



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**BUSQUEDA DE REGIONES ESTABLES PARA  
DISCOS DE ACRECIÓN Y PLANETARIOS EN  
SISTEMAS BINARIOS EXCÉNTRICOS CON RAZÓN  
DE MASA EXTREMA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO**

**P R E S E N T A:**

**FEDERICO GABINO GUTIÉRREZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DRA. BÁRBARA SELÉN PICHARDO SILVA  
2010**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS  
Secretaría General  
División de Estudios Profesionales

Votos Aprobatorios

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ  
Jefe de la División de Estudios Profesionales  
Facultad de Ciencias  
P r e s e n t e

Por este medio hacemos de su conocimiento que hemos revisado el trabajo escrito titulado:

**Busqueda de regiones estables para discos de acreción y planetarios en sistemas binarios excéntricos con razón de masa extrema**

realizado por **Gabino Gutiérrez Federico** con número de cuenta **0-9131102-1** quien ha decidido titularse mediante la opción de **tesis** en la licenciatura en **Física**. Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

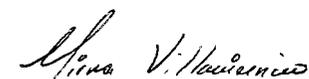
- Propietario    Dr. Héctor Octavio Murrieta Sánchez 
- Propietario    Dr. Antonio Peimbert Torres 
- Propietario    Dra. Barbara Selen Pichardo Silva 
- Tutora
- Suplente       M. en C. Raúl Arturo Espejel Morales 
- Suplente       M. en C. Jesús Armando Lara Velázquez 

Atentamente,

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Ciudad Universitaria, D. F., a 15 de junio de 2011

EL COORDINADOR DEL COMITÉ ACADÉMICO DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA





M. EN C. MIRNA VILLAVICENCIO TORRES  
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE CIENCIAS

Señor sinodal: antes de firmar este documento, solicite al estudiante que le muestre la versión digital de su trabajo y verifique que la misma incluya todas las observaciones y correcciones que usted hizo sobre el mismo.

# Agradecimientos

Agradezco a mis padres por el apoyo para terminar con éxito esta etapa de mi vida.

Agradezco a la Dra. Barbara S. Pichardo por su apoyo y asesoría para concluir con éxito este trabajo.

Agradezco al Dr. Luis Aguilar por su asesoría para la elaboración de este trabajo.

Agradezco al Instituto de Astronomía, UNAM, por el apoyo brindado para el uso de sus instalaciones.

Especialmente agradezco a Francisco por sus consejos y las muchas horas de charla, que me ayudaron a salir adelante y a escribir esta tesis. Gracias por estar y formar parte de mis amigos.

Agradezco a Violeta por el tiempo que me dedico y que estuvo junto a mi animandome y apoyandome para seguir. Gracias por ese empujón en el momento adecuado.

Finalmente agradezco a todas las personas que han estado en mi vida, ayudandome a ser mejor cada día, con un consejo, unas palabras de aliento o simplemente con una llamada de atención.

Gracias a todos, gracias por compartir su tiempo.

# Índice general

Agradecimientos	1
1. Resumen	1
<b>I CONCEPTOS INTRODUCTORIOS</b>	<b>3</b>
2. Introducción	5
2.1. Estrellas Binarias (observaciones)	6
2.1.1. Clasificación de Estrellas Binarias	7
2.1.2. Binarias en la Vía Láctea	13
2.2. Discos en estrellas binarias	13
2.2.1. Discos de acreción (gas y polvo)	14
2.2.2. Discos de escombros ( <i>Debris Disks</i> )	14
<b>II FUNDAMENTOS FÍSICOS Y METODOLOGIA</b>	<b>17</b>
3. Fundamentos Físicos	19
3.1. Conceptos preliminares de sistemas binarios	19
3.2. El problema de dos cuerpos simplificado	20
3.3. El problema de Kepler	21
3.3.1. Evolución en el tiempo del problema de Kepler	26
4. El método y su implementación	31
4.1. Los “Lazos Invariantes” ( <i>Invariant Loops</i> )	31

4.2. El código . . . . .	34
<b>III RESULTADOS</b>	<b>37</b>
<b>5. Mapeo de los Discos con Lazos Invariantes</b>	<b>39</b>
5.1. Tabla de Casos Calculados . . . . .	39
5.2. El Mapeo de los Discos . . . . .	40
5.2.1. Discos Circumbinarios . . . . .	42
5.2.2. Discos Circumprimarios . . . . .	49
<b>6. Aplicación del Método a Observaciones</b>	<b>57</b>
6.1. Sistema Sol-Júpiter . . . . .	57
6.2. Fomalhaut ( <i>Debris disk</i> ) . . . . .	59
<b>7. Conclusiones</b>	<b>63</b>
7.1. Trabajo a futuro . . . . .	64
<b>IV APÉNDICE</b>	<b>67</b>
A. Mapas de los Lazos invariantes	69
<b>Bibliografía</b>	<b>141</b>

# Capítulo 1

## Resumen

En el presente estudio se identifican las regiones orbitales estables en sistemas estelares binarios excéntricos con razón de masa extrema, es decir,  $q = m_2/(m_1 + m_2) \leq 0.1$ , donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas del objeto primario (o más masivo) y del secundario, respectivamente. El objeto secundario de la binaria va entonces desde una masa correspondiente a una estrella pequeña hasta fracciones de masa de planetas gigantes (como Urano).

El caso de binarias con órbitas circulares se ha estudiado profusamente en la literatura debido a que tiene una solución analítica relativamente simple. Sin embargo la mayoría de los sistemas binarios (e incluso los planetas observados hasta el momento) son excéntricos. En este caso, el sistema físico resulta considerablemente más complicado porque no existe un sistema de referencia en el que el sistema sea invariante en el tiempo. Para este caso, sin embargo, existe un método conocido en la literatura como “*Invariant loops*” (que traduciremos de aquí en adelante como “lazos invariantes”). Este método se basa en la solución al problema de tres cuerpos restringido y las leyes de Kepler para binarias (Pichardo et al. 2005, 2008) y ha sido aplicado previamente para el problema de estrellas binarias con razón de masa entre 0.1 y 0.5. De ese trabajo se obtuvo un buen ajuste que describe el comportamiento de las regiones de estabilidad para discos en estrellas binarias.

En general, incluso los trabajos que han estudiado los casos de alta excentricidad, sólo lo hacen para razones de masa alta ( $q \geq 0.1$ ), esto es, para casos donde las componentes de la binaria tienen masas más parecidas. En este trabajo, aplicaremos este

método al estudio de masas extremas de una forma que no se ha realizado antes en la literatura de astronomía.

Para este estudio se tomaron 70 casos teóricos barriendo el espacio de parámetros ( $e$  y  $q$ ), para los cuales se encontraron las regiones orbitales estables. Las regiones estables se dividen en las binarias en los llamados discos circunestelares (circumprimario y circunsecundario) y los circumbinarios. Para los propósitos de este trabajo se consideran sólo los discos circumprimarios y circumbinarios. El disco circunsecundario no se considera debido a sus dimensiones minúsculas relativas a los otros dos discos (los discos circunsecundarios son el equivalente a los anillos de Saturno, por ejemplo, en el caso de la binaria Sol-Saturno, que los haría imposibles de observar con las técnicas actuales).

Además de la construcción de familias orbitales estables (el análogo de las órbitas periódicas en sistemas conservativos) que son nuevas en la literatura científica para estas excentricidades y razones de masa, en este trabajo se encontraron comportamientos muy diferentes a los que se tenía referencia en estudios anteriores de binarias o completamente nuevos, como son las familias de lazos que parten de la misma posición a diferentes velocidades, es decir, bifurcación de las familias orbitales, lazos de formas complicadas, sensibilidad extrema a los parámetros orbitales de la binaria, entre otros. Se estudia con detalle la forma en la que la razón de masa y la excentricidad influyen para la estabilidad, además de encontrar regiones de acumulación de lazos donde el material podría aglomerarse y, dependiendo de las condiciones del gas, donde se podría dar la formación de planetas.

Finalmente, este trabajo es el primer paso para una formulación analítica que permitirá proporcionar el tamaño de los discos a partir de sus parámetros orbitales ( $e$  y  $q$ ) que no existe para el caso general excéntrico con razones de masa extremas en la literatura actualmente. Asimismo, esta formulación (así como las imágenes en el apéndice de esta tesis) permitirán su aplicación a sistemas reales con parámetros conocidos observacionalmente, o viceversa, a partir de las características de los discos seremos capaces de acotar el espacio de parámetros disponible para el sistema binario. De la misma forma, este estudio teórico podrá facilitar la búsqueda de planetas en otras estrellas acotando el espacio para órbitas estables.

# Parte I

## CONCEPTOS INTRODUCTORIOS



# Capítulo 2

## Introducción

Actualmente se conoce que alrededor del 70% de las estrellas en la Vía Láctea se encuentran en sistemas múltiples, preferentemente binarios, que representan la configuración más estable dinámicamente de los sistemas estelares múltiples de pocos cuerpos. Por otra parte se sabe también que casi todas las estrellas binarias con periodos mayores a 11 días son excéntricas (Duquennoy y Mayor 1991).

Por su simplicidad, la mayoría de los estudios en binarias se han enfocado principalmente al caso de órbitas circulares (Duquennoy y Mayor 1991; Lubow y Shu 1975; Paczyński 1977; Papaloizou y Pringle 1977; Bonnell y Bastien 1992; Bate 1997; Bate y Bonnell 1997; Pichardo y Nagel 2008). De la misma forma, los estudios sobre binarias están en su mayoría centrados en razones de masa grandes (si definimos  $q = m_2/(m_1+m_2)$ , donde  $m_1, m_2$  son las masas de la estrella primaria y secundaria respectivamente, “razón de masa grande”, se refiere a  $q > 0.1$ ), esto es, binarias donde los cuerpos son estrellas.

Aunque se han atacado con diferentes métodos casos específicos donde las binarias no son circulares, los tres trabajos más generales en este contexto, donde se ha hecho el esfuerzo de medir el tamaño de los discos alrededor de estrellas binarias sin restricción en la excentricidad de la binaria son Artimowicz y Lubow (1994) y Pichardo et al. (2005,2008). En los trabajos de Pichardo et al. presenta además estructuras invariantes, análogas a órbitas periódicas en potenciales estacionarios (Pichardo et al. 2005,2008).

Utilizando la técnica introducida por Pichardo et al. (2005), se presenta en esta tesis un estudio nuevo en la literatura científica en el tema de binarias que se refiere al caso general en excentricidad, y con razones de masa extremas, esto es  $q < 0.1$ , desde

estrellas de masa con la décima parte de la masa de la estrella primaria del sistema, hasta planetas.

Comenzaremos con una descripción breve del concepto astrofísico observacional de *estrellas binarias*.

## 2.1. Estrellas Binarias (observaciones)

Es común ver en el cielo dos estrellas que aparentemente están muy cerca una de otra. Algunas de estas binarias aparentes están en realidad separadas por grandes distancias, pero muchos de estos pares de estrellas, por otra parte, forman realmente sistemas físicos autogravitantes en los cuales las estrellas orbitan alrededor de un centro de masa común (Figura 2.1).

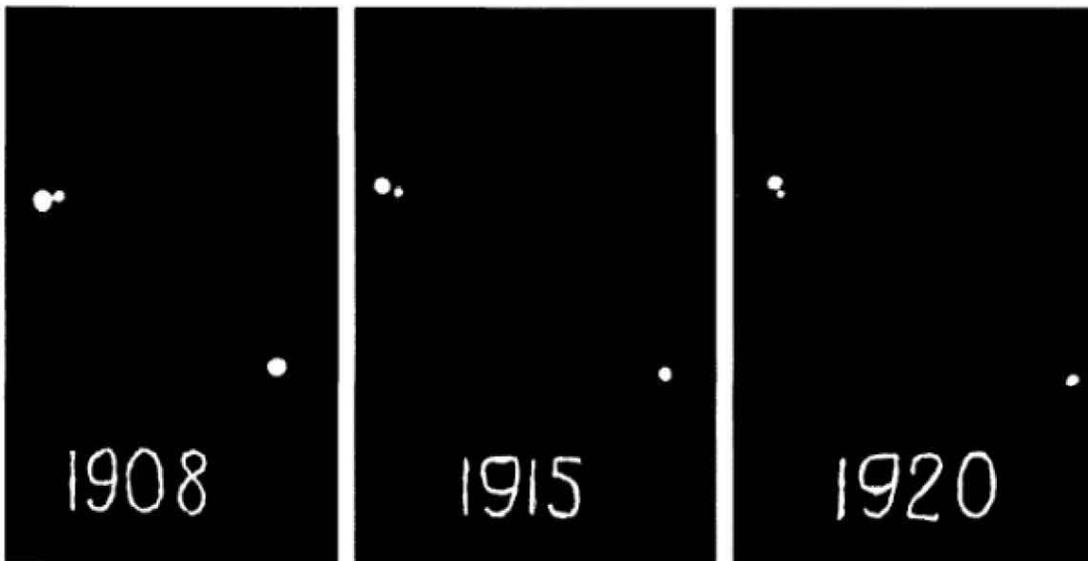


FIGURA 2.1: Binaria observada por un tiempo largo el que se ve el movimiento de una alrededor de la otra (Estrella Krüger 60, Yerdes Observatory).

Contrario a lo que nuestra propia experiencia indicaría, esto es, que las estrellas solitarias como el Sol son comunes, se ha encontrado que mucho menos de la mitad de las estrellas tipo solar son estrellas individuales. Aproximadamente el 70% de las

estrellas están en sistemas múltiples, siendo los sistemas binarios por su estabilidad orbital la gran mayoría de las estrellas llamadas múltiples (Duquenois y Mayor 1991).

Las binarias se clasifican según el método con el que fueron descubiertas. También pueden ser clasificadas con base en su separación. En binarias distantes la separación entre componentes son de decenas a cientos de unidades astronómicas y sus periodos orbitales son de decenas a miles de años. En binarias cercanas la separación va desde radios estelares hasta unas cuantas Unidades Astronómicas. El periodo orbital en éstas va de unas horas a algunos años. Las componentes de este tipo de estrellas binarias pueden ser tan cercanas que llegan a tocarse entre ellas, conocidas como “binarias de contacto”.

### 2.1.1. Clasificación de Estrellas Binarias

#### Binarias Visuales

Una estrella binaria visual es una binaria para la que la separación angular entre las componentes es suficientemente grande para permitir su observación con telescopios, esto significa que mejores telescopios nos permiten descubrir cada día más binarias visuales. La separación de las estrellas y las órbitas pueden ser calculadas directamente haciendo uso de observaciones de algunos años o décadas. La primera órbita binaria que se determinó de esta forma fue  $\xi$  UMa en 1830 (Figura 2.2).

Debido a que la observación de binarias visuales sólo da la proyección de las órbitas en el plano celeste, la forma y posición de la órbita verdadera no se conoce. Sin embargo, podemos calcularla si se hace uso del hecho de que la estrella primaria se encuentra en uno de los focos de la órbita relativa. La desviación de la órbita relativa proyectada permite determinar aproximadamente la orientación de la verdadera órbita.

El tamaño absoluto de la órbita sólo puede ser determinado si la distancia a la binaria se conoce y con esto, la masa total del sistema puede ser calculada con la tercera ley de Kepler.

Por otra parte, la masa de las componentes individuales se puede determinar observando el movimiento relativo respecto al centro de masa de las dos componentes. De la definición de centro de masa

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad (2.1)$$

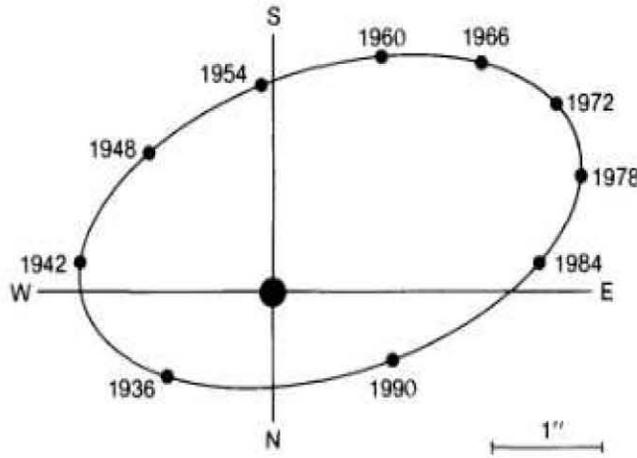


FIGURA 2.2: Posición relativa de la estrella secundaria alrededor de la estrella  $\xi$  Ursae Majoris a través de los años, en 1830 se determina la órbita teórica correspondiente al objeto.

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas. El semi eje mayor de la órbita relativa es

$$a = a_1 + a_2, \tag{2.2}$$

por ejemplo la masa de las componentes de  $\xi$  UMa resultarían en 1.3 y 1.0  $M_{\odot}$ .

### Binarias Astrométricas

En las binarias astrométricas sólo la órbita alrededor del centro de masa de la componente más brillante puede ser observada. Si se estima la masa de la componente más brillante, la masa de la componente invisible también puede ser estimada.

La primera binaria astrométrica descubierta fue Sirio, que desde los años 30 notaron los astrónomos de la época que mostraba un movimiento ondulatorio, lo cual se explicó con la presencia de una compañera que tenía que ser muy pequeña (porque era invisible) pero muy masiva dado el efecto gravitacional en la gigante *Sirius A*. La compañera se descubrió visualmente algunas décadas después (Figura 2.3). La compañera, *Sirius B*, resultó un tipo de objeto completamene nuevo, una enana blanca.

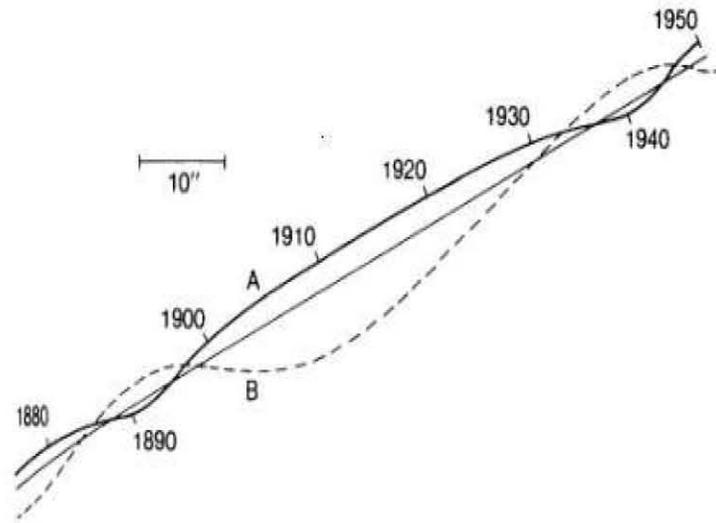


FIGURA 2.3: Los caminos aparentes de Sirio y su compañera en el cielo.

### Binarias Espectroscópicas

Las binarias espectroscópicas (e.g. Figura 2.4) dan la apariencia de una estrella individual, incluso con los telescopios más potentes, pero su espectro muestra una variación regular. La primera binaria espectroscópica descubierta fue en los años 80, en que se observaron las líneas espectrales de  $\zeta$  UMa (Mizar) que se dividían en dos intervalos regulares.



FIGURA 2.4: Espectro de la binaria espectroscópica  $k$  Arietis. En el espectro inferior las líneas espectrales son simples, en el superior son dobles.

En este tipo de binarias el efecto doppler es fundamental, este proporciona las líneas espectrales que son directamente proporcionales a la velocidad radial. Así la separación

de las líneas espectrales es máxima cuando una de las componentes se acerca directamente y la otra se aleja del observador. El periodo de variación es el mismo que el periodo orbital de las estrellas.

### Binarias Fotométricas

En las binarias fotométricas, los movimientos de las componentes de la binaria producen una variación periódica en el brillo total. Usualmente las binarias fotométricas son binarias eclipsantes, esto es, la variación del brillo se debe al paso de una de las componentes frente a la otra. La temperatura de la superficie, también es menor en el final de las protuberancias de marea, juntos estos factores causan una pequeña variación en el brillo.

La inclinación de la órbita de una binaria eclipsante puede ser muy cerrada a  $90^\circ$ . Estos son los casos de binarias espectroscópicas para las cuales la inclinación y las masas se pueden determinar unequivocamente.

La variación de la magnitud de las binarias eclipsantes es una función del tiempo conocida como “la curva de luz”. De acuerdo a la variación de la curva de luz estas se dividen en 3 grupos: Algol,  $\beta$  Lyrae y *W Ursae Majoris* (Fig. 2.5).

*Estrellas Algol.* Las variables eclipsantes de tipo Algol, también llamadas  $\beta$  Persei tienen una curva de luz casi constante. Esto corresponde a la fases durante las cuales las estrellas se ven separadas una de la otra y la magnitud total permanece constante. Estas tienen dos mínimos diferentes en la curva de luz, uno corresponde al mínimo primario, el cual es usualmente más profundo que el otro, esto es por la diferencia de brillo entre las dos estrellas. Cuando la estrella mayor, usualmente una gigante fría, eclipsa a la pequeña y caliente, esto da el mínimo profundo en la curva de luz. Cuando la pequeña estrella brillante pasa a través del disco de la gigante, la magnitud total del sistema cambia muy poco, (Figura 2.5 a). La forma de los mínimos depende de si los eclipses son totales o parciales. En un eclipse parcial la curva de luz cambia suavemente dependiendo de cómo varía el eclipse. En un eclipse total existe un intervalo en el cual una de las componentes es completamente invisible, el brillo total es constante y la curva de luz tiene un fondo mínimo plano.

Adicionalmente, la forma de los mínimos en las variables tipo Algol nos da información de la inclinación de la órbita. La duración del mínimo depende de los radios de

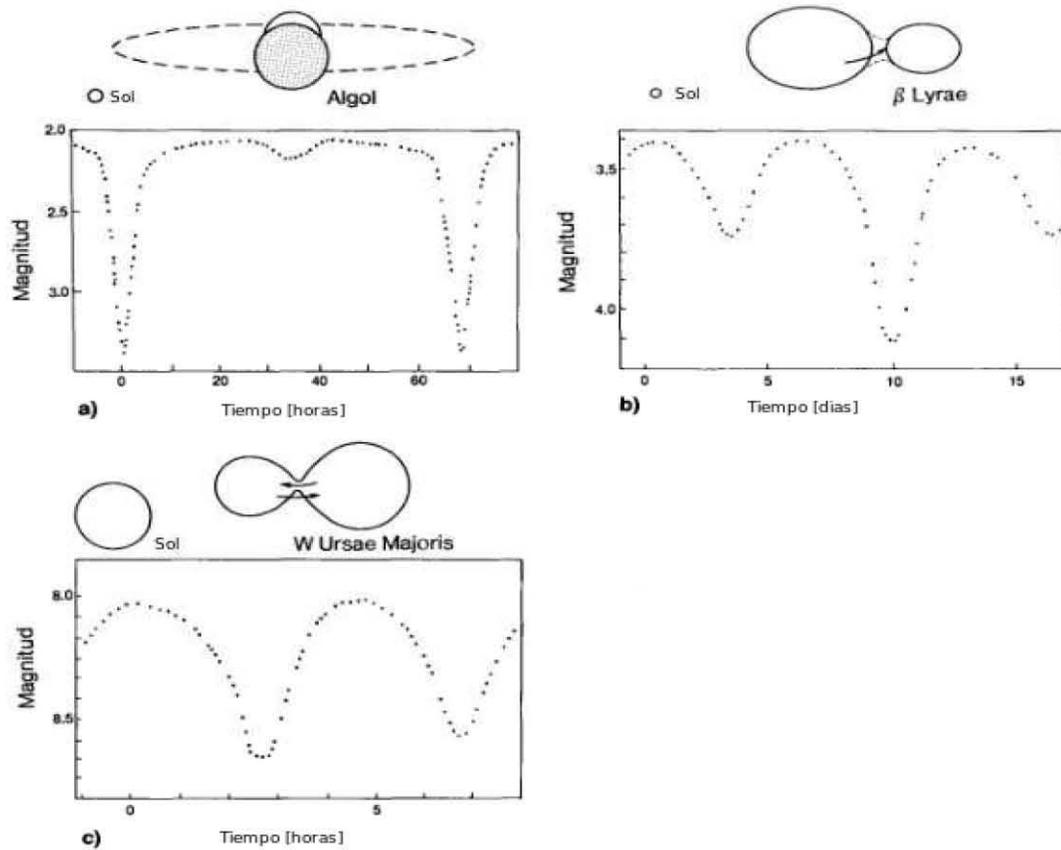


FIGURA 2.5: Curvas típicas de luz y figuras esquemáticas para sistemas binarios tipo Algol,  $\beta$  Lyrae and W Ursae Majoris. El tamaño del Sol se muestra en comparación.

las estrellas y del tamaño de la órbita. Si la estrella además es una binaria espectroscópica, el verdadero tamaño de la órbita puede ser obtenido. En este caso las masas y el tamaño de la órbita, y sus radios pueden ser determinados aún sin conocer la distancia del sistema.

*Estrellas  $\beta$  Lyrae* Dentro de las Binarias tipo  $\beta$  Lyrae, la magnitud total varía continuamente. Las estrellas están tan cerca una de otra que una de ellas tiene forma elipsoidal. Sus brillos varían aún cuando no están en eclipse. Las variables de  $\beta$  Lyrae pueden ser descritas como variables elipsoidales eclipsantes. En el propio sistema  $\beta$  Lyrae, una de las estrellas llena su lóbulo de Roche y cede constantemente masa a su compañera. La masa transferida nos da características adicionales en la curva de luz.

(Figura 2.5 b).

*Estrellas W UMa.* En las estrellas tipo W UMa, los mínimos de la curva de luz son idénticos, muy redondos y amplios. Este es un sistema binario cercano en el que ambas componentes llenan su lóbulo de Roche, formando un sistema binario de contacto. (Figura 2.5 c).

La observación de las curvas de luz de las binarias fotométricas puede contener mucha información adicional que en muchos casos nos dice parámetros adicionales a través de los que es posible confundir la clasificación, estos pueden ser:

- La forma de la estrella puede estar distorsionada por la fuerza de marea de la compañera. La estrella puede ser elipsoidal o llenar su superficie de Roche, en cuyo caso ésta toma una forma de caída.
- En estrellas alargadas hay oscurecimiento gravitacional: la parte más alejada del centro es más fría y radía menos energía.
- El oscurecimiento al limbo de la estrella puede ser considerable. Si la radiación del borde del disco estelar es más suave que la del centro, tiende a redondear la curva de luz.
- Si las estrellas están cercanas, puede haber fenómenos de reflexión en estrellas, éstas se calentarán en la parte donde está una frente a la otra. La parte más caliente de la superficie será más brillante.
- En sistemas con transferencia de masa, el material cae en una de las componentes cambiando la temperatura de la superficie.

Todos estos efectos adicionales causan dificultades en la interpretación de la curva de luz. Por lo general uno calcula un modelo teórico y su correspondiente curva de luz, la cual es comparada con las observaciones. El modelo es iterado hasta una aproximación satisfactoria.

Hasta hace poco se habían preocupado los astrónomos exclusivamente de las propiedades de los sistemas binarios en el dominio óptico. Recientemente se han descubierto muchos sistemas binarios que emiten en diversas longitudes de onda. Particularmente centrando el interés en pulsares binarios. Sin embargo, por ejemplo, muchos tipos de binarias diferentes han sido descubiertas en emisión de rayos X.

Cabe mencionar que las estrellas binarias son las únicas estrellas de las que se conoce con precisión la masa debido a sus características orbitales. Incluso, las masas de las

estrellas individuales se estiman con la relación masa-luminosidad, pero ésto se calibra por medio de observaciones de binarias.

### 2.1.2. Binarias en la Vía Láctea

Los estudios para determinar la abundancia de sistemas binarios se centran en las estrellas vecinas al Sol, para las cuales la calidad de los datos permite la detección de masas pequeñas con separaciones pequeñas. Abt & Levy (1976) examinaron 135 binarias espectroscópicas de tipo solar. Incluyeron binarias visuales y de movimiento propio común para determinar el número total de sistemas binarios. Aunque el estudio fue reconsiderado y algunas de las binarias aparentes fueron eliminadas por diferentes causas, las conclusiones generales no cambiaron. Abt & Levy encontraron que el 58 % de las estrellas G enanas primarias, tienen una compañera.

En el estudio realizado por Duquenoy & Mayor (1991) determinan que el 57% de las estrellas tipo solar en la vecindad solar tienen una compañera con razones de masas de  $M_2/M_1 > 0.1$ .

Al completar las observaciones se llega a la conclusión de que más del 72 % de las estrellas están en sistemas binarios o sistemas múltiples (Fischer & Marcy, 1992).

## 2.2. Discos en estrellas binarias

Los Discos en las estrellas binarias han atraído la atención recientemente debido primero a su gran abundancia y a los efectos de la interacción gravitacional sobre la morfología de los discos, de los cuales el que guarda más misterios es el disco circumbinario, ésto debido a su baja densidad que lo hace extremadamente difícil de observar. Su importancia radica también en la frecuencia con que se encuentran en sistemas binarios, especialmente con razones de masa muy pequeña.

A través de las observaciones se han encontrado muchos sistemas en los cuales se pueden observar discos alrededor de las estrellas, un ejemplo de esto es nuestro propio sistema solar, en el que el cinturón de Kuiper, que está formado por escombros de la formación del Sol, es un disco circumbinario que se localiza más allá de Neptuno, constituido por un gran número de objetos pequeños, descubierto en 1992 (Luu y Jewitt

2002).

### 2.2.1. Discos de acreción (gas y polvo)

Los discos de acreción son fenómenos muy comunes (Papaloizou y Lin 1995), éstos son la materia prima para los sistemas planetarios en formación y el medio por el cual se da la transferencia de masa en la interacción de la binaria, las características intrínsecas de estos discos juegan un papel preponderante para la formación de planetas, estrella y galaxias (Lin y Papaloizou 1996).

Hay muchos de estos discos, como los de las estrella NGCs 7538 S (Sandell y Wright 2010), HR4796A (Jane y Jewitt 2002) y  $\beta$  Pic (Papaloizou y Lin 1995).

En la mayoría de los casos la escala asociada a la región donde la materia se acumula es mucho mayor que la de los objetos centrales. Después de que una nube de gas se colapsa se da un disco en equilibrio que seguirá creciendo en masa a través de la acumulación directa de la nube de material que cae, pero al núcleo solo cae el material del disco que tiene relativamente un bajo momento angular específico, el resto del material que no cae es parte de un disco que queda atado gravitacionalmente alrededor del núcleo (Tohline 2002).

La presencia de objetos compañeros orbitando cerca de los discos de acreción es común en variables cataclísmicas, CVs (*cataclismic variables*) y objetos estelares jóvenes, YSOs (*young stellar objects*) (Lin y Papaloizou 1996).

### 2.2.2. Discos de escombros (*Debris Disks*)

Estos discos están formados por polvo y escombros, producidos por colisiones entre protoplanetas o material primordial que no formó planetas.

La estructura de estos discos está definida por diversos fenómenos como son la transferencia de momento angular, vientos e inestabilidades hidromagnéticas (Papaloizou 1995) entre otros. El de mayor importancia es la interacción gravitacional del sistema.

La acreción de gas y polvo tienen un papel muy importante no sólo en la formación de planetas, estrellas o galaxias, sino también en la evolución de las estrellas binarias y en los núcleos activos de las galaxias.

La búsqueda de sistemas planetarios y discos de polvo es relativamente nueva, sólo son conocidos algunos discos de escombros alrededor de estrellas tipo M, se han encontrado algunos de estos discos como por ejemplo, en la cercanía de la enana M AU Mic, donde se observa claramente un disco de escombros, con radio entre 50 y 210 UA. También en GI 842.2 se observa un disco a una distancia  $\sim 300$  UA y a GI 182 se le encontró uno a 120 UA (Shanklamd et al. 2008).

Un ejemplo muy representativo de este tipo de discos se encuentra en el sistema Fomalhaut, este sistema aunque no es una estrella binaria, la estrella tiene un planeta compañero muy masivo, que hace que el sistema tenga un comportamiento como el que se estudia en este trabajo.



Parte II

**FUNDAMENTOS FÍSICOS Y  
METODOLOGIA**



# Capítulo 3

## Fundamentos Físicos

### 3.1. Conceptos preliminares de sistemas binarios

Se presentan en este capítulo los conceptos físicos fundamentales de sistemas binarios utilizados en este trabajo.

#### Parámetros Orbitales

*Pericentro*: En un sistema de dos objetos que giran alrededor de un centro de masa, el pericentro es la distancia mínima que pueden alcanzar los objetos en su trayectoria. (Figura 3.1)

*Semieje mayor (a)*: Se define como la mitad de la suma de los ejes mayores de las órbitas elípticas de cada estrella del sistema binario. (Figura 3.1)

*Semieje menor (b)*: Se define como la mitad de la suma de los ejes menores de las órbitas elípticas de cada estrella del sistema binario. (Figura 3.1)

*Excentricidad (e)*: Definida como

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (3.1)$$

*Razón de masas (q)*: Se define como el cociente de la masa menor del sistema entre la suma de las masas, esto es,  $m_2/(m_1 + m_2)$  donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de la estrella principal y secundaria respectivamente.

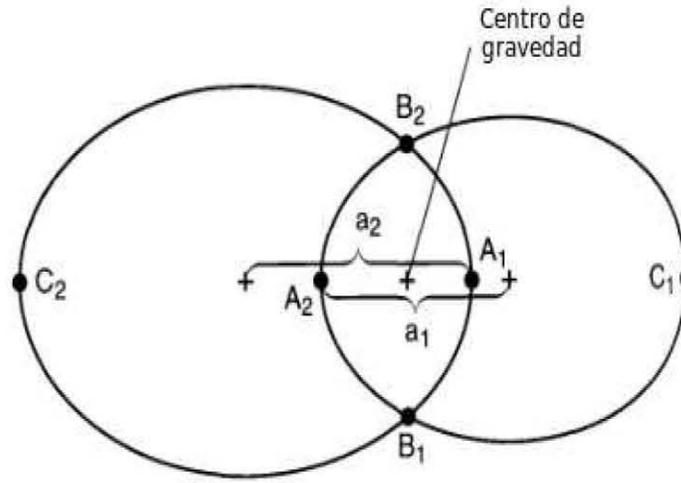


FIGURA 3.1: Las componentes de un sistema binario se mueven alrededor de un centro de masa común.  $A_1$ ,  $A_2$  indican las posiciones de las estrellas en el periastro,  $C_1$  y  $C_2$  representan el apastro y  $B_1$  y  $B_2$  son los puntos donde se cruzan las 2 órbitas. Las distancias  $a_1$  y  $a_2$  representan los semiejes mayores.

### 3.2. El problema de dos cuerpos simplificado

El problema de dos cuerpos que se mueven bajo la influencia de una fuerza central mutua es el punto de partida para la solución del problema. Incluimos brevemente la teoría del problema de fuerza central en su versión reducida el problema equivalente de un cuerpo de acuerdo a la formulación del libro *Classical Mechanics* de Goldstein et al. (2002, pág. 70).

Consideremos un sistema de dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$ , en el cual las únicas fuerzas son las debidas a un potencial de interacción mutua  $U$ . Donde supondremos que  $U$  es una función del vector entre las dos partículas,  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , o de sus velocidades relativas,  $\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$ , o de las derivadas superiores de  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Un sistema de este tipo tiene seis grados de libertad y por tanto seis coordenadas generalizadas independientes. Consideremos que éstas son las tres coordenadas del vector posición del centro de masa,  $\mathbf{R}$ , mas las tres componentes del vector diferencia  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . El lagrangiano tendrá entonces la forma:

$$L = \dot{T}(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}) - U(\mathbf{r}). \quad (3.2)$$

La energía cinética  $T$  está definida como la suma de la energía cinética del centro de masa, mas la energía cinética en torno al centro de masa,  $T'$ , esto es,

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + T', \quad (3.3)$$

con

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2'^2, \quad (3.4)$$

aquí,  $\mathbf{r}'_1$  y  $\mathbf{r}'_2$  son los vectores de posición de las dos partículas relativos al centro de masa y se relacionan con  $\mathbf{r}$  a través de:

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \quad (3.6)$$

Expresada en función de  $\mathbf{r}$  por medio de las ecuaciones (3.5) y (3.6),  $T'$  toma la forma:

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (3.7)$$

y el lagrangiano total es:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}). \quad (3.8)$$

las coordenadas de  $\mathbf{R}$  son cíclicas, por lo que el centro de masa está fijo o se mueve uniformemente. Ninguna de las ecuaciones de movimiento para  $\mathbf{r}$  contendrá términos que dependan de  $\mathbf{R}$  o  $\dot{\mathbf{R}}$ .

El resto del lagrangiano es exactamente el que se esperaría tener si tuvieramos un centro de fuerzas fijo con una sola partícula a una distancia  $\mathbf{r}$  de éste, con una masa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.9)$$

con  $\mu$  la masa reducida.

### 3.3. El problema de Kepler

Aunque la solución al problema de las binarias excéntricas no se obtiene analíticamente por completo, la solución es directa con el llamado “problema de Kepler”, que

hemos aplicado en este trabajo para resolver la evolución de la binaria. A continuación desarrollamos brevemente los conceptos utilizados de este tema.

La ley del cuadrado inverso es en general la más importante en mecánica clásica y particularmente lo es en astrofísica. En este caso la fuerza y el potencial pueden ser descritos como:

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad V = -\frac{k}{r}. \quad (3.10)$$

A partir de un problema de fuerza central buscamos encontrar la ecuación de la órbita, es decir la dependencia entre  $r$  y  $\theta$  independiente del tiempo. Partiendo de la ecuación de movimiento

$$mr^2\dot{\theta} = l, \quad (3.11)$$

utilizando las variaciones en  $y$  correspondientes

$$l dt = mr^2 d\theta, \quad (3.12)$$

de la que obtenemos la relación correspondiente entre las derivadas respecto a  $t$  y  $\theta$

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (3.13)$$

Escribiendo la segunda derivada respecto al tiempo

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \right), \quad (3.14)$$

y utilizando la ecuación de lagrange para  $r$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r), \quad (3.15)$$

queda de la forma

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r), \quad (3.16)$$

para simplificar, usamos

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d(1/r)}{d\theta}, \quad (3.17)$$

y aplicando el cambio de variable  $u = 1/r$ , tenemos

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f \left( \frac{1}{u} \right), \quad (3.18)$$

y utilizando que

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{du} \frac{d}{dr} = -\frac{1}{u^2} \frac{d}{dr}, \quad (3.19)$$

la ecuación (3.18) se puede escribir en función del potencial en la forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V\left(\frac{1}{u}\right). \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.10) en la ecuación anterior

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mf(\frac{1}{u})}{l^2u^2} = \left(\frac{mk}{l^2}\right), \quad (3.21)$$

efectuando el cambio de variable  $y = u - \frac{mk}{l^2}$ , la ecuación diferencial queda en la forma

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0, \quad (3.22)$$

que tiene como solución

$$y = B \cos(\theta - \theta'), \quad (3.23)$$

siendo  $B$  y  $\theta'$  las dos constantes de integración. En función de  $r$ , la solución es

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + e \cos(\theta - \theta')), \quad (3.24)$$

donde

$$e = B \frac{l^2}{mk}. \quad (3.25)$$

Para obtener  $e$  en términos de la energía  $E$  y el momento angular  $l$  del sistema es necesario obtener la ecuación de la órbita a partir de la solución formal. Partiendo de la ecuación

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}, \quad (3.26)$$

donde  $\theta'$  es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales y no tiene que ser el ángulo inicial  $\theta_0$  al instante  $t = 0$ . Esta integral es de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos\left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}}\right), \quad (3.27)$$

donde

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma. \quad (3.28)$$

TABLA 3.1: Dependencia de la conica con la excentricidad y la energía.

$e > 1$	$E > 0$	hipérbola
$e = 1$	$E = 0$	parábola
$e < 1$	$E < 0$	elipse
$e = 0$	$E = -\frac{mk^2}{2l^2}$	circunferencia

Para usar en la ecuación 3.26 hacemos

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}, \quad \gamma = -1, \quad (3.29)$$

y el determinante  $q$  sera por tanto

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right). \quad (3.30)$$

Con esta sustitución, la ecuación (3.26) queda en la forma

$$\theta = \theta' - \arccos \left( \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 - \frac{2El^2}{mk^2}}} \right). \quad (3.31)$$

Por último despejando  $u \equiv \frac{1}{r}$  la ecuación de la órbita nos queda

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta') \right); \quad (3.32)$$

comparando con la ecuación (3.24) tenemos a  $e$  expresada en términos de  $E$  y  $l$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (3.33)$$

Tomando la ecuación general de una cónica con foco en el origen

$$\frac{1}{r} = C(1 + e \cos(\theta - \theta')), \quad (3.34)$$

y comparandola con la ecuación (3.32) resulta que la órbita siempre es una sección cónica donde la naturaleza de la órbita depende de  $e$ , según la tabla 3.1.

En el caso de la órbita circular,  $T$  y  $V$  son constantes en el tiempo y según el teorema del virial

$$E = T + V = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2}, \quad (3.35)$$

con

$$E = -\frac{k}{2r_o}. \quad (3.36)$$

Según la ecuación del teorema de Bertrand, que nos habla del tipo de fuerzas centrales que llevan a trayectorias cerradas. La siguiente ecuación nos dice que la fuerza debe ser atractiva para tener trayectorias cerradas,

$$f(r_o) = -\frac{l^2}{mr_o^3}; \quad (3.37)$$

para el equilibrio entre la fuerza central y la fuerza efectiva podemos escribir

$$-\frac{k}{2r_o^2} = -\frac{l^2}{mr_o^3}, \quad (3.38)$$

despejando

$$r_o = \frac{l^2}{mk}; \quad (3.39)$$

con esta ecuación para el radio orbital la ecuación (3.36) queda en la forma

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2} \quad (3.40)$$

como condición para el movimiento circular.

En el caso de órbitas elípticas, se puede demostrar que el eje mayor sólo depende de la energía. El semieje mayor es la semisuma de las distancias apsidales  $r_1$  y  $r_2$ . En dichos puntos, la velocidad radial es nula por definición y la conservación de la energía implica que estas distancias son las raíces de la ecuación

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0, \quad (3.41)$$

o sea de

$$r^2 + \frac{k}{E}r + \frac{l^2}{2mE} = 0. \quad (3.42)$$

Utilizando que el coeficiente del término lineal es igual al negativo de la suma de las raíces, el semieje mayor está dado por

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E}. \quad (3.43)$$

Nótese que en el límite circular, la ecuación (3.43) concuerda con (3.36). En función del semieje mayor, la excentricidad de la elipse puede escribirse

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}, \quad (3.44)$$

además la ecuación (3.44) nos da la expresión

$$\frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2), \quad (3.45)$$

en función de ésta podemos escribir la ecuación (3.24) de la órbita elíptica en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta')}. \quad (3.46)$$

### 3.3.1. Evolución en el tiempo del problema de Kepler

Para descripción de la partícula en el tiempo a medida que recorre la órbita usaremos en principio la relación entre la distancia radial  $r$  de la partícula y el tiempo, esta relación estará dada por la ecuación (3.46), que en este caso toma la forma:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}. \quad (3.47)$$

De la misma manera, el ángulo polar  $\theta$  y el tiempo están relacionados por la conservación del momento angular:

$$dt = \frac{mr^2}{l} d\theta, \quad (3.48)$$

que combinada con la ecuación (3.24) de la órbita

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[1 + e \cos(\theta - \theta')]^2}. \quad (3.49)$$

Para ilustrar algunas de las implicaciones consideremos la situación del caso de movimiento parabólico ( $e = 1$ ), para el cual se pueden realizar las integraciones de manera simple. Comenzamos a medir el ángulo polar a partir del radio vector en el punto de mayor acercamiento (peri centro). Este momento corresponde a hacer  $\theta' = 0$  en la ecuación (3.24). El tiempo,  $T$ , se mide a partir de ese momento. Utilizando la identidad trigonométrica:

$$(1 + \cos \theta) = 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad (3.50)$$

la ecuación (3.49) se reduce, a la forma:

$$t = \frac{l^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \sec^4 \left( \frac{\theta}{2} \right) d\theta. \quad (3.51)$$

La integración se efectúa mediante el cambio de variable  $x = \tan \frac{\theta}{2}$ , con lo cual la integral queda como:

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \int_0^{\tan \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad (3.52)$$

integrando

$$t = \frac{l^3}{2mk^2} \left( \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right). \quad (3.53)$$

En esta relación inmediata de  $t$  en función de  $\theta$ , el obtener  $\theta$  en un instante dado implica resolver una ecuación de tercer orden en  $(\tan \frac{\theta}{2})$ . La distancia radial en el instante dado se da mediante la ecuación orbital.

En el caso del movimiento elíptico, la ecuación (3.47) se integra en una variable auxiliar  $\psi$ , llamada *anomalía excéntrica* y definida por

$$r = a(1 - e \cos \psi). \quad (3.54)$$

Comparando con la ecuación (3.46) de la órbita, se observa que  $\psi$  también cubre el intervalo entre 0 y  $2\pi$  cuando  $\theta$  evoluciona a lo largo de una revolución completa y que el pericentro tiene lugar en  $\psi = 0$ . Expresando a  $E$  y  $l$  en función de  $a$ ,  $e$  y  $k$ , la ecuación (3.47) se puede escribir para el movimiento elíptico como:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_{r_o}^r \frac{r dr}{\sqrt{r - \frac{r^2}{2a} - \frac{a(1-e^2)}{2}}}; \quad (3.55)$$

donde  $r_o$  es la distancia del pericentro. Al sustituir  $r$  en términos de  $\psi$  mediante la ecuación (3.54) se reduce la integral a la forma:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi. \quad (3.56)$$

La ecuación (3.56) nos da una expresión del periodo,  $\tau$ , del movimiento elíptico si se extiende la integral a todo el dominio,  $\psi = 2\pi$ :

$$\tau = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.57)$$

Este resultado también se obtiene a partir de las propiedades de la elipse. Partiendo de la conservación del momento angular, la velocidad areolar resulta constante y viene dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}. \quad (3.58)$$

Obtendremos el área  $A$  de la órbita integrando 3.58 por un periodo completo  $\pi$ :

$$\int \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l\tau}{2m}. \quad (3.59)$$

El área de la elipse es

$$A = \pi ab, \quad (3.60)$$

donde, el semieje menor  $b$  está relacionado con  $a$  mediante la ecuación

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (3.61)$$

según (3.44) el semi eje menor también puede escribirse en la forma

$$b = a^{1/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}}, \quad (3.62)$$

y el periodo será

$$\tau = \frac{2m}{l} \pi a^{3/2} \sqrt{\frac{l^2}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.63)$$

La ecuación (3.63) nos dice que, manteniendo iguales el resto de los parámetros, el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor. A esta conclusión se le da el nombre de tercera ley de Kepler. Recordando que el movimiento de un planeta alrededor del Sol es un problema de 2 cuerpos y la masa  $m$  de (3.63) debe sustituirse por la masa reducida,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3.64)$$

donde podemos considerar  $m_2$  la masa del planeta y  $m_1$  la del Sol. Además la fuerza gravitacional es

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.65)$$

con lo que la constante  $k$  será

$$k = Gm_1 m_2. \quad (3.66)$$

En estas condiciones la ecuación (3.63) queda en la forma

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_1}}. \quad (3.67)$$

Podemos escribir la ecuación (3.56) introduciendo la frecuencia de revolución  $\omega$  en la forma

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{k}{ma^3}}. \quad (3.68)$$

La integral de la ecuación se calcula fácilmente, dando

$$\omega t = \psi - e \operatorname{sen} \psi, \quad (3.69)$$

relación conocida como **ecuación de Kepler**. La cantidad  $\omega t$  toma valores entre 0 y  $2\pi$ , junto con  $\psi$  y  $\theta$ , en el curso de una revolución completa, por ello se denomina concretamente anomalía media.

Para encontrar la posición en la órbita en un tiempo  $t$ , primeramente se encuentra la anomalía excéntrica  $\psi$  invirtiendo la ecuación de Kepler (3.69). La ecuación 3.54 proporciona la distancia radial, mientras que el ángulo polar  $\theta$  se puede expresar en función de  $\psi$  por comparación de las ecuaciones (3.54) y (3.46)

$$1 + \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \psi}, \quad (3.70)$$

transformando algebraicamente llegamos a

$$\cos \theta = \frac{\cos \psi}{1 - e \cos \psi}, \quad (3.71)$$

sumando y restandole sucesivamente uno a los dos miembros de la ecuación (3.71) y dividiendo las dos ecuaciones resultantes, llegamos a

$$\tan \left( \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\psi}{2}, \quad (3.72)$$

la ecuación (3.71) o la (3.72) nos dan  $\theta$  como función de  $\psi$ .



# Capítulo 4

## El método y su implementación

### 4.1. Los “Lazos Invariantes” (*Invariant Loops*)

Los lazos invariantes son las trayectorias equivalentes a las órbitas keplerianas en una estrella sola, esto es, las trayectorias en las cuales se conserva la energía y el momento angular, esto es, donde el potencial es estacionario. De esta forma, en el caso de las binarias circulares, existe una integral de movimiento, vista desde el sistema de referencia no inercial que corrotta con la binaria, ésto nos permite generar familias de órbitas no keplerianas pero periódicas.

En el caso mucho más complicado de los sistemas binarios excéntricos no tenemos un sistema de referencia donde el potencial sea independiente del tiempo y como consecuencia no tenemos un valor físico que se conserve, es decir, no existen integrales de movimiento conocidas, esto hace que el estudio de este tipo de sistemas sea muy complejo, sin embargo contamos con una característica fundamental de estos sistemas que nos puede ayudar en el análisis orbital que es la periodicidad, esto es, bajo la consideración de que el potencial es el mismo a una fase determinada del sistema.

La forma de encontrar un lazo invariante es almacenando la información de los puntos sobre los discos cada vez que la binaria pasa por una fase específica, en particular nosotros elegimos el pericentro. Inicialmente la colección de puntos que representa la trayectoria de una partícula (cuya información sólo recolectamos cuando la binaria está en el pericentro), producirá una dona gruesa. El propósito es encontrar una curva unidimensional afinando las condiciones iniciales de esta primera aproximación que

representa la dona. Esta curva unidimensional (como la que se muestra en negro en la Figura 4.1) da las condiciones en las que una partícula puede mantenerse en una órbita alrededor del sistema. Estos cortes en el tiempo son equivalentes a los conocidos diagramas de fase o diagramas de Poincaré.

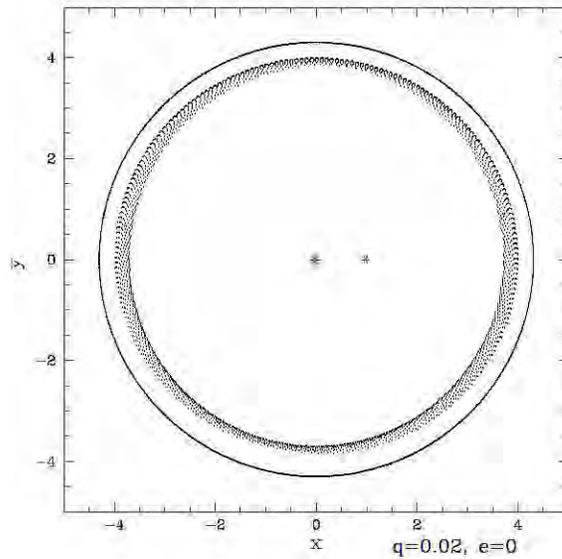


FIGURA 4.1: Se muestra en la imagen un Lazo Invariante (línea delgada) y una dona la cual no representa una órbita estable.

Con estas condiciones de la binaria el potencial es fijo al eliminar la componente temporal para la solución del problema. Resolvemos numéricamente el potencial del sistema utilizando la solución del problema de 2 cuerpos binario excéntrico con la ecuación de Kepler y el problema restringido de tres cuerpos para resolver las órbitas en los discos.

Para la búsqueda de los lazos invariantes a continuación, requerimos como condiciones iniciales dos órbitas keplerianas muy lejos del sistema para asegurar que sean unidimensionales, como las de la Figura 4.2 (círculos negros).

El mapeo con lazos lo iniciamos en un punto donde las condiciones sean lo más parecidas a las de una estrella sola, es decir para la búsqueda en el disco circumbinario por ejemplo, comenzamos lejos de las estrellas (donde la binaria se puede aproximar como una estrella sola cuya masa es la suma de las masas de la binaria) y para los

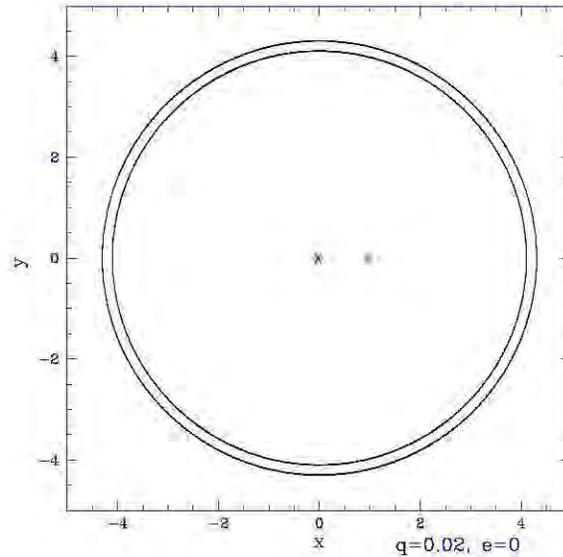


FIGURA 4.2: Condiciones iniciales requeridas para el mapeo de regiones estables. Dos órbitas lejanas donde el sistema se puede aproximar por un potencial kepleriano.

discos circumprimario y circunsecundario comenzamos muy cerca de la estrella respectiva (donde la influencia del otro cuerpo sea despreciable). Con éstas como condiciones iniciales pasamos a la búsqueda de los lazos invariantes. Esto se hace extrapolando, usando como referencia dos lazos con las características anteriores y buscando la dispersión mínima del lazo numéricamente haciendo un barrido sobre las velocidades a una posición dada. Este procedimiento se repite a diferentes distancias para obtener toda una familia de lazos invariantes como la que se muestra en la Figura 4.3.

Para determinar si tenemos un lazo invariante tomamos una muestra de puntos dentro de un área de  $5^\circ$ , a estos puntos les calculamos la dispersión en posición y si ésta es menor a un valor determinado (que depende del tipo de disco, es decir si es circunestelar o circumbinario), Estaremos lo suficientemente cerca y podremos considerar esta órbita como un lazo invariante. Para los discos circumbinarios la condición es que la dispersión de los puntos sea menor o igual a  $10^{-4}a$ , mientras que para lazos en los discos circumprimario y circunsecundario la dispersión de los puntos debe ser menor o igual a  $10^{-6}a$ .

Este método es escalable, esto es, es aplicable a cualquier sistema binario sin impor-

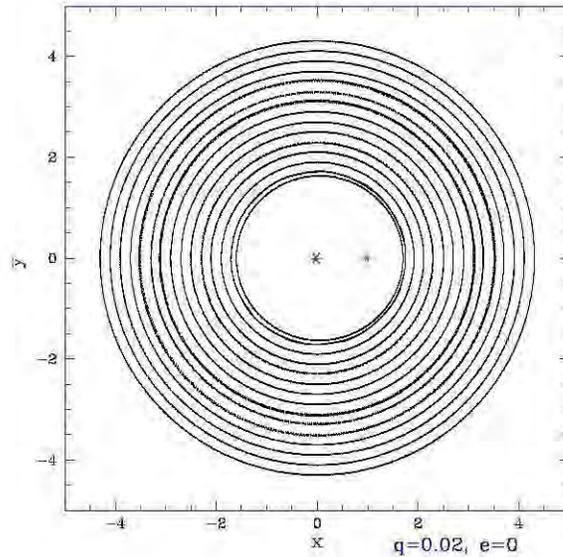


FIGURA 4.3: Mostramos una familia de lazos invariantes generado mediante el método

tar el tamaño real de las masas ni la distancia de separación entre las estrellas. Es decir, puede ser utilizado para resolver un sistema binario donde sus componentes sean desde estrellas con masas iguales (las que sean) hasta sistemas de una estrella y un planeta.

## 4.2. El código

El código utilizado para este trabajo, realizado por la Dra. Barbara Pichardo, fue diseñado para la búsqueda de los lazos invariantes en sistemas binarios excéntricos. Utiliza parámetros normalizados, esto es, el semieje mayor es uno, así como la frecuencia ( $\omega$ ), la constante de gravitación ( $G$ ), y la suma de las masas ( $m_1 + m_2 = 1$ ). Además de los parámetros anteriores se utiliza la razón de masas  $q = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$  y la excentricidad.

El cálculo de los lazos comienza por pedir los parámetros y las variables del sistema que se va a estudiar. El código calcula con base en esos datos la posición de las estrellas utilizando las ecuaciones obtenidas en la solución del problema de Kepler.

Una vez conocidos estos parámetros, se calculan los dos primeros lazos a una distancia donde las ecuaciones de Kepler para un cuerpo sean una buena aproximación.

A partir de estos dos lazos el código calcula los demás lazos automáticamente en la mayoría de los casos mediante el método descrito anteriormente.

El código utiliza una serie de subrutinas altamente eficientes de la paquetería conocida como NAG (Numerical Algorithms Group) y en particular, para la integración de las órbitas, se utiliza un integrador adaptivo que usa el método de Adams que aproxima soluciones a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y consiste en un proceso recursivo el cual se retroalimenta a partir de la solución obtenida del paso anterior.



Parte III

**RESULTADOS**



# Capítulo 5

## Mapeo de los Discos con Lazos Invariantes

Como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, los *lazos invariantes*, son el análogo de las llamadas órbitas periódicas en potenciales independientes del tiempo. Esto es, representan el esqueleto dinámico de los discos de un sistema binario. Los lazos marcan las regiones alrededor de las estrellas en las que las partículas (gas, planetas y restos como cometas y asteroides) pueden estacionarse en órbitas estables, más aún, los lazos invariantes no intersectantes, representan órbitas donde el gas puede estacionarse sin sufrir choques que lo hagan perder energía o momento angular.

De la misma forma que un mapeo de discos por medio de órbitas periódicas nos da una buena idea de muchas características geométricas y físicas de estos sistemas, un mapeo con lazos invariantes funcionará para sistemas binarios sin restricción de parámetros.

A continuación presentamos un mapeo profundo con lazos invariantes para sistemas binarios con razón de masa extrema ( $q \leq 0.1$ ).

### 5.1. Tabla de Casos Calculados

El problema está escalado de tal forma que sólo dos parámetros, la razón de masas ( $q$ ) y la excentricidad ( $e$ ) definen el sistema.

Aunque los lazos invariantes cambian de forma con la fase, este cambio es muy

TABLA 5.1: Tabla de los 70 casos estudiados. Para referencia se ponen nueve objetos reales conocidos, con parametros aproximados a los de la tabla.

		$e$						
$q$		0.0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
0.1								
0.08								
0.06								
0.04								
0.02	CoRoT-3							
0.005		Wasp-14				HAT-P-2	HD80606	
0.002	CoRoT-2							
0.0005		Sol-Júpiter						
0.0002		Sol-Saturno	Fomalhaut					
0.00005		Sol-Urano						

ligero y para los propósitos de este estudio es despreciable. De esta forma, se elige la construcción de los lazos en el pericentro, donde el efecto de las estrellas sobre el disco circumprimario es máximo. Con estos dos parámetros realizamos un barrido y construimos una tabla de 70 casos de estudio (Tabla 5.1). En la tabla se muestran como referencia 9 objetos de la literatura astronómica con  $q$  y  $e$  semejantes a los casos estudiados.

En cada uno de los casos elegidos se calcularon los lazos invariantes para los discos circumbinario y circumprimario, utilizando el código y el método descritos en el capítulo anterior, obteniendo así la morfología de los discos para cada caso, así como el radio mínimo (para los circumbinarios) o máximo (para los circumprimarios) entre otras características.

## 5.2. El Mapeo de los Discos

Presentamos un estudio exhaustivo de familias de órbitas barriendo los parámetros orbitales que caracterizan a las binarias. Este estudio nos permitirá entender por ejem-

plo, la dependencia del tamaño de las regiones estables con las variables elegidas y las regiones para las cuales es factible emprender la búsqueda de planetas o discos de acreción.

Mostramos a continuación una serie de figuras seleccionadas como las más representativas de diferentes casos de los discos para ejemplificar o explicar puntos específicos de estos sistemas. El mapeo completo realizado se presenta en el Apéndice IV.

Los mapas están dados en la misma escala tanto para los discos circumbinarios como los circunprimarios para facilitar la comparación entre éstos.

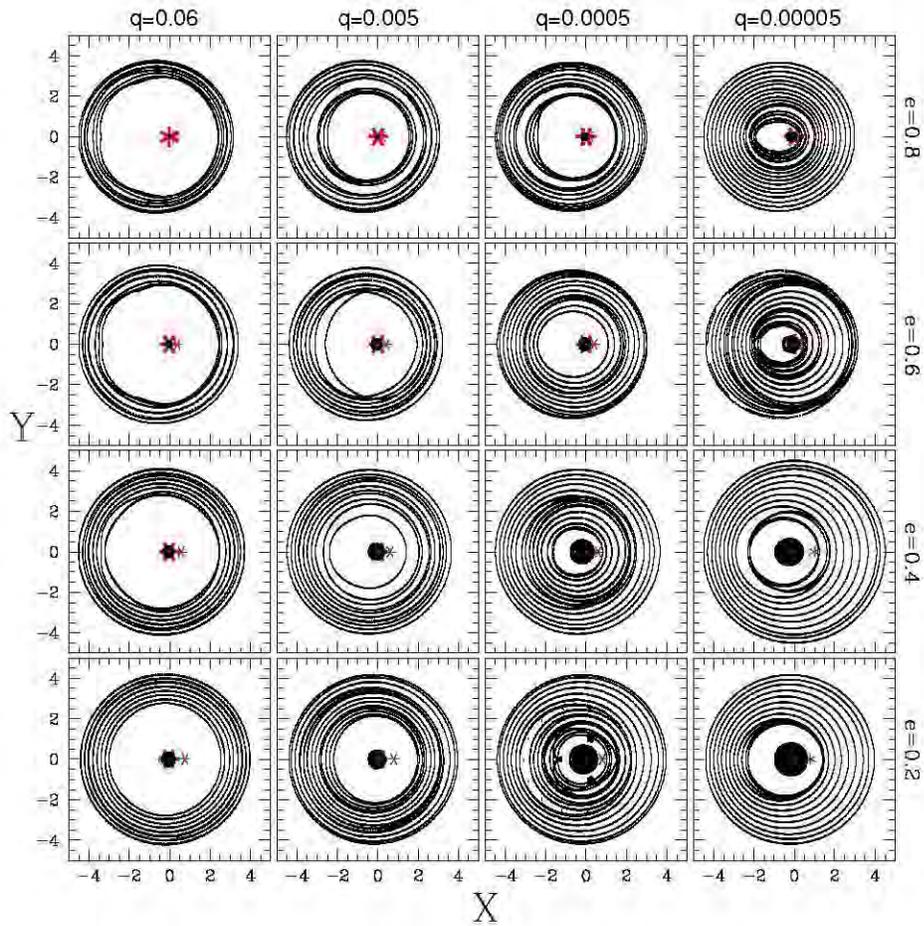


FIGURA 5.1: Discos circumbinarios y circunprimarios formados por loops invariantes para diferentes  $q$  y  $e$ .

En la figura 5.1 mostramos un mosaico de casos en el que se puede apreciar como

TABLA 5.2: Se muestra la distancia para la que se logra construir un lazo invariante en el caso de  $q = 0.00005$  a las diferentes excentricidades.

		$e$						
$q$		0.0	0.05	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8
0.00005		1.1	1.2	1.2	2.3	1.5	1.7	1.9

cambian los tamaños de los discos cuando se varia la razón de masas y la exentricidad. En esta figura se ilustra la dependencia del tamaño de los discos con los dos parámetros que caracterizan a las binarias. La dependencia con la exentricidad es mucho mayor que con la razón de masas, esto es, un cambio ligero en la exentricidad da como resultado un cambio severo en el tamaño del disco (mayor exentricidad implica discos más pequeños, es decir, la posición inicial para la partícula prueba estará mas alejada del objeto principal). En la Figura 5.1 se puede observar este comportamiento, excepto para la columna correspondiente a  $q = 0.00005$ , en la que los discos se ven más pequeños mientras aumenta la exentricidad, sin embargo, la posición inicial para los lazos más cercanos a la estrella de cada caso se aleja mientras crece la exentricidad, esto se muestra en la Tabla (5.2), teniendo como excepción el caso de  $e = 0.2$  que no sigue la tendencia, esto lo podemos atribuir a algún fenómeno (como puede ser la presencia de un *gap*, que explicaremos más adelante). Por otra parte, un cambio en la masa del objeto compañero debe ser grande para tener un cambio apreciable en el disco, en la imagen (Figura 5.1) se muestran los casos con un factor de 10 entre ellos. Es importante mencionar, que en el caso de la razón de masas, para  $q > 0.1$ , este parámetro afecta muy poco el tamaño de los discos, mientras que para  $q < 0.1$  (el objeto de este trabajo), este parámetro cobra mayor importancia.

Este comportamiento se puede apreciar también en los discos circunprimarios pero más claramente en el acercamiento de la Figura 5.2.

### 5.2.1. Discos Circumbinarios

Como se mencionó anteriormente, para  $q$  extrema, el comportamiento de los sistemas es mucho más complicado y el primer ejemplo es la dependencia del tamaño de los discos con la razón de masas que no sucede con razones de masas mayores.

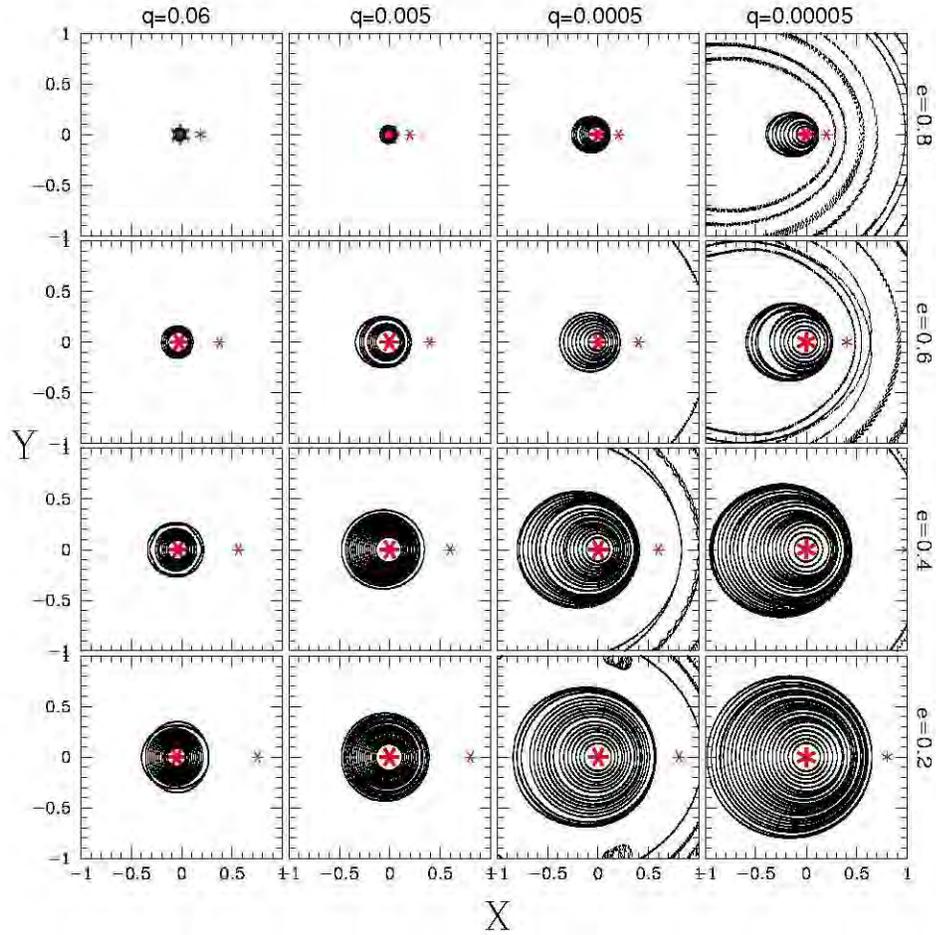


FIGURA 5.2: Acercamiento de la Figura 5.1 a los discos circunprimarios.

En particular, los discos circumbinarios formados por familias de lazos invariantes, para  $q$  mayor a  $\sim 0.005$ , presentan un comportamiento muy parecido entre éstos. Por otra parte, por ejemplo, para los casos de  $q$  menores a  $0.0002$  empezamos a encontrar una serie de características muy interesantes y diferentes a los casos de razón de masa mayor: varias familias de lazos que parten de la misma posición pero con velocidades diferentes, esto es, encontramos que las familias se bifurcan en al menos dos soluciones diferentes de familias de lazos.

Para el caso de razón de masas extremo podemos también observar que la disminución en  $q$ , es decir, tomar un objeto compañero de menor masa, para una excentricidad

dada, produce un incremento en el tamaño del disco circumbinario, el disco se aproxima más a las estrellas, en algunos casos alcanzando prácticamente al planeta compañero.

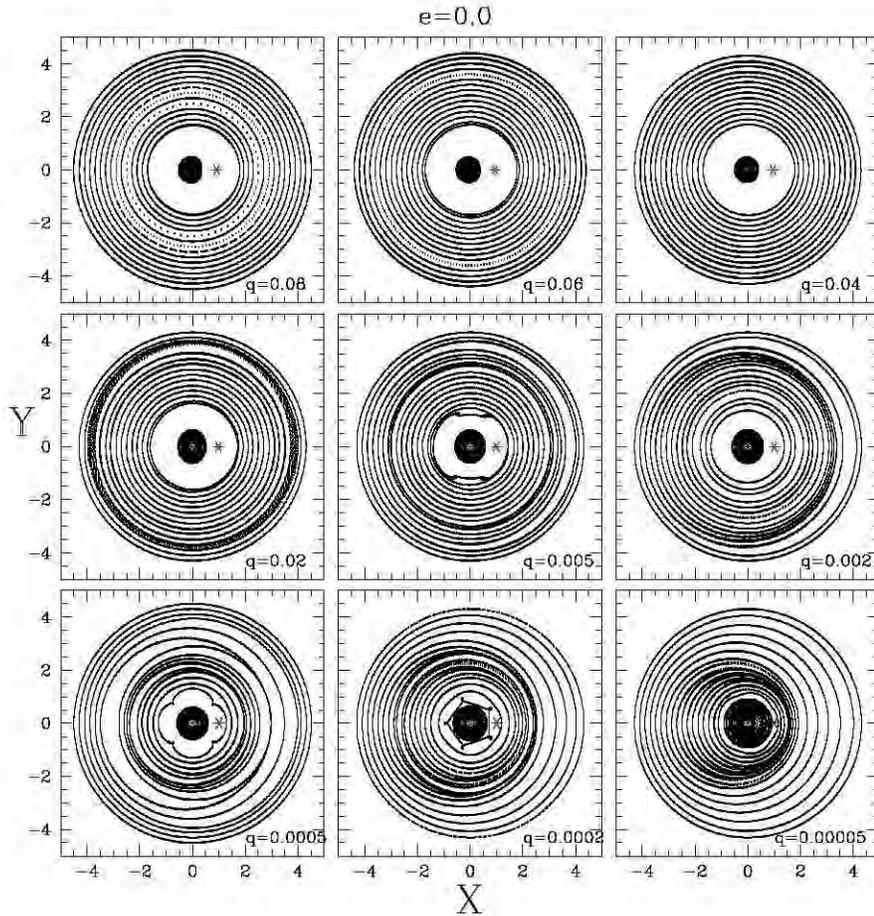


FIGURA 5.3: Mapeo de sistemas con  $e = 0$  y diferentes  $q$ , donde es apreciable la dependencia del tamaño de los discos con la razón de masas.

En la Figura 5.3 se puede observar el crecimiento del disco circumbinario hacia el centro de la binaria al reducirse la masa secundaria. En este ejemplo se pueden ver además algunos lazos no concéntricos que marcan, en general, el final de los discos, es decir, una vez que inician estos lazos, rápidamente se terminan las trayectorias estables.

A partir de  $q \sim 0.0005$  las familias de lazos se bifurcan, es decir, surgen lazos que comparten una misma posición inicial pero tienen soluciones con diferentes velocidades

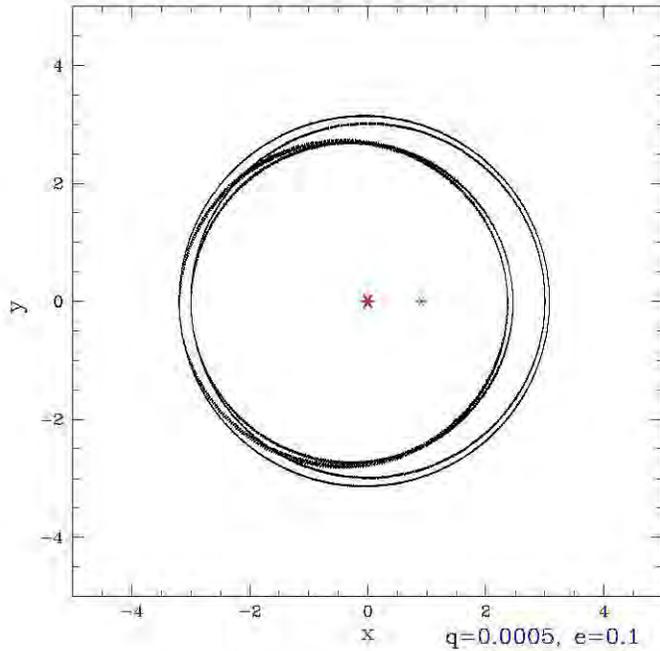


FIGURA 5.4: Bifurcación de la familia de lazos para el caso  $q = 0.0005$  y  $e = 0.1$ .

como se muestra en la Figura 5.4. Cada una de estas curvas representa una solución estable.

En la Figura 5.5 se aprecia como los discos crecen mientras se reduce la masa del objeto compañero, además de encontrar en algunos casos la bifurcación de las familias y los lazos que marcan el final del disco, como es el caso de  $q = 0.06$ .

En la Figura 5.6 es apreciable de manera más evidente la deformación de los lazos interiores que dan lugar al límite interior del disco. Al igual que en la figura anterior el tamaño del disco crece conforme se disminuye la masa del objeto compañero.

En la Figura 5.7 se pueden apreciar al igual que en la anterior la deformación de los lazos interiores, se aprecian además algunas zonas de inestabilidad para las que no se encontraron lazos (*gaps*). Estas regiones nos muestran zonas donde el material que gira alrededor del sistema no encuentra regiones estables necesarias para mantenerse orbitando por largos tiempos alrededor de las estrellas.

En la Figura 5.7 se ven brechas en las cuales no se encuentran lazos invariantes, este comportamiento se repite en muchos de los casos y marca regiones de inestabilidad en las cuales el gas por ejemplo, no puede alojarse por periodos largos (algunos periodos de la binaria).

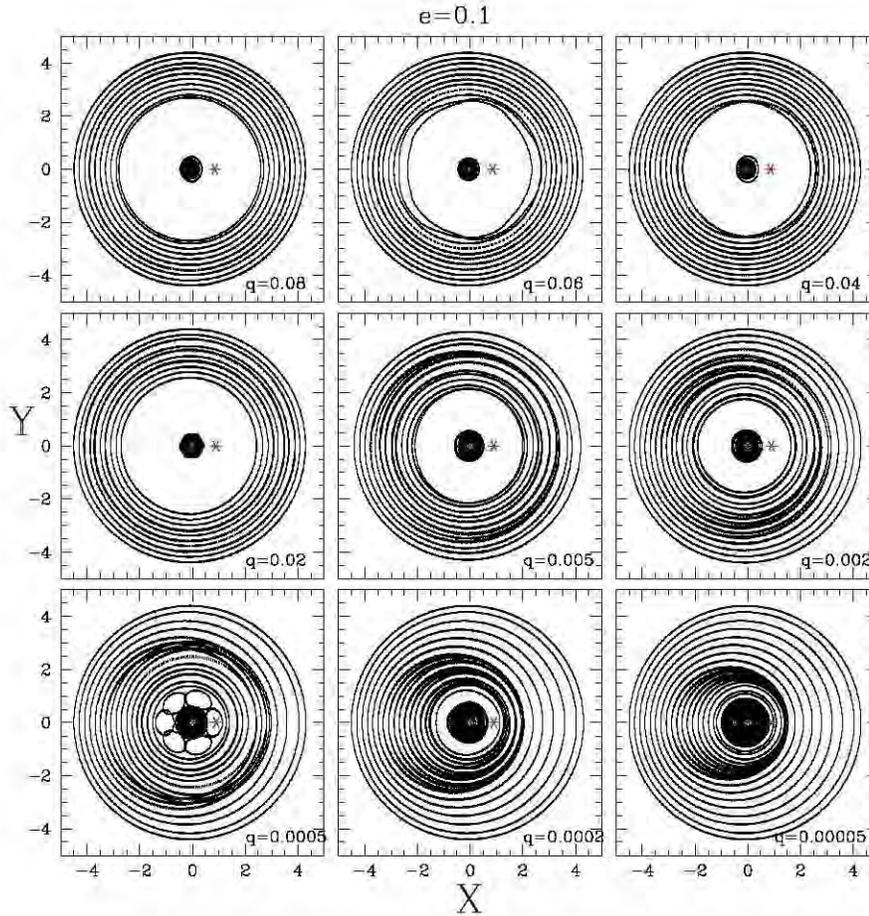


FIGURA 5.5: Mapeo a excentricidad fija de 0.1, con razones de masa entre 0.08 y 0.00005. Se observa la dependencia con el cambio de razón de masas y la deformación de los lazos internos.

De la misma forma que en los casos anteriores, el tamaño de la zona prohibida es poco sensible a  $q$  para razones de masa mayores a aproximadamente 0.0005, para razones menores el tamaño de la región prohibida disminuye rápidamente. Por otra parte podemos ver también de las últimas figuras que la excentricidad es un factor preponderante en el tamaño de las zonas prohibidas, aumentando de forma drástica a mayores excentricidades.

En la Figura 5.8 se observa que para las excentricidades menores los lazos mantienen una forma casi circular, mientras que al incrementar la excentricidad sufren deforma-

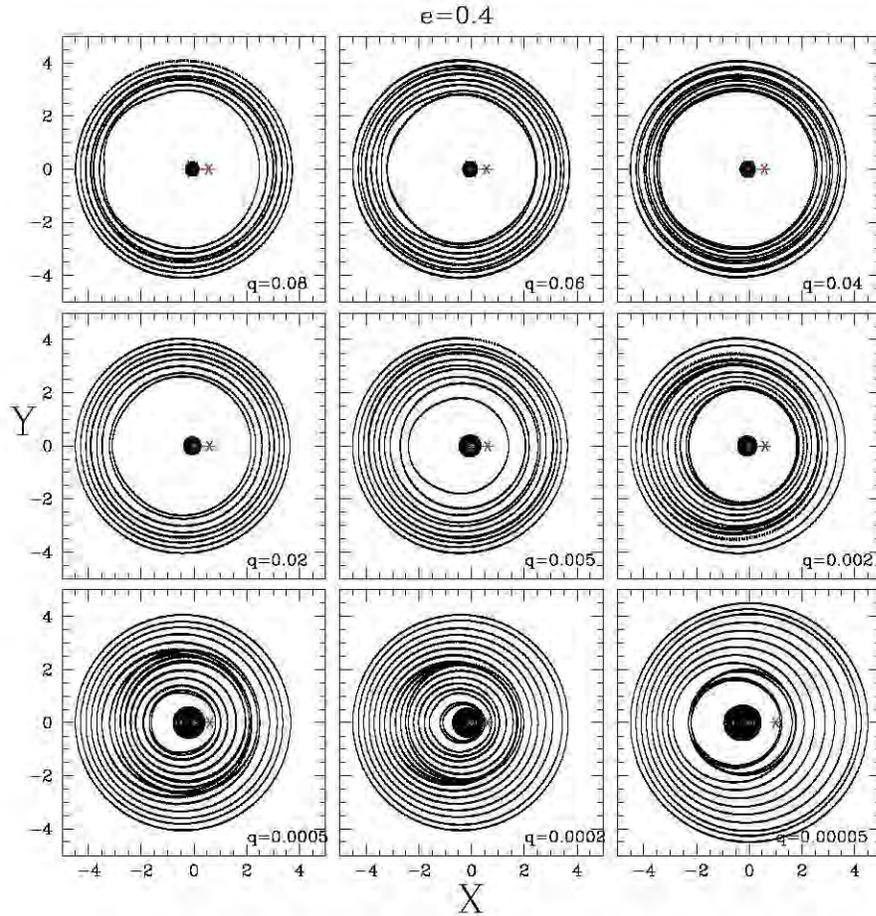


FIGURA 5.6: Lo mismo que la Figura 5.5 pero para una excentricidad fija de 0.4.

ciones y las regiones prohibidas crecen rápidamente.

En las figuras 5.9 a 5.12, se muestra casos con razones de masa menores que en el caso anterior. En todos los mosaicos se observa un comportamiento semejante al del caso anterior, en cuanto al tamaño del disco. También puede notarse el efecto de la razón de masas (especialmente para las menores a 0.005) en el tamaño de la zona prohibida.

Una de las características más interesantes que distinguen las familias de lazos invariantes contruidos alrededor de sistemas con razón de masa extrema, es la riqueza de formas y figuras complicadas de éstos. Por ejemplo, en la Figura 5.11, en el caso

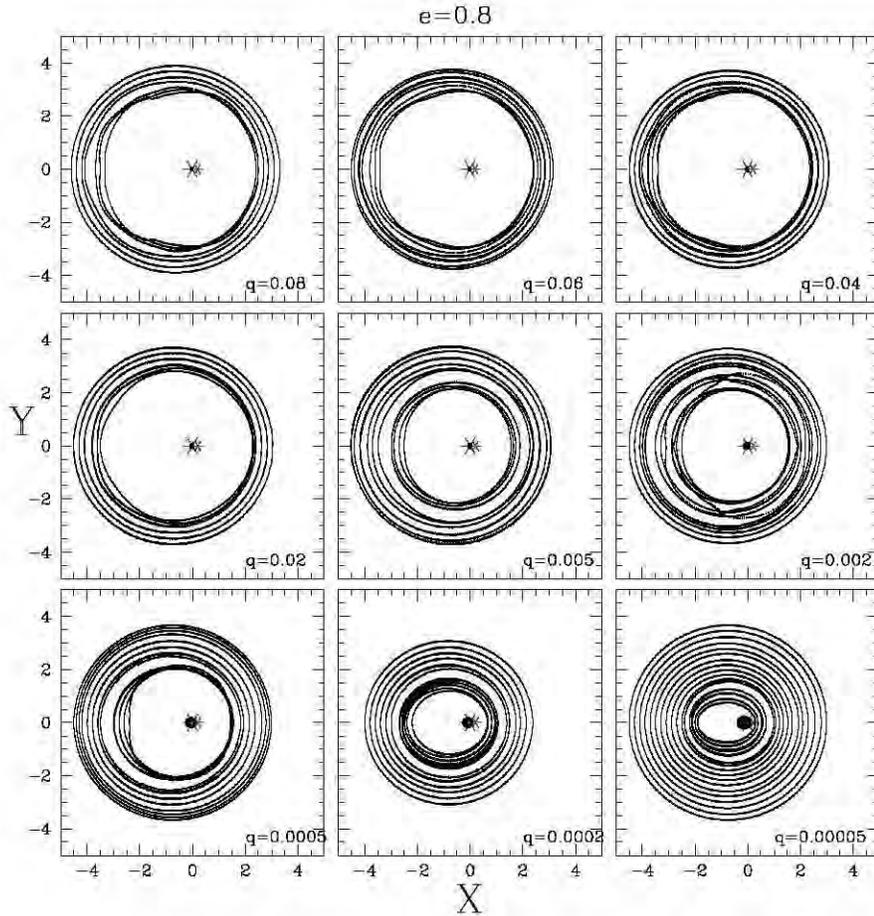


FIGURA 5.7: Lo mismo que la Figura 5.5 pero para una excentricidad fija de 0.8.

de  $e = 0$ , se obtienen dos lazos con forma pentagonal algunos y cuadrada otros. Así mismo, en el caso de  $e = 0.2$ , también se encuentra un lazo de forma regular pero no circular, estos lazos representan generalmente los límites de los discos, y de acuerdo con la teoría, son regiones donde las resonancias no permiten la existencia de más lazos estables.

Hemos también notado que en estos casos donde la razón de masas es muy pequeña, el conjunto de lazos estables se bifurca en 2 familias estables, e intersectantes pero con velocidades muy diferentes en los puntos de intersección.

La Figura 5.12 se muestran los caso de razón de masa más pequeña para la cual

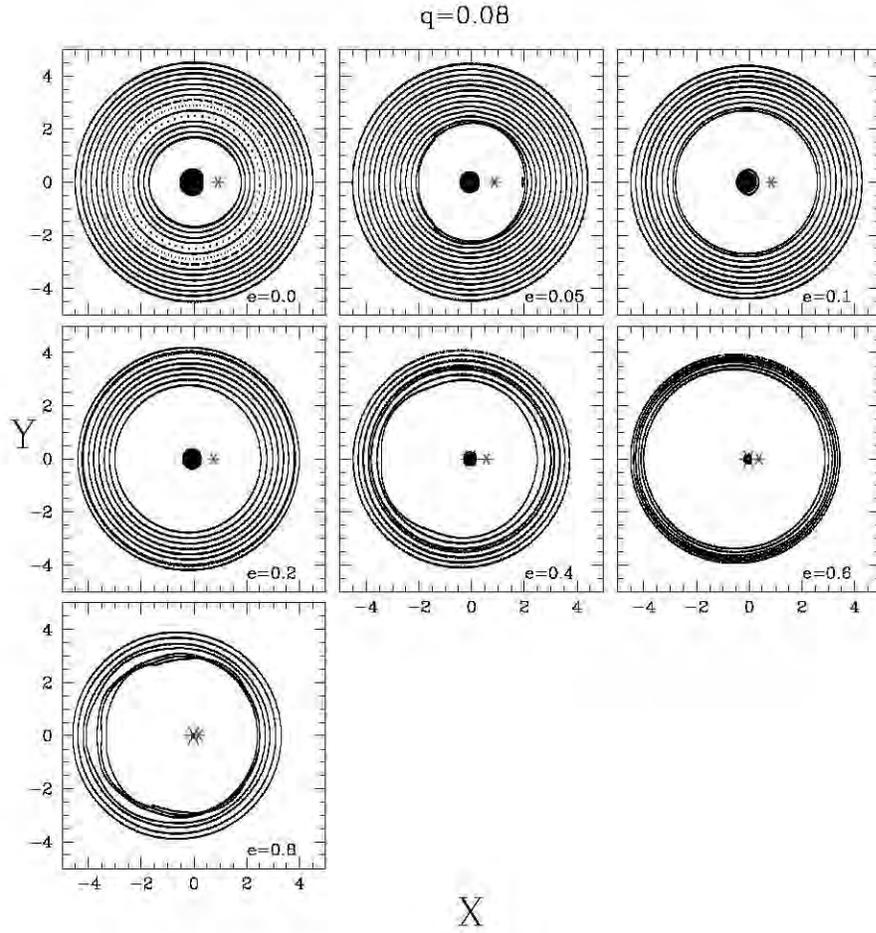


FIGURA 5.8: Familia de discos circumbinarios con razón de masas  $q = 0.08$  para diferentes excentricidades.

se calcularon los lazos. En este caso los discos se pueden ver casi continuos entre el circumbinario y el circumprimario mostrando sólo una pequeña brecha donde no hay lazos. Esta franja crece severamente, para una  $q = 0.00005$  fija, conforme se aumenta la excentricidad.

### 5.2.2. Discos Circumprimarios

De la misma forma que los discos circumbinarios, los discos circumprimarios presentan una fuerte dependencia con los parámetros que definen la binaria. Por ejemplo, al

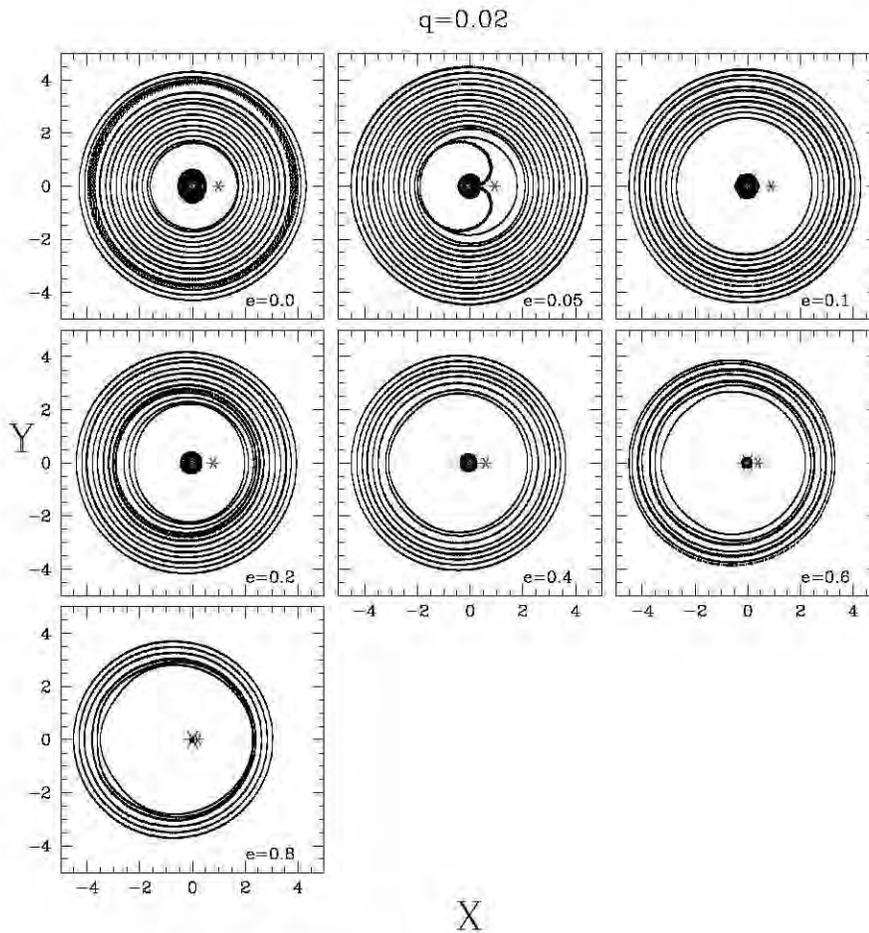


FIGURA 5.9: Familia de discos circumbinarios para razón de masas  $q = 0.02$  con diferentes excentricidades.

disminuir la masa del objeto compañero, el disco circunprimario incrementa su tamaño, así como al disminuir la excentricidad (Figura 5.2).

Para una excentricidad fija (por ejemplo  $e = 0$ ), el decremento en  $q$ , produce que el tamaño del disco circunprimario crezca hasta incluso alcanzar al planeta compañero (Figura 5.13).

En el caso de  $q = 0.00005$  esta disminución no es apreciable para las excentricidades menores a  $e = 0.4$ , sin embargo, para excentricidades mayores o iguales a 0.6, la disminución en el tamaño del disco es muy significativa (Figura 5.14).

A diferencia de los casos con razón de masas no extrema ( $q \geq 0.1$ ), donde el com-

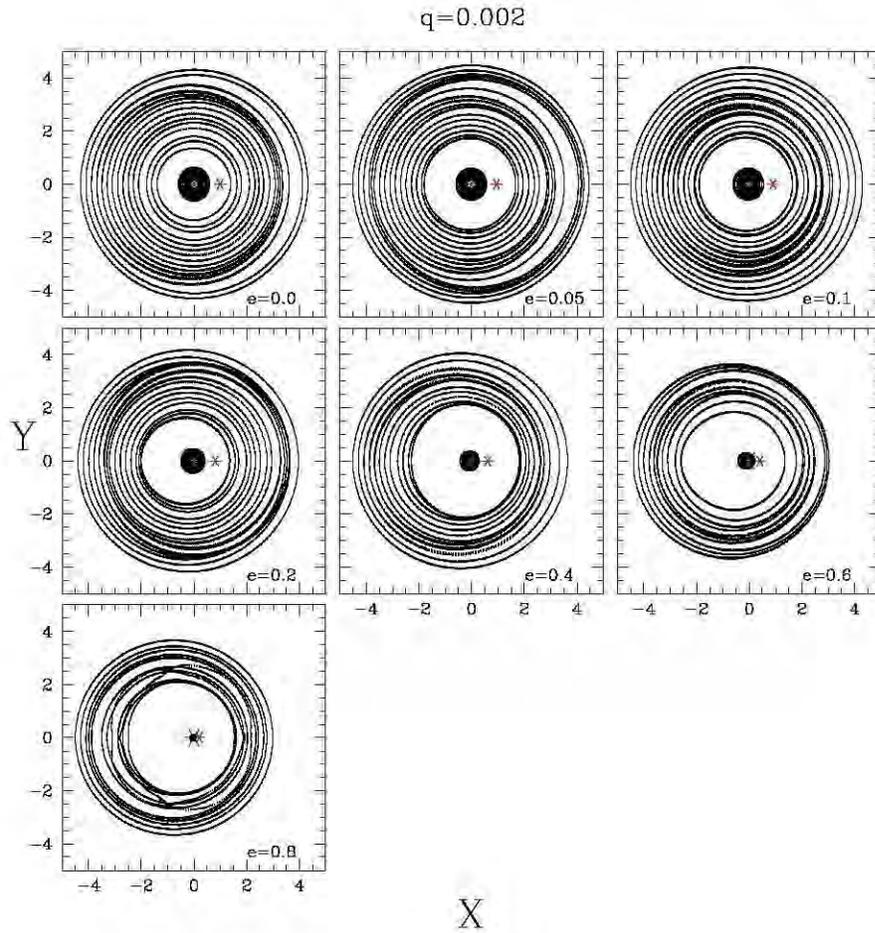


FIGURA 5.10: Familia de discos circumbinarios para razón de masas  $q = 0.002$  con diferentes excentricidades.

portamiento y (morfología) de los lazos es mucho menos complicado y más intuitivo, las binarias con razón de masas extrema son orbitalmente muy ricas y fuertemente sensibles a los parámetros de la binaria. Encontramos, por ejemplo, familias de lazos con características peculiares respecto a su espacio fase disponible. Esto es, observamos familias de lazos a una posición dada, en el que cualquier velocidad dentro de un cierto intervalo (que puede llegar a ser muy amplio) nos da como resultado un lazo invariante. En la Figura 5.15 mostramos dos ejemplos, en el panel superior, vemos como lazos partiendo de una posición muy cercana pero con velocidades ligeramente diferentes, dan lugar a familias diferentes de lazos estables. En el panel inferior, se encontraron dos

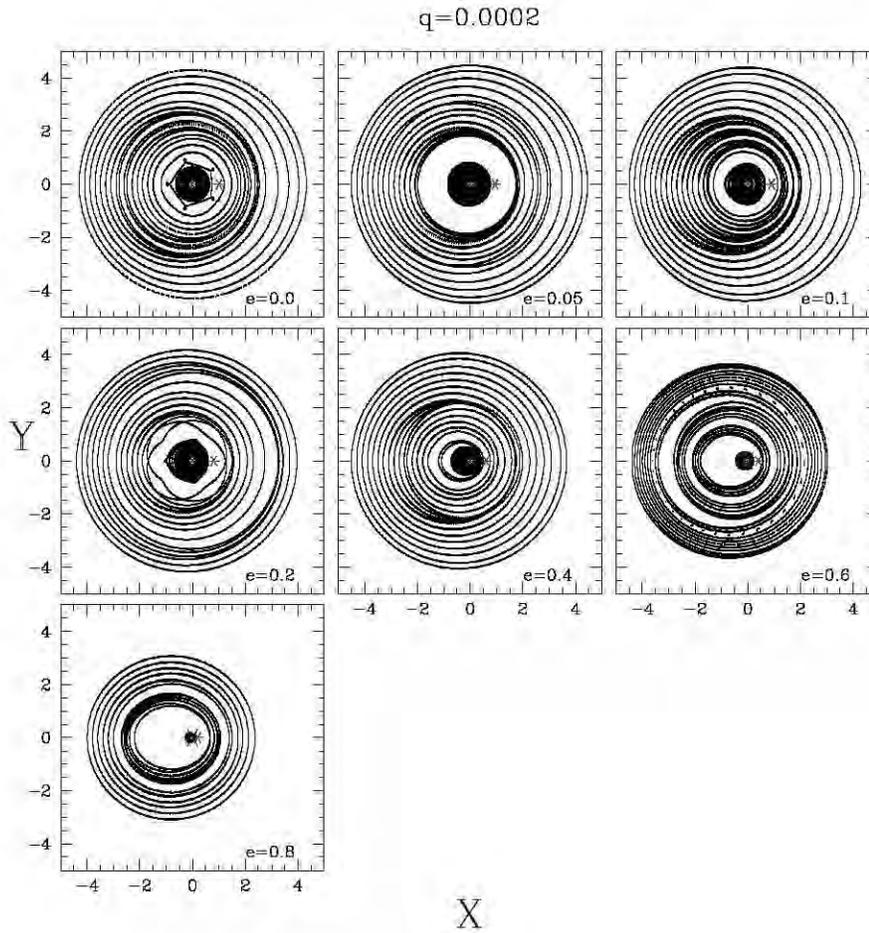


FIGURA 5.11: Familia de discoscircumbinarios para razón de masas  $q = 0.0002$  con diferentes excentricidades.

lazos invariantes para una misma posición con velocidades distintas con la diferencia de que las velocidades intermedias a éstas no dan como resultado lazos invariantes.

En general encontramos que, para casos de  $q \leq 0.0005$ , cerca de la estrella, el intervalo de velocidades para el cual es posible encontrar un lazo es amplio, esto es, se encuentra una gran cantidad de lazos partiendo de una misma posición. Este comportamiento nos hace recordar la forma de las órbitas para un sistema de fuerza central, para el cual la solución de las orbitas cerradas son todas las elipses que pasan por una misma posición, en nuestro caso la posición inicial de la partícula prueba. La aparición de este comportamiento nos indica que al hacer la masa secundaria cada vez más pequeña,

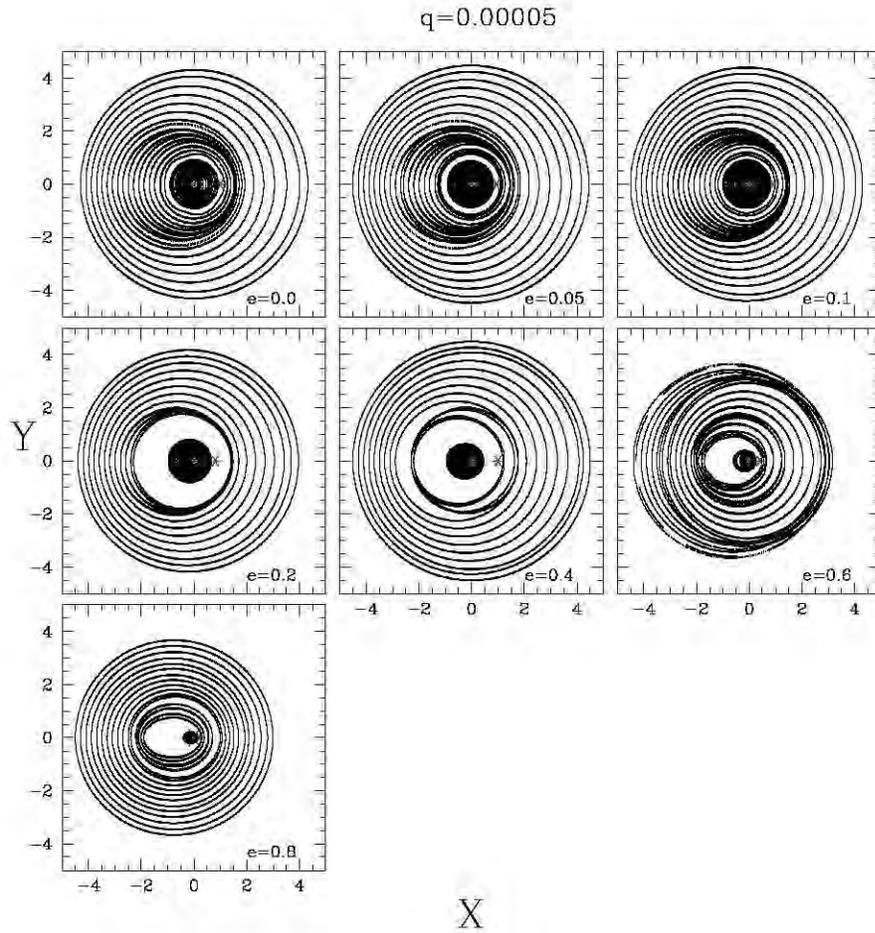


FIGURA 5.12: Familia de discos circumbinarios para razón de masas  $q = 0.00005$  con diferentes excentricidades.

recuperamos la forma de las órbitas características del caso de fuerza central.

Este comportamiento es más próximo a la estrella cuando crece la excentricidad, es decir, la región donde se encuentran estas familias de lazos es más pequeña cuanto más excéntrico es el sistema, debido a este comportamiento es necesario un estudio hidrodinámico para determinar en cual de todos estos lazos se estacionaría el gas.

En el caso de  $q=0.00005$  podemos observar que la presencia del planeta compañero prácticamente es despreciable a bajas excentricidades ( $e \leq 0.1$ ), pero al incrementar la excentricidad comienza a apreciarse la brecha que abre el planeta.

Para estos discos se encuentran lazos de baja probabilidad de ser poblados por gas o

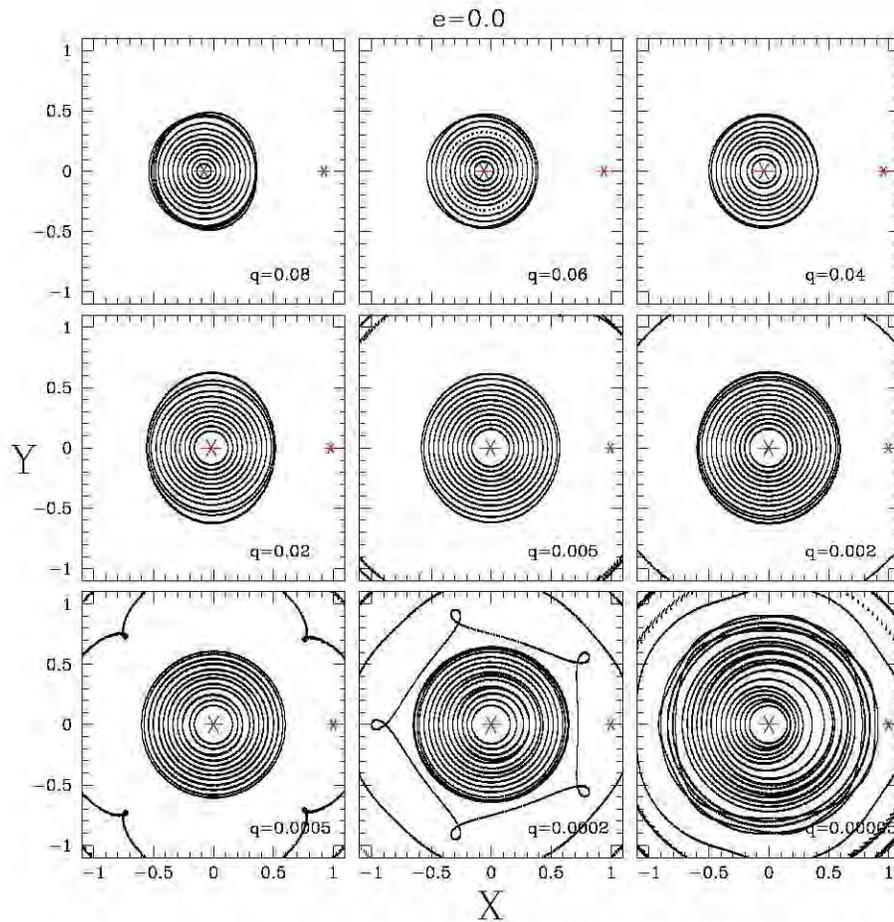


FIGURA 5.13: Disco circunprimario para excentricidad fija en  $e = 0$  y diferentes razones de masa  $q$ .

partículas debido a su reducido espacio fase, con formas semejantes a polígonos regulares como triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, etcétera (Figura 5.16). Estos lazos en los casos de  $q$  mayores marcan el fin del disco circunprimario, sin embargo para  $q$  más pequeñas estos lazos pueden aparecer incluso en medio del disco, probablemente siendo la causa de las brechas donde no se encuentran objetos.

De acuerdo con la teoría orbital de planetas, estos lazos de forma poligonal mostrados en la Figura 5.16, marcan las regiones con resonancias del sistema. Este es un estudio fuera del enfoque de este trabajo pero en el que estamos trabajando actualmente (Pichardo et al. en preparación).

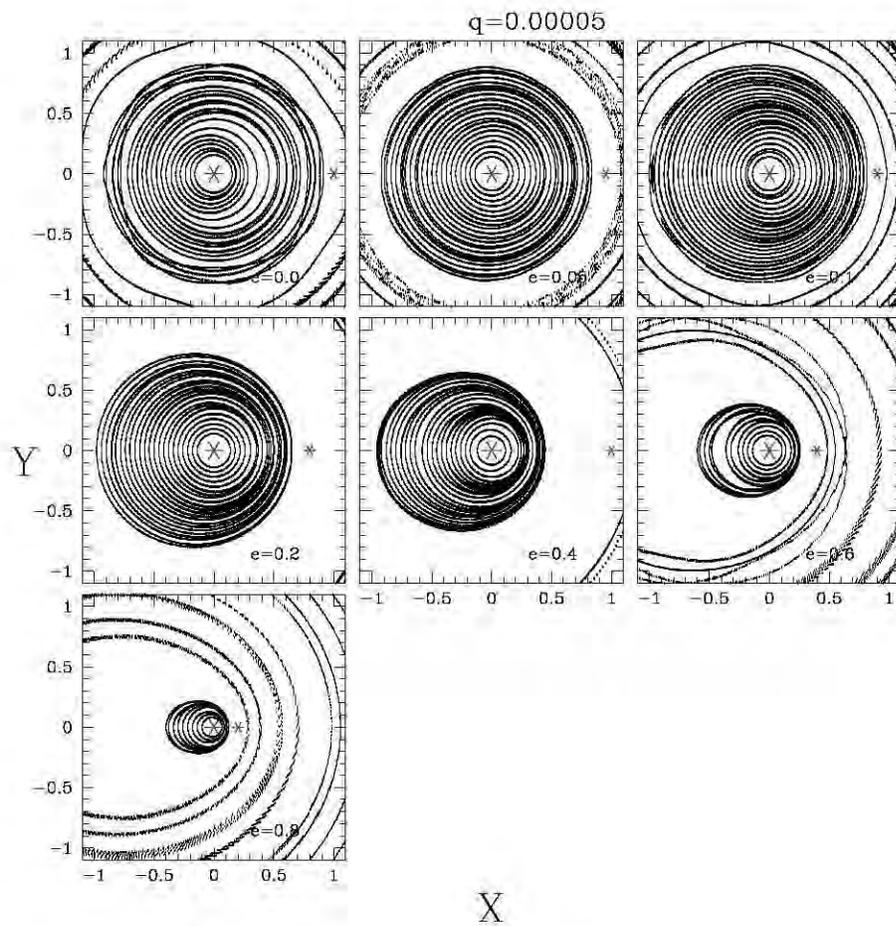


FIGURA 5.14: Disco circunprimario para  $q = 0.00005$  y excentricidad variable.

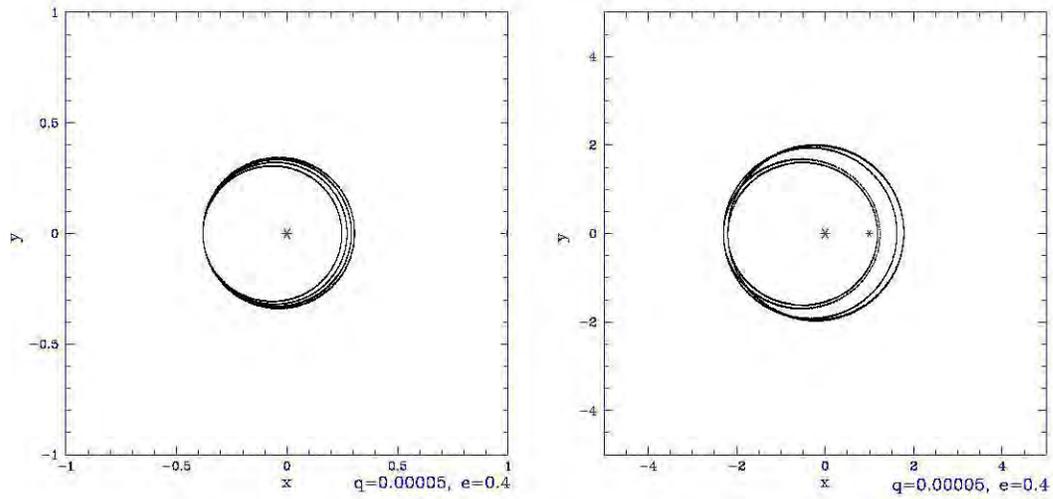


FIGURA 5.15: A la izquierda, cuatro lazos invariantes formados a diferentes velocidades partiendo de la misma posición. A la derecha, se muestran dos familias de lazos formados en dos posiciones a diferentes velocidades.

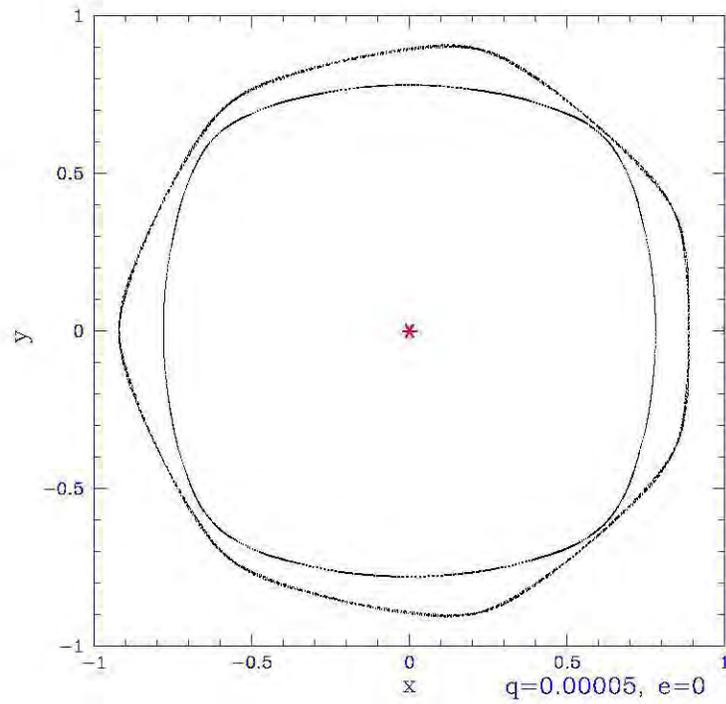


FIGURA 5.16: Lazos en forma de poligonos encontrados en el caso de  $q = 0.00005$  y excentricidad  $e = 0.0$ .

# Capítulo 6

## Aplicación del Método a Observaciones

A manera de ejemplo aplicamos el método a dos objetos astronómicos, el sistema Sol-Júpiter y el sistema de Fomalhaut y su disco. Para estos casos se construyen los discos de lazos invariantes y se discute sus características físicas.

### 6.1. Sistema Sol-Júpiter

Construimos el disco circunestelar alrededor de una estrella primaria de la masa del Sol, y un planeta compañero gigante de la masa de Júpiter, esto es, resolveremos el disco circumprimario del Sol, es decir, la región de órbitas estables del Sol, bajo la suposición de que Júpiter es el único planeta del sistema planetario. La razón masa y excentricidad del par Júpiter-Sol es  $q = 0.00095$ ,  $e = 0.0483$ .

En la Figura 6.1, mostramos los discos circumprimario y circumbinario del sistema Sol-Júpiter. Como referencia mostramos la posición aproximada de los planetas Marte (M), Júpiter (J), Saturno (St), Urano (U) y el Sol (S) y la región externa del cinturón de asteroides (AB).

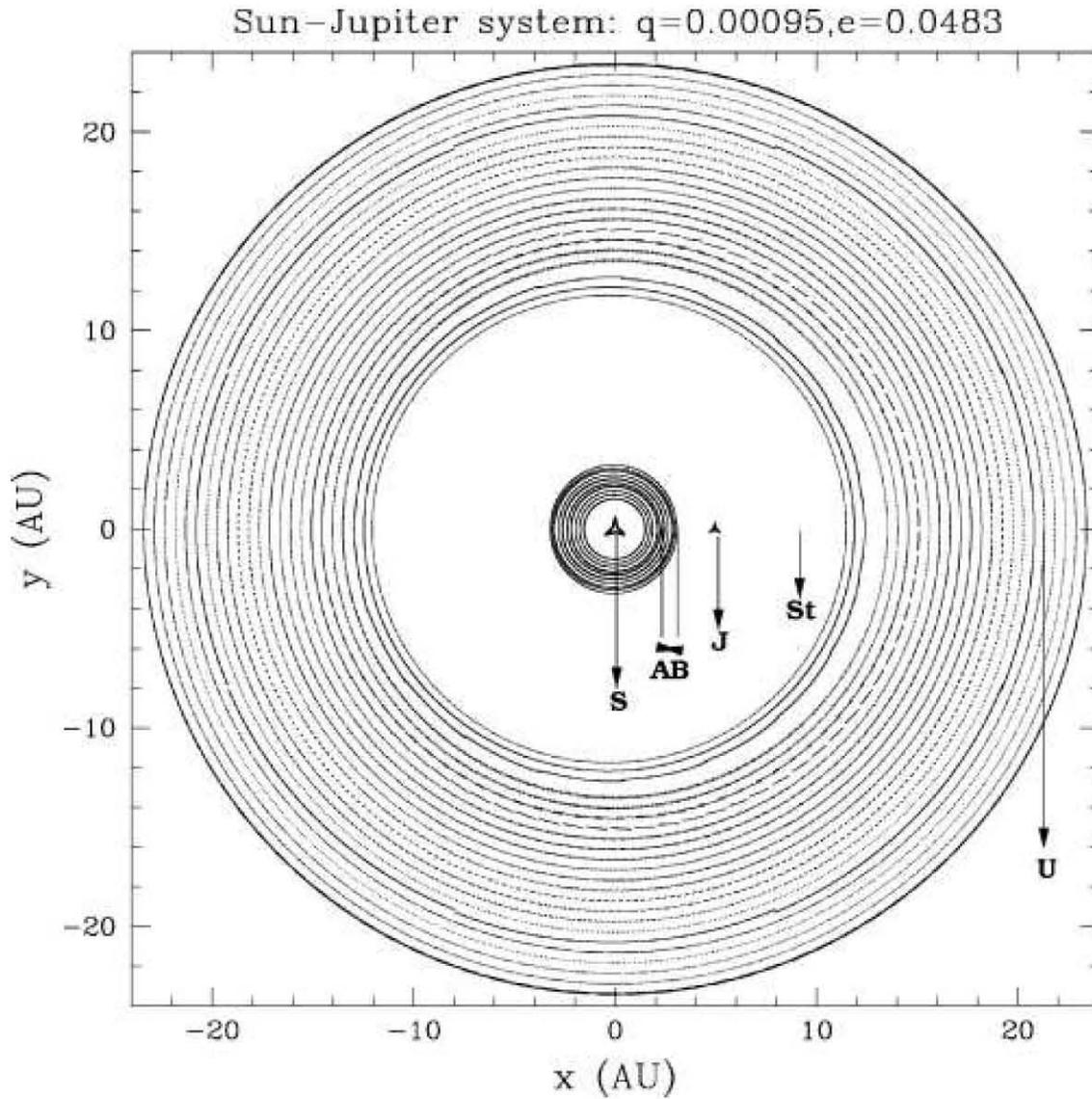


FIGURA 6.1: Disco circumprimario y circumbinario del sistema Sol-Júpiter. Para referencia mostramos la posición aproximada de los planetas Marte (M), Júpiter (J), Saturno (St), Urano (U), del Sol (S) y del cinturón de asteroides (AB).

Como se ve en la figura, el final del cinturón de asteroides está justo localizado donde el disco circumprimario termina. Esto es, el último lazo invariante, que marca el final de la región estable antes del disco circumbinario, coincide con el radio externo del cinturón de asteroides. Esto significa que Júpiter es gravitacionalmente el cuerpo que esculpe principalmente el límite externo del cinturón de asteroides, como es bien

conocido en dinámica de planetas.

En el caso del disco circumbinario, esta figura también nos muestra que Júpiter, a pesar de ser el planeta más grande del sistema planetario, no es el cuerpo que esculpe la orilla interna del cinturón de Kuiper (reservorio de cometas localizado después de Neptuno entre  $\sim 40$  y  $50$  UA). Efectivamente, para encontrar este límite interno tendríamos que resolver el sistema Sol-Neptuno.

## 6.2. Fomalhaut (*Debris disk*)

Fomalhaut (HD 216956 o  $\alpha$  Pices Austrinus), es un ejemplo claro de un sistema binario con razón de masa extrema ( $q = 0.00015$ ). Es una estrella brillante A3 V de  $2 M_{\odot}$ , una edad de entre 100 y 300 millones de años (Barrado y Navascues 1998) a una distancia de 7.7 pc.

Este sistema ha cobrado recientemente mucha importancia debido a que posee un disco de escombros visible y masivo (entre 50 y 100 veces la masa de la Tierra) localizado a una distancia de entre 133 y 158 UA de la estrella central (Dent et al. 2000), con una excentricidad  $e = 0.1$ . Esta estructura representa uno de los mejores análogos observados del cinturón de Kuiper. El disco presenta una asimetría respecto a la estrella central (Fomalhaut), esto es, está descentrado por aproximadamente 15 UA, además de ser ligeramente excéntrico ( $e \approx 0.1$ ).

Kalas et al. (2005) y Quillén (2006) propusieron para explicar las características geométricas del disco que rodeaba a la estrella, la presencia de un planeta interior. Para fortalecer esta teoría se realizaron diversos estudios que proponen una serie de soluciones para los parámetros del sistema, una recopilación de éstos se presenta en la tabla (6.1).

Con el método de lazos invariantes también se aproximaron los parámetros del planeta para este sistema utilizando los valores de las aproximaciones anteriores. En la Tabla 6.2, mostramos los resultados para Fomalhaut por el método de lazos invariantes utilizando las masas propuestas por Deller y Maddison (2005) y Quillén (2006) para el planeta, y nuestra mejor aproximación a la solución tomando las masas propuestas por estos autores. La primera columna muestra la masa tomada para Fomalhaut (la estrella central), la segunda es la masa propuesta para el planeta alrededor de Fomalhaut. La

TABLA 6.1: Tabla de parámetros propuestos para Fomalhaut de diferentes fuentes de la literatura. La primera columna es la masa de la estrella central, la segunda la masa del planeta, la tercera la excentricidad, la cuarta el semieje mayor, la quinta la técnica empleada y la última la referencia.

$M_{fomal}$	$M_{pl}$	e	a	Técnica	Referencia
$M_{\odot}$			(ua)		
2.3	$2 M_J$	0.4	59	N-cuerpos	Deller & Maddison
2	$1 M_{St}$ to $1 M_N$	0.1	119	perturbación secular	Quillén (2006)

TABLA 6.2: Características del disco de Fomalhaut por el método de lazos invariantes utilizando las masas propuestas por Deller y Maddison (2005) y Quillén (2006) para el planeta, y nuestra mejor aproximación. (J=Júpiter, St=Saturno, N=Neptuno).

$M_{Fomal}$	$M_{pl}$	e	a	$R_{sh}$	$R_{cb}$	$e_d$	Trabajo
$M_{\odot}$			(ua)	(ua)	(ua)		
2.3	$2 M_J$	0.4	59	36	155		Deller & Maddison
2.3	$2 M_J$	0.16	61.5	16	133	0.15	nuestra mejor aprox.
2	$M_N$	0.1	119	12.25	142.5		Quillén (2006)
2	$M_N$	0.13	90.5	14.5	136	0.13	nuestra mejor aprox.
2	$M_S$	0.1	119	12.5	148		Quillén (2006)
2	$M_S$	0.13	106.4	14	135	0.13	nuestra mejor aprox.

tercera y cuarta columnas son la excentricidad y semieje mayor de la órbita planetaria. La quinta y sexta son los corrimientos (descentrado) del disco calculado con lazos invariantes. La séptima columna es el valor de la excentricidad del radio interno del disco circumbinario y la última columna indica el autor del trabajo del cual tomamos los parámetros o nuestra mejor aproximación a los parámetros que ajustan mejor los valores observados del disco de Fomalhaut.

Bajo la suposición de que un cuerpo secundario (planeta gigante) es la única fuente de asimetría del anillo de Fomalhaut, hemos calculado familias de lazos invariantes (discos) correspondientes a ambos modelos. En el panel superior de la Figura 6.1, los resultados proporcionados corresponden a la aproximación de Deller y Maddison (2005). De la tabla y la figura mostramos que el valor inferido para la excentricidad de Deller y Maddison (2005) es considerablemente mayor de lo que debería ser para obtener el

radio interno observado del disco de Fomalhaut y el descentrado, si la masa del planeta es  $2M_J$ . En el panel inferior de la misma figura y segunda línea del de la Tabla 6.2, mostramos una solución para un planeta con masa de  $2M_J$  para el cual los valores del radio del disco circumbinario y su corrimiento (descentrado) son mucho más parecidos al sistema real.

Quillén (2006) propuso soluciones con un planeta menos masivo usando la fórmula de Wyatt et al. (1999) para calcular la excentricidad esperada. Para dos valores extremos del intervalo de masas dado en ese trabajo, esto es, entre la masa de Saturno y la de Neptuno, dadas en la tabla 6.1, hemos calculado los lazos invariantes para encontrar el radio promedio y el corrimiento. Los valores dados por Quillén (2006) están cerca de nuestros resultados derivados con lazos invariantes (Tabla 6.2). Esto muestra que, en el límite de excentricidades pequeñas, donde estos métodos son válidos solamente, nuestros cálculos basados en lazos invariantes dan resultados similares.

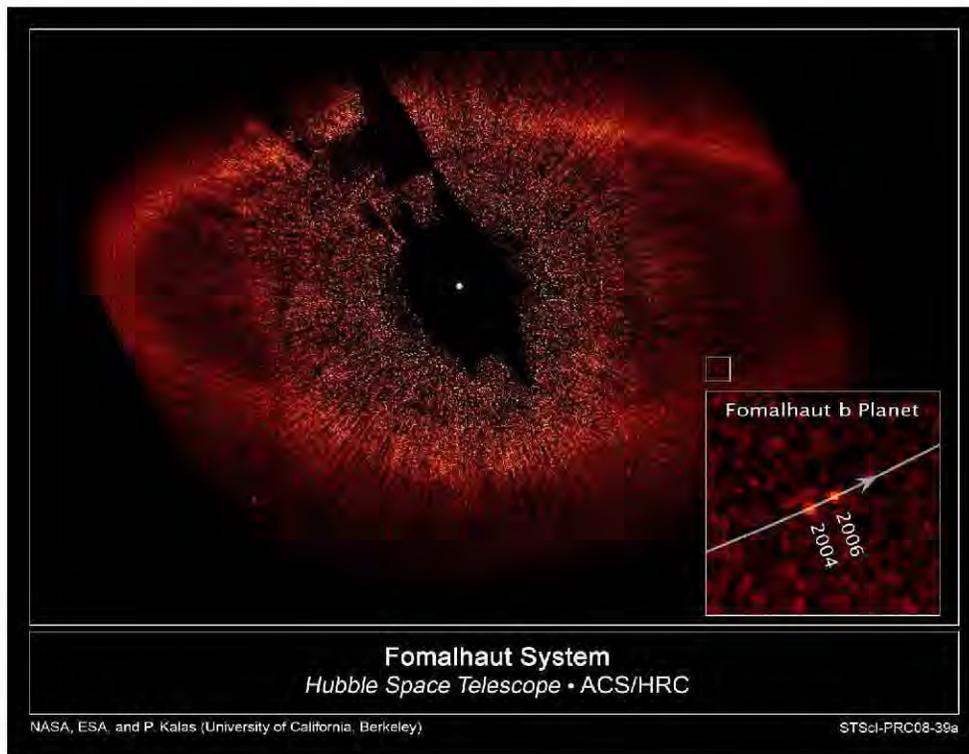


FIGURA 6.3: Disco de escombros de Fomalhaut, se indica además la posición del planeta

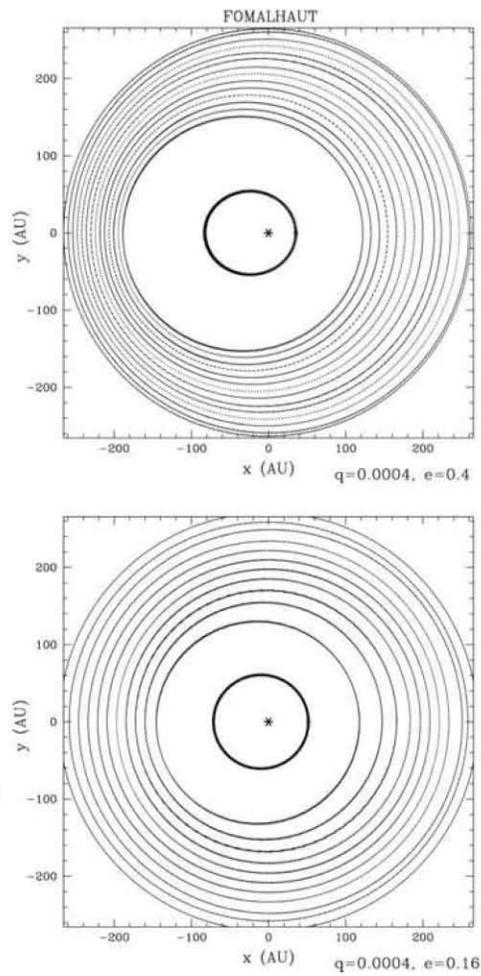


FIGURA 6.2: Disco circumbinario de Fomalhaut. Arriba: Lazos invariantes usando los parámetros ( $e = 0.4, a = 59$  UA) de la tabla 6.1 por Deller y Maddison (2005). Abajo: nuestra solución con la misma masa del planeta pero con ( $e = 0.16, a = 61.5$  UA). La trayectoria del planeta se muestra con la línea más oscura.

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo hemos aplicado el método conocido como *Lazos Invariantes* para realizar un mapeo detallado de regiones estables para discos (gas, planetas, asteroides, cometas) en sistemas binarios excéntricos con razón de masa extrema, esto es, donde el cuerpo secundario va desde una estrella pequeña en relación a la primaria, hasta planetas de una fracción de la masa de Urano.

Los mapas de lazos invariantes (equivalentes a órbitas periódicas en un sistema conservativo), vale la pena mencionar, en su aplicación a excentricidades arbitrarias con razones de masa extrema, son un trabajo nuevo y valioso en la literatura astronómica, dado que nos permitirá hacer predicciones sobre los tamaños y geometría de los discos, una vez conocidos los parámetros orbitales de la binaria central, o viceversa, conocidos los tamaños de los discos, nos permitirá acotar el espacio de parámetros de la binaria central. Aunado a lo anterior, el mapeo de las regiones estables puede ser de gran utilidad para la búsqueda de planetas extrasolares, delimitando las regiones de mayor probabilidad para la existencia de éstos.

En nuestro estudio encontramos que el tamaño de los discos en sistemas binarios en general (razones de masas no extremas), es afectado severamente por la excentricidad y de forma menos notoria por la razón de masas. Por otra parte, para el caso específico de razón de masa extrema, el comportamiento se mantiene, aunque en este caso la razón de masa juega un papel mucho más importante, es decir, el tamaño de los discos se ve mucho más afectado por este parámetro que en los casos de razones de masa no extremas.

Para las razones de masa  $q < 0.002$ , en regiones cercanas a las estrellas, existen familias de lazos estables con un intervalo entero de velocidades a una misma posición. Esto es, regiones donde las familias de lazos se bifurcan dando soluciones estables traslapadas. Para conocer la trayectoria más probable se requiere un estudio teórico del espacio fase disponible o un estudio hidrodinámico para encontrar la trayectoria más probable que seguiría el gas en estas regiones.

Se encontraron lazos de forma poligonal, estos en los casos de razón de masa mayor ( $0.1 > q > 0.005$ ) y que, de acuerdo con la teoría nos marcan el límite de la región de estabilidad, delimitada aparentemente por resonancias orbitales (estudio que se llevará a cabo; Pichardo et al. en preparación). Por otra parte, para los casos de razón de masa menor, estos lazos se encuentran en los discos mismos. En estas regiones donde aparecen lazos de formas poligonales, se abren pequeñas brechas donde no se pueden estacionar objetos de forma estable.

Hemos aplicado este método a dos sistemas reales, Sol-Júpiter y el disco de Fomalhaut. En el caso de Júpiter, encontramos que si suponemos que el sistema planetario está formado solo con el Sol y Júpiter, el radio del disco circumprimario corresponde con mucha precisión al radio final del cinturón de asteroides, demostrando que el método funciona si Júpiter es el planeta que delimita este anillo de asteroides, hecho bien conocido. En el caso de Fomalhaut, hemos aplicado este método con el propósito de restringir el espacio de parámetros para el planeta que produce el corte en el disco de restos de este objeto. Obtenemos un acuerdo excelente con otros trabajos, y logramos descartar muchas posibilidades antes de que el planeta fuera descubierto recientemente.

## 7.1. Trabajo a futuro

Este trabajo tiene muchas vertientes de las cuales menciono específicamente tres, que son las que proceden inmediatamente. En el caso de las primeras dos ya hemos comenzado a trabajar.

Con este estudio obtendremos una función analítica que proporcione los límites de las regiones estables (radios) como función de la razón de masa y la excentricidad para razones de masa extremas, relación que no existe en la literatura actualmente.

Utilizando la información dada por los lazos poligonales se ha iniciado un estudio

para encontrar su relación con las regiones de resonancia de estos sistemas.

Esta pendiente la realización de simulaciones hidrodinámicas en las regiones para las que se encontró una bifurcación de las familias de lazos, con el fin de estudiar el comportamiento del gas y determinar que lazos resultan los de más alta probabilidad para que el gas encuentre la estabilidad.



Parte IV  
APÉNDICE



## Apéndice A

### Mapas de los Lazos invariantes

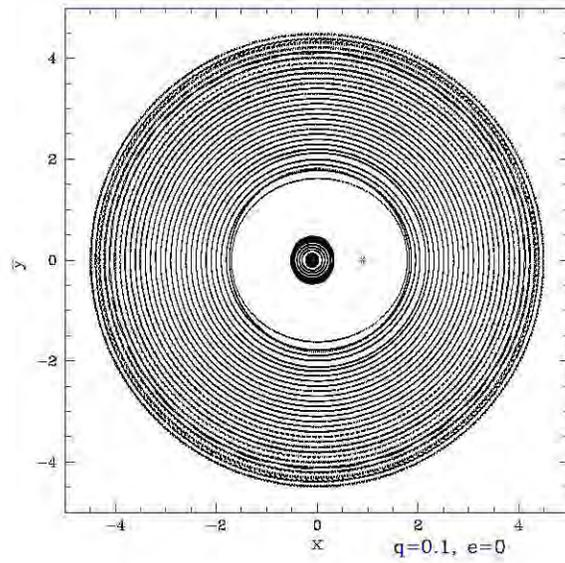


FIGURA A.1: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.1$   $e=0.0$ .

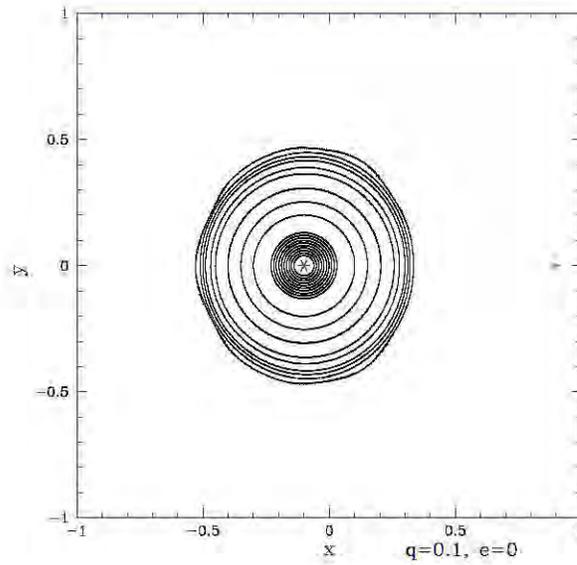


FIGURA A.2: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.1$   $e=0.0$ .

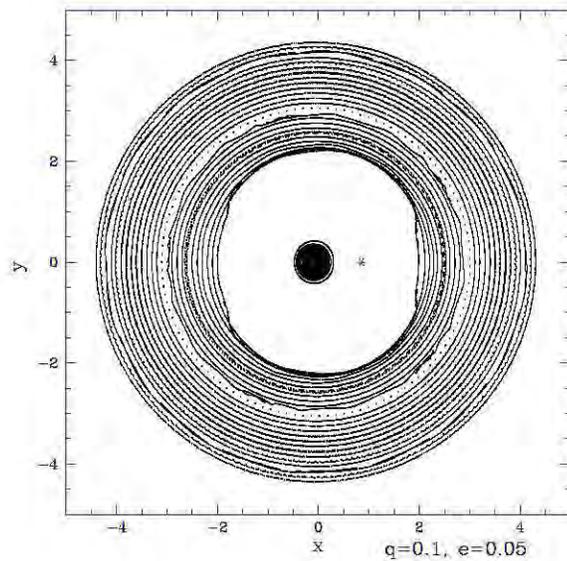


FIGURA A.3: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.1, e=0.05$ .

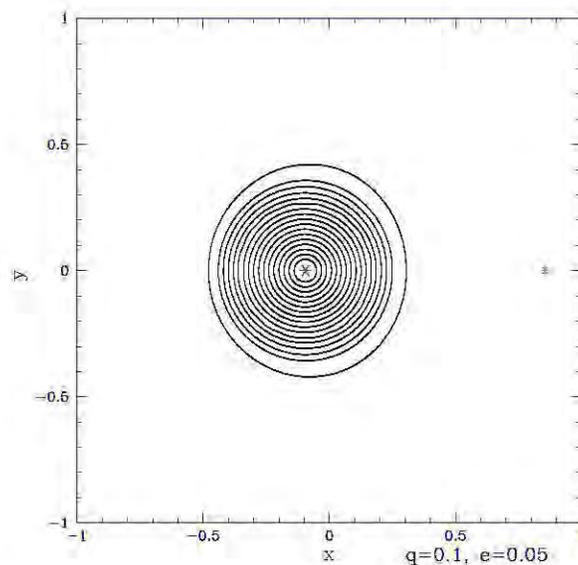


FIGURA A.4: Mapeo del disco circprimario en el caso  $q=0.1, e=0.05$ .

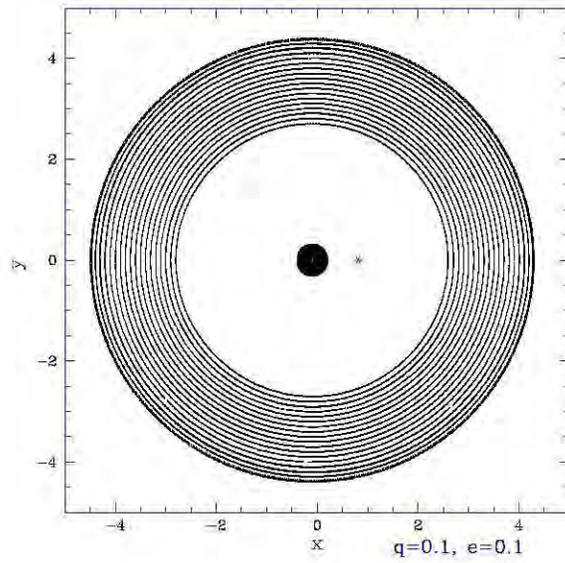


FIGURA A.5: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.1$   $e=0.1$ .

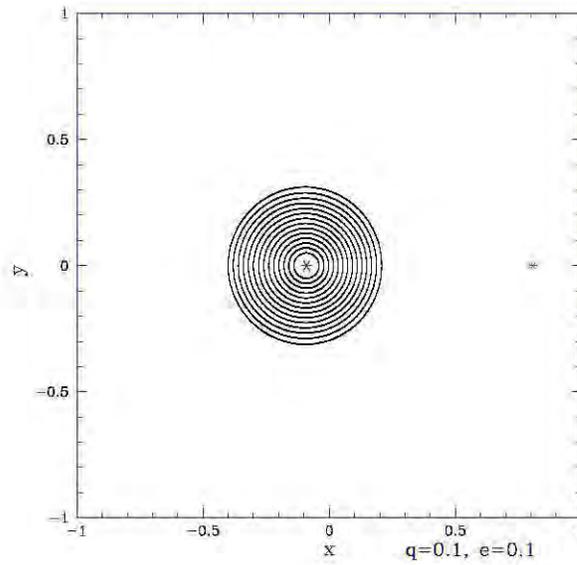


FIGURA A.6: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.1$   $e=0.1$ .

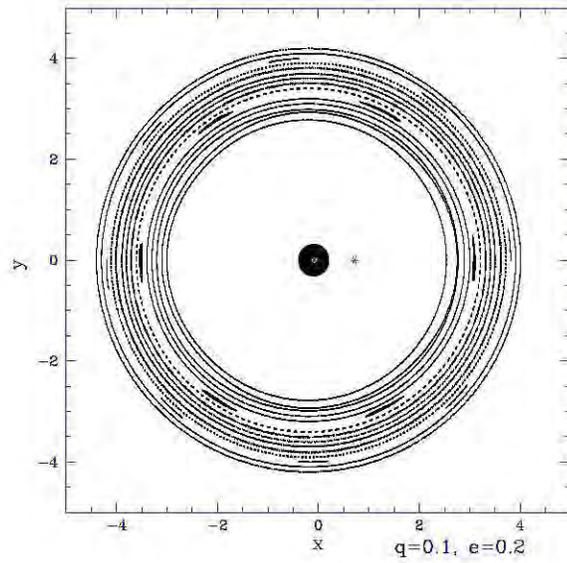


FIGURA A.7: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.1$   $e=0.2$ .

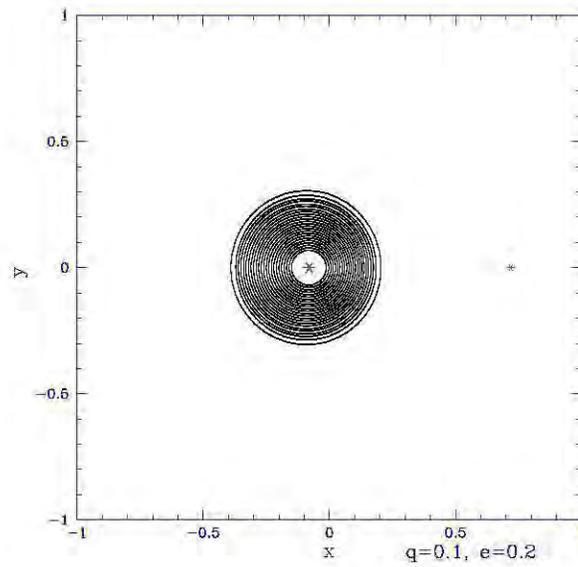


FIGURA A.8: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.1$   $e=0.2$ .

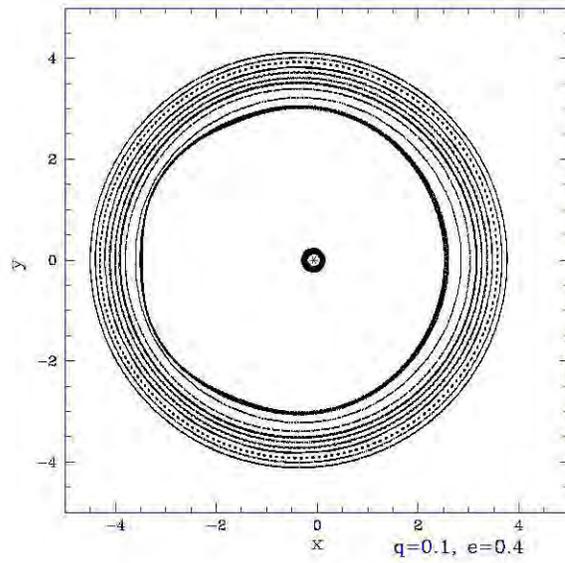


FIGURA A.9: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.1$   $e=0.4$ .

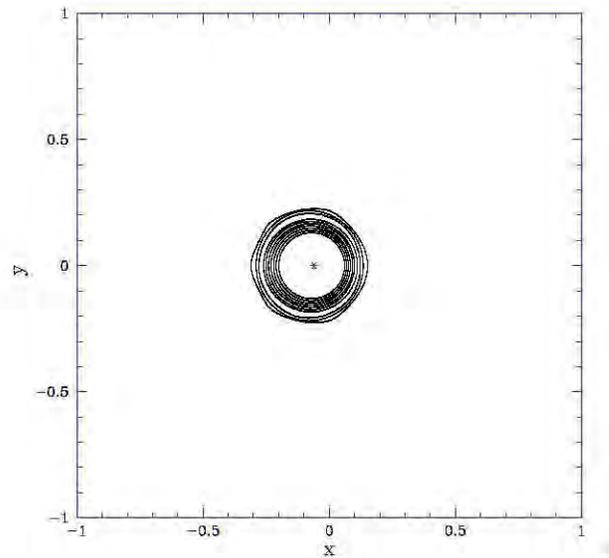


FIGURA A.10: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.1$   $e=0.4$ .

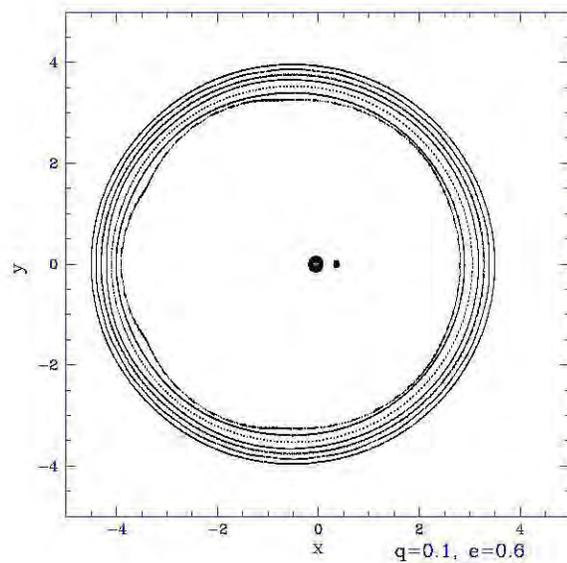


FIGURA A.11: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.1$   $e=0.6$ .

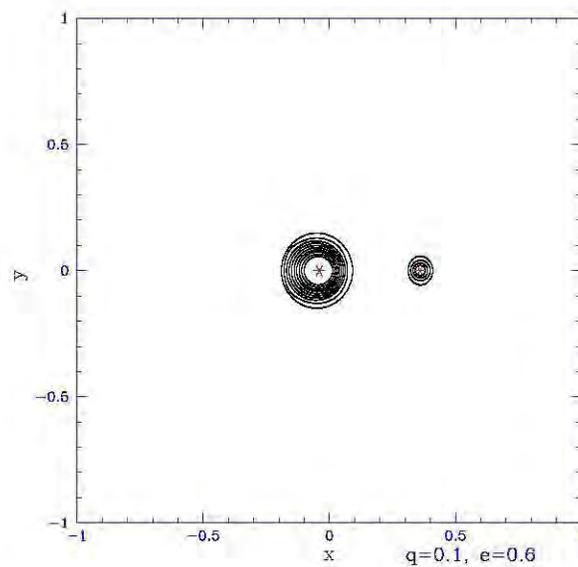


FIGURA A.12: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.1$   $e=0.6$ .

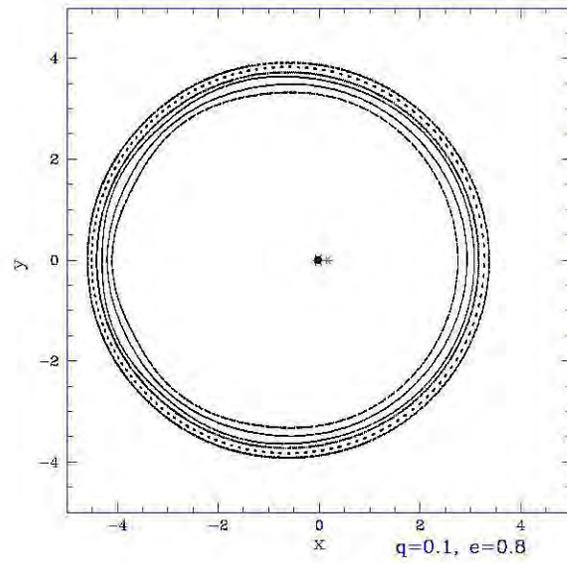


FIGURA A.13: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.1$   $e=0.8$ .

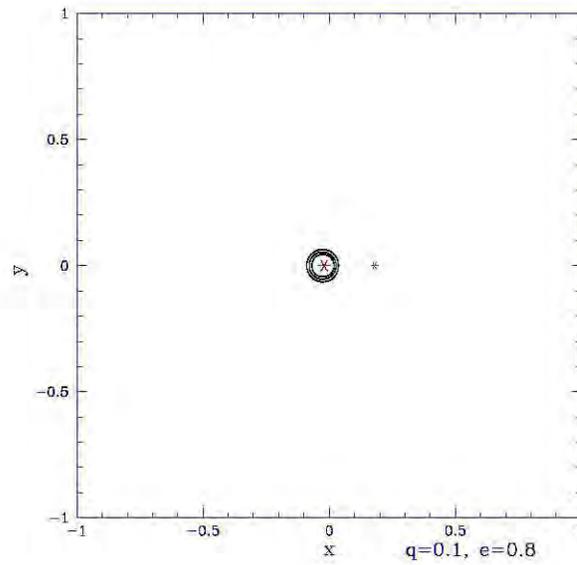


FIGURA A.14: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.1$   $e=0.8$ .

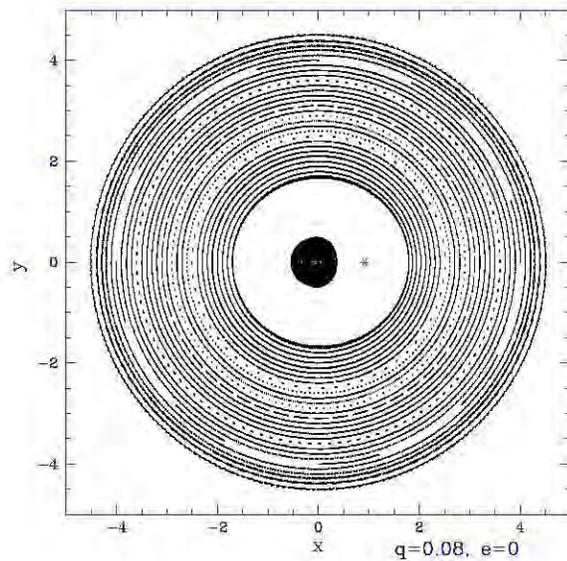


FIGURA A.15: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.0$ .

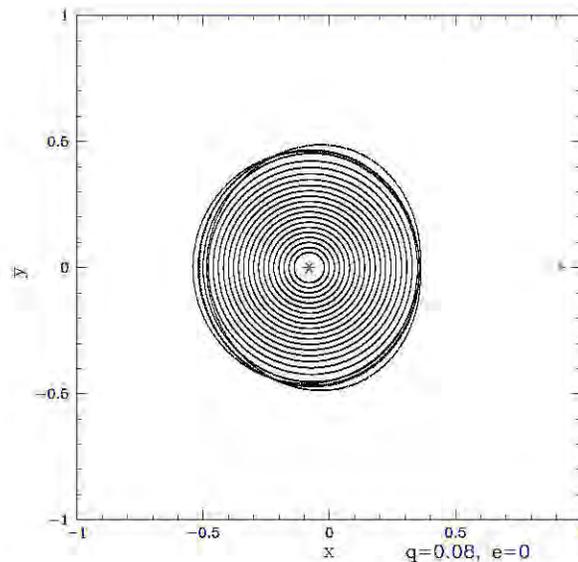


FIGURA A.16: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.08$   $e=0.0$ .

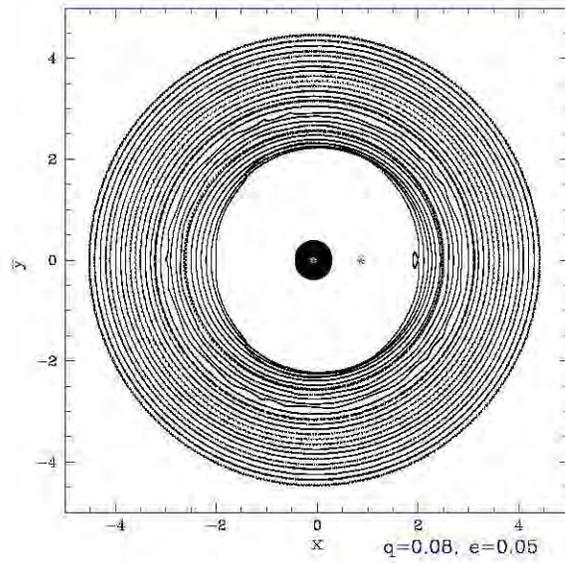


FIGURA A.17: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.05$ .

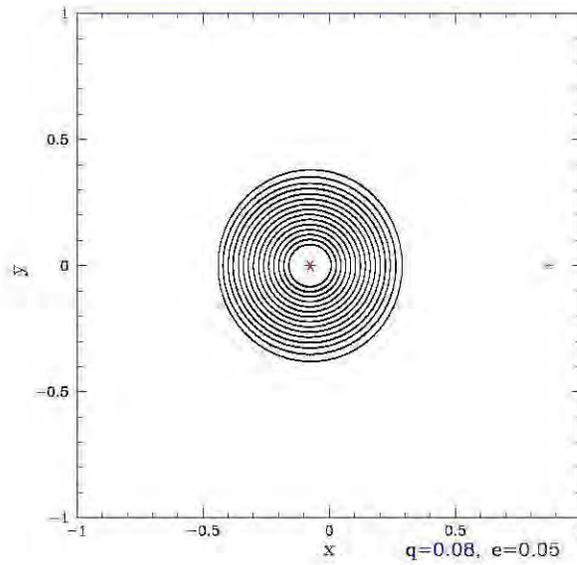


FIGURA A.18: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.08$   $e=0.05$ .

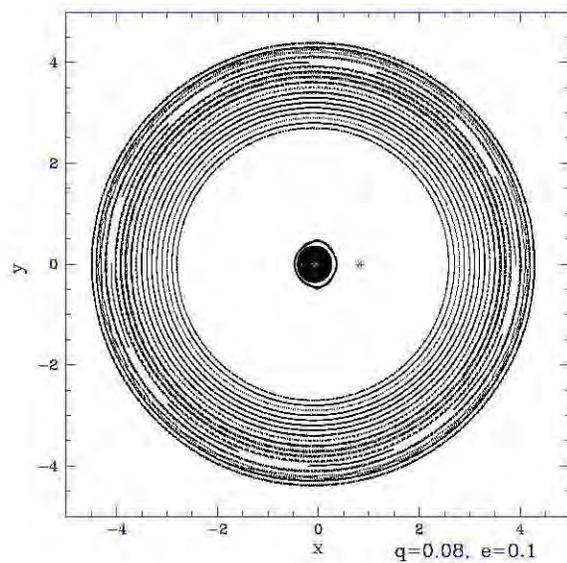


FIGURA A.19: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.1$ .

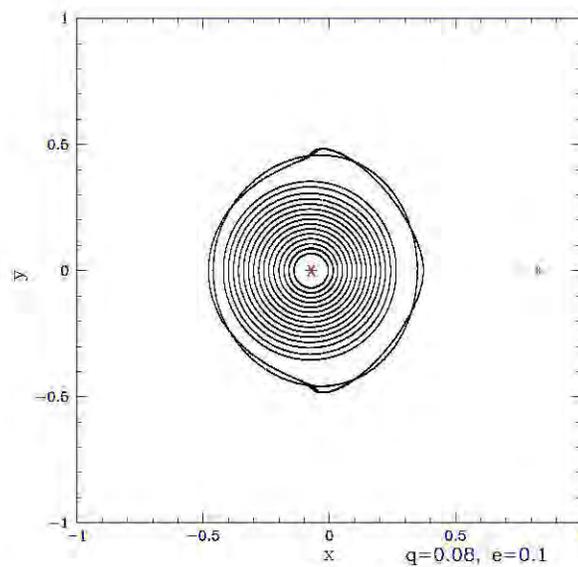


FIGURA A.20: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.08$   $e=0.1$ .

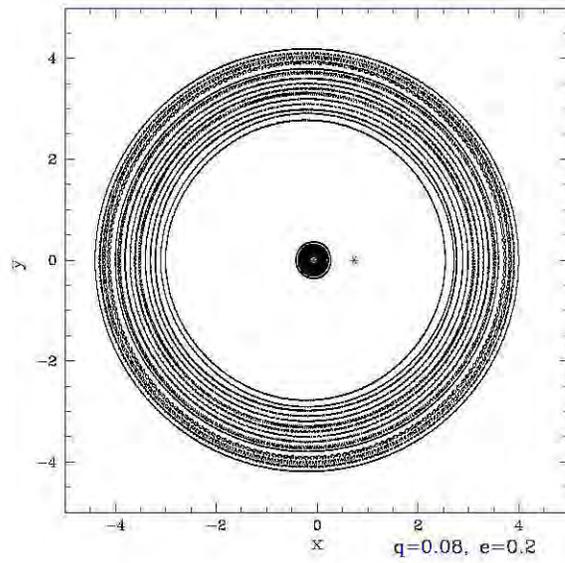


FIGURA A.21: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.2$ .

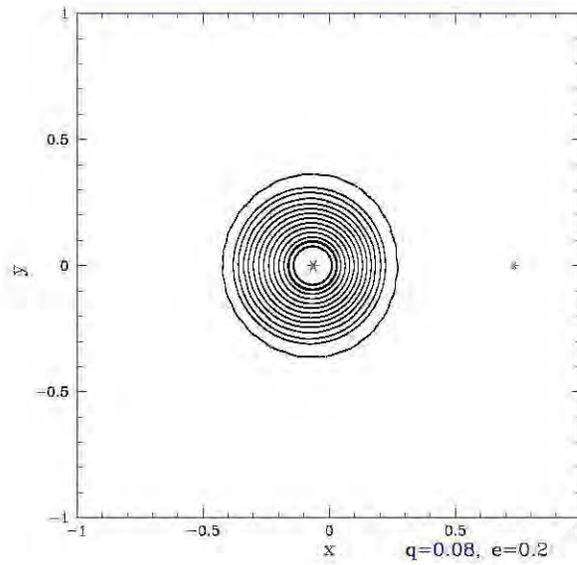


FIGURA A.22: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.2$ .

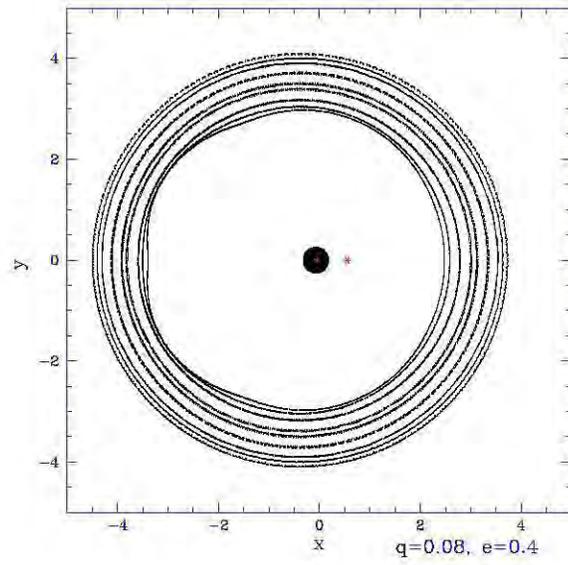


FIGURA A.23: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.4$ .

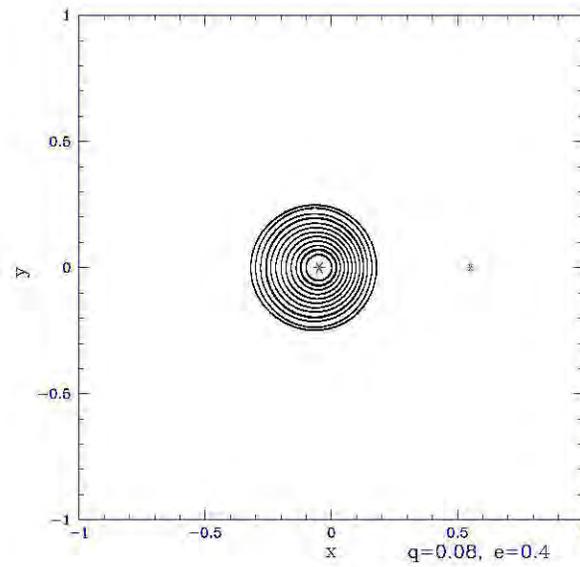


FIGURA A.24: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.4$ .

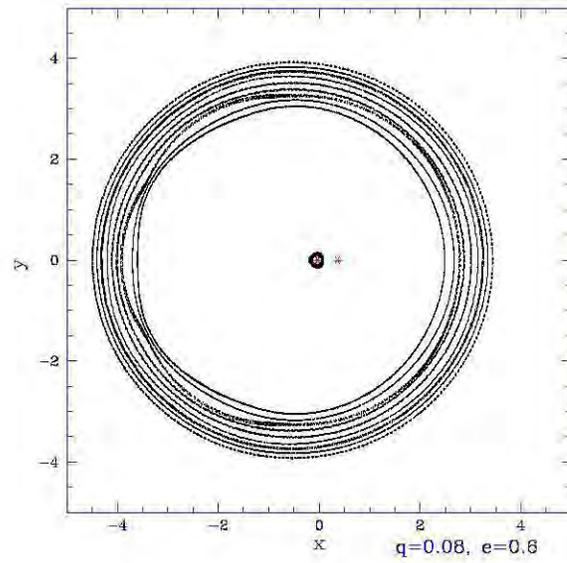


FIGURA A.25: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.6$ .

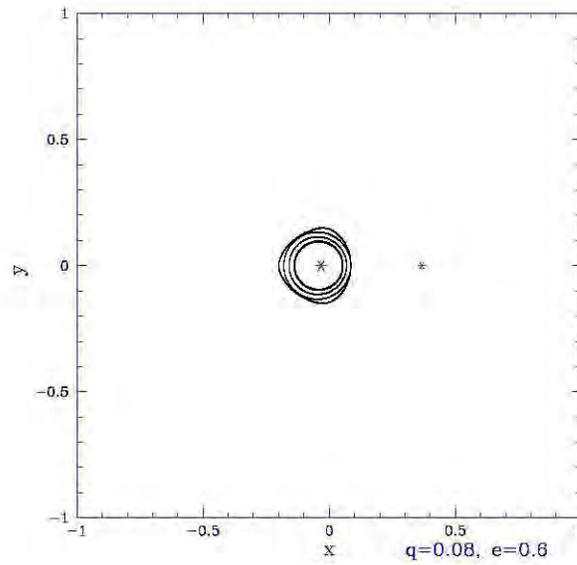


FIGURA A.26: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.6$ .

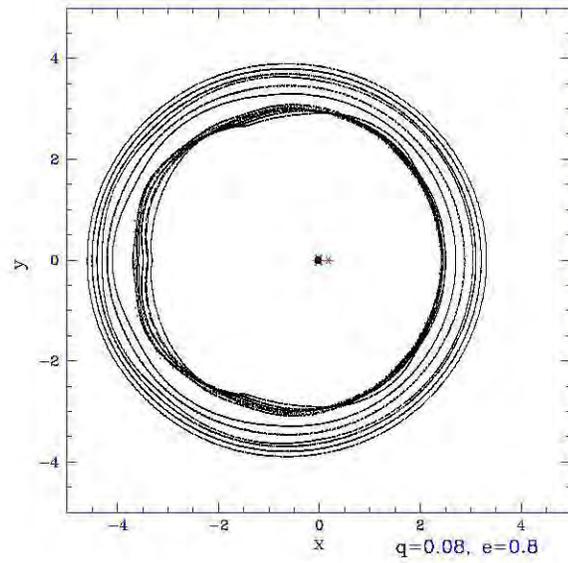


FIGURA A.27: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.8$ .

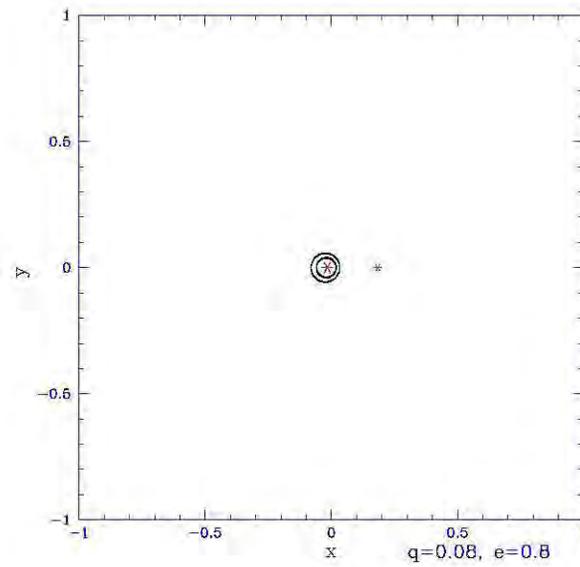


FIGURA A.28: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.08$   $e=0.8$ .

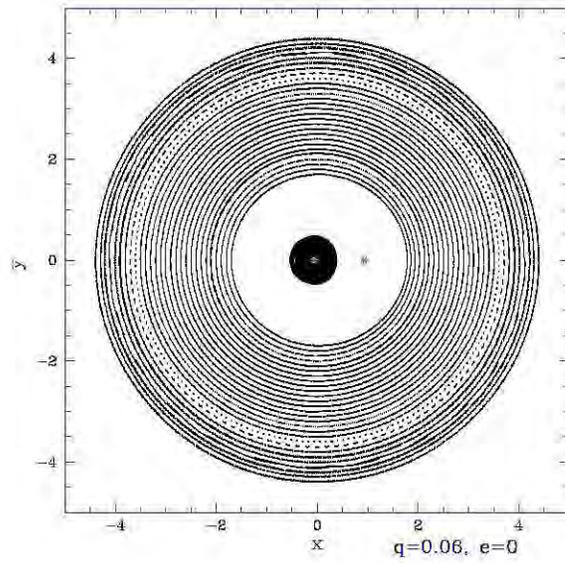


FIGURA A.29: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.0$ .

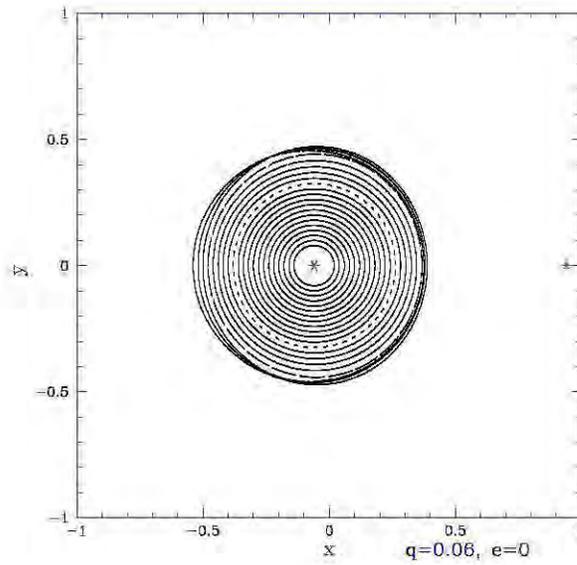


FIGURA A.30: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.06$   $e=0.0$ .

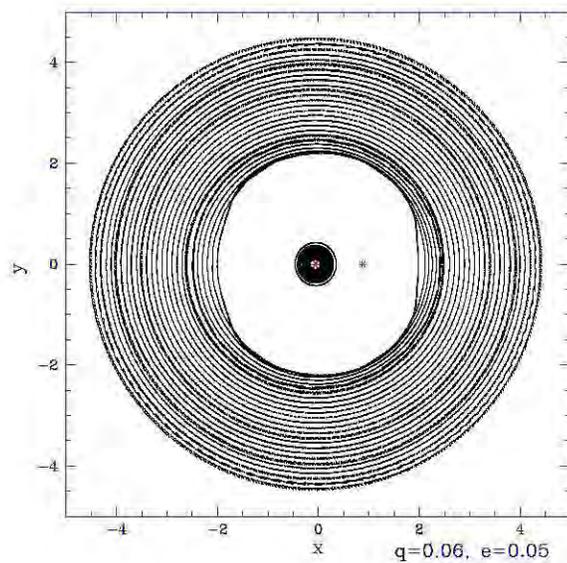


FIGURA A.31: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.05$ .

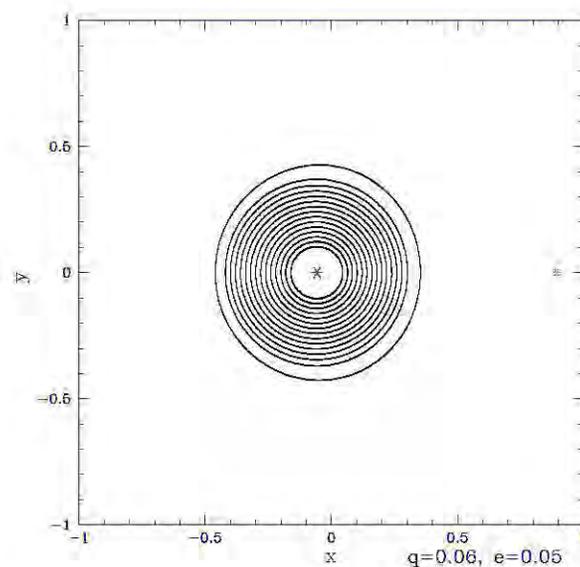


FIGURA A.32: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.06$   $e=0.05$ .

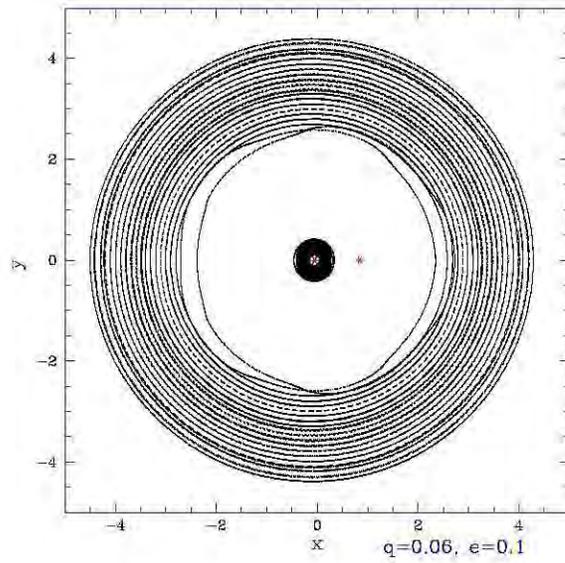


FIGURA A.33: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.1$ .

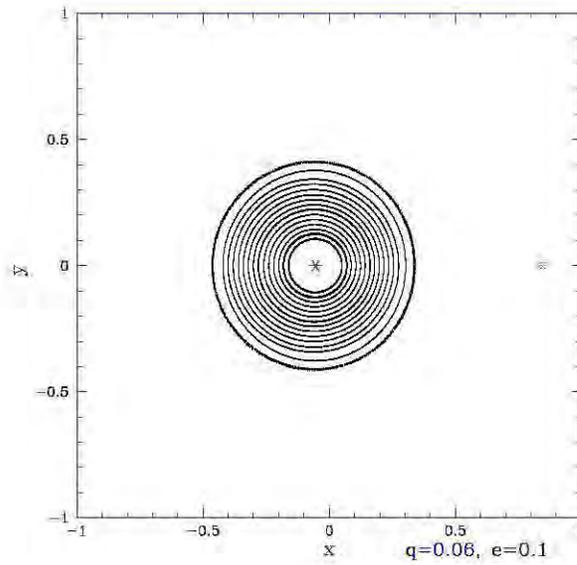


FIGURA A.34: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.06$   $e=0.1$ .

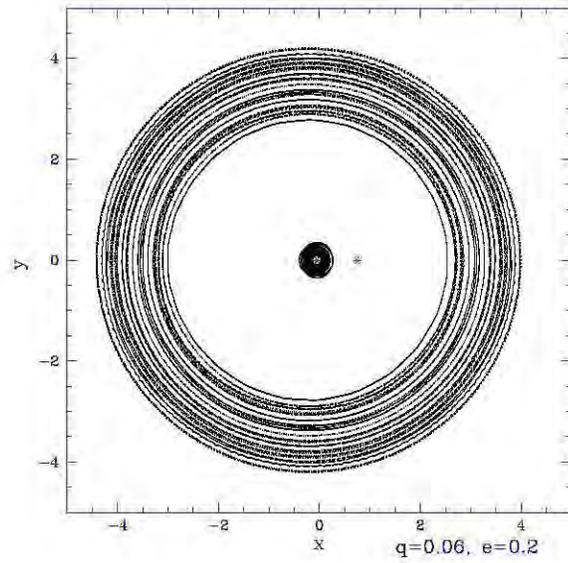


FIGURA A.35: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.2$ .

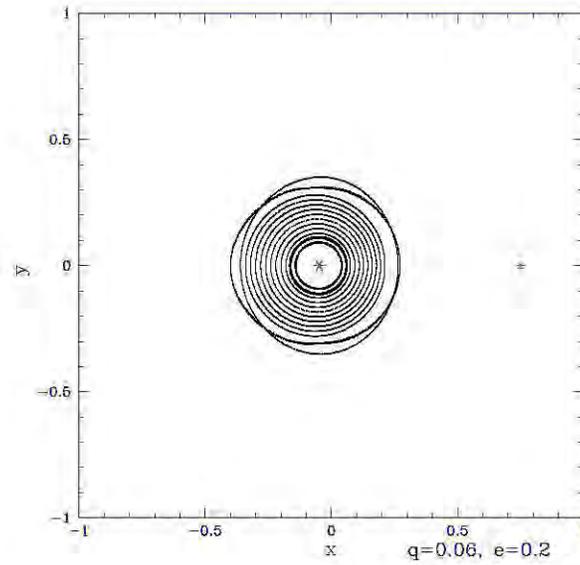


FIGURA A.36: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.06$   $e=0.2$ .

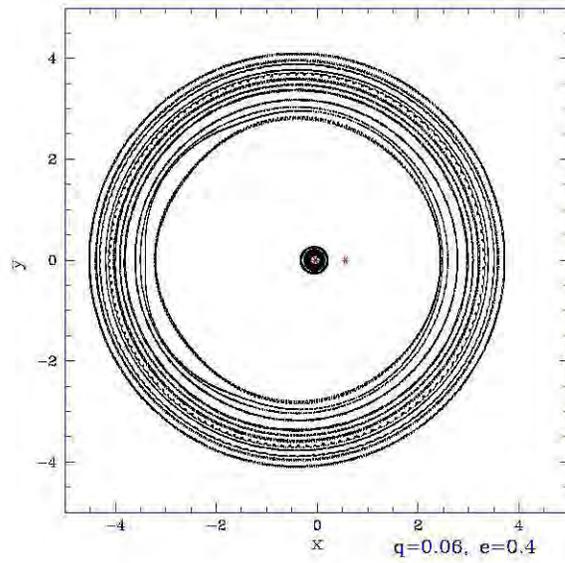


FIGURA A.37: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.4$ .

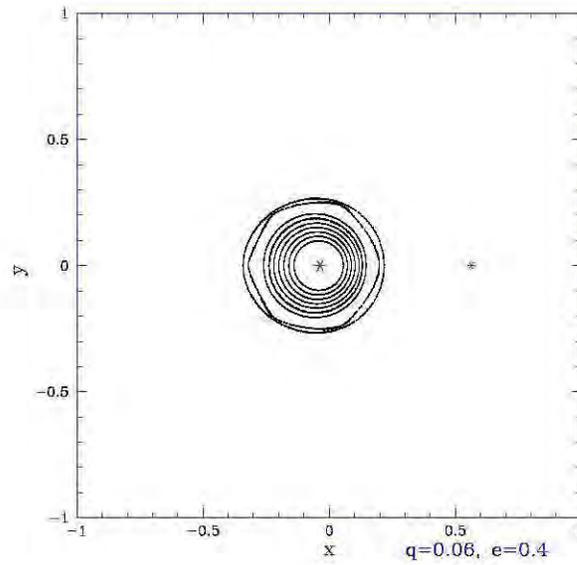


FIGURA A.38: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.4$ .

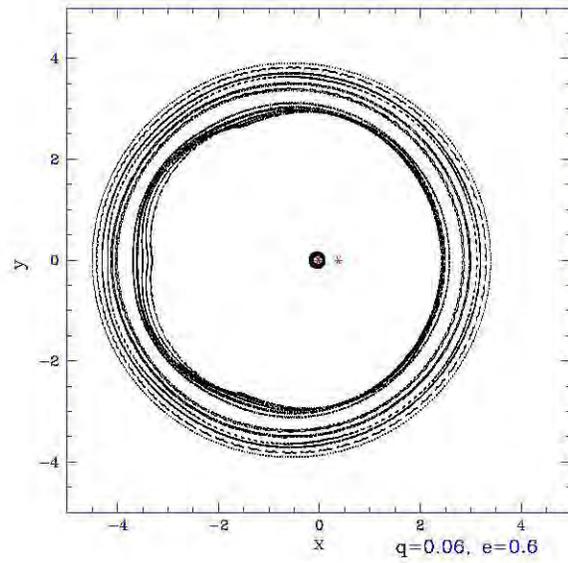


FIGURA A.39: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.6$ .

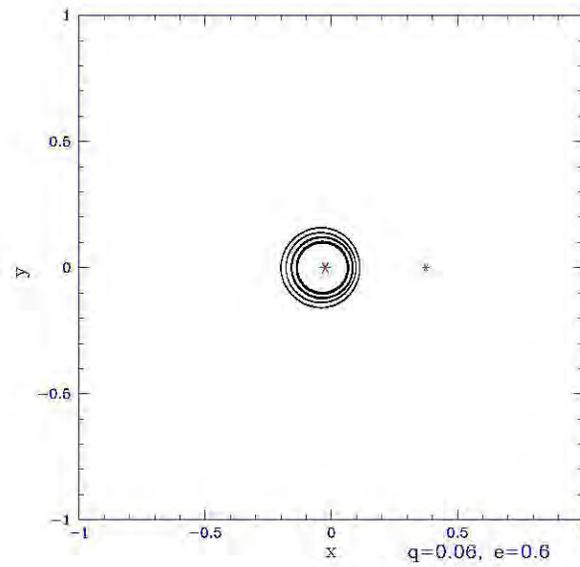


FIGURA A.40: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.06$   $e=0.6$ .

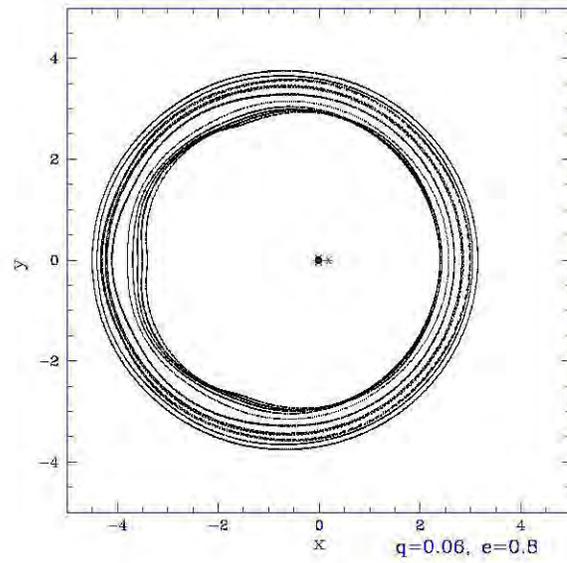


FIGURA A.41: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.06$   $e=0.8$ .

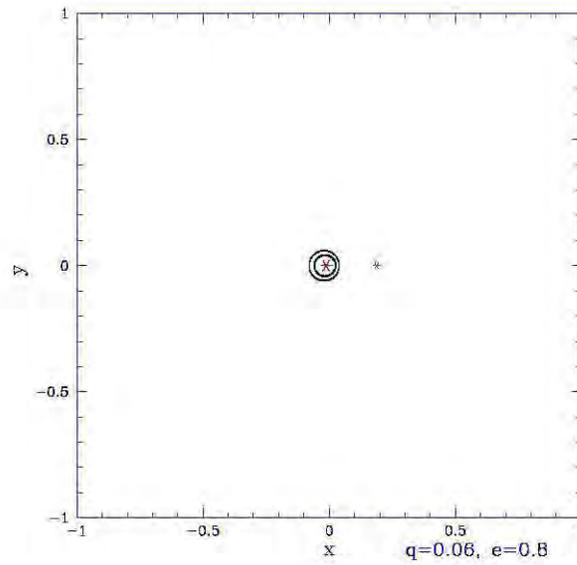


FIGURA A.42: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.06$   $e=0.8$ .

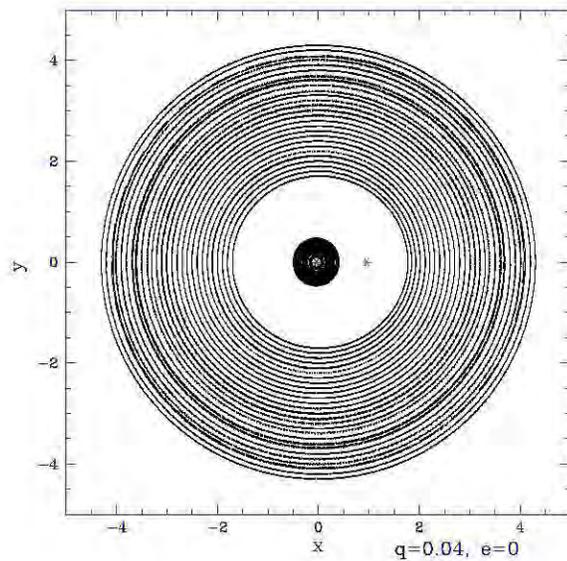


FIGURA A.43: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.0$ .

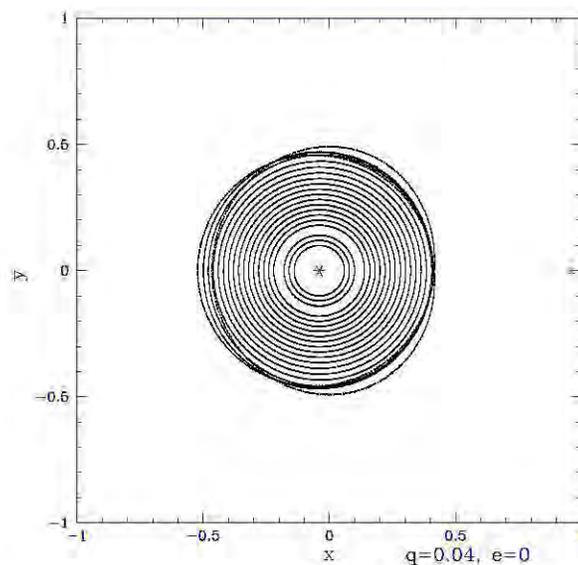


FIGURA A.44: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.04$   $e=0.0$ .

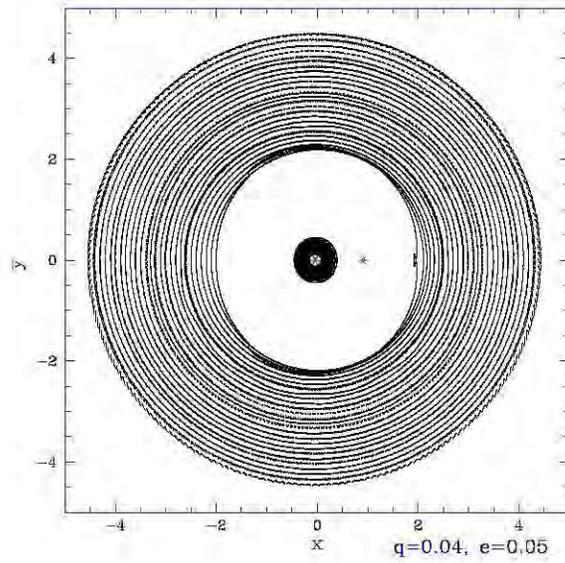


FIGURA A.45: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.05$ .

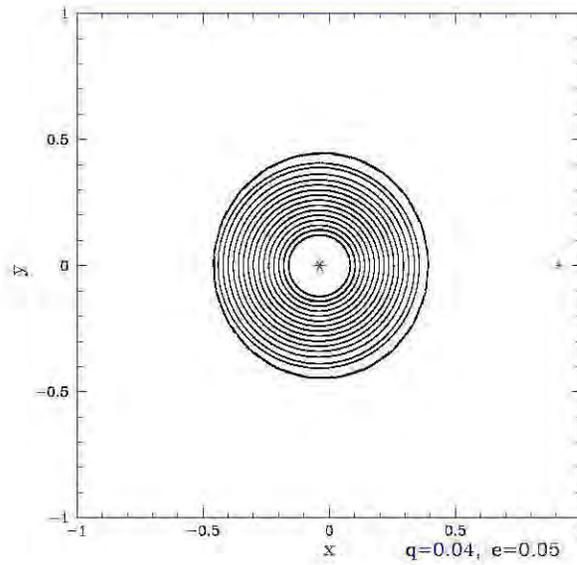


FIGURA A.46: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.04$   $e=0.05$ .

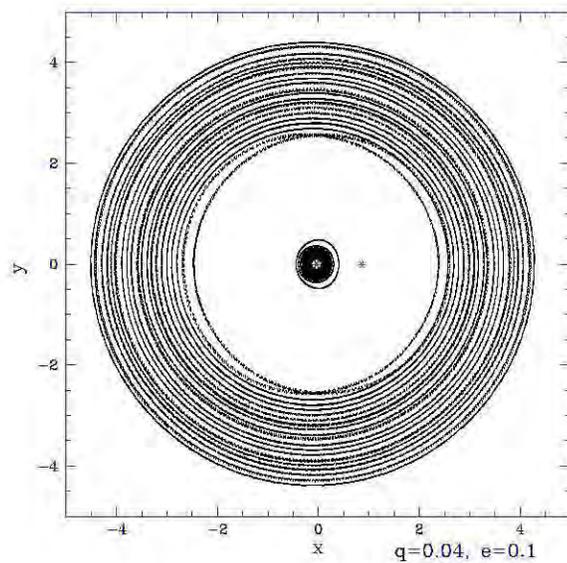


FIGURA A.47: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.1$ .

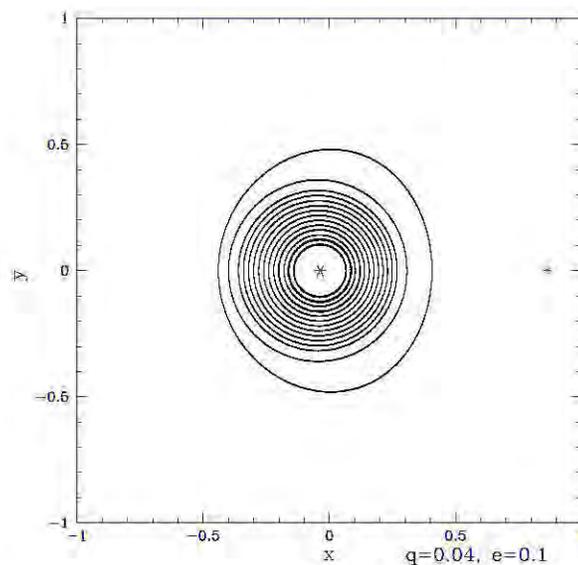


FIGURA A.48: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.04$   $e=0.1$ .

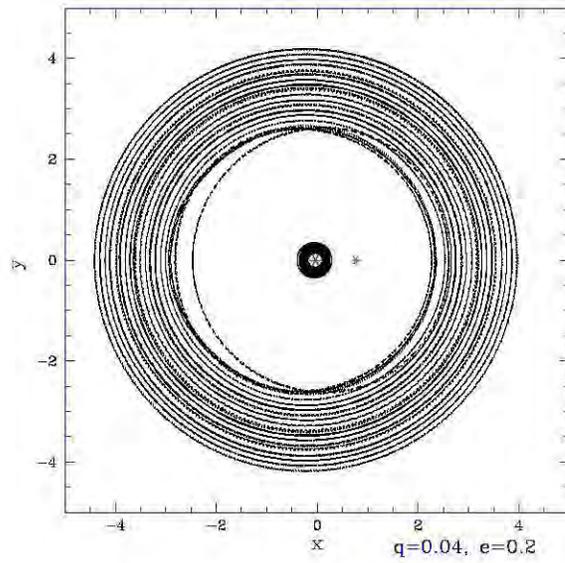


FIGURA A.49: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.2$ .

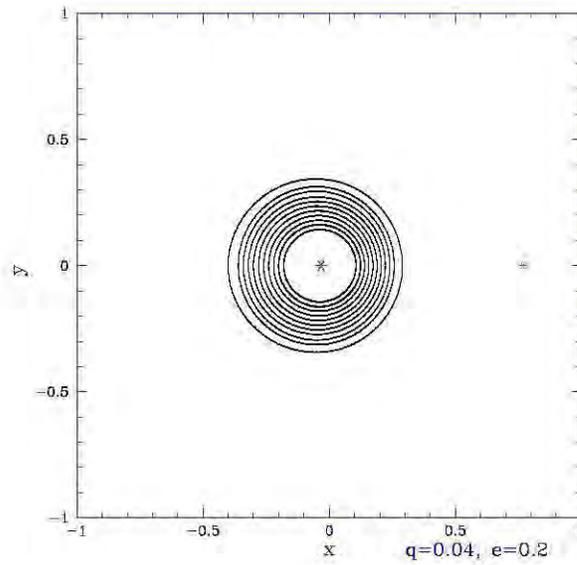


FIGURA A.50: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.04$   $e=0.2$ .

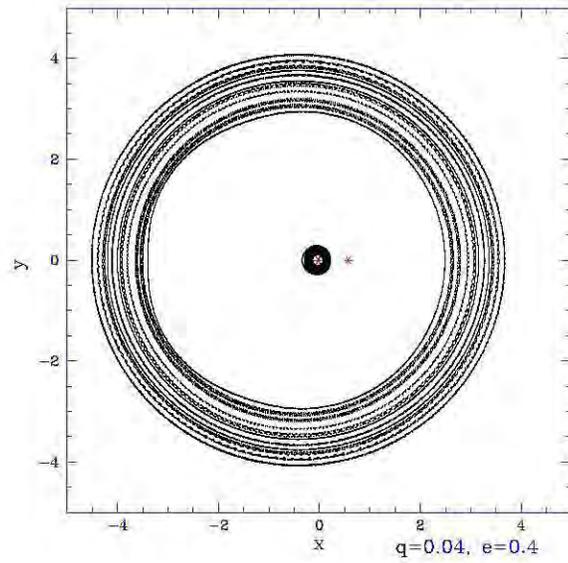


FIGURA A.51: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.4$ .

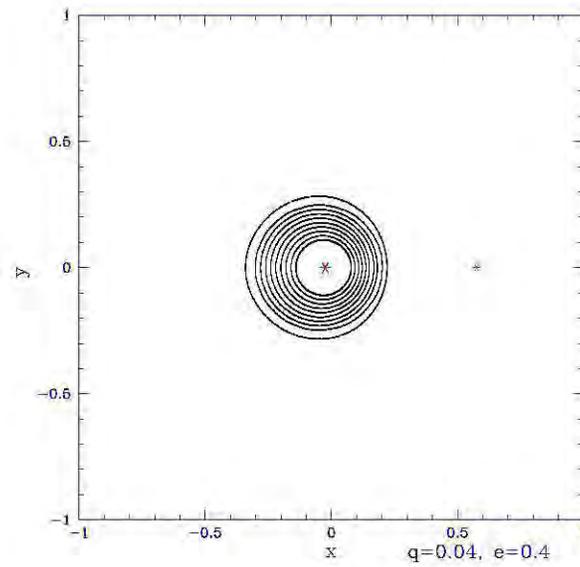


FIGURA A.52: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.4$ .

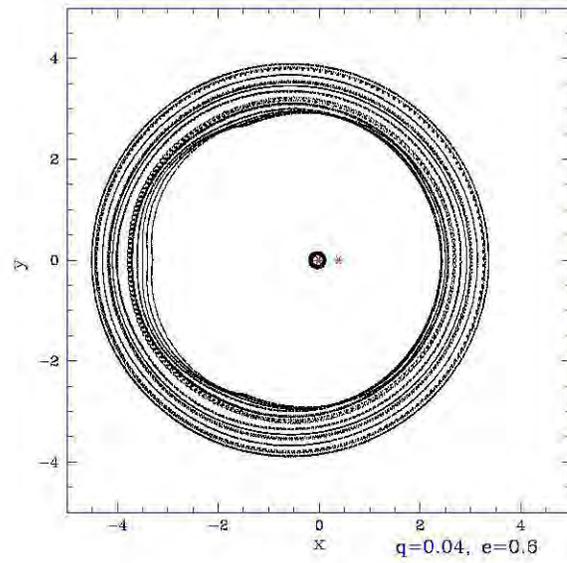


FIGURA A.53: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.6$ .

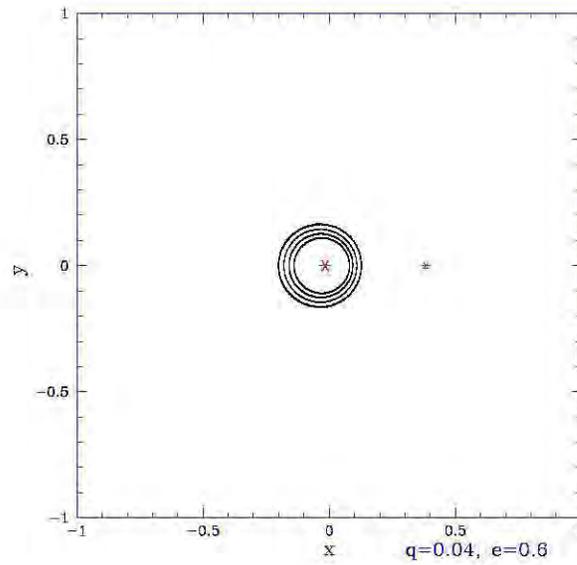


FIGURA A.54: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.04$   $e=0.6$ .

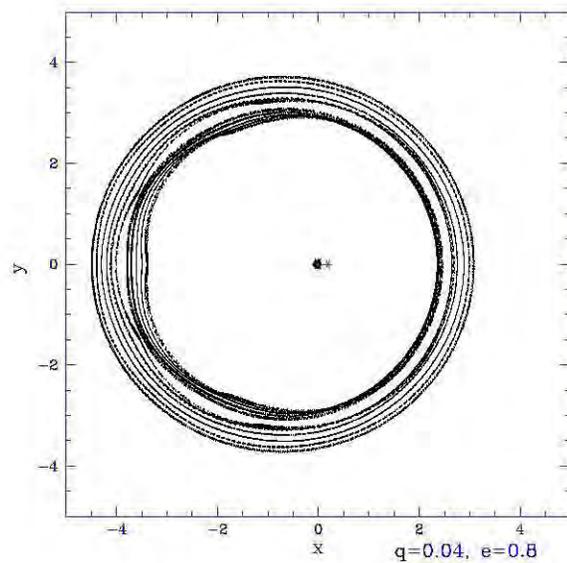


FIGURA A.55: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.04$   $e=0.8$ .

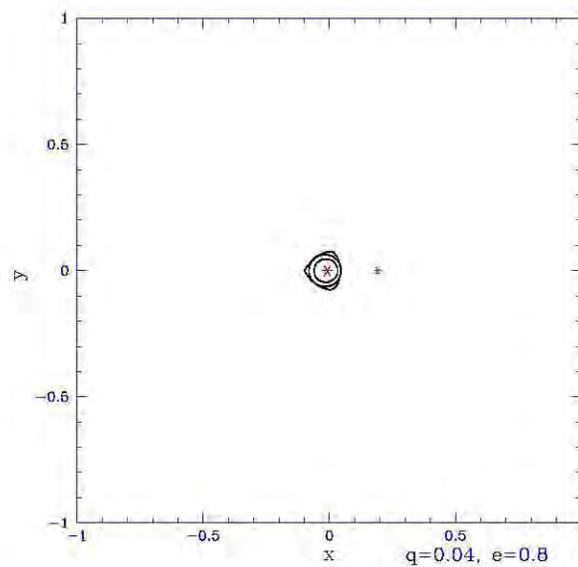


FIGURA A.56: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.04$   $e=0.8$ .

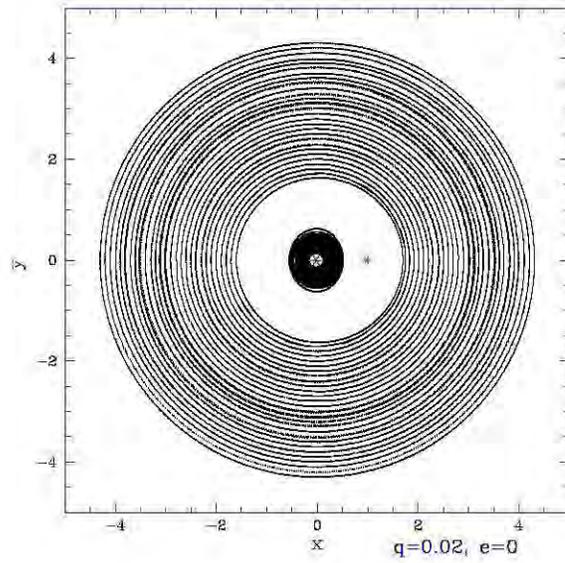


FIGURA A.57: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.0$ .

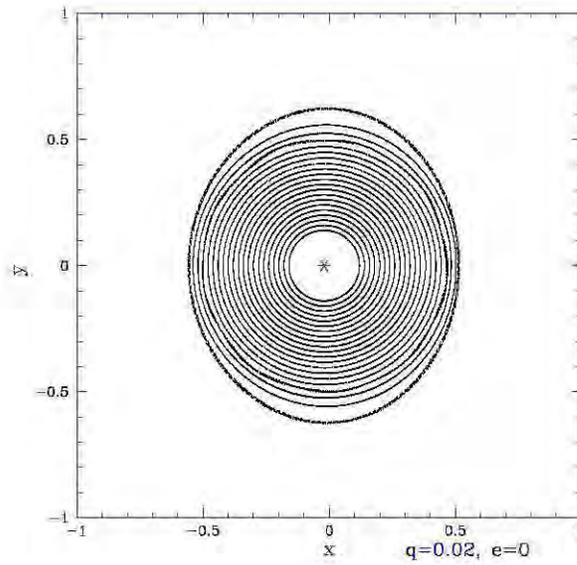


FIGURA A.58: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.02$   $e=0.0$ .

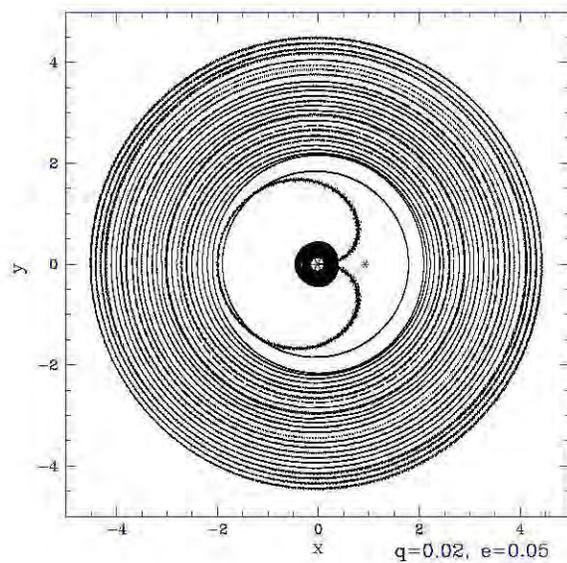


FIGURA A.59: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.05$ .

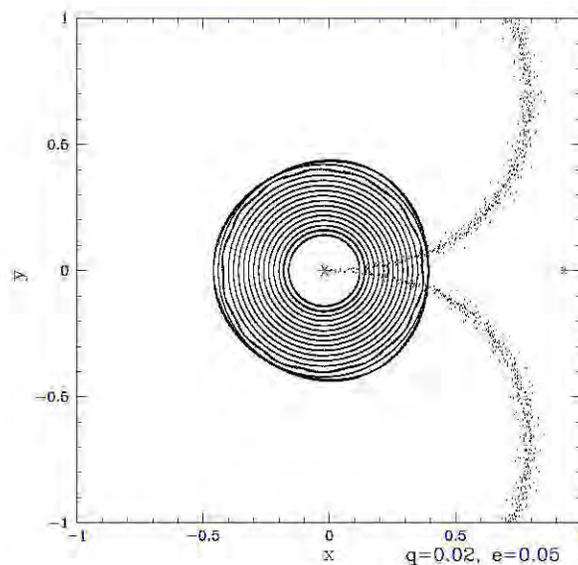


FIGURA A.60: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.02$   $e=0.05$ .

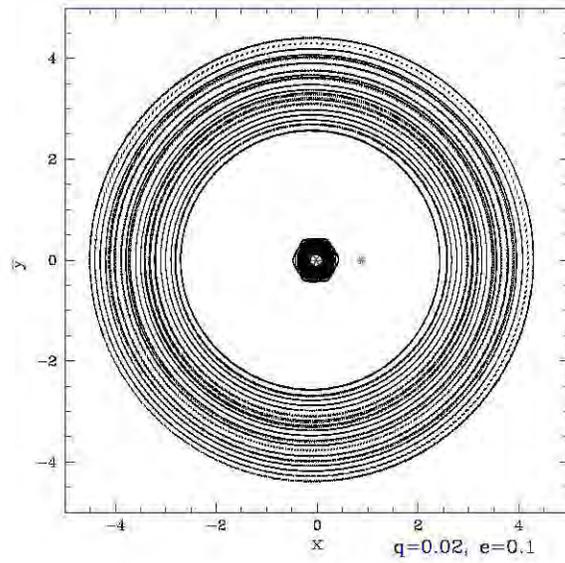


FIGURA A.61: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.1$ .

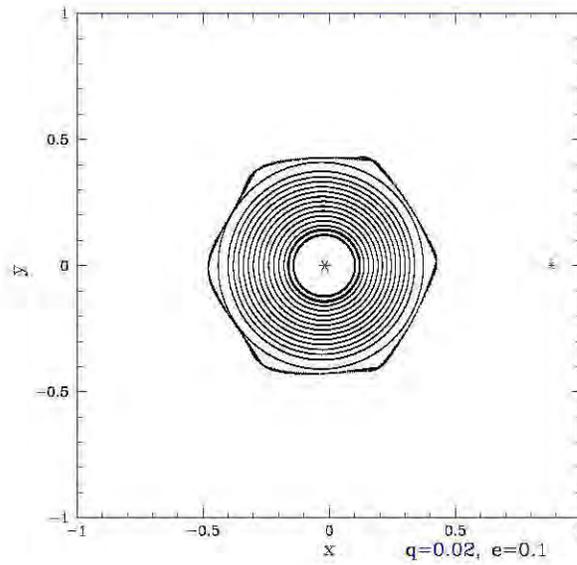


FIGURA A.62: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.02$   $e=0.1$ .

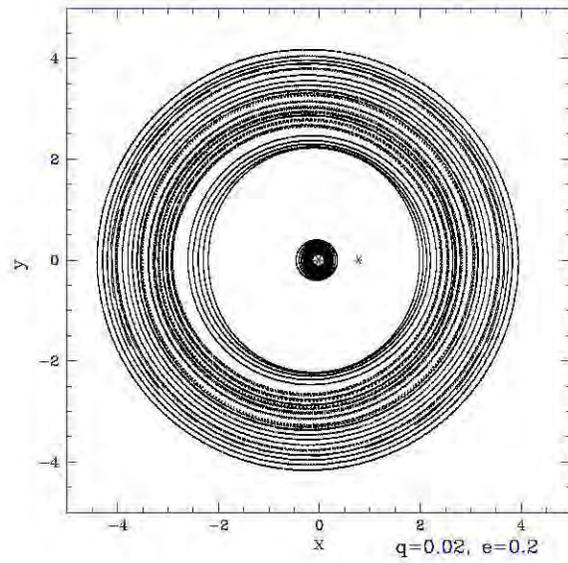


FIGURA A.63: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.2$ .

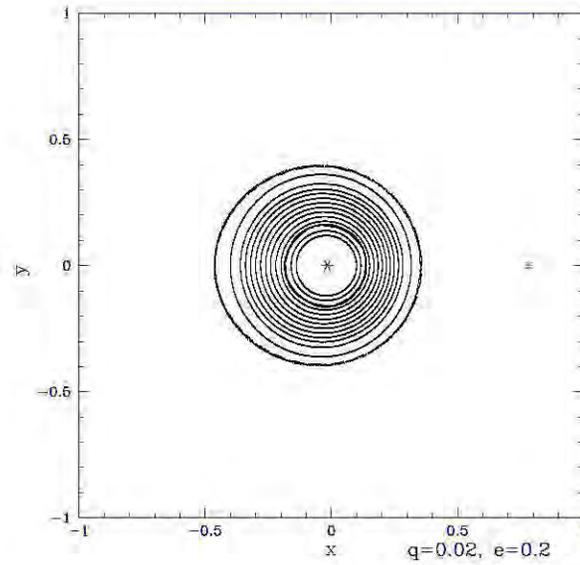


FIGURA A.64: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.2$ .

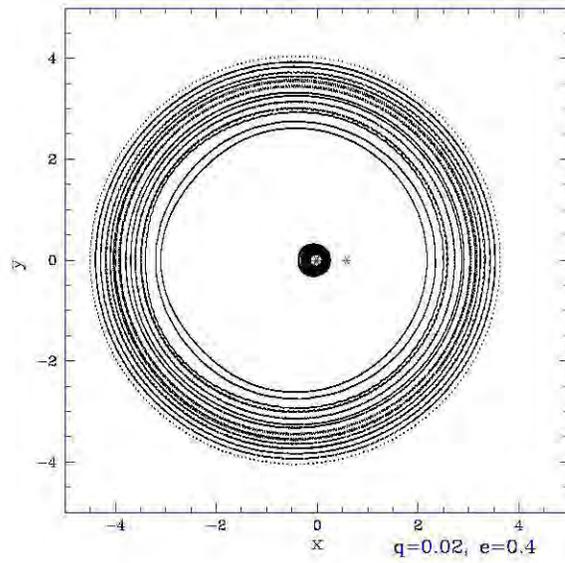


FIGURA A.65: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.4$ .

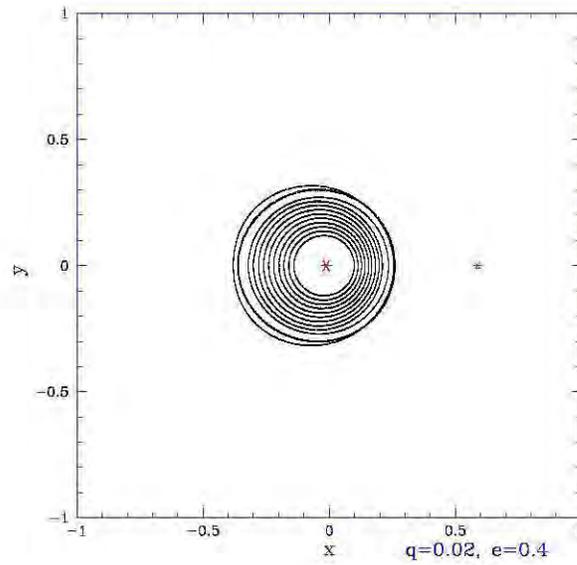


FIGURA A.66: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.02$   $e=0.4$ .

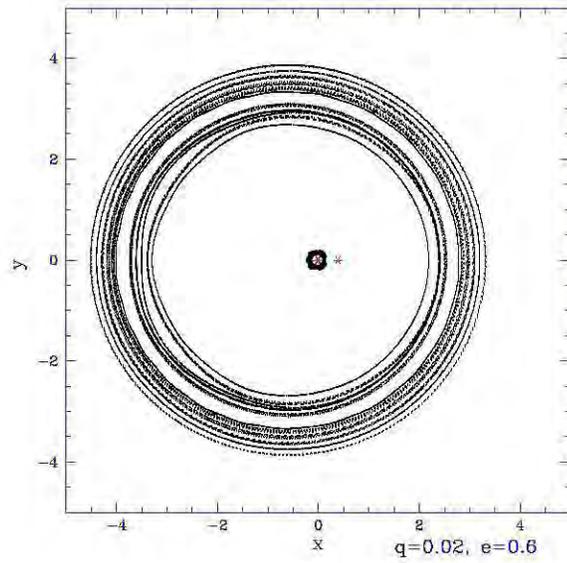


FIGURA A.67: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.6$ .

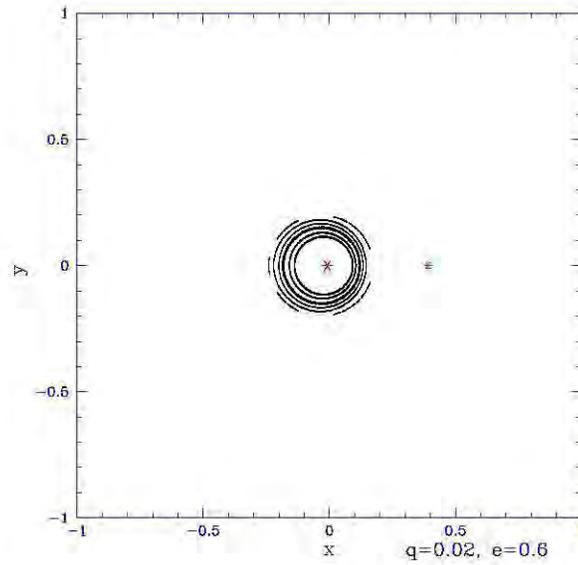


FIGURA A.68: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.02$   $e=0.6$ .

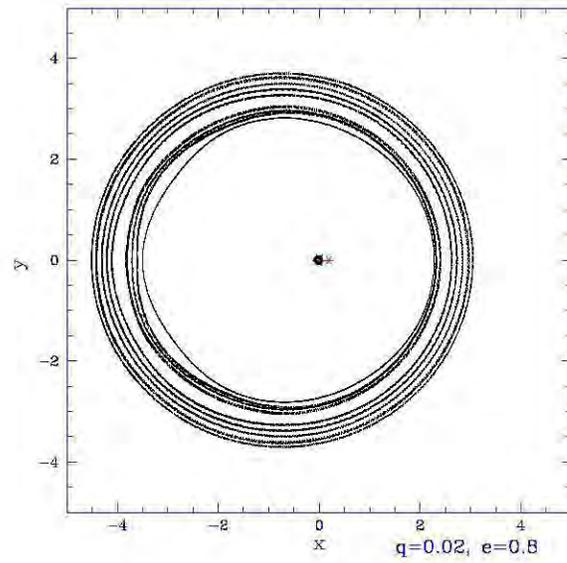


FIGURA A.69: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.02$   $e=0.8$ .

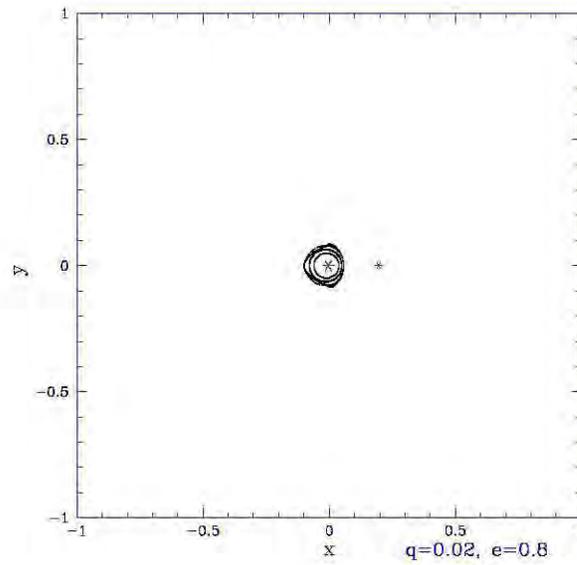


FIGURA A.70: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.02$   $e=0.8$ .

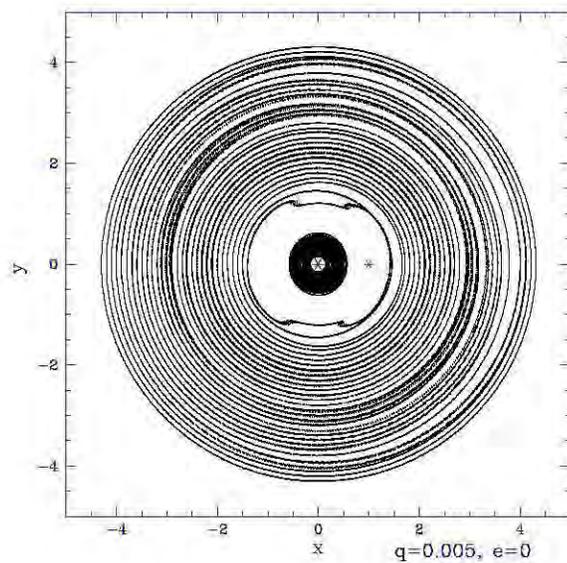


FIGURA A.71: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.0$ .

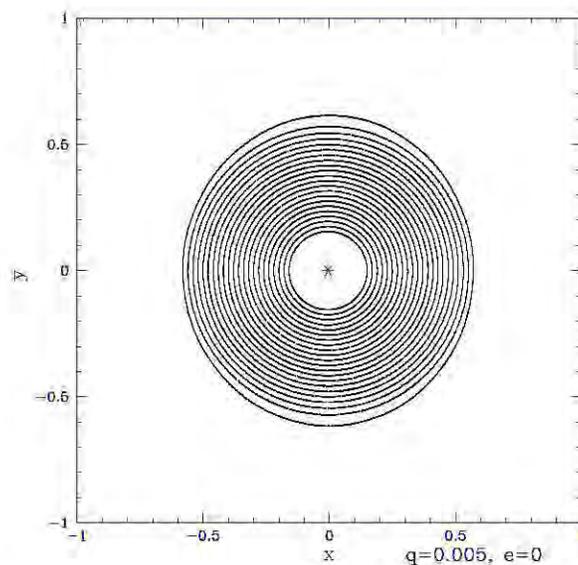


FIGURA A.72: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.0$ .

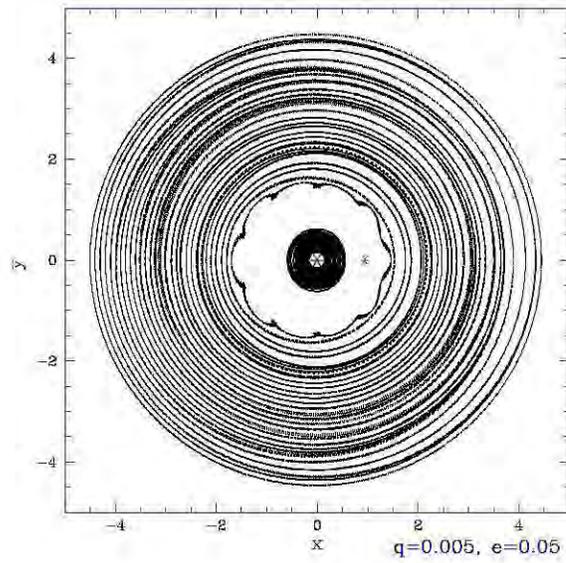


FIGURA A.73: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.05$ .

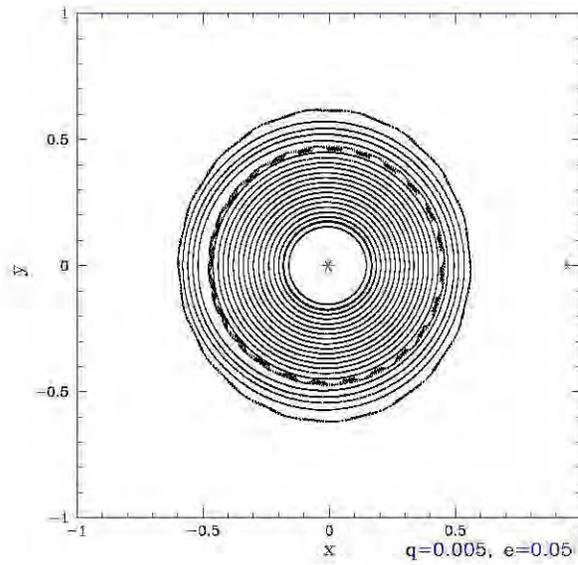


FIGURA A.74: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.05$ .

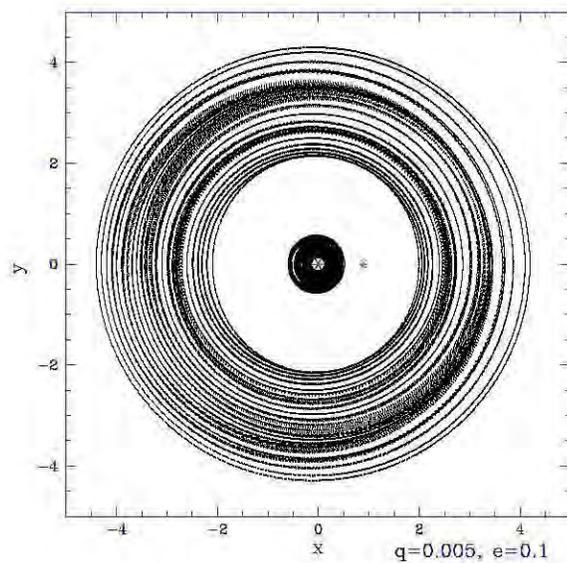


FIGURA A.75: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.1$ .

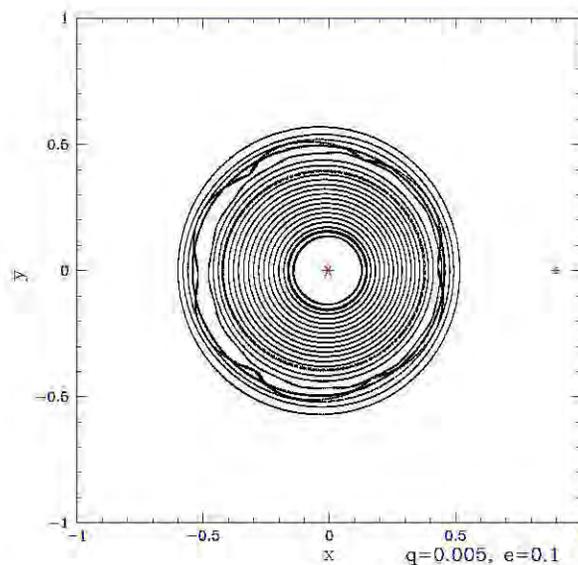


FIGURA A.76: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.1$ .

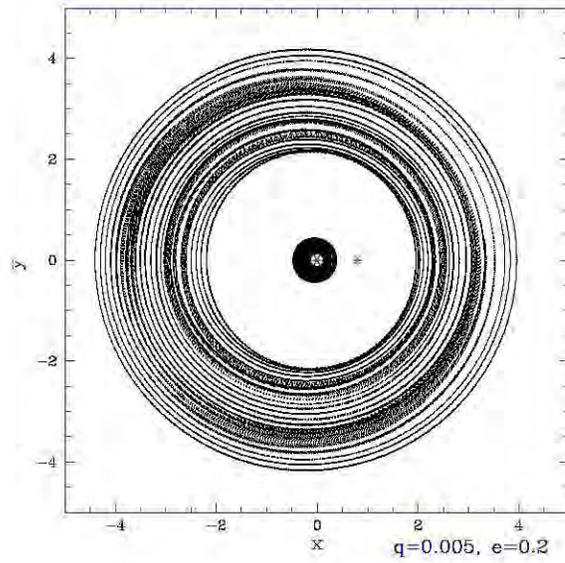


FIGURA A.77: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.2$ .

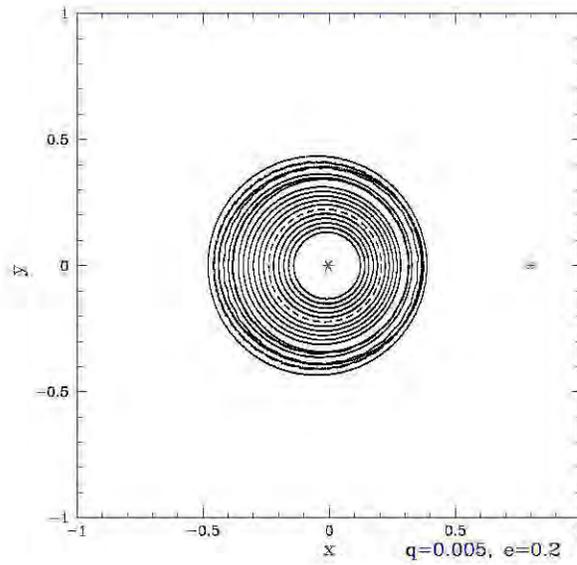


FIGURA A.78: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.2$ .

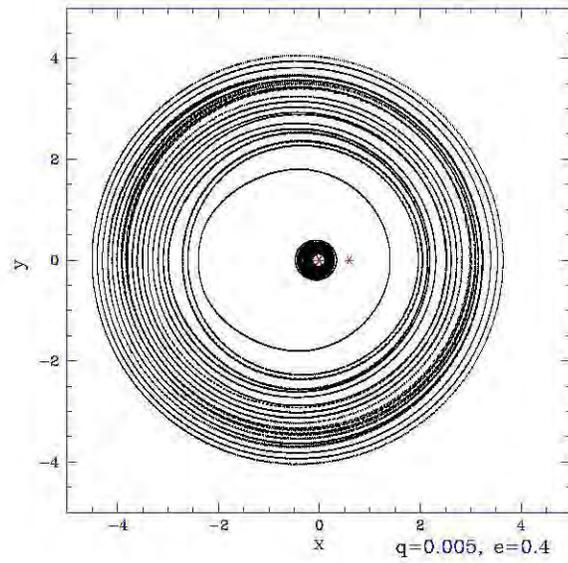


FIGURA A.79: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.4$ .

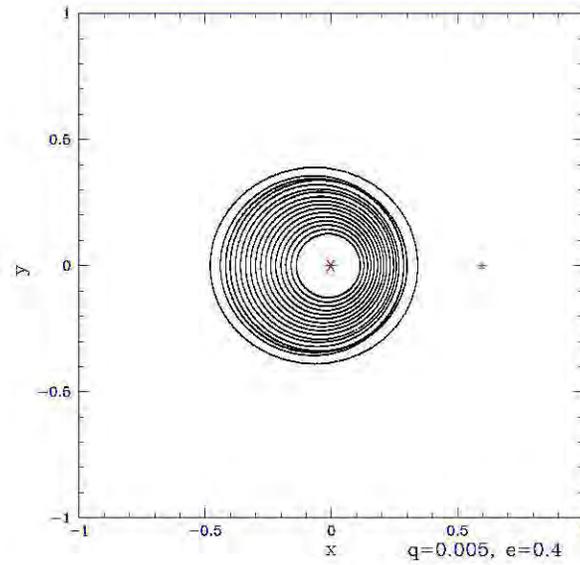


FIGURA A.80: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.4$ .

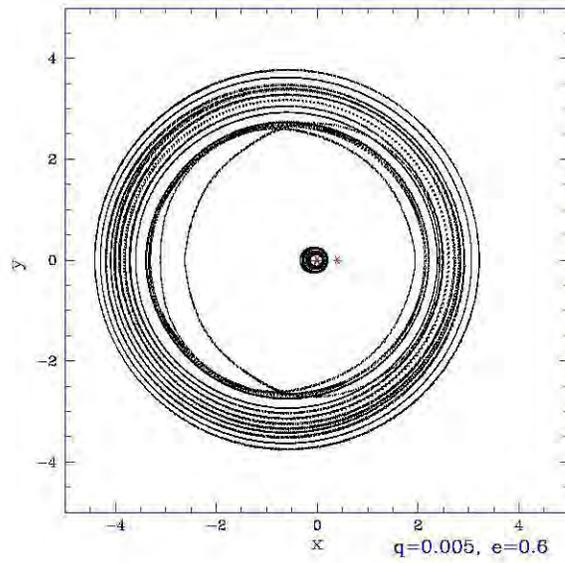


FIGURA A.81: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.6$ .

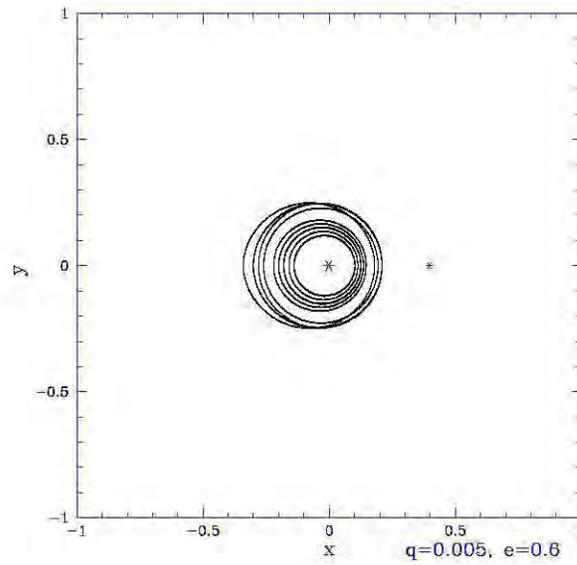


FIGURA A.82: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.6$ .

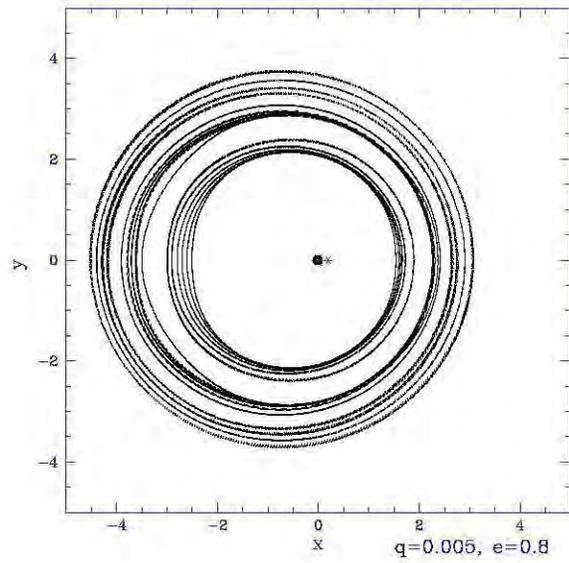


FIGURA A.83: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.005$   $e=0.8$ .

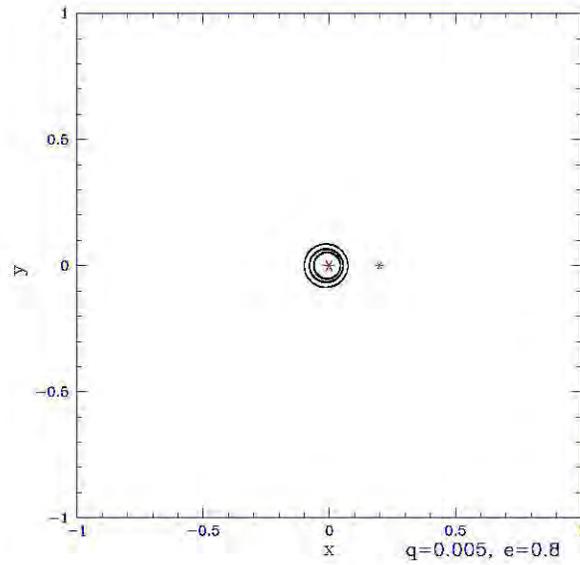


FIGURA A.84: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.005$   $e=0.8$ .

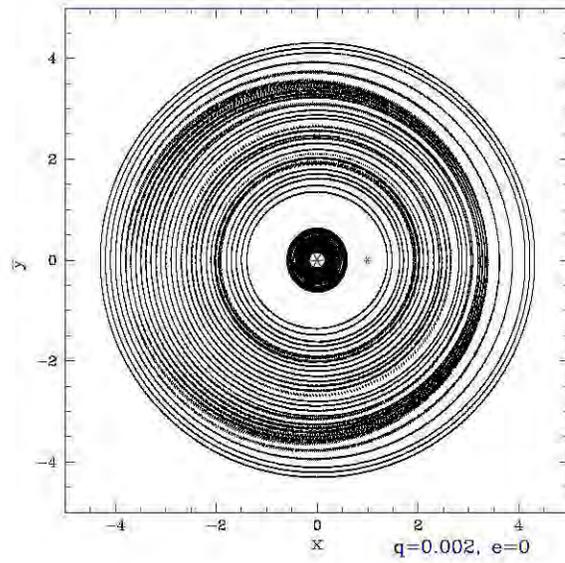


FIGURA A.85: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.0$ .

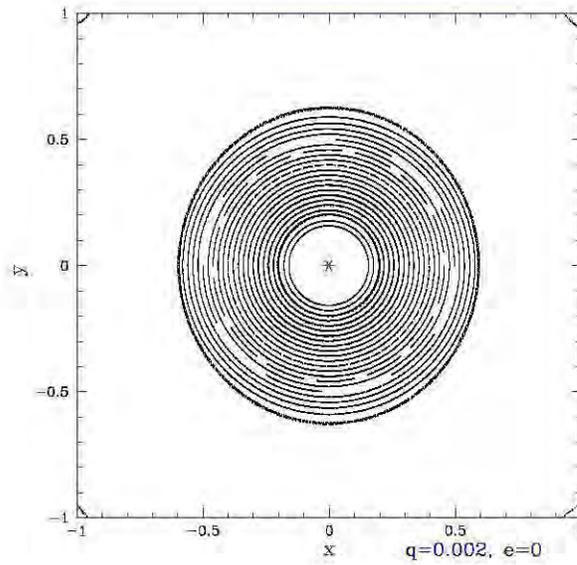


FIGURA A.86: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.002$   $e=0.0$ .

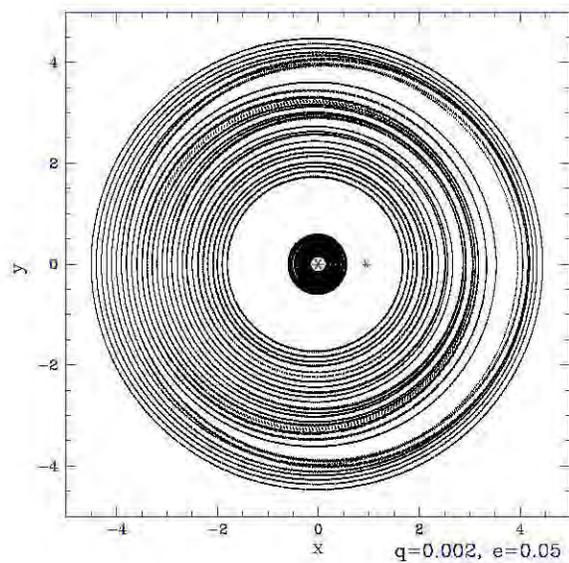


FIGURA A.87: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.05$ .

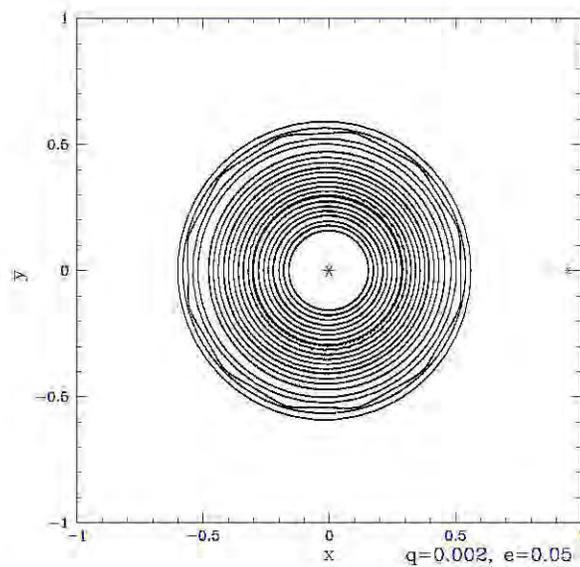


FIGURA A.88: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.002$   $e=0.05$ .

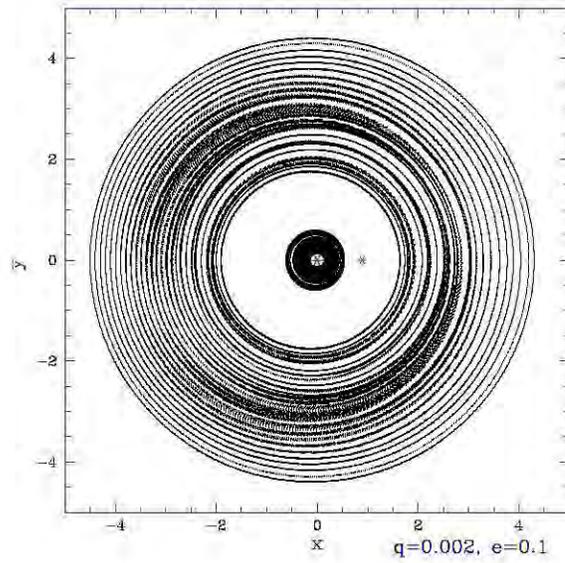


FIGURA A.89: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.1$ .

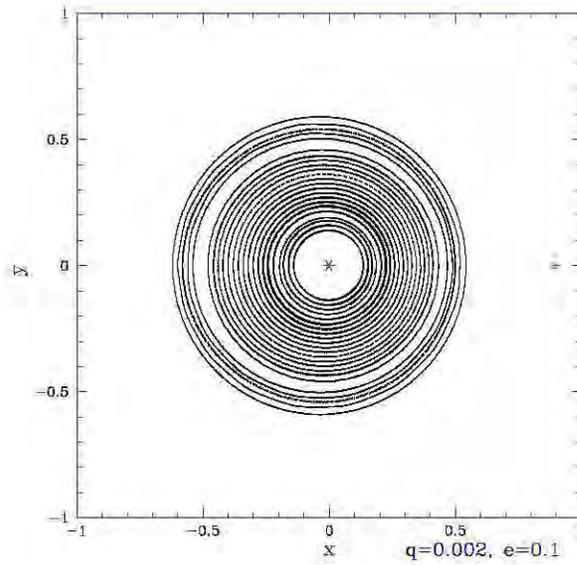


FIGURA A.90: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.002$   $e=0.1$ .

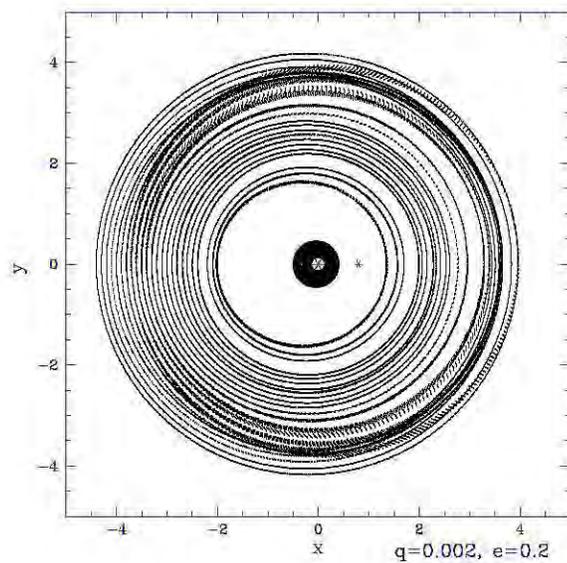


FIGURA A.91: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.2$ .

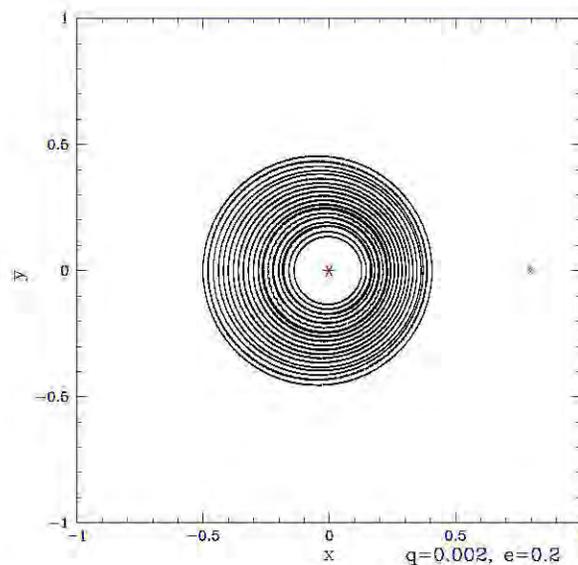


FIGURA A.92: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.002$   $e=0.2$ .

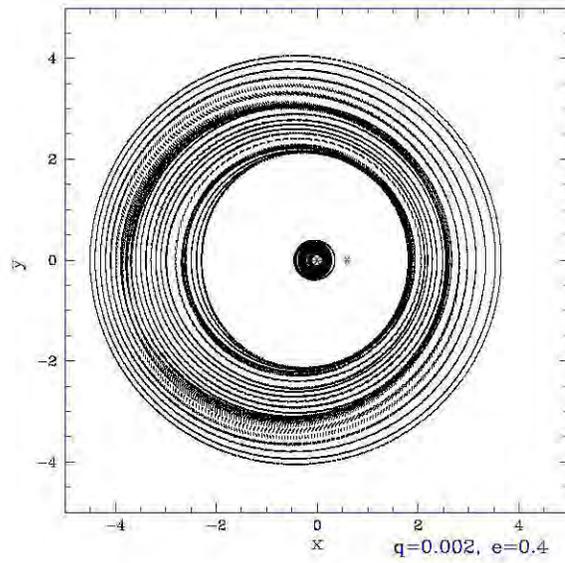


FIGURA A.93: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.4$ .

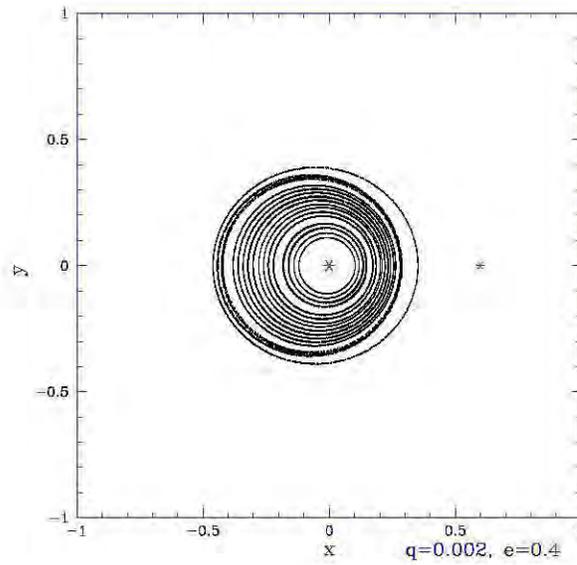


FIGURA A.94: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.002$   $e=0.4$ .

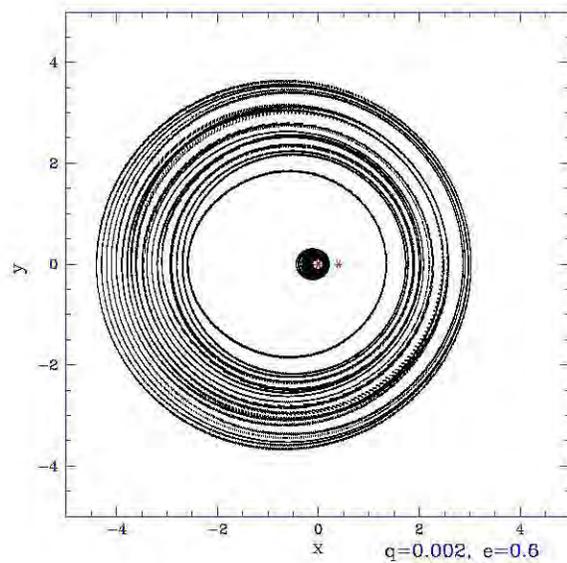


FIGURA A.95: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.6$ .

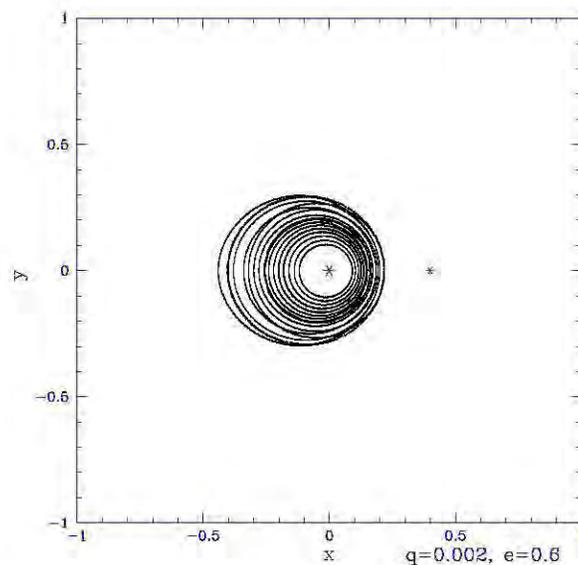


FIGURA A.96: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.6$ .

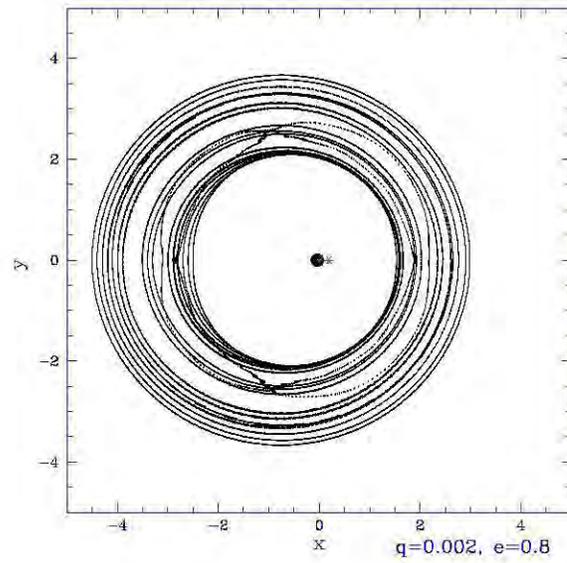


FIGURA A.97: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.002$   $e=0.8$ .

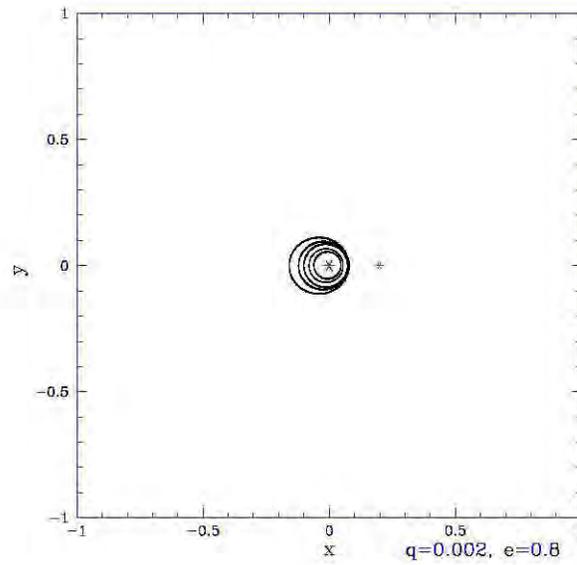


FIGURA A.98: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.002$   $e=0.8$ .

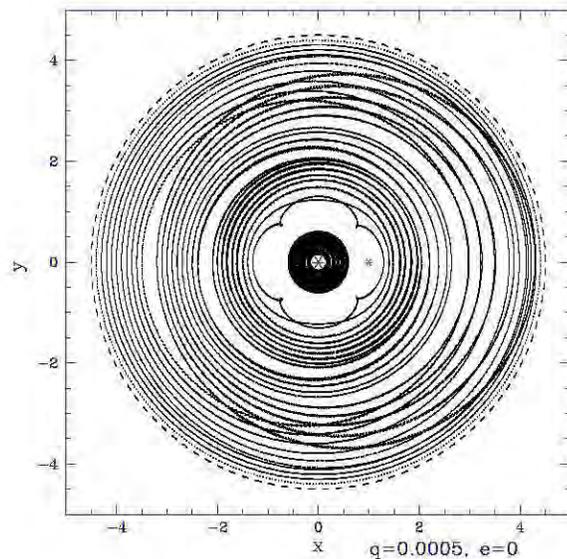


FIGURA A.99: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.0$ .

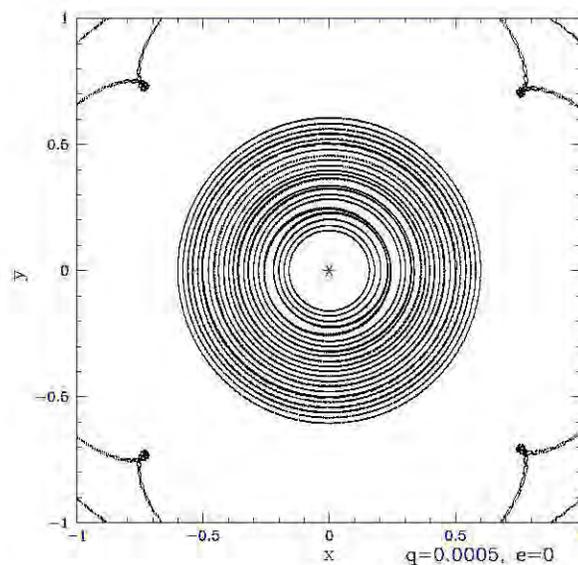


FIGURA A.100: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.0$ .

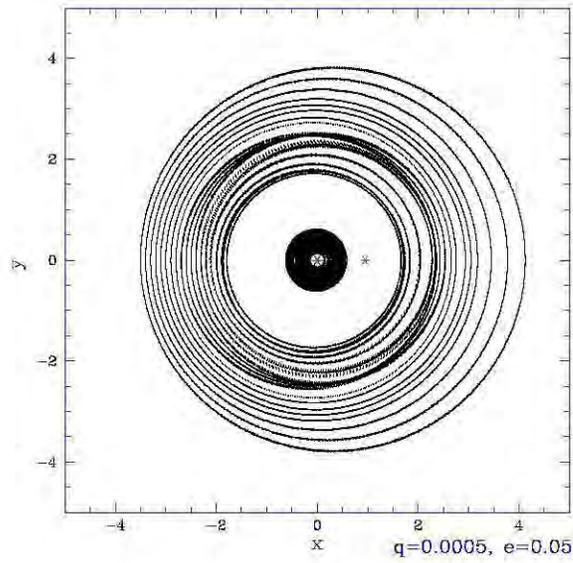


FIGURA A.101: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0005, e=0.05$ .

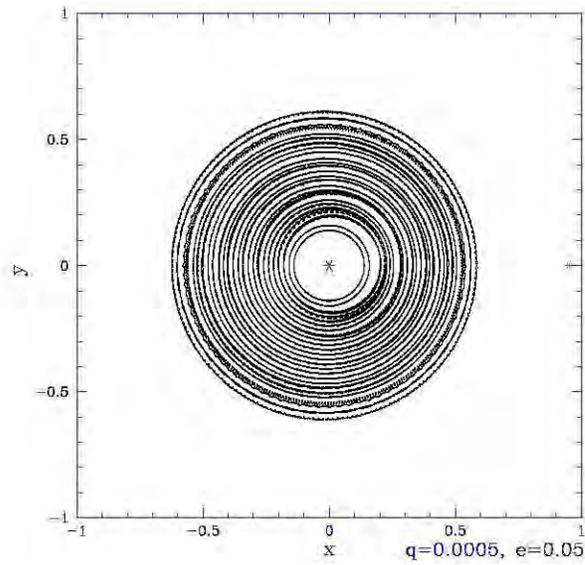


FIGURA A.102: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.0005, e=0.05$ .

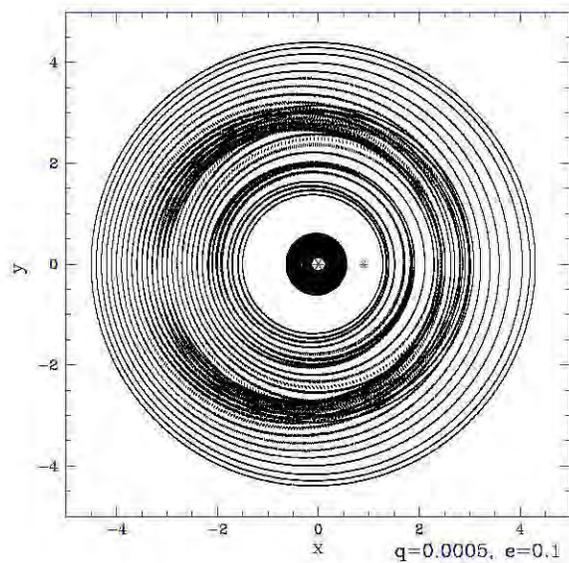


FIGURA A.103: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.1$ .

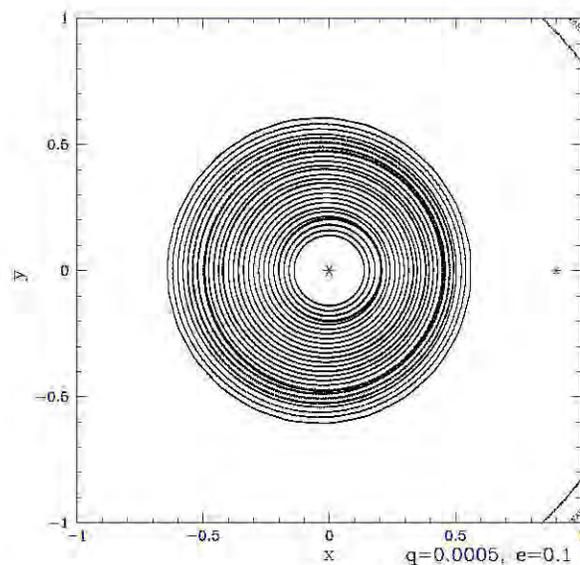


FIGURA A.104: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.1$ .

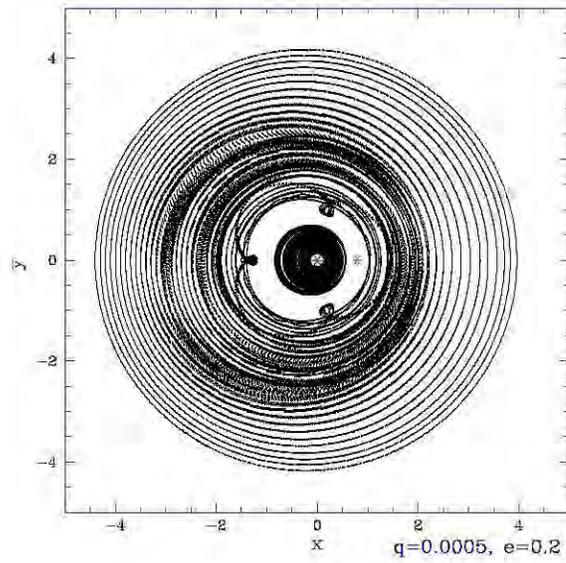


FIGURA A.105: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.2$ .

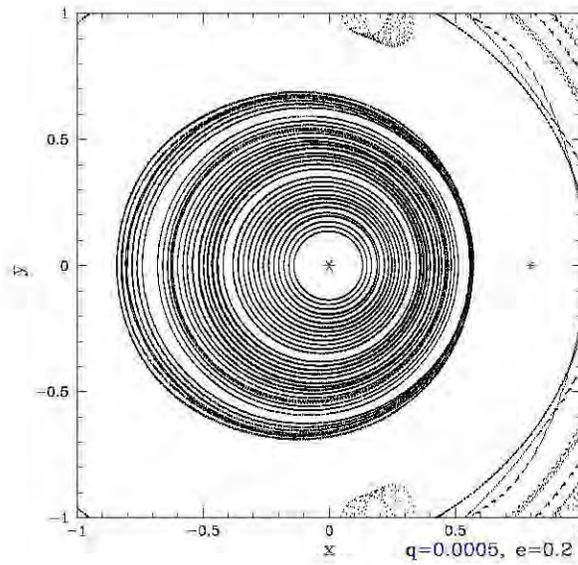


FIGURA A.106: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.2$ .

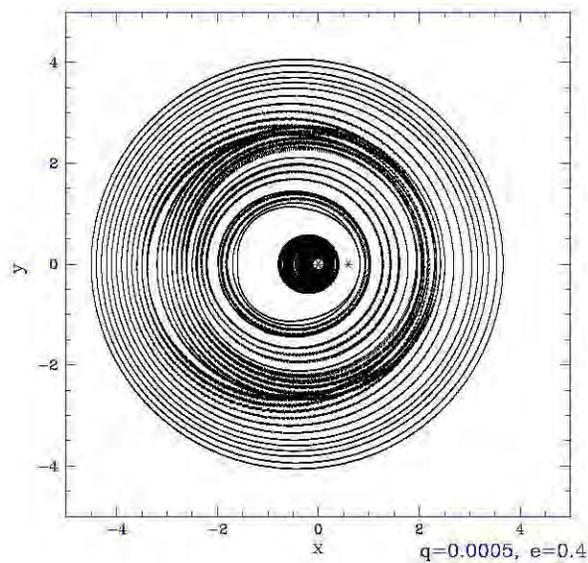


FIGURA A.107: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.4$ .

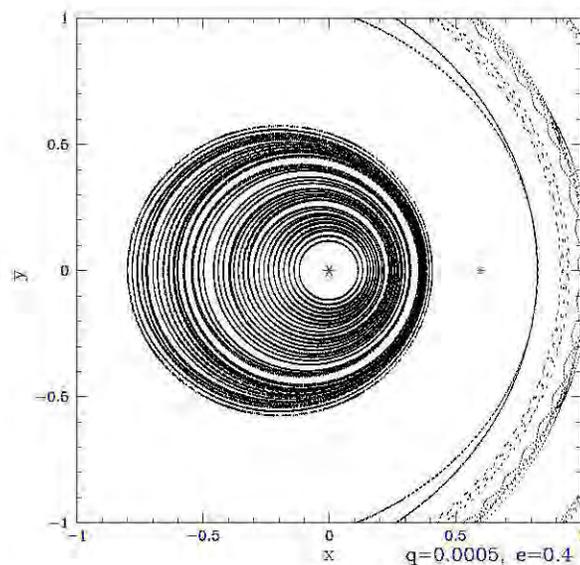


FIGURA A.108: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.4$ .

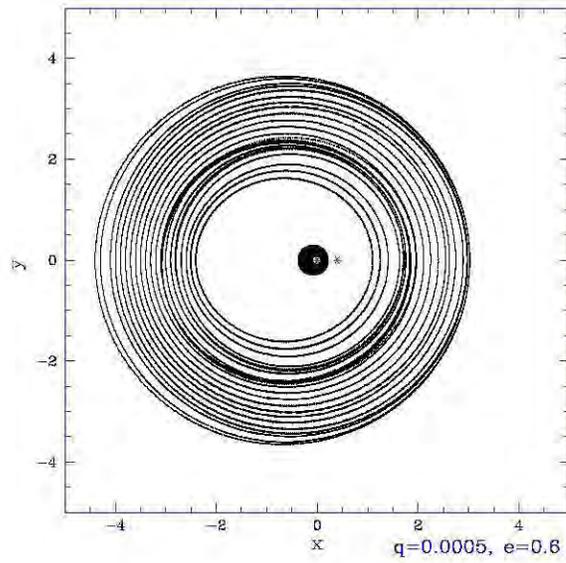


FIGURA A.109: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.6$ .

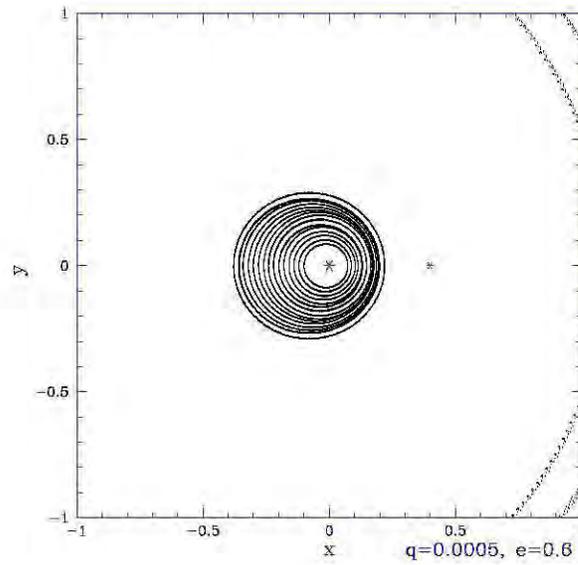


FIGURA A.110: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.6$ .

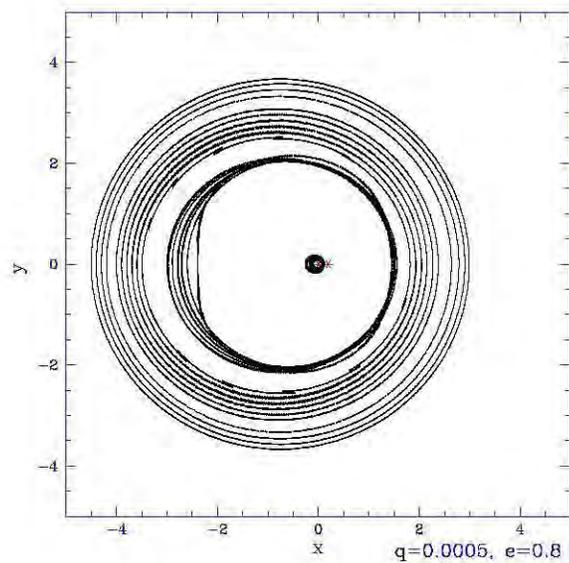


FIGURA A.111: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.8$ .

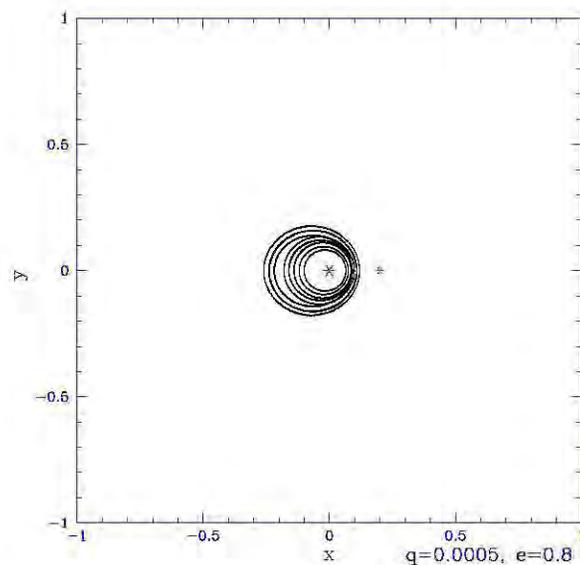


FIGURA A.112: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.0005$   $e=0.8$ .

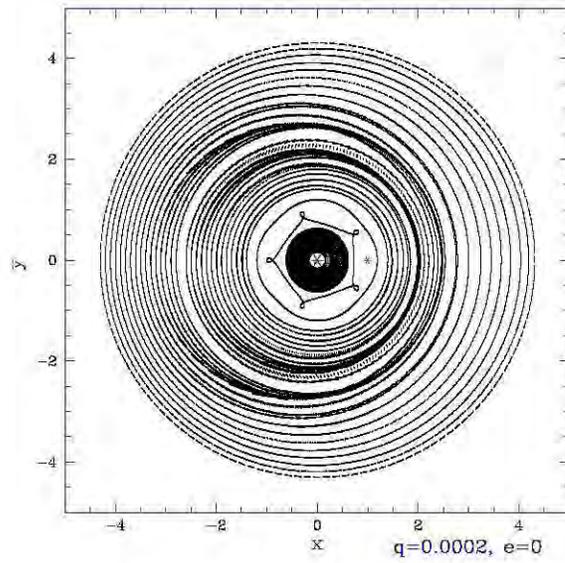


FIGURA A.113: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.0$ .

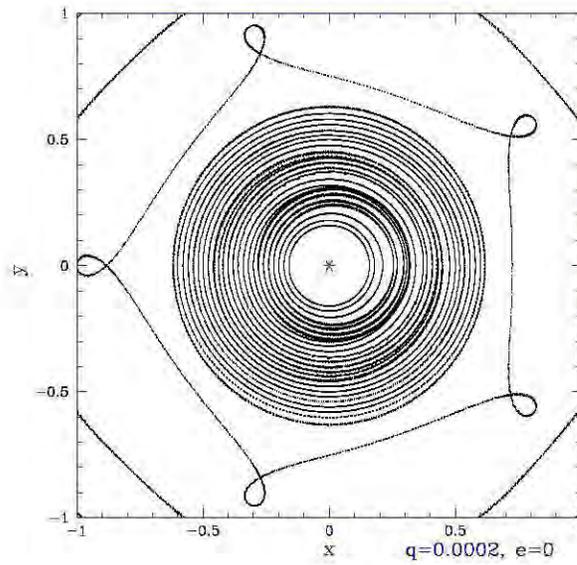


FIGURA A.114: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.0$ .

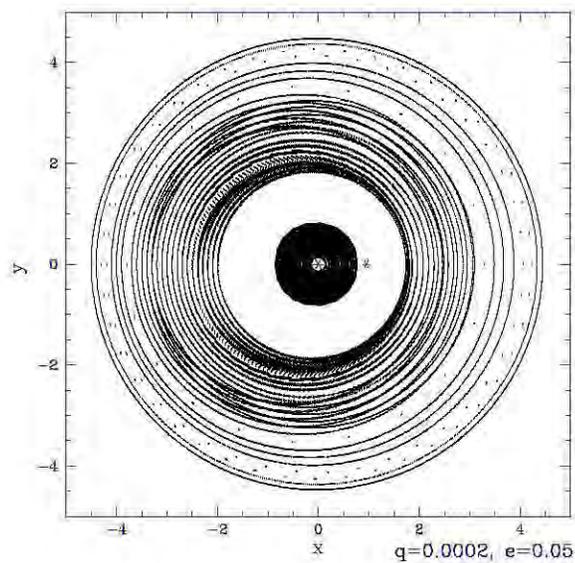


FIGURA A.115: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.05$ .

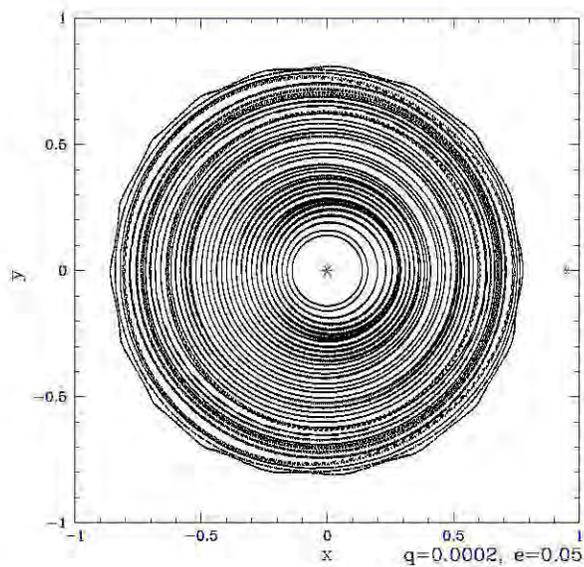


FIGURA A.116: Mapeo del disco circuprimario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.05$ .

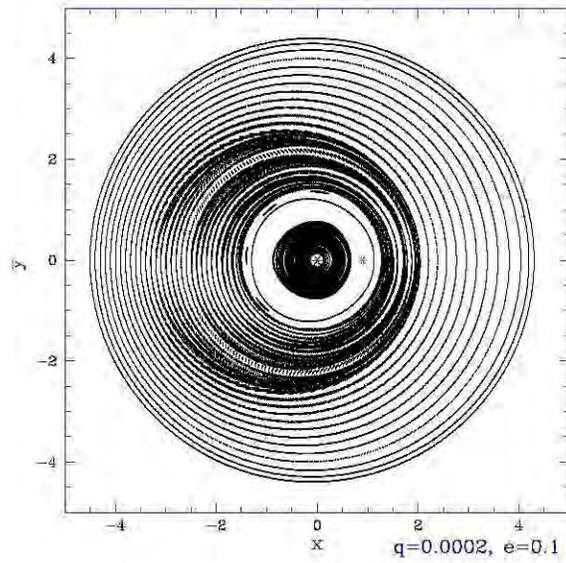


FIGURA A.117: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.1$ .

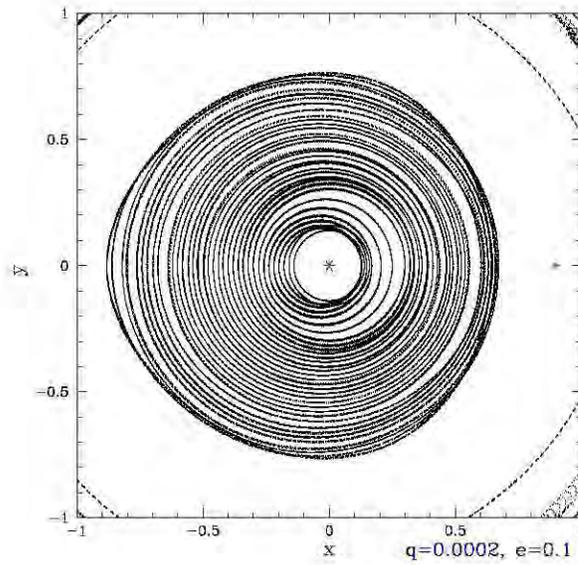


FIGURA A.118: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.1$ .

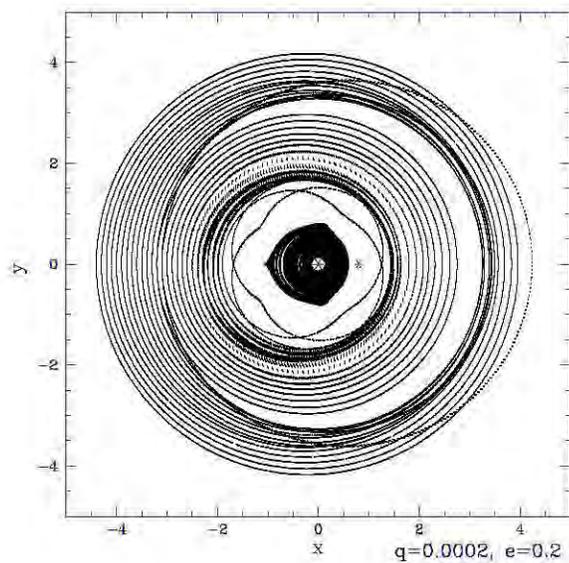


FIGURA A.119: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.2$ .

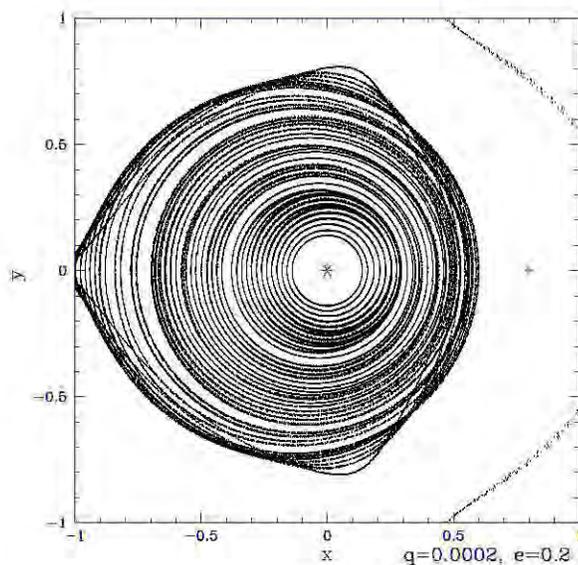


FIGURA A.120: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.2$ .

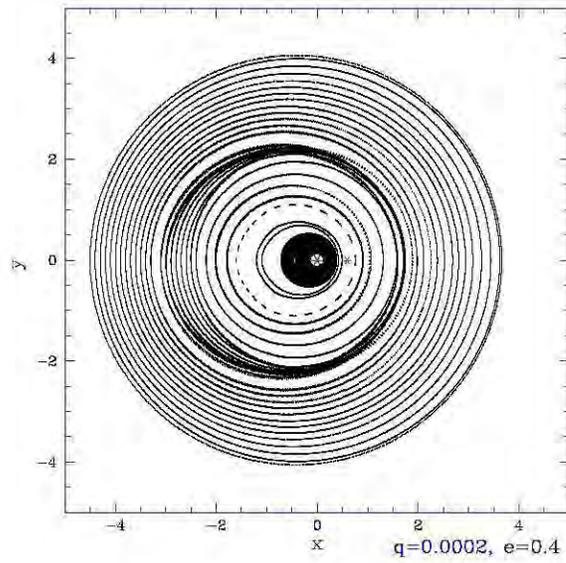


FIGURA A.121: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.4$ .

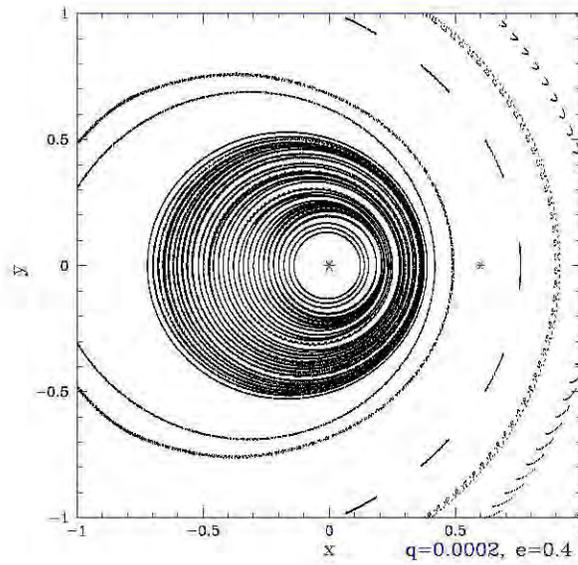


FIGURA A.122: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.4$ .

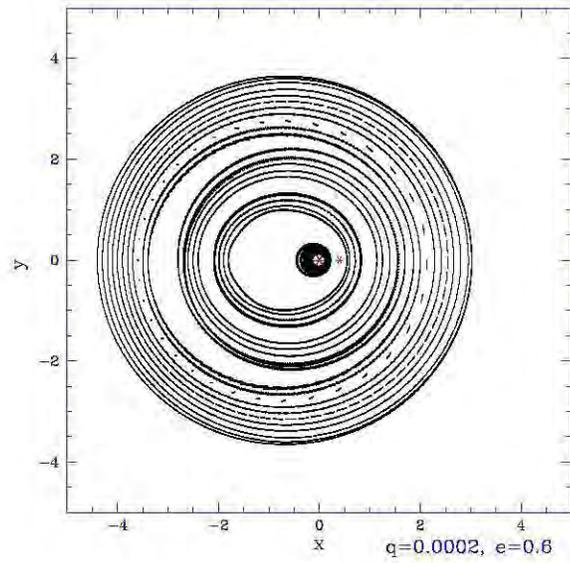


FIGURA A.123: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.6$ .

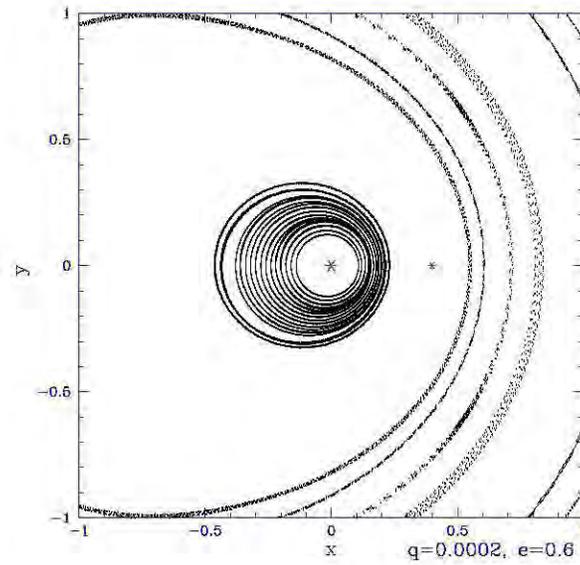


FIGURA A.124: Mapeo del disco circumprimario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.6$ .

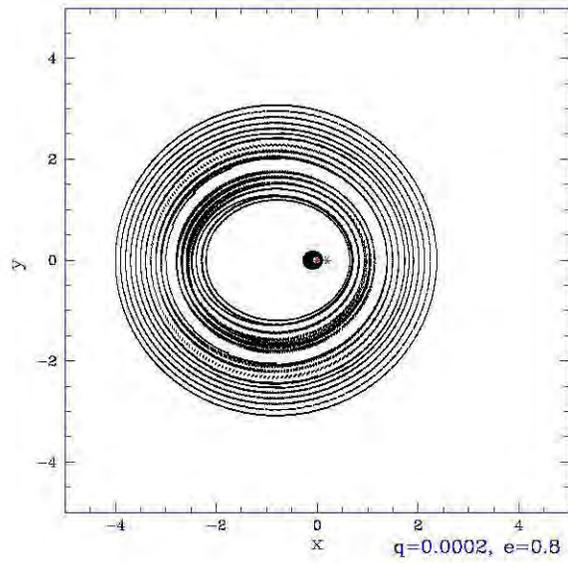


FIGURA A.125: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.8$ .

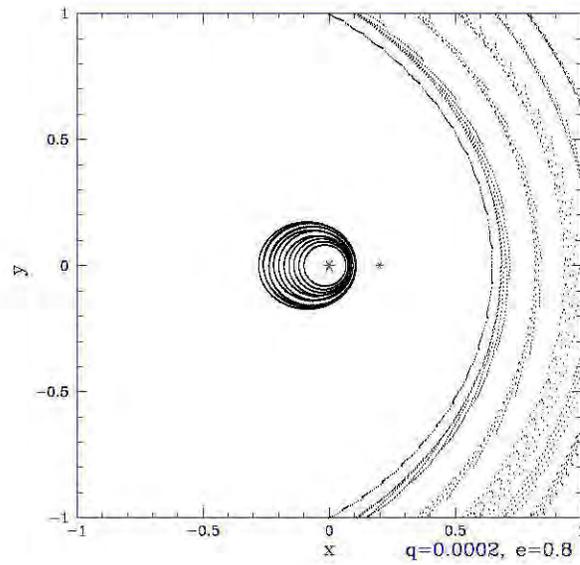


FIGURA A.126: Mapeo del disco circumpinario en el caso  $q=0.0002$   $e=0.8$ .

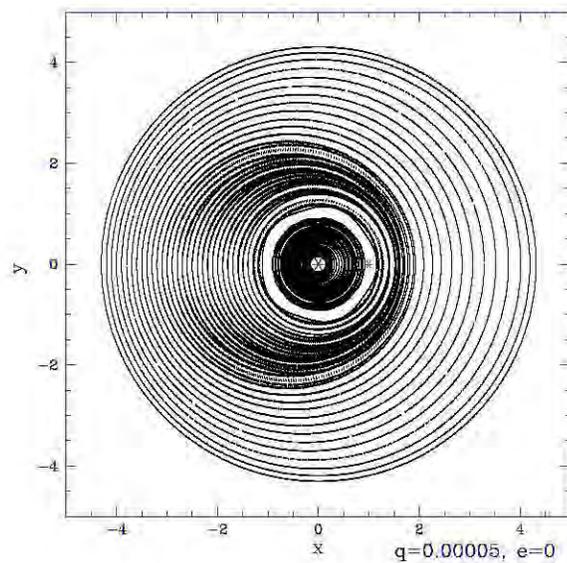


FIGURA A.127: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.0$ .

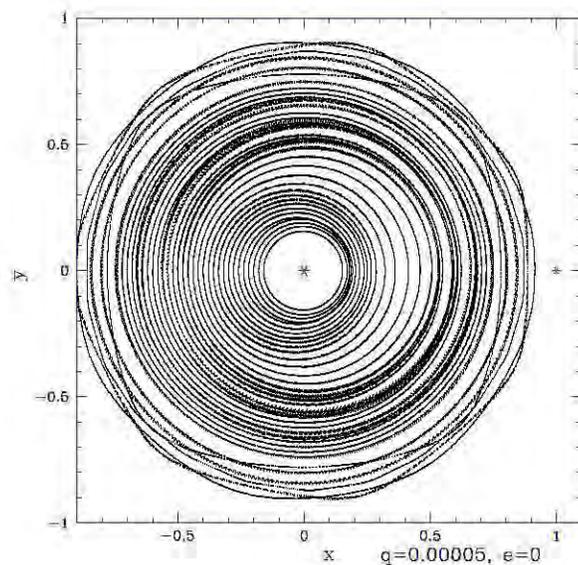


FIGURA A.128: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.0$ .

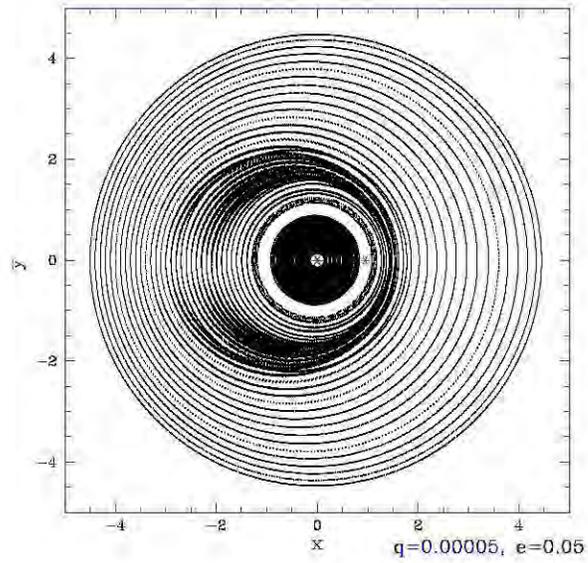


FIGURA A.129: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.05$ .

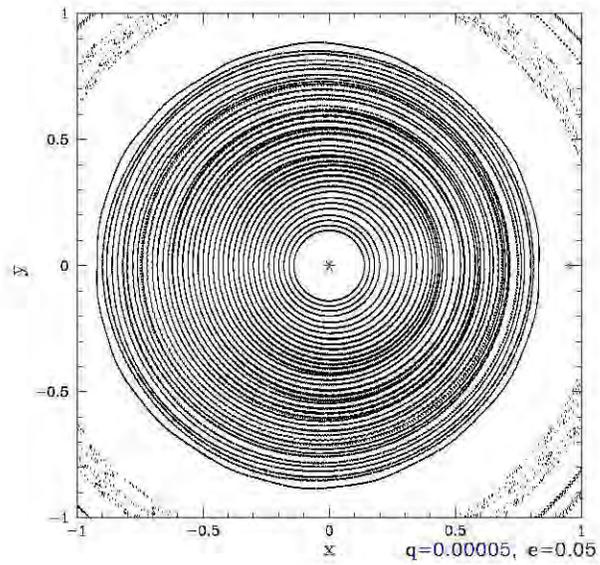


FIGURA A.130: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.05$ .

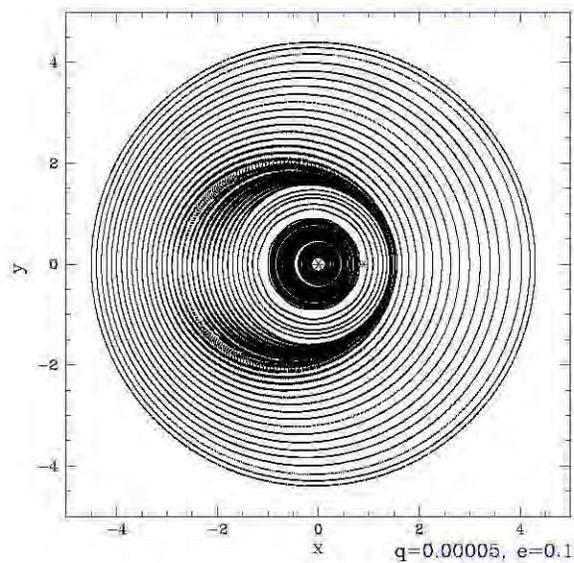


FIGURA A.131: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.1$ .

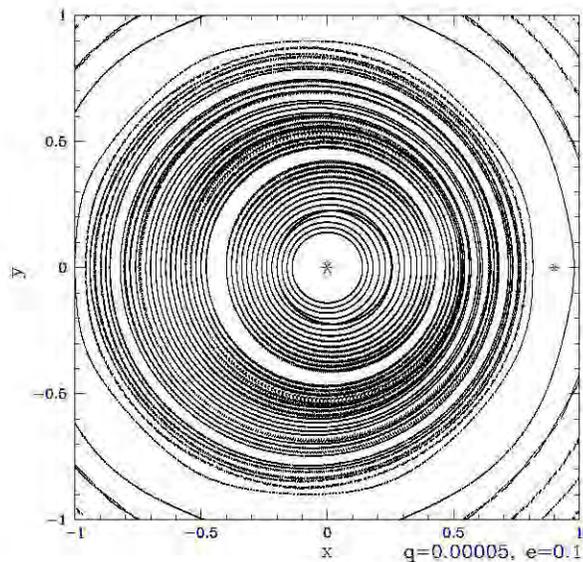


FIGURA A.132: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.1$ .

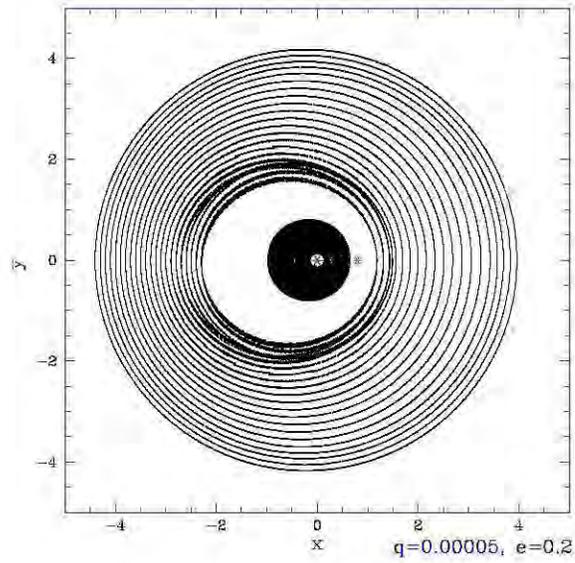


FIGURA A.133: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.2$ .

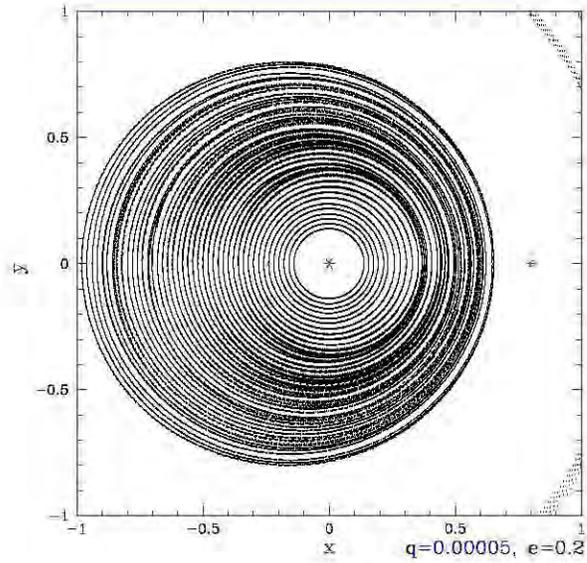


FIGURA A.134: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.2$ .

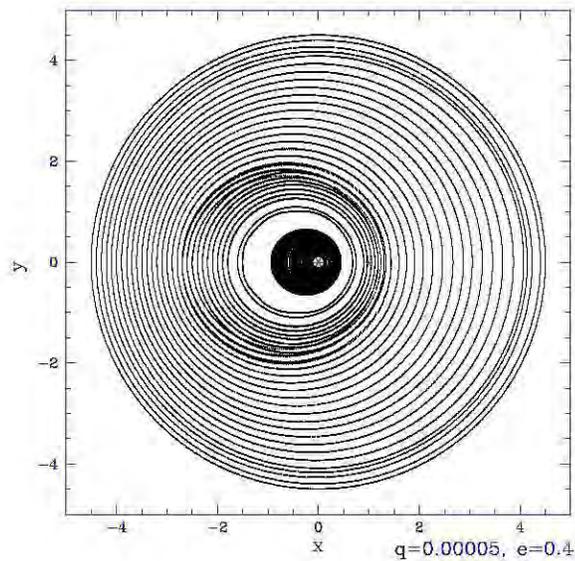


FIGURA A.135: Mapeo del disco circunbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.4$ .

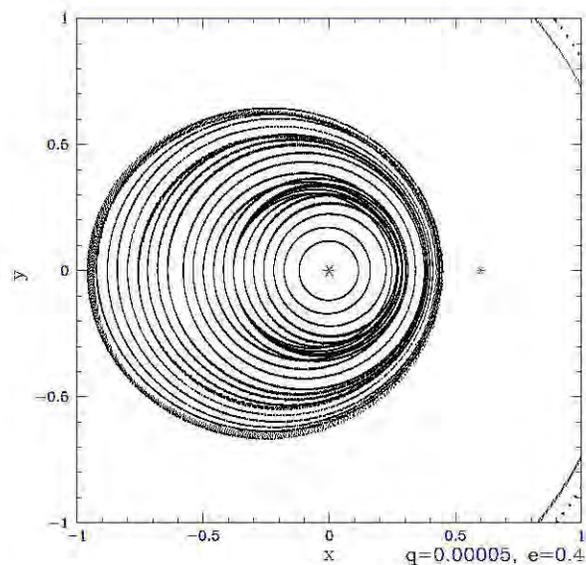


FIGURA A.136: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.4$ .

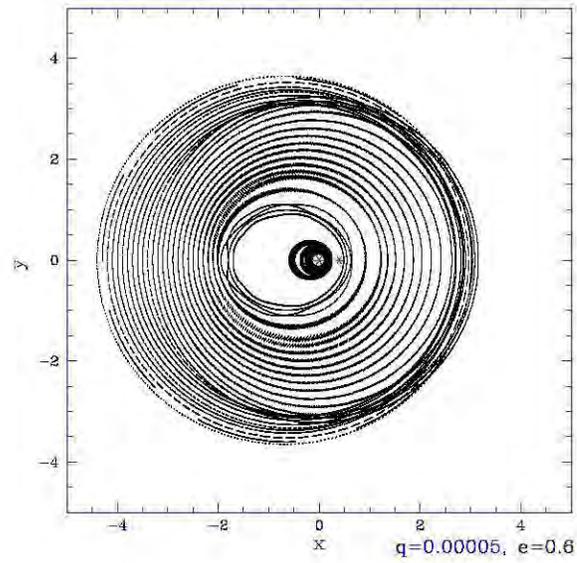


FIGURA A.137: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.6$ .

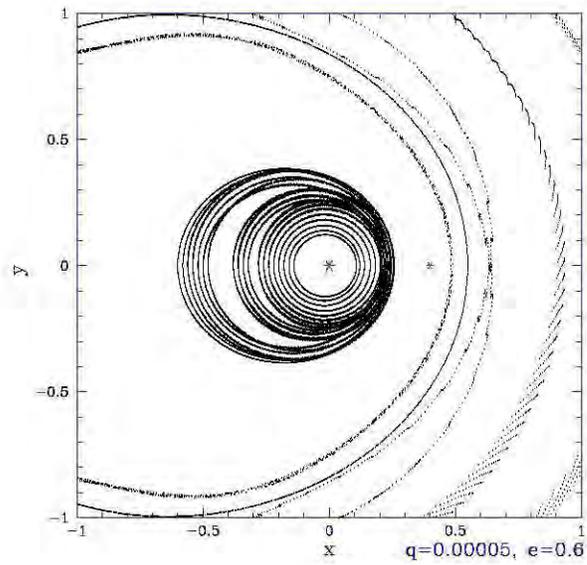


FIGURA A.138: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.6$ .

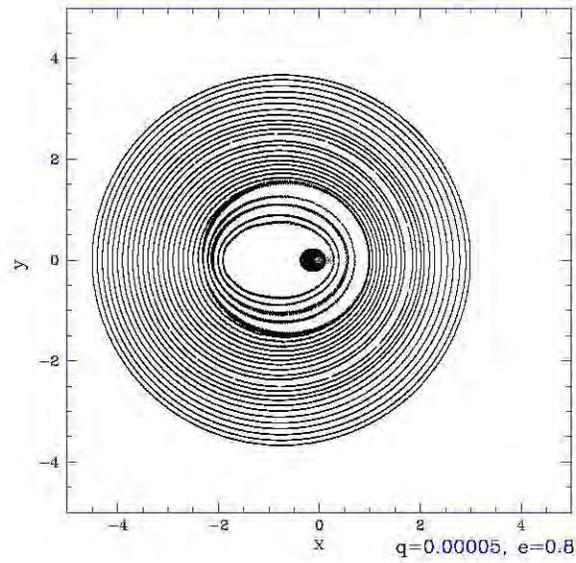


FIGURA A.139: Mapeo del disco circumbinario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.8$ .

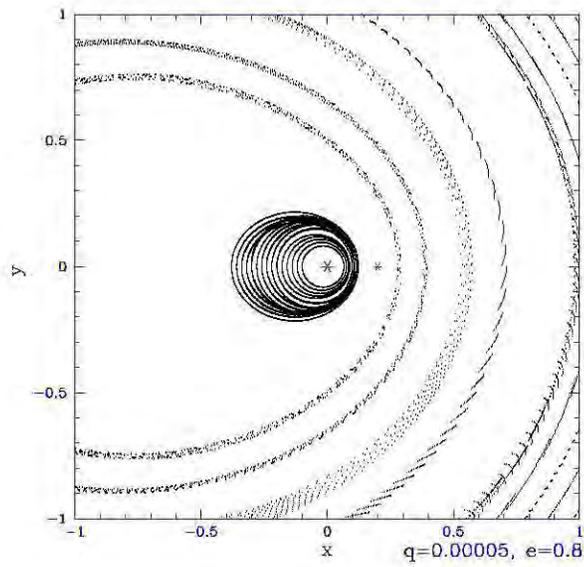


FIGURA A.140: Mapeo del disco circunprimario en el caso  $q=0.00005$   $e=0.8$ .



# Bibliografía

- [1] Abt, H. A. y Levy, S. G., 1976, ApJS, 30:273-306.
- [2] Artymowicz, P. y Lubow, S. H., 1994, 421, 651.
- [3] Bate, M. R., 1997, MNRAS, 285, 16.
- [4] Bate, M. R. y Bonnell, I. A., 1997, MNRAS, 285,33.
- [5] Barrado y Navascues D., 1998, A & A, 339, 831.
- [6] Bonenell, I. y Bastien, P., 1992, IAU Colloquium, 135, 32, 206.
- [7] Deller A. T., Maddison S. T., 2005, ApJ, 625, 398.
- [8] Dent W. R. F., Walker H. J., Holland W. S., Greaves J. S., 2000, MNRAS, 314, 702.
- [9] Duquennoy, A. y Mayor, M. 1991 A & A, 248, 485.
- [10] Fischer, D. A. y Marcy, G. W., 1992, ApJ, 396:178-194.
- [11] Goldstein H., 1922 *Mecánica Clásica*, (2da ed. Editorial Reverté S. A.).
- [12] Kalas P., Graham J. R., Clampin M., 2005, Nat, 435, 1067.
- [13] Kartunen.H. et al. , *Fundamental Astronomy*, (3a ed. Springer).
- [14] Lin, D. N. C. y Papaloizou, J. C. B. 1996, ARA & A, 34:703, 747.
- [15] Lubow, S. H., y Shu, F. H., 1975, ApJ, 198,383.
- [16] Luu,J. X. y Jewitt, D. C., 2002, ARA & A, 40:63-101.
- [17] Nagel, E. y Pichardo, B., 2008, MNRAS, 384:548-562.
- [18] Paczyński, B., 1977, ApJ, 216,822.
- [19] Papaloizou, J. C. B. y Lin, D. N. C. 1995, ARA & A,33:505-40.
- [20] Papaloizou, J. y Pringle, J. E., 1997, 181, 441.
- [21] Pichardo, B., Linda S. Sparke, Luis A. Aguilar, 2005, MNRAS, 359, 521 (Paper I).
- [22] Pichardo, B., Linda S. Sparke, Luis A. Aguilar, 2008, MNRAS, 391:815-824.
- [23] Quillen A. C., 2006, MNRAS, 372, 14.
- [24] Sandell, G. y Wright, M. 2010, ApJ, 715:919-938.
- [25] Shankland, P. D.,Blank, D. A., Boboltz, T. J., Lazio, W., y White, G. 2008 ApJ, 135,2194.
- [26] Tohline, J. E., 2002, ARA & A, 40:349-85.
- [27] Wyatt M. C., Dermott S. F., Telesco C. M., Fisher R. S., Grogan K., Holmes E. K., Piña R. K., 1999, ApJ, 527, 918.