



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Técnicas Modernas para el Tratamiento de
Señales Turbulentas

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERIA

Ingeniería eléctrica-Procesamiento digital de señales

P R E S E N T A :

M en I. José Manuel Alvarado Reyes

TUTOR:

Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach

AÑO

2010





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO

Presidente	<i>Dr. García Ugalde Francisco</i>
Secretario	<i>Dra. Medina Gómez Lucía</i>
1 ^{er} Vocal	<i>Dra. Stern Forgach Catalina Elizabeth</i>
1 ^{er} Suplente	<i>Dr. Orduña Bustamante Felipe</i>
2 ^{do} Suplente	<i>Dr. Zenit Camacho José Roberto</i>

Lugar o lugares donde se realizó la tesis

Laboratorio de Acústica y en el Taller de Hidrodinámica y Turbulencia,
Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F.

TUTOR DE TESIS
Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach

FIRMA

Agradecimientos

A Dios

Mi más profundo y sincero agradecimiento a la **Facultad de Ciencias** de la máxima casa de estudios de la **Universidad Nacional Autónoma de México**, por su amparo durante la elaboración de este trabajo.

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo y contribución de varias personas, comenzando por mi tutora, amiga, compañera y “jefa” la Dra. Catalina Stern a quien agradezco profundamente su apoyo incondicional y la dirección de este trabajo.

Mi agradecimiento al Fis. Cesar Aguilar, Fis. Alejandro Carreño y a la Fis. Yadira Salazar; por sus comentarios y ayuda en el diseño y construcción de la parte experimental para la elaboración de este trabajo.

Mis sinceros agradecimientos a los sinodales por sus comentarios y observaciones en el presente trabajo

Dra. Lucia Medina Gómez

Dr. José Roberto Zenit Camacho

Dr. Felipe Orduña Bustamante

Dr. Francisco García Ugalde

El conocimiento es una herramienta que te permite materializar las metas, pero son las personas que forman parte de nuestra vida las que implantan los umbrales para alcanzarlas. Su eternidad esta en las palabras y acciones que hoy por hoy me acompañan

†Mis siempre vivos difuntos†.

Eulalia Reyes Chávez y Trinidad Alvarado González
Maricela Álvarez González
Marcial Tamayo Rocha
Miguel Alvarado Reyes
Trinidad Alvarado Reyes

A mi gran familia: Mi tía- Hermanas- Hermanos - Sobrinas- Sobrinos.

Soy afortunado no solo por mis logros sino por permitirme ser parte de su vida. Con ustedes nunca necesite del conocimiento, ni un grado de estudio, ni de una compleja ecuación, mucho menos de palabras o letras gramaticales para ser aceptado en tan maravilloso grupo de trabajo. Aprendí que la conciencia es únicamente un acto de voluntad por cambiar y mejorar. En la adquisición de conocimiento o la obtención de un grado no viene implícita la adquisición de conciencia. Ustedes son por mucho la mejor universidad... la universidad de la vida.

A mis entrañables colegas, confidentes y amigos. Dra. Lucía Medina, Fis. Margarita Puente, Dr. Armando Pérez, Dr. Marcos Ley, Lic. Antonieta Fregoso y Mtro. Edgar Vázquez. Y con gran afecto al resto de mis amigos que aguardan el encuentro dada la larga ausencia mientras culminaba el presente trabajo.

*Ustedes son el encuentro siempre anhelado
Es grato compartir un instante de charla
En el sublime oasis de la tempestad.*

Agradezco a Dr. Miguel Ángel Molero Armenta y Alejandra Rosalía Carrillo Tenorio por sus observaciones en mejora del presente trabajo.

A Regina: *Eres la materialización de mis sentimientos puros y perpetuos. Llegaste en la culminación de todos mis sueños y retos, en un momento en el que solo tengo sentimientos... **Eres lo mejor de mí.***

Resumen

Estructura del trabajo

Introduccion, antecedentes y fundamentos

Presentacion del problema

Estado del arte

Montaje Experimental

Introduccion

Fundamentos teoricos

Diseño y montaje del chorro supersonico

Trayecto optico

Vizualizacion

Tratamiento de señales: antecedentes con periodogramas

Introduccion

Densidad espectral periodogramas

Periodogramas no parametricos

Periodogramas parametricos

Técnicas de selección de parametros

Resolucion en frecuencia el tamaño de una ventana y el numero de parametros optimos.

Analisis critico y propuesta de tratamiento de señales

Introduccion

Adquisicion de señales, dominio del tiempo y Teorema de Nyquist-

La señal en el dominio de las frecuencias -Transformada de Fourier-

El tamaño minimo de una ventana

La resolucion en frecuencia en los periodogramas

Dependencia entre la resolucion en frecuencia y el numero de parametros

La resolucion en frecuencia aplicada al periodograma parametrico de Burg.

Primeros espectros de señales provenientes de un jet.

La resolucion en frecuencia como criterio para la adquisicion de señales

Resultados

Introduccion

Resultados y validacion de herramientas

Espectros ajustados con gaussianas

Otros analisis

Conclusiones

Montaje experimental y adquisicion de señales

Estudio y analisis de herramientas de procesamiento y en particular el periodograma parametrico de Burg.

Analisis de señales provenientes de un jet supersonico

Trabajo futuro

Bibliografia

Resumen

En este trabajo se estudiaron señales turbulentas provenientes de un chorro de aire moviéndose a velocidades supersónicas. Mediante el análisis espectral de la luz difundida por las moléculas (Difusión Rayleigh), se obtuvo información sobre las fluctuaciones de densidad en el interior y fuera del chorro.

Para poder extraer toda la información necesaria de estas señales tan complicadas, era necesario poder escoger, sin arbitrariedad, el número de parámetros de los periodogramas y el tamaño mínimo de una ventana. Se mostró que la determinación de la resolución en frecuencia, antes de adquirir la señal, resulta tan importante como la selección de la frecuencia de muestreo; y que la utilización del Teorema de Nyquist es un criterio necesario pero no suficiente para reconstruir correctamente la señal tanto en el espacio temporal como en el de las frecuencias. Se pudo entonces obtener el tamaño mínimo de una ventana y el mínimo de parámetros empleados en los periodogramas.

Al tener en cuenta todos estos criterios, fue posible hacer una adquisición de la señal seguida de un procesamiento adecuado para resolver por primera vez, en el factor de forma, fluctuaciones de densidad de orígenes diversos, en el interior de un chorro supersónico y dar herramientas para determinar el patrón de radiación acústica del chorro.

Estructura del trabajo

En el capítulo uno se presenta la revisión general del trabajo. Primero se describen los inicios de este tipo de estudios y el estado del arte a nivel internacional y se define el propósito del presente trabajo. En el capítulo dos se hace una revisión de los conceptos físicos relevantes en mecánica de fluidos y en óptica. En este mismo capítulo se describen tanto el montaje experimental como los dispositivos específicos que se diseñaron y construyeron. En el tercer capítulo se presentan unos tipos de estimadores espectrales conocidos como periodogramas. En el capítulo cuatro se hace una revisión exhaustiva de los conceptos más utilizados en la adquisición de datos y de su procesamiento para obtener la densidad espectral de la corriente proveniente del detector. Se hace un análisis crítico de los métodos tradicionales, y se hace una propuesta concreta de cómo hacer la adquisición y el tratamiento de los datos. En el capítulo cinco se presentan los resultados aplicados a las señales provenientes del chorro supersónico. En particular, se analizan los picos de origen acústico y entrópico, directamente de las densidades espectrales obtenidas mediante periodogramas de Burg. En este mismo capítulo se presenta una propuesta para recuperar información sobre los espectros experimentales empleando Gaussianas. También se presentan imágenes helicoidales del espacio fase. Estos resultados no han sido reportados hasta el momento pero su análisis detallado queda pendiente. Finalmente, en el capítulo seis, se presentan las conclusiones y se hacen propuestas para trabajo futuro.

Capítulo 1.- Introducción, antecedentes y fundamentos

*No hay nada nuevo en el universo
Todo cuanto creemos que descubrimos
Siempre ha existido, solo ha faltado quien lo interprete
Marcos Ley Koo.*

1.1.- Presentación del problema

El objetivo fundamental de este trabajo es la continuación del estudio realizado en la tesis de maestría [1]. En ella se presentaron herramientas de procesamiento de señales que permitían la estimación de espectros de señales obtenidas a partir de un experimento de difusión Rayleigh¹. Con los datos obtenidos se pretende estudiar, en el futuro, el comportamiento, la localización y la producción de ondas acústicas en un chorro supersónico; y obtener el patrón de radiación acústica dentro y fuera del flujo. Las señales obtenidas son complejas ya que provienen de un medio muy turbulento. Por lo tanto, su adquisición y tratamiento adecuados permitirá extraer la información buscada de manera confiable en trabajos futuros.

1.1.1.- Introducción

Se llama Aeroacústica al estudio de la producción de ondas acústicas por el movimiento de un gas y su propagación. A pesar de haberse estudiado desde el año 1950, los detalles de los mecanismos que producen estas ondas y su propagación dentro de un flujo supersónico, no se conocen bien todavía [2,3,4]. Hay muchas teorías, pero dado que las ondas acústicas se estudian sobre todo con micrófonos y éstos no pueden ser introducidos dentro del flujo, sólo se han podido hacer estudios en campo lejano e inferir lo que sucede en la zona de producción. En la interface entre dos fluidos que se mueven a velocidades diferentes hay fuertes gradientes de velocidad que generan vórtices de gran

¹ Algunos autores utilizan esparcimiento para traducir la palabra *scattering*. Aquí utilizaremos la palabra difusión.

tamaño. La mayoría de las teorías sobre la producción acústica por flujos rápidos tiene que ver con la interacción entre estos vórtices. No se sabe si son los apareamientos, los procesos de corte y reconexión, los de aniquilación entre vorticidades opuestas o todos ellos los que producen ondas acústicas. En los flujos supersónicos hay además otra forma de producción acústica que resulta de la interacción entre el flujo y la estructura de choque y se conoce con el nombre de *screech*, [5,6],

1.1.2.- Antecedentes

La manera tradicional de estudiar el ruido aeroacústico es a través de correlaciones de señales adquiridas por un arreglo de micrófonos en campo lejano, [7, 8, 9]. A finales de los años setenta en la Escuela Politécnica de Francia, se desarrolló una técnica óptica no intrusiva que puede funcionar como un micrófono para un solo vector de onda, y que puede ser usado dentro el flujo, [10]. A través de la difusión de la luz, producida por las moléculas del gas estudiado, se puede obtener información sobre las fluctuaciones de densidad en el medio para un vector de onda, determinado por el montaje óptico, [7, 8, 11, 12, 13]. La aplicación específica de esta técnica a la producción acústica no se había hecho de manera detallada. Sobre todo, no se habían analizado los problemas que surgen al querer recuperar la información acústica que provienen de la adquisición de datos.

1.2.- Estado del arte

El estudio de las propiedades físicas de la materia a través de su interacción con la radiación electromagnética, ha sido objeto de una enorme cantidad de trabajos de investigación. En 1961, con la aparición del primer láser de onda corta continua, se desarrollaron numerosas técnicas, en diversas áreas de aplicación. La posibilidad de estudiar objetos o desplazamientos extremadamente pequeños, del orden de micrometros, con una alta precisión y

una gran resolución espacial y temporal, abrió nuevos campos de estudio, como la inspección de rugosidades, medición de deformaciones micrométricas, de velocidad, de temperatura, etc.

En particular, en la Mecánica de Fluidos, sólo tres años después de la aparición del láser, los investigadores Yih y Cummins, [14], desarrollaron el primer prototipo de un velocímetro láser por desplazamiento Doppler (LDA, por sus siglas en inglés) aprovechando la difusión Mie de la luz. Utilizaron esta técnica para estudiar el flujo en un tubo con agua. Un año más tarde Foreman, [15], utilizando esta nueva técnica, consiguió hacer mediciones de velocidad en aire.

Una de las ventajas de los métodos que utilizan luz es que ésta es no intrusiva. Antes de la aparición del láser, la técnica más precisa para medir la velocidad de un fluido, era la del hilo caliente, [16]. Éste es un filamento muy pequeño, por el que se hace pasar una corriente eléctrica. En algunos rangos, la resistencia del alambre cambia linealmente con la velocidad del flujo y se puede calibrar la medida. El problema más grande de esta técnica es que, aunque el hilo caliente sea muy delgado, necesita de un soporte que interfiere con el flujo. Es decir, es una técnica intrusiva. [17]

La velocimetría por desplazamiento Doppler no requiere de un soporte, pero sí de partículas sembradas en el flujo, cuya velocidad es la que se mide. En este caso es necesario asegurarse de que las partículas tengan el tamaño y el peso adecuados para seguir fielmente al flujo estudiado. [12, 13].

1.2.1.-Difusion de luz para estudiar gases transparentes

A finales de los años setenta en la Escuela Politécnica de Francia se inicia el estudio de gases transparentes haciendo incidir en ellos un haz de luz coherente y detectando la luz difundida elásticamente, es decir la difusión Rayleigh. El primer trabajo reportado data de 1981. Todos los experimentos se

han realizados de flujos turbulentos supersónicos, [10, 11, 13, 12, 18, 19, 20]. Primero se estudió la zona de turbulencia totalmente desarrollada del jet, lejos de la salida. Para tratar la señal, ésta se enviaba directamente a un analizador de espectros. Después se utilizó la técnica como velocímetro y se compararon los datos con los obtenidos por velocimetría por desplazamiento Doppler [15]. Los resultados fueron satisfactorios y se utilizó dicha técnica para estudiar capas de mezcla y sobre todo como referencia para experimentos de difusión Thomson² en plasmas.

Antes del presente trabajo, los estudios se realizaron en tiempo real con un analizador de espectros, [10]; y en algunos casos mediante la evaluación de la transformada de Fourier de los datos obtenidos mediante una computadora, [1, 6, 12].

1.2.2.- Fluctuaciones de densidad en gases moviéndose a gran velocidad

Cuando los gases que se mueven a gran velocidad, hay fluctuaciones de densidad en el fluido. Kovasznay en 1953 es quien sugiere que las fluctuaciones en un flujo pueden provenir de diferentes orígenes: cambios en la vorticidad, cambios en la presión y cambios de entropía. Kovasznay [7] realizó un análisis de perturbaciones válido para fluctuaciones débiles, presión y entropía, y las clasificó en tres modos independientes: vorticales, acústicos y entrópicos. Las fluctuaciones de presión (acústica) y las entrópicas son fluctuaciones de densidad y pueden estudiarse con esta técnica. Las fluctuaciones vorticales no son de densidad y no se estudian en este trabajo.

Aun con las diversas técnicas existentes, para estudiar gases transparentes desplazándose a grandes velocidades, hasta la fecha se tienen preguntas sin contestar tales como.

² La difusión Thomson es producida por los electrones de un plasma. El proceso es análogo a la difusión Rayleigh

- ¿Cuáles son las fuentes, es decir, los eventos aerodinámicos que producen ondas acústicas?
- ¿Cómo se propagan las ondas acústicas dentro del flujo supersónico?
- ¿Cuál es el efecto de la estructura supersónica y de la capa de mezcla en la producción y propagación de ondas acústicas en el flujo? (Y en general de las fluctuaciones de densidad)

1.2.3.- Análisis espectrales entre 2000 y 2004.

El estudio de gases transparentes, a través de la difusión Rayleigh, se ha realizado durante más de 20 años, y no fue sino hasta el año 2000 que se realizó el diseño y construcción del primer sistema experimental en México. Este sistema fue reportado en una tesis de licenciatura [5]. Los primeros resultados sobre la adquisición y análisis de señales se reportaron en una segunda tesis de licenciatura [6]. En sus inicios, tanto en Francia como en México, se estudiaba el espectro de las señales empleando un analizador de espectros. En México se empleó un analizador de espectro marca Agilent, y osciloscopios para capturar las señales. En la tabla I se presentan algunas características de los instrumentos, empleados durante el desarrollo experimental.

<i>Instrumento</i>	<i>Marca</i>	<i>Modelo</i>	<i>Ancho de Banda</i>	<i>Máx. velocidad de muestreo</i>	<i>Máximo número de muestras</i>	<i>Control de frecuencia de muestreo</i>	<i>Resolución en el dominio de las frecuencia empleada</i>	<i>Fs empleada</i>
Analizador de espectros	Agilent	E4411B ESA-L	9 kHz a 1.5 GHz	Automática	400 s	Se ajusta automáticamente	35 kHz	14 MHz
Osciloscopio	Agilent	54622A	100 MHz	200 Ms/s	200 s	Se ajusta con la base de tiempo	50 kHz	10 MHz
Osciloscopio	Agilent	Infinium 54830B DSO	600 MHz	4 GMs/s	32 s-2 Ms	Ajuste Manual Y Automático	7.63 kHz	500 MHz

Tabla I.- Características de los instrumentos empleados en la adquisición de datos

El analizador de espectros empleado en este experimento proporciona espectros con 400 muestras, independientemente del origen de la señal, señales de baja frecuencia (acústicas) o de alta frecuencia (radiación electromagnética). A pesar de que estos instrumentos se venden como si tuvieran la capacidad de muestrear en el orden de 6 GHz, en realidad su capacidad de muestreo es mucho menor. En la adquisición de señales de alta frecuencia el instrumento emplea muestreo pasa banda [21], que permite muestrear a bajas frecuencias las señales de muy altas frecuencias considerando la igualdad entre un muestreo pasa bajos y un muestreo pasa altos.

Las gráficas espectrales presentadas en los primeros dos trabajos realizados en el Laboratorio de Acústica [5, 6] de la Facultad de Ciencias de la UNAM, se obtuvieron con dicho analizador y con las características mostradas en la tabla I. Estas señales tienen información alrededor de 110 MHz, por lo que las gráficas de los espectros están centradas alrededor de dicha frecuencia. En el capítulo II se explicará la razón de esta frecuencia. Es importante señalar que todos los espectros de las señales provenientes de luz difundida, adquiridas con el analizador de espectros tienen las siguientes características: número de muestras $N = 400$ y adquiridas a un frecuencia de muestreo de $f_s = 14 \text{ MHz}$.

Las fluctuaciones de densidad de origen acústico o entrópico se manifiestan como picos (lóbulos) dentro del ancho de banda analizado. La figura 1.1 muestra algunos de estos lóbulos [5].

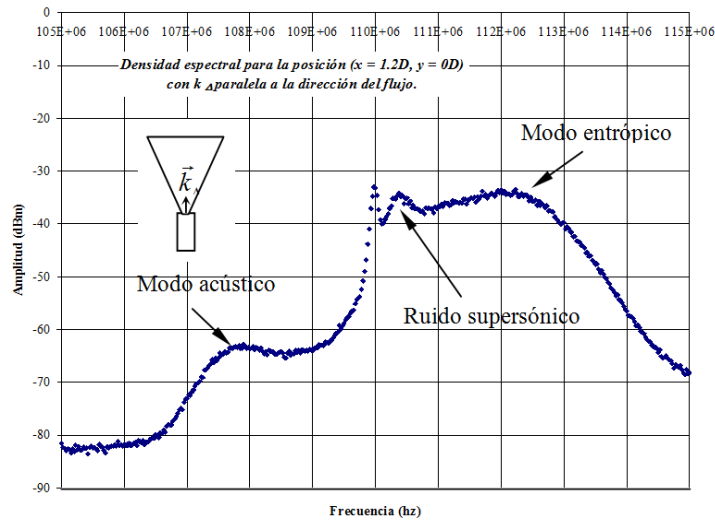


Figura 1.1.- Espectro obtenido mediante el analizador, muestra algunos lóbulos que describen las fluctuaciones de densidad dentro del ancho de banda estudiado.

La figura 1.1 es uno de los primeros espectros obtenidos en el Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. La forma del espectro varía de acuerdo a la zona y dirección que se difunde la luz. Las figuras 1.2a. a 1.2d corresponden a un mismo punto dentro del chorro de aire pero observado a distintos ángulos.

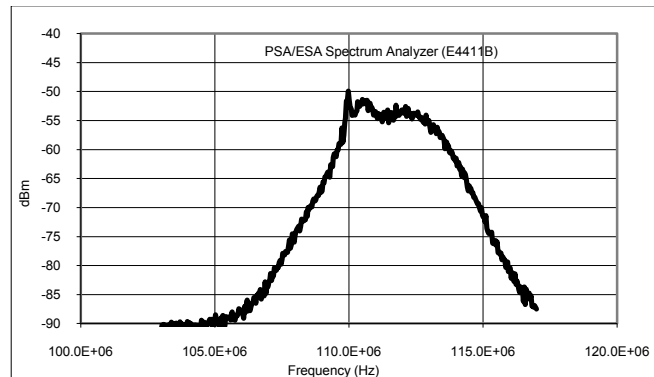


Figura 1.2a.- Posición 1.48 mm distancia de la boquilla, luz difundida en la dirección del chorro, ángulo 0°

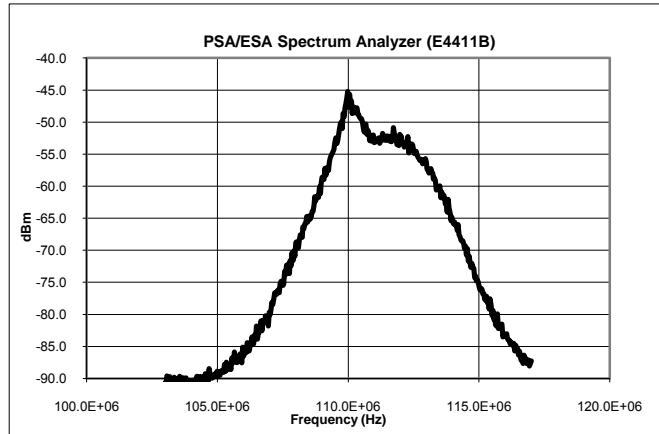


Figura 1.2b.- Posición 1.48 mm distancia de la boquilla, luz difundida en la dirección del chorro, ángulo 30°

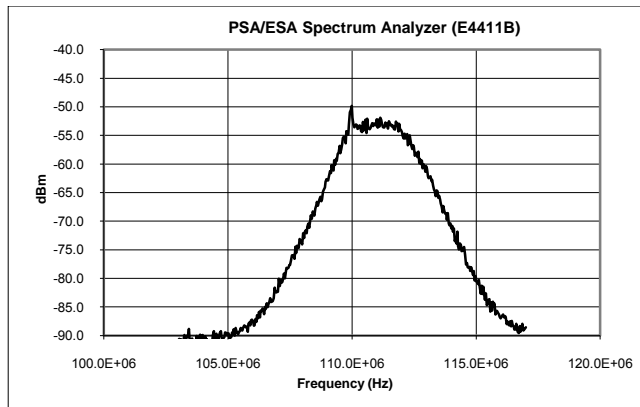


Figura 1.2c.- Posición 1.48 mm distancia de la boquilla, luz difundida en la dirección del chorro, ángulo 50°

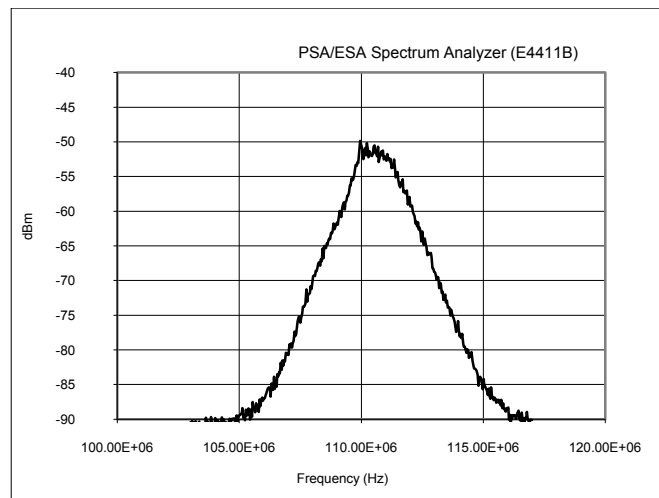


Figura 1.2d.- Posición 1.48 mm distancia de la boquilla, luz difundida en la dirección del chorro, ángulo 70°

En mucho de los casos, es difícil detectar lóbulos, acústico o entrópico, lo que implica una cierta experiencia en el análisis de los espectros. En la figura 1.3 presentada en una de las tesis de licenciatura [5], el autor indica la detección del pico acústico que a su parecer corresponde a la frecuencia en la que debería estar el pico mencionado.

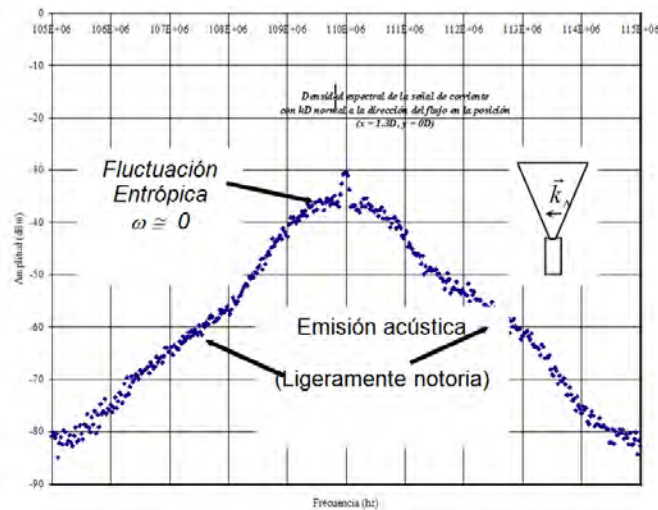
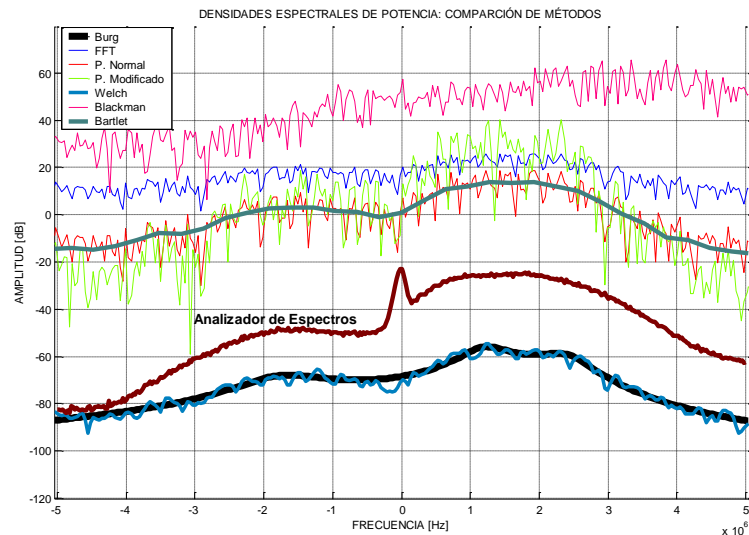


Figura 1.3.- Señal espectral obtenida con un analizador de espectro; detección perpendicular a la dirección del flujo.

En el seguimiento de los lóbulos acústico o entrópico requería de un adiestramiento del experimentador para la localización y medición, tanto en posición y amplitud, de los picos antes mencionados.

No fue sino hasta el año 2004 que se propuso aplicar otras herramientas alternativas para obtener el espectro de las señales. En la tesis de maestría [1] se presenta la evaluación de estimadores de espectro conocidos como periodogramas. Se evaluaron y se compararon distintos estimadores cuyos resultados se presentan en la figura 1.4. En esta figura está incluido el espectro del analizador antes mencionado. La gráfica de color negro y la que tiene encima de color azul, fueron obtenidas por el método paramétrico los Burg y el método no paramétrico Welch respectivamente. Es importante mencionar que el resultado de estas gráficas corresponde a la optimización y manipulación de sus variables con las que cada uno de los métodos está relacionado. Solamente en la

gráfica de Burg es posible notar dos lóbulos; mientras que en las demás, en lo general, presentan un ancho de banda sin protuberancias bien definidas.



En el mismo trabajo de maestría, se encontró que los lóbulos encontrados mediante el método de Burg correspondían a los picos acústico y entrópico esperados. Estos estimadores no habían sido usados para estas señales; a pesar de ser métodos muy conocidos desde hace más de 100 años y su aplicación en muchas ramas de la ciencia es común. Por ejemplo se usan en: la geofísica [22, 23, 24], aplicaciones de radar [25, 26], interpretación de imágenes [27], radio astronomía [28, 29], oceanografía [30], etc. [31].

Con la evaluación de los periodogramas en el trabajo de maestría fue posible discernir con claridad los picos entrópico y acústico, incluso un tercer pico que “aparecía y desaparecía” en determinados puntos dentro del jet. La figura 1.5, fue la culminación del trabajo de maestría. En esta figura se presentan los espectros de señales obtenidas a lo largo del eje central del chorro. En las gráficas espectrales se indican los picos acústicos, entrópicos y un tercer pico que en este trabajo se referirá como el pico Mach-3C.

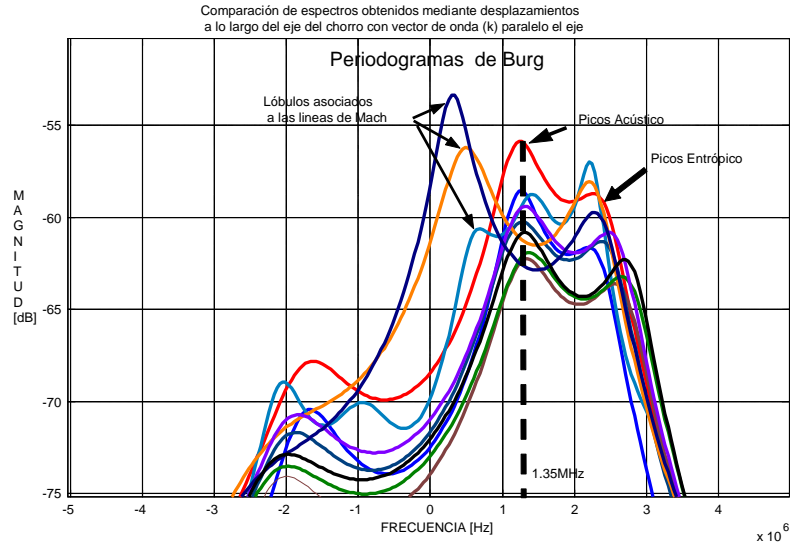


Figura 1.5.- Gráficas espectrales de señales provenientes a lo largo del eje central de un jet. Cada gráfica representa una distancia, dentro del jet, tomando como referencia cero la boquilla.

Es importante señalar la cronología de la captura de las señales y su referencia instrumental. Las gráficas presentadas hasta el momento cuya adquisición fue realizada con el analizador de espectros, están centradas en 110 MHz. Esta referencia es debida al oscilador local, descrito en el capítulo siguiente. Las señales adquiridas con un osciloscopio provienen de un dispositivo que proporciona la señal referida a cero; por lo consiguiente están centradas en el origen. Estas señales fueron capturadas con el osciloscopio modelo 54622A (tabla I)

Las gráficas espectrales representadas en la figura 1.5 son los resultados más importantes reportados por nuestro laboratorio. La importancia de estas gráficas reside en dos hechos. Primero, se observa con claridad el pico acústico, lo que permitirá obtener el patrón de radiación acústica del chorro. Segundo, se puede localizar la aparición y desaparición del pico Mach-3C a lo largo del eje del chorro.

Con la aplicación de los periodogramas paramétricos se había dado un gran avance en el estudio y análisis de dichas señales; sin embargo aun existía que la aplicación de los periodogramas se realizaba de una forma discrecional. En los

periodogramas no paramétricos se emplean ventanas como una técnica de resolución espectral. Los periodogramas paramétricos dependen estrechamente de la determinación del número de parámetros para obtener una estimación de la señal. La optimización del número de parámetros fue un motivo por el cual se propuso continuar el estudio de los periodogramas y resolver este problema. En la presente tesis, se propone la consideración de la resolución en frecuencia, dicha consideración resuelve tanto el número de muestras óptimo que debe contener una ventana; y determina el número de parámetros óptimos para la estimación espectral de las señales empleando el periodograma de Burg.

Capítulo 2. Montaje Experimental

*"¡Triste época la nuestra!
Es más fácil desintegrar un átomo que un prejuicio"
Albert Einstein*

2.1.- Introducción

Para poder medir las diversas fluctuaciones de densidad, tanto de origen acústico como entrópico, se requiere de un chorro de aire con condiciones controladas, de un montaje óptico que permita la difusión de la luz por el gas en movimiento, de la detección heterodina de la señal difundida, y de un sistema de adquisición y procesamiento adecuados de la señal proveniente del fotodetector.

2.2.- Fundamentos teóricos

Para la realización del presente trabajo es menester compaginar diferentes áreas de conocimiento. Primero, la mecánica de fluidos para entender la dinámica dentro y fuera del chorro de aire supersónico, y las hipótesis sobre producción de sonido por flujos rápidos. En segundo lugar la técnica experimental basada en la detección heterodina de la luz difundida por las moléculas (difusión Rayleigh). Finalmente, la adquisición y tratamiento de datos experimentales, que es el tema central de esta tesis. [5, 6, 1].

2.2.1.- Mecánica de fluidos y aeroacústica

Chorros o jets

El flujo producido por aire comprimido proveniente de una tobera circular que sale hacia un espacio abierto donde el aire está estático es llamado, en la literatura, chorro ó *jet* por su nombre en inglés. Al salir de la tobera que es una

contracción, se puede considerar que el flujo tiene un perfil de velocidades homogéneo, es decir, que no hay gradientes transversales de velocidad. La presión afuera es menor, y como no hay una constricción lateral, el flujo se empieza abrir de forma cónica y en primera aproximación, axisimétrica, [7, 8, 4, 9].

El flujo del centro del cono continúa su trayectoria en línea recta. Sin embargo, el de las orillas es frenado por el aire estático exterior creando fuertes gradientes de velocidad en la dirección transversal. Los gradientes llevan a la formación de vórtices. Estos engloban al aire estático, le transmiten energía y lo ponen en movimiento. La zona del chorro en la que esto sucede se llama capa de mezcla.

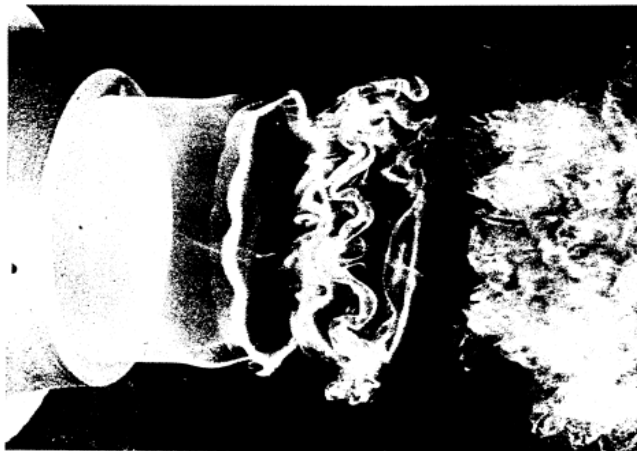


Figura 2.1.- Formación de vórtices, producidos al exhalar el humo sobre una boquilla

Si el flujo es supersónico, es decir, si la velocidad de salida es superior a la del sonido, los efectos debidos a la compresibilidad se vuelven importantes. En este caso se forma además, una estructura de choque estacionaria. En realidad, los efectos de la compresibilidad son importantes, desde que la velocidad es aproximadamente 30% de la velocidad local del sonido. Sin embargo, no se forma una estructura de choque estable. [6, 18, 32].

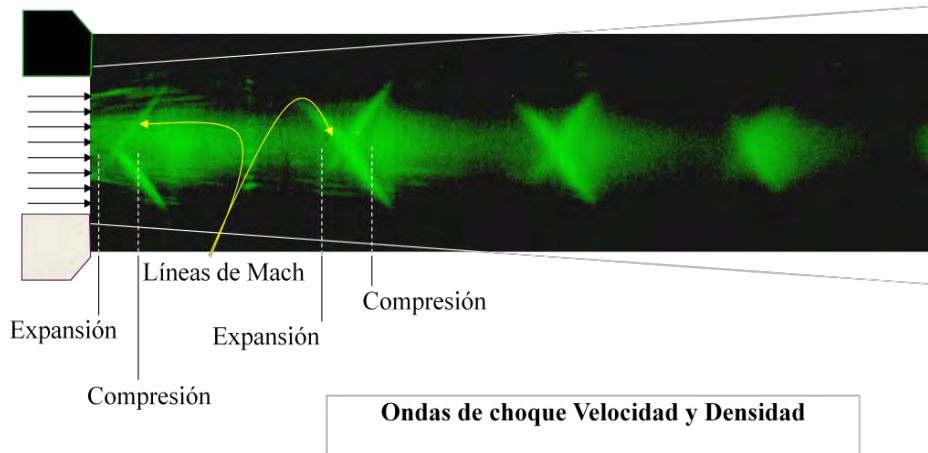


Figura 2.2.- Formación de ondas de choque en un flujo supersónico

Fluctuaciones de densidad

El sistema descrito en la sección anterior es en general muy complejo y su estudio teórico representa grandes dificultades. Si se considera un sistema de pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio, y linearizando las ecuaciones alrededor de ese punto [33], Carrier and Carlson (1946), Yaglom(1949) y Kovásznay (1957), [34], han mostrado que en este caso todos los posibles movimientos pueden ser divididos en tres tipos de oscilaciones, con considerables diferencias en sus características. Esta división será muy importante en este trabajo en el momento de analizar la señal difundida por un jet turbulento.

Las aproximaciones propuestas resultan en las siguientes ecuaciones para las fluctuaciones [33]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \omega_j(t)}{dt} = 0 \\ \frac{dS(t)}{dt} = 0 \\ \frac{d^2 D(t)}{dt^2} + a_0^2 k^2 D(t) = 0 \\ \frac{d^2 P(t)}{dt^2} + a_0^2 k^2 P(t) = 0 \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

donde $a_0 = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}$ la velocidad del sonido en el medio no perturbado y $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Las ecuaciones (1.1) están escritas en términos de las componentes de la vorticidad $\omega_k = \varepsilon_{k\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}$, la divergencia $D = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$, la entropía $S(t)$, en sustitución de las componentes de la velocidad u_i y la temperatura $T(t)$ y se ha conservado el campo de presión $P(t)$.

De acuerdo a las ecuaciones (2.1) el campo de vorticidad y el campo de entropía serán fijos en el espacio. Las ecuaciones para la divergencia y la presión son ecuaciones de onda de perturbaciones que se propagan a la velocidad del sonido. Se observa que en la aproximación propuesta las fluctuaciones se descomponen en tres modos no interactuantes. Primero el llamado *modo incompresible de vorticidad*, descrito por el campo de vorticidad $\vec{\omega}(\vec{x})$. Segundo el *modo entrópico*, descrito por campo de entropía $S(\vec{x})$, producido por inhomogeneidades iniciales en la temperatura. Ambos varían localmente en el tiempo y pueden ser acarreados por el flujo. Puesto que la técnica empleada es sensible a las fluctuaciones de densidad, no es apta para estudiar el modo incompresible de vorticidad. Y finalmente el *modo acústico o potencial* relacionado con fluctuaciones en la presión representadas por un conjunto de ondas que se propagan a la velocidad local del sonido a_0 .

Producción acústica

Las teorías sobre la producción acústica en un jet supersónico están relacionadas con la interacción entre los vórtices de la figura 2.1. A medida que avanzan, estos vórtices se vuelven inestables y se ondulan. En las regiones donde la ondulación es muy grande terminan por romperse. A veces se reconectan formando varios vórtices más pequeños. Otras veces, antes de ondularse, se aparean con otro vórtice. Y en otras ocasiones, al juntarse con zonas de vorticidad

contraria, dos vórtices se aniquilan mutuamente. Se cree que todas estas interacciones pueden producir ruido acústico, llamado entonces aeroacústico, y que este ruido se genera cerca de la región donde termina la estructura de choque. Además, cuando el flujo interacciona con la estructura de choque también produce ruido conocido como *screech*.

La manera tradicional de detectar el ruido aeroacústico es a través de correlaciones de señales adquiridas por un arreglo de micrófonos en campo lejano, [7, 8, 9]. Debido al problema inverso, es decir que a partir de una medición en campo lejano es imposible deducir de manera unívoca el campo dentro del chorro, no se han podido probar las diferentes teorías sobre la producción de sonido. Además, se sabe que las ondas acústicas no se propagan en línea recta desde su origen hasta el punto de medición en el campo lejano ya que son arrastradas por el flujo y difractadas por la capa de mezcla. Esta difracción no ha sido tomada en cuenta en las mediciones con arreglos de micrófonos.

2.2.2.- Difusión Rayleigh

La dispersión Rayleigh es el resultado de la interacción entre la radiación electromagnética y las moléculas de un gas. Las moléculas al moverse, desvían la radiación incidente. En este caso, los difusores tienen un diámetro menor que la longitud de onda utilizada. La luz difundida por las moléculas dentro de un cierto volumen del gas, contiene información sobre los cambios en la densidad dentro de este volumen. Si el volumen de difusión es muy pequeño, las mediciones pueden considerarse puntuales. [35, 19].

Cuando una onda plana monocromática de campo eléctrico $E_o(\mathbf{r}', t)$, incide sobre una molécula, la polariza y ésta emite radiación de la misma frecuencia en todas direcciones. Esta difusión de luz, producida por partículas cuyo tamaño es inferior a la longitud de onda (λ) de la luz incidente, se conoce como difusión

Rayleigh. Puesto que la difusión es elástica, la magnitud del vector de onda de la luz dispersada (\mathbf{k}_d) es igual al de la luz incidente (\mathbf{k}_o), es decir, $|\mathbf{k}_d| = |\mathbf{k}_o|$, [36, 37].

En un gas transparente estático, la luz es difundida de manera homogénea y el campo electromagnético difundido es constante. Si el gas está en movimiento o tiene fuertes variaciones de densidad la luz difundida refleja las características de la estructura y el movimiento del flujo. Lejos de la zona de difusión, el campo electromagnético difundido \mathbf{E}_{d0} por una sola molécula, está dado por la ecuación siguiente, [13, 19, 37, 38]:

$$\mathbf{E}_{d0}(\mathbf{r}') = r_0^R \frac{\exp(ik_0 r)}{r} [\mathbf{r} \times \mathbf{E}_0(r') \times \mathbf{r}] \quad (2.2)$$

donde r_0^R es la sección transversal de difusión de Rayleigh y es característico de cada tipo de moléculas.

Al integrar sobre un número grande de difusores se obtiene una expresión para el campo lejano total difundido

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{d0}(\mathbf{r}, t) \int_{V_d} d^3 r' n(\mathbf{r}', t) \exp(-i\mathbf{k}_\Delta \cdot \mathbf{r}') = \mathbf{E}_{d0}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{k}_\Delta, t) \quad (2.3)$$

Donde $n(\mathbf{r}', t)$ es la distribución de moléculas en el volumen de difusión V_d , $n(\mathbf{k}_\Delta, t)$ es la transformada de Fourier espacial de la fluctuación de densidad de tamaño $2\pi/k_\Delta$ y $\mathbf{E}_{d0}(\mathbf{r}, t)$ es el campo difundido por una sola molécula. $k_\Delta = |\mathbf{k}_\Delta|$ y $k_\Delta = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2}$ donde θ es el ángulo de difusión (Figura 2.3). Se puede entonces obtener información sobre las fluctuaciones de densidad dentro del volumen de difusión a través de la transformada de Fourier espacial en función del tiempo.

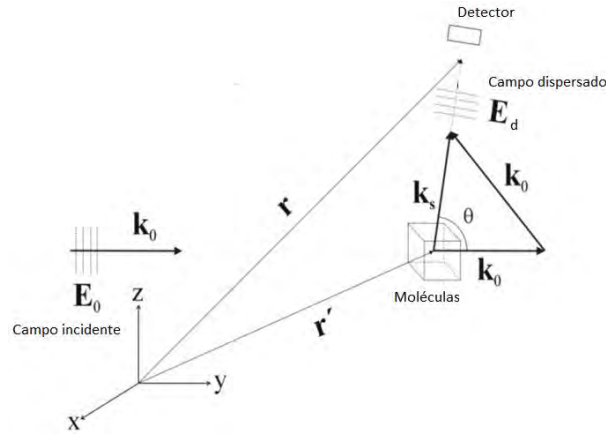


Figura 2.3.- Las moléculas difunden la luz en todas direcciones. Al seleccionar la posición en la que se pone el detector, se está escogiendo el tamaño de fluctuación que se va a estudiar.

Los fotodetectores son instrumentos de respuesta cuadrática que miden la intensidad de la luz, es decir al cuadrado del campo eléctrico que reciben. La corriente que sale del detector es de la forma:

$$i = \frac{\eta e}{h \nu} |\mathbf{E}|^2 \quad (2.4)$$

donde η es la eficiencia cuántica del detector. Las demás variables corresponden a los parámetros asociados a un haz de luz: h la constante de Planck, ν la frecuencia del haz, e la carga eléctrica del electrón y $|\mathbf{E}|$ la magnitud del campo eléctrico que incide sobre el detector.

2.2.3.- Detección heterodina

La luz es difundida en todas direcciones. El detector recibe la luz difundida en una sola dirección, es decir, muy poca intensidad. Se requeriría de un contador de fotones para detectarla. Los fotodiodos o fotomultiplicadores que se encuentran lejos de la zona de difusión a una distancia r difícilmente detectan el campo dispersado.

Para resolver este problema se utiliza la técnica heterodina. Ésta consiste en mezclar, sobre el detector, la señal difundida con otro haz luminoso conocido, llamado oscilador local. El oscilador local tiene una frecuencia ω_{OL} diferente a la de la luz difundida

La corriente que sale del foto-detector es ahora proporcional a [37]

$$|\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_{OL}|^2 = |\mathbf{E}_d|^2 + |\mathbf{E}_{OL}|^2 + 2\mathbf{E}_d \cdot \mathbf{E}_{OL} \quad (2.5)$$

Los primeros dos términos son de corriente continua, el primero demasiado pequeño para ser detectado es la luz difundida de muy poca intensidad, el segundo no contiene información relevante, es el haz que proviene del oscilador local. El tercer término ($2\mathbf{E}_d \cdot \mathbf{E}_{OL}$) oscila a la frecuencia $|\omega_d + \omega_{OL}|$ donde ω_d y ω_{OL} corresponden a las frecuencias del campo dispersado y del haz del oscilador local respectivamente. Este término de mezcla, llamado corriente heterodina, contiene la información que interesa, el oscilador local modulado por el campo difundido.

Se puede demostrar que la corriente heterodina total producida por muchas moléculas, está dada por [39, 11].

$$i(t) = \frac{e}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \lambda_0 \operatorname{Re} \left\{ irE_0E_1^* e^{i\omega_\Delta t} \int_A dr^3 n(\mathbf{r}, t) u_0(\mathbf{r}) u_{OL}^*(\mathbf{r}) e^{ik_\Delta \cdot \mathbf{r}} \right\} \quad (2.6)$$

donde los términos que multiplican a la parte real (\hbar, μ_0, ϵ_0), están asociados a las características del detector, ω_Δ corresponde a la diferencia en frecuencias entre el haz primario (incidente) y el oscilador local, $\mathbf{k}_\Delta = k_0\mathbf{n} - \mathbf{k}_0$, u_0 y u_{OL} son los perfiles transversales de los haces gaussianos y A es el área del detector. La expresión (2.6) es la parte real de la transformada de Fourier espacial en función del tiempo

de las fluctuaciones de densidad dentro del volumen definido por las intersección de los dos haces gaussianos primario y oscilador local $n(\mathbf{k}_\Delta, t)$. [11, 39]

En los primeros estudios que se hicieron, [5, 10, 11, 12, 13], la señal del fotodetector se enviaba directamente a un analizador de espectros que calculaba la densidad espectral. Actualmente se adquiere con una computadora y se analiza con nuevas técnicas de tratamiento de señal.

La densidad espectral de la corriente heterodina es de la forma:

$$I(\omega) = \frac{e}{8\pi k_0^2} \left(\frac{\eta e_q}{\hbar \omega_0} \right)^2 n_0 (r_0^R)^2 \frac{E_0}{\mu_0} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_{OL})^2 \int d^3k |W(\mathbf{k}_\Delta - \mathbf{k})|^2 [S(\mathbf{k}, \omega - \omega_\Delta) + S(\mathbf{k}, \omega + \omega_\Delta)]$$

(2.7)

.....

Donde

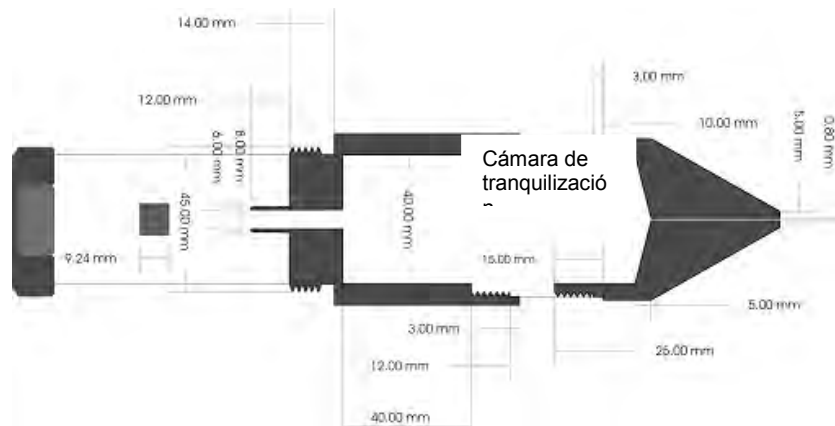
$$S(\mathbf{k}_\Delta, t) = \frac{n(\mathbf{k}_\Delta, t)^2}{n_0 V} \quad (2.8)$$

Es el factor de forma, que corresponde al valor cuadrático medio normalizado de las fluctuaciones de densidad. La densidad espectral que se obtiene en el experimento contiene entonces la información que nos interesa.

2.3.- Diseño y montaje del chorro supersónico

Para tener un chorro supersónico en condiciones controladas, es necesario tomar en cuenta varios detalles. El flujo del aire comprimido puede considerarse estacionario ya que proviene de una compresora muy grande que alimenta a todo un edificio.

La tobera está dentro de un contenedor que tiene una cámara de tranquilización con una malla. Esta malla sirve por un lado para reducir el nivel de turbulencia, y por otro, para romper las estructuras vorticales grandes que pudieran venir de la compresora. Se trata de producir un flujo laminar a la salida. La contracción pasa de un diámetro de 4 cm a uno de 1.6 mm en una distancia de 1.5 cm, figura 2.4, y acelera el flujo a una velocidad de salida de 1.4 Mach.



2.4.- Diseño de la boquilla construida en el presente trabajo

Dadas las dimensiones tan pequeñas del chorro es necesario que el sistema de desplazamiento sea estable. El primer sistema de posicionamiento fue diseñado y construido de acrílico (figura 2.5 izquierda) Su uso y algunos defectos de diseño fueron haciéndolo inestable por lo consiguiente no era posible hacer mediciones confiables. La construcción de un segundo posicionador, partiendo del primer diseño, pero hecho de aluminio (figura 2.5 derecha) fue más estable durante más de 4 años pero las guías empleadas para el desplazamiento vertical y horizontal se desgastaron rápidamente, por otro lado la base del sistema se venció por el peso. Ambos problemas fueron afectando seriamente las mediciones.

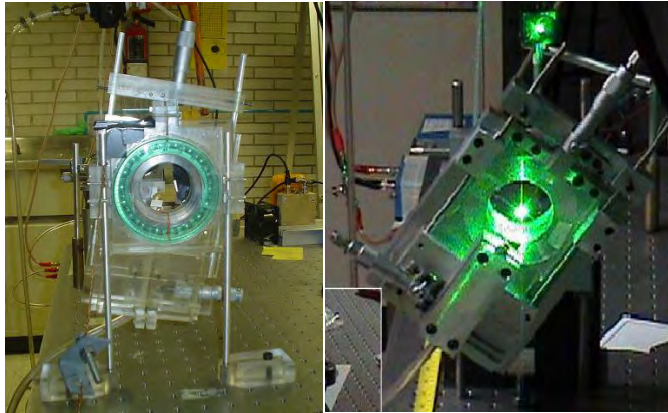


Figura 2.5.- Sistema posicionadores empelados para la selección de un punto en el interior de un jet. De derecha a izquierda: Material de acrílico y material de aluminio.

Finalmente se diseñó y construyó un último posicionador (figura 2.6), construido de acero inoxidable, tornillos guía y una base de metal diseñado para la boquilla (tobera) con una cámara tranquilizadora (figura 2.4). Este sistema de posicionamiento permite trasladar y rotar la tobera. De esta manera, se puedan tomar datos en cualquier punto y en cualquier dirección dentro y fuera del flujo, (figura 2.6). Aunque desde 2001 se tenía un primer montaje experimental, se tuvieron que hacer cambios en los últimos años. En particular para esta tesis se compró un nuevo láser por lo que se tuvo que volver a calcular el camino óptico y montarlo. Un cambio significativo de este último diseño consistió en el tamaño de la boquilla (figura 2.4). La anterior tenía un diámetro de salida de 0.8mm por lo que se tenía una menor resolución espacial (tamaño de la sección de difusión comparado con las longitudes características del flujo) y sin cámara de tranquilización. El posicionador solucionó enormemente la precisión en los desplazamientos a lo largo y ancho de la zona estudiada ya que se eliminó totalmente la diferencia *backlash* entre el movimiento de ida y el de regreso.

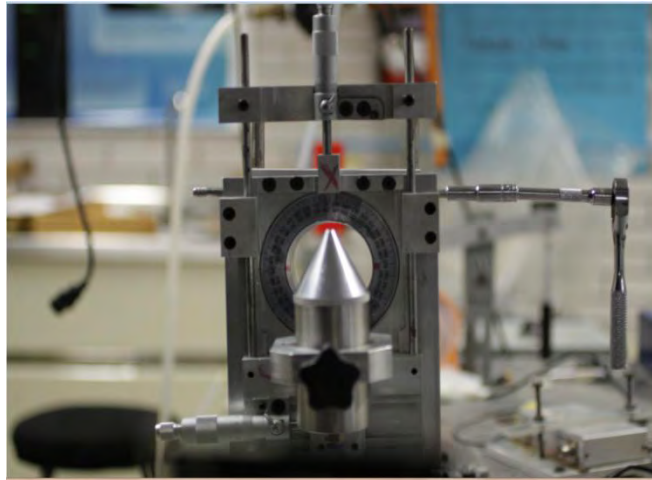


Figura 2.6.- Tobera montada sobre el sistema posicionador rígido

Se pueden entonces hacer mediciones en cualquier punto y en cualquier ángulo dentro y fuera del chorro y tener un mapeo, completo de las fluctuaciones de densidad, y a partir de ellas el patrón de emisión acústica en las frecuencias que son permitidas por el experimento, figuras 2.7 y 2.8.

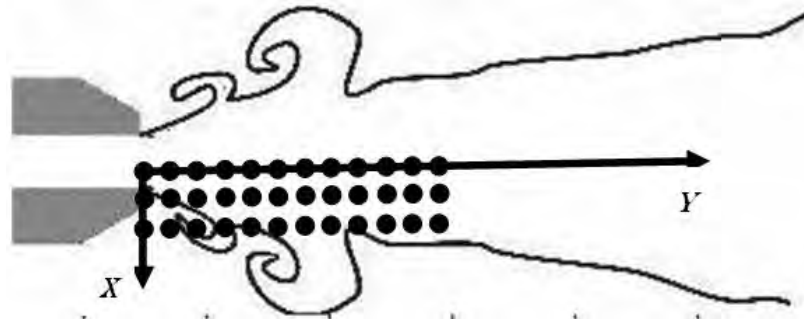


Figura 2.7.- Esquema del flujo de aire y de las zonas estudiadas, tanto en la dirección paralela como en la perpendicular al chorro. Igualmente a diferentes ángulos en un mismo punto

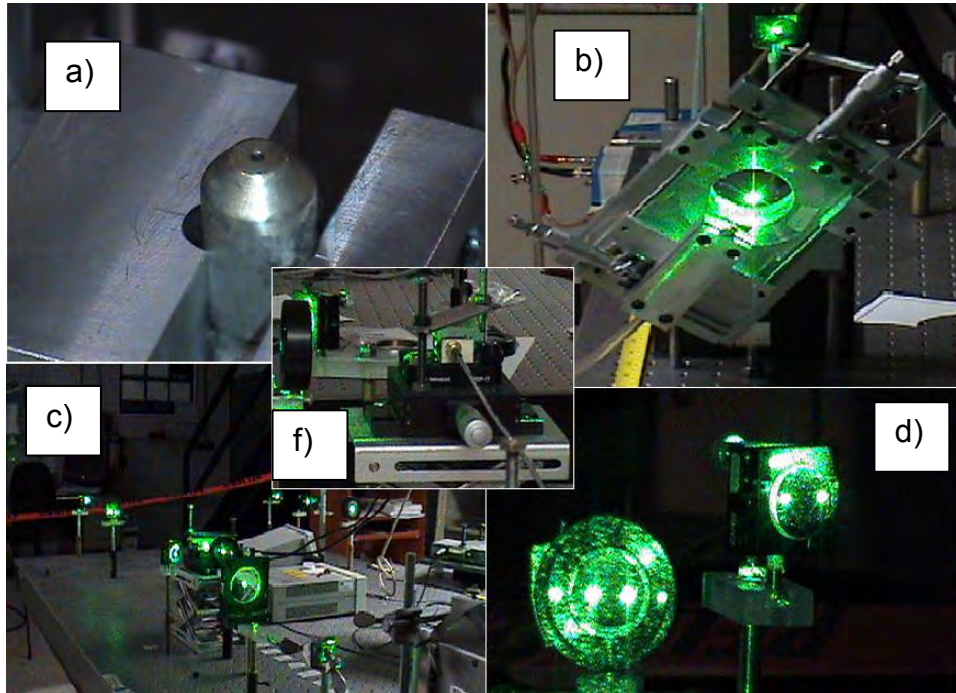


Figura 2.8.- montaje experimental: a.- Boquilla, b.-Sistema posecionador, c.- Sistema óptico, d.- Haces saliendo del modulado acusto-óptico y f.- Modulador acusto-óptico.

2.4.- Trayecto óptico

En la figura 2.9 se muestra en forma esquemática, el dispositivo empleado para la detección heterodina del campo dispersado. La luz proveniente de un láser monomodo con una longitud de onda $\lambda_o = 532 \text{ nm}$ se hace incidir sobre un modulador acústico óptico (MAO), que consiste en un cristal en el que se genera una onda acústica estacionaria de frecuencia 110 MHz. Esta onda actúa como rejilla frente al haz de luz incidente con frecuencia ω_o produciendo varios órdenes de difracción. Cada orden de difracción posee un desplazamiento en frecuencia. El primer orden tiene frecuencia $\omega_o + \omega_\Delta$, el segundo $\omega_o + 2\omega_\Delta$ etc. [40]

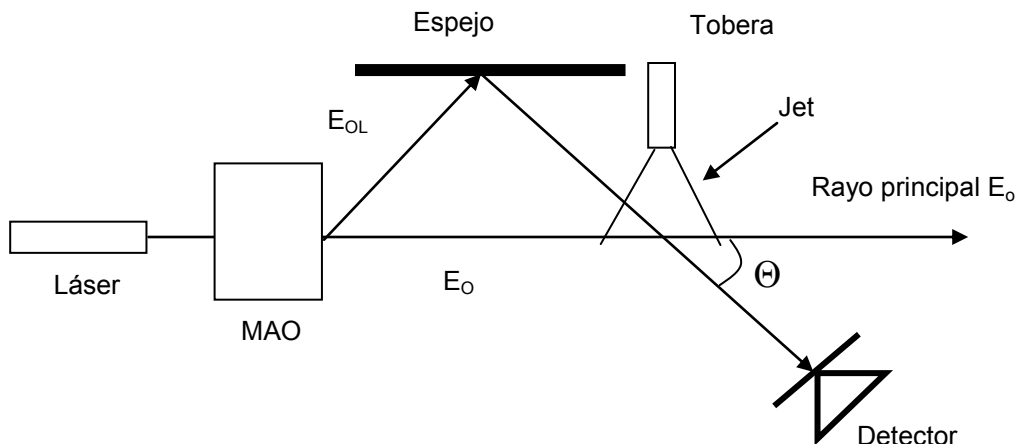


Figura 2.9.- Esquema del montaje experimental para estudiar gases transparentes

El MAO se puede orientar de manera que la mayor parte de la luz quede sin difractar (haz primario) y el primer orden de difracción sea mucho más intenso que los otros órdenes. El primer orden difracción sale con un ángulo fijo respecto al rayo incidente y será utilizado como oscilador local (OL).

Con una serie de espejos y lentes se logra que ambos haces se intersequen en un punto en el que ambos haces están focalizados con una cintura de 0.25 mm donde los frentes de onda son planos. Por esta intersección, llamada volumen de dispersión, se hace pasar la región del chorro supersónico que se quiere estudiar.

Después de la zona de difusión, cuando ambos haces se separan nuevamente, se bloquea el haz primario y se coloca un detector en la dirección del oscilador local. Este detector recibe entonces tanto la luz proveniente del OL como la dispersada a un ángulo Θ , [38, 37]. Se puede mostrar que este montaje es equivalente a mezclar el OL directamente sobre el detector. Como se mencionó anteriormente, el ángulo al que se coloca el detector determina el tamaño de las fluctuaciones de densidad que se pueden estudiar.

Como muestra la ecuación 2.6, la señal heterodina que sale del detector depende del vector k_{Δ} , y por lo tanto es sensible a la dirección y al sentido de propagación de las fluctuaciones de densidad estudiadas.

La componente frecuencial de la señal senoidal de RF del OL, se elimina en una segunda etapa de demodulación, empleando dos mezcladores analógicos y dos canales para obtener por separado las partes real e imaginaria, como se muestra en la figura 2.10. Estas son registradas simultáneamente como señales temporales.

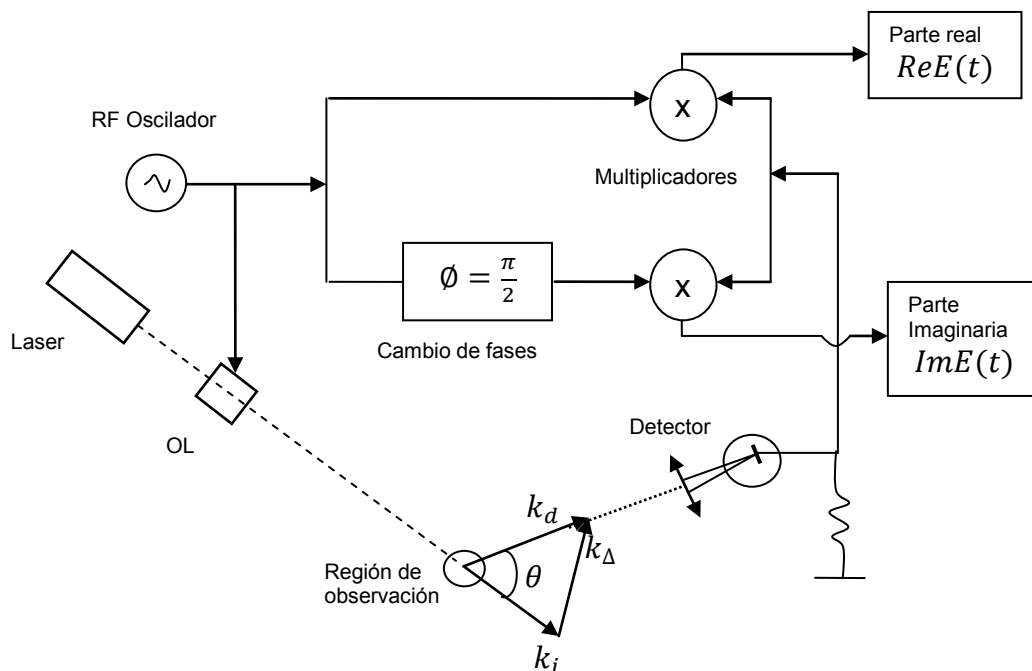


Figura 2.10.- Circuito de detección de campo eléctrico heterodino, para obtener y registrar las partes $ImE(t)$ y $ReE(t)$

Para asegurar que el valor de los parámetros del montaje óptico es el previsto teóricamente, es decir, que los haces se mantienen gaussianos a lo largo de todo el trayecto óptico y son del tamaño utilizado en los cálculos, se diseñó y construyó un “perfilómetro”. Este dispositivo detecta la intensidad de corriente de la luz que incide sobre él, (figura 2.11). Con el perfilómetro es posible medir con precisión el ángulo entre los haces, oscilador local y primario, que es el ángulo de

difusión, necesario para la evaluación k_{Δ} (ecuación 2.6) y el tamaño de la zona de difusión.

Este dispositivo actualmente está en una propuesta de patente. Además se está estudiando la posibilidad de ampliar su aplicación como un medidor de potencias para láseres.

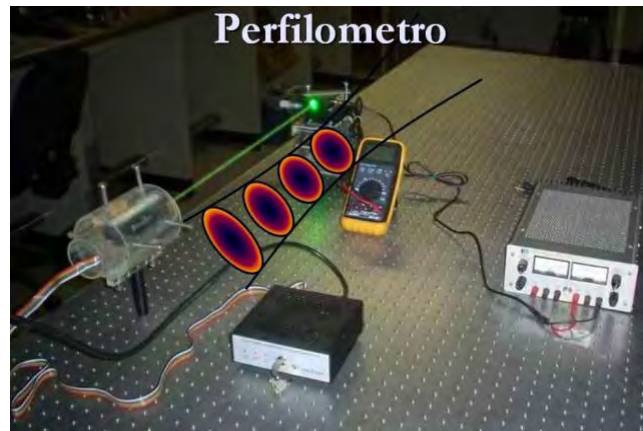


Figura 2.11.- Medidor de frente de onda de un haz

Con dicho dispositivo se determinó que el ángulo entre los haces es de $\Theta = 4.4 \text{ mrad}$ y $k_{\Delta} = 5197 \frac{1}{m}$; en general el tamaño del ángulo lo limita la óptica. Con el ángulo obtenido se pueden medir fluctuaciones de un tamaño $\lambda_{\Delta} = 2\pi/k_{\Delta} = 1.2 \text{ mm}$. Debido al ancho de los haces hay en realidad una distribución de ángulos alrededor del este valor.

2.5.-Vizualización

Paralelamente al montaje de difusión Rayleigh se tiene un banco de visualización. El chorro supersónico se puede ver usando la técnica de Schlieren o bien; mediante la observación de luz difundida por difusión Rayleigh.

2.5.1.- Visualización por difusión Rayleigh

Puesto que la difusión Rayleigh es simplemente la difusión de la luz por las moléculas, se puede hacer una visualización de la estructura de choque enviando el haz o una hoja de luz sobre el chorro, colectando toda la luz difundida a pequeños ángulos y proyectando sobre la pantalla. La figura 2.12 muestra el montaje y la figura 2.13 los primeros cuatro choques, el flujo va de izquierda a derecha.

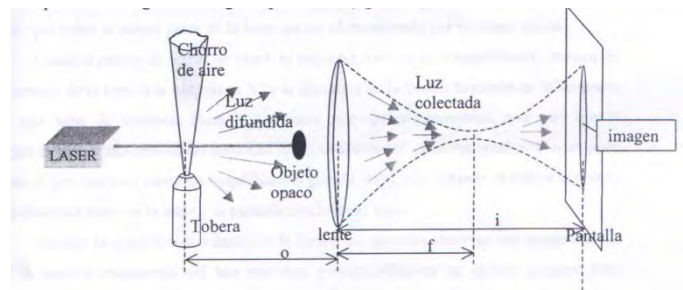


Figura 2.12.- Diagrama del montaje para la visualización de las ondas de choque mostradas en la figura 2.13

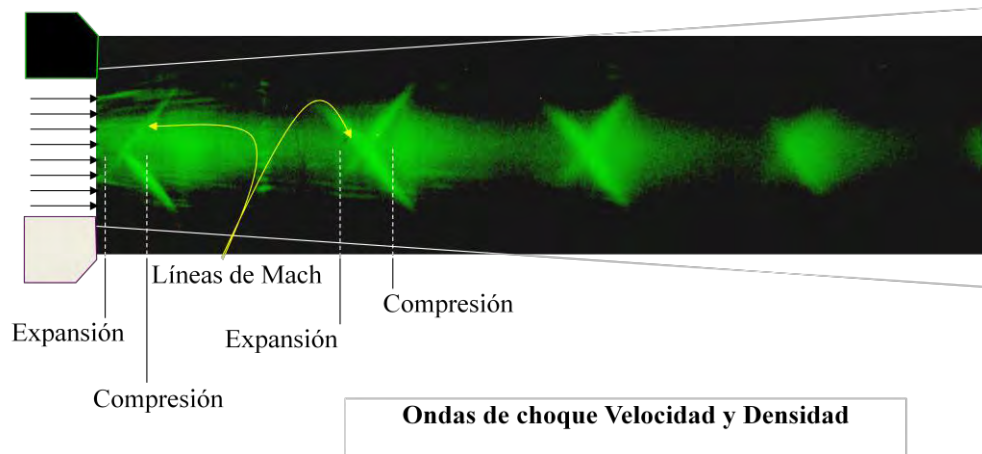


Figura 2.13.- Muestra las ondas de choque y diferentes densidades a lo largo del un jet supersónico.

2.5.1.- Visualización por técnica Schlieren

Otra manera de visualizar es utilizando la técnica Schlieren, figura 2.14, que permite captar cambios en el índice de refracción. Un sistema básico de visualización Schlieren emplea la luz de una fuente colimada. Las variaciones del

índice de refracción causadas por el gradiente de densidad en el flujo distorsionan el haz colimado, y la distorsión crea una variación espacial en la intensidad de la luz, que puede ser visualizada directamente como una sombra al proyectarse sobre una pantalla. La figura 2.14 muestra la estructura de choque del chorro estudiado en el presente trabajo.

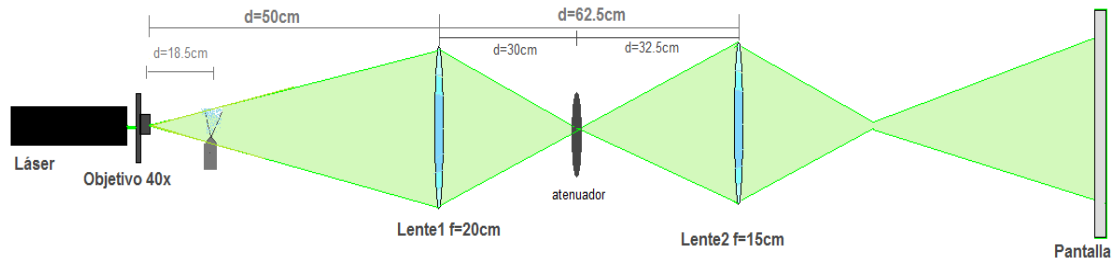


Figura 2.14.- Esquema del montaje experimental para la visualización con la técnica de Schlieren

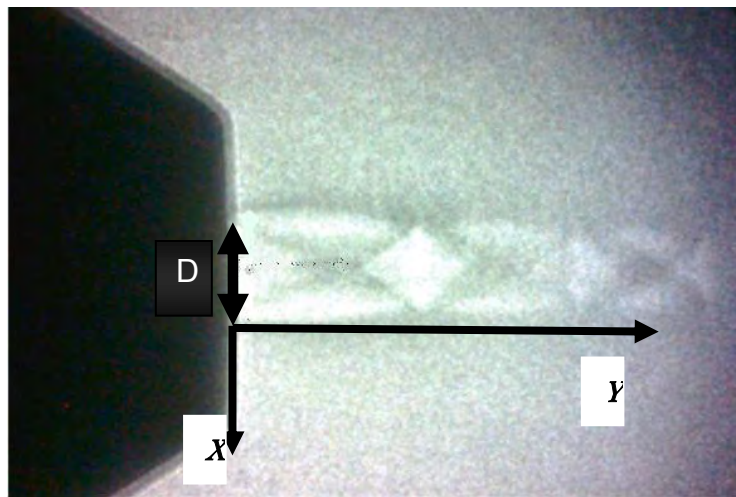


Figura 2.15.- Esta fotografía muestra las ondas de choque del chorro estudiado (técnica Schlieren). D es el diámetro de la boquilla (1.6mm)

La figura 2.15 presenta las ondas de choque del chorro de aire estudiado en este trabajo. Estas ondas de choque están representadas por zonas de color más intenso. En esta figura se puede observar con claridad que estas ondas desaparecen conforme se alejan de la boquilla. El montaje experimental global consta entonces del sistema óptico para la difusión Rayleigh y la detección heterodina de la luz difundida, de un perfilómetro y de un banco en el que se

puede visualizar el chorro usando tanto la técnica *Schlieren* como la difusión Rayleigh.

A través de la adquisición y tratamiento de la señal heterodina se puede extraer información sobre las fluctuaciones de densidad en muchos puntos dentro y fuera del chorro. Al relacionar este análisis con las imágenes obtenidas, se espera poder entender mejor el patrón de radiación acústica y las fluctuaciones de tipo entrópico [41].

Capítulo 3. Tratamiento de señales: antecedentes con periodogramas

La conciencia no se obtiene por educación ni el alto nivel de conocimiento, tampoco depende de la posición social. La conciencia es un acto de voluntad y cualquier persona puede ser acreedora a ella.

MAB

3.1.- Introducción

Las señales obtenidas en el experimento, descrito en el capítulo anterior, y que salen del fotodetector, son adquiridas por una computadora y enviadas directamente a un analizador de espectros. En ese mismo capítulo se mencionó que la densidad espectral de la corriente es proporcional a la densidad espectral de las fluctuaciones de densidad. En este capítulo se presentan algunas características importantes de los periodogramas [42] empleados en la tesis de maestría [1] y se presentarán brevemente sus algoritmos para obtener la densidad espectral. Estas herramientas se emplean para estudiar las fluctuaciones de densidad mediante el análisis espectral. Se espera que a partir de las frecuencias características que aparecen en la densidad espectral y su amplitud, se pueda no sólo identificar el origen de los diferentes tipos de fluctuaciones, sino también determinar cómo se propagan dentro y fuera del chorro. Las fluctuaciones de tipo entrópico son acarreadas por el flujo por lo que se mueven con él; las fluctuaciones de tipo acústico se propagan a la velocidad local del sonido. Es decir, todas las fluctuaciones tienen frecuencias específicas

3.2.- Densidad espectral periodogramas

La evaluación de la densidad espectral de la señal proveniente del fotodetector es proporcional a la densidad espectral de las fluctuaciones de densidad que nos interesa estudiar (ecuación 2.6). La densidad espectral es la

transformada de Fourier de la función de autorcorrelación [21]. Los espectros preliminares obtenidos en trabajos anteriores [1], empleando los periodogramas paramétricos de Burg proporcionaban una mejor resolución en frecuencia que empleando solo la transformada de Fourier.

Los periodogramas son estimadores de densidades espectrales. Existen dos grandes ramas de estos estimadores, los periodogramas no paramétricos y los paramétricos. Fue en 1898 que Schuster empleó por primera vez el término periodograma, pero no fue sino hasta 1927 cuando Yule originó los métodos paramétricos modernos.

3.3.- Periodogramas no paramétricos

En la tesis de maestría [1], se hizo un análisis detallado de la mayoría de los periodogramas tanto paramétricos como no paramétricos aplicados a señales turbulentas provenientes de un chorro de aire. Uno de los resultados importantes fue que los periodogramas paramétricos proporcionaban el espectro de la señal prácticamente libre de ruido, mientras que los no paramétricos contenían ruido que dificultaba el análisis del espectro.

Existe una gran diferencia entre los dos tipos de periodogramas. Los métodos no paramétricos hacen particiones, ventaneos de la señal a estudiar, y posteriormente las promedian en el dominio temporal o frecuencial, dependiendo del método empleado. Los métodos paramétricos modelan la señal real $y(n)$ empleando los datos reales y , con dicho modelo $\hat{y}(n)$ se estima el espectro de la señal.

Se ha escrito mucho sobre los periodogramas, en 1988 Kay en su libro *Modern Spectral Estimation. Theory & Application*, [43], muestra entre ejemplos y programas las cualidades de los periodogramas. Y en su artículo *Spectrum*

Analysis- An Modern Perspective [31] describe un detallado resumen de los periodogramas, desde sus propiedades, ventajas, desventajas, etc. Otros autores han escrito sobre los periodogramas, [21, 44, 45, 46, 47, 48], en la mayoría de la literatura se resaltan sus propiedades. Los métodos pertenecientes al grupo de los no paramétricos no hacen hipótesis de cómo se generaron los datos, es decir, si se generaron de un sistema lineal o no lineal, ya que, en general, el cálculo de espectros mediante periodogramas no paramétricos está basado en promedios espectrales. Este tipo de periodogramas está ligado estrechamente con la FFT y el uso de ventanas (Hanning, Hamming, etc.) como se verá a continuación [21, 47].

3.3.1.- Periodograma Normal

El periodograma normal se expresa como.

$$S_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} X_N(e^{j\omega}) X_N^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{j\omega})|^2 \quad (3.1)$$

donde $X_N(e^{j\omega})$ es la transformada de Fourier en el tiempo discreto de la secuencia $x_N(n)$

$$X_N(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \quad (3.2)$$

Notemos que la ecuación (3.1) del periodograma está dividida por el número de muestras de la señal. A dicha ecuación se le considera un estimador de la densidad espectral de potencia de una señal y su acercamiento al valor real del espectro estará en función del valor de la varianza. Es decir, el sesgo es un parámetro de medición que indica que tanto se aproxima el espectro estimado al verdadero conforme su varianza tienda a cero, la cual dependerá a su vez del número de puntos de la señal. [1, 24, 46, 43].

3.3.2.- *Periodograma Modificado*

El periodograma modificado tiene por objetivo solucionar el problema de encubrimiento producido por la gran amplitud de los lóbulos laterales de la ventana rectangular (usada por el periodograma normal). Para ello propone emplear ventanas generales $w(n)$ (Hanning, Hamming, Blackman, etc). El periodograma modificado se expresa según la ecuación, [42, 43].

$$\hat{S}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{N-1} x(n)w(n)e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.3)$$

Donde N es la longitud de la ventana, y esta expresado como

$$U = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right|^2 \quad (3.4)$$

U es una constante definida de forma que el periodograma modificado resulte asintóticamente no sesgado. Si se utiliza una ventana rectangular, $U=1$, el periodograma modificado se reduce al periodograma (ecuación 3.1). De esto se deduce que el periodograma modificado es simplemente el periodograma de una secuencia de datos seleccionados por una ventana. Por lo tanto, la varianza del periodograma modificado es aproximadamente igual a la del periodograma.

3.3.3.- *El periodograma de Bartlett*

El método de Bartlett es un estimador consistente de la densidad espectral de potencia que realiza un promedio de periodogramas [31, 46, 47]. La mejora respecto al periodograma no modificado reside en la reducción de la varianza; la cual se logra mediante la segmentación de los datos de tamaño N , de tal manera que $N = KL$, donde K es el número de segmentos de tamaño L :

$$\begin{aligned} x_i(n) &= x(n+iL) \quad n = 0, 1, \dots, L-1 \\ & \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

de donde se obtiene el periodograma de Bartlett

$$S_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n+iL) e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.6)$$

Si K y L tienden a infinito cuando N tiende a infinito, el estimador de Bartlett será un estimador consistente de la densidad espectral de potencia. Para un valor fijo de N , el método de Bartlett ofrece un compromiso entre resolución y varianza a través de los valores de K y L . Es decir, podremos reducir la varianza a costa de una pérdida de resolución espectral, y viceversa.

3.3.4.- Periodograma de Welch

Welch propuso dos modificaciones al método de Bartlett. En primer lugar, permitió el traslape de segmentos de datos. Esto incrementa el número y/o la longitud de las secuencias que van a ser promediadas, logrando de esta forma una reducción en la varianza, siempre con un compromiso en la resolución del método de estimación espectral. La segunda propuesta consiste en ventanear cada secuencia $x_i(n)$ con una ventana general $w(n)$, antes de calcular el periodograma. De esta manera se obtiene un periodograma modificado por cada secuencia a la que se le aplicó una ventana.

$$S_M^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{LU} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(n) w(n) e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.7)$$

El estimador de Welch es el promedio de los periodogramas modificados:

$$S_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} S_M^{(i)}(e^{j\omega}) \quad (3.8)$$

De lo anterior se tiene su expresión general

$$S_W(e^{j\omega}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n+iD)w(n)e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.9)$$

donde U

$$U = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w(n) \right|^2 \quad (3.10)$$

Resumiendo, es posible incrementar el número de secuencias a promediar para una cantidad fija de datos, incrementando los traslapes, pero esto implica una mayor carga computacional, así como un aumento en la correlación de las secuencias $x_i(n)$. *Traslapes típicos son del 50% y 75 % para obtener las ventajas de usar el periodograma de Welch. Estos porcentajes son típicos aceptados por la literatura sin ningún sustento matemático, únicamente la lógica: entre mayor muestra mayor resolución.*

3.3.5.- Blackman-Tukey

Blackman y Tukey propusieron y analizaron un método en que primero se ventanea la secuencia de autocorrelación y después se calcula su transformada de Fourier para producir una estimación del espectro. La razón para aplicar una ventana a la secuencia de autocorrelación, $r_x(k)$, es que, para retardos grandes las estimaciones son menos fiables por que se usan menos puntos en la estimación $(N-k)$. Para valores de k cercanos a N , la varianza de estas estimaciones es muy grande, por lo que deberían tener un menor peso en la

formación del estimador de la densidad espectral de potencia. El estimador de Blackman-Tukey es:

$$S_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_x(k) w(k) e^{-jk\omega} \quad (3.11)$$

Donde $w(k)$ es la ventana aplicada para reducir la contribución del periodograma de las estimaciones menos fiables. Se extiende desde $-M$ hasta M , con $M < N-1$. de esta manera, las estimaciones de $r_x(k)$ con mayor varianza son iguales a cero y, por tanto, la estimación espectral de potencia tendrá una varianza menor.

En resumen los periodogramas no paramétricos están basados en el uso de ventanas. Algunos métodos evalúan el espectro de cada ventana y promedian estos espectros (Welch y Blackman-Turkey). Otros, promedian las ventanas en el dominio temporal y, posteriormente evalúan el espectro del promedio (periodograma normal, modificado y Bartlett), [49, 50].

A pesar de que los periodogramas no paramétricos están estrechamente relacionados con el uso de ventanas como se vio anteriormente, la literatura no menciona en ninguno de estos métodos el número de muestras que deba tener una determinada ventana ni sobre la importancia de tomarlo en cuenta. Es decir, un promedio no es la solución a mejorar el espectro de una señal si ésta ha sido mal adquirida. Es importante recalcar que la dependencia directa de estos métodos en la FFT, trae como consecuencia que los periodogramas no paramétricos tengan un considerable derrame espectral y no sean capaces de detectar componentes muy cercanas, [31]. Por consiguiente, para las señales turbulentas, tratadas en este trabajo, no resultan ser una buena opción. Por este motivo se estudiaron y analizaron otras posibilidades, tales como los métodos paramétricos.

3.4.- Métodos paramétricos

Los métodos correspondientes a este campo hacen extrapolaciones de los valores de autocorrelación para retardos $m \geq N$, mientras que los no paramétricos los considera cómo ceros, la extrapolación es posible si tenemos información a priori sobre cómo se generaron los datos. En tal caso se puede construir un modelo para la generación de la señal con un número de parámetros que se pueden estimar a partir de los datos observados. Podemos calcular la densidad espectral de potencia derivada del modelo y de los parámetros estimados. Los métodos paramétricos se basan en modelar la secuencia de datos $x(n)$ como la salida de un sistema lineal caracterizado por una función de transferencia de la forma [1, 24, 46, 43].

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (3.12)$$

correspondiente a la ecuación en diferencias

$$x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) \quad (3.13)$$

Donde b_k y a_k son los coeficientes de la ecuación (3.12) y, z está definida como $z = e^{j\omega}$. En los métodos basados en modelos, el procedimiento de estimación espectral tiene dos pasos. Dada la secuencia $x(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, estimamos los parámetros $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ del modelo. Después, a partir de estas estimaciones, calculamos el estimador de la densidad espectral de potencia [23, 47].

El proceso aleatorio $x(n)$ generado por el modelo de polos y ceros de (3.12) o (3.13) se denomina proceso autoregresivo de medias móviles (ARMA) de orden (p, q) y se denota normalmente como ARMA (p, q) . Si $q=0$ y $b_0=1$, el modelo del sistema resultante tiene una función de transferencia $H(z) = 1/A(z)$ y su salida $x(n)$ se denomina proceso autoregresivo (AR) de orden p . Esto se denota como AR(p). El tercer modelo posible se obtiene haciendo $A(z)=1$, de tal forma que $H(z)=B(z)$. Su salida $x(n)$ se denomina proceso de medias móviles (MA) de orden q y se denota MA(q).

De estos tres modelos lineales, el modelo AR es el más empleado. Por dos razones. Primero, el modelo AR es adecuado para representar espectros con picos estrechos (resonancias). El segundo, el modelo AR produce ecuaciones lineales muy simples para los parámetros AR. Por otro lado, el modelo MA, como regla general, requiere muchos más coeficientes para representar un espectro estrecho. Como consecuencia raramente es usado por sí solo como un modelo para estimación espectral. Combinando polos y ceros, el modelo ARMA proporciona una representación más eficiente del espectro de un proceso aleatorio desde el punto de vista del número de parámetros del modelo.

Para un proceso ARMA(p, q) se tiene.

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k r_x(m-k) & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_x(m-k) + \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(k) b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ r_x^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

haciendo $q=0$, y $b_0=1$; en (3.14) se obtiene el modelo AR(p) representado por las siguientes ecuaciones no lineales

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k r_x(m-k) & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_x(m-k) + \sigma_w^2 & m = 0 \\ r_x^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

En este caso, los parámetros AR $\{a_k\}$ de la solución de las ecuaciones normales o de Yule-Walker están representados en una matriz

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \cdots & r_x(-p+1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(-p+2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ \vdots \\ r_x(p) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

la varianza σ_w^2 se puede obtener de la siguiente ecuación

$$\sigma_w^2 = r_x(0) + \sum_{k=1}^p a_k r_x(-k) \quad (3.17)$$

las ecuaciones (3.16) y (3.17) normalmente se usan combinadas en una única ecuación matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \cdots & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(-p+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_x(p) & r_x(p-1) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

la matriz representada en (3.18) es de Toeplitz la cual se resuelve empleando el algoritmo de Levinson-Durbin.

Para obtener el modelo MA(q), se consideran los coeficientes $\{a_k\} = 0$ de (3.14) con lo que se obtiene.

$$r_x(m) = \begin{cases} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ 0 & m > q \\ r_x^*(-m) & m < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Las relaciones (3.14), (3.18) y (3.19) son los modelos empleados para el desarrollo de métodos de periodogramas paramétricos. Como se podrá observar se definen de esta manera porque el uso de las ecuaciones antes mencionadas, requieren del cálculo de los coeficientes de las ecuaciones involucradas. La teoría empleada para el desarrollo de los métodos que usan los modelos ARMA, AR o MA es extensa. Además, existe una gran variedad de estos métodos, a saber: Yule-Walker (AR y ARMA), Burg, Mínimos Cuadrados, Promedios Móviles, Pisarenko, Pronys, Pronys (extendido), Capon, Varianza y Varianza Modificada, entre otros [31, 21, 46, 47, 43]. El uso de estos modelos es motivo de investigación para encontrar métodos que mejoren la estima espectral de una señal. En este trabajo se expondrán en forma esbozada el método Yule-Walker y el de Burg que es el periodograma empleado para la estimación de espectros.

3.4.1.- El método de Yule-Walker

En este método se estima la autocorrelación de los datos y se usan los estimadores en (3.16) para encontrar los parámetros del modelo AR. En este método se emplea la forma sesgada de la estimación de autocorrelación, dada por

$$r_x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n-m) \quad m \geq 0 \quad (3.20)$$

El algoritmo de Levinson-Durbin produce los parámetros AR. El estimador correspondiente a la densidad espectral de potencia se representa en la ecuación (3.21); donde $\hat{a}_p(k)$ son estimaciones de los parámetros AR obtenidas de las recursiones de Levinson-Durbin.

$$S_{YW}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_{wp}^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)e^{-jk\omega} \right|^2} \quad (3.21)$$

donde

$$\sigma_{wp}^2 = E_p^f = r_x(0) \prod_{k=1}^p [1 - |\hat{a}_k(k)|^2] \quad (3.22)$$

se conoce como el valor cuadrático medio mínimo para el predictor de orden p. En este sentido, se conocen dos tipos de predictores: predictores hacia delante (f) y hacia atrás (b), forward y backward respectivamente. La minimización de estos predictores nos lleva al método empleado por Burg.

3.4.2.- El método de Burg

El método de Burg para estimar los parámetros AR se puede ver como un método de celosía (el término de celosía es empleado para indicar retroalimentación en etapas sucesivas lo que produce un enrejado) con

minimización cuadrática recursiva, basada en la minimización de los errores hacia delante y hacia atrás en los predictores lineales, con la restricción de que los parámetros AR satisfacen la recursión de Levinson-Durbin. El algoritmo de Burg calcula los coeficientes de reflexión en la estructura en celosía y el algoritmo de Levinson-Durbin se usa para obtener los parámetros del modelo AR. A partir de las estimaciones de los parámetros AR formamos la estimación de la potencia espectral de Burg.

$$S_{BU}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{E}_p}{\left|1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) e^{-jk\omega}\right|^2} \quad (3.23)$$

Donde $\hat{E}_p \equiv \hat{E}_p^f + \hat{E}_p^b$, es el error total de mínimos cuadrados. La ecuación (3.24) representa la resolución de un estimador espectral AR.

$$\frac{1.03}{p[\eta(p+1)]^{0.31}} \quad (3.24)$$

p : número de parámetros $\eta = \frac{A}{\sigma_{wp}^2}$ es la SNR, con A la amplitud máxima del espectro y σ_{wp}^2 la varianza estimada del error de predicción lineal.

Es decir, el proceso realizado por los periodogramas para estimar una señal consiste en modelar una señal $\hat{y}(n)$ y compararla con la señal real $y(n)$ empleando la ecuación 3.25.

$$\epsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n) \quad (3.25)$$

Donde

$$\hat{y}(n) = \sum_{i=1}^p a(i) y(n-i)$$

Idealmente se desearía $\epsilon(n)=0$, es decir, que la señal original y la reconstruida con el periodograma fueran idénticas. Reescribiendo la ecuación 3.25 se obtiene:

$$\epsilon(n) = y(n) + \hat{a}(1)y(n-1) + \hat{a}(2)y(n-2) + \dots + \hat{a}(p)y(n-p) \quad (3.26)$$

El modelado de una señal está estrechamente relacionado con la forma de los parámetros $a(i)$ y el número óptimo de éstos. Un modelo con pocos parámetros podría no representar las propiedades de la señal original. Un modelo con un alto orden de parámetros podría reconstruir ruido, señales espurias e imprecisiones en la señal modelada, y tampoco sería un modelo representativo de la señal real. La elección del número de parámetros óptimos para representar a la señal real, es la parte más vulnerable de los periodogramas paramétricos.

3.5.- Técnicas de selección de parámetros

Los modelos, ARMA, AR y MA, empleados por el grupo de los métodos paramétricos para desarrollar algoritmos que nos permitan estimar la densidad espectral de una señal, son variados, pero todos ellos dependen del cálculo de estimación de parámetros. Uno de los aspectos más importantes del uso del modelo AR es la selección del orden p . Como regla general, si seleccionamos un modelo con un orden demasiado bajo, es decir, pocos parámetros, obtenemos un espectro demasiado suavizado con pocos lóbulos. Este término es empleado para caracterizar zonas en formas de ondas que sobresalen en un espectro de frecuencia. Por otro lado, si se selecciona una p demasiado alta, muchos parámetros, corremos el riesgo de introducir picos falsos de bajo nivel en el espectro. Una indicación de calidad del modelo AR es el valor cuadrático medio

del error residual, que en general es diferente para cada uno de los estimadores. La característica de este error residual es que decrece a medida que el orden del modelo AR se incrementa. Este problema ha sido motivo de investigación y se han propuesto criterios de selección de parámetros. Dos de los criterios más conocidos para seleccionar el orden del modelo han sido propuestos por Akaike (21). El primero denominado criterio de error final de predicción (*FPE*: Final prediction Error) se muestra a continuación.

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left(\frac{N+p+1}{N-p-1} \right) \quad (3.27)$$

donde σ_{wp}^2 es la varianza estimada del error de predicción lineal. Este índice de calidad está basado en la minimización del error cuadrático medio para un predictor de una muestra.

El segundo criterio propuesto por Akaike, denominado criterio de información de Akaike (*AIC* Akaike Information Criterion); está basado en seleccionar el orden que minimiza la siguiente relación.

$$AIC(p) = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p/N \quad (3.28)$$

Nótese que el término σ_{wp}^2 decrece y, por tanto $\ln \sigma_{wp}^2$ también decrece a medida que el orden del modelo AR se incrementa. Sin embargo, $2p/N$ se incrementa con el incremento de p . Por lo tanto, se obtiene un valor mínimo para alguna p .

Un criterio de información alternativo, propuesto por Rissanen, está basado en seleccionar el orden que minimiza la longitud de descripción (*MDL*: Minimum Description Length), donde *MDL* se define como

$$MDL(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N \quad (3.29)$$

Un cuarto criterio ha sido propuesto por Parzen. Este se denomina criterio de la transferencia autorregresiva (*CAT*: Criterion Autorregressive Transfer) y se define como

$$CAT(p) = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\bar{\sigma}_{wk}^2} \right) - \frac{1}{\hat{\sigma}_{wp}^2} \quad (3.30)$$

donde

$$\bar{\sigma}_{wk}^2 = \frac{N}{N-k} \hat{\sigma}_{wk}^2 \quad (3.31)$$

El orden p se selecciona para minimizar $CAT(p)$.

3.6.- Resolución en frecuencia: el tamaño de una ventana y el número de parámetros óptimos.-

El grupo de los no paramétricos que emplean los métodos de periodogramas para la estimación espectral de potencia, son relativamente simples, de fácil comprensión y evaluación, y usan algoritmos de la FFT. Sin embargo, estos métodos necesitan de la disponibilidad de largos registros de datos para obtener la resolución en frecuencia requerida en muchas aplicaciones. Además estos métodos sufren los efectos de derrame, pérdida de información espectral debido a las ventanas aplicadas, que son inherentes a los registros de datos de longitud finita. A menudo, el derrame espectral enmascara señales débiles que están presentes en los datos. Los métodos paramétricos eliminan la necesidad de ventanas por lo que evitan el problema de derrame y proporcionan mejor resolución en frecuencia. [51]

Las técnicas de selección de parámetros continúan siendo un tema de interés [26, 47, 50], su aplicación adecuada depende de la pericia del usuario en el uso de periodogramas paramétricos. En conclusión, los resultados obtenidos con periodogramas no paramétricos dependen de la selección del número de muestras de la ventana; los obtenidos con periodogramas paramétricos dependen de la selección del número de parámetros. En ambos casos la experiencia del usuario juega un papel fundamental.

En este trabajo se muestra la importancia que tiene la evaluación de la resolución en frecuencia antes de la adquisición. Esto resuelve problemas como el tamaño óptimo de una ventana y disminuye la arbitrariedad a la selección del número de parámetros. En general se puede decir que la consideración de la resolución en frecuencia ayuda a determinar lo que es permisible estudiar en el espacio de las frecuencias.

Capítulo 4.- Análisis crítico y propuesta de tratamiento de señales

4.1.- Introducción

En los capítulos I y II se presentaron el sistema experimental y la descripción del fenómeno que se desea estudiar. En dichos capítulos se mencionaron las características del chorro y la importancia de estudiar: la emisión, propagación y producción de ondas acústicas en un chorro supersónico mediante la utilización de la difusión Rayleigh. La comprensión de la difusión Rayleigh data del año 1900. El estudio de ondas acústicas en un chorro de aire no es nuevo. Lo relativamente nuevo es la coyuntura entre estudiar gases moviéndose a velocidades mayores a 1 Mach empleando la difusión Rayleigh. Desde 1979 en la École Polytechnique, Francia, se han estado estudiando las fluctuaciones de densidad en un chorro de aire, (11), (39), mediante el análisis espectral de las señales producidas de la luz difundida por las moléculas de gas en movimiento. Hasta 2002 se utilizó la transformada de Fourier, [5, 12, 38], de la función de autocorrelación, En el año 2003 se propusieron nuevas herramientas de procesamiento, [6, 1], para obtener el espectro de la señal; nuevas para este tipo de señales, ya que jamás se habían aplicado periodogramas a señales provenientes de un experimento como el descrito en el presente trabajo, aunque si en otras ramas de la ciencia, [25, 30]. Las señales provenientes de un chorro moviéndose a gran velocidad son turbulentas.

4.2.- Adquisición de señales, dominio del tiempo y Teorema de Nyquist-

Cualquier libro de texto sobre la adquisición de señales presenta antes que nada al Teorema de Nyquist. Este establece que: *Si la frecuencia más alta*

contenida en una señal es $F_{MAX} = B$ y la señal se muestrea a una frecuencia $F_S > 2F_{MAX} \equiv B$, entonces es posible recuperar completamente la señal original, en el dominio del tiempo, a partir de las muestras [52, 53, 54, 21].

Puesto que en general se da por hecho que el cumplimiento del Teorema de Nyquist es una condición necesaria y suficiente para la adquisición correcta de una señal, muchas veces se utiliza una frecuencia de muestreo mucho mayor que $2F_{max}$. Es decir, se puede pensar que hay una frecuencia mínima de muestreo para reconstruir adecuadamente la señal, pero no una máxima. Esto es indudablemente cierto en el dominio del tiempo. Si F_S es grande, Δt será pequeño y la señal adquirida tendrá una resolución temporal adecuada.

Sin embargo, la resolución en el espacio de las frecuencias, es decir, el intervalo de frecuencias más pequeño que se puede estudiar será, [21, 44]

$$\Delta f = f_s / N \quad (4.1)$$

donde N es el número de muestras. Si el fenómeno tiene dos frecuencias diferentes separadas por un intervalo menor a Δf , estas dos frecuencias no podrán ser identificadas claramente. A pesar de que este efecto es conocido, no se menciona específicamente en los libros y, por lo tanto, se pasa por alto en muchas aplicaciones.

Por ejemplo, algunos instrumentos, como ciertos osciloscopios que permiten adquirir señales, se ajustan automáticamente y tienen un mínimo de 256 muestras para representar una señal y un máximo de 5000. Otros más sofisticados permiten escoger el número de muestras en el intervalo de 128 a 0.5×10^9 , pero no existe una indicación clara sobre el número de muestras óptimo ni sobre la mejor frecuencia de muestreo.

En la práctica es entonces común aumentar indiscriminadamente tanto el número de muestras como la frecuencia de muestreo sin considerar las consecuencias en el dominio de las frecuencias. A pesar de que generalmente se trabaja en este espacio.

Para poder hacer una propuesta sobre el rango óptimo en el que se debe escoger tanto la frecuencia de muestreo como el número de muestras, se hará una revisión detallada del efecto de cada parámetro en la señal adquirida.

4.2.1.- Frecuencia de muestreo F_s

La figura 4.1 muestra la gráfica de $\sin \omega t$, “adquirida” con diferentes frecuencias de muestreo pero con el mismo número de muestras.

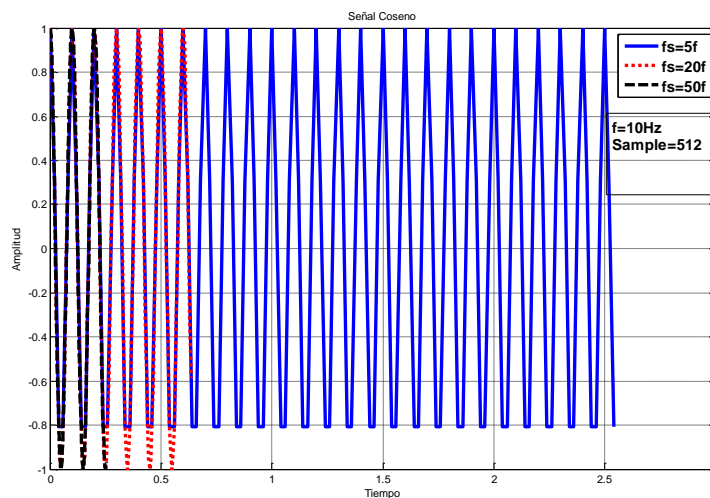


Figura 4.1.- Una misma señal con distintas frecuencias de muestreo y número de muestras constante.

Como era de esperarse, se puede observar que, entre menor es la frecuencia de muestreo, la representación de la gráfica de la señal tiene mayor número de periodos; mientras que para una frecuencia de muestreo 50 veces mayor a la frecuencia fundamental, se tiene una reducción significativa en el número de periodos. Sin embargo, la figura 4.2 muestra una ampliación de la gráfica de la figura 4.1. Existen mejoras de la señal temporal con el incremento de

la frecuencia de muestreo. En la señal obtenida con la mayor frecuencia de muestreo existe una mejor definición en la curvatura de la señal.

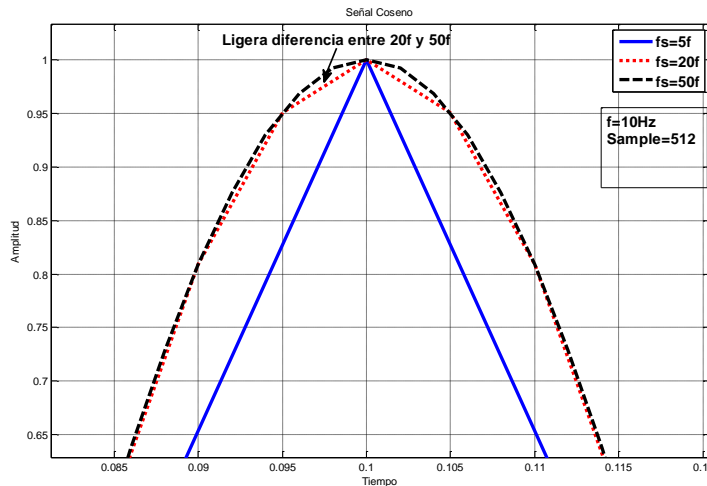


Figura 4.2.- Detalle de una de las crestas de la figura 4.1. En esta figura se observa una mejora considerable en la forma de la señal para una frecuencia de muestreo 50f.

4.2.2.- Número de muestras N

La figura 4.3 muestra una ampliación de varias gráficas de señales adquiridas con diferente número de muestras manteniendo constante la frecuencia de muestreo. Se puede observar que todas las gráficas se superponen sin diferencia alguna entre ellas, por lo que se puede inferir que el número de muestras sólo proporciona menor o mayor cantidad de periodos para una cantidad menor o mayor de muestras respectivamente, es decir, las señales son idénticas para una misma frecuencia de muestreo, independientemente del número de muestras.

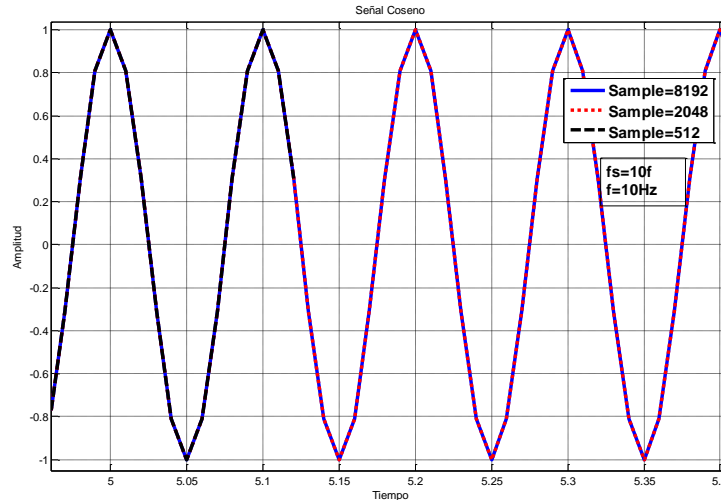


Figura 4.3.- Señales con una frecuencia de muestreo constante y diferentes números de muestra.

Como se esperaba, al aumentar la frecuencia de muestreo, manteniendo el número de muestras constantes, se tiene una mejor resolución temporal y una reducción en el número de periodos. Por otro lado, para un número mayor de muestras, manteniendo la frecuencia de muestreo constante, se tiene un mayor número de periodos, pero no existe una mejora en la forma de la señal.

4.3.- La señal en el dominio de las frecuencias -Transformada de Fourier-

En general, para realizar una transformación del espacio temporal al espacio frecuencial se utiliza la Transformada de Fourier, en particular, la densidad espectral que es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la señal temporal. La extensa variedad de señales, periódicas, no periódicas, aleatorias, caóticas, turbulentas etc., ha obligado a generar una gran diversidad de herramientas para obtener la densidad espectral de una señal, desde la transformada directa, la FFT, los *periodogramas* (que son el tema de este trabajo) hasta las ondeletas. La mayoría de estas herramientas, antiguas o modernas, hacen uso de la Transformada de Fourier en algún momento, la diferencia es cómo se trata a la señal, [55, 43].

Independientemente de la técnica utilizada, si la señal no ha sido adquirida adecuadamente, no será posible observar correctamente el comportamiento frecuencial. En este punto es importante señalar que no es suficiente cumplir con el Teorema de Nyquist, sino que es necesario además tomar un segundo criterio que garantice que será posible resolver las componentes frecuenciales esperadas, o al menos garantizar que lo que se percibe en el comportamiento frecuencial existe y es importante para el usuario.

La resolución en el dominio de las frecuencias está dada por la ecuación 4.1 donde Δf es el tamaño de los intervalos más pequeños representados en el eje de las frecuencias.

Para una frecuencia de muestreo constante, a un mayor número de muestras, se tiene una menor Δf , y viceversa. Estas conclusiones son muy sencillas pero sus consecuencias son trascendentales ya que permiten o no discernir entre dos frecuencias muy cercanas.

4.3.1.- Transformada de Fourier Discreta, DFT.

La definición de la transformada discreta de Fourier está dada por, [52, 53, 60, 61, 62].

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos(2\pi mn/N) - j \operatorname{sen}(2\pi mn/N) \right] \dots \dots (3.2)$$

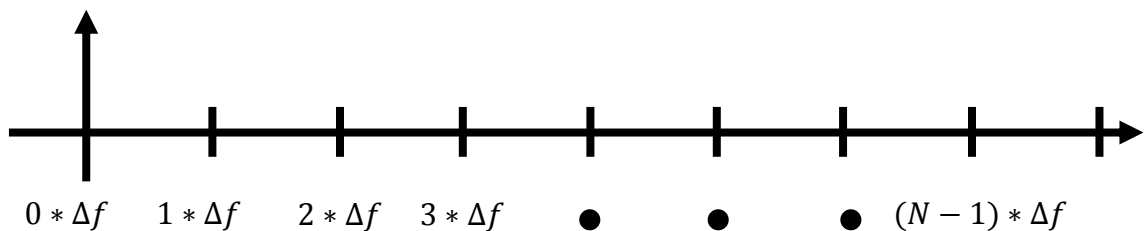
donde $X(m)$ es la m -ésima componente de salida de la DFT, es decir, $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, etc.; $m \in [0, N-1]$ es el índice de la salida DFT en el dominio de la frecuencia, $x(n)$ es la secuencia de entrada de muestras, $n \in [0, N-1]$ es el índice en el dominio del tiempo de las muestras de entrada, $j = \sqrt{-1}$, y N es el número

de muestras de la secuencia de entrada y el número de puntos en el espacio de las frecuencias en la salida de la DFT.

El eje de las abscisas está compuesto de múltiplos de Δf como se observa en la figura 4.4. La tabla I representa la correspondencia biunívoca que existe entre el índice de salida m de la DFT en el dominio de la frecuencia y la resolución en frecuencia estimada.

Transformada	Lugar que le corresponde en el eje de las frecuencias
$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n0/N}$	$0 * \Delta f$
$X(1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n1/N}$	$1 * \Delta f$
$X(2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n2/N}$	$2 * \Delta f$
•	•
•	•
•	•
$X(N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n(N-1)/N}$	$(N-1) * \Delta f$

Tabla I.- Distribución de $m * \Delta f$ en la evaluación de la FFT.



Las señales que se presentan a continuación fueron adquiridas experimentalmente empleando instrumentación de marca: un generador de

funciones marca Tektronix (modelo AFG 3021), osciloscopio marca Agilent Infiniium (modelo 54830 BDSO 4GM/s) con un ancho de banda 600 MHz. Este instrumento tiene, entre sus características más importantes, permitir al usuario el control del número de muestras y la frecuencia de muestreo.

Se generó una señal $\sin \omega t$ con una sola componente frecuencial de $\omega = 5 \text{ MHz}$. Se adquirió varias veces, siempre con la misma frecuencia de muestreo $f_s = 10 \text{ MHz}$ pero con distinto número de muestras: 32384, 16423, 8192, 4096, 2048 y 256. La transformada de Fourier de estas señales aparece en la figura 4.5.

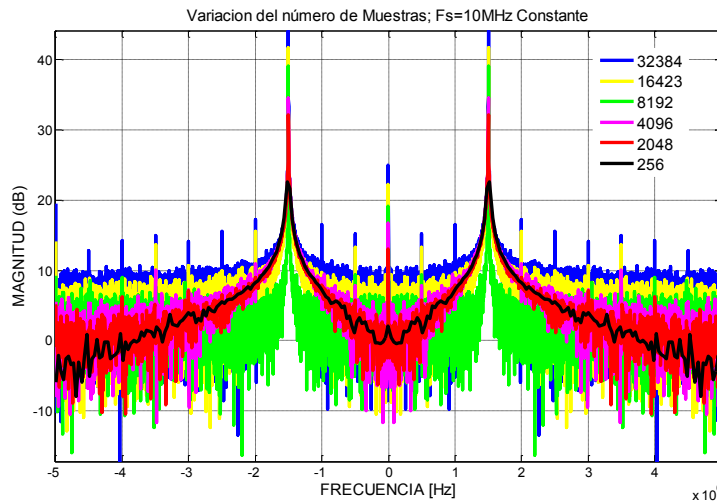


Figura 4.5.- Transformada de Fourier de una misma señal con distinto número de muestras.

Como se ve en la figura, tanto el derrame espectral como la amplitud del pico son menores para un número menor de muestras, [52, 53, 21, 45]. Para observar con mayor detalle la importancia de la resolución en frecuencia se hace un acercamiento a los picos obtenidos (figura 4.6).

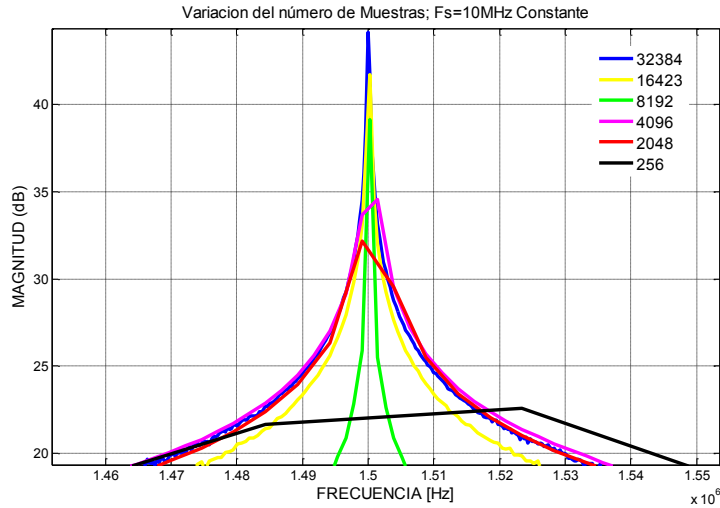


Figura 4.6.- Ampliación sobre la zona de picos de la figura 4.5.

En la figura 4.6 se puede observar que para un número menor de muestras, el ancho del pico es muy grande y que éste disminuye conforme éstas se incrementan.

La figura 4.7 muestra una señal con 8192 muestras adquirida a diferentes frecuencias de muestreo: 25 MHz, 20 MHz, 10 MHz y 5 MHz. El derrame espectral está concentrado en un ancho de banda menor para una frecuencia de muestreo menor. Un acercamiento a la figura 4.7 se puede observar un comportamiento interesante: *Para una frecuencia de muestreo menor se tiene un menor derrame espectral y un ancho de pico menor, mientras que para una frecuencia de muestreo mayor se tiene un mayor derrame espectral e incremento en el pico* (figura 4.8).

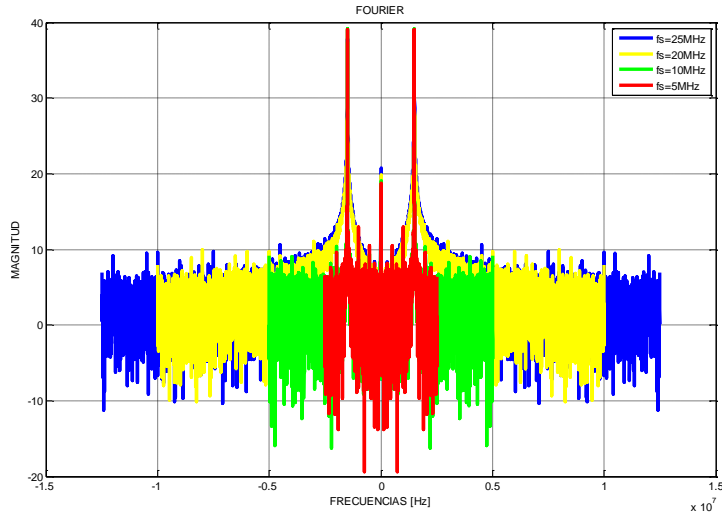


Figura 4.7.- Una señal de 1.5MHz con diferentes frecuencias de muestreo y un mismo número de muestras (8192).

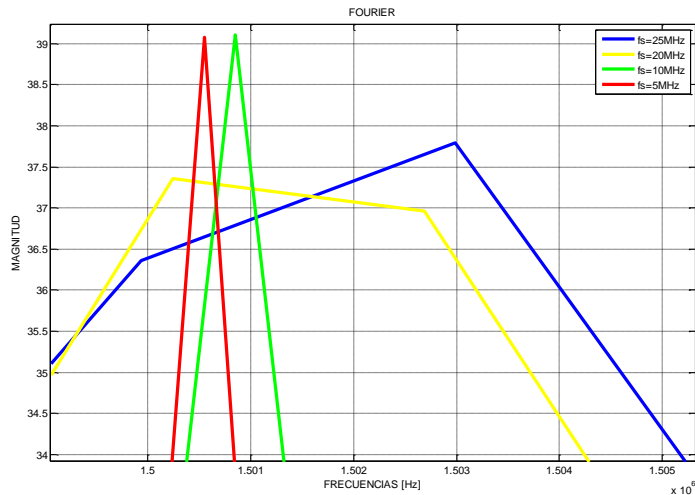


Figura 4.8.- Ampliación en los picos de las distintas frecuencias de muestreo.

El pico más ancho (figura 4.8) corresponde a la señal adquirida con una frecuencia de muestreo mayor. Comparando en magnitud los picos más anchos (figuras 4.6 y 4.8), se tiene que el de la figura 4.6, correspondiente al de menor número de muestras, es de aproximadamente 30 kHz, mientras que para el pico más ancho de la figura 4.8, correspondiente a la frecuencia de muestreo más alta, es de aproximadamente de 3 kHz.

Con la selección adecuada de ambos parámetros se tendría el control en la adquisición de cualquier señal, y se podría obtener la información temporal y frecuencial deseable, figura 4.9.

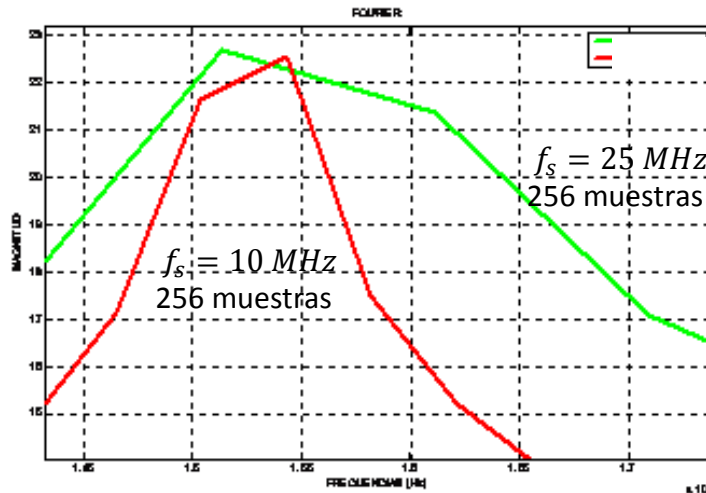


Figura 4.9.- Combinando la frecuencia de muestreo y el número de muestras

$$\Delta f = \frac{25 \times 10^6}{256} = 97656.62 \text{ Hz} \text{ y } \Delta f = \frac{10 \times 10^6}{256} = 39062.5 \text{ Hz};$$

La figura 4.9 muestra una señal con un número reducido de muestras (256) y distintas frecuencias de muestreo (25 MHz y 10 MHz). Se puede concluir que con un reducido número de muestras y una frecuencia de muestreo menor, se puede obtener una definición del comportamiento de la señal en el dominio del tiempo y un ancho reducido del pico de la componente frecuencial estudiada.

Para analizar en detalle la importancia de la anchura de un pico se adquirió una señal con cuatro componentes frecuenciales: 1 MHz, 1.01 MHz, 1.05 MHz y 1.1 MHz, con una $f_s = 5$ MHz y $N = 512$ muestras. Con estos parámetros y aplicando la ecuación 1, se obtiene aproximadamente una resolución en frecuencia de $\Delta f = 9765$ Hz. El espectro correspondiente se muestra en la figura 4.10.

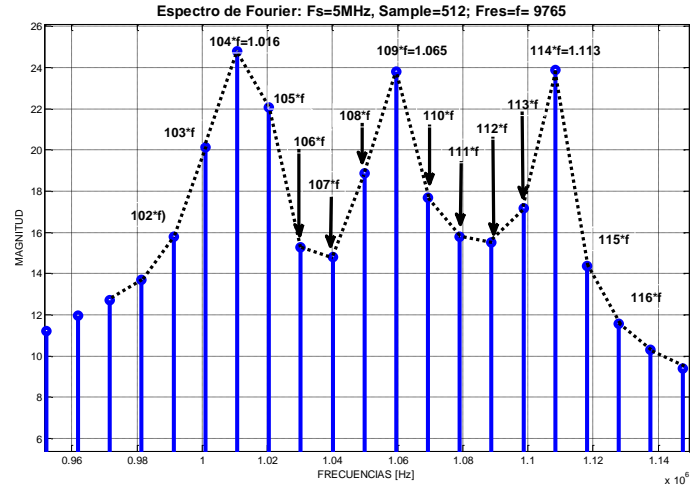


Figura 2.10- Espectro de una señal con “cuatro componentes frecuenciales”.

Solamente se observan claramente 3 componentes frecuenciales: 1.01 MHz, 1.06 MHz y 1.11 MHz. La frecuencia más alta de estas componentes es de 1.1 MHz, por lo que una frecuencia de muestreo de $f_s = 5$ MHz cumple perfectamente con el Teorema de Nyquist. Para mostrar que el problema está en la adquisición de la señal, se obtuvo también el espectro de esta señal con el método de ondeletas empleando el software **wavemenu** de Matlab y usando distintas ondeletas madres: Haar, Marlet (Sombrero Mexicano). Los resultados obtenidos por aplicar la ondeleta Haar se presentan en la figura 4.11. La transformada de Fourier es la gráfica normalizada inferior derecha. Es claro que no es posible resolver las cuatro componentes frecuenciales esperadas de la señal analizada.

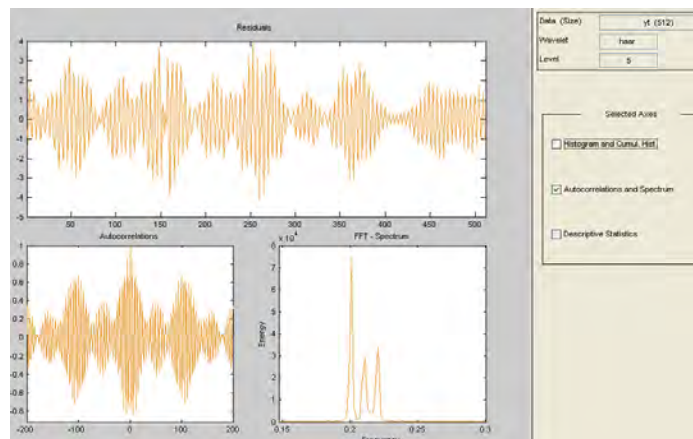


Figure 4.11.- Gráficas obtenidas al emplear **wavemenu** de Matlab; uso de ondeletas para resolver las componentes frecuenciales.

Las frecuencias más cercanas entre sí, 1 MHz y 1.01 MHz, tienen una separación entre ellas de 10 kHz, y la resolución en frecuencia es de 9765 Hz, por lo consiguiente, no se pueden distinguir, y el lóbulo más ancho engloba a ambas componentes. La figura 4.12 muestra la señal experimental de cuatro componentes frecuenciales adquirida a distintas frecuencias de muestreo con el mismo número de muestras que en la figura 4.10.

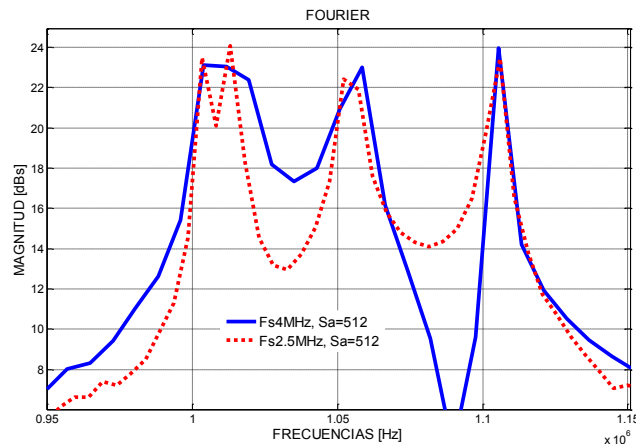


Figura 4.12.- Una misma señal con distintas frecuencias de muestreo

$$f = \frac{4 \times 10^6}{512} = 7812.12 \text{ Hz} \text{ y } f = \frac{2.5 \times 10^6}{512} = 4882.8 \text{ Hz}$$

En este caso es posible observar que para una frecuencia de muestreo dos y media veces mayor a la frecuencia más grande involucrada en la señal (frecuencia cercana a la frecuencia de Nyquist), fue posible resolver las cuatro componentes frecuenciales sin la necesidad de incrementar la frecuencia de muestreo o el número de muestras, no con la precisión deseada, pero si con una buena resolución en frecuencia, dado que es posible distinguir las cuatro componentes. Con lo anterior se podría inferir que se obtiene una mejor resolución en frecuencia simplemente incrementando el número de muestras. Para una señal con $N=8192$, se tiene una resolución en frecuencia de 610 Hz, suficiente para separar las frecuencias de interés, como se puede observar en la figura 4.13.

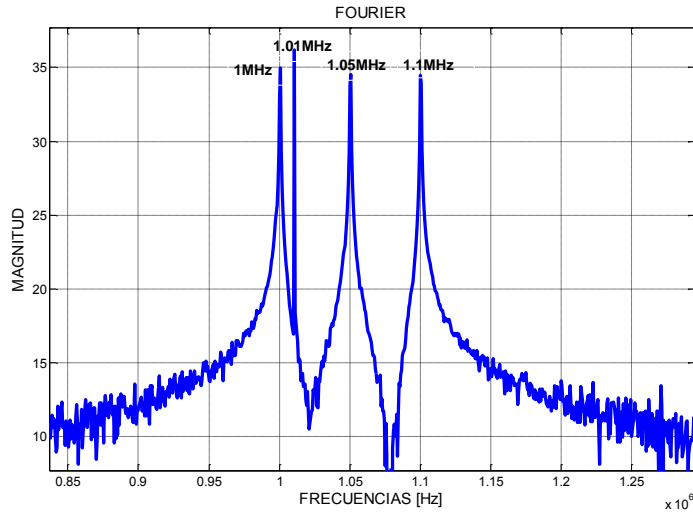


Figura 4.13.- Con una frecuencia de muestreo de 5 MHz y 8192 muestras, se obtiene una resolución de las componentes frecuenciales.

Aplicando nuevamente el software **wavemenu** es posible resolver, sin mayor problema (figura 4.14), las componentes frecuenciales involucradas. La gráfica normalizada inferior derecha muestra claramente las cuatro componentes frecuenciales esperadas.

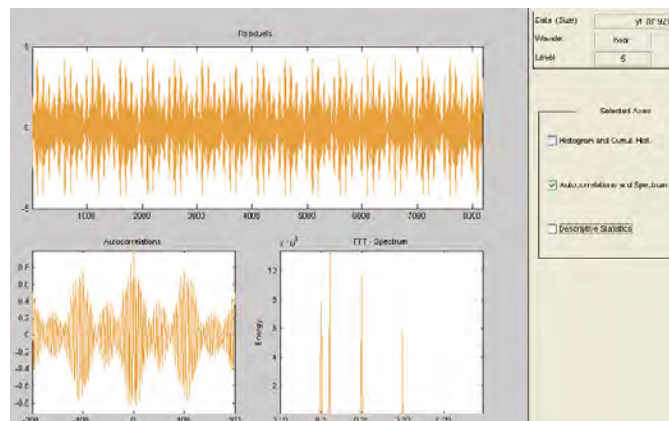


Figure 4.14.- Gráficas obtenidas al emplear **wavemenu** de Matlab; uso de ondeletas para resolver las componentes frecuenciales.

Algunos instrumentos con la capacidad de adquirir una señal tienen el número de muestras fijo, independientemente de las componentes frecuenciales involucradas. Tener conocimiento de todo lo anterior permitirá al usuario saber la capacidad de su instrumento para discernir entre dos componentes cercanas. Con

aquellos instrumentos que permiten manipular f_s y N , el usuario podrá estar seguro de que las componentes que desea estudiar podrán ser resueltas.

La resolución en frecuencia depende únicamente de la frecuencia de muestreo y el número de muestras. Ninguna técnica de tratamiento de la señal permite ver frecuencias que no fueron adquiridas correctamente.

4.4.- El tamaño mínimo de una ventana

La aplicación de una ventana tiene la finalidad de estudiar un pequeño número de datos del total que componen la señal original. Se cree que el análisis de esta pequeña porción de datos proporciona una mayor resolución en frecuencia comparado con el análisis del total de los datos. Dado que algunos de los estimadores de espectros, periodogramas no paramétricos, hacen uso de las ventanas como se vio en el capítulo 3, surge la necesidad de entender mejor las consecuencias de la selección de una ventana.

Uno de los grandes problemas del uso de ventanas consiste en seleccionar el tamaño mínimo, o número de muestras que debe tener. Dicha selección es un problema que se resuelve con la práctica. Pero los resultados mostrados en las secciones anteriores, en donde se destaca la estrecha relación que existe entre la resolución espectral, el número de muestras y la frecuencia de muestreo, auguran una posible relación que permita elegir el tamaño óptimo de una ventana.

En la figura 4.15 aparece una señal que es la suma de varias señales senoidales de frecuencias diferentes. Se agregó línea punteada para indicar la forma de la señal de mayor periodo. En esta figura es imposible distinguir el periodo de cada componente. En cambio, si se gráfica cada una de las componentes en la misma figura, es posible distinguir las y compararlas, como se muestra en la figura 4.16.

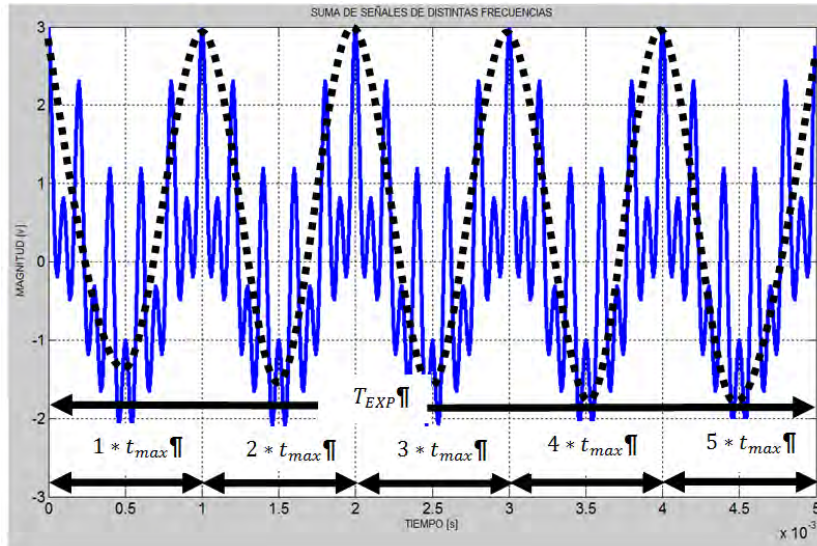


Figura 4.15.- Suma de señales de diferente frecuencia, las señales de alta frecuencia se superponen sobre la señal de más baja frecuencia

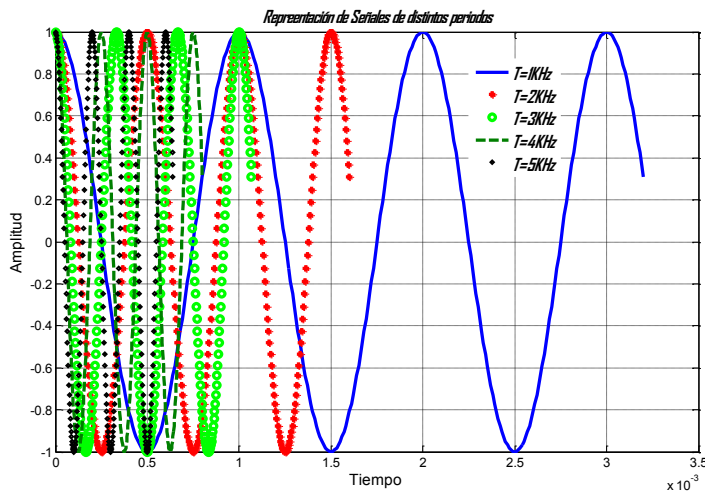


Figura 4.16.- Comparación de señales con distintos periodos.

Las señales anteriores satisfacen el Teorema de Nyquist, que garantiza la presencia de las componentes de periodo más pequeño, como se puede notar en la figura 4.16 ya que $T = \frac{1}{f}$. El tiempo total que dura la adquisición de una señal se puede escribir como:

$$T_{EXP} = N t_S \quad (4.3)$$

donde T_{EXP} es el tiempo total del experimento, N el número de muestras y t_s el tiempo de muestreo.

Una señal constituida por la suma de diferentes señales con distintas frecuencias en su forma más simple, sin ruido, se muestra en la figura 4.15. En esta figura se puede observar cómo las señales de alta frecuencia, periodo pequeño, están sobrepuestas sobre la señal de baja frecuencia, periodo máximo t_{max} . Necesariamente:

$$T_{EXP} \geq k t_{max} \quad (4.4)$$

donde k es el número máximo de periodos que caben en T_{exp} . Considerando el mayor de los periodos correspondiente a la señal de menor frecuencia, se puede garantizar que todos los periodos menores están contenidos en ese tiempo (figura 4.15). En otras palabras las frecuencias más rápidas quedan dentro de la frecuencia más lenta. Al adquirir una señal es necesario asegurar que se tiene varias veces al periodo más lento. El criterio de aplicar ventanas debe considerar al menos uno de estos periodos t_{max} . Entonces, para una ventana con un determinado número de muestras, se puede emplear la ecuación 4.3 y sustituirla en la ecuación 4.4 se obtiene.

$$N_w t_s \geq k t_{max} \quad (4.5)$$

En la desigualdad 4.5, N_w corresponde al número de muestras que se necesitan para reconstruir un sólo período. Es decir, (tomando en cuenta la figura 4.16). Si se considera un sólo período de la señal de más baja frecuencia, se observa que en tan solo medio periodo se encuentra contenido tres periodos de la frecuencia más alta. En este ejemplo, $k = 1$ por ser un período de la frecuencia más baja; para $k = 2$ implicaría que se tienen 2 periodos y así sucesivamente. Y cada período, o mejor dicho, cada intervalo del tamaño del período, viene

representado por N_w muestras; de esta manera, considerar el mayor número de periodos involucraría el total de las muestras de la señal. Se puede considerar entonces que N_w es el tamaño de una ventana rectangular. Al considerar más periodos el tamaño de la ventana va creciendo. De la ecuación 4.5 se obtiene

$$N_w \geq k \frac{t_{\max}}{t_s} \quad (4.6)$$

Sustituyendo en la desigualdad 4.6 el valor de t_{\max} y de t_s se tiene

$$N_w \geq k \frac{T_{EXP}}{t_{\max}} \frac{t_{\max}}{t_s} \geq k \frac{T_{EXP}}{t_s} \quad (4.7)$$

Sustituyendo el valor de T_{EXP} , ecuación 4.3, en la ecuación 4.7 se obtiene la ecuación 4.8.

$$N_w \geq k_w \frac{N t_s}{t_s} \quad \therefore N_w \geq k_w N \quad (4.8)$$

Dado que $N_w \leq N$ se tiene que $k_w \leq 1$ y N el número total de muestras involucradas en la señal.

Como un ejemplo a lo anterior se adquirió una señal con 16384 muestras con $f_s = 5 \text{ MHz}$ (las mismas componentes frecuenciales de la señal de la figura 4.13). A esta señal se le aplicaron ventanas rectangulares de distintos tamaños (figura 4.17), hasta obtener una ventana con 512 muestras. Para este tamaño de ventana no fue posible distinguir las cuatro componentes frecuenciales esperadas, lo que implicaría que el tamaño mínimo de la ventana, para esta señal, es de 1024 muestras.

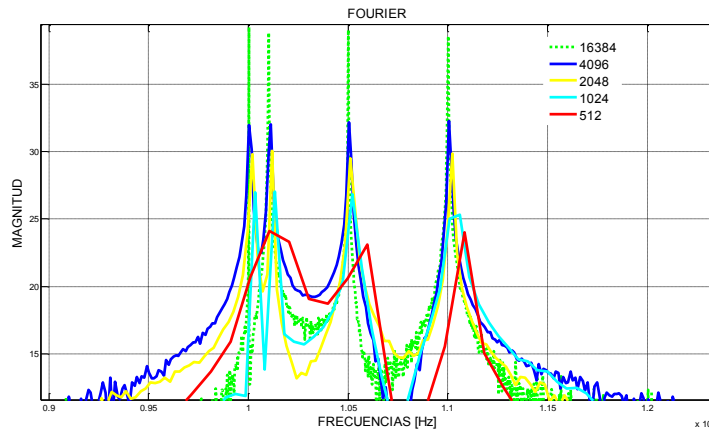


Figura 4.17.- Aplicación de ventanas rectangulares de distintos tamaños.

Este número de muestras corresponde aproximadamente al 6% de la señal completa. Por otro lado, es posible evaluar el número de muestras de una ventana tomando en cuenta la separación mínima deseada entre componentes frecuenciales. Es decir, debe existir al menos un Δf entre las dos componentes frecuenciales que se desean distinguir.

$$\Delta f \geq \frac{F_2 - F_1}{2}; \quad F_2 > F_1; \quad (4.9)$$

Donde F_1 y F_2 son dos componentes frecuenciales consecutivas que se desean diferenciar. En este ejemplo, $F_1 = 1 \text{ MHz}$ y $F_2 = 1.01 \text{ MHz}$, por lo que se obtiene que $\Delta f \geq 5 \text{ kHz}$, esto es, 5 kHz es el valor mínimo que debe cumplir Δf . Entonces, el ventaneo debe calcularse a partir de la f_s y el número de muestras necesario para obtener este valor de Δf , por lo tanto $N_w = \frac{5 \text{ MHz}}{5 \text{ kHz}} = 1000$, el cual corresponde aproximadamente al 6% del total de muestras N , de la señal original.

Con los resultados anteriores se puede proponer un valor de $k_w = 0.1$ que corresponde a una décima parte del total de las muestras.

$$N_w \geq 0.1N \quad (4.10)$$

Esto solamente es válido si se hizo una adquisición adecuada de la señal, es decir, que la señal adquirida no sólo cumple con el teorema de Nyquist, sino que además, se ha considerado la resolución de las frecuencias (ecuación 4.1) y se han adquirido varios periodos del evento más lento.

Es muy importante la consideración de las desigualdades 4.9 y 4.10. Su aplicación está estrechamente relacionada con el conocimiento previo de la resolución en frecuencia requerida de la señal que se está estudiando, es decir el tamaño de Δf . Calcular Δf antes y después de adquirir la señal será un criterio suficiente para evaluar las componentes frecuenciales mínimas observables. ***Las desigualdades proporcionan el criterio para evaluar el tamaño mínimo de una ventana aplicada a una determinada señal.***

La aplicación de ventanas en el procesamiento de señales es muy importante. Se han desarrollado herramientas matemáticas con propuestas para una gran variedad de ventanas, todas ellas estudiadas y analizadas incluso en el espacio frecuencial. Hasta el momento ha sido difícil encontrar alguna referencia, en la bibliografía revisada, que haga mención al problema del tamaño óptimo de una ventana en un caso específico [63]. La aplicación de las ventanas sigue siendo el resultado de la experiencia del usuario.

4.5.- La resolución en frecuencia en los periodogramas

El uso continuo de los periodogramas y el ensayo y error, y no algún fundamento, es lo que convierte al usuario en un diestro en esta herramienta. Existen métodos que evalúan el número de parámetros “óptimo” para modelar una señal, basados en encontrar la cantidad de parámetros que minimizan la varianza estimada del error de predicción $Var(\epsilon(n))$. Sin embargo, estos métodos no siempre dan buenos resultados. Por ejemplo, no dan un valor preciso, sino un intervalo de posibles números de parámetros. En un trabajo previo [1] se evaluaron los periodogramas paramétricos presentados en la tabla I, entre los

cuales se eligió el periodograma paramétrico de Burg. Este método resultó apropiado para el tipo de señales de interés ya que se obtuvieron densidades espectrales prácticamente sin ruido, a pesar de que la selección del número de parámetros era relativamente arbitraria. Su confiabilidad fue causa de discusión cuando se presentaron resultados en foros de expertos [21].

En el siguiente ejercicio se mostrará la vulnerabilidad de los métodos paramétricos. Se considera nuevamente la señal de la figura 4.13, con cuatro componentes frecuenciales, 512 muestras, y una frecuencia de muestreo $f_s = 5\text{MHz}$, satisfaciendo el teorema de Nyquist. Se evaluó el número de parámetros óptimo empleando los métodos para este fin y propuestos por la literatura, [21, 55, 43, 47]. La tabla II, presenta alguna de las técnicas de selección de parámetros. Estas técnicas están basadas esencialmente en determinar el número de parámetros que minimice la varianza estimada del error de predicción lineal σ_{wp}^2 , este error de predicción lineal depende del número de muestras de la señal N , y la selección del número de parámetros, p . Las gráficas mostradas en la figura 4.18, representan las relaciones de la tabla III aplicadas a la señal de interés, estas funciones se habían mencionado en el capítulo II.

<i>FPE</i> : Final prediction Error	$FPE(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left(\frac{N + p + 1}{N - p - 1} \right)$
<i>AIC</i> Akaike Information Criterion	$AIC(p) = \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + 2p/N$
<i>MDL</i> : Minimum Description Length	$MDL(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N$

Tabla II.- Técnicas de selección de parámetros.

Estas funciones permiten localizar el punto donde dichas funciones tienen un mínimo. El mínimo de la función es indicativo del número de parámetros aproximado que deben considerarse para la estimación espectral de la señal.

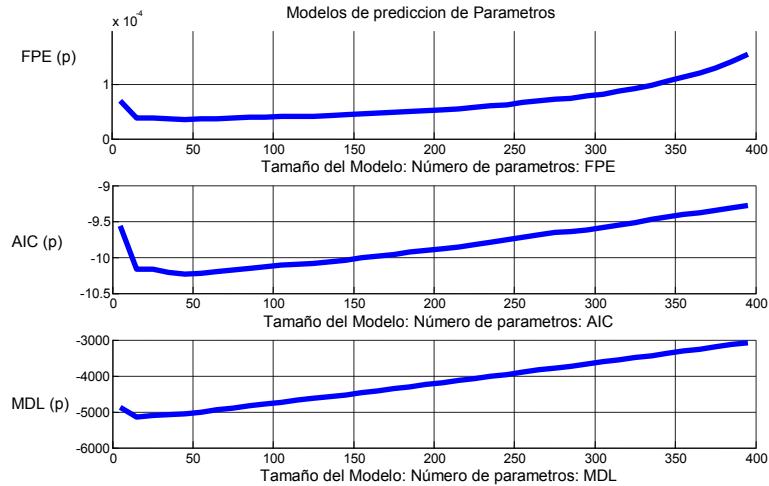


Figura 4.18.- Evaluación de las técnicas de selección de parámetros, con una señal, con cuatro componentes frecuenciales de 512 muestras y $f_s = 5 \text{ MHz}$.

Los métodos FPE y AIC, parecen coincidir en que 50 parámetros son los que minimizan σ_{wp}^2 , mientras que para la técnica MDL, 20 parámetros son suficientes. La figura 4.19, muestra el espectro de la señal empleando el periodograma de Burg y la FFT. Para el periodograma de Burg se empleó el número de parámetros sugeridos por las técnicas descritas. Como es posible notar en la figura 4.19 no se observan las componentes frecuenciales esperadas, esto es debido a que la resolución en frecuencia obtenida con los variables seleccionadas, número de muestras y frecuencia de muestreo, no permiten distinguir las componentes muy cercanas.

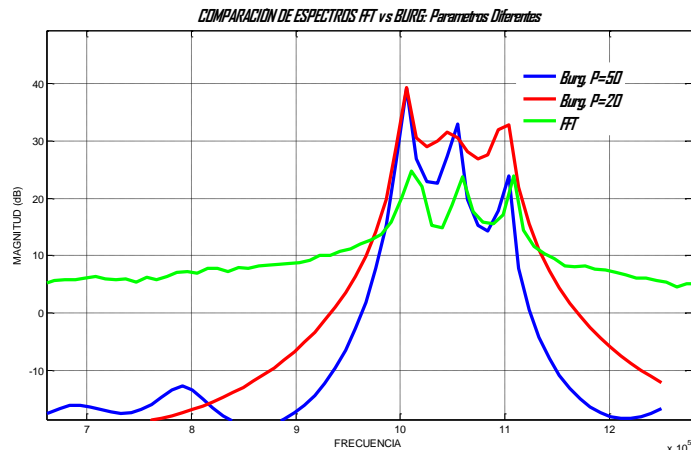


Figura 4.19.-Espectros de Burg calculados de acuerdo a las figura 4.18. Importancia de la resolución en frecuencia, sin importar el método aplicado.

Ahora se evalúa el número de parámetros “óptimo” para la misma señal pero con 16384 muestras, y tomando en cuenta además la resolución en frecuencia. Considerar un gran número de muestras no permitió visualizar con claridad el comportamiento de las funciones y localizar el mínimo de estas, por tal motivo se presenta en la figura 4.20 una ampliación de la gráfica original, obtenida empleando las relaciones de la tabla II para distinguir el mínimo de σ_{wp}^2 . Como se puede observar en la figura 4.20 las técnicas FPE y AIC concuerdan con el número de parámetros óptimos, 700, mientras que la técnica MDL evalúa que alrededor de 130 parámetros son suficientes.

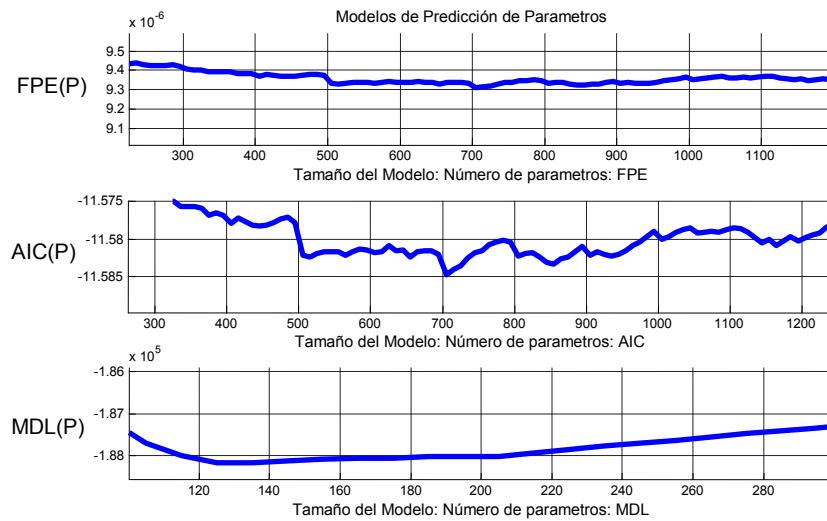


Figura 4.20.- Métodos de predicción de parámetros para una señal con cuatro componentes frecuenciales: 1 MHz, 1.01 MHz, 1.05 MHz y 1.1MHz.

Empleando ambas sugerencias, en una señal adquirida correctamente, se obtienen los espectros mostrados en la figura 4.21.

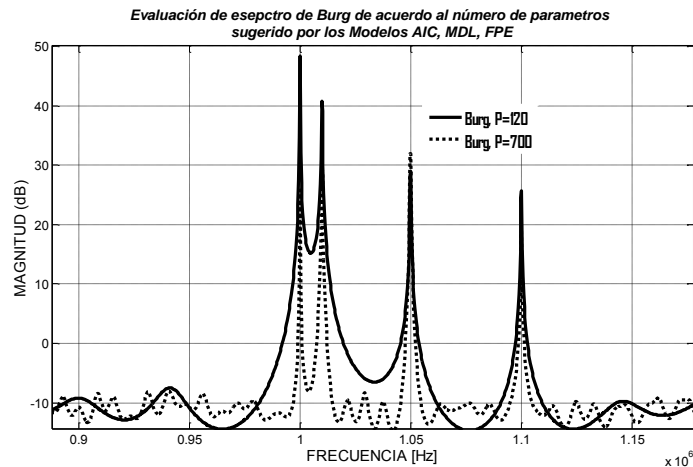


Figura 4.21.- Espectro de una señal con cuatro componentes, obtenida con el periodograma paramétrico de Burg, aplicando los parámetros sugeridos por los métodos de predicción

En todos los casos se observan las cuatro componentes. La última gráfica muestra que los métodos de evaluación para calcular el número de parámetros son eficaces si se ha considerado la resolución en frecuencia antes de adquirir o analizar una señal. Una vez adquirida correctamente, el resultado con 700 parámetros parece mejor que con 120. Podrían entonces evaluarse también las técnicas para determinar el número de parámetros.

Estudiar la relación entre la frecuencia de muestreo y el número de muestras, hizo posible emplear con mayor certeza los periodogramas no paramétricos, dada su estrecha dependencia con la aplicación de ventanas. Esta misma línea de investigación condujo a buscar una dependencia entre la resolución en frecuencia f_r y el número de parámetros.

4.6.- Dependencia entre la resolución en frecuencia y el número de parámetros

Los métodos de predicción están en función del número de parámetros y el número de muestras como se puede ver en la tabla II. Además, durante el desarrollo del presente trabajo se han encontrado que manteniendo el número de parámetros constante y variando la resolución en frecuencia, se encuentran

mejores resultados en la estimación espectral. Estos resultados, entre otros, prevén una posible dependencia entre el número de parámetros y la resolución en frecuencia.

La figura 4.22 muestra el espectro de una señal simulada: $\sin w_1 t + \sin w_2 t + \sin w_3 t$, $\omega_n = 2\pi f_n, n = 1, 2, 3$, con componentes frecuenciales: $F_1 = 0.4 \text{ MHz}, F_2 = 1 \text{ MHz}, F_3 = 1.4 \text{ MHz}$. Esta señal se adquirió a una frecuencia de muestreo de $f_s = 56 \text{ MHz}$, y está compuesta de 1024 muestras. La evaluación de su espectro con el periodograma de Burg fue hecho con 90 parámetros. La transformación en frecuencia de la señal modelada obtenida con el periodograma paramétrico de Burg es comparada con la obtenida empleando la FFT. El espectro obtenido con el periodograma paramétrico de Burg, línea punteada, no muestra los tres picos esperados. En cambio, éstos se pueden ver con claridad empleando la transformada de Fourier, línea continua.

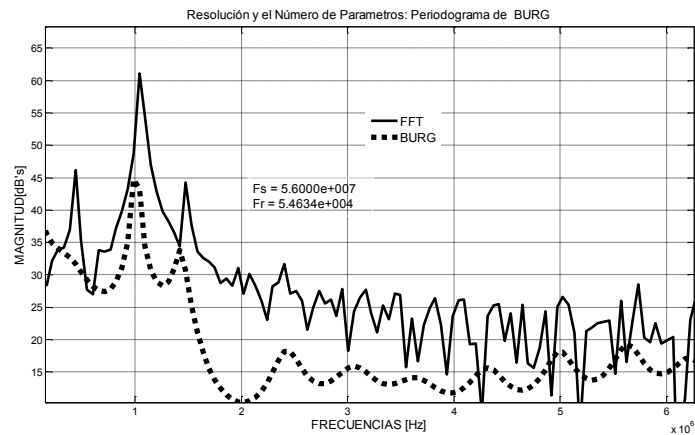


Figura 4.22.- Espectro de una señal con distintos métodos. El espectro obtenido por Burg no identifica las tres componentes frecuenciales esperadas.

En la segunda simulación la frecuencia de muestreo es de $f_s = 4.2 \text{ MHz}$, (figura 4.23). Aquí se pueden ver con claridad, con cualquiera de los métodos, las tres componentes frecuenciales esperadas. Es sobresaliente el hecho que para un mismo número de parámetros, las componentes frecuenciales están bien definidas con el método de Burg, incluso son ligeramente mayores en amplitud comparadas con las obtenidas con la FFT. Este ejercicio pretende demostrar que el uso de periodogramas paramétricos, por lo general, se basa en manipular el número de

parámetros que mejor estime la densidad espectral de la señal; y con el resultado de la figura 4.22 se observa que manteniendo el número de parámetros constante y solo variando la frecuencia de muestreo fue posible estimar el espectro con una mayor resolución en frecuencia. Este es un claro indicio de una posible relación entre el número de parámetros y la resolución en frecuencia.

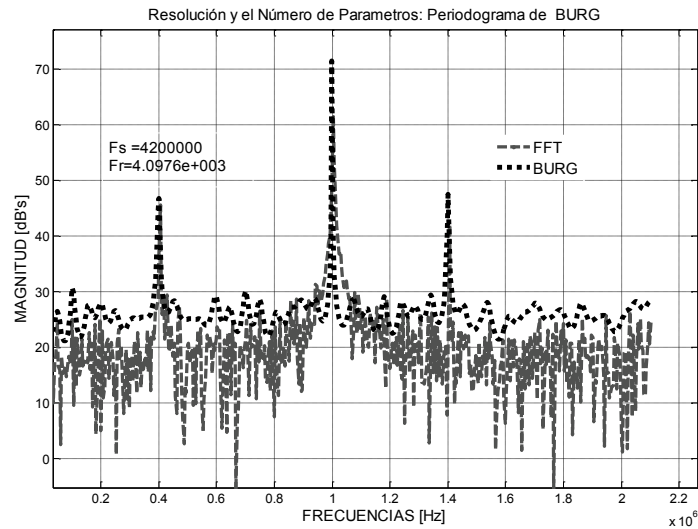


Figura 4.23.- Espectro en frecuencias: Evaluación de la dependencia existente entre el número de parámetros y la resolución en frecuencia.

Probablemente, sin los antecedentes anteriores sobre la resolución en frecuencia, estos resultados podrían ser solamente asociados a la frecuencia de muestreo o al número de muestras, pero difícilmente se asociarían a la resolución en frecuencia ante una inadecuada adquisición de la señal. Es claro que la resolución en frecuencia involucra ambos parámetros.

4.7.- La resolución en frecuencia aplicada al periodograma paramétrico de Burg.

Es importante señalar que los picos frecuenciales de la señal proveniente del chorro de aire se están ubicados en el intervalo de [0, 5 MHz]. El pico acústico puede predecirse a partir de las condiciones iniciales del experimento, como se vió en el capítulo I. El intervalo de observación en frecuencia sugiere que se deben

adquirir las señales, siguiendo el criterio de Nyquist, con una frecuencia de muestreo $f_s > 6 \text{ MHz}$.

Las densidades espectrales de las señales estudiadas en este trabajo, presentan picos. Uno de ellos es definido como pico acústico. Se sabe que existe un segundo pico conocido como entrópico. Detectar y medir tanto la amplitud como la posición de estos picos es una aportación importante al estudiar los chorros supersónicos.

Una de las primeras densidades espectrales, para fluctuaciones perpendiculares al flujo, obtenidas con un analizador de espectro se presenta en la figura 4.24. El autor [5], visualiza y señala los picos acústico y entrópico ligeramente notables en el espectro. Las herramientas propuestas en este trabajo permitieron visualizar con mayor detalle estos picos.

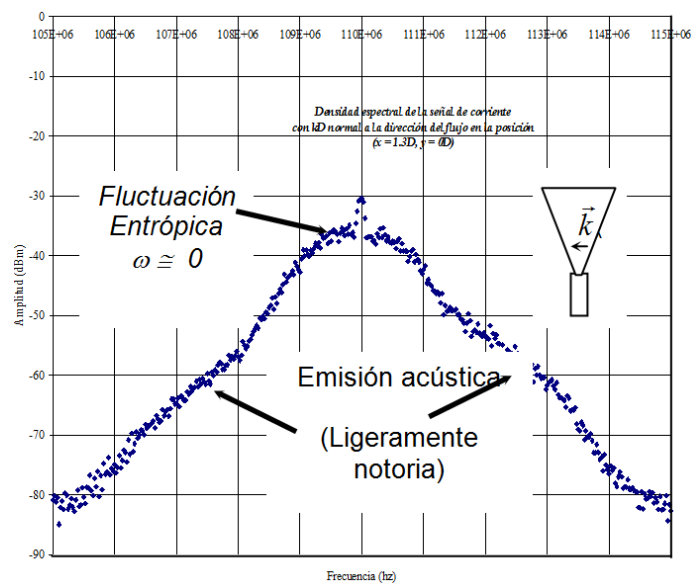


Figura 4.24.-Espectro en un punto de observación perpendicular a la dirección del jet sobre el centro del jet.

La figura 4.25 muestra una densidad espectral para fluctuaciones paralelas al flujo. El espectro obtenido con el analizador (línea azul), muestra al pico entrópico desplazado en frecuencia ya que las fluctuaciones son acarreadas por el flujo. El pico acústico no aparece.

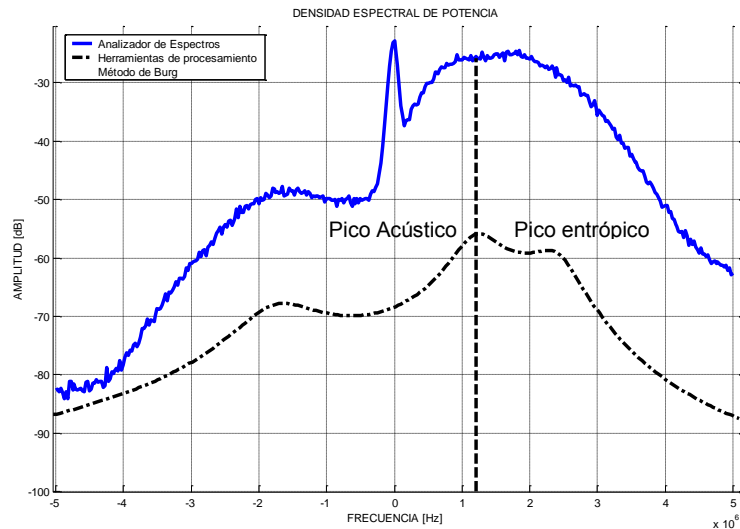


Figura 4.25.- Comparación de espectros: Analizador de espectros (línea azul). Espectro obtenido por el método paramétrico de Burg (línea negra).

La línea negra muestra el mismo espectro obtenido por el método paramétrico de Burg, $f_s = 10 \text{ MHz}$, $N = 2000$, número de parámetros 15 [1]. En esta figura se diferencian con claridad dos picos en la parte positiva del espectro; el primero de ellos es el acústico y el segundo es el entrópico. Cabe señalar que el pico que se define como acústico es distinguido con este nombre porque el producto de la frecuencia, evaluada directamente de la gráfica espectral, por la longitud de onda del haz, λ_Δ , obtenida de los cálculos teóricos del experimento, corresponde a un valor aproximado al de la velocidad del sonido (aproximadamente 343m/s). Con $\lambda_\Delta = 242 \times 10^{-6} \text{ m}$ y de la gráfica inferior de la figura 4.25 se mide $\nu_\Delta = 1.35 \text{ MHz}$, se obtiene una velocidad del sonido de $V_s = \nu_\Delta \times \lambda_\Delta = 326.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. La velocidad del sonido varía con la temperatura del medio. Un aumento de temperatura se traduce en un aumento de la frecuencia y por lo tanto, un incremento en la velocidad. El centro del chorro suele ser mucho más frío que el ambiente por lo que la velocidad del sonido cambia dentro del chorro.

4.8- Primeros espectros de señales provenientes de un jet.

La figura 4.26 es el resultado más importante obtenido en la tesis de maestría. Aparecen los espectros obtenidos con el método de Burg, al variar la distancia a la boquilla sobre la línea central del chorro.

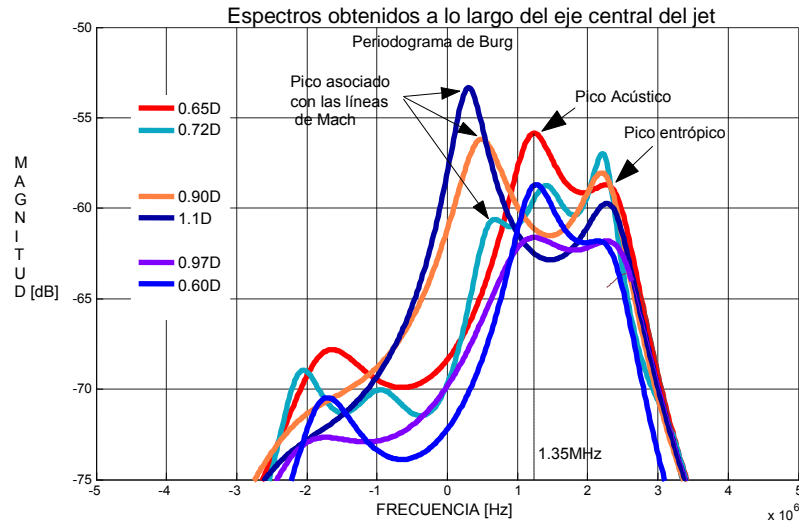


Figura 4.26.- Espectros obtenidos a lo largo de la línea central del jet.

En la notación a la izquierda de la figura 4.26, D se refiere al diámetro de la boquilla. En estos experimentos se tenía un diámetro $D = 0.8\text{mm}$. En esta figura se señala un tercer pico no previsto, y al cual se le llama en este trabajo pico Mach-3C. Aparece sistemáticamente cerca de las ondas de choque. Su persistencia en el fenómeno, y en otras posiciones dentro del chorro, ha sido motivo de un tema de tesis de maestría [1].

Es importante señalar que para calcular los espectros de la figura 4.26, fue necesario evaluar el número de parámetros. La evaluación se realizó mediante el método de “ensayo y error”. Dicha evaluación sugirió 30 parámetros. Al considerar los modelos de predicción de parámetros expresados en el capítulo II, se obtuvieron los resultados mostrados en la figura 4.27. Se puede distinguir con claridad, al menos para las primeras dos gráficas, que el número de parámetros

óptimo es de doscientos. El método MDL sugiere un menor número de parámetros (aproximadamente diez), aunque no es preciso.

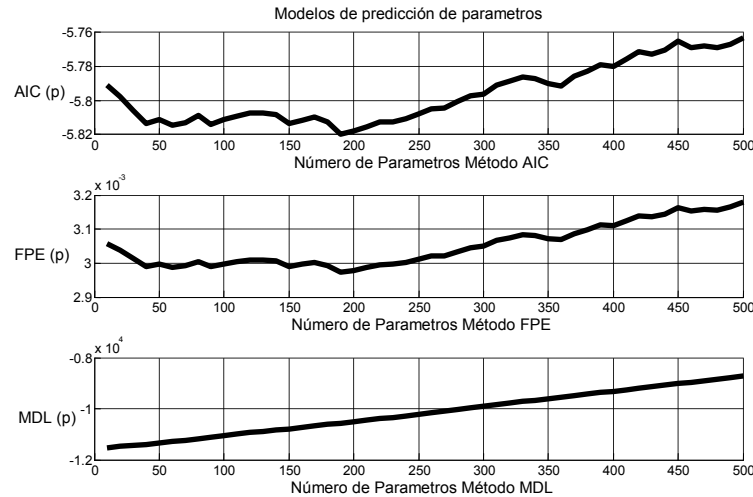


Figura 4.27.- Evaluación de los modelos de predicción de parámetros para obtener el espectro de las señales temporales empleando el método paramétrico de Burg.

El número de parámetros propuestos por los modelos de predicción proporcionó errores predichos por la teoría; *para un menor número de parámetros es probable que la señal no esté bien modelada y, para uno mayor, la señal modelada podría tener datos espurios*. La figura 4.28 representa espectros de una señal temporal adquirida en el mismo punto a una distancia de 0.72D de la boquilla. Estos espectros fueron obtenidos con distinto número de parámetros. Los valores de estos parámetros (el mínimo 20 y el máximo 55), representan el intervalo en el que el espectro de la señal tiene cambios significativos, tomando como referencia a la señal obtenida con sólo 30 parámetros. Para estudiar los picos: acústico, entrópico y Mach-3C, se requiere que los espectros sean reproducibles en un intervalo de parámetros relativamente grande. Como podemos notar, este tipo señales es muy sensible a la reducción del número de parámetros. Al aumentar el número de parámetros, sucede lo que predice la teoría sobre la probabilidad de obtener datos espurios con el incremento de parámetros (como puede notarse en la figura 3.29 en la que se emplearon 100 parámetros).

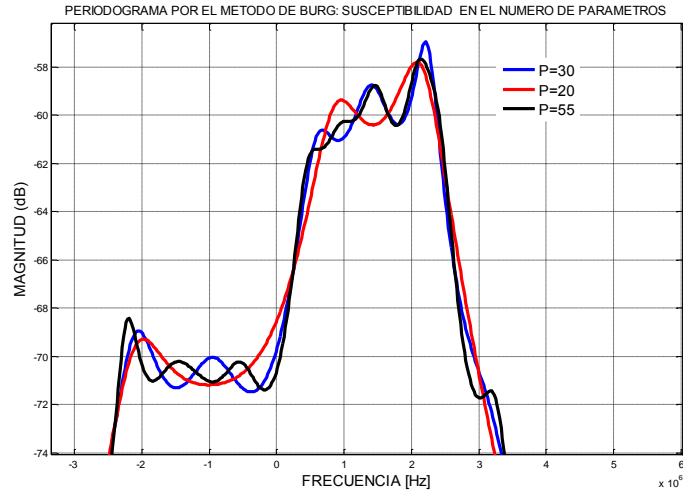


Figura 4.28.- En un intervalo corto de parámetros se tienen cambios no fiables para el estudio de los picos: Acústico, Entrópico y Mach-C

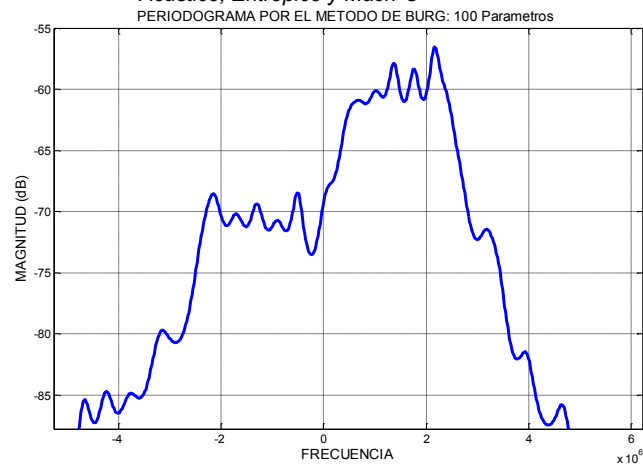


Figura 4.29.- Un mayor número de parámetros, sugerido por los métodos de predicción, distorsiona considerablemente el espectro

Los espectros de las figuras 4.28 y 4.29 corresponden a una señal adquirida a una frecuencia de muestreo de 40MHz y compuesta por 200 muestras. Con estos datos de adquisición se tiene una resolución en frecuencia de $f_r = f_s / N = 200\text{KHz}$. El hablar de datos no fiables en la figuras anteriores es que, como se menciona en el capítulo uno, se refiere a que al comienzo de la experimentación se evalúa la frecuencia del pico acústico. Este pico tiene variaciones pequeñas. Si el número de parámetros cambia de forma aleatoria, tanto el número de lóbulos en el espectro como la posición de estos es no fiable. Los doscientos parámetros sugeridos por los métodos de FPE y AIC no son adecuados como se puede notar en la figura 4.29 debido a un exceso de picos.

Para señales simuladas o con un contenido frecuencial muy energético, los periodogramas resultan ser muy eficientes y el número de parámetros propuestos por los métodos de predicción de parámetros son bastante acertados. En la mayor parte de los textos publicados [50, 43], se presentan ejemplos semejantes a los expuestos en el capítulo II. Como es posible notar para las señales tratadas en el presente trabajo, los periodogramas proporcionan un margen de error considerable, este error era una indicación de considerar con cautela los resultados de evaluación predichos por los métodos de predicción de parámetros.

4.9.- La resolución en frecuencia como criterio para la adquisición de señales

Muchas de las herramientas de procesamiento y análisis espectral están sustentadas en el uso de la transformada de Fourier. Para entender cómo actúan, y el efecto de su uso sobre la señal original, es necesario escudriñarlas, en una combinación entre lo cuantitativo y lo cualitativo. En los párrafos siguientes se va a estudiar el efecto de la resolución espectral y del número de parámetros en señales procedentes de un chorro supersónico.

La figura 4.30 presenta el espectro de fluctuaciones paralelas al flujo obtenido con el analizador descrito en el capítulo I. Es necesario recordar que las señales provenientes del detector son enviadas directamente al analizador, y esta señal está compuesta por dos señales mezcladas con frecuencias diferentes $|\omega_d + \omega_{OL}|$, capítulo II, sección 2.2.3. Las flechas señalan posibles lóbulos, aunque no están bien definidos. Los datos experimentales iniciales, indican que el pico acústico aparece alrededor de 2 MHz (como lo señala la flecha de la derecha de la figura 3.30).

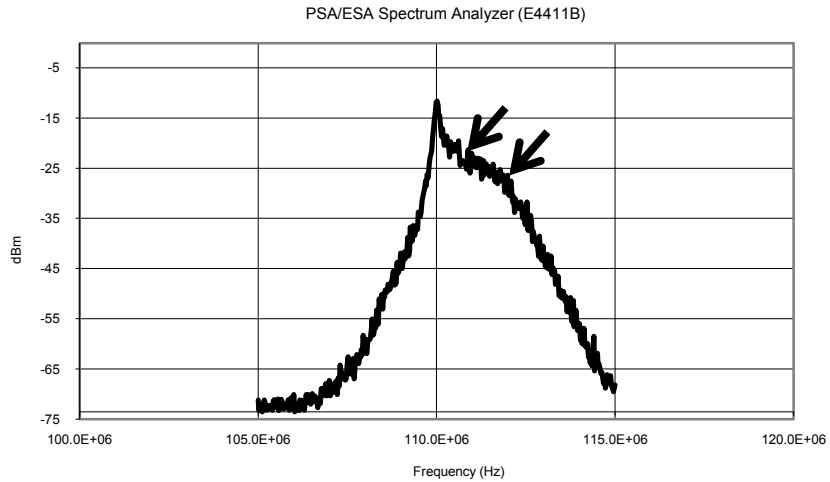


Figura 4.30.- Gráfica espectral adquirida mediante un analizador de espectros.

Simultáneamente, la señal fue adquirida con un osciloscopio Agilent Infiniium (Modelo 54830 BDSO), el cual permite controlar, tanto el número de muestras, como la frecuencia de muestreo. Se calculó el espectro empleando el periodograma de Burg. El motivo por lo que se eligió el periodograma de Burg es que una de sus características es la resolver componentes frecuenciales de baja amplitud y poca energía.

La figura 4.31 muestra la evaluación de los modelos de predicción de parámetros para la estimación del espectro. En dicha figura se puede observar que en los modelos AIC y FPE, no existe ninguna tendencia a minimizar la varianza estimada del error de predicción lineal, mientras que para el modelo MDL se tiene que para, alrededor de 160 parámetros, dicha varianza tiene un mínimo.

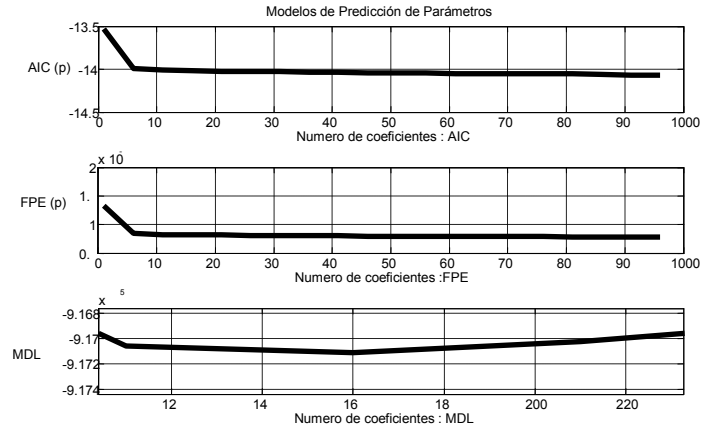


Figura 4.31.- Modelos de predicción de parámetros para la evaluación del espectro mostrado en la figura 4.9.

En la figura 4.32 se tiene distintas gráficas espectrales de una misma señal, pero con distinto número de parámetros, todos alrededor del sugerido por el MDL (figura 4.31). La señal temporal de dicho espectro fue adquirida con una frecuencia de muestreo $f_s = 40 \text{ MHz}$ y 65553 muestras. Estos datos originan una resolución en frecuencia de $f_r = \frac{40 \text{ MHz}}{65553} = 610 \text{ Hz}$. En dicha figura se muestra con claridad la variación del espectro, con mayor o menor número lóbulos en relación al número de parámetros, entre 150 parámetros y 200 parámetros.

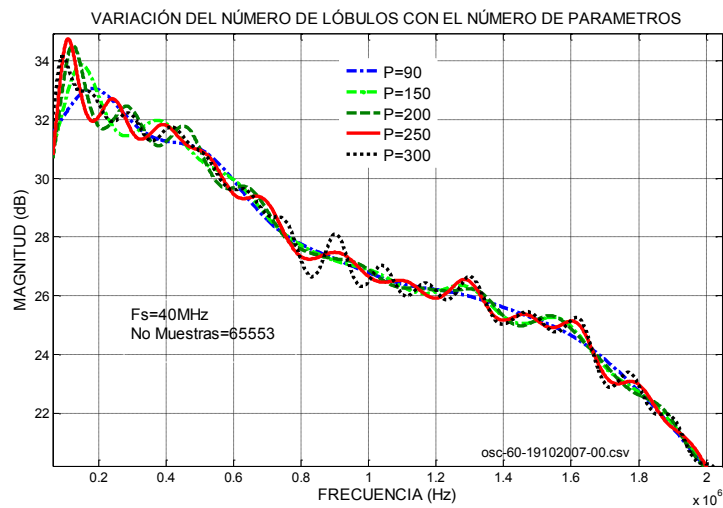


Figura 4.32.- Extremo derecho del espectro evaluado con el periodograma de Burg. Cada espectro está calculado con distinto número de parámetros.

Por último, en la figura 4.33 se muestran los espectros de tres señales distintas, aunque representan el comportamiento de las fluctuaciones de densidad en un mismo punto del chorro. La diferencia entre estas señales reside en las condiciones de adquisición (extremo superior derecha de la figura 4.33), con lo que se tienen las siguientes frecuencias de resolución de cada una de señales:

$$\triangleleft f_{r2} = 40\text{MHz} / 1366 = 29282 \text{ Hz}$$

$$\bullet f_{r1} = 40\text{MHz} / 2048 = 19531 \text{ Hz}$$

y

$$- f_{r3} = 6.8\text{MHz} / 1366 = 4978 \text{ Hz}$$

Es interesante observar los espectros obtenidos con el mismo número de muestras (1366) y parámetros (8), pero con diferentes frecuencias de muestreo. La gráfica adquirida con una frecuencia mayor (\triangleleft) contiene un menor número de lóbulos mientras que la señal adquirida con una frecuencia de muestreo menor, línea continua contiene más lóbulos. La tercera gráfica, en rojo, con diferentes características, muestra un crecimiento de lóbulos o espurios que predice la teoría respecto al uso de muchos parámetros.

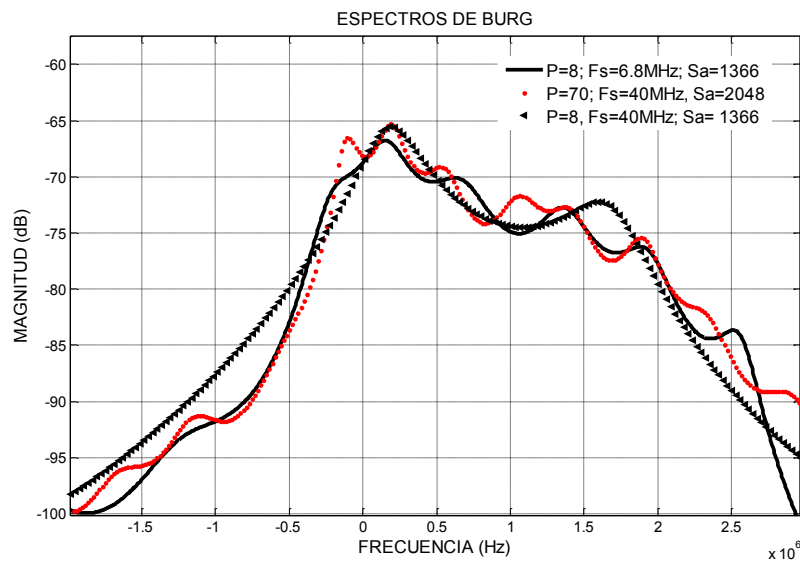


Figura 4.33.- Espectros diferentes obtenidos en un mismo punto del jet, con diferentes frecuencias de muestreo.

La figura 4.34 muestra el espectro de una señal con una resolución en frecuencia de $\Delta f = 122070 = \frac{500\text{MHz}}{4096}$ y 250 parámetros. En dicha figura se puede apreciar con claridad la existencia de los tres picos.

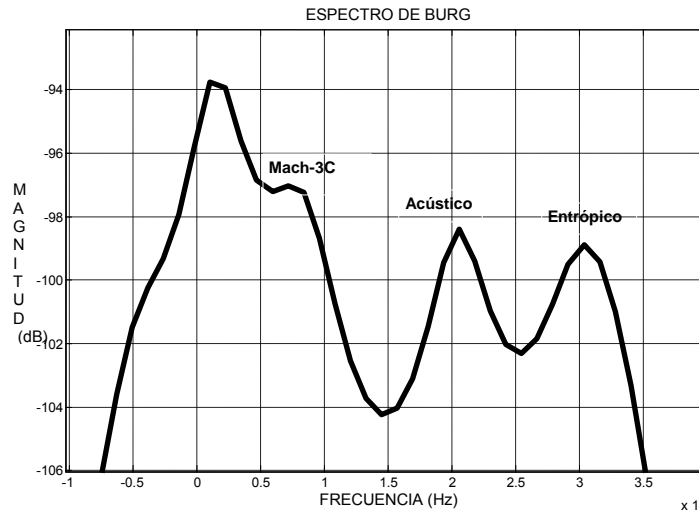


Figura 4.34.- Espectro evaluado considerando los criterios referidos en el presente trabajo

Este resultado muestra claramente que debe haber una relación cercana entre la resolución en frecuencia de la señal adquirida y el número de parámetros. Por lo tanto, los métodos de predicción de parámetros deberían tomar en cuenta explícitamente la resolución en frecuencia. Considerar la resolución ayuda enormemente a trabajar con archivos de pocas muestras, estudiar señales con frecuencias de interés, o en su defecto saber lo que es posible observar en el espectro analizado y tomar decisiones acertadas.

Es interesante hacer notar que para el caso anterior, los tres métodos de predicción de parámetros proporcionan un valor mínimo en la varianza estimada del error de predicción lineal (figura 4.35). Dos de ellos predicen 250 parámetros. Se recuerda que en los casos anteriores, donde no se había tomado en cuenta la resolución en frecuencia, estos mismos métodos no encontraban un mínimo.

Como prueba final de la importancia de considerar la resolución en frecuencia, se muestra en la figura 4.36 el espectro de una misma señal evaluada

con distinto número de parámetros. En esta figura es posible notar la persistencia de los tres lóbulos en un intervalo amplio de parámetros. Esto pone al descubierto, en forma cualitativa, la dependencia de la resolución en frecuencia con el número de parámetros para la evaluación de periodogramas paramétricos. Por otro lado en términos del estudio de las fluctuaciones de densidad en el interior de un chorro de aire es inmensurable, dado que jamás se habían obtenido gráficas espectrales con una observación tan nítida de los lóbulos. Por un lado la selección del número de parámetros deja de ser arbitraria y por otro permite estudiar objetivamente la evolución de los picos involucrados en el espectro.

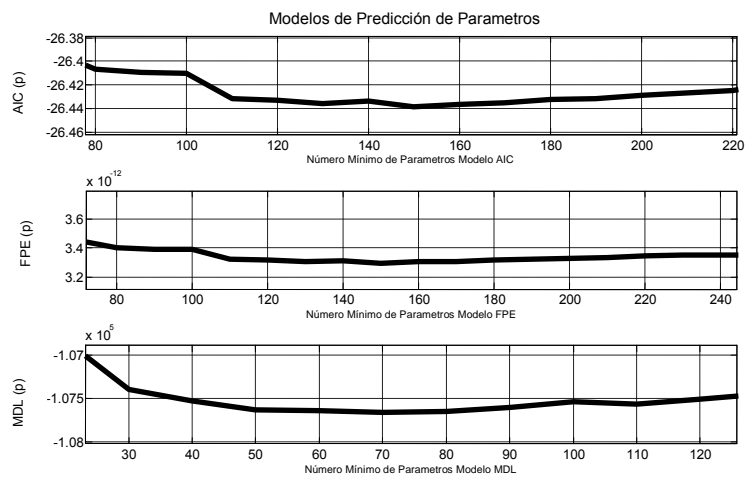


Figura 4.35.- Evaluación del número de parámetros para una señal turbulenta con $\Delta f = 122070 \text{ Hz}$.

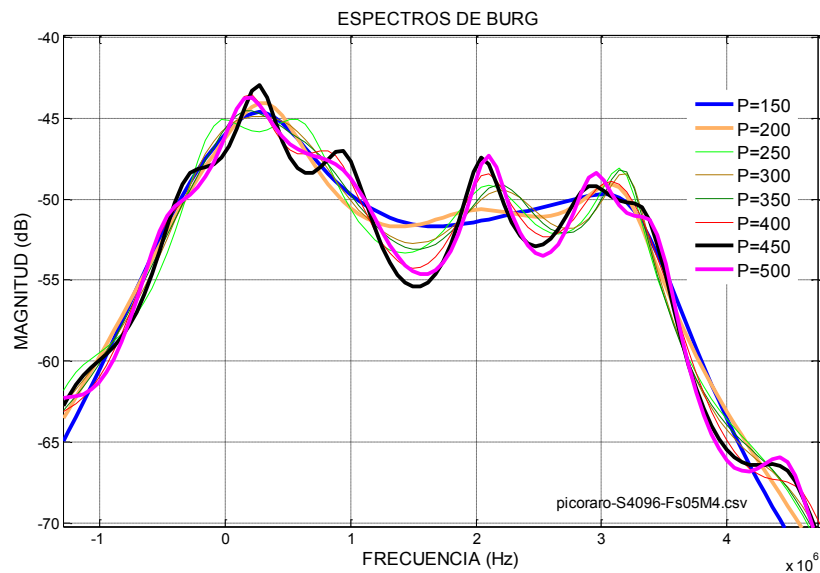


Figura 4.36.- Espectros de una misma señal $\Delta f = 122070 \text{ Hz}$ con distinto número de parámetros.

Las figuras 4.34 y 4.36 prueban la importancia de considerar la resolución en frecuencia para determinar las condiciones de adquisición de una señal. Como se puede notar en la figura 4.36, cuando se hace una buena adquisición, la forma del espectro no varía con el número de parámetros. En otras palabras, se tiene un intervalo amplio del número adecuado de parámetros que garantizan la forma del espectro tanto en señales turbulentas como en señales determinísticas como las presentadas en el al principio de este capítulo.

En este capítulo se ha insistido en demostrar, mediante el análisis de señales experimentales, la importancia de considerar también la resolución en frecuencia en señales turbulentas. Se ha mostrado que herramientas como filtros, ventana, decimación y otros estimadores de densidades espectrales como se usaron en un trabajo anterior, sólo permiten hacer “limpias superficiales” y hasta añadir ruido a la señal.

Capítulo 5.- Resultados

*Las pequeñeces no necesariamente son inservibles
Basta recordar que la materia está formada por átomos.*

MAR

5.1.- Introducción

En este capítulo se presenta los resultados relevantes tanto en el procesamiento de señales como en el análisis de la señal turbulenta. Las señales estudiadas en este capítulo provienen de un chorro axisimétrico que sale a la velocidad de 1.4 Mach. Como se describió en el capítulo I, un posicionador permite estudiar toda una malla de puntos dentro y fuera del chorro y, en cada punto, fluctuaciones que se mueven en cualquier dirección con respecto a la dirección del flujo (Figura 5.1)

Como un resultado importante de este trabajo se presenta también una simulación de los espectros. Estas simulaciones se pensaron como procesos inversos para extraer información individual de cada pico.

Por último, se presentan también algunos resultados obtenidos al graficar la parte par de la señal contra la parte impar en función del tiempo. Las figuras obtenidas, similares a las que se forman cuando se reconstruyen atractores, tienen forma helicoidal y al observarlas desde ciertos ángulos parecen mostrar comportamientos que se podrían asociar a los vuelos de Levy en flujos intermitentes.

5.2.- Resultados y validación de herramientas

La luz difundida proporciona información sobre las fluctuaciones de densidad en el gas dentro y fuera del chorro. Esta información es extraída mediante el análisis de las señales en el espacio de las frecuencias.

La figura 5.1 muestra en forma esquemática la forma de un jet de aire saliendo a gran velocidad de una boquilla. En la figura se indican, con pequeños círculos negros, los puntos que son estudiados.

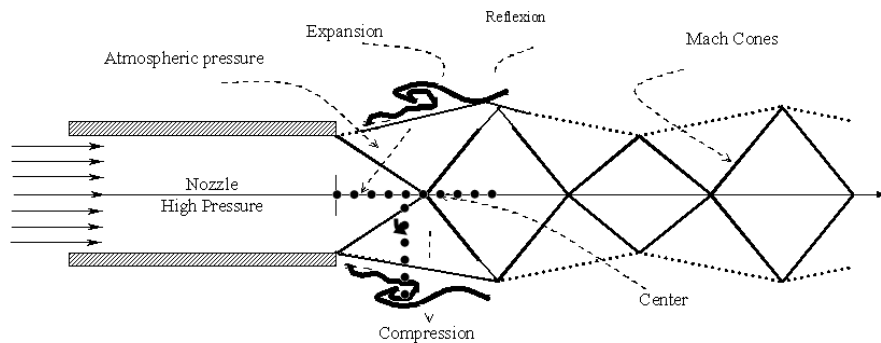


Figura 5.1.- Estructura de un Jet Supersónico

En cada punto se estudiaron fluctuaciones en direcciones entre +90 y -90 grados con respecto al eje del chorro. Se hicieron mediciones desde la boquilla hasta el primer choque.

Algunos aspectos del comportamiento del chorro se conocen bien y servirán como referencia para validar nuestra técnica de medición.

Una gran cantidad de las señales fueron adquiridas de acuerdo al criterio de Nyquist. Además, se seleccionó el número de muestras adecuado. En un principio se pretendió resolver las inconsistencias debidas a la adquisición, empleando herramientas alternativas de procesamiento tales como filtros, eliminación de

muestras (decimación), ventanas, promediados, sobre-muestreo etc.; con resultados infructuosos o poco relevantes.

Tomando en cuenta el teorema de Nyquist y la resolución en frecuencia deseada ($\Delta f = 7.63 \text{ kHz} = \frac{500 \text{ MHz}}{65536}$) para poder ver fluctuaciones de alrededor de 100 kHz. se adquirieron señales en distintos puntos del chorro. A partir del ángulo de difusión y suponiendo una velocidad del sonido de alrededor de 330 m/s se calculó que la onda acústica estaba alrededor de $\nu_{ac} = 2.75 \text{ MHz}$.

A partir de los datos experimentales se evaluaron los tres modelos de predicción, figura 5.2. Los mínimos en estas figuras están marcados con una flecha. El modelo MDL predice 110 parámetros y el FPE y AIC 210 parámetros, estos modelos difieren por 100 con el modelo MDL.

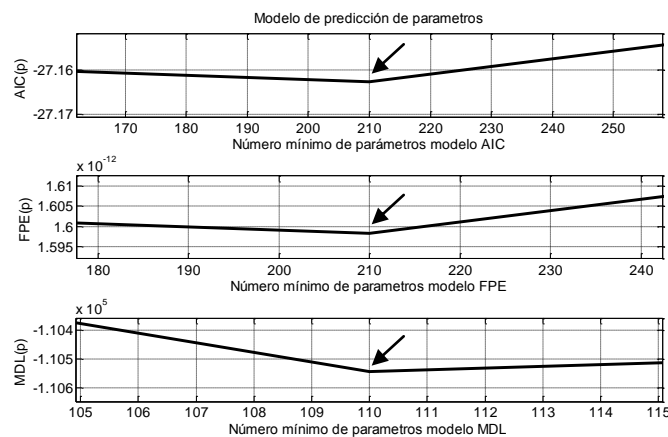


Figura 5.2.- Predicción de parámetros para la señal con una resolución en frecuencia de 7.63 kHz

En un intervalo entre 200 y 600 parámetros, el comportamiento frecuencial de las señales era el mismo. Es decir el espectro de una determinada señal resultaba independiente del número de parámetros, dentro de dicho intervalo. La única variación de los espectros era su resolución en frecuencia. A partir de esto, se escogió emplear 350 parámetros para el análisis espectral de todas las señales obtenidas en el presente trabajo.

Este resultado es importante. Anteriormente el uso de predictores no siempre proporcionaba un mínimo. Hasta autores importantes como Proakis (21) sugieren utilizar los métodos de predicción con cautela. Sin embargo, en este trabajo se ha mostrado que el uso adecuado de la resolución en frecuencia permite un amplio rango en la selección del número de parámetros. Se elimina así la necesidad del “ensayo y error” y la arbitrariedad de la selección.

La figura 5.3 representa los espectros obtenidos sobre el eje de simetría del chorro de aire. El comportamiento en esta zona central del chorro de aire ha sido estudiado, [5, 6, 10, 1, 32], desde hace más de 8 años, pero no se habían empleado las técnicas y propuestas expuestas en este trabajo para su análisis.

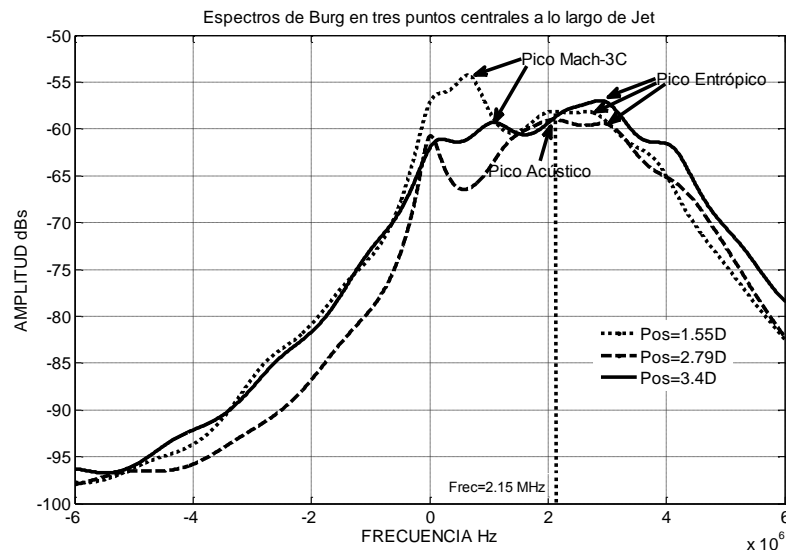


Figura.- 5.3.- Comportamiento espectral a lo largo de tres puntos centrales del chorro de aire.

Sobre los espectros de la figura 5.3 se señala, mediante flechas, la posición de los picos conocidos como, izquierda a derecha, el pico Mach-3C, pico Acústico, pico Entrópico. Hay un cuarto pico de muy baja amplitud, persistente en algunos puntos; del que por el momento no se tiene una hipótesis física.

Analizar señales cuyo comportamiento frecuencial se conoce, permite evaluar si las herramientas de procesamiento empleadas están funcionando adecuadamente. Las señales adquiridas son estudiadas y analizadas de dos formas: 1.- Enviadas directamente a un analizador de espectro, con características antes mencionadas, y analizar su espectro; 2.- A partir de la señal temporal se obtiene el espectro de dicha señal empleando Matlab.

En este sentido y con la idea de conciliar las herramientas de procesamiento con los resultados obtenidos en este trabajo, se estudiaron varios espectros empleando el periodograma de Burg y estos se compararon con los espectros adquiridos directamente con el analizador de espectros. Los resultados de esta comparación muestran que las tendencias de ambas técnicas son semejantes, pero los periodogramas proporcionan una mejor resolución en frecuencia. En la figura 5.4 se presentan algunas de estas comparaciones.

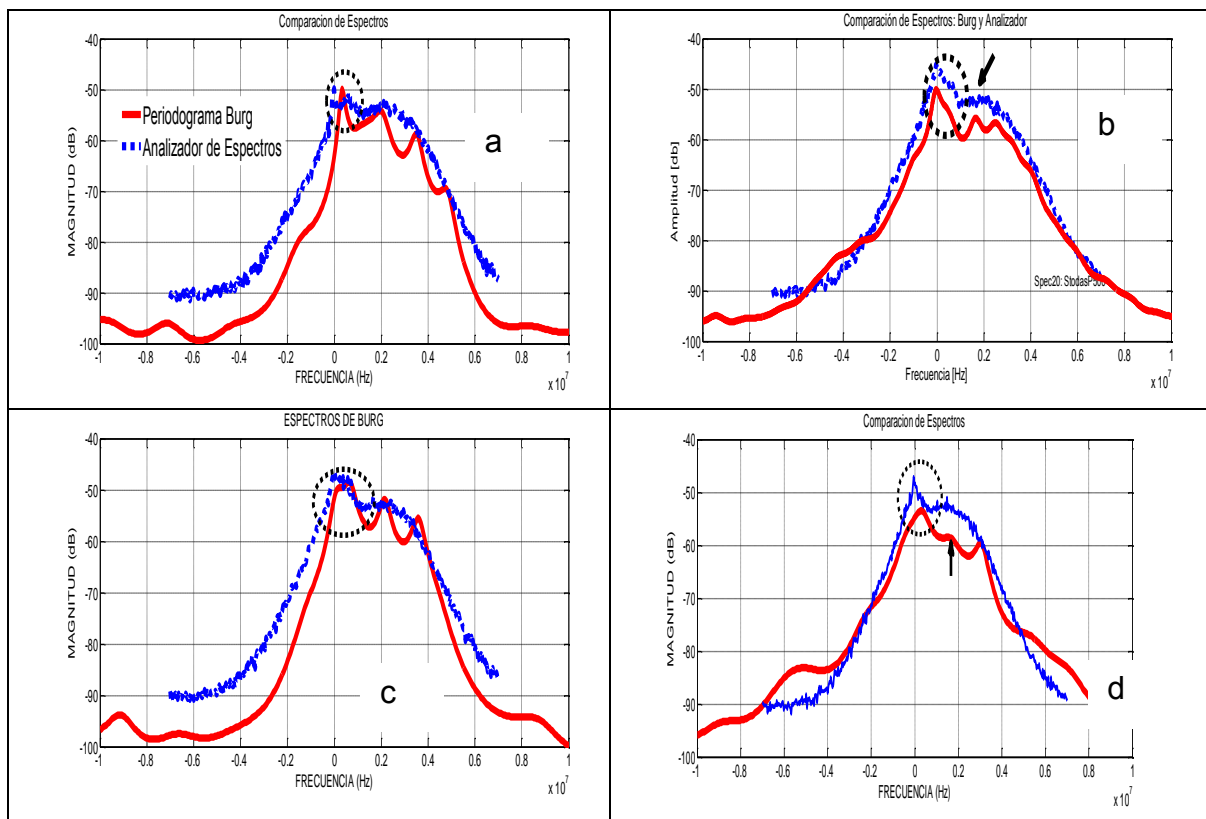


Figura 5.4.- Comparación entre el espectro obtenido del analizador espectros y el evaluado mediante el periodograma de Burg.

Los espectros de la figura 5.4 fueron obtenidos a distintos ángulos en un mismo punto del interior del chorro de aire. En estas gráficas es posible notar el comportamiento del pico Mach-3C encerrado con un círculo. Este pico se puede observar en algunos casos aun con el analizador. Pero por ejemplo, es difícil de observar en las gráficas 5.4b y 5.4d del espectro obtenido con el analizador pero si es posible visualizarlo con el espectro obtenido mediante el periodograma de Burg. Otro detalle importante de los espectros obtenidos mediante esta técnica es que los picos esperados, el acústico y el entrópico, quedan bien resueltos. Hay un cuarto pico que aparece y desaparece, alrededor de 4MHz, y del cual no se tiene mayor información física sobre su comportamiento, y tampoco es posible asociarlo aventuradamente al fenómeno físico estudiando, pero es importante mencionar su existencia para futuros análisis.

Fuera del chorro, la única fluctuación de densidad se debe a la propagación de ondas acústicas. La figura 5.5 muestra señales adquiridas en un mismo punto observado a diferentes ángulos fuera del jet. En la comparación entre los espectros de Burg con los del analizador se puede notar que en el espectro de Burg el pico acústico queda perfectamente bien identificado, encerrado por un círculo, incluso para hacer mediciones en posición, amplitud y en frecuencia. Es interesante notar que la amplitud del pico cambia con la dirección relativa entre la fluctuación y el eje del chorro. Se puede suponer que la dirección en la que este pico es máximo, corresponde a la dirección de propagación de la onda acústica fuera del jet. Hacer esto en una malla de puntos fuera del chorro, permite establecer el patrón de radiación acústica del mismo.

En el espectro obtenido con el analizador hay cierta incertidumbre en la localización del pico dado que está asociado a una protuberancia en el extremo derecho del espectro.

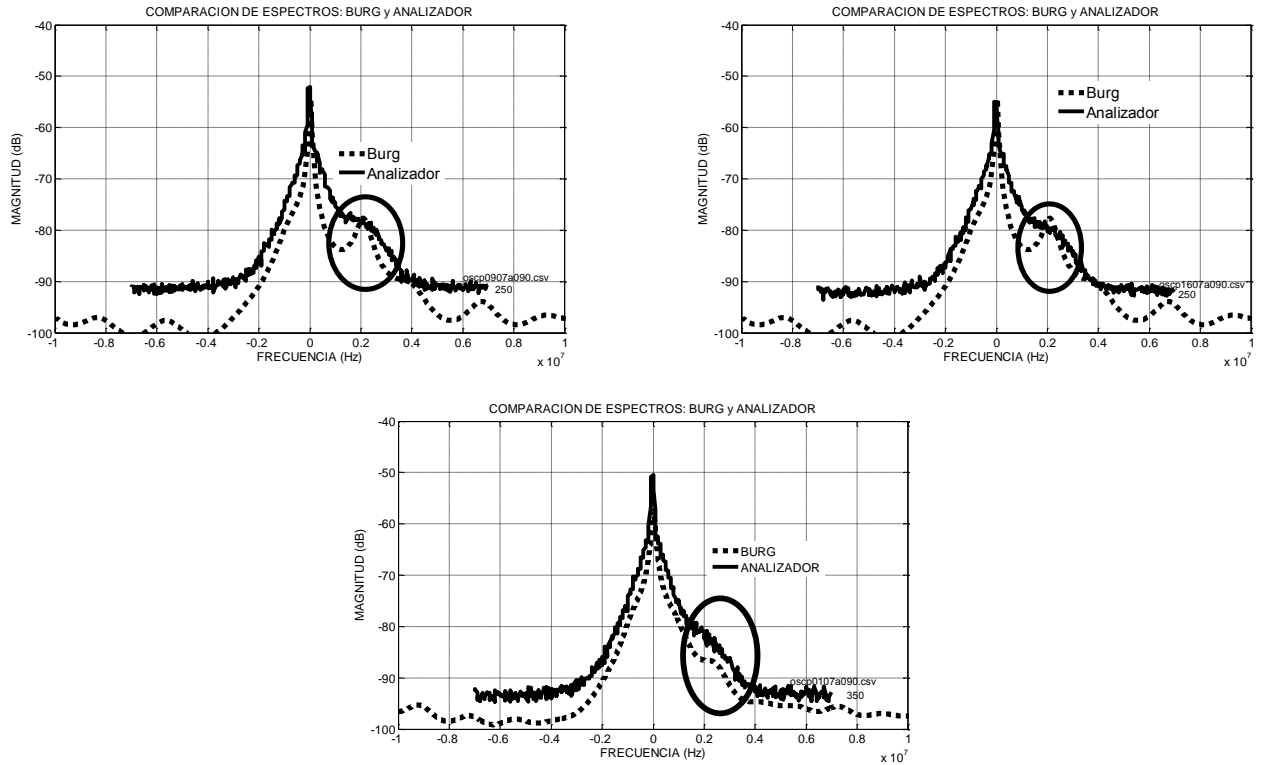


Figura 5.5.- Comparación de espectros, Burg y Analizador. Espectros de señales fuera del chorro, un mismo punto visto en diferentes ángulos.

En algunos casos la localización de los picos entrópico y acústico, empleando el analizador requiere de una amplia experiencia del experimentador para su detección. La figura siguiente 5.6, el pico acústico es aquél en donde se tiene un máximo en el extremo derecho, y que como se puede observar coincide con uno de los picos del espectro obtenido con el periodograma de Burg. Por otro lado el pico entrópico está asociado a una zona, extremo derecha del pico acústico (figura 5.6), en el que la pendiente de la gráfica del espectro no varía; en este sentido se puede observar que el espectro de Burg muestra con mayor claridad este pico. Este tipo de análisis sobre el espectro obtenido con un analizador en ocasiones era ambiguo por lo que la experiencia de quienes realizaban este tipo análisis era primordial.

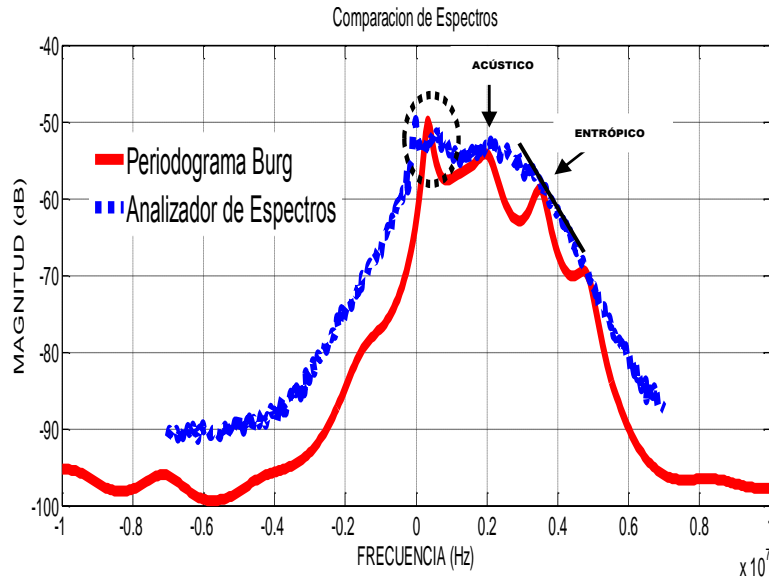


Figura 5.6.- Espectro proveniente del analizador de espectros y comparado con el periodograma de Burg, localización de los picos: acústico y entrópico

Con el fin de darle un seguimiento al comportamiento de los picos, tanto en su amplitud como en su frecuencia se graficaron estos datos obtenidos directamente de la figura 5.3. La figura 5.7 presenta el comportamiento en frecuencia de cada uno de los picos correspondientes a lo largo del eje central del chorro de aire. La gráfica superior derecha (figura 5.7), muestra el comportamiento del pico acústico, este pico de interés en el presente trabajo tiene una variación en frecuencia de 0.8MHz. El promedio de estas frecuencias es de 2.34MHz, que para un pico acústico esperado de 2.74MHz representa un error aproximado de un 14%. Para una señal turbulenta se podría considerar que es un error pequeño. En general, los cuatro picos tienen oscilaciones en frecuencia; pero es interesante observar que el pico con menor variación en frecuencia es el pico 4 que aparece y desaparece, y cuando es posible observarlo, casi siempre lo hace a la misma frecuencia como se puede notar en la gráfica inferior derecha de la figura 5.7.

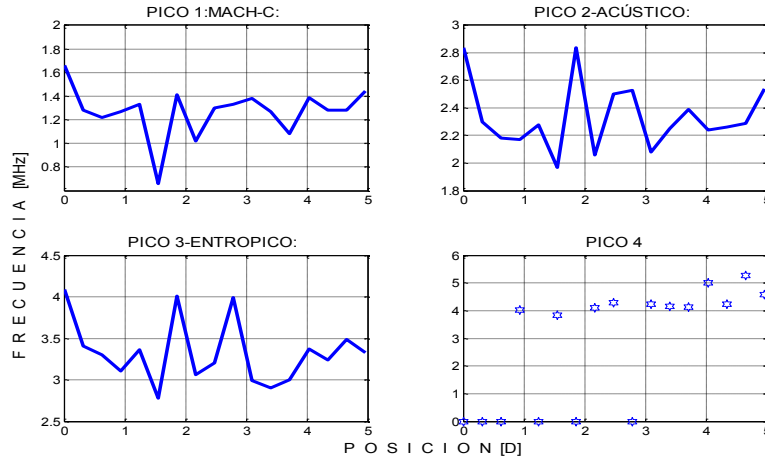


Figura 5.7.- Variación en frecuencia de los cuatro picos a lo largo del eje central del jet.

En la figura 5.8 se presentan los comportamientos en amplitud de cada uno de los picos estudiados a lo largo del eje central del chorro de aire y en la dirección del jet. El comportamiento de la amplitud del pico acústico es similar a los reportados en otros trabajos, [5, 6, 10, 13, 32], por lo que es posible concluir que los resultados espectrales obtenidos aplicando el periodograma de Burg son correctos. La gráfica del comportamiento del pico Mach-3C es un adelanto, dado que en trabajos preliminares, [6, 1, 32], no se había observado en todos los puntos a lo largo del eje central del chorro. En la tesis de maestría [1], se reportó este pico en sólo tres posiciones, por lo que se hizo la hipótesis de que su aparición dependía por las líneas de Mach y que probablemente existía una dependencia con el pico acústico. En este sentido se ha dado un avance en la observación y estudio del pico Mach-3C, ya que es posible darle un seguimiento incrementando la resolución en frecuencia en la adquisición de las señales que por consecuencia se traduce en un incremento en la resolución de frecuencia. La gráfica superior izquierda de la figura 5.8 muestra el comportamiento en amplitud del pico antes mencionado.

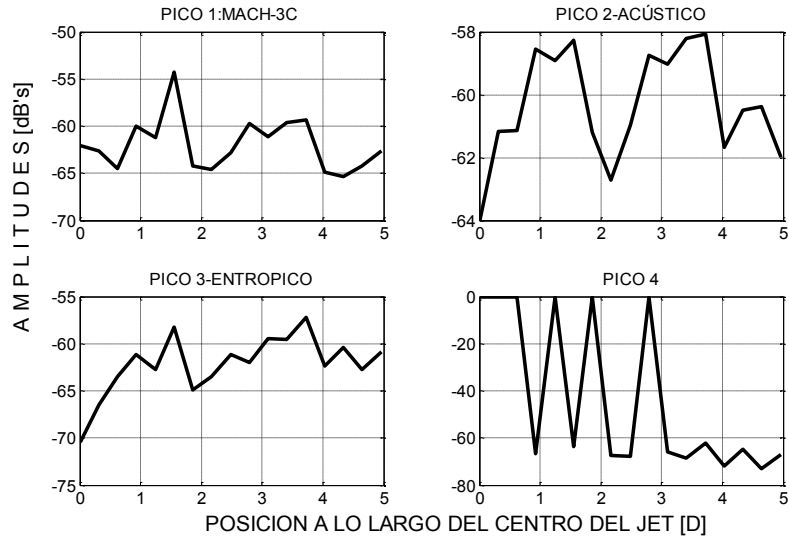


Figura 5.8.-Comportamiento de amplitudes de los cuatro picos a lo largo centro del jet de la luz difundida en la dirección paralela al chorro

Es interesante observar la similitud del comportamiento del pico Mach-3C con el pico acústico, ambos asemejan un comportamiento sinusoidal, como se puede observar con mejor claridad en la figura 5.9, en la que se muestran sus ajustes mediante polinomios.

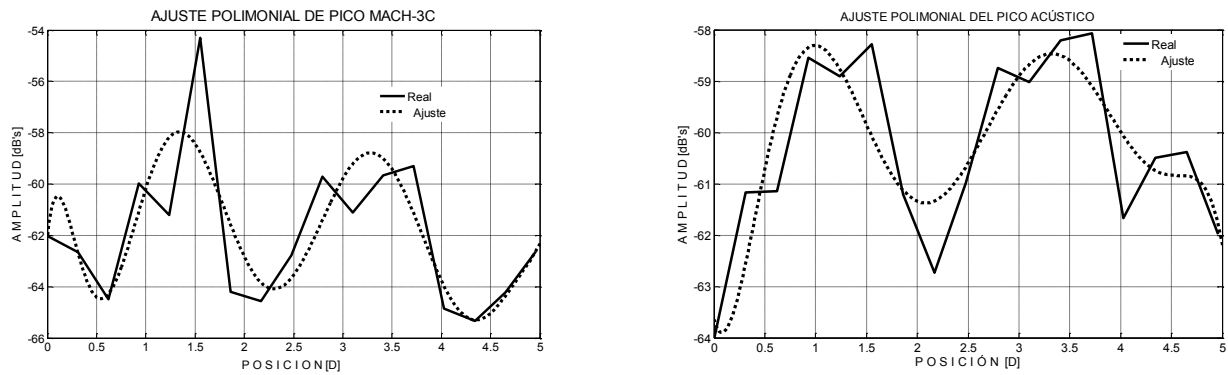


Figura 5.9.- Comportamiento sinusoidal de los picos Mach-3C y Acústico.

No sólo los picos: acústico y entrópico tienen un comportamiento sinusoidal a lo largo del eje central del jet. Aunque con menor claridad, este comportamiento también es observado para el pico entrópico como se puede notar en la figura 5.10 en donde se muestran simultáneamente los tres picos. Entre las gráficas de dichas figuras se puede notar una ligera diferencia de amplitudes, siendo la del pico

acústico la de mayor amplitud, siguiendo la del pico entrópico y por último la del pico Mach-3C.

Los comportamientos espacialmente ondulatorios de los picos, al menos los picos entrópico y acústico, son comportamientos previamente estudiados y los resultados son los esperados. Por otro lado, el pico Mach-3C se está estudiando con mucho detalle y será el tema de una tesis de maestría [1]. Uno de los resultados interesantes hasta el momento, obtenido por aplicar estas herramientas, es observar que el comportamiento del pico Mach-3C también tiene un comportamiento ondulatorio (Figura 5.10).

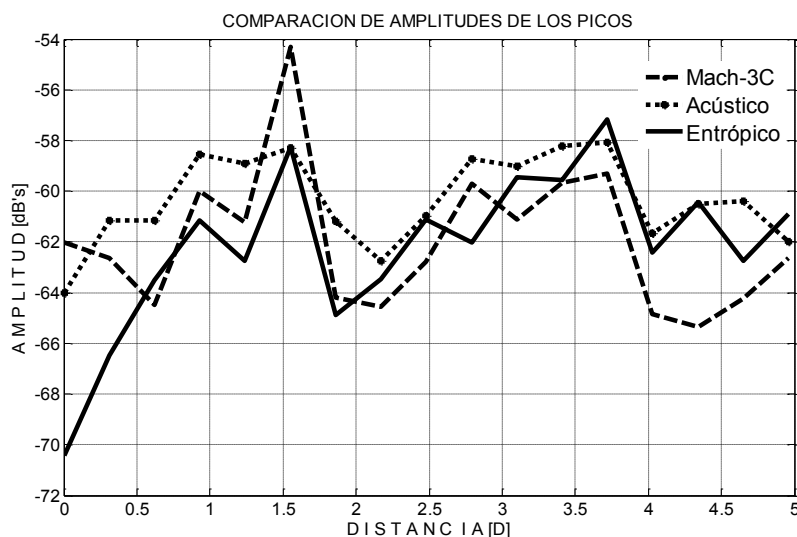


Figura 5.10.- Comportamiento de las amplitudes de los picos: Mach-3C, acústico y el entrópico.

Como se ha mencionado anteriormente, a pesar de que este tipo de fenómenos ha sido estudiado por más de 30 años, aún se tienen preguntas sin responder sobre la producción y propagación de la onda acústica dentro del chorro.

Las herramientas que se presentan en este trabajo han abierto una posibilidad de estudiar con detalle las fluctuaciones de densidad mediante el análisis espectral evaluado con periodogramas de Burg. Durante el desarrollo del

presente trabajo también se resolvieron varios problemas experimentales que no sólo ayudaron al entendimiento del fenómeno, sino además contribuyeron para una aplicación adecuada de las técnicas de adquisición. La experiencia, el aprendizaje y los hallazgos dejan al descubierto la gran cantidad de trabajo a futuro y que debido a la línea de investigación, procesamiento de señales, y a lo extenso de estas posibles investigaciones, en este trabajo no es posible presentarlos. Se presentan resultados importantes que hasta la fecha no habían sido reportados ni considerados.

A continuación se presentan algunos resultados relevantes de nuevas líneas de investigación que se abrieron pero quedaron inconclusas. Ninguna de ellas ha sido reportada en la literatura.

5.3.- Espectros ajustados con gaussianas

El comportamiento de los picos que se estudian sobre el espectro, ya sea el obtenido mediante un analizador de espectro o empleando herramientas de procesamiento, han sido explicados mediante teorías físicas. Dado que por primera vez se ha empleado periodogramas para estudiar este tipo de fenómenos, es posible observar con detalle las fluctuaciones de densidad de origen acústico en medio de las variaciones termodinámicas. También, se han encontrado otros comportamientos que no habían sido reportados en otros trabajos, pico Mach-3C y un cuarto pico que aparece y desaparece.

Dado que la luz dispersada que incide sobre el foto-detector es de un láser el cual tiene un perfil gaussiano y el análisis espectral se realiza en un ancho de banda de 5 MHz, se hace como una propuesta aproximada, de acorde a estos argumentos, emplear funciones gaussianas para la simulación o representación de espectros de las señales estudiadas en este trabajo. Una ventaja de usar gaussianas para la representación de los espectros es que es posible asociarles un ancho de banda mediante la medición la cintura de la gaussiana.

Ahora bien el número de gaussianas que se emplearan para la representación de los espectros son cinco, esto es porque una gaussiana siempre estará en el origen, y las otras cuatro representaran los pico Mach-3C, acústico, entrópico y el cuarto pico que aparece y desaparece, que por el momento le llamaremos pico de alta frecuencia. Con esta representación se pretende comparar los espectros experimentales, y de ahí deducir las frecuencias centrales y los anchos de las posibles gaussianas individuales. Con los resultados de esta representación se pretende, inicialmente, entender mejor el comportamiento de los picos.

La figura 5.11 muestra la comparación del espectro simulado con el experimental. El espectro simulado es el resultado de sumar cinco gaussianas, referencia, P1 (Mach-3C), P2 (acústico), P3 (entrópico) y P4 (pico de alta frecuencia). La gaussiana que corresponde a la referencia, siempre está centrada a una frecuencia de 0Hz y sólo tendría cambios de amplitud y anchura. Las otras 4 gaussianas serían la representación de los 4 picos estudiados. Estas gaussianas cambian en frecuencia, amplitud y anchura. Las figuras 5.11 a 5.13 representan tres espectros simulados de las señales adquiridas sobre la línea central. Es interesante observar en estas figuras la contribución de las amplitudes relativas y de los anchos de las gaussianas para formar espectros similares a los experimentales. Por ejemplo, en el espectro experimental de la figura 5.11 tiene cuatro picos que se pueden explicar con la suma de cuatro gaussianas. Dos de estas Gaussianas tienen picos en posiciones que no corresponden a las del resultado final.

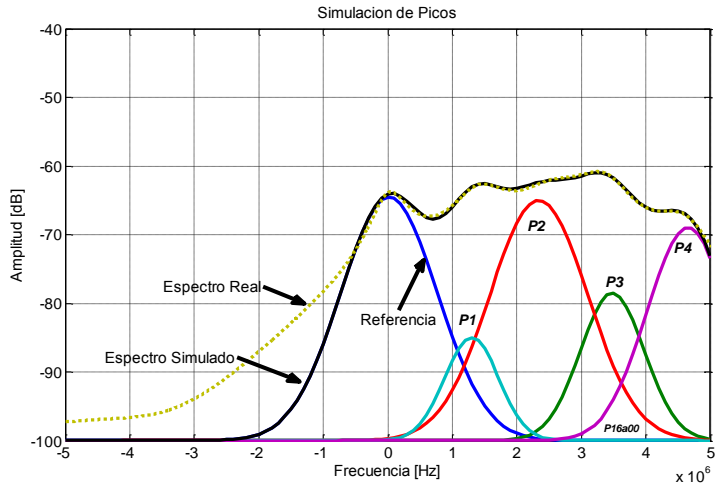


Figura 5.11.-Representación de un espectro empleando cuatro gaussianas

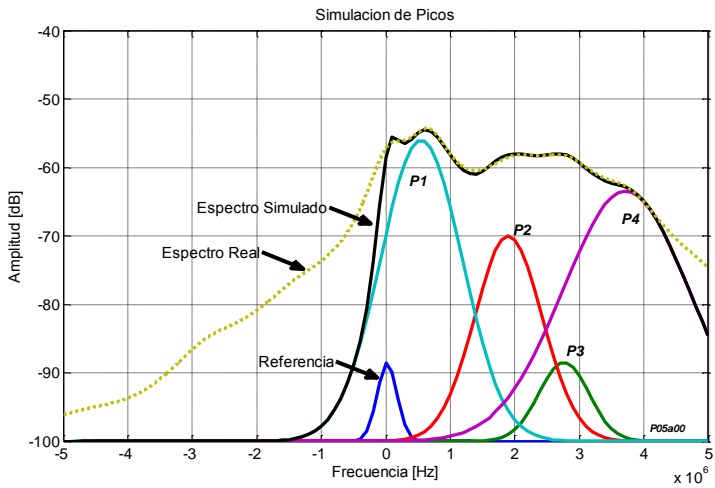


Figura 5.12.-Representación de un espectro empleando cuatro gaussianas

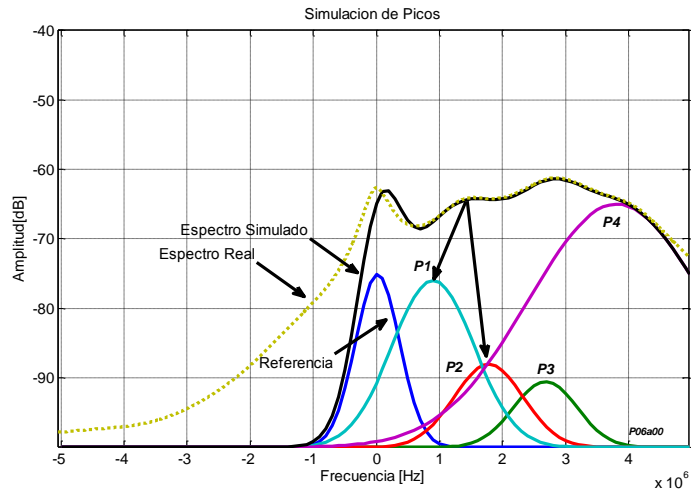


Figura 5.13.- Ninguno de los dos picos máximos de las gaussianas P1 y P2, coinciden con el pico máximo del espectro simulado.

Otro resultado interesante es que en general la representación de un solo pico es posible con al menos 2 gaussianas. En la figura 5.13, es evidente otra vez que los picos del espectro real no corresponden necesariamente a los picos de las gaussianas empleadas. El pico del espectro real se encuentra aproximadamente a 1.5MHz, este pico esta simulado con dos gaussianas (P2 y P3) ninguno de cuyos máximos corresponde al máximo del pico real. Una observación más de la figuras 5.11 a 5.13 es el “jaloneo” o “estiramiento” entre ellos. En este sentido se puede observar de la figura 5.11 que existe una “línea” a lo largo de 2MHz a 3MHz, cuya representación fue posible debido a la contribución de las cinco gaussianas. Esto invita, con reservas, dado que aun no se ha estudiado con detalle el seguimiento de los picos, a la propuesta de la siguiente hipótesis: *La posición de los picos analizados en los espectros experimentales depende de la interacción entre los picos involucrados, Mach-3C, acústico, entrópico, y el pico de alta frecuencia, esta hipótesis explicaría el ligero desplazamiento que tiene el pico acústico.*

La figura 5.14 representa una comparación, espectro real y ajustado, de los comportamientos en frecuencia de los picos aquí estudiados. Como puede observarse, la tendencia en sus comportamientos es muy similar. Esta tendencia genera una expectativa para la simulación de espectro empleando funciones gaussianas. También hay mucha semejanza en el comportamiento en amplitud de los picos, real y simulados, como se puede observar en la figura 5.15. Las variaciones de los comportamientos son mínimas; en algunas posiciones a lo largo del chorro se tienen valores completamente opuestos o con amplitudes menores a las esperadas, pero en general la tendencia en todos los casos se asemejan.

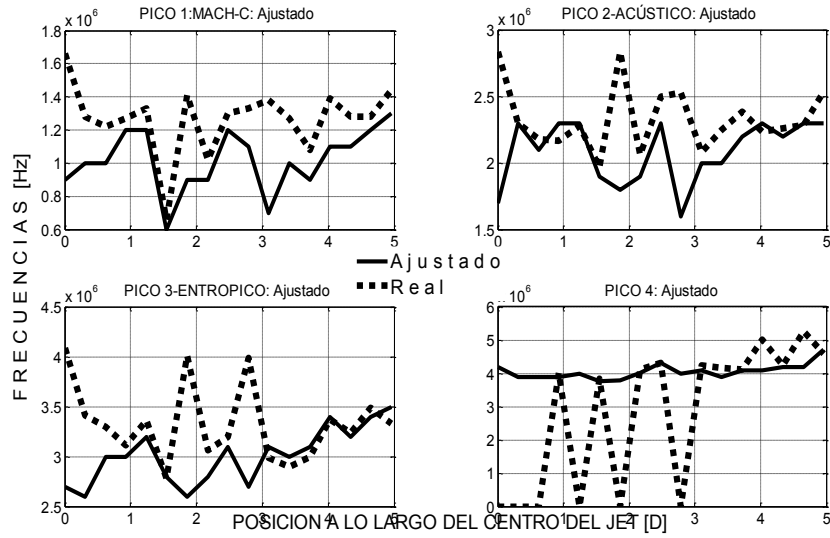


Figura 5.14.- Comparación, comportamiento frecuencial vs distancia, de los picos simulados y reales.

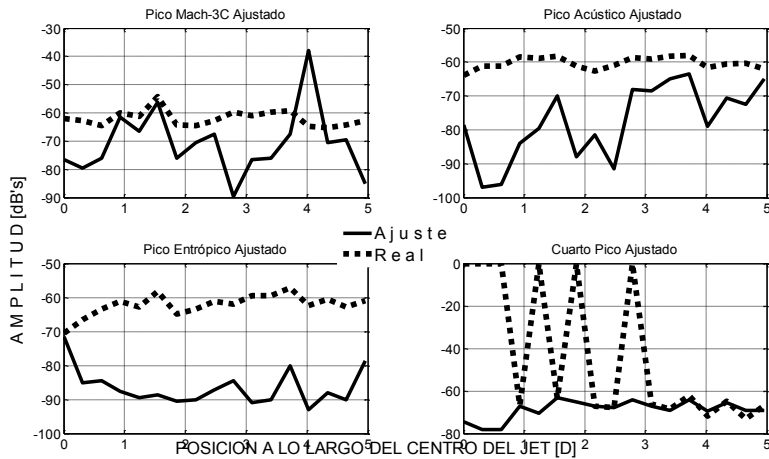


Figura 5.15.- Comparación, comportamiento amplitud vs distancia, de los picos simulados y reales.

Una ampliación de las gráficas correspondientes al pico acústico, tanto en su comportamiento frecuencial como en amplitud, figuras 5.16 y 5.17, hace resaltar la gran similitud existente entre el pico simulado y el pico real. Es interesante observar que dicha similitud no sólo es respecto a la tendencia de las gráficas, sino además es posible deducir que su semejanza también es la de una sinusoidal en el espacio. Otro resultado interesante es el que se muestra en la gráfica simulada del cuarto pico que aparece y desaparece, y cuya tendencia sigue siendo la misma respecto a la poca variación en su comportamiento

frecuencial y más aún la gran semejanza en amplitudes, como se puede observar en las figuras 5.14 y 5.15, inferior derecha, respectivamente.

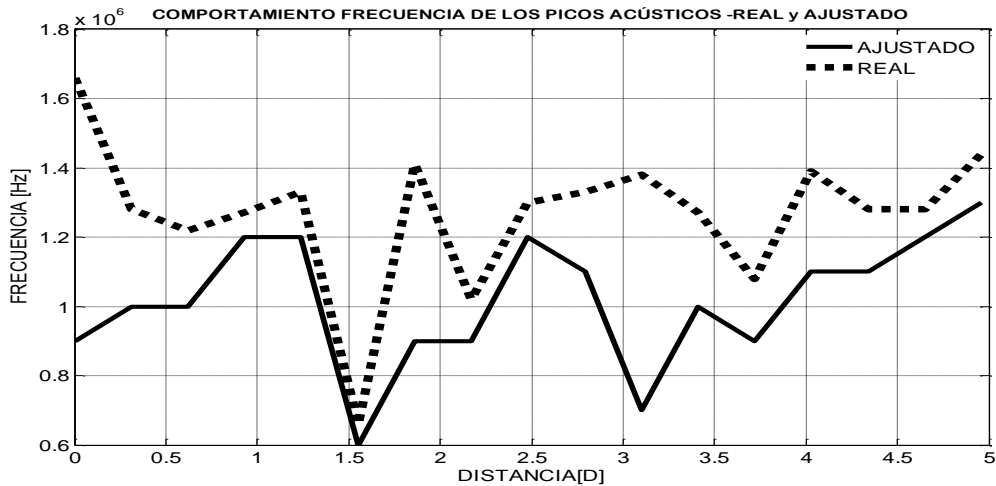


Figura 5.16.- Comportamiento en frecuencia de los picos, ajustado y real, a lo largo del eje central del jet

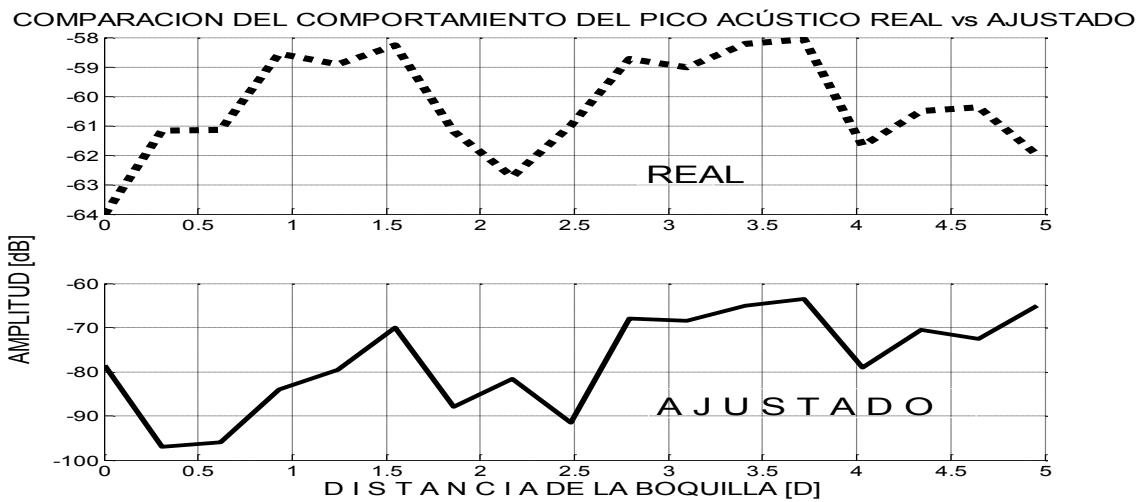


Figura 5.17.- Comportamiento en amplitud de los picos, ajustado y real, a lo largo del eje central del jet

Sería aventurado sacar conclusiones definitivas con este trabajo que aún no termina pero sí se espera tener resultados más concluyentes en un futuro próximo, alrededor de un año. Los resultados obtenidos en las figuras anteriores abren un posible tema de investigación que explicaría el comportamiento de los lóbulos asociado a las fluctuaciones de densidad de un jet supersónico. En este sentido sería posible explicar los cambios de posición en frecuencia y amplitud de estos, a partir de la interacción entre ellos.

5.4.- Otros análisis

En este apartado se presentan imágenes construidas a partir de señales provenientes del interior de un jet supersónico, cuyo comportamiento invita a un estudio más profundo, que aunado a lo expuesto anteriormente, podría ayudar a avanzar en el entendimiento del fenómeno.

La señal proveniente del detector centrada en 110MHz, se puede “desheterodinar” electrónicamente (descrito en el capítulo II) y procesar de manera que a la salida se proporcionen dos señales desfasadas 90 grados, una par (coseno) y otra impar (seno). Cada señal es adquirida con un osciloscopio y posteriormente guardada en una computadora para su procesamiento. Las señales guardadas generan una matriz de tres columnas, teniendo como filas el número de muestras. El desheterodinador, por construcción, nombra a una de sus salidas como parte real y la otra como parte imaginaria de una señal compleja, y la tercera columna corresponde al tiempo.

Se presentan en la figura 5.18 las imágenes de una misma señal en un mismo punto. La imagen superior izquierda representa sobre el eje de las x 's la parte real de la señal y en las y 's la parte imaginaria siendo el eje de las z 's el eje temporal. Con la finalidad de observar con mayor detalle el comportamiento de la imagen representativa de la señal; se emplearon filtros pasa bajos y pasa altos con una frecuencia de corte de 2.5 MHz. Cada uno de estos filtros generó dos señales complejas, las cuales fueron graficadas, partes real e imaginaria en función del tiempo. En la figura 5.18, en la parte superior derecha, aparece la imagen de la señal correspondiente al filtro pasa altos y en la parte inferior central, figura 5.18 la imagen de la señal obtenida al aplicar un filtro pasa bajos.

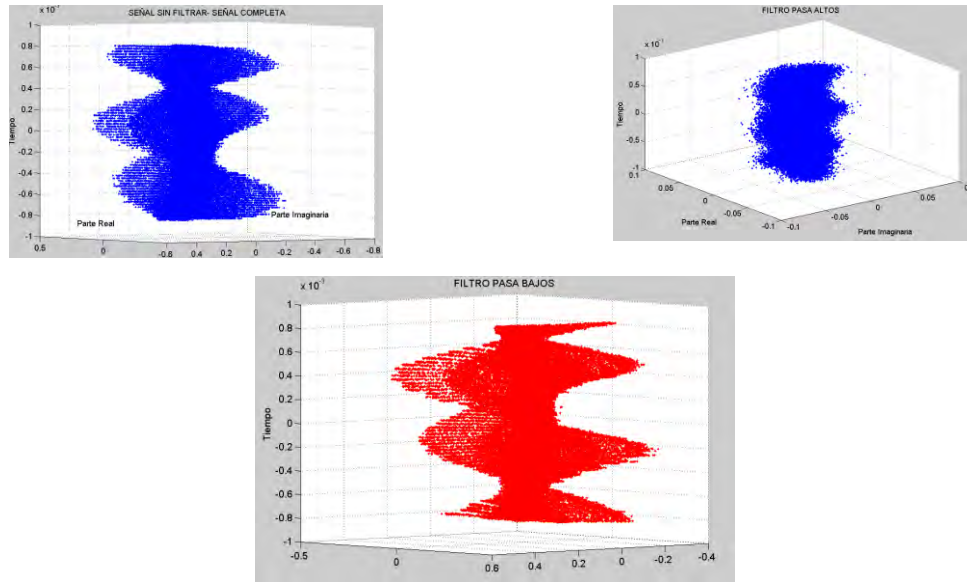


Figura 5.18.- Separación de frecuencias bajas (Imagen Inferior Central) y altas (Imagen Superior derecha) de la señal obtenida original (Imagen Superior Izquierda) en un punto dentro del chorro

Es interesante notar la forma helicoidal de la imagen obtenida del filtro pasa bajos, hacer conjeturas y asociaciones de este comportamiento es aventurada. La superposición de ambas señales obtenidas por los filtros proporciona una mejor idea de su comportamiento, como se puede observar en la figura 5.19 superior izquierda. Cabe mencionar que la forma helicoidal varía dependiendo del punto de observación, posición y ángulo. Las imágenes superiores de la figura 5.19 dan muestra de lo mencionado, estas corresponden a distintos puntos en una línea perpendicular al eje del jet. Todas las señales corresponden a fluctuaciones paralelas al jet. Durante el análisis se pudo observar la disociación de las espirales a medida que se estudian puntos más alejados del eje central. Es interesante hacer notar que existe una clara diferencia entre estas imágenes. Una vista superior de las mismas señales es mostrada en la parte inferior central de la figura 5.19. La señal con mayor número de espirales forma un círculo, mientras que la siguiente forma $\frac{3}{4}$ de círculo. Los puntos faltantes parecen haberse dispersado hacia el lado opuesto.

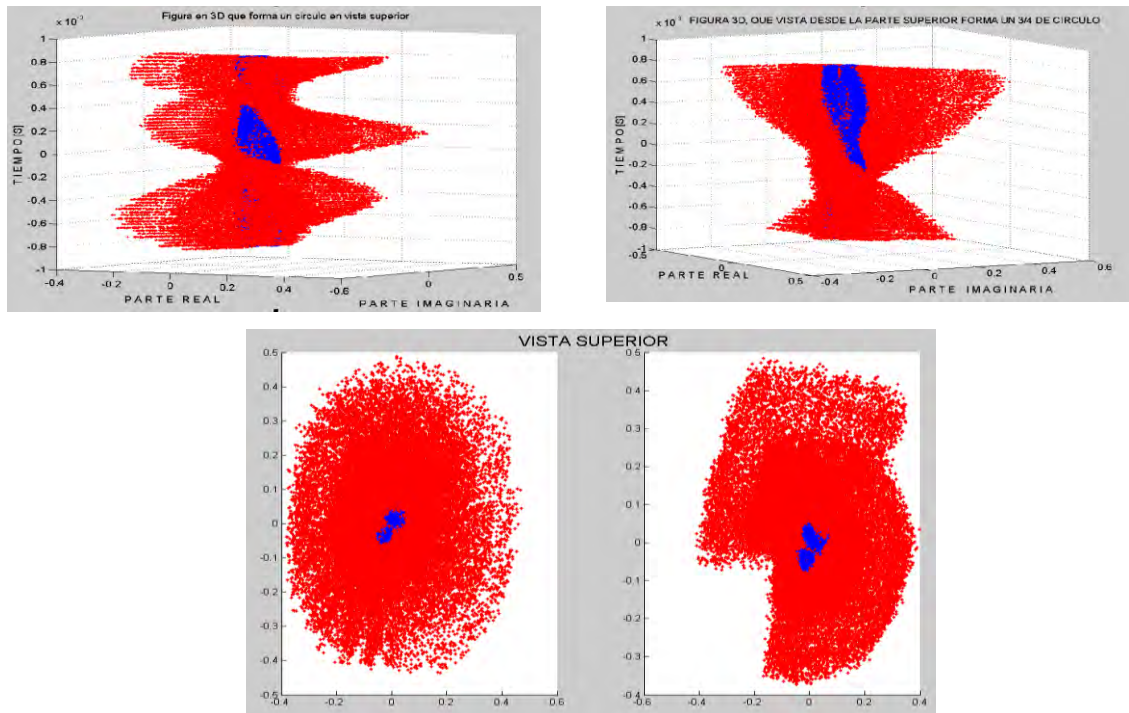


Figura 5.19.- Superposición de señales, filtro pasa bajos y pasa altos, obtenidas en dos puntos diferentes

La figura 5.20, muestra el comportamiento en distintos puntos del jet, del centro hacia fuera. En esta figura se observan los cambios de “espiral” que se obtienen de la señal conforme nos alejamos del chorro lateralmente. El punto cero corresponde a una zona cercana a la boquilla y centrada, como se muestra en el diagrama del jet a la izquierda de la imagen.

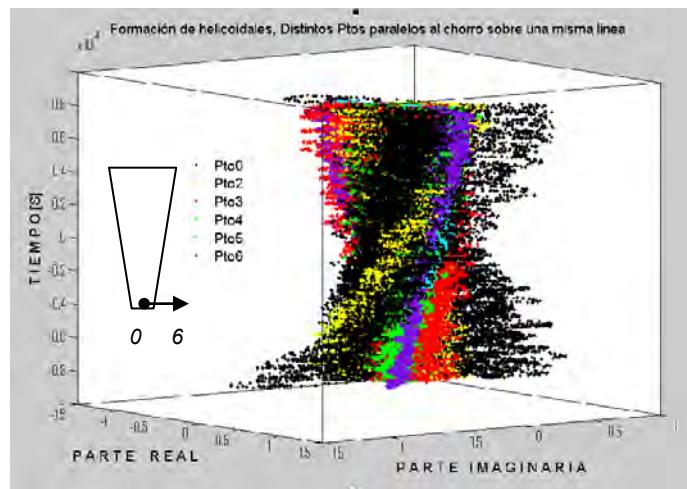


Figura 5.20.- Comportamientos figura representativa de los puntos en el interior de un jet de aire

La figura 5.21 muestra las vistas desde arriba de las imágenes anteriores. La zona sombreada de color rojo corresponde al filtro pasa bajos y la zona sombreada de color azul al filtro pasa altos.

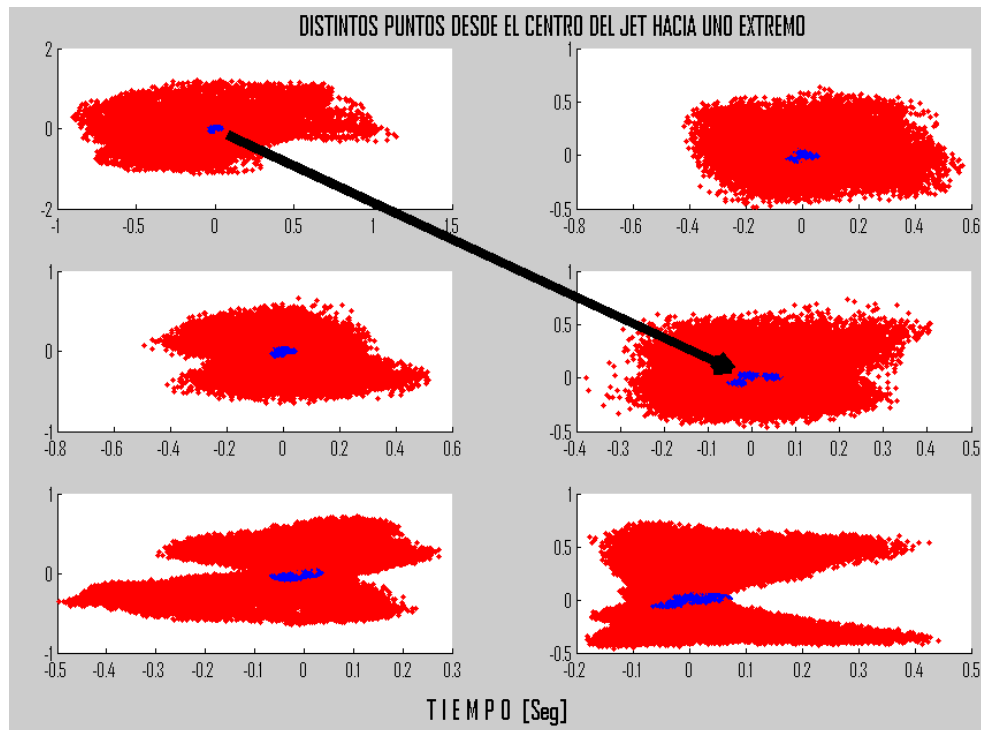


Figura 4.21.- Vista superior de las señales representadas en la figura 4.19

En estas imágenes es interesante resaltar el comportamiento de las altas frecuencias. Aunque hasta el momento no se ha hecho una estadística del comportamiento de dichas imágenes, en una primera observación es posible notar una concentración de cúmulos según la zona estudiada. Tomando como guía la flecha, es notable en la imagen superior izquierda la aparición de un solo cúmulo y que este parece separarse en varios cúmulos al alejarse del centro del jet, y posteriormente unirse en un cúmulo mayor que el primero, pero sin simetría, imagen inferior derecha. Cabe mencionar que la imagen superior izquierda corresponde a un punto en el centro del chorro mientras que la imagen inferior izquierda corresponde a un punto alejado del chorro. Concluir sobre este

fenómeno sería prematuro y aventurado, sólo se presentan estos hallazgos abriendo nuevamente un tema para estudios futuros.

En las señales de altas frecuencias con diferentes número de muestras se da un fenómeno parecido al antes mencionado, es decir, la aparición del número de cúmulos y su integración entre ellos está en función con la cantidad de muestras que lo componen. La señal original consta de 65536 muestras y a la cual se le hicieron particiones, 2^{12} , 2^{13} y 2^{14} , y se les aplicaron filtros con frecuencia de corte a 2.5MHz, los resultados de estos filtros se presentan en las imágenes de la figura 5.22. Las primeras imágenes superiores contienen el menor número de muestras y las imágenes inferiores las de mayor número de muestras; en este sentido podemos notar que para un menor número de muestras se puede apreciar con claridad tres cúmulos independientes, estos cúmulos se agrupan conforme incrementa el número de muestras. Este fenómeno es muy parecido al presentado anteriormente, pero que correspondían a puntos alejándose del jet. Estos fenómenos suceden para señales de alta frecuencia, para las señales de baja frecuencia se tiene un fenómeno completamente distinto, y el número de muestras está asociado con la cantidad de picos que aparecen en la imagen y; al parecer, la formación de espiras es proporcional al número de muestras.

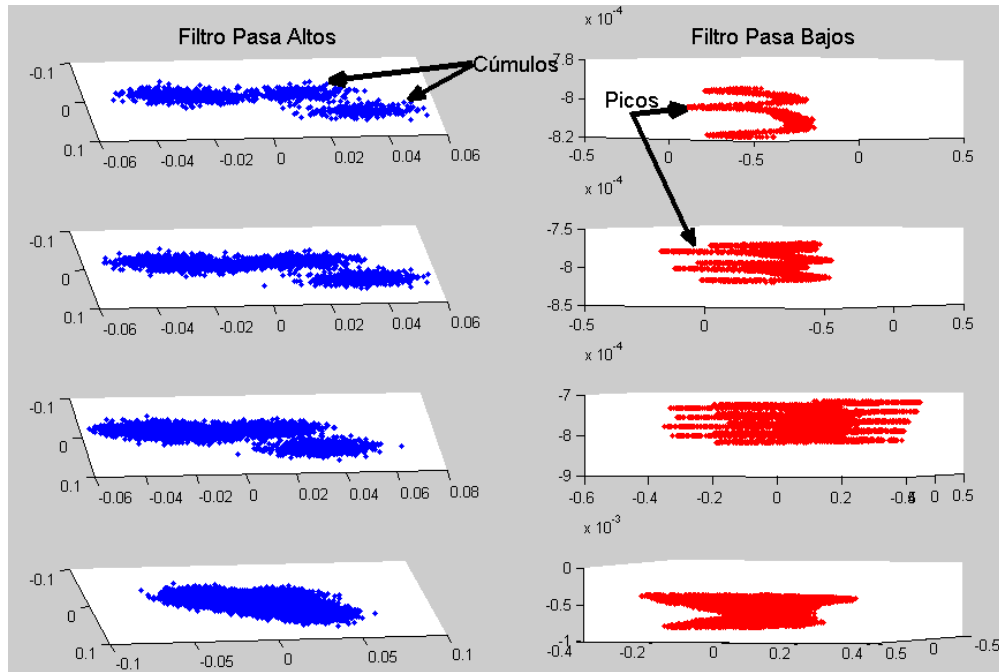


Figura 5.22.- Comportamiento de las señales con el número de muestras obtenidas por los filtros pasa bajos y pasa altos

La figura 5.22 muestra comportamientos en distintos puntos del jet y visualizados desde una vista superior. Los resultados en las señales de altas frecuencias muestran comportamientos interesantes, como presentado anteriormente. Otro de estos comportamientos que invitan a un desarrollo con mayor detalle el que se presenta en la figura 5.23. Aquí se muestra la imagen, desde un ángulo diferente al de la figura 5.22 con todas sus muestras. En esta imagen se puede observar con detalle los huecos que existen en algunas zonas de la señal. En un análisis cualitativo se observó que estos huecos fueran rellenados por la señal del filtro pasa bajos. Estos huecos se pueden observar con mayor claridad conforme se incrementa el número de muestras. Es muy importante mencionar que estos fenómenos son completamente distintos para distintas zonas del jet, su estructura cambia considerablemente según la posición, ángulo, y dirección de propagación.

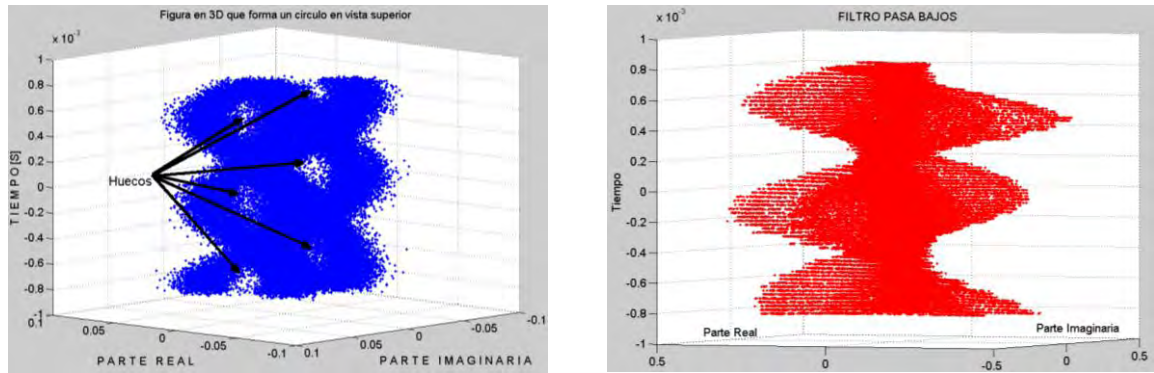


Figura 5.23.- Los huecos originados en las altas frecuencias es originado por las señales de baja frecuencia.

Los análisis presentados son similares a los que se hacen cuando se reconstruyen atractores a partir de señales experimentales. La posibilidad que da la computadora de ver desde diferentes ángulos y de girar las estructuras construidas, simplifica las técnicas de reconstrucción. Las vistas desde arriba, en las que algunos puntos permanecen en una región azul y de repente saltan a otra región azul recuerdan conceptos como los vuelos de Levy, esta teoría estudia fenómenos cuyo comportamiento es aleatorio con pocos puntos, y que conforme se incrementa el número de puntos, el fenómeno tiende a una distribución estable como la que se observó en las imágenes anteriores. Es prematuro sacar conclusiones, pero definitivamente se abre una nueva línea de investigación. ¿Encontrar la asociación de los picos con el comportamiento helicoidal de las imágenes podría explicar la producción de ondas acústicas?

La mayoría de los resultados presentados en este capítulo no habían sido reportados en trabajos anteriores. La aplicación de periodogramas a señales turbulentas ha abierto campos de investigación que requieren atención para un análisis detallado del fenómeno analizado en este trabajo. Otros de los resultados asientan precedentes para trabajos futuros.

Capítulo 6.- Conclusiones

Usted no puede esperar construir un mundo mejor sin mejorar a las personas. Cada uno de nosotros debe trabajar para su propia mejora.
Mari Curie

En este capítulo se presentará un resumen de todas las conclusiones del trabajo, organizadas en tres secciones: 1.- Montaje experimental y adquisición de señales. 2.- El estudio y análisis de herramientas de procesamiento y en particular el periodograma paramétrico de Burg y 3.- Análisis de señales provenientes de un jet supersónico.

6.1.- Montaje experimental y adquisición de señales

A pesar de que el sistema para hacer difusión Rayleigh se usaba desde el año 2000, en el Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias de la UNAM [5], era necesario hacer una revisión total del montaje experimental. Lo primero que se hizo en este trabajo, fue realizar el diseño y construcción del sistema mecánico de posicionamiento como de la tobera de la que sale el flujo.

La construcción y el diseño de una boquilla con una zona de tranquilización antes de pasar por la contracción han permitido asegurar un flujo que al pasar por la cámara de tranquilización con una malla reduce el nivel de turbulencia del aire.

El diseño y construcción de un sistema de posicionamiento más rígido en el que se redujo considerablemente el *backlash*, esto es, anteriormente cuando se realizaban los desplazamientos, verticales y horizontales del posicionador, se observaban ligeros “brincos” o desplazamientos no deseables dada la inestabilidad del sistema, estos “brincos”, aunque pequeños, proporcionaban un

error tal que difícilmente se podía asegurar la repetitividad del experimento en el mismo punto del jet. La rigidez del nuevo sistema disminuyó notablemente la incertidumbre de los desplazamientos y volvió al experimento repetible.

Los perfiles de los haces empleados en la difusión Rayleigh son medidos con un “perfilómetro” diseñado y construido durante el desarrollo del presente trabajo. Este consiste en un circuito que alimenta una fotoresistencia montada sobre un sistema de posicionamiento.

Originalmente se trabajaba con un analizador de espectro como el que se mencionó en el capítulo uno. Sin embargo, este tipo de instrumentos no permite elegir ni la frecuencia de muestreo, ni el número de muestras. Esto va en detrimento de la resolución en frecuencia y de la cantidad de ruido de la señal. En este experimento se adquirieron las señales, mostradas en capítulo cuatro y cinco, a través de un osciloscopio que sí permite estas maniobras, para ser tratadas en computadora posteriormente.

6.2.- Estudio y análisis de herramientas de procesamiento y en particular el periodograma paramétrico de Burg.

Es importante definir la resolución en frecuencia Δf antes de realizar la adquisición. Una vez adquirida la señal, es imposible mejorar esta resolución. Reflexionar sobre la resolución espectral antes y después de adquirir permite por un lado escoger las herramientas adecuadas para el procesamiento y por otro usarlas de manera eficiente.

El teorema de Nyquist no aporta un criterio suficiente para la adquisición correcta de una señal; y todas las herramientas de procesamiento dejan de ser eficientes ante una mala adquisición. Es imposible extraer componentes que se encuentran dentro de la resolución en frecuencia Δf .

Otro de los resultados importantes obtenidos a partir del análisis de la resolución en frecuencia es el de proporcionar el tamaño mínimo de una ventana. Las implicaciones de esto son considerables como se demostró en el capítulo III. El tamaño mínimo de una ventana se puede calcular mediante la siguiente relación

$$\Delta f \geq \frac{F_2 - F_1}{2}; \quad F_2 > F_1$$

Con esta ecuación es posible optimizar la frecuencia de muestro y el número de muestras que deba contener una señal. Una vez obtenido el valor de Δf se obtiene la discretización en el dominio de las frecuencias; por consiguiente se obtiene que el número de muestras necesarios para obtener la resolución en frecuencia adecuada, es

$$N \geq \frac{f_s}{\Delta f}$$

Está relación proporciona el número de muestras que debe tener la señal original. Es obvio que f_s debe cumplir con el teorema de Nyquist.

Se sabe que el ancho del lóbulo principal de una ventana da información sobre la distancia entre los dos tonos más cercanos que se pueden resolver, y que es posible tener menor o mayor resolución en frecuencia en una señal manipulando N y f_s . El tamaño más grande que puede tener una ventana es la señal total, y como se ha mostrado si la señal no ha sido adquirida con la resolución en frecuencia deseada no será posible obtener una mayor resolución en frecuencia.

La resolución en frecuencia de una señal es un concepto muy simple, pero su aplicación o consideración tiene consecuencias relevantes en técnicas actuales de procesamiento.

Considerar la resolución en frecuencia, Δf , antes de adquirir una señal, aumenta la resolución espectral al aplicar los periodogramas no paramétricos.

Con relación a los periodogramas paramétricos; la resolución en frecuencia proporcionó estabilidad a los métodos de predicción de parámetros AIC, FPE, MDL, figura 4.12. Sin la consideración de Δf (figura 4.8), existía ambigüedad en la determinación del número de parámetros y dependía de la experiencia del usuario combinada con el conocimiento previo de lo que se estaba buscando.

Finalmente, los resultados expuestos en el capítulo IV muestran una clara dependencia que existe entre la resolución en frecuencia Δf , y los métodos de predicción de parámetros. Es decir, la elección de una adecuada resolución en frecuencia permitió que los métodos de predicción de parámetros predijeran un amplio intervalo de estos, esto trajo como consecuencia que las variaciones del espectro de la señal fueran mínimas. Por lo consiguiente, la evaluación de la resolución en frecuencia antes de adquirir una determinada señal reduce la ambigüedad del uso de parámetros en los periodogramas paramétricos; y da certeza al uso de los métodos de predicción de parámetros, AIC (p), FPE (p), MDL (p).

Con los resultados obtenidos en las gráficas espectrales es posible concluir lo siguiente: Los métodos para la evaluación de parámetros deben depender de la frecuencia de muestreo y la resolución en frecuencia.

6.3.- Análisis de señales provenientes de un jet supersónico

El uso arbitrario del número de parámetros empleado en los periodogramas paramétricos para la obtención del espectro de las señales provenientes de la difusión Rayleigh, aplicado en el trabajo de maestría, generó algunas dudas. Parecía que uno podía manipular los resultados y encontrar lo que buscaba. Una vez optimizados los modelos de predicción de parámetros se eliminó esta arbitrariedad y se obtuvo una mejor resolución en frecuencia en el análisis espectral de las señales estudiadas. Se encontró un intervalo muy amplio de

parámetros sin que la forma del espectro cambiara considerablemente, figura 4.13. Esto no era posible en los espectros analizados en la tesis de maestría [1].

Una resolución en frecuencia Δf adecuada, permitió estudiar picos que no eran visibles con el analizador de espectros. Dado que la frecuencia del oscilador local es de 110 Mhz, según el criterio de Nyquist, la frecuencia de muestreo debía ser mayor a 220 Mhz y el aparato sistemáticamente usa 400 muestras lo cual daba una resolución en frecuencia de 550 kHz. Esto es insuficiente para distinguir entre el pico acústico y el entrópico. Para resolver el problema, primero se consideró desheterodinar electrónicamente a la señal. Al establecer claramente el problema de la resolución en frecuencia se decidió trabajar con la señal proveniente del detector directamente. Actualmente se resuelven adecuadamente ambos picos.

Además de un tercer pico no previsto llamado en este trabajo Mach-3C y que está relacionado con la estructura de choque (figura 5.3), hay un cuarto pico que aparece y desaparece, alrededor de 4MHz, y del cual no se tiene mayor información física sobre su comportamiento. Su persistencia en los espectros invita a un estudio más profundo.

Los picos Mach-3C, acústico y entrópico tienen un comportamiento espacial periódico a lo largo del eje central del chorro. (Figura 5.10)

La reconstrucción de los espectros experimentales con Gaussianas, permitió ver la interacción entre los fenómenos y explicó, entre otras cosas, por qué el pico acústico, que debería aparecer a una frecuencia constante, tiene una pequeña variación. Es decir, la posición en frecuencia y la amplitud de los picos, en los espectros experimentales, depende de la interacción entre ellos, figura 5.13.

Finalmente, al desheterodinar la señal, se obtuvieron dos señales con una diferencia de fase de 90 grados. Al graficarlas en función del tiempo, se obtuvieron unas formas helicoidales (figura 5.18). Estos helicoides varían de acuerdo al punto que se está estudiando y al ángulo de las fluctuaciones con respecto a la dirección

del flujo. Se estudiaron estas figuras haciendo pasar la señal por filtros pasa altos y pasa bajos para separar la parte acústica de la entrópica. Los resultados no son aun concluyentes pero abren una nueva línea de trabajo que seguramente se seguirá en el futuro.

Los cortes transversales de estos helicoides muestran cúmulos que recuerdan un comportamiento similar a los *vuelos de Levy*. Esta teoría predice que existen comportamientos aleatorios que tienden a ser estables. También se espera estudiar esto con más detalle en el futuro.

6.4.-Trabajo futuro

Las herramientas que se presentaron en este trabajo han abierto una posibilidad de estudiar con detalle las fluctuaciones de densidad mediante el análisis espectral evaluado con periodogramas de Burg. También se resolvieron varios problemas experimentales que no sólo ayudaron al entendimiento del fenómeno, sino además contribuyeron a una aplicación adecuada de las técnicas de adquisición.

6.4.1.-En el procesamiento

La experiencia, el aprendizaje y los hallazgos encontrados abren muchas líneas de investigación para trabajo a futuro:

- Dar una regla para una frecuencia de muestreo óptima.
- Estudiar y analizar los tipos de ventanas y su dependencia con la resolución en frecuencia Δf .

- Estudiar las mejoras de los periodogramas no paramétricos tomando en cuenta Δf
- Analizar y estudiar los periodogramas paramétricos, particularmente demostrar la estrecha relación que guarda Δf con las relaciones de los métodos de predicción de parámetros.
- Explorar los alcances en las herramientas de procesamiento cuando es considerada la resolución espectral.

6.4.1.-En un jet supersónico.

- Realizar un mayor mapeo a lo largo y ancho del jet.
- Estudiar los comportamientos ondulatorios, a lo largo y ancho del jet, de los picos presentados en este trabajo, incluyendo el cuarto pico que hasta este trabajo no se tenían reportes de su existencia.
- Continuar con la línea de investigación sobre la reconstrucción de los picos experimentales con Gaussianas.
 - Analizar con más detalle el comportamiento helicoidal de las señales temporales.
- Correlacionar los picos de los espectros experimentales y reconstruidos con la forma helicoidal.

Los resultados obtenidos amplían el entendimiento de los lóbulos asociados a las fluctuaciones de densidad de un jet supersónico.

Aunque no se estudiaron todos los puntos del chorro, ahora sí se tienen elementos seguros para hacerlo. Además se encontró una nueva manera, aún no explotada de estudiar las señales del chorro al desheterodinar electrónicamente y realizar una especie de diagrama de fase en función del tiempo presentadas en este trabajo, sección 5.4.

Bibliografía

1. **Alvarado M.** *Analisis Espectral de Señales Obtenidas a partir de Difusion Rayleigh*. s.l. : Tesis de Maestría. Facultad de Ingenieria UNAM, 2004, Mexico D.F.
2. **Parker R.** *Aeroacoustic*. s.l. : International Journal of Fluid Dynamics, Vol I, May 1997.
3. **Sanchez I.** *Estudio de un modelo de turbulencia compresible obtenido mediante técnicas de homogenización*. s.l. : Universidad de Sevilla, 2005, Sevilla España.
4. **Goldstein M.** *Aeroacustics*. s.l. : McGraw-Hill, 1976.
5. **Aguilar C.** *Diseño y construcción de un sistema de difusión Rayleigh para estudiar fluctuaciones de densidad en gases transparentes*. s.l. : Tesis de lic. Facultad de Ciencias UNAM, 2003, México D.F.
6. **C., Azpeitia.** *Estudio experimental no intrusivo de las fluctuaciones de densidad dentro de un jet turbulento*. s.l. : Tesis de Lic. Facultad de Ciencias UNAM, 2004, México D.F.
7. **Andreopoulos Y., Agui J., and Brassulis G.** *Shock Wave-Turbulence Interactions*. s.l. : Annu Rev Fluid Mech, pag. 309-345, 2000.
8. **Renliang X.** *Particle Characterization: Light Scattering Methods*. s.l. : Klower Academic Publishers, 2000, Norwell.
9. **Bogdanoff, D.** *Compressibility effects in turbulet shear layer*. s.l. : AAIA Journal, Vol 21, 1983.
10. **Stern C.** *Diffision Rayleigh Et Detetion Heterodyne Optique Application Aux Fluctuations Atmospheriques*. s.l. : Tesis Doc. L'Univeersite De Paris Sud Centre D'Osay, 1981, Paris Francia.
11. **Grésillon D., Stern C., Hémon A., Truc A. and Lehner T.,.** *Density Flutuation Measurement by Far Infrared Light Scattering*. s.l. : Physica Scripta, vol T2, pag. 459-466, 1982.
12. **A., Kharchenko.** *La diffusion de la lumière par les gaz : de la difussion incohérente à la diffision exacerbée application à la vélocimétrie*. s.l. : Tesis Doc. Uiversité L'École polytechnique, 2000, Paris Francia.
13. **Bonnet J., Grésillon D., Cabrit B. and Frolov V.,.** *Collective light scattering as non-particle laser velocimetry;*. s.l. : Meas. Sci. Technol, vol 6, pag. 620-636, 1995.

14. **Cummins Y.** *Localizad Fluid Flow Measurements whit an HeNe Laser Spectrometer.* s.l. : Applied Physics Letters, vol 4, num 10, May 1964.
15. **Foreman J., George E. and Lewis R.,.** *Mensurements of Localised Flow Velocities in Gases whit a Laser Doppler Flowmeter.* s.l. : Applied Physics Letters, vol 7, num 4, Aug 1965.
16. **Goldstain R.** *Fluid Mechanics Measurements.* s.l. : Taylor & Francis, ed. 2^a, 1996, E.U.
17. **García D.** *Sistema láser de medida de velocidades por efecto doppler de bajo coste para aplicaciones industriales e hidrodinámicas.* s.l. : Universidad Politécnica de Cataluña, Cataluña, 2005.
18. **Stern C., Aguilar C., Azpetia C., Alvarado M.,.** *Study of Mach Line and Acoustic Waves in a jet using Rayleigh Scattering .* s.l. : 43 Aerospace Sciences Meeting (AIAA), Jen 2005, Reno Nevada,.
19. **Grésillon D. and Cyril H.** *Optical Diagnostics for Flow Proceses.* s.l. : L. Lading Plenum Press, 1994, New York.
20. **Stern C., Alvarado M., and Aguilar C.** *"Density Measurements in a Supersonic Jet"*. s.l. : Journal of Mechanics of Materials and Structures, vol 2, pag. 1437-1448, 2007.
21. **Proakis J., Manolakis G., Dimintris G.,.** *Digital Signal Processing. Principles, Algorithms and Aplications,.* s.l. : Prentice Hall, ed. 3a, 1998.
22. **Burg J.** *Maximum entropy spectral analysis.* s.l. : In proc. 37th Meeting Society of Exploration Geophysicists, Oct 31, 1967, Oklahoma City, OK.
23. —. *New concepts in power spectral estimation.* s.l. : In Proc. 40th Annu. Int. Society of Extrplotation Geophysicists, 1970, Nov 11, New Orleans, L,A.
24. **Lacoss T., and Landers R.** *Some geophysicisal aplications of autoregressive spectral estimates.* s.l. : IEEE Trans. Geosci. Electron., vol GE-15, pp. 26-32, jan. 1977.
25. **Gibson J., Haykin S., and Kesler S.** *Maximum entropy (adaptive) filtering applied to radar clutter.* s.l. : IEEE int. conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp 166- 169, 1979.
26. **Giordano F., and Hsu A.,.** *Line Tracking using autoregressive spectral estimates.* s.l. : IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process. Vol ASSP-25, pp. 510-519, Dec 1977.

27. **Hsu M.** *Maximum entropy principle and its application to spectral analysis and image reconstruction.* s.l. : Ph. D. Dissertation, Ohio State Univ. 1975.
28. **Moorcoft D.** *Maximum entropy spectral analysis of radio-auroral signals.* s.l. : Department of Physics and Centre for Radio Science, London Ontario, Canada.
29. **D'Addario S., and Wernecke L.,.** *Maximum entropy image reconstruction.* s.l. : IEEE Trans. Comput., Vol. C-22, pp. 351-364, Apr. 1977.
30. **Hovem S., and Holm J.,.** *Estimation of scalar ocean wave spectra by the maximum entropy method.* s.l. : IEEE. J. Ocean. Eng. Vol. OE-4, pp 76-83, July 1979.
31. **Kay S., and Lawrence S.,.** *Spectrum Analysis- An Modern Perspective.* s.l. : Proceeding of the IEEE, vol 69, num 11, Nov 1981.
32. **Stern C., Alvarado M., and Aguilar C.,.** *"Density Measurements in a Supersonic Jet"*. s.l. : Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2007. págs. 1437-1448. Vol. 2 .
33. **Monic A., Yaglom A.,.** *Statistical Fluid Mechanics.* s.l. : MIT Press, 1987.
34. **Boa-Tech C., Leslie S.** *Non-linear Interactions in a Viscous Heat-Conducting Compressible Gas.* s.l. : Journal of Fluid Mechanics, vol 3, num 5, pag. 494-514, 1958.
35. **Cummins H., & Swinney H.,.** *Observation of diffusion broadening of Rayleigh scattered light.* s.l. : Physical Review Letters, 1964. págs. 150-153. Vol. 12.
36. **Hecht E.** *Optics.* s.l. : Addison Wesley.
37. **Jackson J.** *Classical Electrodynamics,.* s.l. : John Wiley and Sons, 1998. pag. cap. 9.
38. **Grésillon D., Stern C., Hémon A., Truc A., Lehner T.,.** *Density Flutuacion Measurement by Far Infrared Light Scattering.* s.l. : Physica Scripta, vol T2, num 2, pag, 459-466, 1982,.
39. **Gresillon D., Cabrit B., Villain J., Hanuise C.,.** *Collective Scattering of Electromagnetic Wave and Cross-B Plasma Diffusion.* s.l. : Conf. on Plasma Physicas, Innsbrück, Julio 1992, Plasma Physics and Controlled Fusion, pag. 34, 1992.
40. **Li H., Kogelnik T.,.** *Laser Beams and Resonators.* s.l. : Applied Optics, vol 5, num 10, October 1966,.

41. **Papamoschou D., Roshko A.,** *The Compressible Turbulent Shear Layer an Experimental Study*. s.l. : Journal Fluid Mechanics, vol 197, pag 453-477, 1988.
42. **Therrien C.** *Discrete Random Signal and Statistical Signal Processing*. s.l. : Prentice Hall Signal Processing Series., 1992.
43. **Kay S.** *Modern Spectral Estimation. Theory & Application*,. 4^a . s.l. : Signal Processing Series, Prentice Hall, 1988.
44. **Ifeachor E.** *Digital Signal Processing: A Practical Approach*. s.l. : Prentice Hall, 2002, E.U.
45. **Cavicchi T.** *Digital signal processing*. s.l. : Jhon Wiley, 2000.
46. **Breipohl K., ShanmuganS.,** *Random Signal : Detection, Estimation and Data Analysis*. s.l. : John Wiley & Sons, 1988,.
47. **Kay S., Petar M., Djurić M.,** *Order Selection of Autoregressive Models*. s.l. : IEEE Transactions on Signal Processing, vol 40, num 11, nov 1992.,.
48. **Shiavi R.** *Applied Statistical Signal Analysis*. s.l. : Academic Press, 1999, E.U.
49. **Papoulis, A.** *Minimum-bias windows for high-resolution spectral estimates*. s.l. : Information Theory, IEEE Transactions on, vol 19, num 1, pag. 9- 12, Jan 1973.
50. **Kay S.** *The Effect of Sampling Rate on Autocorrelation Estimation*. s.l. : IEEE Trans on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. ASSP-29, num 4, Aug 1981.
51. **Piet M., and Stinj.** *Windowed Periodograms and Moving Average Model*. s.l. : Dep. of Applied Physics, Delft University of Technology, .
52. **Bernstein D.** *The Frequency Domain*. s.l. : IEEE Control Systems Magazine, April 2000.
53. **Lyons R.** *Understand Digital Signal Processing*. s.l. : Eddison Wesley, 1997, E.U.
54. **Ashok A.** *Analog and Digital Signal Processing*. s.l. : An International Thomson Publishing Company, ed 3, 1995.
55. **Mitra S.** *Digital signal processing :a computer-based approach*,. s.l. : McGraw-Hill, 2006, Boston.
56. **Smith S.** *Digital signal processing :a practical guide for engineers and scientists*,. s.l. : Newne, 2003.

57. **Meade C., Dillon M.,** *Señales y sistemas. Modelos y comportamientos.* s.l. : Addison Wesley Iberoamericana, 1993.
58. **Kuo S.** *Real-time digital signal processing :implementations and applications,* s.l. : Jhon. Wiley, 2006.
59. **Oppenheim A.** *Discrete-time signal processing.* s.l. : Prentice Hall, 1999.
60. **Enochson and Olnes.** *Digital Time Series Analysis.* s.l. : John Wiley & Sons, 1972, New York.
61. **Khan A.** *Digital signal processing fundamentals.* s.l. : Massachusetts Da Vinci Engineering, 2005.
62. **Quatieri F., Thomas F.,** *Discrete-time speech signal processing :principles and practice,* s.l. : Prentice Hall, 2002.
63. **Harris F.** *On the Use of Windows for Harmonic Analysis Whith the Discrete Fourier Transform.* s.l. : Proceedings of the IEEE, vol 66, num 1, Jen 1978.
64. **Farge M.** *Wavelet Transforms and Their Applications to Turbulence.* s.l. : Annu. Rev. Fluid Mech, vol 24, 1992.