración del sismo en la dirección  $X$ , y  $\ddot{u}_{gy}$  es la aceleración del sismo en la dirección  $Y$ .

La Ec. (5.1), se premultiplica por  $M^{-1}$  quedando de la siguiente forma

$$\ddot{U} + M^{-1} C \dot{U} + M^{-1} K U = - \ddot{U}_g. \quad (5.2)$$

Si se define al vector de estados  $\Psi$ , al vector de entradas  $\Omega$ , y al vector de salidas  $\Xi$  como

$$\Psi = \begin{bmatrix} U \\ \dot{U} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n \times 1},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} - \ddot{U}_g \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \ddot{U} + \ddot{U}_g \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

donde  $\Psi$  está formado por los desplazamientos y velocidades relativos de cada uno de los GDL,  $\Omega$  es la excitación sísmica, y  $\Xi$  es la aceleración absoluta de cada uno de los GDL.

Entonces el sistema (5.1) en variables de estado queda representado de la siguiente forma

$$\dot{\Psi} = \begin{bmatrix} O & I \\ -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \Psi + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \Omega,$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \Psi,$$

que se pueden representar como

$$\dot{\Psi} = A \Psi + B \Omega, \quad (5.3)$$

$$\Xi = E \Psi. \quad (5.4)$$

Ahora, sea el observador de estados

$$\dot{\hat{\Psi}} = \begin{bmatrix} O & I \\ -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \hat{\Psi} + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \Omega + L \left[ \Xi - \hat{\Xi} \right],$$

$$\hat{\Xi} = \begin{bmatrix} -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \hat{\Psi},$$

que de igual forma se pueden representar como sigue

$$\dot{\hat{\Psi}} = A \hat{\Psi} + B \Omega + L \left[ \Xi - \hat{\Xi} \right], \quad (5.5)$$

$$\hat{\Xi} = E \hat{\Psi}, \quad (5.6)$$

donde  $L$  es una matriz de ganancia del observador, tal que  $L \in \mathcal{R}^{6n \times 3n}$ .

Las Ecs. (5.5) y (5.6) describen la dinámica de los estados observados  $\hat{\Psi}$ , y de las salidas estimadas  $\hat{\Xi}$ . El valor de  $\Xi$  en la Ec. (5.5) se obtiene de las mediciones de los acelerómetros, puesto que ésta es la aceleración absoluta de cada uno de los GDL del sistema<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Se hace uso de las ecuaciones desarrolladas en el análisis cinemático descrito en el capítulo 2.

Lo anterior implica que la derivada temporal del error de observación de estados,  $\dot{\tilde{\Psi}}$ , es

$$\dot{\tilde{\Psi}} = \dot{\Psi} - \dot{\hat{\Psi}} = [A - L E] \tilde{\Psi}.$$

De lo cual se deduce que si la matriz  $(A - L E)$  es Hurwitz<sup>2</sup>, entonces  $\tilde{\Psi} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Esto significa que los estados observados  $\hat{\Psi}$  serán iguales a los estados reales  $\Psi$  en tiempo infinito, y como consecuencia la salida estimada  $\hat{\Xi}$  será igual a las mediciones de los acelerómetros, representados por  $\Xi$ .

Esta deducción muestra que si se cumple la condición descrita, entonces se garantiza convergencia en la observación de los estados. Sin embargo, las matrices  $A$  y  $E$  de la representación en variables de estado son desconocidas, puesto que están formadas por los parámetros del sistema. Por ello la representación en variables de estado con parámetros desconocidos es la siguiente

$$\dot{\hat{\Psi}} = \begin{bmatrix} O & I \\ -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix} \hat{\Psi} + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \Omega,$$

$$\hat{\Xi} = \begin{bmatrix} -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix} \hat{\Psi}.$$

De forma simplificada

$$\dot{\hat{\Psi}} = \hat{A} \hat{\Psi} + B \Omega,$$

$$\hat{\Xi} = \hat{E} \hat{\Psi}.$$

El observador de estados con parámetros desconocidos, entonces es de la siguiente forma

$$\dot{\hat{\Psi}} = \begin{bmatrix} O & I \\ -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix} \hat{\Psi} + \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \Omega + L \begin{bmatrix} \Xi - \hat{\Xi} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Xi} = \begin{bmatrix} -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix} \hat{\Psi},$$

---

<sup>2</sup>Una matriz Hurwitz es una matriz definida negativa, en otras palabras, es aquella en la cual todos sus valores propios tienen parte real negativa (Chen, 1984).

en forma simplificada

$$\dot{\hat{\Psi}} = \hat{A} \hat{\Psi} + B \Omega + L \left[ \Xi - \hat{\Xi} \right], \quad (5.7)$$

$$\hat{\Xi} = \hat{E} \hat{\Psi}. \quad (5.8)$$

Puesto que para recuperar los estados, variables no medidas, es necesario conocer los parámetros. Sin embargo, para conocer los parámetros es necesario conocer los estados, Ecs. (3.5)-(3.6), entonces se recurre a un esquema adaptable que resuelva ambos problemas simultáneamente.

Primeramente para demostrar que el algoritmo de un observador adaptable es estable y que converge, es necesario mostrar que se cumple el lema 5.1.

**Lema 5.1** Sean las matrices  $\Gamma \in \mathcal{R}^{m \times p}$ ,  $\Delta \in \mathcal{R}^{m \times p}$ ,  $\Theta \in \mathcal{R}^{p \times 1}$  y  $\Lambda \in \mathcal{R}^{p \times 1}$ , y sean las matrices  $\Gamma_r \in \mathcal{R}^{1 \times p}$ ,  $\Delta_r \in \mathcal{R}^{1 \times p}$ , matrices formadas por el renglón  $r$  de las matrices  $\Gamma$  y  $\Delta$ , respectivamente; donde  $r, m, p \in \mathcal{N}$ ;  $r \in [1, m]$  y  $m, p > 0$ , tal que

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mp} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_r = \left[ \gamma_{r1} \quad \gamma_{r2} \quad \cdots \quad \gamma_{rp} \right],$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1p} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \cdots & \delta_{mp} \end{bmatrix}, \quad \Delta_r = \left[ \delta_{r1} \quad \delta_{r2} \quad \cdots \quad \delta_{rp} \right].$$

Sea  $\sum_{r=1}^m (\Gamma_r \Theta \Lambda^T \Delta_r^T)$  la sumatoria que involucra a todos y cada uno de los elementos de las matrices  $\Gamma$  y  $\Delta$  con los elementos de las matrices  $\Theta$  y  $\Lambda$ , entonces

$$\sum_{r=1}^m \Gamma_r \Theta \Lambda^T \Delta_r^T = \Theta^T \Gamma^T \Delta \Lambda. \quad (5.9)$$

*Demostración.*

Sea la sumatoria

$$\sum_{r=1}^m \Gamma_r \Theta \Lambda^T \Delta_r^T = \Gamma_1 \Theta \Lambda^T \Delta_1^T + \Gamma_2 \Theta \Lambda^T \Delta_2^T + \dots + \Gamma_m \Theta \Lambda^T \Delta_m^T. \quad (5.10)$$

Por otro lado, sea la operación

$$\begin{aligned} \Theta^T \Gamma^T \Delta \Lambda &= \Theta^T \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{m1} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1p} & \gamma_{2p} & \cdots & \gamma_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1p} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \cdots & \delta_{mp} \end{bmatrix} \Lambda \\ &= \Theta^T \begin{bmatrix} \Gamma_1^T & \Gamma_2^T & \cdots & \Gamma_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{bmatrix} \Lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\Theta^T \Gamma^T \Delta \Lambda = \Theta^T \Gamma_1^T \Delta_1 \Lambda + \Theta^T \Gamma_2^T \Delta_2 \Lambda + \dots + \Theta^T \Gamma_m^T \Delta_m \Lambda. \quad (5.11)$$

Además, se observa que

$$\Gamma_r \Theta = \Theta^T \Gamma_r^T \in \mathcal{R},$$

$$\Delta_r \Lambda = \Lambda^T \Delta_r^T \in \mathcal{R}.$$

De lo anterior se deduce que

$$\Gamma_r \Theta \Lambda^T \Delta_r^T = \Theta^T \Gamma_r^T \Delta_r \Lambda,$$

lo que demuestra que la Ec. (5.10) es igual a la Ec. (5.11).

□

Ahora se puede formular el algoritmo de observación adaptable con el cual es posible recuperar los parámetros del sistema, así como las señales no medidas: *velocidad y desplazamiento relativos*, en cada uno de los pisos y en cada GDL ( $X$ ,  $Y$  y  $\theta$ ).

**Teorema 5.1** Sea el sistema (5.1) con  $K, C, M \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}$ , con  $M$  una matriz no singular, formadas de acuerdo a las Ecs. (2.6), (2.7) y (2.8), respectivamente y  $n$  el número de pisos del edificio. Además,  $K, M > 0$  y  $C \geq 0$ . Sea la parametrización del sistema

$$\begin{aligned} Z &= \ddot{U} + \ddot{U}_g && \in \mathcal{R}^{3n \times 1}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} && \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}, \\ \Upsilon &= \begin{bmatrix} U^T & \dot{U}^T \end{bmatrix}^T && \in \mathcal{R}^{6n \times 1}, \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la matriz de parámetros reales y  $\Upsilon$  es un vector regresor formado por velocidades y desplazamientos relativos de cada uno de los GDL, tal que  $Z$  representa los valores reales de la salida del sistema.

$$Z = \Phi \Upsilon.$$

Sea  $\hat{Z}$  el valor estimado de la salida del sistema, dado por el producto de la matriz de parámetros estimados  $\hat{\Phi}$  y el vector regresor observado  $\hat{\Upsilon}$ , es decir,

$$\hat{Z} = \hat{\Phi} \hat{\Upsilon},$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \ddot{\hat{U}} + \ddot{U}_g && \in \mathcal{R}^{3n \times 1}, \\ \hat{\Phi} &= \begin{bmatrix} -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix} && \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}, \\ \hat{\Upsilon} &= \begin{bmatrix} \hat{U}^T & \dot{\hat{U}}^T \end{bmatrix}^T && \in \mathcal{R}^{6n \times 1}, \end{aligned}$$

y  $\hat{U}$ ,  $\dot{\hat{U}}$ , y  $\ddot{\hat{U}}$  son los estimados de los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración relativas, respectivamente.  $\ddot{U}_g$  es el vector de aceleración del suelo aplicado a cada uno de los pisos.  $\widehat{M^{-1}K}$  y  $\widehat{M^{-1}C}$  son las matrices de parámetros identificados.

Sea la señal de error paramétrico normalizado<sup>3</sup>  $\varepsilon$ , con  $h^2 = 1 + \hat{\Upsilon}^T \hat{\Upsilon} \in \mathcal{R}$  que satisface  $\hat{\Upsilon}/h \in \mathcal{L}_\infty$

$$\varepsilon = \frac{Z - \hat{Z}}{h^2}. \quad (5.12)$$

---

<sup>3</sup>La señal de error  $\varepsilon$  no necesariamente está dividida por  $h^2$ , en cuyo caso la señal de error no está normalizada.

Además, sea el observador de estados con parámetros desconocidos definido por las Ecs. (5.7) y (5.8), con la matriz estimada de estados  $\hat{A} \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}$ , la matriz estimada de salida  $\hat{E} \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}$ , la matriz de entrada  $B \in \mathcal{R}^{6n \times 3n}$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} O & I \\ -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} -\widehat{M^{-1}K} & -\widehat{M^{-1}C} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix}^T.$$

Entonces, sea el observador adaptable, Ecs. (5.13)-(5.16),

$$\dot{\hat{\Psi}} = \hat{A} \hat{\Psi} + B \Omega + L \begin{bmatrix} \Xi - \hat{\Xi} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$\hat{\Xi} = \hat{E} \hat{\Psi}, \quad (5.14)$$

$$\dot{P} = \delta P - P \frac{\hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T}{h^2} P, \quad (5.15)$$

$$\dot{\hat{\Phi}}^T = P \hat{\Upsilon} \varepsilon^T, \quad (5.16)$$

con una matriz de covariancia  $P = P^T > 0 \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}$ ,  $P(0) > 0$ ; un factor de olvido  $\delta \geq 0 \in \mathcal{R}$ , un vector de estado observado  $\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{U}^T & \dot{\hat{U}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^{6n \times 1}$ , un vector de entrada  $\Omega = [-\ddot{U}_g] \in \mathcal{R}^{3n \times 1}$ , un vector de salida estimada  $\hat{\Xi} = [\ddot{U} + \ddot{U}_g] \in \mathcal{R}^{3n \times 1}$  y  $L \in \mathcal{R}^{6n \times 3n}$  una matriz de ganancia del observador<sup>4</sup>.

Si la matriz  $L$  cumple la siguiente condición

$$-2LL^T + LT + T^T L^T \leq 0, \quad (5.17)$$

donde  $T = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}$ , entonces el observador adaptable, Ecs (5.13)-(5.16), garantiza que el error de observación de estados, definido como  $\tilde{\Psi} = \Psi - \hat{\Psi}$ , y el error de estimación paramétrico  $\varepsilon$ , Ec. (5.12), satisfacen

$$\tilde{\Psi} \rightarrow 0, \quad y \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

---

<sup>4</sup>Nótese que la parametrización propuesta del modelo del sistema, Ec. (5.1), y el diseño del observador, Ecs. (5.7) y (5.8), permiten que  $\hat{\Upsilon} = \hat{\Psi}$ , y que  $\hat{\Phi} = \hat{\Xi}$ .



*Demostración.*

Sea  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}$  la matriz del error de estimación paramétrico, y sea  $\tilde{\Phi}_r \in \mathcal{R}^{1 \times 6n}$  el vector de error de estimación paramétrico correspondiente al *renglón*  $r$  de la matriz  $\tilde{\Phi}$ .

$$\tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{12} & \cdots & \tilde{\phi}_{16n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\phi}_{3n1} & \tilde{\phi}_{3n2} & \cdots & \tilde{\phi}_{3n6n} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_r = \Phi_r - \hat{\Phi}_r = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{r1} & \tilde{\phi}_{r2} & \cdots & \tilde{\phi}_{r6n} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Además, la derivada con respecto del tiempo de  $\tilde{\Phi}$  es

$$\dot{\tilde{\Phi}} = \dot{\Phi} - \dot{\hat{\Phi}} = -\dot{\hat{\Phi}}.$$

Substituyendo la Ec. (5.16) en esta ecuación  $\Rightarrow \dot{\tilde{\Phi}}^T = -P \hat{\Upsilon} \varepsilon^T$ , y aplicando sólo al renglón  $r$

$$\dot{\tilde{\Phi}}_r^T = -P \hat{\Upsilon} \varepsilon_r^T. \quad (5.19)$$

Tomando la señal de error paramétrico normalizado, Ec. (5.12), y substituyendo las parametrizaciones  $Z = \Phi \Upsilon$  y  $\hat{Z} = \hat{\Phi} \hat{\Upsilon}$

$$\varepsilon = \frac{Z - \hat{Z}}{h^2} = \frac{\Phi \Upsilon - \hat{\Phi} \hat{\Upsilon}}{h^2} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

y considerando  $\varepsilon_r$  el elemento del renglón  $r$  de  $\varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{Z_r - \hat{Z}_r}{h^2} = \frac{\Phi_r \Upsilon - \hat{\Phi}_r \hat{\Upsilon}}{h^2} \in \mathcal{R}.$$

Esta última ecuación no permite simplificar términos, por lo que se suma y se resta  $\Phi_r \hat{\Upsilon}/h^2$

$$\varepsilon_r = \frac{\Phi_r \Upsilon - \hat{\Phi}_r \hat{\Upsilon} + \Phi_r \hat{\Upsilon} - \Phi_r \hat{\Upsilon}}{h^2} = \frac{\Phi_r (\Upsilon - \hat{\Upsilon}) + (\Phi_r - \hat{\Phi}_r) \hat{\Upsilon}}{h^2},$$

$$\varepsilon_r = \frac{\Phi_r \tilde{\Upsilon} + \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon}}{h^2}. \quad (5.20)$$

Sea la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T S \tilde{\Psi} + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T, \quad (5.21)$$

con  $V > 0 \in \mathcal{R}$ , y una matriz  $S = S^T > 0 \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}$ .

Entonces, sea  $\dot{V}$  la derivada con respecto del tiempo de  $V$ , Ec. (5.21),

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \dot{\tilde{\Phi}}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \dot{P}^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\ & + \frac{1}{h^4} \dot{\tilde{\Psi}}^T S \tilde{\Psi} + \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T S \dot{\tilde{\Psi}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para demostrar la convergencia asintótica del observador adaptable, es necesario garantizar que la derivada de la función candidata de Lyapunov es negativa, es decir,  $\dot{V} < 0$ .

Usando la propiedad de la matriz identidad

$$P P^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} P P^{-1} = \dot{P} P^{-1} + P \dot{P}^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{P}^{-1} = -P^{-1} \dot{P} P^{-1}.$$

Substituyendo esta última ecuación en la Ec. (5.22),  $\dot{V}$  queda como sigue

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \dot{\tilde{\Phi}}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{P} P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\ & + \frac{1}{h^4} \dot{\tilde{\Psi}}^T S \tilde{\Psi} + \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T S \dot{\tilde{\Psi}}. \end{aligned}$$

Definiendo a partir de  $\dot{V}$

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \dot{\tilde{\Phi}}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{P} P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T, \quad (5.23)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{h^4} \dot{\tilde{\Psi}}^T S \tilde{\Psi} + \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T S \dot{\tilde{\Psi}}, \quad (5.24)$$

tal que

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

Se substituyen las Ecs. (5.15) y (5.19) en la Ec. (5.23), y recordando que  $P = P^T$ , Ec. (5.15),

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \left( -P \hat{\Upsilon} \varepsilon_r^T \right)^T P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \left( -P \hat{\Upsilon} \varepsilon_r^T \right) \\
&\quad - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \left( \delta P - P \frac{\hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T}{h^2} P \right) P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\
&= - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \varepsilon_r \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \varepsilon_r^T \\
&\quad - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\varepsilon_r \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T \in \mathcal{R}$  y que entonces

$$\varepsilon_r \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T = (\varepsilon_r \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T)^T \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T = \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \varepsilon_r^T,$$

$$\Rightarrow \quad \dot{V}_1 = - \frac{2}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \varepsilon_r \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T.$$

Si se substituye la Ec. (5.20) en esta ecuación última

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= - \frac{2}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \left( \frac{\Phi_r \tilde{\Upsilon} + \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon}}{h^2} \right) \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\
&= - \frac{2}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \Phi_r \tilde{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{2}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T \\
&\quad + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T,
\end{aligned}$$

$$\dot{V}_1 = - \frac{2}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \Phi_r \tilde{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T.$$

Finalmente, haciendo uso de la Ec. (5.9) en el primer término

$$\dot{V}_1 = - \frac{2}{h^4} \tilde{\Upsilon}^T \Phi^T \tilde{\Phi} \hat{\Upsilon} - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T. \quad (5.25)$$

Ahora, si se toma la Ec. (5.24), es necesario conocer  $\dot{\tilde{\Psi}}$ , que es la derivada del error de observación con respecto del tiempo.

$$\tilde{\Psi} = \Psi - \hat{\Psi},$$

donde  $\Psi$  es el vector de estados reales, y  $\hat{\Psi}$  es el vector de estados observados

$$\Rightarrow \dot{\tilde{\Psi}} = \dot{\Psi} - \dot{\hat{\Psi}}.$$

Utilizando las Ecs. (5.3) y (5.7)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{\tilde{\Psi}} &= A \Psi + B \Omega - \left[ \hat{A} \hat{\Psi} + B \Omega + L (\Xi - \hat{\Xi}) \right] \\ &= A \Psi - \hat{A} \hat{\Psi} - L (\Xi - \hat{\Xi}), \end{aligned}$$

con las Ecs. (5.4) y (5.8)

$$\dot{\tilde{\Psi}} = A \Psi - \hat{A} \hat{\Psi} - L (E \Psi - \hat{E} \hat{\Psi}).$$

Para sumar o simplificar términos en esta ecuación, se recurre a la suma y resta de términos iguales.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Psi}} &= A \Psi - \hat{A} \hat{\Psi} - L (E \Psi - \hat{E} \hat{\Psi}) + A \hat{\Psi} - A \hat{\Psi} + L E \hat{\Psi} - L E \hat{\Psi} \\ &= A (\Psi - \hat{\Psi}) + (A - \hat{A}) \hat{\Psi} - L E (\Psi - \hat{\Psi}) - L (E - \hat{E}) \hat{\Psi} \\ &= A \tilde{\Psi} + \tilde{A} \hat{\Psi} - L E \tilde{\Psi} - L \tilde{E} \hat{\Psi}. \\ \Rightarrow \dot{\tilde{\Psi}} &= (A - L E) \tilde{\Psi} + (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Substituyendo la Ec. (5.26) en la Ec. (5.24), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{\left[ (A - L E) \tilde{\Psi} + (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi} \right]^T S \tilde{\Psi}}{h^4} + \frac{\tilde{\Psi}^T S \left[ (A - L E) \tilde{\Psi} + (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi} \right]}{h^4} \\ &= \frac{\left[ \tilde{\Psi}^T (A - L E)^T + \hat{\Psi}^T (\tilde{A} - L \tilde{E})^T \right] S \tilde{\Psi}}{h^4} + \frac{\tilde{\Psi}^T S \left[ (A - L E) \tilde{\Psi} + (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi} \right]}{h^4} \\ &= \frac{\tilde{\Psi}^T \left[ (A - L E)^T S + S (A - L E) \right] \tilde{\Psi}}{h^4} + \frac{\hat{\Psi}^T (\tilde{A} - L \tilde{E})^T S \tilde{\Psi}}{h^4} + \frac{\tilde{\Psi}^T S (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi}}{h^4}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, como  $\tilde{\Psi}^T S (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi} \in \mathcal{R}$ , entonces se cumple que  $\hat{\Psi}^T (\tilde{A} - L \tilde{E})^T S \tilde{\Psi} = [\hat{\Psi}^T (\tilde{A} - L \tilde{E})^T S \tilde{\Psi}]^T$ , y teniendo que cuenta que  $S = S^T$ , Ec. (5.21),

$$\hat{\Psi}^T (\tilde{A} - L \tilde{E})^T S \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}^T S (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi},$$

entonces

$$\dot{V}_2 = \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ (A - L E)^T S + S (A - L E) \right] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T S (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi}. \quad (5.27)$$

Nótese que el primer término de la Ec. (5.27) tiene la forma de la ecuación de Lyapunov (Chen, 1984) que indica: *Si todos los valores propios de  $\Pi$  tienen parte real negativa, entonces para cualquier  $\nabla > 0$  existe una matriz  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^T > 0$  que satisface*

$$\Pi^T \mathcal{U} + \mathcal{U} \Pi = -\nabla.$$

De lo anterior, se deduce la necesidad de que la matriz  $(A - L E)$  sea Hurwitz, para que el primer término de la Ec. (5.27) sea negativo.

Recordando que  $\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$ , y con las Ecs. (5.25) y (5.27)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V} = & -\frac{2}{h^4} \tilde{\Upsilon}^T \Phi^T \tilde{\Phi} \hat{\Upsilon} - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\ & + \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ (A - L E)^T S + S (A - L E) \right] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T S (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi}. \end{aligned}$$

De las definiciones del vector regresor estimado,  $\hat{\Upsilon}$ , y del vector de estados observados,  $\hat{\Psi}$ , éstos están formados por velocidades y desplazamientos relativos de cada uno de los GDL del sistema. Además, la matriz de parámetros estimados,  $\hat{\Phi}$ , es igual a la matriz estimada de salida del sistema en la representación de variables de estado,  $\hat{E}$ , por lo tanto

$$\hat{\Upsilon} = \hat{\Psi} \quad \text{y} \quad \hat{\Phi} = \hat{E},$$

es decir, se cumple

$$\hat{\Phi} \hat{\Upsilon} = \hat{E} \hat{\Psi},$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{V} &= -\frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T E^T \tilde{E} \hat{\Psi} - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\
&\quad + \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ (A - LE)^T S + S (A - LE) \right] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T S (\tilde{A} - L \tilde{E}) \hat{\Psi}, \\
\Rightarrow \dot{V} &= -\frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r \hat{\Upsilon} \hat{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^{3n} \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T \\
&\quad + \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ (A - LE)^T S + S (A - LE) \right] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ S (\tilde{A} - L \tilde{E}) - E^T \tilde{E} \right] \hat{\Psi}.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Observando la Ec. (5.28), el primer término es cuadrático por lo que para cualesquiera valores de  $\tilde{\Phi}$  y de  $\hat{\Upsilon}$  siempre será negativo. El segundo término es parte de la definición de la función de Lyapunov, Ec. (5.21), por lo que también será negativo para cualesquiera valores de  $\tilde{\Phi}$  y de la matriz de covariancia  $P$ . El tercer término será negativo si, como se ha mencionado, se garantiza que la matriz  $(A - LE)$  sea Hurwitz. Finalmente, el cuarto término presenta elementos cruzados, y lo más conveniente es que sea nulo, por lo que sólo se analizarán estos dos últimos términos.

Sean las igualdades

$$\dot{V}_3 = \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ (A - LE)^T S + S (A - LE) \right] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ S (\tilde{A} - L \tilde{E}) - E^T \tilde{E} \right] \hat{\Psi},$$

$$F = A - LE \quad \text{y} \quad \tilde{A} = T^T \tilde{E}, \quad \text{donde} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 6n},$$

y substituyendo éstas dos últimas en  $\dot{V}_3$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{V}_3 &= \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T [F^T S + S F] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ S (T^T \tilde{E} - L \tilde{E}) - E^T \tilde{E} \right] \hat{\Psi} \\
&= \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T [F^T S + S F] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ S (T^T - L) \tilde{E} - E^T \tilde{E} \right] \hat{\Psi},
\end{aligned}$$

$$\dot{V}_3 = \frac{1}{h^4} \tilde{\Psi}^T [F^T S + S F] \tilde{\Psi} + \frac{2}{h^4} \tilde{\Psi}^T \left[ S (T^T - L) - E^T \right] \tilde{E} \hat{\Psi}.$$

De esta última ecuación se tiene que demostrar la existencia de  $S$  tal que para una  $F < 0$ , el primer término sea negativo definido (Chen, 1984), y que el segundo término sea nulo.

$$\begin{aligned}
\text{Entonces } \Rightarrow S(T^T - L) - E^T &= 0, \\
\Rightarrow E^T &= -S(L - T^T). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Ahora, sea la desigualdad

$$AR + RA^T = -2LL^T + LT + T^T L^T \leq 0,$$

$$\text{para } R = R^T > 0, (R^{-1})^T = R^{-1}, S^{-1} = R \Rightarrow S^T = S.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow AR + RA^T + 2LL^T - LT - T^T L^T &\leq 0, \\
S[AR + RA^T + 2LL^T - LT - T^T L^T] S &\leq 0, \\
S[AS^{-1} + S^{-1}A^T + 2LL^T - LT - T^T L^T] S &\leq 0, \\
SA + A^T S + 2SLL^T S - S L T S - S T^T L^T S &\leq 0, \\
SA + A^T S + S L(L^T S - T S) + (S L - S T^T) L^T S &\leq 0, \\
SA + A^T S + S L(L^T - T) S + S(L - T^T) L^T S &\leq 0,
\end{aligned}$$

usando la Ec. (5.29)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow SA + A^T S - S L E - E^T L^T S &\leq 0, \\
S(A - L E) + (A^T - E^T L^T) S &\leq 0,
\end{aligned}$$

$$S(A - L E) + (A - L E)^T S \leq 0,$$

lo que implica la existencia de  $S$  si y sólo si se cumple la desigualdad

$$-2LL^T + LT + T^T L^T \leq 0,$$

tal que la matriz  $(A - LE) < 0$ , lo que garantiza que la derivada de la función de Lyapunov  $\dot{V}$ , Ec. (5.28), es negativa definida para todo tiempo, lo que implica que asintóticamente la función de Lyapunov, Ec. (5.21), será nula. Para que exista esta condición sólo es posible si  $\tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi} = 0$  lo cual indica convergencia paramétrica, y que  $\tilde{\Psi} = \Psi - \hat{\Psi} = 0$  indicando convergencia en la observación de estados.

Por lo tanto el observador adaptable, Ecs. (5.13)-(5.16), garantiza convergencia paramétrica y convergencia en la observación de estados si se tiene excitación persistente, caso contrario sólo se puede garantizar convergencia en la señal de salida.  $\square$

## Capítulo 6

# Resultados del observador adaptable

En este capítulo se muestran los resultados, en simulación y experimentales, del observador adaptable para un edificio de cinco pisos, el cual es excitado con una señal sísmica. En el caso del edificio simulado se considera que sólo se conocen las mediciones de aceleración en cada uno de los pisos.

### 6.1. Frecuencias modales de la señal de excitación

En la simulación la estructura fue excitada con el sismo registrado el 19 de septiembre de 1985 en la ciudad de México (SCT), aquélla es de cinco pisos para tener certeza que los resultados simulados son representativos del modelo *experimental*<sup>1</sup> de cinco niveles que se tiene en el laboratorio. En la Fig. 6.1 se observa un esquema del edificio simulado: cinco pisos, cuatro marcos y cuatro columnas<sup>2</sup>. En la tabla 6.1 se muestran los polos y las frecuencias modales del sistema. Se observa que la parte real de los polos es negativa, lo que implica un sistema estable. Además, las primeras seis frecuencias de vibración están debajo de 8 Hz.

Para que la estructura simulada vibre, es conveniente que la frecuencia del sismo sea igual o con un valor cercano a alguna frecuencia modal de aquélla. La forma de lograr que

---

<sup>1</sup>Ver el capítulo 7 para más detalles del modelo *experimental*.

<sup>2</sup>Ver el apéndice E para conocer las matrices de parámetros de este edificio simulado.



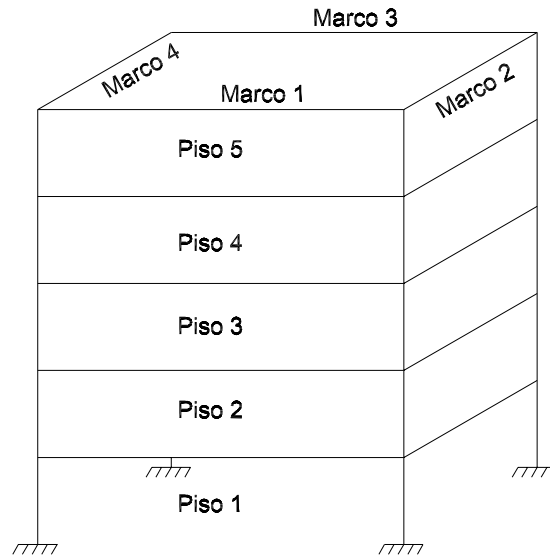
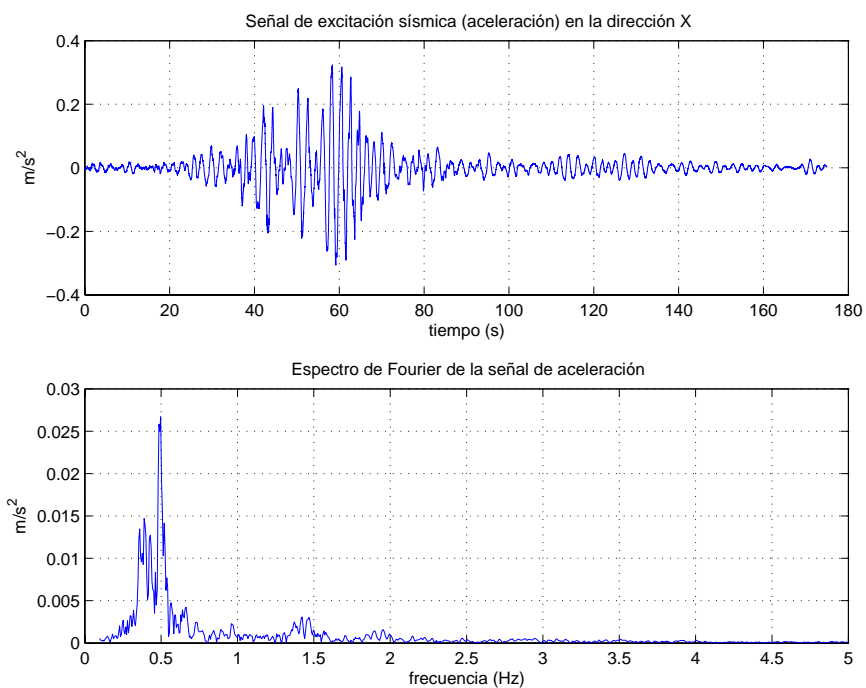
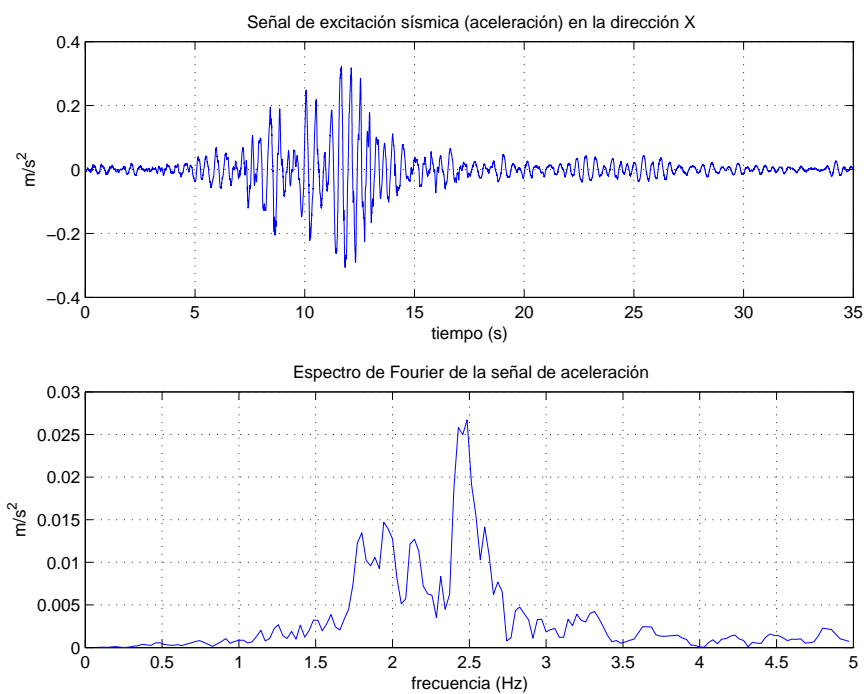


Figura 6.1: Esquema de edificio simulado de 5 niveles

Cuadro 6.1: Polos y frecuencias modales del modelo simulado

polos	frecuencias modales	
	<i>rad/s</i>	<i>Hz</i>
$-0,01194 \pm 10,361 i$	10,361	1,649
$-0,02568 \pm 15,190 i$	15,190	2,418
$-0,10201 \pm 31,073 i$	31,073	4,945
$-0,16758 \pm 38,274 i$	38,274	6,092
$-0,22371 \pm 45,015 i$	45,015	7,164
$-0,24769 \pm 47,787 i$	47,788	7,606
$-0,41616 \pm 60,437 i$	60,439	9,619
$-0,54777 \pm 69,709 i$	69,711	11,01
$-0,52961 \pm 71,227 i$	71,229	11,34
$-0,89824 \pm 89,716 i$	89,721	14,28
$-1,1589 \pm 102,94 i$	102,94	16,38
$-1,4271 \pm 114,28 i$	114,29	18,19
$-3,5836 \pm 177,40 i$	177,44	28,24
$-5,8500 \pm 229,23 i$	229,31	39,50
$-7,5324 \pm 260,83 i$	260,94	41,53

los registros del sismo tengan esta frecuencia, es aplicar una escala de tiempo a éstos y entonces la variación de la frecuencia será inversamente proporcional a la variación de la escala de tiempo.

Figura 6.2: Señal sísmica en la dirección  $X$  con escala de tiempo completaFigura 6.3: Señal sísmica en la dirección  $X$  con escala de tiempo reducida

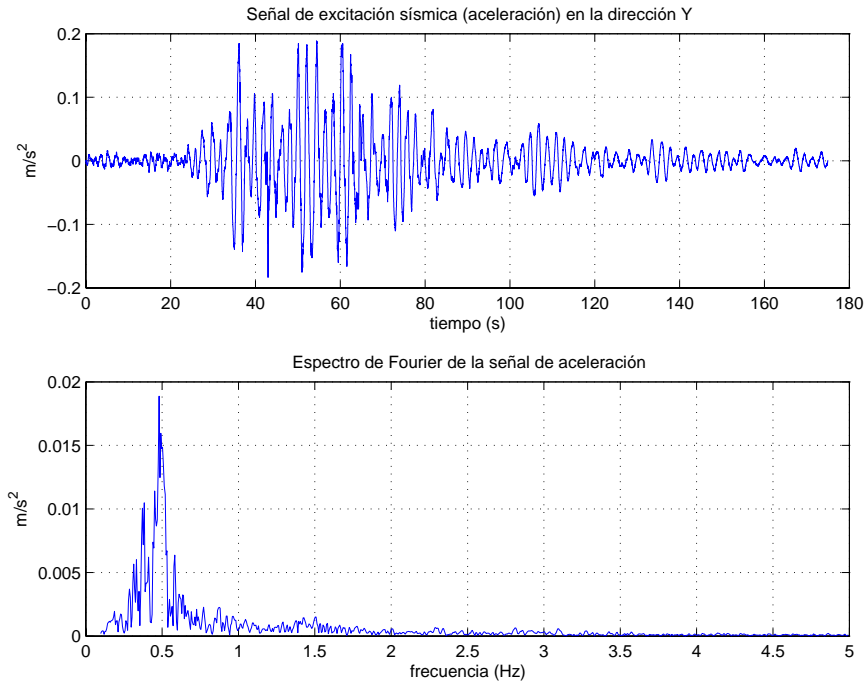


Figura 6.4: Señal sísmica en la dirección  $Y$  con escala de tiempo completa

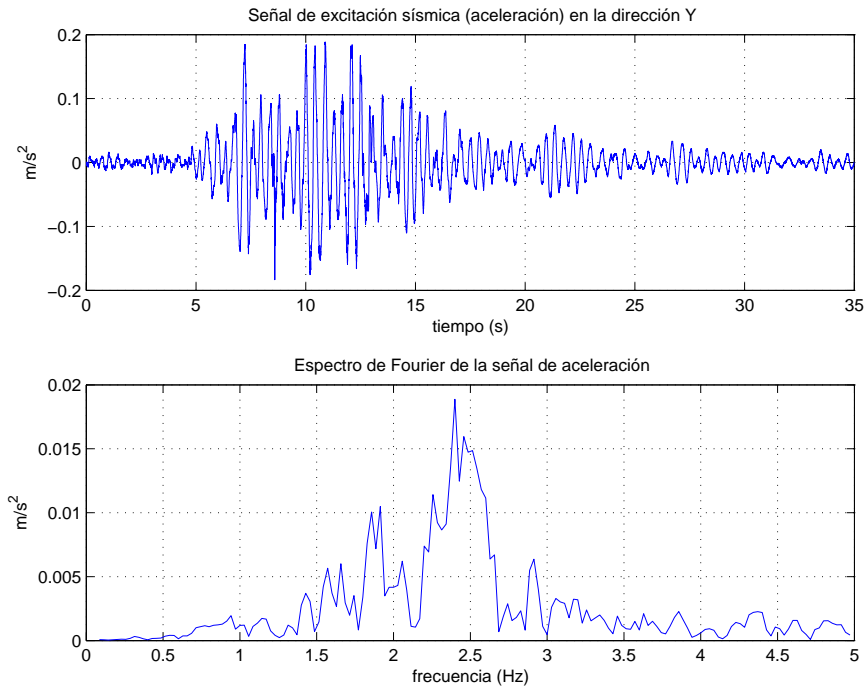


Figura 6.5: Señal sísmica en la dirección  $Y$  con escala de tiempo reducida

El tiempo de duración de los registros del sismo de SCT es de 180 segundos aproximadamente y sus espectros de frecuencia muestran que la mayor disipación de energía surge alrededor de 0,5 Hz, tanto en la dirección  $X$  como en la dirección  $Y$  (ver Figs. 6.2 y 6.4). Esta frecuencia de oscilación del sismo es demasiado baja para excitar adecuadamente a la estructura, por esto es que se modifica la escala de tiempo del sismo. Entonces, para excitar a la estructura se reduce cinco veces la escala de tiempo de las excitaciones sísmicas logrando que la mayor disipación de energía ahora sea en 2,5 Hz, aproximadamente. La Fig. 6.3 muestra el registro sísmico para la dirección  $X$  y obsérvese que sólo tiene una duración en tiempo de 36 segundos, sin embargo, su registro espectral se modifica notoriamente, teniendo éste un intervalo de frecuencias de oscilación más amplio comparado con el de la Fig. 6.2. La misma situación se presenta para la dirección  $Y$ , Figs. 6.4 y 6.5.

Es importante mencionar que el modelo *experimental* no representa a ningún edificio real en particular. El hecho de que se reduzca 5 veces el tiempo de los registros del sismo utilizado para la excitación, tiene que ver con que el valor de una de las frecuencias modales del modelo *experimental* es muy cercana a 2,5 Hz, y es necesario este valor de frecuencia en la excitación para lograr que el modelo *experimental* vibre.

## 6.2. Resultados numéricos de modelo simulado

Al aplicar los registros del sismo a la estructura mencionada, y resolver los algoritmos (5.13)-(5.16), se obtienen los siguientes resultados<sup>3</sup>:

Recuérdese que el observador adaptable considera que sólo cuenta con mediciones de aceleración en cada uno de los pisos, así como dos señales más de aceleración del suelo en direcciones perpendiculares. Como es un modelo simulado se conocen las señales de desplazamiento y velocidad de la estructura, no obstante, éstas no son utilizadas para el cálculo del algoritmo, y sólo se muestran como señales testigo de cómo deben ser las señales calculadas mediante el observador adaptable. Además, se presentan los resultados del identificador paramétrico estudiado en el capítulo 3 en el cual se considera que son conocidos los estados, es decir, velocidades y desplazamientos relativos para cada GDL de cada piso. Adicional-

---

<sup>3</sup>Ver el apéndice E para conocer las condiciones iniciales del algoritmo (5.13)-(5.16) con las cuales se obtuvieron los resultados mostrados.

mente, se observan los resultados de un observador convencional, en el cual se considera que los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez son conocidos. Estos dos resultados adicionales son mostrados para comparar el desempeño del observador adaptable.

Primeramente, al no conocer a priori tanto parámetros como estados, el observador adaptable comienza a calcular ambos tal que en tiempo infinito el error de observación y el error paramétrico tengan valores cercanos a cero. Este hecho se observa plenamente en la Fig. 6.6, donde se muestran las señales correspondientes a los tres GDL del piso 5: desplazamientos reales, desplazamientos observados (parámetros conocidos), y desplazamientos obtenidos mediante el observador adaptable. Las tres señales son prácticamente iguales casi desde el inicio de la excitación. Nótese que el observador adaptable es capaz de recuperar los desplazamientos reales.

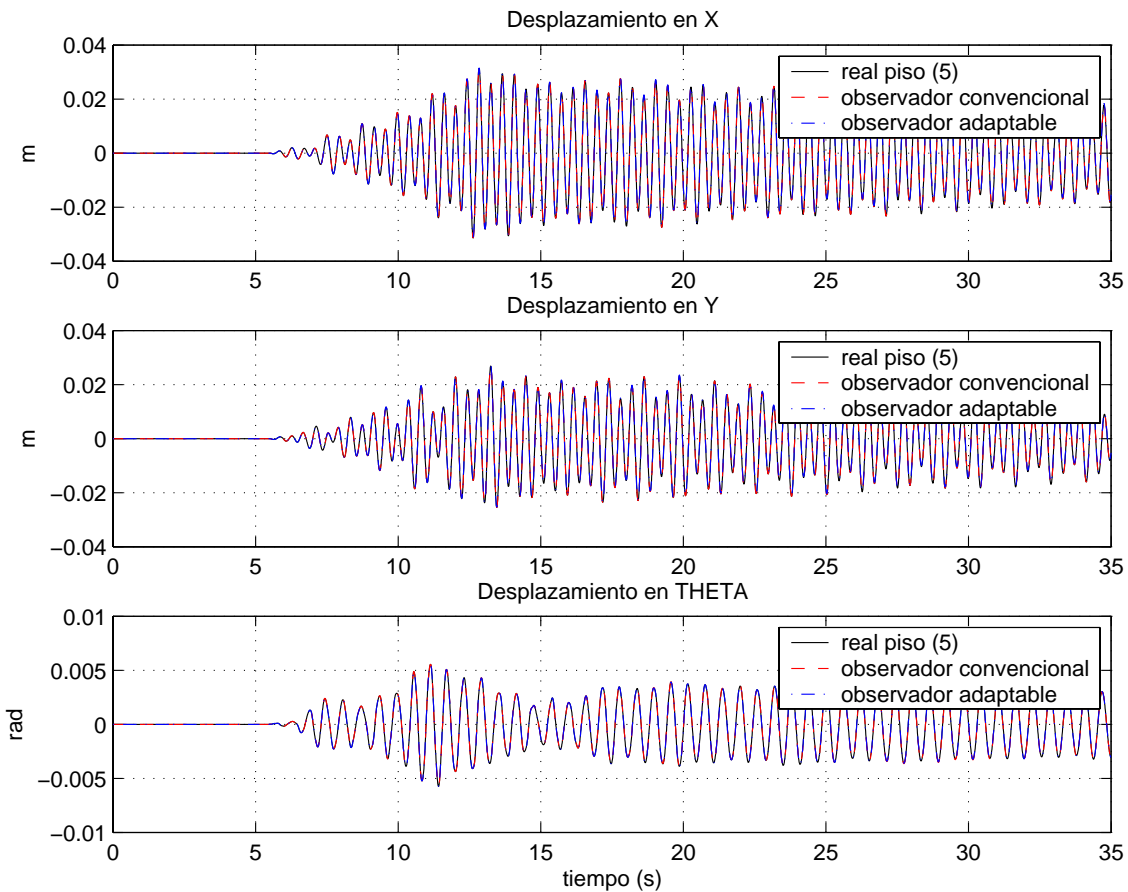


Figura 6.6: Señales de desplazamiento: real, observado, observado adaptable

Esto es importante porque muestra que el algoritmo es capaz de recuperar los desplazamientos que sufre la estructura con sólo mediciones de aceleración y sin conocimiento de los parámetros del edificio: relaciones de rigidez/masa y amortiguamiento/masa.

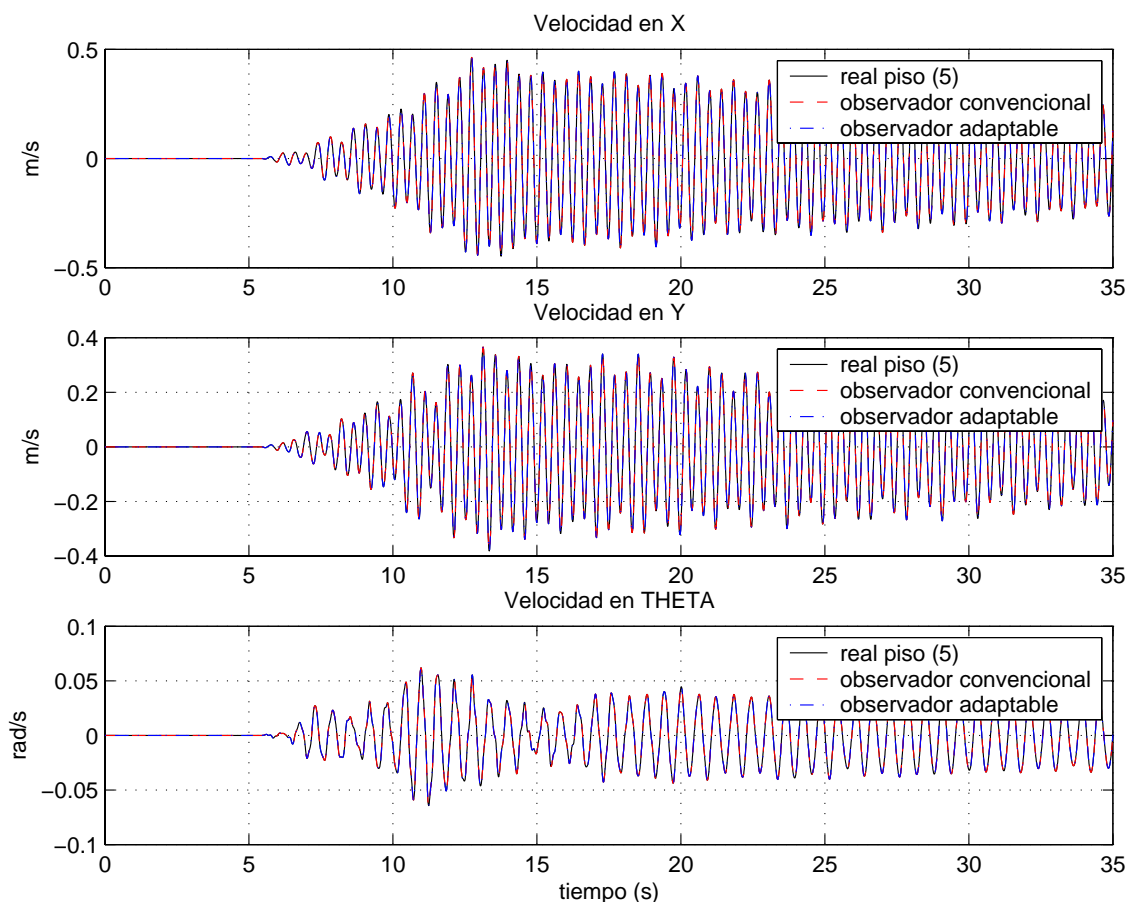


Figura 6.7: Señales de velocidad: real, observado, observado adaptable

En cuanto a las señales de velocidad, la Fig. 6.7 muestra éstas para el quinto piso: reales (señales testigo), obtenidas mediante un observador convencional, y calculadas con el observador adaptable. Estas últimas tienen valores cercanos a las señales reales, lo cual muestra que el observador adaptable presenta un desempeño adecuado. Considerando que usualmente no se dispone de mediciones de velocidad en un edificio real, entonces el observador adaptable propuesto representa un opción viable para el conocimiento de las velocidades que sufre cada uno de los pisos del edificio cuando éste está sujeto a una excitación sísmica.

En ambos casos: desplazamientos y velocidades, la convergencia de estados es muy rápi-

da, menor a 2 segundos, y se mantiene mientras exista la condición de excitación persistente. Además, la corrección de error se mantiene, pues para que se obtengan los resultados mostrados, el observador, Ecs. (5.13) y (5.14), debe tener una convergencia lenta, es decir, una ganancia  $L$  pequeña para que el error paramétrico,  $\varepsilon$ , no tome valores cercanos a cero rápidamente propiciando que la Ec. (5.16) no sea nula, y con ello la convergencia de los parámetros siga existiendo. En caso contrario, si el error es cero, la Ec. (5.16) es nula y los parámetros no alcanzan su valor real.

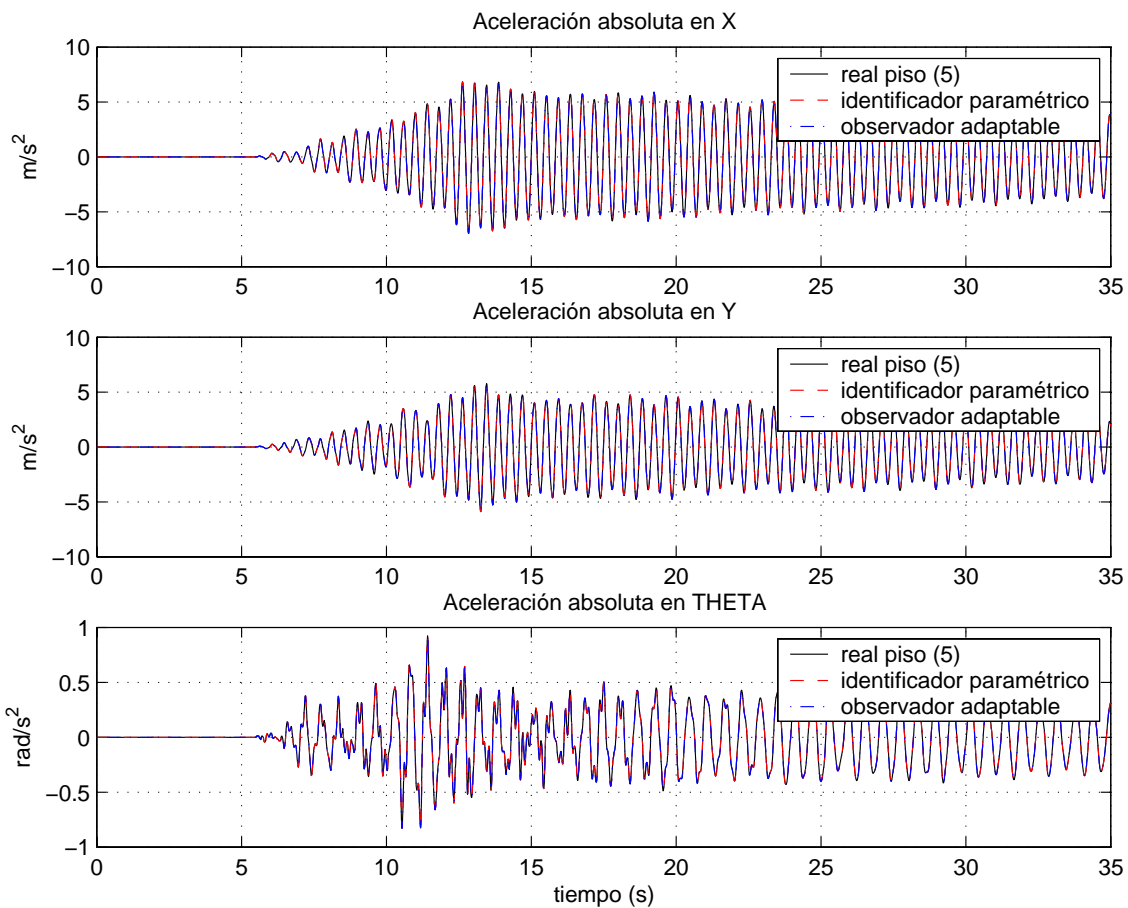


Figura 6.8: Señales de aceleraciones absolutas: reales, estimadas, observadas adaptables

Las aceleraciones absolutas reales, que son lo que miden los acelerómetros, se muestran en la Fig. 6.8. Además, se muestra la señal de salida del identificador paramétrico (estados conocidos), así como la señal de salida del observador adaptable. Éstas toman valores cercanos al valor de salida real. Al igual que con los desplazamientos y velocidades, el observador

adaptable tiene un desempeño adecuado, pues logra que la aceleración absoluta observada sea casi igual que la señal medida, mostrando con esto la viabilidad del algoritmo.

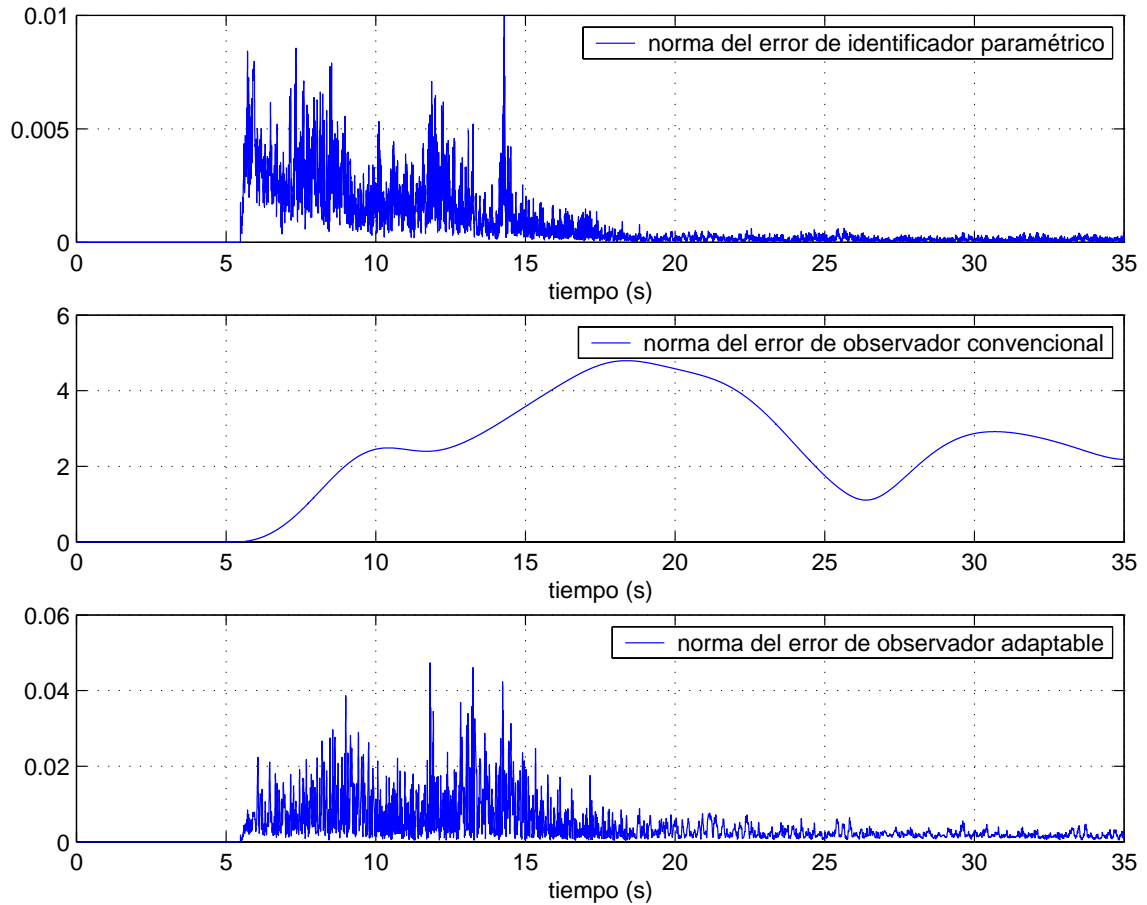


Figura 6.9: Señales de norma de error

Como se ha mostrado, el observador adaptable permite conocer señales no medidas en un sistema real. Se recordará de la demostración de la convergencia del observador adaptable, teorema 5.1, que si se cumplen las condiciones descritas en él, el error paramétrico y el error de observación tienden a cero en tiempo infinito.

La Fig. 6.9 muestra las normas de los errores del identificador paramétrico, de un observador convencional, y del observador adaptable. Se aprecia que éstos no llegan a un valor cercano a cero cuando la excitación desaparece, de hecho el error de observación convencional es el que presenta valores mayores, como se mencionó en líneas anteriores, el hecho que el observador sea lento permite que la señal de error siga manteniendo la variación de



los parámetros estimados, y que éstos tomen valores tal que con los valores de los estados reproduzcan la salida del sistema, en este caso la aceleración absoluta que se puede medir a través de acelerómetros. Si el observador es más rápido que el estimador, aquél logra que la norma del error sea pequeña en un periodo corto de tiempo y no permite que los valores de los parámetros reproduzcan adecuadamente la dinámica del sistema y por consecuencia los estados comiencen a diverger para compensar el error de salida provocado por los parámetros.

De acuerdo a lo anterior, los estados tienen que seguir a las señales de desplazamiento y velocidad reales, es decir, no tienen posibilidad que tomen otros valores. Sin embargo, los parámetros no están restringidos en cuanto al valor que toman, en otras palabras, no necesariamente convergen a los valores de los parámetros reales, como se ha mencionado. No obstante, existe otra razón por la cual éstos no llegan a sus valores reales. Si se observa la estructura de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ , Ecs. (2.6) y (2.7), respectivamente, éstas están formadas por nueve submatrices tridiagonales<sup>4</sup>, por lo tanto para un sistema de cinco pisos, éstas tienen muchos elementos cuyos valores son cero. No obstante, mediante la identificación paramétrica, estos ceros toman valores no nulos obteniéndose un nuevo conjunto de parámetros que permiten reproducir la misma dinámica que se obtendría mediante matrices tridiagonales, o al menos lo bastante cercano a ella.

La Fig. 6.10 muestra como es el comportamiento del parámetro  $k/m$ , que se encuentra en el elemento (5,5) de la matriz de parámetros  $M^{-1}K$ . Se observan tres líneas; la primera de ellas indica el valor real del parámetro, la segunda línea indica el valor del parámetro calculado sólo con el algoritmo de identificación paramétrica, descrito en el capítulo 3, y por último la tercera línea indica el comportamiento del parámetro calculado mediante el observador adaptable, desarrollado en el capítulo 5. Como se observa, el comportamiento mediante el observador adaptable tiene un buen desempeño, aunque el parámetro no logra llegar al valor real por las razones que se han mencionado. Esto es importante, puesto que si consideramos el número de parámetros que se recuperan, 450 en este caso, y los estados observados, 30, entonces se puede decir que el esquema adaptable permite recuperar un

---

<sup>4</sup>Matrices en las cuales sólo tienen elementos representativos en su diagonal principal y en las diagonales adyacentes a ella, todos los demás elementos tienen un valor de cero.

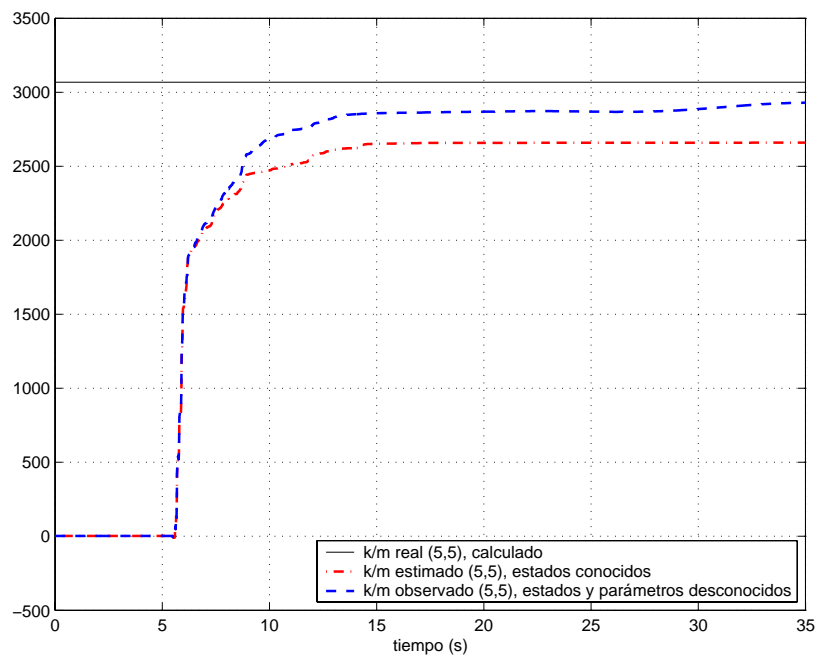


Figura 6.10: Comportamiento dinámico del elemento (5,5) de la matriz  $M^{-1} K$

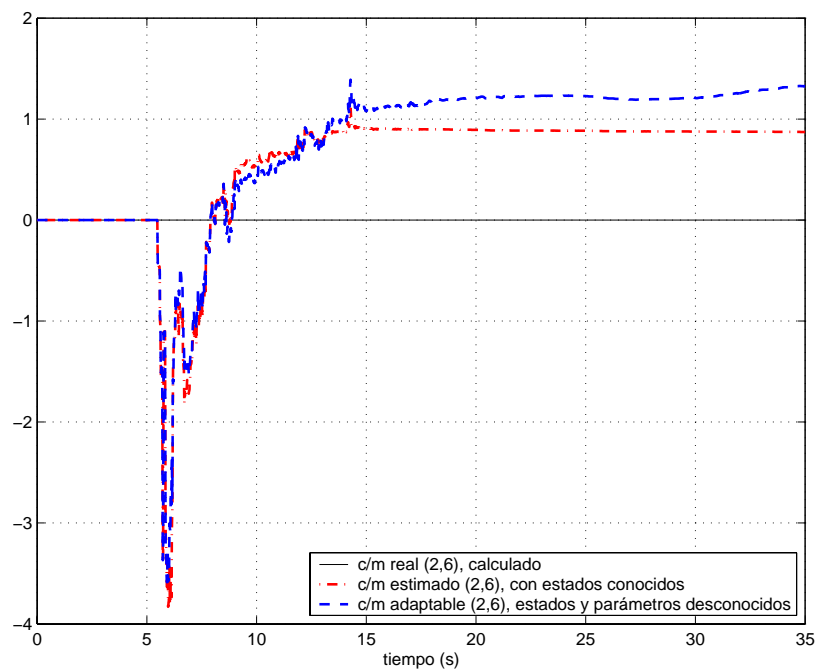


Figura 6.11: Comportamiento dinámico del elemento (2,6) de la matriz  $M^{-1} C$

modelo matemático que reproduce, con un error pequeño, la salida del sistema.

Sin embargo, como se ha mencionado, el proceso de identificación recupera un conjunto de parámetros que permiten obtener una salida estimada igual a la salida medida, y estos parámetros identificados no son necesariamente iguales a los que indica la estructura del modelo del sistema. Una muestra clara de lo anterior se observa en la Fig. 6.11, donde se muestra el comportamiento del elemento (2,6) de la matriz  $M^{-1} C$ ; el valor calculado de acuerdo a la estructura matricial del modelo es cero. No obstante, el valor después de 30 segundos, tanto del algoritmo de identificación como del algoritmo adaptable, no llega al valor calculado y el valor final es diferente de cero. Por lo que se puede concluir que el observador adaptable propuesto permite recuperar los estados y parámetros del sistema, sin garantizar que los parámetros sean los verdaderos, no obstante, garantizan que la señal de salida sea la verdadera, como se observa claramente en la Fig. 6.8.

Cuadro 6.2: Frecuencias modales obtenidas mediante el observador adaptable

frecuencias modales reales	frecuencias modales adaptables
<i>Hz</i>	<i>Hz</i>
1,649	1,649
2,418	2,417
4,945	2,565
6,092	4,947
7,164	5,673
7,606	6,102
9,619	7,181
11,01	7,578
11,34	8,955
14,28	9,626
16,38	10,73
18,19	11,31
28,24	14,27
39,50	18,34
41,53	19,77

El hecho de que el identificador paramétrico, como parte del observador adaptable, obtenga un conjunto de parámetros diferentes a los reales, se aprecia en las frecuencias modales obtenidas a través de éste. La tabla 6.2 muestra como son las frecuencias modales del sistema simulado y las frecuencias modales obtenidas a través del observador adaptable. Se

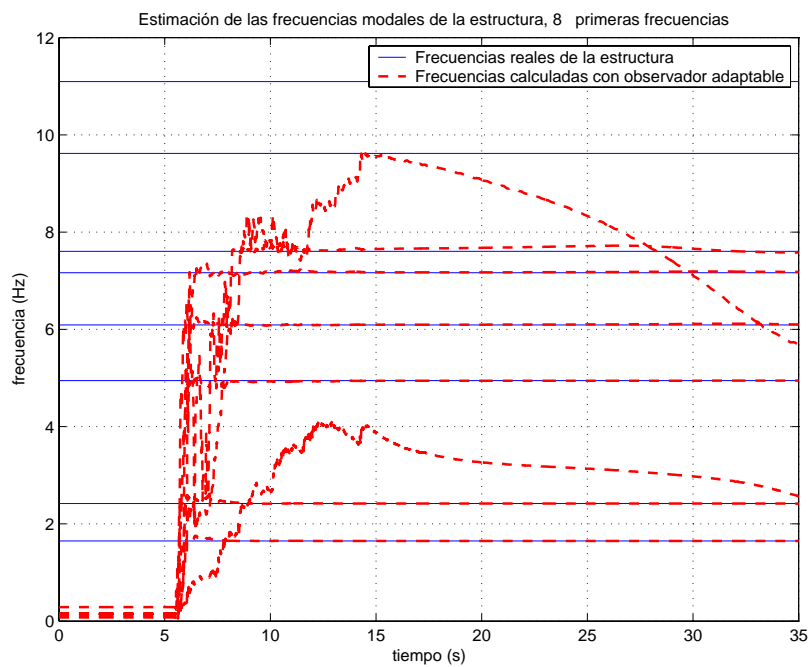


Figura 6.12: Frecuencias de oscilación del edificio simulado de cinco pisos

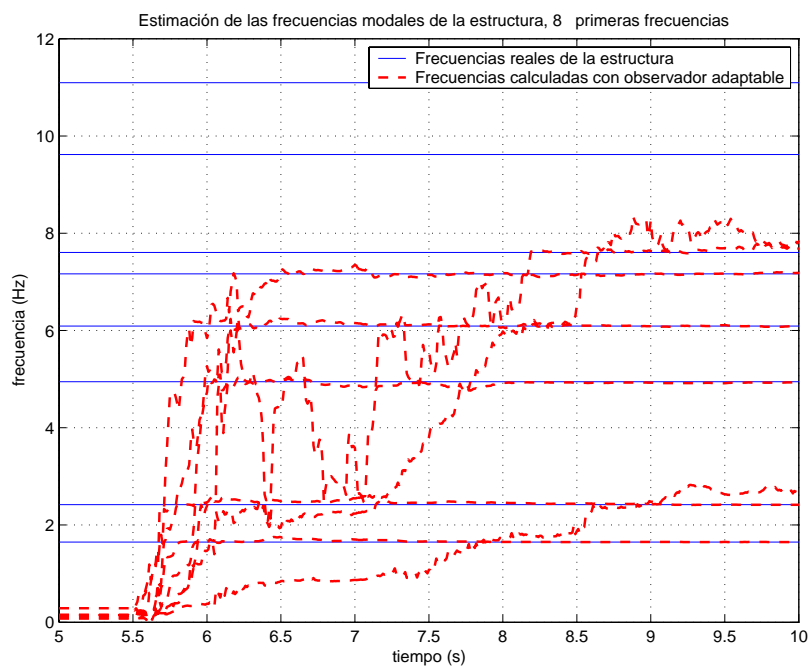


Figura 6.13: Detalle del comportamiento de las frecuencias de oscilación

observa que no se recuperan todas, sin embargo, los primeros cinco modos de vibración se recuperan con un error pequeño, menor al 1%. Esto es de gran importancia, pues para los ingenieros civiles a través de estos modos de vibración obtienen información valiosa de cómo se comportará un edificio bajo determinada excitación.

La Fig. 6.12 muestra el comportamiento en el tiempo de las primeras 8 frecuencias, y en la Fig. 6.13 se hace un acercamiento a los primeros segundos a partir de que el algoritmo comienza a calcular. Se observa que la convergencia de las primeras frecuencias se obtiene en pocos segundos, no así para las frecuencias superiores, las cuales tardan en converger y no al valor real. Aun con estas divergencias el observador adaptable recupera las primeras frecuencias de oscilación con sólo mediciones de aceleración.

### 6.3. Resultados numéricos para modelo *experimental*

El modelo *experimental* (ME), así como la plataforma, sobre el cual se realizaron las pruebas se describe con detalle en el capítulo 7. Un diagrama básico de este modelo es el que muestra la Fig. 6.1. Al igual que el modelo simulado, al ME se le excitó con el sismo de SCT.

Las pruebas experimentales indican que el observador adaptable tiene buen desempeño. Sin embargo, existen algunas variaciones que se explican a continuación.

Para las pruebas experimentales, se reprodujo en la mesa vibradora<sup>5</sup> el sismo de SCT, y se tomaron muestras de todos los sensores, 17 acelerómetros y 12 LVDT<sup>6</sup>, cada 2 milisegundos, y éstas fueron filtradas a 20 Hz<sup>7</sup>. No obstante que las señales de los sensores fueron filtradas, señales de ruido de baja frecuencia se introdujeron al resolver el observador adaptable, provocando un mal desempeño del algoritmo, principalmente en la observación de los desplazamientos de los tres GDL para todos los pisos.

Con respecto a la observación de los estados: desplazamientos y velocidades, se tiene lo siguiente. La Fig. 6.14 muestra el comportamiento de los desplazamientos en el segundo piso para cada GDL, se observa el desplazamiento real, que se mide a través de un LVDT, el des-

---

<sup>5</sup>Ver capítulo 7 para más detalles de la mesa vibradora.

<sup>6</sup>LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*), sensores de desplazamiento.

<sup>7</sup>Ver capítulo 7 para conocer el por qué este valor de frecuencia.

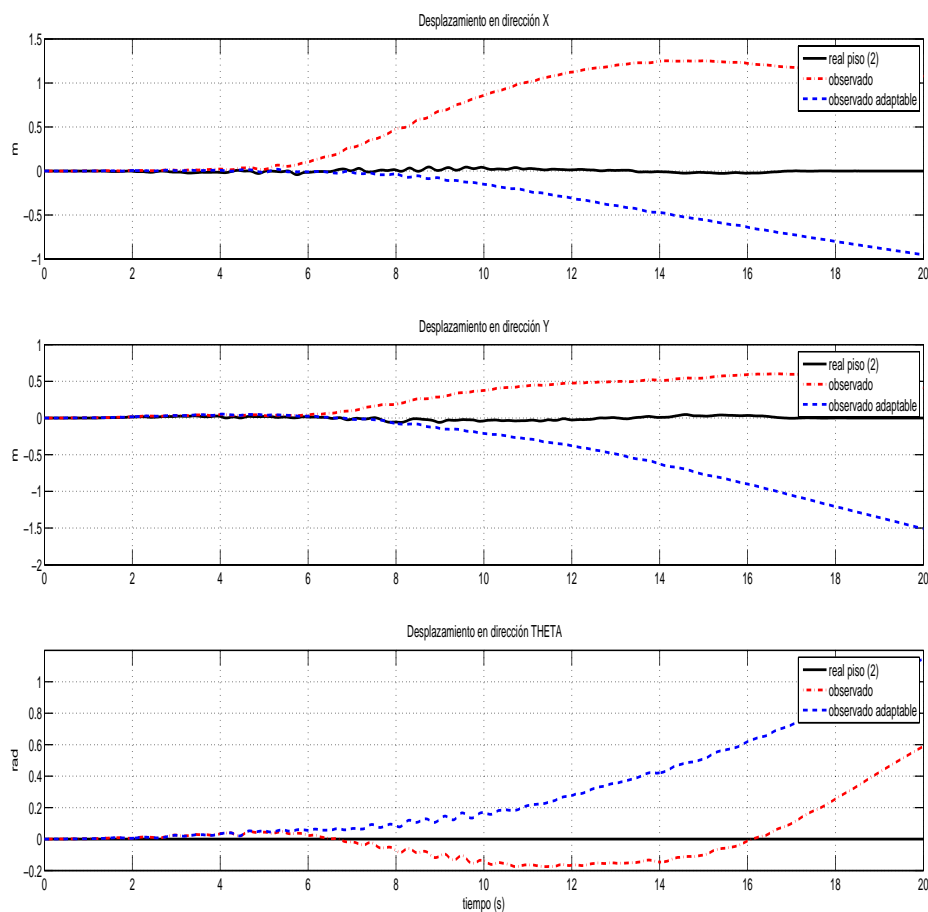


Figura 6.14: Señales de desplazamiento: real, observado, observado adaptable

plazamiento obtenido por un observador convencional, y el desplazamiento como resultado del observador adaptable. Se aprecia claramente que las estimaciones para estos estados no son buenas, divergen, caso contrario a los resultados mostrados en la sección anterior. Esto en parte es debido a las señales de ruido de baja frecuencia de los sensores, pues al tener ruido en una señal de aceleración e integrarla, el error va acumulándose cada tiempo de muestreo, en este caso de 2 milisegundos.

La Fig. 6.15 muestra las velocidades de los tres GDL del segundo piso. Las velocidades mostradas son mediante dos esquemas: un observador adaptable, en el cual se desconocen parámetros y estados, y un observador convencional en el cual se considera conocidos los parámetros que en este caso son los parámetros calculados del ME. Nótese que ambas

señales son parecidas hasta cierto punto donde comienzan a diverger. El valor teórico que se esperaría de la velocidad al finalizar la excitación es cero, sin embargo, no es así en el resultado del observador adaptable: el valor de la velocidad al finalizar la excitación tiene un desfaseamiento a partir del cero.

La causa del desfaseamiento es la acumulación del error de integración debido a las señales de ruido de los sensores, que en el caso de la velocidad no se aprecia en forma drástica, pero que, en el caso de los desplazamientos es muy notorio pues se tiene una componente constante que al integrarse, ésta cambia a una componente lineal, Fig 6.14.

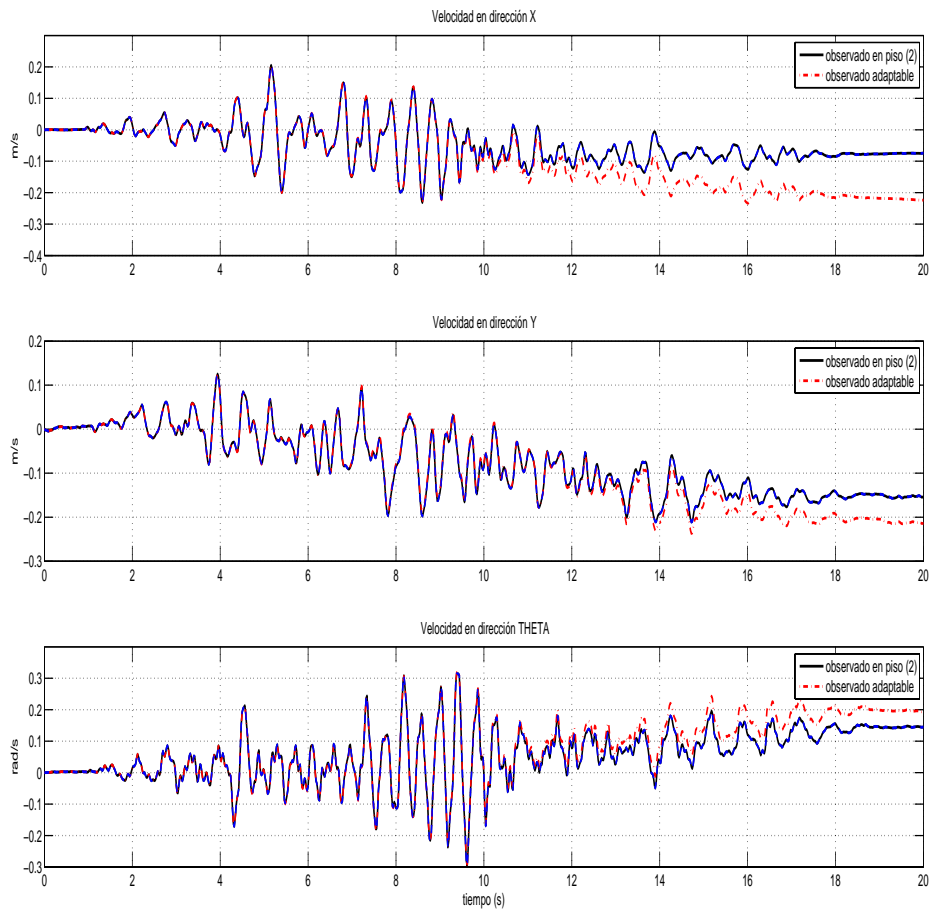


Figura 6.15: Señales de velocidad: observado, observado adaptable

Respecto a las aceleraciones absolutas de salida, la Fig. 6.16 muestra que los resultados del observador adaptable son satisfactorios; así como el resultado del identificador

paramétrico. El error es pequeño tal que casi no se aprecia la diferencia entre las señales obtenidas con el observador adaptable y las señales reales. Es importante decir que el observador adaptable está diseñado para que reduzca el error en la salida, no en los estados, como lo muestra la Ec. (5.12); lo mismo sucede para el algoritmo de identificación paramétrica, Ec. (3.7). Debido a esto es que se tienen errores significativos en los estados, mas no en la salida, que de acuerdo a la parametrización del modelo, es la aceleración absoluta que sufre cada GDL.

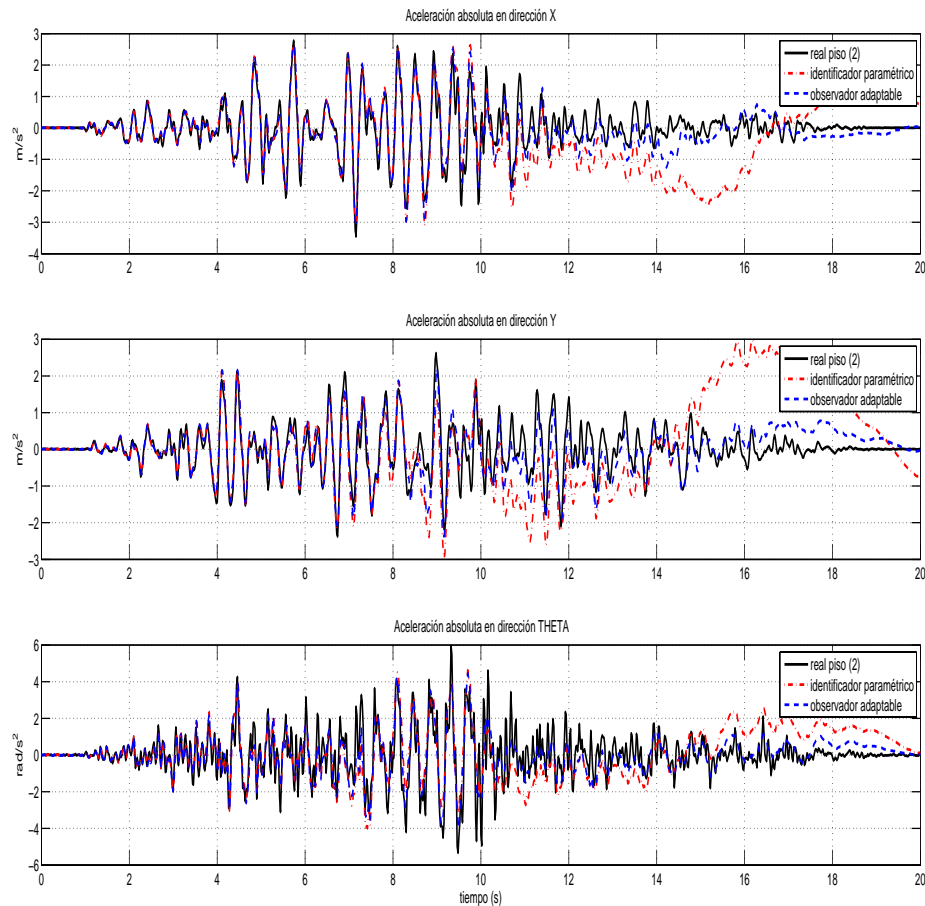


Figura 6.16: Señales de aceleraciones absolutas: reales, estimadas, observadas adaptables

Aunado a lo anterior, el observador adaptable es suficientemente robusto para soportar errores de medición debido al ruido, pues lo que busca es que el error de salida sea nulo. Sin embargo, estas señales ruidosas sí afectan a la observación de estados, como lo muestran las



Figs. 6.14 y 6.15.

Las normas de las señales de los errores para el observador adaptable y el identificador paramétrico se muestran en la Fig. 6.17. Nótese que, como se ha mencionado, el error de los esquemas mencionados es pequeño comparado con el error de un observador convencional. El resultado es congruente con lo antes mencionado: el esquema del observador adaptable hace que el error de salida sea nulo, no así el error de los estados.

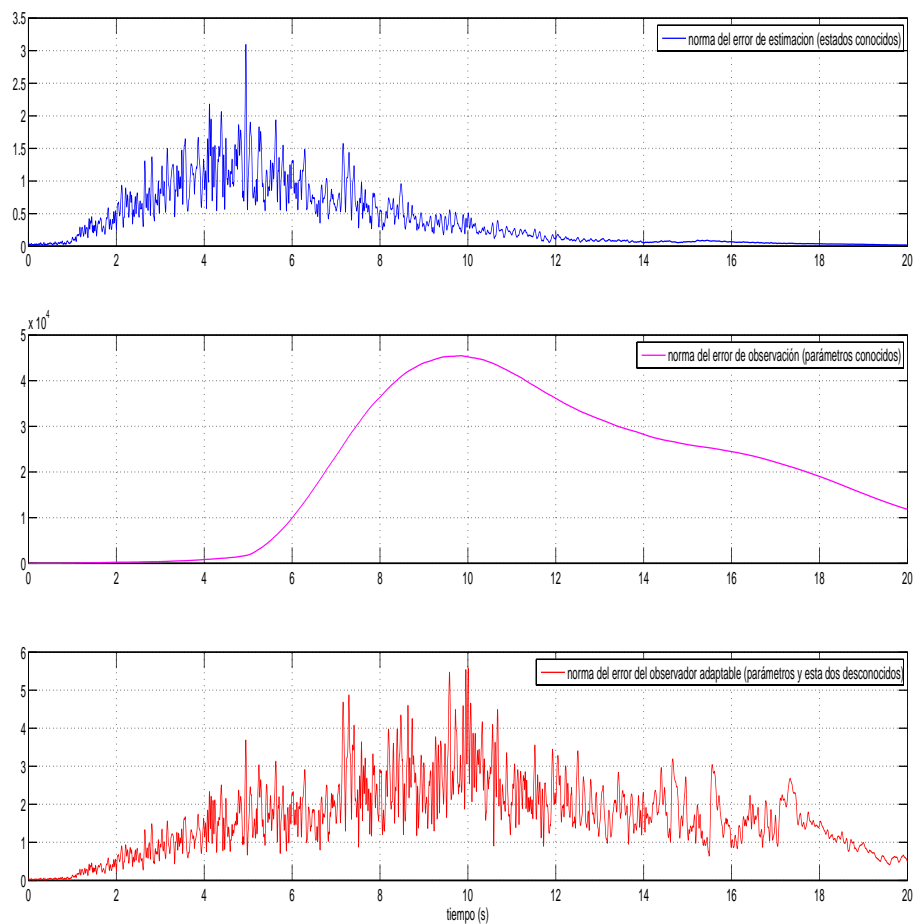


Figura 6.17: Señales de norma de errores

La identificación de los parámetros a través del observador adaptable es tal que logra que el error de salida sea nulo en tiempo infinito, sin embargo, para lograrlo los parámetros, que de acuerdo a la estructura tridiagonal de las matrices del modelo matemático, Ec. (2.9),

muchos elementos son nulos, en el observador adaptable estos elementos nulos toman valores no nulos provocando un ajuste en todos los demás elementos de la matriz.

El hecho de que los elementos sean nulos en la estructura del modelo matemático, a través de una estructura tridiagonal de la matrices involucradas, y cómo éstas se unen para lograr la interacción de los tres GDL por piso (dos desplazamientos y una rotación), Ecs. (2.6) y (2.7), indica que los parámetros sólo están relacionados con los pisos adyacentes a él, restricción importante sin duda. Sin embargo, importante igualmente es que esta estructura indica que los parámetros están relacionados, o no lo están, en el mismo piso pero con los diferentes GDL, es decir, que el parámetro de rigidez del piso  $i$  en la dirección  $X$  no está relacionado con el parámetro de rigidez del mismo piso pero en la dirección  $Y$ , en el caso que los marcos de la estructura tengan entre si un ángulo de 90 grados, como es el caso del ME. Estas restricciones del modelo no son necesariamente ciertas en un edificio real, existe relación no sólo entre los niveles adyacentes sino entre todos ellos, y más aun, que los marcos tengan entre si un ángulo de  $90^\circ$  no significa que no existe relación entre los parámetros de los GDL del mismo piso.

Un ejemplo de lo anterior se muestra en la Fig. 6.18 que es el comportamiento en el tiempo del elemento (5,5) de la matriz  $M^{-1} K$ , nótese que la línea continua indica el valor teórico calculado de acuerdo a la geometría y materiales usados en el ME, sin embargo, los valores del parámetro son significativamente diferentes, tanto para el observador adaptable como para el identificador paramétrico.

La variación en el valor de los parámetros es por dos razones: la primera está relacionada con el ruido en la mediciones, discutido en líneas anteriores, y la segunda tiene que ver con que el valor calculado del parámetro es diferente del valor real, que es una de las razones principales de existir de este trabajo; el valor del parámetro real es diferente del valor teórico calculado.

La Fig. 6.19 muestra el comportamiento del elemento (2,7) de la matriz  $M^{-1} C$ , nótese que el valor del parámetro de acuerdo a la estructura de la matriz tridiagonal es cero, mas, el valor obtenido a través del observador adaptable es diferente de cero. En este caso, el hecho de que la estructura del modelo matemático indique que el parámetro es nulo, indica que no existe relación entre los parámetros correspondientes a la dirección  $X$  con

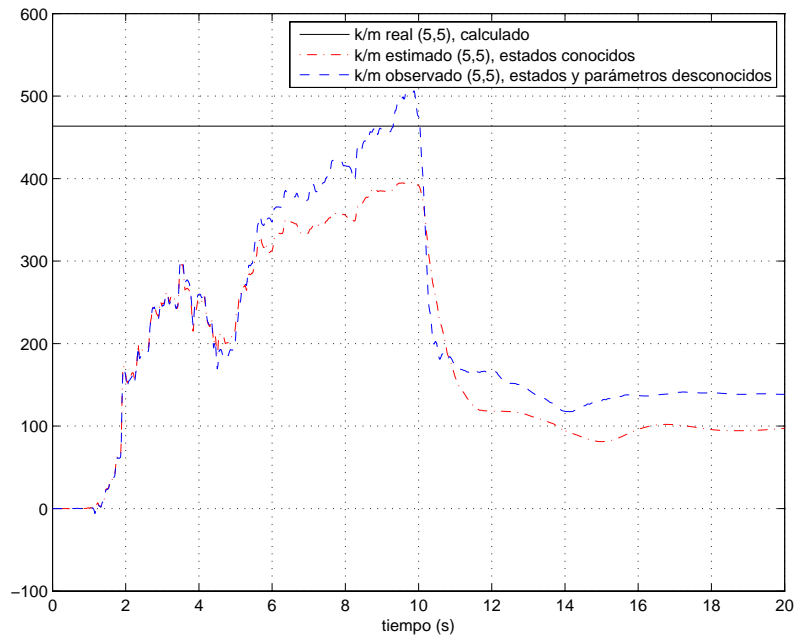


Figura 6.18: Elemento (5,5) de la matriz  $M^{-1} K$

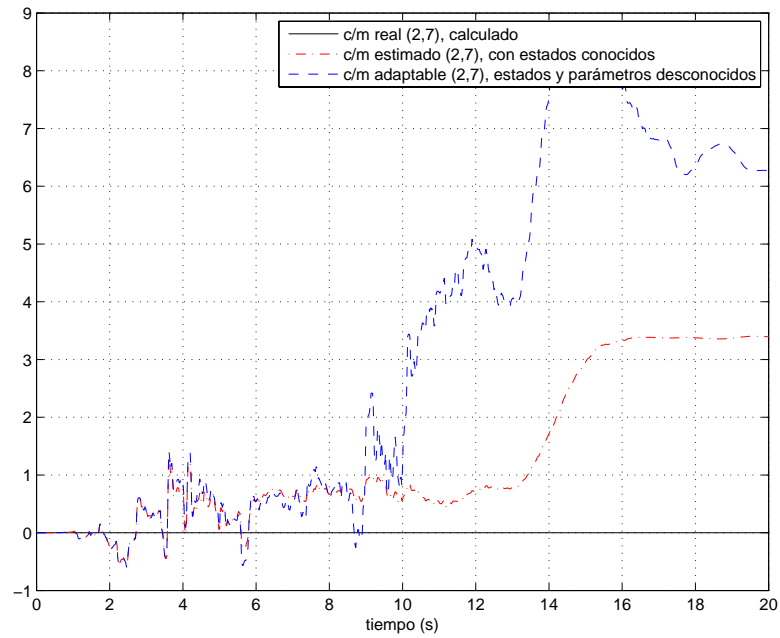


Figura 6.19: Elemento (2,7) de la matriz  $M^{-1} C$

los correspondientes a la dirección  $Y$ , situación no necesariamente cierta en un edificio real, aunado a que el valor real del parámetro es diferente del valor teórico.

Se mostraron los resultados obtenidos para un piso y sólo dos ejemplos de parámetros. Sin embargo, el mismo comportamiento sucede con los demás pisos, así como con los parámetros. Se hicieron numerosos ensayos experimentales y los resultados son prácticamente iguales, la única diferencia entre ellos son las condiciones iniciales de las Ecs. (5.15)-(5.16) y el valor de la matriz  $L$  de la Ec. (5.13). Modificando estas condiciones se logra un buen o deficiente desempeño del algoritmo.

En la Fig. 6.20 se observa como la estimación de las frecuencias modales no es satisfactoria, pues no existe rápida convergencia de las mismas, y los valores a los cuales tienden a converger distan de los frecuencias obtenidas al aplicar un barrido de frecuencias a la estructura, ver tabla 7.2.

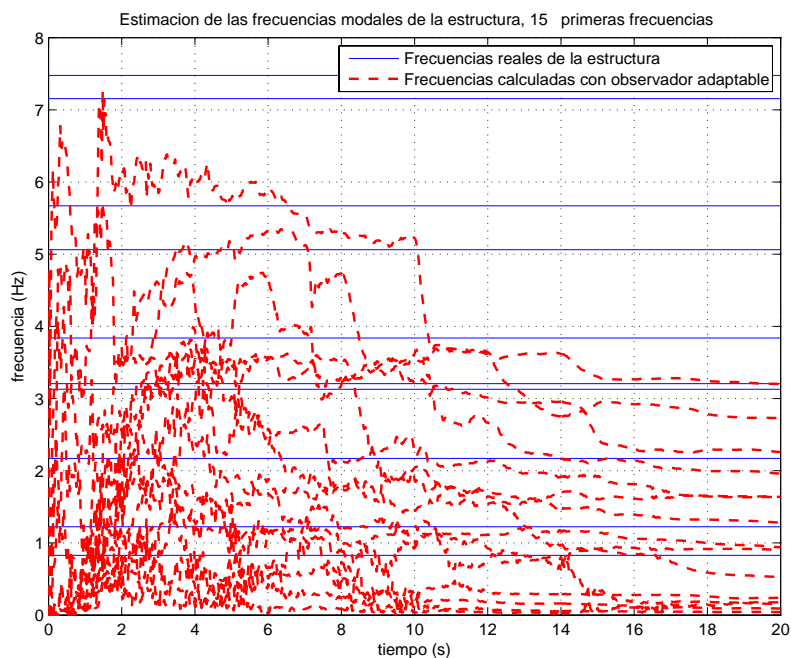


Figura 6.20: Cálculo de las frecuencias mediante el observador adaptable

Los resultados experimentales con el observador adaptable no son satisfactorios en la recuperación de los estados: velocidades y desplazamientos, a pesar de la buena reproducción de las aceleraciones absolutas. Al realizar un análisis de estas señales de aceleración,

se encontró un pequeño sesgo que, al integrarse una y dos veces, induce los errores en las velocidades y desplazamientos, respectivamente. Este sesgo se debe a la metodología de control elegida por el fabricante de los motores y no ha sido posible eliminarla completamente. Eliminar este sesgo es una tarea pendiente a realizar.

## Capítulo 7

# Equipo experimental

En el presente capítulo se describe el diseño y construcción de un modelo a escala de un edificio de cinco pisos, para la aplicación de los algoritmos descritos en los capítulos anteriores. Este modelo se coloca sobre una mesa vibradora capaz de reproducir sismos en dos GDL (direcciones  $X$  y  $Y$  perpendiculares entre si sobre el plano horizontal). Además, se presenta la instrumentación y etapa de adquisición de datos necesarias para el buen manejo de las mediciones requeridas por los algoritmos.

En esta etapa, de diseño y fabricación del modelo físico sobre el cual se realizan las pruebas experimentales, es necesario conocer las restricciones técnicas de la mesa vibradora sobre la cual se coloca el modelo *experimental*, por lo cual es importante hacer mención de las características de la mesa vibradora, así como de la plataforma experimental.

### 7.1. Plataforma experimental

La plataforma experimental es aquella con la cual es posible reproducir diversas excitaciones sísmicas en una mesa vibradora, así como adquirir, y en su caso procesar en tiempo real, datos de los sensores colocados en el modelo a probar. Cuenta con diferentes subsistemas: mesa vibradora, panel de control, centro de comando, instrumentación, centro de adquisición de datos (Carrera, Alvarez-Icaza, y Angeles, 2009). En la Fig 7.1 se muestra la interconexión de estas etapas. En ella, se realizan las pruebas de los algoritmos desarrollados en los capítulos anteriores.

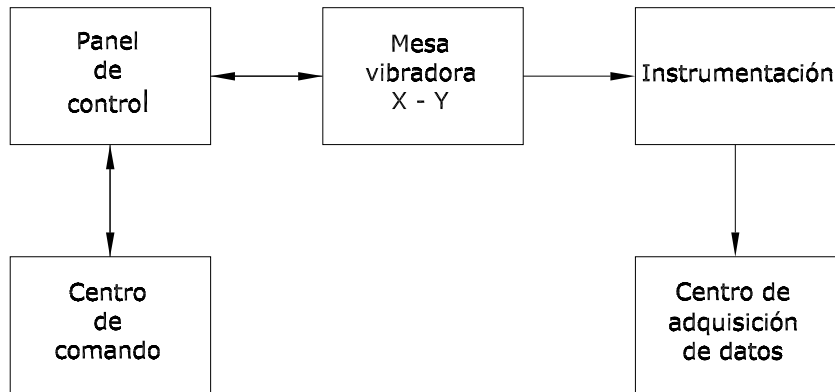


Figura 7.1: Diagrama de plataforma experimental

### 7.1.1. Centro de comando

El centro de comando está implementado mediante una computadora industrial *Direct 470* con un sistema operativo *Windows 2000* y una velocidad en su procesador de 566 MHz, en ella se encuentran dos tarjetas de adquisición de señales analógicas de entrada-salida. El software utilizado para la comunicación y programación de la mesa vibradora es un software especializado de los fabricantes de los motores usados por ésta (Park, 2003), y *Matlab*<sup>®</sup> para la generación de las trayectorias deseadas de la mesa (Matlab, 2006).

El centro de comando tiene dos formas de operación:

- Se comunica con el actuador de los servomotores para modificar los parámetros de operación, cargar el programa desarrollado por el usuario para seguimiento de trayectorias a través de una señal externa, o para actualizar el software del fabricante
- Genera las señales de seguimiento para la mesa y éstas son enviadas a través de los puertos analógicos de entrada del controlador de los servomotores vía convertidores digital/analógico.

### Comunicación y programación de los servomotores

La comunicación entre la computadora y los actuadores (Park, 2001) de los servomotores, Fig. 7.3, es a través de puerto serie con una velocidad de 9600 *baudios por segundo*. El

protocolo de comunicación lo maneja el programa *Motion planner* del fabricante, en su opción *Terminal*.

El programa residente cumple dos funciones: establece los parámetros de operación de los motores, y recibe comandos que el usuario envía a través de botones e interruptores que se encuentran en el panel de control, Fig. 7.2.

Opciones disponibles a través del programa residente:

- INICIO: programa los parámetros de operación y realiza un barrido en toda el área de trabajo para reconocer los límites físicos de recorrido, y que en su caso el usuario detecte obstáculos que impidan la operación adecuada de la mesa
- MANUAL: reconoce comandos a través de los interruptores del panel de control, Fig 7.2, y con ellos se pueda desplazar la mesa en toda el área de trabajo
- SEGUIMIENTO: es la tarea principal de la mesa. En esta opción es posible que la mesa reproduzca los movimientos deseados por el usuario. Los servomotores entran en un lazo de seguimiento de una señal de voltaje externa, que es determinada por los desplazamientos deseados. El tiempo de muestreo en esta opción es de 2 milisegundos, con una velocidad máxima de 3 m/s.

### **Generador de movimientos y supervisión**

La generación de trayectorias deseadas se realiza con un programa de *Simulink*<sup>®</sup> y se ejecuta en tiempo real (Simulink, 2006). El programa envía las señales deseadas a los actuadores a través de convertidores digital/analógico que se encuentran en las tarjetas de adquisición de datos. Las señales que se pueden generar son:

- ESCALÓN: con una amplitud deseada
- SENOIDAL: amplitud y frecuencia deseadas
- BARRIDO DE FRECUENCIA: amplitud variable y con un intervalo de frecuencia de 0,01 a 10 Hz en 40 segundos



- **SISMO:** reproduce los desplazamientos de un registro sísmico, éste puede ser modificado en tiempo y magnitud para no exceder los límites físicos de la mesa.

El periodo con que se generan las tres primeras señales es de 10 milisegundos, sin embargo, para una señal sísmica es variable, pues depende de los modos de vibración que se deseen excitar en la estructura de ensayo.

La supervisión de la mesa consiste en conocer los desplazamientos de ésta en los ejes  $X$  y  $Y$  en cada instante de la prueba, a través de sensores de posición. La visualización de las posiciones está dentro del programa de *Simulink*.

### **Sistema de adquisición de datos**

Para este sistema de adquisición de datos del Centro de comando, se hace uso de dos tarjetas de adquisición de datos (National Instruments, 2006) y dos sensores de posición LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*) (Transtek, 2009). Una tarjeta es de convertidores digital/analógico modelo *PCI6023E*, con ésta se generan las señales de referencia para los actuadores de la mesa; la otra tarjeta es de convertidores analógico/digital modelo *PCI6713* que recibe los voltajes de los sensores de posición mencionados. La comunicación entre las tarjetas y *Simulink* es expedita, pues éste contiene los controladores de las tarjetas.

#### **7.1.2. Panel de control**

Éste es un gabinete metálico que contiene a los actuadores de los servomotores lineales y su fuente de alimentación. Igualmente, alberga el conjunto de interruptores, botones y luces indicadoras que permite al usuario dar comandos de forma **MANUAL** a la mesa vibradora. Además, tiene un botón de emergencia que desactiva todo el sistema, Fig. 7.2.

#### **Actuadores de los motores lineales**

Éstos son de *Parker* (Park, 2001), contienen la fuente de alimentación y el software que controla los motores. El software recibe comandos desde una computadora personal (PC) conectada por vía serial *RS232*, así como de señales digitales conectadas en la parte frontal del panel de control.



Figura 7.2: Panel de control

### Interfaz usuario-programa principal

El programa principal, residente en los actuadores, es desarrollado por el usuario. Al activar el interruptor de encendido (ON/OFF), Fig. 7.2, el sistema operativo ejecuta el programa principal que consta de dos etapas: MANUAL y AUTO.

En el modo MANUAL, el interruptor de la Fig. 7.2 debe estar en esta posición (MAN), se puede ejecutar el comando de barrido del área de trabajo para comprobar que ningún obstáculo se opone al movimiento de la mesa; se pueden dar comandos de desplazamientos discretos de  $\pm 5$  mm en las direcciones  $X$  y  $Y$ ; y un comando de inicio de operación que al ejecutarse la mesa se coloca en el centro del área de trabajo en espera de señales de referencia.

En el modo AUTO, se requiere que el interruptor esté en esta posición, y que se oprima el botón de HOME seguido del botón RUN, Fig. 7.2; al ejecutar lo anterior el programa ignora todo comando externo y entra en la fase de seguimiento de una señal externa, que se suministra a través de un convertidor digital/analógico integrado al controlador de los actuadores. Esta señal externa es la que se genera con *Simulink*.

### 7.1.3. Mesa vibradora X-Y

La mesa consta de una estructura de aluminio, cuya base es de  $80 \times 80$  cm, y una altura de 60 cm, sujeta a un zócalo de concreto. Sobre la mesa se tiene una placa de acero y encima de ella se encuentran los motores lineales, colocados en forma ortogonal uno sobre el otro, Fig. 7.3; y sobre el motor superior se encuentra una placa de aluminio sobre la cual se coloca la estructura de ensayo. Es importante mencionar que la masa máxima que soporta la mesa es de 100 kg.

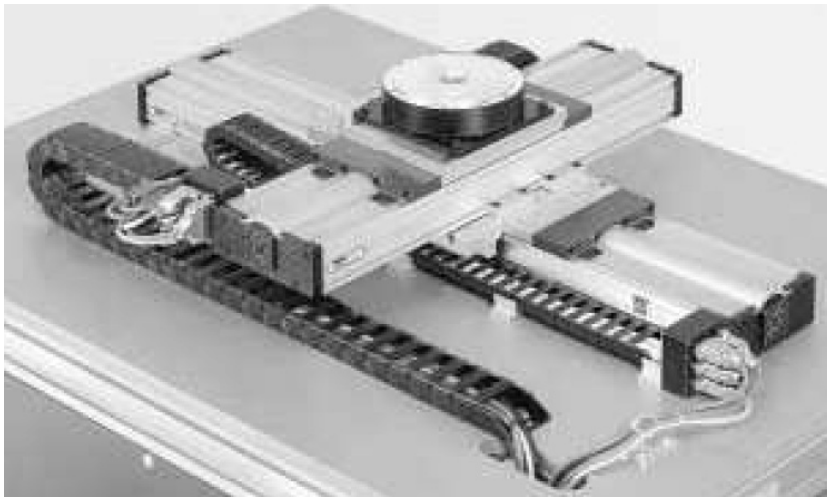


Figura 7.3: Motores lineales en forma ortogonal

1. *Base para modelos*: es una placa de aluminio 6061 de  $0,75 \times 0,75$  m y 15 mm de espesor que está fija sobre el motor superior. Esta placa tiene una matriz de orificios de 5 cm entre cada uno de ellos, que sirven para fijar la estructura, Fig 7.4.
2. *Motores lineales*: éstos son servomotores lineales de *Parker* (Park, 2003) modelo

406T03LXR, con aceleración y velocidad máximas de 5 g y 3 m/s, respectivamente. Tienen una resolución de  $5 \mu\text{m}$  en posición, un desplazamiento máximo de 250 mm. Además, pueden proporcionar una fuerza continua de 75 N y una fuerza pico de 225 N, Fig. 7.3.

3. *Sensores de posición de la mesa*: éstos son para conocer los desplazamientos de la mesa en cada instante de tiempo durante el experimento, éstos son dos LVDT (*Linear Variable Differential Transformer*) modelo 0356 de *Transtek* (Transtek, 2009), uno para cada eje. Están conectados mediante un convertidor analógico/digital al sistema de adquisición de datos del centro de comando, para que éste supervise la posición de la mesa. Los sensores tienen un desplazamiento máximo de  $\pm 7,5$  cm, entonces el área de trabajo está restringida a un cuadrado de 15 cm de lado. Estos sensores están colocados sobre dos bases, una para cada eje de la mesa. La posición de los LVDT sólo se puede modificar en altura, puesto que la base está fija. Esto permite que la altura de los entresijos del modelo no están restringidos a ninguna altura en específico, como se muestra en la Fig. 7.6

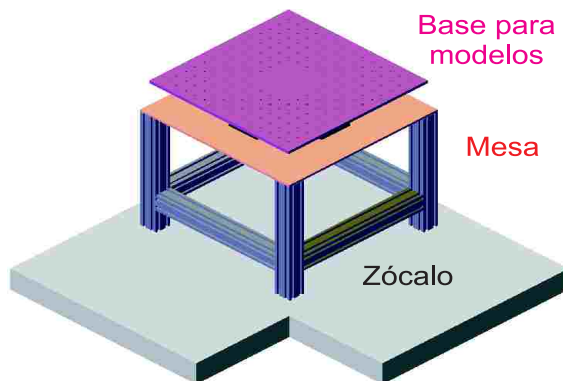


Figura 7.4: Mesa vibradora

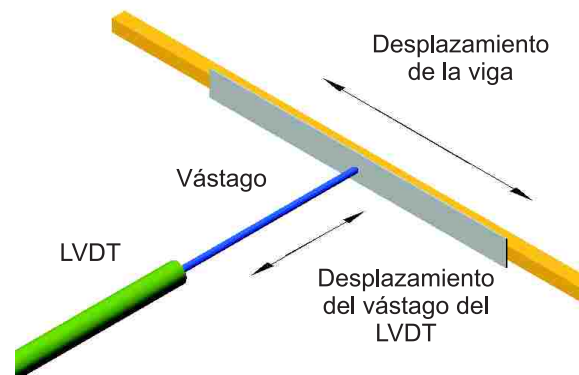


Figura 7.5: Desplazamiento del vástago

#### 7.1.4. Instrumentación

Se cuenta con 12 LVDT, sensores de desplazamiento; y 17 acelerómetros, sensores de aceleración.

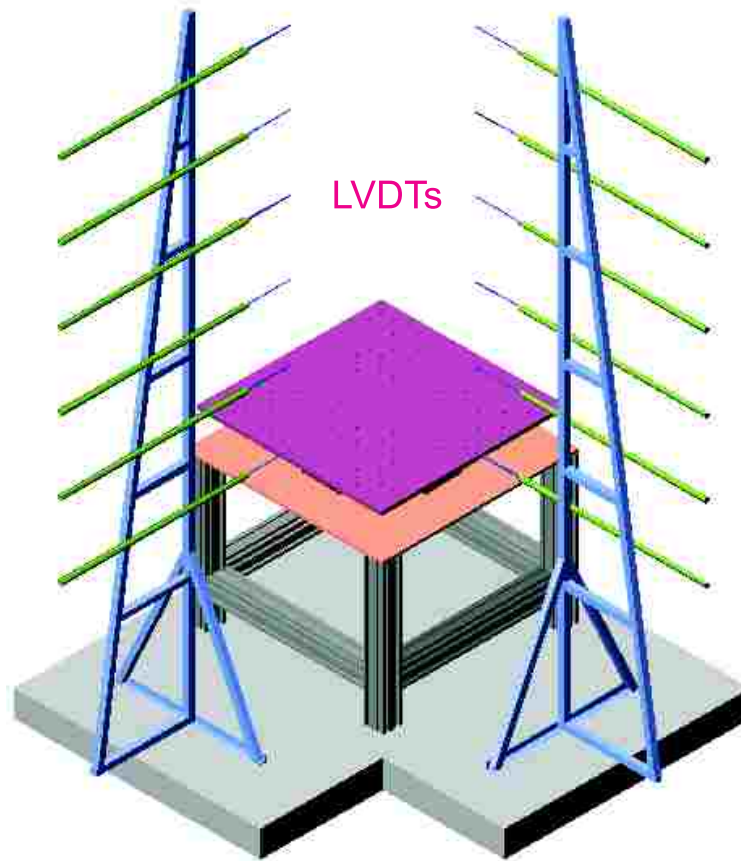


Figura 7.6: Mesa vibradora con LVDT

Los LVDT son, como ya se mencionó, de *Transtek*; se utilizan dos para la posición de la mesa y 10 más están disponibles. Están colocados sobre dos bases, una para cada eje, y éstas están ancladas al zócalo donde también está colocada la mesa. La posición de los LVDT es a un lado de la mesa, y en el centro del lado de trabajo de ésta, Fig 7.6. En cada base se encuentran 6 LVDT: uno para la posición de la mesa, que representa al suelo, y cinco más para los pisos de la estructura, uno por piso. Es posible modificar la distancia entre cada uno de los LVDT, lo que permite tener entrepisos en la estructura de ensayo de diversas medidas. Como la mesa se desplaza en dos ejes, los extremos de los LVDT que están en contacto con la estructura no pueden estar sujetos a ella, por lo que los vástagos de los LVDT tienen incorporado un resorte que permite que las puntas de éstos siempre estén en contacto con la estructura, sin embargo, ésta tiene movimiento en el eje perpendicular

al que miden aquéllos, entonces para que no se dañen las puntas, éstas se desplazan sobre placas sujetas a la estructura, Fig. 7.5.

Los acelerómetros son de *CFX Technologies* modelo *US5*, con medición de aceleración máxima de  $\pm 2$  g. En la superficie de la mesa se encuentran colocados dos de ellos para conocer la aceleración del suelo. Quince acelerómetros más se pueden colocar sobre cada uno de los pisos de la estructura a probar.

La colocación de los sensores en la estructura está definida por los requerimientos de señales medidas, esto es, de acuerdo a lo demostrado en el capítulo 2, son necesarios tres acelerómetros por piso: dos que midan en la misma dirección separados la mayor distancia posible, y uno más que mida en la dirección ortogonal a los primeros. El hecho de que se requieran dos acelerómetros en la misma dirección es porque éstos sólo miden aceleración longitudinal, sin embargo, para la solución de los algoritmos es necesario el conocimiento de la aceleración rotacional, dos acelerómetros separados permiten obtener esta información, y mediante un desarrollo cinemático se traslada las mediciones al centro de torsión (ver capítulo 2 para más detalles). El tercer acelerómetro se coloca en el centro de torsión, tal que no sea necesaria traslación alguna de su medición. No obstante, por razones de sujeción de aquél a la estructura, se coloca en el extremo del diafragma, como lo muestra la Fig. 7.7.

El uso del LVDT obedece al hecho de que es necesario tener la certeza que el observador de estados, Ecs. (5.13)-(5.14), realmente calcula las desplazamientos y velocidades reales, o al menos lo más parecidos a ellos. Entonces, los LVDT son sensores que permiten comprobar que el desempeño del observador es aceptable, al comparar los resultados del observador con las mediciones de aquéllos. Importante es decir que en un edificio real no es posible tener mediciones confiables de desplazamiento, pues se requiere un sistema inercial<sup>1</sup>, difícil de conseguir ante la presencia de un movimiento telúrico. Los LVDT, se colocan al centro de cada uno de los lados del diafragma. La Fig. 7.7 muestra como se colocan los sensores en cada diafragma de la estructura.

Finalmente, es importante mencionar que el voltaje de alimentación para todos los sensores: acelerómetros y LVDT, es de 12 voltios de corriente continua.

---

<sup>1</sup>Sistema que permanece inmóvil con respecto al movimiento de la tierra, y por consecuencia, al movimiento de cada uno de los pisos del edificio, ver definición 2.1 y Fig. 2.6.

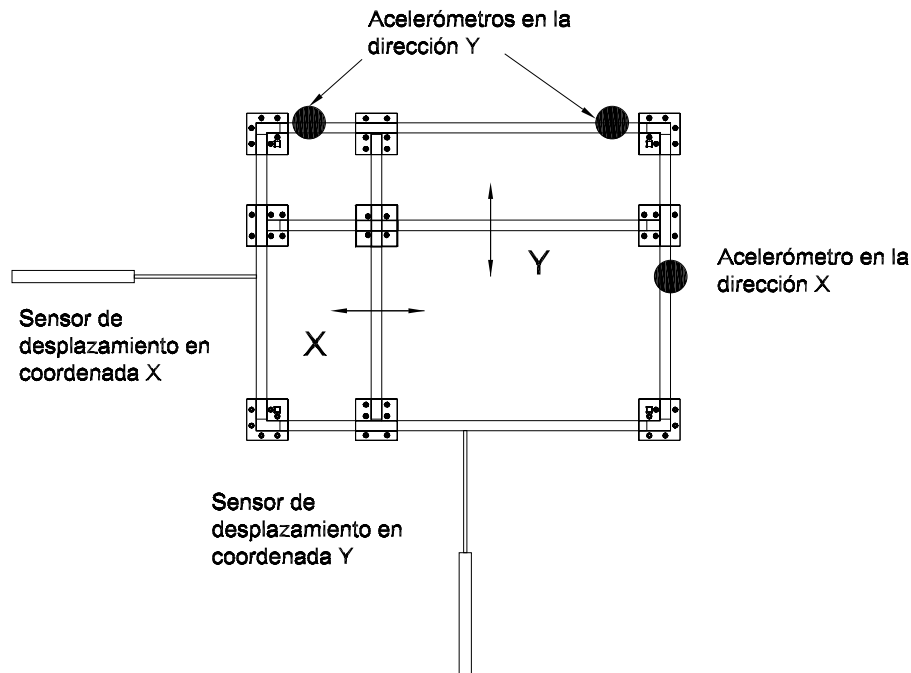


Figura 7.7: Colocación de sensores en el diafragma

### 7.1.5. Centro de adquisición de datos

El centro de adquisición de datos es a través de una computadora SUN modelo *Ultra20* con velocidad del microprocesador de 2,2 MHz, habilitada para recibir toda la información proveniente de la instrumentación, descrita en la sección anterior. Para ello se cuenta con dos tarjetas de adquisición de datos. El sistema operativo de la computadora es *SuSe Linux V10.1*, se utiliza este sistema operativo para garantizar que los tiempos de muestreo sean pequeños, pues el proceso que realiza el centro de adquisición de datos es:

- Leer los voltajes de los sensores y mediante tarjetas de adquisición de datos convertir aquéllos a valores numéricos
- Resolver los algoritmos de control, observación y/o identificación paramétrica en tiempo real. En el presente trabajo se requiere resolver las Ecs. (5.13)-(5.16)
- Guardar o entregar a través de las tarjetas de adquisición de datos, el resultado del algoritmo.

Para ejecutar estos tres pasos, la computadora los realiza en intervalos iguales de tiempo. A este intervalo de tiempo se le llama *tiempo de muestreo*. Considerando que una señal sísmica tiene una duración de 200 segundos, aproximadamente; entonces es necesario que el tiempo de muestreo sea el menor posible. Las pruebas realizadas muestran que un tiempo de muestreo de 2 milisegundos garantiza que no se pierde información de los sensores, pues en pruebas realizadas con un tiempo de muestreo de 1 milisegundo existía, eventualmente, pérdida de datos. Para que la computadora pueda realizar todos los cálculos de los algoritmos deseados, es necesario que el microprocesador destine toda su capacidad a estas tres tareas, para lograrlo se requiere desactivar todos los periféricos de la computadora, excepto los puertos PCI donde se conectan las tarjetas de adquisición de datos, y no manejar gráficos, Linux permite realizar esto de forma sencilla, es por ello que se eligió este sistema operativo.

### **Tarjetas de adquisición de datos**

Se utilizan dos tarjetas de *National Instruments* que incluyen convertidores analógico/digital con 16 entradas y dos salidas analógicas, y 12 bits de resolución para cada uno de los canales, modelo *PCI-MIO-16E-4* (National Instruments, 2006). Las tarjetas se conectan a través de módulos de conexiones *SCB-68* (National Instruments, 2002) externos a la computadora, uno por cada tarjeta, y en ellos se conectan todos los sensores necesarios. En la Fig. 7.8 se observa uno de estos módulos<sup>2</sup>.

### **Filtro digital de segundo orden**

En la adquisición de datos, se tiene un problema inherente a los sensores: éstos, además de la señal medida, envían una señal de ruido de alta frecuencia. Estas señales ruidosas provocan que al momento de pasar por el convertidor analógico/digital, los valores obtenidos no sean iguales con los de la señal real, provocando errores en los cálculos numéricos de los algoritmos. Por lo anterior, es necesario colocar filtros que atenúen las señales de alta frecuencia, es decir, el ruido.

Una forma fácil de implementar filtros, es hacerlos digitales: se lee el voltaje del sensor,

---

<sup>2</sup>Consultar el apéndice F para mayores detalles de la conexión de los sensores a las tarjetas de adquisición de datos.



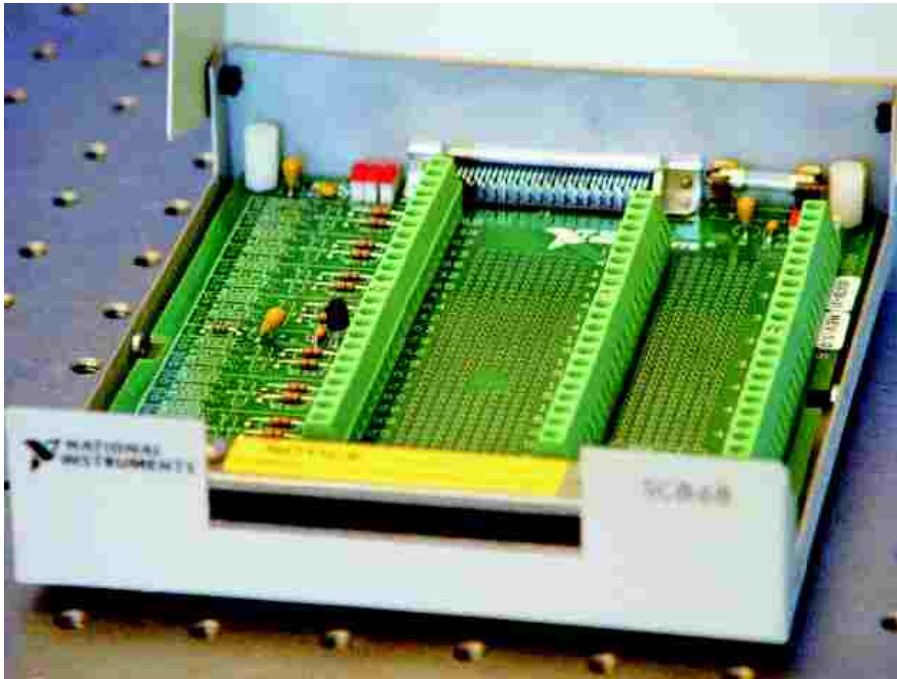


Figura 7.8: Módulo de conexiones *SCB-68*

se convierte a señal digital, y se hace pasar por un filtro. El filtro digital se implementa en un programa. La frecuencia de corte para los filtros se fijó en 20 Hz. Este valor se obtuvo al maximizar la relación señal a ruido en los canales de medición y se determinó experimentalmente. Es conveniente mencionar que las frecuencias fundamentales de interés en el modelo experimental están por debajo de este límite. Además, el periodo de muestreo utilizado para la ejecución del filtro digital podría utilizarse para señales con anchos de banda por abajo de los 250 Hz. El filtro digital pasabajas fue diseñado con *Matlab*.

Falta aún realizar pruebas con filtros analógicos entre los sensores y la tarjeta de adquisición. Ello permitiría garantizar a priori la ausencia de alias en el ancho de banda de interés. Sería conveniente comparar los resultados obtenidos con ambos tipos de filtrado.

Características del filtro:

- Filtro digital Butterworth de 2<sup>o</sup> orden
- Frecuencia de corte de 20 Hz
- Tiempo de muestreo de 2 milisegundos.

El filtro tiene la siguiente función de transferencia digital

$$\frac{S_f(z)}{S(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2},$$

donde  $S_f(z)$ ,  $S(z)$  son las transformadas  $z$  de la señal filtrada del sensor y la señal sin filtrar del mismo, respectivamente. Ambas señales son digitales, puesto que la señal del sensor ha pasado por el convertidor analógico/digital. Al momento de ser implementada en forma digital esta función de transferencia, se tiene

$$S_f(k) = \frac{-a_1 S_f(k-1) - a_2 S_f(k-2) + b_0 S(k) + b_1 S(k-1) + b_2 S(k-2)}{a_0},$$

donde  $S_f(k)$ ,  $S_f(k-1)$  y  $S_f(k-2)$  son las señales filtradas,  $S(k)$ ,  $S(k-1)$ ,  $S(k-2)$  denotan las señales sin filtrar del sensor. Para ambos casos,  $k$  representa la señal en el periodo de tiempo presente,  $k-1$  un periodo de tiempo antes, y  $k-2$  dos periodos de tiempo antes.

Los valores obtenidos de los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$  para las características mencionadas del filtro digital son

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1,6475 \quad a_2 = 0,7009 \quad b_0 = 0,013359 \quad b_1 = 0,026718 \quad b_2 = 0,013359.$$

El mismo filtro se aplica tanto para las señales de LVDT, como de acelerómetros; pues las señales de interes, para ambos casos, tienen una frecuencia menor a 20 Hz.

La Fig. 7.9 muestra la señal no filtrada de posición de la mesa tomada de un LVDT, nótese que una señal ruidosa de alta frecuencia está presente a lo largo de toda la trayectoria, se observa como un aumento en la amplitud de la señal. En la Fig. 7.10 se aprecia la señal del mismo sensor, sólo que ésta ha pasado por el filtro digital descrito, y el resultado es la atenuación de las señales de alta frecuencia, que se observa notoriamente en toda la trayectoria de la gráfica.

La Fig. 7.11 muestra la señal no filtrada de un acelerómetro, donde no se observa cuál señal es la ruidosa y cuál es la señal de aceleración. Al aplicar el filtro a aquélla, se atenúan las componentes de alta frecuencia, y entonces se obtiene la señal de aceleración filtrada, Fig. 7.12. Es importante notar que si se resuelven los algoritmos con los datos no filtrados,

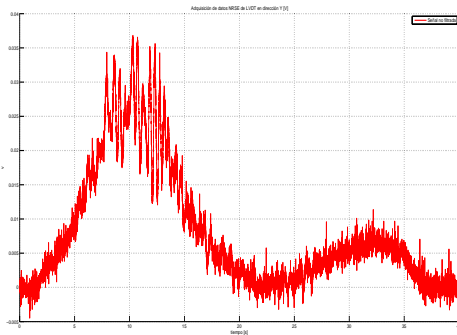


Figura 7.9: Señal de LVDT no filtrada

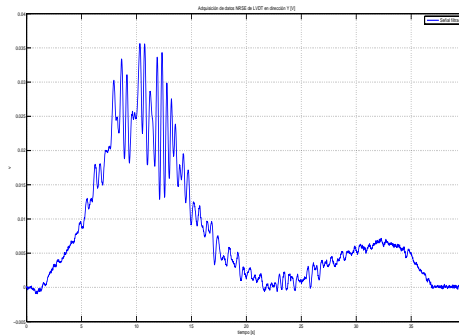


Figura 7.10: Señal de LVDT filtrada

el error que se obtiene sería mayor al mínimo permisible o no se obtendría convergencia asintótica. Las figuras muestran las mediciones de posición y aceleración de la reproducción del sismo de SCT en la mesa vibradora. La señal sísmica fue reducida en tiempo y magnitud.

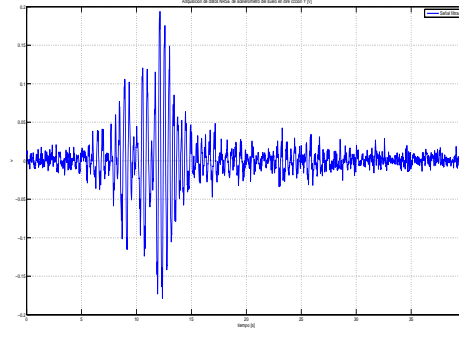
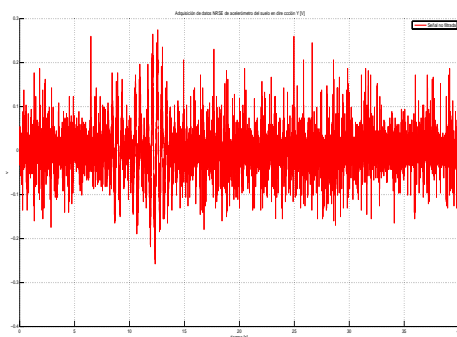


Figura 7.11: Señal de acelerómetro no filtrada    Figura 7.12: Señal de acelerómetro filtrada

## Programación

Para implementar la etapa de adquisición de datos, como se ha mencionado, se utilizan tarjetas de adquisición de datos de *National Instruments*. Sin embargo, con el objetivo de minimizar los tiempos de muestreo, la programación se realizó en *lenguaje C* (Deitel, H.M. y Deitel, P.J., 1995), (Ceballos Sierra, 2006). El programa se ejecuta en *SuSe Linux V10.1*, en el cual el usuario accede a un menú donde puede especificar: tiempo de muestreo, tiempo

total de adquisición de datos, número de ciclos y tiempo de adquisición de datos para obtener los valores de desfase de los sensores, señal de disparo, indicar las matrices de inicio del algoritmo (5.13)-(5.16).

Es importante mencionar que el programa se ejecuta en el nivel 2 de *Linux*, y sin utilizar la parte gráfica de *Linux*, lo cual permite que la mayor parte de la capacidad de procesamiento del microprocesador se use para procesamiento matemático.

Debido a que los acelerómetros, cuando no se mueve la estructura, envían un voltaje promedio de 2,5 voltios, es necesario que se reste este valor a las mediciones realizadas; lo mismo sucede con los LVDT, éstos envían un voltaje promedio de 0,5 voltios. Como se ha mencionado, es necesario restar estos desfases en las mediciones realizadas. Por lo anterior, el programa inicializa las tarjetas de adquisición de datos, toma muestras de los 29 sensores colocados: 12 LVDT y 17 acelerómetros, iniciando tantos ciclos como el usuario desee, con un tiempo también especificado por aquél, para obtener el valor medio de las señales de los sensores y restar éste a las mediciones de las pruebas.

Al terminar de obtener los valores medios de los sensores. El programa pasa a una etapa de espera en el cual el usuario debe decidir cómo se inician las pruebas: modo manual o modo por disparo.

- *Modo manual*: en éste, el usuario determina mediante la tecla *ENTER* el inicio de la adquisición de datos de todos los sensores, y del procesamiento de aquéllos.
- *Modo por disparo*: el programa se ejecuta y comienza a tomar lecturas de los dos acelerómetros colocados en la superficie de la mesa, que indica el movimiento del suelo, si éste no tiene una aceleración mayor a una aceleración de disparo, el sistema seguirá tomando los datos de estos acelerómetros y comparándolos con el valor de disparo. Si la señal de aceleración del suelo es mayor a la señal de disparo, entonces comienza la adquisición de datos de todos los sensores y su respectivo procesamiento.

En cuanto al procesamiento de los datos, es necesario solucionar derivadas y/o integrales, como se observa en el algoritmo (5.13)-(5.16), haciendo indispensable el uso de métodos numéricos. En este caso con la finalidad de disminuir en lo posible el procesamiento numérico y con ello mejorar el tiempo de muestreo, se utilizó el método del trapecio (Burden, Richard

L. y Faires, J. Douglas, 1985).

Finalmente, el programa preguntará al usuario si desea guardar los datos obtenidos, y en caso afirmativo, el usuario elegirá un nombre del archivo indicando la extensión. Es altamente recomendable que ésta sea *.TXT*, es decir un archivo de texto, pues éste es compatible con casi cualquier programa de procesamiento de datos, con el objetivo de obtener gráficas o un procesamiento ulterior.

## 7.2. Modelo experimental

Para realizar experimentos fue necesario construir un modelo físico en el cual fuera posible modificar sus parámetros, principalmente la masa y el punto sobre el diafragma donde se concentra ésta; así como la rigidez de las columnas. Esto permite tener un modelo con asimetría en masa y en rigidez, y por ende movimiento en los tres GDL que se consideran por cada uno de pisos.

### 7.2.1. Especificaciones de diseño

En el diseño del modelo *experimental* (ME), se consideraron las características de la mesa vibradora, para que ésta fuera capaz de excitar los primeros modos de vibración del ME. De acuerdo a esto se consideró que las primeras frecuencias modales de éste fueran menores a 10 hertz. Además, una restricción importante es la masa máxima que soporta la mesa es de 100 kg. Un requerimiento adicional al diseño, es que fuera suficientemente dúctil con la finalidad de probar en él esquemas de control para atenuación de los desplazamientos en cada uno de los pisos (Alvarez-Icaza y Carrera, 2003) y se compruebe el buen desempeño de aquéllos. Por lo tanto, los requerimientos de diseño son:

- Masa total menor a 100 kg
- Ductibilidad suficiente para permitir desplazamientos en sus pisos  $\geq 3$  cm
- Cambios en la rigidez de sus columnas
- Facilidad para cambios en el número de pisos

- Cambios en la masa de cada piso, así como la posición de ésta dentro del diafragma
- Base de su estructura no mayor de  $70 \times 70$  cm
- Altura máxima de 1,85 m.

Para cumplir con los dos primeros requerimientos, la estructura del ME se construyó con aluminio. Para cumplir con los dos siguientes, se eligió un diseño tipo LEGO, es decir, que la estructura estuviera armada con bloques que permitan realizar cambios en la geometría de aquélla, tanto en número de pisos, altura de los entrepisos, y tamaño del diafragma.

Para lograr lo anterior se diseñaron bloques que permiten armar mediante tornillos la geometría deseada. La estructura está compuesta básicamente por 5 bloques diferentes, todos de aluminio, con los cuales es posible unir: columna-viga, vigas-cruceta, y cruceta-cruceta. Dos bloques se usan para unir las vigas con las columnas en las esquinas de la estructura, la columna pasa a través de un orificio en estos bloques y las vigas se colocan tal que forman una escuadra y mediante 6 tornillos se fija todo. La Fig. 7.13 muestra como se arma la esquina. Este esquema permite modificar la altura de los entrepisos sin dañar a la estructura; pues sólo es necesario aflojar los tornillos de sujeción, se modifica la altura y se aprietan nuevamente los tornillos.

Para unir las vigas con las crucetas, se usan dos bloques de diferente grosor. Estos al igual que los bloques que forman las esquinas, se sujetan mediante 6 tornillos, Fig. 7.14. Es importante notar que la sujeción por tornillos permite ajustar fácilmente la posición del centro de masa para cada diafragma, logrando con ello una estructura flexible desde el punto de vista geométrico, Fig. 7.16.

La unión de las crucetas, igual que en los casos anteriores, utiliza dos bloques, éstos tienen ranuras en las cuales entran aquéllas y evitan que se desplazen, Fig. 7.15. Tornillos distribuidos en forma simétrica sujetan a los dos bloques y aseguran que su posición sea fija. Sobre estos bloques se colocan placas de acero de  $20 \times 20$  cm que concentran la masa del piso en este punto. Las placas de acero tienen una masa de: 1, 2 y 4 kg, aproximadamente, dependiendo de su grosor, y pueden colocarse tantas como se desee sin exceder de 10 kg de masa por cada piso. Este límite en masa es por seguridad para evitar daños por deformación en las crucetas.

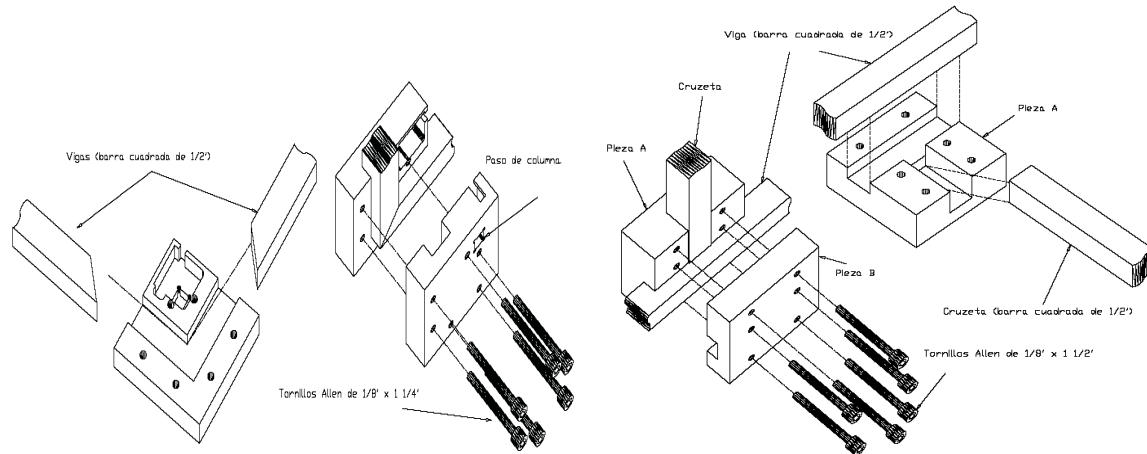


Figura 7.13: Unión en la esquina de la estructura

Figura 7.14: Unión de las vigas con las cruces

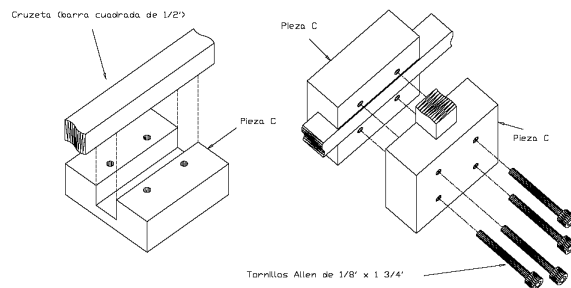


Figura 7.15: Unión de las cruces: centro de masa

Las vigas y columnas están hechas con barras cuadradas, las primeras son de 12,7 mm (1/2 plg) de lado, y las segundas de 6,35 mm (1/4 plg) de lado. La Fig. 7.17 muestra una estructura con tres pisos, obsérvese que el centro de masa para cada piso se encuentra en posiciones diferentes, con esto se logra asimetría en masa.

Para lograr asimetría en rigidez, se usa diferentes materiales para las columnas. En este caso como sólo son cuatro columnas, tres de ellas son de aluminio y otra de latón, todas con la misma sección transversal. La asimetría se logra por la mayor rigidez del latón.

- Coeficiente de rigidez del aluminio  $= 69 \times 10^9 [N/m^2]$
- Coeficiente de rigidez del latón  $= 95 \times 10^9 [N/m^2]$ .

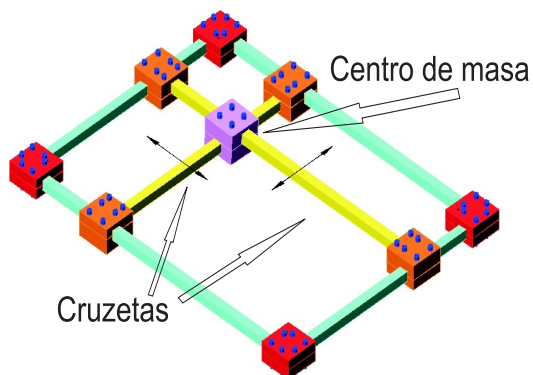


Figura 7.16: Diafragma con centro de masa móvil

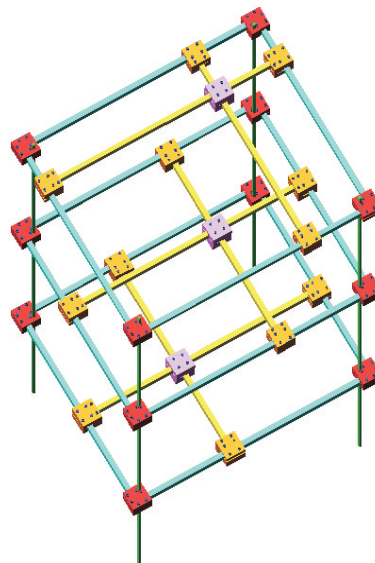


Figura 7.17: Estructura de un edificio de 3 pisos

La posición del centro de rotación o de rigidez ( $C_T$ ) es el mismo para todos los pisos y es, de acuerdo al sistema de referencia indicado en la Fig. 7.18

- 34,2 y 27,7 cm en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente.

Cuadro 7.1: Posición y valor de masa de cada piso

piso	coordenadas del centro de masa (m)		valor de masa (kg)
	$X$	$Y$	
$G_1$	0,165	0,160	9,181
$G_2$	0,240	0,335	9,208
$G_3$	0,180	0,180	9,162
$G_4$	0,395	0,265	9,198
$G_5$	0,180	0,335	9,247

La tabla 7.1 indica la posición y valor de masa de cada piso con respecto al sistema indicado en la Fig. 7.18. La Fig. 7.19 muestra el ME sobre la mesa vibradora.

La Fig. 7.18 muestra un esquema del ME en el cual se indican las dimensiones de cada entrepiso y del diafragma. Se muestra la posición del centro de masa para cada piso, representados por  $G_i$ , donde  $i$  toma valores desde 1 hasta 5, así como la posición del centro de torsión  $C_T$ .



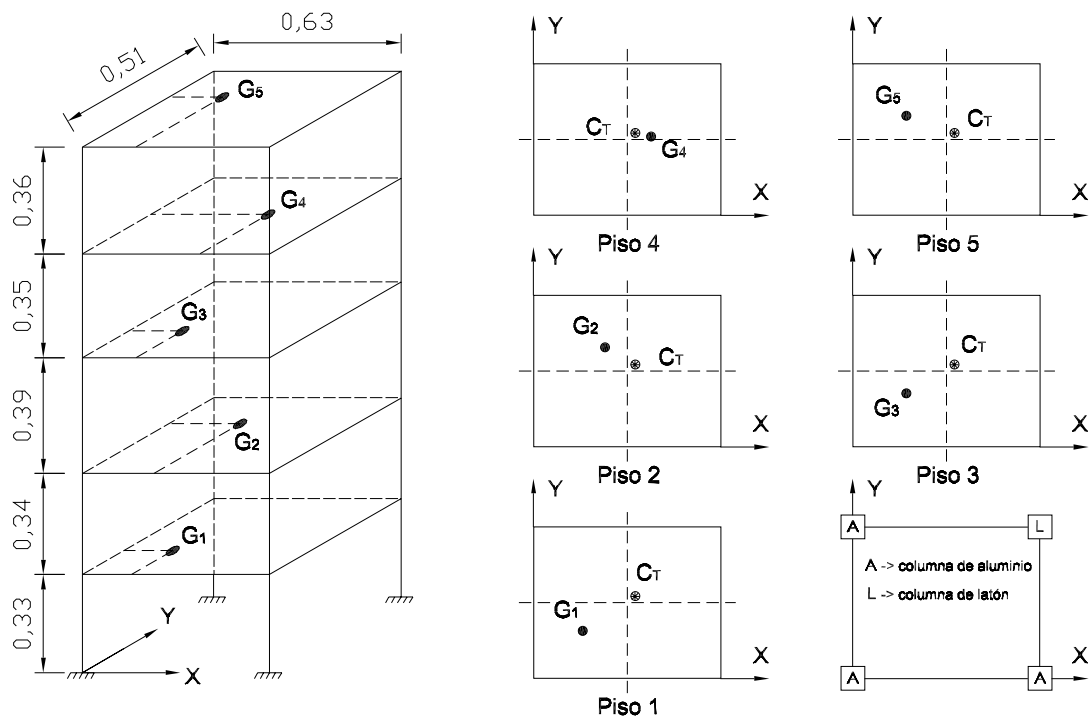


Figura 7.18: Diagrama del modelo experimental (dimensiones en m)

### 7.2.2. Respuesta modal del modelo experimental

Con base en el modelo matemático, Ec. (2.9), se consideró un factor de amortiguamiento de %5 para toda la estructura, las masas de cada piso están indicadas en la tabla 7.1; la rigidez para cada piso, se obtuvo mediante cálculos de las rigideces de las columnas. Además, como se mencionó en la sección anterior, la estructura es asimétrica en masa y rigidez como lo muestra la Fig. 7.18. Con este modelo se realizaron simulaciones numéricas aplicando una excitación sísmica, y proponiendo diversas medidas de los entrepisos, hasta obtener desplazamientos en los pisos mayores a 3 cm. Con este método se obtuvieron los valores de los entrepisos mostrados en la Fig. 7.18.

Para obtener la respuesta modal de la estructura, se excitó a ésta con un señal de barrido de frecuencias de 0,1 a 10 Hz en 40 segundos. Se capturaron los datos de los acelerómetros, y a estos registros se les obtuvo la respuesta espectral. La tabla 7.2 muestra las frecuencias modales obtenidas a partir de la respuesta en frecuencia de cada uno de los acelerómetros.



Figura 7.19: Modelo experimental de 5 pisos sobre la mesa vibradora

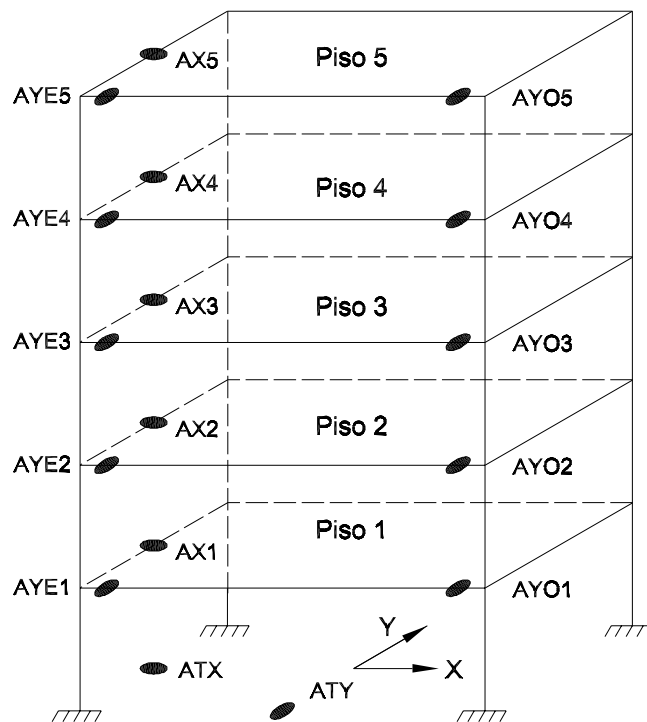
Nótese que en los datos reales sólo se muestran las primeras frecuencias, que son menores a 10 Hz, pues la frecuencia máxima de la excitación es de este valor. Las Figs. 7.21 y 7.22 muestran la señal de aceleración medida en la base para modelos de la mesa vibradora, Fig. 7.4, tanto en tiempo como en frecuencia, en dos direcciones ortogonales:  $X$  y  $Y$ . El modelo tiene frecuencias modales mayores a 10 Hz, no obstante, las oscilaciones de la mesa vibradora no logran excitar a estas frecuencias, además, sólo son de interés las cinco primeras frecuencias para efectos de diseño estructural.

En la Fig. 7.20 se muestra la posición de cada uno de los acelerómetros en el modelo experimental, **AX#** indica acelerómetro en la dirección  $X$ , **AYE#** es acelerómetro en la dirección  $Y$  este y **AYO#** acelerómetro en la dirección  $Y$  oeste, en todos los casos corresponden al piso #. **ATX** y **ATY** representa el acelerómetro en la base para la dirección  $X$  y dirección  $Y$ , respectivamente.

Cuadro 7.2: Frecuencias modales del modelo *experimental*

frecuencias modales reales	
$Hz$	
	1,3
	2,4
	3,4
	3,5
	5,0
	5,5
	7,2
	7,9
	9,2
	9,4

Para obtener las frecuencias que se indican en la tabla 7.2 se analizó el espectro en frecuencia de cada uno de los acelerómetros disponibles. Las Figs. 7.23-7.27 muestran estos espectros, correspondientes a la posición indicada en la Fig. 7.20.

Figura 7.20: Distribución de los acelerómetros en el modelo *experimental*

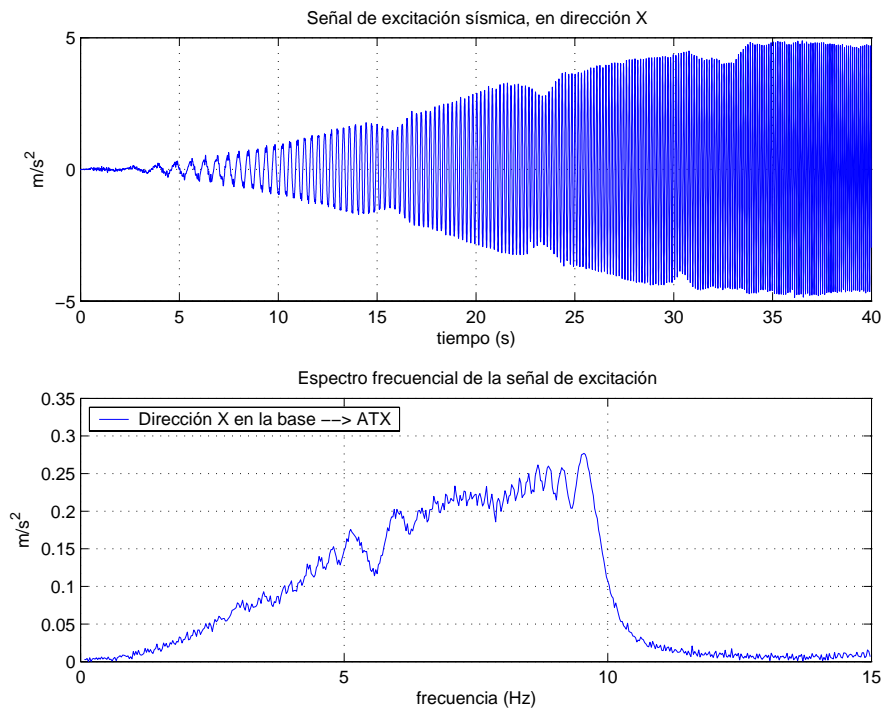


Figura 7.21: Señal de barrido de frecuencias de 0,1 a 10 Hz medida en la mesa

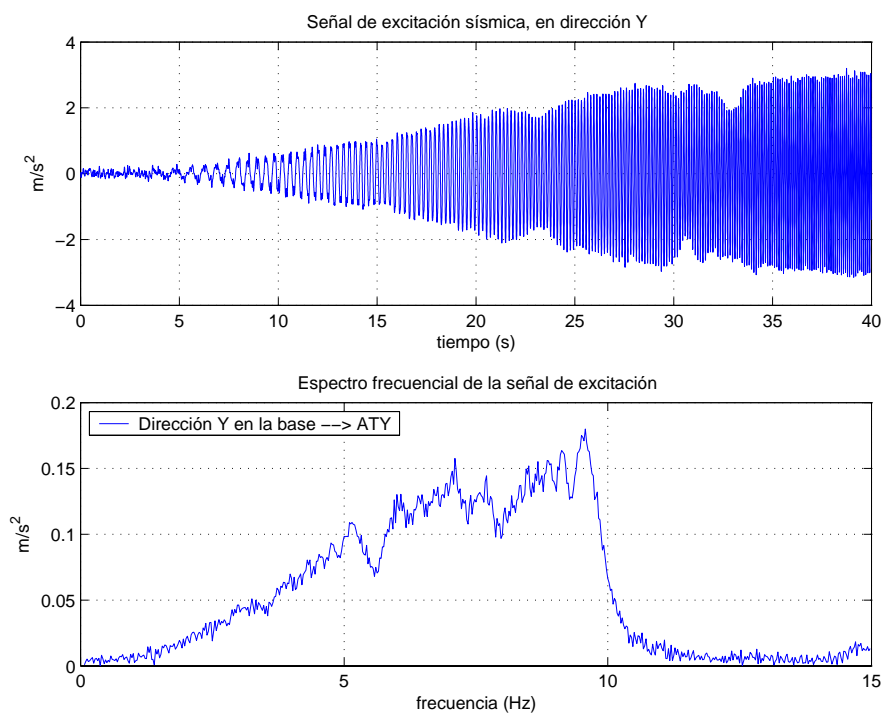


Figura 7.22: Señal de barrido de frecuencias de 0,1 a 10 Hz medida en la mesa

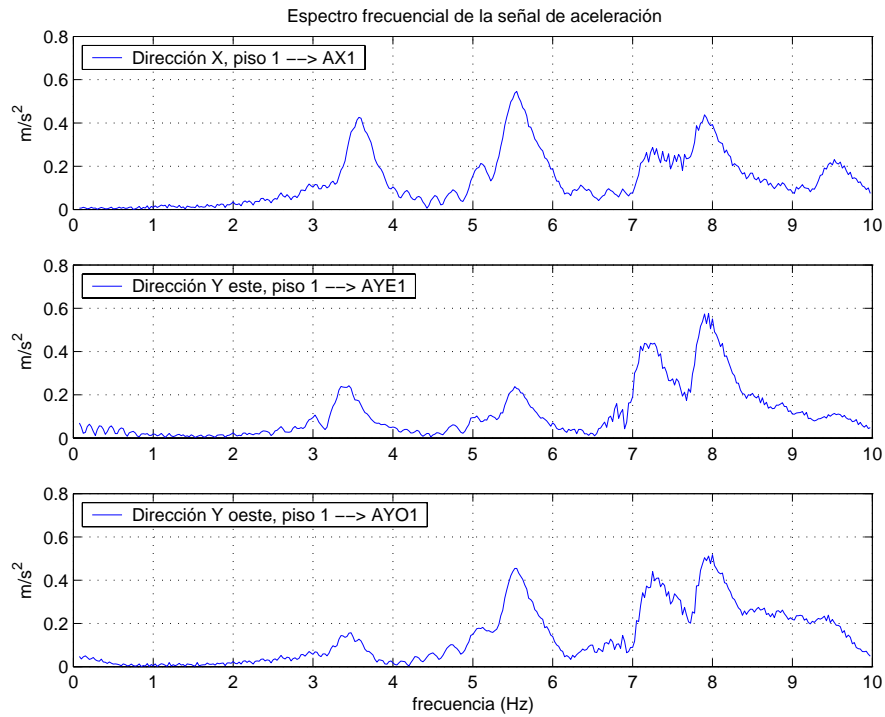


Figura 7.23: Espectro de frecuencias de acelerómetros en el primer piso

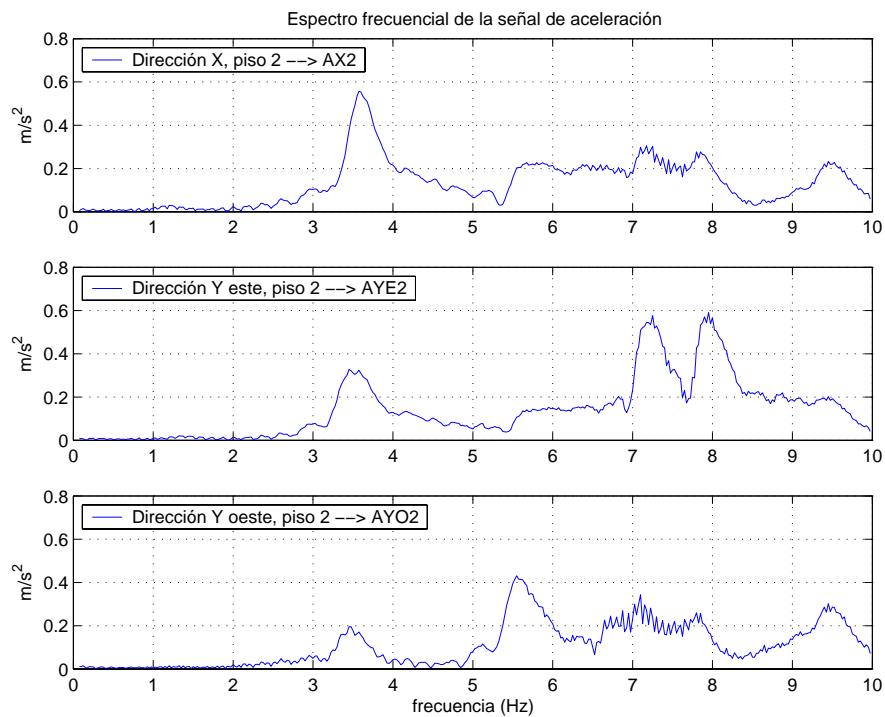


Figura 7.24: Espectro de frecuencias de acelerómetros en el segundo piso

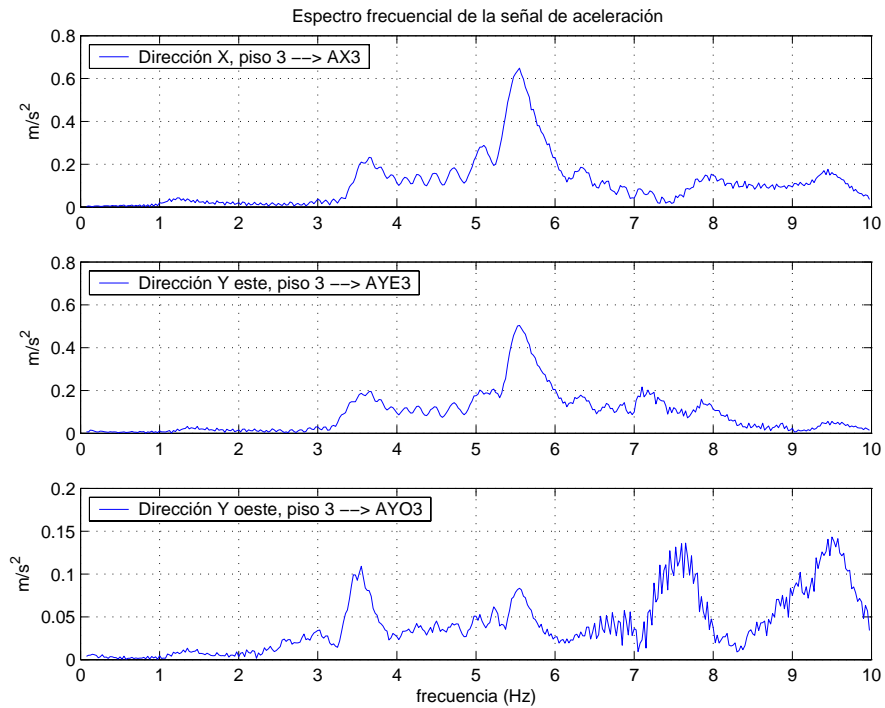


Figura 7.25: Espectro de frecuencias de acelerómetros en el tercer piso

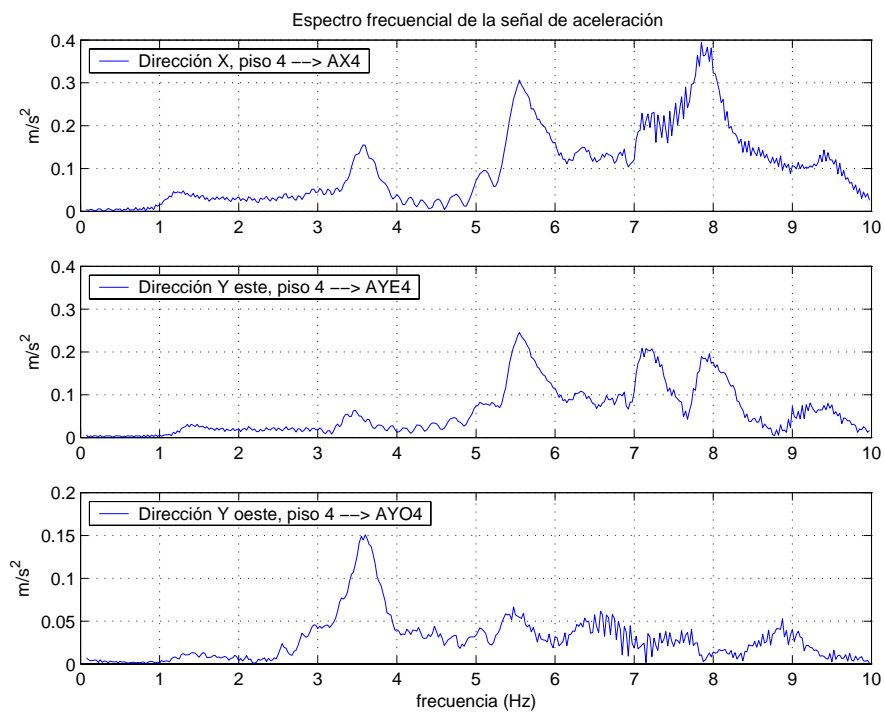


Figura 7.26: Espectro de frecuencias de acelerómetros en el cuarto piso

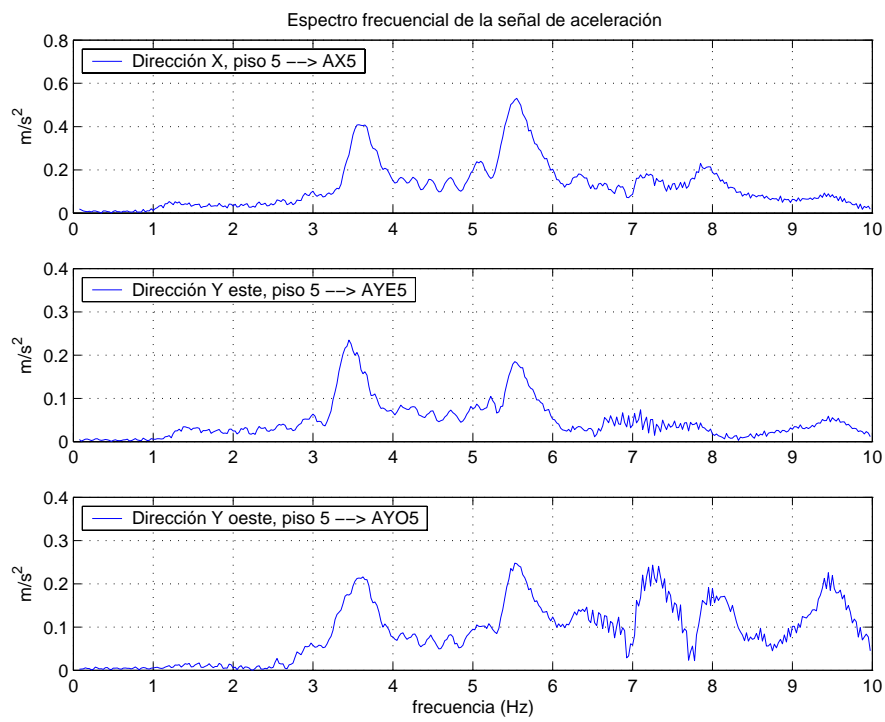


Figura 7.27: Espectro de frecuencias de acelerómetros en el quinto piso

## Capítulo 8

# Conclusiones

En este trabajo se presentó un algoritmo de identificación paramétrica para identificar los parámetros de un modelo tridimensional lineal de un edificio, así como un esquema de observación adaptable con el cual se puede recuperar velocidades, desplazamientos y parámetros del sistema, con sólo mediciones de aceleración.

### 8.1. Resultados

Los resultados obtenidos con este trabajo se mencionan a continuación:

1. Se usa una nueva parametrización del sistema, Ec. (3.3), para la aplicación del algoritmo de mínimos cuadrados, donde se genera una *matriz de parámetros* y un *vector regresor* que representan una opción eficiente para sistemas cuyos modelos tienen la estructura del modelo de un edificio, mostrada en el capítulo 2
2. Esta parametrización permite que se obtenga una matriz de covariancia  $P$  de menor orden que la generada por la parametrización convencional. Mientras que el orden de la matriz  $P$  está relacionado en forma cuadrática con el número de pisos para la parametrización convencional, Ec. (3.18), la nueva parametrización relaciona el orden de esta matriz de manera lineal con el número de pisos, Ec. (3.19)
3. La nueva parametrización permite implementar la identificación paramétrica en línea, pues debido al menor orden de las matrices involucradas, no se requiere de un instru-



mento de cálculo tan poderoso para lograr tiempos de muestreo pequeños, del orden de 2 milisegundos o menos; con una computadora personal es suficiente

4. El algoritmo puede recuperar las frecuencias fundamentales del sistema
5. La recuperación de la dinámica del sistema en poco tiempo, menor a 5 segundos, es muy importante, pues para efectos de control, es necesario conocer la dinámica real del sistema en el menor tiempo posible, ya que el buen desempeño de un amortiguador magneto-reológico usado para efectos de control de vibraciones depende del conocimiento del comportamiento real del sistema
6. La aplicación de un observador adaptable permite conocer, con sólo mediciones de aceleración, las velocidades y desplazamientos de cada GDL
7. Se realizaron pruebas experimentales para la validación de los algoritmos propuestos. Para tal efecto se construyó una plataforma experimental en el Laboratorio de Control de Vibraciones del Instituto de Ingeniería de la UNAM
8. Los resultados en cuanto la recuperación de las velocidades y desplazamientos de los experimentos realizados en la plataforma experimental no fueron los esperados. Este problema es resultado de la forma en que los manejadores del fabricante operan los motores de la mesa vibradora. Se espera resolver este problema en corto plazo
9. Los resultados obtenidos son alentadores para la aplicación de controladores con amortiguadores magneto-reológicos, dirigidos a la reducción de los desplazamientos sufridos por una estructura civil durante eventos sísmicos, pues la recuperación de la salida del sistema, en este caso la aceleración, se obtiene de forma rápida y precisa
10. Los algoritmos desarrollados pueden aplicarse también para la detección de daño o cambio de propiedades en una estructura. Este diagnóstico puede hacerse en tiempo real.

## 8.2. Trabajo a futuro

El presente trabajo sienta las bases para el control de vibraciones a través de amortiguadores magneto-reológicos. En ese sentido existen aún problemas por resolver:

1. Es conveniente analizar los resultados obtenidos cuando una estructura se sujeta a distintas excitaciones sísmicas, a fin de determinar la consistencia de los resultados encontrados
2. Efectuar los ajustes necesarios a la mesa vibradora para evitar que se contaminen las mediciones con frecuencias originadas por ésta y que, eventualmente, aparecen en la recuperación de la dinámica de la estructura
3. Falta realizar un análisis más detallado de las formas modales obtenidas para verificar que en el caso de mediciones reducidas no se identifiquen frecuencias espurias
4. Es deseable realizar el filtrado de las señales con filtros analógicos y comparar con los resultados obtenidos mediante los filtros digitales que ahora se emplearon
5. Es posible analizar los efectos de la identificación desacoplada de los grados de libertad para compararla con la identificación acoplada y poder determinar en qué casos la torsión juega un papel relevante
6. Falta aún implementar esquemas de control de vibraciones que funcionen en paralelo con los esquemas de observación adaptable. En este caso también es necesario realizar el análisis de estabilidad para el conjunto controlador-observador adaptable.



## Apéndice A

# Características de los sismos

Para entender cómo es el comportamiento de los sismos, es necesario conocer algunas de sus características en forma general.

Primeramente, se tiene que saber qué es un sismo; una definición es: *un sismo es la liberación de la energía elástica acumulada en la capas externas de la corteza terrestre cuando se produce una fractura de las mismas.*

Otra definición de sismo es: *sacudidas o movimientos bruscos del terreno producidos en la corteza terrestre como consecuencia de la liberación repentina de energía en el interior de la tierra o a la tectónica de placas.*

Algunas de las características más importantes de un sismo son:

1. Foco y Epicentro.
2. Magnitud.
3. Intensidad.
4. Duración.
5. Acelerogramas.

Las características de ubicación de un sismo son el *foco*, que, es la región del campo de esfuerzos donde se inicia la liberación de energía y el *epicentro*, que es la proyección del foco

sobre la superficie terrestre, es decir, el punto a partir del cual se desplazan los movimientos de la superficie. El *foco* algunas veces es llamado *hipocentro* o *epifoco*.

El concepto de *magnitud* lo introdujo C. F. Richter en 1935 con la finalidad de comparar la energía liberada entre diferentes sismos. La magnitud, de acuerdo con Richter, está expresada como:

$$M = \log(A/T) + f(\Delta, h) + C_s + C_r, \quad (\text{A.1})$$

donde:

$M$  = magnitud

$A$  = amplitud de la deformación donde se encuentra el sismógrafo, en  $\mu m$

$T$  = periodo de oscilación

$\Delta$  = distancia epicentral, en grados

$h$  = profundidad del foco, en  $km$

$C_s$  = factor de corrección de la estación sismológica

$C_r$  = factor de corrección regional.

La evaluación de la función de la distancia y la profundidad se hace con base en estudios analíticos y empíricos.

Se entiende como *intensidad* al efecto local que produce un sismo, es decir, el nivel de pánico que causa en la población así como la destrucción que provoca. Esta característica es subjetiva porque depende de quién sea la persona que la registra.

No se debe confundir *magnitud* con *intensidad*. La primera es la energía liberada mientras que la segunda es el efecto.

El concepto de *duración* es aún incierto, pues algunos autores proponen como definición el lapso de tiempo entre la primera y última señal de aceleración que sobrepasan un nivel determinado. Otras definiciones toman en cuenta más la forma del acelerograma que los niveles de aceleración. En general, los estudios realizados por varios autores encuentran relación entre la duración significativa de un sismo y su magnitud.

Los registros de las aceleraciones causadas en el terreno donde ocurre un movimiento del mismo, generalmente un sismo, se denominan *acelerogramas*.

## Apéndice B

# Condiciones iniciales y matrices de parámetros para el edificio simulado de seis pisos

Se muestran los valores numéricos de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez en 3D del edificio de seis pisos simulado en el capítulo 4, así como la matriz de covariancia inicial,  $P(0)$ , y el factor de olvido,  $\delta$ , usados para resolver la Ec. (3.5) tanto para el caso de mediciones *completas* como para mediciones *reducidas*. Además, se indican las condiciones iniciales de los parámetros,  $\Phi(0)$ , para resolver la Ec. (3.6), en ambos casos, así como el tiempo de muestreo con el cual se resolvió el algoritmo.

### B.1. Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento

La matriz de masa en 3D, de acuerdo a la estructura de la Ec. (2.8), es:

$$M = \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad M = M^T > 0, \quad (\text{B.1})$$

donde los elementos nulos  $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ , con  $n = 6$  que es el número de pisos, y

$$m_t = \begin{bmatrix} 385,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 386,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 393,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 386,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 377,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 370,0 \end{bmatrix},$$

$$I_m = \begin{bmatrix} 104,51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 104,62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 106,57 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 104,73 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 102,29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100,21 \end{bmatrix}.$$

La matriz de rigidez en 3D, con la estructura de la Ec. (2.6), es

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad K = K^T > 0, \quad (\text{B.2})$$

donde  $k_{xy} = k_{yx} = 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , y

$$k_{xx} = \begin{bmatrix} 2152 & -1035 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1035 & 2152 & -1117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1117 & 2273 & -1156 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1156 & 2312 & -1156 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1156 & 2291 & -1135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1135 & 1135 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{x\theta} = k_{\theta x} = \begin{bmatrix} -1188 & 587 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 587 & -1188 & 601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 601 & -1147 & 546 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 546 & -1124 & 578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 578 & -1124 & 546 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 546 & -546 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{yy} = \begin{bmatrix} 2110 & -1022 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1022 & 2110 & -1088 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1088 & 2329 & -1241 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1241 & 2397 & -1156 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1156 & 2246 & -1090 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1090 & 1090 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{y\theta} = k_{\theta y} = \begin{bmatrix} 1474,5 & -748,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -748,5 & 1474,5 & -726 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -726 & 1623 & -897 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -897 & 1764 & -867 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -867 & 1734 & -867 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -867 & 867 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 3399,75 & -1709,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1709,75 & 3399,75 & -1690 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1690 & 3581,5 & -1891,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1891,5 & 3770 & -1878,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1878,5 & 3725 & -1846,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1846,5 & 1846,5 \end{bmatrix} * 10^3.$$

La matriz de amortiguamiento, de acuerdo a la estructura de la Ec. (2.7), es

$$C = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{x\theta} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{y\theta} \\ c_{\theta x} & c_{\theta y} & c_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad C = C^T \geq 0, \quad (\text{B.3})$$

donde  $c_{xy} = c_{yx} = 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , y



$$c_{xx} = \begin{bmatrix} 486 & -249 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -249 & 500 & -251 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -251 & 490 & -239 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -239 & 477 & -238 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -238 & 491 & -253 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -253 & 253 \end{bmatrix},$$

$$c_{x\theta} = c_{\theta x} = \begin{bmatrix} -242 & 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 125 & -249 & 124 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 124 & -245 & 121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 121 & -239 & 118 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 118 & -246 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & -128 \end{bmatrix},$$

$$c_{yy} = \begin{bmatrix} 491 & -250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -250 & 497 & -247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -247 & 487 & -240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -240 & 478 & -238 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -238 & 485 & -247 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -247 & 247 \end{bmatrix},$$

$$c_{y\theta} = c_{\theta y} = \begin{bmatrix} 363 & -184,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -184,5 & 378 & -193,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -193,5 & 369 & -175,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -175,5 & 361,5 & -186 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -186 & 370,5 & -184,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -184,5 & 184,5 \end{bmatrix},$$

$$c_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 786,5 & -401,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -401,75 & 816 & -414,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -414,25 & 798,5 & -384,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -384,25 & 781,25 & -397 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -397 & 801,75 & -404,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -404,75 & 404,75 \end{bmatrix}.$$

## B.2. Condiciones iniciales para mediciones *completas*

La matriz inicial de covariancia  $P(0)$ , necesaria para resolver la Ec. (3.5), cuando se dispone de mediciones en todos y cada uno de los pisos es

$$P(0) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}, \quad P(0) = P(0)^T > 0,$$

con

$$P_1 = I_c * 10^{14}, \quad P_2 = I_c * 10^{14}, \quad P_3 = I_c * 10^{17}, \quad P_4 = I_c * 10^{10}, \quad P_5 = I_c * 10^{10}, \quad P_6 = I_c * 10^{14},$$

donde  $I_c$  es una matriz identidad que  $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ , y los elementos nulos son matrices nulas cuya dimensión es de  $n \times n$ .

Las condiciones iniciales para resolver la Ec. (3.6) son los valores iniciales de los parámetros estimados, para el caso de mediciones *completas* estos valores son nulos, lo que implica que la matriz  $\Phi(0) \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}$  es nula.

El tiempo de muestreo es de 1 milisegundo.

El factor de olvido  $\delta$ , usado en la Ec. (3.5), es de 0,001.

### B.3. Condiciones iniciales para mediciones *reducidas*

La matriz de covariancia inicial para resolver la Ec. (3.5) para el sistema de mediciones *reducidas*, es la siguiente

$$P(0) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n_r \times 6n_r}, \quad P(0) = P(0)^T > 0,$$

con

$$P_1 = I_r * 10^{14}, \quad P_2 = I_r * 10^{14}, \quad P_3 = I_r * 10^{17}, \quad P_4 = I_r * 10^{10}, \quad P_5 = I_r * 10^{10}, \quad P_6 = I_r * 10^{14},$$

donde  $I_r$  es una matriz identidad que  $\in \mathcal{R}^{n_r \times n_r}$ , y  $n_r = 3$  el número de pisos en los cuales se dispone de mediciones, que para este caso es el primer, segundo y último pisos. Los elementos nulos, al igual que el caso anterior, son matrices nulas cuya dimensión es  $n_r \times n_r$ .

En este caso las condiciones iniciales de los parámetros son diferentes a cero, por lo que la matriz  $\Phi(0)$  es

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 2,1 * I & 1,0 * I & -0,4 * I & 4,1 * I & 1,0 * I & -0,5 * I \\ 1,1 * I & 2,4 * I & 1,1 * I & 1,1 * I & 2,4 * I & 1,1 * I \\ -0,3 * I & 1,1 * I & 2,3 * I & -0,3 * I & 1,1 * I & 2,3 * I \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n_r \times 6n_r},$$

donde  $I$  es una matriz identidad cuya dimensión es de  $n_r \times n_r$ .

El tiempo de muestreo es de 1 milisegundo.

El factor de olvido  $\delta$ , usado en la Ec. (3.5), es de 0,001.

## Apéndice C

# Respuesta de aceleraciones para edificio simulado de seis pisos y edificios instrumentados

En este apéndice se presentan las gráficas de la aceleración de salida de los pisos no mostrados en el capítulo 4, tanto en el caso de mediciones *completas* como en el caso de mediciones *reducidas*, del edificio de seis pisos simulado, igualmente para el edificio de oficinas de 54 pisos y el hospital universitario.

### C.1. Aceleraciones de edificio simulado

Las Figs. C.1 y C.2 muestran las aceleraciones reales y estimadas, para ambos casos de instrumentación: mediciones *completas* y mediciones *reducidas*, para el primer y segundo pisos, respectivamente, del edificio cuyo esquema se muestra en la Fig. 4.1. Para el caso del primer piso, éste también lo es para el caso del modelo reconstruido con mediciones *reducidas*, lo mismo sucede para el segundo piso. Para el caso del sexto piso, éste representa el tercer piso del modelo *reducido* cuya aceleración se muestra en la Fig. 4.6.

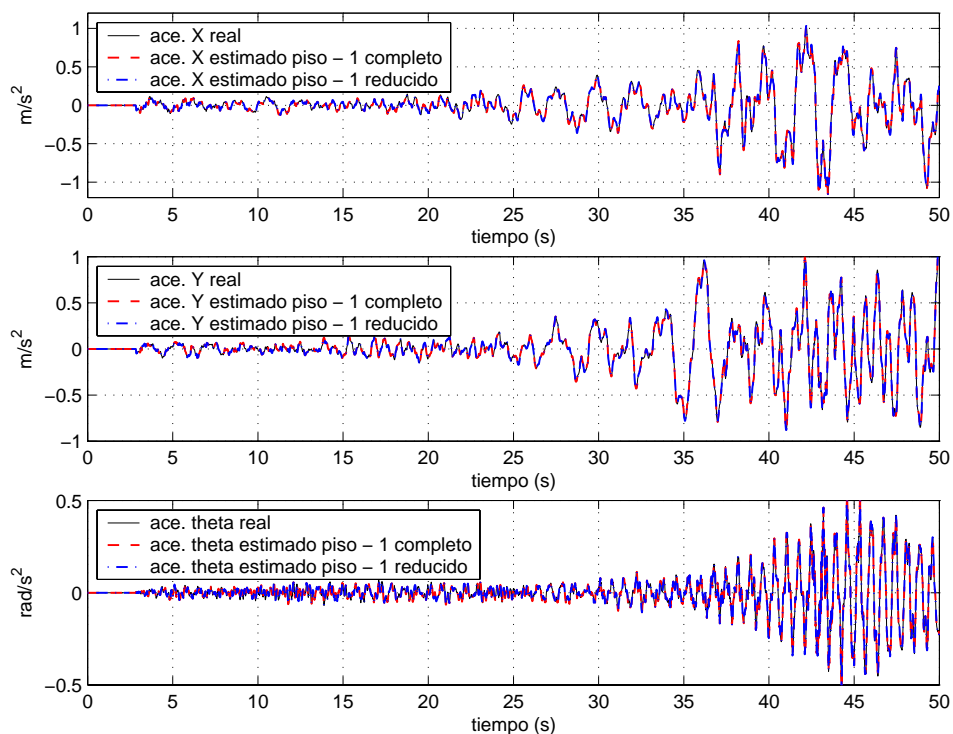


Figura C.1: Aceleraciones reales-estimadas en el primer piso, edificio simulado

## C.2. Aceleraciones para edificio de 54 pisos

Las Figs. C.3, C.4 y C.5 muestran el comportamiento de la aceleración estimada para los pisos instrumentados del edificio de 54 pisos descrito en el capítulo 4. En la Fig. 4.17 se observa un esquema de dicho edificio. En este caso el primer piso está representado por los primeros pisos hasta el vigésimo, el segundo piso comprende del vigésimo primero al trigésimo sexto, el cuarto piso es del trigésimo séptimo al cuarenta y seis, y el quinto piso del cuarenta y siete al cincuenta y cuatro. En todas las gráficas se aprecia que la aceleración estimada sigue de forma satisfactoria a la aceleración real.

## C.3. Aceleraciones del Hospital Universitario

Se muestra en las Figs. C.6 y C.7 el comportamiento de las aceleraciones estimadas de los pisos *reducidos*: primero y segundo, que corresponden al cuarto y al sexto del edificio real, respectivamente, ver Fig. 4.24. El último piso del edificio corresponde al tercer piso

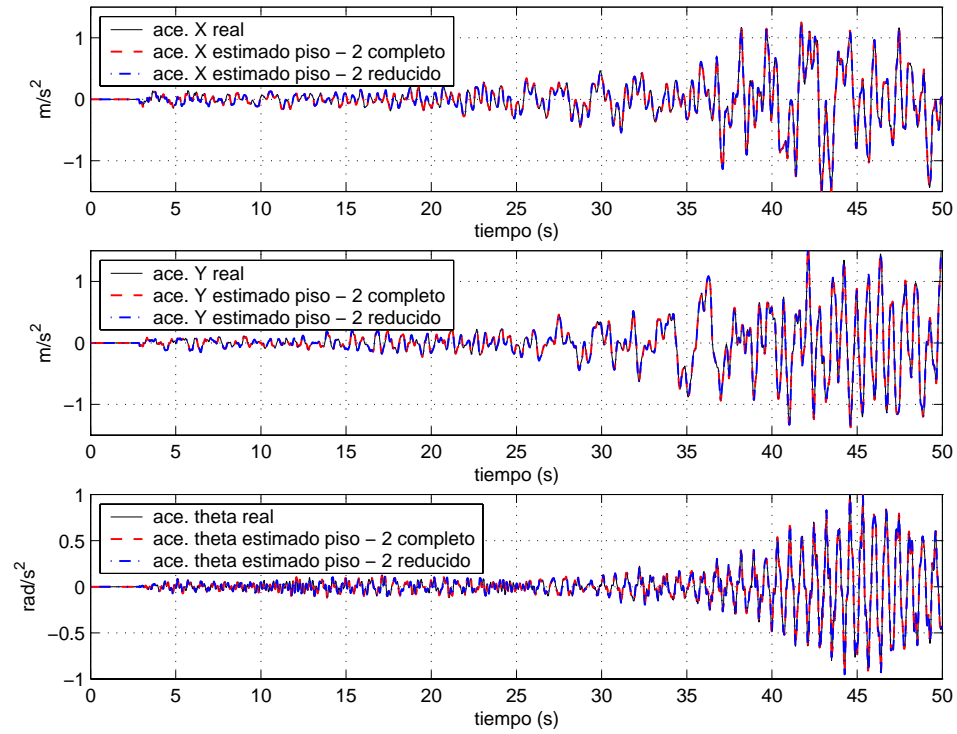


Figura C.2: Aceleraciones reales-estimadas en el segundo piso, edificio simulado

del modelo *reducido* mostrado en la Fig. 4.26. Nótese que la señal de aceleración estimada de los pisos instrumentados muestra un seguimiento satisfactorio a lo largo del tiempo.

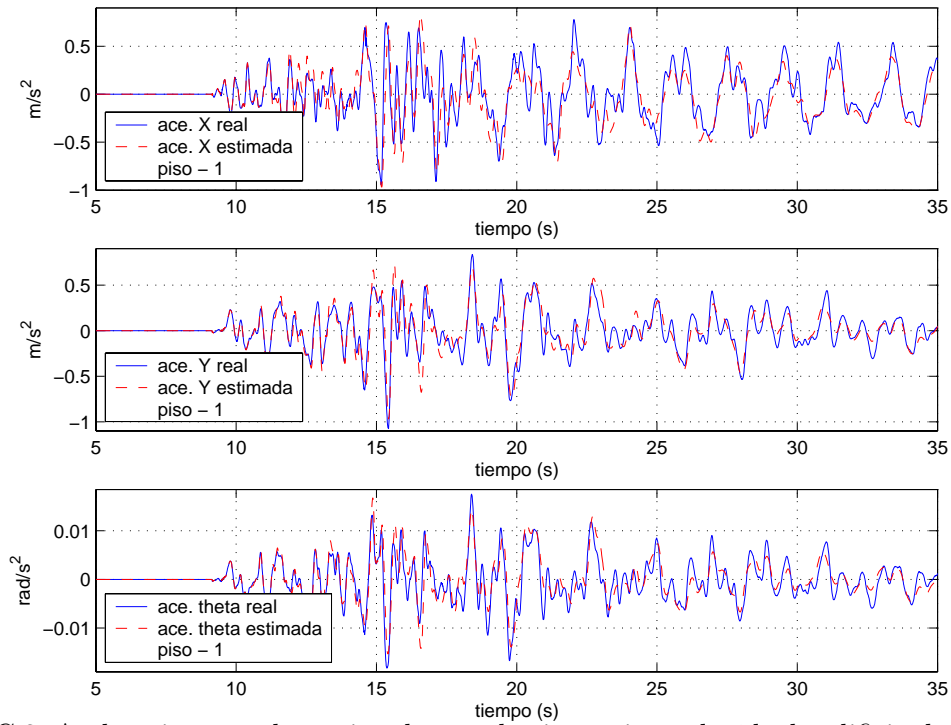


Figura C.3: Aceleraciones reales-estimadas en el primer piso *reducido* de edificio de 54 pisos

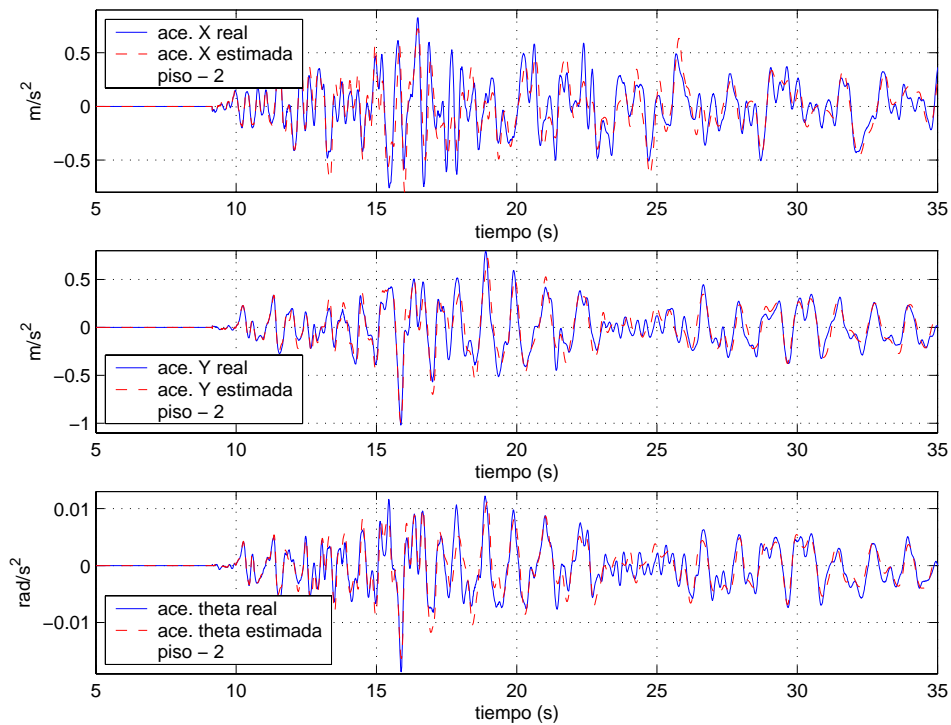


Figura C.4: Aceleraciones reales-estimadas en el segundo piso *reducido* de edificio de 54 pisos

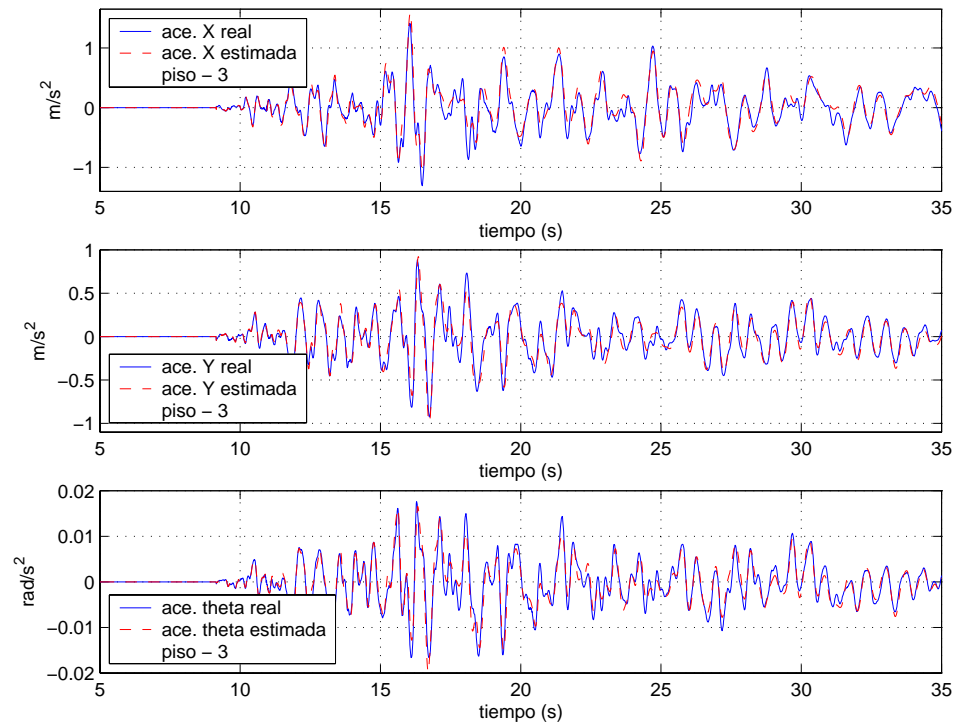


Figura C.5: Aceleraciones reales-estimadas en el tercer piso *reducido* de edificio de 54 pisos

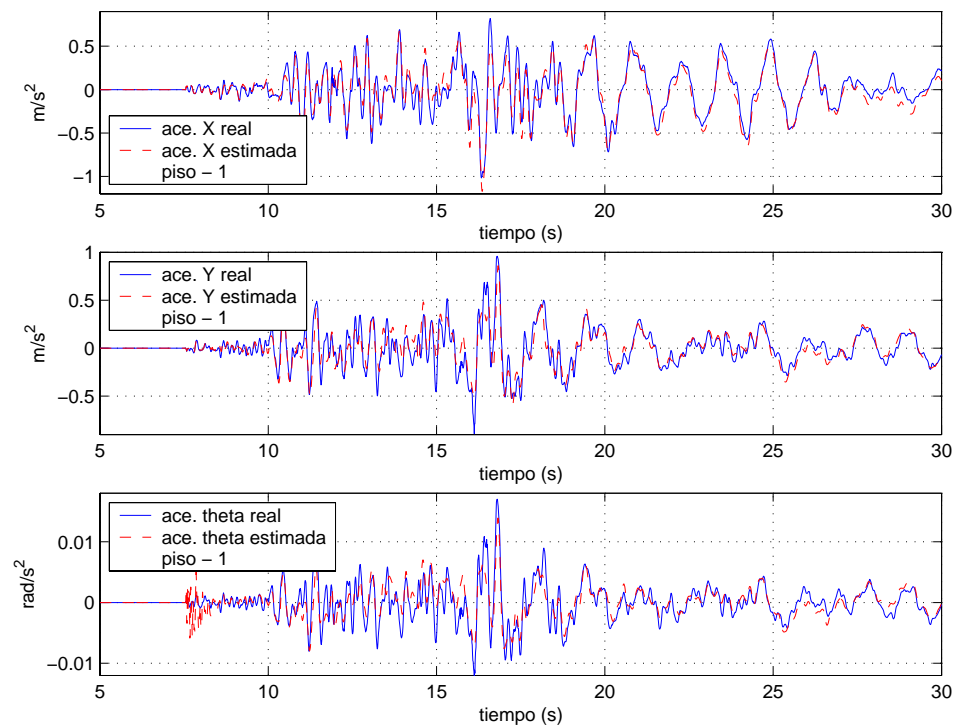


Figura C.6: Aceleraciones reales-estimadas en el primer piso *reducido* de hospital



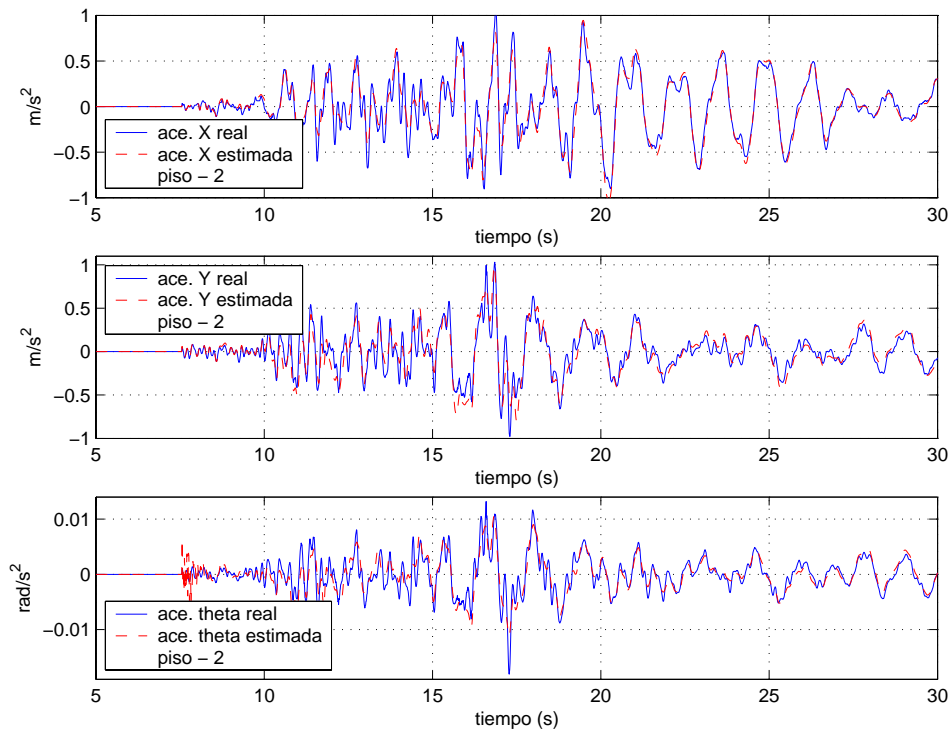


Figura C.7: Aceleraciones reales-estimadas en el segundo piso *reducido* de hospital

## Apéndice D

# Condiciones iniciales para edificios instrumentados

Se muestran los valores numéricos de la matriz de covariancia inicial,  $P(0)$ , usada para resolver la Ec. (3.5) y el factor de olvido,  $\delta$ , tanto para los edificios instrumentados: Edificio de oficinas de 54 pisos y el Hospital Universitario. Además, se indican las condiciones iniciales de los parámetros,  $\Phi(0)$ , para resolver la Ec. (3.6), así como el tiempo de muestreo con el cual se resolvió el algoritmo.

### D.1. Condiciones iniciales para edificio de oficinas de 54 pisos

La matriz inicial de covariancia  $P(0)$ , necesaria para resolver la Ec. (3.5)

$$P(0) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n_r \times 6n_r}, \quad P(0) = P(0)^T > 0,$$

con

$$P_1 = I_c * 10^{14}, \quad P_2 = I_c * 10^{14}, \quad P_3 = I_c * 10^{10}, \quad P_4 = I_c * 10^9, \quad P_5 = I_c * 10^9, \quad P_6 = I_c * 10^5,$$

donde  $I_c$  es una matriz identidad que  $\in \mathcal{R}^{n_r \times n_r}$ , con  $n_r$  el número de pisos instrumentados, en este caso  $n_r = 4$ .

Las condiciones iniciales para resolver la Ec. (3.6) son los valores iniciales de los parámetros estimados, para el caso de este edificio, estos valores son

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 2,9 * I & 1,0 * I & 1,3 * I & 2,6 * I & 1,0 * I & 1,3 * I \\ 1,1 * I & 2,2 * I & 1,1 * I & 1,1 * I & 2,2 * I & 1,1 * I \\ 1,3 * I & 1,1 * I & 2,4 * I & 1,3 * I & 1,1 * I & 2,8 * I \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n_r \times 6n_r},$$

donde  $I$  es una matriz identidad cuya dimensión es de  $n_r \times n_r$ .

El tiempo de muestreo es de 1 milisegundo.

El factor de olvido  $\delta$ , usado en la Ec. (3.5), es de 0,0.

## D.2. Condiciones iniciales para Hospital Universitario

La matriz inicial de covariancia  $P(0)$ , necesaria para resolver la Ec. (3.5)

$$P(0) = \begin{bmatrix} P_1 & P_i & P_i & P_i & P_i & P_i \\ P_i & P_2 & P_i & P_i & P_i & P_i \\ P_i & P_i & P_3 & P_i & P_i & P_i \\ P_i & P_i & P_i & P_4 & P_i & P_i \\ P_i & P_i & P_i & P_i & P_5 & P_i \\ P_i & P_i & P_i & P_i & P_i & P_6 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n_r \times 6n_r}, \quad P(0) = P(0)^T > 0,$$

con

$$P_1 = I_c * 10^{11}, \quad P_2 = I_c * 10^{11}, \quad P_3 = I_c * 10^{17}, \quad P_4 = I_c * 10^6, \quad P_5 = I_c * 10^6, \quad P_6 = I_c * 10^{12},$$

$$P_i = I_c * 10,$$

donde  $I_c$  es una matriz identidad que  $\in \mathcal{R}^{n_r \times n_r}$ , con  $n_r$  el número de pisos instrumentados, en este caso  $n_r = 3$ .

Las condiciones iniciales para resolver la Ec. (3.6) son los valores iniciales de los parámetros estimados, para el caso del Hospital estos valores son

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1,0 * I & 1,0 * I & 1,0 * I & 1,0 * I & 1,0 * I & 1,3 * I \\ 1,1 * I & 2,2 * I & 1,1 * I & 1,1 * I & 2,2 * I & 1,1 * I \\ 1,3 * I & 1,1 * I & 1,2 * I & 1,3 * I & 1,1 * I & 1,2 * I \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n_r \times 6n_r},$$

donde  $I$  es una matriz identidad cuya dimensión es de  $n_r \times n_r$ .

El tiempo de muestreo es de 1 milisegundo.

El factor de olvido  $\delta$ , usado en la Ec. (3.5), es de 0,001.



## Apéndice E

# Condiciones iniciales y matrices de parámetros para el edificio simulado de cinco pisos

Se muestran los valores numéricos de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez en 3D del edificio simulado de cinco pisos sobre el cual se realizaron las pruebas del observador adaptable, y que se muestran en el capítulo 6. Además, se indica que matriz de covariancia inicial,  $P(0)$ , y el factor de olvido,  $\delta$ , que fueron usados para resolver la Ec. (3.5). Aunado a lo anterior, se indican las condiciones iniciales de los parámetros,  $\Phi(0)$ , para resolver la Ec. (3.6), y el tiempo de muestreo con el cual se resolvió el algoritmo.

### E.1. Matrices de masa, rigidez y amortiguamiento

La matriz de masa en 3D, de acuerdo a la estructura de la Ec. (2.8) y a los cálculos de acuerdo a la geometría y materiales de construcción del modelo, es:

$$M = \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad M = M^T > 0, \quad (\text{E.1})$$

donde los elementos nulos  $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ , con  $n = 5$  que es el número de pisos, y

$$m_t = \begin{bmatrix} 385,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 385,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 393,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 386,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 370,0 \end{bmatrix},$$

$$I_m = \begin{bmatrix} 104,51 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 104,51 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 106,57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 104,73 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100,21 \end{bmatrix}.$$

La matriz de rigidez en 3D, con la estructura de la Ec. (2.6), es

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad K = K^T > 0, \quad (\text{E.2})$$

donde  $k_{xy} = k_{yx} = 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , y

$$k_{xx} = \begin{bmatrix} 2152 & -1035 & 0 & 0 & 0 \\ -1035 & 2152 & -1117 & 0 & 0 \\ 0 & -1117 & 2273 & -1156 & 0 \\ 0 & 0 & -1156 & 2291 & -1135 \\ 0 & 0 & 0 & -1135 & 1135 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{x\theta} = k_{\theta x} = \begin{bmatrix} -1188 & 587 & 0 & 0 & 0 \\ 587 & -1188 & 601 & 0 & 0 \\ 0 & 601 & -1147 & 546 & 0 \\ 0 & 0 & 546 & -1092 & 546 \\ 0 & 0 & 0 & 546 & -546 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{yy} = \begin{bmatrix} 2110 & -1022 & 0 & 0 & 0 \\ -1022 & 2110 & -1088 & 0 & 0 \\ 0 & -1088 & 2329 & -1241 & 0 \\ 0 & 0 & -1241 & 2331 & -1090 \\ 0 & 0 & 0 & -1090 & 1090 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{y\theta} = k_{\theta y} = \begin{bmatrix} 1474,5 & -748,5 & 0 & 0 & 0 \\ -748,5 & 1474,5 & -726 & 0 & 0 \\ 0 & -726 & 1623 & -897 & 0 \\ 0 & 0 & -897 & 1764 & -867 \\ 0 & 0 & 0 & -867 & 867 \end{bmatrix} * 10^3,$$

$$k_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 3399,75 & -1709,75 & 0 & 0 & 0 \\ -1709,75 & 3399,75 & -1690 & 0 & 0 \\ 0 & -1690 & 3581,5 & -1891,5 & 0 \\ 0 & 0 & -1891,5 & 3738 & -1846,5 \\ 0 & 0 & 0 & -1846,5 & 1846,5 \end{bmatrix} * 10^3.$$

La matriz de amortiguamiento, de acuerdo a la estructura de la Ec. (2.7), es

$$C = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{x\theta} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{y\theta} \\ c_{\theta x} & c_{\theta y} & c_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad C = C^T \geq 0, \quad (\text{E.3})$$

donde  $c_{xy} = c_{yx} = 0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ , y



$$c_{xx} = \begin{bmatrix} 474 & -237 & 0 & 0 & 0 \\ -237 & 488 & -251 & 0 & 0 \\ 0 & -251 & 490 & -239 & 0 \\ 0 & 0 & -239 & 492 & -253 \\ 0 & 0 & 0 & -253 & 253 \end{bmatrix},$$

$$c_{x\theta} = c_{\theta x} = \begin{bmatrix} -234 & 117 & 0 & 0 & 0 \\ 117 & -241 & 124 & 0 & 0 \\ 0 & 124 & -245 & 121 & 0 \\ 0 & 0 & 121 & -249 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 128 & -128 \end{bmatrix},$$

$$c_{yy} = \begin{bmatrix} 482 & -241 & 0 & 0 & 0 \\ -241 & 488 & -247 & 0 & 0 \\ 0 & -247 & 487 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & -240 & 487 & -247 \\ 0 & 0 & 0 & -247 & 247 \end{bmatrix},$$

$$c_{y\theta} = c_{\theta y} = \begin{bmatrix} 357 & -178,5 & 0 & 0 & 0 \\ -178,5 & 372 & -193,5 & 0 & 0 \\ 0 & -193,5 & 369 & -175,5 & 0 \\ 0 & 0 & -175,5 & 360,0 & -184,5 \\ 0 & 0 & 0 & -184,5 & 184,5 \end{bmatrix},$$

$$c_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} 769,5 & -384,75 & 0 & 0 & 0 \\ -384,75 & 799 & -414,25 & 0 & 0 \\ 0 & -414,25 & 798,5 & -384,25 & 0 \\ 0 & 0 & -384,25 & 789 & -404,75 \\ 0 & 0 & 0 & -404,75 & 404,75 \end{bmatrix}.$$

## E.2. Condiciones iniciales para observador adaptable

La matriz de covariancia inicial para resolver la Ec. (3.5) para el sistema de mediciones *reducidas*, es la siguiente

$$P(0) = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}, \quad P(0) = P(0)^T > 0,$$

con

$$P_1 = I * 10^{13}, \quad P_2 = I * 10^{13}, \quad P_3 = I * 10^{16}, \quad P_4 = I * 10^9, \quad P_5 = I * 10^9, \quad P_6 = I * 10^{13},$$

donde  $I$  es una matriz identidad que  $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ , y  $n = 5$  el número de pisos en los cuales se dispone de mediciones, que para este caso son todos los pisos. Los elementos nulos, al igual que el caso anterior, son matrices nulas cuya dimensión es  $n \times n$ .

En este caso las condiciones iniciales de los parámetros son diferentes a cero, por lo que la matriz  $\Phi(0)$  es

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 2,1 * I & 1,0 * I & -0,4 * I & 4,1 * I & 1,0 * I & -0,5 * I \\ 1,1 * I & 2,4 * I & 1,1 * I & 1,1 * I & 2,4 * I & 1,1 * I \\ -0,3 * I & 1,1 * I & 2,3 * I & -0,3 * I & 1,1 * I & 2,3 * I \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n_r \times 6n_r},$$

La matriz  $L$  que se observa en la Ec. (5.13) es

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6n \times 3n},$$

donde

$$l_{11} = \begin{bmatrix} -0,079 & -0,079 & -0,080 & -0,079 & -0,075 \\ 8,352 & 13,92 & 19,60 & 29,35 & 30,05 \\ 8,817 & 12,70 & 8,494 & 6,022 & -1,171 \\ 2,354 & 4,340 & 16,03 & 33,71 & 54,23 \\ -9,940 & -15,46 & -29,05 & -49,06 & -52,01 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{12} = \begin{bmatrix} 0,026 & 0,026 & 0,027 & 0,026 & 0,025 \\ -16,05 & -25,08 & -30,93 & -18,59 & -20,36 \\ 0,120 & 14,01 & 22,89 & 31,64 & 29,47 \\ -9,631 & -18,68 & -22,89 & -21,25 & -21,80 \\ 9,946 & 7,930 & 22,52 & 32,72 & 47,62 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{13} = \begin{bmatrix} -0,011 & -0,011 & -0,011 & -0,011 & -0,010 \\ 5,100 & 8,676 & 11,50 & 11,86 & 12,82 \\ -0,637 & -3,977 & -7,031 & -9,127 & -9,155 \\ 2,839 & 5,480 & 8,193 & 10,35 & 12,38 \\ -2,429 & -2,428 & -5,433 & -9,469 & -14,16 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{21} = \begin{bmatrix} -0,576 & -2,296 & -7,653 & -15,04 & -23,17 \\ 4,492 & 6,863 & 8,016 & 13,06 & 21,57 \\ 5,833 & 8,183 & -5,403 & -21,25 & -35,82 \\ 1,157 & 4,937 & 32,76 & 61,92 & 76,92 \\ -6,941 & -11,61 & -23,53 & -36,72 & -35,30 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{22} = \begin{bmatrix} 13,35 & 30,50 & 40,19 & 37,70 & 36,28 \\ -3,842 & -1,884 & 4,032 & 14,20 & 21,44 \\ -0,248 & 9,365 & 20,57 & 29,18 & 34,78 \\ -34,20 & -77,09 & -131,2 & -174,6 & -196,9 \\ 18,65 & 31,64 & 60,78 & 83,95 & 86,14 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{23} = \begin{bmatrix} -4,321 & -9,270 & -12,97 & -14,49 & -15,71 \\ 0,7297 & 0,293 & -0,645 & -1,509 & -0,631 \\ -1,267 & -4,449 & -9,391 & -13,57 & -18,06 \\ 9,741 & 20,92 & 34,27 & 45,40 & 49,15 \\ -4,226 & -7,202 & -12,26 & -17,40 & -18,19 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{31} = \begin{bmatrix} 0,298 & 1,285 & 4,354 & 8,582 & 13,28 \\ -6,129 & -9,184 & -6,366 & -6,667 & -12,39 \\ -2,685 & -2,904 & 2,102 & 2,975 & -2,316 \\ 2,708 & 4,754 & 14,58 & 19,52 & 16,55 \\ -13,56 & -21,97 & -27,88 & -29,80 & -21,48 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{32} = \begin{bmatrix} -7,604 & -17,40 & -22,86 & -21,29 & -20,36 \\ 2,367 & -3,781 & -20,22 & -39,68 & -44,84 \\ -12,56 & -32,48 & -61,54 & -94,08 & -112,1 \\ -7,346 & -13,20 & -34,10 & -50,87 & -48,46 \\ 18,85 & 24,16 & 36,42 & 28,40 & 20,57 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{33} = \begin{bmatrix} 2,458 & 5,293 & 7,406 & 8,257 & 8,955 \\ -0,504 & 0,680 & 3,534 & 6,805 & 8,778 \\ 3,178 & 7,710 & 12,86 & 17,96 & 19,32 \\ 2,365 & 4,367 & 8,676 & 11,93 & 12,48 \\ -6,053 & -9,276 & -12,54 & -12,25 & -10,46 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{41} = \begin{bmatrix} 1,0 * 10^5 & -1,729 & -1,763 & -1,733 & -1,658 \\ -1,380 & 1,0 * 10^5 & 0,721 & 2,552 & 3,146 \\ -3,980 & -7,050 & 1,0 * 10^5 & -8,581 & -6,734 \\ -2,425 & -4,834 & -7,592 & 1,0 * 10^5 & -8,487 \\ -0,108 & -0,960 & -2,340 & -5,911 & 1,0 * 10^5 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{42} = \begin{bmatrix} 0,575 & 0,575 & 0,587 & 0,576 & 0,551 \\ -1,834 & -3,877 & -8,067 & -11,12 & -13,05 \\ -0,517 & -4,082 & -3,893 & -7,407 & -9,486 \\ 3,315 & 6,144 & 9,212 & 13,19 & 14,51 \\ 1,423 & 4,317 & 5,054 & 7,697 & 11,97 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{43} = \begin{bmatrix} -0,233 & -0,233 & -0,238 & -0,234 & -0,224 \\ 0,280 & 0,549 & 1,474 & 1,986 & 2,080 \\ -0,706 & -0,843 & -1,540 & -0,741 & -0,434 \\ -0,898 & -1,719 & -2,490 & -3,391 & -3,584 \\ 0,501 & 0,664 & 1,111 & 0,643 & -0,015 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{51} = \begin{bmatrix} 5,215 & 8,397 & 12,05 & 13,34 & 13,10 \\ -1,727 & -2,418 & -7,195 & -6,072 & -3,890 \\ 0,714 & 1,529 & 3,109 & 0,674 & -0,858 \\ 1,399 & 2,771 & 4,919 & 5,241 & 3,119 \\ -0,446 & -0,483 & 0,973 & 7,382 & 15,18 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{52} = \begin{bmatrix} 1,0 * 10^5 & -10,16 & -14,09 & -17,36 & -18,03 \\ -3,645 & 1,0 * 10^5 & -2,101 & 0,926 & 0,212 \\ -3,674 & -7,530 & 1,0 * 10^5 & -6,947 & 1,224 \\ -6,232 & -12,39 & -20,54 & 1,0 * 10^5 & -21,01 \\ -6,945 & -14,88 & -23,01 & -38,27 & 1,0 * 10^5 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{53} = \begin{bmatrix} 1,941 & 2,760 & 3,805 & 4,569 & 4,835 \\ -0,611 & -0,677 & -2,661 & -3,019 & -2,799 \\ 0,460 & 0,952 & 1,748 & 0,373 & -1,251 \\ 1,173 & 2,308 & 3,783 & 4,387 & 3,462 \\ -0,446 & -0,691 & -0,694 & 1,595 & 5,348 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{61} = \begin{bmatrix} -2,151 & -2,254 & -3,125 & -3,263 & -2,976 \\ -1,182 & -2,203 & -2,506 & -2,619 & -2,074 \\ -0,596 & -1,608 & -5,164 & -0,966 & 5,629 \\ -1,452 & -3,072 & -4,852 & -6,336 & -3,200 \\ -3,421 & -5,843 & -8,425 & -11,20 & -13,68 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{62} = \begin{bmatrix} 3,636 & 3,488 & 4,840 & 6,255 & 6,490 \\ -1,709 & -4,097 & -6,853 & -8,277 & -9,460 \\ -0,634 & -0,248 & 6,150 & 2,448 & -6,027 \\ 2,169 & 4,758 & 5,785 & 6,360 & -3,874 \\ 2,185 & 1,499 & 3,700 & 10,29 & 21,66 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

$$l_{63} = \begin{bmatrix} 1,0 * 10^5 & -1,212 & -1,543 & -1,846 & -1,950 \\ -0,2123 & 1,0 * 10^5 & 0,119 & 0,342 & 0,520 \\ -1,011 & -2,222 & 1,0 * 10^5 & -3,739 & -2,061 \\ -1,631 & -3,327 & -4,911 & 1,0 * 10^5 & -3,185 \\ -1,266 & -1,956 & -3,102 & -4,901 & 1,0 * 10^5 \end{bmatrix} * 10^{-5},$$

donde  $I$  es una matriz identidad cuya dimensión es de  $n \times n$ .

El tiempo de muestreo es de 2 milisegundos.

El factor de olvido  $\delta$ , usado en la Ec. (3.5), es de 0,0.



## Apéndice F

# Conexiones de los sensores a las tarjetas de adquisición de datos

Las conexiones de los sensores a las tarjetas de adquisición de datos, como se indicó en el capítulo 7, se realizan mediante un módulo de conexiones de *National Instruments* modelo *SCB-68*, Fig. 7.8. Este módulo es necesario porque las tarjetas se encuentran en las ranuras PCI de una computadora de escritorio, además, el módulo de conexiones tiene 68 terminales de conexión mediante tornillos, lo que permite una fácil y rápida conexión de señales, intercambio de señales eléctricas con otros componentes, uso de termocuplas y atenuación de voltajes (National Instruments, 2002), estas tres últimas características no son necesarias para el presente trabajo. Aunado a lo anterior, el módulo de conexiones permite acondicionar la señal entrada para los convertidores de salida digital/analógico.

La Fig. F.1 muestra un esquema de la conexión de los sensores a las tarjetas de adquisición de datos, y señales de salida de las mismas. En la figura se observa que las señales de entrada pasan por el módulo de conexiones y entran a la tarjeta para su procesamiento. Así mismo, la tarjeta puede sacar señales que tienen que pasar por el módulo de conexiones. Tanto las señales de entrada como de salida pueden ser analógicas o digitales.

Los sensores se conectan en los puertos de entrada analógicos en la forma NRSE (*Non Referenced Single Ended*)<sup>1</sup>, en el cual todos los puertos mencionados tienen una conexión a

---

<sup>1</sup>Para mayores detalles de esta configuración, revisar el capítulo 3 de (National Instruments, 2002) y capítulo 4 de (National Instruments, 2006).





Figura F.1: Ruta de conexión entre los sensores y la tarjeta de adquisición de datos

tierra común, y esta conexión se encuentra en el pin *AISENSE*. En la Fig. F.2 se observa la distribución de las terminales de conexión, así como el número de pin correspondiente a cada una de aquéllas. Mediante esta conexión se tienen disponibles 16 canales de entrada y 2 canales de salida, todos analógicos, para cada una de las tarjetas utilizadas. En este caso sólo se utilizan los canales de entrada.

En la tabla F.1 se describe la conexión de cada acelerómetro en el módulo de conexiones (*SCB-68*) de la tarjeta de adquisición de datos 1 (**Tarjeta 1**). En la primera columna se indica el *canal* que le corresponde al sensor, y la tercera columna indica en cuál *pin* está conectado dicho sensor.

La columna central indica la posición del acelerómetro en la estructura: **AX#** y **AY#** son aceleraciones en los ejes *X* y *Y*, respectivamente. En el caso de los acelerómetros en la dirección *Y*, se tienen dos posiciones: *AYE#* representa la aceleración en el eje *Y* posición *Este*, *AYO#* denota la aceleración en la misma dirección pero en la posición *Oeste*; la Fig. 7.20 muestra la distribución de los acelerómetros en el modelo *experimental*. Para todas las notaciones el número indica el piso donde se encuentra el sensor. Además, la letra y número que se encuentran entre paréntesis indican el número de parte del sensor. El siguiente campo señala el voltaje que envía el sensor en reposo, nótese que es de 2,5 voltios, aproximadamente, para todos los acelerómetros, lo que origina una señal de desfase en las mediciones de éstos. Finalmente, se indica el valor de conversión de voltios a unidades de aceleración. Estas unidades son:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

La tabla F.2 muestra el *canal* y *pin* que le corresponde a cada sensor de desplazamiento (LVDT) conectado en la tarjeta de adquisición de datos 2 (**Tarjeta 2**). **DX#** indica des-

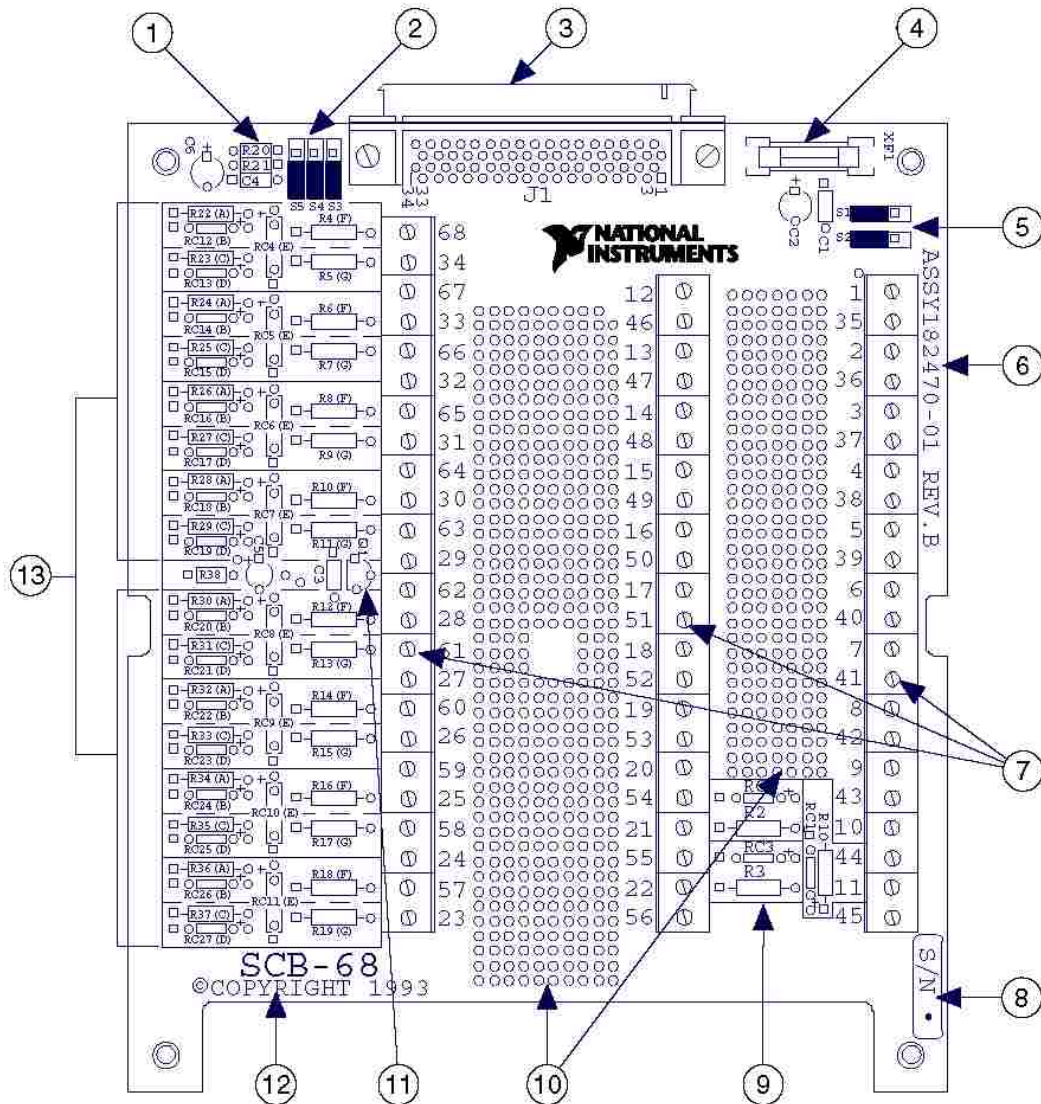


Figura F.2: Diagrama de módulo de conexiones *SCB-68*. Cortesía de *National Instruments*

plazamiento en la dirección  $X$ , y  $DY\#$  desplazamiento en la dirección  $Y$ , ambos para los pisos correspondientes indicados en el número. El siguiente campo muestra el número de parte del sensor, indicado entre paréntesis. Por último, se observa el valor de conversión de centímetros a voltios. Nótese que este último es negativo. La **Tarjeta 2** tiene conectados a todos los LVDT, incluyendo a los de la base de la mesa vibradora: **DXT** y **DYT**.

**AXT** y **AYT** son señales de acelerómetros colocados en la base para modelos de la mesa vibradora, Fig. 7.20, en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente. **DXT** y **DYT** son los

Cuadro F.1: Posición de acelerómetros en el módulo de conexión *SCB-68*

<b>PCI-MIO-16E-4 (Tarjeta 1)</b>		
canal	señal	pin
00	<b>AX1</b> (S - 02996) - 2,510 v - 1,060 v/g	68
01	<b>AX2</b> (S - 03000) - 2,515 v - 1,085 v/g	33
02	<b>AX3</b> (S - 02999) - 2,470 v - 1,070 v/g	65
03	<b>AX4</b> (S - 02998) - 2,495 v - 1,000 v/g	30
04	<b>AX5</b> (S - 02997) - 2,520 v - 1,030 v/g	28
05	<b>AYE1</b> (S - 01214) - 2,530 v - 0,995 v/g	60
06	<b>AYE2</b> (S - 01218) - 2,534 v - 0,965 v/g	25
07	<b>AYE3</b> (S - 03401) - 2,490 v - 1,060 v/g	57
08	<b>AYE4</b> (S - 03405) - 2,510 v - 1,015 v/g	34
09	<b>AYE5</b> (S - 01212) - 2,525 v - 1,046 v/g	66
10	<b>AYO1</b> (S - 01217) - 2,510 v - 0,990 v/g	31
11	<b>AYO2</b> (S - 03403) - 2,495 v - 0,995 v/g	63
12	<b>AYO3</b> (S - 01215) - 2,525 v - 0,985 v/g	61
13	<b>AYO4</b> (S - 03400) - 2,505 v - 1,056 v/g	26
14	<b>AYO5</b> (S - 03404) - 2,515 v - 1,015 v/g	58
15	<b>AXT</b> (S - 01221) - 2,515 v - 1,044 v/g	23
AISENSE	<b>GND</b>	62

desplazamientos que sufre la base para modelos en las direcciones  $X$  y  $Y$ , Fig. 7.4. Ambas señales, aceleración y desplazamiento, son las mediciones del movimiento del suelo en las direcciones respectivas.

**GND** es la señal de tierra, que como se mencionó en líneas anteriores, es común para todos los sensores conectados en el mismo módulo de conexión.

Los valores de conversión para acelerómetros y LVDT, así como los valores de voltaje en reposo de aquéllos, son tomados de las hojas de especificaciones del fabricante (Transtek, 2009).

Cuadro F.2: Posición de LVDT en el módulo de conexión *SCB-68*

<b>PCI-MIO-16E-4 (Tarjeta 2)</b>		
canal	señal	pin
00	<b>DX1</b> (R - 12) - -1,7487 cm/v	68
01	<b>DX2</b> (R - 07) - -1,7682 cm/v	33
02	<b>DX3</b> (R - 13) - -1,7831 cm/v	65
03	<b>DX4</b> (R - 05) - -1,7854 cm/v	30
04	<b>DX5</b> (R - 14) - -1,8138 cm/v	28
05	<b>DY1</b> (R - 08) - -1,7806 cm/v	60
06	<b>DY2</b> (R - 16) - -1,7793 cm/v	25
07	<b>DY3</b> (R - 11) - -1,7790 cm/v	57
08	<b>DY4</b> (R - 06) - -1,7784 cm/v	34
09	<b>DY5</b> (R - 10) - -1,7770 cm/v	66
10	<b>DXT</b> (R - 09) - -1,7476 cm/v	31
11	<b>DYT</b> (R - 03) - -1,7371 cm/v	63
12		61
13		26
14		58
15	<b>AYT</b> (S - 01216) - 2,505 v - 0,950 v/g	23
AISENSE	<b>GND</b>	62



## Referencias

- Åström, K.J. y Wittenmark, B. (1995). *Adaptive Control*, 2nd ed.. United States of America, Addison-Wesley.
- Alvarez-Icaza, L. y R. Carrera (2003). Control de estructuras civiles con modulación en frecuencia. en *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Ensenada, B.C.N., México*, pp. 372–377.
- Alvarez-Icaza, L. y R. Jiménez (2003). Observador adaptable para el control de estructuras civiles. en *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Ensenada, B.C.N., México*, pp. 360–365.
- Angeles Cervantes, Juan Mauricio (2004). Identificación paramétrica de un edificio sujeto a excitación sísmica bidimensional. Master's thesis, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México, D.F.
- Arnst, M., D. Clouteau, B. Chebli, R. Othman, y G. Degrande (2006). A non-parametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings. *Probabilistic Engineering Mechanics* 21, 18–34.
- Bahar, A., F. Pozo, L. Acho, J. Rodellar, y A. Barbat (2010a). Hierarchical semi-active control of base-isolated structures using a new inverse model of magnetorheological dampers. *Computers and Structures* 88, 483–496.
- Bahar, A., F. Pozo, L. Acho, J. Rodellar, y A. Barbat (2010b). Parameter identification of large-scale magnetorheological dampers in a benchmark building. *Computers and Structures* 88, 198–206.

- Block, P., T. Ciblac, y J. Ochsendorf (2006). *Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings*. *Computers and Structures* 88, 1841–1852.
- Burden, Richard L. y Faires, J. Douglas (1985). *Análisis numérico*. México, Grupo Editorial Iberoamericana.
- Carrera, R., L. Alvarez-Icaza, y M. Angeles (2009). Plataforma experimenta para control en modelos de estructuras civiles. en *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático, Zacatecas, Zac, México*.
- Ceballos Sierra, F. J. (2006). *Enciclopedia del lenguaje C*. España, Alfaomega.
- Chen, C.-T. (1984). *Linear System Theory and Desing*, 2nd ed.. Orlando, FL, Saunders College Publishing.
- Chen, W. y Scawthorn, C. (2003). *Earthquake engineering handbook*. Florida, CRC.
- Chopra, A. (1995). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 2nd ed.. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.
- Curadelli, R., J. Riera, D. Ambrosini, y M. Amani (2008). Damage detection by menas of structural damping identification. *Computers and Structures* 30, 3497–3504.
- Deitel, H.M. y Deitel, P.J. (1995). *Como programar en C/C++*, 2a ed.. México, Prentice Hall.
- Dyke, S., B. Spencer, M. Sain, y J. Carlson (1996). *Seismic response reduction using magnetorheological dampers*. en *Proceedings of the 1996 IFAC World Congress*, San Francisco, vol. L, pp. 145–150.
- González, M. P. y J. L. Zapico (2008). *Seismic damage identification in buildings using neural networks and modal data*. *Computers and Structures* 86, 416–426.
- Huang, C. y W. Su (2007). Identification of modal parameters of a time invariant linear system by continuous wavelet transformation. *Mechanical Systems and Signal Processing* 21, 1642–1664.
- Ioannou, P.A. y Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.

- Jiménez Fabián, R. y L. Alvarez-Icaza (2009). Simultaneous state estimation and parameter tuning in a shear building with a magneto-rheological damper. Structural Control and Health Monitoring 16, 483–502.*
- Jiménez Fabián, René Enrique (2002). Control semiactivo de estructuras civiles utilizando amortiguadores magneto-reológicos. Master's thesis, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México, D.F.
- Jiménez Fabián, René Enrique (2006). *Control semiactivo de estructuras civiles usando amortiguadores magneto-reológicos*. Tesis doctoral, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México, D.F.
- Li, Y. y S. Mau (1991). A case of study of MIMO system identification applied to building seismic records. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics 20, 1045–1064.*
- Matlab (2006). Matlab R2006a. <http://www.mathworks.com>, Mathworks Inc.*
- Meli, R. (1985). Diseño estructural. Limusa.*
- Naeim, F. (1994). Response of instrumented buildings to 1994 Northridge Earthquake. John A. Martin and Associates, Inc.*
- Nagarajaiah, S. y Z. Li (2004). Time segmented least squares identification of base isolated buildings. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 24, 577–586.*
- National Instruments (2002). *DAQ, SCB-68 68-pin shielded connector block user manual*. Austin, Texas, USA, National Instruments Inc.
- National Instruments (2006). *DAQ M Series: M Series user manual NI 622x, NI 625x, and NI 628x devices*. Austin, Texas, USA, National Instruments Inc.
- Park, R. (2001). *Gemini GV6K and GT6K hardware installation guide*. <http://www.compumotor.com>, Parker Hannifin, Corp. CA.
- Park, R. (2003). *Motion planner*. <http://www.compumotor.com>, Parker Hannifin, Corp. CA.



- Paz, M. (1997). *Structural Dynamics: theory and computation*, 4th. ed.. New York, NY, Chapman & Hall, International Thomson Publishing.
- Rainieri, C. y G. Fabbrocino (2010). Automated output-only dynamic identification of civil engineering structures. *Mechanical Systems and Signal Processing* 24, 678–695.
- Rodríguez Rocha, R. y L. Barroso (2003). *Método de cocientes de valores de rigidez entre valores de masa para la obtención del estado no dañado de una estructura y detección de daño de la estructura de referencia.* en XVI Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guanajuato, México.
- Rubin, K. (2007). *Volcanoes and Earthquakes, 1st. ed.. Sidney, Australia, Simon & Schurter Publishing.*
- Safat, E. (1995). *Detection and identification of soil-structure interaction in buildings from vibration recordings.* ASCE Journal of Structural Engineering 121, 899–906.
- Simulink (2006). *Simulink, real time workshop.* <http://www.mathworks.com>, Mathworks Inc.
- Slotine, Jean-Jacques E. y Weiping, Li. (1991). *Applied nonlinear control.* Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall.
- Stewart, J. y G. Fenves (1998). System identification for evaluating soil-structure interaction effects in buildings from strong motion recordings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 27, 869–885.
- Transtek (2009). *Gaging LVDTs.* <http://www.transtekinc.com/products/gaging-LVDTs.html>, Trans-Tek Inc.
- Wang, J.-F., C.-C. Lin, y S.-M. Yen (2007). *A story damage index os seismically-excited buildings based on modal frequency and mode shape.* Engineering Structures 29, 2143–2157.
- Yang, J. y H. Huang (2005). On-line damage identification of structures with unknown excitations. *Structural Health Monitoring: advancements and challenges implementation Edited by Fu-Kuo Chang, 245–252.*

*Yang, G. (2001). Large-scale magnetorheological fluid damper for mitigation: modeling, testing and control. Tesis doctoral, Departament of Civil Engineering and Geological Sciences, Notre Dame, Indiana, USA.*