UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS PROPIEDADES DE CONJUNTOS NO MEDIBLES DE R

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A:

CRISTINA VILLANUEVA SEGOVIA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JAVIER PÁEZ CÁRDENAS

2010

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Villanueva
   Segovia
   Cristina
   55 50 29 14
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   301501657

2. Datos del tutor
   Dr
   Javier
   Páez
   Cárdenas

3. Datos sinodal 1
   Dr
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa

4. Datos sinodal 2
   Dr
   Jefferson Edwin
   King
   Dávalos

5. Datos sinodal 3
   Dr
   Rafael René
   Del Río
   Castillo

6. Datos sinodal 4
   Dr
   Alejandro
   Illanes
   Mejía

7. Datos del trabajo escrito
   Algunas propiedades de conjuntos no medibles de R
   63 p
   2010

Índice

Introducción 2

I. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ 5

II. Medibles y no medibles 24

III. Algunos otros conjuntos no medibles 30

IV. Qué tan no medibles 37

V. Los conjunto de Sardella - Ziliotti 50

Bibliografía 63

Introducción

Mide lo que se pueda medir,
y lo que no se pueda medir, hazlo medible.
Galileo Galilei

Medir siempre ha sido una inquietud para el hombre y ha sido objeto de discusión y grandes controversias desde tiempos muy antiguos. En la Grecia clásica el hallazgo de magnitudes inconmensurables, como la diagonal del cuadrado de lado uno, fue motivo de un grave escándalo dentro de los pitagóricos.

Una vez asumida y comprendida la existencia de estas magnitudes inconmensurables —hoy diríamos irracionales— la longitud de un segmento no representa ninguna complicación, por el contrario, la longitud se comporta de muy buena forma y por algo ha sido la herramienta por excelencia para medir distancias, áreas, volúmenes, etcétera. Fue este afán por conservar estas propiedades de la longitud y llevarlas a objetos que no fueran precisamente segmentos lo que impulsó los orígenes de la teoría de la medida.

A principios del siglo XIX Lebesgue "redujo" el problema de integrar funciones reales al problema de asignar a cualquier subconjunto de la recta un número que rescatara las propiedades escenciales de la longitud, es decir, al problema de medir, en un sentido geométrico, cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Lebesgue planteó este problema y propuso una solución, la medida de Lebesgue; sin embargo no pudo probar que su medida realmente quedaba definida para todo subconjunto de $\mathbb{R}$, esto es, no logró demostrar que todo conjunto resultaba medible según su medida; tampoco pudo probar lo contrario.

Tan sólo tres años después de que se definiera la medida de Lebesgue, el matemático italiano Giuseppe Vitali dio a conocer el primer conjunto no medible; para mostrar la existencia de tal conjunto Vitali utilizó el axioma de elección, axioma que había sido enunciado formalmente por Zermelo apenas un año antes y que generó diversas reacciones entre los matemáticos. Dentro del grupo de los que se oponían a dicho axioma se encontraban Borel, Baire y el mismo Lebesgue. La pregunta fue entonces ¿es posible construir un conjunto no medible utilizando únicamente los axiomas de Zermelo-Fraenkel?, esta interrogante permaneció abierta más de medio siglo y mientras tanto se dieron a conocer distintos ejemplos de conjuntos no medibles, que usaban nuevamente el axioma de elección pero que satisfacían propiedades muy distintas, tales como los construidos por Van Vleck y Bernstein.

Poco más tarde un gran número de matemáticos, dentro de los cuales se encontraban Carathéodory, Banach, Sierpinski y Hausdorff, se interesó por el problema de la medida y generalizó tanto el concepto de medida como el problema planteado por Lebesgue, estableciendo así las bases de la teoría de la medida tal y como la conocemos hoy en día.

Finalmente en la decada de los sesenta Robert Solovay logró responder la pregunta de si es posible construir un conjunto no medible utlizando únicamente los axiomas de Zermelo-Fraenkel, pues probó que la proposición "todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es Lebesgue medible" es independiente de dichos axiomas, es decir, que en el marco de estos axiomas no se puede probar que dicha proposición sea verdadera ni falsa, con lo que la respuesta a la pregunta es *no* y en consecuencia siempre que se quiera construir un conjunto que no sea Lebesgue medible habrá que suponer hipótesis adicionales a Zermelo-Fraenkel.

Lo que se ha logrado hacer para evitar el axioma de elección es construir conjuntos que no son Lebesgue medibles a partir de hipótesis menos comunes pero un poco más débiles que el axioma de elección como lo son el teorema de Hanh-Banach y un caso particular del teorema de Tychonoff para productos de espacios topólogicos compactos; también se han construido conjuntos no medibles utilizando la hipótesis del continuo.

Retomando la frase de Galileo, usada como epígrafe de esta introducción, y en vista de que es imposible suponiendo el axioma de elección hacer medibles, en el sentido planteado por Lebesgue, a estos conjuntos no medibles; lo que podría intentarse entonces sería precisamente medir la "no medibilidad" de estos conjuntos. Lejos de lograrlo, en este trabajo intentaremos simplemente dar una clasificación de los conjuntos no medibles según su "grado de no medibilidad", esto lo haremos dando ciertas condiciones que nos permiten decir qué tan grandes pueden ser los subconjuntos medibles de un conjunto no medible, y en este sentido qué tan no medible resulta, como subespacio de $\mathbb{R}$, el conjunto en cuestión.

Para esto y con el objetivo de hacer este trabajo lo más accesible posible hemos decidido incluir en el primer capítulo la definición original de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, la cual además tiene la ventaja de dejar ver de manera muy clara por qué la medida de Lebesgue es realmente un intento por generalizar, a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, nuestra idea intuitiva de longitud. Como únicamente trabajaremos con la medida de Lebesgue, para simplificar la notación, llamaremos conjuntos medibles a los conjuntos Lebesgue medibles.

En el siguiente pequeño capítulo estudiamos algunas propiedades generales de las clases de los conjuntos medibles y de los no medibles, analizaremos, por ejemplo, algunas propiedades de los conjuntos de medida cero y la construcción de los conjuntos de Vitali.

Posteriormente, en la tercera parte, daremos dos interesantes ejemplos de conjuntos no medibles, a saber, los conjuntos de Bernstein y los de Sierpiński, el primero construido nuevamente usando el axioma de elección y el segundo bajo la hipótesis del continuo.

El cuarto capítulo se centrará en la discusión de qué tan no medible puede ser un subconjunto de $\mathbb{R}$; para esto definiremos cuatro tipos de no medibilidad y estudiaremos algunas propiedades de cada uno de estos tipos, así como las relaciones que entre éstos existen. Presentaremos también algunos nuevos ejemplos de conjuntos no medibles que se construyen haciendo algunas variaciones en las costrucciones vistas en las secciones anteriores. Cabe mencionar que a lo largo de esta sección se supondrá siempre válido el axioma de elección, y de la hipótesis del continuo haremos mención en caso de ser requerida.

Finalmente, en el último capítulo trabajaremos con hipótesis menos comunes para incluir un ejemplo de un conjunto no medible que se puede construir bajo hipótesis un poco más ligeras que el axioma de elección, a saber, que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ es numerablemente compacto y el axioma de elección numerable. Asimismo analizaremos el tipo de no medibilidad de los conjuntos construidos de esta forma.

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Con el objetivo de definir una integral que ampliara el conjunto de las funciones integrables —hasta ese momento las Riemann integrables— Lebesgue, en 1902, planteó el problema de la medida en $\mathbb{R}$ y propuso una solución: la medida de Lebesgue.

Dicho problema consistía en asignar a cada conjunto acotado un número real no negativo, al que llamaríamos medida, que satisficiera las siguientes condiciones:

1. Existe un conjunto cuya medida es distinta de cero.

2. La medida es invariante bajo traslaciones. Donde una traslación T es una función $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que existe $\beta \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$, $T(A) = \{x \in \mathbb{R} : x = a + \beta, a \in A\}$.

3. La medida de la unión de una cantidad finita o numerable de conjuntos ajenos dos a dos es igual a la suma de las medidas de dichos conjuntos.

A continuación expondremos la solución planteada por Lebesgue y analizamos ciertas propiedades de su medida.

Notemos primero que a partir de las condiciones establecidas en el problema de la medida se sigue que, en caso de existir una solución, dicha solución debe satisfacer también que dados cualesquiera dos subconjuntos, A y A', de $\mathbb{R}$ si $A' \subseteq A$ entonces la medida de A' es menor o igual que la de A, pues, si m es una medida que satisface las condiciones del problema y denotamos por $m(A)$ la medida del conjunto A, entonces, en vista de la tercera condición y tomando en cuenta que la medida es siempre un número no negativo, debemos tener que:

$$m\left(A'\right) \leq m\left(A'\right) + m\left(A - A'\right) = m\left(A' \cup \left(A - A'\right)\right) = m(A)$$

por lo que $m(A') \leq m(A)$.

A esta propiedad se lo conoce como la propiedad de la monotonía, la cual, en combinación con la segunda condición, tiene como consecuencia inmediata que cualquier intervalo, con longitud positiva, tenga medida positiva; pues si existiera un intervalo I de longitud positiva cuya medida fuera cero, dado que todo conjunto acotado puede cubrirse con una cantidad finita de intervalos que resultan de trasladar al intervalo I, concluiríamos, con base en la segunda condición, que la medida de cualquier conjunto es cero, lo cual contradice la primera condición. Además, tomando en cuenta que la medida de un conjunto acotado debe ser finita, resulta que la medida de cualquier conjunto formado por un solo punto dede ser cero, pues de lo contrario cualquier conjunto acotado formado por una infinidad de puntos tendría medida infinita.

Se observa también que si el problema de la medida admite al menos una solución, entonces admitirá una infinidad, pues al multiplicar las medidas obtenidas por un mismo número (distinto de cero y de uno) obtendremos una nueva solución del problema. Para evitar esta multiplicidad de soluciones podemos asignarle 1 como medida a un conjunto arbitrario de medida distinta de cero; de modo que podemos comenzar la construcción de una solución tomando, de manera arbitraria, un intervalo $\mathfrak{u}$ y asignándole 1 por medida; supongamos que dicho intervalo es el intervalo $[0,1]$, al cual denotaremos por $\mathfrak{u}$.

De aquí en adelante consideraremos que los intervalos en $\mathbb{R}$ son todos los conjuntos de la forma $(a,b)\,;[a,b]\,;(a,b]$ o bien $[a,b)$ con $a \leq b$ y que dado un intervalo I de cualquiera de estas formas su longitud, $\ell\,(I)$, es precisamente $b-a$.

Veremos que las condiciones que establece el problema de la medida nos obligan a asignar a cada intervalo su longitud como medida.

Teorema 1.1

Dada cualquier medida m que satisface las condiciones del problema y cualquier intervalo I de $\mathbb{R}$, se tiene que $m\,(I) = \ell\,(I)$, donde $m\,(I)$ denota a la medida del conjunto I.

Sea m una medida que satisface las condiciones del problema y sea I un intervalo de la forma $(a,b]$ con $a < b$. Supongamos primero que $\ell\,(I) = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que $\ell\,(I)$ es p veces la q-ésima parte de $\mathfrak{u}$, es decir que existe un intervalo I' que cabe p veces en I y q veces en $\mathfrak{u}$, o bien, que existen p intervalos ajenos, I_i de la forma $(a_i, b_i]$ con $a_i < b_i$, y q intervalos ajenos, I'_j, tambien de la forma $(a'_i, b'_i]$ con $a'_i < b'_i$ tales que:

$$\bigcup_{i=1}^{p} I_i = I \text{ y para toda } i \in \{1,...,p\} \text{ existe una traslación } T_i \text{ tal que}$$
$$T_i\,(I') = I_i$$
$$\bigcup_{j=1}^{q} I'_j = \mathfrak{u} \text{ y para toda } j \in \{1,...,q\} \text{ existe una traslación } T'_j \text{ tal que}$$
$$T'_j\,(I') = I'_j$$

Dadas las condiciones 2 y 3 del problema, se debe tener que:

$$1 = m(\mathfrak{u}) = \sum_{j=1}^{q} m\left(I'_j\right) = q\left(m\left(I'\right)\right)$$

Por lo que $m(I') = \frac{1}{q}$. Del mismo modo:

$$m(I) = \sum_{i=1}^{p} m(I_i) = p\left(m\left(I'\right)\right)$$

De modo que $m(I) = \frac{p}{q}$.

Supongamos ahora que $\ell(I) = z$ con z irracional positivo, entonces para toda $q \in \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q < z\}$ existe un intervalo I_q tal que $I_q \subseteq I$ y $\ell(I_q) = q$. Por lo que, recordando la propiedad de la monotonía, obtenemos:

$$q = m(I_q) \leq m(I) \text{ para toda } q \in \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q < z\}$$

Debemos tener entonces que $z \leq m(I)$, ya que si $z > m(I)$, entonces podríamos encontrar un racional q tal que $z > q > m(I) > 0$, lo cual es imposible.

De manera análoga para toda $p \in \{p \in \mathbb{Q} : p > z > 0\}$ existe un intervalo I_p tal que $I \subseteq I_p$ y $\ell(I_p) = p$, y en consecuencia $m(I) \leq z$. Por lo tanto $m(I) = z$.

Ahora bien, dado que la medida de cualquier conjunto formado por un solo punto es cero y que cualquier intervalo abierto con extremos a y b satisface $(a, b] = (a, b) \cup [b, b]$ debemos tener que $b - a = m((a, b]) = m((a, b))$. De modo similar se prueba que la medida de los intervalos de la forma $[a, b]$ o $[a, b)$ coincide también con su longitud.

Se concluye entonces que si queremos definir la medida sobre el conjunto de todos los intervalos de $\mathbb{R}$, dicha medida deberá coincidir con la longitud. $\square$

Dado que la longitud de los intervalos cumple con todas las condiciones del problema de la medida podemos, en efecto, asignarle a cada intervalo su longitud como medida, lo cual era de esperarse pues precisamente el problema de la medida de Lebesgue lo que se plantea en el fondo es si se puede o no asignar a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ algo así como una longitud. En este sentido no sorprende que, pensando en una generalizaión de la longitud, la medida exterior se defina de la siguiente manera:

Definiciones

1. Dado cualquier subconjunto acotado A de $\mathbb{R}$ definimos la medida exterior de A, $m^*(A)$, como:

$$m^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

   Donde cada I_n es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\ell(I)$ representa la longitud del intervalo I.

2. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ contenido en un intervalo I. Definimos la medida interior de A, $m_*(A)$, como:

$$m_*(A) = \ell(I) - m^*(I - A)$$

   Resta probar que el valor de $m_*(A)$ no depende del intervalo I que tomemos.

Para probar que la medida interior está bien definida y para muchas otras aplicaciones valdrá la pena tener en cuenta la gran flexibilidad de la que goza la definición de la medida exterior, pues bien pudimos haber pedidio que los intervalos I_n fueran todos cerrados, o abiertos, o bien abiertos en un extremo y cerrados en el otro; también podríamos pedir, si así lo quisiéramos, que los intervalos sean ajenos entre sí o pedir que la longitud de cada uno de éstos sea menor que un cierto número positivo. (Véase [1])

Teniendo esto en cuenta resulta sencillo probar que dado un conjunto acotado A el valor de $\ell(I) - m^*(I - A)$ es el mismo para cualquier intervalo I que contiene a A.

Proposición 1.1

Dado un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ y cualesquiera dos intervalos I e I' que contienen a A se tiene que:

$$\ell(I) - m^*(I - A) = \ell\left(I'\right) - m^*\left(I' - A\right)$$

Dado cualquier conjunto acotado A y dos intervalos I e I' que lo contienen es claro que el intervalo $I \cap I'$ también contiene a A, por lo que basta hacer el caso en el que $I' \subseteq I$. Supongamos entonces que $A \subseteq I' \subseteq I$, tomemos $\varepsilon > 0$ e $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos ajenos dos a dos tal que $I - A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) \leq m^*(I - A) + \varepsilon$. Ahora bien, el conjunto $I - I'$ consta de a lo más dos intervalos ajenos a los cuales denotaremos por

I_a e I_b. De este modo, si para cada $n \in \mathbb{N}$, $I'_n = I_n \cap I'$, entonces la familia $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de intervalos ajenos cuya unión contiene a $I' - A$ y se queda contenida en I', y además $(I_a \cup I_b) \cup (\cup I'_n) = \cup I_n$, en consecuencia:

$$\ell(I_a) + \ell(I_b) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I'_n\right) \leq m^*(I - A) + \varepsilon$$

Ahora, si despejamos el tercer término del lado izquierdo y sumamos y restamos $\ell(I')$ al lado izquierdo obtenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I'_n\right) \leq \varepsilon - \ell(I) + m^*(I - A) + \ell\left(I'\right)$$

Finalmente, dado que $m^*(I' - A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I'_n)$, concluimos que $\ell(I) - m^*(I - A) - (\ell(I') - m^*(I' - A)) \leq \varepsilon$.

Veremos ahora que $-\varepsilon \leq \ell(I) - m^*(I - A) - (\ell(I') - m^*(I' - A))$, para esto tomemos una familia $\{I''_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos ajenos dos a dos tal que $I' - A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I''_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I''_n) \leq m^*(I' - A) + \varepsilon$. De este modo, si I_a e I_b son como antes, tenemos que $I - A \subseteq (I_a \cup I_b) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} I''_n)$, en consecuencia:

$$m^*(I - A) \leq \ell(I_a) + \ell(I_b) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I''_n\right) \leq \ell(I_a) + \ell(I_b) + m^*\left(I' - A\right) + \varepsilon$$

Así, sumando $\ell(I')$ a los extremos de la desigualdad, tenemos que $\ell(I') + m^*(I - A) \leq \ell(I) + m^*(I' - A) + \varepsilon$, de lo que ciertamente resulta que $-\varepsilon \leq \ell(I) - m^*(I - A) - (\ell(I') - m^*(I' - A))$.

Por lo tanto el valor de $\ell(I) - m^*(I - A)$ no depende del intervalo I que tomemos. $\square$

Queda claro entonces que tanto la medida exterior como la interior están definidas para todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Veremos ahora que dichas medidas satisfacen las siguientes propiedades:

i) La medida exterior es siempre mayor o igual que la medida interior.

ii) Ambas medidas son invariantes bajo traslaciones.

iii) Tanto la medida exterior como la interior son monótonas, es decir, que si $A \subseteq B$, entonces $m^*(A) \leq m^*(B)$ y $m_*(A) \leq m_*(B)$.

iv) Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos acotados y ajenos dos a dos entonces:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) \text{ y } m_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n)$$

Siempre que la unión resulte ser un conjunto acotado. En este caso suele decirse que m^* es σ-subaditiva y que m_* es σ-sobreaditiva.

Es sencillo ver que, en efecto, las medidas que acabamos de definir cumplen con la primera propiedad, pues dado un conjunto acotado $E \subseteq \mathbb{R}$ e I un intervalo que contiene a E, para cualesquiera dos familias de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $E \subseteq \cup I_n$ e $I - E \subseteq \cup I'_n$ se tiene que:

$$m^*(E) + m^*(I - E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I'_n\right) \leq \ell(I)$$

por lo que $m^*(E) \leq \ell(I) - m^*(I - E) = m_*(E)$.

Las siguientes dos propiedades se siguen directamente de las definiciones por lo que aquí incluiremos únicamente la demostración de la cuarta. Demostraremos primero que la medida exterior es σ-subaditiva, para esto no será necesario suponer que los conjuntos $A_n, n \in \mathbb{N}$ son ajenos dos a dos.

Proposición 1.2
Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de conjuntos tales que el conjunto $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es acotado, entonces

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ como en la hipótesis y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar una familia de intervalos $\{I_{n,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$A_n \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_{n,j} \text{ y } m^*(A_n) \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,j}) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

De modo que $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} (\cup_{j\in\mathbb{N}} I_{n,j})$ y por lo tanto

$$m^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \ell(I_{n,j}) \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n) + \varepsilon$$

Dado que esto se puede hacer para cualquier $\varepsilon > 0$ se concluye que $m^*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n)$. □

Probaremos ahora que la medida interior es σ-sobreaditiva, para esto utilizaremos el siguiente lema.

Lema 1.1
Si $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos tales que:

- *Cada conjunto C_n, con $n \in \mathbb{N}$, es una unión finita de intervalos de cualquier tipo.*

- ∘ *Para toda* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $C_{n+1} \subseteq C_n$.
- ∘ *El conjunto* $\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *es vacío.*

Entonces para toda $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $m^*(C_N) < \varepsilon$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea R_n el conjunto $C_n - C_{n+1}$, de modo que $R_n \cap R_m = \emptyset$ para toda $n \neq m$ y nuevamente cada R_n puede ponerse como unión finita de intervalos ajenos dos a dos, digamos:

$$R_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} I_{i,n}$$

Denotemos ahora por R al conjunto $\cup_{n\in\mathbb{N}} R_n$, entonces $R = C_1$, pues por un lado es claro que $R \subseteq C_1$ y por el otro, dado que $\cap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$, para cualquier $x \in C_1$ debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_N$ y si $M > N$, entonces $x \notin C_M$, de modo que $x \in R_N \subseteq R$. Por lo tanto $R = C_1$ y en consecuencia, dado que R es la unión ajena de los intervalos $I_{i,n}$, con $i \in \{1, ..., n\}$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$m^*(C_1) = m^*(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k_n} \ell(I_{i,n}) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(R_n)$$

Ahora bien, dada $\varepsilon > 0$ podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=N}^{\infty} m^*(R_n) < \varepsilon$$

Además, del mismo modo que vimos que $R = C_1$ se puede ver que $\cup_{n\geq N} R_n = C_N$, por lo que

$$\sum_{n=N}^{\infty} m^*(R_n) \geq m^* \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} R_n \right) = m^*(C_N)$$

Por lo tanto $m^*(C_N) < \varepsilon$. □

Proposición 1.3

Si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una familia de conjuntos ajenos dos a dos tal que el conjunto* $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *es acotado entonces:*

$$m_*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n)$$

Haremos primero el caso en el que tenemos un número finito de conjuntos, es claro que para esto basta probar que la proposición es cierta cuando tenemos únicamente dos conjuntos; sean entonces A y B dos conjuntos ajenos contenidos en un intervalo I, y sea $\varepsilon > 0$.

Sean $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familias de intervalos ajenos dos a dos tales que:

$$I - A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, \;\; I - B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I'_n$$

$$m^*(I-A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \frac{\varepsilon}{5} \text{ y } m^*(I-B) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I'_n) - \frac{\varepsilon}{5} \tag{1}$$

De este modo $I - \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subseteq A$ y $I - \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n \subseteq B$; además si denotamos por C_m al conjunto

$$C_m = \left(I - \bigcup_{n=1}^{m} I_n\right) \bigcap \left(I - \bigcup_{n=1}^{m} I'_n\right),$$

entonces la familia $\{C_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ cumple con las hipótesis del lema anterior ya que $(I - \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \cap (I - \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) \subseteq A \cap B = \emptyset$. Por lo tanto podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) - \frac{\varepsilon}{5}, \quad \sum_{n=1}^{N} \ell(I'_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I'_n) - \frac{\varepsilon}{5}$$

y que $m^*(C_N) < \frac{\varepsilon}{5}$, es decir que $\sum_{n=1}^{k} \ell(\mathrm{I}_n) < \frac{\varepsilon}{5}$, donde $\bigcup_{n=1}^{k} \mathrm{I}_n = C_N$

Ahora bien, por un lado el conjunto $D_N = (I - \cup_{n\leq N} I_n) \cup (I - \cup_{n\leq N} I'_n)$ puede ponerse como una unión finita de intervalos ajenos dos a dos, digamos, $T_1, ..., T_M$ donde:

$$\sum_{n=1}^{M} \ell(T_n) = \ell(I) - \sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) + \ell(I) - \sum_{n=1}^{N} \ell(I'_n) - \sum_{n=1}^{k} \ell(\mathrm{I}_n)$$

En consecuencia, dado que nuevamente el conjunto $I - D_N$ es una unión finita de intervalos, tenemos:

$$m^*(I - D_N) = \ell(I) - \sum_{n=1}^{M} \ell(T_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) - \ell(I) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I'_n) + \frac{\varepsilon}{5}$$

Por otro lado, si denotamos ahora por D al conjunto $(I - \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \cup (I - \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n)$ resulta que $D \subseteq A \cup B$ y que $[(I - D) - (I - D_N)] \subseteq (\cup_{n\geq N} I_n) \cup$

$(\cup_{n\geq N} I'_n)$. Por lo que utilizando la subaditividad de la medida exterior tenemos que:

$$m^*(I-D) \leq m^*[(I-D)-(I-D_N)] + m^*(I-D_N) \leq$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=N}^{\infty} \ell\left(I'_n\right) + m^*(I-D_N) \leq \frac{2\varepsilon}{5} + m^*(I-D_N)$$

Utilizando entonces las cotas que hemos encontrado para $m^*(I-D)$ y $m^*(I-D_N)$, resulta que:

$$m_*(A\cup B) \geq m_*(D) = \ell(I) - m^*(I-D) \geq \ell(I) - \left(\frac{2\varepsilon}{5} + m^*(I-D_N)\right) >$$

$$\ell(I) - \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \ell(I) - \sum_{n=1}^{\infty} \ell\left(I'_n\right) - \frac{3\varepsilon}{5} \geq \ell(I) - m^*(I-A) + \ell(I) - m^*(I-B) - \varepsilon,$$

donde la última desigualdad se sigue de (1).

Por lo tanto $m_*(A\cup B) \geq m_*(A) + m_*(B)$.

Haremos ahora el caso numerable; tomemos entonces una familia numerable $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos ajenos dos a dos tales que el conjunto $A = \cup_{n\in N} A_n$ es acotado. De lo que acabamos de probar se sigue que, dada cualquier $N\in\mathbb{N}$,

$$m_*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} m_*(A_n)$$

Ahora bien, como $\cup_{n\leq N} A_n \subseteq A$ para toda $N\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$m_*(A) \geq m_*\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} m_*(A_n) \text{ para toda } N\in\mathbb{N}$$

Por lo tanto $m_*(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_*(A_n)$. $\square$

En cuanto a la subaditividad de la medida exterior, se puede decir aún más, pues, recordando que la distacia entre entre dos conjuntos A y B, $dist(A,B)$, se define como $\inf\{|a-b| : a\in A, b\in B\}$, es fácil ver que dados dos conjuntos A y B tales que $dist(A,B) = \delta > 0$, entonces $m^*(A) + m^*(B) = m^*(A\cup B)$, ya que para toda $\varepsilon > 0$ podemos tomar una familia de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $A\cup B \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $m^*(A\cup B) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \varepsilon$ y que $\ell(I_n) < \delta$ para toda $n\in\mathbb{N}$, de tal modo que ningún intervalo intersecta a A y a B al mismo tiempo, por lo que, si denotamos por $I_{A,n}$ e $I_{B,n}$ a los intervalos de la familia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que intersectan a A y a B respectivamente, entonces:

$$m^*(A\cup B) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_{A,n}) + \ell(I_{B,n})\right) - \varepsilon \geq m^*(A) + m^*(B) - \varepsilon,$$

y por lo tanto $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$. Más adelante veremos que no basta con suponer que $A \cap B = \emptyset$ para que se dé esta igualdad.

Hemos visto entonces que tanto la medida exterior como la interior están definidas para todo subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y cumplen con todas las condiciones del problema de la medida, excepto —tal vez— con la tercera[1], pero en vista de la propiedad *iv*) es claro que si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ fuera una familia de conjuntos ajenos dos a dos tales que $m^*(A_n) = m_*(A_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces, si A denota a la unión de los conjuntos A_n, tendríamos que

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n) \leq m_*(A) \leq m^*(A)$$

Obteniendo entonces que $m^*(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

Por lo que una posible solución al problema de la medida podría darse en términos de la siguiente definición.

Definición

> Dado un conjunto acotado A diremos que A es medible si $m^*(A) = m_*(A)$ y que la medida de A, $m(A)$, es precisamente este valor común.

De este modo, la medida satisface las tres condiciones del problema y, en efecto, es esta la solución planteada por Lebesgue. A continuación veremos que el hecho de que un conjunto sea medible es equivalente a que un conjunto pueda "separarse", por decirlo de algún modo, de su complemento.

Proposición 1.4
Sea A un conjunto contenido en un intervalo I.

El conjunto A *es medible si y sólo si para toda* $\varepsilon > 0$ *existen familias numerables de intervalos ajenos dos a dos* $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que* $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $I - A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n$ *y la suma de las longitudes de los intervalos* $\mathrm{I}_{n,j} = I_n \cap I'_j$ *con* $n, j \in \mathbb{N}$ *es menor que* ε.

[1] En el siguiente capítulo veremos que, en efecto, existen subconjuntos P_1 y P_2 de $\mathbb{R}$ ajenos entre sí tales que $m^*(P_1 \cup P_2) < m^*(P_1) + m^*(P_2)$. Así mismo, en el tercer capítulo veremos que existen conjuntos ajenos P_1 y P_2 tales que $m_*(P_1 \cup P_2) > m_*(P_1) + m_*(P_2)$

Sea $\varepsilon > 0$, supongamos primero que A es medible, podemos tomar familias numerables de intervalos ajenos dos a dos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $I - A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n$ y que

$$m^*(A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \frac{\varepsilon}{4} \text{ y } m^*(I-A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I'_n\right) - \frac{\varepsilon}{4}$$

De este modo, dado que $m_*(A) = \ell(I) - m^*(I-A) = m^*(A)$, resulta que

$$\ell(I) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Tomemos ahora $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n,j\leq N} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) \geq \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

y llamemos J_n al conjunto $\cup_{j\leq N} \mathrm{I}_{n,j}$. De este modo

$$I \subseteq (\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \cup \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n\right) = (\cup_{n\leq N} (I_n - J_n)) \cup (\cup_{n>N} I_n) \cup \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n\right)$$

por lo que, si sacamos medidas y usamos la subaditividad de la medida exterior

$$\begin{aligned} \ell(I) &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) - \sum_{n,j\leq N} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I'_n\right) \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Finalmente de (2) y (3) se sigue que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) < \varepsilon$.

Supongamos ahora que el conjunto A es tal que para toda $\varepsilon > 0$ existen familias de intervalos ajenos dos a dos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cubren a A y a $I - A$ respectivamente y que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) < \varepsilon$, donde $\mathrm{I}_{n,j}$ es como antes. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada uno de los intervalos I_n e I'_n está contenido en I. Nótese además que, dado que para toda $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $I = \cup_{n\in\mathbb{N}} (I_n \cup I'_n) \supseteq \cup_{n\leq N} (I_n \cup I'_n)$, entonces para toda $N \in \mathbb{N}$ se satisface

$$\ell(I) \geq \sum_{n\leq N} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \sum_{n,j\leq N} \ell(\mathrm{I}_{n,j})$$

y en consecuencia

$$\ell(I) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j})$$

Entonces, tomando en cuenta que

$$m^*(A) - m_*(A) = m^*(A) - (\ell(I) - m^*(I - A))$$

y que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son cubiertas de A y de $I - A$ respectivamente, tenemos que

$$0 \leq m^*(A) - m_*(A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\ell(I_n) + \ell\left(I'_n\right)\right) - \ell(I) \leq \sum_{n,j\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) < \varepsilon$$

Dado que esto se puede hacer para toda $\varepsilon > 0$, se concluye que $m^*(A) = m_*(A)$. $\square$

A partir de esta equivalencia y de las propiedades que hemos mencionado ya de las medidas interior y exterior se puede probar que la medida cumple con lo siguiente:

1. *Dado cualquier conjunto medible A contenido en un intervalo I, el conjunto $I - A$ es también medible.*

   Esto es una consecuencia directa de la equivalencia que acabamos de probar.

2. *La intersección finita de conjuntos medibles es medible.*

   Sean A y B conjuntos medibles contenidos en un intervalo I y sea $\varepsilon > 0$. Podemos tomar entonces familias de intervalos $\{I_n\}$ e $\{I'_n\}$ tales que $A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $I - A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n$ y $\sum_{n,j\in\mathbb{N}} \ell(\mathrm{I}_{n,j}) < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $\mathrm{I}_{n,j}$ denota al conjunto $I_n \cap I'_j$. Tomemos de manera análoga las familias de intervalos $\{T_n\}$ y $\{T'_n\}$ considerando ahora al conjunto B y denotando por $\mathrm{T}_{n,j}$ al conjunto $T_n \cap T'_j$.

   De este modo, si $\mathcal{C} = (\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} T_n)$ y $\mathcal{D} = (\cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} T'_n)$ entonces $A \cap B \subseteq \mathcal{C}$, $I - (A \cap B) \subseteq \mathcal{D}$ y ciertamente

   $$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \subseteq (\cup_{n,j\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_{n,j}) \cup (\cup_{n,j\in\mathbb{N}} \mathrm{T}_{n,j})$$

   Por lo tanto $I - (A \cap B)$ y $A \cap B$ pueden cubrirse con uniones de familias de intervalos tales que la suma de las longitudes de los intervalos de las respectivas intersecciones es menor que ε.

   Se sigue entonces que la intersección de cualquier familia finita de conjuntos medibles es medible.

3. *Si A_1 y A_2 son dos conjuntos medibles tales que $A_1 \subseteq A_2$, entonces el conjunto $A_2 - A_1$ es también medible y $m(A_2 - A_1) = m(A_2) - m(A_1)$.*

   Dado que $A_2 - A_1 = A_2 \cap (I - A_1)$, donde I es un intervalo que contiene a A_2, el conjunto $A_2 - A_1$ es medible. Además $A_2 = (A_2 - A_1) \cup A_1$, por lo que $m(A_2 - A_1) = m(A_2) - m(A_1)$.

4. *La unión numerable, no necesariamente ajena, de conjuntos medibles es medible, siempre que dicha unión resulte ser un conjunto acotado.*

   Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos medibles tales que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ está contenido en un intervalo I. Definimos de manera recursiva los conjuntos A'_n, con $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera: $A'_1 = A_1$ y $A'_n = A_n \cap (\cap_{i<n} (I - A'_i))$ para toda $n > 1$. De esta forma $A'_n \cap A'_m = \emptyset$ para cualesquiera $n \neq m$ y $A = \cup A'_n$. Además, de la primera y de la segunda propiedad se sigue que cada A'_n es medible. Por lo tanto el conjunto A, siendo la unión de una famila numerable de conjuntos medibles y ajenos dos a dos, es medible.

5. *La intersección numerable de conjuntos medibles es medible.*

   Basta notar que si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de conjuntos medibles contenidos en un intervalo I y para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n es un intervalo tal que $A_n \subseteq I_n \subseteq I$, entonces: $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = I - (\cup_{n\in\mathbb{N}} (I_n - A_n))$

Observación

Nótese que la medida queda definida únicamente para los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ tales que su medida exterior es igual a la interior, es decir que la medida de Lebesgue resuelve el problema de la medida solamente para la clase de los conjuntos medibles, que hasta el momento no hemos visto si coincide o no con la clase de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, como se planteaba en el problema.

Sin embargo, la clase de los conjuntos medibles es grande. En particular contiene a los conjuntos abiertos y cerrados que son acotados, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.2

Todo conjunto abierto y acotado es medible y todo conjunto compacto es medible.

Dado que cualquier conjunto abierto puede ponerse como unión numerable de intervalos abiertos, de la propiedad 4 se sigue que cualquier conjunto abierto y acotado es medible. De este modo, si F es un conjunto compacto e I es un intervalo abierto que contiene a F, entonces el conjunto $I - F$ es medible, pues es abierto y acotado, de modo que por la propiedad 1 podemos concluir que F es medible. □

A lo largo de este trabajo nos será útil extender la medida a conjuntos no acotados, lo cual se puede hacer de forma más o menos sencilla permitiendo que la medida tome el valor infinito. Para esto extenderemos la medida exterior e interior de la siguiente manera:

Definiciones

1. Dado cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ definimos la medida exterior de A, $\mu^*(A)$, como:

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup I_n\right\}$$

   Donde cada I_n es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $\ell(I)$ representa la longitud del intervalo I.

2. Dado cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ definimos la medidida interior de A, $\mu_*(A)$, como:

$$\mu_*(A) = \sup\{m(K) : K \subseteq A,\ K \text{ compacto}\}$$

   en donde $m(K)$ es la medida de Lebesgue de K.

De este modo tanto la medida exterior como la interior quedan definidas para todo subconjunto de $\mathbb{R}$ y se puede ver facilmente que en efecto son una extensión de las medidas interior y exterior que definimos anteriormente:

Proposición 1.5
Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado, entonces $m^*(A) = \mu^*(A)$ y $m_*(A) = \mu_*(A)$.

Para la primera igualdad, dado que las definiciones coinciden, no hay nada que probar, probaremos entonces la segunda igualdad.

Sea A un conjunto acotado y sean K un compacto e I un intervalo tales que $K \subseteq A \subseteq I$, entonces $\ell(I) = m(K) + m(I - K)$ por lo que $m(K) \leq \ell(I) - m^*(I - A) = m_*(A)$, pues $I - A \subseteq I - K$. Por lo tanto $\mu_*(A) \leq m_*(A)$. Para probar la desigualdad inversa, sea $\varepsilon > 0$ e I un intervalo cerrado tal que $A \subseteq I$, podemos tomar una familia numerable de intervalos abiertos I_n tales que, si $G = \cup I_n$, entonces $I - A \subseteq G$ y $m^*(I - A) + \varepsilon \geq m(G)$. Ahora bien, por un lado tenemos que $\mu_*(A) \geq m(I - G)$, pues $I - G$ es un compacto contenido en A, por otro lado es claro que $m(I - G) \geq \ell(I) - m(G)$. En consecuencia:

$$\ell(I) - \varepsilon \leq \ell(I) - m(G) + m^*(I - A) \leq$$

$$m(I - G) + m^*(I - A) \leq \mu_*(A) + m^*(I - A)$$

es decir que $\mu_*(A) \geq m_*(A) - \varepsilon$. Por lo tanto $\mu_*(A) \geq m_*(A)$.

Queda demostrado entonces que, si A es acotado, entonces $\mu_*(A) = m_*(A)$. $\square$

Corolario 1.1
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) : A \subseteq G,\ G \text{ abierto}\}$

Esto es claro ya que cualquier conjunto abierto se puede poner como unión numerable de intervalos abiertos, por lo que dado un conjunto cualquiera A de $\mathbb{R}$ resulta que:

$$\inf\{\mu(G) : A \subseteq G,\ G \text{ abierto}\} = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup I_n\right\} = \mu^*(A)$$

Lo cual concluye la prueba. $\square$

Definimos la medida de Lebesgue de un conjunto A (no necesariamente acotado) con base en estas extensiones de manera similar a como lo habíamos hecho anteriormente, es decir:

Definición

> Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$, si $\mu^*(A) < \infty$, decimos que A es medible si $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ y la medida de A, $\mu(A)$, es precisamente ese valor común. Si $\mu^*(A) = \infty$, decimos que A es medible si para todo intervalo I de $\mathbb{R}$ se tiene que $A \cap I$ es medible, en este caso pondremos $\mu(A) = \infty$.

Faltaría únicamente mostrar que bajo esta nueva definición la clase de los conjuntos medibles sigue siendo cerrada bajo uniones e intersecciones numerables, lo cual se sigue facilmente del hecho de que $\mathbb{R}$ se puede poner como una unión numerable de intervalos. Para esto sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos medibles, no necesariamente acotados, tal que $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ no es acotado, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean I_{2n} el intervalo $(n-1, n]$ e I_{2n+1} el intervalo $(-n, -n+1]$; de modo que la familia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una famila de intervalos ajenos dos a dos tal que $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Entonces para cualquier $N \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \mu_* (A \cap I_n) &= \sum_{n=1}^{N} m_* (A \cap I_n) \leq m_* \left(\bigcup_{n=1}^{N} (A \cap I_n) \right) \\ &\leq \mu_* \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap I_n) \right) = \mu_* (A) \end{aligned}$$

y en consecuencia $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_* (A \cap I_n) \leq \mu_* (A)$, es decir que μ_* también es σ-sobreaditiva. Por otro lado, dado que la definición de medida exterior no se ha alterado, tenemos ciertamente que $\mu^* (A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^* (A \cap I_n)$ y dado que los conjuntos $A \cap I_n$ son medibles para toda $n \in \mathbb{N}$ la suma de sus medidas exteriores es igual a la suma de sus medidas interiores; en consecuencia $\mu_* (A) = \mu^* (A)$, es decir, A es medible.

La prueba de que esta familia —extendida— de conjuntos medibles también es cerrada bajo intersecciones numerables es completamente análoga.

Resulta natural preguntarse si es posible caracterizar a los conjuntos medibles en términos únicamente de la medida exterior del conjunto en cuestión —ya que la medida interior, m_*, se definió desde un principio en términos de esta útima—. Pues bien, en efecto, esto es posible; el siguiente teorema nos brinda una caracterización de este tipo que además de que en ciertas ocasiones puede resultar más cómoda que la definición original, exhibe otra propiedad distintiva de los conjuntos medibles, a saber, que dividen aditivamente la medida exterior de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Para probar este teorema utilizaremos dos lemas sencillos que nos serán de utilidad a lo largo de este trabajo. Antes de enunciar estos lemas recordemos que un conjunto A es un conjunto G_δ, o de tipo G_δ, si puede ponerse como la intersección de una familia numerable de conjuntos abiertos; de manera similar, decimos que un conjunto A es un conjunto F_σ, o de tipo F_σ, si F puede ponerse como la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados.

Lema 1.2

Dado cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ existe un conjunto G de tipo G_δ tal que $A \subseteq G$ y $\mu^* (A) = \mu (G)$.

Sea A tal que $\mu^* (A) < \infty$. Sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto G_k tal que $A \subseteq G_k$ y $\mu (G_k) < \mu^* (A) + \frac{1}{k}$. De este modo haciendo $G = \cap_{k\in\mathbb{N}} G_k$ tenemos que $A \subseteq G$, G es de tipo G_δ y para toda $k \in \mathbb{N}$, $\mu(G) < \mu^*(A) + \frac{1}{k}$ por lo tanto $\mu(G) \leq \mu^*(A)$. Por otro lado, dado que $A \subseteq G$, tenemos que $\mu^*(A) \leq \mu(G)$ y por lo tanto $\mu(G) = \mu^*(A)$.

Si $\mu^*(A) = \infty$, haciendo $G = \mathbb{R}$ tenemos que $A \subseteq G$, G es de tipo G_δ y claramente $\mu(G) = \mu^*(A)$. □

Lema 1.3
Dado cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}$ existe un conjunto F de tipo F_σ tal que $F \subseteq A$ y $\mu_*(A) = \mu(F)$.

Supongamos primero que $\mu_*(A) < \infty$. Del mismo modo que en la demostración anterior sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un compacto F_k tal que $F_k \subseteq A$ y $\mu(F_k) > \mu_*(A) - \frac{1}{k}$. Sea $F = \cup_{k\in\mathbb{N}} F_k$, entonces $F \subseteq A$, F es del tipo F_σ y $\mu(F) > \mu_*(A) - \frac{1}{k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ por lo tanto $\mu(F) \geq \mu_*(A)$. Como $F \subseteq A$, se concluye que $\mu(F) = \mu_*(A)$. Ahora bien, si $\mu(A) = \infty$ entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un compacto F_k tal que $F_k \subseteq A$ y $\mu(F_k) > k$; definiendo F del mismo modo en el que lo hicimos anteriormente tenemos que $F \subseteq A$, F es del tipo F_σ y $\mu(F) > k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo que $\mu(F) = \infty = \mu_*(A)$. □

Teorema 1.3 (Caracterización de Carathéodory)
Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(A) < \infty$.
A es medible si y sólo si para todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ medible tal que $\mu^*(A) < \infty$ y sea B cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, veremos que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$.

Gracias al lema 1 sabemos que podemos tomar un conjunto G de tipo G_δ tal que $B \subseteq G$ y $\mu(G) = \mu^*(B)$, de este modo resulta que:

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \leq \mu(G \cap A) + \mu(G \cap A^c) = \mu(G) = \mu^*(B)$$

y dado que la medida exterior es subaditiva concluimos que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$.

Ahora supongamos que A es un conjunto tal que para todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ se tiene que $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$, veremos que A es medible.

Supongamos primero que A es acotado, entonces podemos tomar un intervalo I tal que $A \subseteq I$. Sean G_1 y G_2 dos conjuntos del tipo G_δ tales que $A \subseteq G_1 \subseteq I$, $I - A \subseteq G_2 \subseteq I$ y $\mu^*(A) = \mu(G_1)$, $\mu^*(I - A) = \mu(G_2)$. De este modo, aplicando la hipótesis a los conjuntos G_1 y G_2 tenemos que:

- ✠ $\mu^*(A) = \mu^*(G_1) = \mu^*(G_1 \cap A) + \mu^*(G_1 \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(G_1 \cap A^c)$
- ✠ $\mu^*(I - A) = \mu^*(G_2) = \mu^*(G_2 \cap A) + \mu^*(G_2 \cap A^c)$
  $= \mu^*(G_2 \cap A) + \mu^*(I - A)$

Se sigue entonces que tanto la medida exterior —y entonces la medida— de $G_1 \cap A^c$ como la de $G_2 \cap A$ son ambas cero. Además notemos que $\mu(I - G_2) = \ell(I) - \mu^*(I - A) = \mu_*(A)$ y que $I - G_2 \subseteq A \subseteq G_1$ por lo que:

$$\mu^*(A) - \mu_*(A) = \mu(G_1) - \mu(I - G_2) = \mu(G_1 - (I - G_2))$$

Ahora bien el conjunto $G_1 - (I - G_2)$ puede ponerse como $G_1 \cap (I \cap G_2^c)^c = G_1 \cap (I^c \cup G_2)$ y dado que $G_1 \subseteq I$ resulta que $G_1 - (I - G_2) = G_1 \cap G_2$, pero ciertamente $G_1 \cap G_2 = (G_1 \cap G_2 \cap A^c) \cup (G_1 \cap G_2 \cap A) = (G_1 \cap A^c) \cup (G_2 \cap A)$. Así, como la media de $G_1 \cap A^c$ y la de $G_2 \cap A$ son ambas cero, resulta que el conjunto $G_1 - (I - G_2)$ tiene medida cero; en consecuencia $\mu^*(A) - \mu_*(A) = 0$ y por lo tanto A es medible.

Ahora supongamos que A no está acotado, sea B cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ e I un intervalo cualquiera, aplicando la hipótesis esta vez al conjunto $(A \cap I)^c \cap B$ tenemos que:

$$\mu^*((A \cap I)^c \cap B) = \mu^*(A \cap I^c \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$$

Por otro lado, puesto que I es medible, también tenemos:

$$\mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cap B \cap I) + \mu^*(A \cap B \cap I^c)$$

Así, a partir de estas dos igualdades y usando la subaditividad de la medida exterior podemos ver que:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*((A \cap I) \cap B) + \mu^*((A \cap I)^c \cap B) =$$

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) = \mu^*(B)$$

Entonces $\mu^*(B) = \mu^*((A \cap I) \cap B) + \mu^*((A \cap I)^c \cap B)$ para todo subconjunto B de $\mathbb{R}$ y dado que $A \cap I$ es acotado, por lo que acabamos de probar, concluimos que $A \cap I$ es medible para cualquier intervalo I de $\mathbb{R}$; en particular, si nuevamente I_{2n} es el intervalo $(n-1, n]$ e I_{2n+1} el intervalo $(-n, -n+1]$ tenemos que $A \cap I_n$ es medible para toda $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia el conjunto $\cup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap I_n) = A$ también lo es. $\square$

Por último, no estaría de más subrayar que con lo hecho hasta el momento no hemos resuelto el problema de la medida en $\mathbb{R}$, pues hemos definido la medida solamente para los conjuntos que hemos llamado medibles, pero aun en caso de que éstos no sean todos, lo hecho hasta aquí no ha sido en vano, pues como veremos a continuación, si queremos definir una función $\varphi : \mathcal{D} \subseteq P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de tal manera que la clase de los conjuntos medibles esté contenida en $\mathcal{D}$, no importa cómo definamos a la función φ —si queremos que cumpla con las condiciones del problema de la medida—, en los conjuntos medibles dicha función tendrá que coincidir con la medida de Lebesgue.

Teorema 1.4

Sea $\varphi : \mathcal{D} \subseteq P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una función tal que $\mathcal{D}$ contiene a la clase de los conjuntos medibles.

Si φ satisface las condiciones del problema de la medida entonces $\varphi(E) = \mu(E)$ para todo conjunto medible E.

Supongamos que $\varphi : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una medida que satisface las tres condiciones del problema de la medida y que $\mathcal{A}$ contiene a la clase de los conjuntos medibles. Sea E un conjunto medible y sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos ajenos dos a dos tales que $E \subseteq \cup I_n$, entonces necesariamente $\varphi(E) \leq \varphi(\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi(I_n)$, pero además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(I_n)$ debe ser precisamente $\ell(I_n)$, pues, como hemos visto en el teorema 1.1, la única medida que se puede definir sobre los intervalos es la longitud, entonces para cualquier familia numerable de intervalos ajenos dos a dos que contenga a E tenemos que $\varphi(E) \leq \sum \ell(I_n)$ y por lo tanto $\varphi(E) \leq \mu^*(E) = \mu(E)$.

Para probar la desigualdad contraria supongamos primero que E es acotado entonces resulta que, si I es un intervalo que contiene a E,

$$\varphi(E) + \mu^*(I - E) \geq \varphi(E) + \varphi(I - E) = \varphi(I) = \ell(I)$$

Por lo tanto $\varphi(E) \geq \mu_*(E) = \mu(E)$ y dado que E es medible se concluye que $\varphi(E) = \mu(E)$.

Ahora bien, si E no es acotado entonces, por lo que acabamos de probar, dado cualquier conjunto compacto F contenido en E, debemos tener que $\mu(F) = \varphi(F) \leq \varphi(E)$ y en consecuencia $\mu_*(E) \leq \varphi(E)$; por lo que nuevamente $\varphi(E) = \mu(E)$. $\square$

En este capítulo trataremos de describir las clases de los conjuntos medibles y de los no medibles a partir de algunos resultados clásicos.

En cuanto a la clase de los conjuntos medibles hemos visto ya que todos los intervalos, todos los conjuntos abiertos, todos los cerrados y todo conjunto que, partiendo de los anteriores, se pueda construir uniendo, intersectando y sacando complementos pertenece a esta clase. Una subclase interesante de esta clase es la de los conjuntos nulos, conjuntos medibles cuya medida es cero, pues dado que la medida exterior de dichos conjuntos es cero cualquier subconjunto de éstos es también medible y de medida cero. Dicho de otro modo la clase de los conjuntos nulos es cerrada bajo subconjuntos.

Es claro que todo conjunto numerable es nulo, pero no todo conjunto nulo es numerable, basta considerar al bien conocido conjunto de Cantor, pues dicho conjunto es no numerable y, como veremos a continuación, es también nulo.

Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor y $\mathfrak{u}$ el intervalo $[0,1]$, entonces $\mathfrak{C} = \cap C_n$ donde cada C_n es la unión de 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$. Dado que cada uno de los conjuntos C_n es cerrado y $\mathfrak{C} = \cap C_n$ es claro que $\mathfrak{C}$ es cerrado, y en consecuencia medible.

Por otro lado, sabemos que $\mathfrak{u} - \mathfrak{C} = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es la unión de 2^{n-1} intervalos ajenos de longitud $\frac{1}{3^n}$ y como además $A_n \cap A_m = \emptyset$ para toda $n \neq m$, entonces:

$$\mu(\mathfrak{u} - \mathfrak{C}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

De este modo resulta que $1 = \mu(\mathfrak{u}) = \mu(\mathfrak{u} - \mathfrak{C}) + \mu(\mathfrak{C}) = 1 + \mu(\mathfrak{C})$

Por lo tanto el conjunto de Cantor es nulo.

Por otro lado, es claro que ningún conjunto nulo puede contener un intervalo, en este sentido resulta aún más interesante el conjunto de Smith-Volterra-Cantor, también conocido como el Cantor gordo, el cual es un conjunto medible de medida positiva que sin embargo no contiene ningún intervalo, es más, dicho conjunto es denso en ninguna parte.

Teorema 2.1 (Construcción del conjunto de Smith-Volterra-Cantor)

Se puede construir en el intervalo $[0,1]$ *un conjunto denso en ninguna parte y de medida positiva.*

Este conjunto se construye del mismo modo que el conjunto de Cantor clásico, pero quitando intervalos más pequeños en cada paso.

Sea de nuevo $\mathfrak{u}$ el intervalo $[0,1]$ y empecemos quitándole a éste un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ centrado en el punto medio y llamémosle $I_{1,1}$ e $I_{1,2}$ a los intervalos restantes del lado derecho e izquierdo respectivamente. Definimos al conjunto G_1 como la unión de estos intervalos, esto es:

$$G_1 = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

Supongamos que de este modo hemos definido los conjuntos G_k para toda $k < n$, con $n \geq 2$. Definimos al conjunto G_n de la siguiente manera:

A cada uno de los intervalos $I_{n-1,j}$ con $1 \leq j \leq 2^{n-1}$ le quitamos un intervalo abierto de longuitud $\frac{1}{4^n}$ centrado en el punto medio del intervalo $I_{n-1,j}$ y definimos los intervalos $I_{n,2j-1}$ e $I_{n,2j}$ como los intervalos cerrados restantes del lado derecho e izquierdo respectivamente. Así el conjunto G_n se define como:

$$G_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}$$

Finalmente, el conjunto de Smith-Volterra-Cantor, que denotaremos por $\mathfrak{G}$, es el que resulta de intersectar a todos los conjuntos G_n, es decir $\mathfrak{G} = \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Nótese que al intervalo $\mathfrak{u}$ en cada paso se le quitan 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{4^n}$, de modo que la medida del conjunto $\mathfrak{u} - \mathfrak{G}$ está dada por:

$$\mu\left(\mathfrak{u} - \mathfrak{G}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i}\left(2^{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\mu\left(\mathfrak{G}\right) = \frac{1}{2} > 0$.

Veremos ahora que $\mathfrak{G}$ es denso en ninguna parte. Notemos primero que, al igual que el conjunto de Cantor, dicho conjunto es perfecto, pues dado $x \in \mathfrak{G}$ e I un intervalo abierto que contiene a x podemos tomar n lo suficientemente grande para que el intervalo $I_{n,j}$ de G_n que contiene a x esté propiamente contenido en I; así si y es un extremo del intervalo $I_{n,j}$ tal que $y \neq x$ entonces $y \in \mathfrak{G} \cap (I - \{x\})$. Por lo tanto $\mathfrak{G}$ no tiene puntos aislados, pero además $\mathfrak{G}$ es cerrado, y en consecuencia es perfecto. De este modo, para mostar que $\mathfrak{G}$ es denso en ninguna parte, basta probar que $\mathfrak{G}$ tiene interior vacío; pero esto es sencillo, pues si existería $x \in Int\left(\mathfrak{G}\right)$ entonces existiría un intervalo I tal que $x \in I \subseteq \mathfrak{G}$, lo cual es imposible, pues tomando $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$2^n > \frac{1}{\ell(I)}$ resulta claro que I no puede estar contenido en G_n, menos aún en $\mathfrak{G}$. Por lo tanto $\mathfrak{G}$ es denso en ninguna parte. $\square$

Corolario 2.1
Dada cualquier $\alpha \in (0,1)$ existe un conjunto G_α perfecto y denso en ninguna parte tal que $\mu(\mathfrak{G}_\alpha) = \alpha$.

Si en la construcción anterior en lugar de haber quitado intervalos de longitud $\frac{1}{4^n}$ hubieramos quitado intervalos de longitud $\frac{1}{x^n}$ con $x > 0$ la medida del conjunto resultante, $\mathfrak{G}'$, estaría dada por:

$$\mu(\mathfrak{G}') = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x^i}\left(2^{i-1}\right) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^i$$

Así que para $x > 2$ tenemos que $\mu(\mathfrak{G}') = \frac{x-3}{x-2}$. Por lo tanto, si queremos construir un conjunto $\mathfrak{G}_\alpha$ con las mismas propiedades que el Cantor gordo pero cuya medida sea α para alguna $\alpha \in (0,1)$ basta tomar $x = \frac{3-2\alpha}{1-\alpha}$.

Nótese que, en efecto, para $\alpha \in (0,1)$ tenemos $x > 2$ y además para $\alpha = 0$ tendríamos $x = 3$ lo cual induce la construcción del Cantor clásico. $\square$

En cuanto a la clase de los conjuntos nulos una última observación será pertinente: todo conjunto medible puede ponerse como la unión de un conjunto F_σ y un nulo, lo cual es fácil de mostrar pues sabemos que dado un conjunto medible M existe un conjunto F del tipo F_σ tal que $F \subseteq M$ y $\mu(F) = \mu(M)$. De modo que el conjunto $M - F$ es nulo y claramente $M = F \cup (M - F)$.

De este modo, si por conjunto nulo entendemos pequeño —en el sentido de que se puede encerrar en intervalos arbitrariamente pequeños— entonces por conjunto medible podemos entender un conjunto que se parece mucho a un conjunto F_σ.

Por otro lado, esta propiedad de los conjuntos nulos de que cualquier subconjunto es también nulo se muestra bastante conveniente pues podríamos decir que, en cierto sentido, son conjuntos absolutamente medibles y esto resulta útil para probar ciertos resultados; por ejemplo, utlizando esta propiedad podemos calcular la cardinalidad de la clase de los conjuntos medibles.

Teorema 2.2
La cardinalidad de la clase de los conjuntos medibles es $2^{\mathfrak{c}}$, donde $\mathfrak{c}$ denota a la cardinalidad del continuo.

Esto es sencillo pues dado que el conjunto de Cantor tiene la cardinalidad del continuo y que todo subconjunto del conjunto de Cantor es medible, resulta que si $\mathcal{M}$ denota a la clase de los conjuntos medibles entonces $P(\mathfrak{C}) \subseteq \mathcal{M}$ y por lo tanto $2^{\mathfrak{c}} = |P(\mathfrak{C})| \leq |\mathcal{M}| \leq |P(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$. En consecuencia $|\mathcal{M}| = |P(\mathbb{R})|$. $\square$

Aun cuando los conjuntos medibles son muchos —bajo ciertas hipótesis, de las cuales hablaremos un poco más adelante— están bastante, pero bastante lejos de ser todos. Giuseppe Vitali, en 1905, fue el primero en mostrar la existencia de subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$; esto lo hizo exhibiendo un conjunto al cual no se le puede asignar medida alguna. La prueba de este hecho se basa fundamentalmente en que la medida es invariante bajo traslaciones. Como veremos a continuación la definición de dicho conjunto es sorprendentemente sencilla.

Definición

Consideremos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R}$ dada por:

$$x \sim y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Q}$$

Diremos que un subconjunto V de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Vitali si V contiene exactamente a un representante de cada clase de equivalencia inducida por la relación $\sim$.

Teorema 2.3
Los conjuntos de Vitali son no medibles.

Sea V un conjunto de Vitali y supongamos que dicho conjunto es medible. Dado $q \in \mathbb{Q}$ denotaremos por V_q al conjunto

$$\{v + q : v \in V\}$$

Nótese que si p y q son dos racionales distintos entonces $V_p \cap V_q = \emptyset$, pues si $z \in V_p \cap V_q$ entonces existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $v_1 + q = z = v_2 + p$. De modo que $z \sim v_1$ y $z \sim v_2$ por lo que $v_1 = v_2$ y por lo tanto $p = q$.

Por otra parte, dado cualquier $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in V$ tal que $x \sim y$ de modo que para algún $q \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x = y + q$ y por lo tanto $x \in V_q$. Tenemos entonces que:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} V_q$$

Así, dado que la medida es invariante bajo traslaciones, $\mu(V_q) = \mu(V)$ para toda $q \in \mathbb{Q}$ y por lo tanto la medida del conjunto V ha de ser positiva; en particular existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(V \cap [-k,k]) > 0$. Llamemos V' al conjunto $V \cap [-k,k]$ y definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto E_n como:

$$E_n = \left\{ v + \frac{1}{n} : v \in V' \right\}$$

De este modo $E_n \cap E_m = \emptyset$ para toda $n \neq m$ y además como la medida de V' es positiva, si $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ debemos tener que $\mu(E) = \infty$, sin embargo dado que $E \subseteq [-k, k+1]$, tenemos también que $\mu(E) \leq 2k+1$. Resulta imposible entonces que el conjunto V sea medible.

Por lo tanto los conjuntos de Vitali son no medibles. $\square$

Haciendo uso de estos conjuntos de Vitali podemos, ahora sí, probar que la medida exterior no es aditiva, pues si V es un conjunto de Vitali, gracias al teorema 1.3, sabemos que existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(A) \neq \mu^*(A \cap V) + \mu^*(A \cap V^c)$, de modo que, tomando en cuenta que la medida exterior es σ–subaditiva, si hacemos $P_1 = A \cap V$ y $P_2 = A \cap V^c$, resulta que $\mu^*(P_1 \cup P_2) < \mu^*(P_1) + \mu^*(P_2)$.

Corolario 2.2
La cardinalidad de la clase de los conjuntos no medibles también es $2^{\mathfrak{c}}$.

Esto puede hacerse tomando de nuevo subconjuntos del conjunto de Cantor, pues si V es un conjunto de Vitali construido en el intervalo $[0,1]$ y $\mathfrak{C}$ es el conjunto de Cantor construido en el intervalo $[1,2]$ entonces el conjunto $V \cup S$ es no medible para cualquier conjunto $S \subseteq \mathfrak{C}$. Por lo tanto la cardinalidad de la clase de los conjuntos no medibles es igual a la del potencia de $\mathbb{R}$. $\square$

Hemos visto entonces que hay tantos conjuntos medibles, como no medibles como subconjuntos hay de $\mathbb{R}$ y habíamos mencionado que esto es así bajo ciertas hipótesis. Pues bien, en el caso de los conjuntos de Viltali es indispensable, para mostrar su existencia, hacer uso del axioma de elección; lo cual no es poca cosa pues el mismo Lebesgue no estaba de acuerdo con este axioma por parecerle antinatural. Aunque por otro lado si no suponemos el axioma de elección numerable podría ocurrir que $\mathbb{R}$ fuera una unión numerable de conjuntos numerables —pues sin dicho axioma no hay forma de probar lo contrario (Véase [4])— y en este caso el problema de la medida en $\mathbb{R}$ carecería de sentido.

En fin, Lebesgue murió sin conocer un conjunto no medible que en su construcción no utilizara el axioma de elección, y es que no fue sino hasta la década de los setenta que el problema de la medida planteado por Lebesgue se resolvió, o mejor dicho quedó sin solución, pues en 1970 Robert M. Solovay probó que la proposición *todo subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es Lebesgue medible* es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel (Véase [9]). Por lo que tanto para construir un conjunto no medible como para probar que todo conjunto es medible siempre tendremos que asumir alguna hipótesis adicional a ZF.

Algunos otros conjuntos no medibles

En este capítulo veremos dos ejemplos más de conjuntos no medibles, uno se construye usando nuevamente el axioma de elección, y el otro bajo la hipótesis del continuo. El siguiente teorema será útil en la construcción de ambos conjuntos.

Teorema 3.1
Todo conjunto perfecto contiene un conjunto perfecto y nulo cuya cardinalidad es la del continuo.

Sea P un conjunto perfecto y sea I un intervalo abierto de longitud 1 tal que $I \cap P \neq \emptyset$; podemos tomar entonces dos puntos distintos $x_{1,1}$ y $x_{1,2}$ en $I \cap P$, pues todo punto de P es un punto de acumulación de P; así que podemos tomar ahora dos intervalos cerrados y ajenos $I_{1,1}, I_{1,2}$ tales que para $j \in \{1,2\}$ se tenga que $x_{1,j} \in int\,(I_{1,j})\,,\ I_{1,j} \subseteq I$ y $\ell\,(I_{1,j}) < \frac{1}{3}$. Llamémosle A_1 al conjunto $I_{1,1} \cup I_{1,2}$.

Supongamos que de este modo hemos definido a los conjuntos A_k para toda $k < n$, definimos el conjunto A_n de la siguiente manera:

De cada uno de los conjuntos $(I_{n-1,j} - \{x_{n-1,j}\}) \cap P$ con $1 \leq j \leq 2^{n-1}$ tomemos dos puntos distintos $x_{n,2j-1}$ y $x_{n,2j}$ y dos intervalos cerrados y ajenos $I_{n,2j-1}$ e $I_{n,2j}$ tales que para $i \in \{0,1\}$ se tenga que:

$$x_{n,2j-i} \in int\,(I_{n,2j-i})\,,\ I_{n,2j-i} \subseteq I_{n-1,j} \text{ y } \ell\,(I_{n,2j-i}) < \frac{1}{3^n}$$

De este modo definimos al conjunto A_n como:

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

Hemos definido entonces una familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos compactos tales que $A_{n+1} \subseteq A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que el conjunto $\mathfrak{P} = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es no vacío. Veremos que $\mathfrak{P}$ es un conjunto perfecto y nulo contenido en P.

Para esto sean $x \in \mathfrak{P}$ e I_x un intervalo abierto que contiene a x. Dado que $x \in \mathfrak{P}$ sabemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que $x \in I_{n,k}$ y como $\lim_{n\to\infty} \ell\,(I_{n,k}) = 0$ podemos tomar n lo suficientemente grande como para que $x \in I_{n,k} \subseteq I_x$.

Veremos primero que $x \in P$, por construcción tenemos que $x_{n+1,2j-1}$ y $x_{n+1,2j}$ pertenecen al conjunto $I_{n,k} \cap P$ de modo que $(I_x - \{x\}) \cap P \neq \emptyset$. Por lo tanto x es un punto de acumulación de P, lo cual implica que $x \in P$.

Ahora veremos que x es punto de acumulación de $\mathfrak{P}$, tomemos $i \in \{0,1\}$ tal que $x \notin I_{n+1,2k-i}$, es claro que la intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de la familia $\{I_{n+1,2k-i} \cap A_m : m \in \mathbb{N}\}$ es distinta del vacío, por consiguiente, dado que todos son compactos, el conjunto $(\cap_{m\in\mathbb{N}} A_m) \cap I_{n+1,2k-i}$ es distinto del vacío. Tomemos entonces $x' \in (\cap_{m\in\mathbb{N}} A_m) \cap I_{n+1,2k-i}$ de este modo $x' \in \mathfrak{P} \cap (I_x - \{x\})$. Por lo tanto x es punto de acumulación de $\mathfrak{P}$. Dado que $\mathfrak{P}$ es cerrado, se concluye que $\mathfrak{P}$ es perfecto.

Resta probar que la cardinalidad de $\mathfrak{P}$ es la del continuo. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $c_n : A_n \subseteq \mathbb{R} \to \{0,1\}$ como:

$$c_n(x) = \begin{array}{ll} 0, \text{ si } x \in I_{n,2k-1} & \text{para alguna } k \in \left\{1, ..., 2^{n-1}\right\} \\ 1, \text{ si } x \in I_{n,2k} & \text{para alguna } k \in \left\{1, ..., 2^{n-1}\right\} \end{array}$$

De este modo si definimos la función $f : \mathfrak{P} \to [0,1]$ como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, 2^{-n}$$

Veremos que f es suprayectiva, dado cualquier $\alpha \in [0,1]$, denotamos por i_n al n-ésimo dígito de la expansión binaria de α y tomamos un punto x tal que:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{n,\varphi_n}, \text{ donde } \varphi_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} i_k 2^{n-k}.$$

Resulta entonces que $x \in \mathfrak{P}$ y que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} i_n 2^{-n} = \alpha.$$

Por lo tanto la cardinalidad del conjunto $\mathfrak{P}$ es la del continuo.

La prueba de que $\mathfrak{P}$ es nulo se deduce del hecho de que $\mathfrak{P} \subseteq A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia:

$$\mu(\mathfrak{P}) \leq \mu(A_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \ell(I_{n,k}) < \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto todo conjunto perfecto contiene un conjunto perfecto y nulo cuya cardinalidad es la del continuo. □

Conjuntos de Bernstein

Con este resultado en mano podemos, ahora sí, pasar a nuestro siguiente ejemplo de conjunto no medible. Este conjunto fue construido por Bernstein en 1908 y aun cuando su existencia se basa también en el axioma de elección —esta vez en su forma “todo conjunto puede bien ordenarse”— a diferencia de los conjuntos de Vitali, la definición y construcción de estos conjuntos se apoya en propiedades meramente topólogicas de $\mathbb{R}$. En el siguiente capítulo veremos que los conjuntos de Bernstein, en otros aspectos, se comportan de manera muy distinta a los conjuntos de Vitali.

Definición

> Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ decimos que A es un conjunto totalmente imperfecto si no contiene ningún subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$. Ahora bien, si un subconjunto de $\mathbb{R}$ es tal que tanto él como su complemento son totalmente imperfectos diremos que dicho conjunto es un conjunto de Bernstein. En otras palabras, un subconjunto B de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Bernstein si para todo subconjunto perfecto P de $\mathbb{R}$ se tiene que:
>
> $$P \cap B \neq \emptyset \text{ y } P \cap B^c \neq \emptyset.$$

Se sigue entonces que si B es un conjunto de Bernstein, B^c también lo es. Veremos ahora que es posible construir conjuntos de Bernstein en $\mathbb{R}$, para lo cual utilizaremos el siguiente lema.

Lema 3.1
El conjunto formado por todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$ tiene la cardinalidad del continuo.

Sean $\mathcal{F}$ el conjunto formado por todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$ y $\mathcal{C}$ el formado por todos los cerrados, y denotemos por $\mathfrak{c}$ a la cardinalidad del continuo. Dado que todo intervalo cerrado que contiene más de un punto es perfecto tenemos que $|\mathcal{F}| \geq \mathfrak{c}$. Por otro lado, la clase de todos los intervalos abiertos con extremos racionales es numerable y cualquier conjunto abierto es la unión de alguna subclase de este tipo de intervalos abiertos, por lo tanto la cardinalidad del conjunto formado por todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es menor o igual que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, y en consecuencia $|\mathcal{C}| \leq \mathfrak{c}$, pues todo conjunto cerrado es el complemento de algún abierto; de este modo, dado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ concluimos que $|\mathcal{F}| = \mathfrak{c}$. $\square$

Teorema 3.2
Existen conjuntos de Bernstein en $\mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$, dado que dicho conjunto tiene la cardinalidad del continuo podemos indicar sus elementos con los ordinales α tales que $\alpha < \mathfrak{c}$. De este modo podemos poner:

$$\mathcal{F} = \{F_\alpha \subseteq \mathbb{R} : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

Con lo anterior construiremos dos colecciones de puntos en $\mathbb{R}$, $\{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ y $\{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, tales que para toda $\alpha < \mathfrak{c}$ se tiene que $a_\alpha \neq b_\alpha$ y $a_\alpha, b_\alpha \in F_\alpha$.

Para esto, supongamos que hemos bien ordenado al conjunto de los números reales, de modo que también hemos bien ordenado a cada subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$ y podemos tomar los primeros dos elementos de F_1 a los cuales llamaremos a_1 y b_1, luego tomamos los primeros dos elementos de $F_2 - \{a_1, b_1\}$ y así sucesivamente.

Supongamos que de esta forma hemos definido los elementos a_α y b_α para toda $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$; definimos a_β y b_β como los primeros dos elementos de $F_\beta - \cup_{\alpha<\beta} \{a_\alpha, b_\alpha\}$, el cual es un conjunto no vacío pues, por el teorema 3.1, sabemos que F_β tiene la cardinalidad del continuo.

De este modo, si denotamos por B al conjunto $\{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, entonces B no contiene a ningún subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$, pues todos los subconjuntos perfectos de $\mathbb{R}$ intersectan al conjunto $\{b_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$, el cual está contenido en el complemento de B. Del mismo modo B^c tampoco puede contener a ningún subconjunto perfecto de $\mathbb{R}$.

Por lo tanto B es un conjunto de Bernstein. $\square$

Será útil tener en cuenta que el hecho de que un conjunto B es de Bernstein es equivalente a que cualquier conjunto cerrado no numerable de $\mathbb{R}$ tiene intersección no vacía tanto con B como con B^c. Esto es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 3.1

Todo conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ es la unión de un conjunto perfecto, posiblemente vacío, y un conjunto a lo más numerable.

Sea C un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$. Denotemos por $\mathcal{I}$ a la clase de todos los intervalos abiertos con extremos racionales y definamos $\mathcal{I}_1$ como:

$$\mathcal{I}_1 = \{I \in \mathcal{I} : |I \cap C| \leq \aleph_0\}$$

Nótese que $\mathcal{I}$ es numerable y en consecuencia $\mathcal{I}_1$ también lo es.

Sea $N = \cup \mathcal{I}_1$ y sea P el conjunto formado por todos los puntos de condensación[2] de C, de este modo $N^c = P$, pues $x \in N^c$ si y sólo si cualquier

[2] Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice que x es punto de condensación de A si dado cualquier intervalo abierto I tal que $x \in I$, el conjunto $I \cap A$ es no numerable.

intervalo abierto que contiene a x tiene intersección no numerable con C, pero esto último es equivalente a que x sea un punto de condensación de C. Además dado que N es abierto, P es cerrado.

Veremos ahora que P también es perfecto; notemos primero que si $x \in P$ e I_x es un intervalo que contiene a x, entonces $(I_x - \{x\}) \cap P \neq \emptyset$ pues de lo contrario para cada $y \in (I_x - \{x\})$ existiría un intervalo $I \in \mathcal{I}_1$ tal que $y \in I \subseteq I_x$ y entonces podríamos cubrir al conjunto $I_x - \{x\}$ con puros intervalos que pertenecen a $\mathcal{I}_1$, por lo que el conjunto $I_x \cap C$ sería a lo más numerable; lo cual es imposible pues x es punto de condensación de C. Por lo tanto P es un conjunto perfecto que, como C es cerrado, está contenido en C.

De este modo resulta que $C = P \cup (N \cap C)$, donde P es perfecto y además dado que

$$N \cap C = \bigcup_{I_n \in \mathcal{I}_1} (I_n \cap C),$$

donde cada uno de los conjuntos $I_n \cap C$, con $I_n \in \mathcal{I}_1$, es a lo más numerable, resulta que $N \cap C$ es también a lo más numerable.

Por lo tanto C es la unión de un conjunto perfecto y un conjunto a lo más numerable. $\square$

Falta probar entonces que, en efecto, los conjuntos de Bernstein son no medibles, veremos que esto es muy sencillo pues se sigue directamente de la definición.

Teorema 3.3
Los conjuntos de Bernstein son no medibles.

Sea B un conjunto de Bernstein, si B fuera medible deberíamos tener que $\mu(B) = 0$ pues de lo contrario tendríamos que $0 < \mu(B) = \mu_*(B)$ y por lo tanto existiría un conjunto compacto K de medida positiva contenido en B, lo cual es imposible pues B no contiene a ningún cerrado no numerable. Pero lo mismo ocurriría para B^c. Entonces tendríamos que $\mu(B^c) = 0 = \mu(B)$, lo cual es imposible. Por lo tanto ningún conjunto de Bernstein es medible. $\square$

En el capítulo anterior vimos que usando los conjuntos de Vitali se puede probar facilmente que la medida exterior no es aditiva, pero no se dijo nada acerca de la medida interior; pues bien, los conjuntos de Bernstein permiten ver que la medida interior tampoco es aditiva. Esto es muy sencillo, pues hemos probado, en la demostración del teorema anterior, que si B es un conjunto de Bernstein entonces $\mu_*(B) = 0 = \mu_*(B^c)$, por lo que $\infty = \mu_*(B \cup B^c) < \mu_*(B) + \mu_*(B^c) = 0$. Por lo tanto la medida interior es σ–sobreaditiva pero no es aditiva.

Conjuntos de Sierpiński

Otro tipo de conjuntos no medibles fueron construidos por Sierpiński en 1924, la primera gran diferencia entre estos conjuntos y los anteriores es que en los de Sierpiński no basta con suponer el axioma de elección para probar su existencia sino que requeriremos además de la hipótesis del continuo.

Definición

> Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de Sierpiński si S es no numerable y la intersección de S con cualquier conjunto nulo es a lo más numerable.

Teorema 3.4
Bajo la hipótesis del continuo existen conjuntos de Sierpiński.

Sea $\mathcal{N}_\delta$ el conjunto formado por todos los conjuntos nulos de tipo G_δ. Nótese que dicho conjunto tiene la cardinalidad del continuo, pues cualquier punto en $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{N}_\delta$ y además, si τ denota al conjunto formado por todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, entonces la cardinalidad de la clase formada por todos los conjuntos del tipo G_δ es menor o igual que $|\tau|^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. De este modo, haciendo uso de la hipótesis del continuo, podemos indizar los elementos de $\mathcal{N}_\delta$, N_α, con los ordinales α tales que $\alpha < \omega_1 = \mathfrak{c}$.

Construiremos una sucesión de puntos en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

Tomemos un punto s_1 en $\mathbb{R}$. Sea $M_2 = N_1 \cup \{s_1\}$ dado que M_2 es también un conjunto nulo, podemos tomar un punto, s_2, en $\mathbb{R} - M_2$. Supongamos que para toda $\alpha < \beta < \omega_1$ hemos definido el punto s_α. Definimos al conjunto M_β como:

$$M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} N_\alpha \bigcup \{s_\alpha : \alpha < \beta\}.$$

De nuevo, dado que M_β es un conjunto nulo, pues $\beta < \omega_1$, podemos tomar un punto s_β en $\mathbb{R} - M_\beta$. De este modo, si S denota al conjunto $\{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, dado que $s_\alpha \neq s_\beta$ para toda $\alpha \neq \beta$, es claro que S es no numerable, de hecho:

$$|S| = \omega_1 > \omega_0$$

Por otra parte, observemos que el conjunto S satisface que si $s_\alpha, s_\beta \in S$ y $\alpha < \beta$, entonces $s_\beta \notin N_\alpha$ por lo que para toda $\xi < \omega_1$ se tiene que:

$$|S \cap N_\xi| \leq |\{s_\alpha : \alpha \leq \xi\}| \leq \omega_0$$

Se sigue entonces que S intersecta a cualquier conjunto nulo en un conjunto a lo más numerable, pues hemos visto ya, en el lema1.2, que todo conjunto nulo está contenido un conjunto nulo del tipo G_δ. Por lo tanto S es un conjunto de Sierpiński. □

Teorema 3.5
Los conjuntos de Sierpiński son no medibles.

Sabemos que todo conjunto medible de medida positiva contiene un conjunto compacto de medida positiva, el cual es un cerrado no numerable y, gracias a la proposición 3.1, podemos concluir que todo conjunto medible de medida positiva contiene un conjunto perfecto. Ahora bien, por el teorema 3.1, sabemos que todo conjunto perfecto contiene un conjunto nulo no numerable, de modo que todo conjunto medible de medida positiva contiene un conjunto nulo no numerable.

Se sigue entonces que si S es un conjunto de Sierpiński, entonces S no puede contener ningún conjunto medible de medida positiva, es decir que $\mu_*(S) = 0$. Sin embargo, si $\mu^*(S) = 0$ entonces S es un conjunto nulo, lo cual es imposible pues S intersecta a cualquier conjunto nulo en un conjunto a lo más numerable. Por lo tanto los conjuntos de Sierpiński son no medibles. □

Algunas otras propiedades de los conjuntos de Sierpiński serán analizadas en el siguiente capítulo, lo mismo que ciertas características de los conjuntos de Bernstein y de Vitali.

Qué tan no medibles

Hemos visto ya tres ejemplos distintos de conjuntos no medibles, los tres con propiedades bastante peculiares; por un lado los conjuntos de Vitali permiten dar una cubierta ajena de $\mathbb{R}$ que consta únicamente de una cantidad numerable de traslaciones de un conjunto; por otro lado, los conjuntos de Bernstein parecen distribuirse en $\mathbb{R}$ de una manera sorprendentemente equilibrada, pues tanto ellos como sus complementos son más que densos en $\mathbb{R}$, en el sentido de que no sólo intersectan a cualquier abierto sino que intersectan a cualquier cerrado no numerable; finalmente, los conjuntos de Sierpiński son conjuntos no numerables que a cachos pequeños (contenidos en un nulo) son siempre numerables.

En vista de que las propiedades que provocan la no mediblidad son tan diversas resulta natural preguntarse si estos conjuntos se comportan del mismo modo en cuanto a su no medibilidad. Habíamos mencionado al principio de este trabajo que la clase de los conjuntos nulos es cerrada bajo subconjuntos y que en ese sentido resultan ser, como subespacios de $\mathbb{R}$, extremadamente medibles; es precisamente en esta dirección que centraremos nuestra atención en este capítulo, trataremos pues, de ver qué tan no medible puede ser un subconjunto de $\mathbb{R}$, entendiendo a éste como subespacio, es decir, veremos qué tan grandes pueden ser los subconjuntos medibles de un conjunto no medible.

Definiciones

Decimos que un subconjunto no medible P de $\mathbb{R}$ es:

1. Débilmente no medible si P contiene un subconjunto medible de medida positiva.
2. Altamente no medible si cualquier subconjunto medible de P es nulo.
3. Altamente no medible saturado si la intersección de P con cualquier conjunto medible de medida positiva resulta ser no medible.
4. Extremadamente no medible si los únicos subconjuntos medibles de P son numerables.

A continuación se enlistan observaciones en las que mencionaremos algunas propiedades de cada uno de los cuatro tipos de no medibilidad, las primeras tres se siguen inmediatamente de las definiciones.

Proposiciones

4.1 *Cualquier subconjunto no numerable de un conjunto extremadamente no medible es también extremadamente no medible.*

4.2 *Todo conjunto altamente no medible saturado es altamente no medible.*

4.3 *Todo conjunto extremadamente no medible es altamente no medible.*

4.4 Dado un conjunto P, si $\mu^*(P) < \infty$, entonces P *es débilmente no medible si y sólo si* $0 < \mu_*(P) < \mu^*(P)$

Esto es claro pues si P es un conjunto débilmente no medible tal que $\mu^*(P) < \infty$, entonces existe un conjunto medible A contenido en P tal que $0 < \mu(A)$, por lo tanto $0 < \mu(A) \leq \mu_*(P)$; además, como P es no medible y $\mu^*(P) < \infty$, debemos tener que $0 < \mu_*(P) < \mu^*(P)$.

Supongamos ahora que P es un conjunto para el cual $0 < \mu_*(P) < \mu^*(P)$ entonces es claro que P es no medible y, dado que $0 < \mu_*(P)$, sabemos que existe un conjunto compacto, y por lo tanto medible, de medida positiva contenido en P. Por lo tanto P es débilmente no medible.

4.5 *Del mismo modo un conjunto P es altamente no medible si y sólo si* $0 = \mu_*(P) < \mu^*(P)$.

Supongamos que P es altamente no medible. Entonces $\mu_*(P) = 0$, pues de lo contrario existiría un conjunto medible de medida positiva contenido en P, lo cual es imposible. Dado que P es no medible se concluye que $0 = \mu_*(P) < \mu^*(P)$.

Supongamos ahora que P es un conjunto tal que $0 = \mu_*(P) < \mu^*(P)$ entonces P es no medible y si $M \subseteq P$ es medible entonces $\mu(M) \leq \mu_*(P) = 0$. Por lo tanto P es altamente no medible.

4.6 Dado *un conjunto P, si $\mu_*(P) < \infty$ entonces P es débilmente no medible si y sólo si P es la unión ajena de un conjunto medible de medida positiva y un conjunto altamente no medible.*

Supongamos primero que P es la unión ajena de un conjunto altamente no medible P' y un medible F de medida positiva. Es claro que P es no medible, pues de lo contrario el conjunto $P \cap F^c = P'$ sería medible, y como F es un conjunto medible de medida positiva contenido en P, entonces P es débilmente no medible.

Supongamos ahora que P es débilmente no medible. Gracias al lema 1.3 podemos tomar un conjunto $F \subseteq P$ del tipo F_σ tal que $\mu(F) = \mu_*(P)$. Sea $P' = P - F$, de este modo $P = P' \cup F$ con $P' \cap F = \emptyset$ pero además, dado que P es débilmente no medible, $\mu_*(P) > 0$ por lo que F es un conjunto medible de medida positiva. Por otro lado es claro que P' es no medible y dado que

$$\mu_*(P) \geq \mu_*(P - F) + \mu_*(F) = \mu_*(P - F) + \mu_*(P)$$

y que $\mu_*(P) < \infty$ debemos tener que $\mu_*(P - F) = 0$, lo que implica que P' es altamente no medible. Por lo tanto P es la unión ajena de un conjunto altamente no medible y un conjunto medible de medida positiva.

El siguiente teorema nos presenta una caracterización similar a las de la cuarta y quinta proposiciones pero para conjuntos altamente no medibles saturados y que, en cierto sentido, da lugar al nombre que estos conjuntos reciben, pues como resultado inmediato se obtiene que un conjunto P es altamente no medible saturado si y sólo si tanto él como su complemento son altamente no medibles.

Teorema 4.1

Las siguientes proposiciones son equivalentes para cualquier subconjunto P de $\mathbb{R}$:

1. P es altamente no medible saturado.
2. Para todo conjunto medible A se tiene que $\mu^*(P \cap A) = \mu(A) = \mu^*(P^c \cap A)$
3. Para todo conjunto medible A se tiene que $\mu_*(P \cap A) = 0$ y $\mu^*(P \cap A) = \mu(A)$
4. $\mu_*(P) = 0 = \mu_*(P^c)$

Demostración

$1 \Rightarrow 2$ Sea $P \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto altamente no medible saturado, es decir, que la intersección de P con cualquier conjunto medible de medida positiva es no medible y sea A un conjunto medible; es claro que si $\mu(A) = 0$, entonces $\mu^*(P \cap A) = \mu(A) = \mu^*(P^c \cap A) = 0$, consideremos entonces el caso en el que $\mu(A) > 0$.

Tomemos G un conjunto del tipo G_δ tal que $A \cap P \subseteq G$ y que $\mu(G) = \mu^*(A \cap P)$.

Debemos tener entonces que $\mu(A-G)=0$ pues de lo contrario existiría un compacto K de medida positiva contenido en $A-G$, pero entonces K sería un conjunto medible de medida positiva cuya intersección con P es medible, pues dicha intersección es vacía, por lo tanto $\mu(A-G)=0$. Por consiguiente:

$$\mu(A)=\mu(A\cap G)+\mu(A-G)=\mu(A\cap G)\leq\mu(G)=\mu^*(A\cap P)\,. \tag{4}$$

Se sigue entonces que $\mu(A)=\mu^*(A\cap P)$, pues $A\cap P\subseteq A$.

Del mismo modo, podemos tomar G' un conjunto del tipo G_δ tal que $A\cap P^c\subseteq G'$ y que $\mu(G')=\mu^*(A\cap P^c)$. Nuevamente debe ocurrir que $\mu(A-G')=0$ pues de lo contrario existiría un compacto K' de medida positiva tal que $K'\subseteq A-G'\subseteq P$, pero entonces K' sería un conjunto medible de medida positiva cuya intersección con P es medible, pues dicha intersección es precisamente K'. Haciendo un racionamiento análogo al hecho en (1) concluimos que $\mu(A)=\mu^*(A\cap P^c)$.

Por lo tanto $\mu^*(P\cap A)=\mu(A)=\mu^*(P^c\cap A)$.

$2\Rightarrow 3$ Supongamos ahora que P es tal que para todo conjunto medible A se tiene que $\mu^*(A\cap P)=\mu(A)=\mu^*(A\cap P^c)$ basta probar que $\mu_*(A\cap P)=0$. Sea A un conjunto medible y supongamos, por el contrario, que $\mu_*(A\cap P)>0$ entonces existe un compacto K de medida positiva contenido en $A\cap P$ pero entonces $K\cap P^c=\emptyset$ por lo que tendríamos que $0=\mu^*(K\cap P^c)<\mu(K)$ lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto $\mu_*(A\cap P)=0$ y $\mu^*(A\cap P)=\mu(A)$.

$3\Rightarrow 4$ Sea ahora $P\subseteq\mathbb{R}$ tal que para todo conjunto medible A se tiene que $\mu_*(A\cap P)=0$ y que $\mu^*(A\cap P)=\mu(A)$. Es claro que $\mu_*(P)=0$ pues de lo contrario existiría un conjunto medible K de medida positiva contenido en P tal que $\mu(K)=\mu_*(P)$, con lo que $\mu_*(K\cap P)=\mu(K)>0$ lo cual contradice la hipótesis. Del mismo modo si $\mu_*(P^c)>0$ llegamos a una contradicción.

Por lo tanto $\mu_*(P)=0=\mu_*(P^c)$.

$4\Rightarrow 1$ Por último supongamos que $P\subseteq\mathbb{R}$ es tal que $\mu_*(P)=0=\mu_*(P^c)$ y supongamos que existe un conjunto medible A tal que $A\cap P$ es medible entonces:

$$\mu(A\cap P)=\mu_*(A\cap P)\leq\mu_*(P)=0$$

Por otro lado, como $(A \cap P)^c \cap A = A \cap P^c$, tenemos que $A \cap P^c$ es medible, pues tanto A como $(A \cap P)^c$ lo son, entonces de nuevo tenemos:

$$\mu(A \cap P^c) = \mu_*(A \cap P^c) \leq \mu_*(P^c) = 0.$$

De modo que $\mu(A) \leq \mu(A \cap P) + \mu(A \cap P^c) = 0$. Por lo tanto $\mu(A) = 0$.

Se concluye así que si $\mu(A) > 0$, entonces $A \cap P$ es no medible, es decir, P es altamente no medible saturado. $\square$

Cabe destacar, que de la equivalencia 4 del teorema anterior se sigue, que si P es altamente no medible saturado entonces P^c también lo es; por otro lado, al considerar la equivalencia 3, se observa que si bien el que un conjunto sea altamente no medible saturado no nos dice mucho acerca de qué tan grandes pueden ser sus subconjuntos medibles (pues lo único que podemos decir es que, al igual que en los conjuntos altamente no medibles, dichos subconjuntos son nulos); sí nos habla del alto grado de no medibilidad que estos conjuntos poseen, en el sentido de que la diferencia entre sus medidas exterior e interior es arbitrariamente grande.

Por otro lado, si denotamos por $\mathcal{M}^+$ a la clase de todos los subconjuntos de medida positiva de $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{A}_E$ a la de todos los elementos de $\mathcal{M}^+$ cuya intersección con E es no medible, tenemos que $\mathcal{A}_E = \mathcal{M}^+$ si y sólo si E es altamente no medible saturado y que $\mathcal{A}_E = \emptyset$ si y sólo si E es medible. En general, si P es un conjunto no medible, sabemos que cualquier conjunto de medida positiva que contiene a P pertenece a $\mathcal{A}_P$. El siguiente teorema describe una clase de conjuntos que no contienen a P y que sin embargo está contenida en $\mathcal{A}_P$.

Teorema 4.2

Dado cualquier conjunto no medible P existe un intervalo I que intersecta a P pero no lo contiene y es tal que para todo conjunto medible $E \subseteq I$, si $\mu(I - E) = 0$, entonces $E \cap P$ es no medible.

Sea P un conjunto no medible y supongamos, por el contrario, que para cualquier intervalo I que no contiene a P existe un conjunto medible E tal que $\mu(I - E) = 0$ y que $E \cap P$ es medible.

Haremos primero el caso en el que P está acotado. Sean $\alpha = \inf P$, $\beta = \sup P$ y $0 < \delta < \frac{\beta - \alpha}{2}$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el intervalo I_n como $I_n = \left(\alpha + \frac{\delta}{n}, \beta - \frac{\delta}{n}\right)$. Dado que ninguno de estos intervalos I_n contiene a P

podemos, por hipótesis, tomar una familia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos medibles tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu(I_n - E_n) = 0$ y que $E_n \cap P$ es medible. De este modo si hacemos $I = \cup I_n$ y $E = \cup E_n$, tenemos que $I - E \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}}(I_n - E_n)$ por lo que $\mu(I - E) = 0$. Además el conjunto I es precisamente el intervalo (α, β), en consecuencia:

$$\mu^*(P - E) \leq \mu((I \cup \{\alpha, \beta\}) - E) = \mu(I - E) = 0$$

Por lo tanto el conjunto $P - E$ es medible, pero como $P = (P - E) \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} P \cap E_n)$ resulta entonces que P es medible, lo cual es imposible.

Si P no está acotado, haciendo $I_n = [-n, n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y repitiendo el mismo razonamiento concluiríamos también que P es medible.

Por lo tanto, dado cualquier conjunto no medible P debe existir un intervalo I que no contiene completamente a P y tal que para todo conjunto medible E, si $\mu(I - E) = 0$ entonces $P \cap E$ es no medible. $\square$

Observaciones

- Dado un conjunto no medible P, si denotamos por $\langle I\rangle_P$ al conjunto $\{E \subseteq I : E \text{ es medible y } \mu(I - E) = 0\}$, donde I es uno de los intervalos cuya existencia queda asegurada por el teorema anterior, entonces $\langle I\rangle_P \subseteq \mathcal{A}_P$ y es claro que existen conjuntos que pertenecen a $\langle I\rangle_P$ y no contienen a P. Por ejemplo, si tomamos cualquier subconjunto N del conjunto de Cantor construido en el intervalo I resulta que $E = I - N$ pertenece a $\langle I\rangle_P$. Dado que esto se puede hacer para cualquier conjunto N contenido en el conjunto de Cantor y este último tiene la cardinalidad del continuo, resulta que para cualquier conjunto no medible P, el conjunto $\{E \in \mathcal{A}_P : P \nsubseteq E\}$ tiene la cardinalidad de la potencia de $\mathbb{R}$.

- Sea de nuevo P un conjunto no medible, denotemos ahora por Υ a la clase de todos los intervalos I que intersectan a P pero no lo contienen y tales que para todo conjunto medible $E \subseteq I$ si $\mu(I - E) = 0$, entonces $P \cap E$ es no medible. De este modo, si P es altamente no medible saturado, por el teorema enterior, sabemos que Υ es la clase de todos los intervalos de $\mathbb{R}$. Por otro lado, si P es extremadamente no medible e I es un intervalo que intersecta a P en una cantidad no numerable de puntos, dado cualquier conjunto medible E tal que $\mu(I - E) = 0$, tenemos que $P \cap ((I - E) \cup E) = P \cap I$ es no numerable y que $P \cap (I - E)$ es de medida cero, por lo que, en tanto que es medible, es a lo más numerable, de modo que $P \cap E$ es no numerable y por lo tanto no medible. Concluimos entonces que si P es extremadamente no medible, entonces cualquier intervalo que intersecte a P en una cantidad no numerable de puntos pertenece a Υ.

Veremos ahora qué tan no medibles, en el sentido de las definiciones dadas al principio de este capítulo, son los conjuntos no medibles que hemos construido y daremos algunos nuevos ejemplos. Primero analizaremos a los conjuntos de Vitali.

Teorema 4.3
Todo conjunto de Vitali es altamente no medible.

Sea V un conjunto de Vitali y supongamos que existe un conjunto medible de medida positiva A contenido en V, podemos entonces tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A \cap [-n, n]) > 0$. Sea $A' = A \cap [-n, n]$ y sea, para cada $q \in \mathbb{Q}$, A'_q el conjunto $A' + q$.

De este modo, si $I = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, tenemos que:

$$\bigcup_{q \in I} A'_q \subseteq [-(n+1), n+1],$$

pero además dicha unión es ajena pues $A'_q \subseteq V_q$ y hemos visto ya que los conjuntos V_q con $q \in \mathbb{Q}$ son ajenos dos a dos. Por lo tanto:

$$\sum_{q \in I} \mu\left(A'_q\right) = \mu\left(\bigcup_{q \in I} A'_q\right) \leq \mu([-(n+1), n+1]) = 2(n+1)$$

Por otro lado, dado que para cada $q \in \mathbb{Q}$ se cumple que $0 < \mu(A') = \mu\left(A'_q\right)$ debemos tener que:

$$\mu\left(\bigcup_{q \in I} A'_q\right) = \sum_{q \in I} \mu\left(A'_q\right) = \infty$$

Por lo tanto no pueden existir subconjuntos medibles de medida positiva de un conjunto de Vitali, es decir que, todo subconjunto medible de un conjunto de Vitali es nulo. □

Veremos ahora qué tan no medibles son los conjuntos de Bernstein. No es difícil imaginar qué grado de no medibilidad tendrán estos conjuntos, sobre todo si recordamos que si un conjunto es de Bernstein entonces su complemento también lo es.

Teorema 4.4
Todo conjunto de Bernstein es altamente no medible saturado.

Sea B un conjunto de Bernstein y sea A un conjunto medible tal que $A \cap B$ es medible.

Si $\mu(A \cap B) > 0$, entonces $A \cap B$ contiene un conjunto compacto de medida positiva, por lo que $A \cap B$ contiene a un conjunto cerrado no numerable, es decir que $A \cap B$ contiene un conjunto perfecto, lo cual es una contradicción puesto que B no contiene ningún conjunto perfecto. Por lo tanto $\mu(A \cap B) = 0$. Por otro lado dado que $A \cap B$ es medible, entonces el conjunto $(A \cap B)^c \cap A = A \cap B^c$ es también medible y por lo tanto, como B^c es también de Bernstein, debemos tener que $\mu(A \cap B^c) = 0$. De modo que $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c) = 0$. Se concluye entonces que, si $A \cap B$ es medible, entonces $\mu(A) = 0$, es decir que la intersección de B con cualquier conjunto medible de medida positiva es no medible. $\square$

Esta propiedad de los conjuntos de Bernstein permite probar de manera sencilla que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con medida exterior positiva contiene un subconjunto no medible, pues si el conjunto en cuestión no es medible no hay nada que probar y si es medible entonces basta considerar su intersección con algún conjunto de Bernstein.

Por último veremos que los conjuntos de Sierpiński son, en efecto, conjuntos extremadamente no medibles, pero no sólo eso, se puede probar de forma muy sencilla que el hecho de que un conjunto sea de Sierpinski es equivalente a que sea extremadamente no medible.

Teorema 4.5
Un conjunto es extremadamente no medible si y sólo si es de Sierpiński.

Sea S un conjunto de Sierpiński y A un subconjunto no numerable de S; de la definición de conjunto de Sierpiński se sigue que A es también un conjunto de Sierpiński, de modo que A es no medible. Por lo tanto los conjuntos de Sierpiński son extremadamente no medibles.

Supongamos ahora que S es un conjunto extremadamente no medible y que N es un conjunto nulo, entonces $N \cap S$ es medible, pues cualquier subconjunto de un conjunto nulo es medible; resulta entonces que $N \cap S$ es a lo más numerable. Por lo tanto S es un conjunto de Sierpiński. $\square$

Ahora que ya hemos clasificado, según su grado de no medibilidad, los conjuntos no medibles que habíamos estudiado anteriormente, veremos algunos ejemplos que nos permitirán entender mejor cómo se relacionan entre sí estos grados de no medibilidad y conocer algunas variantes de las técnicas que hemos utilizado para construir conjuntos no medibles en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1
Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto débilmente no medible que contiene un conjunto medible y denso en un intervalo cuya medida es mayor que n.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{G}$ un Cantor gordo de medida $\frac{1}{2}$ construido sobre un intervalo I de longitud $n+1$. Dado que $\mu(\mathfrak{G}) > 0$ entonces podemos tomar un conjunto no medible N' contenido en $\mathfrak{G}$, entonces $N' \cup (I - \mathfrak{G})$ resulta ser un conjunto no medible.

Así, como $\mathfrak{G}$ es denso en ninguna parte resulta que $I - \mathfrak{G}$ es un conjunto denso en I y además

$$\mu(I - \mathfrak{G}) = \ell(I) - \mu(G) > n.$$

Por lo tanto, si $N = N' \cup (I - \mathfrak{G})$, entonces N es un conjunto no medible que contiene a un conjunto denso en un intervalo de medida mayor a n.

Ejemplo 4.2
Existe un conjunto de Vitali que no es altamente no medible saturado.

Sea $\mathfrak{G}$ un Cantor gordo, dado que cada una de las clases de equivalencia inducidas por la relación $x \backsim y$, si $x - y \in \mathbb{Q}$, es densa en $\mathbb{R}$ (pues $[x] = x + \mathbb{Q}$), entonces para toda $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $[x] - \mathfrak{G}$ es no vacío (pues $\mathfrak{G}$ es denso en ninguna parte y $[x]$ es denso en $\mathbb{R}$). Por lo tanto podemos formar un conjunto V tomando un elemento de cada uno de los conjuntos $[x] - \mathfrak{G}$. De este modo V es un conjunto de Vitali y sin embargo, haciendo $A = \mathfrak{G} \cup K$, donde K es cualquier subconjunto numerable de V, tenemos que A es medible de medida positiva y que $V \cap A = K$ es medible.

Ejemplo 4.3
Existe un conjunto de Vitali que es altamente no medible saturado.

Para esto construiremos un conjunto que es a la vez un conjunto de Vitali y de Bernstein.

Consideremos de nuevo la familia $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos perfectos indizada por los ordinales α tales que $\alpha < \mathfrak{c}$ y la relación de equivalencia $\sim$ utilizada para describir los conjuntos de Vitali.

Construiremos un conjunto A tal que $\mathbb{R} - A$ es totalmente imperfecto y tal que para toda $x \in \mathbb{R}$ la intersección de A con la clase de x inducida por $\sim$ tiene a lo más un elemento.

Sea a_1 un elemento cualquiera de F_1 y sea $E_2 = \{a_1 + q : q \in \mathbb{Q}\}$, dado que E_2 es numerable podemos tomar un punto $a_2 \in F_2 - E_2$. Supongamos que de esta manera hemos definido a_α para toda $\alpha < \beta < \mathfrak{c}$. Sea

$$E_\beta = \{a_\alpha + q : \alpha < \beta, q \in \mathbb{Q}\}$$

Dado que $|E_\beta| \leq \beta \cdot \aleph_0 < \mathfrak{c}$ podemos tomar un punto $a_\beta \in F_\beta - E_\beta$.

De este modo si $A = \{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ es claro que $\mathbb{R} - A$ es totalmente imperfecto y que si a_α y a_β, con $\alpha < \beta$, pertenecen a la misma clase de equivalencia inducida por $\sim$, entonces $a_\beta \in \{a_\alpha + q : q \in \mathbb{Q}\}$, pero como $a_\beta \notin E_\beta$, entonces debemos tener que $\alpha = \beta$; por lo tanto A contiene a lo más un representante de cada una de las clases inducidas por $\sim$.

Ahora consideremos al conjunto de todas las clases de equivalencia que no tienen un representante en A y formemos un nuevo conjunto A' tomando exactamente un representante de cada una de estas clases.

De esta manera, si $P = A \cup A'$ es claro que P es un conjunto de Vitali, pues contiene exactamente a un representante de cada una de las clases de equivalencia inducidas por $\sim$.

Además $\mathbb{R} - P$ es totalmente imperfecto, pues $(\mathbb{R} - P) \subseteq (\mathbb{R} - A)$ y hemos visto que $\mathbb{R} - A$ es totalmente imperfecto.

Falta entonces probar que P es también totalmente imperfecto, lo cual es sencillo, pues si nuevamente denotamos por A_q al conjunto $\{a + q : a \in A\}$, sabemos que dado $q \in \mathbb{Q}$ el conjunto $P_q \cap P$ es vacío, por lo que:

$$P \subseteq \mathbb{R} - P_q = (\mathbb{R} - P)_q$$

Esta última igualdad se da ya que $x \in \mathbb{R} - P_q$ si y sólo si $x - q \in \mathbb{R} - P$ y, a su vez, esto último es equivalente a que $(x - q) + q = x \in (\mathbb{R} - P)_q$.

De este modo, como $\mathbb{R} - P$ es totalmente imperfecto, y por lo tanto $(\mathbb{R} - P)_q$ también lo es, resulta que P es totalmente imperfecto.

Por lo tanto P es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que es a la vez un conjunto de Vitali y de Bernstein.

Ejemplo 4.4

Existen conjuntos altamente no medibles saturados que no son extremadamente no medibles.

Sean $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor y B un conjunto altamente no medible saturado. Dado que $\mathfrak{C}$ es no numerable resulta que, o bien $B \cap \mathfrak{C}$ es no numerable o bien $B^c \cap \mathfrak{C}$ es no numerable. En cualquier caso existe un conjunto altamente no medible saturado, ya sea B o B^c, cuya intersección con $\mathfrak{C}$ es medible y no numerable. Por lo tanto o bien B o bien B^c es un conjunto altamente no medible saturado que no es extremadamente no medible.

Se concluye entonces que dados cualesquiera dos conjuntos altamente no medibles saturados complementarios al menos uno de los dos no es extremadamente no medible.

Ejemplo 4.5

Existe un conjunto extremadamente no medible que no es altamente no medible saturado.

Notemos primero que dado un conjunto nulo N y un conjunto $\mathfrak{G}$ denso en ninguna parte, el conjunto $\mathbb{R} - (N \cup \mathfrak{G})$ es distinto del vacío, pues dado cualquier intervalo I existe un subintervalo I' de I tal que $I' \subseteq \mathfrak{G}^c$ y como N no puede contener ningún intervalo resulta que $I' \cap N^c \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathbb{R} - (N \cup \mathfrak{G}) \neq \emptyset$.

De este modo, si $\mathfrak{G}$ es un Cantor gordo, recordando la notación que utilizamos en la construcción del conjunto de Sierpiński, podemos repetir dicha construcción pero tomando el punto $s_1 \in \mathbb{R} - \mathfrak{G}$, luego el punto $s_2 \in \mathbb{R} - M'_2$ donde $M'_2 = N_1 \cup \{s_1\} \cup \mathfrak{G}$ y así sucesivamente. Para $\beta < \omega_1$ definimos el conjunto M'_β como:

$$M'_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} N_\beta \cup \{s_\alpha : \alpha < \beta\} \cup \mathfrak{G},$$

y de nuevo podemos tomar un punto $s_\beta \in \mathbb{R} - M'_\beta$. De este modo el conjunto $S = \{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un conjunto de Sierpiński que no intersecta a $\mathfrak{G}$, por lo que $\mathfrak{G}$ es un conjunto de medida positiva cuya intersección con S es medible. Concluimos entonces que S es un conjunto extremadamente no medible que no es altamente no medible saturado.

Ejemplo 4.6

Existe un conjunto que es tanto extremadamente no medible como altamente no medible saturado.

Para este ejempo construiremos un conjunto de Sierpiński que “casi” es de Bernstein —en el sentido de que intersecta a cualquier conjunto perfecto de medida positiva pero, sin embargo, no contiene a ninguno— esta construcción se hace de nuevo imitando la construcción que hemos hecho de los conjuntos de Sierpiński bajo la hipótesis del continuo.

Sea de nuevo $\mathcal{N}_\delta = \{N_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ el conjunto formado por todos los conjuntos nulos de tipo G_δ y sea $\mathcal{F}^+$ el conjunto formado por todos los conjuntos perfectos de medida positiva, es claro que dicho conjunto tiene también la cardinalidad del continuo pues, por un lado, ya vimos que la cardinalidad de $\mathcal{F}$ es precisamente la del continuo, de modo que $|\mathcal{F}^+| \leq \mathfrak{c}$, por otro lado, como todo intervalo cerrado es perfecto y de medida positiva se tiene que $|\mathcal{F}^+| \geq \mathfrak{c}$. Por lo tanto $|\mathcal{F}^+| = \mathfrak{c}$, así que podemos indizar sus elementos, F_α, con los ordinales α tales que $\alpha < \omega_1 = \mathfrak{c}$.

Construiremos un conjunto S del mismo modo en el que lo hicimos para la contrucción de los conjuntos de Sierpiński pero de tal manera que para todo $F \in \mathcal{F}^+$ se tenga que $F \cap S \neq \emptyset$ y $(\mathbb{R} - F) \cap S \neq \emptyset$.

Tomemos primero dos puntos distintos $s_1, s_1' \in F_1$; sea $M_2 = N_1 \cup \{s_1, s_1'\}$ y tomemos ahora dos puntos $s_2, s_2' \in F_2 - M_2$, lo cual lo podemos hacer puesto que $0 = \mu(N_1 \cup \{s_1, s_1'\}) < \mu(F_1)$ y así sucesivamente. Supongamos que para toda $\alpha < \beta < \omega_1$ hemos definido el punto s_α. Definimos al conjunto M_β como

$$M_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} N_\alpha \bigcup \{s_\alpha : \alpha < \beta\} \cup \left\{s_\alpha' : \alpha < \beta\right\},$$

de nuevo, dado que M_β sigue siendo un conjunto nulo podemos tomar dos puntos $s_\beta, s_\beta' \in F_\beta - M_\beta$.

Definimos entonces al conjunto S como $S = \{s_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Así, S es conjunto de Sierpiński que intersecta a cualquier conjunto perfecto de medida positiva pero no contiene a ninguno, lo cual nos bastará para probar que S es altamente no medible saturado.

Sabemos ya que $\mu_*(S) = 0$ pues S es de Sierpieński y si suponemos que $\mu_*(S^c) > 0$ entonces S^c debería contener un compacto de medida positiva, es decir que existiría un conjunto perfecto de medida positiva contenido en S^c lo cual es imposible, por lo tanto $\mu_*(S^c) = 0$.

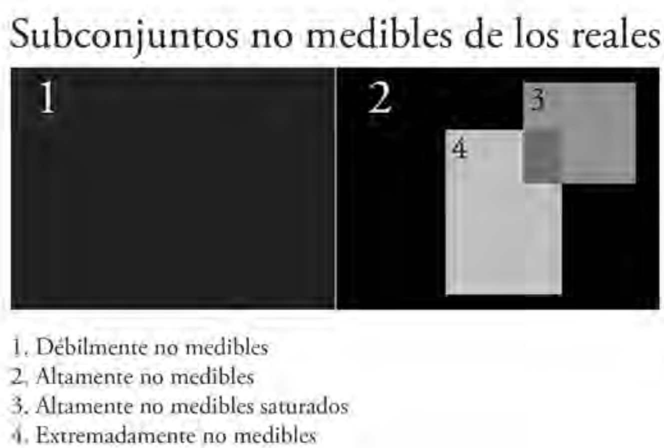
Concluimos entonces, gracias al teorema 4.1, que en efecto S es un conjunto tanto extremadamente no medible como altamente no medible saturado.

Observación

Es interesante notar que, en relación con el ejemplo 4.4, el complemento de S es también un conjunto altamente no medible saturado que no es extremadamente no medible ya que, siendo de nuevo $\mathfrak{C}$ el conjunto de Cantor, es claro que $S \cap \mathfrak{C}$ es numerable, pues $\mathfrak{C}$ es nulo. Por lo tanto $S^c \cap \mathfrak{C}$ es un subconjunto medible y no numerable de S^c.

El conjunto S construido en este último ejemplo es entonces nuestro candidato a conjunto de $\mathbb{R}$ con mayor grado de no medibilidad, pues por un lado sus únicos subconjuntos medibles son los triviales, es decir los numerables y, por otro lado, la diferencia entre sus medidas interior y exterior es arbitrariamente grande; además este conjunto, al compartir las propiedades de los conjuntos de Sierpiński y de Bernstein, tiene la peculiaridad de dispersarse por todo $\mathbb{R}$ intersectando a cualquier conjunto de medida positiva en una cantidad no numerable de puntos con medida exterior positiva, pero a la vez intersectando a cualquier conjunto nulo no numerable en algo a lo más numerable.

Con estos ejemplos en mano podemos decir de forma más precisa cómo se relacionan estos cuatro tipos de no medibilidad. Por un lado, hemos visto que la clase de los conjuntos débilmente no medibles es el complemento —relativo a la familia de los subconjuntos no medibles de $\mathbb{R}$— de la clase de los conjuntos altamente no medibles y que esta última contiene tanto a la clase de los conjunto altamente no medibles saturados como a la de los extremadamente no medibles. Además en los ejemplos 4.4 y 4.5 hemos visto que ninguna de estas dos últimas clases contiene a la otra; finalmente, gracias al último ejemplo, sabemos que la intersección de las clases de los conjuntos altamente no medibles saturados y la de los extremadamente no medibles es no vacía. El siguiente esquema ilustra estas relaciones.



Hemos visto ya distintas construcciones de conjuntos no medibles y hemos probado que utilizando el axioma de elección podemos construir conjuntos altamente no medibles saturados y que bajo la hipótesis del continuo existen conjuntos extremadamente no medibles, pero, ¿es imprescindible el axioma de elección para construir conjuntos no medibles?, y de no ser así, ¿qué tan no medibles podrían ser estos conjuntos?

Veremos que aún bajo hipótesis ligeramente más débiles que el axioma de elección se pueden construir conjuntos no medibles y analizaremos el grado de no medibilidad de dichos conjuntos.

Definición

Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, c'_k la función que manda a cada $x \in [0,1)$ al k-ésimo dígito de la expanción binaria de x, es decir que la sucesión $\{c'_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión en el $\{0,1\}$ que no tiene cola de unos y tal que:

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} c'_k(x)\, 2^{-k}$$

Definimos, para cada $x \in \mathbb{R}$ la función c_k como la función que extiende periódicamente a la función c'_k a todo $\mathbb{R}$, es decir:

$c_k(x) = c'_k(x - [x])$ donde $[x]$ denota al máximo entero menor o igual a x.

Consideremos ahora el espacio de funciones $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto y al conjunto $A = \{c_k : k \in \mathbb{N}\}$. Denotando por A' al conjunto formado por los puntos de acumulación de A, decimos que un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es un conjunto de Sardella-Ziliotti si $\chi_E \in A'$, donde χ_E denota a la función característica de E.

La compacidad numerable del espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ garantizará la existencia de conjuntos de Sardella-Ziliotti, para esto recordemos la siguiente propiedad de los espacios numerablemente compactos.

Proposición 5.1

Todo subconjunto infinito de un espacio T_1 numerablemente compacto tiene al menos un punto de acumulación.

Sea X un espacio T_1 numerablemente compacto y supongamos que existe un subconjunto infinito F de X que no tiene puntos de acumulación. Tomemos un punto $x_1 \in F$, dado que F no tiene puntos de acumulación podemos tomar una vecindad V_1 de x_1 tal que $V_1 \cap F = \{x_1\}$. Si hemos definido de esta manera la vecindad V_n del punto x_n para toda $n < k$, definimos la vecindad V_k tomando un punto $x_k \in F - \{x_n : n < k\}$ y una vecindad V_k de x_k tal que $V_k \cap F = \{x_k\}$.

Sea ahora $Y = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, dado que dicho conjunto es cerrado, pues no puede tener puntos de acumulación, el conjunto $\mathcal{C} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X - Y\}$ es una cubierta abierta de X que no tiene subcubiertas finitas, lo que contradice la hipótesis de que X es numerablemente compacto.

Concluimos entonces que cualquier subconjunto infinito de un espacio T_1 numerablemente compacto tiene al menos un punto de acumulación. $\square$

Corolario 5.1
Si el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ *es numerablemente compacto entonces existen conjuntos de Sardella-Ziliotti.*

Gracias al teorema anterior sabemos que el conjunto A' es no vacío de modo que tomando $\xi \in A'$ y haciendo $E = \xi^{-1}(1)$ resulta que, en efecto, E es un conjunto de Sardella-Ziliotti. $\square$

Se puede probar que el teorema de Tychonoff para espacios compactos[3] es equivalente al axioma de elección (Véase [4] o [5]), dado que no estamos suponiendo dicho axioma no podemos afirmar que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ sea compacto y en consecuencia tampoco podemos afirmar que el conjunto A' no sea vacío. Sin embargo, como acabamos de ver, la hipótesis de que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ sea numerablemente compacto basta para garantizar la existencia de los conjuntos de Sardella-Ziliotti. Además se puede probar que el teorema de Tychonoff para espacios compactos Hausdorff no implica el axioma de elección (Véase [4]), por lo que la hipótesis de que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ sea numerablemente compacto es, en efecto, más débil que el axioma de elección.

Presentaremos ahora una interesante equivalencia a la definición de conjuntos de Sardella-Ziliotti que además será útil en la demostración de que dichos conjuntos son no medibles.

Proposición 5.2
Un conjunto E es un conjunto de Sardella-Ziliotti si y sólo si para todo subconjunto finito J de $\mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \in J$ se tiene que $c_k(x) = \chi_E(x)$.

[3] El producto topológico de cualquier famila de espacios compactos es compacto.

Primero recordemos que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ también se puede ver como el producto $\Pi_{x\in\mathbb{R}}\{0,1\}_x$ y que los abiertos básicos son de la forma $B = \Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$, donde U_x es un subconjunto abierto de $\{0,1\}$ y $U_x \neq \{0,1\}$ sólo para una cantidad finita de elementos $x \in \mathbb{R}$.

Supongamos primero que E es un conjunto de Sardella-Ziliotti y sea $J = \{x_i : 0 \leq i \leq n\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Tomemos $B = \Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$ donde $U_x = \{\chi_E(x)\}$ para toda $x \in J$ y $U_x = \{0,1\}$ para toda $x \in \mathbb{R} - J$. De este modo B es un abierto en $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ que contiene a χ_E, por lo tanto, dado que χ_E es un punto de acumulación de A, debe existir alguna $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_k \in B$, lo cual significa que para toda $x \in J$, $c_k \in U_x = \{\chi_E(x)\}$, lo que es decir que $c_k(x) = \chi_E(x)$ para toda $x \in J$.

Supongamos ahora que un conjunto E es tal que para todo subconjunto finito J de $\mathbb{R}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_k(x) = \chi_E(x)$ para toda $x \in J$, veremos que E es un conjunto de Sardella-Ziliotti. Tomemos un abierto básico $B = \Pi_{x\in\mathbb{R}}U_x$ del espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ que contenga a χ_E y sea $J = \{x \in \mathbb{R} : U_x \neq \{0,1\}\}$. Ahora bien, por hipótesis, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_k(x) = \chi_E(x)$ para toda $x \in J$ y por lo tanto $c_k \in B$. De donde concluimos que χ_E es punto de acumulación de A, es decir que E es un conjunto de Sardella-Ziliotti. $\square$

Nótese además que en la prueba de la necesidad el conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} : c_k(x) = \chi_E(x) \text{ para toda } x \in J\}$$

debe ser infinito pues de lo contrario habría un $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq n \in \mathbb{N}$, existiría $i \leq k$ tal que $\chi_E(x_i) \neq c_k(x_i)$; por lo que repitiendo el procedimiento anterior podríamos de nuevo construir un abierto que contenga a χ_E y que intersecte a A sólo en una cantidad finita de puntos, lo cual, dado que el espacio es Hausdorff, implicaría nuevamente que existe un abierto que contiene a χ_E y que no intersecta a A.

Corolario 5.2

Sea E un conjunto de Sardella-Ziliotti y sean x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$.

Si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq k_0$ se tiene que $c_k(x_1) = c_k(x_2)$ entonces o bien $x_1, x_2 \in E$ o bien $x_1, x_2 \notin E$, y si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq k_0$ se tiene que $c_k(x_1) \neq c_k(x_2)$ entonces o bien $x_1 \in E$ y $x_2 \notin E$ o bien $x_1 \notin E$ y $x_2 \in E$.

Supongamos primero que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq k_0$ se tiene que $c_k(x_1) = c_k(x_2)$. Por la observación que hicimos de la proposición anterior sabemos que el conjunto

$$K = \{k \in \mathbb{N} : c_k(x_1) = \chi_E(x_1) \text{ y } c_k(x_2) = \chi_E(x_2)\}$$

es infinito por lo que podemos tomar $k \in K$ tal que $k \geq k_0$ y $\chi_E(x_1) = c_k(x_1) = c_k(x_2) = \chi_E(x_2)$, por lo que o bien $x_1, x_2 \in E$ o bien $x_1, x_2 \notin E$.

De manera análoga se prueba que si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq k_0$ se tiene que $c_k(x_1) \neq c_k(x_2)$, entonces o bien $x_1 \in E$ y $x_2 \notin E$ o bien $x_1 \notin E$ y $x_2 \in E$. □

Ahora bien, la demostración de que los conjuntos de Sardella-Ziliotti son no medibles estará basada en el siguiente teorema cuya demostración dejaremos hasta el final de este capítulo. Cabe destacar que para demostrar este teorema estaremos utilizando el axioma de elección numerable, es decir el siguiente enunciado: *Toda familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección*[4].

Teorema 5.1

Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E) > 0$ y D un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R}$ tal que $E + D = E$. Entonces para todo conjunto medible A se tiene que $\mu^*(E \cap A) = \mu(A)$.

De aquí en adelante ninguna otra hipótesis adicional será requerida, de modo que la existencia y no mediblilidad de los conjuntos de Sardella-Ziliotti puede garantizarse utilizando únicamente la hipótesis de que el espacio $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ es numerablemente compacto y el axioma de elección numerable.

El siguiente teorema muestra dos propiedades de los conjuntos de Sardella Ziliotti que son responsables, junto con el teorema 5.1, de que estos conjuntos no sólo sean no medibles, sino que además sean altamente no medibles saturados. Antes de enunciar este teorema será necesario recordar que un número $x \in \mathbb{R}$ es diádico si los dígitos de su expansión binaria, x_n con $n \in \mathbb{N}$, son cero a partir de cierta n.

Teorema 5.2

Sea D el conjunto de los números diádicos y sea E un conjunto de Sardella-Ziliotti, entonces:

1. *E es invariante bajo traslaciones por cualquier número diádico, es decir $E + D = E$.*

[4] Una función f definida sobre una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos es una función de elección si $f(C) \in C$ para todo $C \in \mathcal{F}$.

2. *Los conjuntos $E, -E$ y D forman una partición de $\mathbb{R}$.*

Para demostrar la primera afirmación tomemos $d \in D$, E un conjunto de Sardella-Ziliotti y $x \in E$. Sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $c_k(d) = 0$ por lo que $c_k(x) = c_k(x+d)$ para toda $k \geq k_0$. De lo cual se sigue, gracias al corolario anterior, que $\chi_E(x) = \chi_E(x+d)$, es decir que $x + d \in E$. Además es claro que $E \subseteq E + D$, pues el cero es un número diádico. Por lo tanto $E + D = E$.

Para probar la segunda afirmación tomemos de nuevo $d \in D$, por la observación que se hizo al final de la demostración de la proposición 5.2, sabemos que el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : \chi_E(d) = c_k(d)\}$ es infinito, pero entonces, dado que la expansión binaria de d termina en una cola de ceros, debemos tener que $\chi_E(d) = 0$, por lo tanto $E \cap D = \emptyset$. Es fácil ahora ver que también $(-E) \cap D = \emptyset$ pues dado que $D = -D$ tenemos:

$$(-E) \cap D = (-E) \cap (-D) = -(E \cap D) = \emptyset$$

Resta probar que $E \cap (-E) = \emptyset$ y que $\mathbb{R} = E \cup (-E) \cup D$. Para esto sea $x \in D^c$ y notemos que:

$$1 - (x - [x]) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - c_k(x)) 2^{-k}$$

Ahora bien, dado que $1 - c_k(x)$ no termina en una cola de unos, pues $x \in D^c$, entonces el k-ésimo dígito de la expansión binaria de $1-(x-[x])$ es precisamente $1-c_k(x)$. Por otro lado es claro que $c_k(-x) = c_k(1-(x-[x]))$ pues las funciones c_k tienen periodo 1 por lo que $c_k(-x) = 1 - c_k(x)$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Así, utilizando nuevamente el corolario anterior concluimos que, si $x \notin D$, entonces $x \in E$ si y sólo si $x \notin -E$. Por lo tanto $-E \cap E = \emptyset$ y $-E \cup E = D^c$. Se sigue entonces que los conjuntos $-E, E$ y D forman una partición de $\mathbb{R}$. $\square$

Corolario 5.3
Los conjuntos de Sardella-Ziliotti son altamente no medibles saturados.

Sea E un conjunto de Sardella-Ziliotti, notemos primero que $\mu^*(E) > 0$ y $\mu^*(E^c) > 0$ pues por lo que acabamos de probar tenemos que $\mu(\mathbb{R}) = \mu^*(E) + \mu^*(-E) + \mu^*(D)$ y es claro que $\mu^*(D) = 0$ y $\mu^*(E) = \mu^*(-E)$.

Por otra parte sabemos que $-D = D$ y hemos visto ya que $E + D = E$ con lo cual es fácil ver que también $E^c + D = E^c$ pues:

$$E^c + D = (-E \cup D) + D = (-E + D) \cup (D + D) =$$

$$-(E + D) \cup D = -E \cup D = E^c$$

De este modo tanto E como E^c cumplen con las condiciones del teorema 5.1, por lo tanto para todo conjunto medible A tenemos que $\mu^*(E \cap A) = \mu(A) = \mu^*(E^c \cap A)$, lo cual ya hemos probado que es equivalente a que el conjunto E sea altamente no medible saturado.

Queda demostrado entonces que los conjuntos de Sardella-Ziliotti son altamente no medibles saturados. $\square$

Consideremos ahora el axioma de elección para conjuntos de dos elementos (C_2), es decir, el siguiente enunciado: *Toda familia de conjuntos de dos elementos tiene una función de elección.* Veremos que, si se supone válido dicho axioma, utilizando el teorema 5.1 también se pueden construir de forma sencilla conjuntos altamente no medibles saturados y no sólo eso sino que se puede calcular la cardinalidad de la clase formada por los conjuntos de este tipo.

Proposición 5.3

Si se suponen válidos el axioma de elección numerable y C_2 entonces la cardinalidad de la clase formada por todos los conjuntos altamente no medibles saturados es $2^{\mathfrak{c}}$

Consideremos la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y$ si $x - y \in D$, donde D representa nuevamente al conjunto de los números diádicos, y denotemos por $[x]$ a la clase de x inducida por esta relación. Sea ahora $\mathcal{L} = \{\{[x], [-x]\} : x \in \mathbb{R} - D\}$ podemos entonces tomar una función de elección en la familia $\mathcal{L}$, lo que garantiza la existencia de un conjunto Ψ cuyos elementos son las clases de equivalencia elegidas de cada uno de los conjuntos que conforman a $\mathcal{L}$. De este modo si F denota al conjunto formado por la unión de las clases que pertenecen a Ψ, es decir si $F = \{y \in \mathbb{R} : y \in [x], [x] \in \Psi\}$ tenemos que:

1. $F + d = F$ para toda $d \in D$.

   Esto es bastante sencillo, pues dados cualesquiera $y \in F$ y $d \in D$ resulta que $y \in [x]$ para alguna $[x] \in \Psi$, entonces $x - y \in D$, por lo que $x - y - d \in D$. Por lo tanto $x \sim (y + d)$, de modo que $y + d \in F$

2. Los conjuntos $F, -F$ y D forman una partición de $\mathbb{R}$.

   Es claro que tanto $F \cap D$ como $-F \cap D$ son vacíos, veremos que $-F \cap F$ también lo es. Supongamos, por el contario, que existe $y \in -F \cap F$ entonces $y \in [x]$ y $-y \in [z]$ donde $[x]$ y $[z]$ pertenecen a Ψ, por lo que $x - y \in D$ y $z + y \in D$, en consecuencia $(x + z) \in D$, es decir que $z \in [-x]$, pero entonces $[z] = [-x]$, con lo que tanto $[x]$ como $[-x]$ pertenecen a Ψ, lo cual es imposible. Finalmente, resulta sencillo ver que $\mathbb{R} = -F \cup F \cup D$, pues dado cualquier $x \in \mathbb{R} - D$, resulta que o bien $[x]$ o bien $[-x]$ pertenece a Ψ, en el primer caso $x \in F$, en el segundo $x \in -F$.

De manera análoga a lo hecho con los conjuntos de Sardella-Ziliotti, la segunda propiedad del conjunto F implica que $\mu^* (F) > 0$ y la primera, en combinación con el teorema 5.1, implican que F es altamente no medible saturado.

Tomemos ahora cualquier subconjunto $\tilde{\Psi}$ de Ψ y definamos al conjunto $\tilde{F}$ como:

$$\tilde{F} = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \in [x] , [x] \in \tilde{\Psi} \right\} \cup \left\{ y \in \mathbb{R} : y \in [-x] , [x] \in \Psi - \tilde{\Psi} \right\}$$

Entonces $\tilde{F}$ satisface también las propiedades 1 y 2 del conjunto F. La prueba de que $\tilde{F}$ satisface la primera propiedad es la misma que la que se hizo para F y la de la segunda es, como veremos, bastante similar.

Nuevamente, para probar que los conjuntos $-\tilde{F}, \tilde{F}$ y D son ajenos, basta probar que $-\tilde{F} \cap \tilde{F} = \emptyset$. Supongamos que existe $y \in -\tilde{F} \cap \tilde{F}$, entonces $-y, y \in \tilde{F}$. Consideremos primero el caso en el que $y \in [x] , [x] \in \tilde{\Psi}$ y $-y \in [z] , [z] \in \tilde{\Psi}$. De este modo $x - y \in D$ y $z + y \in D$, por lo que $x + z \in D$, lo que implica que $x \in [-z]$, de modo que $[x] = [-z]$, pero entonces tanto $[z]$ como $[-z]$ pertenecen a Ψ, lo cual es imposible.

Supongamos ahora que $y \in [x] , [x] \in \tilde{\Psi}$ y que $-y \in [-z] , [z] \in \Psi - \tilde{\Psi}$. Entonces $x - y \in D$ y $-z + y \in D$, de modo que $[x] = [z]$, pero entonces $[x] \in \tilde{\Psi}$, y $[x] \in \Psi - \tilde{\Psi}$ lo cual es una contradicción. Los otros dos casos, que resultan de suponer que $y \in [-x] , [x] \in \Psi - \tilde{\Psi}$, se hacen de manera análoga.

Falta ver entonces que $-\tilde{F}, \tilde{F}$ y D cubren a $\mathbb{R}$. Para esto sea $x \in \mathbb{R} - D$, si $[x] \in \tilde{\Psi}$ y entonces $x \in \tilde{F}$, supongamos entonces que $[x] \notin \tilde{\Psi}$; tenemos entonces dos casos, que $[x] \in \Psi$ o $[-x] \in \Psi$, en el primer caso $[x] \in \Psi - \tilde{\Psi}$ de modo que $-x \in \tilde{F}$, por lo que $x \in -\tilde{F}$; en el segundo caso, si $[-x] \in \tilde{\Psi}$ entonces $-x \in \tilde{F}$, es decir que $x \in -\tilde{F}$, y si $[-x] \notin \tilde{\Psi}$, entonces $[-x] \in \Psi - \tilde{\Psi}$, con lo que $x \in \tilde{F}$. Por lo tanto $\mathbb{R} = -\tilde{F} \cup \tilde{F} \cup D$

Hemos probado entonces que para cada subconjunto $\tilde{\Psi}$ de Ψ existe un conjunto $\tilde{F}$ altamente no medible saturado asociado a $\tilde{\Psi}$. Veremos además que, en efecto, si $\tilde{\Psi}_1$ y $\tilde{\Psi}_2$ son dos subconjuntos distintos de Ψ entonces los conjuntos $\tilde{F}_1$ y $\tilde{F}_2$, asociados a $\tilde{\Psi}_1$ y $\tilde{\Psi}_2$, respectivamente, son también distintos. Para mostrar esto, sean $\tilde{\Psi}_1$ y $\tilde{\Psi}_2$ dos subconjuntos distintos de Ψ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $[x] \notin \tilde{\Psi}_1$ y $[x] \in \tilde{\Psi}_2$, entonces $x \in \tilde{F}_2$ y $[-x] \notin \Psi$, pues $[x] \in \tilde{\Psi}_2 \subseteq \Psi$, de modo que $[x] \notin \tilde{\Psi}_1$ y $[-x] \notin \Psi - \tilde{\Psi}_1$. Por lo tanto $x \notin \tilde{F}_1$ y en consecuencia $\tilde{F}_1 \neq \tilde{F}_2$.

De lo anterior se concluye que si $\mathcal{F}$ denota a la clase de los conjuntos altamente no meibles saturados, entonces $|\mathcal{F}| \geq |\mathcal{P}(\Psi)|$ pero ciertamente $|\Psi| = \mathfrak{c}$, por lo tanto $|\mathcal{F}| = 2^{\mathfrak{c}}$. $\square$

Demostración del teorema 5.1

Para demostrar este teorema se requerirá de dos sencillos lemas y es en la demostración del primero de estos dos lemas en la que utilizaremos el axioma de elección numerable.

Lema 5.1

Sean $E \subseteq \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ y D un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Si definimos el conjunto Φ como:

$$\Phi = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ y para toda } n \in \mathbb{N},\ I_n \in \mathcal{I}^* \right\},$$

donde $\mathcal{I}^*$ es el conjunto de todos los intervalos cerrados en $\mathbb{R}$ con extremos en D y longitud menor que σ. Entonces $\mu^*(E) = \operatorname{ínf} \Phi$

Sean E, σ y D como en las hipótesis; nótese que $\mu^*(E)$ es siempre menor o igual que $\operatorname{ínf}\Phi$, por lo que basta probar que $\mu^*(E) \geq \operatorname{ínf}\Phi$.

Para $\delta > 0$, sea $\mathcal{I}_\delta$ el conjunto de todos los intervalos en $\mathbb{R}$ cuya longitud es menor que δ. Sea entonces $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}_{\frac{\sigma}{3}}$ una cubierta de E y sea $\varepsilon \in \left(0, \frac{\sigma}{3}\right)$. Denotaremos por a_n al extremo izquierdo de I_n y por b_n a su extremo derecho, así, usando el axioma de elección numerable, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un punto $a'_n \in D \cap \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n\right)$ y un punto $b'_n \in D \cap \left(b_n, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$. Definimos entonces el intervalo I'_n como $I'_n = [a'_n, b'_n]$. De este modo es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $I'_n \in \mathcal{I}^*$ y que $E \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I'_n$, pero además:

$$\operatorname{ínf}\Phi \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I'_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) - \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell(I_n) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario en el intervalo $\left(0, \frac{\sigma}{3}\right)$ resulta que:

$$\text{ínf}\,\Phi \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right).$$

Además, como esto se puede hacer para toda familia de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}_{\frac{\sigma}{3}}$ que cubra a E, se concluye que:

$$\text{ínf}\,\Phi \leq \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right) : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, I_n \in \mathcal{I}_{\frac{\sigma}{3}}\right\} = \mu^*\left(E\right),$$

pues como se mencionó en el primer capítulo esta última igualdad es válida.

Por lo tanto $\mu^*\left(E\right) = \text{ínf}\,\Phi$. $\square$

Lema 5.2

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que:

$$0 < dist\left(A, B\right) = \text{ínf}\left\{|a-b| : a \in A, b \in B\right\}$$

Entonces $\mu^*\left(A \cup B\right) = \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$

Basta probar que $\mu^*\left(A \cup B\right) \geq \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$. Es claro que si

$\mu^*\left(A \cup B\right) = \infty$, entonces ciertamente $\mu^*\left(A \cup B\right) = \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$, por lo que podemos suponer que $\mu^*\left(A \cup B\right) < \infty$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = dist\left(A, B\right)$, podemos tomar entonces una familia de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cubra a $A \cup B$ de tal manera que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\ell\left(I_n\right) < \delta$ y que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell\left(I_n\right) < \mu^*\left(A \cup B\right) + \varepsilon$. De este modo, si definimos los conjuntos de índices:

$$I = \{n \in \mathbb{N} : I_n \cap A \neq \emptyset\}, \; J = \{n \in \mathbb{N} : I_n \cap B \neq \emptyset\}$$

$$\text{y } K = \{n \in \mathbb{N} : I_n \cap \left(A \cup B\right) = \emptyset\}$$

es claro que dichos conjuntos son ajenos, pues dado que $\ell\left(I_n\right) < \delta$ para toda $n \in \mathbb{N}$, ningún intervalo I_n puede contener puntos de A y de B a la vez, además $A \subseteq \cup_{n\in I} I_n$ y $B \subseteq \cup_{n\in J} I_n$ por lo tanto:

$$\mu^*\left(A \cup B\right) + \varepsilon > \sum_{n\in I} \ell\left(I_n\right) + \sum_{n\in J} \ell\left(I_n\right) + \sum_{n\in K} \ell\left(I_n\right) \geq \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$$

Como esto se puede hacer para toda $\varepsilon > 0$, se concluye que $\mu^*\left(A \cup B\right) \geq \mu^*\left(A\right) + \mu^*\left(B\right)$. $\square$

Teorema 5.1

Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E) > 0$ y sea D un subconjunto denso y numerable de $\mathbb{R}$ tal que $E + D = E$. Entonces para todo conjunto medible A se tiene que $\mu^*(E \cap A) = \mu(A)$.

Para demostrar esto veremos primero que dado cualquier $\alpha \in (0,1)$ y cualquier $\sigma > 0$ podemos encontrar dos números $a, b \in D$ tales que:

$$0 < b - a < \sigma \text{ y } \mu^*(E \cap [a,b]) \geq \alpha (b-a)$$

Supongamos por el contrario que existen $\alpha \in (0,1)$ y $\sigma > 0$ tales que para cualesquiera $a, b \in D$ con $0 < b - a < \sigma$ se tiene que $\mu^*(E \cap [a,b]) < \alpha(b-a)$.

Dado que $\mu^*(E) > 0$ debe existir un intervalo I en $\mathbb{R}$ tal que $\mu^*(E \cap I) > 0$. Sea $E' = E \cap I$ e $\mathcal{I}^*$ como en el lema 5.1; de este modo, si tomamos una familia $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}^*$ que cubra a E tenemos, por hipótesis, que:

$$\mu^*(E') \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(E \cap I_i) < \alpha \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} l(I_i) \right)$$

Así, haciendo uso del lema 5.1, podemos concluir que $\mu^*(E') \leq \alpha \mu^*(E')$, lo cual es imposible pues $\alpha \in (0,1)$ y $\mu^*(E') > 0$.

Ahora veremos que $\mu^*(E \cap [x,y]) = y - x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \leq y$.

Para esto sean $\alpha \in (0,1)$ y $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Tomemos $\varepsilon \in (0, y-x)$ y $\sigma \in (0, y - x - \varepsilon)$ entonces, por lo demostrado anteriormente, existen $a, b \in D$ tales que $0 < b - a < \sigma$ y que $\mu^*(E \cap [a,b]) \geq \alpha(b-a)$. Construiremos un conjunto finito D' contenido en D como sigue:

Tomemos primero $d_1 \in D \cap \left(x - a, x - a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, es decir que $d_1 + a \in \left(x, x + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ por lo que, tomando en cuenta que $b - a < \sigma < y - x - \varepsilon$, tenemos que $b + d_1 < y$.

Ahora, si $y - (b + d_1) < \sigma + \frac{\varepsilon}{4}$, entonces hacemos $D' = \{d_1\}$, si no, entonces podemos tomar $d_2 \in D \cap \left(b + d_1 - a, b + d_1 - a + \frac{\varepsilon}{4}\right)$, entonces

$$b + d_2 < \sigma + a + d_2 < \sigma + b + d_1 + \frac{\varepsilon}{4} \leq y.$$

En general, si $y - (b + d_i) < \sigma + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, hacemos $D' = \{d_1, ..., d_i\}$ y si no tomamos $d_{i+1} \in D \cap \left(b + d_i - a, b + d_i - a + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$ y de nuevo tenemos que:

$$b + d_{i+1} < \sigma + a + d_{i+1} < y.$$

Es claro que para alguna $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $y - (b + d_n) < \sigma + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ pues de lo contrario tendríamos que $d_j - d_{j-1} > b - a$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $d_{n+1} - d_1 > n\,(b - a)$, por lo que:

$$\sigma + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \lim_{n\to\infty} y - (b + d_n) < y - b - \left(\lim_{n\to\infty} d_n - d_1\right)$$
$$\leq y - b - \lim_{n\to\infty} n\,(b - a) = -\infty$$

lo cual es absurdo.

Queda entonces definido el conjunto $D' = \{d_i : i \leq n\}$, el cual cumple las siguientes propiedades:

1. *$[a, b] + d \subseteq [x, y]$ para todo $d \in D'$.*

   Esto es claro pues por construcción, para toda $i \leq n$, tenemos que $y > b + d_i$ y que $x - a \leq d_1 \leq d_i$, es decir que $x < a + d_i < b + d_i < y$. Por lo tanto $[a + d, b + d] \subseteq [x, y]$ para todo $d \in D'$.

2. *$0 < (a + d_{i+1}) - (b + d_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ para toda $i < n$ y $0 < y - (b + d_n) < \sigma + \frac{\varepsilon}{2^n}$.*

   Sea $i < n$, entonces, por contrucción, sabemos que $a + d_{i+1} < b + d_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ y también que $b - a < d_{i+1} - d_i$ por lo tanto $0 < (a + d_{i+1}) - (b + d_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

3. *Los intervalos $[a, b] + d_i$ son ajenos dos a dos y la distancia entre cualesquiera dos de estos intervalos es mayor a cero.*

   Sean $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $i < j \leq n$, tomemos $z_i \in [a + d_i, b + d_i]$ y $z_j \in [a + d_j, b + d_j]$ entonces $z_j - z_i > (a + d_j) - (b + d_i) > (a + d_j) - (b + d_j) > 0$

4. *Si $A = \bigcup_{i=1}^{n} [a, b] + d_i$, entonces $\mu(A) > y - x - (\varepsilon + \sigma)$.*

   Por la propiedad 1, sabemos que $\mu(A) = y - x - \mu([x, y] - A)$, pero el conjunto $[x, y] - A$ es precisamente:

   $$[x, a + d_1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (b + d_i, a + d_{i+1})\right) \cup (b + d_n, y]$$

   Por lo que, utilizando la propiedad 3 y el lema 5.2, tenemos que:

   $$\mu([x, y] - A) = a + d_1 - x + \left(\sum_{i=1}^{n-1} (a + d_{i+1}) - (b + d_i)\right) + y - (b + d_n).$$

Haciendo uso ahora de la propiedad 2 se concluye que:

$$\mu([x,y]-A)<\varepsilon+\sigma, \text{ por lo que } \mu(A)>y-x-(\varepsilon+\sigma)$$

Con todo esto en mano, podemos probar, ahora sí, que $\mu^*(E\cap[x,y])=y-x$.

Notemos primero que dado que el conjunto $E+D=E$, resulta que, si denotamos por B_i al conjunto $(E\cap[a,b])+d_i$, entonces los conjuntos $E\cap A$ y $\cup_{i\leq n}B_i$ son también iguales, por lo que, de la propiedad 3 y del lema 5.2, se sigue que:

$$\mu^*(E\cap A)=\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(B_i)=n(\mu^*(E\cap[a,b]))$$

Ahora bien, recordando que hemos elegido a y b de tal manera que $\mu^*(E\cap[a,b])\geq\alpha(b-a)$ y utilizando las propiedades 1 y 4 obtenemos:

$$\mu^*(E\cap[x,y])\geq\mu^*(E\cap A)\geq n\alpha(b-a)=\alpha\mu(A)>\alpha(y-x-(\varepsilon+\sigma))$$

Dado que ε y σ pueden ser arbitrariamente pequeños y α es arbitrario en el intervalo $(0,1)$ se concluye que $\mu^*(E\cap[x,y])\geq y-x$, por lo tanto:

$$\mu^*(E\cap[x,y])=y-x.$$

Habiendo hecho esto es fácil ver que si A es una unión finita de intervalos ajenos dos a dos entonces $\mu^*(E\cap A)=\mu(A)$ pues dados cualesquiera dos intervalos ajenos I_1 e I_2 por la caracterización de Caratheodory tenemos:

$$\mu^*(E\cap(I_1\cup I_2))=\mu^*(E\cap I_1)+\mu^*(E\cap I_2).$$

De modo que, gracias a lo que acabamos de probar:
$\mu^*(E\cap(I_1\cup I_2))=\mu(I_1)+\mu(I_2)=\mu(I_1\cup I_2).$

Esto demuestra a su vez que si A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, es decir una unión numerable de intervalos ajenos dos a dos, también ocurre que $\mu^*(E\cap A)=\mu(A)$.

Supongamos ahora que A es un conjunto compacto, entonces podemos tomar un conjunto abierto y acotado B tal que $A\subseteq B$, por lo que usando la subaditividad de μ^* tenemos:

$$\mu^*(E\cap A)\geq\mu^*(E\cap B)-\mu^*(E\cap(B-A))\geq\mu(B)-\mu(B-A)=\mu(A).$$

Finalmente, supongamos que A es cualquier subconjunto medible de $\mathbb{R}$, si $\mu(A)=0$ es evidente que $\mu^*(E\cap A)=\mu(A)$, supongamos entonces que

$\mu(A) > 0$ y tomemos $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \xi < \mu(A)$ entonces podemos tomar un compacto K tal que $K \subseteq A$ y que $\xi < \mu(K)$. De este modo tenemos que:

$$\xi < \mu(K) = \mu^*(E \cap K) \leq \mu^*(E \cap A)$$

Dado que podemos tomar ξ arbitrariamente cerca de $\mu(A)$ se concluye que $\mu(A) \leq \mu^*(E \cap A)$ de lo cual se sigue que $\mu(A) = \mu^*(E \cap A)$.

Por lo tanto, si $E \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $\mu^*(E) > 0$ y D es un subconjunto denso de $\mathbb{R}$ tal que $E + D = E$. Entonces para todo conjunto medible se tiene que $\mu^*(E \cap A) = \mu(A)$. $\square$

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* John Wiley & Sons, Nueva York, 1995, 180 pp.

[2] Ganguly, D.K. y S. Basu, "A Note on Non-measurable Sets", *Soochow Journal of Mathematics*, Vol. 20, núm. 1, 1994, pp. 57-59.

[3] Halmos, Paul Richard, *Measure Theory,* Springer, Nueva York, 1974, 304 pp.

[4] Jech, Thomas J., *The Axiom of Choice,* North-Holland Publishing Company / American Elsevier Publishing Company, Amsterdam-Londres / Nueva York, 1973, 202 pp.

[5] Kharazishivili, A.B., *Nonmeasurable Sets and Functions,* Elsevier Science, Amsterdam, 2004, 349 pp.

[6] Lebesgue, Henri, "Intégrale, Longueur, Aire", *Annali di Matematica,* Serie III, tomo VII, 1902, pp. 231–359.

[7] Oxtoby, John C., *Measure and Category: A Survey of the Analogies Between Topological and Measure Spaces,* Springer, Nueva York, 1971, 124 pp.

[8] Sardella, Mirko y Guido Ziliotti, "What's the Price of a Nonmeasurable Set?", *Mathematica Bohemica*, Vol. 127, núm. 1, 2002, pp. 41-48.

[9] Solovay, Robert M., .A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue-measurable", *Annals of Mathematics,* núm. 92, 1970, pp. 1–56.

[10] Yeh, J., *Real Analysis: Theory of Measure and Integration,* World Scientific Publishing, Singapur, 2a. ed. 2006, 738 pp.