



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CORRELACIONES ENTRE REACCIONES DE  
TRANSFERENCIA DE NUCLEONES EN EL  
MARCO DE LA SUPERSIMETRÍA NUCLEAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
RUSLÁN IDELFONSO MAGAÑA VSEVOLODOVNA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ROELOF BIJKER BIJKER



México D.F.

2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



### Hoja de Datos del Jurado

<p>1. Datos del alumno Apellido paterno Apellido materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta</p>	<p>1. Datos del alumno Magaña Vsevolodovna Ruslán Idelfonso 53 89 93 34 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 404019536</p>
<p>2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>2. Datos del tutor Dr. Roelof Bijker Bijker</p>
<p>3. Datos del sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>3. Datos del sinodal 1 Dr. Myriam Mondragón Ceballos</p>
<p>4. Datos del sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>4. Datos del sinodal 2 Dr. Erick Leonardo Patiño Jaidar</p>
<p>5. Datos del sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>5. Datos del sinodal 3 Dr. Octavio Castañeros Garza</p>
<p>6. Datos del sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido paterno Apellido materno</p>	<p>6. Datos del sinodal 4 Dr. Andres Sandoval Espinosa</p>



*El pensamiento humano es una virtud, describir el Universo le asigna significado a mi mente y por lo tanto sentido a mi vida, dedico este trabajo a todos los que deseen saber un poco más acerca de la estructura del Universo, saber de dónde venimos y porque son las cosas así.*

*Ruslan M.V.*



# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por el esfuerzo que han hecho en apoyarme, por darme la libertad de elegir lo que me gusta, agradezco también a mis hermanos por todos los consejos que he recibido para superarme cada día más. Quiero agradecer a mi abuela Galia por los consejos sabios relacionados a la ciencia. Por la parte académica agradezco a mis grandes profesores que me han enseñado a pensar, este trabajo no sería posible sin el apoyo primordial de mi asesor Roelof Bijker, Alejandro Frank, Francesco Iachello y sus colaboradores ya que ellos son los que me sembraron la curiosidad por la Simetría y su relación con la estructura nuclear. Quiero también agradecer dos profesores, Octavio Novaro y Antonio Gonzales Guzmán que fueron vitales para mi preparación en la concepción de la Física y la Matemática ya que la conexión de estas dos áreas de la ciencia es fundamental para la comprensión del comportamiento de la naturaleza, el profesor Octavio Novaro me enseñó que la Física puede describir la naturaleza y entenderla es cuestión de nosotros. Antonio Gonzalez Guzmán me guió en el mundo abstracto de la Matemática a verla sin dificultad. De los amigos que me apoyaron durante la carrera puedo mencionar a Hugo Torres Galván y a Fernando Vega, les agradezco por su valiosa participación en equipo durante toda la carrera, también quiero mencionar a un amigo que me motivó al estudio de la teoría de grupos, Guillermo Govea, también agradezco a mis amigos del curso de inglés del CUC y por último agradezco a todas las personas que tienen un interés por describir la naturaleza, aquellas personas que han invertido sus vidas en hallar una explicación de las cosas y aquellas personas que están comenzando a sentir el fervor de la curiosidad. Somos seres humanos y espero que evolucionemos más para tener una mejor comprensión del Universo.

*México D.F.  
Mayo del 2010*

*Ruslan I. Magaña Vsevolodovna*



# Resumen

El presente trabajo tiene como propósito calcular factores isoescalares que permiten describir cierto tipo de reacciones nucleares. Reacciones nucleares de transferencia de un protón y dos protones para núcleos que sean supersimétricos, estas reacciones se pretenden estudiar a partir de correlaciones. Para ello se tiene que dar un panorama general de este tipo de núcleos, que poseen un carácter colectivo, en donde motivamos esta idea en el primer capítulo, en el segundo capítulo se hace una revisión breve del Modelo de Bosones Interactuantes y posteriormente en el tercer capítulo se desarrolla de manera cuidadosamente la estructura algebraica de cada núcleo supersimétrico, que son los núcleos el cual vamos a estudiar. La manera como vamos a estudiar estas reacciones de transferencia de nucleones es a través de un mecanismo matemático basado en la teoría de grupos, la cual correlacionamos reacciones de transferencias, desarrollaremos un método matemático nuevo que nos permita conectar dos reacciones entre sí a través de un factor, de esta manera si nosotros conocemos de antemano las intensidades espectroscópicas de una reacción nuclear podemos predecir las intensidad espectroscópicas de otra reacción, esto es, multiplicando la intensidad conocida por un factor que vamos a calcular durante todo este trabajo. Estos factores los llamaremos factores isoescalares que son no nada más que coeficientes de Clebsch-Gordan generalizados para el grupo de simetría  $SU(3)$ .

La técnica que utilizaremos para describir las reacciones nucleares en términos de factores isoescalares la llamaremos  $F$ -spin generalizado, que explicaremos en el capítulo cuatro, la técnica del  $F$ -spin generalizado consiste en asignar nuevos números cuánticos a las funciones de onda asociadas a los núcleos supersimétricos y reducir los elementos de matriz de las reacciones de transferencia los más que se pueda de tal manera que obtenemos simplemente dos factores, un coeficiente de Clebsch-Gordan normal y nuestro factor isoescalar. La siguiente tarea es determinar el valor de esos factores isoescalares.

En el último capítulo vamos a calcular los factores isoescalares relevantes de las reacciones de transferencia de un protón y dos protones, en esta parte simplemente desarrollamos todos los cálculos necesarios para determinar los valores de los factores isoescalares en términos de los números cuánticos asociadas a las reacciones nucleares de transferencia. Las aplicaciones inmediatas que presentaremos son predicciones de las intensidades espectroscópicas de algunas reacciones nucleares. Este aparato matemático llamado  $F$ -spin generalizado tiene relevancia a otros sistemas ya que estos factores isoescalares, se presentan en todo sistema cuyas funciones de onda estas descritas en términos de acoplamientos de las tres diferentes representaciones de  $U(6)$ , por ejemplo en la descripción de núcleos con masa media como el modelo de IBM-3 y para núcleos pesados el modelo de Piel de Neutrones. Debido a que todo el trabajo esta basado en simetrías, considero importante mostrar una revisión de los elementos básicos asociados a la teoría de grupos en el apéndice en donde en términos generales doy una introducción a la Simetría y algunas herramientas matemáticas utilizadas como el álgebra tensorial y algunas reglas de reducción de diferentes grupos.



# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>8</b>
1.1	Los primeros Modelos Nucleares . . . . .	9
1.1.1	Modelo del gas de Fermi . . . . .	9
1.1.2	Modelo de la gota líquida . . . . .	9
1.1.3	Modelo de capas . . . . .	10
1.2	Interacciones colectivas . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Modelo de Bosones Interactuantes</b>	<b>13</b>
2.1	Introducción . . . . .	13
2.2	Modelo de Bosones Interactuantes 1 . . . . .	14
2.2.1	Formalismo del IBM-1 . . . . .	14
2.2.2	Álgebra generadora de espectro GSA . . . . .	15
2.2.3	Estructura algebraica del Hamiltoniano en IBM-1 . . . . .	16
2.2.4	Casos límites de simetría . . . . .	16
2.3	Modelo de Bosones Interactuantes 2 . . . . .	18
2.3.1	Formalismo del IBM-2 . . . . .	18
2.3.2	$F$ -Spin . . . . .	19
2.3.3	Límites del $F$ -Spin en el IBM-2 . . . . .	20
2.4	Modelo Bosón-Fermión Interactuante . . . . .	22
2.4.1	Formalismo del IBFM . . . . .	23
2.4.2	Hamiltoniano del IBFM . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Supersimetría Nuclear</b>	<b>25</b>
3.1	Introducción . . . . .	25
3.2	Supersimetría Nuclear . . . . .	26
3.2.1	Álgebra Supersimétrica . . . . .	28
3.3	Supersimetrías dinámicas en la física nuclear . . . . .	30
3.3.1	Simetrías dinámicas en núcleos par-par . . . . .	34
3.3.2	Simetrías dinámicas en núcleos con protón impar . . . . .	38
3.3.3	Simetrías dinámicas en núcleos con neutrón impar . . . . .	42
3.3.4	Simetrías dinámicas en núcleos impar-impar . . . . .	44
3.4	Supersimetría en núcleos pesados . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Correlaciones entre reacciones de transferencia de nucleones</b>	<b>51</b>
4.1	Introducción . . . . .	51
4.2	$F$ -spin generalizado . . . . .	53
4.3	Reacciones Nucleares . . . . .	59
4.3.1	Carácter tensorial de los operadores de transferencia . . . . .	60

4.4	Operadores de Transferencia en el $F$ -spin generalizado . . . . .	62
4.5	Transferencias de nucleones en el $F$ -spin generalizado . . . . .	64
4.6	Relaciones entre reacciones de transferencia . . . . .	66
4.6.1	Transferencia de un protón . . . . .	66
4.6.2	Transferencia de dos protones . . . . .	74
4.7	Intensidades espectroscópicas . . . . .	86
4.7.1	Transferencia de un protón . . . . .	86
4.7.2	Transferencia de dos protones . . . . .	100
4.8	Otras aplicaciones . . . . .	108
4.8.1	Transferencia de un neutrón . . . . .	108
4.8.2	IBM-3 . . . . .	109
4.8.3	Piel de Neutrones . . . . .	110
<b>5</b>	<b>Factores Isoescalares de <math>SU(3)</math></b> . . . . .	<b>111</b>
5.1	Introducción . . . . .	111
5.1.1	Grupo unitario $SU(3)$ . . . . .	112
5.1.2	Representación Irreducible $(\lambda, \mu)$ . . . . .	119
5.1.3	Método del cálculo y convenciones . . . . .	121
5.2	Factores Isoescalares en $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$ . . . . .	122
5.2.1	Factores Isoescalares de $(\lambda + 1, 0)$ . . . . .	122
5.2.2	Determinación de los factores isoescalares de $SU(3)$ utilizando $F$ -spin . . . . .	123
5.2.3	Determinación de los factores isoescalares de $SU(3)$ utilizando $V$ -spin . . . . .	124
5.2.4	Mezcla de bases en la determinación de factores isoescalares de $SU(3)$ . . . . .	127
5.2.5	Representación Irreducible $(\lambda - 1, 1)$ . . . . .	132
5.3	Factores Isoescalares en $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$ . . . . .	137
5.3.1	Factores Isoescalares de $(\lambda, 1)$ . . . . .	138
	<b>Conclusiones</b> . . . . .	<b>144</b>
	<b>Apéndice</b> . . . . .	<b>146</b>
<b>A</b>	<b>Simetrías y Teoría de Grupos</b> . . . . .	<b>147</b>
A.1	Simetrías y Teoría de Grupos . . . . .	147
A.1.1	¿Qué es la Simetría? . . . . .	147
A.1.2	Origen de la Simetría en la Física . . . . .	147
A.2	Algunas definiciones . . . . .	148
A.2.1	Grupo de Lie . . . . .	148
A.2.2	Álgebra de Lie . . . . .	149
A.2.3	Transformaciones simétricas . . . . .	150
A.2.4	Bases Irreducibles . . . . .	151
A.3	Álgebra Tensorial . . . . .	153
A.3.1	Elementos de matriz de los generadores . . . . .	153
A.3.2	Operadores Tensoriales . . . . .	155
A.3.3	Operadores tensoriales del IBM . . . . .	156
A.3.4	Teorema de Wigner Eckart . . . . .	157
A.4	Grupo de Rotaciones $SO(3)$ . . . . .	158
A.4.1	Multipletes . . . . .	159
A.5	Adición de dos momentos angulares . . . . .	159
A.6	Operadores de Majorana . . . . .	160
A.7	Conmutadores de los operadores del $F$ -spin . . . . .	164

---

A.8 Cálculo de operadores del $F$ -spin generalizado . . . . .	166
A.9 Reducción de representaciones irreducibles de $U_B(6)$ a $SO_B(6)$ . . . . .	168
A.10 Reducción $SO_B(6)$ a $SO_B(5)$ . . . . .	170
A.11 Cálculo de la correlación de la transferencias de protones entre núcleos con neutrón impar y núcleos par-par . . . . .	171
<b>Bibliografía</b>	<b>175</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>180</b>
<b>Lista de Tablas</b>	<b>181</b>
<b>Índice analítico</b>	<b>183</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los objetivos de la investigación en la física es encontrar leyes que permitan alcanzar una comprensión profunda de diversos fenómenos de la naturaleza bajo una sola formulación sencilla, construir modelos que permitan comprender procesos físicos los cuales se pueden analizar sistemáticamente en los datos experimentales disponibles. La estructura de la materia ha sido siempre un interés para el hombre, hace más de dos mil años, Demócrito, filósofo griego introdujo el concepto del átomo y con los avances de la investigación científica, comienza una revolución de la comprensión de la materia. Esto nos lleva al surgimiento de más dudas acerca de la estructura de la materia, ya que es un problema de muchos cuerpos.

La característica destacable del problema de muchos cuerpos nuclear es difícil de resolver de manera exacta, si las tuvieramos serían complejas y difíciles de evaluar, sin embargo, el reto y encanto de la física nuclear es encontrar buenas aproximaciones de manera que deje intacto las características esenciales de de la solución. Todos los modelos nucleares algebraicos considerados en este trabajo, comparten esta propiedad: son simples, solubles y mantienen el realismo suficiente para poder describir algunas características esenciales de la estructura nuclear.

Desde el nacimiento de la mecánica cuántica la idea de simetría ha jugado un papel central en la física, en el campo de la física nuclear el uso de técnicas de simetría ha permitido la construcción de modelos nucleares, específicamente, el uso de las simetrías dinámicas y álgebras de generación de espectro. Las primeras ideas de simetría en la física nuclear se lo debemos a Wigner, Racah y Elliott son considerados los precursores de los modelos más modernos de álgebras de generación de espectro así como el Modelo de Bosones Interactuantes de Arima y Iachello.

En términos generales, el concepto de simetría dinámica de un sistema de muchos cuerpos (por ejemplo el núcleo) está basado en la suposición de una simetría primaria con una álgebra dinámica, expresando el Hamiltoniano en términos de sus generadores. El Hamiltoniano reduce esta simetría primaria a una menor, (como el caso del momento angular con el álgebra  $SO(3)$  en el caso nuclear) y de esta manera genera el espectro de energías. Un aspecto importante de este proceso de reducción de la simetría es que a veces se puede lograr analíticamente, preservando el carácter de la solución problema de muchos cuerpos. El panorama general de las simetrías dinámicas en la física nuclear nos dice que aun nos falta mucho por investigar, este trabajo se centra en la reducción de una supersimetría con la finalidad de correlacionar reacciones de transferencia. Para comenzar nuestra discusión considero conveniente hacer una revisión de algunos modelos nucleares importantes.

## 1.1 Los primeros Modelos Nucleares

### 1.1.1 Modelo del gas de Fermi

Uno de los primeros modelos nucleares fué propuesto por H.Bethe en 1935. En este modelo se desprecian las fuerzas entre pares de nucleones y se toma en cuenta una fuerza promedio sobre cada nucleón representada por el hecho de que todos estos están contenidos en una esfera y radio  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ , entonces el núcleo puede tratarse como un gas cuántico. Hay que notar que un gas cuántico de fermiones tiene propiedades muy distintas a las de un gas clásico. En un gas clásico real las interacciones entre las partículas crecen en importancia a medida que se baja la temperatura a presión constante. Por lo tanto el comportamiento del sistema se aparta cada vez más a del comportamiento de un gas ideal. En el caso del gas de Fermi, en cambio, todos los niveles más bajos están ocupados. De esta manera, la transferencia de energía y momento entre partículas, que son una consecuencia normal de las fuertes fuerzas de interacción existentes entre partículas, están prohibidas por el principio de exclusión de Pauli. Consecuentemente, a bajas temperaturas el sistema tiende a comportarse como un gas cuántico ideal. Este hecho da una justificación para despreciar la interacción entre partículas entre este tipo de modelo.

### 1.1.2 Modelo de la gota líquida

Vamos a considerar ahora un modelo del tipo de nucleones fuertemente correlacionados. Se trata del llamado modelo de la gota líquida propuesto por N. Bohr en 1935. Una de las características más notables de los núcleos es que la energía de ligadura por nucleón es aproximadamente constante ( $B \propto A$ ). Si cada partícula del núcleo interactuara con todas las demás la energía de interacción y por lo tanto la de ligadura, debería ser aproximadamente proporcional a números de pares interactuantes.

Como cada una de las  $A$  partículas pueden en principio, interactuar con las  $A - 1$  restantes entonces el número de pares es  $A(A - 1/2)$  Entonces en núcleos pesados se debería encontrar que  $B \propto A^2$ , lo que está en desacuerdo con lo que se encuentra experimentalmente. Es decir que para entender la relación  $B \propto A$  hay que considerar que cada partícula interactúa con un número limitado de las restantes.

La situación es semejante a lo que ocurre con una gota de líquida, donde la energía para separar una molécula es  $NE_B$ . Aquí  $N$  es el número de ligaduras a la que está sujeta cada molécula y  $E_B$  la energía necesaria para romper cada ligadura. Si cada molécula interactúa con unas pocas vecinas se dice que la fuerza está saturada. Es claro que en el caso nuclear este efecto de saturación se debe al corto alcance de la interacción fuerte.

El modelo que surge de considerar que el núcleo se comporta como una gota líquida permite obtener una fórmula que resulta muy importante para entender la sistemática de las masa nucleares . La masa de un núcleo  $(A, Z)$  está dada por

$$M(A, Z) = m_p Z + m_n (A - Z) B(A, Z) \quad (1.1)$$

donde  $B(A, Z)$  es la energía de ligadura. Como se considera que es una gota líquida la energía de ligadura debe tener un término de volumen  $B_v = a_v A$  siendo el volumen  $4/3\pi R^3 \propto A$ , además hay una contribución de energía debido a la superficie ya que las nucleones de la superficie tienen menos vecinos los cuales interactuar (es como una tensión superficial). Como la superficie de una gota esférica es  $4\pi R^2 \propto A^{\frac{2}{3}}$  así la contribución es  $B_s = -a_s A^{\frac{2}{3}}$ . Como el núcleo tiene una carga eléctrica hay interacción coulombiana así siendo la esfera carga  $Z$  y radio  $R$ ,  $E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} \propto Z(Z - 1) A^{-\frac{1}{3}}$  de esta manera  $B_c = -a_c Z(Z - 1) A^{-\frac{1}{3}}$  y como se tratan de nucleones el carácter cuántico de fermiones se agrega como la tendencia que  $Z = N$  es la asimetría del protón-neutrón y se expresa como  $B_a = -a_a \frac{(N - Z)^2}{A}$  y además necesita un término de apareamiento  $\Delta(A) = -a_p f(a)$  si es impar-impar 0 so es par-impar y  $a_p f(a)$  par-par habiendo distintas funcionales en la literatura  $f(a)$  siendo una más de las utilizadas  $f(a) = A^{\frac{1}{2}}$ . La forma completa para la

fórmula de masas, llamada fórmula semiempírica de masas o *formula de Weizsaecker*, es

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + \Delta(A) \quad (1.2)$$

Los valores de las constantes que aparecen en esta fórmula se determinan experimentalmente. El modelo de la gota líquida resultó exitosa. Permitió entender diversos procesos tales como el de fisión, el de fusión etc. Esto hizo que los modelos de partícula independiente quedaran relegados como el del gas de Fermi.

### 1.1.3 Modelo de capas

Sin embargo ya para los años cuarenta del siglo pasado<sup>1</sup> ya se tenían datos experimentales ( masas, momentos magneticos etc.) que indicaban que los núcleos con números de protones o neutrones  $Z, \nu = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$  poseen cierta estabilidad, estos núcleos requieren mayor energía para exitarlos que a los núcleos vecinos, estos son los números mágicos. Si utilizamos el principio de exclusión de Pauli para describir la estructura del núcleo en términos de niveles de energía. Tomando la analogía del modelo de capas de los electrones en el átomo podemos desarrollar un modelo nuclear que es el *modelo de capas* que presupone capas correspondientes dentro de cada número mágico, una manera simplificada de expresar las energías del núcleo con el modelo de capas es

$$\begin{aligned} H &= \sum_i T_i + \sum_{ij} V_{ij} \\ &= \sum (T_i + U_i) + (\sum_{ij} V_{ij} - \sum_i U_i) \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde tenemos nuestro potencial  $U_i = \frac{1}{2}mw^2r^2 + \alpha \vec{s}$ ,  $n$  entero y el momento angular  $l = n, n-1, \dots, 0$  y el potencial residual

$$\sum_{ij} V_{ij} - \sum_i U_i \quad (1.4)$$

se desprecia sin embargo, este término es crucial para justificar la teoría de bosones interactuantes que posteriormente se verá. El modelo de capas predice los espectros de energías bajas como

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ n=3 & \begin{array}{c} \epsilon \downarrow 40 \\ \text{---} \\ \epsilon \uparrow 20 \end{array} & l = 3, 1 \\ n=2 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \epsilon \uparrow 8 \end{array} & l = 2, 0 \\ n=1 & \begin{array}{c} \text{---} \\ \epsilon \uparrow 2 \end{array} & l = 1 \\ n=0 & \text{---} & l = 0 \end{array}$$

Figura 1.1: Esquema del espectro de energías bajas.

Vemos que este modelo es útil para los primeros niveles  $n$  por lo que se requiere introducir la interacción spin-órbita de esta manera la degeneración se reduce. La degeneración esta dada como  $(2l+1)(2s+1) = 2(2l+1)$  Sabemos que  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  denotaremos a nuestro sistema con momento angular  $l = 0$  como  $s$

<sup>1</sup>El modelo de capas fue desarrollado en 1949 de manera independiente por muchos físicos entre los más notables Eugene Paul Wigner, Maria Goeppert-Mayer y Hans D.Jensen quienes compartieron el Premio Nobel en 1963.

,  $l = 1$  como  $p$ ,  $l = 2$  como  $d$  y así sucesivamente. La interacción espin-orbita nos desdobla los niveles energéticos degenerados así para una función de onda se convierte  $\phi_{nlsj}$  siendo  $\alpha$  los números cuánticos

$$\begin{aligned} \langle \alpha \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle &= \langle \frac{1}{2} [\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] \rangle \\ &= \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \end{aligned} \quad (1.5)$$

de esta manera el desdoblamiento de las líneas espectrales dependerá de  $\alpha_l$  siendo  $j = l \pm \frac{1}{2}$ . Esta corrección es útil para núcleos ligeros<sup>2</sup>. Esto se debe a que cuando tenemos nuestro hamiltoniano (1.4) estamos despreciando el potencial residual (1.4) que tiene una característica interesante este es carácter es colectivo, para ello consideremos

$$E = \sum_i \epsilon_i + V_{res} \quad (1.6)$$

donde  $V_{res} = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  es mi interacción superficial delta.

Por ejemplo para el plomo  ${}_{82}^{210}Pb_{128}$  vemos que tiene dos protones fuera de la capa, vemos estos protones como  $(\pi g_{\frac{5}{2}})^2$  siendo  $J = 0, 2, 4, 6, 8$  entonces para  $g_{\frac{5}{2}}$   $l = 4$  además podemos observar en la figura anterior que hay una separación grande entre  $l = 4$  y  $l = 2$  por lo que esto nos dice que hay una fuerte atracción entre esos dos fermiones favoreciendo a la creación de un boson debido a la interacción superficial. Este tipo de interacción tiene además un carácter colectivo es decir surge de manera natural debido a la distribución interna del núcleo aprioris. Es curioso notar que este comportamiento se presenta más en núcleos pesados. Por ejemplo si queremos modelar el núcleo  ${}_{154}^{92}Sm_{92}$  con el modelo de capas el número de estados para  $J = 0$  hay  $10^{14}$ . Esto nos dice algo, nos dice que la física de este núcleo no esta siendo modelada correctamente, es decir el comportamiento interno de mi núcleo me sugiere que hay interacciones colectivas.

## 1.2 Interacciones colectivas

Para obtener los números mágicos así como otras propiedades del núcleo se pueden aproximar bien con un oscilador armónico de tres dimensiones más la interacción espin-orbita o en su caso un potencial más realista el potencial de Wood Saxon. Sin embargo estos potenciales describen fuerzas en cada nucleón para la estructura del núcleo

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (1.7)$$

donde  $V_0$  representa el pozo de potencial,  $a$  es una longitud que representa el espesor de la superficie del núcleo, y  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  es el radio nuclear donde  $r_0 = 1,25 \text{ fm}$  y  $A$  es el número de masa. Los valores típicos de los parámetros son:  $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$ ,  $a \approx 0,5 \text{ fm}$ .

Quiero hacer énfasis que esta formulación corresponde a una interacción prácticamente de partícula independiente, potenciales que describen fuerzas en cada nucleón. Es útil esta formulación para núcleos que poseen pocos nucleones pero cuando tenemos núcleos con un número mágico grande como  $A > 80$  empiezan surgir fenomenos de interacción colectiva.

El modelo de capas nos permite predecir propiedades del espectro de núcleos con una partícula fuera de capa cerrada. Sin embargo, si una mira los estados excitados de núcleos par-par es evidente que resulta muy costoso desde el punta de vista energético crear una excitación por medio de un par partícula agujero. Es más eficiente realizar movimientos colectivos, que pueden ser vibración o de rotación.

<sup>2</sup>Se considera núcleos ligeros cuando  $z < 80$ .

Además a bajas energías con masas impares, hay algo curioso, se encuentran una característica mixta, de una partícula y colectiva, por lo tanto una aproximación algebraica sería una alternativa para describir este tipo de núcleos.

Las excitaciones colectivas del núcleo pueden ser descritas como oscilaciones cuadrupolares superficiales de una gota líquida nuclear<sup>3</sup>, otra manera es describirla en términos de conjunto de interacciones de bosones s y d, estos bosones pueden ser identificados como pares de nucleones acoplados con momento angular  $l = 0$  ó  $l = 2$ . Esta interpretación de la estructura microscópica en su forma más simple corresponden a los modelos IBM-1 y IBM-2 que revisaremos en el siguiente capítulo donde solo se tratarán núcleos con pares de neutrones y protones y para núcleos con masa impar su extensión llamada IBFM.

Si pensamos en rotaciones o vibraciones entonces podemos usar la teoría de grupos para describir este sistema de partículas, ya que si estos sistemas de partículas manifiestan simetrías entonces podemos describirlas en términos de teoría de grupos, por lo que surge entonces modelos algebraicos donde justamente a estos sistemas colectivos les asigno una simetría específica que me permite describirlo sin complicaciones y de manera cerrada.

---

<sup>3</sup>Una forma de ver la conexión de los modelos geométricos nucleares con los colectivos sería construir estados coherentes en términos de factores de forma  $\beta$  y  $\gamma$ . Cuando tenemos  $\beta = 0$  tenemos solamente simetrías vibratorias, sin embargo, cuando  $\beta \neq 0$ , la simetría esférica se rompe y el núcleo se deforma y adquiere una simetría rotacional. Esta deformación se le asigna el factor de forma  $\gamma$ , cuando tenemos estados coherentes que no dependen de  $\gamma$  llamaremos a estos núcleos como  $\gamma$ -inestable rotacionales que están asociados con la simetría  $O(6)$  que son los que en este trabajo consideramos.

## Capítulo 2

# Modelo de Bosones Interactuantes

### 2.1 Introducción

Los modelos nucleares que voy a revisar en esta parte, son modelos que poseen una característica en común: describen núcleos que presentan carácter colectivo. Cuando tenemos un sistema de partículas que tienden a acoplarse en pares presentan grados de libertad colectivo. El carácter colectivo es consecuencia de los grados de libertad que poseen los núcleos<sup>1</sup>. Esto nos permite clasificar a estos núcleos por el número de protones y neutrones. Ésta clasificación nos permite desarrollar diferentes modelos nucleares con propiedades muy fascinantes.

Para los núcleos par-par, es decir, protones y neutrones pares, se tiene el Modelo de Bosones Interactuantes 1-2, en donde los núcleos que están descrito por este modelo presenta la característica que sus espectros son densos y además estos presentan tres propiedades sorprendentes de simetrías. Es decir, hay tres tipos de núcleos, los vibracionales, estos pueden ser modelados con la estructura de grupo de  $U(5)$ , estos poseen la característica que se encuentran en la regiones de la tabla nuclear donde están las capas cerradas, un ejemplo de este núcleo es el núcleo de  $^{110}\text{Cd}$ , los núcleos rotacionales, son deformados nuclearmente (oblato o prolato), que pueden ser modelados con el grupo  $SU(3)$ , por ejemplo el núcleo  $^{156}\text{Gd}$ , estos núcleos en la tabla nuclear se encuentran en la parte central y por último los núcleos  $\gamma$ -inestable son núcleos que generalmente se encuentran cerca de las capas cerradas por ejemplo  $^{194}\text{Pt}$  además hay núcleos que se encuentran en las transiciones de estas simetrías[1].

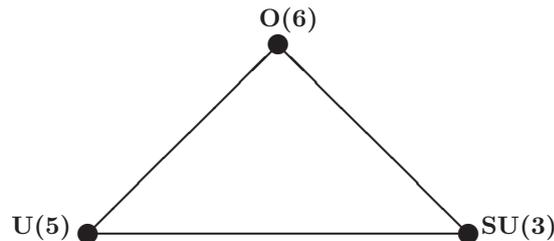


Figura 2.1: Triángulo de Casten.  $U(5)$  corresponde a los sistemas vibracionales,  $SU(3)$  a los sistemas rígidos con simetría rotacional axial y  $O(6)$  a los sistemas  $\gamma$ - inestable rotacionales. Los puntos indican simetrías dinámicas del modelo IBM [2].

Por otro lado cuando tenemos núcleos con masa impar, es decir con protón impar ó neutrón impar, por ejemplo  $^{195}\text{Pt}$ , estos núcleos presentan grados de libertad colectivos y grados de libertad de partícula

<sup>1</sup>Estrictamente hablando el grado de libertad colectivo son los grados de libertad de movimiento de los cuadrupolos que se forman en el núcleo.

independiente, en donde estos grados de libertad de partícula independiente se encuentran en las órbitas cercanas a la energía de Fermi, aquí también se puede subclasificar en las mismas tres simetrías del caso par-par, el modelo que describe los núcleos con sólo masa impar es el Modelo de Bosón-Fermión 1-2 interactuante, en donde se describe al mismo tiempo los bosones de protón, bosones de neutrón y un nucleón extra (protón o neutrón). Para núcleos impar-impar, es decir, protones y neutrones impares, por ejemplo  $^{196}\text{Au}$ , se tiene una extensión del modelo anterior, sin embargo un modelo que unifica estos dos distintos modelos es la Supersimetría Nuclear que en el capítulo siguiente vamos a explicar con más detalle. Por el momento nuestro interés es mostrar en forma general los elementos esenciales de estos primeros dos modelos.

## 2.2 Modelo de Bosones Interactuantes 1

Este modelo fué propuesto en 1974 por Iachello y Arima [3], inspirados por otros trabajos anteriores por Feshbach y Iachello [4][5] y Jasen et al[6]. El cual intenta describir las excitaciones nucleares colectivas con una formulación algebraica. Las propiedades colectivas en este modelo asume 2 propiedades colectivas observadas: la fuerte interacción de dos partículas idénticas (protón-protón y neutrón-neutrón) y la interacción cuadrupolar entre partículas diferentes (protón-neutrón). Estas interacciones pares nos sugieren construir bloques de excitaciones colectivas correlacionadas con pares de nucleones (similar a los pares de Cooper de un gas de electrones) y tratarlos como bosones. En primera aproximación, solo pares con momento angular  $l = 0$  y  $l = 2$  se mantienen. (bosones  $s$  y  $d$ ), como en el núcleo tenemos protones y neutrones, estos los vamos a denotar como  $s_\pi, s_\nu, d_\pi, d_\nu$ . En esta teoría vamos a tomar solo las partículas de valencia en el modelo de capas, es decir partículas fuera de la última de las capas 2, 8, 20, 28, 50, 82 y 126 son las que contribuyen en la excitación. Esto fija el número de bosones de protones,  $N_\pi$ , y el número de bosones de neutrones,  $N_\nu$ , cabe señalar que el conjunto de bosones de neutrones y bosones de protones forman cada uno su propio espacio.<sup>2</sup> Los números de bosones de protones y neutrones siempre son contados desde la más cercana capa llena, si más de la mitad de la capa esta llena, los  $N_{\nu(\pi)}$  se toman en pares de hoyos, por ejemplo; si tenemos un núcleo  $^{118}_{54}\text{Xe}_{64}$ ,  $N_\pi = (54 - 50)/2 = 2$ ,  $N_\nu = (54 - 50)/2 = 7$ , mientras que para  $^{128}_{54}\text{Xe}_{74}$ ,  $N_\pi = (64 - 50)/2 = 2$ ,  $N_\nu = (82 - 74)/2 = 4$  donde la barra a veces se pone encima del número de bosón  $\overline{N_{\pi(\nu)}}$  y nos dice que que estos son estados de hoyos. Una versión simple de este modelo puede ser obtenida por la no distinción entre bosones de protones y neutrones, este modelo se conoce como Modelo de Bosones Interactuantes 1 (IBM-1). Esta formulación me permite tratar núcleos par-par, tratando el sistema de bosones como  $N = N_\nu + N_\pi$ . Una descripción más detallada donde se considera el tipo de bosón protón y bosón neutrón requiere del el modelo de bosones interactuantes 2 (IBM-2) que posteriormente abarcaremos.

### 2.2.1 Formalismo del IBM-1

Como es sabido dentro de las excitaciones colectivas nucleares los efectos más importantes se deben a las vibraciones del superficiales del núcleo[7] para ello podemos construir un modelo microscópico que describa excitaciones colectivas bajo excitaciones cuadrupolares, por lo tanto para conservar el modelo de capas tomamos los nucleones de valencia con momento angular  $l = 2$  y  $l = 0$ , utilizamos el formalismo de segunda cuantización para expresar así los operadores de creación  $b_{l,m}^\dagger$  y los operadores de aniquilación  $b_{l,m}$  donde  $l = 0, 2$  y  $m = -l, \dots, l$ . Estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación de Bose

$$[b_{l',m'}, b_{l,m}^\dagger] = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \quad (2.1)$$

<sup>2</sup>Aquí tomo el concepto de espacio como un conjunto de un tipo de partículas.

Los operadores de aniquilación son operadores tensoriales esféricos bajo rotaciones y que los operadores de aniquilación no lo son, para ello introducimos

$$\tilde{b}_{l,m} = (-1)^{l-m} b_{l,-m} \quad (2.2)$$

y este si satisface la condición de operador tensorial (podemos ver en el apéndice A.60 esta condición). En este modelo IBM-1 no vamos a hacer distinción entre pares de neutrones y protones. Los bloques de este modelo los tomaremos como bosones. Los operadores de creación y aniquilación escrita de una manera más explícita la podemos representar como  $s^\dagger$ ,  $d_\mu^\dagger$  y  $s$ ,  $d_\mu$  donde  $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$ . Hay 36 productos bilineares

$$G_i^j = b_i^\dagger b_j \quad (2.3)$$

siendo  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ . Estos últimos elementos  $G_i^j$  forman un álgebra de Lie  $U(6)$  por lo tanto  $G_i^j$  son los generadores del álgebra  $U(6)$ , las álgebras unitarias de  $n$  dimensiones están conectadas con el oscilador armónico y en menos dimensiones podemos ir a un espacio coordinado tal que los bosones lo trataremos con el álgebra  $U(6)$ . Esta construida con 6 operadores de creación y 6 de aniquilación  $b_i^\dagger$  y  $b_i$   $i = 1, 2, \dots, 6$  además estos generadores satisfacen las reglas de conmutación

$$[G_i^j, G_l^k] = G_i^j \delta_{jk} - G_j^k \delta_{il} \quad (2.4)$$

donde  $i, j, k, l = 1, 2, \dots, 6$ .

podemos definir el acoplamiento de generadores como<sup>3</sup>

$$B_\mu^{(\lambda)}(l, l') \equiv [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_\mu^{(\lambda)} = \sum_{m, m'} \langle l, m, l', m' | \lambda \mu \rangle b_{lm}^\dagger \tilde{b}_{l'm'} \quad (2.5)$$

De esta manera obtenemos los 36 generadores estos acoplados con el momento angular

$$[b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_M^{(L)} = \sum_{m, m'} \langle l, m, l', m' | LM \rangle b_{lm}^\dagger \tilde{b}_{l'm'} \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Álgebra generadora de espectro GSA

Este concepto es importante ya que es exactamente aquí donde claramente se puede observar como se relaciona la física y la matemática. Para ello escribamos el Hamiltoniano de mi sistema de bosones en términos de elementos de mi álgebra  $\mathcal{G}$

$$H = f(X_a), \quad X_a \in \mathcal{G}. \quad (2.7)$$

Un caso especial es donde el Hamiltoniano esta escrito en términos solo de los invariantes de Casimir de las cadenas del álgebra  $\mathcal{G} \supset \mathcal{G}' \supset \dots$

$$H = f(C_i) \quad (2.8)$$

Esto corresponde a una la simetría dinámica. En este caso todas las propiedades del sistema pueden ser derivadas analíticamente. De esta manera podemos desarrollar el polinomio GSA de la forma:

$$H_B = E_0 + \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^B + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\alpha\beta}^B G_{\gamma\delta}^B + \dots \quad (2.9)$$

Cabe mencionar que en este hamiltoniano es hermitiano y es invariante bajo rotaciones además se se conserva el número de protones y neutrones.

<sup>3</sup>Esto es posible debido a la ecuación (A.76) del apéndice

### 2.2.3 Estructura algebraica del Hamiltoniano en IBM-1

Ahora podemos escribir nuestro Hamiltoniano para uno-dos cuerpos en términos de los generadores

$$H = \sum_l \epsilon_l \sum_m b_{lm}^\dagger b_{lm} + \sum_L \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{(L)} \left[ [b_{l_1}^\dagger \times \tilde{b}_{l_2}]^{(L)} \times [b_{l_3}^\dagger \times \tilde{b}_{l_4}]^{(L)} \right]^{(0)} \quad (2.10)$$

Ahora uno puede escribir el Hamiltoniano en su forma de segunda cuantización [8]

$$\begin{aligned} H = & E_0 + \epsilon_s (s^\dagger \cdot s) + \epsilon_d (d^\dagger \cdot d) \\ & + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} c_L \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(L)} \right]_0^{(0)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]^{(2)} \right]_0^{(0)} + \left[ [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(2)} \right]_0^{(0)} \\ & + \frac{1}{2} v_0 \left[ [d^\dagger \times d^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)} \right]_0^{(0)} + \left[ [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(0)} \right]_0^{(0)} \\ & + u_2 \left[ [d^\dagger \times s^\dagger]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]^{(2)} \right]_0^{(0)} + \frac{1}{2} u_0 \left[ [s^\dagger \times s^\dagger]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)} \right]_0^{(0)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Este Hamiltoniano está dado por 9 parámetros, los primeros 2 términos  $\epsilon_s$  y  $\epsilon_d$  son términos de un cuerpo estos contribuyen solo a las energías de amarre y los restantes 7 términos son términos de dos cuerpos,  $c_L$  ( $L = 0, 2, 4$ ),  $v_l$  ( $l = 0, 2$ ) y  $u_l$  ( $l = 0, 2$ ) contribuyen a las excitaciones fenomenológicas que se encuentran, el número de bosones (pares) siempre se conserva,  $N = n_d + n_s$ . Por lo tanto el Hamiltoniano debe ser hermitiano ya que los eigenvalores son reales ya que que es medible así

$$\begin{aligned} [H, N] &= 0 & N &= s^\dagger s + d^\dagger d & & \text{se conserva el numero de bosones} \\ [H, \vec{L}] &= 0 & & & & \text{es invariante bajo rotaciones} \end{aligned}$$

La razón por el cual es conveniente escribir el Hamiltoniano de esta forma es que una vez encontrado empíricamente solo alguno de estos términos es suficiente para obtener un espectro bien preciso. Una vez escrito el Hamiltoniano,  $H$ , los niveles de energía se pueden encontrar diagonalizando  $H$  en una base apropiada. Además de proporcionar una base ortonormal, esto se vuelve un problema de eigenvalores el cual puede ser resuelto analíticamente.

### 2.2.4 Casos límites de simetría

La simetría de un álgebra da constantes de movimiento, el cual nos lleva los números cuánticos que etiquetan los estados asociados con energías dadas por eigenvalores. Hemos visto el Hamiltoniano expresado en forma general del Modelo de Bosones Interactuantes (IBM), sin embargo para aplicaciones tenemos que irnos a casos un poco más particulares en donde utilizaremos cadenas de grupos. Un álgebra dinámica define todos el conjunto de eigenestados asociados con un sistema dado. Uno de los mejores ejemplos de simetrías dinámicas en la física esta dado por las simetrías del Modelo de Bosones Interactuantes (IBM) del núcleo, dentro de las magnitudes observables en el laboratorio es el momento angular, tomaremos un álgebra tal que incluya el momento angular así

$$U(6) \supset G \supset SO(3) \quad (2.12)$$

Ahora ya se tiene una condición para las subálgebras  $G$ , de esta manera se obtienen tres simetrías dinámicas correspondientes a las cadenas algebraicas

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2) \\
\text{(II)} \quad & U(6) \supset SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \\
\text{(III)} \quad & U(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \supset SO(2)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

El álgebra  $U(5)$  surge debido a las vibraciones del núcleo, el álgebra  $SU(3)$  fue estudiado por Elliot en conexión con las capas  $s-d$  en el modelo de capas. La estructura matemática de este sistema permite ocupar orbitas con momento angular  $l=0$  y  $l=2$  y corresponde a la simetría axial de un rotor. El álgebra  $SU(3)$  también incluye los tres operadores de momento angular, el  $SO(6)$  se debe a las inestabilidades  $\gamma$  del rotor haciendose la suposición que los acoplamientos entre nucleones forman rotorees.

Una vez que ya se haya elegido la cadena algebraica, es importante construir una base el cual el Hamiltoniano  $H$  pueda ser diagonalizada. Para hacer esto necesitamos saber que etiquetas vamos a utilizar el cual caracteriza la representación irreducible de varios grupos que aparecen en la cadena algebraica. Por ejemplo, la representación del grupo de rotaciones,  $O(3)$ , esta caracterizado por valores del momento angular,  $L$ . Para grupos  $U(6), U(5), \dots$ , que aparecen en (2.14) es un poquito más complejo para ello solo voy a dar un simple esquema, podemos ver el proceso formal en la referencia [9], las etiquetas necesarias para clasificar los estados en las tres cadenas son:

Cadena del grupo I	Cadena del grupo II	Cadena del grupo III	
$U(6)$ $[N]$	$U(6)$ $[N]$	$U(6)$ $[N]$	
$U(5)$ $[n_d]$	$SU(3)$ $(\lambda, \mu)$	$U(6)$ $[(\sigma)]$	
$O(5)$ $[v]$	$O(3)$ $[L]$	$O(5)$ $[\tau]$	(2.14)
$O(3)$ $[L]$	$O(2)$ $[M]$	$O(3)$ $[L]$	
$O(2)$ $[M]$		$O(2)$ $[M]$	

Estas etiquetas me permiten clasificar los estados, las representaciones de  $U(6), U(5), O(5) \dots$  están caracterizados solo por un número ya que son totalmente simétricos.  $N$  es el numero total de bosones,  $n_d$  es el número de bosones  $d$  y  $v$  es el llamado antigüedad (seniority). La dificultad de hallar estas representaciones es que se tienen que encontrar representaciones de un subgrupo  $G'$  contenido en otro grupo más grande  $G$  es decir  $G' \supset G$  pero que valores de estas representaciones son permitidas, por ejemplo, dado los valores de  $n_d$  que valores de  $v$  están permitidos, para más detalles pueden acudir a la referencia [9], en resumen, los valores  $n_d$  contenidos en cada  $[N]$  son  $n_d = 0, 1, 2, \dots, N$ . Los valores de  $v$  contenidos en cada  $(n_d)$  son  $v = n_d, n_d - 2, \dots, 1$  ó  $0$  siendo  $n_d$  par o impar.

Las técnicas utilizadas para encontrar soluciones analíticas del problema de eigenvalores de  $H$  se basa en una técnica de teoría de grupos. Para ellos introducimos algunos operadores  $C$  que son los de Casimir con la propiedad <sup>4</sup>

$$[C, G_k^{(k)}] = 0 \tag{2.15}$$

Tomemos los operadores de Casimir invariantes lineares  $U(n)$  definidos como

$$C_1[U(n)] \equiv \sum_{i=1}^n G_i^i \tag{2.16}$$

<sup>4</sup>Para ver en más detalle los operadores de Casimir véase la ecuación (A.19) del apéndice.

Este operador conmuta con todos los generadores de  $U(n)$  estos son

$$G_j^i = b_i^\dagger b_j \quad (2.17)$$

sustituyendo (2.16) y (2.17) en (2.15) y con ayuda de las reglas de conmutación (2.4)

$$[G_i^j, G_k^l] = G_i^l \delta_{jk} - G_k^j \delta_{il}$$

$$\left[ \sum_{i=1}^n G_i^i, G_k^l \right] = \sum_{i=1}^n G_k^i \delta_{il} - \sum_{i=1}^n G_i^l \delta_{ik} = G_k^l - G_k^l = 0 \quad (2.18)$$

de esta manera para  $n = 6$  de acuerdo con la definición del operador de Casimir lineal tenemos que de (2.16)

$$C_1[U(6)] = \sum_{i=1}^n G_i^i = s^\dagger s + \sum_m d_m^\dagger d_m = \hat{n}_s + \hat{n}_d = \hat{N} \quad (2.19)$$

que como sabemos es exactamente el operador de número bosónico.

Generalmente se acostumbra expresar estos operadores de otra forma, utilizando el resultado (2.6) expresamos los operadores en términos de invariantes de Casimir en donde estos son exactamente operadores tensoriales <sup>5</sup>.

El punto es que el Hamiltoniano lo podemos expresar en términos de operadores de Casimir

$$H = \epsilon C_1[U(5)] + \alpha C_2[U(5)] + \beta C_2[O(5)] + \gamma C_2[O(3)] + \delta C_2[SU(3)] + \eta C_2[O(6)] \quad (2.20)$$

Hay 6 parámetros independientes  $\epsilon, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  y estos están estrechamente relacionados con los operadores del Hamiltoniano

## 2.3 Modelo de Bosones Interactuantes 2

El modelo de bosones interactuantes de Iachello y Arima ha sido muy útil para describir una extensa variedad de datos experimentales que nos llevan a conocer las propiedades colectivas de núcleos en la región de núcleos con masas medias a núcleos pesados.

Como originalmente se formuló es un modelo puramente fenomenológico donde las propiedades del núcleo están descritas en términos de bosones  $s(l=0)$  y bosones  $d(l=2)$ . En este modelo no distingue bosones de protón y bosones de neutrón. Una versión extendida de este modelo fue propuesta por Arima ([10]-[12]), el cual hace la distinción de neutrones y protones, este es el modelo neutrón protón del IBM, al cual llamaremos como Modelo de Bosones Interactuantes 2 o simplemente IBM-2.

La idea principal de IBM-2 es describir las excitaciones colectivas del núcleo en términos de un sistema de bosones de neutrón  $N_\nu$  y bosones de protón  $N_\pi$  donde  $N_\nu, N_\pi$  son las mitades del número de valencia de neutrones y protones.

### 2.3.1 Formalismo del IBM-2

Vamos a denotar a los bosones en términos de operadores de creación como  $b_{\rho lm}^\dagger$  y aniquilación  $b_{\rho lm}$  donde  $\rho = \nu, \pi$  para hacer la diferencia entre neutrones y protones, el momento angular del bosón como  $l = 0, 2$  y  $m$  es la proyección del momento angular. De esta manera estos operadores satisfacen

$$[b_{\rho lm}, b_{\rho' l' m'}^\dagger] = \delta_{\rho, \rho'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.21)$$

<sup>5</sup>Para ver el carácter tensorial de estos operadores véase la sección A.3.3 del apéndice.

donde  $\rho, \rho' = \nu, \pi$  y  $l, l' = 0, 2$ .

Si consideramos el conjunto de productos bilineales de bosones obtenemos

$$\begin{aligned} b_{\nu' l' m'}^\dagger b_{\nu l m} \\ b_{\pi' l' m'}^\dagger b_{\pi l m} \end{aligned} \quad (2.22)$$

El primer conjunto de operadores se refiere a los neutrones y son 36 y el segundo a protones y son también 36. Los primeros generan el álgebra  $U(6)_\nu$  y el segundo conjunto de operadores me generan el álgebra  $U(6)_\pi$ . Estos conjuntos conmutan entre sí ya que obviamente pertenecen a espacios diferentes uno de protones y otro de neutrones, de esta manera ambos forman un álgebra

$$U_{B_\nu}(6) \otimes U_{B_\pi}(6) \quad (2.23)$$

Los generadores de de  $U_{B_\nu}(6) \otimes U_{B_\pi}(6)$  se eligen de manera que sean operadores esféricos tensoriales.

$$\begin{aligned} [b_{\nu l m}^\dagger \times \tilde{b}_{\nu l' m'}]_M^{(L)} \\ [b_{\pi l m}^\dagger \times \tilde{b}_{\pi l' m'}]_M^{(L)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 2.3.2 $F$ -Spin

En ésta sección vamos a introducir un concepto esencial para continuar con nuestra investigación acerca de la estructura nuclear. Como habíamos visto en el formalismo de IBM-2 tenemos dos especies de bosones, bosones de neutrones  $b_\nu$  y bosones de protones  $b_\pi$ . Pero ambos siguen siendo bosones y para distinguirlos tenemos que agregar una nueva etiqueta, (podemos decir que es una especie de número cuántico similar al isoespin[13]) el  $F$ -spin  $F$  cuyo valor para bosones es  $F = \frac{1}{2}$  y  $F = 0$  para fermiones y sus proyecciones  $F_z$ , le asignaremos el valor de  $F_z = -\frac{1}{2}$  a los bosones de neutrones y  $F_z = \frac{1}{2}$  a los bosones de protones. De esta manera ya tenemos un criterio para distinguir los dos tipos de especies de bosones. Aunque el Isoespin y el  $F$ -espin son muy similares no son idénticos ya que los bosones están hechos de pares de nucleones en donde cada nucleón tiene isospin  $I = \frac{1}{2}$  y por lo tanto el isospin de un boson es  $I = 1$  ó  $I = 0$ , este último corresponde a la combinación protón-neutrón.

Utilizando cálculos en el modelo de capas se sabe que las interacciones neutrón-neutrón y protón-protón tienden a ser diferentes el cual nos lleva a rompimientos el número cuántico  $F$ -spin, sin embargo basado en el éxito IBM-1 donde tales interacciones se suponen igual uno puede considerar en el de IBM-2 al  $F$ -spin que tiene buen número cuántico y utilizar términos de mezcla de  $F$ -spin para construir hamiltonianos de bosones neutrón-protón más realistas.

Los operadores de creación y aniquilación los en el formalismo  $f$ -spin denotaremos como

$$\begin{aligned} b_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, l m}^\dagger \text{ (para bosones de neutrones)} & \quad b_{\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, l m}^\dagger \text{ (para bosones de protones)} \\ \tilde{b}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, l m} & \quad \tilde{b}_{\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, l m} \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\tilde{b}_{\frac{1}{2}, \sigma, l m} \equiv (-)^{1/2 + \sigma + l + m} b_{1/2 - \sigma, l - m}$  y los subíndices  $1/2 \pm 1/2$  son el  $F$ -spin del boson y sus proyecciones. Aquí el valor de la proyección está determinado por el número de protones y neutrones  $F_z = (N_\pi - N_\nu)/2$

Si nosotros tenemos  $U(6)$  podemos clasificar las etiquetas a través de la reducción.

$$U_{B_\nu}(6) \otimes U_{B_\pi}(6) \supset U_B(6) \quad (2.26)$$

El álgebra  $U_B(6)$  es obtenida por la suma de los generadores de  $U_{B_\nu}(6)$  y  $U_{B_\pi}(6)$  y para un dado  $N_\nu$  y un  $N_\pi$  las etiquetas de  $U_B$  están dadas en forma general como

$$[N_\nu] \otimes [N_\pi] = \oplus \sum_i [N_\nu + N_\pi - i, i] \quad (2.27)$$

donde  $i = 0, \dots, \min(N_\nu, N_\pi)$ .

Esta suma de arriba contiene todas las representaciones de  $[N]$  en  $U_B(6)$  que son los estados simétricos de bosones de neutrones y protones. Y los no simétricos por ejemplo  $[N - 1, 1]$ , aquí podemos observar lo siguiente, si  $i \neq 0$  estos estados a veces se les dice que poseen una simetría mixta, en el sentido que la parte orbital de la función de onda es simétrica o no antisimétrica bajo intercambio de protones y neutrones. Tomando estas consideraciones deberá existir una relación entre el  $F$  spin e  $i$  definido en (2.27) ya que ambos clasifican la simetría del neutrón-protón. Sin embargo para llegar a una relación más exacta podemos notar que  $U_{sd}(6)$  y  $U_F(2)$  llevan las mismas representaciones  $[N - f, i]$  ya que como los operadores que se obtienen de los productos bilineales en el espacio  $F$ -spin generan un álgebra  $U(12)$  el cual contiene  $U_{B_\nu}(6) \otimes U_{B_\pi}(6)$  como subálgebra, y si tomamos solo los operadores escalares estos forman un subálgebra  $U(6)_{sd}$  de  $U(12)$  el cual  $U(6)_{sd}$  nos proporciona información orbital debido a que sus operadores satisfacen la relación de conmutación del álgebra  $SU_F(2)$  de esta manera

$$U(12) \supset U_{sd}(6) \otimes (U_F(2) \supset SU_F(2)) \quad (2.28)$$

Finalmente observamos que el  $F$  spin, asociado con  $SU_F(2)$  esta dado como

$$F = \frac{N - 2i}{2} \quad (2.29)$$

Entonces las simetrías de de  $F$ -spin pueden ser vistas como una simetría  $U(6)$  y en principio no necesitamos usar el álgebra  $U(12)$  para estudiar sus propiedades. La ventaja de interpretar al  $F$ -spin con  $SU(2)$  es debido a nuestra familiaridad con la teoría del momento angular, el cual muchas de estas ya se entienden muy bien.

### 2.3.3 Limites del F-Spin en el IBM-2

Habiamos visto que el grupo de simetría del IBM-2 es

$$U_{B_\nu}(6) \times U_{B_\pi}(6) \quad (2.30)$$

además en este modelo el Hamiltoniano tiene generadores lineales y cuadráticos del grupo. (2.30) y es diagonalizado en el espacio extendido por el producto directo  $[N_\nu] \times [N_\pi]$ , donde claramente  $N_\nu(N_\pi)$  es el numero de neutrones(protones). Esta diagonalización debería, en general, llevarse a cabo numéricamente. Sin embargo, para el particular Hamiltoniano del IBM-2, el problema de eigenvalores puede ser resuelto analíticamente. En este caso, el Hamiltoniano esta escrito como una combinación lineal y cuadratica de operadores de Casimir de los respectivos grupos que aparecen en los subgrupos de la cadena de (2.30). A tales Hamiltonianos son llamados los que poseen una simetría dinámica.

Veamos solo algunas simetrías dinámicas del IBM-2, el cual están asociadas con las cadenas de los grupos de la forma:

$$U_{B_\nu}(6) \otimes U_{B_\pi}(6) \supset U_B(6) \supset \dots \quad (2.31)$$

La característica común de estas cadenas de grupos es la presencia de  $U_B(6)$ , es el grupo formado por la adición de los generadores  $U_{B_\nu}(6)$  y  $U_{B_\pi}(6)$ . En la reducción (2.31),  $U_B(6)$  está caracterizado por las representaciones irreducibles  $[N - i, i]$ , donde  $N = N_\nu + N_\pi$  y

$$i = 0, 1, \dots, \min(N_\nu, N_\pi) \quad (2.32)$$

debido a que la presencia de  $U_B(6)$  podemos mencionar algunas propiedades de estas simetrías dinámicas asociadas con la cadena de grupos (2.30) en forma general.

- El  $F$ -spin es un buen número cuántico para los Hamiltonianos asociados con (2.30). Esto surge del hecho de que el  $F$ -spin está relacionado con la etiqueta  $i$ , que caracteriza la representación irreducible de  $U_B(6)$  a través de

$$F = \frac{N}{2} - i \quad (2.33)$$

Esta propiedad de la invarianza del  $F$ -spin también puede ser entendido observando que todos los Hamiltonianos que surgen de la cadena de grupos (2.30) son invariantes ante intercambio de grados de libertad neutrones y protones.

- Los estados que pertenecen a las representaciones irreducibles simétricas  $[N]$  de  $U_B(6)$  tienen su contraparte análoga en el espacio IBM-1. En otras palabras, dado cualquier Hamiltoniano con  $F$ -spin simétrico en el IBM-2, su correspondiente Hamiltoniano del IBM-1 puede ser elegido de manera que las energías de todos los estados del espacio del IBM-1 coincide con aquellos estados de las representaciones irreducibles  $[N]$  de  $U_B$

Veamos como se puede manejar este formalismo, tomemos algunas propiedades electromagnéticas y expresemosla en el espacio  $F$ -spin.

En el IBM-2 el operador de transición  $T$  contiene neutrones y protones

$$T = t_\nu T_\nu + t_\pi T_\pi \quad (2.34)$$

donde  $t_\nu(t_\pi)$  es la carga efectiva de el neutrón(protón) en el operador, asumimos que  $T_\nu, T_\pi$  son operadores de transición de un cuerpo. Notemos que (2.34) es un generador de  $U_B(6)$  si solo si  $t_\nu = t_\pi$ , sin embargo uno a menudo encuentra que  $t_\nu \neq t_\pi$  y por lo tanto los elementos de matriz tanto  $T_\nu$  y  $T_\pi$  deberían evaluarse separadamente en lugar de solamente los elementos de matriz de  $T_\nu + T_\pi$ , aquellos cálculos se simplifican por las siguientes consideraciones.

- Los elementos de matriz de  $T_\nu$  y  $T_\pi$  entre los estados que pertenecen a la representación irreducible  $[N]$  de  $U_B(6)$  se expresan como

$$\begin{aligned} & N_\pi \langle [N_\nu] \times [N_\pi]; [N] \alpha | T_\nu | [N_\nu] \times [N_\pi]; [N] \alpha' \rangle \\ &= N_\nu \langle [N_\nu] \times [N_\pi]; [N] \alpha | T_\pi | [N_\nu] \times [N_\pi]; [N] \alpha' \rangle \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $\alpha, \alpha'$  expresan todos los números cuánticos adicionales para completar el estado específico. Esta propiedad puede ser entendida intuitivamente ya que en la representación irreducible  $[N]$  de  $U_B(6)$  los protones y neutrones están distribuidos simetricamente y el elemento de matriz de  $T_\nu(T_\pi)$  serán proporcionales a  $N_\nu(N_\pi)$ .

- Los elementos de matriz entre estados con diferente  $F$ -spin

$$\begin{aligned} & \langle [N_\nu] \times [N_\pi]; [N - i, i] \alpha | T_\nu | [N_\nu] \times [N_\pi]; [N - i', i'] \alpha' \rangle \\ &= -\langle [N_\nu] \times [N_\pi]; [N - i, i] \alpha | T_\pi | [N_\nu] \times [N_\pi]; [N - i', i'] \alpha' \rangle, \quad i \neq i' \end{aligned} \quad (2.36)$$

Esta propiedad última surge trivialmente del hecho de que  $T_\nu + T_\pi$  son generadores de  $U_B(6)$ , no puede conectar diferentes representaciones irreducibles de  $U_B(6)$ .

Si reescribimos la ecuación (2.35) en una notación donde claramente se indican las propiedades de transformación de los estados en el espacio  $F$ -spin.

$$\langle \alpha; F, F_z | N_\pi T_\nu - N_\nu T_\pi | \alpha'; F, F_z \rangle = 0, \quad (2.37)$$

donde  $F = \frac{1}{2}$  y  $F_z = \frac{N_\pi - N_\nu}{2}$ . El operador puede ser escrito como

$$N_\pi T_\nu - N_\nu T_\pi = -\frac{1}{2}(N_\nu - N_\pi)T_0^{(0)} - \frac{1}{2}(N_\nu + N_\pi)T_0^{(1)} \quad (2.38)$$

donde  $T_0^{(k)}$  es la componente  $F_z = 0$  escalar ( $k = 0$ ) o el operador vectorial ( $k = 1$ ) bajo transformaciones en el espacio  $F$ -spin dicho de otra manera

$$\begin{aligned} T_0^{(0)} &= T_\nu + T_\pi \\ T_0^{(1)} &= -T_\nu + T_\pi \end{aligned} \quad (2.39)$$

debido a que las propiedades tensoriales de  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$  en la ecuación (2.38), los elementos de matriz de  $N_\pi T_\nu - N_\nu T_\pi$  puede ser calculado utilizando el teorema de Wigner Eckart en el espacio de  $F$ -spin

$$\begin{aligned} &\langle \alpha; F, F_z | N_\pi T_\nu - N_\nu T_\pi | \alpha'; F, F_z \rangle = \\ &= -\frac{1}{2}(N_\nu - N_\pi)(-1)^{F-F_z} \begin{pmatrix} F & 0 & F \\ -F & 0 & F_z \end{pmatrix} \langle \alpha; F || T^{(0)} || \alpha'; F \rangle \\ &- \frac{1}{2}(N_\nu + N_\pi)(-1)^{F-F_z} \begin{pmatrix} F & 1 & F \\ -F & 0 & F_z \end{pmatrix} \langle \alpha; F || T^{(1)} || \alpha'; F \rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

y calculando los elementos de matriz de  $T_0^{(0)}$  y  $T_0^{(1)}$  tenemos que

$$\langle \alpha; F, F_z = F | T_0^{(0)} | \alpha'; F, F_z = F \rangle \begin{pmatrix} F & 0 & F \\ -F & 0 & F_z \end{pmatrix} \langle \alpha; F || T^{(0)} || \alpha'; F \rangle \quad (2.41)$$

y

$$\langle \alpha; F, F_z = F | T_0^{(1)} | \alpha'; F, F_z = F \rangle \begin{pmatrix} F & 1 & F \\ -F & 0 & F_z \end{pmatrix} \langle \alpha; F || T^{(1)} || \alpha'; F \rangle \quad (2.42)$$

siendo los estados con  $F = F_z$  tenemos  $N_\nu = 0$  y consecuente los elementos de matriz anteriores  $T_0^{(0)}$  y  $T_0^{(1)}$  son iguales así

$$\begin{pmatrix} F & 0 & F \\ -F & 0 & F_z \end{pmatrix} \langle \alpha; F || T^{(0)} || \alpha'; F \rangle = \begin{pmatrix} F & 1 & F \\ -F & 0 & F_z \end{pmatrix} \langle \alpha; F || T^{(1)} || \alpha'; F \rangle \quad (2.43)$$

combinando las ecuaciones (2.40) y (2.43), uno encuentra la propiedad (2.37). Estos resultados derivados tienen un carácter general y no requiere de una simetría dinámica particular. Es más, la única condición para que estos resultados sean válidos es que el Hamiltoniano sea invariante bajo  $F$ -spin. Para derivar resultados más detallados es necesario especificar el subgrupo de la cadena en (2.31).

## 2.4 Modelo Bosón-Fermión Interactuante

En los dos modelos vistos anteriormente IBM-1 y IBM-2 que permiten descripciones de la estructura nuclear para núcleos con pares de neutrones y protones sin embargo debido a que más de la mitad de las especies nucleares tienen un número de neutrones o protones impar se requiere una extensión del IBM que incluya masas impares. El modelo de bosón-fermión interactuante es una extensión del IBM que fue propuesto por F. Iachello y O. Scholten [14], esta descripción está diseñado para núcleos con masas impares, asume que todos los nucleones de valencia excepto uno están en pares acoplados con momento angular  $l = 0$  ó  $l = 2$ , el cual son aproximados con bosones  $s$  o  $d$ . El último nucleón no pareado es tratado explícitamente como fermión si el boson tiene carácter de hoyo, el fermión también es tratado como hoyo. La estructura del IBFM depende de las orbitas que están permitidas en el último nucleón no apareado. La elección de esa única órbita y en particular con su momento angular ó el valor de  $j$  están regidos por el modelo de capas nuclear y varía de núcleo a núcleo. En algunos núcleos basta una orbita para dar una razonable descripción del espectro a bajas energías. Sin embargo en muchos otros se necesita una combinación específica de varias orbitas de una partícula. Por ejemplo, para el protón podemos tomar la órbita  $\pi d_{\frac{3}{2}}$  y para el neutrón puede ocupar las órbitas  $\nu p_{\frac{1}{2}}$ ,  $\nu p_{\frac{3}{2}}$  y  $\nu p_{\frac{5}{2}}$ .

### 2.4.1 Formalismo del IBFM

La estructura general algebraica del IBFM esta dado como

$$U^B(6) \otimes U^F(m) \quad (2.44)$$

el álgebra del IBFM está definida en términos de operadores de bosones  $b_{lm}^\dagger$  y sus conjugados hermitianos  $b_{lm}$  con  $l = 0, 2$  y sus operadores de creación y aniquilación de fermiones  $a_{jm}^\dagger$  y  $a_{jm}$  con sus valores  $j$  permitidos dependientes de el núcleo que se quiere tratar. Comúnmente se maneja la notación  $b_i^\dagger$  y  $b_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) y  $a_{i'}^\dagger$  y  $a_{i'}$  ( $i' = 1, \dots, m$ ) donde  $m$  es la dimensión del espacio de fermiones siendo  $m = \sum (2j + 1)$  donde se suma sobre todas las órbitas permitidas de cada una partícula. Los operadores de bosones satisfacen las relas de conmutación

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0 \quad i, j = 1, 2 \dots 6 \quad (2.45)$$

y los operadores de fermiones satisfacen las reglas de anticonmutación

$$\{a_{i'}, a_{j'}^\dagger\} = \delta_{i'j'} \quad \{a_{i'}, a_{j'}\} = \{a_{i'}^\dagger, b_{j'}^\dagger\} = 0 \quad i, j = 1, 2 \dots m \quad (2.46)$$

debido a que los bosones y fermiones ambos están en su espacio respectivos estos conmutan

$$[b_i, a_{i'}] = [b_i, a_{i'}^\dagger] = [b_i^\dagger, a_{i'}] = [b_i^\dagger, a_{i'}^\dagger] = 0 \quad (2.47)$$

y su correspondiente álgebra esta definida bajo los operadores bilineares

$$G_{Bi}^{Bj} \equiv b_i^\dagger b_j, \quad G_{Fi'}^{Fj'} \equiv a_{i'}^\dagger a_{j'}, \quad (2.48)$$

Debido a que los operadores de los fermiones y bosones conmutan entre sí, la estructura algebraica generada por  $G_{Bi}^{Bj}$  y  $G_{Fi'}^{Fj'}$  es el producto directo  $U^B(6) \otimes U^F(m)$ . Generalmente en la literatura el álgebra se introduce en términos de los generadores acoplados.

$$\begin{aligned} B_\mu^{(\lambda)}(l, l') &\equiv [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_\mu^{(\lambda)} & 36 \\ A_\mu^{(\lambda)}(j, j') &\equiv [a_j^\dagger \times \tilde{a}_{j'}]_\mu^{(\lambda)} & m^2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde hemos utilizado operadores tensoriales de aniquilación dados como  $\tilde{b}_{lm} \equiv (-)^{l+m} b_{l-m}$  y  $\tilde{a}_{jm} \equiv (-)^{j+m} a_{j-m}$ .

Nuestra intención en esta sección no es dar una explicación completa de este modelo ya nuestro propósito simplemente es mostrar un panorama general de la estructura general de los modelos algebraicos nucleares, para ver una explicación más detallada hago referencia al libro de A. Frank y Pieter Van Isacker [15].

### 2.4.2 Hamiltoniano del IBFM

En términos generales la estructura del álgebra de bosones  $U^B(6)$  esta dada como las cadenas vistas en el modelo de IBM (2.14) en donde tenemos subálgebras de  $U^B(6)$  en cada uno de sus reducciones  $U^B(5)$ ,  $SO^B(6)$  y  $SU^B(3)$ . Lo relevante en el IBFM es que las subálgebras del álgebra del fermión  $U^F(m)$  depende de las orbitas permitidas de la única partícula libre, es decir, el nucleón no pareado. La estructura general del hamiltoniano del IBFM incluye interacciones de dos cuerpos entre los bosones y fermiones y se escribe como

$$\hat{H} = \hat{H}^B + \hat{H}^F + \hat{V}^{BF} \quad (2.50)$$

donde  $\hat{H}^B$  es el hamiltoniano de los bosones s-d definidos en (2.10) siendo

$$\hat{H}^F = E_0 + \sum_j \epsilon_j \hat{n}_j + \sum_{\tilde{j}_i L} e_{\tilde{j}_1 \dots \tilde{j}_4}^L [[a_{\tilde{j}_1}^\dagger \times a_{\tilde{j}_2}^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{a}_{\tilde{j}_3} \times \tilde{a}_{\tilde{j}_4}]^{(L)}]_0^{(0)} \quad (2.51)$$

para núcleos con masa A-impar el IBFM considera la interacción que fermión con el sistema de bosones, en este caso el último término de  $\hat{H}^F$  no es importante, en cambio cuando se tiene núcleos impar-impar son descritos con dos fermiones( un neutrón y un protón) en las cuales interaccionan con los bosones y en este caso la interacción fermión-fermión debe ser incluida en el Hamiltoniano. Por lo tanto la interacción entre estos dos sistemas esta dado como

$$\hat{V}^{BF} = \sum_{l_i \tilde{j}_i L} v_{l_1 \tilde{j}_1 l_2 \tilde{j}_2}^L [[b_{l_1}^\dagger \times a_{\tilde{j}_1}^\dagger]^{(L)} \times [\tilde{b}_{l_2} \times \tilde{a}_{\tilde{j}_2}]^{(L)}]_0^{(0)} \quad (2.52)$$

Esta es la forma estándar del Hamiltoniano IBFM, el cual ha sido utilizado para describir series de isotopos con masa impar A-impar en aproximaciones numericos basadas en diagonalizaciones para bases apropiadas.

Hemos mostrado un panorama general de la estructura matemática del modelo IBM y su extensión IBFM, podemos notar que existe una similitud entre los tratamientos de núcleos par-par dados por el IBM y núcleos con masa impar dados por el IBFM, Iachello propuso un tratamiento analítico donde se puede hacer una descripción simultanea de ambos tipos de núcleos con una sola formulación. Esta aproximación comúnmente es referida como supersimetría el cual vamos a explicar con más detalle en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# Supersimetría Nuclear

### 3.1 Introducción

Los protones y neutrones son partículas compuestas de tres quarks y se comportan como fermiones fundamentales a las densidades prevalecientes en el interior del núcleo. Sin embargo, la interacción entre ellos favorece la formación de pares de nucleones (neutrón-neutrón ó protón-protón), que se comportan en cierta aproximación y a bajas energías de excitación como bosones que pueden ser considerados como componentes básicas del núcleo. Este apareamiento es similar al que ocurre en el fenómeno de la superconductividad, donde los pares electrónicos (pares de Cooper) se comportan como bosones y dan lugar (a muy bajas temperaturas) a la desaparición de la resistencia eléctrica. En la naturaleza existen cuatro variedades fundamentales de núcleos, a saber, aquellos con número de protones ( $Z$ ) y neutrones ( $N$ ) pares,  $N$  par y  $Z$  impar,  $N$  impar y  $Z$  par y, finalmente,  $N$  y  $Z$  impares. Los primeros fueron por primera vez descritos por Arima y Iachello como sistemas de bosones interactuantes (ya que todos los nucleones pueden asociarse en pares) en un modelo propuesto en 1974. Los núcleos par-par presentan efectivamente un comportamiento simplificado y los métodos de simetría resultan muy efectivos para describirlos.

En 1980, Iachello se percató de la posibilidad de tratar los núcleos par-impar (ó impar-par) con los métodos de la Supersimetría, ya que en este caso coexisten en el núcleo los pares bosónicos y un fermión remanente. Sugirió que las propiedades de estos núcleos podrían correlacionarse con las de sus vecinos puramente bosónicos a través de transformaciones supersimétricas. A si esta investigación de Supersimetría Nuclear tiene validez debido a la verificación experimental y lo más interesante que estos modelos matemáticos permiten abarcar una variedad de problemas de física nuclear, pero se tiene que tener simetrías que permitan aplicar este formalismo.

Los principios de simetría en la naturaleza han resultado una herramienta fundamental para elucidar los mecanismos subyacentes a los procesos físicos del Universo en que vivimos. Estos principios se caracterizan por definir transformaciones entre las componentes de los sistemas físicos bajo estudio que dejan invariantes a dichos sistemas y que dan lugar a cantidades conservadas, tales como la energía, el momento angular o la carga eléctrica. Según el modelo estándar de la física de partículas, la materia está formada por fermiones (a su vez divididos en quarks y leptones), mientras que las partículas que transmiten las dos interacciones fundamentales de la naturaleza (interacción fuerte e interacción nuclear electrodébil) son bosones. A estos sistemas de bosones y fermiones se le asocia un álgebra adecuado al problema que se tenga, y a base de este álgebra de Lie se hace un tratamiento algebraico para obtener las características, sin embargo, estas transformaciones se definen entre sistemas de bosones o fermiones, y no incluyen operaciones que mezclan estos dos tipos de objetos. Uno de los avances teóricos importantes de la física es el desarrollo de teorías en que bosones y fermiones son descritos en un esquema único donde,

por ejemplo, se predice la existencia de partículas masivas fermiónicas asociadas al fotón y partículas bosónicas asociadas a fermiones tales como los quarks. A las transformaciones que mezclan bosones y fermiones se les conoce bajo el nombre genérico de supersimetrías. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos experimentales en los aceleradores de partículas, no se ha encontrado evidencia alguna de su existencia, lo que significaría un avance trascendental en las aspiraciones por unificar las fuerzas de la naturaleza.

Entre estos modelos de estructura nuclear está el Modelo de Bosones Interactuantes y sus extensiones en donde satisfactoriamente se ha probado que se tiene una teoría unificada para núcleos par-par [16] y impar-A [17]. Una de las características más atractivas es que tiene una simple descripción algebraica en donde las llamadas simetrías dinámicas juegan un rol importante.

El estudio de la estructura nuclear ha tenido un gran avance gracias al uso de las nuevas tecnologías tales como el uso de supercomputadoras, en donde se necesita tener un tratamiento exacto del núcleo utilizando interacciones entre nucleones, todos estos cálculos requieren desarrollar algoritmos especiales para obtener buenos resultados.<sup>1</sup>

Un camino diferente para lograr estos resultados es utilizar las simetrías y los métodos algebraicos más que intentar resolver un problema de muchos cuerpos nuclear complejo. Lo que se puede hacer es identificar los grados libres efectivos, estos pueden ser sus grados efectivos o simetrías dinámicas. Las simetrías nos dan la forma de las energías, reglas de selección, la capacidad de transferencia, el cual puede ser utilizado como punto de referencia para estudiar e interpretar datos experimentales, siempre y cuando esas simetrías pueden ser validas aproximadamente.

La supersimetría es un concepto introducido en los años setenta y puede ser dividido en tres categorías.

1. Supersimetría asociada a la álgebra graduada que no tiene una subálgebra de Lie semisimple. Este tipo de supersimetría es una generalización de la invarianza de Lorentz-Poincare, y esta debe ser impuesta para todos las teorías que fueron formuladas desde un nivel fundamental, se le puede llamar “simetría cinemática”.
2. Supersimetría asociada a la álgebra graduada que tiene una subálgebra de Lie semisimple. Este tipo de supersimetría es una generalización de la llamada simetría no relativista de la mecánica cuántica, se le puede llamar “simetría dinámica”.
3. Supersimetría en la mecánica cuántica, a veces llamada SUSY. Este tipo de supersimetría se ha utilizado recientemente para dar soluciones a los problemas de mecánica cuántica no relativista. Desafortunadamente no ha dado ninguna nueva solución.

La supersimetría ha sido más útil en los dos primeros tipos.

## 3.2 Supersimetría Nuclear

La supersimetría nuclear pertenece al segundo tipo (2), el cual tiene una supersimetría que posee una estructura algebraica con un subálgebra de Lie semisimple. La supersimetría nuclear es un fenómeno colectivo, el cual no debe ser confundido con la supersimetría fundamental, usada en la física de partículas y la teoría cuántica de campos, donde se postula la simetría fundamental de la naturaleza la una generalización de la invarianza de Lorentz-Poincare que predice la existencia de partículas supersimétricas, tales como el fotino y el selectron, de las cuales aun no se han encontrado alguna evidencia experimental. Si los experimentos del LHC en la CERN encuentran evidencia de las partículas supersimétricas, la supersimetría se podría romper y sus masas deberían ser mucho más grandes que las de sus compañeras normales. En cambio en la supersimetría nuclear si se tiene verificación experimental.

<sup>1</sup>Por mencionar algunos métodos que usen Montecarlo, Funciones de Green, Clusters Acoplados etc.

La supersimetría nuclear fué introducido en 1980 cuando F.Iachello en 1980 sugirió que el espectro de algunos núcleos pesados en la región *Pt-Ir* pueden estar relacionados con la supersimetría como se muestran las evidencias [18]. La supersimetría en el núcleo esta basado en el modelo de Bosones-Fermiones Interactuantes[14] en donde los constituyentes son bosones con momento angular  $J = 0$  y  $J = 2$  (bosones s y d) que representan pares de nucleones, y fermiones con momento angular  $j_1, j_2, \dots$  que representan nucleones individuales. El Hamiltoniano del Modelo de Bosones-Fermiones interactuantes como hemos visto en el capítulo anterior (2.50), puede ser escrita de manera reducida como

$$H = H_B + H_F + V_{BF} \quad (3.1)$$

con

$$\begin{aligned} H_B &= E_0 + \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} + \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} v_{\alpha\beta\alpha'\beta'} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} b_{\alpha'}^{\dagger} b_{\beta'} \\ H_F &= E'_0 + \sum_{ik} \eta_{ik} a_i^{\dagger} a_k + \sum_{ik'i'k'} v_{ik'i'k'} a_i^{\dagger} b_k a_{i'}^{\dagger} a_{k'} \\ V_{BF} &= \sum_{\alpha\beta ik} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta} a_i^{\dagger} a_k \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde el coeficiente  $H_B$  representan las interacciones entre bosones,  $H_F$  representan las interacciones entre fermiones y  $V_{BF}$  interacciones entre bosones y fermiones. Esta estructura es similar en algunas teorías de campo supersimétricas. Como por ejemplo en el modelo de Wess-Zumino, su lagrangiano tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{BF} \quad (3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= -\frac{1}{2}[\partial_{\mu}A(x)]^2 - \frac{1}{2}[\partial_{\mu}B(x)]^2 - \frac{1}{2}m^2A^2(x) - \frac{1}{2}m^2B^2(x) \\ &\quad - gmA(x)[A^2(x) + B^2(x)] - \frac{1}{2}g^2[A^2(x) + B^2(x)] \\ \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{2}i\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - \frac{1}{2}im\bar{\psi}\psi(x) \\ \mathcal{L}_{BF} &= -ig\bar{\psi}(x)[A(x) - \gamma_5 B(x)]\psi(x) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si vemos la estructura de este lagrangiano está escrito en términos de dos campos escalares  $A(x)$  y  $B(x)$  y un campo espinorial  $\psi(x)$  donde todas las interacciones están dadas por una sola constante de acoplamiento  $g$ . Es interesante notar como esta estructura es igual a la del Modelo de Bosones-Fermiones Interactuantes.

El Hamiltoniano bosónico  $H_B$ , del modelo de Bosones-Fermiones interactuantes es el mismo Hamiltoniano del Modelo de Bosones Interactuantes. Este Hamiltoniano como habíamos visto en el capítulo dos, tiene tres simetrías dinámicas.[17] como vimos en (2.14)<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Para cada una de esa simetrías, uno puede construir varios tipos de supersimetrías a través de la asignación de estados fermionicos en alguna representación de los subgrupos  $U(5)$ ,  $SU(3)$ ,  $O(6)$ .

### 3.2.1 Álgebra Supersimétrica

El IBM describe excitaciones colectivas en núcleos par-par en términos de un sistema en donde intervienen interacciones monopulares y cuadrupolares de bosones con momento angular  $l = 0, 2$ . Los bosones están asociados con el número de pares de protones y neutrones de valencia y por lo tanto el número de bosones  $N$  es la mitad del número de nucleones de valencia. Ya que es conveniente expresar el Hamiltoniano y otros operadores de interés en la forma de segunda cuantización, nosotros introducimos los operadores de creación  $s^\dagger$  y  $d_m^\dagger$  y los de aniquilación,  $s$  y  $d_m$ , el cual juntos los podemos denotar  $b_i^\dagger$  y  $b_i$  con  $i = l, m (l = 0, 2 \text{ y } -l \leq m \leq l)$ . Donde sabemos que se cumple

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = [b_i, b_j] = 0. \quad (3.5)$$

Los productos bilineales

$$B_{ij} = b_i^\dagger b_j \quad (3.6)$$

generan el álgebra de  $U(6)$ , el grupo unitario de seis dimensiones.

$$[B_{ij}, B_{kl}] = B_{il}\delta_{jk} - B_{kj}\delta_{il} \quad (3.7)$$

El hamiltoniano IBM y otros operadores de interés son expresados en términos de generadores de  $U(6)$ . En general, el Hamiltoniano tiene que ser diagonalizado numéricamente para obtener la energía de los eigenvalores y las funciones de onda. Sin embargo existen especiales situaciones en las cuales los eigenvalores pueden obtenerse de forma cerrada, es decir de forma analítica. Estas soluciones especiales nos da una formulación en las cuales el espectro de energías y otras propiedades nucleares (así como las transiciones cuadrupolares y momentos) pueden ser interpretadas por un camino cualitativo. Estas situaciones corresponden a simetrías dinámicas del Hamiltoniano[19]. Una simetría dinámica surge cuando el Hamiltoniano puede ser expresado en términos de invariantes de Casimir de un cadena de subgrupos de  $G = U(6), G \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots$ . Los eigenestados pueden clasificarse de forma única de acuerdo a la representación irreducible de  $G$  y sus subgrupos  $G_1, G_2, \dots$ . Las diferentes representaciones de  $G, G_1, G_2 \dots$  son divididas pero no mezclados en el Hamiltoniano. La energía de los eigenvalores están dados por los valores esperados propios de los operadores de Casimir.

El concepto de simetría dinámica ha sido una herramienta muy útil en diferentes ramas de la física. Como nosotros bien conocemos, un ejemplo en la física nuclear es el modelo de Elliot de  $SU(3)$  [20] para describir las propiedades de los núcleos ligeros en la capa sd.

Los subgrupos son relevantes para sistemas de bosones y fermiones. Como ya sido mostrado, estos sistemas pueden ser descrito por seis bosones, en escalares con  $l = 0$  que son los llamados bosones  $s$  y los cuadrupolares  $l = 2$  llamados bosones  $d$  el cual le asignamos una representación de seis dimensiones  $U(6)$ . Introducimos los operadores de creación y aniquilación de bosones, juntos denotados por  $b_\alpha^\dagger$  ( $b_\alpha$ ),  $\alpha = 1, \dots, 6$ , así podemos construir los 36 generadores de  $U(6)$  como  $G_{\alpha\alpha'}^{(B)} = b_\alpha^\dagger b_\alpha$ . El número de bosones en un núcleo par-par se toma el número  $N = N_\nu + N_\pi$ , tomando claro los pares de neutrones y protones activos fuera de las últimas capas<sup>3</sup> de 8, 20, 28, 50, 82 y 126. Además cuando describimos estados de núcleos impar-par o estados de núcleos par-par e impar-par con dos o más partículas desapareados, uno necesita introducir explícitamente grados de libertad fermiónicos. La dimensión el espacio fermiónico  $m$  es  $\sum_i (2j_i + 1)$ , donde  $j_i$  son los valores del momento angular contenido en la capa más grande. Se le puede asignar a los fermiones una representación de  $m$  dimensiones del grupo  $U(m)$ . Introduciendo los operadores de creación y aniquilación para fermiones denotados por  $a_i^\dagger$  ( $a_i$ ),  $i = 1, \dots, m$ , los  $m^2$  generadores de  $U(m)$  pueden ser denotados como  $G_{ii'}^{(F)} = a_i^\dagger a_i$ . En general la estructura de grupo de este problema es  $U^{(B)}(6) \otimes U^{(F)}(m)$  donde he puesto superíndice para distinguir los bosones y fermiones. Ya que que estas representaciones contienen estados tanto bosónicos como fermiónicos, no puede ser un

<sup>3</sup>De hecho se toman el número de partículas o pares de hoyos.

grupo ordinario de Lie, pero si un supergrupo. Estos supergrupos han sido introducidos en el contexto de modelos duales [21], en teorías supersimétricas de campos [22] e incluso en supergravedad [23].

Para núcleos de masa impar el IBM se ha extendido de manera que incluya un grado de libertad de una partícula [24, 14]. El Modelo de Bosón-Fermión Interactuantes (IBFM) se ha construido bloques de  $N$  bosones con  $l = 0, 2$  y con un fermión  $M = 1$  ( $a_j^\dagger$ ) con  $j = j_1, j_2, \dots$  [17].

Los supergrupos apropiados para nuestro problema tienen que ser  $U(6/m)$ . Podemos explícitamente construir los generadores de los supergrupos  $U(n/m)$  con los operadores de creación y aniquilación. Los generadores son

$$\begin{aligned} G_{\alpha\alpha'}^{(B)} &= b_\alpha^\dagger b_{\alpha'} & (n^2), \\ G_{ii'}^{(F)} &= a_i^\dagger a_{i'} & (m^2), \\ F_{i\alpha}^\dagger &= b_\alpha^\dagger a_i & (mn), \\ F_{\alpha i} &= a_i^\dagger b_\alpha & (mn/(m+n)^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Además de introducir los operadores de los grados de libertad colectivos de los bosones, están los operadores de creación  $a_i^\dagger$  y de aniquilación  $a_i$  para el nucleón extra. Los operadores de los fermiones satisfacen las reglas de anticonmutación.

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = a_i, a_j = 0. \quad (3.9)$$

Los productos bilineares

$$A_{ij} = a_i^\dagger a_j \quad (3.10)$$

generan el álgebra de  $U(m)$ , el grupo unitario de  $m$  dimensiones.

$$[A_{ij}, A_{kl}] = A_{il}\delta_{jk} - A_{kj}\delta_{il} \quad (3.11)$$

Por construcción los operadores de fermión conmutan con los operadores de bosón

$$[B_{ij}, A_{kl}] = 0 \quad (3.12)$$

Los operadores  $B_{ij}$  y  $A_{ij}$  generan un álgebra de Lie de un grupo de simetría  $G = U^B(6) \otimes U^F(m)$  del IBFM. Las simetrías dinámicas que pueden surgir en el IBFM son conocidas bajo el nombre de simetrías dinámicas del bosón-fermión para núcleos de masa impar.

Las simetrías del bosón-fermión pueden seguir extendiéndose a través de la introducción del concepto de supersimetría [25], en donde los estados de los núcleos son tanto par-par e impar-par pueden ser tratados en una simple teoría. Podemos tratar el sistema mixto de bosones y fermiones con un número fijo de bosones  $N$  y un fermión  $M = 1$ . Los operadores  $B_{ij}$  y  $A_{ij}$  pueden solo cambiar bosones a bosones y fermiones a fermiones. Además de  $B_{ij}$  y  $A_{ij}$  uno puede introducir operadores que permitan cambiar los bosones a fermiones y viceversa, pero conservando el número total de bosones y fermiones.

$$F_{ij} = b_i^\dagger a_j \quad G_{ij} = a_i^\dagger b_j \quad (3.13)$$

El conjunto de los operadores  $B_{ij}, A_{ij}, F_{ij}$  y  $G_{ij}$  forman una álgebra cerrada el cual satisfacen ciertas reglas de conmutación y anticonmutación

$$[B_{ij}, B_{kl}] = B_{il}\delta_{jk} - B_{kj}\delta_{il} \quad (3.14)$$

$$[B_{ij}, A_{kl}] = 0$$

$$[B_{ij}, F_{kl}] = F_{il}\delta_{jk}$$

$$[B_{ij}, G_{kl}] = -G_{kj}\delta_{il}$$

$$[A_{ij}, A_{kl}] = A_{il}\delta_{jk} - A_{kj}\delta_{il}$$

$$[A_{ij}, F_{kl}] = -F_{kj}\delta_{il}$$

$$[A_{ij}, G_{kl}] = G_{il}\delta_{jk}$$

$$\{F_{ij}, F_{kl}\} = 0$$

$$\{F_{ij}, G_{kl}\} = B_{il}\delta_{jk} + A_{kj}\delta_{il}$$

$$\{G_{ij}, G_{kl}\} = 0 \quad (3.15)$$

Esta álgebra se puede identificar con el grupo de Lie graduado  $G = U(6/m)$ . Esto nos proporciona un esquema elegante en donde el IBM y el IBFM pueden ser unificadas en una sola formulación[25]

$$G = U(6/m) \supset U^B(6) \otimes U^F(m) \quad (3.16)$$

Este formalismo supersimétrico para núcleos par-par y con masa impar forman miembros de un supermultiplete el cual está caracterizado por  $[\mathcal{N}]$  donde  $\mathcal{N} = N + M$  es el número total de bosones y de fermiones.

El Hamiltoniano de n-SUSY está escrito en términos de generadores del álgebra graduada de Lie  $U(6/m)$ . La supersimetría dinámica surge cuando el Hamiltoniano está constituido de operadores de Casimir correspondientes a las cadenas de los subgrupos de  $U(6/m)$ . La dinámica nuclear supersimétrica corresponde a formas especiales del Hamiltoniano el cual no debe ser aplicado a todos los núcleos. Sin embargo hay varios núcleos en la región Os-Ir-Pt-Au en donde se han econtrado evidencias experimentales de la presencia de la supersimetría en el núcleo.

### 3.3 Supersimetrías dinámicas en la física nuclear

Las supersimetrías dinámicas fueron introducidas [26] en la física nuclear en el contexto de el Modelo de Bosones Interactuantes(IBM) y sus extensiones [16]. Donde vimos que el IBM describe excitaciones colectivas en núcleos par-par en términos de sistemas monopolares ( $s^\dagger$ ) que interactúan y sistemas cuadrupolares ( $d^\dagger$ ) de bosones, el cual juntos pueden ser denatados como  $b_l^\dagger$  con momento angular  $l = 0, 2$ . Los bosons ason asociados con el número de pares de protones y bosones y así el numero de bosones es la mitad del numero de nucleones de valencia  $N$ .

En general el Hamiltoniano puede ser diagonalizado numéricamente para obtener los eigenvalores de energía y sus funciones de onda. Sin embargo existen situaciones especiales en las cuales los eigenvalores pueden ser obtenidos de manera cerrada, es decir de manera analítica. Estas situaciones corresponden a las simetrías dinámicas, las cuales surgen cuando el Hamiltoniano es expresado en términos de invariantes de Casimir de una cadena de subgrupos de  $G = U(6)$ : por ejemplo, el límite  $U(5)$  para núcleos vibracionales, el límite  $SU(3)$  para núcleos rotacionales y el límite  $SO(6)$  para núcleos  $\gamma$ -inestable [16].

Para cada uno de esas simetrías dinámicas se han derivado un conjunto de expresiones analíticas para energías, transiciones electromagnéticas, momentos cuadrupolares y otras magnitudes observables de interés que pueden ser utilizados para clasificar e interpretar los datos experimentales disponibles de una manera cualitativa.

La formulación de núcleos par-par e impar-par forman miembros de un supermultiplete que está caracterizado por  $\mathcal{N} = N + M$ , es decir, el número total de bosones y fermiones. La supersimetría se

distingue de las otras simetrías ya que en esta puede haber transformaciones de fermiones a bosones y viceversa. (Ver la tabla 3.1).

Tabla 3.1: Modelos algebraicos de la estructura nuclear.

Modelo	Generadores	Invariante	Simetría
IBM	$b_i^\dagger b_j$	$N$	$U(6)$
IBFM	$b_i^\dagger b_j, a_k^\dagger a_l$	$N, M$	$U(6) \otimes U(m)$
SUSY	$b_i^\dagger b_j, a_k^\dagger a_l, b_i^\dagger a_k, a_k^\dagger b_i$	$\mathcal{N} = N + M$	$U(6/m)$

Para el entendimiento claro del comportamiento físico del núcleo en términos de teoría de grupos, es crucial entender cómo surge la estructura del espectro con respecto a la simetría que estemos manejando. Es importante señalar que el Hamiltoniano nos describe la física de nuestro núcleo. Además implícitamente el Hamiltoniano posee información de la estructura que posee el núcleo. Por ejemplo, nosotros sabemos que el núcleo posee simetrías rotacionales y vibratorias por lo tanto en respuesta a estas simetrías, el Hamiltoniano puede estar escrito en términos de grupos tales como  $U(5)$  para la vibración y  $SU(3)$  rotaciones (rotor simétrico axial) y  $SO(6)$  (rotor  $\gamma$ -inestable). Veamos ahora una técnica que nos permite visualizar los espectros nucleares. Vamos a tener un cuadruplete supersimétrico, cuatro tipos de núcleos.

Cuando hacemos referencia a partículas relacionadas con neutrones usamos la notación  $\nu$  y para protones  $\pi$ . Ahora cuando tenemos bosones de neutrones vamos a escribirlo como  $B_\nu$  y para bosones de protones  $B_\pi$  y los fermiones los podemos representar con  $F_\pi$  y para bosones de neutrones  $F_\nu$ .

El carácter supersimétrico en este contexto de física nuclear se debe a que podemos tratar a los bosones y fermiones dentro de un mismo marco teórico. Podemos clasificar a los núcleos por el número de bosones de neutrón y protón  $N_\nu, N_\pi$  y el número de fermiones extras, es decir el numero de protones y neutrones  $M_\pi$  y  $M_\nu$ . Podemos mezclar estos dos objetos como la suma de bosones y fermiones como  $\mathcal{N}_\nu = N_\nu + M_\nu$  y  $\mathcal{N}_\pi = N_\pi + M_\pi$ .

Una manera sencilla de visualizar la estructura matemática de la supersimetría es a través de la construcción de las cadenas de grupos. Esto nos permite ver como los grupos se van acoplando y ver el origen matemático de los términos que posee el Hamiltoniano.

Veamos el esquema general supersimétrico a partir de la siguiente cadena

Tabla 3.2: Cuadruplete supersimétricos

Núcleo	$N_\pi$	$M_\pi$	$N_\nu$	$M_\nu$
par-par	$\mathcal{N}_\pi$	0	$\mathcal{N}_\nu$	0
protón impar	$\mathcal{N}_\pi - 1$	1	$\mathcal{N}_\nu$	0
neutrón impar	$\mathcal{N}_\pi$	0	$\mathcal{N}_\nu - 1$	1
impar-impar	$\mathcal{N}_\pi - 1$	1	$\mathcal{N}_\nu - 1$	1

$$\begin{array}{ccccccc}
U_\nu(6/12) & \otimes & U_\pi(6/4) & \supset & U(6)_{B_\nu} & \otimes & U(6)_{B_\pi} & \otimes & U(12)_{F_\nu} & \otimes & U_{F_\pi}(4) \\
\downarrow & & \downarrow \\
[\mathcal{N}_\nu] & & [\mathcal{N}_\pi] & & [N_\nu] & & [N_\pi] & & \{M_\nu\} & & \{M_\pi\} \\
& & & & \supset & & \supset & & \supset & & \supset \\
& & & & U_B(6) & \otimes & U_{F_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) & \otimes & U_{F_\pi}(4) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & [N_\pi + N_\nu - i, i] & & [2^{f_2}, 1^{f_1-f_2}] & & [f_1, f_2] & & \{M_\pi\} \\
& & & & \supset & & \supset & & \supset & & \supset \\
& & & & U_{BF_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\pi}(4) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & [N_1, \dots, N_6] & & \{M_\pi\} & & [f_1, f_2] \\
& & & & \supset & & \supset & & \supset \\
& & & & SO_{BF_\nu}(6) & \otimes & SU_{F_\pi}(4) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & [1^{M_\pi}] & & [f_1, f_2] \\
& & & & \supset & & \supset & & \supset \\
& & & & Spin(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & & [f_1, f_2] \\
& & & & \supset & & \supset \\
& & & & Spin(5) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & (\tau_1, \tau_2) & & [f_1, f_2] \\
& & & & \supset & & \supset \\
& & & & Spin(3) & \otimes & SU_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & J & & s \\
& & & & \supset & & \supset \\
& & & & SU(2) \\
& & & & \downarrow \\
& & & & L
\end{array}
\tag{3.17}$$

Esta cadenas nos dice explícitamente la manera de como se obtiene información a partir de la simetría  $U_\nu(6/12) \otimes U_\pi(6/4)$  justamente con dos números  $[N_\nu]$ ,  $[N_\pi]$  y así reduciendo los grupos cuidadosamente llegando hasta las representaciones de los momentos angulares  $J$  y el espin dado como  $s = \frac{f_1 - f_2}{2}$  y finalmente el momento angular total  $\vec{L} = \vec{J} + \vec{s}$ .

Hay un punto importante que hay que remarcar en estas reducciones, en situaciones más físicas, es decir más prácticas, estas cadenas tienden a reducirse ya que se tienen más restricciones. En aplicaciones de la física nuclear solo se considera las configuraciones con  $M_\pi = M_\nu = 0$  que corresponde a los núcleos par-par,  $M_\pi = 1$ ,  $M_\nu = 0$  para núcleos con protón impar,  $M_\pi = 0$ ,  $M_\nu = 1$  para núcleos con neutrón impar y  $M_\pi = M_\nu = 1$  para núcleos impar-impar (véase la tabla 3.2). Comúnmente la representaciones de los grupos asociados a los fermiones tal como  $U_{F_\pi}(4)$  suele denotarse como  $[1^{M_\pi}] \equiv \{M_\pi\}$  y para  $U_{F_\nu}(12)$  esta dado por  $[1^{M_\nu}] \equiv \{M_\nu\}$ . Las reducciones del grupo  $U_{F_\nu}(12)$  tiene carácter peculiar, debido a que estamos manejando fermiones, las tablas de Young asociadas a los acoplamientos tienen que ser conjugadas, de esta manera se tendrán ciertas restricciones al momento de determinar los números cuánticos de los acoplamientos.

$$U_{F_\nu}(12) \supset U_{F_\nu}(6) \otimes U_{F_\nu}(2)
\begin{array}{ccc}
[1^{M_\nu}] & [2^{f_2}, 1^{f_1-f_2}] & [f_1, f_2]
\end{array}
\tag{3.18}$$

Tabla 3.3: Acomodamiento de los coeficientes de las energías del cuadruplete supersimétrico

Núcleo	Acoplamiento			
par-par	$\alpha + \alpha'$	$\beta + \beta'$	$\gamma$	$\delta + \delta'$
protón impar	$\alpha + \alpha'$	$\beta, \beta'$	$\gamma$	$\delta + \delta'$
neutrón impar	$\alpha, \alpha'$	$\beta + \beta'$	$\gamma$	$\delta, \delta'$
impar-impar	$\alpha, \alpha'$	$\beta, \beta'$	$\gamma$	$\delta, \delta'$

Estas reglas simplemente son

$$\begin{aligned}
f_1 &\geq f_2 \geq 0 \\
f_1 + f_2 &= M_\nu \\
f_1 &\leq 6
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Cuando se tenga  $M_\nu = 0, 1$ , la reducción (3.18) consiste en las representaciones  $f_1 = 0, 1$  y  $f_2 = 0$  de esta manera podemos llamar a las representaciones  $[2^{f_2}, 1^{f_1-f_2}]$  de  $U_{F_\nu}(6)$  a través de la notación más compacta  $[N_\rho]$  con  $N_\rho = 0, 1$ . Por lo cual cuando continuamos con nuestros acoplamiento de los bosones con el fermión extra de neutrón  $U_B(6) \otimes U_{F_\nu}(6)$  y llegamos a la reducción  $U_{BF_\nu}(6)$  podemos expresar

$$[N_1, \dots, N_6] \longrightarrow [N_\pi + N_\nu + N_\rho - j, j - k, k] \tag{3.20}$$

Construyamos ahora un hamiltoniano general a partir de las interacciones que hemos utilizado para construir la cadena anterior. Para ello tomaremos los invariantes de Casimir de cada uno de los grupos asociados a las interacciones predominantes.

$$\begin{aligned}
H &= \alpha \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + 5) - \mathcal{C}_{2U_B(6)}] + \alpha' \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + \hat{N}_\rho)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + \hat{N}_\rho + 5) - \mathcal{C}_{2U_{BF_\nu}(6)}] \\
&+ \beta \mathcal{C}_{2SO_{BF_\nu}(6)} + \beta' \mathcal{C}_{2spin(6)} + \gamma \mathcal{C}_{2spin(5)} + \delta \mathcal{C}_{2spin(3)} + \delta' \mathcal{C}_{2SU(2)}
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

Si nos interesa sus energías tenemos

$$\begin{aligned}
E &= \alpha i [(N_\nu + N_\pi - i + 1) + \alpha' [j(N_\nu + N_\pi + N_\rho - j + 1) + k(j - k + 1)]] \\
&+ \beta [\Sigma_1(\Sigma_1 + 4) + \Sigma_2(\Sigma_2 + 2) + \Sigma_3^2] + \beta' [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] \\
&+ \gamma [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \delta J(J + 1) + \delta' L(L + 1)
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Estos coeficientes  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \delta$  y  $\delta'$  son ajustes que se le debe poner a partir de los datos experimentales. Son valores únicos para un cuarteto de supersimétrico. Estos simplemente corrigen el espectro teórico.

Ahora dependiendo del núcleo vamos a tener simplificaciones en el Hamiltoniano y sus respectivas energías (??). Más adelante daremos una revisión de cómo se construye esta energía en más detalle.

### 3.3.1 Simetrías dinámicas en núcleos par-par

Para comenzar nuestro análisis de todo el espectro de excitación del núcleo nos enfocaremos únicamente a los niveles energéticos más bajos, estamos hablando de energías de cercanas a 1.5 Mev. Por lo tanto nuestra prioridad será obtener las líneas espectrales cercanas al estado base. En la práctica se ha notado que las representaciones irreducibles de los estados base son simétricos y los no simétricos que corresponden a estados excitados dentro del espectro nuclear.

Cuando estamos tratando núcleos par-par podemos utilizar el formalismo de IBM-2. A los núcleos par-par se le puede asociar a los bosones de protón el grupo  $U_{B_\pi}(6)$  con  $[N_{B_\pi}]$  que es el número de bosones de protón de valencia que posee un núcleo y para bosones de neutron  $U_{B_\nu}(6)$  con  $[N_{B_\nu}]$ , si hacemos un acoplamiento de estos, tenemos  $U_B(6)$  con su representación irreducible  $[N_\pi + N_\nu - i, i]$ , ésta representación la podemos reducir al grupo  $SO_B(6)$  y después a  $SO_B(5)$  y a si sucesivamente. Este proceso de reducción de los grupos se conoce como reglas de selección.

En los núcleos par-par no tenemos fermiones  $M_\pi = M_\nu = 0$  entonces  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi$   $N_\nu = \mathcal{N}_\nu$  la cadena (3.17) se reduce a la cadena del IBM-2

$$\begin{array}{ccc}
U(6)_{B_\nu} \otimes U(6)_{B_\pi} & \supset & U_B(6) \\
\downarrow & & \downarrow \\
[\mathcal{N}_\nu] & & [\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - i, i] \\
& & \downarrow \\
& & SO_B(6) \\
& & \downarrow \\
& & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) \\
& & \downarrow \\
& & SO_B(5) \\
& & \downarrow \\
& & (\tau_1, \tau_2) \\
& & \downarrow \\
& & SO_B(3) \\
& & \downarrow \\
& & L
\end{array} \tag{3.23}$$

donde  $i = 0, 1, \dots, \min(N_\pi, N_\nu)$ .

Por lo tanto la función de onda de un núcleo par-par en el contexto supersimétrico adquiere la forma:

$$|\Psi_{ee}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3); (\tau_1, \tau_2); L\rangle \tag{3.24}$$

Debido a que en los núcleos par-par no tenemos fermiones se tiene una simplificación en el acoplamiento (3.20) con  $N_\rho = 0$ ,  $j = i$  y  $k = 0$ , esto nos dice que de la cadena general (3.17) las representaciones de  $SU_B(6)$  y de  $Spin(6)$  tienen que coincidir así  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  además el momento angular total sería  $L = J$ .

Nuestra tarea a seguir es determinar los valores de las representaciones irreducibles  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  y los de  $(\tau_1, \tau_2)$ . Para los casos simétricos  $i = 0$ , de esta manera tenemos  $[\mathcal{N}, 0]$  y se conoce que para las sigmas se cumple la regla

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0) \oplus (\mathcal{N} - 2, 0, 0) \oplus \dots \oplus \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{cuando } \mathcal{N} \text{ es impar} \\ (0, 0, 0) & \text{cuando } \mathcal{N} \text{ es par} \end{cases} \tag{3.25}$$

donde quitamos un par simétrico de bosones.

Por otro lado si queremos determinar las sigmas de  $SO(6)$  para el caso de  $i = 1$  se tiene que establecer los números cuánticos  $N_\pi$  de  $U_{B_\pi}(6)$  y  $N_\nu$  de  $U_{B_\nu}(6)$  y hacer el acoplamiento  $U_B(6)$  y posteriormente utilizando los procedimientos convencionales de teoría de grupos como se hace en el apéndice (A.131)

podemos diferenciar los casos simétricos y no simétricos. De esta manera para el caso no simétrico con  $i = 1$  siendo  $[\mathcal{N} - 1, 1]$  vamos a tener

$$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N} - 1, 1, 0) \oplus (\mathcal{N} - 2, 0, 0) \oplus (\mathcal{N} - 3, 1, 0) \oplus \dots \oplus \begin{cases} (1, 0, 0) & \text{cuando } \mathcal{N} \text{ es impar} \\ (1, 1, 0) & \text{cuando } \mathcal{N} \text{ es par} \end{cases} \quad (3.26)$$

Para comprender la reducción  $SO_B(6)$  a  $SO_B(5)$  de la cadena

$$\begin{array}{ccccc} SO_B(6) & \supset & SO_B(5) & \supset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & (\tau_1, \tau_2) & & \end{array} \quad (3.27)$$

solo tenemos que utilizar la regla<sup>4</sup>

$$\Sigma_1 \geq \tau_1 \geq \Sigma_2 \geq \tau_2 \geq |\Sigma_3| \quad (3.28)$$

de esta manera podemos hacer la reducción a  $SO_B(5)$  como por ejemplo

$$\begin{aligned} (\Sigma, 0, 0) \rightarrow (\tau_1, \tau_2) &= (0, 0), (1, 0) \dots (\Sigma, 0) \\ (\Sigma, 1, 0) \rightarrow (\tau_1, \tau_2) &= (1, 0), (2, 0) \dots (\Sigma, 0) \\ & \quad (1, 1), (2, 1) \dots (\Sigma, 1) \end{aligned}$$

Las representaciones  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  y  $(\tau_1, \tau_2)$  corresponde a la estructura externa del núcleo, es decir, estos números nos indican la estructura general que debe tener las líneas de un espectro de excitación del núcleo. Sin embargo si nos preguntamos sobre la estructura interna del núcleo, podemos obtener el momento angular, a través de la reducción<sup>5</sup>

$$\begin{array}{ccc} SO(5) & \supset & SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\tau_1, \tau_2) & & L \end{array} \quad (3.29)$$

En donde se tienen las correspondencias entre  $SO(5) \supset SO(3)$  como

$$\begin{array}{c|ccc} SO(5) & & & SO(3) \\ (\tau_1, \tau_2) & & & L \\ \hline 0, 0 & & 0 & \\ 1, 0 & & 2 & \\ 2, 0 & & 4 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \dots \end{array} \quad (3.30)$$

Hay que señalar que cada multiplete  $\tau$  tiene su momento angular  $L$  en cada una de las líneas espectrales

Pero nuestro interés por ahora es conocer la estructura externa del núcleo. Y nos quedaremos hasta las reducciones  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  y  $(\tau_1, \tau_2)$ .

En este caso el Hamiltoniano general (3.21) se tiene que reducir a

$$\begin{aligned} H &= (\alpha + \alpha') \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + 5) - \mathcal{C}_{2U_B(6)}] \\ &+ (\beta + \beta') \mathcal{C}_{2SO_B(6)} + \gamma \mathcal{C}_{2SO_B(5)} + (\delta + \delta') \mathcal{C}_{2SO_B(3)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

<sup>4</sup>Podemos encontrar en más detalle en el apéndice (A.10) más claramente como se utiliza esta regla.

<sup>5</sup>Esto esta bien estudiado y podemos encontrarlo en distintas referencias como en [27].

Tabla 3.4: Representaciones de las energías más bajas de un núcleo par-par donde  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu$ 

$B$	$B$
$[\mathcal{N} - i, i]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$
$[\mathcal{N}, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$
$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$

En el Hamiltoniano general (3.21) teníamos siete términos, en donde a cada término , representa una interacción. Como no tenemos fermión extra  $\alpha = \alpha'$  es decir el primer coeficiente asociado al primer término del Hamiltoniano del núcleo par-par (3.31) se escribe como  $(\alpha + \alpha')$ , se interpreta como la interacción de los bosones entre si, aquí exactamente hacemos un acoplamiento de los dos sabores de bosones. Sin embargo bajo esa simetría se sabe que hay más niveles energéticos entonces nos vamos a las reducciones de  $SO_B(6)$  en donde aquí se podría ver la interacción debida al protón extra con los bosones pero en este caso no hay ese tipo de interacción por lo tanto el coeficiente asociado a nuestro segundo término es  $(\beta + \beta')$  y si profundizamos en la estructura externa llegamos al grupo  $SO(5)$  este nos dice simplemente cuantos niveles energéticos  $(\tau_1, \tau_2)$  hay para cada  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  esto nos permite visualizar la distribución de energías del espectro del núcleo, posteriormente el último término de nuestro Hamiltoniano de núcleo par-par tenemos que ver la interacción debido al espín del neutrón. Si no tenemos, como es este caso, solo vamos a tener momentos angulares enteros, así el coeficiente asociado al último término de este Hamiltoniano sera  $(\delta + \delta')$ . Los valores de estos coeficientes son solo ajustes del espectro, son valores constantes para cada cuarteto supersimétrico. Lo relevante de esta formulación es que podemos expresar las interacciones de nuestros bosones y fermiones a través de invariantes de Casimir de manera puramente analítica. Esto no siempre suele suceder siempre en la mecánica cuántica cuando tratamos de estudiar un sistema de partículas y acopladas. Nuestras energías simplemente son los valores propios de nuestro Hamiltoniano. Estos se determinan a través de métodos algebraicos de teoría de grupos de manera sencilla.

$$\begin{aligned}
E &= (\alpha + \alpha')i(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i + 1) \\
&+ (\beta + \beta')[\Sigma_1(\Sigma_1 + 4) + \Sigma_2(\Sigma_2 + 2) + \Sigma_3^2] \\
&+ \gamma[\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + (\delta + \delta')L(L + 1)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Si queremos expresar un Hamiltoniano más general sin incluir tantas interacciones, podemos utilizar una interacción en la cual siempre esta presente en la física nuclear, que es la interacción cuadripolar-cuadripolar  $\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}$ . Por lo que es necesario introducir a el Hamiltoniano esta interacción. En este trabajo podemos expresar el Hamiltoniano en términos de invariantes de Casimir a través de la forma:

$$H = -k\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q} = -k(C_{2SO(6)} - C_{2SO(5)}). \tag{3.33}$$

Este tipo de interacción es atractiva por lo que  $k$  debe ser positiva. Las energías son los eigenvalores de este Hamiltoniano y para nosotros esto corresponde a los eigenvalores de los operadores de Casimir. Sus

energías son:

$$E = \langle H \rangle = -k[\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] - \tau_1(\tau_1 + 3) - \tau_2(\tau_2 + 1) \quad (3.34)$$

Sin embargo este Hamiltoniano no distingue las energías predominantes, si tomamos en cuenta las escalas de energía de los núcleos involucrados par-par, par-impar, impar-impar, las configuraciones dominantes del espectro van a ser las simétricas. Por lo que debemos de separar las simétricas y no simétricas a partir de una interacción que se llama *interacción de Majorana*<sup>6</sup>

$$\alpha \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{N}}((\hat{\mathcal{N}} + 5) - C_{2U(6)}) \quad (3.35)$$

donde favorece las representaciones simétricas. Esta interacción separa estos dos grupos de estados (3.26), es una interacción repulsiva entonces favorece los estados simétricos sobre los no simétricos con respecto al grupo  $U(6)$ . En el espectro, las líneas espectrales de los estados no simétricos son empujadas hacia energías más altas y solo se quedan abajo los estados que corresponden a IBM-1.

Así podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$H = \alpha \frac{1}{2} (\hat{\mathcal{N}}((\hat{\mathcal{N}} + 5) - C_{2U(6)}) - k(C_{2O(6)} - C_{2O(5)}). \quad (3.36)$$

Esto justamente explica porque en el Hamiltoniano (3.31) el primer término tiene dependencias de  $\hat{\mathcal{N}}$ , estos valores comúnmente en la literatura son omitidos ya que en la práctica simplemente mueven todas las líneas espectrales y no nos dice mucho, sin embargo sí esta presente. Esta contribución en las energías con otras palabras, se podía entender como establecer el origen del sistema de referencia en un espectro. La estructura de los espectros de excitación se construyen con respecto al estado base.

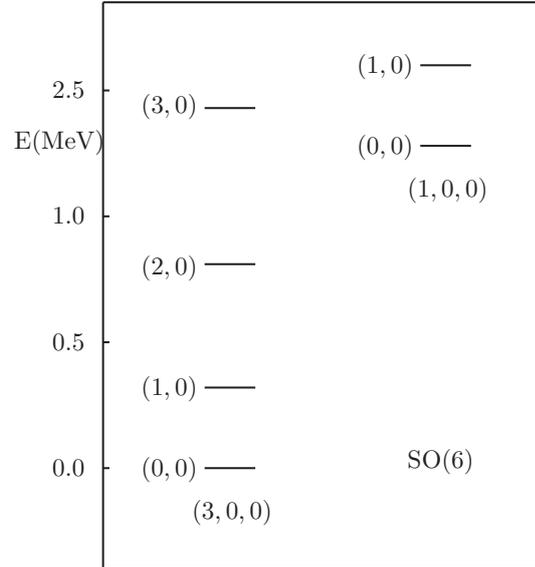


Figura 3.1: Espectro de energías de un núcleo par-par con una simetría  $SO(6)$  y con  $N = 3$ . Los números cuánticos  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\Sigma, 0, 0)$  son mostrados debajo de cada banda, los bosones senioridad  $(\tau_1, \tau_2) = (\tau, 0)$  se muestra en la izquierda.

<sup>6</sup>Podemos ver una discusión en más detalle en el apéndice A.6.

### 3.3.2 Simetrías dinámicas en núcleos con protón impar

Cuando tenemos un núcleo con el número de protones impar podemos construir la misma cadena (3.23) pero ahora le vamos a agregar un grado de libertad fermiónico  $[1]_\pi$ . Posteriormente se tendrá que reducir los acoplamientos de esta nueva cadena. El mecanismo de reducción es el mismo dentro del caso anterior par-par, una diferencia de esta estructura algebraica es el acoplamiento de  $U(6)_B \otimes U_{F_\pi}(4)$ , donde este acoplamiento nos llevará a las representaciones  $[\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3] \otimes [1]_\pi$  y este acoplado son las  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ya vistas anteriormente. Solo que aquí las sigmas minúsculas ya contienen información del acoplamiento del fermión extra de protón y las sigmas mayúsculas no contienen información del acoplamiento del fermión extra. Cabe mencionar que aquí el grupo simétrico acoplado recibe comúnmente el nombre de  $Spin(6)$  en donde en la mayoría de la literatura relacionada al tema utilizan mucho el grupo  $Spin(6)$  y su reducción  $Spin(5)$ .

En los núcleos con protón impar tenemos un fermión de protón  $M_\pi = 1$  y  $M_\nu = 0$  entonces  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi - 1$  y  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu$  la cadena (3.17) se reduce

$$\begin{array}{ccccccc}
U_{B_\nu}(6) & \otimes & U_{B_\pi}(6) & \otimes & U_{F_\pi}(4) & \supset & U_B(6) & \otimes & U_{F_\pi}(4) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
[\mathcal{N}_\nu] & & [\mathcal{N}_\pi - 1] & & [1]_\pi & & [\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 1 - i, i] & & [1]_\pi \\
& & & & & & \supset & & \\
& & & & & & SO_B(6) & \otimes & SU_{F_\pi}(4) \\
& & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & & & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & [1]_\pi \\
& & & & & & \supset & & \\
& & & & & & Spin(6) & & \\
& & & & & & \downarrow & & \\
& & & & & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & & \\
& & & & & & \supset & & \\
& & & & & & Spin(5) & & \\
& & & & & & \downarrow & & \\
& & & & & & (\tau_1, \tau_2) & & \\
& & & & & & \supset & & \\
& & & & & & Spin(3) & & \\
& & & & & & \downarrow & & \\
& & & & & & J & & 
\end{array} \tag{3.37}$$

Por lo tanto la función de onda de un núcleo con protón impar en el contexto supersimétrico adquiere la forma:

$$|\Psi_{op}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i - 1, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); J\rangle \tag{3.38}$$

La diferencia que vamos a encontrar a comparación con el núcleo del caso anterior es que ahora tenemos que ver como es que este protón extra va a modificar la estructura que teníamos. Nuestro acoplamiento de bosones expresado en términos de  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ , tenemos que adicionarle la presencia de un protón  $[1]_\pi$ . Esto simplemente se hace con el acoplamiento de  $SO_B(6) \otimes SU_{F_\pi}(4)$ . Para determinar sus representaciones asociadas a este acoplamiento comúnmente se utiliza el el isomorfismo que posee  $SO(6) \simeq SU(4)$

$$\begin{array}{ccc}
SO(6) & \simeq & SU(4) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & [n_1, n_2, n_3]
\end{array} \tag{3.39}$$

dado por las reglas

$$\begin{aligned} n_1 &= \Sigma_1 + \Sigma_2 & \Sigma_1 &= \frac{1}{2}(n_1 + n_2 - n_3) \\ n_2 &= \Sigma_1 - \Sigma_3 & \Sigma_2 &= \frac{1}{2}(n_1 - n_2 + n_3) \\ n_3 &= \Sigma_2 - \Sigma_3 & \Sigma_3 &= \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - n_3) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Así dentro de  $SU(4)$  haciendo el acoplamiento con el fermión de protón extra tomando de nuevo los casos  $i = 0$  donde  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\Sigma, 0, 0)$  según (3.25) y para  $i = 1$  donde  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\Sigma, 1, 0)$ , cambiandonos a  $SU(4)$  usando (3.40) obtenemos que

$$\begin{aligned} SU(4) : \quad [\Sigma, \Sigma, 0] \otimes [1, 0, 0] &= [\Sigma + 1, \Sigma, 0] \oplus [\Sigma, \Sigma, 1] \\ [\Sigma + 1, \Sigma, 1] \otimes [1, 0, 0] &= [\Sigma + 2, \Sigma, 1] \oplus [\Sigma + 1, \Sigma + 1, 1] \\ &\oplus [\Sigma + 1, \Sigma, 2] \oplus [\Sigma + 1, \Sigma, 1] \end{aligned}$$

y ahora volvemos a regresarnos a  $SO(6)$  usando (3.40) y el acoplamiento ya se encuentra dentro de  $Spin(6)$

$$\begin{aligned} SO(6) : (\Sigma, 0, 0) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi &= \left(\Sigma + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ (\Sigma, 1, 0) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi &= \left(\Sigma + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\Sigma + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &\oplus \left(\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Una vez que ya tenemos las representaciones del grupo  $Spin(6)$  en donde estas se expresan con las etiquetas  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  procedemos a la reducción  $SO(5)$  a través de la regla ya vista en (3.28). Aquí vamos a tener valores semienteros de  $(\tau_1, \tau_2)$ . Ahora como ya tenemos acoplado un fermión extra vamos a llamar al grupo  $Spin(5)$ .

Si nos interesa tener información interna de nuestro núcleo podemos acudir al momento angular, como ahora ya tenemos acoplamientos con un fermión extra ahora vamos a tener valores semienteros para los números cuánticos de  $J$  como es de esperar.

$$\begin{array}{ccc} Spin(5) & \supset & Spin(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\tau_1, \tau_2) & & J \end{array} \quad (3.41)$$

En donde se tienen las correspondencias entre  $Spin(5) \supset Spin(3)$  como

$Spin(5)$ $(\tau_1, \tau_2)$	$Spin(3)$ $J$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
$\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\dots$

(3.42)

Cabe mencionar cada multiplete  $(\tau_1, \tau_2)$  tiene su momento angular  $J$  y en este caso particular tiene valores semienteros.

Tabla 3.5: Representaciones de las energías más bajas de un núcleo con protón impar donde  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu$ 

$B$	$B$	$BF_\pi$
$[\mathcal{N} - 1 - i, i]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
$[\mathcal{N} - 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
	$(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
	$\vdots$	
$[\mathcal{N} - 2, 1]$	$(\mathcal{N} - 2, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

El acoplamiento del protón extra hace que el Hamiltoniano del núcleo par-par (3.31) tengamos que añadirle un término extra y es la interacción contribuida del grupo  $Spin(6)$  a si los coeficientes ( $\beta \neq \beta'$ ) y además  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi - 1$  de esta manera  $j = i, k = 0$  en (3.20), como no tenemos neutrones  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu$  y por lo tanto vamos a tener un Hamiltoniano con 5 términos escrito de la forma:

$$\begin{aligned}
H = & (\alpha + \alpha') \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + 5) - \mathcal{C}_{2UB(6)}] + \\
& + \beta \mathcal{C}_{2SO_B(6)} + \beta' \mathcal{C}_{2Spin(6)} + \gamma \mathcal{C}_{2Spin(5)} + (\delta + \delta') \mathcal{C}_{2Spin(3)}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

con energías

$$\begin{aligned}
E = & (\alpha + \alpha') i (\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i) + \beta [(\Sigma_1(\Sigma_1 + 4) + \Sigma_2(\Sigma_2 + 2) + \Sigma_3^2)] + \\
& + \beta' [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] + \gamma [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2 + 1] + (\delta + \delta') J(J + 1)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

El primer término de energías nos da la contribución de la interacción puramente bosónica, el segundo y tercero nos son las energías de las bandas, el tercer término corresponde solo a las energías que surgen del acoplamiento del protón extra, estos como sabemos pueden ser simétricos y no simétricos, el cuarto término corresponde a los desacoplamientos de las energías almacenadas sobre las bandas y el último término corresponden a las energías debidas al momento angular.

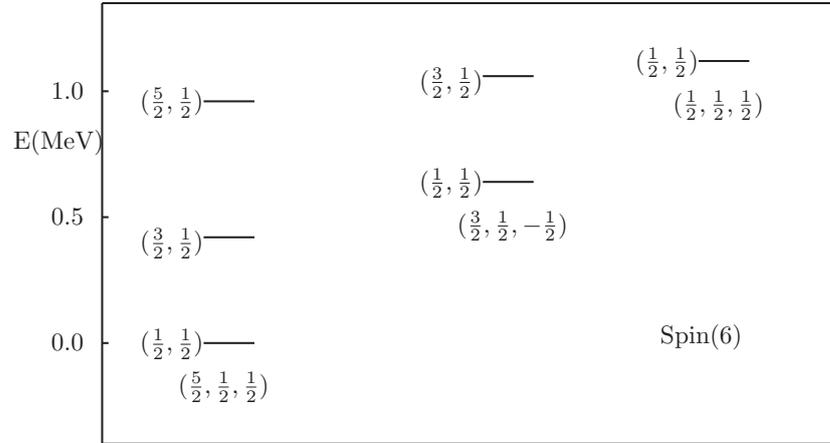


Figura 3.2:

Espectro de energías de un núcleo con simetría  $Spin(6)$  con  $N = 2$  y  $M = 1$ . Los números cuánticos  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  están mostrados debajo de cada banda, las etiquetas  $(\tau_1, \tau_2)$  están mostradas en la parte izquierda .

### 3.3.3 Simetrías dinámicas en núcleos con neutrón impar

Aquí vamos a tener núcleos constituidos por bosones de neutrón  $[N_\nu]$  y de protón  $[N_\pi]$  acoplados con un neutrón  $[1]_\nu$ . En este caso, el espacio de fermión se descompone en una parte pseudo-orbital con  $l = 0, 2$  y una parte pseudo-espín con  $s = 1/2$  correspondiente a la reducción

$$U_{F_\nu}(12) \supset U_{F_\nu}(6) \otimes U_{F_\nu}(2) \quad (3.45)$$

Ya que el momento angular pseudo orbital  $l$  tiene los mismos valores que el momento angular que los bosones  $s$ - y  $d$ - del IBM, es claro que la parte pseudo-orbital puede combinarse con las tres simetrías del IBM en una simetría boson-fermion.

$$U_B(6) \supset \begin{cases} U_B(5) \\ SU_B(3) \\ SO_B(6) \end{cases} \quad (3.46)$$

El caso en las cuales los bosones tienen la simetría  $SO(6)$  es de nuestro particular interés, ya que la paridad negativa de los estados en el Pt con un neutrón ocupan las órbitas  $3p_{\frac{1}{2}}$ ,  $3p_{\frac{3}{2}}$  y  $3f_{\frac{5}{2}}$  han sido sugeridos como ejemplos experimentales de simetrías multi-j bosón-fermión.

En los núcleos con neutrón impar tenemos un fermión de neutrón  $M_\nu = 1$  y ningún fermión de protón extra  $M_\pi = 0$  entonces se tiene que  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi$  y además  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu - 1$  por lo que la cadena general (3.17) se reduce a

$$\begin{array}{ccccccc} U_{B_\nu}(6) & \otimes & U_{B_\pi}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(12) & \supset & U_B(6) & \otimes & U_{F_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}_\nu - 1] & & [\mathcal{N}_\pi] & & [1]_\nu & & [\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 1 - i, i] & & [1]_\nu & & [1]_\nu \\ & & & & & & \supset & & & & \\ & & & & & & U_{BF_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & [\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - j, j - k, k] & & [1]_\nu & & \\ & & & & & & \supset & & & & \\ & & & & & & SO_{BF_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & [1]_\nu & & \\ & & & & & & \supset & & & & \\ & & & & & & SO_{BF_\nu}(5) & \otimes & U_{F_\nu}(2) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & (\tau_1, \tau_2) & & [1]_\nu & & \\ & & & & & & \supset & & & & \\ & & & & & & SO_{BF_\nu}(3) & \otimes & SU_{F_\nu}(2) & & \\ & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & L & & s & & \\ & & & & & & \supset & & & & \\ & & & & & & SU(2) & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & J & & & & \end{array} \quad (3.47)$$

Por lo tanto la función de onda de un núcleo con neutrón impar en el contexto supersimétrico adquiere la forma:

$$|\Psi_{\text{on}}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i - 1, i][1]_\nu; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3); (\tau_1, \tau_2); L, (\frac{1}{2}); J\rangle \quad (3.48)$$

En este tipo de núcleos vamos a surgir otra interacción que debemos que considerar, es la interacción debida a un neutrón. Esto lo podemos observar en la cadena (3.47) cuando tenemos que acoplar el acoplamiento puramente bosónico que tiene la simetría  $U(6)_B$  con el neutrón extra. Esto lo podemos hacer justamente con el acoplamiento  $U_{BF_\nu}(6)$  visto en (3.20)

Aquí tenemos de nuevo dos casos con  $i = 0$  e  $i = 1$  aunque podemos seguir con  $i = 0, 1, 2 \dots$

$$\begin{aligned}
i = 0 \quad [\mathcal{N} - 1]_B \otimes [1]_{F_\nu} &= [\mathcal{N}, 0, 0]_{BF_\nu} \oplus [\mathcal{N} - 1, 1, 0]_{BF_\nu} \\
i = 1 \quad [\mathcal{N} - 2, 1]_B \otimes [1]_{F_\nu} &= [\mathcal{N} - 1, 1, 0]_{BF_\nu} \oplus [\mathcal{N} - 2, 2, 0]_{BF_\nu} \oplus [\mathcal{N} - 2, 1, 1]_{BF_\nu}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Tabla 3.6: Representaciones de las energías más bajas de un núcleo con neutrón impar donde  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu$

$B$	$BF_\nu$	$BF_\nu$
$[\mathcal{N} - 1 - i, i]$	$[\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - j, j - k, k]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
$[\mathcal{N} - 1, 0]$	$[\mathcal{N}, 0, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$
	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
$[\mathcal{N} - 2, 1]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$
	$[\mathcal{N} - 2, 2, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 2, 0)$ $(\mathcal{N} - 3, 1, 0)$ $\vdots$
	$[\mathcal{N} - 2, 1, 1]$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$

Posteriormente para obtener las reducciones subsecuentes tenemos que utilizar las mismas técnicas vistas en los casos anteriores. Se puede hacer énfasis que en esta situación que  $SO_{BF_\nu}(6) = Spin(6)$  debido a que ya se tiene acoplado un fermión y por lo tanto  $SO_{BF_\nu}(5) = Spin(5)$  y  $SO_{BF_\nu}(3) = Spin(3)$ , pero usaremos la notación que tenemos en la cadena (3.47) para referirnos a núcleos con neutrón impar.

Veamos ahora un ejemplo de un espectro de un núcleo impar-par para  $N = 2$  and  $M = 1$  (véase la figura (3.3)).<sup>7</sup>

Debido a que ahora ya vamos a tener interacciones entre puros bosones correspondientes al grupo  $U_B(6)$  y bosones con un neutrón tenemos un término asociado al grupo  $U_{BF_\nu}(6)$  y además debido a que  $SO_{BF_\nu}(6) = Spin(6)$  y además el espín del neutrón empezara a tomar relevancia por lo tanto nuestro

<sup>7</sup>El momento angular  $L$  de un núcleo impar-par con simetría  $U(6) \otimes U(2)$  que pertenece a cada multiplete  $(\tau_1, \tau_2)$ . Para  $N = 2$  and  $M = 1$  todos los niveles son dobletes con  $J = L \pm \frac{1}{2}$  con la excepción de  $L = 0$  de los cuales solamente  $J = \frac{1}{2}$

Hamiltoniano general (3.21) adquiere el aspecto de

$$H = \alpha \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + 5) - \mathcal{C}_{2U_B(6)}] + \alpha' \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + \hat{N}_\rho)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + \hat{N}_\rho + 5) - \mathcal{C}_{2U_{BF_\nu}(6)}] \\ + (\beta + \beta') \mathcal{C}_{2SO_{BF_\nu}(6)} + \gamma \mathcal{C}_{2SO_{BF_\nu}(5)} + \delta \mathcal{C}_{2SO_{BF_\nu}(3)} + \delta' \mathcal{C}_{2SU(2)} \quad (3.50)$$

con energías

$$E = \alpha i(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i) + \alpha' [j(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - j + 1) + k(j - k + 1)] \\ + (\beta + \beta') [\Sigma_1(\Sigma_1 + 4) + \Sigma_2(\Sigma_2 + 2) + \Sigma_3^2] + \gamma [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \delta L(L + 1) + \delta' J(J + 1) \quad (3.51)$$

Aquí nuestro Hamiltoniano tiene más términos que el caso anterior, tiene seis términos. El primer término es el correspondiente a la interacción puramente bosónica, el segundo término surge de la interacción del neutrón con los bosones, el tercer término corresponde a las bandas energéticas que posee este tipo de núcleo, el cuarto término corresponde al desacoplamiento de las energías de cada banda y el quinto corresponde a la estructura interna del núcleo, el momento angular correspondiente y el último término es simplemente el resultado de acoplar el espín del neutron extra.

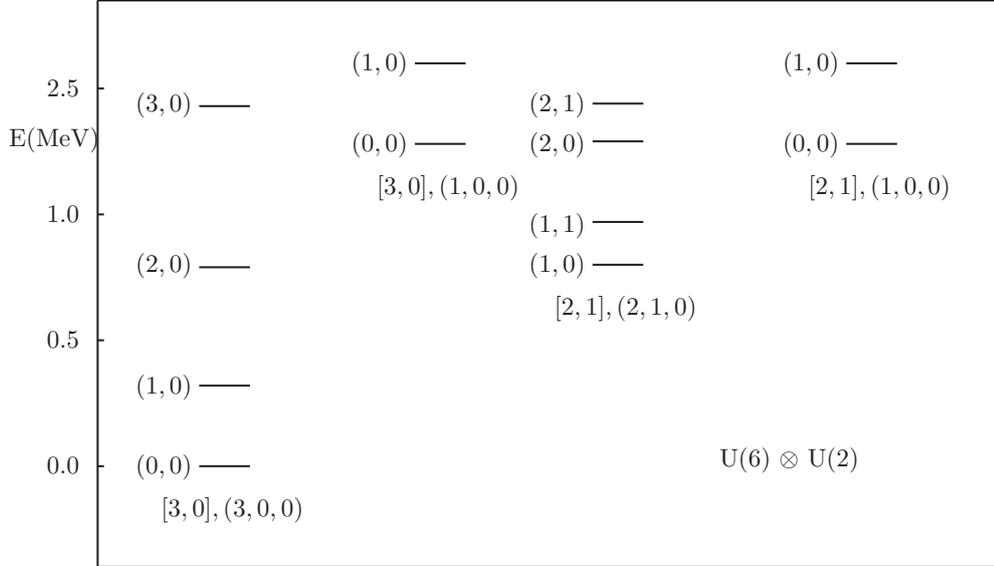


Figura 3.3:

Espectro de energías de un núcleo impar-par con simetría  $U(6) \otimes U(2)$  para  $N = 2$  and  $M = 1$ . Los números cuánticos  $[N_1, N_2]$ ,  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  están debajo de cada banda, las etiquetas  $(\tau_1, \tau_2)$  están mostradas en la parte izquierda de la banda.

### 3.3.4 Simetrías dinámicas en núcleos impar-impar

Esta estructura es la más complicada de todas, es una combinación de todos los casos interiores. Es interesante notar que en cuestiones prácticas para la determinación de ciertos coeficientes que posee este hamiltoniano se determinan a partir de las estructuras anteriores. Aquí vamos a agregar dos fermiones extras uno de protón  $[1]_{F_\pi}$  y otro de neutron  $[1]_{F_\nu}$ , al par de bosones  $[B]$ .

En los núcleos con impar-impar tenemos un fermión de neutrón  $M_\nu = 1$  y un fermión de protón  $M_\pi = 1$  y además  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi - 1$   $N_\nu = \mathcal{N}_\nu - 1$  la cadena (3.17) se reduce a

$$\begin{array}{ccccccc}
U_{B_\nu}(6) & \otimes & U_{B_\pi}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(12) & \otimes & U_{F_\pi}(4) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
[\mathcal{N}_\nu - 1] & & [\mathcal{N}_\pi - 1] & & [1]_\nu & & [1]_\pi \\
& & & & \supset & & \\
& & & & U_B(6) & \otimes & U_{F_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) & \otimes & U_{F_\pi}(4) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & [\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 2 - i, i] & & [1]_\nu & & [1]_\nu & & [1]_\pi \\
& & & & \supset & & \\
& & & & U_{BF_\nu}(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) & \otimes & U_{F_\pi}(4) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & [\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 1 - j, j - k, k] & & [1]_\nu & & [1]_\pi \\
& & & & \supset & & \\
& & & & SO_{BF_\nu}(6) & \otimes & SU_{F_\pi}(4) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & [1]_\pi & & [1]_\nu \\
& & & & \supset & & \\
& & & & Spin(6) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & & [1]_\nu \\
& & & & \supset & & \\
& & & & Spin(5) & \otimes & U_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & (\tau_1, \tau_2) & & [1]_\nu \\
& & & & \supset & & \\
& & & & Spin(3) & \otimes & SU_{F_\nu}(2) \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & J & & s \\
& & & & \supset & & \\
& & & & SU(2) & & \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & L & & 
\end{array} \tag{3.52}$$

Por lo tanto la función de onda de un núcleo impar-impar en el contexto supersimétrico adquiere la forma:

$$\boxed{|\Psi_{\text{oo}}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i - 2, i][1]_\nu; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); J, \frac{1}{2}; L\rangle} \tag{3.53}$$

Veamos ahora los acoplamientos asociados a este tipo de estructura. Para el primer acoplamiento del par de bosones  $[B]$  con el fermión extra de neutrón  $[1]_{F_\nu}$  tenemos

$$\begin{aligned}
i = 0 \quad & [\mathcal{N} - 2]_B \otimes [1]_{F_\nu} = [N_1, N_2, N_3] = [\mathcal{N} - 1, 0, 0]_{BF_\nu} \oplus [\mathcal{N} - 2, 1, 0]_{BF_\nu} \\
i = 1 \quad & [\mathcal{N} - 3, 1]_B \otimes [1]_{F_\nu} = [N_1, N_2, N_3] = [\mathcal{N} - 2, 1, 0]_{BF_\nu} \oplus [\mathcal{N} - 3, 2, 0]_{BF_\nu} \oplus [\mathcal{N} - 3, 1, 1]_{BF_\nu}
\end{aligned}$$

Ahora si nos interesa es la reducción de  $U(6) \supset SO(6)$  podemos utilizar los resultados anteriores

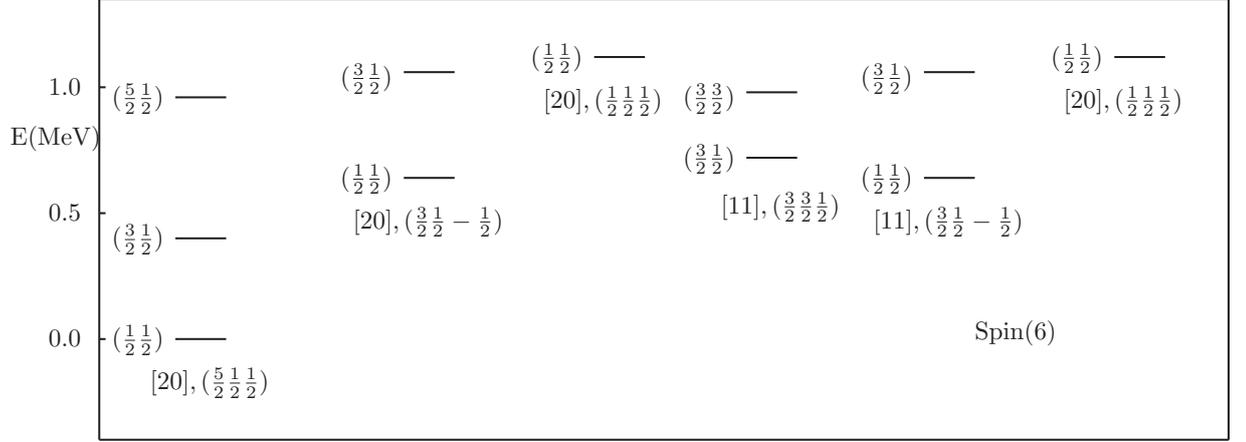


Figura 3.4:

Espectro de energías de un núcleo impar-impar con simetría  $Spin(6)$  para  $N = 1$  y  $M_\nu = M_\pi = 1$ . Los números cuánticos  $[N_1, N_2]$ ,  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  se muestran debajo de cada banda, las etiquetas  $(\tau_1, \tau_2)$  son mostrados en la parte izquierda de la banda .

$$\begin{array}{ccc}
 U_{BF_\nu}(6) & \supset & SO_{BF_\nu}(6) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [N_1, N_2, N_3]_{BF_\nu} & & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)_{BF_\nu} \\
 \\ 
 [\mathcal{N} - 1, 0, 0]_{BF_\nu} & & (\mathcal{N} - 1, 0, 0), & (\mathcal{N} - 3, 0, 0) & \dots \\
 [\mathcal{N} - 2, 1, 0]_{BF_\nu} & & (\mathcal{N} - 2, 1, 0), & (\mathcal{N} - 3, 0, 0) & \dots \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \dots
 \end{array} \tag{3.54}$$

Ahora el siguiente acoplamiento importante es el acoplamiento de bosones con el par de fermiones<sup>8</sup> a través de

$$\begin{array}{ccc}
 SO_{BF_\nu}(6) & \otimes & SU_{F_\pi}(4) & \supset & Spin(6)_{BF} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)_{BF_\nu} & & [1]_{F_\pi} & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_{BF}
 \end{array} \tag{3.55}$$

de esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
 [\Sigma, 0, 0]_{BF_\nu} \otimes (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{F_\pi} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_{BF_\nu F_\pi} = (\Sigma + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \\
 [\Sigma, 1, 0]_{BF_\nu} \otimes (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{F_\pi} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_{BF_\nu F_\pi} = (\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \oplus (\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \\
 &\oplus (\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \oplus (\Sigma - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

Un ejemplo sencillo donde se puede ver este acoplamiento es el caso del núcleo  ${}^{196}_{79}Au_{117}$ . (Vease la figura siguiente<sup>9</sup>)

<sup>8</sup>Recordemos que la representación de un fermión en  $SU(4)$  en  $SO(6)$  es  $[1]_{SU(4)} \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{SO(6)}$

<sup>9</sup>Aquí tenemos tres bosones de neutrón  $B_\nu = 3$ , un bosón de protón  $B_\pi = 1$ , un fermión de protón  $F_\pi = 1$  y un fermión de neutrón  $F_\nu = 1$  y así podemos obtener  $\mathcal{N}_\pi = N_\pi + M_\pi = 2$  y  $\mathcal{N}_\nu = N_\nu + M_\nu = 4$  por lo tanto  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi = 6$

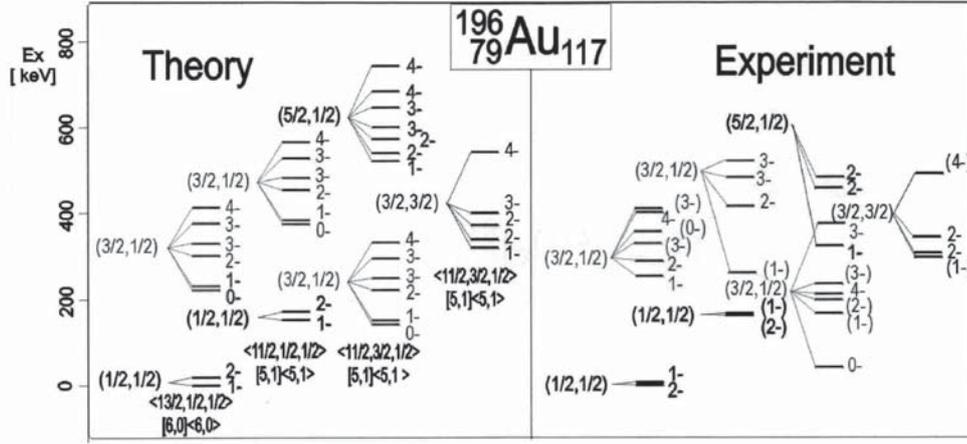


Figura 3.5: Comparación entre el espectro de energías de niveles con paridad negativa de un núcleo impar-impar  $^{196}\text{Au}$  y el obtenido con la supersimetría  $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$  [28].

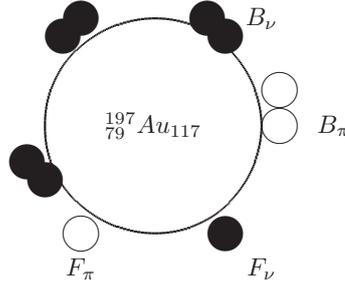


Figura 3.6 Caricatura del núcleo  $^{197}\text{Au}_{117}$  en el esquema supersimétrico.

El Hamiltoniano corresponde al caso general (3.21) el cual lo podemos expresar como

$$\begin{aligned}
 H = & \alpha \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + 5) - \mathcal{C}_{2UB(6)}] + \alpha' \frac{1}{2} [(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + N_\rho)(\hat{N}_\nu + \hat{N}_\pi + \hat{N}_\rho + 5) - \mathcal{C}_{2UBF_\nu(6)}] \\
 & + \beta \mathcal{C}_{2SO_{BF_\nu}(6)} + \beta' \mathcal{C}_{2Spin(6)} + \gamma \mathcal{C}_{2Spin(5)} + \delta \mathcal{C}_{2Spin(3)} + \delta' \mathcal{C}_{2SU(2)}
 \end{aligned}$$

Aquí vamos a tener energías correspondientes a todas la interacciones posibles que pueda haber en este contexto, debemos utilizar la forma: general de las energías (3.22)

Tabla 3.7: Representaciones de las energías más bajas de un núcleo impar-impar donde  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ 

$B$	$BF_\nu$	$BF_\nu$	$BF$
$[\mathcal{N} - 2 - i, i]$	$[\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 1 - j, j - k, k]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
$[\mathcal{N} - 2, 0]$	$[\mathcal{N} - 1, 0, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
		$(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
		$\vdots$	
	$[\mathcal{N} - 2, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
		$(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[\mathcal{N} - 3, 1]$	$[\mathcal{N} - 2, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), (\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$[\mathcal{N} - 3, 2, 0]$	$\dots$	$\dots$
	$[\mathcal{N} - 3, 1, 1]$	$\dots$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned}
E &= \alpha i[(N_\nu + N_\pi - i + 1) + \alpha' [j(N_\nu + N_\pi + N_\rho - j + 1) + k(j - k + 1)]] \\
&+ \beta[\Sigma_1(\Sigma_1 + 4) + \Sigma_2(\Sigma_2 + 2) + \Sigma_3^2] + \beta'[\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] \\
&+ \gamma[\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \delta J(J + 1) + \delta' L(L + 1)
\end{aligned}$$

Los estados bases clasificados por  $[N_1, N_2]$ ,  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ ,  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ,  $J$  y  $L$  las cuales son las etiquetas de las representaciones irreducibles de grupos bosón-fermión  $U_{BF_\nu}(6)$ ,  $SO_{BF_\nu}(6)$ ,  $Spin(6)$ ,  $Spin(5)$ ,  $Spin(3)$ , y  $SU(2)$ . En este caso el momento angular total esta representado como  $\vec{L} = \vec{J} + \vec{s}$  ( $L$  es entero y  $J$  es semientero). La región de los núcleos Os-Ir-Pt-Au donde el núcleo par-par de Pt se describen bien con el límite  $SO(6)$  y el neutrón impar ocupan principalmente las paridades negativas de las orbitas  $3p_{1/2}$ ,  $3p_{3/2}$  y  $3f_{5/2}$ . En la figura 3.5 vemos el espectro del núcleo  $^{196}\text{Au}$ .

### 3.4 Supersimetría en núcleos pesados

La dinámica supersimétrica nuclear tiene Hamiltonianos muy característicos las cuales no se pueden aplicar a todas las regiones de la tabla nuclear, sin embargo se han encontrado en varios núcleos evidencia experimental que confirma la supersimetría en los núcleos [17, 29].

Especialmente en la región de masas de  $A \sim 190$  ha sido una rica fuente de evidencia empírica para la existencia de (super)simetrías en el núcleo. El núcleo par-par  $^{196}\text{Pt}$  es el ejemplo estándar que sirve para el límite  $SO(6)$  del IBM [30].

Los núcleos con protón impar  $^{191,193}\text{Ir}$  y  $^{193,195}\text{Au}$  fueron sugeridos como ejemplos de límite  $Spin(6)$  [26], en donde el protón impar tiene permitido ocupar la órbita  $2d_{3/2}$  de la capa de protones 50-82,

mientras que el par de núcleos  $^{190}\text{Os} - ^{191}\text{Ir}$ ,  $^{192}\text{Os} - ^{193}\text{Ir}$ ,  $^{192}\text{Pt} - ^{193}\text{Au}$  and  $^{194}\text{Pt} - ^{195}\text{Au}$  han sido analizados como ejemplos de supersimetrías  $U(6/4)$  [31]-[32].

El núcleo con neutrón impar  $^{195}\text{Pt}$ , junto con  $^{194}\text{Pt}$ , que fue estudiado en términos de una supersimetría  $U(6/12)$  [33], en donde el neutrón impar ocupa las órbitas  $3p_{1/2}$ ,  $3p_{3/2}$  y  $2f_{5/2}$  de la capa de neutrones 82-126. En este casos el momento angular del neutrón se desacopla en un parte pseudo-orbital con  $\tilde{l} = 0, 2$  y una parte pseudo-espín con  $\tilde{s} = \frac{1}{2}$ . Este esquema supersimétrico surge de la equivalencia entre los valores del momento angular de la parte pseudo-orbital y de aquellos bosones del IBM.

El concepto de SUSY nuclear se extendió en el año de 1985 para incluir los grados de libertad del protón y neutrón [34].

En este caso los supermultipletes consisten de núcleos par-par, protón impar, neutrón impar e impar-impar. Los estudios espectroscópicos de núcleos pesados impar-impar son muy difíciles debido a la alta densidad de los estados. Casi 15 años después de la predicción de la gama de los núcleos impar-impar se ha demostrado experimentalmente que el espectro observado del núcleo  $^{196}\text{Au}$  es sorprendentemente similar a la teórica [35]. En la actualidad, la mejor evidencia experimental de un cuarteto supersimétrico esta proporcionado por los núcleos  $^{194,195}\text{Pt}$  y  $^{195,196}\text{Au}$  como ejemplos de una supersimetría  $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$ . Este supermultiplete se caracteriza por  $\mathcal{N}_\pi = 2$  and  $\mathcal{N}_\nu = 5$ .

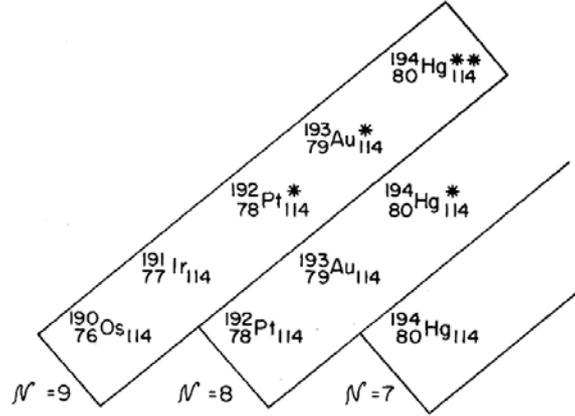


Figura 3.6: Posible multiplete supersimétrico en la región Os-Ir.  $\mathcal{N}$  denota el número total de bosones mas fermiones. Los estados con dos, tres y cuatro pares nucleones no apareados están excitados. Estos están etiquetados con una o dos asteriscos[25].

En este caso, el espectro de excitación del cuarteto supersimétrico de los núcleos Pt y Au se describen de forma simultanea por la fórmula de la energía

$$\begin{aligned}
 E = & \alpha [N_1(N_1 + 5) + N_2(N_2 + 3) + N_1(N_1 + 1)] \\
 & + \beta [\Sigma_1(\Sigma_1 + 4) + \Sigma_2(\Sigma_2 + 2) + \Sigma_3^2] \\
 & + \gamma [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] \\
 & + \delta [\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + \epsilon J(J + 1) + \eta L(L + 1) .
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  y  $\eta$  se han determinado en un ajuste simultaneo de las energías de excitación de los núcleos  $^{194,195}\text{Pt}$  and  $^{195,196}\text{Au}$  [28].

En la figura 3.7 siguiente presentamos una comparación de los espectros teóricos construidos y obtenidos experimentalmente. Quiero hacer énfasis que las bandas que están pegadas es una característica del momento angular y estos se provienen de las reducciones de los  $(\tau_1, \tau_2)$  (3.49, 3.30).

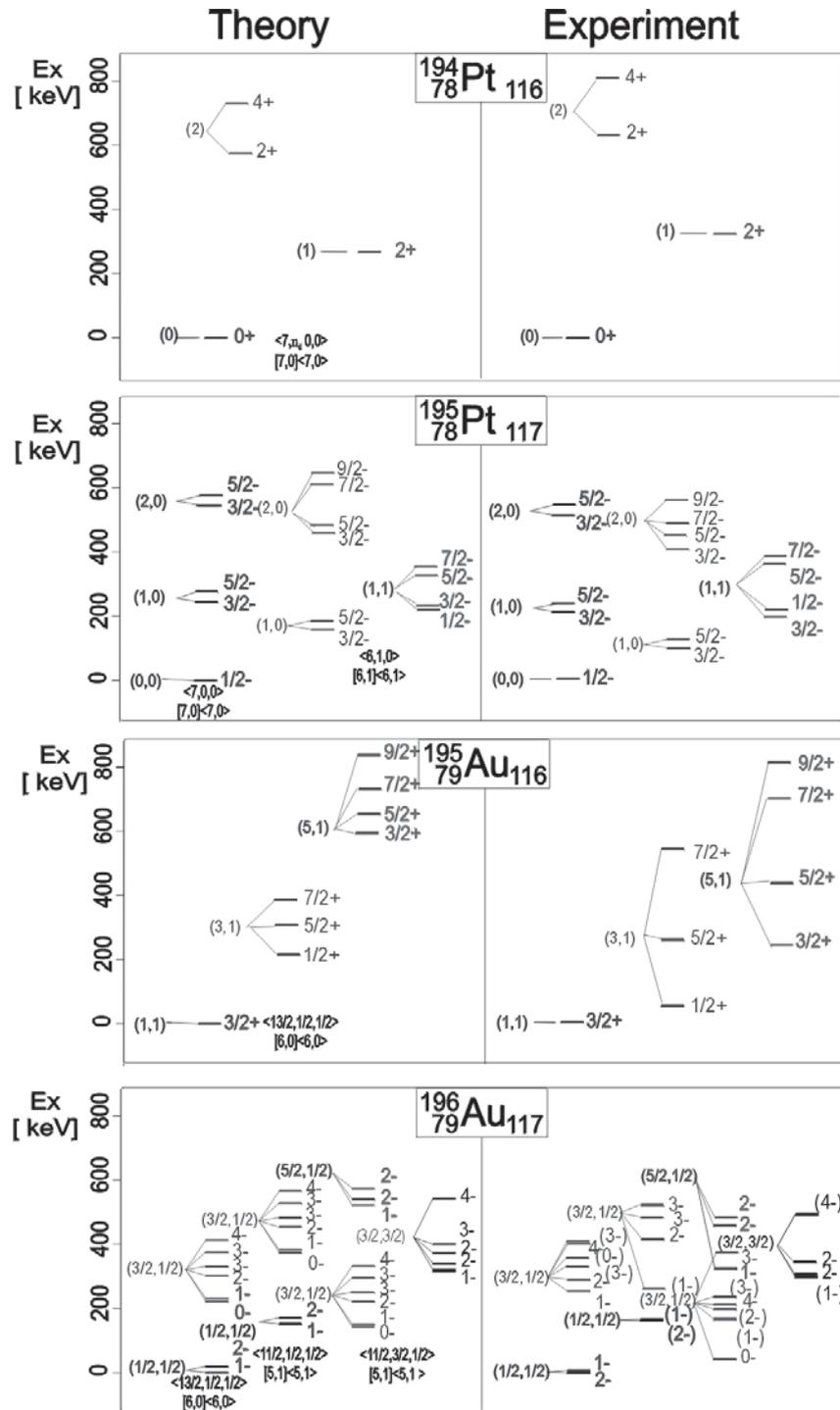


Figura 3.7: Ejemplo de un cuarteto supersimétrico con una supersimetría  $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$  [28].

## Capítulo 4

# Correlaciones entre reacciones de transferencia de nucleones

### 4.1 Introducción

En la Supersimetría Nuclear todas las funciones de onda están correlacionadas. Podemos observar del capítulo anterior que en los núcleos par-par y los núcleos con neutrón impar tenemos coincidencia de números cuánticos en los primeros niveles energéticos es decir en la parte baja del espectro de energías. (Se puede ver en la tabla 4.1). Esto sucede también para los núcleos impar-impar con protón impar. (Como se muestra en la tabla 4.2). La diferencia está en la manera en que están acoplados los bosones y fermiones.<sup>1</sup>

En la Supersimetría Nuclear solo tenemos un Hamiltoniano para describir simultáneamente los espectros de cuatro núcleos, al igual que en el Hamiltoniano hay un solo operador para describir las transiciones electromagnéticas, hay un solo operador para describir la transferencia de un protón y de un operador de transferencia de un neutrón. Es decir tenemos una sola formulación matemática que permite describir simultáneamente las propiedades de los núcleos que conforman el cuadruplete supersimétrico. Como consecuencia todas las funciones de onda están relacionadas y tenemos la ventaja de tener datos experimentales para su verificación.

Esto nos permite estudiar correlaciones existentes entre diferentes reacciones nucleares, como es el caso de transferencia de un neutrón y un protón. Por ejemplo si tenemos una reacción nuclear donde hay una transferencia de un protón a el núcleo  ${}_{78}^{195}\text{Pt}$  cuyo estado final será un núcleo  ${}_{79}^{196}\text{Au}$  (ver la figura 4.1), podemos notar que los primeros cuánticos entre  ${}_{79}^{196}\text{Au}$  y  ${}_{78}^{195}\text{Pt}$  son idénticos. Lo que sucede es que en la transferencia de un protón a un núcleo con neutrón impar  ${}_{78}^{195}\text{Pt}_{117}$  obtenemos un núcleo impar impar  ${}_{79}^{196}\text{Au}_{117}$  en donde comparten los primeros números cuánticos en los primeros niveles energéticos. Ahora por otro lado si tenemos otro proceso de transferencia de un protón a un núcleo par-par  ${}_{78}^{195}\text{Pt}_{116}$  obtenemos un núcleo con protón impar  ${}_{79}^{195}\text{Au}_{116}$  en donde también estos también comparten sus primeros números cuánticos en las energías más bajas (véase la tabla 4.1).

La única diferencia de estos 2 procesos de transferencia de protones es el acoplamiento que poseen sus respectivos estados. Pero estamos describiendo todos estos núcleos con el mismo formalismo por lo cual

---

<sup>1</sup>Por ejemplo en el caso de núcleos par-par y núcleos con neutrón impar estos comparten los primeros números cuánticos ( $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ), sin embargo para el caso par-par estos corresponden solo al acoplamiento de bosones de protón y bosones de neutrón denotado con un subíndice  $B$  y en el caso de neutrón impar corresponde al acoplamiento de este par de bosones con un neutrón extra denotado con el subíndice  $BF_\nu$ , para el caso impar-impar y con protón impar en los números cuánticos  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  correspondiente al grupo  $Spin(6)$  estos son diferentes hablando físicamente, ya que en el caso con protón impar el grupo  $Spin(6)$  no contiene información de un acoplamiento de un fermión de neutrón extra, en cambio en el impar impar se tiene acoplamientos con los dos tipos de bosones y los dos tipos de fermiones denotado con  $BF$ .

Tabla 4.1: Coincidencia de los números cuánticos correspondientes a energías más bajas en el contexto de Supersimetría Nuclear en núcleos par-par y núcleos con neutrón impar donde  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ .

<i>Núcleos par-par</i>		<i>Núcleos con neutrón impar</i>	
$U_B(6)$ $[\mathcal{N} - i, i]$	$SO_B(6)$ $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$U_{BF_\nu}(6)$ $[\mathcal{N} - j, j - k, k]$	$SO_{BF_\nu}(6)$ $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$
$[\mathcal{N}, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$	$[\mathcal{N}, 0, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$
$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$ $\vdots$

Tabla 4.2: Coincidencia de los números cuánticos correspondientes a energías más bajas en el contexto de Supersimetría Nuclear en núcleos impar-impar y núcleos con protón impar donde  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ .

<i>Núcleos impar-impar</i>			<i>Núcleos con protón impar</i>		
$U_{BF_\nu}(6)$ $[\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 1 - j, j - k, k]$	$SO_{BF_\nu}(6)$ $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$Spin(6)$ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_{BF}$	$U_B(6)$ $[\mathcal{N} - 1 - i, i]$	$SO_B(6)$ $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$Spin(6)$ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)_{BF_\pi}$
$[\mathcal{N} - 1, 0, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$ $(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$ $\vdots$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$[\mathcal{N} - 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$ $(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$[\mathcal{N} - 2, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{11}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{13}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$[\mathcal{N} - 2, 1]$	$(\mathcal{N} - 2, 1, 0)$ $(\mathcal{N} - 3, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{11}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ $(\mathcal{N} - \frac{13}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

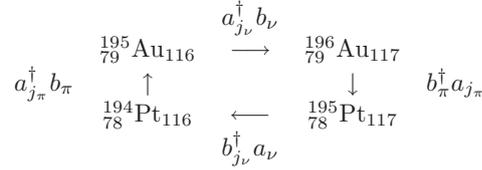
matemáticamente se puede hallar correlaciones entre estos dos procesos de transferencia.

Para la transferencia de un neutrón es un poco más sutil, porque aquí tenemos una correspondencia entre los números cuánticos de un núcleo inicial y un núcleo final. El estado base inicial y el estado final tiene los mismos números cuánticos e igual para los estados excitados. El la transferencia de un neutrón a un núcleo par-par  ${}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$  a un núcleo con neutrón impar  ${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$  y también para el caso de la transferencia de un neutrón entre el núcleo con protón impar  ${}^{195}_{79}\text{Pt}_{116}$  y el núcleo par-par  ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$  (ver la figura 4.1). El cual puede ser un decaimiento beta, donde cambiamos un neutrón por un protón.

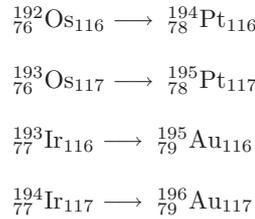
Ya que estamos hablando de los mismos neutrones y protones debe haber una correlación entre este tipo de reacciones. Por lo menos en la parte que involucra el elemento de matriz nuclear porque estamos hablando aquí del mismo neutrón y mismo protón de de las dos reacciones diferentes.

Cuando tenemos reacciones nucleares entre elementos de dos cuartetos supersimétricos podemos también encontrar correlaciones entre ellos, como es el el caso transferencias de nucleones para los casos

Figura 4.1: Ejemplo de posibles transferencias de nucleones dentro de un cuarteto supersimétrico con una supersimetría  $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$  [28].



par-par, neutrón impar, protón impar e impar-impar como se muestra



La Supersimetría Nuclear describe simultaneamente cuatro núcleos de un cuarteto supersimétrico por lo cual hay correlaciones fuertes entre las funciones de onda, tenemos un solo operador para describir las transferencias y si hay correlaciones entre los observables<sup>2</sup>, obviamente sus elementos de matriz están correlacionadas. El asunto es si podemos derivar analíticamente este hecho y es aquí donde entra el concepto de  $F$ -spin.

Se puede calcular estos elementos de matriz y obtener expresiones en términos de los números cuánticos de los estados, esto lo veremos más adelante en detalle. Pero algo importante de estos cálculos analíticos es que habiendo una reacción de transferencia entre dos núcleos y otra reacción entre otros dos núcleos podemos mostrar analíticamente otras correlaciones, se puede extender este tipo de correlaciones en otras reacciones como el que hemos visto entre dos cuartetos supersimétricos en donde la diferencia esencial entre ellos son dos protones. En este caso hay una correlación fuerte entre los números cuánticos. El problema que aquí se presenta es que los núcleos no son estables y es difícil hacer los experimentos.

En resumen podemos decir que en la Supersimetría debido a que se tiene un solo conjunto de operadores del Hamiltoniano que describen los espectros de probabilidad de transición o transferencia lo relevante es que las propabilidades de estos elementos de matriz pueden ser obtenidos justamente con la ayuda de un factor que multiplica a los elementos de matriz. Esto nos da una herramienta para exponer las correlaciones. Sabemos bien que todo esta correlacionado porque los cuatro núcleos son miembros de un supermultiokete entonces las funciones de onda están correlacionadas, el asunto aquí es derivar explícitamente estas correlaciones, es decir la probabilidad de una reacción en términos de la otra reacción multiplicada por un factor, en donde este factor depende de como están acopladas las funciones de onda y esto se puede a través del formalismo del  $F$ -Spin.

## 4.2 $F$ -spin generalizado

El uso de los métodos teóricos en teoría de grupos para el análisis de sistemas mecanicos-cuánticos ha sido una herramienta valiosa en términos de otorgar nuevos panoramas de los sistemas físicos dentro de la naturaleza y en términos de sus cálculos prácticos. El uso de las simetrías de los grupos en la estructura

<sup>2</sup>Me refiero a la similitud de las energías más bajas de los espectros vistos en términos del momento angular y paridad.

nuclear, ha tenido una gran historia, comenzando desde el trabajo pionero de Wigner y el uso de  $U(4)$  en la descripción de la invariancia del spin-isospin de los núcleos ligeros [36].

Muchas de las aplicaciones se han ido desarrollando desde entonces, entre ellas podemos mencionar aquí el trabajo de Racah [37] sobre la clasificación del espectro complejo y el de Elliot [38] sobre las propiedades rotacionales que posee el núcleo y su conexión con el álgebra de  $SU(3)$ . Hay varios libros que tratan este tema incluyendo uno de Moshinsky [39]. Recientemente ha surgido un interés en las técnicas a través de simetrías donde han sido desarrolladas dentro de modelos de la estructura nuclear, como el modelo de bosones interactuantes [40].

Este modelo originalmente fué desarrollado para dar una simple descripción de las propiedades de los núcleos par-par. Muchos de los aspectos teóricos del IBM nos regresan a aquellos desarrollos del modelo colectivo del núcleo introducido por Bohr y Mottelson [41]. De hecho, una forma explícita y completa de la determinación de los estados caracterizados por  $U(5) \supset SO(6) \supset SO(3)$  fué dado por Moshinsky y algunos colaboradores [42]. Muchos de esos desarrollos, las técnicas algebraicas de la teoría de grupos ha jugado un papel importante en la descripción de la estructura nuclear. Además han surgido nuevos conceptos desde aquellas investigaciones, tales como, IBM-2, IBM-3, IBM-4, Piel de Neutrón (Neutron Skin) y la Supersimetría Nuclear, las cuales predicen propiedades de diferentes núcleos.

Dentro de esas teorías, se tuvo que desarrollar nuevas técnicas analíticas, cuyo caso es el de  $F$ -spin. Esta técnica fué introducida en el modelo IBM-2 [43], que nos permite distinguir los bosones de neutrón y los bosones de protón. La existencia de dos tipos de bosones nos ofrece la posibilidad de asignar un número cuántico a ellos, el número cuántico  $F$ -spin,  $F = \frac{1}{2}$ , estos bosones pueden tener dos posibles estados,  $M_f = +\frac{1}{2}$  para protones y  $M_f = -\frac{1}{2}$  para neutrones [44].

La formulación teórica del  $F$ -spin está definida por la reducción

$$\begin{array}{ccc} U(12) & \supset & U(6) \otimes U(2) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ [N] & & [N-i, i] \quad [N-i, i] \end{array} \quad (4.1)$$

con  $F = \frac{1}{2}N - i$ .

La estructura matemática del  $F$ -spin es enteramente similar al isospin. El álgebra  $SU(2)$  del  $F$ -spin el cual es un subálgebra de  $U(2)$  donde (4.1) puede definirse por el operador diagonal  $\hat{F}_z = \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu)$  y los operadores escalón  $\hat{F}_\pm$  que transforman los bosones de protón a bosones de neutron y viceversa. El significado del  $F$ -spin y el isospin es diferente; sin embargo, el mapeo del modelo de capas hacia el IBM-2 con la simetría del isospin no necesariamente lleva al  $F$ -spin conservar el Hamiltoniano. Las correlaciones entre las diferentes reacciones de transferencia pueden ser derivadas por la generalización del concepto del  $F$ -spin que fué introducido en el modelo neutrón-protón del IBM [44]. Los eigenestados  $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$  de la supersimetría están caracterizados por la representación irreducible de las cuales surge del acoplamiento de los tres diferentes representaciones  $U(6)$ ,  $[N_\nu]$  para boson de neutrón,  $[N_\pi]$  para el boson de protón y  $[N_\rho]$  para el momento angular pseudo-orbital del neutrón impar. En la formulación del  $F$ -spin generalizado, nosotros vamos a asignar un número cuántico adicional a los bosones, la hypercarga, en donde le pondremos  $Y = \frac{1}{3}$ .

Una manera común que se estudia la estructura nuclear es a partir de colisiones entre partículas. Dado un núcleo un blanco y a este se le colisiona otra partícula para ver sus estados excitados y de esta manera determinar sus espectros, podemos entender en otros términos que el núcleo sufrió una transferencia de partículas. Ahora en nuestro contexto de la supersimetría nos interesa hallar las probabilidades de que un estado cambie a otro estado bajo una transferencia de nucleones, para ello es necesario encontrar unos los valores que surgen en el estudio algebraico de los estados que intervienen en la transferencia de nucleones asociados al problema estos los llamaré factores isoescalares, que pueden entenderse como la generalización de los coeficientes de Clebsch-Gordan en el grupo  $SU(3)$ . Nuestra generalización del

concepto de  $F$ -spin generalizado parte de la cadena

$$\begin{array}{ccccc} U(18) & \supset & U(6) & \otimes & U(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N] & & [N-j, j-k, k] & & [N-j, j-k, k] \end{array} \quad (4.2)$$

donde vemos que hay  $N$  partículas asociadas al grupo  $U(18)$ , su estado correspondiente es simétrico por lo tanto como  $U(3)$  tiene estados con las representaciones  $[N-j, j-k, k]$  estos también son simétricos por lo cual para  $U(6)$  sus representaciones también deben ser simétricas a si a  $U(6)$  le corresponden  $[N-j, j-k, k]$ . Aquí los estados correspondientes a los grupos  $U(3)$  y  $U(6)$  poseen tres números  $[N-j, j-k, k]$  que pueden ser utilizados como los mismos números utilizados al comienzo de esta discusión, de esta forma es útil utilizar solo el grupo  $U(3)$  para poder determinar esos coeficientes isoescalares. Una vez que hemos notado que el grupo  $U(3)$  es el mejor candidato para continuar con nuestra investigación utilicemos el hecho que el grupo  $U(3)$  podemos encontrar una cadena que nos describa con más detalle lo que sucede con esos tres números.

La estructura general de los estados las cuales intervienen transferencia de nucleones tiene la forma:

$$|[N_\nu], [N_\pi]; [N_\nu + N_\pi - i, i], [N_\rho]; [N_\pi + N_\nu + N_\rho - j, j - k, k], \alpha \rangle \quad (4.3)$$

El número  $\alpha$  que hemos puesto en el estado son los números cuánticos restantes tal como los acoplamientos con el espín del neutrón y los demás números cuánticos. Esta secuencia de acoplamientos puede ser descrita a través de el grupo principal de tres dimensiones  $U(3)$  de la ecuación (4.2), el cual puede ser reducido a

$$\begin{array}{ccccccc} U(3) & \supset & SU(3) & \supset & [SU(2) \supset SO(2)] & \otimes & U(1). \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N-j, j-k, k] & & (\lambda, \mu) & & F & & F_z & & Y \end{array} \quad (4.4)$$

Esta cadena nos permite expresar los estados que tengan la representación  $[N-j, j-k, k]$  a través de  $(\lambda, \mu), F, Y$  donde es exactamente aquí donde introducimos nuevos números cuánticos para denotar nuestros estados en la reducción  $U(3) \supset SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)$  vemos que al grupo  $SU(3)$  le asociamos dos nuevos números  $(\lambda, \mu)$ , y en la reducción  $SU(2) \otimes U(1)$  tenemos dos números  $F, Y$  que me permiten expresar los estados, es aquí donde utilizamos el  $F$ -spin como número cuántico que me permita representar los estados que estamos interesados. y para  $Y$  el número cuántico hypercarga. De esta forma el cambio de base al espacio de  $F$ -spin generalizado

$$|[N]; (\lambda, \mu), F, F_z, Y, \alpha \rangle \quad (4.5)$$

estara dado por las reglas<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} N &= N_\nu + N_\pi + N_\rho \\ (\lambda, \mu) &= (N_\nu + N_\pi + N_\rho - 2j + k, j - 2k) \\ F &= \frac{1}{2}(N_\nu + N_\pi - 2i) \\ F_z &= \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu) \\ Y &= \frac{1}{3}(N_\nu + N_\pi - 2N_\rho) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Veamos ahora la correspondencia del espacio de  $F$ -spin generalizado para cada uno de los casos de los núcleos supersimétricos. Para un núcleo par-par donde  $j = i$  y  $k = 0$  se tiene el estado

<sup>3</sup>Obviamente el estado general en el espacio  $F$ -spin generalizado donde intervienen reacciones nucleares tiene la forma:  $|[N]; (N_\nu + N_\pi + N_\rho - 2j + k, j - 2k), \frac{1}{2}(N_\pi + N_\nu - 2i), \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu), \frac{1}{3}(N_\pi + N_\nu - 2N_\rho)\rangle$ .

$$|[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i, i], \alpha\rangle \quad (4.7)$$

En los núcleos par-par no se tienen fermiones extras de manera que  $M_\nu = M_\pi = 0$  de esta manera  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu$  y  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi$  esto nos permite construir los estados  $|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle$  correspondientes donde el cambio al  $F$ -spin generalizado para un núcleo par-par esta dado por

$$\begin{aligned} N &= \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi \\ (\lambda, \mu) &= (\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 2i, i) \\ F &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 2i) \\ F_z &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu) \\ Y &= \frac{1}{3}(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Cabe mencionar que en situaciones particulares el acoplamiento de los bosones y fermiones se expresan a través de  $\mathcal{N}_\nu = N_\nu + M_\nu$  y  $\mathcal{N}_\pi = N_\pi + M_\pi$ .<sup>4</sup> Si estamos ahora interesados en la transformación que tendrá los núcleos con protón impar este posee de nuevo  $j = i$  y  $k = 0$ , además no tenemos fermión de neutrón  $M_\nu = 0$  pero ahora si tenemos un protón extra  $M_\pi = 1$  tenemos  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi - 1$  y  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu$  de esta manera el estado tiene la forma:

$$|[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - i, i], \alpha\rangle \quad (4.9)$$

donde el cambio al  $F$ -spin generalizado para un núcleo con protón impar está dado por

$$\begin{aligned} N &= \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 \\ (\lambda, \mu) &= (\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - 2i, i) \\ F &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - 2i) \\ F_z &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1) \\ Y &= \frac{1}{3}(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si vamos por el siguiente caso, el de un núcleo con neutrón impar ahora vamos a tener un fermión extra de neutrón  $M_\nu = 1$  pero ahora no tenemos un protón extra  $M_\pi = 0$  por lo tanto  $N_\pi = \mathcal{N}_\pi$  y  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu - 1$  pero cuando tenemos un neutrón extra por cuestiones de estructura matemática tenemos que representar el acoplamiento del fermión extra de neutrón  $N_\rho = 1$  en el acoplamiento de bosones además  $j$  y  $k$  pueden ser distinto de cero, de esta forma el estado del núcleo con neutrón impar

$$|[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - i, i][1]_\rho; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - j, j - k, k], \alpha\rangle \quad (4.11)$$

donde el cambio al  $F$ -spin generalizado para un núcleo con neutrón impar está dado por

$$\begin{aligned} N &= \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi \\ (\lambda, \mu) &= (\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 2j + k, j - 2k) \\ F &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - 2i) \\ F_z &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1) \\ Y &= \frac{1}{3}(\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 3) \end{aligned} \quad (4.12)$$

<sup>4</sup>Una manera sencilla para recordar la transformación de los números cuánticos  $(\lambda, \mu)$  es asignarle un número a la posición  $N_1 = N - j$ ,  $N_2 = j - k$ ,  $N_3 = k$  de esta forma  $(\lambda, \mu) = (N_1 - N_2, N_2 - N_3)$ . En aplicaciones de la física nuclear estos números comúnmente suelen ser  $[N_1 - N_2, N_2 - N_3] = [N, 0, 0]$   $[N_1 - N_2, N_2 - N_3] = [N, 1, 0]$  el cual corresponden a los casos simétricos con  $i = 0$  y no simétricos  $i = 1$ .

se puede notar que los números que tomaremos para hacer el cambio de base al espacio de  $F$ -spin generalizado corresponderán a los pertenecientes del último grupo donde se hace el acoplamiento de el par de bosones con el fermión extra de neutrón  $BF_\nu$  que para el caso de un núcleo con neutrón impar son las etiquetas que pertenecen al grupo de simetría  $SO_{BF_\nu}(6)$ . Uno puede preguntar que sucede con las etiquetas restantes de las cadenas subsecuentes de la estructura matemática de este núcleo (véase la cadena 3.47). Como es el caso de la etiqueta del grupo  $U_{F_\nu}(2)$  acoplado con este  $SO_{BF_\nu}(6)$  en su reducciones  $SO_{BF_\nu}(5)$ ,  $SO_{BF_\nu}(3)$  y  $SU(2)$ . Lo que se puede decir es que efectivamente estas reducciones nos da información de la estructura de los espectros y de la estructura interna así como el efecto del espín del neutrón con el acoplamiento de los bosones. Pero hasta ahora solo nos quedaremos a esta escala ya que como hemos visto anteriormente estos números se repiten en algunas combinaciones de núcleos como mencionamos al principio de este capítulo por lo cual podemos hacer esta aproximación de omitirlos en la escritura de los estados. Es aquí lo novedoso de este modelo que estamos construyendo. Finalmente para un núcleo impar-impar siendo el caso más general se tiene el estado

$$|[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 2 - i, i], [1]_\rho; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - j, j - k, k], \alpha\rangle \quad (4.13)$$

donde el cambio al  $F$ -spin generalizado para un núcleo impar-impar esta dado por las reglas

$$\begin{aligned} N &= \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 \\ (\lambda, \mu) &= (\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - 2j + k, j - 2k) \\ F &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 2 - 2i) \\ F_z &= \frac{1}{2}(\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu) \\ Y &= \frac{1}{3}(\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu - 4) \end{aligned} \quad (4.14)$$

de esta manera ya tenemos la estructura de todos los estados en donde intervienen reacciones de transferencia.

Como habíamos visto en el capítulo tres la Supersimetría nos permite conocer la estructura de los espectros de ciertos núcleos así como conocer sus energías de excitación y además este formalismo nos provee una herramienta útil para investigar reacciones de transferencia de nucleones. Que son reacciones nucleares que con fortuna se tiene evidencia experimental. Las simetrías dinámicas son expresiones cerradas, el cual nos permiten derivar energías con ayuda de las reglas de selección además es posible obtener intensidades electromagnéticas así como reacciones de transferencia en donde aquí aparecen en forma explícita los factores isoescalares que hemos estado desarrollando en este texto. Estos son una consecuencia de los acoplamientos de los elementos que intervienen en la descripción matemática de las transferencias de partículas.

En el contexto de física nuclear en el laboratorio se puede medir la intensidad de reacciones nucleares. Como la fuerza espectroscópica de la transferencia de dos nucleones el cual constituye una prueba fuerte para encontrar correlaciones de dos núcleos en las funciones de onda nucleares de onda.

El estudio de Supersimetría Nuclear nos lleva a tener un conjunto de expresiones analíticas cerradas asociadas a razones de factores espectroscópicos. Estas razones son parámetros independientes las cuales proporcionan un prueba directa de las funciones de onda.

Una importante herramienta para el estudio de los núcleos son las intensidades de las reacciones de transferencias de nucleones. Estas síntesis nucleares son fuertemente exotérmicas. Si nos interesa saber cuales transferencias de partículas son las más relevantes veamos cuales reacciones de transferencia son

Tabla 4.3: Estructura algebraica de la función de onda

$F$ -spin	$F$ -spin Generalizado
$  \begin{array}{ccc}  U_{B\nu}(6) \otimes U_{B\pi}(6) \supset U_B(6) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  [N_\nu] \quad [N_\pi] \quad [N_\pi + N_\nu - i, i]  \end{array}  $ $  \begin{array}{ccc}  U(12) \supset U(6) \otimes U(2) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  [N] \quad [N - i, i] \quad [N - i, i]  \end{array}  $ $  \begin{array}{ccc}  U(2) \supset SU(2) \supset SO(2) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  [N - i, i] \quad F \quad F_z  \end{array}  $ $  \begin{array}{l}   [N_\nu], [N_\pi]; [N - i, i], \alpha\rangle \\  \\   [N]; F, F_z, \alpha\rangle \\  N = N_\pi + N_\nu \\  \\  F = \frac{1}{2}(N_\pi + N_\nu - 2i) \\  F_z = \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu)  \end{array}  $	$  \begin{array}{ccc}  U_{B\nu}(6) \otimes U_{B\pi}(6) \otimes U_{F\nu}(6) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  [N_\nu] \quad [N_\pi] \quad [N_\rho]  \end{array}  $ $  \begin{array}{ccc}  \supset U_B(6) \otimes U_{F\nu}(6) \supset U_{BF\nu}(6) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  [N_\pi + N_\nu - i, i] \quad [N_\rho] \quad [N - j, j - k, k]  \end{array}  $ $  \begin{array}{ccc}  U(18) \supset U(6) \otimes U(3) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  [N] \quad [N - j, j - k, k] \quad [N - j, j - k, k]  \end{array}  $ $  \begin{array}{ccccc}  U(3) \supset SU(3) \supset (SU(2) \supset SO(2)) \otimes U(1) \\  \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\  (\lambda, \mu) \quad F \quad F_z \quad Y  \end{array}  $ $  \begin{array}{l}   [N_\nu], [N_\pi]; [N_\nu + N_\pi - i, i], [N_\rho]; [N - j, j - k, k], \alpha\rangle \\  \\   [N]; (\lambda, \mu), F, F_z, Y, \alpha\rangle \\  N = N_\pi + N_\nu + N_\rho \\  (\lambda, \mu) = (N_\nu + N_\pi - 2j + k, j - 2k) \\  F = \frac{1}{2}(N_\pi + N_\nu - 2i) \\  F_z = \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu) \\  Y = \frac{1}{3}(N_\pi + N_\nu - 2N_\rho).  \end{array}  $
Clebsch-Gordan $SU(2)$	Factor Isoscalar $SU(3)$
$  \langle F_1, F_{z_1}; F_2, F_{z_2}   F, F_z \rangle  $ $  SU_F(2) \supset SO_{F_z}(2)  $	$  \left\langle \begin{array}{cc c}  (\lambda_1, \mu_1) & (\lambda_2, \mu_2) & (\lambda, \mu) \\  F_1, Y_1 & F_2, Y_2 & F, Y  \end{array} \right\rangle  $ $  SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1)  $

más lógicas desde el punto de vista físico. Si tenemos la siguiente configuración

$$\begin{array}{ccc}
{}^{193}_{78}\text{Pt}_{115} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\nu} \\ a^\dagger \end{array} & {}^{194}_{78}\text{Pt}_{116} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\nu} \\ a^\dagger b \end{array} & {}^{193}_{78}\text{Pt}_{117} \\
N_\nu=5 & & N_\nu=5 & & N_\nu=4 \\
N_\pi=2 & & N_\pi=2 & & N_\pi=2 \\
M_\nu=1 & & & & M_\nu=1
\end{array}$$

podemos observar que al el núcleo par-par  ${}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$  le podemos transferirle un neutrón y obtenemos un núcleo con neutrón impar, sin embargo el mecanismo matemático asociado a este proceso sería eliminar un bosón de neutrón y añadirle un fermión de neutrón este proceso sería a través del operador  $a^\dagger b$ . Por otro lado en la otra dirección podemos crear un fermión de neutrón y obtener el otro isótopo. Cabe señalar que este enfoque es el que se maneja en la Supersimetría. De esta manera las tranferencias que podemos hacer son transferencias de un neutrón, un protón y dos protones.

Como vimos en el comienzo del capítulo 4 los núcleos pares-pares y los núcleos con neutrón impar están correlacionados ya que estos comparten los mismos números cuánticos a energías bajas y además la relación entre ellos es que a un núcleo par-par le falta un neutrón y de esta manera jústamente aquí podemos hacer un transferencia de un neutrón a nuestro núcleo par-par . Considerando  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$  tenemos la transferencia

$$C_1 = \langle [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'], [1]_\nu; \alpha' | P_\nu^{(j)} | [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - i, i]; \alpha \rangle \quad (4.15)$$

aunque claro podemos tener el caso de quitar un neutrón al núcleo con neutron impar y obtener un núcleo par-par usando su correspondiente operador. Donde  $\alpha, \alpha'$  denotan los números cuánticos restantes de los estados supersimétricos vistos en el capítulo 3. Por otro lado de la misma manera se necesita transferir un neutrón a un núcleo con protón impar para obtener un núcleo impar-impar siendo

$$C_2 = \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2 - i', i'], [1]_\nu; \alpha' | P_\nu^{(j)} | [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - i, i]; \alpha \rangle \quad (4.16)$$

la otra transferencia que puede haber. Aquí también se puede tener el caso contrario de quitar un neutrón del núcleo impar-impar y obtener un núcleo con protón impar

La magnitud utilizada para medir estas transferencias es la intesidad de la reacción de transferencia[45] definida como

$$I(\alpha_i, J_i \rightarrow \alpha_f, J_f) = |\langle \alpha_f, J_f | P_\nu^j | \alpha_i, J_i \rangle|^2, \quad (4.17)$$

donde  $\alpha_i, \alpha_f$  denotan los números cuánticos de los estados iniciales y finales necesarios adicionales hasta  $J_i, J_f$  que caracterizan los estados únicos. La fuerza espectroscópica esta definida como

$$J(\alpha_i, J_i \rightarrow \alpha_f, J_f) = \frac{1}{2J_i + 1} I(\alpha_i, J_i \rightarrow \alpha_f, J_f) \quad (4.18)$$

Estos valores espectroscopicos en este contexto ya fueron calculados [45] sin embargo dentro del contexto de  $F$ -spin generalizado son efectivamente los que estamos calculando en este trabajo.

### 4.3 Reacciones Nucleares

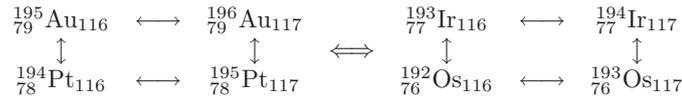
Las reacciones nucleares relevantes en este contexto Supersimétricos son aquellas que pueden haber entre los núcleos de un cuarteto supersimétrico. Unicamente nos vamos a enfocar en reacciones nucleares donde intervienen transferencia de partículas. Las tranferencias de estas partículas pueden ser bosones o fermiones. El interés a futuro es encontrar nuevos cuartetos supersimetricos para así poderlos estudiar. Además con el avance tecnológico cada vez se tiene más información experimental el cual se puede estudiar

Tabla 4.4: Número de bosones y fermiones de los cuartetos supersimétricos de los núcleos Pt-Au y Os-Ir.

Núcleo	$N_\pi$	$M_\pi$	$\mathcal{N}_\pi$	$N_\nu$	$M_\nu$	$\mathcal{N}_\nu$	Núcleo	$N_\pi$	$M_\pi$	$\mathcal{N}_\pi$	$N_\nu$	$M_\nu$	$\mathcal{N}_\nu$
${}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$	2	0	2	5	0	5	${}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$	3	0	3	5	0	5
${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$	2	0	2	4	1	5	${}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$	3	0	3	4	1	5
${}^{195}_{79}\text{Au}_{116}$	1	1	2	5	0	5	${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$	2	1	3	5	0	5
${}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$	1	1	2	4	1	5	${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$	2	1	3	4	1	5

y comparar con las teorías actuales, por ejemplo los datos más actuales de la reacción de transferencia polarizado  $(\vec{d}, \alpha)$  nos ha dado información nueva crucial acerca de la percepción de la estructura del espectro del núcleo  ${}^{194}\text{Ir}$  el cual nos lleva a cambios significativos de la asignación de los niveles en comparación con los primeros trabajos [46]. Los trabajos más recientes [47, 48, 49] tienen nuevas asignaciones que van de acuerdo con la estructura del núcleo impar-impar  ${}^{196}\text{Au}$ . Siendo aun la naturaleza compleja de los espectros de los núcleos impar-impar hay al menos correlaciones uno a uno entre los experimentos y los esquemas teóricos[50]. La buena descripción del núcleo impar-impar  ${}^{194}\text{Ir}$  nos abre la posibilidad de identificar un segundo cuarteto de núcleos en la región  $A$  190 con una supersimetría  $U_\nu(6/12) \otimes U_\pi(6/4)$ . Las relevantes capas cerradas son  $Z = 82$  para protones y  $N = 126$  para neutrones. Por ejemplo en el cuarteto de los núcleos  ${}^{194,195}\text{Pt}$  y  ${}^{196,196}\text{Au}$  se tienen que para el núcleo par-par  ${}^{194}\text{Pt}_{116}$  el número de bosones son  $N_\pi = (82 - 78)/2 = 2$  y  $N_\nu = (126 - 116)/2 = 5$ . No hay nucleones impares así  $M_\pi = M_\nu = 0$ . Para el núcleo con neutrón impar  ${}^{195}\text{Pt}_{117}$  hay 9 neutrones de valencia el cual nos da  $N_\nu = 4$  bosones de neutrón y un neutrón no pareado  $M_\nu = 1$ . Los isótopos de  ${}^{196}\text{Au}$  tienen 3 protones de valencia y por consecuente tiene  $N_\pi = 1$  bosón de protón y  $M_\pi = 1$  protón no pareado. Este cuarteto supersimétrico de núcleos están caracterizados por  $\mathcal{N}_\nu = N_\nu + N_\pi = 5$  y  $\mathcal{N}_\pi = N_\nu + N_\pi = 2$ . De esta manera vamos a tener una serie de números para posteriormente poder describir los estados asociados a cada núcleo particular. Podemos ver estos números en la tabla 4.4. Debido a que los núcleos que pertenecen a los cuartetos supesimétricos son descritos por un solo Hamiltoniano entonces las funciones de onda, las tazas de transferencias están fuertemente correlacionadas.

Figura 4.2: Posibles correlaciones entre los dos cuartetos supersimétricos bajo reacciones de transferencia de uno y dos nucleones, como es el caso de dos protones entre los dos cuartetos supersimétricos.



Si consideramos el caso de reacciones de transferencia entre los núcleos  ${}^{194,195}\text{Pt}$  y  ${}^{192,193}\text{Os}$ . Los núcleos Pt y Os están conectados por reacciones de transferencia de un neutrón dentro del mismo cuarteto supersimétrico  ${}^{194}\text{Pt} \leftrightarrow {}^{195}\text{Pt}$  y  ${}^{192}\text{Os} \leftrightarrow {}^{193}\text{Os}$ , donde las transiciones entre los núcleos Pt y Os participa la transferencia de un par de protones entre los diferentes cuartetos  ${}^{194}\text{Pt} \leftrightarrow {}^{192}\text{Os}$  y  ${}^{195}\text{Pt} \leftrightarrow {}^{193}\text{Os}$ , como lo nuestro en la figura 4.2.

### 4.3.1 Carácter tensorial de los operadores de transferencia

Para poder continuar con nuestro análisis de las reacciones nucleares en el contexto de supersimetría nuclear necesitamos saber expresar de la manera más sencilla el proceso de transferencia en términos matemáticos. Para ello los operadores que vamos a utilizar deberán tener la misma estructura algebraica

como los estados supersimétricos que hemos estado manejando. Principalmente vamos a tener operadores de creación y aniquilación pero de bosones  $s$  y  $d$  y fermiones  $\rho$  en donde estos tendran asociados también etiquetas correspondientes a los grupos de simetrías.

$$\begin{array}{cccccc}
& U(6) & \supset & SO(6) & \supset & SO(5) & \supset & SO(3) & \supset & SU(2) \\
\text{Operador} & [N] & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & & (\tau_1, \tau_2) & & L & & J \\
s_{\nu, \pi, \rho}^\dagger & [1] & & (100) & & (00) & & 0 & & \frac{1}{2} \\
d_{\nu, \pi, \rho}^\dagger & [1] & & (100) & & (10) & & 2 & & \frac{3}{2}, \frac{5}{2}
\end{array} \quad (4.19)$$

El trabajo de construir los mejores operadores asociados a las reacciones nucleares que se llevan a cabo en el laboratorio, en sí no es una tarea fácil pero si se puede. El problema esencial que uno se presenta al momento que se construyen los operadores es que existen superposiciones de estados disponibles para construir un operador es decir, al momento que tenemos los acoplamiento de las representaciones irreducibles que asociamos a los operadores estos poseen multipletes y el problema es cual de ellos es el más conveniente elegir, por ejemplo si queremos construir un operador que me convierta un boson de neutron en un fermión vamos a tener

$$(100)_\nu \otimes (100)_\rho = (200) \oplus (110) \oplus (000) \quad (4.20)$$

donde estos poseen las siguientes posibles representaciones

$$\begin{array}{ccc}
(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & (\tau_1, \tau_2) & L \\
(200) & (20) & 4, 2 \\
& (10) & 2 \\
& (00) & 0 \\
(110) & (11) & 3, 1 \\
& (10) & 2 \\
(000) & (00) & 0
\end{array} \quad (4.21)$$

Y como vemos hay varias configuraciones para construir un operador con esas característica de convertir un boson en un fermion.

Sin embargo en la práctica cuando tenemos datos experimentales de algun proceso de transferencia se posee información de momentos angulares que están presentes en las reacciones nucleares, esto nos permite tener reglas de selección que nos permite construir el mejor operador de transferencia asociado al experimento. Aquí surge el interés de construir un mecanismo teórico que nos permita desarrollar este proceso de selección a primeros principios que por cierto si hay esfuerzos para tratar ese tipo de problemas teóricos. Quiero ahora continuar con el ejemplo anterior de construir un operador que me convierta un bosón de neutrón en un fermión. La manera más natural de expresar estos operadores son a través de su forma tensorial

$$T_M^{(J)} = (\tilde{d} \times a_j^\dagger)_M^{(J)} = \sum_{m_1, m_2} \langle 2m_1 j m_2 | J M \rangle \tilde{d}_{m_1} a_{j m_2}^\dagger \quad (4.22)$$

Tomemos la configuración más sencilla de (4.21), este sería un caso físico en donde si tenemos un núcleo como blanco y si al momento que hago la reacción nuclear, el núcleo resultante tendra el mismo momento angular que el original, digamos momento angular cero y además supondremos que ambos núcleos están en sus estados bases, no exitados es decir las representaciones irreducibles asociados a el grupo  $SO(5)$  son

zero también, de esta manera escribiendo el operador tendra la forma:

$$\begin{aligned} T_{(00)00}^{(000)} &= \left[ T_{\nu}^{(100)} \times T_{\rho}^{(100)} \right]_{(00)0}^{(000)} \\ &= \sum_{\substack{(\tau_1, \tau_2)Lm \\ (\tau_1', \tau_2')L'm'}} \left\langle \begin{array}{cc} (100) & (100) \\ (\tau_1, \tau_2)L & (\tau_1', \tau_2')L \end{array} \middle| \begin{array}{c} (000) \\ (00)0 \end{array} \right\rangle \langle L, m, L', m' | 0, 0 \rangle T_{(\tau_1, \tau_2)L}^{(100)}(\nu) T_{(\tau_1', \tau_2')L'}^{(100)}(\rho) \end{aligned} \quad (4.23)$$

debido a que  $\tau_2 = \tau_2' = 0$ ,  $\tau_1 = 0, 1$  y  $L = 0, 2$  tenemos

$$T_{(00)00}^{(000)} = \sum_{m\tau=0,1} \left\langle \begin{array}{cc} (100) & (100) \\ (\tau, 0)2\tau & (\tau, 0)2\tau \end{array} \middle| \begin{array}{c} (000) \\ (00)0 \end{array} \right\rangle \langle 2\tau, m, 2\tau, -m | 0, 0 \rangle T_{(\tau, 0)2\tau}^{(100)}(\nu) T_{(\tau, 0)2\tau}^{(100)}(\rho) \quad (4.24)$$

podemos notar que aquí aparecen unos factores de la forma:

$$\zeta_{(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\tau_1\tau_2)}^{(\Sigma 00)(\tau'0)} = \left\langle \begin{array}{cc} (\Sigma 00) & (100) \\ (\tau, 0) & (\tau', 0) \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\sigma_1\sigma_2\sigma_3) \\ (\tau_1\tau_2) \end{array} \right\rangle$$

estos son también son factores isoescalares, en donde utilizando el lema de factorización al factor isoescalar de la ecuación (4.24) obtenemos

$$\zeta_{(000)(00)}^{(100)(\tau 0)} \eta_{(00)0}^{(\tau 0)2\tau} = \left\langle \begin{array}{cc} (100) & (100) \\ (\tau, 0) & (\tau, 0) \end{array} \middle| \begin{array}{c} (000) \\ (00) \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc} (\tau 0) & (\tau 0) \\ (2\tau) & (2\tau) \end{array} \middle| \begin{array}{c} (00) \\ 0 \end{array} \right\rangle$$

y estos tienen los valores [29]

$$\begin{aligned} \tau = 0 & \quad \zeta_{(000)(00)}^{(100)(00)} \eta_{(00)0}^{(00)0} = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \tau = 1 & \quad \zeta_{(000)(00)}^{(100)(10)} \eta_{(00)0}^{(10)2} = -\sqrt{\frac{5}{6}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

de esta manera tenemos el operador asociado a esta reacción nuclear es

$$T_{(00)00}^{(000)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ (\tilde{s}_{\nu} s_{\rho}^{\dagger})_0^{(0)} - \sqrt{5} (\tilde{d}_{\nu} d_{\rho}^{\dagger})_0^{(0)} \right] \quad (4.26)$$

los superíndices representan el correspondiente acoplamiento con  $L$  y el subíndice corresponde al acoplamiento  $M$  que escrita de otra forma

$$T_{(00)00}^{(000)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle 0000 | 00 \rangle \tilde{s}_{\nu} s_{\rho}^{\dagger} - \sqrt{\frac{5}{6}} \left[ \langle 2m, 2 - m | 00 \rangle \tilde{d}_{\nu} d_{\rho}^{\dagger} \right] \quad (4.27)$$

El estudio de este tipo de reacciones de transferencias de un nucleón en el contexto de supersimetría nuclear fué desarrollado principalmente por R. Bijker y por F. Iachello [45].

## 4.4 Operadores de Transferencia en el $F$ -spin generalizado

En esta sección vamos a introducir los operadores que usualmente son utilizados (véase la tabla 4.5). Sin embargo en el contexto de  $F$ -spin generalizado tenemos que determinar el carácter tensorial de estos operadores para posteriormente así poderlos utilizar. Los valores que tendrán los operadores de creación y aniquilación en el  $F$ -spin generalizado estarán dados como se muestra en la tabla siguiente<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>La derivación de los valores de estos operadores se pueden ver en el apéndice A.8.

Tabla 4.5: Operadores de creación y aniquilación en el  $F$ -spin generalizado.

	$(\lambda, \mu)$	$F$	$F_z$	$Y$
$b_\pi^\dagger$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$b_\nu^\dagger$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$a_\nu^\dagger$	(1, 0)	0	0	$-\frac{2}{3}$
$\tilde{b}_\pi$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\tilde{b}_\nu$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\tilde{a}_\nu$	(0, 1)	0	0	$\frac{2}{3}$

Sin embargo si nos interesan exactamente los operadores asociados a las transferencias de nucleones, tenemos que construir los operadores de transferencia de un neutrón, un protón, dos protones y dos neutrones. De esta manera obtenemos

Tabla 4.6: Operadores de transferencia en el  $F$ -spin generalizado.

<i>Transferencias</i>	<i>Operador</i>	$(\lambda, \mu)$	$F$	$F_z$	$Y$
1) Neutrón	$a_\nu^\dagger b_\nu$	(1, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
	$a_\nu^\dagger$	(1, 0)	0	0	$-\frac{2}{3}$
	$a_\nu$	(0, 1)	0	0	$\frac{2}{3}$
2) Protón	$b_\nu^\dagger a_\nu$	(1, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
	$a_\pi^\dagger b_\pi$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
	$b_\pi^\dagger a_\pi$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3) Dos protones	$b_\pi^\dagger$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$b_\pi$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
4) Dos neutrones	$b_\nu^\dagger$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$b_\nu$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

de esta manera ya tenemos todas las herramientas para poder comenzar con nuestros cálculos de las reacciones nucleares.

Por ejemplo considerando la transferencia de un par de protones entre dos cuádrupletes supersimétricos

$$\mathcal{N}_\nu, \mathcal{N}_\pi \longrightarrow \mathcal{N}_\nu, \mathcal{N}_\pi + 1$$

considerando el caso particular que nuestro estado inicial tenemos un núcleo con neutrón impar donde  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu - 1$  y  $N_\pi = \mathcal{N}_\nu$  el cual le transferimos un par de protones con el operador de creación  $s_\pi^\dagger$ , de esta manera vamos a tener el estado final con  $N_\nu = \mathcal{N}_\nu - 1$  y  $N_\pi = \mathcal{N}_\nu + 1$  además  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$  el cual puede ser representado esta transferencia de la forma:

$$C_1 = \langle [\mathcal{N}_\nu - 1][\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N}][1_\rho]; [\mathcal{N}, 1]\alpha \| s_\pi^\dagger \| [\mathcal{N}_\nu - 1][\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1][1_\rho]; [\mathcal{N}]\alpha' \rangle \quad (4.28)$$

ahora escribiendo la ecuación anterior en la base de  $F$ -spin según las ecuaciones (4.12) y además el operador de creación en la base  $F$ -spin se representa como  $s_\pi^\dagger = T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}^{(1,0)}$  así tenemos<sup>6</sup>

$$C_1 = \langle (N - 1), \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2}, \frac{\mathcal{N} - 2}{3}, \alpha \| T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}^{(1,0)} \| (N, 0), \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N} - 3}{3}, \alpha', \rangle \quad (4.29)$$

<sup>6</sup>Podemos ver en más detalle los cálculos de este ejemplo en el apéndice (A.11).

Si utilizamos el teorema de Wigner Eckart obtenemos

$$C_1 = \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 1) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2}, \frac{\mathcal{N}-2}{3} \end{array} \right\rangle \langle (\mathcal{N}-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (\mathcal{N}, 0)\alpha' \rangle \quad (4.30)$$

Por otro lado, si tenemos otra reacción nuclear donde se transfiera un boson de protón a un núcleo par-par, este proceso lo escribimos de forma análoga al caso anterior

$$C_2 = \langle [\mathcal{N}_\nu][\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N}, 1]\alpha || s_\pi^\dagger || [\mathcal{N}_\nu][\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}]\alpha' \rangle \quad (4.31)$$

utilizando las transformaciones correspondientes de las ecuaciones (4.8) obtenemos

$$C_2 = \langle (\mathcal{N}-1, 1), \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}+1}{3}, \alpha || T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}^{(1,0)} || (\mathcal{N}, 0), \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3}, \alpha, \rangle \quad (4.32)$$

utilizando de nuevo el teorema de Wigner Eckart

$$C_2 = \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 1) \\ \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}+1}{3} \end{array} \right\rangle \langle (\mathcal{N}-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (\mathcal{N}, 0)\alpha' \rangle \quad (4.33)$$

utilizando (4.30) y (4.33) obtenemos

$$C_1 = \frac{\left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 1) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2}, \frac{\mathcal{N}-2}{3} \end{array} \right\rangle}{\left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 1) \\ \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}+1}{3} \end{array} \right\rangle} C_2 \quad (4.34)$$

que en forma simplificada sería

$$C_1 = \frac{ISF_1}{ISF_2} C_2 \quad (4.35)$$

Ahora nuestra tarea a seguir es determinar esos valores  $\frac{ISF_1}{ISF_2}$  para ellos veamos el lema de factorización, aplicado a nuestro problema, siendo  $F'_z = F_z + f_z$  además  $Y' = Y + y$  el cual desacoplamos un factor isoescalar en dos partes

$$\left\langle \begin{array}{c} (\lambda_1, \mu_2) \\ F_1, F_{z_1}, Y_1 \end{array} \begin{array}{c} (\lambda_2, \mu_2) \\ F_1, F_{z_2}, Y_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda, \mu) \\ F, F_z, Y \end{array} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{array}{c} (\lambda_1, \mu_1) \\ F_1, Y_1 \end{array} \begin{array}{c} (\lambda_2, \mu_2) \\ F_2, Y_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda, \mu) \\ F, Y \end{array} \right\rangle}_{SU(3) \supset SU(2) \otimes U_Y(1)} \overbrace{\langle F_1, F_{z_1}; F_2, F_{z_2} | F, F'_z \rangle}^{SU_F(2) \supset SO_{F_z}(2)} \quad (4.36)$$

La segunda parte corresponde a  $SU_F(2) \supset SO_{F_z}(2)$  cuyas representaciones son  $F, F_z$  el cual estos coeficientes están asociados a los conocidos coeficientes de Clebsch-Gordan, sin embargo para la primera parte  $SU(3) \supset SU(2) \otimes U_Y(1)$  cuyas representaciones son  $(\lambda, \mu), F, Y$  tenemos que desarrollar una especie de coeficientes de Clebsch-Gordan pero en un espacio de una dimensión extra es decir  $SU(3)$

## 4.5 Transferencias de nucleones en el $F$ -spin generalizado

Nuestro objetivo de aquí en adelante es determinar las intensidades de reacciones nucleares entre núcleos de los cuartetos supersimétricos. Ya tenemos la estructura matemática construida, se conocen las

funciones de onda en el espacio  $F$ -spin generalizado de los núcleos par-par (4.8), núcleos con protón impar (4.10), núcleos con neutrón impar (4.12) y núcleos impar-impar (4.14), además se conoce la estructura de los operadores de transferencia de la tabla A.3.

Físicamente cuando tenemos reacciones nucleares, el núcleo al cual vamos a poblar con una partícula debe estar en el estado base, esto quiere decir que son estados simétricos por lo que los estados iniciales deberán estar en el estado base y por lo tanto el valor de  $i = 0$  dentro de los estados supersimétricos. Supongamos que tenemos una transferencia de una partícula, usando un operador de creación  $T^\dagger$  que actúa sobre un estado inicial  $|\Psi_i^{\text{gr}}\rangle$  obtendremos un estado final  $|\Psi_f\rangle$  y correlacionando el proceso inverso con el operador de aniquilación  $T$  tomando el estado final ahora como base y el inicial como exitado tenemos

$$\langle \Psi_f | T^\dagger | \Psi_i^{\text{gr}} \rangle = \zeta \langle \Psi_i | T | \Psi_f^{\text{gr}} \rangle. \quad (4.37)$$

De esta manera podemos obtener correlaciones entre dos procesos de transferencia justamente con coeficientes de factores isoescalares expresado como  $\zeta$ .

En este trabajo solo se van a calcular los factores isoescalares correspondientes a las reacciones nucleares en donde se manejen representaciones  $(\lambda, \mu) = \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Las reacciones nucleares correspondientes son reacciones nucleares de transferencia de un protón y dos protones. Los factores isoescalares que se calcularán en el siguiente capítulo esta resumido en las tablas 4.7 y 4.8.

Tabla 4.7: Factores Isoescalares de  $SU(3)$  asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$ 

<i>Caso</i>	$F_1$	$Y_1$	$F_2$	$Y_2$	$(\lambda, \mu)$	$F$	$Y$	$\left\langle \begin{array}{cc c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda, \mu) \\ F_1, Y_1 & F_2, Y_2 & F, Y \end{array} \right\rangle$
<i>i</i> )	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$(\lambda + 1, 0)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3} - k$	$\sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+1}}$
<i>ii</i> )	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	0	$-\frac{2}{3}$	$(\lambda + 1, 0)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3} - k$	$\sqrt{\frac{k}{\lambda+1}}$
<i>iii</i> )	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$(\lambda - 1, 1)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3} - k$	$-\sqrt{\frac{k}{\lambda+1}}$
<i>iv</i> )	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	0	$-\frac{2}{3}$	$(\lambda - 1, 1)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3} - k$	$\sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+1}}$
<i>v</i> )	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$(\lambda - 1, 1)$	$\frac{\lambda-1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3} - k$	-1

Tabla 4.8: Factores Isoescalares de  $SU(3)$  asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$ 

<i>Caso</i>	$F_1$	$Y_1$	$F_2$	$Y_2$	$(\lambda, \mu)$	$F$	$Y$	$\left\langle \begin{array}{cc c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, \mu) \\ F_1, Y_1 & F_2, Y_2 & F, Y \end{array} \right\rangle$
<i>vi</i> )	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$(\lambda, 1)$	$\frac{\lambda+2-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	1
<i>vii</i> )	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	0	$\frac{2}{3}$	$(\lambda, 1)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$\sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}}$
<i>viii</i> )	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$(\lambda, 1)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$-\sqrt{\frac{k}{\lambda+2}}$
<i>ix</i> )	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	0	$\frac{2}{3}$	$(\lambda - 1, 0)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$-\sqrt{\frac{k}{\lambda+2}}$
<i>x</i> )	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$(\lambda - 1, 0)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$\sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}}$

A continuación presentaremos algunas aplicaciones asociados con estos factores isoescalares presentes a la física nuclear.

## 4.6 Relaciones entre reacciones de transferencia

Debido a los desarrollos experimentales de la última década, la clasificación supersimétrica nuclear de los isótopos Pt y Au han tomado de nuevo relevancia. La alta resolución de los experimentos con protones y deuterones polarizados, nos han dado fuerte evidencia de la Supersimetría (SUSY) en los núcleos atómicos. Los experimentos de transferencias en el núcleo  $^{196}\text{Au}$  de alta resolución tales como los que hacen en el TU/LMU München[51]-[52], y con haces de rayos  $\gamma$  y el uso de espectroscopía de las reacciones por ejemplo de  $^{196}\text{Pt}(d, 2n)$  y  $^{196}\text{Pt}(p, n)$  en los ciclotrones de PSI y Bonn[53], han llevado a tener información suficiente para tener una buena clasificación de los estados de  $^{195}\text{Pt}$  y  $^{196}\text{Au}$ . Por lo tanto podemos investigar posibles transferencias de nucleones en términos de estos núcleos. Para ello tenemos que hacer una síntesis de los temas tratados anteriormente con el fin de encontrarle una aplicación al esquema teórico desarrollado. Como es encontrar relaciones entre distintas reacciones de transferencia. Hemos visto que existen cuatro tipos de núcleos en SUSY, como vimos en (3.24), (3.38), (3.48) y (3.53).

$$\begin{aligned}
|\Psi_{ee}\rangle &= |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - i, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3); (\tau_1, \tau_2); L\rangle \\
|\Psi_{op}\rangle &= |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - i, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); J\rangle \\
|\Psi_{on}\rangle &= |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - i, i][1]_\nu; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - j, j - k, k] \\
&\quad ; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3); (\tau_1, \tau_2); J, (\frac{1}{2}); L\rangle \\
|\Psi_{oo}\rangle &= |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 2 - i, i][1]_\nu; [\mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi - 1 - j, j - k, k] \\
&\quad ; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); J, \frac{1}{2}; L\rangle
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Lo que vamos a hacer es, escribir algunas reacciones de transferencia, pero vamos a hacerlo primero desde el esquema general de Supersimetría y posteriormente haremos una reducción de tal manera de utilizar los resultados de  $F$ -spin generalizado y encontrar relaciones.

### 4.6.1 Transferencia de un protón

Las reacciones de transferencia constituye un prueba fuerte de de la supersimetría nuclear, una teoría que simultaneamente describe el carácter bosónico y fermiónico del núcleo.

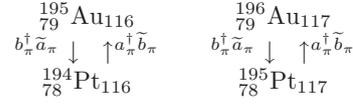
El operador de transferencia de una partícula que comunmente es usado en el IBFM ha sido derivado en el esquema de seniority [54], aunque estrictamente hablando, ésta derivación solo es válida en el régimen vibracional, sin embargo ha sido utilizando también en núcleos deformados. Los operadores de transferencia de una partícula se expresan en términos de operadores tensoriales bajo subgrupos que aparecen en la cadena de grupo de una supersimetría dinámica. El uso de operadores de tensoriales para describir reacciones de transferencia de una partícula en la Supersimetría ha tenido la ventaja de que nos proporciona una regla de selección y expresiones cerradas para los factores espectroscópicos. La transferencia de una partícula entre diferentes miembros de un mismo supermultiplete es importante ya que con esto, se muestra que hay transformaciones de bosones a fermiones y viceversa pero conservando el número total de bosones más fermiones.

La transferencia de un protón [55]-[56] en el esquema supersimétrico  $U(6/12)_\nu \otimes U(6/14)_\pi$ , consiste en el orden más pequeño de los dos términos

$$P_\pi^\dagger = \gamma_0 \left( a_{\pi,3/2}^\dagger \times \tilde{s}_\pi \right)^{(3/2)} + \gamma_2 \left( a_{\pi,3/2}^\dagger \times \tilde{d}_\pi \right)^{(3/2)} \tag{4.39}$$

que en el espacio  $F$ -spin lo llamare  $P_\pi^\dagger = a_\pi^\dagger \tilde{b}_\pi$ , que describe reacciones de transferencia de un protón entre los núcleos Pt y Au que pertenecen a un cuarteto supersimétrico,  $^{194}\text{Pt} \rightarrow ^{195}\text{Au}$  y  $^{195}\text{Pt} \rightarrow ^{196}\text{Au}$  que podemos ver en la figura 4.3 con la notación de los operadores  $a_\pi^\dagger \tilde{b}_\pi$ .

Figura 4.3: Ejemplo de tranferencias de un protón.



El uso de los operadores tensoriales que describen las reacciones de transferencia nos permiten tener reglas de selección al momento de efectuar una reacción. Cuando nosotros hacemos una reacción de tranferencia el estado inicial del núcleo deberá estar en el estado base, por ejemplo si tenemos una una tranferencia de una partícula a un núcleo par-par  $[(\mathcal{N} + 1, 0, 0), (0, 0), 0]$  a un núcleo con protón impar que pertenece al mismo supermultiplete  $[N + 1]$ . Ambos operadores tienen el mismo carácter de transformación bajo  $Spin(5)$  y  $Spin(3)$ , que por lo tanto solo pueden existir estados con  $(\tau_1, \tau_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y  $J = \frac{3}{2}$ . En el proceso inverso, partiendo del estado base del núcleo con protón impar a el núcleo par par, ambos operadores satisfacen las mismas reglas bajo  $Spin(5)$  y  $Spin(3)$  que permiten excitaciones con  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$  y  $J = 0$  ó  $(\tau_1, \tau_2) = (1, 0)$  y  $J = 2$ .

Si comenzamos con una transferencia de un protón, donde agregamos un protón a un núcleo par-par

$$|\Psi_{ee}\rangle \xrightarrow{a_{\pi}^{\dagger} \tilde{b}_{\pi}} |\Psi_{op}\rangle \quad (4.40)$$

en donde  $\mathcal{N}_{\pi}$  y  $\mathcal{N}_{\nu}$  tienen el mismo valor para los dos núcleos, hagamos la suposición que estamos en los niveles más bajos energéticos<sup>7</sup>, tomando  $\mathcal{N}_{\pi} + \mathcal{N}_{\nu} = \mathcal{N}$ , para el núcleo con protón impar  $[\mathcal{N} - 1 - i, i] = [\mathcal{N} - 1, 0]$  con  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N} - 1, 0, 0)$  y para el núcleo par-par  $[\mathcal{N} - i, i] = [\mathcal{N}, 0]$  con  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0)$  y  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$ <sup>8</sup>, aunque cabe señalar que podemos tomar otros valores de  $(\tau_1, \tau_2)$ , hemos elegido caso más fácil. Por el resultado de (3.30) donde  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$  implica  $L = 0$  entonces

$$C_1 = \langle [\mathcal{N}_{\nu}], [\mathcal{N}_{\pi} - 1]; [\mathcal{N} - 1, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle \langle P_{\pi}^{\dagger} | [\mathcal{N}_{\nu}], [\mathcal{N}_{\pi}]; [\mathcal{N}, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \quad (4.41)$$

que en resumen podemos decir que hemos tomado un estado base para el núcleo del estado inicial y para el núcleo final consideramos algunos posibles estados permitidos. Aquí podemos observar que no hay tenemos ningún acoplamiento de un neutrón. Por otro lado en el  $F$ -spin generalizado, debido a que  $P_{\pi}^{\dagger}$  es un operador tensorial, bajo las transformaciones de  $F$ -spin (véase las tabla 4.5), el operador esta dado como  $P_{\pi}^{\dagger} = T_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}}^{(0,1)}$ . Podemos ahora utilizar las funciones de onda en el espacio de  $F$ -spin correspondientes, tales como para nuestro caso para núcleos par-par (4.8) y núcleos con protón impar (4.10), así escribiendo la transferencia tenemos

<sup>7</sup>Gran parte del análisis de los niveles energéticos asociados a nuestros estados corresponderán a la discusión que hemos mostrado en las tablas 4.1 y 4.2.

<sup>8</sup> $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0)$  implica que  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$  debido a las reglas de reducción de  $SO_B(6)$  a  $SO_B(5)$ , véase el apedice (A.4).

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left\langle (\mathcal{N}-1, 0); \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3}; \alpha' \middle| T_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}}^{(0,1)} \middle| (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3}; \alpha \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle \\
&\quad \times \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \middle| T^{(0,1)} \middle| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\
&= \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2} \right\rangle \\
&\quad \times \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \middle| T^{(0,1)} \middle| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

los coeficientes  $\alpha'$  y  $\alpha$  representan los demás números cuánticos que tienen los núcleos de acuerdo a la formulación de la Supersimetría Nuclear vista en el capítulo 3, siendo

$$\begin{aligned}
\alpha' &= (\mathcal{N}-1, 0, 0), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \\
\alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

el paso siguiente, es importante, ya que vamos a consultar nuestros factores isoescalares que vamos a determinar en el siguiente capítulo, de esta forma, si ahora utilizamos la tabla 4.8, tomando el caso  $x$  para  $k=1$ , obtenemos el factor isoescalar asociado a este problema, por otro lado evaluando el coeficiente de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$  de manera convencional obtenemos

$$C_1 = \underbrace{\sqrt{\frac{\mathcal{N}+1}{\mathcal{N}+2}}}_{ISF} \underbrace{\sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}+1}}}_{CG} \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \middle| T^{(0,1)} \middle| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \tag{4.44}$$

dejo explícitamente el producto del factor isoescalar y el coeficiente de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$  para motivar la investigación de este tipo de factores, de esta forma la reacción de transferencia de un protón a un núcleo par-par en el esquema de  $F$ -spin generalizado bajo el operador  $a_\pi^\dagger \tilde{b}_\pi$  a (4.41) y obtenemos

$$C_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}+2}} \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \middle| T^{(0,1)} \middle| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle \tag{4.45}$$

Si ahora buscamos otra reacción en la cual podemos relacionarla con la anterior, si hacemos una transferencia de un protón a un núcleo con neutrón impar desde el esquema Supersimétrico, obtenemos un núcleo impar-impar,

$$|\Psi_{on}\rangle \xrightarrow{a_\pi^\dagger \tilde{b}_\pi} |\Psi_{oo}\rangle \tag{4.46}$$

considerando que  $\mathcal{N}_\pi$  y  $\mathcal{N}_\nu$  tienen el mismo valor para los dos núcleos, tomando los niveles energéticos más bajos de los núcleos con neutrón impar e impar-impar, siendo  $\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}$ , para el núcleo impar-impar  $[\mathcal{N}-1-j, j-k, k] = [\mathcal{N}-1, 0, 0]$  con  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}-1, 0, 0)$  y para el núcleo con neutrón impar tomaremos los valores  $[\mathcal{N}-j, j-k, k] = [\mathcal{N}, 0, 0]$ ,  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0)$  y  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$  y por (3.30)  $L=0$  entonces

$$\begin{aligned}
C_2 &= \langle [N_\nu - 1], [N_\pi - 1]; [N - 2, 0][1]_\nu; [N - 1, 0, 0]; (\mathcal{N}-1, 0, 0), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
&\quad \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L \middle| P_\pi^\dagger \middle| [N_\nu - 1], [N_\pi]; [N - 1, 0][1]_\nu; [N, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0, (\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}) \rangle
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Aquí tenemos un importante punto que remarcar, tenemos que desacoplar el espín del neutrón, ya que el  $F$ -spin generalizado solo actúa sobre el espacio de bosones de protones  $b_\pi$ , bosones de neutrones

$b_\nu$  con su momento angular  $l_\nu$ . La parte orbital del protón  $j_\pi$  y el espín del neutrón  $s_\nu$  no participan en las reacciones donde el  $F$ -spin generalizado esta presente. Entonces debemos reducir los elementos de matriz de la ecuación (4.47), donde vamos a considerar dos espacios, uno es el espacio donde el  $F$ -spin generalizado actua y los restantes es el otro espacio donde no actua el  $F$ -spin generalizado.

Para dividir aquellos dos diferentes espacios, vamos a reducir los elementos de matriz como productos tensoriales de elementos matriciales, expresando las reglas de reducción segun Igal Talmi [57] se tiene

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J \| \mathbf{T}^{(k)}(1) \| \alpha'_1 J'_1 \alpha'_2 J'_2 J' \rangle &= (-1)^{J_1+J_2+J'+k} \\ &\times \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J & J_2 \\ J' & J_1 & k \end{matrix} \right\} \delta_{\alpha_2, \alpha'_2} \delta_{J_2, J'_2} \langle \alpha_1 J_1 \| \mathbf{T}^{(k)}(1) \| \alpha'_1 J'_1 \rangle \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde las propiedades de simetría del símbolo  $6j$  dados como

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} J_2 & J_1 & J_3 \\ J_5 & J_4 & J_6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} J_3 & J_2 & J_1 \\ J_6 & J_5 & J_4 \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_3 & J_2 \\ J_4 & J_6 & J_5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} J_4 & J_5 & J_3 \\ J_1 & J_2 & J_6 \end{matrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.49)$$

y el valor especial que se conoce del símbolo  $6j$  dado como

$$\left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{J_1+J_2+J_3}}{\sqrt{(2J_1+1)(2J_2+1)}} \delta_{J_1, J_5} \delta_{J_2, J_4} \quad (4.50)$$

con ello podemos continuar con nuestros cálculos. Siendo  $J_1 = \frac{3}{2}$ ,  $J_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J = L$ , y  $J'_1 = 0$ ,  $J'_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J' = \frac{1}{2}$ , y con su corespondiente  $\alpha_i$ , usando el desacoplamiento (4.48), la ecuación (4.47) se convierte en

$$\begin{aligned} C_2 &= \sqrt{(2L+1)2} \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2} & L & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} \\ &\times \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0][1]_\nu; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \\ &\| P_\pi^\dagger \| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.51)$$

determinando el valor del símbolo  $6j$  asociado esta transferencia, a través de las propiedades de simetría (4.49) y el valor especial del símbolo de  $6j$  (4.50) se tiene que

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2} & L & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & L \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^L}{\sqrt{8}} \quad (4.52)$$

por lo tanto la ecuación (4.51) se convierte en

$$\begin{aligned} C_2 &= \sqrt{\frac{2L+1}{4}} (-1)^L \\ &\times \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0][1]_\nu; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \\ &\| P_\pi^\dagger \| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.53)$$

por otro lado en  $F$ -spin generalizado si hacemos una transferencia de un protón a un núcleo con neutrón impar obtenemos un núcleo impar-impar, expresando la transferencia en el espacio  $F$ -spin generalizado, utilizando los estados apropiados como vimos en el la sección 4.2, siendo el estado inicial y final en estado base tenemos,

$$\begin{aligned}
C_2 &= \sqrt{\frac{2L+1}{4}}(-1)^L \left\langle (\mathcal{N}-1, 0); \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3}; \alpha' \| T_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}}^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu+1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3}; \alpha \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2L+1}{4}}(-1)^L \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu+1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right. \right\rangle \\
&\quad \times \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\
&= \sqrt{\frac{2L+1}{4}}(-1)^L \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right. \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu+1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \| \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu}{2} \rangle \\
&\quad \times \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha' &= (\mathcal{N}-1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \frac{3}{2} \\
\alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0
\end{aligned} \tag{4.55}$$

si tomamos el caso  $x$ ) de la tabla 4.8, sustituyendo con  $k=2$  obtenemos el factor isoescalar, determinando el coeficiente de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$  restante obtenemos

$$C_2 = \sqrt{\frac{2L+1}{4}}(-1)^L \underbrace{\sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}+2}}}_{ISF} \underbrace{\sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}}}}_{CG} \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \tag{4.56}$$

por lo tanto la transferencia de un protón a un núcleo con neutrón impar bajo el operador  $a_\pi^\dagger b_\pi$  en el espacio de  $F$ -spin generalizado es

$$C_2 = (-1)^L \sqrt{\frac{2L+1}{4}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}+2}} \langle (\mathcal{N}-1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle \tag{4.57}$$

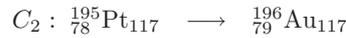
por lo tanto por fin, utilizando la ecuación (4.57) y (4.45) determinaremos nuestras primeras correlaciones, ya que los elementos de matrices reducidos ( $REM$ ) son los mismos, así obtenemos

$$\boxed{C_2 = (-1)^L \sqrt{\frac{2L+1}{4}} C_1} \tag{4.58}$$

o en su caso

$$\boxed{C_1 = (-1)^L \sqrt{\frac{4}{2L+1}} C_2} \tag{4.59}$$

en donde por ejemplo,  $C_1$  y  $C_2$  podrían ser reacciones como



La utilidad de este resultado, es cuando conocemos de antemano alguna de las dos probabilidades de reacción de un proceso específico de transferencia de un o más nucleones, podemos obtener la probabilidad de la reacción que no se conoce en términos de la que sí se conoce, y esto de manera analítica y cerrada. Lo interesante de este mecanismo matemático que hemos utilizado, es que ha sido puramente algebraico y no hemos resuelto ninguna ecuación diferencial para obtener este resultado, hemos utilizado solamente las herramientas algebraicas que hemos presentado a lo largo de esta obra.

Ahora vamos a repetir el mismo proceso pero ahora, para su proceso recíproco, el operador es

$$P_\pi = \gamma_0 (s_\pi^\dagger \times \tilde{a}_{\pi,3/2})^{(3/2)} + \gamma_2 (d_\pi^\dagger \times \tilde{a}_{\pi,3/2})^{(3/2)} \quad (4.60)$$

En el  $F$ -spin generalizado, debido a que  $P_\pi$  es un operador tensorial, bajo las transformaciones de  $F$ -spin (véase la tabla 4.5), el operador esta dado como  $P_\pi = T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{(1,0)}$ , llamemos  $P_\pi = b_\pi^\dagger \tilde{a}_\pi$  para hacerlo más intuitivo lo que hace el operador, hagamos una transferencia de un protón donde quitamos un protón a un núcleo con protón impar desde el esquema Supersimétrico

$$|\Psi_{op}\rangle \xrightarrow{b_\pi^\dagger \tilde{a}_\pi} |\Psi_{ee}\rangle \quad (4.61)$$

en donde  $\mathcal{N}_\pi$  y  $\mathcal{N}_\pi$  tienen el mismo valor para los dos núcleos, de esta forma, hagamos la suposición que estamos en los niveles más bajos energéticos

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 = & \langle [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - i, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, 0); (\tau_1, \tau_2); L \\ & \|P_\pi\| [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 1, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle \end{aligned} \quad (4.62)$$

aquí podemos observar que no hay dos espacios diferentes, ya que están reducidos los elementos de matriz.

Si prestamos atención a estado del núcleo final par-par, tenemos un acoplamiento de los bosones expresado como  $[\mathcal{N} - i, i]$ , cuyos acoplamientos en  $U(6)_B$  son

$$[\mathcal{N}_\nu] \otimes [\mathcal{N}_\pi] = [\mathcal{N}, 0] \oplus [\mathcal{N} - 1, 1] \quad (4.63)$$

que corresponderian a los casos  $i = 0$  y  $i = 1$ , esto surge debido a la manera como se acoplan los números cuánticos del estado final del núcleo par-par. Sin embargo cuando aplicamos  $F$ -spin generalizado tenemos

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 = & \left\langle (\mathcal{N} - 2i, i); \frac{\mathcal{N} - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3}; \alpha' | T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{\mathcal{N} - 1}{3}; \alpha \right\rangle \\ = & \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{\mathcal{N} - 1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \right| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 2i, i) \\ \frac{\mathcal{N} - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle \\ & \times \langle (\mathcal{N} - 2i, i); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\ = & \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N} - 1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 2i, i) \\ \frac{\mathcal{N} - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{\mathcal{N} - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2} \rangle \\ & \times \langle (\mathcal{N} - 2i, i); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

con

$$\begin{aligned} \alpha' = & (\Sigma_1, \Sigma_2, 0); (\tau_1, \tau_2); L \\ \alpha = & (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (4.65)$$

en donde la acción del operador sobre el estado inicial solo permite excitaciones de algunos estados de este núcleo, en  $F$ -spin estos estados posibles están expresados como

$$(\mathcal{N} - 1, 0) \otimes (1, 0) = (\mathcal{N}, 0) \oplus (\mathcal{N} - 2, 1) \quad (4.66)$$

que son efectivamente las reglas de selección de este operador sobre el estado inicial. El significado físico de esto nos dice que es posible poblar estados excitados con este operador pero no todos. Como podemos ver cuando agregamos un fermión de protón a un núcleo, tenemos diferentes maneras de excitarse hacia diferentes niveles energéticos, estamos transfiriendo momento angular. Por lo tanto evaluando en los dos casos tenemos

$$\bar{C}_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}}} \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = 0 \\ \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu}{\mathcal{N}}} \langle (\mathcal{N} - 2, 1); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = 1 \end{cases} \quad (4.67)$$

Hagamos una transferencia de un protón a un núcleo de impar-impar, pero en vez de añadir un protón, quitemos un protón a este núcleo y vamos a obtener un núcleo de neutrón impar,

$$|\Psi_{oo}\rangle \xrightarrow{b_\pi^\dagger \tilde{a}_\pi} |\Psi_{on}\rangle \quad (4.68)$$

Tomando los niveles energéticos más bajos de los núcleos con neutrón impar e impar-impar

$$\bar{C}_2 = \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, 0); (\tau_1, \tau_2); L, \frac{1}{2}, J \| P_\pi \| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0] [1]_\nu; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 \rangle. \quad (4.69)$$

Debido a que el  $F$ -spin generalizado sólo actúa sobre el espacio de bosones de protones  $b_\pi$ , bosones de neutrones  $b_\nu$  con su momento angular  $l_\nu$ . La parte orbital del protón  $j_\pi$  y el espín del neutrón  $s_\nu$  no participan en las reacciones donde el  $F$ -spin generalizado está presente. Entonces debemos reducir los elementos de matriz de la ecuación (4.69), utilizando las reglas de reducción (4.48), siendo  $J_1 = L$ ,  $J_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J = J$  y  $J'_1 = \frac{3}{2}$ ,  $J'_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J' = 1$ , con su correspondiente  $\alpha_i$ , obtenemos

$$\bar{C}_2 = (-1)^{L+3} \sqrt{(2J+1)3} \left\{ \begin{matrix} L & J & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{matrix} \right\} \times \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, 0); (\tau_1, \tau_2); L \| P_\pi \| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0] [1]_\nu; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle \quad (4.70)$$

Renombrando los coeficientes y el símbolo  $6j$  asociado esta transferencia.

$$\beta_{LJ} = (-1)^{L+3} \sqrt{(2J+1)3} \left\{ \begin{matrix} L & J & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{matrix} \right\}$$

Aquí vamos a tener dos acoplamientos, si vemos el estado final

$$|[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; \alpha'\rangle \quad (4.71)$$

vemos el primer acoplamiento que vamos a tener es el acoplamiento que hay entre bosones y nos da  $[\mathcal{N} - 1 - i, i]$  el segundo acoplamiento es el que hay cuando se acoplan estos bosones con el neutrón y nos da  $[\mathcal{N} - j, j - k, k]$ , el primer acoplamiento podemos tener casos simétricos con  $i' = 0$  y no simétricos  $i' = 1$ , y de estos, se deriva otro acoplamiento con el neutrón que es el antisimétrico  $j = 1, k = 0$ . Es interesante notar que solo vamos a tener un caso antisimétrico del acoplamiento con el neutrón extra, debido a las reglas de selección del operador. Aunque el acoplamiento antisimétrico en  $U(6)_{BF_\nu}$  dado como

$$[\mathcal{N} - 2, 1] \otimes [1]_\nu = [\mathcal{N} - 1, 1, 0] \oplus [\mathcal{N} - 2, 2, 0] \oplus [\mathcal{N} - 2, 1, 1] \quad (4.72)$$

las reglas de selección del operador  $T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{(1,0)}$  en el espacio  $F$ -spin solo nos permite los acoplamientos

$$(\mathcal{N} - 1, 0) \otimes (1, 0) = (\mathcal{N}, 0) \oplus (\mathcal{N} - 2, 1) \quad (4.73)$$

por lo que los estados asociados con las representaciones  $[\mathcal{N} - 2, 2, 0]$ ,  $[\mathcal{N} - 2, 1, 1]$  no intervienen en este proceso, por lo tanto los acoplamientos estarán dados como

$$[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi] \left\{ \begin{array}{ll} [\mathcal{N} - 1, 0] [1]_\nu & i' = 0 \\ [\mathcal{N} - 2, 1] [1]_\nu & i' = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} [\mathcal{N}, 0, 0] & j = k = 0 \\ [\mathcal{N} - 1, 1, 0] & j = 1, k = 0 \\ [\mathcal{N} - 1, 1, 0] & j = 1, k = 0 \end{array} \right. \quad (4.74)$$

Por otro lado en  $F$ -spin generalizado

$$\begin{aligned} \bar{C}_2 &= \beta_{LJ} \left\langle (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k); \frac{\mathcal{N}-1-2i'}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3}; \alpha' | T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3}; \alpha \right\rangle \\ &= \beta_{LJ} \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k) \\ \frac{\mathcal{N}-1-2i'}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \right. \right\rangle \\ &\quad \times \langle (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\ &= \beta_{LJ} \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k) \\ \frac{\mathcal{N}-1-2i'}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \right. \right\rangle \left\langle \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| \frac{\mathcal{N}-1-2i'}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2} \right. \right\rangle \\ &\quad \times \langle (\mathcal{N} - 2j + k, 0); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\Sigma_1, \Sigma_2, 0); (\tau_1, \tau_2); L \\ \alpha &= (\mathcal{N} - 1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi; \left(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (4.76)$$

así evaluando en todos esos casos tenemos

$$\bar{C}_2 = \begin{cases} \beta_{LJ} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}}} \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i' = j = k = 0 \\ -\beta_{LJ} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}-1}} \langle (\mathcal{N} - 2, 1); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i' = 0, j = 1, k = 0 \\ \beta_{LJ} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu - 1}{\mathcal{N}-1}} \langle (\mathcal{N} - 2, 1); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i' = 1, j = 1, k = 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

Si tomamos los casos simétricos, de las ecuaciones (4.77) y (4.67) debido a que los elementos de matrices reducidos ( $REM$ ) son los mismos, de esta forma, obtenemos las correlaciones

$$\boxed{\bar{C}_{1_{i=0}} = \frac{1}{\beta_{LJ}} \bar{C}_{2_{i'=j=k=0}}} \quad (4.78)$$

o también

$$\boxed{\bar{C}_{2_{i'=j=k=0}} = \beta_{LJ} \bar{C}_{1_{i=0}}} \quad (4.79)$$

Hemos determinado dos correlaciones de transferencia de un protón. Se pueden calcular más correlaciones utilizando otros niveles energéticos, que corresponden a los no simétricos, (véase las tablas 4.1 y 4.2).

$$\boxed{\bar{C}_{1_{i=1}} = \frac{1}{\beta_{LJ}} \sqrt{\frac{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}} \bar{C}_{2_{i'=j=1, k=0}}} \quad (4.80)$$

o también

$$\boxed{\bar{C}_{2_{i'=j=1, k=0}} = \beta_{LJ} \sqrt{\frac{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}} \bar{C}_{1_{i=1}}} \quad (4.81)$$

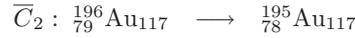
y también podemos encontrar correlaciones mixtas, simétricas y antisimétricas dados como

$$\boxed{\bar{C}_{1i=1} = -\frac{1}{\beta_{LJ}} \sqrt{\frac{N_\nu(N-1)}{N_\pi}} \bar{C}_{2i'=0,j=1,k=0}} \quad (4.82)$$

o también

$$\boxed{\bar{C}_{2i'=0,j=1,k=0} = -\beta_{LJ} \sqrt{\frac{N_\pi}{N_\nu(N-1)}} \bar{C}_{1i=1}} \quad (4.83)$$

cuyas transferencias de un protón  $\bar{C}_1$  y  $\bar{C}_2$  podrían ser

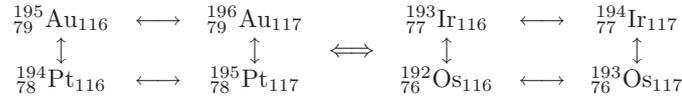


Solo aquí hemos presentado el mecanismo matemático para hallar estas correlaciones de reacciones de transferencias de un protón entre núcleos que presentan carácter supersimétrico.<sup>9</sup>

### 4.6.2 Transferencia de dos protones

Hemos visto algunos ejemplos de relaciones de reacciones de transferencia de un protón, estas relaciones siempre han sido entre miembros de un cuarteto supersimétrico. Sin embargo podemos encontrar también relaciones entre núcleos pertenecientes a dos cuartetos supersimétricos. A través de la transferencia de dos partículas, (véase la figura 4.4).

Figura 4.4: Correlaciones posibles entre los núcleos supersimétricos.



Debido a que la diferencia de números de nucleones entre los dos cuartetos supersimétricos son dos protones entonces la conexión entre estos cuartetos pueden ser estudiados a través de reacciones de transferencia de dos protones.

Las tranferencias de dos nucleones generalmente no son tan sencillos de hacer experimentalmente, ya que requieren de blindajes adecuados para los equipos que se esten manejando [58]. Sin embargo por esa razón es interesante desarrollar un mecanismo teórico que me permita describir este tipo de fenómenos que pueden suceder dentro de los núcleos.

En el IBM, el operador de transferencia de dos protones a primer orden están dados por

$$P_{2\pi}^\dagger = \gamma s_\pi^\dagger, \quad P_\pi = \gamma s_\pi \quad (4.84)$$

donde el operador  $s_\pi$  solo excita el estado base del núcleo final,  $s_\pi^\dagger$  puede también poblar estado excitados.

<sup>9</sup>Es interesante notar que en los procesos directos e inversos a pesar que parezcan iguales, no lo son. Uno puede ver que los factores isoescalares son los mismos en los procesos directos, pero en los reciprocos no lo son del todo. Esto se debe a que cuando quitamos un fermión de protón y agregamos un boson de protón a un estado base, el estado base sigue siendo base. En cambio cuando agregamos un fermión de protón y quitamos un bosón de protón a un estado base no necesariamente tiene que ser base, esto se puede explicar debido a que cuando agregamos un fermión de protón estamos transfiriendo momento angular semientero, y esto afecta de manera importante a la estructura estable del núcleo que vamos a transferirle este fermión, y el bosón siendo del tipo s, sin momento angular no manifiesta algo en especial en la estructura base del núcleo. Por esta razón cuando se hacen tranferencias de un fermión de protón  $a_\pi$  tenemos más estados posibles el cual puede adquirir el núcleo resultante.

Comencemos con una transferencia de dos protones a un núcleo par-par, en este caso particular vamos a utilizar el operador  $s_\pi^\dagger$  para agregar dos protones al núcleo par-par.

$$|\Psi_{ee}\rangle \xrightarrow{s_\pi^\dagger} |\Psi_{ee}\rangle \quad (4.85)$$

Si tomamos los siguientes valores para el núcleo del estado inicial  $[\mathcal{N} - i, i] = [\mathcal{N}, 0]$ ,  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0)$  con  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$  y  $L = 0$  y para el estado final suponemos que  $\mathcal{N}'_\pi = \mathcal{N}_\pi + 1$  y  $\mathcal{N}'_\nu = \mathcal{N}_\nu$  por lo tanto  $\mathcal{N}' = \mathcal{N} + 1$ , entonces

$$C_3 = \langle [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} + 1 - i, i]; (\Sigma, 0, 0); (0, 0); 0 \| s_\pi^\dagger \| [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \quad (4.86)$$

podemos verificar que no es necesario utilizar en este caso, las reglas de los elementos de matrices reducidos, porque ya están reducidos. No tenemos elementos en donde no actúe el  $F$ -spin generalizado. Haciendo una transferencia de dos protones en el contexto de  $F$ -spin generalizado considerando el estado inicial como estado bases tenemos

$$\begin{aligned} C_3 &= \left\langle (\mathcal{N} + 1 - 2i, i); \frac{\mathcal{N} + 1 - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N} + 1}{3}; \alpha' \| T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{(1,0)} \| [\mathcal{N}; (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3}; \alpha \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N} + 1 - 2i, i) \\ \frac{\mathcal{N} + 1 - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N} + 1}{3} \end{array} \right\rangle \langle (\mathcal{N} + 1 - 2i, i); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\ &= \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N} + 1 - 2i, i) \\ \frac{\mathcal{N} + 1 - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N} + 1}{3} \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \| \frac{\mathcal{N} + 1 - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2} \rangle \\ &\quad \times \langle (\mathcal{N} + 1 - 2i, i); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.87)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\Sigma, 0, 0); (0, 0); 0 \\ \alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

entonces si evaluamos los dos casos posibles tendremos

$$C_3 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N} + 1}} \langle (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = 0 \\ \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu}{\mathcal{N} + 1}} \langle (\mathcal{N} - 1, 1); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = 1. \end{cases} \quad (4.89)$$

Otra reacción que se puede relacionar con la anterior es la transferencia de dos protones entre dos núcleos con neutrón impar. Supongo que el par de protones es un boson tipo  $s$ , vamos a quitar dos protones a un núcleo de neutrón impar

$$|\Psi_{on}\rangle \xrightarrow{s_\pi^\dagger} |\Psi_{on}\rangle \quad (4.90)$$

de acuerdo a los niveles energéticos más bajos de los núcleos con neutrón impar, siendo  $\mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}$ , el núcleo del estado inicial con neutrón impar llevará  $[\mathcal{N} - j, j - k, k] = [\mathcal{N}, 0, 0]$ ,  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0)$ ,  $(\tau_1, \tau_2) = (0, 0)$  y  $L = 0$ , por otro lado, para el estado final, suponemos que  $\mathcal{N}'_\pi = \mathcal{N}_\pi + 1$  y  $\mathcal{N}'_\nu = \mathcal{N}_\nu$  por lo tanto  $\mathcal{N}' = \mathcal{N} + 1$ , de esta manera

$$\bar{C}_4 = \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} + 1 - j, j - k, k]; (\Sigma, 0, 0); (0, 0); 0, \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \| s_\pi^\dagger \| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0] [1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0, (\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}) \rangle \quad (4.91)$$

utilizando las reglas de reducción (4.48), donde  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J = \frac{1}{2}$ , y  $J'_1 = 0$ ,  $J'_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J' = \frac{1}{2}$ , y su correspondiente  $\alpha_i$ , tenemos que la ecuación (4.91) se convierte en

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 = & (-1)^1 \sqrt{4} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right\} \\ & \times \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} + 1 - j, j - k, j]; (\Sigma, 0, 0); (0, 0); 0 \| s_\pi^\dagger \| \\ & [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0] [1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.92)$$

determinando el valor del símbolo  $6j$ , utilizando el valor especial (4.50) tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right\} = \frac{(-1)}{\sqrt{2}} \quad (4.93)$$

por lo tanto la ecuación (4.92) se convierte en

$$\bar{C}_4 = \sqrt{2} \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} - i, i] [1]_\nu; [\mathcal{N} + 1 - j, j - k, k]; (\Sigma, 0, 0); (0, 0); 0 \| s_\pi^\dagger \| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0] [1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \quad (4.94)$$

por otro lado, en  $F$ -spin generalizado se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 = & \sqrt{2} \left\langle (\mathcal{N} + 1 - 2j + k, j - 2k); \frac{\mathcal{N} - 2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N} - 2}{3}; \alpha' \| T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2}, \frac{\mathcal{N} - 3}{3}; \alpha \right\rangle \\ = & \sqrt{2} \left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N} - 3}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N} + 1 - 2j + k, j - 2k) \\ \frac{\mathcal{N} - 2i'}{2}, \frac{\mathcal{N} - 2}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\mathcal{N} - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\mathcal{N} - 2i'}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2} \right\rangle \\ & \times \langle (\mathcal{N} + 1 - 2j + k, j - 2k); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\Sigma, 0, 0); (0, 0); 0 \\ \alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0, \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\bar{C}_4 = \begin{cases} \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N} + 1}} \langle (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = j = k = 0 \\ -\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N} + 1}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N}}} \langle (\mathcal{N} - 1, 1); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = 0, j = 1, k = 0 \\ \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu - 1}{\mathcal{N}}} \langle (\mathcal{N} - 1, 1); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i = 1, j = 1, k = 0 \end{cases} \quad (4.97)$$

Para las situaciones simétricas de las ecuaciones (4.97) y (4.89) obtenemos las correlaciones

$$C_{3_{i=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{C}_{4_{i'=j=k=0}} \quad (4.98)$$

o en su caso

$$\bar{C}_{4_{i'=j=k=0}} = \sqrt{2} C_{3_{i=0}} \quad (4.99)$$

Para situaciones asimétricas tenemos las correlaciones

$$C_{3_{i=1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu}{(\mathcal{N}_\nu - 1)(\mathcal{N} + 1)}} \bar{C}_{4_{i'=1, j=1, k=0}} \quad (4.100)$$

o en su caso

$$\boxed{\bar{C}_{4i'=1, j=1, k=0} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(\mathcal{N}_\nu-1)(\mathcal{N}+1)}{\mathcal{N}\mathcal{N}_\nu}} C_{3i=1}} \quad (4.101)$$

y también

$$\boxed{C_{3i=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu\mathcal{N}}{\mathcal{N}_\pi+1}} \bar{C}_{4i'=0, j=1, k=0}} \quad (4.102)$$

y su inverso

$$\boxed{\bar{C}_{4i'=0, j=1, k=0} = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi+1}{\mathcal{N}_\nu\mathcal{N}}} C_{3i=1}} \quad (4.103)$$

en donde por ejemplo,  $\bar{C}_4$  y  $C_3$  podrían ser reacciones como

$$C_3 : \frac{194}{78} \text{Pt}_{116} \longrightarrow \frac{192}{76} \text{Os}_{116}$$

$$\bar{C}_4 : \frac{195}{78} \text{Pt}_{117} \longrightarrow \frac{193}{76} \text{Os}_{117}$$

Hagamos la transferencia de dos protones donde quitaremos dos protones a nuestro núcleo del estado inicial expresado a través del operador  $s_\pi^\dagger$ , donde agregaremos un bosón de protón.

$$|\Psi_{\text{op}}\rangle \xrightarrow{s_\pi^\dagger} |\Psi_{\text{op}}\rangle \quad (4.104)$$

considerando el estado inicial base en donde agregamos un bosón de protón tenemos

$$\bar{C}_5 = \langle [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}-i, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \| s_\pi^\dagger \| \rangle \quad (4.105)$$

$$[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi-1]; [\mathcal{N}-1, 0]; (\mathcal{N}-1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}$$

como no tenemos ningun neutrón extra, no tenemos que desacoplar nada, ahora en el espacio de  $F$ -spin generalizado tenemos

$$\bar{C}_5 = \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-2i, i) \\ \frac{\mathcal{N}-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{\mathcal{N}-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi-\mathcal{N}_\nu}{2} \rangle \quad (4.106)$$

$$\times \langle (\mathcal{N}-2i, i); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}-1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)}$$

donde

$$\alpha' = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \quad (4.107)$$

$$\alpha = (\mathcal{N}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}$$

repetiendo el mismo mecanismo de cálculo, obtenemos de nuevo dos casos

$$\bar{C}_5 = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}_\pi+1}} \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}-1, 0); \alpha \rangle & i=0 \\ \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\nu}{\mathcal{N}}} \langle (\mathcal{N}-2, 1); \alpha' \| T^{(1,0)} \| (\mathcal{N}-1, 0); \alpha \rangle & i=1 \end{cases} \quad (4.108)$$

Ahora transferimos un par de protones a un núcleo de impar-impar, pero ahora agregamos dos protones a un núcleo de impar-impar, el operador que vamos a utilizar para agregar dos protones a un núcleo impar-impar sera  $s_\pi^\dagger$ ,

$$|\Psi_{00}\rangle \xrightarrow{s_{\pi}^{\dagger}} |\Psi_{00}\rangle \quad (4.109)$$

en donde nuestro núcleo inicial está en estado base, por lo que nuestra reacción tiene la forma:

$$\bar{C}_6 = \langle [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi}]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 \rangle \langle s_{\pi}^{\dagger} | [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi} - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 \rangle \quad (4.110)$$

desacoplando el neutrón con las reglas de reducción (4.48), tenemos

$$\bar{C}_6 = \sqrt{\frac{3}{4}} \langle [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi}]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle \langle s_{\pi}^{\dagger} | [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi} - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle \quad (4.111)$$

cambiandose al espacio de  $F$ -spin generalizado

$$\bar{C}_6 = \sqrt{\frac{3}{4}} \left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N} - 1, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N} - 2}{2}, \frac{\mathcal{N} - 4}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k) \\ \frac{\mathcal{N} - 1 - 2i'}{2}, \frac{\mathcal{N} - 3}{3} \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N} - 2}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi} - \mathcal{N}_{\nu}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{\mathcal{N} - 1 - 2i'}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi} - \mathcal{N}_{\nu} + 1}{2} \rangle \times \langle (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \quad (4.112)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \\ \alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\bar{C}_6 = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_{\pi}}{\mathcal{N} + 1}} \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i' = j = k = 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1}{\mathcal{N}}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_{\pi}}{\mathcal{N} - 1}} \langle (\mathcal{N} - 2, 1); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i' = 0, j = 1, k = 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_{\nu} - 1}{\mathcal{N} - 1}} \langle (\mathcal{N} - 2, 1); \alpha' | T^{(1,0)} | (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} & i' = 1, j = 1, k = 0 \end{cases} \quad (4.114)$$

por lo tanto utilizando la ecuación (4.114) y (4.108) las correlaciones para los casos simétricos son

$$\bar{C}_{6_{i'=j=k=0}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \bar{C}_{5_{i=0}} \quad (4.115)$$

o en su caso

$$\bar{C}_{5_{i=0}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \bar{C}_{6_{i'=j=k=0}} \quad (4.116)$$

y para los casos no simétricos

$$\bar{C}_{6_{i'=0, j=1, k=0}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_{\pi}}{(\mathcal{N} - 1)\mathcal{N}_{\nu}}} \bar{C}_{5_{i=1}} \quad (4.117)$$

y también

$$\bar{C}_{5_{i=1}} = -\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{(\mathcal{N} - 1)\mathcal{N}_{\nu}}{\mathcal{N}_{\pi}}} \bar{C}_{6_{i'=0, j=1, k=0}} \quad (4.118)$$

y también se tiene

$$\boxed{\bar{C}_{6_{i'=1,j=1,k=0}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}} \bar{C}_{5_{i=1}}} \quad (4.119)$$

ó su inverso

$$\boxed{\bar{C}_{5_{i=1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}} \bar{C}_{6_{i'=1,j=1,k=0}}} \quad (4.120)$$

en donde por ejemplo,  $\bar{C}_5$  y  $\bar{C}_6$  podrían ser reacciones como

$$\bar{C}_5 : {}^{195}_{79}\text{Au}_{116} \longrightarrow {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$$

$$\bar{C}_6 : {}^{196}\text{Au}_{117} \longrightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$$

A a continuación vamos a determinar las tranferencias inversas, estas tranferencias tendran el operador  $\tilde{s}_\pi$ , comencemos con una transferencia de dos protones

$$|\Psi_{ee}\rangle \xrightarrow{\tilde{s}_\pi} |\Psi_{ee}\rangle \quad (4.121)$$

una transferencia de dos protones, donde transferimos dos protones a un núcleo par-par pero ahora vamos a remover dos protones cuyo operador es  $\tilde{s}_\pi$  para el caso de un núcleo par-par siendo el estado inicial  $\mathcal{N}'_\pi = \mathcal{N}_\pi + 1$  y  $\mathcal{N}'_\nu = \mathcal{N}_\nu$  por lo tanto  $\mathcal{N}' = \mathcal{N} + 1$  y debido a que estamos quitando un bosón de protón al estado base, el estado final seguirá estando en estado base por lo tanto

$$\bar{C}_3 = \langle [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \| \tilde{s}_\pi \| [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} + 1, 0]; (\mathcal{N} + 1, 0, 0); (0, 0); 0 \rangle \quad (4.122)$$

usando  $F$ -spin generalizado tenemos

$$\bar{C}_3 = \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N} + 1, 0) \quad (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}+1}{3} \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2} \rangle \times \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \quad (4.123)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha' &= (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \\ \alpha &= (\mathcal{N} + 1, 0, 0); (0, 0); 0 \end{aligned} \quad (4.124)$$

Determinando el factor isoescalar y el coeficiente de Clebsch-Gordan tenemos

$$\bar{C}_3 = \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N} + 3}} \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \quad (4.125)$$

Si tomamos otra reacción que se relacione con la reacción anterior, un proceso donde vamos a agregar dos protones a el núcleo, pero se eliminará un bosón de protón.<sup>10</sup> Esta transferencia de dos protones a un núcleo con neutrón impar lo podemos ver como

$$|\Psi_{on}\rangle \xrightarrow{\tilde{s}_\pi} |\Psi_{on}\rangle. \quad (4.126)$$

<sup>10</sup>No se tiene que confundir que el hecho de que usemos un operador de aniquilación implica que se quiten protones, al contrario, aquí usamos el operador de aniquilación para agregar dos protones en este caso particular de reacción de núcleos con neutrón impar sin embargo matemáticamente se elimina un bosón de protón.

Para aclarar este hecho, como es posible agregar dos protones eliminando un bosón de protón, veamos un ejemplo en donde se ve el tipo de operador que manejaremos, si tenemos la transferencia de dos protones a el núcleo de  ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$ ,

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{s}_\pi & \\ {}^{193}_{76}\text{Os}_{117} & \longrightarrow & {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117} \\ N'_\pi = 3 & & N_\pi = 2 \\ M'_\pi = 0 & & M_\pi = 0 \\ N'_\nu = 4 & & N_\nu = 4 \\ M'_\nu = 1 & & M_\nu = 1 \end{array} \quad (4.127)$$

se puede observar que se necesita eliminar un bosón de protón para obtener el otro núcleo, en el esquema de Supersimetría esta reacción se puede escribir como

$$C_4 = \text{on} \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0; (\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}) \| \tilde{s}_\pi \| \langle \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle_{\text{on}} \quad (4.128)$$

utilizando las reglas de reducción (4.48), donde  $J_1 = 0$ ,  $J_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J = \frac{1}{2}$  y  $J'_1 = 0$ ,  $J'_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J' = \frac{1}{2}$ , con su correspondiente  $\alpha_i$ , tenemos que la ecuación (4.128) se convierte en

$$C_4 = (-1)\sqrt{4} \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right\} \times \text{on} \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \| \tilde{s}_\pi \| \langle \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle_{\text{on}} \quad (4.129)$$

determinando el valor del símbolo  $6j$ , utilizando las propiedades de simetría (4.49) y el valor especial (4.50) tenemos que

$$C_4 = \sqrt{2} \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_\nu; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \| \tilde{s}_\pi \| \langle \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle \quad (4.130)$$

por otro lado, en  $F$ -spin generalizado considerando que el número de bosones de protón del estado inicial es mayor que el del estado final, es decir  $\mathcal{N}'_\pi = \mathcal{N}_\pi + 1$  y  $\mathcal{N}'_\nu = \mathcal{N}_\nu$  entonces  $\mathcal{N}' = \mathcal{N} + 1$  así

$$\begin{aligned} C_4 &= \sqrt{2} \left\langle (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3}; \alpha' \| T^{(0,1)}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}} \| (\mathcal{N} + 1, 0); \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}'_\nu + 2}{2}, \frac{\mathcal{N}-2}{3}; \alpha \right\rangle \\ &= \sqrt{2} \left\langle \begin{array}{ccc} (\mathcal{N} + 1, 0) & (0, 1) & \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2}, \frac{\mathcal{N}-2}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{N}, 0) & & \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} & & \end{array} \right. \end{array} \right\rangle \quad (4.131) \\ &\times \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\ &= \sqrt{2} \left\langle \begin{array}{ccc} (\mathcal{N} + 1, 0) & (0, 1) & \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}-2}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \left| \begin{array}{ccc} (\mathcal{N}, 0) & & \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} & & \end{array} \right. \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 2}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \| \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu + 1}{2} \rangle \\ &\times \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0); (0, 0); 0 \\ \alpha' &= (\mathcal{N} + 1, 0, 0); (0, 0); 0'. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Determinando el factor isoescalar, de la tabla 4.8, y calculando el coeficiente de Clebsch-Gordan tenemos

$$C_4 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N} + 3}} \langle (\mathcal{N}, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N} + 1, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \quad (4.133)$$

por lo tanto utilizando las ecuaciones (4.133) y (4.125) obtenemos las correlaciones

$$\boxed{\bar{C}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}C_4} \quad (4.134)$$

o en su caso

$$\boxed{C_4 = \sqrt{2}\bar{C}_3} \quad (4.135)$$

en donde por ejemplo,  $C_4$  y  $\bar{C}_3$  podrían ser reacciones como



Podemos continuar con nuestra búsqueda de correlaciones con otras transferencias de protones, agregamos dos protones a un núcleo de protón impar, en donde vamos a utilizar el operador  $\tilde{s}_\pi$  para agregar dos protones al núcleo de protón impar. La transferencia de dos protones a un núcleo con protón impar, el operador asociado a la transferencia de dos protones a el núcleo con protón impar como por ejemplo el de  ${}_{77}^{193}\text{Ir}_{116}$  dado como

$$\begin{array}{ccc} {}_{77}^{193}\text{Ir}_{116} & \xrightarrow{\tilde{s}_\pi} & {}_{79}^{195}\text{Au}_{116} \\ N'_\pi = 2 & & N_\pi = 1 \\ M'_\pi = 1 & & M_\pi = 1 \\ N'_\nu = 5 & & N_\nu = 5 \\ M'_\nu = 0 & & M_\nu = 0 \end{array} \quad (4.136)$$

podemos observar que tenemos que utilizar un operador que elimine un bosón de protón,  $\tilde{s}_\pi$  para así obtener el otro núcleo con dos protones extras

$$|\Psi_{\text{op}}\rangle \xrightarrow{\tilde{s}_\pi} |\Psi_{\text{op}}\rangle \quad (4.137)$$

tomando el estado inicial como base y el estado final tiene un boson de protón más que el inicial  $\mathcal{N}'_\pi = \mathcal{N}_\pi + 1$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{N}' + 1$  entonces

$$C_5 = \langle [N'_\nu], [N'_\pi - 1]; [N - 1, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \|\tilde{s}_\pi\| \rangle \quad (4.138)$$

podemos verificar que no es necesario utilizar en este caso, las reglas de los elementos de matrices reducidos, porque ya están reducidos. En  $F$ -spin generalizado

$$\begin{aligned} C_5 &= \left\langle (\mathcal{N} - 1, 0); \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3}; \alpha' | T_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}}^{(0,1)} | (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3}; \alpha \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \right| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle \\ &\quad \times \langle (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\ &= \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \right| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_\pi - \mathcal{N}_\nu - 1}{2} \rangle \\ &\quad \times \langle (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.139)$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha' &= (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \\ \alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\mathcal{N} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}\end{aligned}\quad (4.140)$$

Ahora podemos determinar el facto isoescalar tomando el caso  $x$ ) de la tabla 4.8, calculando solo el factor de Clebsch-Gordan restante obtenemos

$$C_5 = \sqrt{\frac{\mathcal{N}_{\pi}}{\mathcal{N}+2}} \langle (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle \quad (4.141)$$

Relacionemos esta reacción con la transferencia de un par de protones a un núcleo de impar-impar, consideramos que el núcleo inicial esta en en el estado base y le removeremos un boson de protones.

$$|\Psi_{00}\rangle \xrightarrow{\tilde{s}_{\pi}} |\Psi_{00}\rangle \quad (4.142)$$

De acuerdo a los niveles energéticos más bajos de los núcleos impar-impar como vimos en la tabla 4.2 podemos escribir la reacción como

$$\begin{aligned}C_6 &= \langle [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi} - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0][1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 \| \tilde{s}_{\pi} | \\ & \quad | [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi}]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_{\nu}; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\mathcal{N} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 \rangle\end{aligned}\quad (4.143)$$

utilizando las reglas de reducción (4.48), donde  $J_1 = \frac{3}{2}$ ,  $J_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J = 1$ , y  $J'_1 = \frac{3}{2}$ ,  $J'_2 = \frac{1}{2}$ ,  $J' = 1$ , y su corespondiente  $\alpha_i$ , tenemos

$$\begin{aligned}C_6 &= \sqrt{\frac{3}{4}} \langle [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi} - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0][1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \| \tilde{s}_{\pi} | \\ & \quad | [\mathcal{N}_{\nu} - 1], [\mathcal{N}_{\pi}]; [\mathcal{N} - 1, 0][1]_{\nu}; [\mathcal{N}, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\pi}; (\mathcal{N} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle\end{aligned}\quad (4.144)$$

por otro lado, en  $F$ -spin generalizado la transferencia de dos protones a un núcleo impar-impar, se expresa como

$$\begin{aligned}C_6 &= \sqrt{\frac{3}{4}} \left\langle (\mathcal{N} - 1, 0); \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3}; \alpha' \| T^{(0,1)}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}} \| (\mathcal{N}, 0); \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2} + 1, \frac{\mathcal{N}-3}{3}; \alpha \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2} + 1, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right. \right\rangle \\ & \quad \times \langle (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} (0, 1) \\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right. \right\rangle \langle \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}+1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2} \rangle \\ & \quad \times \langle (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)}\end{aligned}\quad (4.145)$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha' &= (\mathcal{N} - 1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \frac{3}{2} \\ \alpha &= (\mathcal{N}, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi; \left(\mathcal{N} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \frac{3}{2}\end{aligned}\quad (4.146)$$

Determinando el factor isoescalar, tomando el caso  $x$  de la tabla 4.8, evaluando en  $k = 2$ , y calculando su respectivo coeficiente de Clebsch-Gordan obtenemos

$$C_6 = \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}+2}} \langle (\mathcal{N} - 1, 0); \alpha' \| T^{(0,1)} \| (\mathcal{N}, 0); \alpha \rangle_{SU(3)} \quad (4.147)$$

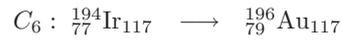
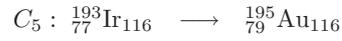
por lo tanto utilizando la ecuación (4.147) y (4.141) obtenemos las correlaciones

$$C_6 = \sqrt{\frac{3}{4}} C_5 \quad (4.148)$$

o en su caso

$$C_5 = \sqrt{\frac{4}{3}} C_6 \quad (4.149)$$

en donde por ejemplo,  $C_5$  y  $C_6$  podrían ser reacciones como



Podemos resumir algunos de los factores isoescalares utilizados en la transferencia de partículas en el modelo Supersimétrico bajo la simetría de  $U(6)$  a través de la siguiente tabla:

Tabla 4.9: Factores Isoescalares en la transferencia de nucleones en el  $F$ -spin generalizado asociados solo a estados simétricos

<i>Transferencia</i>	<i>Núcleo</i>	<i>Factor Isoescalar</i>	Valor calculado
1) Protón	par-par	$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}+1}{\mathcal{N}+2}}$
		$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}-1, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle$	1
	neutron impar	$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{2}{\mathcal{N}+2}}$
		$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}-1, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}-1}{\mathcal{N}}}$
2) Dos protones	par-par	$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}+1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}+1}{3} \end{array} \right\rangle$	1
		$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}+1, 0) & (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}+1}{2}, \frac{\mathcal{N}+1}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}+2}{\mathcal{N}+3}}$
	neutron impar	$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}+2}}$
		$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}-1, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}-1}{\mathcal{N}}}$
	protón impar	$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}+1}{\mathcal{N}+2}}$
		$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}-1, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}+1}}$
	impar-impar	$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}, 0) & (0, 1) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{N}+2}}$
		$\left\langle \begin{array}{cc} (\mathcal{N}-1, 0) & (1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\mathcal{N}-1}{\mathcal{N}+1}}$

Podemos resumir las correlaciones obtenidas en la siguiente tabla:

Tabla 4.10: Correlaciones de transferencias de nucleones

<i>Tipo de Transferencia</i>	<i>Ejemplo</i>	<i>Correlación</i>
1) Adición de protón a núcleo par-par	$C_1 : {}^{194}_{78}\text{Pt}_{116} \rightarrow {}^{195}_{79}\text{Au}_{116}$	$C_1 = (-1)^L \sqrt{\frac{4}{2l+1}} C_2$
a núcleo neutron impar	$C_2 : {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117} \rightarrow {}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$	$C_2 = (-1)^L \sqrt{\frac{2l+1}{4}} C_1$
2) Sustracción de protón: a núcleo protón impar	$\bar{C}_1 : {}^{195}_{79}\text{Au}_{116} \rightarrow {}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$	$\bar{C}_{1_{i=0}} = \frac{1}{\beta_{LJ}} \bar{C}_{2_{i'=j=k=0}}$ $\bar{C}_{1_{i=1}} = -\frac{1}{\beta_{LJ}} \sqrt{\frac{N_\nu(N-1)}{N_\pi}} \bar{C}_{2_{i'=0,j=1,k=0}}$ $\bar{C}_{1_{i=1}} = \frac{1}{\beta_{LJ}} \sqrt{\frac{(N-1)N_\nu}{(N_\nu-1)N}} \bar{C}_{2_{i'=j=1,k=0}}$
a núcleo impar-impar	$\bar{C}_2 : {}^{196}_{79}\text{Au}_{117} \rightarrow {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$	$\bar{C}_{2_{i'=j=k=0}} = \beta_{LJ} \bar{C}_{1_{i=0}}$ $\bar{C}_{2_{i'=0,j=1,k=0}} = -\beta_{LJ} \sqrt{\frac{N_\pi}{N_\nu(N-1)}} \bar{C}_{1_{i=1}}$ $\bar{C}_{2_{i'=j=1,k=0}} = \beta_{LJ} \sqrt{\frac{(N-1)N}{(N-1)N_\nu}} \bar{C}_{1_{i=1}}$
3) Adición dos protones: a núcleo par-par	$\bar{C}_3 : {}^{192}_{76}\text{Os}_{116} \rightarrow {}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$	$\bar{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} C_4$
a núcleo neutrón impar	$C_4 : {}^{193}_{76}\text{Os}_{117} \rightarrow {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$	$C_4 = \sqrt{2} \bar{C}_3$
4) Sustracción dos protones: a núcleo par-par	$C_3 : {}^{194}_{78}\text{Pt}_{116} \rightarrow {}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$	$C_{3_{i=0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{C}_{4_{i'=j=k=0}}$ $C_{3_{i=1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N_\nu N}{N_\pi+1}} \bar{C}_{4_{i'=0,j=1,k=0}}$ $C_{3_{i=1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N N_\nu}{(N_\nu-1)(N+1)}} \bar{C}_{4_{i'=1,j=1,k=0}}$
a núcleo neutrón impar	$\bar{C}_4 : {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117} \rightarrow {}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$	$\bar{C}_{4_{i'=j=k=0}} = \sqrt{2} C_{3_{i=0}}$ $\bar{C}_{4_{i'=0,j=1,k=0}} = -\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_\pi+1}{N_\nu N}} C_{3_{i=1}}$ $\bar{C}_{4_{i'=1,j=1,k=0}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(N_\nu-1)(N+1)}{N N_\nu}} C_{3_{i=1}}$
5) Adición dos protones: a núcleo protón impar	$C_5 : {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116} \rightarrow {}^{195}_{79}\text{Au}_{116}$	$C_5 = \sqrt{\frac{4}{3}} C_6$
a núcleo impar-impar	$C_6 : {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \rightarrow {}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$	$C_6 = \sqrt{\frac{3}{4}} C_5$
6) Sustracción dos protones: a núcleo protón impar	$\bar{C}_5 : {}^{195}_{79}\text{Au}_{116} \rightarrow {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$	$\bar{C}_{5_{i=0}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \bar{C}_{6_{i'=j=k=0}}$ $\bar{C}_{5_{i=1}} = -\sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{(N-1)N_\nu}{N_\pi}} \bar{C}_{6_{i'=0,j=1,k=0}}$ $\bar{C}_{5_{i=1}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{(N-1)N_\nu}{(N_\nu-1)N}} \bar{C}_{6_{i'=1,j=1,k=0}}$
a núcleo impar-impar	$\bar{C}_6 : {}^{196}_{79}\text{Au}_{117} \rightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$	$\bar{C}_{6_{i'=j=k=0}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \bar{C}_{5_{i=0}}$ $\bar{C}_{6_{i'=0,j=1,k=0}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{N_\pi}{(N-1)N_\nu}} \bar{C}_{5_{i=1}}$ $\bar{C}_{6_{i'=1,j=1,k=0}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{(N_\nu-1)N}{(N-1)N_\nu}} \bar{C}_{5_{i=1}}$

## 4.7 Intensidades espectroscópicas

En esta sección vamos a determinar algunas intensidades de las reacciones de transferencia de algunos núcleos de la región  $A \sim 190$  de masas, correspondientes a los dos cuartetos supersimétricos  $^{194,195}\text{Pt}$ ,  $^{195,196}\text{Au}$  y  $^{192,193}\text{Os}$ ,  $^{193,194}\text{Ir}$ . Determinando las intensidades de transferencias de un protón a un núcleo con neutrón impar  $^{195}\text{Pt}$  y la sustracción de protón a un núcleo impar-impar  $^{196}\text{Au}$  y las intensidades de transferencia de dos protones de un núcleo con neutrón impar  $^{195}\text{Pt}$  y la de un núcleo impar-impar  $^{196}\text{Pt}$  usando nuestras correlaciones calculadas anteriormente que se muestran en la tabla 4.10. El estado base de las funciones de onda de los cuartetos supersimétricos que vamos a considerar son

$$\begin{aligned}
|\Psi_{ee}\rangle_{\text{gs}} &= |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N}], (\mathcal{N}, 0, 0), (0, 0), 0 \rangle, \\
|\Psi_{op}\rangle_{\text{gs}} &= \left| [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 1], (\mathcal{N} - 1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi; \left(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{3}{2} \right\rangle, \\
|\Psi_{on}\rangle_{\text{gs}} &= \left| [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1], [1]_\nu; [\mathcal{N}], (\mathcal{N}, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}_\nu; \frac{1}{2} \right\rangle, \\
|\Psi_{oo}\rangle_{\text{gs}} &= |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2], [1]_\nu; [\mathcal{N} - 1], \\
&\quad (\mathcal{N} - 1, 0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_\pi; \left(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{3}{2}, \frac{1}{2}_\nu; 1 \rangle. \quad (4.150)
\end{aligned}$$

Aquí  $\mathcal{N}_\nu$  y  $\mathcal{N}_\pi$  denotan el número de bosones de protón y neutrón en el núcleo par-par. El número total de bosones  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ .

### 4.7.1 Transferencia de un protón

Comenzaremos con la transferencia de un protón, el operador tensorial de transferencia de un protón (4.39) estarán dados como

$$\begin{aligned}
P_{\pi,1}^\dagger &= T^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, m} = -\sqrt{\frac{1}{6}} \left( \tilde{s}_\pi \times a_{\pi, \frac{3}{2}}^\dagger \right)_m^{(\frac{3}{2})} + \sqrt{\frac{5}{6}} \left( \tilde{d}_\pi \times a_{\pi, \frac{3}{2}}^\dagger \right)_m^{(\frac{3}{2})}, \\
P_{\pi,2}^\dagger &= T^{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, m} = \sqrt{\frac{5}{6}} \left( \tilde{s}_\pi \times a_{\pi, \frac{3}{2}}^\dagger \right)_m^{(\frac{3}{2})} + \sqrt{\frac{1}{6}} \left( \tilde{d}_\pi \times a_{\pi, \frac{3}{2}}^\dagger \right)_m^{(\frac{3}{2})}, \quad (4.151)
\end{aligned}$$

y para el proceso inverso

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{\pi,1} &= T^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, m} = -\sqrt{\frac{1}{6}} \left( s_\pi^\dagger \times \tilde{a}_{\pi, \frac{3}{2}} \right)_m^{(\frac{3}{2})} + \sqrt{\frac{5}{6}} \left( d_\pi^\dagger \times \tilde{a}_{\pi, \frac{3}{2}} \right)_m^{(\frac{3}{2})}, \\
\tilde{P}_{\pi,2} &= T^{(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, m} = \sqrt{\frac{5}{6}} \left( s_\pi^\dagger \times \tilde{a}_{\pi, \frac{3}{2}} \right)_m^{(\frac{3}{2})} + \sqrt{\frac{1}{6}} \left( d_\pi^\dagger \times \tilde{a}_{\pi, \frac{3}{2}} \right)_m^{(\frac{3}{2})}. \quad (4.152)
\end{aligned}$$

Cabe mencionar que las correlaciones que hemos determinado, no dependen de los factores  $\gamma$  que acompañan a la ecuación (4.39), es válido para cualquier operador de transferencia de un protón mostrados en las ecuaciones de arriba (4.151) y (4.152). Los elementos de matriz fueron derivados usando el álgebra de Racah-Wigner, cálculo tensorial y técnicas de  $F$ -spin generalizado así como la determinación de los factores isoescalares (*i.e.* son los coeficientes de Clebsch-Gordan generalizados.).

Presentaremos algunas intensidades de transferencias de un protón desde un núcleo par-par a protón impar, éstas fueron tomadas de las referencias de J.Barea R.Bijker y A. Frank [55]-[56]. En esta tesis las reacciones asociadas a estas transferencias las hemos analizado y las hemos descrito con la notación de  $C_1$  y su inverso  $\bar{C}_1$  que corresponde a la transferencia de un protón de un núcleo protón impar a par-par, nosotros vamos a correlacionar estas reacciones con las reacciones  $C_2$  y  $\bar{C}_2$ .

Tabla 4.11: Intensidades de la tranferencia de un protón en el límite  $Spin(6)$  para las transiciones (a) desde par-par a protón impar  $C_1$  y (b) protón impar a par-par  $\overline{C}_1$ .

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad 1</i>	<i>Intensidad 2</i>
<b>(a)</b> $\langle [\mathcal{N} - 1 - i, i], (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (\tau_1, \tau_2), J \mid$	$\mid \langle \Psi_{op} \mid P_{\pi,1}^\dagger \mid \Psi_{ee} \rangle_{gs} \mid^2$	$\mid \langle \Psi_{op} \mid P_{\pi,2}^\dagger \mid \Psi_{ee} \rangle_{gs} \mid^2$
$\langle [\mathcal{N} - 1, 0], (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2} \mid$	$\frac{2\mathcal{N}_\pi}{3}$	$\frac{8(\mathcal{N}+4)^2\mathcal{N}_\pi}{15(\mathcal{N}+1)^2}$
$\langle [\mathcal{N} - 1, 0], (\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2} \mid$	0	$\frac{6(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\pi}{5(\mathcal{N}+1)^2}$
<b>(b)</b> $\langle [\mathcal{N} - i, i], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\tau_1, \tau_2), L \mid$	$\mid \langle \Psi_{ee} \mid \tilde{P}_{\pi,1} \mid \Psi_{op} \rangle_{gs} \mid^2$	$\mid \langle \Psi_{ee} \mid \tilde{P}_{\pi,2} \mid \Psi_{op} \rangle_{gs} \mid^2$
$\langle [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N}, 0, 0), (0, 0), 0 \mid$	$\frac{2\mathcal{N}_\pi}{3}$	$\frac{8(\mathcal{N}+4)^2\mathcal{N}_\pi}{15(\mathcal{N}+1)^2}$
$\langle [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N}, 0, 0), (1, 0), 2 \mid$	$\frac{2(\mathcal{N}+4)\mathcal{N}_\pi}{3\mathcal{N}}$	$\frac{8(\mathcal{N}-2)^2(\mathcal{N}+4)\mathcal{N}_\pi}{15\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2}$
$\langle [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (0, 0), 0 \mid$	0	$\frac{6(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\pi}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)^2}$
$\langle [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (1, 0), 2 \mid$	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\pi}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)^2}$
$\langle [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 1, 1, 0), (1, 0), 2 \mid$	$\frac{4(\mathcal{N}+2)\mathcal{N}_\nu}{3\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)}$	$\frac{4(\mathcal{N}+8)^2\mathcal{N}_\nu}{15\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)}$
$\langle [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 1, 1, 0), (1, 1), L \mid$	$\frac{2\mathcal{N}_\nu(2L+1)}{15(\mathcal{N}+1)}$	$\frac{2\mathcal{N}_\nu(2L+1)}{75(\mathcal{N}+1)}$
$\langle [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (0, 0), 0 \mid$	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\nu}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)}$
$\langle [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (1, 0), 2 \mid$	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)^2(\mathcal{N}+3)(\mathcal{N}_\nu)}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)}$

Ahora debido a que el proceso (a) corresponden a el caso  $C_1$  y el proceso (b) corresponde al caso  $\overline{C}_1$  nosotros tenemos las correlaciones respectivas que son para los casos de tranferencia de un protón a un núcleo con neutrón impar  $C_2$  y la sustracción de un protón a un núcleo impar impar  $\overline{C}_2$  por lo tanto utilizando nuestras correlaciones de la tabla 4.10 obtenemos:

Tabla 4.12: Intensidades de la tranferencia de un protón en el límite  $Spin(6)$  para las transiciones (c) desde neutrón impar a impar-impar  $C_2$ . Los estados finales que tomamos son:

$\langle \Psi_{oo} | = \langle [N-1-j, j-k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L |$  y el caso (d) impar-impar a neutrón impar  $C_2$ . Los estado finales que tomamos son:

$\langle \Psi_{on} | = \langle [N-1-i', i'][1]_\nu; [N-j, j-k, k]; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); L, \frac{1}{2}; J |$ .

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad 1</i>	<i>Intensidad 2</i>
(c) $\langle \Psi_{oo}  $	$ \langle \Psi_{oo}    P_{\pi,1}^\dagger    \Psi_{on} \rangle_{gs} ^2$	$ \langle \Psi_{oo}    P_{\pi,2}^\dagger    \Psi_{on} \rangle_{gs} ^2$
$\langle [N-1, 0]; (\mathcal{N}-1, 0, 0), [1]_\pi; (\mathcal{N}-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L  $	$\frac{2\mathcal{N}_\pi (2L+1)}{3} \frac{\beta_{0J}^2}{4}$	$\frac{8(\mathcal{N}+4)^2 \mathcal{N}_\pi (2L+1)}{15(\mathcal{N}+1)^2} \frac{\beta_{0J}^2}{4}$
$\langle [N-1, 0]; (\mathcal{N}-1, 0, 0), [1]_\pi; (\mathcal{N}-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\pi (2L+1)}{5(\mathcal{N}+1)^2} \frac{\beta_{0J}^2}{4}$
(d) $\langle \Psi_{on}  $	$ \langle \Psi_{on}    P_{\pi,1}^\dagger    \Psi_{oo} \rangle_{gs} ^2$	$ \langle \Psi_{on}    P_{\pi,2}^\dagger    \Psi_{oo} \rangle_{gs} ^2$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N, 0], (\mathcal{N}, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	$\frac{2(\mathcal{N}_\pi)}{3} \beta_{0J}^2$	$\frac{8(\mathcal{N}+4)^2 \mathcal{N}_\pi}{15(\mathcal{N}+1)^2} \beta_{0J}^2$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N, 0], (\mathcal{N}, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	$\frac{2(\mathcal{N}+4)\mathcal{N}_\pi}{3\mathcal{N}} \beta_{2J}^2$	$\frac{8(\mathcal{N}-2)^2 (\mathcal{N}+4)\mathcal{N}_\pi}{15\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2} \beta_{2J}^2$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N, 0], (\mathcal{N}-2, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\pi}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)^2} \beta_{0J}^2$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N, 0], (\mathcal{N}-2, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)\mathcal{N}_\pi}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)^2} \beta_{2J}^2$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-1, 1, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	$\frac{4(\mathcal{N}+2)}{3\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{2J}^2 \mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$	$\frac{4(\mathcal{N}+8)^2}{15\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)} \frac{\beta_{2J}^2 \mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-1, 1, 0), (1, 1), L, \frac{1}{2}, J  $	$\frac{2(2L+1)}{15(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{LJ}^2 \mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$	$\frac{2(2L+1)}{75(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{LJ}^2 \mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-2, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{0J}^2 \mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-1, 0][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-2, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)^2 (\mathcal{N}+3)}{5(\mathcal{N})^2(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)} \frac{\beta_{2J}^2 \mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-2, 1][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-1, 1, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	$\frac{4(\mathcal{N}+2)}{3(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{2J}^2 (\mathcal{N}_\nu-1)}{(\mathcal{N}-1)}$	$\frac{4(\mathcal{N}+8)^2}{15(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)} \frac{\beta_{2J}^2 (\mathcal{N}_\nu-1)}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-2, 1][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-1, 1, 0), (1, 1), L, \frac{1}{2}, J  $	$\frac{2(2L+1)}{15(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{LJ}^2 (\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)}$	$\frac{2(2L+1)}{75(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{LJ}^2 (\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-2, 1][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-2, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)}{5(\mathcal{N})(\mathcal{N}+1)} \frac{\beta_{0J}^2 (\mathcal{N}_\nu-1)}{(\mathcal{N}-1)}$
$\langle [N-2, 1][1]_\nu; [N-1, 1], (\mathcal{N}-2, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0	$\frac{6(\mathcal{N}-2)^2 (\mathcal{N}+3)}{5(\mathcal{N})(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)} \frac{\beta_{2J}^2 (\mathcal{N}_\nu-1)}{(\mathcal{N}-1)}$

$$\beta_{LJ} = (-1)^{L+3} \sqrt{(2J+1)3} \left\{ \begin{matrix} L & J & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{matrix} \right\}$$

Una propiedad que se vemos en estas intensidades espectroscópicas es la regla de la suma, la suma de todas las intensidades de todos los estado finales es igual a la suma de todas las intensidades que se obtuvieron por las correlaciones.

$$\sum_f |\langle \Psi_{\text{op}} | P_{\pi,1}^\dagger | \Psi_{\text{ee}} \rangle_{\text{gs}}|^2 = \sum_f |\langle \Psi_{\text{oo}} | P_{\pi,1,(2)}^\dagger | \Psi_{\text{on}} \rangle_{\text{gs}}|^2 \quad (4.153)$$

y también

$$\sum_f |\langle \Psi_{\text{ee}} | P_{\pi,1}^\dagger | \Psi_{\text{op}} \rangle_{\text{gs}}|^2 = \sum_f |\langle \Psi_{\text{oo}} | P_{\pi,1,(2)}^\dagger | \Psi_{\text{oo}} \rangle_{\text{gs}}|^2 \quad (4.154)$$

Ahora lo que vamos a analizar son las intensidades relativas, en donde normalizaremos la intensidades con respecto la intensidad del estado base, con la finalidad de comparar las intesidades correlacionadas. Se introducen las intensidades relativas espectroscópicas

$$R_n = \frac{I_n}{I_{\text{ref}}} \quad (4.155)$$

donde  $I_{\text{ref}}$  es la intensidad espectroscópica de un estado de referencia. Nosotros tomaremos el estado base de referencia que corresponde a el caso  $n = 1$ .

Tabla 4.13: Intensidades relativas de la tranferencia de un protón para las transiciones desde par-par  $\Psi_{\text{ee}}$  a protón impar  $\Psi_{\text{op}}$  correspondientes a  $C_1$ . Los estados finales que tomamos son:  
 $\langle \Psi_{\text{op}} | = \langle [\mathcal{N} - 1 - i, i], (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (\tau_1, \tau_2), J |$

	<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>	<i>Intensidad relativa 2</i>
$n$	$\langle \Psi_{\text{op}}  $	$R_n$	$R_n'$
1	$\langle [\mathcal{N} - 1, 0], (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}  $	1	1
2	$\langle [\mathcal{N} - 1, 0], (\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}  $	0	$\frac{9(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)}{4(\mathcal{N}+4)^2}$

siendo la intensidad relativa correlacionada expresada como

$$S_n = \frac{I_n}{I_{\text{ref}}} \quad (4.156)$$

quiero recordar que las magnitudes de las intensidades espectroscópicas relativas son las que miden experimentalmente, por tal razón en las aplicaciones que manejaremos optaremos por presetar solamente las intensidades espectroscópicas relativas. Si ahora presentamos las intensidades espectroscópicas relativas que se obtuvieron gracias a nuestras correlaciones tenemos la siguiente tabla:

Tabla 4.14: Intensidades relativas de la tranferencia de un protón para las transiciones desde neutrón impar  $\Psi_{on}$  a impar-impar  $\Psi_{oo}$  dados por  $C_2$ . Los estados finales que tomamos son:  
 $\langle \Psi_{oo} | = \langle [N-1-j, j-k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L |$

	<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>	<i>Intensidad relativa 2</i>
$n$	$\langle \Psi_{oo}  $	$S_n$	$S'_n$
1	$\langle [N-1, 0]; (N-1, 0, 0); (N-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L  $	$R_1$	$R'_1$
2	$\langle [N-1, 0]; (N-1, 0, 0); (N-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L  $	0	$R'_2$

Aquí podemos observar que la intensidad relativa a su estado base de la tranferencia de un protón a un núcleo con protón impar es igual a la que sucede al con el núcleo núcleo par-par,  $S_n = R_n(1)$  y  $S'_n = R'_n(1)$ . Para comenzar la discusión de las aplicaciones de este formalismo, podemos mostrar un ejemplo en donde se comprueba experimentalmente<sup>11</sup> la validez de esta formulación. La reacción nuclear que se hizo fué  ${}^{192}_{76}\text{Os}_{116} \rightarrow {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$ , el cual a nosotros le asociamos el operador  $P_{\pi,1}^\dagger$ , presentamos el resultado en la siguiente tabla:

Tabla 4.15: Comparación entre intensidades teóricas y experimentales de la tranferencia de un nucleón de la reacción  ${}^{192}_{76}\text{Os}_{116} (\alpha, t) {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$ , donde  $\mathcal{N}_\pi = 3$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 8$ . Los estados finales que tomamos son:  $\langle {}^{192}\text{Ir} | = \langle [N-i, i], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\tau_1, \tau_2), L |$ .

	<i>Estado final</i>	<i>Teórico</i>	<i>Experimental</i>
$n$	$\langle {}^{193}\text{Ir}  $	$R_n$	$(\alpha, t)$
1	$\langle [7, 0], (\frac{15}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}  $	1	1
2	$\langle [7, 0], (\frac{13}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}  $	0	< 0.01

Las intensidades están normalizadas a 1.00

A partir del resultado anterior, debido a que la reacción  ${}^{192}_{76}\text{Os}_{116} \rightarrow {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$  está correlacionada con  ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117} \rightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$  podemos predecir dos intensidades espectroscópicas (asociadas a la tabla 4.14) obtenemos:

<sup>11</sup>Los valores experimentales fueron tomados de la referencia [59].

Tabla 4.16: Intensidades relativas de la reacción de transferencia  ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117} \rightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$ , donde  $\mathcal{N}_\pi = 3$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 8$ . Los estados finales que tomamos son:

$$\langle {}^{193}\text{Ir} | = \langle [\mathcal{N} - 1 - j, j - k, k], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; L |.$$

	<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>
$n$	$\langle {}^{193}\text{Ir}  $	$S_n$
1	$\langle [7, 0], (\frac{15}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, L  $	1
2	$\langle [7, 0], (\frac{13}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, L  $	0

Las intensidades están normalizadas a 1.00 con  $P_{\pi,1}^\dagger$ .

Otro ejemplo en donde utilizemos los dos operadores  $P_{\pi,1}^\dagger$  y  $P_{\pi,2}^\dagger$ , sería el caso particular de la reacción

$$I_{n,(n)'} = \left| \left\langle \left\langle {}^{195}_{78}\text{Au}_{116} \left\| P_{\pi,1,(2)}^\dagger \right\| \left\langle {}^{194}_{78}\text{Pt}_{116} \right\rangle \right\rangle \right|^2 \quad (4.157)$$

donde  $n$  representa los posibles estados de excitación del núcleo  ${}^{195}_{78}\text{Au}_{116}$ , en la siguiente tabla solo vamos a poner el número  $n$  del estado para simplificar la notación (asociados a la tabla 4.13) por lo tanto tenemos:

Tabla 4.17: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  ${}^{195}_{78}\text{Au}_{116}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ , que son los números cuánticos asociados al estado inicial.

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>	<i>Intensidad relativa 2</i>
$n$	$R_n$	$R'_n$
1	1	1
2	0	1.12

así usando nuestras correlaciones podemos predecir las intensidades de los posibles estados de excitación (asociados a la tabla 4.14) del núcleo  ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$ ,

$$I_{n,(n)'} = \left| \left\langle \left\langle {}^{196}_{79}\text{Au}_{117} \left\| P_{\pi,1,(2)}^\dagger \right\| \left\langle {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117} \right\rangle \right\rangle \right|^2 \quad (4.158)$$

obtenemos las intensidades:

Tabla 4.18: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  $^{196}_{79}\text{Au}_{117}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ , que son los números cuánticos asociados al estado inicial.

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>	<i>Intensidad relativa 2</i>
$n$	$S_n$	$S'_n$
1	1	1
2	0	1.12

Si queremos ver explícitamente la correlación uno a uno en la transferencia de un de un protón al núcleo  $^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$  y obtenemos  $^{196}_{79}\text{Au}_{117}$ , podemos comparar las dos reacciones de una manera más gráfica en donde si presentamos sus intensidades espectroscópicas relativas,

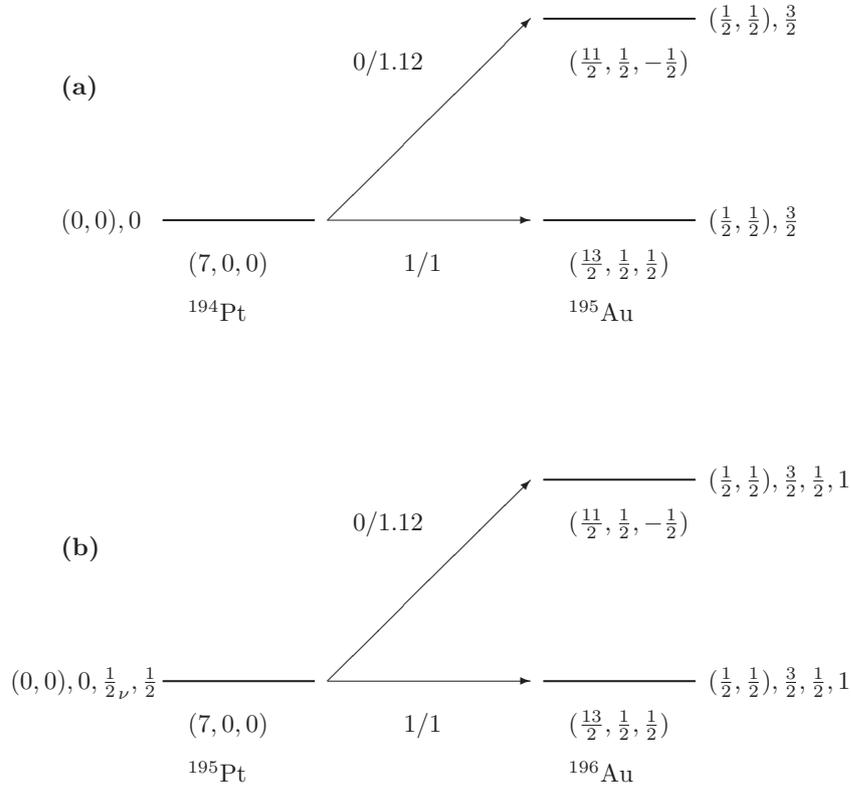


Figura 4.5:

(a) Reacciones de transferencia de un protón permitidas para  $^{194}\text{Pt} \rightarrow ^{195}\text{Au}$ , (b) reacciones de transferencia de un protón permitidas para  $^{195}\text{Pt} \rightarrow ^{196}\text{Au}$ . Los números entre la diagonal representan los factores espectroscópicos de los dos operadores que están normalizados al estado base.

Aquí las las correlaciones son uno a uno, el proceso inverso presenta un comportamiento diferente, aquí nosotros quitamos un protón al núcleo  $^{196}_{79}\text{Au}_{117}$  y el núcleo resultante posee más estados posibles de excitación que en el caso anterior. Veamos ahora los procesos inversos.

Tabla 4.19: Intensidades relativas de la tranferencia de un protón para las transiciones protón impar  $\Psi_{\text{op}}$  a par-par  $\Psi_{\text{ee}}$  dados por  $\bar{C}_1$ . Los estados finales que tomamos son:  
 $\langle \Psi_{\text{ee}} | = \langle [N - i, i], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\tau_1, \tau_2), L |$

$n$	$\langle \Psi_{\text{ee}}  $	$R_n$	$R'_n$
1	$\langle [N, 0], (N, 0, 0), (0, 0), 0  $	1	1
2	$\langle [N, 0], (N, 0, 0), (1, 0), 2  $	$\frac{N+4}{N}$	$\frac{(N-2)^2}{N(N+4)}$
3	$\langle [N, 0], (N-2, 0, 0), (0, 0), 0  $	0	$\frac{9(N-1)(N+2)(N+3)}{4N^2(N+4)^2}$
4	$\langle [N, 0], (N-2, 0, 0), (1, 0), 2  $	0	$\frac{9(N-2)(N-1)(N+3)}{4N^2(N+4)^2}$
5	$\langle [N-1, 1], (N-1, 1, 0), (1, 0), 2  $	$\frac{2(N+2)N_\nu}{N(N+1)N_\pi}$	$\frac{(N+8)^2 N_\nu (N+1)}{2N(N+2)(N+4)^2 N_\pi}$
6	$\langle [N-1, 1], (N-1, 1, 0), (1, 1), L  $	$\frac{N_\nu(2L+1)}{5(N+1)N_\pi}$	$\frac{N_\nu(2L+1)(N+1)}{20(N+4)^2 N_\pi}$
7	$\langle [N-1, 1], (N-2, 0, 0), (0, 0), 0  $	0	$\frac{9(N-2)(N+3)N_\nu(N+1)}{4N^2(N+4)^2 N_\pi}$
8	$\langle [N-1, 1], (N-2, 0, 0), (1, 0), 2  $	0	$\frac{9(N-2)^2(N+3)N_\nu(N+1)}{4N^2(N+2)(N+4)^2 N_\pi}$

Este aumento de los estados posibles de excitación depende de los acoplamientos de los números cuánticos del estado inicial en conjunto con las reglas de selección del operador manejado. Por lo tanto debido nuestras correlaciones podemos obtener las siguientes intensidades:

Tabla 4.20: Intensidades relativas de la transferencia de un protón para las transiciones impar-impar  $|\Psi_{\text{on}}\rangle$  a neutrón impar  $|\Psi_{\text{on}}\rangle$  dados por  $\bar{C}_2$ . Los estados finales que tomamos son:  
 $\langle\Psi_{\text{on}}| = \langle[\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); L, \frac{1}{2}; J |$

$n$	<i>Estado final</i> $\langle\Psi_{\text{on}} $	<i>Intensidad relativa 1</i> $S_n$	<i>Intensidad relativa 2</i> $S'_n$
1	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N}, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	$R_1$	$R'_1$
2	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N}, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	$R_2$	$R'_2$
3	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0	$R'_3$
4	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N}, 0], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0	$R'_4$
5	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 1, 1, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	$R_5 \frac{N_{\pi}}{N_{\nu}(N-1)}$	$R'_5 \frac{N'_{\pi}}{N'_{\nu}(N'-1)}$
6	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 1, 1, 0), (1, 1), L, \frac{1}{2}, J  $	$R_6 \frac{N_{\pi}}{N_{\nu}(N-1)}$	$R'_6 \frac{N'_{\pi}}{N'_{\nu}(N'-1)}$
7	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0	$R'_7 \frac{N'_{\pi}}{N'_{\nu}(N'-1)}$
8	$\langle[\mathcal{N} - 1, 0] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0	$R'_8 \frac{N'_{\pi}}{N'_{\nu}(N'-1)}$
9	$\langle[\mathcal{N} - 2, 1] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 1, 1, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	$R_5 \frac{(N_{\nu}-1)N}{(N-1)N_{\nu}}$	$R'_5 \frac{(N'_{\nu}-1)N'}{(N'-1)N'_{\nu}}$
10	$\langle[\mathcal{N} - 2, 1] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 1, 1, 0), (1, 1), L, \frac{1}{2}, J  $	$R_6 \frac{(N_{\nu}-1)N}{(N-1)N_{\nu}}$	$R'_6 \frac{(N'_{\nu}-1)N'}{(N'-1)N'_{\nu}}$
11	$\langle[\mathcal{N} - 2, 1] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0	$R'_7 \frac{(N'_{\nu}-1)N'}{(N'-1)N'_{\nu}}$
12	$\langle[\mathcal{N} - 2, 1] [1]_{\nu}; [\mathcal{N} - 1, 1], (\mathcal{N} - 2, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0	$R'_8 \frac{(N'_{\nu}-1)N'}{(N'-1)N'_{\nu}}$

Los coeficientes que acompañan las intensidades relativas espectroscópicas de la tabla 4.19 las tenemos en la tabla 4.20 con las correlaciones que hemos determinado.

Experimentalmente<sup>12</sup> tenemos evidencia de la validez de las intensidades espectroscópicas de la reacción  ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116} \rightarrow {}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$ . En la cual mostramos en la tabla siguiente:

Tabla 4.21: Comparación entre intensidades teóricas y experimentales de la transferencia de un nucleón de la reacción de transferencia  ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}(t, \alpha){}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$ , donde  $\mathcal{N}_\pi = 3$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 8$ . Los estados finales que tomamos son:  $\langle {}^{192}\text{Os} | = \langle [8 - i, i], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\tau_1, \tau_2), L |$ .

	<i>Estado final</i>	<i>Teórico</i>	<i>Experimental</i>
$n$	$\langle {}^{192}\text{Os}  $	$R_n$	$(t, \alpha)$
1	$\langle [8, 0], (8, 0, 0), (0, 0), 0  $	1	1
2	$\langle [8, 0], (8, 0, 0), (1, 0), 2  $	1.5	1
3	$\langle [8, 0], (6, 0, 0), (0, 0), 0  $	0	
4	$\langle [8, 0], (6, 0, 0), (1, 0), 2  $	0	< 0.01
5	$\langle [7, 1], (7, 1, 0), (1, 0), 2  $	0.46	
6	$\langle [7, 1], (7, 1, 0), (1, 1), 1  $	0.11	
	$\langle [7, 1], (7, 1, 0), (1, 1), 3  $	0.26	
7	$\langle [7, 1], (6, 0, 0), (0, 0), 0  $	0	
8	$\langle [7, 1], (6, 0, 0), (1, 0), 2  $	0	

Las intensidades experimentales están normalizadas a 1.00 para cada estado con  $J^p$  y las teoricas están normalizadas al estado base correspondiente con  $n = 1$  con  $P_{\pi,1}^\dagger$ .

Los espacios vacios de los datos experimentales significan que aun no fueron medidos esos estados exitados. Estos datos experimentales una vez más nos confirma el comportamiento supersimétrico nuclear. Debido a que la reacción  ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116} \rightarrow {}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$  está correlacionado con la reacción  ${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \rightarrow {}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$  usando nuestras correlaciones (asociados a la tabla 4.20) podemos predecir las siguientes intensidades:

<sup>12</sup>Los valores experimentales fueron tomados de la referencia [59].

Tabla 4.22: Intensidades relativas de la transferencia  ${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \rightarrow {}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$ . Los estados finales que tomamos son:  $\langle {}^{193}\text{Os} | = \langle [7 - i', i'] [1]_{\nu}; [8 - j, j - k, k]; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\tau_1, \tau_2); L, \frac{1}{2}; J |$

$n$	$\langle {}^{193}\text{Os}  $	$S_n$
1	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [8, 0], (8, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	1
2	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [8, 0], (8, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	1.5
3	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [8, 0], (6, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0
4	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [8, 0], (6, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0
5	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [7, 1], (7, 1, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0.04
6	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [7, 1], (7, 1, 0), (1, 1), 1, \frac{1}{2}, J  $	0.01
	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [7, 1], (7, 1, 0), (1, 1), 3, \frac{1}{2}, J  $	0.02
7	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [7, 1], (6, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0
8	$\langle [7, 0] [1]_{\nu}; [7, 1], (6, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0
9	$\langle [6, 1] [1]_{\nu}; [7, 1], (7, 1, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0.42
10	$\langle [6, 1] [1]_{\nu}; [7, 1], (7, 1, 0), (1, 1), 1, \frac{1}{2}, J  $	0.10
	$\langle [6, 1] [1]_{\nu}; [7, 1], (7, 1, 0), (1, 1), 3, \frac{1}{2}, J  $	0.24
11	$\langle [6, 1] [1]_{\nu}; [7, 1], (6, 0, 0), (0, 0), 0, \frac{1}{2}, J  $	0
12	$\langle [6, 1] [1]_{\nu}; [7, 1], (6, 0, 0), (1, 0), 2, \frac{1}{2}, J  $	0

Las intensidades están normalizadas al estado base correspondiente con  $n = 1$  con  $P_{\pi,1}^{\dagger}$ .

Podemos ver de una manera gráfica estas correlaciones en la siguiente figura.

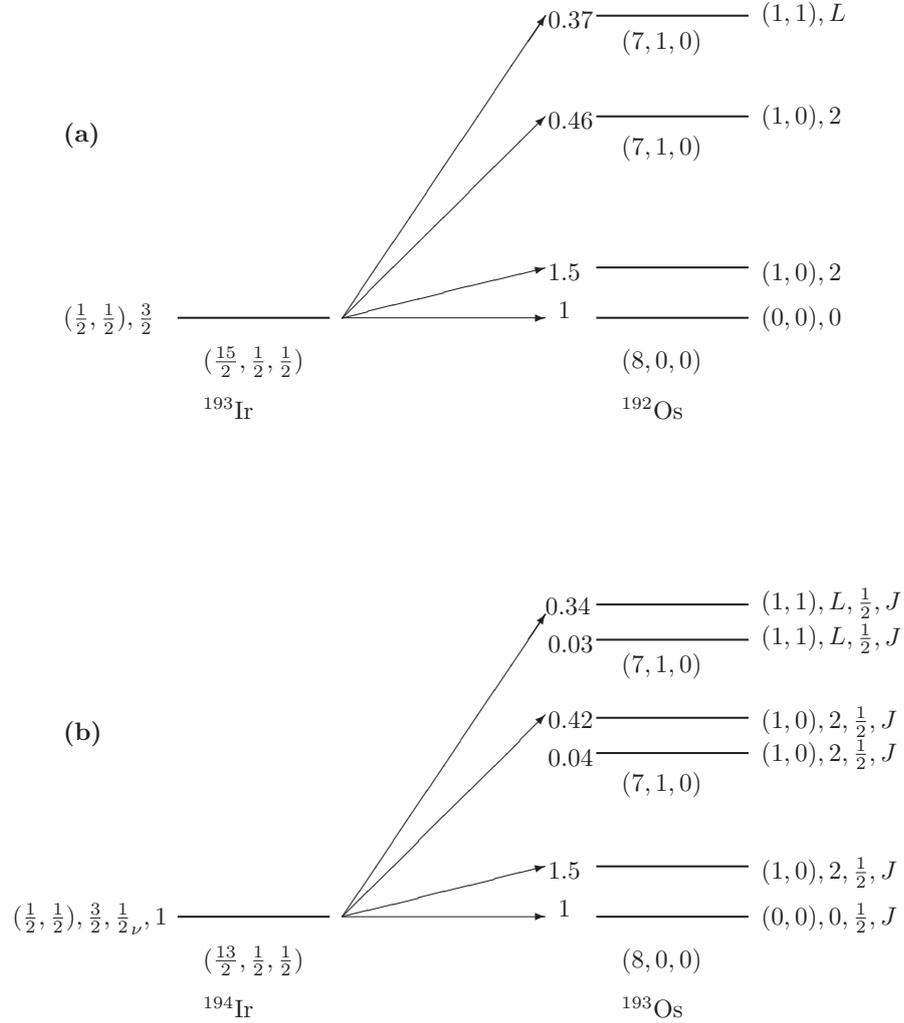


Figura 4.6: **(a)** Reacciones de transferencia de un protón permitidas para  ${}^{193}\text{Ir}_{116} \rightarrow {}^{192}\text{Os}_{116}$ . **(b)** Reacciones de transferencia de un protón permitidas para  ${}^{194}\text{Ir}_{117} \rightarrow {}^{193}\text{Os}_{117}$ . Los factores espectroscópicos están normalizados de acuerdo al estado base

Se puede ver que las correlaciones nos genera una especie de desacoplamiento de los niveles espectrales del espectro original. Además la suma de las intensidades en ambas reacciones es la misma. Podemos tomar otro ejemplo de este tipo de correlaciones, dadas las intensidades

$$I_{n,(n)'} = \left| \left\langle {}^{194}\text{Pt}_{116} \left\| P_{\pi,1,(2)}^\dagger \right\| {}^{195}\text{Au}_{116} \right\rangle \right|^2 \quad (4.159)$$

donde  $n$  representa los posibles estados de excitación del núcleo final bajo los operadores  $P_{\pi,1}^\dagger$ , y  $P_{\pi,2}^\dagger$ .

Tabla 4.23: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  $^{194}\text{Pt}_{116}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ , que son los números cuánticos asociados al estado inicial.

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>	<i>Intensidad relativa 2</i>
$n$	$R_n$	$R'_n$
1	1	1
2	1.57	0.32
3	0	0.20
4	0	0.11
5	0.80	0.29
6	0.19 $L = 1$ 0.44 $L = 3$	0.025 $L = 1$ 0.06 $L = 3$
7	0	0.38
8	0	0.21

así usando nuestras correlaciones podemos predecir las intensidades (asociadas a tabla 4.20).

$$I_{n,(n)'} = \left| \left\langle \left\langle {}^{195}\text{Pt}_{117} \left\| P_{\pi,1,(2)}^\dagger \right\| \right\rangle \right\rangle \left\langle \left\langle {}^{196}\text{Au}_{117} \right\rangle \right\rangle \right|^2 \quad (4.160)$$

expresadas como

Tabla 4.24: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  $^{195}\text{Pt}_{117}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ , que son los números cuánticos asociados al estado inicial.

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa 1</i>	<i>Intensidad relativa 2</i>
$n$	$S_n$	$S'_n$
1	1	1
2	1.57	0.32
3	0	0.20
4	0	0.11
5	0.053	0.02
6	0.013 $L = 1$ 0.03 $L = 3$	0.001 $L = 1$ 0.004 $L = 3$
7	0	0.025
8	0	0.014
9	0.75	0.27
10	0.18 $L = 1$ 0.41 $L = 3$	0.024 $L = 1$ 0.05 $L = 3$
11	0	0.35
12	0	0.20

Si ahora queremos mostrar de una manera más gráfica las correlaciones, del ejemplo anterior tomemos solo el primer operador donde mostramos los posibles estados de excitación con sus intensidades espectroscópicas normalizadas, se puede notar que que la correlación nos da una especie de desacoplamiento en dobletes por cada línea espectral de la grafica 4.7 de (a) en (b), se observa estos dobletes que son consecuencia de nuestras correlaciones.

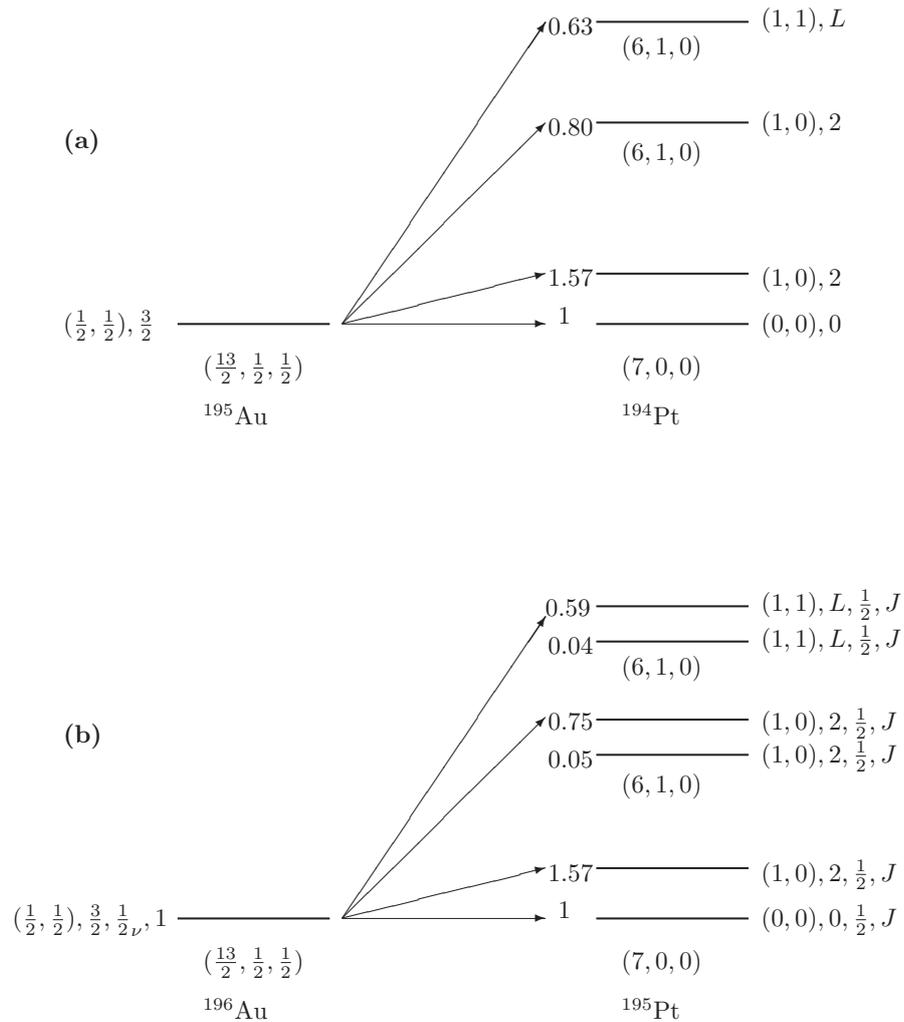


Figura 4.7: (a) Reacciones de transferencia de un protón permitidas para  $^{195}\text{Au} \rightarrow ^{194}\text{Pt}$ . (b) Reacciones de transferencia de un protón permitidas para  $^{196}\text{Au} \rightarrow ^{195}\text{Pt}$ . Los factores espectroscópicos están normalizados de acuerdo al estado base

Hay algo interesante que podemos notar, la suma de las intensidades de los niveles 3 y 4 del caso (b) es igual a la intensidad 3 del caso (a), y la suma de la intensidad 5 y 6 del caso (b) es igual a la

intensidad 4 del caso a), es aquí donde hago referencia a ese desacoplamiento de las intensidades debido a las presencia de nuestras correlaciones que hemos determinado. En la reacción que obtuvimos la correlación que corresponde al caso (b) podemos notar que los primeros dos estados y los últimos tienen mayores intensidades con respecto al estado base y los demás no tienden a excitarse mucho. El segundo estado tiene una intensidad de 157% del estado base, esto nos dice que éste estado tiene mayor intensidad que el estado base, el tercero tiene una intensidad de 5%, el cuarto 75%, (este corresponde a la suma de las intensidades correspondientes a  $L = 1$  y  $L = 3$ ) el quinto estado tiene una intensidad de 4% y el último tiene una intensidad de 59% del estado base. El estado de excitación más probable es el estado simétrico con respecto al grupo  $SO_{BF_\nu}(6)$  y los estados restantes que no son simétricos son menos intensas, que corresponden a energías más altas. Y para el segundo operador el comportamiento es similar a excepción que para los niveles diferentes de cero con intensidades, y para los restantes estados son bajas las intensidades y en cambio en los últimos sus intensidades si son relevantes.

### 4.7.2 Transferencia de dos protones

Aquí vamos a analizar la transferencia de dos protones que conectan los cuartetos supersimétricos. Tomaremos como referencia [60] en donde las intensidades de transferencia de dos protones entre núcleos par-par y lo vamos a correlacionar la transferencia de dos protones entre núcleos con neutrón impar. Las primeras intensidades las presentamos en la siguiente tabla:

Tabla 4.25: Intensidades de reacciones de transferencia dos protones en el límite  $Spin(6)$  para las transiciones entre núcleos par-par que corresponden a el caso  $C_3$ . Los estados finales que tomamos son:  $|\Psi_{ee}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} + 1 - i, i], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (0, 0), 0\rangle$ .

	<i>Estado final</i>		<i>Intensidad</i>	<i>Intensidad relativa</i>
$n$	$[\mathcal{N} + 1 - i, i]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	${}_f\langle\Psi_{ee}    s_\pi^\dagger    \Psi_{ee}\rangle_{gs}^2$	$R_n$
1	$[\mathcal{N} + 1, 0]$	$(\mathcal{N} + 1, 0, 0)$	$\frac{(\mathcal{N}_\pi + 1)(\mathcal{N} + 4)}{2(\mathcal{N} + 2)}$	1
2	$[\mathcal{N} + 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$\frac{(\mathcal{N}_\pi + 1)\mathcal{N}(\mathcal{N} + 3)}{2(\mathcal{N} + 2)(\mathcal{N} + 1)^2}$	$\frac{\mathcal{N}(\mathcal{N} + 3)}{(\mathcal{N} + 4)(\mathcal{N} + 1)^2}$
3	$[\mathcal{N}, 1]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$\frac{\mathcal{N}_\nu(\mathcal{N} - 1)}{2(\mathcal{N} + 1)^2}$	$\frac{\mathcal{N}_\nu(\mathcal{N} - 1)(\mathcal{N} + 2)}{(\mathcal{N}_\pi + 1)(\mathcal{N} + 4)(\mathcal{N} + 1)^2}$

Ahora vamos a utilizar nuestras correlaciones para determinar las intensidades de transferencia de dos protones entre núcleos con neutrón impar.

Tabla 4.26: Intensidades de reacciones de transferencia dos protones en el límite  $Spin(6)$  para las transiciones entre núcleos con neutrón impar obtenidas por nuestras correlaciones, que corresponden a  $\overline{C}_4$ . Los estados finales que tomamos son:

$$|\Psi_{\text{on}}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi + 1]; [\mathcal{N} - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} + 1 - j, j - k, k](\Sigma, 0, 0), (0, 0, 0)\rangle.$$

	<i>Estado final</i>			<i>Intensidad</i>	<i>Intensidad relativa</i>
$n$	$[\mathcal{N} - i', i']$	$[\mathcal{N} + 1 - j, j - k, k]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$ \langle \Psi_{\text{on}}    s_\pi^\dagger    \Psi_{\text{on}} \rangle_{\text{gs}} ^2$	$S_n$
1	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N} + 1, 0, 0]$	$(\mathcal{N} + 1, 0, 0)$	$\frac{(\mathcal{N}_\pi + 1)(\mathcal{N} + 4)}{(\mathcal{N} + 2)}$	$R_1$
2	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N} + 1, 0, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$\frac{(\mathcal{N}_\pi + 1)\mathcal{N}(\mathcal{N} + 3)}{(\mathcal{N} + 2)(\mathcal{N} + 1)^2}$	$R_2$
3	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N}, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$\frac{(\mathcal{N} - 1)}{(\mathcal{N} + 1)^2} \frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N}}$	$R_3 \frac{\mathcal{N}_\pi + 1}{\mathcal{N}\mathcal{N}_\nu}$
4	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$[\mathcal{N}, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 0, 0)$	$\frac{(\mathcal{N} - 1)}{(\mathcal{N} + 1)} \frac{(\mathcal{N}_\nu - 1)}{\mathcal{N}}$	$R_3 \frac{(\mathcal{N}_\nu - 1)(\mathcal{N} + 1)}{\mathcal{N}\mathcal{N}_\nu}$

Aquí también la suma de las intensidades de todos los estados finales de la reacción que se conoce es igual a la suma de todas las intensidades que se obtuvieron por las correlaciones.

$$\sum_n^3 |{}_n\langle \Psi_{\text{ee}} || s_\pi^\dagger || \Psi_{\text{ee}} \rangle_{\text{gs}}|^2 = \sum_n^4 |{}_f\langle \Psi_{\text{on}} || s_\pi^\dagger || \Psi_{\text{on}} \rangle_{\text{gs}}|^2 \quad (4.161)$$

Veamos ahora un caso más práctico, tomemos las intensidades dadas como

$$I_n = \left| \langle {}_{76}^{192}\text{Os}_{116} || s_\pi^\dagger || {}_{78}^{194}\text{Pt}_{116} \rangle \right|^2 \quad (4.162)$$

donde  $n$  representa los posibles estados de excitación del núcleo  ${}_{76}^{192}\text{Os}_{116}$  bajo el operador  $s_\pi^\dagger$ .

Tabla 4.27: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  ${}_{76}^{192}\text{Os}_{116}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ , que son los números cuánticos asociados al estado del núcleo inicial.

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa</i>
$n$	$R_n$
1	1
2	0.1
3	0.12

así usando nuestras correlaciones (tomadas de la tabla 4.26) podemos predecir las intensidades

$$I_n = \left| \langle {}_{76}^{193}\text{Os}_{117} || s_\pi^\dagger || {}_{78}^{195}\text{Pt}_{117} \rangle \right|^2 \quad (4.163)$$

expresadas como

Tabla 4.28: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ .

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa</i>
$n$	$S_n$
1	1
2	0.1
3	0.01
4	0.11

En esta reacción principalmente solo se excitan 2 estados de manera relevante, los demás estados poseen intensidades muy bajas con respecto al estado base, aquí es interesante notar que el último estado es el que presenta mayor excitación con respecto al estado base con 11% de la intensidad del estado base es antisimétrico con respecto al grupo  $SO_{BF_\nu}(6)$ . El segundo estado posee una intensidad del 10% de la intensidad del estado base, este estado es simétrico con respecto al grupo  $SO_{BF_\nu}(6)$ , el tercer estado no presenta una intensidad relevante

Podemos repetir el mismo análisis gráfico de los niveles energéticos asociados a las transferencia de un nucleón como vimos en la figura 4.7, para la transferencia dos protones se puede ver que las líneas espectrales del estado final de la reacción nuclear que se conoce se divide en más líneas espectrales en la reacción que se correlaciona.

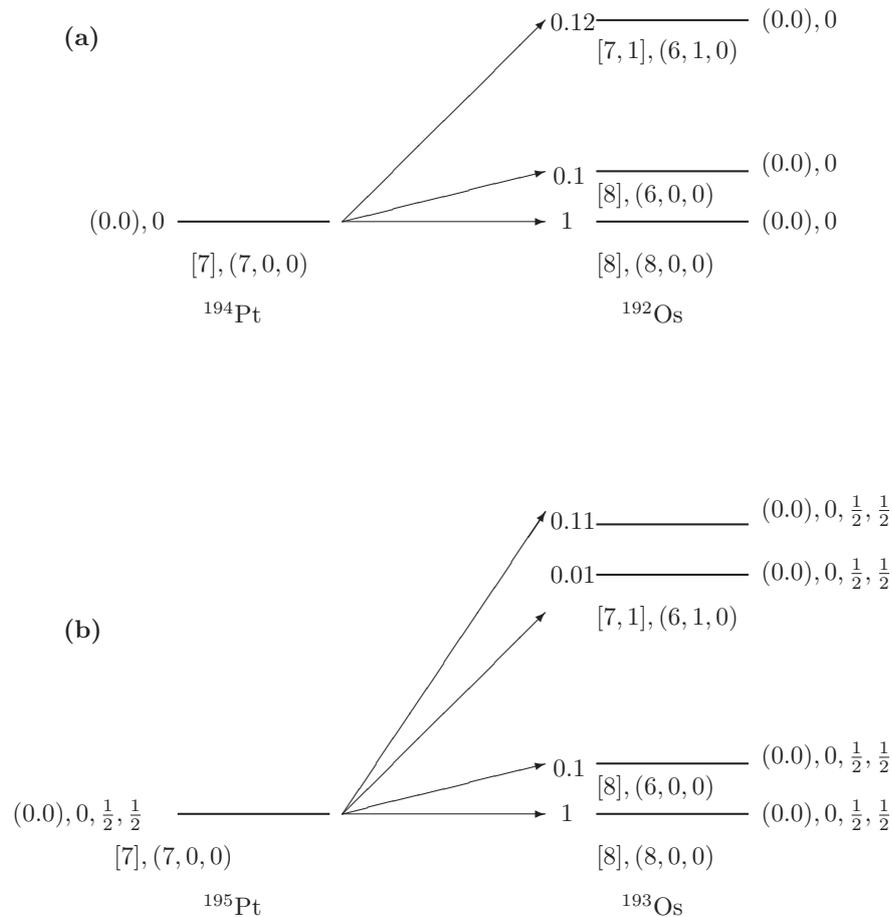


Figura 4.8: **(a)** Reacciones de transferencia de dos protones permitidas para  $^{194}\text{Pt} \rightarrow ^{192}\text{Os}$ . **(b)** Reacciones de transferencia de dos protones permitidas para  $^{195}\text{Pt} \rightarrow ^{193}\text{Os}$ . Los factores espectroscópicos están normalizados de acuerdo al estado base.

La suma de las intensidades de las líneas espectrales 3 y 4 del caso (b) de la figura 4.8 es igual a la intensidad 3 del caso (a).

Por otro lado si tenemos una transferencia de dos protones entre núcleos con protón impar

Tabla 4.29: Intensidades de reacciones de tranferencia de dos protones entre núcleos con protón impar que corresponden a el caso  $\overline{C}_5$ . Los estados finales que tomamos son:  
 $|\Psi_{\text{op}}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - i, i], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}\rangle$ .

$n$	<i>Estado final</i>			<i>Intensidad</i>	<i>Intensidad relativa</i>
	$[\mathcal{N} - i, i]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	$ \text{f}\langle \Psi_{\text{op}}    s_\pi^\dagger    \Psi_{\text{op}} \rangle_{\text{gs}} ^2$	$R_n$
1	$[\mathcal{N}, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$	$(\mathcal{N} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{2\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}+4)}{(\mathcal{N}+2)}$	1
2	$[\mathcal{N}, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{8\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+1)^2}$	$\frac{4}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2(\mathcal{N}+4)}$
3	$[\mathcal{N}, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{2\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2}$	$\frac{(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)(\mathcal{N}+2)}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2(\mathcal{N}+4)}$
4	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{4\mathcal{N}_\nu}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2}$	$\frac{2\mathcal{N}_\nu(\mathcal{N}+2)}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}+4)}$
5	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{4\mathcal{N}_\nu}{(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+1)^2}$	$\frac{2\mathcal{N}_\nu}{(\mathcal{N}+1)^2\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}+4)}$
6	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{2\mathcal{N}_\nu(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)}$	$\frac{\mathcal{N}_\nu(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}+4)}$

Nosotros hemos analizado las reacciones de tranferencia de dos protones entre núcleos con protón impar que corresponden a el caso  $\overline{C}_5$  dadas en (4.105)

$$\overline{C}_5 = \langle [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - i, i]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} || s_\pi^\dagger || [\mathcal{N}_\nu], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 1, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2} \rangle$$

y esta estando correlacionada con  $\overline{C}_6$  en (4.110)

$$\overline{C}_6 = \langle [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} - j, j - k, k]; (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 || s_\pi^\dagger || [\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi - 1]; [\mathcal{N} - 2, 0] [1]_\nu; [\mathcal{N} - 1, 0, 0]; (\mathcal{N} - 1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1 \rangle$$

por lo tanto obtenemos

Tabla 4.30: Intensidades de reacciones de tranferencia de dos protones entre núcleos impar-impar que corresponden a el caso  $\overline{C}_6$ . Los estados finales que tomamos son:

$$|\Psi_{\text{oo}}\rangle = |[\mathcal{N}_\nu - 1], [\mathcal{N}_\pi]; [\mathcal{N} - 1 - i', i'] [1]_\nu; [\mathcal{N} - j, j - k, k], (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})_\pi; (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1\rangle$$

$n$	<i>Estado final</i>				<i>Intensidad</i>	<i>Intensidad relativa</i>
	$[\mathcal{N} - i', i']$	$[\mathcal{N} - j, j - k, k]$	$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$	$ \langle \Psi_{\text{oo}}    s_\pi^\dagger    \Psi_{\text{oo}} \rangle_{\text{gs}} ^2$	$S_n$
1	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N}, 0, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$	$(\mathcal{N} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}+4)}{2(\mathcal{N}+2)}$	$R_1$
2	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N}, 0, 0]$	$(\mathcal{N}, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{6\mathcal{N}_\pi}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+1)^2}$	$R_2$
3	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N}, 0, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{\mathcal{N}_\pi(\mathcal{N}-1)(\mathcal{N}+3)3}{2\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2}$	$R_3$
4	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)^2} \frac{3\mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$	$R_4 \frac{\mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}$
5	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+1)^2} \frac{3\mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$	$R_5 \frac{\mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}$
6	$[\mathcal{N}, 0]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)}{2\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)} \frac{3\mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)}$	$R_6 \frac{\mathcal{N}_\pi}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}$
7	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{1}{(\mathcal{N}+1)^2} \frac{3(\mathcal{N}_\nu-1)}{(\mathcal{N}-1)}$	$R_4 \frac{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}$
8	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 1, 1, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{(\mathcal{N}+2)(\mathcal{N}+1)^2} \frac{3(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)}$	$R_5 \frac{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}$
9	$[\mathcal{N} - 1, 1]$	$[\mathcal{N} - 1, 1, 0]$	$(\mathcal{N} - 2, 0, 0)$	$(\mathcal{N} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{(\mathcal{N}-2)(\mathcal{N}+3)}{2(\mathcal{N}+1)(\mathcal{N}+2)} \frac{3(\mathcal{N}_\nu-1)}{(\mathcal{N}-1)}$	$R_6 \frac{(\mathcal{N}_\nu-1)\mathcal{N}}{(\mathcal{N}-1)\mathcal{N}_\nu}$

La suma de las intensidades de todos los estados finales de la reacción que se conoce es igual a la suma de todas las intensidades que se obtuvieron por las correlaciones.

$$\sum_n^6 |{}_n\langle \Psi_{\text{op}} || s_\pi^\dagger || \Psi_{\text{op}} \rangle_{\text{gs}}|^2 = \sum_n^9 |{}_n\langle \Psi_{\text{oo}} || s_\pi^\dagger || \Psi_{\text{oo}} \rangle_{\text{gs}}|^2 \quad (4.164)$$

Si tomamos un caso práctico, tomemos las intensidades

$$I_n = |\langle {}^{193}_{77}\text{Ir}_{116} || s_\pi^\dagger || {}^{195}_{79}\text{Au}_{116} \rangle|^2 \quad (4.165)$$

donde  $n$  representa los posibles estados de excitación del núcleo  ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$ .

Tabla 4.31: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ , que son los números cuánticos asociados al estado del núcleo inicial.

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa</i>
$n$	$R_n$
1	1
2	0.0008
3	0.11
4	0.009
5	0.007
6	0.20

así usando nuestras correlaciones (asociadas a la tabla 4.30) podemos predecir las intensidades

$$I_n = |\langle {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \| s_\pi^\dagger \| {}^{196}_{79}\text{Au}_{117} \rangle|^2 \quad (4.166)$$

expresadas como

Tabla 4.32: Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo  ${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$  donde  $\mathcal{N}_\pi = 2$ ,  $\mathcal{N}_\nu = 5$  y  $\mathcal{N} = 7$ .

<i>Estado final</i>	<i>Intensidad relativa</i>
$n$	$S_n$
1	1
2	0.0008
3	0.11
4	0.0006
5	0.0004
6	0.01
7	0.0085
8	0.0066
9	0.19

Este tipo de reacción sólo exita de manera relevante solo 2 estados, el tercer estado con el 11% de la intensidad del estado base y el último estado con 19% de intensidad del estado base. Si nos preguntamos acerca de la simetría, el último estado es antisimétrico con respecto al grupo  $U_{BF_\nu}(6)$  y simétrico con respecto a  $SO_{BF_\nu}(6)$  y el tercer estado es simétrico con respecto a los grupo  $U_{BF_\nu}(6)$  y  $SO_{BF_\nu}(6)$ . Aquí no se puede concluir exactamente si los simétricos o antisimétricos con respecto a un grupo de simetría son más probable sin embargo podemos ver que los estados antisimétricos en los grupos  $U_{BF_\nu}(6)$  y  $SO_{BF_\nu}(6)$  poseen intensidades menores con respecto al estado base como se puede ver en nuestros resultados de la tabla 4.32.

Si queremos comparar gráficamente como se ven estas correlaciones entre la transferencia de dos protones de las reacciones anteriores presentamos la figura 4.9, mostramos que al momento que correlacionamos aparecen más líneas espectrales. Se puede ver también que la suma de las intensidades finales en ambas situaciones es la misma.

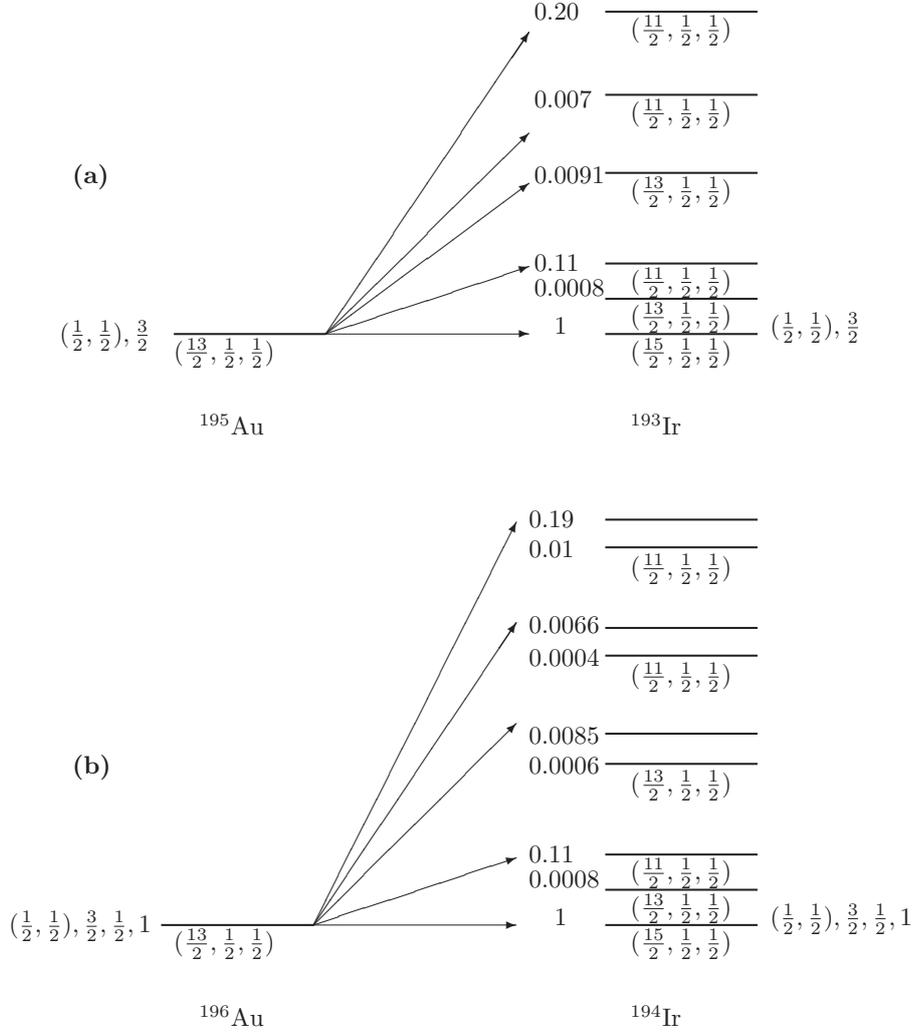


Figura 4.9: (a) Reacciones de transferencia de dos protones permitidas para  $^{195}\text{Au} \rightarrow ^{193}\text{Ir}$ , donde para ambos estados  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}$ . (b) Reacciones de transferencia de dos protones permitidas para  $^{196}\text{Au} \rightarrow ^{194}\text{Ir}$ , donde para ambos estados  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1$ . Los factores espectroscópicos están normalizados de acuerdo al estado base.

Hemos presentado aplicaciones directas de nuestras correlaciones de transferencia de nucleones en el contexto de Supersimetría Nuclear donde hemos mostrado explícitamente predicciones de nuestras correlaciones de transferencias de un protón y dos protones. Nuestro reto en adelante es continuar en la

búsqueda de sistemas que tenga simetría de  $U(6)$ .

## 4.8 Otras aplicaciones

Los factores isoescalares y la formulación del  $F$ -spin generalizado también se puede aplicar en las transferencias de un neutrón en el contexto de Supersimetría Nuclear además este aparato matemático también es válido para cualquier sistema cuyas funciones de onda son descritas en términos de acoplamientos de las tres diferentes representaciones de  $U(6)$ , por ejemplo en la teoría de IBM-3 y la de Piel de Neutrones que brevemente discutiremos más adelante.

### 4.8.1 Transferencia de un neutrón

Solo por completez, quiero solo mencionar los factores isoescalares correspondientes que faltan por calcular, ya que considero de suma importancia, incluir una breve revisión de este tipo de reacción. En este tipo de transferencias vamos a tratar cuatro tipo de reacciones, transferencias de un neutrón a núcleos par-par, protón impar, neutrón impar e impar-impar. Y sus respectivas transferencias inversas. Tomando en consideración que nuestros estados iniciales estaran en el estado base y los estados finales en estados excitados o estados bases.

Uno de los operadores más comunes que se manejan en la práctica [60] es aquel que posee la representación (200) del grupo  $SO(6)$ , las etiquetas (10) del grupo  $SO(5)$  y (2) del grupo de rotaciones  $SO(3)$  de acuerdo a las posibles configuraciones que hemos visto anteriormente en (4.21), además si consideramos la transferencia de un neutrón con  $j = 3/2, 5/2$  el operador es

$$P_{\nu}^{(j)\dagger} = \frac{\alpha_j}{\sqrt{2}} \left[ \left( \tilde{s}_{\nu} \times a_{\nu,j}^{\dagger} \right)^{(j)} - \left( \tilde{d}_{\nu} \times a_{\nu,\frac{1}{2}}^{\dagger} \right)^{(j)} \right]. \quad (4.167)$$

Es conveniente tomar las razones de las intensidades, ya que ellos no dependen de el valor del coeficiente  $\alpha_j$  y por lo tanto nos proporciona una prueba directa de las funciones de onda. Los elementos de matriz entre los estados con el mismo número cuántico pero tienen diferente acoplamientos de  $U(6)$ . Estos están relacionados con los factores isoescalares.

Nosotros vamos a realizar transferencias de nucleones en el en el espacio  $F$ -spin generalizado. Comencemos con la transferencia de un neutrón a un núcleo par-par

$$|\Psi_{ee}\rangle \xrightarrow{a_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}} |\Psi_{on}\rangle \quad (4.168)$$

donde utilizamos el operador  $a_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}$  para obtener un núcleo con neutrón impar, de esta manera proceso (4.15) en el  $F$ -spin generalizado siendo  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\nu} + \mathcal{N}_{\pi}$  y  $\beta_n$  son los factores estadísticos que surge al hacer el desacoplamiento del neutrón, así tenemos

$$C_7 = \beta_7 \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 1) \\ \frac{1}{2}, -1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N} - 2j + k, j - 2k) \\ \frac{\mathcal{N}-1-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \mathcal{N} \\ \frac{\mathcal{N}}{2}, \frac{\mathcal{N}-\mathcal{N}_{\nu}}{2} \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{\mathcal{N}-1-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}-\mathcal{N}_{\nu}+1}{2} \end{array} \right\rangle \quad (4.169)$$

$$\times \langle \mathcal{N} - 2j + k, j - 2k \| T^{(1,1)} \| (\mathcal{N}, 0) \rangle_{SU(3)}$$

que corresponderia por ejemplo a la transferencia de un neutrón a el núcleo de  ${}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$  obteniendo  ${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$ , considerando el estado inicial como base con los números cuánticos  $\mathcal{N}_{\nu} = 5$  y  $\mathcal{N}_{\pi} = 2^{13}$ . De

Uno puede verificar estos números usando la propiedad aditiva de los números cuánticos  $F_{zf} = F_{zi} + F_{zT}$  y  $Y_f = Y_i + Y_T$  y la suma vectorial de  $\vec{F}_f = \vec{F}_i + \vec{F}_T$  donde el subíndice  $i$  representan los números cuánticos asociados al estado inicial y el subíndice  $T$  los números cuánticos asociados al operador de transferencia y  $f$  al estado final.

manera análoga podemos obtener su recíproco

$$|\Psi_{\text{on}}\rangle \xrightarrow{b_{\nu}^{\dagger}a_{\nu}} |\Psi_{\text{ee}}\rangle \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_7 = & \beta_7' \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 1) \\ \frac{1}{2}, 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-2i, i) \\ \frac{\mathcal{N}-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}+1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{\mathcal{N}-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2} \right\rangle \\ & \times \langle (\mathcal{N}-2i, i) \| T^{(1,1)} \| (\mathcal{N}, 0) \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.171)$$

que correspondería por ejemplo a la sustracción de un neutrón a el núcleo de  ${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$  obteniendo  ${}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$  considerando el estado inicial como base. Si transferimos un neutrón a un núcleo con protón impar obtenemos un núcleo impar-impar

$$|\Psi_{\text{op}}\rangle \xrightarrow{a_{\nu}^{\dagger}b_{\nu}} |\Psi_{\text{oo}}\rangle \quad (4.172)$$

de esta manera proceso (4.16) en el  $F$ -spin generalizado considerando que el estado inicial esta en el estado base tenemos

$$\begin{aligned} C_8 = & \beta_8 \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 1) \\ \frac{1}{2}, -1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1-2j+k, j-2k) \\ \frac{\mathcal{N}-2-i}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\mathcal{N}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\mathcal{N}-2-i}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}}{2} \right\rangle \\ & \times \langle (\mathcal{N}-1-2j+k, j-2k) \| T^{(1,1)} \| (\mathcal{N}-1, 0) \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.173)$$

que correspondería por ejemplo a la transferencia de un neutrón a el núcleo de  ${}^{195}_{79}\text{Au}_{116}$  y obtenemos  ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$  donde para ambos núcleos  $\mathcal{N}_{\nu} = 5$  y  $\mathcal{N}_{\pi} = 2$ , de manera análoga podemos obtener su recíproco

$$|\Psi_{\text{oo}}\rangle \xrightarrow{b_{\nu}^{\dagger}a_{\nu}} |\Psi_{\text{op}}\rangle \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_8 = & \beta_8' \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1, 0) \\ \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}-4}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 1) \\ \frac{1}{2}, 1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\mathcal{N}-1-2i, i) \\ \frac{\mathcal{N}-1-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}-1}{2}, \frac{\mathcal{N}-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\mathcal{N}-2}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}+1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{\mathcal{N}-1-2i}{2}, \frac{\mathcal{N}_{\pi}-\mathcal{N}_{\nu}-1}{2} \right\rangle \\ & \times \langle (\mathcal{N}-1-2i, i) \| T^{(1,1)} \| (\mathcal{N}-1, 0) \rangle_{SU(3)} \end{aligned} \quad (4.175)$$

que correspondería por ejemplo a la sustracción de un neutrón a el núcleo de  ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$  y obtenemos  ${}^{195}_{79}\text{Au}_{116}$ .

El mecanismo para determinar estos factores isoescalares en este tipo de reacciones es el mismo como se determinan los factores isoescalares asociados a las transferencias de un protón y dos protones, este tipo factores faltan aún por calcular.

### 4.8.2 IBM-3

El IBM-2 se utiliza para describir núcleos con masa media y núcleos pesados, más específicamente, a núcleos donde sus protones y neutrones ocupan diferente capa de valencia. Cuando los protones y los neutrones ocupan la misma capa de valencia, esta aproximación deja de ser válida ya que no hay razón de incluir el par de protón-neutrón con isoespin  $T = 1$ , en donde este isoespin invariante es parte de la extensión del IBM para núcleos ligeros, el cual se conoce como IBM-3 [27]. Es posible construir en el IBM-3 estados que tengan buen momento angular (denotado por  $L$ ) y con un buen isoespin total  $T$  a través de la clasificación

$$\begin{array}{ccccccc}
U(18) & \supset & U(6) & \supset & \dots & SO(3) & \\
\downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \\
[N] & & [N_1, N_2, N_3] & & & L & \\
& & \otimes & & U(3) & \supset & SU(3) & \supset & SO(3) & \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & & [N] & & (\lambda, \mu) & & T & 
\end{array} \tag{4.176}$$

Aquí vemos que sin ningun problema podemos utilizar nuestro mecanismo matemático del  $F$ -spin generalizado.

### 4.8.3 Piel de Neutrones

Por otro lado, los modelos microscópicos nucleares predicen que los núcleos que tiene una piel de neutrones implica que la densidad de neutrones se extiende más alla de los protones. Ya sea que la piel de neutrones se separa del resto del núcleo para presentan oscilaciones independiente, no está claro aun, en el momento, pero si uno lo asume, las consecuencias pueden ser estudiadas con sencillez en un enfoque algebraico [61]. El punto de comienzo es un triple producto de algebras de  $U(6)$  asociadas con los protones  $\pi$ , y los núcleos de neutrones  $\nu_c$  y la piel de neutrones  $\nu_s$ , respectivamente.

$$\begin{array}{ccc}
U(6) & \otimes & U(6) & \otimes & U(6) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
[N_\pi] & & [N_{\nu_c}] & & [N_{\nu_s}]
\end{array} \tag{4.177}$$

donde cada álgebra  $SU(6)$  está caracterizada por el número  $N_\rho$  de bosones acoplados simétricamente. La piel de neutrones interactua debilmente con el núcleo de protones y neutrones, pero estos interacutan fuertemente uno con otro, esto es representado (4.177) en la reducción de acoplamientos correspondientes al álgebra  $U(6)$  de la piel de neutrones por lo tanto aquí también podemos introducir el concepto de  $F$ -spin generalizado.

En resumen podemos decir que la estructura de grupo de  $SU(3)$  es una herramienta muy poderosa para describir sistemas cuánticos. En el siguiente capítulo vamos a hacer una revisión de este grupo  $SU(3)$  ya que vamos a determinar los valores de los factores isoescalares en forma explícita y cerrada utilizados en nuestras correlaciones.

## Capítulo 5

# Factores Isoescalares de $SU(3)$

### 5.1 Introducción

Cuando nos preguntamos acerca de la estructura de las interacciones fuertes, una manera en la cual se puede tratar este problema es a través de simetrías en donde hay teorías [62, 63] donde nos dice que se debe conservar el isoespin  $I$  y la hypercarga  $Y$ [64]. Por ejemplo en el Modelo Octeto que fueron propuestos por Gell-Mann[65] y Ne'eeman[66]. En este modelo se tiene una simetría unitaria en donde se asume que la interacción fuerte es invariante bajo las transformaciones que pertenecen a  $SU(3)$ , es decir, invariante bajo transformaciones unimodulares unitarias de algun espacio vectorial complejo de tres dimensiones. La simetría de estas interacciones fuertes son rotas bajo algun mecanismo débil, pero de tal manera que que el isoespin y la hypercarga permanecen conservadas. Si añadimos una interacción debil como la interacción electromagnética, se rompe esta simetría en el sentido que solo la hypercarga y la tercera componente del isoespin se conserva. De esta manera, en este modelo unitario, uno asigna grupos asociados a las partículas que interaccionan fuertemente con los mismos números cuánticos(pero diferentes para  $I, I_3, Y$ ) a las representaciones irreducibles de el grupo  $SU(3)$ . Cabe mencionar que el grupo  $SU(3)$  ha sido bien estudiado y utilizado mucho en la física, por ejemplo en algunos cálculos del modelo de capas hechos por Elliot [67, 68, 69], y usado extensamente por otros autores [67]-[75]. En la física nuclear el grupo  $SU(3)$  sirve en parte para caracterizar la simetría de la parte orbital de la función de onda. Además los estados de  $SU(3)$  necesarios para los cálculos del modelo de capas deben ser estados con buen momento angular, es decir, aquellos estados que están basados en la cadena de subgrupos  $SU(3) \supset R(3) \supset R(2)$ <sup>1</sup>, en donde Bargmann y Moshinsky introdujeron un operador el cual junto con los invariantes de Casimir de la cadena de subgrupos anterior caracteriza los estados completamente dentro de una representación irreducible de  $SU(3)$ .

Las tablas de los coeficientes  $SU(3)$  de Clebsch-Gordan o factores isoescalares han sido compilados durante varios trabajos [77, 78, 79, 80] y también han sido distribuido programas para calcular esos coeficientes [81, 82, 83](Los coeficientes de Clebsch-Gordan son llamado también como coeficientes de acoplamiento o coeficientes de Wigner, en la literatura como factores isoescalares también son llamados como coeficientes de Racah). Otro ejemplo donde se utilizan estos coeficientes son en los cálculos donde participan muchos números de quarks, otros ejemplos son en bucles de partones en los métodos perturbativos de QCD donde los quarks se transforman en tripletes de colores bajo la simetría  $SU(3)$  en donde hay decaimientos de quarks pesados en quarks ligeros usando la formulación de sabores de  $SU(3)$ . Para estos propósitos también han sido elaborado tablas de factores isoescalares asociados a este tipo de problemas [84]. Uno de los trabajos más recientes de Thomas D. Cohen y Richard Lebed del 2004 [85] también determinan algunos factores isoescalares asociados a los acoplamientos de bariones y mesones.

---

<sup>1</sup>La cadena convencional para los grupos unitarios es la cadena de Gelfand [76].

Nosotros en este trabajo haremos un extensión general algunos coeficientes pero basados en el contexto de Supersimetría Nuclear usando el  $F$ -spin generalizado.

### 5.1.1 Grupo unitario $SU(3)$

Los grupos unitarios tiene una extensa aplicación en la física. Estos describen intrinsecamente las propiedades de las partículas cuánticas o sistemas compuestos grados colectivos de libertad. Por ejemplo, el grupo  $SU(3)$  fué usado por Elliot para explicar los niveles rotacionales de un núcleo deformado(Elliot 1958,Elliot y Harvery 1963; para ver un resumen ver Hecht 1964). En donde en el modelo de Elliot se manejan estados de la forma:

$$\left| \begin{array}{ccc} SU(3) \supset SO(3) \supset SO(2) \\ (\lambda, \mu) \quad \quad L \quad \quad M \end{array} \right\rangle_{\text{Elliot}} \quad (5.1)$$

El grupo  $SU(2)$  se puede relacionar con los grados de libertad del spín o el isoespín. El grupo  $SU(3)$  se puede relacionar con las combinaciones de el isospin y la hipercarga, Fué usado por Gell-Mann y Neeman para clasificar las partículas elementales con el modelo de quarks(Gell-Mann y Neeman 1961,1964)

$$\left| \begin{array}{ccc} SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1) \\ (\lambda, \mu) \quad \quad I \quad \quad Y \end{array} \right\rangle_{\text{Gell-Mann}} \quad (5.2)$$

Ahora en analogía con estos modelos, pretendo utilizar el mismo mecanismo matemático pero ahora aplicarlo a la supersimetría nuclear. En donde en el  $F$ -spin generalizado tenemos

$$\left| \begin{array}{ccc} SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1) \\ (\lambda, \mu) \quad \quad F \quad \quad Y \end{array} \right\rangle_{\text{SUSY}} \quad (5.3)$$

Como hemos visto el grupo  $SU(3)$  es indispensable para poder seguir con nuestro análisis por lo que a continuación mencionaremos algunas de las propiedades que posee el grupo  $SU(3)$ , un estudio completo de esto, podemos acudir a las referencias de Elliot y Dawber [86], Stancu [87]. Los grupos unitarios en 3 dimensiones  $SU(3)$  tiene  $3^2 - 1 = 8$  generadores. Debido a que  $SU(2)$  es un subgrupo de  $SU(3)$ , tres generadores de  $SU(3)$  puede ser construido desde los de  $SU(2)$  como una extensión de  $SU(2)$ . Cuando queremos asignarle números cuánticos a los vectores bases de una representación irreducible se toman la cadena de subgrupos, en nuestro caso consideramos la cadena

$$SU(3) \supset SU(2)_F \otimes U(1)_Y \quad (5.4)$$

El grupo  $SU(3)$  tiene tres subgrupos  $SU(2)$  que corresponden al  $F$ -spin, U-spin- y V-spin. Los tres satisfacen las reglas de conmutación de  $SU(2)$ , de esta manera más adelante veremos que  $V_z = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z$  y  $U_z = \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}F_z$ . En esta sección vamos a elegir  $SU(2)_F$  basado en el  $F$ -spin <sup>2</sup>, el generador de  $U(1)_Y$  es la hipercarga  $Y$  Los números cuánticos  $F$  y  $Y$  satisfacen

$$[F^2, F_z] = [F^2, Y] = [Y, F_z] = 0 \quad (5.5)$$

Habiamos visto que es necesario determinar los factores isoescalares en el espacio de  $F$ -spin de  $SU(3)$ , para ello tenemos 3 elementos básicos el cual utilizaremos para construir el grupo  $SU(3)$ , estos son  $\pi, \nu, \rho$ . Para ello introducimos los generadores en términos de segunda cuantización en dos operadores que pueden dividirse en 2 operadores de peso  $\hat{F}_z$  y  $\hat{Y}$  y tres operadores de ascenso  $\hat{F}_+, \hat{V}_+, \hat{U}_+$  y tres operadores de descenso  $\hat{F}_-, \hat{V}_-, \hat{U}_-$ . Tenemos 6 operadores de ascenso y descenso: el operador  $\hat{F}_+ = \pi^+\nu$  que convierto un bosón de neutrón en bosón de protón,  $\hat{F}_- = \nu^+\pi$  que convierte un bosón de protón en bosón de neutrón,  $\hat{V}_+ = \pi^+\rho$  que convierte un fermión en bosón de protón,  $\hat{V}_- = \rho^+\pi$  que convierte un

<sup>2</sup>Es similar a el Isoespín en el modelo de partículas elementales de  $SU(3)$

bosón de protón en fermión,  $\hat{U}_+ = \nu^+ \rho$  que convierte un fermión en un bosón de neutrón,  $\hat{U}_- = \rho^+ \nu$  que convierte un bosón de neutrón en fermión y finalmente tenemos 2 operadores de peso:  $\hat{F}_z = \frac{1}{2}(\pi^+ \pi - \nu^+ \nu)$ ,  $\hat{Y} = \frac{1}{3}(\pi^+ \pi + \nu^+ \nu - 2\rho^+ \rho)$ ,

$$\begin{aligned}
\hat{F}_+ &= \pi^+ \nu \\
\hat{F}_- &= \nu^+ \pi \\
\hat{F}_z &= \frac{1}{2}(\pi^+ \pi - \nu^+ \nu) \\
\hat{Y} &= \frac{1}{3}(\pi^+ \pi + \nu^+ \nu - 2\rho^+ \rho) \\
\hat{V}_+ &= \pi^+ \rho \\
\hat{V}_- &= \rho^+ \pi \\
\hat{U}_+ &= \nu^+ \rho \\
\hat{U}_- &= \rho^+ \nu
\end{aligned} \tag{5.6}$$

De las definiciones (5.6) podemos observar que existe una dependencia lineal de  $\hat{F}_z$  y  $\hat{Y}$ , además tenemos que  $\pi^+ \pi = 3\hat{Y} - \nu^+ \nu + 2\rho^+ \rho$  y para  $\hat{V}_z$

$$\hat{V}_z = \frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{U}_z \tag{5.7}$$

y por otro lado  $\nu^+ \nu = \pi^+ \pi - 2\hat{F}_z$

$$\hat{U}_z = -\hat{F}_z + \hat{V}_z \tag{5.8}$$

de esta manera sustituyendo (5.8) en (5.7) tenemos

$$\hat{V}_z = \frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{U}_z = \frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{F}_z - \hat{V}_z$$

y así obtenemos la dependencia lineal de  $\hat{V}_z$

$$\boxed{\hat{V}_z = \frac{3}{4}\hat{Y} + \frac{1}{2}\hat{F}_z} \tag{5.9}$$

Análogamente para  $\hat{U}_z$

$$\hat{U}_z = -\hat{F}_z + \hat{V}_z = -\hat{F}_z + \frac{3}{4}\hat{Y} + \frac{1}{2}\hat{F}_z$$

$$\boxed{\hat{U}_z = \frac{3}{4}\hat{Y} - \frac{1}{2}\hat{F}_z} \tag{5.10}$$

Ahora calculado los conmutadores posibles de estos operadores llegamos a las reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
[\hat{F}_z, V_\pm] &= \pm \frac{1}{2}V_\pm & [\hat{F}_z, \hat{U}_\pm] &= \mp \frac{1}{2}\hat{U}_\pm & [\hat{F}_z, \hat{F}_\pm] &= \pm \hat{F}_\pm & [\hat{F}_+, \hat{F}_-] &= 2\hat{F}_z \\
[\hat{V}_z, \hat{V}_\pm] &= \pm \hat{V}_\pm & [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= \frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{F}_z = \hat{2}U_z & [\hat{U}_z, \hat{U}_\pm] &= \pm \hat{U}_\pm & [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= \frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{F}_z = \hat{2}U_z \\
[\hat{Y}, \hat{F}_\pm] &= 0 & [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] &= \pm \hat{V}_\pm & [\hat{Y}, \hat{U}_\pm] &= \pm \hat{U}_\pm & [\hat{U}_+, \hat{V}_-] &= \hat{F}_- \\
[\hat{Y}, \hat{F}_z] &= 0 & [\hat{V}_+, \hat{F}_+] &= 0 & [\hat{U}_+, \hat{V}_+] &= 0 & [\hat{U}_+, \hat{F}_-] &= 0 \\
[\hat{F}_-, \hat{V}_+] &= \hat{U}_+ & [\hat{F}_+, \hat{U}_+] &= V_+ & & & & 
\end{aligned} \tag{5.11}$$

En el apéndice (A.7) se muestra el camino como se determinan estos conmutadores. El álgebra de  $F$ -spin constituido por operadores  $\hat{F}_i$  así como para el álgebra de  $U$ -spin conformados por los operadores  $\hat{U}_i$  y el álgebra  $V$ -spin compuesto por el conjunto de operadores  $\hat{V}_i$  son cerrados. Las tres álgebras son subálgebras de  $SU(3)$  y cada una de ellas individualmente se le puede corresponder el álgebra de los operadores del momento angular (álgebra de Lie se  $SU(2)$ ). Ahora usemos estas reglas de conmutación para deducir las etiquetas y las representaciones irreducibles de  $SU(3)$ . Antes de hacer esto, veamos como ejemplo a seguir el caso de las representaciones irreducibles para el momento angular. Elijamos primero la base en el cual uno de los operadores de  $J_z$  es diagonal. Escribamos los operadores restantes de ascenso y descenso asociándoles su respectivo eigenvalor  $m$  de  $J_z$ . Finalmente veamos que si  $J$  denota el valor máximo de la representación entonces hay  $(2j + 1)$  vectores bases con  $m = j, j - 1, \dots, -j$  y esos valores de  $j$  pueden ser  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . La representación irreducible puede ser entonces etiquetado por éste número  $j$ . Los diferentes vectores bases pueden ser visualizados por el conjunto de  $(2j + 1)$  puntos como intervalos unitarios a lo largo del eje  $m$  y espaciados simétricamente desde el origen. Esta técnica puede ser utilizada para  $SU(3)$  pero en una forma extendida. Dos de los ocho operadores pueden ser diagonalizados (por construcción), consecuentemente nosotros necesitamos dos dimensiones en vez de una para expresar la representación de  $SU(3)$ . Dos números son necesarios para distinguir la representación irreducible en lugar de un número. Elijamos una base para la representación en las cuales los dos operadores  $\hat{F}_z, \hat{Y}$  son diagonales.

Ahora nos puede surgir la duda, de cuales son los números cuánticos que surgen con los operadores de ascenso y descenso. Para ellos tomenos un conmutador de (5.11)

$$[\hat{Y}, \hat{F}_z] = 0 \quad (5.12)$$

De acuerdo a los operadores  $\hat{Y}$  y  $\hat{F}_z$  pueden ser diagonalizados simultaneamente. Nostros comunmente podemos denotar los eigenestados como

$$|F_z, Y\rangle \quad (5.13)$$

y tenemos

$$\hat{F}_z |F_z, Y\rangle = F_z |F_z, Y\rangle \quad (5.14)$$

$$\hat{Y} |F_z, Y\rangle = Y |F_z, Y\rangle \quad (5.15)$$

de  $[\hat{F}_z, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm$

$$(\hat{F}_z \hat{V}_\pm - \hat{V}_\pm \hat{F}_z) |F_z, Y\rangle = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle$$

utilizando (5.14)

$$\hat{F}_z \hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle - F_z \hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle$$

tenemos que

$$\hat{F}_z (\hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle) = (F_z \pm \frac{1}{2}) \hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle \quad (5.16)$$

esto implica que

$$\hat{V}_\pm |F_z, Y\rangle = \sum_{Y'} N(F_z, Y, Y') |F_z \pm \frac{1}{2}, Y'\rangle \quad (5.17)$$

La normalización de los factores  $N(F_z, Y, Y')$  que se tiene en la ecuación de arriba puede depender de los números cuánticos  $F_z$  y  $Y$ . Así, los operadores  $\hat{V}_\pm$  transforman un estado con el número cuántico  $F_z$  en un estado con un número cuántico  $F_z \pm \frac{1}{2}$  y con un número desconocido  $Y'$ . Para  $\hat{V}_\pm$  incrementa

y disminuye el número cuántico con  $\frac{1}{2}$ . Por los mismos argumentos, lo deducimos de  $[\hat{F}_z, \hat{U}_\pm] = \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm$ , tenemos la relación

$$\hat{F}_z(\hat{U}_\pm|F_z, Y) = (F_z \mp \frac{1}{2})\hat{U}_\pm|F_z, Y). \quad (5.18)$$

Entonces,  $\hat{U}_\pm$  incrementa y disminuye, el número cuántico  $F_z$  con  $\frac{1}{2}$ . De la relación

$$[\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm \hat{V}_\pm$$

análogamente

$$\hat{F}_z(\hat{V}_\pm|F_z, Y) = (F_z \pm 1)\hat{V}_\pm|F_z, Y). \quad (5.19)$$

Entonces  $\hat{V}_\pm$  incrementa y disminuye el número cuántico  $Y$  en 1. Esto responde a la pregunta referente a los valores  $Y'$  que aparecen en el lado derecho de la ecuación (5.17); solo  $Y' = Y \pm 1$  aparecerá para  $\hat{V}_\pm|F_z \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1)$ . Finalmente el conmutador

$$[\hat{Y}, \hat{U}_\pm] = \pm \hat{U}_\pm$$

nos lleva a la ecuación de eigenvalores

$$\hat{Y}(\hat{U}_\pm|F_z, Y) = (Y \pm 1)\hat{U}_\pm|F_z, Y). \quad (5.20)$$

los respectivos incrementos y disminuciones del número cuántico  $Y$  están dados por 1. Porque  $[\hat{Y}, \hat{F}_\pm] = 0$ , los operadores  $\hat{F}_\pm$  no cambian de número cuántico en  $Y$ . En vista que en el álgebra del momento angular, nosotros sabemos que el número cuántico  $F_z$  debe tener valor el entero o semientero. Esto es evidente debido a que  $\hat{V}_\pm$  y  $\hat{U}_\pm$  cambian  $F_z$  en unidades semienteras y  $\hat{F}_\pm$  lo cambia en unidades enteras. Esto lo podemos ver en la figura 5.1.

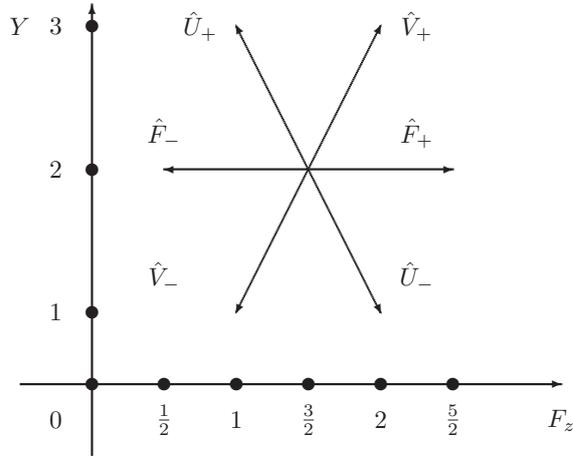


Figura 5.1: Acción de los operadores de escalón en el plano  $F_z - Y$

Los operadores de escalón  $\hat{F}_-, \hat{V}_+, \hat{U}_-$  o  $\hat{F}_+, \hat{V}_-, \hat{U}_+$  forman triángulos equiláteros como se muestra en la figura 5.2. De las definiciones de  $U_z$  y  $V_z$  se tiene que  $Y = \frac{2}{3}(U_z - V_z)$  y debido a esto los eigenvalores de  $Y$  deben ser  $0, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm 1, \text{etc.}$  entonces cada vector base va a estar asociado con un punto  $(F_z, Y)$  el cual nos lleva a una malla con espacios de  $\frac{1}{2}$  en la dirección  $F_z$  y  $\frac{1}{3}$  en la dirección  $Y$ . Ahora es más fácil visualizar el efecto de los 6 operadores restantes  $F_\pm, U_\pm, V_\pm$  en términos de movimientos en el plano  $(F_z, Y)$ , ya que  $F_\pm$  son operadores comunes de ascenso y descenso con respecto a  $F_z$  y debido

a que ellos conmutan con  $Y$  la operación de  $F_{\pm}$  sobre el vector base asociado al punto  $(F_z, y)$  produce un nuevo vector asociado al punto  $(F_z \pm 1, Y)$  de esta manera  $F_{\pm}$  corresponden a desplazamientos en la dirección  $F_z$ . Por el mismo camino  $U_{\pm}$  corresponden desplazamientos  $(\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$  mientras que para  $V_{\pm}$  corresponde a desplazamientos  $(\mp\frac{1}{2}, \mp 1)$  En una representación irreducible debe ser posible generar todos los vectores bases de cualquier vector, usando operadores infinitesimales. Es claro que  $Y$  puede ser cambiado solo en desplazamientos enteros, entonces dado un valor impar en  $Y$  el cambio de  $F_z$  debe ser semientero de esta manera se concluye que los vectores bases en una representación irreducible de Lie forma un hexágono. En la siguiente figura podemos ver como se puede visualizar los diagramas de peso construidos a partir de  $(\lambda, \mu)$

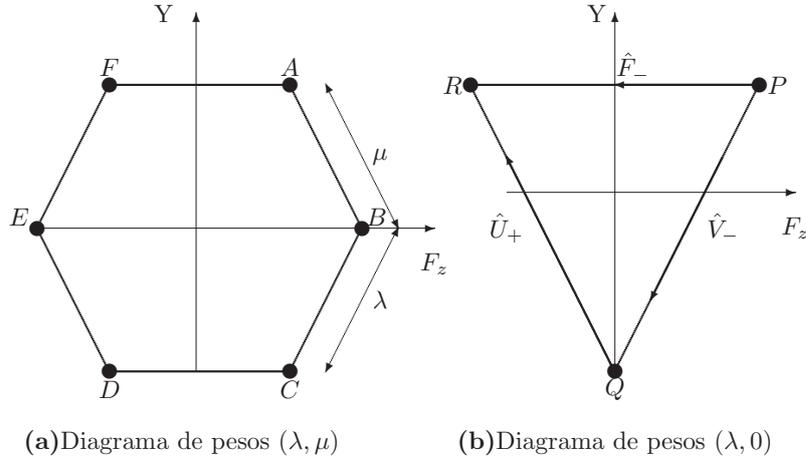


Figura 5.2: Distintas representaciones asociados a  $(\lambda, \mu)$

Ahora el siguiente paso es encontrar los puntos de la malla tales que corresponden a los vectores base necesarias para producir una representación irreducible. Consideremos el vector base  $|\psi\rangle$  con el peso máximo en una representación irreducible. Podemos decir que es el vector con el mayor valor de  $Y$  y para este el mayor valor de  $F_z$  esta definición nos implica

$$\hat{F}_+|\psi\rangle = \hat{V}_+|\psi\rangle = \hat{U}_-|\psi\rangle = 0 \quad (5.21)$$

Ya que  $\hat{U}_+$  y  $\hat{V}_-$  pueden aumentar el valor de  $F_z$  manteniendo  $Y$  sin cambio. Esto nos lleva a que  $|\psi\rangle$  debe tener definido el  $F$ -spin,  $U$ -spin,  $V$ -spin con los valores ya calculados

$$\begin{aligned} F &= F_z \\ U = U_z &= \frac{3}{4}Y - \frac{1}{2}F_z \\ V = V_z &= \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z \end{aligned} \quad (5.22)$$

Comunmente es práctico etiquetar a el vector base  $|\psi\rangle$  por dos números enteros

$$\lambda = 2V, \quad \mu = 2U \quad (5.23)$$

de esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda = V = V_z &= \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z \\ \frac{1}{2}\mu = U = -U_z &= -\frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z \end{aligned} \quad (5.24)$$

de esta forma obtenemos los valores de  $F_z$  y  $Y$  en forma general

$$F_z = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \quad (5.25)$$

$$Y = \frac{1}{3}(\lambda - \mu) \quad (5.26)$$

Si queremos encontrar un estado máximo, conociendo que hay  $\mu^3$  estados sobre un lado de de nuestro diagrama de pesos del hexagono

$$\begin{aligned} \hat{Y}\phi_{max} &= [\frac{1}{3}(\lambda - \mu) + \mu]\phi_{max} = \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu)\phi_{max} \\ \hat{F}_z\phi_{max} &= [\frac{1}{2}(\lambda + \mu) - \frac{\mu}{2}]\phi_{max} = \frac{\lambda}{2}\phi_{max} \end{aligned} \quad (5.27)$$

de esta forma construimos un estado de peso máximo  $\phi_{max} = |(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_A$  como

$$\left| (\lambda, \mu), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) \right\rangle \quad (5.28)$$

o en su caso esto corresponde a un punto A en el diagrama de pesos

$$|\psi\rangle_A \rightarrow A = \left( \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) \right) \quad (5.29)$$

Por construcción uno puede ver que el conjunto  $(\lambda, \mu)F, F_z, Y$  forman un conjunto cerrado, uno comienza desde el estado de máximo peso, y aplicando los operadores de ascenso y descenso  $F_{\pm}, V_{\pm}, U_{\pm}$  y sus relaciones de conmutación, uno puede cubrir todo el subespacio invariante  $((\lambda, \mu))$ . Cuando tenemos el diagrama de pesos  $(\lambda, \mu)$ , vemos el siguiente comportamiento, encontramos tres operadores sobre cada punto de la arista del hexagono el cual aplicado sobre el estado asociado a estos puntos no da cero .

Esto nos permite entender que tanto en las aristas como en los segmentos del hexagono el diagrama de pesos, estos puntos solo tienen estados únicos. Cuando hablemos de estados bases en la física nuclear podemos entender que estos estados generalmente corresponden a los estados simétricos es decir, son los estados el cual en el diagrama de pesos poseen  $\mu = 0$  así el tamaño los segmentos tienen que ser  $|\overline{AB}| = 0$   $|\overline{DC}| = 0$  y  $|\overline{FE}| = 0$  de esta forma el diagrama de pesos se convierte en un triángulo. entonces

<sup>3</sup>Aquí se toma el hecho de que en el momento angular satisface las mis mismas reglas de conmutación que  $F_z$ , habiendo en el momento angular  $2l$  estados ya que corren desde  $-l, \dots, l-1, l$  de esta manera si hay  $\frac{l}{2}$  entonces tenemos  $\mu$  estados además  $[F, Y] = 0$  y  $[U, Y] = 0$

bajo este razonamiento podemos decir que para el vertice P se cumple  $\hat{F}_+|\phi_A\rangle = 0$ ,  $\hat{V}_+|\phi_A\rangle = 0$ ,  $\hat{U}_-|\phi_P\rangle = \hat{U}_+|\phi_P\rangle = 0$ , para el vertice B se cumple  $\hat{F}_+|\phi_Q\rangle = F_-|\phi_Q\rangle = 0$ ,  $\hat{V}_-|\phi_Q\rangle = 0$ ,  $\hat{U}_-|\phi_Q\rangle = 0$ , para el vertice R se cumple  $\hat{F}_-|\phi_R\rangle = 0$ ,  $\hat{V}_-|\phi_R\rangle = V_+|\phi_C R\rangle = 0$ ,  $\hat{U}_+|\phi_R\rangle = 0$ .

Estando en la base  $F$ -spin y utilizando las reglas de  $F$ -spin de la ecuaciones (5.6) los estados tienen la forma:

$$|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F \quad (5.30)$$

además se cumple que

$$\begin{aligned} \hat{F}_z|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F &= f|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F \\ \hat{Y}|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F &= y|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F \\ \hat{F}^2|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F &= f(f+1)|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_F \end{aligned} \quad (5.31)$$

ahora, si queremos expresar nuestros estados pero en otra base, la base de  $V$ -spin, a esta base le corresponde la cadena

$$\begin{array}{c} SU(3) \supset SU(2) \otimes U(1) \\ (\lambda, \mu) \quad V \quad Y \end{array} \quad (5.32)$$

utilizando (5.6) en  $\hat{V}_z = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z$  obtenemos que  $\hat{V}_z = \frac{1}{2}(\pi^+\pi - \rho^+\rho)$  es decir estamos cambiando de base, y de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{V}_+ &= \pi^+\rho \\ \hat{V}_- &= \nu^+\rho \\ \hat{V}_z &= \frac{1}{2}(\pi^+\pi - \rho^+\rho) \\ \hat{Y} &= \frac{1}{3}(\pi^+\pi + \rho^+\rho - 2\pi^+\pi) \end{aligned} \quad (5.33)$$

que puede recordarse simplemente haciendo el cambio  $\nu \leftrightarrow \rho$  en las definiciones (5.6), además se cumple

$$\begin{aligned} \hat{V}_z|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_V &= v|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_V \\ \hat{Y}|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_V &= y|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_V \\ \hat{V}^2|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_V &= v(v+1)|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle_V \end{aligned} \quad (5.34)$$

aquí se puede notar que la forma de los eigenvalores es la misma que si estuviera trabajando sobre  $F$ -spin, de tal manera que los elementos de matriz de los estados al cual se le aplica los operadores  $V_\pm$  suelen ser más rapido calculados desde su base que desde su análogo, lo mismo sucede con  $U$ -spin. Algunas características de la estructura de los multipletes de  $SU(3)$  puedo expresar de manera breve:

1. El álgebra  $SU(3)$  tiene las subálgebras  $F, U, V$ . Cada una de esas álgebras son isomórficas a la álgebra  $SU(2)$ , es decir, al álgebra del momento angular. Entonces los multipletes de  $SU(3)$ , pueden ser construidos en términos de acoplamiento de multipletes de  $F, U$  y  $V$ .
2. Los operadores  $\hat{F}_z, \hat{Y}$  y por lo tanto también  $\hat{U}_z = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{F}_z)$  y  $\hat{V}_z = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{F}_z)$  debben ser simultaneamente diagonalizables. Entonces sus eigenvalores son

$$F_z, \quad Y, \quad U_z = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}Y - F_z) \text{ y } V_z = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}Y + F_z)$$

3. Los operadores de escalon  $\hat{F}_\pm, \hat{V}_\pm, \hat{U}_\pm$  actúan sobre estados de  $SU(3)$  de acuerdo a la figura 5.1 Los últimos puntos de esos de esos operadores están situados sobre un hexágono regular.
4. Aquí los multipletes de  $SU(3)$  fueron construidos a partir de  $F$  multipletes, (paralelamente al eje  $F_z$ )  $V$  multipletes (a lo largo líneas diagonales de  $V$ ) y multipletes de  $U$  (a lo largo de líneas diagonales de  $U$  del diagrama de pesos) como se aprecia en la figura 5.2 en el inciso (b). Estos submultipletes  $F, U, V$  deben estar acoplados ya que se tienen unas relaciones de conmutación  $[\hat{F}_+, \hat{V}_-] = -\hat{U}_-$ ,  $[\hat{F}_+, \hat{U}_+] = \hat{V}_+$ .
5. Debido a la equivalencia de las tres subálgebras,  $F, U, V$ , la (finitas) representaciones de los multipletes de  $SU(3)$  dentro del plano  $Y - F_z$  deben ser regulares (pero no necesariamente equiláteras) hexágonos ó triángulos. Esto es debido a las siguientes consideraciones: los elementos (estados) de el multiplete  $F$  se encuantan a lo largo de las líneas que forma  $F$  y están medidos por los números cuánticos  $F_z$ . Como es bien conocido desde el momento angular (y el álgebra de isoespin) todos los valores  $F_z$  dados de un dado multiplete tiene que estar en el intervalo  $F_{zmax} \geq F_z \geq -F_{zmax}$ . Entonces, el multiplete  $SU(3)$  tiene que ser simétrico con respecto al eje  $Y$  ( $F_z = 0$ ). Evidentemente, las líneas que hace  $F$  forman un angulo con el eje  $Y$ .
6. Como las álgebras  $F, V$  y  $U$  son iguales simétricamente y por lo tanto subálgebras equivalentes de  $SU(3)$

### 5.1.2 Representación Irreducible $(\lambda, \mu)$

Para determinar los factores isoescalesares de  $SU(3)$  necesitamos conocer los estados asociados a su representación irreducible correspondiente  $(\lambda, \mu)$ . La figura 5.8 muestra el caso para  $\lambda > \mu$ . Para conocer los estados vamos a construir los estados a partir de las componentes que tienen los puntos dentro de un diagrama de peso. Para ello si comenzamos con un punto de peso máximo  $B = (\frac{1}{2}(\lambda + 1\mu), \frac{1}{3}(\lambda - \mu))$ , al cual a este punto tiene un estado de peso máximo  $\phi_{max}$ . De acuerdo a la figura 5.8, el punto A puede ser alcanzado por acción de  $\hat{U}_+$  un número de veces  $n$  para alcanzar  $\phi_A = (\hat{U}_+)^n \phi_{max}$ . La línea  $\overline{AB}$  tiene un multiplete U-spin con  $U = \text{cte}$  y  $-U \leq U_z \leq U$ . Sus puntas, A y B, corresponden a  $-U = U_{max}$  y a  $U$  respectivamente. Poniendo  $Y_{max} = \frac{1}{3}(\lambda - \mu)$  y  $(F_z)_{max} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)$  en las ecuaciones (5.10) y (5.9) uno obtiene

$$\begin{aligned} U_{max} &= \frac{3}{4}Y_{max} - \frac{1}{2}(F_z)_{max} = -\frac{1}{2}\mu \\ V_{max} &= \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Es decir, el punto B tiene  $U = \frac{\mu}{2}$  y sobre la línea  $\overline{AB}$  hay  $2U + 1 = \mu + 1$  puntos. Entonces, para alcanzar A desde B, uno necesita aplicar  $\hat{U}_+$  sobre  $\phi_{max}$   $n = \mu$  veces. Usando las reglas de conmutación,  $[\hat{F}_z, \hat{U}_+] = -\frac{1}{2}\hat{U}_+$  y  $[\hat{Y}, \hat{U}_+] = \hat{U}_+$ ,  $\mu$  veces uno encuentra

$$\begin{aligned} \hat{F}_z \phi_A &= \left[ (F_z)_{max} - \frac{\mu}{2} \right] \phi_A = \frac{\lambda}{2} \phi_A \\ \hat{Y} \phi_A &= [Y_{max} + \mu] \phi_A = \frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) \phi_A \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde  $\phi_A \sim (\hat{U}_+)^{\mu} \phi_{max}$ . Así los estados correspondientes al segmento  $\overline{AB}$  lo podemos expresar como

$$\phi_{AB} = \left| (\lambda, \mu), \frac{\lambda + k}{2}, \frac{\lambda + k}{2}, \frac{\lambda + 2\mu}{3} - k \right\rangle \quad k = 0, \dots, \mu \quad (5.37)$$

De manera similar, uno puede discutir el segmento  $\overline{BC}$  el cual es un multiplete V. Desde (5.36), uno puede ver que  $\phi_C \sim (\hat{V}_-)^{\lambda} \phi_{max}$  y desde las correspondientes relaciones de conmutación uno encuentra.

$$\begin{aligned}\hat{F}_z \phi_C &= \left[ (F_z)_{max} - \frac{\lambda}{2} \right] \phi_C = \frac{\mu}{2} \phi_C \\ \hat{Y} \phi_C &= [Y_{max} - \lambda] \phi_C = -\frac{1}{3}(2\lambda + \mu) \phi_C\end{aligned}\quad (5.38)$$

Así los estados correspondientes al segmento  $\overline{BC}$  lo podemos expresar como

$$\phi_{BC} = \left| (\lambda, \mu), \frac{\lambda + \mu - l}{2}, \frac{\lambda + \mu - l}{2}, \frac{\lambda - \mu}{3} - l \right\rangle \quad l = 0, \dots, \lambda \quad (5.39)$$

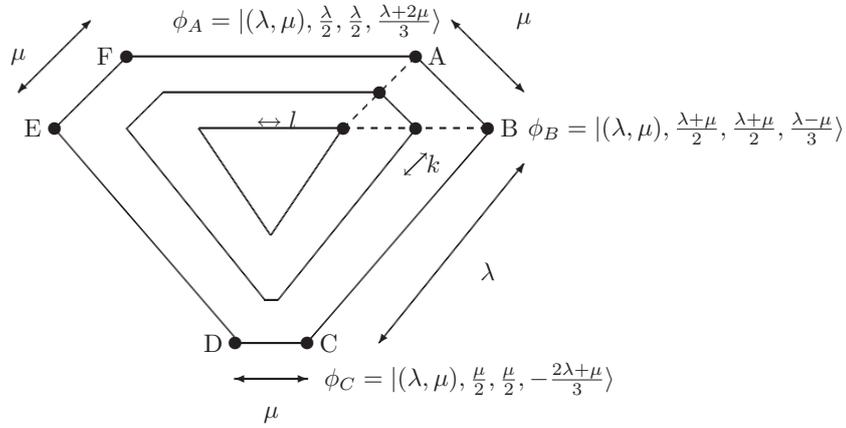


Figura 5.3: Diagrama de pesos  $(\lambda, \mu)$  donde  $\lambda > \mu$

El punto F es alcanzado desde el punto A aplicando  $\hat{F}_-$  sobre  $\phi_A$   $\lambda$  veces y D es alcanzado desde C por la aplicación de  $\hat{F}_-$  sobre  $\phi_C$   $\mu$  veces. El punto E puede obtenerse desde B usando la simetría de reflexión y puede ser alcanzado desde A usando  $\hat{F}_-$  sobre  $\phi_{max}$   $\lambda + \mu$  veces. Para cualquier punto sobre los segmentos  $\overline{AB}$  ó  $\overline{BC}$ , hay multiplete F-spin que termine en los segmentos  $\overline{EF}$  y  $\overline{DC}$ . Desde cualquier punto sobre FAB uno puede construir un multiplete V-spin que termine en EDC y para cualquier punto sobre BCD, un multiplete U-spin que termine en EFA. En este modo, comenzando desde el punto B, uno puede generar los contornos dibujados en la figura 5.3, donde para cada vector base de un subespacio invariante de una representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  es representado por puntos. Por lo contrario, los puntos dentro del hexágono no siempre le corresponde un vector base. Entonces, los puntos interiores tienen una multiplicidad diferente de 1. Los puntos A, B y C corresponden a las esquinas de la derecha. Ya hemos mencionado que hay algunas arbitrariedades en la definición de peso máximo, mientras, aquí, B le corresponde el peso máximo, el punto A fue dado como el peso máximo por Elliot y Dawber (1979).

Para ilustrar el problema de la multiplicidad del diagrama dibujado en la figura 5.8. Sobre los contornos( el hexágono más grande), solo hay un vector base correspondiente a cada punto. Dentro de este contorno, en el primer hexágono cada punto le corresponde dos vectores. Si nos vamos al segundo, le debería corresponder tres puntos, y así sucesivamente. Después el hexágono se convierte en un triángulo

Tabla 5.1: Estructura de las componentes  $F$  y  $Y$  de los estados  $|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle$  en la representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  siendo  $\lambda > \mu$  sobre los conntornos hexagonales subsecuentes

$k$	$F$	$l$	$Y$
0	$\frac{\lambda}{2}$		$\frac{\lambda+2\mu}{3}$
1	$\frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}$		$\frac{\lambda+2\mu}{3} - 1$
2	$\frac{\lambda+2}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}$		$\frac{\lambda+2\mu}{3} - 2$
3	$\frac{\lambda+3}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}$		$\frac{\lambda+2\mu}{3} - 3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\mu$	$\frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2} - 1, \dots, \frac{\lambda-\mu}{2} + 1, \frac{\lambda-\mu}{2}$	0	$\frac{\lambda-\mu}{3}$
$\mu$	$\frac{\lambda+\mu-1}{2}, \frac{\lambda+\mu-1}{2} - 1, \dots, \frac{\lambda-\mu-1}{2} + 1, \frac{\lambda-\mu-1}{2}$	1	$\frac{\lambda-\mu}{3} - 1$
$\mu$	$\frac{\lambda+\mu-2}{2}, \frac{\lambda+\mu-2}{2} - 1, \dots, \frac{\lambda-\mu-2}{2} + 1, \frac{\lambda-\mu-2}{2}$	2	$\frac{\lambda-\mu}{3} - 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mu$	$\mu, \mu - 1, \dots, 1, 0$	$\lambda - \mu$	$\frac{2(\mu-\lambda)}{3}$
$\mu$	$\mu - \frac{1}{2}, \mu - \frac{3}{2}, \dots, 1, \frac{1}{2}$	$\lambda - \mu + 1$	$\frac{2(\mu-\lambda)}{3} - 1$
$\mu$	$\mu - 1, \mu - 2, \dots, 1$	$\lambda - \mu + 2$	$\frac{2(\mu-\lambda)}{3} - 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mu$	$\frac{\mu}{2}$	$\lambda$	$-\frac{2\lambda+\mu}{3}$

y ahí el número de vectores bases independientes para cada punto es el mismo. En general, para el caso donde  $\lambda > \mu$  hay  $\mu$  hexágonos, entonces la multiplicidad de los puntos sobre cualquier triángulo es  $\mu + 1$ . Un caso interesante corresponde a la representación  $\lambda = 1, \mu = 0$  porque esta representación es utilizada para clasificar los estados base en la física nuclear.

Podemos expresar las componentes  $F$  y  $Y$  de los estados  $|(\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle$  en la representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  siendo  $\lambda > \mu$  sobre los contornos hexagonales subsecuentes, podemos expresar los estados que se encuentran sobre el segmento  $\overline{AB}$  de la ecuación (5.37) y podemos ver que en la orilla tenemos solo un estado único correspondiente a un solo valor de  $F = \frac{\lambda}{2}$  y un valor de  $Y = \frac{\lambda+2\mu}{3}$  posteriormente vemos que conforme nos metemos dentro del hexágono  $\mu$  veces hay  $\mu + 1$  estados asociados a esos puntos habiendo  $F = \frac{\lambda+\mu}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2} - 1, \dots, \frac{\lambda-\mu}{2} + 1, \frac{\lambda-\mu}{2}$  y  $Y = \frac{\lambda-\mu}{3}$  posteriormente para  $Y = -\frac{2\lambda+\mu}{3}$  se tiene  $F = \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2} - 1, \dots, -\frac{\mu}{2} + 1, -\frac{\mu}{2}$ , esto nos dice que hay un montón de estados dentro del hexágono más grande. Podemos ver un análisis más claro en la tabla (5.1.2).

### 5.1.3 Método del cálculo y convenciones

Siguiendo las convenciones usuales[85], vamos a escribir los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  como producto de un factor isoescalar por un ordinario coeficiente de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$ . Los factores isoescalares [88] son las porciones de los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  que no dependen del número cuántico aditivo  $f_{\text{spin}} F_z$ . El coeficiente de Clebsch-Gordan completo de  $SU(3)$  es factorizado en el producto de un coeficiente de Clebsch-Gordan de  $f_{\text{spin}} SU(2)$  y un factor isoscalar, (lema de factorización de Racah):

$$\left\langle \begin{array}{cc} (\lambda_1, \mu_2) & (\lambda_2, \mu_2) \\ F_1, F_{z_1} Y_1 & F_1, F_{z_2}, Y_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda, \mu) \\ F, F_z, Y \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc} (\lambda_1, \mu_1) & (\lambda_2, \mu_2) \\ F_1, Y_1 & F_2, Y_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda, \mu) \\ F, Y \end{array} \right\rangle \langle F_1, F_{z_1}; F_2, F_{z_2} | F, F_z \rangle (5.40)$$

donde  $F_z = F_{z_1} + F_{z_2}$  además  $Y = Y_1 + Y_2$ , el primer factor correspondiente  $SU(3) \supset SU(2) \otimes U_y(1)$  cuyas representaciones son  $(\lambda, \mu), F, Y$  corresponden a los factores isoescalares.

El cálculo de los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  son calculados esencialmente por el mismo procedimiento de los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$  dados en [89, 70]. Uno obtiene las relaciones de recursión utilizando los correspondientes operadores de ascenso y descenso (5.6) sobre el espacio  $(\lambda, \mu)$ , en donde se obtienen los elementos de matriz asociados a los estados correspondientes a los puntos sobre el diagrama de pesos. Ya que las relaciones de recursión son homogéneas en los coeficientes de Clebsch-Gordan, el siguiente paso es usar la condición de normalización. Aquí uno puede usar la unitariedad de las matrices para obtener más coeficientes a través de la condición de ortogonalidad. Finalmente para obtener un valor único para del coeficiente de Clebsch-Gordan, uno debe imponer una condición de fase, usamos la condición estándar de Condon-Shortley [90] para los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(2)$ .

$$\langle F_1, F_1; F_2, F - F_1 | F, F \rangle > 0 \quad (5.41)$$

La convención de fase para los coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$  está determinado por la convención de Swart[64], dado como

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda_1, \mu_1) & (\lambda_2, \mu_2) & (\lambda, \mu) \\ \hline \tilde{F}_1, \tilde{Y}_1 & F_2, Y - \tilde{Y}_1 & F_{\max}, Y \end{array} \right\rangle > 0 \quad (5.42)$$

Aquí  $F_{\max}$  es el valor máximo del  $F$ -spin del multiplete  $(\lambda, \mu)$ ,  $\tilde{F}_1$  es el valor más grande del fspin en  $(\lambda_1, \mu_1)$ , esta es la conexión con el el estado de peso máximo (y corresponde a la hypercarga  $\tilde{Y}_1$ ), y  $\tilde{F}_2$  es el valor más grande del fspin en  $(\lambda_2, \mu_2)$  que conecta  $(\tilde{F}_1, \tilde{Y}_1)$  a  $(F_{\max}, Y)$ .

## 5.2 Factores Isoescalares en $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$

En la teoría de representaciones, las tablas de Young describe las bases de una representación irreducible de un grupo simétrico. Los diagramas de Young están en correspondencia uno a uno con las representaciones irreducibles. Estos nos dan el camino correcto para especificar las simetrías de Young desde las cuales las representaciones irreducibles pueden ser construidas. De esta manera el acoplamiento de las representaciones  $(\lambda, 0)$  con  $(1, 0)$  nos puede dar dos representaciones  $(\lambda + 1, 0)$  y  $(\lambda - 1, 1)$ .

$$\begin{array}{ccc} (\lambda, 0) & \otimes & (1, 0) = (\lambda + 1, 0) \oplus (\lambda - 1, 1) \\ \square & & \square \quad \square \quad \square \\ & & \square \end{array}$$

Esto nos permite construir dos diagramas pesos, uno para la representación  $(\lambda + 1, 0)$  y otro para  $(\lambda - 1, 1)$ . Cabe mencionar que la representación irreducible  $(\lambda - 1, 1)$  en donde se rompe la simetría  $\mu = 0$  con  $\mu = 1$  esto se le puede asociar a estados excitados. Determinemos primero los factores isoescalares asociados a  $(\lambda + 1, 0)$  y posteriormente calcularemos los factores isoescalares asociados a la representación  $(\lambda - 1, 1)$ .

### 5.2.1 Factores Isoescalares de $(\lambda + 1, 0)$

Vamos a analizar la manera como se puede determinar los factores isoescalares para una situación más específica. Para cuestiones prácticas, vamos a utilizar una simplificación. Vamos a considerar que  $\mu = 0$  de esta manera nuestro diagrama de pesos, los estados máximos corresponderán únicamente a los puntos que forman un triángulo en el diagrama de pesos. Ahora nuestro estado maximo A (5.28) responderá a  $|(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle$ . Debido a que nuestro interés es encontrar correlaciones entre transferencia

de nucleones en el marco de la supersimetría nuclear. Vamos a trabajar con operadores de transferencia y el que por ahora vamos a manejar es el operador de creación de bosones de protones  $s_\pi^+$ . Ya que los estados simétricos en esta formulación corresponden a los estados base de los núcleos conocidos, es conveniente manejar estados simétricos ya que estos son los que se tienen en la naturaleza en su estado de reposo. Y los estados no simétricos generalmente corresponden a estados excitados de los núcleos, por esta razón para continuar nuestro análisis de los estados cuánticos en el espacio  $F$ -spin, U-spin, V-spin, introduzcamos el estado  $|(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$  el cual le corresponde a  $s_\pi^+$  y lo utilizaremos como ejemplo para obtener el valor de los coeficientes isoescalares.

De esta manera si hacemos el acoplamiento de  $|(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle$  con  $|(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle$  obtenemos

$$|(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle = |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle \quad (5.43)$$

siendo  $|l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2 \Rightarrow |\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}| \leq F \leq \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}$  de esta manera  $F$  puede tomar valores  $\frac{\lambda-1}{2}$  ó  $\frac{\lambda+1}{2}$  pero como  $|(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3}\rangle$  es el estado de peso máximo por construcción entonces  $F = \frac{\lambda+1}{2}$

### 5.2.2 Determinación de los factores isoescalares de SU(3) utilizando $F$ -spin

Si  $\hat{F}_- = \hat{F}_{1-} + \hat{F}_{2-}$  y  $\vec{F} = \vec{F}_{1-} + \vec{F}_{2-}$  donde  $\hat{F}_-$  satisface las reglas de conmutación, el elemento de matriz de  $\hat{F}_-$  es

$$\hat{F}_- |F, F_z\rangle = \sqrt{(F + F_z)(F - F_z + 1)} |F, F_z - 1\rangle \quad (5.44)$$

así

$$\hat{F}_- |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle = \sqrt{\lambda + 1} |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle \quad (5.45)$$

a si en el otro lado de la ecuación  $\hat{F}_- = \hat{F}_{1-} + \hat{F}_{2-}$

$$\begin{aligned} & \hat{F}_- [ |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 ] \\ &= \hat{F}_{1-} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 + \hat{F}_{2-} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 \\ &= \sqrt{\lambda} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 + |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.46)$$

igualando la ecuación (5.45) con la ecuación (5.46) obtenemos

$$\begin{aligned} |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 \\ &+ \sqrt{\frac{1}{\lambda + 1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.47)$$

por otro lado el estado anterior se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned} & |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle = \\ &= \sum_{F_1 F_{1z} Y_1 F_2 F_{2z} Y_2} \left\langle \begin{array}{cc} (\lambda, \mu) & (1, 0) \\ F_1, F_{1z} Y_1 & F_2, F_{2z} Y_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} \end{array} \right\rangle |(\lambda, 0), F_1, F_{1z}, Y_1\rangle |(1, 0), F_{2z}, Y_2\rangle \end{aligned} \quad (5.48)$$

siendo válido

$$\begin{aligned} SU(3) &\supset SU(2) \otimes U(1) \\ &\supset SO(2) \otimes U(1) \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, \mu) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ F_1, F_{1z} Y_1 & F_2, F_{2z} Y_2 & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, \mu) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ F_1, Y_1 & F_2, Y_2 & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle \langle F_1, F_{1z}, F_2, F_{2z} | \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \rangle$$

de esta forma podemos expresar los coeficientes de la suma de la ecuación (5.48) en términos de los factores isoescalares, así para el primer término de la ecuación (5.47)

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda + 1, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, \mu) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle}_{1} \langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \rangle_F$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda + 1, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

De manera análoga se puede obtener para el segundo término.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, \mu) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{\lambda+1}}$$

### 5.2.3 Determinación de los factores isoescalares de $SU(3)$ utilizando V-spin

Para continuar con nuestro análisis discutamos la acción de los operadores de ascenso y descenso  $\hat{F}_\pm, \hat{U}_\pm, \hat{V}_\pm$  en el vector base  $\phi(F, F_z, Y)$  que pertenece a la representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  para esto, necesitamos las reglas de conmutación (5.11), por ejemplo, la acción de los conmutadores que tiene  $V_\pm$  sobre  $\phi(F, F_z, Y)$  uno obtiene

$$\begin{aligned} Y \hat{V}_\pm \phi &= (Y \pm 1) V_\pm \phi \\ F_z \hat{V}_\pm \phi &= (F_z \pm \frac{1}{2}) V_\pm \phi \end{aligned} \quad (5.50)$$

La formulación general de los operadores de ascenso y descenso sobre el vector base sobre  $\phi(F, F_z, Y)$  en una representación irreducible  $(\lambda, \mu)$  bajo  $V_\pm$  son<sup>4</sup>

$$\hat{V}_\pm \phi(F, F_z, Y) = a_\pm \phi(F + \frac{1}{2}, F_z \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1) + b_\pm \phi(F - \frac{1}{2}, F_z \pm \frac{1}{2}, Y \pm 1) \quad (5.51)$$

donde

$$a_+ = \left[ \frac{(F + F_z + 1) [\frac{1}{3}(\lambda - \mu) + F + \frac{1}{2}Y + 1] [\frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) + F + \frac{1}{2}Y + 2] [\frac{1}{3}(2\lambda + \mu) - F - \frac{1}{2}Y]}{2(F + 1)(2F + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.52)$$

$$b_+ = \left[ \frac{(F - F_z) [\frac{1}{3}(\lambda - \mu) + F + \frac{1}{2}Y] [\frac{1}{3}(\lambda + 2\mu) - F + \frac{1}{2}Y + 1] [\frac{1}{3}(2\lambda + \mu) + F - \frac{1}{2}Y + 1]}{2F(2F + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.53)$$

<sup>4</sup>Estas fórmulas fueron determinadas por Swart y el utiliza  $(I, I_3, Y)$  en su trabajo en vez de  $(F, F_z, Y)$  pero el sentido matemático es el mismo[64].

los otros coeficientes se obtienen por la relación

$$\begin{aligned} a_-(F, F_z, Y) &= b_+(F + \frac{1}{2}, F_z - \frac{1}{2}, Y - 1) \\ b_-(F, F_z, Y) &= a_+(F - \frac{1}{2}, F_z - \frac{1}{2}, Y - 1) \end{aligned} \quad (5.54)$$

ahora utilicemos estas fórmulas para determinar algunos coeficientes isoescalares. Regresemos al acoplamiento de los estados

$$|(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 |(\lambda, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_2 \quad (5.55)$$

si sabemos que se cumple que  $\hat{V}_- = \hat{V}_{1-} + \hat{V}_{2-}$  podemos el primer miembro de la ecuación (5.55) y apliquemosle  $\hat{V}_-$  de esta forma utilizando (5.52) y (5.53) obtenemos que

$$\begin{aligned} \hat{V}_- \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} \right\rangle &= a_-(\frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}) \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 2}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle \\ &+ b_-(\frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}) \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.56)$$

ahora lo expresamos en términos de  $a_+$  y  $b_+$  utilizando (5.54)

$$\begin{aligned} \hat{V}_- \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} \right\rangle &= b_+(\frac{\lambda + 2}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3}) \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 2}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle \\ &+ a_+(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3}) \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle \end{aligned} \quad (5.57)$$

como sabemos, estamos partiendo que  $F_{max} = \frac{\lambda}{2}$  entonces  $F = \frac{\lambda}{2} + 1$  no pertenece a ningun estado, así el primer término de la suma (5.57) se elimina, por lo tanto solo nos queda

$$\hat{V}_- \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} \right\rangle = a_+(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3}) \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle \quad (5.58)$$

ahora calculemos el coeficiente  $a_+(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3})$  utilizando (5.52)

$$a_+(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3}) = \sqrt{\lambda + 1} \quad (5.59)$$

de esta manera tenemos

$$\hat{V}_- \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} \right\rangle = \sqrt{\lambda + 1} \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle \quad (5.60)$$

por otro lado podemos aplicar  $\hat{V}_- = \hat{V}_{1-} + \hat{V}_{2-}$  al segundo miembro de la ecuación (5.55)

$$\begin{aligned} \hat{V}_- \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} \right\rangle &= a_{1-}(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \\ &+ b_{1-}(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \\ &+ a_{2-}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 1, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \\ &+ b_{2-}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.61)$$

pero por la misma razón de la vez pasada como  $F_{max} = \frac{\lambda}{2}$  entonces  $F = \frac{\lambda+1}{2}$  no pertenece a ningún estado, así el primer término de la suma (5.61) no está, y si calculamos el coeficiente  $a_{2-}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  utilizando (5.52) y (5.53) resulta

$$a_{2-}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = b_{2+}(1, 0, -\frac{2}{3}) = 0 \quad (5.62)$$

por lo que la ecuación (5.61) se reduce solo a

$$\begin{aligned} \hat{V}_- \left| (\lambda+1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \right\rangle &= b_{1-} \left( \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \\ &\quad b_{2-} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.63)$$

ahora utilizando el hecho que

$$b_- \left( \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \right) = a_+ \left( \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3} \right) = \sqrt{\lambda+1} \quad (5.64)$$

podemos renombrar las etiquetas

$$b_- \left( \frac{\lambda'+1}{2}, \frac{\lambda'+1}{2}, \frac{\lambda'+1}{3} \right) \left| (\lambda'+1, 0), \frac{\lambda'}{2}, \frac{\lambda'}{2}, \frac{\lambda'-2}{3} \right\rangle = \sqrt{\lambda'+1} \left| (\lambda'+1, 0), \frac{\lambda'}{2}, \frac{\lambda'}{2}, \frac{\lambda'-2}{3} \right\rangle \quad (5.65)$$

si hacemos  $\lambda' = \lambda - 1$  obtenemos

$$b_- \left( \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right) \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} \right\rangle = \sqrt{\lambda} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} \right\rangle \quad (5.66)$$

que es exactamente el primer término de la suma de la ecuación (5.63) siendo que  $b_{1-}$  solo actúa sobre el estado al que denominé primero. Y si hacemos  $\lambda = 1$

$$b_- \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right) \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle = 1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle \quad (5.67)$$

que corresponde al segundo término de la suma (5.63) de esta manera, sustituyendo (5.66) y (5.67) en (5.63) tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{V}_- \left| (\lambda+1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \right\rangle &= \sqrt{\lambda} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \\ &\quad + \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.68)$$

igualando las ecuaciones (5.60) y (5.68) finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \left| (\lambda+1, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3} \right\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \\ &\quad \sqrt{\frac{1}{\lambda+1}} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

podemos verificar que el estado anterior está normalizado, es decir,  $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ , así de esta manera para el primer término tenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}} \quad (5.70)$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & 0, -\frac{2}{3} & \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0, 0 \middle| \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{\lambda+1}}$$

y para el segundo término

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & 0, -\frac{2}{3} & \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{\lambda+1}}} \quad (5.71)$$

#### 5.2.4 Mezcla de bases en la determinación de factores isoescalares de $SU(3)$

Cuando utilizamos distintas bases, es importante tomar en cuenta las siguientes relaciones

$F\text{-spin a } V\text{-spin}$ $ (\lambda, \mu)F, F_z, Y\rangle \rightarrow  (\lambda, \mu)V, V_z, Y'\rangle$	$V\text{-spin a } F\text{-spin}$ $ (\lambda, \mu)V, V_z, Y'\rangle \rightarrow  (\lambda, \mu)F, F_z, Y\rangle$	(5.72)
$V_z = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z$ $Y' = F_z - \frac{1}{2}Y$	$F_z = \frac{3}{4}Y' + \frac{1}{2}V_z$ $Y = -\frac{1}{2}Y' + V_z$	

Si tenemos el diagrama de pesos de  $SU(3)$  dado por la representación irreducible de  $(\lambda, \mu = 0)$  en donde un punto de peso máximo tiene asociado un estado

$$\phi_A = |(\lambda + 1, 0), F = \frac{1}{2}(\lambda + 1), F_z = \frac{1}{2}(\lambda + 1), Y = \frac{1}{3}(\lambda + 1)\rangle \quad (5.73)$$

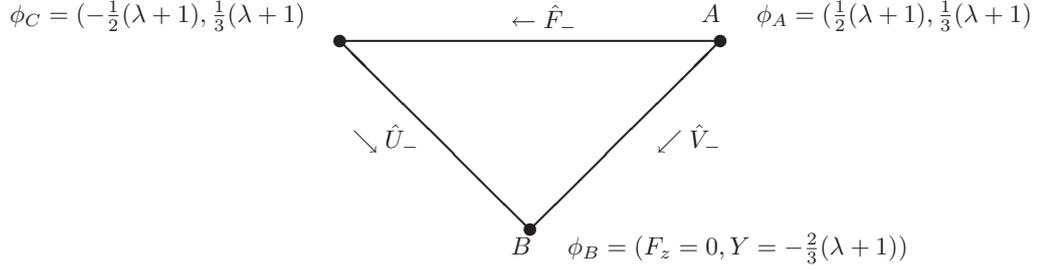
donde claramente se cumple  $\hat{F}_+ \phi_A = \hat{V}_+ \phi_A = \hat{U}_- \phi_A = \hat{U}_+ \phi_A = 0$ .

Para reducir el número cálculos, en la obtención de los coeficientes isoescalares de  $SU(3)$ , podemos utilizar la base más adecuada dependiendo del problema. Por ejemplo si nosotros aplicamos el operador  $\hat{V}_-$  sobre un estado de máximo peso, es conveniente utilizar la base de V-spin, de esta forma, haciendo el cambio de base, sabemos que  $V_z$  es una combinación lineal de  $Y$  y  $F_z$  para el estado  $\phi_A$  tenemos que  $F = \frac{1}{2}(\lambda + 1), Y = \frac{1}{3}(\lambda + 1)$  de  $V_z = \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}F_z$  y  $Y' = F_z - \frac{1}{2}Y$  por lo tanto en la base  $V$  tenemos que

$$V_z = \frac{1}{2}(\lambda + 1) \quad Y' = \frac{1}{3}(\lambda + 1) \quad (5.74)$$

así  $\phi_A$  expresado en la base  $V$  es

$$\phi_A = |(\lambda + 1, 0), \frac{1}{2}(\lambda + 1), \frac{1}{2}(\lambda + 1), \frac{1}{3}(\lambda + 1)\rangle_V \quad (5.75)$$

Figura 5.4: Diagrama de pesos  $(\lambda + 1, 0)$ 

donde podemos expresar el estado anterior como el acoplamiento de dos estados

$$\begin{aligned}\phi_A &= |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle_V \\ &= |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_V |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_V\end{aligned}\quad (5.76)$$

por otro lado el mismo estado en la base de  $F$ -spin puede ser expresado como

$$\begin{aligned}\phi_A &= |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle_F \\ &= |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_F |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_F\end{aligned}\quad (5.77)$$

Es curioso notar que si al estado  $|F, F_z, Y\rangle$  le suponemos que  $F = F_z$ ,  $F$  es máximo, podemos generalizar el procedimiento de aplicar  $\hat{V}_-$  a siendo

$$\begin{aligned}\hat{V}_-|F, F_z, Y\rangle &= b_-(F, F_z, Y)|F - \frac{1}{2}, F_z - \frac{1}{2}, Y - 1\rangle \\ (\hat{V}_-)^2|F, F_z, Y\rangle &= \hat{V}_-[\hat{V}_-|F, F_z, Y\rangle] = \hat{V}_-[b_-(F, F_z, Y)|F - \frac{1}{2}, F_z - \frac{1}{2}, Y - 1\rangle]\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}(\hat{V}_-)^2|F, F_z, Y\rangle &= b_-(F, F_z, Y)b_-(F - \frac{1}{2}, F_z - \frac{1}{2}, Y - 1)|F - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, F_z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, Y - 1 - 1\rangle \\ &\vdots \\ (\hat{V}_-)^k|F, F_z, Y\rangle &= b_-(F, F_z, Y) \times \dots \times b_-(F - \frac{k}{2}, F_z - \frac{k}{2}, Y - k)|F - \frac{k}{2}, F_z - \frac{k}{2}, Y - k\rangle\end{aligned}\quad (5.78)$$

Si queremos generalizar un poco, expresemos todos los estados que van desde el punto  $A$  al punto  $B$  de la figura (5.4) bajo la aplicación sucesiva de  $\hat{V}_-$  en la base  $V$ , es importante notar que como  $[F, Y] = 0$  los elementos de matriz de un estado en la base  $V$  de  $\hat{V}_-$  tiene la forma:

$$\hat{V}_-|V, V_z\rangle = \sqrt{(V + V_z)(V - V_z + 1)}|V, V_z - 1\rangle\quad (5.79)$$

repitiendo el mismo mecanismo utilizado en la determinación de factores isoescalares en  $F$ -spin y  $V$ -spin donde

$$\hat{V}_-\phi_A = (V_{1-} + V_{2-})\phi_A\quad (5.80)$$

como  $V_-$  solo actua solo  $V_z$  y  $V_z$  y deja invariante  $Y$  así los estados que van desde el punto  $A$  al punto  $B$  los podemos expresar como

$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= |(\lambda + 1, 0), (\frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} - k, \frac{\lambda + 1}{3})\rangle_V \\ &= \langle \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{2} - k, \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} - k \rangle_V |(\lambda, 0) \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{\lambda}{3}\rangle_V |(\lambda, 0) \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_V \\ &+ \langle \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} - k \rangle_V |(\lambda, 0) \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{\lambda}{3}\rangle_V |(\lambda, 0) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_V\end{aligned}\quad (5.81)$$

Lo interesante de este desarrollo es que los coeficientes están expresados en términos de los coeficientes de Clebsch-Gordan pero en la base V-spin, usando este hecho, si estamos en la base  $F$ -spin podemos expresar sus respectivos coeficientes pero utilizando los coeficientes de la otra base, la de V-spin. Por lo tanto la determinación de los coeficientes de este tipo de situaciones son más fáciles de evaluar.

$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_F \\ &= \langle CG \rangle_{V1} |(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(\lambda, 0) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F \\ &+ \langle CG \rangle_{V2} |(\lambda, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle_F |(\lambda, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F\end{aligned}\quad (5.82)$$

donde

$$\begin{aligned}\langle CG \rangle_{V1} &= \langle \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{2} - k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} - k \rangle_V = \sqrt{\frac{\lambda + 1 - k}{\lambda + 1}} \\ \langle CG \rangle_{V2} &= \langle \frac{\lambda}{2} \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} - k \rangle_V = \sqrt{\frac{k}{\lambda + 1}}\end{aligned}$$

y además  $k$  corre desde  $k = 0, \dots, \lambda + 1$ ,

$$\begin{aligned}\phi_{AB} &= |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_F \\ &= \sqrt{\frac{\lambda + 1 - k}{\lambda + 1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(\lambda, 0) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F \\ &+ \sqrt{\frac{k}{\lambda + 1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle_F |(\lambda, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F\end{aligned}\quad (5.83)$$

por lo tanto para el primer término de la suma, los factores isoescalares para esos estados se puede expresar como

$$\begin{aligned}&\left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k \end{array} \right\rangle \underbrace{\left\langle \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2} \right\rangle_F}_{1}\end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda + 1 - k}{\lambda + 1}}\quad (5.84)$$

y para el segundo término

$$\begin{aligned}
& \left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k \end{array} \middle| \begin{array}{c} (1, 0) \\ 0, 0, -\frac{2}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda+1, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1}{3} - k \end{array} \right\rangle \\
= & \left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k \end{array} \middle| \begin{array}{c} (1, 0) \\ 0, -\frac{2}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda+1, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1}{3} - k \end{array} \right\rangle \underbrace{\left\langle \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2}, 0, 0 \middle| \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2} \right\rangle_F}_1
\end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k \end{array} \middle| \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda+1, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda-1}{3} - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{k}{\lambda+1}} \quad (5.85)$$

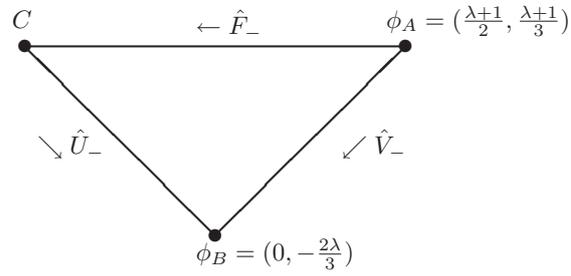


Figura 5.5: Diagrama de pesos Y contra  $F_z$   $(\lambda, 0)$

Estos valores isoescalares corresponden a los estados que se encuentran localizados sobre el segmento  $\overline{AB}$ .

Por otro lado si tenemos de nuevo el estado

$$\phi_A = |(\lambda+1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3}\rangle_F = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_{F1} |(1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_{F2}$$

pero ahora queremos expresar los estados que se encuentren sobre el segmento  $\overline{AC}$  apliquemos  $k$  veces  $F_-$  sobre el estado anterior así

$$\begin{aligned}
\phi_{AC} &= |(\lambda+1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k, \frac{\lambda+1}{3}\rangle_F \\
&= \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k \right\rangle |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{\lambda}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\
&+ \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k \right\rangle |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{\lambda}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle
\end{aligned} \quad (5.86)$$

si ahora expresamos el primer coeficiente en términos de factores isoescalares tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k \right\rangle &= \left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{\lambda}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda+1, 0) \\ \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{c} (\lambda, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda+1, 0) \\ \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k \right\rangle
\end{aligned}$$

de esta forma llegamos a que

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle = 1 \quad (5.87)$$

y si hacemos cambio de base de  $F$ -spin a  $V$ -spin

$$|(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{\lambda + 1}{2} - k, \frac{\lambda + 1}{3}\rangle_F = |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_V \quad (5.88)$$

el primer coeficiente de los estados anteriores se puede expresar como

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{3} - k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{3} - k \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1}{3} - k \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2} \right\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

ya que siendo

$$\left\langle \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2} \right\rangle = 1 \quad (5.89)$$

por lo tanto obtenemos que el factor isoescalar que corresponde al primer coeficiente de la suma para los estados que se encuentran el segmento  $\overline{AC}$  es

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{3} - k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{3} - k \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1}{3} - k \end{array} \right\rangle = 1$$

si ahora expresamos los coeficiente del segundo término de la suma en términos de factores isoescalares tenemos que

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k \right\rangle = \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + 1 - k, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2} - k \right\rangle \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda + 1, 0) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} \end{array} \right\rangle = 1$$

Hemos visto como determinar los coeficientes de nuestros estados que corresponden a los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , concluyendo que los estados que se encuentran en las aristas solo poseen un unico estado, y los que se encuentran en las diagonales poseen dos términos en sus estados. Ahora la pregunta sería como son los estados dentro de estas representaciones, para averiguar esto, supongamos que tenemos un estado  $\phi_{mix}$  el cual fue desplazado en dirección de  $V_z$   $k$  veces y posteriormente  $l$  veces en la dirección  $F_z$ , de esta manera los coeficientes asociados al estado  $\phi_{mix}$  será simplemente un producto de dos coeficientes, uno debido a la acción del operador  $F_-$  y otro coeficiente debido a la acción del operador  $\hat{V}_-$ .

De esta forma podemos construir el estado  $\phi_{mix}$  a partir de nuestro estado  $\phi_{AB}$  simplemente aplicando  $l$  veces el operador  $\hat{F}_-$ , apliquemos primero  $\hat{F}_-$  para ver su comportamiento

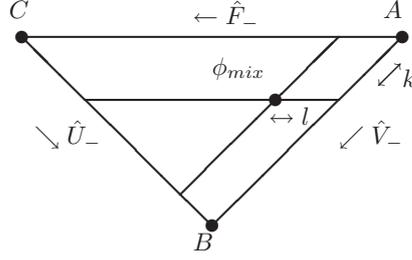


Figura 5.6: Diagrama de pesos  $(\lambda + 1, 0)$  para un estado  $\phi_{mix}$  dentro del diagrama de pesos.

$$\begin{aligned}
\hat{F}_-[\phi_{AB}] &= F_-|(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2} - k, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_F \\
&= \langle CG \rangle_{V1}(F_{1-} + F_{2-})|(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(1, 0) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F \\
&+ \langle CG \rangle_{V2}(F_{1-} + F_{2-})|(\lambda, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle_F |(1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F
\end{aligned} \tag{5.90}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\lambda + 1 - k}|(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2} - 1, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_F \\
&= \langle CG \rangle_{V1}[\sqrt{\lambda - k}|(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2} - 1, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(1, 0) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F \\
&+ |(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(1, 0) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F] \\
&+ \langle CG \rangle_{V2}\sqrt{\lambda + 1 - k}|(\lambda, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2} - 1, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle_F |(1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F
\end{aligned} \tag{5.91}$$

por lo tanto obtenemos que

$$\begin{aligned}
\phi_{mix(k,l=1)} &= |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2} - 1, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_F \\
&= \langle CG \rangle_{V1}\sqrt{\frac{\lambda - k}{\lambda + 1 - k}}|(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2} - 1, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(1, 0) \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F \\
&+ \langle CG \rangle_{V1}\frac{1}{\sqrt{\lambda + 1 - k}}|(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |(1, 0) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3}\rangle_F \\
&+ \langle CG \rangle_{V2}|(\lambda, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2} - 1, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle_F |(1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F
\end{aligned}$$

Esto solo nos muestra que efectivamente tenemos más términos conforme nos alejamos de los estados de pesos máximos.

### 5.2.5 Representación Irreducible $(\lambda - 1, 1)$

Habíamos visto con anterioridad la manera en la cual se pueden obtener los factores isoescalares de  $SU(3)$  en la representación irreducible  $(\lambda + 1, 0)$ , ahora nuestra tarea siguiente es determinarlos en la

representación irreducible de  $(\lambda - 1, 1)$  La determinación de estos factores isoescalares será posible gracias a una propiedad que poseen las funciones de onda que es la ortogonalidad

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.92)$$

La técnica que utilizaremos para determinar los coeficientes que deseamos estarán basados en los resultados anteriores de  $(\lambda + 1, 0)$  en donde utilizaremos el hecho de que podemos elegir un estado  $|(\lambda - 1, 1), F, F_z, Y\rangle$  y buscar un estado  $|(\lambda + 1, 0), F, F_z, Y\rangle$  siendo  $F, F_z, Y$  los mismos en ambas representaciones  $(\lambda - 1, 1)$  y  $(\lambda + 1, 0)$  de esta manera debido a la ortogonalidad que comparten estos estados (5.92), podemos expresar los coeficientes de un estado en términos de las componentes ortogonales del otro estado, por ejemplo, si tenemos la situación en donde tenemos un estado en la representación  $(\lambda + 1, 0)$  es

$$|\psi_1\rangle = \frac{b_{1-}}{b_-} |\phi_1\rangle + \frac{b_{2-}}{b_-} |\phi_2\rangle$$

y queremos expresar un estado  $|\psi_2\rangle$  de la representación  $(\lambda - 1, 1)$  que posea los mismos números cuánticos  $F, F_z, Y$ , podemos usar el hecho que

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$$

de esta forma ahora podemos hallar  $\psi_2$

$$|\psi_2\rangle = \pm \left[ \frac{b_{2-}}{b_-} |\phi_1\rangle - \frac{b_{1-}}{b_-} |\phi_2\rangle \right]$$

Es interesante notar que la propiedad de ortonormalidad que se mantiene en los coeficientes de Clebsch-Gordan también se conservan en nuestros factores isoescalares,

$$\sum_{m_1, m_2} \langle l_1, m_1, l_2, m_2 | L, M \rangle \langle l_1, m_1, l_2, m_2 | L', M' \rangle = \delta_{L'L} \delta_{M'M} \quad (5.93)$$

por lo cual debemos tener presente este hecho al momento que determinamos los factores isoescalares. Además como vemos hay dos signos en la ecuación anterior por lo que podemos optar por un convención de signos. Así en resumen se deben cumplir dos condiciones, la primera es que son ortonormales los estados y la segunda condición es más bien una convención de signos de Swart. Así se cumple

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij} \text{ y además } \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij}$$

Dicho en otras palabras podemos expresar por ejemplo un estado A que pertenece a la representación  $(\lambda - 1, 1)$  en términos de las componentes ortogonales de un estado A que pertenece a la representación  $(\lambda + 1, 0)$ , (véase la figura 5.6), sin embargo no todos los estados en  $(\lambda + 1, 0)$  tiene su análogo en  $(\lambda - 1, 1)$ , por ejemplo un estado P no existe en  $(\lambda - 1, 1)$

Hagamos el siguiente ejercicio, determinemos los coeficientes del estado

$$|(\lambda, 0)(1, 0); (\lambda - 1, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3}\rangle \quad (5.94)$$

podemos observar que este estado en la representación  $(\lambda + 1, 0)$  surge de la ecuación (5.60), a través de aplicar  $\hat{V}_-$  al estado  $|(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3}\rangle$  de esta manera obtuvimos la ecuación (5.69),

$$\begin{aligned} \left| (\lambda + 1, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 1}} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \\ &+ \sqrt{\frac{1}{\lambda + 1}} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (5.95)$$

por lo tanto utilizando la condición (5.92) y además si utilizamos la convención de Swart donde nos dice que tomamos el signo positivo al estado que posee máximo valor del f-spin del multiplete  $F$ .

$$\begin{aligned} \left| (\lambda, 0)(1, 0); (\lambda - 1, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda - 2}{3} \right\rangle &= -\left[ \sqrt{\frac{1}{\lambda + 1}} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 1}{2}, \frac{\lambda - 3}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle_2 \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 1}} \left| (\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} \right\rangle_1 \left| (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3} \right\rangle_2 \right] \end{aligned}$$

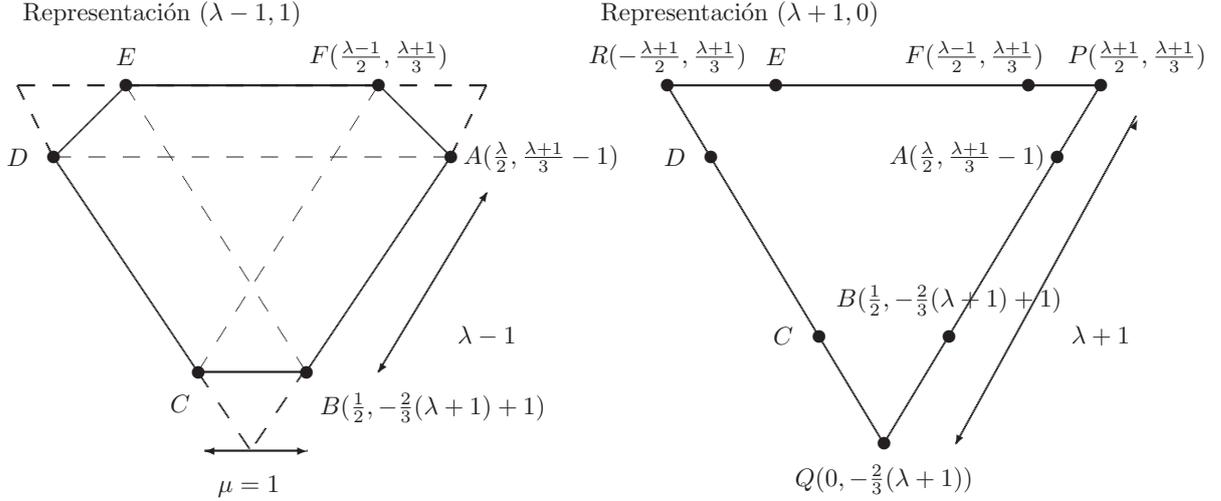


Figura 5.7: Correspondencia entre  $(\lambda - 1, 1)$  y  $(\lambda + 1, 0)$

En resumen, como nosotros ya hemos calculado los factores isoescalares  $SU(3)$  para la representación  $(\lambda + 1, 0)$ , podemos ahora utilizar esos resultados ahora para la representación  $(\lambda - 1, 1)$ , determinemos la forma que obtendrán los estados en el segmento  $\overline{AB}$  de la figura 5.7 de la representación  $(\lambda - 1, 1)$ . Para ello tomemos el punto  $P$  el cual posee  $|\phi_P\rangle = |(\lambda + 1, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{3}\rangle_F$  y si le aplicamos sucesivamente  $k$  veces  $\hat{V}_-$  obtenemos los estados que pertenecen al segmento  $\overline{PQ}$ , de esta forma obtenemos la ecuación (5.83) y si deseamos obtener los estados en el segmento  $\overline{AB}$  de la representación  $(\lambda - 1, 1)$  tomemos sus componentes ortogonales (5.92)

$$\begin{aligned} \phi_{AB} &= |(\lambda - 1, 1), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1}{3} - k\rangle_F \\ &= -\sqrt{\frac{k}{\lambda + 1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda - k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle_F |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_F \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda + 1 - k}{\lambda + 1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda + 1 - k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle_F |1, 0, 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F \end{aligned} \quad (5.96)$$

pero a diferencia de (5.83) en (5.96)  $k$  corre desde  $k = 1, \dots, \lambda$ , por lo tanto para el primer término de la suma, los factores isoescalares para esos estados en la representación  $(\lambda - 1, 1)$  y tomando la convención positiva obtenemos que

$$\left\langle \begin{array}{c|c} (\lambda, 0) & (1, 0) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda-1, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{3} - k \end{array} \right\rangle = -\sqrt{\frac{k}{\lambda+1}} \quad (5.97)$$

y para el segundo término tenemos

$$\left\langle \begin{array}{c|c} (\lambda, 0) & (1, 0) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (\lambda-1, 1) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda-1}{3} - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+1}} \quad (5.98)$$

en donde estos factores isoescalares pertenecen a los estados que están sobre el segmento  $\overline{AB}$  de la representación  $(\lambda-1, 1)$ .

Utilizando los resultados anteriores podemos notar que si tenemos un punto  $(F_z, Y)$  en el diagrama de pesos este puede varios estados o uno asociados a estos números cuánticos, por ejemplo, en la situación donde  $(\lambda+1, 0)$  tenemos un diagrama de pesos en forma triangular y en los vertices por ejemplo el puntos P, Q, R, vamos a tener estados unicos en cambio para en los segmentos  $\overline{AB}$  vamos a tener para cada punto dos estados, uno para la representación  $(\lambda+1, 0)$  y otro para  $(\lambda-1, 1)$  y en regiones dentro del diagrama tendran más estados.

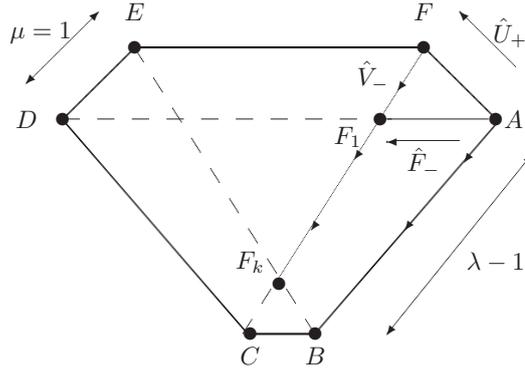


Figura 5.8: Diagrama de pesos  $(\lambda-1, 1)$

Si ahora queremos determinar los factores isoescalares asociados a los puntos sobre el segmento  $\overline{F_1 F_k}$ , para ello tomemos el estado  $|A\rangle$  en de la representación  $(\lambda-1, 1)$  tomando  $k=1$  de la ecuación (5.96) tenemos

$$\begin{aligned} \phi_A = |(\lambda-1, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{3}\rangle_F = & -\sqrt{\frac{1}{\lambda+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle_F |(\lambda, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle_F \\ & + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_F |(\lambda, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle_F. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Si nos interesa determinar el estado correspondiente en el punto  $F$  de la representación  $(\lambda-1, 1)$  de tenemos que utilizar el operador  $\hat{U}_+$  para movernos hasta ese punto. El operador  $\hat{U}_+$  bajo la representación  $(\lambda, \mu)$  esta definido como

$$\hat{U}_\pm \phi(F, F_z, Y) = c_\pm \phi(F + \frac{1}{2}, F_z \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1) + d_\pm \phi(F - \frac{1}{2}, F_z \mp \frac{1}{2}, Y \pm 1) \quad (5.100)$$

donde

$$c_+(F, F_z, Y) = [(F + \frac{1}{2})(F + \frac{3}{2}) - (F_z + \frac{1}{2})(F_z - \frac{1}{2})]^{\frac{1}{2}} a_+(F, F_z, Y) - [F(F+1) - F_z(F_z - 1)]^{\frac{1}{2}} a_+(F, F_z - 1, Y) \quad (5.101)$$

$$d_+(F, F_z, Y) = [(F + \frac{1}{2})(F - \frac{1}{2}) - (F_z + \frac{1}{2})(F_z - \frac{1}{2})]^{\frac{1}{2}} b_+(F, F_z, Y) - [F(F+1) - F_z(F_z - 1)]^{\frac{1}{2}} b_+(F, F_z - 1, Y) \quad (5.102)$$

$$c_-(F, F_z, Y) = d_+(F + \frac{1}{2}, F_z + \frac{1}{2}, Y - 1) \quad (5.103)$$

$$d_-(F, F_z, Y) = c_+(F - \frac{1}{2}, F_z + \frac{1}{2}, Y - 1) \quad (5.104)$$

donde los valores de  $a_+$  y  $b_+$  están dados en las ecuaciones (5.52) y (5.53) respectivamente.

Con ayuda de estas relaciones podemos movernos del punto  $A$  al punto  $F$  como se muestra en la figura 5.8.

De esta forma determinamos el estado asociado al punto  $F$  bajo la acción de  $\hat{U}_+|A\rangle$

$$\begin{aligned} \phi_F = |(\lambda - 1, 1), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda+1}{3}\rangle_F &= -\sqrt{\frac{1}{\lambda+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.105)$$

vemos que esta normalizado  $\langle \phi_F | \phi_F \rangle = 1$ , por lo que podemos continuar. Ahora lo que nos interesa es llegar al punto  $F_1$  para ello apliquemos  $\hat{V}_-$  sobre  $\phi_F$ , y obtenemos

$$\begin{aligned} |(\lambda - 1, 1), \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{3}\rangle_F &= \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle \\ &- \sqrt{\frac{\lambda^3}{(\lambda+1)^2(\lambda-1)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ &- \sqrt{\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-1)}} |(\lambda - 1, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.106)$$

por otro lado si tomamos  $\hat{F}_-|A\rangle$

$$\begin{aligned} |(\lambda - 1, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{3}\rangle_F &= -\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda+1)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ &- \sqrt{\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda+1)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (1, 0), 0, 0, -\frac{2}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.107)$$

Finalmente sustituyendo (5.107) en (5.106) obtenemos  $\phi_{F_1}$

$$\begin{aligned} \phi_{F_1} = |(\lambda - 1, 1), \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{3}\rangle_F &= \sqrt{\frac{1}{\lambda}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle \\ &- \sqrt{\frac{(\lambda-1)}{\lambda}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (1, 0), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\rangle. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Evaluando el coeficiente de Clebsch-Gordan correspondiente en la factorización del primer y segundo término obtenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|cc} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda-1, 1) & \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda}{3}-1 & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{3} & \end{array} \right\rangle = -1 \quad (5.109)$$

De esta manera podemos determinar los demas factores isoescalares sobre el segmento  $\overline{F_1 F_k}$ , aplicamos  $\hat{F}_-$  sobre la ecuación (5.96) con  $k = 2$  y , después lo sustituimos en la expresión resultante de  $\hat{V}_- |F_1\rangle$

$$\left\langle \begin{array}{cc|cc} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda-1, 1) & \\ \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3}-2 & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda-3}{2}, \frac{\lambda-5}{3} & \end{array} \right\rangle = -1 \quad (5.110)$$

y así sucesivamente con  $k = 3, \dots$  y llegamos a

$$\left\langle \begin{array}{cc|cc} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda-1, 1) & \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3}-k & \frac{1}{2}, \frac{1}{3} & \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda+1}{3}-k & \end{array} \right\rangle = -1 \quad (5.111)$$

La técnica utilizada para determinar los ISF se baso en el mapeo de puntos de peso máximo sobre el el plano  $F_z - Y$ . en donde fue utilizado el teorema de Wigner Eckart, el lema de factorización de Racah y la convención de De Swart[64], esto nos permitió así obtener los valores isoescalare y notamos que dependiendo de la simetría que utilicemos tenemos diferentes mapas de pesos en las cuales podemos representarlos de manera resumida en la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Factores Isoescalares de  $SU(3)$  asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$

$F_1$	$Y_1$	$F_2$	$Y_2$	$(\lambda, \mu)$	$F$	$Y$	$\left\langle \begin{array}{cc cc} (\lambda, 0) & (1, 0) & (\lambda, \mu) & \\ F_1, Y_1 & F_2, Y_2 & F, Y & \end{array} \right\rangle$
$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3}-k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$(\lambda+1, 0)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3}-k$	$\sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+1}}$
$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3}+1-k$	0	$-\frac{2}{3}$	$(\lambda+1, 0)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3}-k$	$\sqrt{\frac{k}{\lambda+1}}$
$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3}-k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$(\lambda-1, 1)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3}-k$	$-\sqrt{\frac{k}{\lambda+1}}$
$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3}+1-k$	0	$-\frac{2}{3}$	$(\lambda-1, 1)$	$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3}-k$	$\sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+1}}$
$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3}-k$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$(\lambda-1, 1)$	$\frac{\lambda-1-k}{2}$	$\frac{\lambda+1}{3}-k$	-1

### 5.3 Factores Isoescalares en $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$

En este sección vamos determinar los factores isoescalares asociados al acoplamiento de las representaciones  $(\lambda, 0)$  con  $(0, 1)$  que nos da dos representaciones  $(\lambda, 1)$  y  $(\lambda-1, 0)$ . Como podemos notar en la siguiente tabla de Young:

$$\begin{array}{c} (\lambda, 0) \otimes (0, 1) = (\lambda, 1) \oplus (\lambda-1, 0) \\ \begin{array}{ccc} \square & \square & \square \\ & \square & \square \\ & & \square \end{array} \end{array}$$

Así podemos construir dos diagramas pesos, uno para la representación  $(\lambda, 1)$  y otro para  $(\lambda-1, 0)$ . Conociendo los factores isoescalares de la representación  $(\lambda, 1)$  posteriormente se puede calcular inmediatamente los factores isoescalares de  $(\lambda-1, 0)$  con la ayuda de la propiedad de ortonormalidad de las funciones de onda y el signo lo determina la convención de De Swart[64].

Para ello determinemos los factores isoescalares asociados a  $(\lambda, 1)$  y posteriormente calcularemos los factores isoescalares asociados a la representación  $(\lambda-1, 0)$ .

### 5.3.1 Factores Isoescalares de $(\lambda, 1)$

Vamos a construir todos los estados a partir del estado de peso máximo  $|B\rangle = |(\lambda, 1), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{3}\rangle_F$  donde considero que este estado de peso máximo se encuentra en un espacio de  $F$ -spin y por ello le pongo un subíndice  $F$ . Podemos ver este estado denotado como  $B$  en la figura 5.9. Nuestro interés por ahora es determinar los factores isoescalares asociados a los puntos sobre el segmento  $\overline{BC}$ , para ello debido a que nos encontramos en el extremo del diagrama de pesos, entonces de acuerdo al análisis de la tabla 5.1.2, vemos que no hay multiplicidad, es decir, para cada punto que tomemos del contorno externo del hexagono solo hay un valor para el  $F$ -spin, por lo tanto, si queremos determinar todos los estados a lo largo del segmento  $\overline{BC}$  es conveniente pasarnos al espacio  $V$ -spin, de esta manera usando las reglas de cambio de base (5.72) obtenemos

$$|B\rangle_V = |(\lambda, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\rangle_V = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle_1 | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle_2 \quad (5.112)$$

Ahora podemos aplicar de manera más sencilla el operador  $\hat{V}_-$  que está definido en su espacio como  $\hat{V}_- |(\lambda, \mu), V, V_z, Y\rangle = \sqrt{(V+V_z)(V-V_z+1)} |(\lambda, \mu), V, V_z-1, Y\rangle$  de esta forma si aplicamos  $\hat{V}_-$  al primer miembro de la ecuación (5.112)

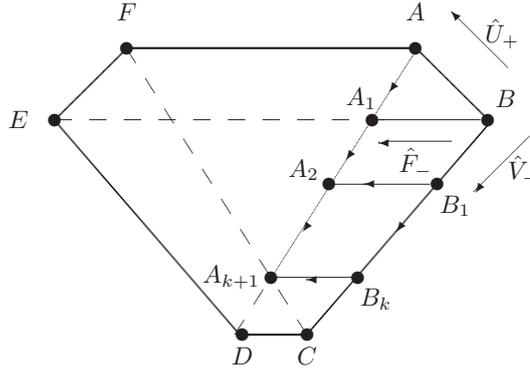


Figura 5.9: Diagrama de pesos  $(\lambda, 1)$

y además aplicamos  $\hat{V}_- = \hat{V}_{-1} + \hat{V}_{-2}$  al segundo miembro de la ecuación (5.112) obtenemos

$$|(\lambda, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - 1, \frac{\lambda+2}{3}\rangle_V = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - 1, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \quad (5.113)$$

si aplicamos  $k$  veces  $\hat{V}_-$  obtenemos todos los estados a lo largo del segmento  $\overline{BB_k}$

$$|(\lambda, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{\lambda+2}{3}\rangle_V = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} - k, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \quad (5.114)$$

ahora si usamos las relaciones de cambio de base a  $F$ -spin (5.72) obtenemos

$$|(\lambda, 1), \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\rangle_V = |(\lambda, 0), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \quad (5.115)$$

por lo tanto tiene

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda-1}{3} - k \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2} \right\rangle =$$

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda+1, 0) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda-1}{3} - k \end{array} \right\rangle = 1} \quad (5.116)$$

a partir de este resultado podemos decir que el factor isoescalar para todos los puntos que pertenecen al segmento  $\overline{BC}$  vale la unidad.

Ahora vamos a determinar el estado correspondiente al punto  $A$  de la figura 5.9. Para ello al estado  $|B\rangle$  le debemos aplicar el operador  $\hat{U}_+$ , definidas en la ecuación (5.100). Tomemos el estado correspondiente al punto  $B$

$$|B\rangle = |(\lambda, 1), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{3}\rangle = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \quad (5.117)$$

utilicemos el operador  $\hat{U}_+$  sobre ambos lados segun la ecuación (5.100), llegamos al punto  $A$  que posee el estado

$$\hat{U}_+|B\rangle = -|A\rangle = -|(\lambda, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\rangle = -|(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \quad (5.118)$$

de esta manera podemos obtener el factor isoescalar asociado al punto  $A$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0, 0 \middle| \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right\rangle = 1$$

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3} \end{array} \right\rangle = 1} \quad (5.119)$$

Ahora ya que tenemos el estado  $|A\rangle$  dado como

$$|A\rangle = |(\lambda, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\rangle = |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \quad (5.120)$$

bajémonos al punto  $A_1$ , debido a que nos estamos introduciendo dentro del hexágono aumenta la multiplicidad, es decir vamos a tener dos estados en ese punto, vamos a obtener un estado si operamos  $\hat{V}_-$  sobre  $|A\rangle$  y otro estado si operamos  $\hat{F}_-$  sobre  $|B\rangle$ , primero calculemos  $\hat{V}_-|A\rangle$  y obtenemos

$$\begin{aligned} |(\lambda, 1), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3}\rangle &= \sqrt{\frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda(\lambda+2)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda(\lambda+2)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\ &- \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda+2)}} |(\lambda, 1), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.121)$$

por otro lado, si calculamos  $\hat{F}_-|B\rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} |A'_1\rangle &= |(\lambda, 1), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3}\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.122)$$

podemos notar que el estado anterior está normalizado  $\langle A'_1|A'_1\rangle = 1$ , sustituyendo la ecuación (5.122) en (5.121) obtenemos el segundo estado del punto  $A_1$

$$\begin{aligned}
|A_1\rangle &= |(\lambda, 1), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3}\rangle = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle | (0, 1) 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1) \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\
&- \frac{1}{\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+2)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda}{3}\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle
\end{aligned} \tag{5.123}$$

verificamos que está normalizado  $\langle A_1|A_1\rangle = 1$ , por lo que nuestro resultado esta correcto. Por lo tanto podemos obtener los factores isoescalares para el punto  $A_1$ .

Determinemos los factores isoescalares asociados al estado  $|A'_1\rangle$ , del resultado (5.122) del primer término tenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda-2 & 1 \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle = 1}$$

para el segundo término

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda & 1 \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{\lambda+1}}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle = 1$$

Por otro lado si tomamos el estado  $|A_1\rangle$  de (5.123), para el primer término tenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \lambda-1 & \lambda-1 & 0 \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, 0, 0 & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}}$$

por lo tanto debido a que el coeficiente de Clebsch-Gordan es uno tenemos

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}}}$$

para el segundo término tenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda & 1 \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{(\lambda+1)(\lambda+2)}}$$

por lo tanto, debido a que el coeficiente de Clebsch-Gordan es  $\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$  se obtiene

$$\boxed{\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda+2}}}$$

por último, el tercer término de (5.123) tenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{cc|c} \lambda & \lambda-2 & 1 \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2} \end{array} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{(\lambda+1)(\lambda+2)}}$$

debido a que el coeficiente de Clebsch-Gordan es  $-\frac{1}{\sqrt{\lambda+1}}$  se obtiene

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda+2}}$$

Podemos repetir este proceso de manera de encontrar una fórmula de recurrencia, así si aplicamos  $\hat{F}_-$  sobre el estado  $|B_1\rangle$  obtendremos un estado  $|A'_2\rangle$ . Esto es, tomar  $k = 1$  de la ecuación (5.115) obtenemos el estado  $|B_1\rangle$  y usando  $\hat{F}_-|B_1\rangle$  se llega a

$$\begin{aligned} |A'_2\rangle = |(\lambda, 1), \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-4}{3}\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle |(0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle |(0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.124)$$

vemos de nuevo que está normalizado el estado  $\langle A'_2|A'_2\rangle = 1$ . De manera análoga al caso anterior, se sustituye (5.124) en  $\hat{V}_-|A_1\rangle$  y obtenemos

$$\begin{aligned} |A_2\rangle = |(\lambda, 1), \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-4}{3}\rangle &= \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-6}{3}\rangle |(0, 1)0, 0, \frac{2}{3}\rangle \\ &+ \sqrt{\frac{2(\lambda-1)}{\lambda(\lambda+2)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle |(0, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\ &- \sqrt{\frac{2}{\lambda(\lambda+2)}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}, \frac{\lambda-3}{3}\rangle |(0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \end{aligned} \quad (5.125)$$

vemos que está normalizado  $\langle A_2|A_2\rangle = 1$ , además del primer término del estado  $|A_2\rangle$  obtenemos el factor isoescalar

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-6}{3} & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-4}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2}}$$

para el segundo y tercer término obtenemos el factor isoescalar

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-4}{3} \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\lambda+2}}$$

De esta manera si reescribimos los factores isoescalares asociados a los estados  $|A\rangle$ ,  $|A_1\rangle$ ,  $|A_2\rangle$  encontramos una regla de recurrencia. Esto lo podemos ver en la siguiente tabla:

Para darle validez a la proposición de los valores isoescalares para los valores  $k$  enteros. Demostremos por inducción matemática la proposiciones.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}} \quad (5.126)$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{k}{\lambda+2}} \quad (5.127)$$

Para demostrar que es verdadera la proposición para todos los números naturales bastara probar lo siguiente:

Tabla 5.3: Recurrencia de los Factores Isoescalares de  $SU(3)$ 

$k$	Factor Isoescalar	Valor	Factor Isoescalar	Valor
0	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3} \end{array} \right\rangle$	0	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & 0, \frac{2}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{3} \end{array} \right\rangle$	1
1	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda+2}}$	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & 0, \frac{2}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-1}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+2}}$
2	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{3} & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-4}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{2}{\lambda+2}}$	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-6}{3} & 0, \frac{2}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-2}{2}, \frac{\lambda-4}{3} \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+2}}$
$\vdots$				
$k$	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - k \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{k}{\lambda+2}}$	$\left\langle \begin{array}{c c} (\lambda, 0) & (0, 1) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & 0, \frac{2}{3} \end{array} \middle  \begin{array}{c} (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - k \end{array} \right\rangle$	$\sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}}$

i) Verificamos que es válido para  $k = 0$  y es válido para  $k = 1$ , (véase la tabla 5.3).

ii) Supongamos que es válido para  $k$  y veamos que es válido para  $k = k + 1$ .

Para ello tomemos el estado  $|A_k\rangle$  dado como

$$\begin{aligned}
|A_k\rangle &= |(\lambda, 1), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - k\rangle \\
&= \sqrt{\frac{k}{\lambda+2}} \sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+2-k}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\
&\quad - \sqrt{\frac{k}{\lambda+2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda+2-k}} |(\lambda, 0), 0\rangle, \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} + 1 - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\
&\quad + \sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle
\end{aligned} \tag{5.128}$$

vemos que se cumple  $\langle A_k | A_k \rangle = 1$ , por lo tanto el estado anterior esta normalizado.

Si tomamos el estado de la ecuación (5.115) y aplicamos  $\hat{F}_-$  obtenemos

$$\begin{aligned}
|A'_{k+1}\rangle &= |(\lambda, 1), \frac{\lambda+1-k}{2}, \frac{\lambda+1-k}{2} - 1, \frac{\lambda-1}{3} - k\rangle = \sqrt{\frac{\lambda-k}{\lambda-k+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2} - 1, \frac{\lambda}{3} - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda-k+1}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle
\end{aligned} \tag{5.129}$$

De esta manera si ahora, aplicamos el operador  $\hat{V}_-$  sobre  $|A_k\rangle$  y sustituyendo la ecuación (5.129) obtenemos

$$\begin{aligned}
|A_{k+1}\rangle &= |(\lambda, 1), \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda-1}{3} - k\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+2}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - 1 - k\rangle | (0, 1), 0, 0, \frac{2}{3}\rangle \\
&\quad + \sqrt{\frac{k+1}{\lambda+2}} \sqrt{\frac{\lambda-k}{\lambda+1-k}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle \\
&\quad - \sqrt{\frac{k+1}{\lambda+2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda+1-k}} |(\lambda, 0), \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda-k}{2} - 1, \frac{\lambda}{3} - k\rangle | (0, 1), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\rangle
\end{aligned} \tag{5.130}$$

vemos que está normalizado  $\langle A_{k+1} | A_{k+1} \rangle = 1$ . Del primer término de la ecuación anterior obtenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - 1 - k & 0, \frac{2}{3} & \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - 1 - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{\lambda+1-k}{\lambda+2}}$$

cabe mencionar que hemos utilizado el lema de factorización de Racah, en donde tenemos el producto del factor isoescalar por un coeficiente de Clebsch-Gordan igualado al coeficiente que tiene el término de sumando que posee el estado. Calculando el coeficiente de Clebsch-Gordan correspondiente obtenemos el valor del factor isoescalar, de esta manera para el segundo y tercer término de la ecuación (5.130) tenemos

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, 1) \\ \frac{\lambda-k}{2}, \frac{\lambda}{3} - k & \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} & \frac{\lambda-1-k}{2}, \frac{\lambda+2}{3} - 1 - k \end{array} \right\rangle = \sqrt{\frac{k+1}{\lambda+2}}$$

de esta manera se cumplen las proposiciones (5.126) y (5.127) para  $k = k + 1$  por lo tanto son válidas.

Los factores isoescalares para los estados con  $(\lambda, \mu) = (\lambda - 1, 1)$  son obtenidos por las condiciones de ortogonalidad. Por ejemplo, si tenemos dos estados  $\phi_{A_k}$  y  $\phi_{A'_k}$  podemos obtener el tercer estado  $\phi_{C_k}$  ya que se satisfacen las condiciones de ortogonalidad y normalidad.

$$\begin{aligned} \langle \phi_{A_k} | \phi_{C_k} \rangle &= \sum_k a_k c_k = 0 \\ \langle \phi_{A'_k} | \phi_{C_k} \rangle &= \sum_k b_k c_k = 0 \\ \langle \phi_{C_k} | \phi_{C_k} \rangle &= \sum_k c_k^2 = 1 \end{aligned} \tag{5.131}$$

de esta forma determinamos el estado  $\phi_{C_k} = \sum_k c_k \phi_k$

De esta manera si resumimos obtenemos los factores en la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Factores Isoescalares de  $SU(3)$  asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$

$F_1$	$Y_1$	$F_2$	$Y_2$	$(\lambda, \mu)$	$F$	$Y$	$\left\langle \begin{array}{cc c} (\lambda, 0) & (0, 1) & (\lambda, \mu) \\ F_1, Y_1 & F_2, Y_2 & F, Y \end{array} \right\rangle$
$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$(\lambda, 1)$	$\frac{\lambda+2-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	1
$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	0	$\frac{2}{3}$	$(\lambda, 1)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$\sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}}$
$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$(\lambda, 1)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$-\sqrt{\frac{k}{\lambda+2}}$
$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} - k$	0	$\frac{2}{3}$	$(\lambda - 1, 0)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$-\sqrt{\frac{k}{\lambda+2}}$
$\frac{\lambda+1-k}{2}$	$\frac{\lambda}{3} + 1 - k$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$(\lambda - 1, 0)$	$\frac{\lambda-k}{2}$	$\frac{\lambda+2}{3} - k$	$\sqrt{\frac{\lambda+2-k}{\lambda+2}}$

# Conclusiones

En este trabajo hemos presentado correlaciones entre reacciones de transferencia de nucleones en el marco de la Supersimetría Nuclear, estas correlaciones fueron posibles debido a que las funciones de onda en la Supersimetría están relacionadas, tenemos un solo operador que describe las transiciones electromagnéticas y un solo operador que describe transferencias de nucleones y tenemos un solo Hamiltoniano que describe simultáneamente los espectros de los núcleos que conforman un cuadruplete supersimétrico, además los niveles energéticos más bajos los núcleos par-par y los núcleos con neutrón impar sus números cuánticos coinciden y lo mismo sucede para los núcleos con protón impar e impar-impar, esto implica correlaciones entre transiciones electromagnéticas y transferencias de nucleones .

Hasta la fecha los únicos ejemplos de cuartetos supersimétricos que hemos encontrado pertenecen a los núcleos de las masas  $A \sim 190$  siendo estos  $^{194,195}\text{Pt}$ – $^{195,196}\text{Au}$  y  $^{192,193}\text{Os}$ – $^{193,194}\text{Ir}$ . Teniendo el protón en el nivel  $2d_{\frac{3}{2}}$  y el neutrón en los niveles  $3p_{\frac{3}{2}}$ ,  $3p_{\frac{1}{2}}$  y  $2f_{\frac{5}{2}}$ . Tanto los bosones de protón y el neutrón como la parte pseudo orbital del neutrón se describen por la simetría  $U(6)$ .

Debido a que las funciones de onda de los núcleos que conforman un cuadruplete supersimétrico están relacionadas por la Supersimetría tuvimos que desarrollar un mecanismo para mostrar estas correlaciones en forma explícita el cual a este método lo llamamos  $F$ -spin generalizado. Esta formulación es una generalización del concepto de  $F$ -spin del IBM-2 en donde se tienen solo dos espacios, el de bosones de protón y neutrón en cambio en nuestra generalización vamos a tener tres espacios, bosones de protón, boson de neutrón y el fermión del neutrón. El  $F$ -spin generalizado permite escribir de una forma sencilla las reacciones de transferencia de nucleones de manera que sus elementos de matriz reducidos coinciden y podamos obtener correlaciones entre procesos de transferencias de nucleones. Podemos expresar los elementos de matriz de los procesos transferencia de manera reducida en términos de factores isoescalares ó coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(3)$ .

Estos factores isoescalares aparecen en distintas teorías y han sido derivados como en el modelo de quarks, modelo de Elliot, etc, sin embargo, en nuestro contexto de la Supersimetría Nuclear no han sido derivados, por lo que tuvimos que calcularlos y los presentamos en el capítulo cuatro.<sup>5</sup> Entre las aplicaciones del  $F$ -spin generalizado y los factores isoescalares calculados podemos mencionar que estos nos permitieron expresar de manera cerrada correlaciones entre transferencias de un protón y un par de protones, de esta manera conociendo de antemano las intensidades de alguna reacción de transferencia

---

<sup>5</sup>La determinación de los factores isoescalares consistió en un análisis del grupo  $SU(3)$ . Aquí nosotros introducimos 6 operadores de ascenso y 2 operadores de peso correspondientes a las transferencias de partículas en el contexto de Supersimetría Nuclear. De esta forma construimos tres álgebras, el álgebra de  $F$ -spin,  $V$ -spin y  $U$ -spin conformados por sus respectivos operadores. Estas tres álgebras son subálgebras de  $SU(3)$  y cada de ellas individualmente se le puede corresponder un álgebra de los operadores del momento angular (álgebra de Lie de  $SU(2)$ ). Posteriormente usando las reglas de conmutación obtuvimos las representaciones irreducibles de  $SU(3)$ . La siguiente tarea que se hizo fué elegir las representaciones irreducibles asociadas a nuestros factores isoescalares que necesitamos derivar, de esta manera se tuvo que elegir un estado de peso máximo en un diagrama de pesos de la representación irreducible de  $SU(3)$  y con ayuda de los operadores de escalón de manera sistemática se fueron calculando los valores de los factores isoescalares.

podimos mostrar como estas están correlacionadas por un factor. Las implicaciones directas de este formalismo matemático es que nos permitió obtener algunas predicciones de las intensidades espectroscópicas de algunas reacciones de transferencia tales como la transferencia de un protón y dos protones. Todas estas intensidades de transferencias de nucleones fueron determinadas de manera cerrada. De esta manera normalizando estas intensidades con respecto al estado base obtenemos las intensidades espectroscópicas relativas, estas tienen importancia ya que son las que se pueden medir experimentalmente. Hemos presentado predicciones particulares de las intensidades espectroscópicas como la transferencia de un de un protón  ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117} \rightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$  y  ${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117} \rightarrow {}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$  y también para reacciones inversas como  ${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \rightarrow {}^{194}_{76}\text{Os}_{117}$  y  ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117} \rightarrow {}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$ . En este trabajo también se pudo hacer predicciones de reacciones nucleares de transferencia de dos protones, la primera reacción que podemos mostrar como ejemplo es la transferencia de dos protones  ${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117} \rightarrow {}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$  y por último las intensidades espectroscópicas de la transferencia de dos protones  ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117} \rightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$ .

Dentro de los posibles trabajos futuros que podemos continuar con este trabajo es la investigación de las reacciones de transferencia de un neutrón, un par de protón-neutrón ó decaimientos beta.<sup>6</sup> Esta tesis tiene relevancia a otros sistemas, ya que estos factores isoescalares, se presentan en todo sistema cuyas funciones de onda estas descritas en términos de acoplamiento de las tres diferentes representaciones de  $U(6)$ , por ejemplo en la descripción de núcleos con masa media como el modelo de IBM-3 y para núcleos pesados el modelo de Piel de Neutrones. La simetrías fundamentales que hemos manejado es la simetría de grupo  $U(6)$  y la de  $SU(3)$ , es interesante notar que la simetría que utilizamos en el  $F$ -spin generalizado es una simetría rotacional. La técnica que se utilizó para determinar los factores isoescalares, se pueden aplicar en otras teorías que manejen simetrías de  $U(6)$ . Este técnica que hemos usado la hemos aplicado a los núcleos Supersimétricos en el contexto de el álgebra de  $U(6/m)$ , si nos preguntamos si se puede aplicar este método de  $F$ -spin generalizado a otras regiones de masas nucleares, si es posible, por ejemplo si deseamos describir núcleos con masa media y núcleos pesados donde los neutrones y los protones ocupan diferentes capas de valencia, se le puede aproximar con el modelo de IBM-3 donde este modelo usa la simetría  $U(6)$  por lo que es posible introducir nuestro  $F$ -spin generalizado. Para núcleos más pesados, la densidad de neutrones crece por lo que estos presentan oscilaciones independientes del resto del núcleo en donde el modelo de Piel de Neutrones puede describir este tipo de núcleos cuyas simetrías son también  $U(6)$ . Por lo que cual concluimos que el  $F$ -spin generalizado se puede extender en otras teorías de la estructura nuclear.

Un comentario que puedo decir al respecto antes de terminar con este trabajo, es ver la importancia que posee el grupo unitario  $SU(3)$  sobre la Física y tratar de comprender por qué es que este grupo unitario tiene implicaciones grandes sobre la descripción de la naturaleza cuántica. Por ejemplo, en las partículas elementales, en el modelo de quarks, estas partículas fueron clasificadas por Gell-Mann y Neeman a principios de los años sesenta del siglo veinte usando el grupo  $SU(3)$ , por otro lado, Elliot utilizó el mismo aparato matemático en los años cincuenta del siglo veinte para explicar los niveles rotacionales de un núcleo deformado y ahora nosotros con el desarrollo del  $F$ -spin generalizado podemos predecir intensidades espectroscópicas de reacciones nucleares para núcleos supersimétricos usando también el grupo unitario  $SU(3)$ . Uno se puede preguntar si el grupo unitario  $SU(3)$  será una característica intrínseca de las partículas elementales que nos permita describir propiedades cuánticas de los quarks y los sistemas compuestos con grados colectivos de libertad siendo los bosones y fermiones. La relación que hay entre ellos es que en ambas situaciones se pueden describir con el grupo unitario  $SU(3)$  y este se puede aplicar a otros modelos cuánticos de partículas.

<sup>6</sup>Esto es posible ya que los decaimientos  $\beta^-$  y  $\beta^+$  pueden ser expresados en términos de combinaciones de reacciones de transferencia de un protón y un neutrón bajo la formulación del  $F$ -spin generalizado.

# Apéndice

# Apéndice A

## Simetrías y Teoría de Grupos

### A.1 Simetrías y Teoría de Grupos

#### A.1.1 ¿Qué es la Simetría?

Se dice que un objeto goza de simetría dada si existen transformaciones que lo deja invariante. El concepto de simetría es uno de los conceptos centrales de la física, el formalismo matemático de la simetría es la *teoría de grupos*. Usualmente tanto los sistemas cuánticos como clásicos suelen tener una gran complejidad sin embargo con el análisis de sus propiedades de simetría a menudo se alcanzan grandes simplificaciones además las simetrías por si mismo nos guía a construir una teoría física sencilla ya que con otros formalismos matemáticos incluso se puede volver intratable. Los conceptos y métodos de la teoría de grupos son simples y pueden considerar una extensa variedad de sistemas, desde sistemas clásicos hasta moléculas, núcleos y partículas elementales, la teoría de grupos se aplica de la misma forma, con los mismos principios básicos para cada uno de los diferentes sistemas. Esta universalidad de aplicación de la simetría es una de las más atractivas características de la teoría de grupos.

#### A.1.2 Origen de la Simetría en la Física

La teoría de grupos fue desarrollado en los comienzos del siglo 19 por Evariste Galois quien estableció la relación entre la existencia de soluciones algebraicas de ecuaciones polinomiales y grupos de permutaciones asociadas con la ecuaciones. Otra importante contribución fue hecha en 1870 por Sophus Lie quien estudió la teoría matemática de transformaciones continuas las cuales llevan a la introducción de los conceptos básicos y operaciones de las que ahora conocemos como Grupos de Lie y álgebras de Lie. Una de las personas importantes que hizo la conexión del mundo abstracto de las simetrías y la dinámica de las fuerzas y el movimiento y las leyes fundamentales de la naturaleza fue Emmy Noether en el siglo 20 [91]

En las leyes de conservación, la simetría puede expresarse como la invariancia del Lagrangiano o el Hamiltoniano, o equivalentemente tener una invariancia de las ecuaciones de movimiento con respecto a un grupo de transformaciones. La conexión entre el concepto abstracto de simetrías en relación con la dinámica se formula con el teorema de Noether el cual dice que, la invariancia del Lagrangiano o el Hamiltoniano con respecto a simetrías continuas implican leyes de conservación [92]. Por ejemplo, la conservación de energía, momento, momento angular son consecuencia de la invariancia del sistema bajo traslaciones de tiempo, traslaciones y rotaciones espaciales espaciales respectivamente.

A sí el concepto de simetría juega un papel importante en la física, especialmente en el siglo 20 con el desarrollo de la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos. Hay una extenso rango de aplicaciones de simetrías en la física. Algunas de las más importantes están listadas a continuación. [93]

- *Simetrías geométricas.* La manifestación de este tipo de simetría es la más intuitiva ya que se presenta en términos de transformaciones geométricas que deja un cuerpo o sistema invariante, por ejemplo el acomodo de las partículas en una estructura geométrica como es el caso de átomos en una molécula.
- *Simetrías espacio-tiempo.* Estas se refieren, primordialmente, la homogeneidad del espaciotiempo que se manifiesta en la invariancia de las leyes de la física respecto a los desplazamientos (traslaciones) de las coordenadas espaciotemporales. Fija la forma de las ecuaciones que rigen el movimiento de sus respectivas partículas. Otra importante propiedad es el carácter isotrópico del espacio, el cual implica la invariancia respecto a los giros espaciales, por ejemplo, la forma de la ecuación de Dirac para una partícula relativista de espín 1/2 que es determinada por la invariancia de Lorentz

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

- *Simetrías de permutación.* En la mecánica cuántica estas simetrías llevan a las estadísticas de Fermi-Dirac y Bose-Einstein para un sistema de partículas idénticas con espín semi-entero (fermiones) y espín entero (bosones), respectivamente.
- *Simetrías de norma.* Fijan la forma de interacción de las partículas constituyentes y campos externos por ejemplo la forma de la ecuación de Dirac para una partícula relativista de espín 1/2 en un campo electromagnético  $A_\mu$

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi(x) = 0$$

está regido por la simetría de norma de la interacción electromagnética. La interacción electro-débil y fuerte están también regidas por las simetrías de norma.

- *Simetrías dinámicas.* Fijan la forma de interacción entre las partículas constituyentes y/o campos externos y determina las propiedades del espectro de los sistemas cuánticos, por ejemplo en la discusión que hizo Pauli [94] quien reconoció que el Hamiltoniano de una partícula en un potencial Coulombiano es invariante bajo rotaciones de cuatro dimensiones generados por el momento angular y el vector de Runge-Lenz.

## A.2 Algunas definiciones

### A.2.1 Grupo de Lie

El concepto de grupo fue introducido por Galois en su estudio de la existencia de soluciones algebraicas de ecuaciones polinomiales. Un grupo abstracto  $G$  está definido por un conjunto de elementos  $(\hat{G}_1, \hat{G}_2, \dots, \hat{G}_n)$  y una operación binaria “multiplicación” que satisface las siguientes condiciones.

1. *Cerradura.* Si  $\hat{G}_i$  y  $\hat{G}_j$  son elementos del conjunto, entonces su producto  $\hat{G}_i \hat{G}_j$  también pertenece al conjunto.
2. *Asociativa.* La siguiente propiedad siempre es válida:

$$\hat{G}_i(\hat{G}_j \hat{G}_k) = (\hat{G}_i \hat{G}_j) \hat{G}_k$$

3. *Identidad.* Existe un elemento  $\hat{E}$  de  $G$  que satisface.

$$\hat{E} \hat{G}_i = \hat{G}_i \hat{E} = \hat{G}_i$$

4. *Inverso* Para cada  $\hat{G}_i$  existe un elemento  $\hat{G}_i^{-1}$  tal que.

$$\hat{G}_i \hat{G}_i^{-1} = \hat{G}_i^{-1} \hat{G}_i = \hat{E}$$

El número  $n$  de elementos es llamado el *orden* del grupo. Quiero agregar que si los elementos del grupo satisfacen la condición de conmutatividad, el grupo es llamado *grupo Abeliano*.

5. *Conmutativo*. Todos los elementos cumplen.

$$\hat{G}_i \hat{G}_j = \hat{G}_j \hat{G}_i$$

Si el conjunto es finito, el grupo es llamado grupo finito. Si el conjunto es infinito no numerable, el grupo es llamado grupo infinito discreto. Si los elementos son continuos, el grupo es llamado grupo continuo (o grupos de Lie).

## A.2.2 Álgebra de Lie

Los grupos que tienen muchas aplicaciones en la física son los grupos de matrices continuas. Estos grupos de matrices continuas consisten en matrices regulares no singulares de grado  $n$  las cuales pueden ser representados en términos de  $r$  parámetros<sup>1</sup>  $\alpha_i$ , tales como

$$A(\alpha) \equiv A(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \quad (\text{A.1})$$

La matriz identidad  $I_n$  está caracterizada por  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

$$I_n = A(0) \quad (\text{A.2})$$

Grupos cuyos elementos dependen continuamente de parámetros  $r$   $\alpha_i$  donde  $i = 1, \dots, r$  y satisfacen los primeros cuatro postulados de grupo decimos que son *grupos de Lie*.

Para los grupos de Lie todos los elementos pueden ser obtenidos en términos de exponenciales de el conjunto de los elementos de la base  $\hat{g}_i, i = 1, 2, \dots, s$ , llamados *generadores*, las cuales juntos forman una *álgebra de Lie* asociado con el grupo de Lie. Un simple ejemplo sería dado el grupo de rotaciones en dos dimensiones  $SO(2)$ , cuyos elementos pueden estar representados con

$$\hat{G}(\alpha) = \exp[-i\alpha \hat{l}_z], \quad (\text{A.3})$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de rotación y

$$\hat{l}_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (\text{A.4})$$

es el generador de esas transformaciones en el plano  $x-y$ . En rotaciones en tres dimensiones requiere la introducción de dos generadores adicionales asociadas con las rotaciones en los planos  $z-x$  y  $y-z$ ,

$$\hat{l}_y = -i \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{l}_x = -i \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (\text{A.5})$$

Las rotaciones finitas pueden ser parametrizadas por tres ángulos (las cuales pueden ser los ángulos de Euler) y pueden ser expresados como producto de exponenciales de los generadores de  $so(3)$ <sup>2</sup> (A.4) y (A.5). Evaluando los conmutadores de los operadores, nosotros encontramos

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hat{l}_z, \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hat{l}_x, \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hat{l}_y, \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup>La continua variación de  $r$  parámetros genera una variedad de grupo completo.

<sup>2</sup>El grupo de transformaciones unitarias en  $n$  dimensiones se denota por  $U(n)$  y las rotaciones en  $n$  dimensiones por  $SO(n)$  (Ortogonal Especial). Las correspondientes álgebras de Lie a veces son indicados por minúsculas,  $u(n)$  y  $so(n)$ .

Las cuales ilustra la propiedad de cerradura de los generadores de grupo. En general, los operadores  $s, \hat{g}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , define una *álgebra Lie* y esta cierra bajo conmutación,

$$[\hat{g}_i, \hat{g}_j] = \sum_k c_{ij}^k \hat{g}_k, \quad (\text{A.7})$$

y satisface la identidad de Jacobi[95]

$$[\hat{g}_i, [\hat{g}_j, \hat{g}_k]] + [\hat{g}_k, [\hat{g}_i, \hat{g}_j]] + [\hat{g}_j, [\hat{g}_k, \hat{g}_i]] = 0. \quad (\text{A.8})$$

El conjunto de constantes  $c_{ij}^k$  son llamadas *constantes de estructura*, y sus valores determinan las propiedades del algebra de Lie tanto el grupo asociado de Lie. Todos los grupos de Lie fueron clasificados por Cartan.[95] Es importante introducir el concepto de *subálgebra* para ello, supongamos que tenemos un conjunto de operadores  $X_k$  que cierran bajo conmutación y forman un álgebra de Lie  $A$ . Ahora consideremos un conjunto de operadores  $Y_k$  las cuales son un subconjunto de los operadores  $X_k$ . Si los operadores  $Y_k$  cierran bajo conmutación

$$[Y_k, Y_l] = i \sum_m C_{kl}^m Y_m, \quad (\text{A.9})$$

entonces estos forman un álgebra  $B$ , el cual es un *subálgebra* de  $A$

$$A \supset B. \quad (\text{A.10})$$

Decimos que un subálgebra  $B$  es Abeliana si sus generadores conmutan<sup>3</sup>

$$[Y_k, Y_l] = 0 \quad (\text{A.11})$$

### A.2.3 Transformaciones simétricas

Las transformaciones simétricas de un sistema físico puede definirse en términos de ecuaciones de movimiento del sistema[96]. Supongamos un sistema de ecuaciones

$$U_i \psi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{A.12})$$

donde las funciones  $\psi_i(x)$  es un vector columna con un finito o infinito número de componentes, o una estructura más general como una matriz que depende de variables  $x_i$ . Estos operadores  $U_i$  son arbitrarios y (A.12) puede corresponder, por ejemplo, a las ecuaciones de Maxwell, Schrödinger o de Dirac. Así los operadores  $\hat{g}_{ij}$  donde

$$\sum_i U_i (\hat{g}_{ij} \psi_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{A.13})$$

son llamadas *transformaciones simétricas* ya que transforman las soluciones  $\vec{\psi}$  a las soluciones  $g\vec{\psi}$  de las ecuaciones (A.12). Como ejemplo, en mecánica cuántica, las transformaciones simétricas continuas pueden en general expresarse como

$$U = e^{i \sum_j \alpha_j \hat{g}_j}, \quad (\text{A.14})$$

estados y operadores se transforman como

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle, \quad A \rightarrow A' = UAU^\dagger, \quad (\text{A.15})$$

<sup>3</sup>Un ejemplo de un álgebra de Lie es  $SO(3)$  el cual están caracterizados por sus relaciones de conmutación de los operadores de momento angular  $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k$ .

para el Hamiltoniano entonces tenemos

$$H \rightarrow H' = UHU^\dagger = H + i \sum_j \alpha_j [\hat{g}_j, H] + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (\text{A.16})$$

Cuando el sistema físico es invariante bajo transformaciones simétricas  $U$ , el Hamiltoniano permanece igual  $H' = H$ . Por eso el Hamiltoniano conmuta con los generadores de la transformación simétrica.

$$[\hat{g}_j, H] = 0, \quad (\text{A.17})$$

el cual implica que los generadores son constantes de movimiento. Las ecuaciones (A.17), junto con la relación de generadores de la ecuación (A.7), constituye la definición de un álgebra simétrica para un sistema independiente del tiempo.

Es importante señalar que si en el álgebra dinámica los generadores están conectadas con las soluciones  $\psi$  significa que el álgebra dinámica implícitamente define un espacio de Hilbert adecuado para la descripción del sistema físico. Para cualquier álgebra de Lie uno puede construir uno o más operadores  $C_l$  el cual conmute con todos los generadores  $\hat{g}_j$ ,

$$[C_l, \hat{g}_j] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (\text{A.18})$$

Estos operadores son llamados *operadores de Casimir* o *invariantes de Casimir*. Estos pueden ser lineares, cuadráticos o de orden mayor. El número  $r$  de la linealidad de los operadores de Casimir se le conoce como el rango del álgebra [97]. Este número coincide el el máximo subconjunto de generadores que conmutan entre ellos mismos

$$[g_\alpha, \hat{g}_\beta] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, r, \quad (\text{A.19})$$

El álgebra simétrica proporciona constantes de movimiento, las cuales nos lleva a los números cuánticos y estas etiquetas asociados a los estados dan la energía en los eigenvalores. Entonces los operadores de creación y aniquilación en un álgebra conecta solo estados degenerados. Sin embargo el álgebra dinámica, define todo el conjunto de eigenestados asociados con un sistema dado. Los generadores no son grandes constantes de movimiento y no siempre todos conmutan con el Hamiltoniano. Los operadores de creación y aniquilación pueden conectar todos los estados entre ellos.

#### A.2.4 Bases Irreducibles

Dado un grupo  $G$  de operaciones físicas ( $\hat{R}$ ) uno puede introducir el conjunto de operadores  $\hat{P}_R$  el cual esta definido como la acción sobre una función escalar  $f(x)$  arbitraria.

$$\hat{P}_R f(x) = f(\hat{R}x) \quad (\text{A.20})$$

Esta correspondencia  $\hat{R} \rightarrow \hat{P}_R$  es un isomorfismo [98], como  $\hat{S}\hat{R} \rightarrow \hat{P}_S\hat{P}_R = \hat{P}_{SR}$ , como se muestra en la ecuación anterior. Un ejemplo sencillo esta dado por el grupo de rotaciones  $SO(2)$  en dos dimensiones. Usando coordenadas polares y de la ecuación (A.20) tenemos que

$$\hat{P}_\alpha f(r, \phi) = f(r, \phi - \alpha) \quad (\text{A.21})$$

y desarrollando en series de Taylor

$$f(r, \phi - \alpha) = \sum_{n=0} (-\alpha)^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(r, \phi)}{\partial \phi^n} = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left( -\alpha \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^n f(r, \phi) = e^{-\alpha \partial / \partial \phi} f(r, \phi) \quad (\text{A.22})$$

esto nos lleva a

$$\hat{P}_\alpha = e^{-i\alpha \hat{l}_z}, \quad \hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi} = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (\text{A.23})$$

Si ahora consideramos la ecuación

$$\hat{H}(x)f(x) = g(x) \quad (\text{A.24})$$

donde  $\hat{H}(x)$  es un operador, usando esta ecuación y la propiedad (A.20), nosotros encontramos las siguientes relaciones

$$\hat{P}_R \hat{H}(x) \hat{P}_R^{-1} \hat{P}_R f(x) = \hat{P}_R g(x) = g(\hat{R}x) = \hat{H}(\hat{R}x) f(\hat{R}x) \quad (\text{A.25})$$

$$\hat{P}_R \hat{H}(x) \hat{P}_R^{-1} \hat{P}_R f(x) = \hat{P}_R \hat{H}(x) \hat{P}_R^{-1} f(\hat{R}x) \quad (\text{A.26})$$

ya que  $f(x)$  es una función arbitraria, entonces comparando las dos expresiones anteriores

$$\hat{P}_R \hat{H}(x) \hat{P}_R^{-1} = \hat{H}(\hat{R}x) \quad (\text{A.27})$$

para todo  $\hat{R}$  tenemos que

$$\hat{P}_R \hat{H}(x) \hat{P}_R^{-1} = \hat{H}(x) \quad (\text{A.28})$$

entonces decimos que  $\hat{H}$  es invariante bajo la acción del grupo  $G = (\hat{R})$  o también decimos que  $G$  es el grupo de simetría para  $H(x)$ <sup>4</sup> Como vemos esta definición nos lleva a (A.17) por lo tanto A.28 implica que

$$[\hat{P}_R, \hat{H}(x)] = 0 \quad (\text{A.29})$$

Ahora si consideramos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (\text{A.30})$$

si usamos A.29. Nosotros encontramos que

$$\hat{H}(\hat{P}_R\psi) = E(\hat{P}_R\psi) \quad (\text{A.31})$$

si suponemos que los eigenvalores  $E$  son degenerados y que hay  $l$  eigenfunciones independientes  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l$ . Ya que (A.31) implica que  $\hat{P}_R\psi$  es también eigenfunción de  $\hat{H}$  asociado con su respectiva  $E$ . y como esto debe ser una combinación lineal de  $\psi_l$ ,

$$\hat{P}_R\psi_i(x) = \sum_{j=1}^l D_{ij}(\hat{R})\psi_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (\text{A.32})$$

Estas matrices  $D_{ij}(\hat{R})$  son llamadas *representaciones* del grupo  $G$ , y es fácil probar que satisfacen el producto de matrices

$$D(\hat{S})D(\hat{R}) = D(\hat{S}\hat{R}) \quad (\text{A.33})$$

Decimos que las  $l$  eigenfunciones independientes  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l$  constituyen una *base* para esta representación. Y si las  $\psi_i$  son tales que no cambian de base ante transformaciones

$$\phi_i = \sum_j U_{ij}\psi_j \quad (\text{A.34})$$

pueden ser diagonales todas las matrices  $D$  en  $U^{-1}DU$  entonces decimos que la representación es *irreducible* y que todas las  $\psi_i$  son una base para una *representación irreducible* de  $G$ .

<sup>4</sup>Es importante entender a través de este ejemplo como se utiliza el concepto de simetría ya utilizando teoría de grupos

Consideremos de nuevo la ecuación (A.17) el cual describe la invariancia del Hamiltoniano bajo el álgebra  $g \equiv (\hat{g}_j)$

$$[\hat{g}_j, H] = 0, \quad (\text{A.35})$$

esto nos dice que  $g$  juega un papel importante en el álgebra simétrica del sistema. Un eigenestado de  $H$  con energía  $E$  puede escribirse como  $|\alpha\beta\rangle$  donde  $\alpha$  son las representaciones irreducibles del grupo  $G$  y  $\beta$  permite distinguir los diferentes eigenestados con energía  $E$ . La energía de los eigenvalores del Hamiltoniano en la ecuación (A.35) entonces solo depende de  $\alpha$

$$H|\alpha\beta\rangle = E(\alpha|\alpha\beta\rangle). \quad (\text{A.36})$$

Los generadores  $\hat{g}_j$  no permiten estados con diferentes  $\alpha$ . Si consideramos la cadena de álgebras  $g_1 \supset g_2$ , el cual nos lleva al concepto de *simetrías dinámicas*. Como  $g_2$  es un subálgebra de  $g_1$  sus generadores forman un subconjunto de generadores de  $g_1$  y cierran bajo conmutación. Si  $g_1$  es un álgebra simétrica de  $H$ , sus eigenestados pueden mostrarse como  $|\alpha_1\beta_1\rangle$ . Ya que  $g_1 \supset g_2$ , también es un álgebra simétrica para  $H$  y por lo tanto, sus eigenestados son  $|\alpha_2\beta_2\rangle$ . Así por lo tanto

$$H|\alpha_1\alpha_2\beta_2\rangle = E(\alpha_1\alpha_2\beta_2), \quad (\text{A.37})$$

donde  $\alpha_1$  implícitamente esta en  $\alpha_2\beta_2$  entonces los eigenvalores solo dependen de  $\alpha_1$ . Este proceso puede continuar cuando hay más subálgebras,  $g_1 \supset g_2 \supset g_3 \supset \dots$ , en donde  $\alpha_2$  es substituido por  $\alpha_3\beta_3$  y así sucesivamente.

En muchos casos el hecho de suponer  $g_1$  como una álgebra simétrica del Hamiltoniano es una suposición demaciada fuerte entonces se suele romper la simetría. Una manera elegante para hacer esto es considerar el Hamiltoniano

$$H' = a\hat{C}_{l_1}(g_1) + b\hat{C}_{l_2}(g_2), \quad (\text{A.38})$$

donde  $C_{l_i}(g_i)$  son operadores invariantes de Casimir de  $g_i$ . Ya que  $[H', g_i] = 0$  para  $\hat{g}_i \in g_2$ ,  $H'$  es invariante bajo  $g_2$  pero no más sobre  $g_1$  por que  $[\hat{C}_{l_2}(g_2), \hat{g}_i] \neq 0$  para  $\hat{g}_i \notin g_2$ . Esta nueva álgebra simétrica es  $g_2$  mientras  $g_1$  juega el papel de *álgebra dinámica* para el sistema en los cuales podemos describir todos los estados a través de los estados asociados con  $E(\alpha_1)$  además como  $H'$  esta dado por la combinación de operadores de Casimir, sus eigenvalores pueden ser obtenidos en forma cerrada

$$H'|\alpha_1\alpha_2\beta_2\rangle = [aE_{l_1}(\alpha_1) + bE_{l_2}(\alpha_2)]|\alpha_1\alpha_2\beta_2\rangle. \quad (\text{A.39})$$

Este tipo de rompimiento de simetría producido por el tipo de interacciones de la forma (A.38) es conocido como *rompimiento de simetría dinámica* y la simetría restante es llamada *simetría dinámica* del Hamiltoniano  $H'$ . El rompimiento de la simetría separa pero no mezcla los eigenestados. De la ecuación anterior uno puede concluir que aunque  $H'$  es no invariante bajo  $g_1$ , sus eigenestados son los mismos que los de  $\hat{H}$  de la ecuación (A.37).

## A.3 Álgebra Tensorial

### A.3.1 Elementos de matriz de los generadores

El objetivo principal de este formalismo algebraico es obtener información del sistema que estudie a partir de sus simetría que tenga, por ejemplo, si tenemos un núcleo atómico de este podemos obtener su espectro y sería interesante obtener su espectro, de esta manera es aquí donde comienza a tomar importancia nuestros métodos algebraicos para determinar los espectros. Para ello se necesita escribir el problema en un lenguaje adecuado para poder hacer los cálculos. Esto es asociarle a nuestro sistema su correspondiente grupo de simetría y expresarlo en términos de generadores para así posteriormente escribir los elementos de matriz asociado a mi grupo y si pensamos en el espectro de nuestro núcleo todo

el problema nos lleva a escribir nuestro Hamiltoniano adecuado en forma matricial donde está en términos de generadores de grupo y así el problema del cálculo del espectro se convierte en un problema de álgebra lineal, haciendo la diagonalización de la matriz y por fin tener nuestras energías de nuestro núcleo.

- Como ejemplo de lo anterior los generadores de  $SU(2)$  están dados por los operadores escalón  $\hat{J}_\pm$  y  $\hat{J}_z$ , que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm. \quad (\text{A.40})$$

Su correspondiente representación irreducible  $|j, m\rangle$

$$\vec{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad (\text{A.41})$$

donde  $j = 0, 1/2, \dots$ , y  $m = -j, -j+1, \dots, j$ . Los elementos de matriz de los generadores en esta base son

$$\begin{aligned} \langle j, m | \hat{J}_z | j, m \rangle &= m, \\ \langle j, m \pm 1 | \hat{J}_\pm | j, m \rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Aquí muestro como puedo expresar la matriz asociada a mi grupo de simetría  $SU(2)$  en términos de sus generadores. Ahora bien, si queremos expresar rotaciones en tres dimensiones, se sabe que existe un homomorfismo entre los grupos  $SU(2)$  y  $SU(3)$  por lo tanto podemos expresar una rotación unitaria en dos dimensiones en términos de parámetros de Euler así

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma) = e^{-i\alpha\hat{J}_z}e^{-i\beta\hat{J}_y}e^{-i\gamma\hat{J}_z} \quad (\text{A.43})$$

Si hacemos una rotación finita sobre estados bases  $|j, m\rangle$  tenemos

$$R(\alpha, \beta, \gamma)|j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | R(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle \quad (\text{A.44})$$

$$= \sum_{m'} |j, m'\rangle D_{m', m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma), \quad (\text{A.45})$$

aquí nos encontramos con la  $D$ -función de Wigner  $D_{m', m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$ , o dicho de otra manera es el elemento de matriz de la representación de  $SU(2)$

$$D_{m', m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, m' | R(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle \quad (\text{A.46})$$

En los cálculos de mecánica cuántica una manera sencilla de representar operadores es en términos de operadores de creación y aniquilación por lo tanto es conveniente expresar nuestros operadores como

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ &= \hat{J}_x + i\hat{J}_y = \tau^\dagger \sigma \\ \hat{J}_- &= \hat{J}_x - i\hat{J}_y = \sigma^\dagger \tau \\ \hat{J}_z &= \frac{1}{2}(\tau^\dagger \tau - \sigma^\dagger \sigma) \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Solo por curiosidad los primeros estados  $|j, m\rangle$  entonces pueden ser expresados en términos de operadores de bosones de creación

$$|j, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} (\tau^\dagger)^{j+m} (\sigma^\dagger)^{j-m} |0\rangle \quad (\text{A.48})$$

### A.3.2 Operadores Tensoriales

Sin embargo para poder utilizar los elementos de matriz es útil introducir los operadores tensoriales esféricos  $\hat{T}_m^j$ , además estos operadores tensoriales nos permitirán utilizar ciertos teoremas como el teorema de Wigner para así calcular elementos de matriz de una manera más sencilla. Decimos que es un operador tensorial esférico si se cumple que

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \hat{T}_m^{(j)} R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \sum_{m'} \hat{T}_{m',m}^{(j)} D_{m',m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{A.49})$$

donde la función de Wigner es

$$D_{m',m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \langle j, m' | R(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle \quad (\text{A.50})$$

Para rotaciones infinitesimales tenemos que  $R(\phi) = e^{-i\phi \hat{J}_\mu} = 1 - i\phi \hat{J}_\mu + \mathcal{O}(\phi^2)$  de esta manera el primer miembro de la ecuación (A.49) lo podemos expresar como

$$R(\phi) \hat{T}_m^{(j)} R(\phi)^{-1} = e^{-i\phi \hat{J}_\mu} \hat{T}_m^{(j)} e^{i\phi \hat{J}_\mu} \quad (\text{A.51})$$

siendo  $\phi$  el parametro pequeño desarrollamos en términos de conmutadores

$$e^{-i\phi \hat{J}_\mu} \hat{T}_m^{(j)} e^{i\phi \hat{J}_\mu} = \hat{T}_m^{(j)} - i\phi [\hat{J}_m^{(j)}, \hat{T}_m^{(j)}] + \frac{1}{2!} (i\phi)^2 [\hat{J}_m^{(j)}, [\hat{J}_m^{(j)}, \hat{T}_m^{(j)}]] - \dots \quad (\text{A.52})$$

o dicho de otra forma

$$R(\phi) \hat{T}_m^{(j)} R(\phi)^{-1} = \hat{T}_m^{(j)} - i\phi [\hat{J}_m^{(j)}, \hat{T}_m^{(j)}] + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (\text{A.53})$$

Si tomamos ahora el segundo miembro de la ecuación (A.49) tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{m'} \hat{T}_{m',m}^{(j)} D_{m',m}^{(j)}(\phi) &= \sum_{m'} \hat{T}_{m'}^{(j)} \langle j, m' | 1 - i\phi \hat{J}_\mu + \mathcal{O}(\phi^2) | j, m \rangle \\ &= \sum_{m'} \hat{T}_{m'}^{(j)} \langle j, m' | j, m \rangle - i\phi \sum_{m'} \hat{T}_{m'}^{(j)} \langle j, m' | \hat{J}_\mu | j, m \rangle + \mathcal{O}(\phi^2) \\ &= \sum_{m'} \hat{T}_{m'}^{(j)} \delta_{m',m} - i\phi \sum_{m'} \langle j, m' | \hat{J}_\mu | j, m \rangle + \mathcal{O}(\phi^2) \\ &= \hat{T}_m^{(j)} - i\phi \sum_{m'} \langle j, m' | \hat{J}_\mu | j, m \rangle + \mathcal{O}(\phi^2) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

usando (A.53) obtenemos

$$\hat{T}_m^{(j)} - i\phi [\hat{J}_m^{(j)}, \hat{T}_m^{(j)}] + \mathcal{O}(\phi^2) = \hat{T}_m^{(j)} - i\phi \sum_{m'} \langle j, m' | \hat{J}_\mu | j, m \rangle + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (\text{A.55})$$

y por fin obtenemos

$$[\hat{J}_m^{(j)}, \hat{T}_m^{(j)}] = \sum_{m'} \langle j, m' | \hat{J}_\mu | j, m \rangle \quad (\text{A.56})$$

Es importante mencionar que los operadores de creación son operadores tensoriales<sup>5</sup> es decir si consideramos un estado base  $|j, m\rangle = a_{jm}^\dagger |0\rangle$  el operador  $a_{jm}^\dagger$  satisface

$$R(\alpha, \beta, \gamma) a_{jm}^\dagger R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \sum_{m'} a_{j m'}^\dagger D_{m',m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{A.57})$$

<sup>5</sup>Como simplificación emplearé de aquí en adelante los operadores tensoriales esféricos como operadores tensoriales

sin embargo el operador de aniquilación como tal no es operador tensorial, ya que como se tratan de rotaciones, estas satisfacen  $RR^\dagger = R^\dagger R = I$  de esta manera  $R^\dagger = R^{-1}$  por lo tanto si aplico su conjugada transpuesta a (A.57) para el primer miembro tenemos que  $(Ra_{jm'}^\dagger R^{-1})^\dagger = (R^{-1})^\dagger (a_{jm'}^\dagger)^\dagger R^\dagger = Ra_{jm'} R^{-1}$  y utilizando la propiedad de simetría de las funciones de Wigner

$$D_{m',m}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{m,m'}^{(j)}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = (-1)^{(m'-m)} D_{-m',-m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{A.58})$$

tenemos que

$$R(\alpha, \beta, \gamma) a_{jm} R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \sum_{m'} a_{jm'} D_{m',m}^{(j)*}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{A.59})$$

$$R(\alpha, \beta, \gamma) a_{jm} R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \sum_{m'} a_{jm'} (-1)^{(m'-m)} D_{-m',-m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{A.60})$$

claramente se ve que (A.60) no satisface la relación (A.49) por lo que se tiene que hacer

$$\tilde{a}_{j,m} = (-1)^{j-m} a_{j,-m} \quad (\text{A.61})$$

de esta manera ya se tiene que el operador de aniquilación tilde  $\tilde{a}_{j,m}$  ya es un operador tensorial

$$R(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{a}_{jm} R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1} = \sum_{m'} \tilde{a}_{j,m'} D_{m',m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (\text{A.62})$$

### A.3.3 Operadores tensoriales del IBM

Sin embargo en algunas ocasiones se acostumbra expresar estos operadores de otra forma, utilizando el resultado (2.6) y considerando que para  $s$  el momento angular es  $l = 0$  y para  $d$  el momento angular es  $l = 2$ . De esta manera

$$\begin{aligned} C_1[U(6)] &= s^\dagger s + \sum_m d_m^\dagger d_m \\ &= s^\dagger \tilde{s} + \sum_m (-)^m d_m^\dagger \tilde{d}_{-m} \\ &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} + \sum_m (-)^m \sum_{\lambda_0} \langle 2, m, 2, -m | \lambda_0 \rangle [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(\lambda)} \\ &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} + \sum_m (-)^m \sum_{\lambda} \langle 2, m, 2, -m | \lambda \rangle (-)^m \sqrt{5} \langle 2, m, 2, -m | 00 \rangle [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(\lambda)} \\ &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} + \sqrt{5} \sum_m \langle 2, m, 2, -m | \lambda_0 \rangle \langle 2, m, 2, -m | 00 \rangle [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(\lambda)} \\ &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} + \sqrt{5} \delta_{\lambda_0} [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^{(\lambda)} \\ &= [s^\dagger \times \tilde{s}]_0^{(0)} + \sqrt{5} [d^\dagger \times \tilde{d}]_0^0 \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

El operador de Casimir cuadrático para  $U(n)$  se define como

$$C_2[U(n)] \equiv \sum_{ij=1}^n G_i^j G_j^i \quad (\text{A.64})$$

este también satisface la condicion(2.15)

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{ij=1}^n G_i^j G_j^i, G_k^l\right] &= \sum_{ij=1}^n G_i^j [G_j^i, G_k^l] + \sum_{ij=1}^n [G_i^j, G_k^l] G_j^i \\
&= \sum_{ij=1}^n G_i^j (G_j^l \delta_{ik} - G_k^i \delta_{jl}) + \sum_{ij=1}^n (G_i^l \delta_{jk} - G_k^j \delta_{il}) G_j^i \\
&= \sum_{ij=1}^n G_k^j G_j^l - \sum_{ij=1}^n G_i^l G_k^i + \sum_{ij=1}^n G_i^l G_k^i - \sum_{ij=1}^n G_k^j G_j^l \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.65}$$

Por lo tanto este operador conmuta también con todos los generadores de  $U(n)$  de esta manera veamos el operador de Casimir cuadrático para  $U(6)$

$$\begin{aligned}
C_2[U(6)] &\equiv \sum_{ij=1}^6 G_i^j G_j^i = \sum_{ij=1}^6 b_i^\dagger b_j b_j^\dagger b_i = \sum_{ij=1}^6 b_i^\dagger b_j b_j^\dagger b_i - b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i + b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i \\
&= \sum_{ij=1}^6 (b_i^\dagger [b_j, b_j^\dagger] b_i + b_i^\dagger b_j^\dagger b_j b_i) = 6 \sum_{i=1}^6 b_i^\dagger b_i + \sum_{ij=1}^6 b_i^\dagger [b_j^\dagger, b_j] b_i + \sum_{i=1}^6 b_i^\dagger b_i \sum_{j=1}^6 b_j^\dagger b_j \\
&= \hat{N}(\hat{N} + 5)
\end{aligned} \tag{A.66}$$

De forma similar

$$C_2[SO(6)] = \hat{N}(\hat{N} + 4) - \sum_{i=1}^6 b_i^\dagger b_i^\dagger \sum_{j=1}^6 b_j b_j \tag{A.67}$$

En términos de generadores  $b_{lm}^\dagger \tilde{b}_{l'm'}$  los operadores de Casimir cuadráticos se escriben también como

$$\sum_{l'l'} \sum_{mm'} b_{lm}^\dagger b_{l'm'} b_{l'm'}^\dagger b_{lm} = \sum_{l'l'} \sum_{mm'} (-)^{l+m+l'+m'} b_{lm}^\dagger \tilde{b}_{l'-m'} \tilde{b}_{l-m} \tag{A.68}$$

donde  $l$  y  $l'$  corren sobre todos los valores de los momentos angulares de los bosones. Pero si queremos expresarla de forma tensorial

$$\begin{aligned}
\sum_{lm} \sum_{l'm'} b_{lm}^\dagger b_{l'm'} b_{l'm'}^\dagger b_{lm} &= \sum_{lm} \sum_{l'm'} (-)^{l'-m'} (-)^{l-m} b_{lm}^\dagger \tilde{b}_{l'-m'} b_{l'm'}^\dagger \tilde{b}_{l-m} \\
&= \sum_{lm} \sum_{l'm'} (-)^{l'-m'} (-)^{l-m} \sum_{\lambda\mu} \langle l, m, l', -m' | \lambda, \mu \rangle [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_{\mu}^{(\lambda)} \sum_{\lambda'\mu'} \langle l', m', l, -m | \lambda', \mu' \rangle [b_{l'} \times \tilde{b}_l]_{\mu'}^{(\lambda')} \\
&= \sum_l \sum_{l'} (-)^{l'+l} \sum_{\lambda\mu} \langle l, m, l' m' | \lambda \mu \rangle [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_{\mu}^{(\lambda)} (-)^{\mu} \sum_{\lambda'} \langle l, m, l', m' | \lambda \mu' \rangle [b_{l'} \times \tilde{b}_l]_{-\mu}^{(\lambda')} \\
&= \sum_{l'l'} (-)^{l+l'} \sum_{\lambda} (-)^{\mu} [b_l^\dagger \times \tilde{b}_{l'}]_{\mu}^{(\lambda)} [b_{l'} \times \tilde{b}_l]_{-\mu}^{(\lambda')}
\end{aligned} \tag{A.69}$$

### A.3.4 Teorema de Wigner Eckart

Es importante recordar que el acoplamiento de de dos momentos angulares  $j_1$  y  $j_2$  a un momento total angular  $J$  con proyección  $M$  puede expresarse en términos de las series de Clebsch-Gordan.

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{JM} \langle j_1, m_1 j_2, m_2 | J, M \rangle |(j_1, j_2) J, M\rangle \tag{A.70}$$

$$|(j_1, j_2) J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

donde  $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan.<sup>6</sup> Estos satisfacen  $M = m_1 + m_2$  y  $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$  además son ortogonales

$$\sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J', M' \rangle = \delta_{J, J'} \delta_{M, M'} \quad (\text{A.71})$$

$$\sum_{JM} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \langle j_1, m'_1, j_2, m'_2 | J, M \rangle = \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} \quad (\text{A.72})$$

y simétricos.

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \quad (\text{A.73})$$

$$\langle j_1, -m_1, j_2, -m_2 | J, M \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \quad (\text{A.74})$$

El producto de dos operadores tensoriales no necesariamente es un tensor, pero siempre pueden ser expresados en términos de las series de Clebsch-Gordan

$$\hat{T}_{m_1}^{(j_1)} \hat{T}_{m_2}^{(j_2)} = \sum_{J, M} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle [\hat{T}^{(j_1)} \times \hat{T}^{(j_2)}]_M^{(J)} \quad (\text{A.75})$$

Y su relación inversa que es una manera común de representar los generadores de un grupo

$$[\hat{T}^{(j_1)} \times \hat{T}^{(j_2)}]_M^{(J)} = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | J, M \rangle \hat{T}_{m_1}^{(j_1)} \hat{T}_{m_2}^{(j_2)} \quad (\text{A.76})$$

Ahora supongamos que tenemos un operador tensorial  $\hat{T}_m^{(j)}$  caracterizado por los estados del momento angular  $J$  y su proyección  $M$  y otro número cuántico  $\alpha$  que caracteriza su estado espectral.

$$\langle \alpha_1, J_1, M_1 | \hat{T}_m^{(j)} | \alpha_2, J_2, M_2 \rangle \quad (\text{A.77})$$

## A.4 Grupo de Rotaciones $SO(3)$

En muchas aplicaciones de la física nuclear y la física atómica los estados de las partículas en un potencial central son estudiados. El momento angular es una magnitud conservada en los potenciales centrales, es decir sus eigenvalores pueden ser utilizados para clasificar los estados. Debido a esto tiene importancia el momento angular en aplicaciones de la mecánica cuántica.

Las reglas de conmutación de los operadores del momento angular forman un Algebra de Lie  $SO(3)$ . El momento angular clasicamente se puede definir por la relación

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\text{A.78})$$

Si reemplazamos la variable del momento angular por el operador

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla \quad (\text{A.79})$$

en (A.78), nosotros podemos obtener las reglas de conmutación

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad (\text{A.80})$$

<sup>6</sup>Estos coeficientes ya están calculados y se pueden encontrar en cualquier Handbook de física nuclear

para las componentes del operador del momento angular. Podemos llamar a operador del momento angular a cualquier operador  $\hat{J}$  cuyas componentes son observables y que satisfacen las reglas de conmutación (A.80). El cuadrado del momento angular conmuta con todas sus componentes es decir

$$[\hat{J}^2, \hat{J}] = 0 \quad \text{con} \quad \hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \quad (\text{A.81})$$

Para obtener el espectro de esos operadores apropiadamente se elige los siguientes operadores conjugados Hermitianos

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad (\text{A.82})$$

Los operadores que no son Hermitianos, son llamados operadores de escalón.

### A.4.1 Multipletes

Comencemos con el concepto de subespacio invariante de un espacio total de Hilbert es decir todos los estados en los cuales actúan los operadores sobre un grupo. La degeneración de los eigenvalores se le puede asociar la existencia de una simetría. Un multiplete es un subespacio invariante irreducible de un grupo, es decir un subespacio que no contiene más subespacios invariantes. Comencemos con la normalización del estado  $\psi_0$ , el cual tiene un multiplete de un grupo.

$$\psi_\alpha(r) = \hat{U}(\alpha)\psi_0(r) \quad (\text{A.83})$$

Entonces todos los vectores que son construidos pueden ser alcanzados desde el estado  $\psi_0$  a través de la acción de del grupo de operadores  $\hat{U}(\alpha)$ . El nombre de multiplete originalmente surgió en la espectroscopía atómica, donde los subespacios invariantes están caracterizados por el momento angular total  $j$  y el momento orbital  $l$ , por ejemplo  $2p_{\frac{3}{2}}$   $n = 2$  (número cuántico principal)  $l = 1$  (p, estado  $Y_{1m}$ )  $j = \frac{3}{2}$  (momento angular total). En ausencia de campos externos, hay una degeneración de  $(2j + 1)$  veces. En presencia de un campo externo (por ejemplo un campo magnético), estos estados se separan, por ejemplo el efecto Zeeman, y nos lleva esto a una serie de multipletes en el espectro del átomo. Esto nos dice que la simetría, que fué utilizada para representar los multipletes ya no es válida. Comúnmente a esto se le puede llamar rompimiento de la simetría. En términos de teoría de grupos, el conjunto de estados degenerados se le llama multiplete. Los multipletes depende del grupo de simetría. Así en la física atómica tenemos multipletes de momento angular (espin) en donde se mantiene la invariancia rotacional.

## A.5 Adición de dos momentos angulares

Cuando hablamos de los coeficientes isoescalares ISF, estos se pueden entender como una generalización de los coeficientes de Clebsch-Gordan en una simetría de  $SU(3)$ , sin embargo veamos en esta sección como es que surgen estos coeficientes en una simetría de  $SU(2)$ . Estos simplemente surgen del acoplamiento de dos momentos angulares.

Si consideramos el caso de la adición de dos momentos angulares

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2. \quad (\text{A.84})$$

Sea  $|j_1, m_1\rangle$  y  $|j_2, m_2\rangle$  un conjunto de eigenfunciones ortonormales de los operadores  $\hat{J}_1^2, \hat{J}_{1z}$  y  $\hat{J}_2^2, \hat{J}_{2z}$ . Entonces nosotros tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{J}_1^2|j_1, m_1\rangle &= j_1(j_1 + 1)|j_1, m_1\rangle & \hat{J}_2^2|j_2, m_2\rangle &= j_2(j_2 + 1)|j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_{1z}|j_1, m_1\rangle &= m_1|j_1, m_1\rangle & \hat{J}_{2z}|j_2, m_2\rangle &= m_2|j_2, m_2\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Este tipo de acoplamiento del momento angular aparece también en la teoría de muchos cuerpos, por ejemplo: el problema de dos electrones, en donde un electron puede ser descrito la función de onda

$|j_1, m_1\rangle$  y el otro  $|j_2, m_2\rangle$ . La función de onda total de un sistema de dos electrones esta dado por  $|J, M\rangle$ , con un momento angular total  $J$  y con una proyección sobre  $z$  de  $M$ . Como en este problema de dos electrones tenemos un acoplamiento entre espín y el momento angular orbital a un momento angular total por lo cual debe tener un tratamiento especial. Para ello las eigenfunciones de los operadores del momento angular total  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$  denotados como  $|J, M\rangle$  La función de onda  $|J, M\rangle$  se separa en las dos funciones de onda a través del producto de estas,  $\psi_{j_1 m_1} \times \psi_{j_2 m_2}$ . Si hay algún acoplamiento,  $\psi_{JM}$  puede ser descrito como una combinación lineal del producto de  $\psi_{j_1 m_1} \times \psi_{j_2 m_2}$ . Nosotros escribimos los coeficientes  $\langle j_1, j_2, J | m_1, m_2, M \rangle$  en donde tienen una dependencia de varios números cuánticos. Esos coeficientes son llamados coeficientes de Clebsch-Gordan, así, podemos escribir la función de onda total

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1, j_2, J | m_1, m_2, M \rangle |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \quad (\text{A.86})$$

## A.6 Operadores de Majorana

Cuando estamos describiendo las energías asociadas a un sistema de partículas utilizamos el Hamiltoniano, este Hamiltoniano nos proporciona información referente al espacio físico de mi sistema. Por otro lado cuando queremos describir este Hamiltoniano en términos de teoría de grupos lo que hacemos es determinar los valores esperados de los operadores asociados a la estructura algebraica del sistema en particular, con otras palabras, debemos de trabajar en un espacio de índice. En nuestras aplicaciones de la Supersimetría tenemos distintos tipos de sistemas, es decir distintos tipos de acoplamientos que nos permiten describir el sistema. Dependiendo de la simetría en particular que se tenga habrán preferencias energéticas. Por ejemplo en el IBM las energías predominantes son las que corresponden a las simétricas, estados bases en general. Sin embargo debido a que la construcción matemática por si misma es general necesitamos indicar a nuestra teoría que le de preferencia a los casos simetricos si estamos hablando de energías no tan altas para una configuración específica nuclear. Esto es posible con la introducción de el operador de Majorana. Que está constituido por operadores de Casimir. Este operador nos permite distinguir los estados con diferentes energías. Aunque su valor esperado es simplemente es una constante, este está escrito en términos de índices correspondientes a los acoplamientos diferentes que se tenga. Además hay algo interesante que puedo agregar, una ventaja de la simetrías es que podemos partir de lo más general y posteriormente llegar a situaciones específicas. Esto es posible si partimos desde los generadores asociados a la simetría de grupo. Podemos comenzar nuestra discusión enfocandonos en el grupo asociado a la parte bosónica

$$\begin{aligned} U(6) \rightarrow G_{ij} &= \sum_{\alpha}^n b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\alpha j} \\ U(n) \rightarrow G_{\alpha\beta} &= \sum_i^6 b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta i} \\ U(6n) \rightarrow G_{\alpha i, \beta j} &= b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j} \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

calculemos el operador de Casimir cuadrático del grupo  $U(n)$

$$\begin{aligned} \hat{C}_2[U(n)] &= \sum_{\alpha\beta} \sum_i b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta i} \sum_j b_{\beta j}^{\dagger} b_{\alpha j} \\ &= \sum_{\alpha i} \sum_{\beta j} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j}^{\dagger} b_{\beta i} b_{\alpha j} + n \sum_{\alpha i} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\alpha i} \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

por otro lado nosotros sabemos que

$$\hat{C}_1[U(n)] = \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha i} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\alpha i} = \hat{N} \quad (\text{A.89})$$

de esta manera si evaluamos  $\hat{N}(\hat{N} + n - 1)$  tenemos que

$$\hat{N}(\hat{N} + n - 1) = \sum_{\alpha i} \sum_{\beta j} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j}^{\dagger} b_{\alpha i} b_{\beta j} + n \sum_{\alpha i} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\alpha i} \quad (\text{A.90})$$

ahora restando (A.90) la ecuación (A.88) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{N} + n - 1) - \hat{C}_2[U(n)] &= \sum_{\alpha i} \sum_{\beta j} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j}^{\dagger} b_{\alpha i} b_{\beta j} - \sum_{\alpha i} \sum_{\beta j} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j}^{\dagger} b_{\beta i} b_{\alpha j} \\ &= \sum_{\alpha i} \sum_{\beta j} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j}^{\dagger} (b_{\alpha i} b_{\beta j} - b_{\beta i} b_{\alpha j}) \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

Aquí vemos que en términos de generadores no tenemos un término  $n$  en nuestras sumas por lo tanto esta diferencia lo podemos tomar que no depende mucho de  $n$  de esta manera podemos definir esta expresión como interacción de Majorana.

$$\hat{M} \equiv \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + n - 1) - \hat{C}_2[U(n)] \right] \quad (\text{A.92})$$

A veces es conveniente expresar los operadores de Casimir de los grupos unitarios en términos de grupos unitarios especiales para ello se conoce bien [99] la relación

$$\hat{C}_2[SU(n)] = \hat{C}_2[U(n)] - \frac{1}{n} (\hat{C}_1^2[U(n)]) \quad (\text{A.93})$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + n - 1) - \hat{C}_2[U(n)] \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(n-1)}{n} \hat{N}(\hat{N} + n) - \hat{C}_2[SU(n)] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Ahora que ya vimos este operador retomemos los generadores de  $U(6)$ ,  $U(n)$  y  $U(6n)$  de las relaciones (A.87) y vemos de forma general este acoplamiento

$$\begin{array}{ccc} U(6n) & \supset & U(6) \quad \otimes \quad U(n) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \quad \downarrow \\ [N] & & [N_1 \dots N_6] \quad [N_1 \dots N_6] \end{array} \quad (\text{A.95})$$

donde aquí tomo el hecho que  $\sum_i N_i = N$ , aquí hay algo curioso, calculando el Majorana para  $n = 6$  se tiene

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + n - 1) - \hat{C}_2[U(n)] \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha i} \sum_{\beta j} b_{\alpha i}^{\dagger} b_{\beta j}^{\dagger} (b_{\alpha i} b_{\beta j} - b_{\beta i} b_{\alpha j}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + 5) - \hat{C}_2[U(6)] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.96})$$

esto nos dice que

$$\hat{\mathcal{C}}_2[U(n)] - (n-1)\hat{N} = \hat{\mathcal{C}}_2[U(6)] - 5\hat{N} \quad (\text{A.97})$$

y por lo tanto

$$\hat{\mathcal{C}}_2[U(6)] = \hat{\mathcal{C}}_2[U(n)] - (n-6)\hat{N} \quad (\text{A.98})$$

esta igualdad lo hicimos en términos de operadores, eso es lo relevante.

Si nos vamos ahora a situaciones más específicas por ejemplo, cuando tenemos estados en donde vamos a tener solo dos tipos de bosones  $B_\nu$  y  $B_\pi$  vamos a tener estados de la forma:

$$|[N_\nu], [N_\pi]; [N-i, i], \alpha\rangle \quad (\text{A.99})$$

que surgen de los acoplamientos de la forma:

$$\begin{array}{ccc} U(6)_{B_\nu} & \otimes & U(6)_{B_\pi} & \supset & U(6)_B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N_\nu] & & [N_\pi] & & [N_\pi + N_\nu - i, i] \end{array} \quad (\text{A.100})$$

ahora si nos interesa ver esta relación entre los generadores y estos acoplamientos partiendo de (A.92), tenemos que para  $n = 6$

$$\hat{M} = \frac{1}{2} [\hat{N}(\hat{N} + 5) - \hat{\mathcal{C}}_2[U(6)_B]] \quad (\text{A.101})$$

Si ahora queremos calcular el valor esperado de este operador de Majorana siendo  $\hat{N}|N, F, \alpha\rangle = N|N, F, \alpha\rangle$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{M} \rangle &= \frac{1}{2} [(N_\nu + N_\pi)(N_\nu + N_\pi + 5) - (N_\nu + N_\pi - i)(N_\nu + N_\pi - i + 5 - i(i+3))] \\ &= i(N_\nu + N_\pi - i + 1) \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

sin embargo cuando introducimos  $F$ -spin partimos de la cadena

$$\begin{array}{ccc} U(12) & \supset & U(6) & \otimes & U(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N] & & [N-i, i] & & [N-i, i] \end{array} \quad (\text{A.103})$$

el cual es aquí donde se introduce el  $F$ -spin dentro de los acoplamientos

$$\begin{array}{ccc} U(2) & \supset & SU(2) & \supset & SO(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N-i, i] & & F & & F_z \end{array} \quad (\text{A.104})$$

escribiendo de nuevo el operador de Majorana (A.92) para el caso que  $n = 2$  y posteriormente utilizando la reducción a  $SU(2)$  de (A.94) tenemos

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \frac{1}{2} [\hat{N}(\hat{N} + 1) - \hat{\mathcal{C}}_2[U(2)]] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \hat{N}(\hat{N} + 2) - \hat{\mathcal{C}}_2[SU(2)] \right] \\ &= \frac{\hat{N}}{2} \left( \frac{\hat{N}}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \hat{\mathcal{C}}_2[SU(2)] \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

si nosotros hacemos  $\frac{1}{2}\hat{\mathcal{C}}_2[SU(2)] = \vec{F}^2$  y sabiendo que  $\vec{F}^2|N, F, \alpha\rangle = F(F+1)|N, F, \alpha\rangle$  calculando el valor esperado de este operador de Majorana, además siendo  $F = \frac{1}{2}(N_\nu + N_\pi - 2i)$  tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \hat{M} \rangle &= \frac{N_\nu + N_\pi}{2} \left( \frac{N_\nu + N_\pi}{2} + 1 \right) - F(F+1) \\ &= \left( \frac{N_\nu + N_\pi}{2} - F \right) \left( \frac{N_\nu + N_\pi}{2} + F + 1 \right) \\ &= i(N_\nu + N_\pi - i + 1)\end{aligned}\tag{A.106}$$

ya que los estados de  $F$ -spin  $[[N]; F, F_z, \alpha]$  están dados por

$$\begin{aligned}N &= N_\pi + N_\nu \\ F &= \frac{1}{2}(N_\nu + N_\pi - 2i) \\ F_z &= \frac{1}{2}(N_\pi - N_\nu)\end{aligned}\tag{A.107}$$

Ahora cuando nosotros tenemos aparte de bosones incluimos fermiones vamos a tener estados

$$[[N_\nu], [N_\pi]; [N_\nu + N_\pi - i, i], [N_\rho]; [N - j, j - k, k], \alpha]\tag{A.108}$$

que surgen de los acoplamientos de los grupos que representan bosones y el fermión extra

$$\begin{array}{ccc}U(6)_{B_\nu} & \otimes & U(6)_{B_\pi} & \otimes & U(6)_{F_\nu} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N_\nu] & & [N_\pi] & & [N_\rho]\end{array}\tag{A.109}$$

el cual si reducimos donde  $N = N_\pi + N_\nu + N_\rho$  obtenemos

$$\begin{array}{ccc}U(6)_B & \otimes & U(6)_{F_\nu} & \supset & U(6)_{BF_\nu} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N_\pi + N_\nu - i, i] & & [N_\rho] & & [N - j, j - k, k]\end{array}\tag{A.110}$$

podemos ver que aquí que el grupo que toma relevancia es el grupo  $U(6)$  por lo que si podemos evaluar el operador de Majorana de la ecuación (A.92) para  $n = 6$  llegamos a

$$\hat{M} = \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + 5) - \hat{\mathcal{C}}_2[U(6)_{BF_\nu}] \right]\tag{A.111}$$

y si evaluamos su valor esperado tomando el correspondiente valor propio de cada operador [99] donde  $N = N_\pi + N_\nu + N_\rho$ , llegamos a

$$\begin{aligned}\langle \hat{M} \rangle &= \frac{1}{2} [N(N+5) - (N-j)(N-j+5) - (j-k)(j-k+3) - k(k+1)] \\ &= j(N-j+1) + k(j-k+1)\end{aligned}\tag{A.112}$$

cuando estemos en  $F$ -spin generalizado vamos a tener un acoplamiento de la forma:

$$\begin{array}{ccc}U(18) & \supset & U(6) & \otimes & U(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [N] & & [N - j, j - k, k] & & [N - j, j - k, k]\end{array}\tag{A.113}$$

el cual, si reducimos llegamos a

$$\begin{array}{ccccccc}
 U(3) & \supset & SU(3) & \supset & (SU(2) & \supset & SO(2)) \otimes U(1) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (\lambda, \mu) & & F & & F_z \quad Y
 \end{array} \tag{A.114}$$

podemos observar aquí que el grupo de relevancia es el grupo  $U(3)$  por lo que recurriendo a la ecuación (A.92), operador de Majorana de para  $n = 3$  tiene el aspecto

$$\begin{aligned}
 \hat{M} &= \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + 2) - \hat{C}_2[U(3)] \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \hat{N}(\hat{N} + 2) - \hat{C}_2[SU(3)] - \frac{1}{3} \hat{N}^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} \hat{N}(\hat{N} + 3) - \hat{C}_2[SU(3)] \right]
 \end{aligned} \tag{A.115}$$

además conociendo los valores propios de estos operadores

$$\begin{aligned}
 \hat{N} |[N]; (\lambda, \mu), \alpha \rangle &= N |[N]; (\lambda, \mu), \alpha \rangle \\
 \hat{C}_2[SU(3)] |[N]; (\lambda, \mu), \alpha \rangle &= \frac{2}{3} (\lambda(\lambda + 3) + \mu(\mu + 3) + \lambda\mu) |[N]; (\lambda, \mu), \alpha \rangle
 \end{aligned} \tag{A.116}$$

obtenemos el valor esperado

$$\langle \hat{M} \rangle = \frac{1}{3} N(N + 3) - \frac{1}{3} (\lambda(\lambda + 3) + \mu(\mu + 3) + \lambda\mu) \tag{A.117}$$

en donde en términos de  $F$ -spin generalizado  $|[N]; (\lambda, \mu), F, F_z, Y, \alpha \rangle$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 N &= N_\pi + N_\nu + N_\rho \\
 \lambda &= N_\nu + N_\pi - 2j + k \\
 \mu &= j - 2k \\
 F &= \frac{1}{2} (N_\pi + N_\nu - 2i) \\
 F_z &= \frac{1}{2} (N_\pi - N_\nu) \\
 Y &= \frac{1}{3} (N_\pi + N_\nu - 2N_\rho).
 \end{aligned} \tag{A.118}$$

## A.7 Conmutadores de los operadores del $F$ -spin

Aquí solo presento el mecanismo para calcular los conmutadores de los operadores del  $F$ -spin escritos en la ecuación (5.6) entonces si calculamos el conmutador de  $\hat{F}_z$  con  $\hat{Y}$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 [\hat{F}_z, \hat{Y}] &= \left[ \frac{1}{2} (\pi^+ \pi - \nu^+ \nu), \frac{1}{3} (\pi^+ \pi + \nu^+ \nu - 2\rho^+ \rho) \right] \\
 &= \frac{1}{6} [\pi^+ \pi, \pi^+ \pi + \nu^+ \nu - 2\rho^+ \rho] - \frac{1}{6} [\nu^+ \nu, \pi^+ \pi + \nu^+ \nu - 2\rho^+ \rho] \\
 &= \frac{1}{6} [\pi^+ \pi, \pi^+ \pi] - \frac{1}{6} [\nu^+ \nu, \nu^+ \nu] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.119}$$

Estos son operadores de peso ya que

$$[\hat{F}_z, \hat{Y}] = 0 \quad (\text{A.120})$$

En una manera más general se conoce que

$$\begin{aligned} [b_i^+ b_j, b_k^+ b_l] &= b_i^+ b_j b_k^+ b_l - b_k^+ b_l b_i^+ b_j \\ &= b_i^+ (b_k^+ b_j + \delta_{jk}) b_l - b_k^+ (b_i^+ b_l + \delta_{li}) b_j \\ &= b_i^+ b_k^+ b_j b_l + b_i^+ b_l \delta_{jk} - b_k^+ b_i^+ b_l b_j - b_k^+ b_j \delta_{li} \\ &= b_i^+ b_l \delta_{jk} - b_k^+ b_j \delta_{li} \end{aligned}$$

o simplemente

$$[b_i^+ b_j, b_k^+ b_l] = b_i^+ b_l \delta_{jk} - b_k^+ b_j \delta_{li} \quad (\text{A.121})$$

siendo  $i, k, j, k, l = 1$  para  $\pi$ ,  $2$  para  $\nu$ ,  $3$  para  $\rho$ , tomemos el conmutador  $[\hat{F}_z, \hat{V}_\pm]$  y veamos que obtenemos

$$\begin{aligned} [F_z, V_+] &= \frac{1}{2} [\pi^+ \pi - \nu^+ \nu, \pi^+ \rho] \\ &= \frac{1}{2} [\pi^+ \pi, \pi^+ \rho] - \frac{1}{2} [\nu^+ \nu, \pi^+ \rho] \\ &= \frac{1}{2} \pi^+ \pi \pi^+ \rho - \frac{1}{2} \pi^+ \rho \pi^+ \pi \\ &= \frac{1}{2} \pi^+ (\pi^+ \pi + 1) \rho - \frac{1}{2} \pi^+ (\pi^+ \rho + 0) \pi \\ &= \frac{1}{2} [\pi^+ \pi^+ \pi \rho + \pi^+ \rho - \pi^+ \pi^+ \rho \pi] \\ &= \frac{1}{2} \pi^+ \rho \end{aligned}$$

de manera analoga

$$\begin{aligned} [\hat{F}_z, \hat{V}_-] &= \frac{1}{2} [\pi^+ \pi - \nu^+ \nu, \rho^+ \pi] \\ &= -\frac{1}{2} \rho^+ \pi \end{aligned}$$

y esto si cumple la regla (A.121), de esta forma, llegamos a que

$$[\hat{F}_z, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} V_\pm \quad (\text{A.122})$$

Para familiarizarnos con el álgebra  $F$ -spin podemos mostrar que los operadores  $(\hat{F}_+, \hat{F}_-, \hat{F}_z)$  respetan el álgebra de Lie de  $SU(2)$  (es decir es isomorfo a  $SU(3)$ ).

$$[\hat{F}_+, \hat{F}_-] = 2\hat{F}_z \quad [\hat{F}_z, \hat{F}_\pm] = 2\hat{F}_\pm \quad (\text{A.123})$$

Los operadores  $\hat{F}_i (i = +, -, z)$  forman un subálgebra. De la misma esto se mantiene en los operadores

$$[\hat{U}_+, \hat{U}_-] = 2\hat{U}_z \quad [\hat{U}_z, \hat{U}_\pm] = 2\hat{U}_\pm \quad (\text{A.124})$$

similarmente

$$[\hat{V}_+, \hat{V}_-] = 2\hat{V}_z \quad [\hat{V}_z, \hat{V}_\pm] = 2\hat{V}_\pm \quad (\text{A.125})$$

Así calculando los posibles conmutadores llegamos a las reglas de conmutación (5.11)

$$\begin{aligned}
[\hat{F}_z, V_{\pm}] &= \pm \frac{1}{2} V_{\pm} & [\hat{F}_z, \hat{U}_{\pm}] &= \mp \frac{1}{2} \hat{U}_{\pm} & [\hat{F}_z, \hat{F}_{\pm}] &= \pm \hat{F}_{\pm} & [\hat{F}_+, \hat{F}_-] &= 2\hat{F}_z \\
[\hat{V}_z, \hat{V}_{\pm}] &= \pm \hat{V}_{\pm} & [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= \frac{3}{2} \hat{Y} + \hat{F}_z = 2\hat{V}_z & [\hat{U}_z, \hat{U}_{\pm}] &= \pm \hat{U}_{\pm} & [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= \frac{3}{2} \hat{Y} + \hat{F}_z = 2U_z \\
[\hat{Y}, \hat{F}_{\pm}] &= 0 & [\hat{Y}, \hat{V}_{\pm}] &= \pm \hat{V}_{\pm} & [\hat{Y}, \hat{U}_{\pm}] &= \pm \hat{U}_{\pm} & [\hat{U}_+ \hat{V}_-] &= \hat{F}_- \\
[\hat{Y}, \hat{F}_z] &= 0 & [\hat{V}_+, \hat{F}_+] &= 0 & [\hat{U}_+, \hat{V}_+] &= 0 & [\hat{U}_+, \hat{F}_-] &= 0 \\
[\hat{F}_-, \hat{V}_+] &= \hat{U}_+ & [\hat{F}_+, \hat{U}_+] &= \hat{V}_+ & & & & 
\end{aligned}$$

## A.8 Cálculo de operadores del $F$ -spin generalizado

La idea de desarrollar el mecanismo de generalizar el concepto del  $F$ -spin generalizado surge de la analogía de la distinción de bosones de protón y bosones de neutrón que fué desarrollado en el modelo de IBM-2. Donde le asignan el valor de  $F = \frac{1}{2}$  para bosones y  $F = 0$  para fermiones. Y para distinguir los dos tipos de bosones utilizamos su proyección  $F_z = \frac{1}{2}$  para bosones de protón y  $F_z = -\frac{1}{2}$  para bosones de neutrón como se muestra en tabla A.1.

Tabla A.1: Valor de los operadores de escalón en el  $F$ -spin (IBM-2).

	$F$	$F_z$
$b_{\pi}^{\dagger}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$b_{\nu}^{\dagger}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tilde{b}_{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\tilde{b}_{\nu}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

En la Supersimetría Nuclear en la descripción de simetría de  $U(6)$  se tienen 3 especies de partículas, bosones de protón, bosones de neutrón y un fermión de neutrón. Por lo que el concepto de  $F$ -spin del IBM-2 no es suficiente y es necesario incluir el fermión de neutrón. Esta generalización del  $F$ -spin considera una simetría unitaria de  $SU(3)$  que considera tres tipo de partículas, al cual le asignaremos tres operadores de creación  $b_{\nu}^{\dagger}$ ,  $b_{\pi}^{\dagger}$  y  $a_{\nu}^{\dagger}$ . Para los bosones el  $F$ -spin tendrá el valor  $F = \frac{1}{2}$  y  $Y = 0$  y el fermión de neutrón  $F = 0$  y  $Y = -\frac{2}{3}$ , existen también los operadores de aniquilación  $\tilde{b}_{\nu}$ ,  $\tilde{b}_{\pi}$  y  $\tilde{a}_{\nu}$  tienen  $F$ -spin  $F = \frac{1}{2}$  y  $Y = -\frac{1}{3}$  y el fermión de neutrón  $F = 0$  y  $Y = \frac{2}{3}$ , podemos resumirlo en la tabla A.2.

Esta simetría  $SU(3)$  se reduce a la forma  $SU(2) \otimes U(1)$ . El doblete fundamental de  $SU(2)$  de  $F$ -spin lo forman los bosones  $b_{\nu}^{\dagger}$ ,  $b_{\pi}^{\dagger}$  con  $F = \frac{1}{2}$  y el singlete del neutrón  $U(1)$  lo forma  $a_{\nu}^{\dagger}$  con  $Y = \frac{2}{3}$ . La simetría que se supone es  $SU(3)$  porque es la más sencilla que contiene esas dos simetrías subyacentes.

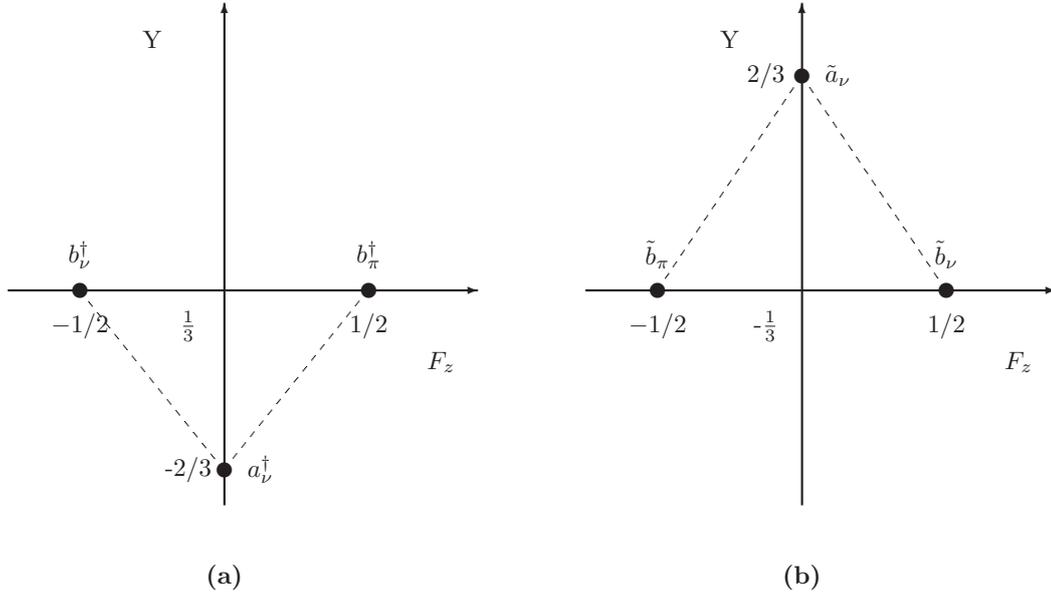


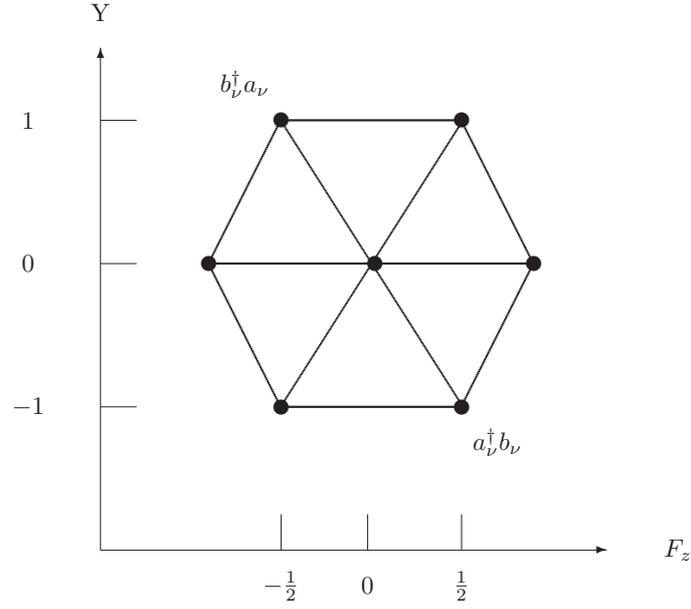
Figura A.1: **(a)** Los tres tipos de operadores de creación forman la representación  $SU(3)$ . Se observa el doblete del  $F$ -spin  $\frac{1}{2}$  y el singlete de la hypercarga  $Y = -\frac{2}{3}$ . **(b)** Operadores de aniquilación forman un doblete  $F$ -spin  $\frac{1}{2}$  y el singlete de la hypercarga  $Y = \frac{2}{3}$ .

Tabla A.2: Valor de los operadores de escalón en el  $F$ -spin generalizado (SUSY).

	$F$	$F_z$	$Y$
$b_\pi^\dagger$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$b_\nu^\dagger$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$a_\nu^\dagger$	0	0	$-\frac{2}{3}$
$\tilde{b}_\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\tilde{b}_\nu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
$\tilde{a}_\nu$	0	0	$\frac{2}{3}$

Si queremos construir el operador  $b_\nu^\dagger a_\nu$ , teniendo  $b_\nu^\dagger$  los valores  $F = \frac{1}{2}$ ,  $F_z = -\frac{1}{2}$  y  $Y = \frac{1}{3}$  para  $a_\nu$  tiene los valores  $F = F_z = 0$  y  $Y = \frac{2}{3}$ , por lo que el operador  $b_\nu^\dagger a_\nu$  tendrá  $F_z = -\frac{1}{2}$ ,  $Y = 1$  y la suma vectorial  $F = \frac{1}{2}$ , de esta manera podemos determinar los demás operadores relacionados a las transferencias de un protón, un neutrón y dos protones.

Los tres operadores de creación forman una representación irreducible  $(1, 0)$  de  $SU(3)$  y los operadores de aniquilación forman  $(0, 1)$ , de esta manera  $(1, 0)_3 \otimes (0, 1)_3 = (1, 1)_8 \oplus (0, 0)_1$  así tenemos un octete  $(1, 1)$  y un singlete  $(0, 0)$  que son elementos diagonales  $b_\pi^\dagger b_\pi + b_\nu^\dagger b_\nu + a_\nu^\dagger a_\nu$  y no lo consideramos. Así dibujando los operadores relevantes que pertenecen al octeto de  $SU(3)$  tenemos:

Figura A.2: Operadores relevantes que se encuentran en el Octete de  $F$ -spinTabla A.3: Operadores de transferencia en el  $F$ -spin generalizado.

<i>Transferencias</i>	<i>Operador</i>	$(\lambda, \mu)$	$F$	$F_z$	$Y$
1) Neutrón	$a_\nu^\dagger b_\nu$	(1, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
	$a_\nu^\dagger$	(1, 0)	0	0	$-\frac{2}{3}$
	$a_\nu$	(0, 1)	0	0	$\frac{2}{3}$
	$b_\nu^\dagger a_\nu$	(1, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
2) Protón	$a_\pi^\dagger b_\pi$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
	$b_\pi^\dagger a_\pi$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3) Dos protones	$b_\pi^\dagger$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$b_\pi$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
4) Dos neutrones	$b_\nu^\dagger$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	$b_\nu$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

## A.9 Reducción de representaciones irreducibles de $U_B(6)$ a $SO_B(6)$

Tomemos un caso particular donde  $\mathcal{N}_\pi = \mathcal{N} - 1$  y  $\mathcal{N}_\nu = 1$  si hacemos este acoplamiento

$$\begin{array}{ccccccc}
U_{B_\nu}(6) & \otimes & U_{B_\pi}(6) & \supset & U_B(6) & \supset & SO_B(6) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
[\mathcal{N}_\nu = 1] & \otimes & [\mathcal{N}_\pi = N - 1] & & [\mathcal{N}] \oplus [\mathcal{N} - 1, 1] & & (\Sigma + 1, 0, 0) \oplus (\Sigma, 1, 0) \oplus (\Sigma - 1, 0, 0)
\end{array} \quad (\text{A.126})$$

Para comprender la reducción anterior de los sigmas de  $SO_B(6)$  tomemos la siguiente cadena

$$\begin{array}{ccccccc}
U_{B_\nu}(6) & \otimes & U_{B_\pi}(6) & \supset & SO_{B_\pi}(6) & \otimes & SO_{B_\nu}(6) & \supset & SO_B(6) & \supset & SO_B(5) & \supset & \dots \\
\downarrow & & & & \\
[\mathcal{N}_\nu] & & [\mathcal{N}_\pi] & & (\Sigma_\pi, 0, 0) & & (\Sigma_\nu, 0, 0) & & (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & (\tau_1, \tau_2) & & 
\end{array} \quad (\text{A.127})$$

de alguna manera los estados simétricos se encuentran a energías bajas y los estados no simétricos a energías altas.

Para determinar los sigmas de  $SO(6)$  se utiliza el hecho de que existe un isomorfismo con  $SU(4)$

$$\begin{array}{ccc}
SO(6) & \simeq & SU(4) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & [n_1, n_2, n_3]
\end{array} \quad (\text{A.128})$$

dado por las reglas

$$\begin{array}{ll}
n_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 & \Sigma_1 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 - n_3) \\
n_2 = \Sigma_1 - \Sigma_3 & \Sigma_2 = \frac{1}{2}(n_1 - n_2 + n_3) \\
n_3 = \Sigma_2 - \Sigma_3 & \Sigma_3 = \frac{1}{2}(n_1 - n_2 - n_3)
\end{array} \quad (\text{A.129})$$

Utilizamos el grupo unitario con la finalidad de utilizar las reglas de Young para averiguar como se hacen los acomplientos. Es decir, como conocemos el comportamiento simétrico  $i = 0$  donde  $[\mathcal{N}, 0]$  corresponderá a  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\mathcal{N}, 0, 0) \oplus \dots$  de (3.25) podemos escribirlo como  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) = (\Sigma, 0, 0)$  y ahora si hacemos un acoplamiento  $\mathcal{N}_\pi = \mathcal{N} - 1$  y  $\mathcal{N}_\nu = 1$  siendo  $SO_{B_\pi}(6) \otimes SO_{B_\nu}(6)$  esto corresponderá a  $(\Sigma, 0, 0) \otimes (1, 0, 0)$  dentro de  $SO(6)$  donde sigma tendra los valores  $\Sigma = \mathcal{N} - 1, \mathcal{N} - 3, \dots, 0$  y si nos pasamos a  $SU(4)$  y dentro de este acoplamos esas representaciones utilizando las tablas de Young tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
[\Sigma, \Sigma, 0] & \otimes & [1, 1, 0] & = & [\Sigma + 1, \Sigma + 1, 0] & \oplus & [\Sigma + 1, \Sigma, 1] & \oplus & [\Sigma, \Sigma, 1, 1] \\
\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \hline \hline \hline \hline \hline \end{array} \\
\begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array} \\
& & & & & & & & \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array}
\end{array}$$

y si nos regresamos a  $SO(6)$  utizando (A.129) vamos a tener

$$\begin{array}{ccccccc}
SU(4) \rightarrow & [\Sigma, \Sigma, 0] & \otimes & [1, 1, 0] & = & [\Sigma + 1, \Sigma + 1, 0] & \oplus & [\Sigma + 1, \Sigma, 1] & \oplus & [\Sigma, \Sigma, 1, 1] & = & [\Sigma - 1, \Sigma - 1, 0] \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
SO(6) \rightarrow & (\Sigma, 0, 0) & & (1, 0, 0) & & (\Sigma + 1, 0, 0) & & (\Sigma, 1, 0) & & & & (\Sigma - 1, 0, 0)
\end{array} \quad (\text{A.130})$$

de esta forma ya hemos podido obtener las representaciones sigma de (A.126) para los bosones acoplados en  $SO_B(6)$ .

Asi podemos obtener distintas valores de  $SO_B(6)$  tomando  $\Sigma = \mathcal{N} - 1, \mathcal{N} - 3, \dots, 0$

$$\begin{array}{ccccc}
& & SO_B(6) & & \\
(\Sigma + 1, 0, 0) & (\Sigma, 1, 0) & (\Sigma - 1, 0, 0) & & \\
(\mathcal{N}, 0, 0) & (\mathcal{N} - 1, 1, 0) & (\mathcal{N} - 2, 0) & & \\
(\mathcal{N} - 2, 0, 0) & (\mathcal{N} - 3, 1, 0) & (\mathcal{N} - 4, 0) & & \\
(\mathcal{N} - 4, 0, 0) & (\mathcal{N} - 5, 1, 0) & (\mathcal{N} - 6, 0) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 
\end{array} \tag{A.131}$$

Si queremos determinar las primeras líneas espectrales de un núcleo donde por ejemplo el caso donde  $\mathcal{N} = 3$  donde es impar tenemos solo dos niveles tenemos  $(3, 0, 0)(2, 1, 0)(1, 0, 0)$  y  $(1, 0, 0)$  si  $\mathcal{N} = 4$  es par tenemos también dos niveles  $(4, 0, 0)(3, 1, 0)(2, 0, 0)$  y  $(2, 0, 0)(1, 1, 0)(0, 0, 0)$ .

## A.10 Reducción $SO_B(6)$ a $SO_B(5)$

Para comprender la reducción  $SO_B(6)$  a  $SO_B(5)$  de la cadena

$$\begin{array}{ccc}
SO_B(6) & \supset & SO_B(5) \supset \dots \\
(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) & & (\tau_1, \tau_2)
\end{array} \tag{A.132}$$

En donde si utilizamos

$$\Sigma_1 \geq \tau_1 \geq \Sigma_2 \geq \tau_2 \geq |\Sigma_3| \tag{A.133}$$

obtenemos la tabla (A.10)

Tabla A.4: Correspondencia de los valores de las representaciones de  $SO(6)$  y  $SO(5)$  para algunos valores del acoplamiento  $N_\pi = N - 1$  y  $N_\nu = 1$ .

$SO(6)$						$SO(5)$
$(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$	$\Sigma_1 \geq \tau_1$	$\tau_1 \geq \Sigma_2 \geq \tau_2$	$\tau_2 \geq  \Sigma_3 $			$(\tau_1, \tau_2)$
$(N, 0, 0)$	N	0	0	0	0	$(0, 0)$
$(N, 0, 0)$	N	1	0	0	0	$(1, 0)$
$(N, 0, 0)$	N	2	0	0	0	$(2, 0)$
		$\vdots$				$\vdots$
$(N, 0, 0)$	N	N	0	0	0	$(N, 0)$
$(N - 2, 0, 0)$	N-2	0	0	0	0	$(0, 0)$
$(N - 2, 0, 0)$	N-2	1	0	0	0	$(1, 0)$
$(N - 2, 0, 0)$	N-2	2	0	0	0	$(2, 0)$
		$\vdots$				$\vdots$
$(N - 2, 0, 0)$	N-2	N	0	0	0	$(N - 2, 0)$
$(N - 1, 1, 0)$	N-1	1	1	0	0	$(1, 0)$
$(N - 1, 1, 0)$	N-1	1	1	1	0	$(1, 1)$
$(N - 1, 1, 0)$	N-1	2	1	0	0	$(2, 0)$
$(N - 1, 1, 0)$	N-1	2	1	1	0	$(2, 1)$
		$\vdots$				$\vdots$
$(N - 1, 0, 0)$	N-1	N-1	1	0	0	$(N - 1, 0)$
$(N - 1, 0, 0)$	N-1	N-1	1	1	0	$(N - 1, 1)$
$(N - 3, 1, 0)$	N-1	1	1	0	0	$(1, 0)$
$(N - 3, 1, 0)$	N-1	1	1	1	0	$(1, 1)$
$(N - 3, 1, 0)$	N-1	2	1	0	0	$(2, 0)$
$(N - 3, 1, 0)$	N-1	2	1	1	0	$(2, 1)$
		$\vdots$				$\vdots$
$(N - 3, 0, 0)$	N-3	N-3	1	0	0	$(N - 3, 0)$
$(N - 3, 0, 0)$	N-3	N-3	1	1	0	$(N - 3, 1)$

donde presentan los niveles que puede tener cada banda  $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ .

## A.11 Cálculo de la correlación de la transferencias de protones entre núcleos con neutrón impar y núcleos par-par

Aquí simplemente muestro a todo detalle el mismo análisis mostrado en la sección solo que procurare ser más explícito en los detalles. Si queremos expresar una tranferencia de dos partículas a un núcleo donde transferimos un bosón cuyo estado inicial tiene  $[N - 1]$  bosones y  $[1_\rho]$  fermión, este núcleo puede ser con neutrón impar, además consideremos que hay  $[N_\nu]$  bosones de neutrón y  $[N_\pi]$  bosones de protón y esto acoplado tiene la forma  $[N]\alpha'$ , ahora a este estado le creamos un boson tipo protón con el operador  $S_\pi^\dagger$  y el estado final entonces tendrá  $[N_\nu]$  bosones de neutrón y  $[N_\pi + 1]$  bosones de protón, el acoplamiento de solo bosones  $[N]$  y de solo fermiones  $[1_\rho]$  y el acomplianto bosón fermión es  $[N, 1]\alpha$  de esta manera se tiene

$$C_1 = \langle [N_\nu - 1][N_\pi + 1]; [N][1_\rho]; [N, 1]\alpha \| S_\pi^\dagger \| [N_\nu - 1][N_\pi]; [N - 1][1_\rho]; [N]\alpha' \rangle \quad (\text{A.134})$$

Como ahora nos interesa expresar estos estados en el espacio  $F$ -spin para ello generalicemos el concepto de  $F$ -spin para una dimensión adicional, considerando la representación del acoplamiento de bosones y fermiones escrita de una manera más compacta

$$[N_\pi + N_\nu + N_\rho - j, j - k, k] = [N_1, N_2, N_3]$$

el espacio  $F$ -spin generalizado tiene la forma:

$$\begin{array}{lcl} U_F(3) & \supset & SU_F(3) \supset SU_F(2) \otimes U_Y(1) \\ [N_1 N_2 N_3] & & (\lambda, \mu) \quad \quad \quad F \quad \quad \quad Y \\ & & \supset SO_F(2) \otimes U_Y(1) \\ & & \quad \quad \quad F_z \quad \quad \quad Y \end{array} \quad (\text{A.135})$$

de esta manera en el espacio  $F$ -spin generalizado tiene las representaciones como

$$(\lambda, \mu) = (N_1 - N_2, N_2 - N_3), \quad \hat{F} = \frac{B_\nu + B_\pi - 2i}{2}, \quad \hat{F}_z = \frac{B_\pi - B_\nu}{2}, \quad \hat{Y} = \frac{B_\pi + B_\nu - 2B_\rho}{3} \quad (\text{A.136})$$

Donde  $N = N_\pi + N_\nu$  es el número total de bosones,  $B_\nu$  el número total de bosones de neutrón de un estado,  $B_\pi$  es el número total de bosones de protón de un estado.

Estado inicial	Estado final
$N_1 = N$	$N_1 = N$
$N_2 = 0$	$N_2 = 1$
$N_3 = 0$	$N_3 = 0$
$B_\nu = N_\nu - 1$	$B_\nu = N_\nu - 1$
$B_\pi = N_\pi$	$B_\pi = N_\pi + 1$
$B_\rho = 1$	$B_\rho = 1$

Suponemos que el estado inicial y final son simétricos  $i = 0$

$$\begin{array}{cccc} & \text{Estado inicial} & \text{Estado final} & s_\pi^\dagger \\ (\lambda, \mu) = (N_1 - N_2, N_2 - N_3) & (N, 0) & (N - 1, 1) & (1, 0) \\ F = \frac{B_\nu + B_\pi - 2i}{2} & \frac{N-1}{2} & \frac{N}{2} & \frac{1}{2} \\ F_z = \frac{B_\pi - B_\nu}{2} & \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2} & \frac{N_\pi - N_\nu + 2}{2} & \frac{1}{2} \\ Y = \frac{B_\pi + B_\nu - 2B_\rho}{3} & \frac{N_\pi + N_\nu - 3}{3} & \frac{N_\pi + N_\nu - 2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \quad (\text{A.137})$$

de esta forma ya podemos construir los estados en el espacio de  $F$ -spin generalizado. Es decir vamos a hacer un mapeo de nuestros estados a un espacio de  $F$ -spin generalizado bajo las transformaciones mencionadas anteriormente.

$$\begin{array}{c} |[N_\nu], [N_\pi]; [N_\nu + N_\pi - i, i], [N_\rho]; [N_1, N_2, N_3]\alpha \rangle \\ \downarrow \\ |(\lambda, \mu)\alpha, F, F_z, Y \rangle \end{array} \quad (\text{A.138})$$

$$C_1 = \langle (N - 1), \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 2}{2}, \frac{N - 2}{3}, \alpha \| T_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{3}}^{(1,0)} \| (N, 0), \frac{N - 1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N - 3}{3}, \alpha, \rangle \quad (\text{A.139})$$

Si utilizamos el teorema de Wigner Eckart obtenemos

$$C_1 = \left\langle \begin{array}{c} (N, 0) \\ \frac{N-1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N-1, 1) \\ \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 2}{2}, \frac{N-2}{3} \end{array} \right\rangle \langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle \quad (\text{A.140})$$

Por otro lado, si tenemos otra reacción nuclear donde se transfiera un boson de protón a un núcleo par-par, este proceso lo escribimos de forma análoga al caso anterior

$$C_2 = \langle [N_\nu][N_\pi + 1]; [N, 1]\alpha || s_\pi^\dagger || [N_\nu][N_\pi]; [N]\alpha' \rangle \quad (\text{A.141})$$

Estado inicial	Estado final
$N_1 = N$	$N_1 = N$
$N_2 = 0$	$N_2 = 1$
$N_3 = 0$	$N_3 = 0$
$B_\nu = N_\nu$	$B_\nu = N_\nu$
$B_\pi = N_\pi$	$B_\pi = N_\pi + 1$
$B_\rho = 0$	$B_\rho = 0$

Suponemos de nuevo que el estado inicial y final son simétricos  $i = 0$

$$\begin{array}{ccc} (\lambda, \mu) = (N_1 - N_2, N_2 - N_3) & \text{Estado inicial} & \text{Estado final} & s_\pi^\dagger \\ F = \frac{B_\nu + B_\pi - 2i}{2} & (N, 0) & (N-1, 1) & \frac{1}{2} \\ F_z = \frac{B_\pi - B_\nu}{2} & \frac{N_\pi - N_\nu}{2} & \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2} & \frac{1}{2} \\ Y = \frac{B_\pi + B_\nu - 2B_\rho}{3} & \frac{N_\pi + N_\nu}{3} & \frac{N_\pi + N_\nu + 1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \quad (\text{A.142})$$

de esta manera tenemos

$$C_2 = \langle (N-1, 1), \frac{N+1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N+1}{3}, \alpha || T_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}^{(1,0)} || (N, 0), \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu}{2}, \frac{N}{3}, \alpha, \rangle \quad (\text{A.143})$$

Utilizando de nuevo el teorema de Wigner Eckart

$$C_2 = \left\langle \begin{array}{c} (N, 0) \\ \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu}{2}, \frac{N}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N-1, 1) \\ \frac{N+1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N+1}{3} \end{array} \right\rangle \langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle \quad (\text{A.144})$$

Por lo tanto si vemos

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\langle \begin{array}{c} (N, 0) \\ \frac{N-1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N-1, 1) \\ \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 2}{2}, \frac{N-2}{3} \end{array} \right\rangle \langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle \\ C_1 &= ISF_1 \langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

donde llamaremos factores isoescalares a

$$ISF_1 = \left\langle \begin{array}{c} (N, 0) \\ \frac{N-1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N-3}{3} \end{array} \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \middle| \begin{array}{c} (N-1, 1) \\ \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 2}{2}, \frac{N-2}{3} \end{array} \right\rangle$$

ahora si dividimos entre  $ISF_1$  la ecuación A.145 obtenemos

$$\langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle = \frac{C_1}{ISF_1} \quad (\text{A.146})$$

y lo mismo para la otra ecuación

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left\langle \begin{array}{c} (N, 0) \\ \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu}{2}, \frac{N}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \right| \begin{array}{c} (N-1, 1) \\ \frac{N+1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N+1}{3} \end{array} \right\rangle \langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle \\
C_2 &= ISF_2 \langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle
\end{aligned} \tag{A.147}$$

donde

$$ISF_2 = \left\langle \begin{array}{c} (N, 0) \\ \frac{N}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu}{2}, \frac{N}{3} \end{array} \left| \begin{array}{c} (1, 0) \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \end{array} \right| \begin{array}{c} (N-1, 1) \\ \frac{N+1}{2}, \frac{N_\pi - N_\nu + 1}{2}, \frac{N+1}{3} \end{array} \right\rangle$$

ahora si dividimos entre  $ISF_2$  la ecuación A.147 obtenemos

$$\langle (N-1, 1)\alpha || T^{(1,0)} || (N, 0)\alpha' \rangle = \frac{C_2}{ISF_2} \tag{A.148}$$

igualando (A.146) y (A.148) y finalmene obtenemos obtenemos

$$\boxed{C_1 = \frac{ISF_1}{ISF_2} C_2} \tag{A.149}$$

Podemos continuar con el análisis en la sección 4.4.

# Bibliografía

- [1] E. Williams, R. J. Casperson, and V. Werner, Phys. Rev. C **81**, 054306 (2010).
- [2] Bettermann, V. Werner, E. Williams,1 and R. J. Casperson, Phys. Rev. C **81**, 021303(R) (2010).
- [3] A. Arima and F. Iachello, “Collective nuclear states as representations of a  $SU(6)$  group,” Phys. Rev. Lett. **35** 1069(1975).
- [4] H. Feshbach and F. Iachello, “The interacting boson model structure of  $^{16}O$ ,” Phys. Lett. B **45** 7 (1973).
- [5] H. Feshbach and F. Iachello, “The interacting boson model, ” Ann. Phys. (NY) **84** 211 (1974).
- [6] D. Janssen, R.V. Jolosm and F. Dönau, “An algebraic treatment of the nuclear quadrupole degree of freedom,” Nucl. Phys. A **224** 93 (1974).
- [7] A. Bohr and B.R. Mottelson, “Collective and individual-particle aspects of nuclear structure,” Mat. Fys. Dan. Vid. Selsk. **27** No 16.(1953).
- [8] F.Iachello *Lie Algebras and Applications*, Lect. Notes Phys. 708 Springer, Berlin Heidelberg (2006).
- [9] F.Iachello “Symposium on Interacting Bosons in Nuclear Physics 1”,Plenum press (NY) (1978).
- [10] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys, (NY) **99**, 253 (1976).
- [11] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys, (NY) **111**, 201 (1978).
- [12] A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys, (NY) **123**, 468 (1979).
- [13] W. N. Cottingham y D. A. Greenwood, *An introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge (1998).
- [14] F.Iachello and O. Scholten, Phys Rev. Lett **43**, 679 (1979).
- [15] A. Frank and Pieter Van Isacker, “Symmetry Methods in molecules and nuclei” S y G editores, M'exico D.F. (2005).
- [16] F. Iachello and A. Arima, *The interacting boson model*, (Cambridge University Press, 1987).
- [17] F. Iachello and P. Van Isacker, *The interacting boson-fermion model*, (Cambridge University Press, 1991).
- [18] F.Iachello, Phys Rev. Lett **44** 772 (1980).
- [19] Arima A. y Iachello F *Phys. Rev. Lett.* *35*, 1069 (1975).

- [20] J. P. Elliot *Proc. R. Soc. A* **245**, 128 (1958).
- [21] A. Neveu and J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B31**, 86 (1971) ;  
P. Ramond, *Phys. Rev. D* **3**, 2415 (1971).
- [22] D. V. Volkov and V. P. Akulov, *Phys. Lett.* **46B**, 109 (1973);  
J. Wess and Zumino, *Nucl. Phys.* **B70**, 39 (1974)
- [23] S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **62B**, 325 (1976);  
D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev. D* **14**, 912 (1976).
- [24] F. Iachello and O. Scholten, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 679 (1979).
- [25] Balantekin A. B., Bars y Iachello F 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 19.
- [26] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 772 (1980).
- [27] J. P. Elliott *Prog. Part. Nucl. Phys* **25**, 325 (1990)
- [28] J. Gröger, J. Jolie, R. Krücken, C. W. Beausang, M. Caprio, R. F. Casten, J. Cederkall, J. R. Cooper, F. Corminboeuf, L. Genilloud, G. Graw, C. Günther, M. de Hoo, A. I. Levon, A. Metz, J. R. Novak, N. Warr, and T. Wendel *Phys. Rev. C.* **62**, 064304 (2000).
- [29] R. Bijker, Ph.D. thesis, University of Groningen (1984).
- [30] J.A. Cizewski, R.F. Casten, G.J. Smith, M.L. Stelts, W.R. Kane, H.G. Börner and W.F. Davidson, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 167 (1978);  
A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 385 (1978).
- [31] A.B. Balantekin, I. Bars and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 19 (1981).
- [32] A.B. Balantekin, I. Bars and F. Iachello, *Nucl. Phys. A* **370**, 284 (1981).
- [33] A.B. Balantekin, I. Bars, R. Bijker and F. Iachello, *Phys. Rev. C* **27**, 1761 (1983).
- [34] P. Van Isacker, J. Jolie, K. Heyde and A. Frank, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 653 (1985).
- [35] A. Metz, J. Jolie, G. Graw, R. Hertenberger, J. Gröger, C. Günther, N. Warr and Y. Eisermann, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1542 (1999).
- [36] E.P Wigner, "On the consequences of the symmetry of the nuclear hamiltonian on the spectroscopy of nuclei" *Phys. Rev.* **51**, 106 (1937)
- [37] G. Racah, "Theory of complex spectra I, " *Phys. Rev.* **61**(1942)186; **62**, 438 (1942); **63**367(1943); **76**, 1352 (1949).
- [38] J.P Elliot, "Collective motion in the nuclear shell model. I. Classifications schemes for states of mixed configurations, " *Proc. Roy. Soc. A* **245** 128 (1958) ; **245** 562 (1958).
- [39] M. Moshinsky, *Group Theory and the Many-Body Problem*, Gordon & Breach, New York, (1968).
- [40] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [41] Bohr A and Mottelson B R *Dan. Vid Selsk. Mat.-Fys. Medd.* **27** No 16, (1953).
- [42] Castaños O, Frank A. and Moshinsky M *J. Math. Phys.* **19**, 1781 (1978).

- 
- [43] Lipas P O, Von Brentano P and Gelberg A *Rep. Prog. Phys.***53**, 1355 (1990).
- [44] Otsuka T, Arima A, Iachello F and Talmi I *Phys. Lett. B* **76139** **161**, 360 (1978).
- [45] R. Bijker and F. Iachello, *Ann. Phys. (N.Y.)* **161**, 360 (1985).
- [46] J.Jolie and P. Garrett, *Nucl. Phys. A* **596**, 234 (1996).
- [47] A.Metz, J. Jolie, G. Graw, R. Hertenberger, J. Gröner, C. Günther, N. Warr and Y. Eisermann, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1542 (1999).
- [48] J.Gröger, J. Jolie, R Krücken, C. W. Beausang, M. Caprio, R.F. Casteb, J. Cederkall, J.R. Cooper, F. Corminboeuf, L. Genilloud, G. Graw, C. Günther, M. de Huu, A.I. Levon, A. Mertz, J.R. Novak, N. Warr and T. Wendel, *Phys. Rev. C* **62**, 064304 (2000).
- [49] H.F. Wirth, G. Graw, S. Chirsten, Y. Eisermann, A. Gollwitzer, R. Hertenberger, J. Jolie, A. Mertz, O. Möller, D. Tonev and B.D. Valnion, *Phys. Rev. C.* **70**, 014610 (2004).
- [50] M. Balodis et al., *Phys. Rev. C* **77**, 064602 (2008).
- [51] A. Metz, J. Jolie, G. Graw, R. Hertenberger, J. Gröger, C Günther, N. Warr, and Y. Eisermann, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1542 (1999).
- [52] A. Metz, Y. Eisermann, A. Gollwitzer, R. Hertenberger, B.D. Valnion, G. Graw and J. Jolie, *Phys. Rev. C* **61**, 064313 (2000).
- [53] J. Gröger, J. Jolie, R. Krücken, C.W. Beausang, M. Caprio R.F. Casten, J. Cederkall, J.R. Cooper, F. Corminboeuf, L. Genilloud, G. Graw, C. Günther, M. de Huu, A.I. Levon, A. Metz, J.R. Novak, N. Warr, and T. Wendel, *Phys. Rev. C* **62**, 064304 (2000).
- [54] Scholten O. *Prog. Part. Nucl. Phys* **14**, 189 (1985).
- [55] J. Barea, R. Bijker and A. Frank, *J. Phys A; Math. Gen.* **37**, 10251-10260 (2004)
- [56] J. Barea, R. Bijker, A. Frank and G. Loyola, *Phys. Rev. C* **64**, 064313 (2001)
- [57] Igal Talmi, *Simple Models of Complex Nuclei. The Shell Model and Interacting Boson Model*, Contemporary Concepts in Physics Volume **7**, Harwood Academic Publishers, Switzerland, (1993).
- [58] Ronald E. Brown, J. A. Cizewski, E. R. Flynn, and J. W. Sunier *Phys. Rev. C* **20**, 1301 (1979)
- [59] F. Iachello and S. Kuyucak, “Interacting Boson-Fermion Model of Collective States, The Spin(6) Limit” Academic Press, Inc. May (1981)
- [60] R. Bijker, J. Barea, and A. Frank, “New developments in nuclear supersymmetry”, *Rev. Mex. Fís.* **55** (2) 30-55 (2009).
- [61] Warner D D and Van Isacker P *Phys. Lett B* **395** 145, (1997).
- [62] R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, and B. W. Lee, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 1 (1962).
- [63] D. R. Speiser and J. Tarski, *Math. Phys.* **4**, 588 (1963).
- [64] J. J. de Swart, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 4, 916(1963).
- [65] M. Gell-Mann, California Institute of Technology, Report CTSL-20, March, 1961; *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962).

- [66] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961).
- [67] J. P. Elliott, Proc. Roy. Soc. **A245**, 128, 562 (1958).
- [68] J. P. Elliott and M. Harvey, Proc. Roy. Soc. **A272**, 557 (1963).
- [69] J. P. Elliot and Wilsdon C E *Proc. R Soc. A* **302**, 509 (1968).
- [70] K. T. Hecht, Nucl. Phys. **62**, 1 (1965).
- [71] T. Engeland, Nucl. Phys. **72**, 67 (1965).
- [72] M. K. Banerjee and C. A. Levinson, Phys. Rev. **130**, 1036, 1064 (1963).
- [73] D. Koltun, Phys. Rev. **124**, 1162 (1961).
- [74] D. M. Brink and G. F. Nash, Nucl. Phys. **40**, 608 (1963).
- [75] J. Flores and M. Moshinsky, Nucl. Phys. **A93**, 81 (1967).
- [76] I. M. Gelfand and M. L. Tseitlin, Dokl. Akad. Nauk SSSR **71** 825 (1950).
- [77] J. D. Vergados Nuclear Physics **A111**, 681-754 (1968).
- [78] P. McNamee and F. Chilton, Rev. Mod. Phys. **36**, 1005 (1964).
- [79] V. Rabl, G. Campbell, Jr. and K. C. Wali, J. Math. Phys. (N.Y.) **16**, 2494 (1975).
- [80] M. A. Rashid, Nuovo Cimento **26**, 118 (1962).
- [81] Y. Akiyama and J. P. Draayer, Comput. Phys. Commun. **5**, 405 (1973).
- [82] H. T. Williams and C. J. Wynne, Comput. Phys, **8**, 355 (1994).
- [83] T. A. Kaeding and H. T. Williams, Comput. Phys. Commun. **98** 398-414, (1996).
- [84] T. A. Kaeding Atomic Data and Nuclear Data Tables, **61**, 2, 233-236, (1995).
- [85] T. D. Cohen and R. F. Lebed, Phys. Rev. D **70**, 096015 (2004).
- [86] Symmetry in Physics: Principles and Simple Applications by J.P. Elliott, P.G. Dawber Paperback, Oxford Univ Pr (June 1985).
- [87] Fl Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, Clarendon Press Oxford, New York, (1996).
- [88] A. R. Edmonds, Proc. R. Soc. London A **268**, 436 (1963).
- [89] L. C. Biedenharn, Phys. Lett. **3**, 69 (1962); in Proceedings of the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, 1962, edited by W. E. Brittin and J. Downs (Interscience Publishers, New York, , Vol. 5 (1962).
- [90] E. U. Condon and G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra (Cambridge University Press, Cambridge, 1935).
- [91] MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>
- [92] E.L. Hill, Rev. Mod. Phys. **23**, 253 (1951).

- 
- [93] F. Iachello, Nucl. Phys. A **751**, 329c (2005).
- [94] W. Pauli, Z. Physik **36**, 336. (1926).
- [95] B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, Wiley-Interscience, New York, (1974).
- [96] V.I. Man'ko, "Invariants and states generating symmetry of nonstationary systems", in *Symmetries in Science V*, edited by B. Gruber, L.C. Biedenharn, and H.D. Doebner, Plenum, New York, p. 453, (1991).
- [97] O. Castaños, A. Frank and R. Lopez-Peña, "Noether's theorem and dynamical groups in quantum mechanics," J. Phys. A. **23**, 5141 (1990).
- [98] Elpidio Chacón Esponda, *Introducción a la Teoría de los Grupos y sus aplicaciones a la Mecánica Cuántica*, Instituto de Ciencias Nucleares, México D.F. (2008).
- [99] R. Bijker, *Symmetries and Group Theory*, Lect. Notes Phys. Instituto de Ciencias Nucleares, México D.F. (2006).

# Lista de Figuras

1.1	Espectros de energías bajas. . . . .	10
2.1	Triángulo de Casten. . . . .	13
3.1	Espectro de energías de un núcleo par-par con una simetría $SO(6)$ y con $N = 3$ . . . . .	37
3.2	Espectro de energías de un núcleo con simetría $Spin(6)$ con $N = 2$ y $M = 1$ . . . . .	41
3.3	Espectro de energías de un núcleo impar-par con simetría $U(6) \otimes U(2)$ para $N = 2$ and $M = 1$ . . . . .	44
3.4	Espectro de energías de un núcleo impar-impar con simetría $Spin(6)$ para $N = 1$ y $M_\nu = M_\pi = 1$ . . . . .	46
3.5	Comparación entre el espectro de energías de niveles con paridad negativa de un núcleo impar-impar $^{196}\text{Au}$ y el obtenido con la supersimetría $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$ . . . . .	47
3.6	Multiplete supersimétrico en la región Os-Ir. $\mathcal{N}$ . . . . .	49
3.7	Ejemplo de un cuarteto supersimétrico con una supersimetría $U(6/12)_\nu \otimes U(6/4)_\pi$ . . . . .	50
4.1	Posibles transferencias de nucleones dentro de un cuarteto supersimétrico. . . . .	53
4.2	Posibles correlaciones entre los dos cuartetos supersimétricos. . . . .	60
4.3	Ejemplo de tranferencias de un protón . . . . .	67
4.4	Correlaciones posibles entre los núcleos de dos cuartetos supersimétricos. . . . .	74
4.5	Reacciones permitidas para $^{194}\text{Pt} \rightarrow ^{195}\text{Au}$ y $^{195}\text{Pt} \rightarrow ^{196}\text{Au}$ . . . . .	92
4.6	Estados permitidos para $^{193}_{77}\text{Ir}_{116} \rightarrow ^{192}_{76}\text{Os}_{116}$ y $^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \rightarrow ^{193}_{76}\text{Os}_{117}$ . . . . .	97
4.7	Estados permitidos para $^{195}\text{Au} \rightarrow ^{194}\text{Pt}$ y $^{196}\text{Au} \rightarrow ^{195}\text{Pt}$ . . . . .	99
4.8	Estados permitidos para $^{194}\text{Pt} \rightarrow ^{192}\text{Os}$ y $^{195}\text{Pt} \rightarrow ^{193}\text{Os}$ . . . . .	103
4.9	Estados permitidos para $^{195}\text{Au} \rightarrow ^{193}\text{Ir}$ y $^{196}\text{Au} \rightarrow ^{194}\text{Ir}$ . . . . .	107
5.1	Operadores de escalon en el plano $F_z - Y$ . . . . .	115
5.2	Representaciones asociados a $(\lambda, \mu)$ . . . . .	116
5.3	Diagrama de pesos $(\lambda, \mu)$ . . . . .	120
5.4	Diagrama de pesos $(\lambda + 1, 0)$ . . . . .	128
5.5	Diagrama de pesos $(\lambda, 0)$ . . . . .	130
5.6	Diagrama de pesos $(\lambda + 1, 0)$ mixto. . . . .	132
5.7	Correspondencia entre $(\lambda - 1, 1)$ y $(\lambda + 1, 0)$ . . . . .	134
5.8	Diagrama de pesos $(\lambda - 1, 1)$ . . . . .	135
5.9	Diagrama de pesos $(\lambda, 1)$ . . . . .	138
A.1	Dobletes y singuletes de los operadores en $SU(3)$ . . . . .	167
A.2	Octete de $F$ -spin . . . . .	168

# Lista de Tablas

3.1	Modelos algebraicos de la estructura nuclear. . . . .	31
3.2	Cuadruplete supersimétricos . . . . .	31
3.3	Acomodamiento de los coeficientes de las energías del cuadruplete supersimétrico . . . . .	33
3.4	Representaciones de las energías más bajas de un núcleo par-par donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu$ . . . . .	36
3.5	Representaciones de las energías más bajas de un núcleo con protón impar donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu$ . . . . .	40
3.6	Representaciones de las energías más bajas de un núcleo con neutrón impar donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\pi + \mathcal{N}_\nu$ . . . . .	43
3.7	Representaciones de las energías más bajas de un núcleo impar-impar donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ . . . . .	48
4.1	Coincidencia de los números cuánticos correspondientes a energías más bajas en el contexto de Supersimetría Nuclear en núcleos par-par y núcleos con neutrón impar donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ . . . . .	52
4.2	Coincidencia de los números cuánticos correspondientes a energías más bajas en el contexto de Supersimetría Nuclear en núcleos impar-impar y núcleos con protón impar donde $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\nu + \mathcal{N}_\pi$ . . . . .	52
4.3	Estructura algebraica de la función de onda . . . . .	58
4.4	Número de bosones y fermiones de los cuartetos supersimétricos de los núcleos Pt-Au y Os-Ir. . . . .	60
4.5	Operadores de creación y aniquilación en el $F$ -spin generalizado. . . . .	63
4.6	Operadores de transferencia en el $F$ -spin generalizado. . . . .	63
4.7	Factores Isoescalares de $SU(3)$ asociados a $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$ . . . . .	65
4.8	Factores Isoescalares de $SU(3)$ asociados a $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$ . . . . .	65
4.9	Factores Isoescalares en la transferencia de nucleones en el $F$ -spin generalizado asociados solo a estados simétricos . . . . .	84
4.10	Correlaciones de transferencias de nucleones . . . . .	85
4.11	Intensidades de la transferencia de un protón en el límite $Spin(6)$ para las transiciones desde par-par a protón impar y protón impar a par-par . . . . .	87
4.12	Intensidades de la transferencia de un protón en el límite $Spin(6)$ para las transiciones desde neutrón impar a impar-impar. . . . .	88
4.13	Intensidades relativas de la transferencia de un protón para las transiciones desde par-par $\Psi_{ee}$ a protón impar $\Psi_{op}$ . . . . .	89
4.14	Intensidades relativas de la transferencia de un protón para las transiciones desde neutrón impar $\Psi_{on}$ a impar-impar $\Psi_{oo}$ . . . . .	90
4.15	Comparación entre intensidades teóricas y experimentales de la reacción de transferencia ${}^{192}_{76}\text{Os}_{116}(\alpha, t){}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$ . . . . .	90
4.16	Intensidades relativas de la reacción de transferencia ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117} \rightarrow {}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$ . . . . .	91
4.17	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{195}_{78}\text{Au}_{116}$ . . . . .	91

4.18	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{196}_{79}\text{Au}_{117}$ . . . . .	92
4.19	Intensidades relativas de la tranferencia de un protón para las transiciones protón impar $\Psi_{\text{op}}$ a par-par $\Psi_{\text{ee}}$ . . . . .	93
4.20	Intensidades relativas de la tranferencia de un protón para las transiciones impar-impar $ \Psi_{\text{oo}}\rangle$ a neutrón impar $ \Psi_{\text{on}}\rangle$ . . . . .	94
4.21	Comparación entre intensidades teóricas y experimentales de la tranferencia de un nucleón de la reacción de tranferencia ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116} (t, \alpha) {}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$ . . . . .	95
4.22	Intensidades relativas de la tranferencia ${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117} \rightarrow {}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$ . . . . .	96
4.23	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{194}_{78}\text{Pt}_{116}$ . . . . .	98
4.24	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{195}_{78}\text{Pt}_{117}$ . . . . .	98
4.25	Intensidades de reacciones de tranferencia dos protones en el límite $Spin(6)$ para las transiciones entre núcleos par-par . . . . .	100
4.26	Intensidades de reacciones de tranferencia dos protones en el límite $Spin(6)$ para las transiciones entre núcleos con neutrón impar . . . . .	101
4.27	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{192}_{76}\text{Os}_{116}$ . . . . .	101
4.28	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{193}_{76}\text{Os}_{117}$ . . . . .	102
4.29	Intensidades de reacciones de tranferencia de dos protones entre núcleos con protón impar . . . . .	104
4.30	Intensidades de reacciones de tranferencia de dos protones entre núcleos impar-impar . . . . .	105
4.31	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{193}_{77}\text{Ir}_{116}$ . . . . .	106
4.32	Intensidades relativas de los estados de excitación del núcleo ${}^{194}_{77}\text{Ir}_{117}$ . . . . .	106
5.1	Estructura de las componentes $F$ y $Y$ de los estados $ (\lambda, \mu), F, F_z, Y\rangle$ en la representación irreducible $(\lambda, \mu)$ siendo $\lambda > \mu$ sobre los conntornos hexágonoales subsecuentes . . . . .	121
5.2	Factores Isoescalares de $SU(3)$ asociados a $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$ . . . . .	137
5.3	Recurrencia de los Factores Isoescalares de $SU(3)$ . . . . .	142
5.4	Factores Isoescalares de $SU(3)$ asociados a $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$ . . . . .	143
A.1	Valor de los operadores de escalón en el $F$ -spin (IBM-2). . . . .	166
A.2	Valor de los operadores de escalón en el $F$ -spin generalizado (SUSY). . . . .	167
A.3	Operadores de tranferencia en el $F$ -spin generalizado. . . . .	168
A.4	Correspondencia de los valores de las representaciones de $SO(6)$ y $SO(5)$ para algunos valores del acoplamiento $N_\pi = N - 1$ y $N_\nu = 1$ . . . . .	171

# Índice analítico

- Álgebra
  - $F$ -spin, 112
  - $U$ -spin, 112
  - $V$ -spin, 112
  - de Lie, 149
  - de Racah, 69
  - dinámica, 153
  - Generadora de espectro, 15
  - Supersimétrica, 28
  - Tensorial, 153–158
- Ángulos de Euler, 149
- Adición de dos momentos angulares, 159
- Bases Irreducibles, 151
- Cadena Algebraica
  - $U(12)$ , 54
  - $U(18)$ , 55
- Cadena Supersimétrica, 32
- Capas Nucleares , *ver* Modelo Nuclear, 10
- Clebsch-Gordan
  - Coefficientes, 111, 159
  - de  $SU(2)$ , 68
  - de  $SU(3)$ , 68
- Condición Condon-Shortley, 122
- Conmutadores de los operadores del  $F$ -spin, 164
- Convención de fase
  - Swart, 122
- Correlaciones
  - Transferencia de dos protones, 74–83
  - Transferencia de un protón, 66–74
  - Transferencias de nucleones, 86
- Espectro bajo Supersimétrico , 51
- Estructura Algebraica
  - $F$ -spin, 57
  - $F$ -spin generalizado, 57
- F-Spin
  - Generalizado, 53
  - en el IBM-2, 19
- Factor Isoescalar, 68, 121
- Factores Isoescalares
  - asociados  $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$ , 122
  - asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$ , 137
  - asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (0, 1)$  , 65
  - asociados a  $(\lambda, 0) \otimes (1, 0)$ , 65
  - Cálculo en  $F$ -spin, 123
- Factores Isoescalares de  $SU(3)$ , 111–143
- Fase de Swart , 122
- Función de onda
  - Superisométrica
    - Núcleos con neutrón impar, 42
    - Núcleos con protón impar, 38
    - Núcleos impar-impar, 45
    - Núcleos par-par, 35
- Funciones de onda
  - Bases de cuartetos supersimétricos, 86
- Gell-Mann, 111
- Generadores de grupo, 149
- Gota líquida , *ver* Modelo Nuclear, 9
- Grupo de Lie, 148
- Grupo de Rotaciones  $SO(3)$ , 158
- Grupo unitario  $SU(3)$ , 112
- GSA, *ver* Álgebra generadora de espectro, 15
- Hamiltoniano
  - Supersimétrico
    - General, 33
    - Núcleos con neutrón impar, 44
    - Núcleos impar-impar, 47
    - Núcleos con protón impar, 40
    - Núcleos par-par, 35
  - IBM-1, 16
- Iachello F., 14
- IBFM, 22

- IBM-1, *ver* Modelo Nuclear, 13
- IBM-2, *ver* Modelo Nuclear, 18
- IBM-3, 109
- Intensidades espectroscópicas, 86
- Intensidades espectroscópicas relativas, 89
- Interacciones colectivas, 11
- Invariancia de Lorentz, 147
- Invariantes
  - de Casimir, 151
- Isoespín Cadena, 112
  
- Lema de factorización de Racah, 121
  
- Modelo de Bosones Interactuantes 2, 18
- Modelo de Elliot, 112
- Modelo de Gell-Mann y Neeman, 112
- Modelo Nuclear
  - IBFM, 22
  - IBM-1, 13
  - IBM-3, 109
  - Modelo de Capas, 10
  - Piel de Neutrones, 110
  - SUSY, 25
  - Gas de Fermi, 9
  - Gota líquida, 9
  - IBM-2, 18
- Modelos de Bosones Interactuantes, 13
- Multipletes, 159
  
- Núcleo
  - Oblato, 13
  - Prolato, 13
- Números Mágicos, 11
- Ne'eeman, 111
- Nucleos deformados, 13
- Nucleos supersimétricos
  - impar-impar, 44
  - par-par, 34
  - protón impar, 38, 42
- Nucleos Supersimétricos, 60
  
- Operadores
  - de Casimir, 151
- Operadores de Majorana, 160–168
- Operadores de peso, 112
- Operadores Tensoriales, 155
- Operadores tensoriales de transferencia
  - $F$ -spin generalizado
    - dos protones, 63
    - un neutrón, 63
    - un protón, 63
    - un neutrón, 60, 108
    - un protón, 86
- Ortogonalidad de las funciones de onda, 133
  
- Piel de Neutrones, 110
  
- Reducción  $SO_B(6)$  a  $SO_B(5)$ , 170
- Reducción de  $U_B(6)$  a  $SO_B(6)$ , 168
- Reglas conmutación del  $F$ -spin generalizado, 113
- Reglas de Conmutación
  - IBM-1, 15
  - IBM-2, 19
- Representación Irreducible, 152
  - $(\lambda + 1, 0)$ , 122
  - $(\lambda, 1)$ , 138
  - $(\lambda, \mu)$ , 119
  - $(\lambda - 1, 1)$ , 132
- Representaciones de grupo, 152
- Roptura
  - Simetría dinámica, 153
  
- Símbolos de  $6j$ , 69
  - Valor especial, 69
- Simetría, 147
  - $SU(3)$ 
    - $F$ -spin, 111
    - en QCD, 111
    - Quarks, 111
    - SUSY, 111
  - de SUSY, 28
  - del IBM-1, 16
  - del IBM-2, 20
  - Rompimiento, 153
- Simetrías
  - de norma, 148
  - de permutación, 148
  - diámicas, 153
  - dinámicas, 148
  - espacio-tiempo, 148
  - geométricas, 148
- Sophus Lie, 147
- Subálgebra de grupo, 150
- Supersimetría Nuclear, 25
- Supersimetrías
  - dinámicas, 30
- Supersimetrías dinámicas
  - núcleos par-par, 34
  - Nucleos impar-impar, 44
  - Nucleos neutrón impar, 42

Nucleos protón impar, 38  
SUSY , *ver* Modelo Nuclear, 25

Teoría de grupos, 147

Teorema de Wigner Eckart, 157

Transferencia

de dos protones, 100–108

de un neutrón, 108

de un protón, 86–100

Transformaciones simétricas, 150

Triángulo de Casten, 13

Wess-Zumino

Lagrangiano, 27