



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

Haces vectoriales e índice de autointersección

TESIS

que para obtener el grado académico de:  
Matemático

P R E S E N T A:  
Francisco Heyser Ortiz

TUTOR:  
Dra. Laura Ortiz Bobadilla



2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de Datos del Jurado

### 1. Datos del alumno

Apellido Paterno: Heyser

Apellido Materno: Ortiz

Nombre: Francisco

Teléfono: 56179979

Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad: Facultad de Ciencias

Carrera: Matemáticas

No. de cuenta: 405028274

### 2. Datos del tutor

Grado: Dra.

Nombre(s): Laura

Apellido Paterno: Ortiz

Apellido Materno: Bobadilla

### 3. Datos del sinodal 1

Grado: Dr.

Nombre(s): Xavier

Apellido Paterno: Gómez-Mont

Apellido Materno: Ávalos

### 4. Datos del sinodal 2

Grado: Dr.

Nombre(s): José

Apellido Paterno: Seade

Apellido Materno: Kuri

### 5. Datos del sinodal 3

Grado: Dr.

Nombre(s): Adolfo

Apellido Paterno: Guillot

Apellido Materno: Santiago

6. Datos del sinodal 4

Grado: Dra.

Nombre(s): Adriana

Apellido Paterno: Ortiz

Apellido Materno: Rodríguez

7. Datos del trabajo escrito

Título: Haces vectoriales e índice de autointersección

No. de páginas:

Año: 2010

# Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que me ayudaron a concluir este trabajo y realizar mis sueños, a mis amigos, mis hermanos y mi madre. A todos mis profesores, en especial a Ernesto Rosales González y mi tutora Laura Ortiz Bobadilla: sin su ejemplo, inspiración y constante apoyo jamás hubiera logrado llegar a donde quiero.

Esta tesis se realizó con el apoyo del programa PAPIIT-DGAPA IN103010 y Becanet Superior de la SEP.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. El Teorema de Poincaré</b>	<b>3</b>
1.1. Equivalencia formal y analítica . . . . .	3
1.2. El teorema analítico de Poincaré . . . . .	20
<b>2. Explosión de puntos dicríticos</b>	<b>29</b>
2.1. Construcción de la explosión . . . . .	30
2.2. Campos dicríticos . . . . .	33
2.3. El índice de Camacho-Sad . . . . .	40
<b>3. Haces Vectoriales</b>	<b>45</b>
3.1. Teoría local: sistemas lineales . . . . .	46
3.2. Haces vectoriales sobre variedades . . . . .	48
3.3. Clasificación de haces lineales en $\mathbb{P}^1$ . . . . .	56
<b>4. Secciones y conexiones</b>	<b>61</b>
4.1. Secciones meromorfas . . . . .	61
4.2. La derivada covariante . . . . .	67
4.3. Conexiones sobre haces vectoriales . . . . .	70
<b>5. El Teorema de Savelev</b>	<b>79</b>
5.1. Preliminares al teorema de Savelev . . . . .	80
5.2. Demostración del teorema de Savelev . . . . .	82

<b>6. Foliaciones dicríticas genéricas</b>	<b>87</b>
6.1. La construcción de Loray . . . . .	88



# Introducción

El término “*ecuación diferencial*” fue propuesto por Leibnitz en 1676 y los primeros estudios de estos nuevos objetos tuvieron lugar a finales del siglo XVII bajo la forma de problemas de geometría y mecánica. Las ecuaciones diferenciales surgen en diversas áreas de la ciencia y tecnología, son empleadas extensamente en física, química y biología. Por muchos años las ecuaciones diferenciales se han desarrollado como un objeto del análisis matemático real, sin embargo, en esencia, éstas son objetos geométricos. La así llamada “*teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales*” tuvo su comienzo a finales del siglo XIX con el trabajo de Lyapunov y de Poincaré. Este último utilizó ampliamente métodos geométricos, tratando a las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales como curvas en un espacio apropiado. Desde entonces, la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se encuentra en una región donde se intersecan diversas áreas de la matemática: el análisis real y complejo, la topología diferencial y algebraica, la geometría y la teoría de singularidades. Teniendo lo anterior en mente, es un tanto natural que en el desarrollo de este trabajo se introduzca el análisis de series formales y analíticas de campos vectoriales para después pasar por la explosión de singularidades, los haces vectoriales y conexiones sobre estos, para llegar al *teorema de Savelev* (1982) y sus aplicaciones al estudio de gérmenes de ecuaciones diferenciales dicríticas en  $(\mathbb{C}, 0)$ .



# Capítulo 1

## El Teorema de Poincaré

En este capítulo se introducen conceptos como equivalencia formal y analítica de campos vectoriales, de esta manera, será posible observar que la información que proporciona la forma formal normal (que definiremos más adelante) de un campo vectorial, bajo ciertas condiciones, es suficiente para clasificarlo de manera analítica en una vecindad de un punto singular.

### 1.1. Equivalencia formal y analítica

**Definición 1.1** (Campo vectorial). Dada una variedad  $M$ , un campo vectorial es una aplicación

$$v : M \rightarrow TM,$$

tal que a cada punto  $p \in M$  le asocia un vector  $v(p) \in T_pM$ . Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  al conjunto de campos vectoriales definidos sobre  $M$ .

En otras palabras, un campo vectorial consiste en una enxada de funciones  $(v_1, \dots, v_n)$  con

$$v_j : M \rightarrow TM.$$

Decimos que el campo es holomorfo si cada  $v_j$  lo es.

**Definición 1.2** (Punto singular). Dado un campo vectorial  $v \in \mathfrak{X}(M)$ , un *punto singular* de  $v$  es aquel que satisface  $v(p) = 0$ .

Cada campo vectorial holomorfo definido sobre  $M$  tiene asociada una ecuación diferencial holomorfa, si  $z = (z_1, \dots, z_n)$  son coordenadas locales, ésta queda definida como sigue:

$$\frac{dz}{dt} = \cdot z = v(z), \tag{1.1}$$

donde,

$$\frac{dz_j}{dt} = v_j(z_1, \dots, z_n). \tag{1.2}$$

Si consideramos un abierto  $U \subset \mathbb{C}$ , una solución de la ecuación 1.1 es una función  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  que satisface:

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = v(\varphi(t)),$$

es decir, en cada punto, el campo vectorial es tangente a  $\varphi(U)$ .

Por el teorema de existencia y unicidad ([3], pág. 2) para cualquier ecuación diferencial holomorfa 1.1 y cualquier condición inicial  $(t_0, p) \in U \times M$ , con  $p = (p_1, \dots, p_n)$  existe un polidisco

$$D_\varepsilon = \{|t - t_0| < \varepsilon, |z_j - p_j| < \varepsilon\} \subset U \times M$$

suficientemente pequeño, tal que la solución  $\varphi$  existe y es única.

Si a cada punto de  $p \in M$  le asociamos la recta compleja generada por  $v(p)$  obtenemos el campo de direcciones de  $v$  en donde no importa la “*velocidad*”, es decir la longitud del vector.

**Definición 1.3** (Foliación estándar). Sea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : |x| < 1, |y| < 1\}$  el *polidisco estándar*. La *foliación estándar* de dimensión  $n$  (de codimensión  $m$ ) es la representación de  $D$  como la unión ajena de discos  $n$ -dimensionales  $\mathcal{L}_y$ , llamados *hojas*,

$$D = \bigsqcup_{|y| < 1} \mathcal{L}_y, \text{ donde } \mathcal{L}_y = \{|x| < 1\} \times \{y\} \subset D.$$

**Definición 1.4** (Foliación holomorfa). Sea  $M$  una variedad holomorfa de dimensión  $n+m$ . Una partición  $M = \bigsqcup_{\alpha} \mathcal{L}_{\alpha}$  es una *foliación holomorfa* de dimensión  $n$  (de codimensión  $m$ ) de la variedad  $M$  si:

- (1) Cada *hoja*  $\mathcal{L}_{\alpha}$  es conexa.
- (2) Para todo punto  $p \in M$  existe una vecindad  $U_p$  del punto y un biholomorfismo  $h_p : U_p \rightarrow D$ , donde  $D$  es el polidisco estándar, tal que, la imagen bajo  $h_p$  de cada componente conexa de  $\mathcal{L}_{\alpha} \cap U_p$  corresponde con una hoja de la foliación estándar de  $D$ , para toda  $\alpha$  existe un conjunto  $Y(\alpha)$  tal que:

$$h_p(\mathcal{L}_{\alpha} \cap U_p) = \bigsqcup_{y \in Y(\alpha)} \mathcal{L}_y.$$

En otras palabras, localmente, es posible rectificar la partición que hicimos de  $M$ .

Es importante notar que las distintas componentes conexas de  $\mathcal{L}_{\alpha} \cap U_p$  para una  $\alpha$  fija pertenecen a la misma hoja, esta cantidad de componentes puede ser, incluso, no numerable y globalmente la foliación puede tener un comportamiento bastante complicado.

Por otra parte, gracias al teorema de existencia y unicidad ([3], pág. 2), es fácil ver que si  $M$  es una variedad holomorfa, entonces un campo vectorial  $v \in \mathfrak{X}(M)$  define automáticamente una foliación, dado que, localmente, por cada punto pasa una única curva integral

## 1.1. EQUIVALENCIA FORMAL Y ANALÍTICA

---

de 1.1 y por el teorema de rectificación ([3], pág. 11) se satisface la segunda condición de la definición 1.4. Denotaremos por  $\mathcal{F}_v$  a la foliación inducida por el campo vectorial  $v$ ,  $\mathcal{F}_v$  tendrá por hojas a cada curva integral del campo.

**Definición 1.5** (Equivalencia analítica). Dos campos vectoriales  $\dot{z} = v(z)$  y  $\dot{z} = w(z)$ , con  $z \in \mathbb{C}$ , son *analíticamente equivalentes* si existe un *biholomorfismo*  $H$  tal que:

$$H(\varphi_v(z)) = \varphi_w(H(z)), \quad (1.3)$$

donde  $\varphi_v$  y  $\varphi_w$  denotan soluciones de  $\dot{z} = v(z)$  y  $\dot{z} = w(z)$  respectivamente.

Como  $\varphi_v$  es solución  $\frac{\partial \varphi_v}{\partial t} = v(\varphi_v(t, z))$ , derivando (1.3) respecto a  $t$  y evaluando en  $t_0 = 0$ , se sigue que:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}(t, z) \right|_{t_0=0} = \left. \frac{\partial \varphi_w}{\partial t}(t, H(z)) \right|_{t_0=0}$$

de donde,

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot v(z) = w(H(z))$$

que es equivalente a:

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot v(H^{-1}(z)) = w(z) \quad (1.4)$$

**Definición 1.6** (Equivalencia Formal). Dos campos vectoriales  $\dot{z} = v(z)$  y  $\dot{z} = w(z)$ , con  $z \in \mathbb{C}$ , son *formalmente equivalentes* si existe una serie formal

$$H(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

tal que, se satisface la igualdad formal:

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot v(z) = w(H(z)) \quad (1.5)$$

**Proposición 1.7.** Si  $H_r(z) = z + h_r z^r$  entonces  $H_r^{-1} = z - h_r z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})$ .

*Demostración.* Sea  $H_r^{-1} = z + h_s z^s + \mathcal{O}(z^m)$ , donde  $m > s$  para alguna  $s \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} z &= H^{-1}(H(z)) \\ &= z + h_r z^r + h_s (z + h_r z^r)^s + \mathcal{O}((z + h_r z^r)^m) \\ &= z + h_r z^r + h_s z^s + h_s h_r z^{s+r-1} + \mathcal{O}(z^{k+r}) + \mathcal{O}(z^m) \\ &= z + h_r z^r + h_s z^s + \mathcal{O}(z^{s+r-1}) \end{aligned}$$

Entonces  $s = r$  y  $h_s = -h_r$  y por lo tanto  $H_r^{-1} = z - h_r z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})$ .

□

Un hecho inmediato es que, si dos campos vectoriales  $v$  y  $w$  son analíticamente equivalentes, entonces las foliaciones correspondientes  $\mathcal{F}_v$  y  $\mathcal{F}_w$  también serán equivalentes en el sentido analítico.

Las definiciones de equivalencia formal y analítica se extienden de manera natural a campos en  $\mathbb{C}^n$ .

**Ejemplo 1.8.** Sea  $\dot{z} = v(z)$  con  $v(z) = a_1 z + a_k z^k$ ,  $k \geq 2$ . ¿Es  $v$  analíticamente equivalente a  $w(z) = a_1 z$ ? ¿Es  $v$  formalmente equivalente a  $w(z) = a_1 z$ ?

Para resolver este problema es necesario probar que se puede eliminar el monomio  $a_k z^k$ , sin embargo, al hacerlo mediante un polinomio  $H_k(z) = z + h_k(z)z^k$ , modificamos el campo de vectores  $v$  por un campo  $v_{k+1}$  que posee la misma parte lineal que el campo

original  $v(z)$  y una infinidad de monomios de orden mayor que  $k$ . En efecto, la composición  $DH_k \cdot v(H_k^{-1}(z))$  es necesariamente (por la proposición 1.7) una serie formal.

Así, para resolver el problema, necesitamos probar que no existen obstrucciones para ir eliminando monomio a monomio los términos no lineales.

Sea  $H_r(z) = z + h_r z^r$ , por la prop. 1.7 se tiene que  $H^{-1} = z - h_r z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})$ . En general, sea  $v_r(z) = a_1 z + a_r z^r + \dots$ , para ir eliminando cada término no lineal de  $v_r(z)$  es necesario pedir que  $DH_r \cdot v_r(H_r^{-1}(z)) = v_m(z)$  con  $m \geq r + 1$ .

$$\begin{aligned} DH_r \cdot v(H_r^{-1}(z)) &= \\ &= DH_r \cdot (a_1 H_r^{-1} + a_r (H_r^{-1})^r) \\ &= (1 + r h_r z^{r-1})(a_1 [z - h_r z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})] \\ &\quad + a_r [z - h_r z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})]^r) \\ &= (1 + r h_r z^{r-1})(a_1 z - a_1 h_r z^r + a_r z^r - a_r h_r z^{r-1} z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})) \\ &= a_1 z + (a_r - a_1 h_r + r a_1 h_r) z^r + \mathcal{O}(z^{2r-1}) \end{aligned}$$

Basta pedir que  $a_r + a_1 h_r (r - 1) = 0$ , es decir,  $h_r = \frac{-a_r}{a_1(r-1)}$ , de esta forma:

$$DH_r \cdot v(H_r^{-1}(z)) = a_1 z + \mathcal{O}(z^{2r-1}) = a_1 z + a_{2r-1} z^{2r-1} + \dots$$

Así, se construye la sucesión formal  $H$  definida por:

$$H = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n \circ \dots \circ H_{k+1} \circ H_k$$

donde  $H_s = Id$  si el coeficiente  $a_s$  correspondiente al monomio de grado  $s$  es cero.

**Observación 1.9.** Cada paso está dado por un polinomio con parte lineal distinta de cero, por lo que su inversa también es analítica en una vecindad del origen (por el teorema de la función inversa), de este modo toda composición finita de las  $H_j$  es analítica.



Cabe observar que incluso si sólo eliminamos un número finito de términos, entonces  $v(z)$  analíticamente equivalente a  $a_1z + a_{r+1}z^{r+1} + \dots$  mediante un polinomio dado por  $H_r \circ \dots \circ H_k$  y es formalmente equivalente a su parte lineal  $a_1z$  mediante  $H$ ; más aún, si  $H$  converge, se tiene que la equivalencia se da en el sentido analítico.

Cuando, como en el ejemplo anterior, hemos podido llevar a una ecuación diferencial  $\dot{z} = v(z)$ , mediante cambios formales, a una expresión que es, en cierto sentido, lo más sencilla posible, decimos que ésta es su *forma normal formal*. Si además estos cambios son analíticos, decimos que la forma normal es analítica.

**Ejemplo 1.10.** Sea  $\dot{z} = v(z)$  con  $v(z) = z^k + a_m z^m$ ,  $m > k$ . Sea  $H_s(z) = z - h_s z^s$ , entonces  $DH_s = 1 - sh_s z^{s-1}$  y por la proposición 1.7 se tiene que  $H_s^{-1} = z - h_s z^s + \mathcal{O}(z^{2s-1})$ . Siguiendo un procedimiento análogo al del Ejemplo 1.8:

$$\begin{aligned} DH_s \cdot v(H_s^{-1}(z)) &= DH_s \cdot ([z - h_s z^s + \mathcal{O}(z^{2s-1})]^k + a_m [z - h_s z^s + \mathcal{O}(z^{2s-1})]^m) \\ &= (1 - sh_s z^{s-1})(z^k - kh_s z^{k-i} z^s + \dots + a_m z^m \\ &\quad + \mathcal{O}(z^{k+2s-2}) + \mathcal{O}(z^{m+s-1})) \\ &= z^k - kh_s z^{k+s-1} + sh_s z^{k+s-1} + a_m z^m \\ &\quad + \mathcal{O}(z^{k+2s-2}) + \mathcal{O}(z^{m+s-1}) \\ &= z^k + (s-k)h_s z^{k+s-1} + a_m z^m + \mathcal{O}(z^{k+2s-2}) + \mathcal{O}(z^{m+s-1}) \end{aligned}$$

Como se desea eliminar el término  $a_m z^m$  y tener solamente términos de orden mayor que  $m$  entonces  $m \leq k + s - 1$ , además es claro que  $k + s - 1 < k + 2s - 2$  y  $k + s - 1 < m + s - 1$ . Suponiendo que  $a_m \neq 0$ , entonces es necesario que  $m = k + s - 1$  y  $a_m = (s - k)h_s$ . De esta manera:

$$h_s = \frac{-a_m}{s - k} = \frac{-a_m}{m - 2k + 1} \text{ Si } m \neq 2k - 1.$$

Así, es posible eliminar el término de orden  $m$  siempre que  $m \neq$

## 1.1. EQUIVALENCIA FORMAL Y ANALÍTICA

---

$2k - 1$ . Por consiguiente, la forma normal formal para  $v(z) = z^k + a_m z^m$  es:

$$\dot{z} = z^k + bz^{2k-1}.$$

Las definiciones de equivalencia analítica y equivalencia formal, así como la proposición 1.7 y la noción de forma normal formal, se extienden de manera natural al caso en  $\mathbb{C}^n$ .

Al analizar ecuaciones diferenciales definidas por campos vectoriales en  $(\mathbb{C}^0)$ ,  $n \geq 2$ , se observa un fenómeno nuevo que pasa desapercibido en una variable. A saber, la posición en el plano complejo que ocupan los valores propios de la parte lineal del campo en el punto singular es determinante para que exista o no una obstrucción para linealizar formalmente (y analíticamente) una ecuación diferencial.

**Definición 1.11** (Resonancia). Una colección  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  es *resonante* si existe un multi-índice  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , con  $m_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y que  $|m| = m_1 + \dots + m_n \geq 2$  tal que  $\lambda_j = \langle m, \lambda \rangle$  para alguna  $j = 1, \dots, n$ .

Al monomio  $a_m z^m$ , donde  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , con  $m_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ , es tal que  $\lambda_j = \langle m, \lambda \rangle$  para alguna  $j = 1, \dots, n$ , se le denomina *monomio resonante* o *resonancia*.

En consecuencia directa de la definición 1.11, las colecciones  $\lambda \in \mathbb{C}^2$  que no tienen resonancias son las de la forma  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  tales que  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Q}$ ; las que tienen un número finito de resonancias satisfacen  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}^+$  y, finalmente, las que presentan una infinidad de resonancias satisfacen  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}^-$ .

El siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales un campo vectorial holomorfo en  $\mathbb{C}^n$  es formalmente equivalente a su parte lineal.

**Teorema 1.12** (Poincaré). Todo campo vectorial  $\dot{z} = v(z) = Az + \dots$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$  y  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  no resonante (donde  $\lambda_j$  es el  $j$ -ésimo valor propio de  $A$ ) es formalmente equivalente a su parte lineal  $w(z) = Az$ .

Se probará el teorema para el caso donde  $A$  es una matriz diagonal.

*Demostración.* Sea  $A$  una matriz diagonal y  $H_m(z) = z + h_m(z)$  con  $h_m(z)$  un polinomio homogéneo de grado  $m$ . Sin pérdida de generalidad sea  $v_m(z) = (0, \dots, a_{j,m}z^m, \dots, 0)^t$ , así  $h_m(z) = (0, \dots, h_{j,m}z^m, \dots, 0)^t$ , donde  $z^m = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$ ,  $M^t$  es  $M$  transpuesta. Además, por la proposición 1.7 :

$$H_m^{-1} = z - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ h_{j,m}z^m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathcal{O}(z^{qm-1}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} .$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
 & DH_m \cdot v(H_m^{-1}) \\
 &= DH_m \cdot \left( Az + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (a_{j,m} - \lambda_j h_{j,m})z^m + \mathcal{O}(z^{2m-1}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= Az + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ (a_m - \lambda_j h_{j,m})z^m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \langle m, \lambda \rangle h_{j,m} z^m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathcal{O}(z^{2m-1}) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para eliminar el término  $z^m$  es necesario que  $a_m - \lambda_j h_{j,m} = -\langle m, \lambda \rangle h_{j,m}$ , es decir:

$$h_{j,m} = \frac{a_m}{\lambda_j - \langle m, \lambda \rangle}. \quad (1.6)$$

Como  $\lambda$  es no resonante, entonces siempre es posible definir los  $h_{j,m}$ . Por lo tanto, el campo  $v(z)$  es formalmente equivalente a su parte lineal.

□

**Teorema 1.13** (Poincaré-Dulac). Todo campo vectorial  $\dot{z} = v(z) = Az + \dots$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$  y  $A \neq 0$  es formalmente equivalente a un campo  $w(z) = Az + w_1(z)$ , donde  $w_1(z)$  está formado por los monomios resonantes.

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema 1.12 y consiste simplemente en eliminar todos los monomios no resonantes. Los monomios que no pueden ser eliminados por ser resonantes forman parte de  $w_1(z)$ . □

La teoría de formas normales para difeomorfismos es espejo de la teoría de formas normales de campos vectoriales. Para difeomorfismos, las definiciones de equivalencia formal y analítica, así como la de resonancia, se expresan como se indica a continuación.

**Definición 1.14** (Equivalencia Analítica). Dos difeomorfismos  $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$  y  $g(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots$  son (localmente) *analíticamente equivalentes* si existe un biholomorfismo  $H$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}, 0) \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

**Definición 1.15** (Resonancia multiplicativa). Una colección  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  es *resonante multiplicativamente* si  $\lambda_j = \lambda^m$  para alguna  $m = (m_1, \dots, m_n)$ , donde  $m_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  y  $|m| \geq 2$ .

**Teorema 1.16** (Poincaré para difeomorfismos). Sea  $f(z) = Az + f_m(z) + \dots$ , donde  $A$  una matriz diagonal. Si el espectro  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de  $A$  no es resonante multiplicativamente, entonces  $f$  es formalmente equivalente a  $g(z) = Az$ .

*Demostración.* Sea  $H_m(z) = z + h_m(z)$  con  $h_m(z)$  un polinomio homogéneo de grado  $m$ . Sin pérdida de generalidad sea  $f_m(z) = (0, \dots, a_{j,m}z^m, \dots, 0)$ , así  $h_m(z) = (0, \dots, h_{j,m}z^m, \dots, 0)$ , donde  $z^m = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}$ .

Así,  $H_m(z) = z + h_m(z)$ . Ahora:

$$\begin{aligned}
 H_m \circ f \circ H_m^{-1} &= H_m(f(z - h_m(z) + \mathcal{O}(z^{2m-1}))) \\
 &= H_m(Az - Ah_m(z) + f_m(z - h_m(z)) + \mathcal{O}(z^{2m-1})) \\
 &= Az - Ah_m(z) + f_m(z - h_m(z)) \\
 &\quad + h_m(Az - \dots) + \mathcal{O}(z^{2m-1}) \\
 &= Az - Ah_m(z) + h_m(Az) + f_m(z) + \mathcal{O}(z^{2m-1})
 \end{aligned}$$

Como se desea que la igualdad  $H_m \circ f \circ H_m^{-1} = Az + \mathcal{O}(z^{2m-1})$  se satisfaga, es necesario pedir que:

$$h_m(Az) - Ah_m(z) + f_m(z) = 0$$

Cabe observar que:

$$\begin{aligned}
 h_m(Az) &= (0, \dots, h_{j,m} \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}) \\
 Ah_m(z) &= (0, \dots, \lambda_j h_{j,m} z^m, \dots, 0) \\
 f_m(z) &= (0, \dots, a_{j,m} z^m, \dots, 0)
 \end{aligned}$$

De esta forma, la condición  $h_m(Az) - Ah_m(z) + f_m(z) = 0$  implica que:

$$h_{j,m}(\lambda^m - \lambda_j) + a_{j,m} = 0,$$

que lleva a la ecuación:

$$h_{j,m} = \frac{a_{j,m}}{\lambda_j - \lambda^m}$$

Por hipótesis no había resonancias multiplicativas, por lo tanto los coeficientes  $h_{j,m}$  siempre están bien definidos.

□

Cuando la parte lineal del campo vectorial es nula, el teorema de Poincaré para campos de vectores ya no es aplicable. En dimensión mayor que uno el problema de hallar la forma normal formal de un campo de vectores fue catalogado como “*hopelessly complicated*” (ver [3], p. 40) y sólo recientemente fueron obtenidos en los casos *dicrítico* y *no dicrítico* ([7] y [8]) para dimensión dos. Sin embargo para campos vectoriales 1-dimensionales sin parte lineal sí es posible obtener una forma normal formal (y analítica), como se verá en el teorema 1.18. Antes de enunciar dicho teorema haremos una observación que será de utilidad.

**Observación 1.17** (Sobre el teorema de la función implícita). Suponiendo que  $\Phi$  es analítica y  $(z(t), w(t))$  parametriza una curva de nivel de  $\Phi$ , es decir  $\Phi(z(t), w(t)) = c$  entonces derivando respecto a  $t$  se tiene:

$$\frac{d}{dt}\Phi(z(t), w(t)) = \Phi_z \cdot \frac{dz}{dt} + \Phi_w \frac{dw}{dt} = 0$$

Despejando:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\Phi_z}{\Phi_w}$$

Si  $\Phi_w \neq 0$  por el teorema de existencia y unicidad ([1], pág. 213) existe una única solución analítica  $w = w(z)$  de la ecuación tal que  $\Phi(z, w(z)) = c$ .

**Teorema 1.18.** Sea  $\dot{z} = u(z) = z^k + b_1 z^{k+1} + \dots$ ,  $k \leq 1$  un campo vectorial analítico con singularidad degenerada en el origen, entonces  $u$  es analíticamente equivalente (localmente) a:

$$w(z) = z^k + ax^{2k-1} \text{ para alguna } a.$$

## 1.1. EQUIVALENCIA FORMAL Y ANALÍTICA

---

*Demostración.* Sea  $v(z) = z^k + az^{k2k-1} + \mathcal{O}(z^{2k})$ , por el ejemplo 1.10 es posible llevar al campo  $u$  en  $v$  mediante campos analíticos. Entonces basta probar que  $v$  es analíticamente equivalente a  $w$ . Considerando que:

$$\frac{1}{v(z)} = \frac{1}{z^k(1 + az^{k-1} + \mathcal{O}(z^k))} = \frac{1}{z^k}(1 - az^{k-1} + \mathcal{O}(z^{2k-2})),$$

entonces:

$$\frac{1}{v(z)} = \frac{1}{z^k} - \frac{a}{z} + f(z), \text{ con } f(z) \text{ una función analítica.} \quad (1.7)$$

Análogamente:

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{1}{z^k} - \frac{a}{z} + g(z), \text{ con } g(z) \text{ una función analítica.} \quad (1.8)$$

Es necesario encontrar  $H(z) = zh(z)$  analítica con  $H(0) = 0$  y  $H'(0) = 1$  tal que  $H'(v(z)) = w(H(z))$ , es decir:

$$\frac{H'(z)}{w(H(z))} = \frac{1}{v(z)}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior 1.7 y 1.8:

$$H'(z) \left( \frac{1}{H(z)^k} - \frac{a}{H(z)} + g(H(z)) \right) = \frac{1}{z^k} - \frac{a}{z} + f(z)$$

Integrando de  $c$  a  $z$ :



$$\begin{aligned}
 0 &= \int_c^z H'(\xi) \left( \frac{1}{H(\xi)^k} - \frac{a}{H(\xi)} + g(H(\xi)) \right) d\xi \\
 &\quad - \int_c^z \left( +\frac{1}{\xi^k} - \frac{a}{\xi} + f(\xi) \right) d\xi \\
 &= \int_{H(c)}^{H(z)} \left( \frac{1}{\xi^k} - \frac{a}{\xi} + g(\xi) \right) d\xi + \int_c^z \left( -\frac{1}{\xi^k} + \frac{a}{\xi} - f(\xi) \right) d\xi \\
 &= \int_{H(c)}^{H(z)} \left( \frac{1}{\xi^k} - \frac{a}{\xi} + g(\xi) \right) d\xi + \int_c^z \left( -\frac{1}{\xi^k} + \frac{a}{\xi} - f(\xi) \right) d\xi \\
 &= \int_{H(c)}^c \left( \frac{1}{\xi^k} - \frac{a}{\xi} \right) d\xi + \int_c^z \left( \frac{1}{\xi^k} - \frac{a}{\xi} \right) d\xi + \int_z^{H(z)} \left( \frac{1}{\xi^k} - \frac{a}{\xi} \right) d\xi \\
 &\quad + \int_{H(c)}^{H(z)} g(\xi) d\xi + \int_c^z \left( \frac{a}{\xi} - \frac{1}{\xi^k} \right) d\xi - \int_c^z f(\xi) d\xi \\
 &= a \ln \frac{H(c)}{H(z)} \cdot \frac{z}{c} + \int_z^{H(z)} \frac{1}{\xi^k} d\xi - \int_c^{H(c)} \frac{1}{\xi^k} d\xi \\
 &\quad + \int_{H(c)}^{H(z)} g(\xi) d\xi - \int_c^z f(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

Como  $H(z) = zh(z)$  entonces:

$$\begin{aligned}
 0 &= a \ln \frac{h(c)}{h(z)} + \int_z^{H(z)} \frac{1}{\xi^k} d\xi - \int_c^{H(c)} \frac{1}{\xi^k} d\xi \\
 &\quad + \int_{H(c)}^{H(z)} g(\xi) d\xi - \int_c^z f(\xi) d\xi = I(c) \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Por otro lado usando que  $h(0) = 1$ , entonces  $h(0) = 1 + \alpha c + \dots$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_c^{H(c)} \frac{1}{\xi^k} d\xi &= \frac{1}{k-1} \left( \frac{1}{c^{k-1}} - \frac{1}{H(c)^{k-1}} \right) \\
 &= \frac{1}{k-1} \left( \frac{1}{c^{k-1}} - \frac{1}{c^{k-1}h(c)^{k-1}} \right) \\
 &= \frac{1 - h(c)^{k-1}}{(k-1)c^{k-1}h(c)^{k-1}} \\
 &= \frac{1 - (1 + \alpha c + \dots)^{k-1}}{(k-1)c^{k-1}h(c)^{k-1}} \\
 &= \frac{1 - 1 + \alpha^{k-1}c^{k-1} + \mathcal{O}(c^k)}{(k-1)c^{k-1}h(c)^{k-1}} \\
 &= \frac{\alpha^{k-1} + \mathcal{O}(c^k)}{(k-1)h(c)^{k-1}}.
 \end{aligned}$$

Así, queda claro que:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{H(c)} \frac{1}{\xi^k} d\xi = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\alpha^{k-1} + \mathcal{O}(c^k)}{(k-1)h(c)^{k-1}} = \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)} = \beta.$$

Entonces, tomando el límite cuando  $c \rightarrow 0$  de la ecuación 1.9 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 0 = \lim_{c \rightarrow 0} I(c) &= \int_z^{zh(z)} \frac{1}{\xi^k} d\xi + \int_0^{zh(z)} g(\xi) d\xi \\
 &\quad - \int_0^z f(\xi) d\xi - a \ln h(z) - \beta. \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

Definamos una transformación  $\Phi(z) = \Phi(z, h) = z^{k-1}\Phi_0(z, h)$ , donde:

$$\Phi_0(z, h) = \int_z^{zh} \frac{1}{\xi^k} d\xi + \int_0^{zh} g(\xi) d\xi - \int_0^z f(\xi) d\xi - a \ln h - \beta,$$

de esta forma, tenemos la siguiente expresión para la derivada de  $\Phi$  con respecto a  $h$ :

$$\begin{aligned} \Phi_h &= \frac{\partial}{\partial h} (z^{k-1}\Phi_0) \\ &= z^{k-1} \frac{\partial}{\partial h} \left( \int_z^{zh} \frac{1}{\xi^k} d\xi + \int_0^{zh} g(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^z f(\xi) d\xi - a \ln h(z) - \beta \right) \\ &= z^{k-1} \left( \frac{z}{(zh)^k} - \frac{a}{h} + g(zh) \cdot z \right) \text{ y, por la ec.1.8,} \\ \phi_h &= \frac{z^k}{w(zh)} = \frac{1}{h^k + az^{k-1}h^{2k-1}} \neq 0 \end{aligned}$$

Por la observación 1.17 existe  $h(z)$  analítica tal que  $\Phi(z, h(z)) = 0$ , luego  $H(z) = zh(z)$  es analítica. Se sigue que  $u(z) = z^k + b_1 z^{k+1} + \dots$  es analíticamente equivalente a  $w(z) = z^k + az^{2k-1}$ .

□

## 1.2. El teorema analítico de Poincaré

Por sorprendente que pueda parecer, las condiciones para que un campo vectorial analítico en  $(\mathbb{C}^n)$  sea localmente, analíticamente equivalente a su parte lineal recaen nuevamente en al espectro de la parte lineal de la ecuación. A la condición de no resonancia de los

## 1.2. EL TEOREMA ANALÍTICO DE POINCARÉ

---

valores propios de la parte lineal del campo se le añade una condición (que recae también sobre éstos) que garantiza que los denominadores en 1.6 estén alejados del cero.

Antes enunciar el teorema de Poincaré introducimos algunos conceptos que nos serán de utilidad

**Definición 1.19** (Dominio de Poincaré). Si el espectro  $\lambda$  de una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es tal que  $0 \notin \text{conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , donde  $\text{conv}\{\lambda_i\}$  denota al casco convexo del conjunto  $\{\lambda_i\}$ , entonces se dice que  $\lambda$  está en el *dominio de Poincaré* y se denota:  $\lambda \in \mathcal{P}$ .

**Definición 1.20** (Dominio de Siegel). Si el espectro  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es tal que  $0 \in \text{conv}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , entonces se dice que  $\lambda$  está en el *dominio de Siegel* y se denota:  $\lambda \in \mathcal{S}$ .

**Definición 1.21** (Operador mayorante). Sea  $\mathbb{C}[[z]]$  el espacio de las series formales,  $z \in \mathbb{C}^n$ . El *operador mayorante* es  $\mu$  donde  $\mu : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$  está definido por:

$$\mu : f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z^\alpha \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |c_\alpha| z^\alpha$$

**Definición 1.22** (Norma mayorante). Sea  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ . La *norma  $\rho$ -mayorante*  $\|\cdot\|_\rho$  es el funcional en  $\mathbb{C}[[z]]$  definido de la siguiente manera: Si  $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z^\alpha$

$$\|f\|_\rho = \begin{cases} \sup_{z: |z_j| < \rho_j} |\mu f(z)| & \text{si la serie de } f \text{ converge,} \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil probar que  $\|\cdot\|_\rho$  efectivamente es una norma y que si  $f \in \mathbb{C}^n[[z]]$ , es decir  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , entonces:

$$\|f\|_\rho = \|f_1\|_\rho + \dots + \|f_n\|_\rho$$

Denotaremos  $\mathcal{B}_\rho = \{f \in \mathbb{C}[[z]] \text{ tales que } \|f\|_\rho < \infty\}$ .

**Lema 1.23.**  $\mathcal{B}_\rho$  con la norma  $\rho$ -mayorante es un espacio completo.

*Demostración.* Sea  $(f_\lambda)$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{B}_\rho$ , donde

$$f_\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha(\lambda) z^\alpha.$$

Entonces, para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $N(\varepsilon)$  tal que si  $\lambda, \nu \geq N$  entonces:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \|f_\lambda - f_\nu\|_\rho && (1.11) \\ &= \sup_{|z| < \rho} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |c_\alpha^{(\lambda)} - c_\alpha^{(\nu)}| z^\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |c_\alpha^{(\lambda)} - c_\alpha^{(\nu)}| \rho^\alpha. \end{aligned}$$

Como  $\rho^\alpha = \rho_1^{\alpha_1} \dots \rho_n^{\alpha_n} \neq 0$ , tenemos que:

$$|c_\alpha^{(\lambda)} - c_\alpha^{(\nu)}| < \frac{\varepsilon}{\rho^\alpha}, \quad \text{para toda } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

De esta manera, para cada  $\alpha$  fija,  $(c_\alpha^{(\lambda)})$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathbb{C}$  y por lo tanto converge a un número  $c_\alpha$ . Sea

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z^\alpha,$$

que claramente está en  $\mathbb{C}[[z]]$ . Dado  $\delta > 0$ , por la ecuación 1.11, existe  $N' = N'(\delta)$  tal que, para toda  $\lambda > N'$  y para toda  $\nu \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} |c_\alpha^{(\lambda)} - c_\alpha^{(\nu)}| \rho^\alpha < \frac{\delta}{2}.$$

Recordemos que para  $\alpha$  fija  $c_\alpha^{(\lambda)} \rightarrow c_\alpha$ . Entonces, dado un conjunto finito  $Z \subset \mathbb{Z}_+^n$  arbitrario, para toda  $\lambda > N$  existe un número  $\nu =$

## 1.2. EL TEOREMA ANALÍTICO DE POINCARÉ

---

$\nu(\lambda) \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que:

$$\sum_{\alpha \in Z} |c_\alpha^{\lambda+\nu} - c_\alpha| \rho^\alpha < \frac{\delta}{2}.$$

Sumando las dos últimas desigualdades y aplicando la desigualdad del triángulo obtenemos:

$$\sum_{\alpha \in Z} (|c_\alpha^\lambda - c_\alpha| < \sum_{\alpha \in Z} (|c_\alpha^{\lambda+\nu} - c_\alpha| + |c_\alpha^{(\lambda)} - c_\alpha^{(\nu)}|) \rho^\alpha < \delta,$$

para todo subconjunto finito  $Z \subset \mathbb{Z}_+^n$ , consecuentemente  $\|f_\lambda - f\|_\rho \leq \delta$ . Por lo tanto,  $(f_\lambda)$  converge a  $f$  y  $f_\lambda - f$  está dentro de  $\mathcal{B}_\rho$ . Más aún, ya que  $\mathcal{B}_\rho$  es algebraicamente cerrado y  $f_\lambda \in \mathcal{B}_\rho$ , entonces  $f$  también pertenece a este espacio y por lo tanto  $\mathcal{B}_\rho$  es completo.

□

Dados  $f, g \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$  ambas con coeficientes positivos, denotaremos  $f \ll g$  si  $a_m < b_m \forall m$ , aquí  $a_m, b_m$  son los coeficientes de  $f$  y  $g$  respectivamente.

**Lema 1.24.** Sea  $z \in \mathbb{C}^n$ , entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1)  $f, g \in \mathbb{C}[[z]]$  entonces  $\|f \cdot g\|_\rho \ll \|f\|_\rho \cdot \|g\|_\rho$ .
- (2)  $f, g \in \mathbb{R}[[z]]$  tales que  $f \ll g$  y  $h$  es una serie con coeficientes no negativos, entonces  $h \circ f \ll h \circ g$ .
- (3)  $f, g \in \mathbb{C}^n[[z]]$  con término constante nulo, entonces  $\|f \circ g\|_\rho \ll \|f\|_\sigma$ , donde  $\sigma = \|g\|_\rho$ .

*Demostración.*

- (1) Basta observar que al aplicar el operador mayorante convierte a todos los términos negativos en positivos, eliminando así toda posibilidad de cancelar términos en una multiplicación o una composición. Así si:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m, \quad g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m, \quad \text{entonces:}$$

$$\mu \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right) \leq \mu \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \right) \cdot \mu \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m \right)$$

- (2) Análogo al (1).
- (3) Basta hacerlo para  $n = 1$ . Por los anteriores  $\mu(f \circ g) \ll \mu(f) \circ \mu(g)$  y por definición  $\|f \circ g\|_{\rho} = \mu(f \circ g(\rho))$ , entonces:

$$\|f \circ g\|_{\rho} = \mu(f \circ g(\rho)) \ll \mu(f) \circ \mu(g)(\rho) = \mu(f(\sigma)) = \|f\|_{\sigma}$$

□

**Definición 1.25** (Contracción). Sea  $M$  un espacio métrico  $\mu$  y  $\varphi : M \rightarrow M$ . Se dice que  $\varphi$  es una *contracción* si satisface la condición de Lipschitz con constante de Lipschitz menor que 1, es decir, para todo  $x, y \in M$  existe  $\ell \in (0, 1)$  tal que:

$$\mu(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \ell \cdot \mu(x, y)$$

**Definición 1.26** (Contracción fuerte). Sea  $S : \mathcal{B}_{\rho} \rightarrow \mathcal{B}_{\rho}$ . Decimos que  $S$  es una *contracción fuerte* si:

- (1)  $\|S(0)\|_{\rho} = \mathcal{O}(\rho^2)$
- (2)  $S$  satisface la condición de Lipschitz en una bola  $B_{\rho} = \{h : \|h\|_{\rho} < \rho\} \subset \mathcal{B}_{\rho}$  con constante de Lipschitz no mayor que  $\mathcal{O}(\rho)$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ , es decir:

$$\|S(f)\|_{\rho} \leq c(\rho) \cdot \|f\|_{\rho} \quad \text{donde } c(\rho) \leq \mathcal{O}(\rho).$$

## 1.2. EL TEOREMA ANALÍTICO DE POINCARÉ

---

En este punto es necesario mencionar un teorema sobre un punto fijo que es válido en cualquier espacio métrico completo que se debe a *Banach* en 1922. Es sumamente útil para probar la existencia de soluciones de ecuaciones funcionales. La demostración puede encontrarse en [9], pág 220.

**Teorema 1.27** (Banach). Sea  $X$  un espacio métrico completo. Si  $S : X \rightarrow X$  es una contracción fuerte, entonces existe  $x \in X$  tal que  $S(x) = x$ , más aún,  $x$  es único.

**Lema 1.28.** Sea  $w(z) : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  holomorfo, tal que  $\frac{dw}{dz}(0) = 0$  ( i.e.  $v(z) = \mathcal{O}(z^2)$ ), entonces el operador  $S_w : \mathcal{B}_\rho \rightarrow \mathcal{B}_\rho$  definido como  $S_w(h) = w(Id + h)$  es una contracción fuerte.

*Demostración.*

- (1)  $S_w(0) = w(Id + 0) = w(z) = \mathcal{O}(z^2)$  entonces  $\|w\|_\rho = \mathcal{O}(\rho^2)$  y por lo tanto es claro que  $\|S_w(0)\|_\rho = \mathcal{O}(\rho^2)$ .
- (2) Sean  $h_1, h_2 \in \mathcal{B}_\rho$  y  $\varphi(\tau) = z + \tau h_2 + (1 - \tau)h_1$ , con  $\tau \in [0, 1]$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 S_w(h_2) - S_w(h_1) &= w(Id + h_1) + w(Id + h_2) \\
 &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} \left[ \frac{dw}{dz} \right] d\varphi \\
 &= \int_0^1 \frac{dw}{dz} \Big|_{\varphi(\tau)} \varphi'(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^1 \frac{dw}{dz} \Big|_{\varphi(z)} \cdot (h_2(z) - h_1(z)) d\tau
 \end{aligned}$$

Escribiendo  $\sigma = \|\varphi(\tau)\|_\rho$  y tomando la norma  $\rho$ -mayorante a



$g$ , por los lemas 1.23, 1.24 y ?? :

$$\begin{aligned} \|S_w(h_2) - S_w(h_1)\|_\rho &= \left\| \int_0^1 \frac{dw}{dz} \Big|_{\varphi(z)} \cdot (h_2(z) - h_1(z)) d\tau \right\|_\rho \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{dw}{dz} \right\|_\sigma \cdot \| (h_2(z) - h_1(z)) \|_\rho d\tau \end{aligned}$$

Es inmediato ver que  $\|h_2 - h_1\|_\rho$  no depende de  $\tau$  y que  $\sigma \leq \|z\|_\rho + \max\{h_1, h_2\} \leq (n+1)\rho$  pues  $h_1, h_2 \in B_\rho$ , entonces  $\left\| \frac{dw}{dz} \right\|_\sigma = \mathcal{O}(\rho)$ , de esta manera:

$$\|S_w(h_2) - S_w(h_1)\|_\rho \leq \mathcal{O}(\rho) \|h_2 - h_1\|_\rho$$

Por lo tanto  $S_w$  es una contracción fuerte.  $\square$

**Teorema 1.29** (Poincaré analítico no resonante). Sea  $v(z) = Az + w(z)$  un campo vectorial holomorfo en  $\mathbb{C}^n$ , con  $w(z) = \mathcal{O}(z^2)$ , tal que el espectro de su parte lineal está en el dominio de Poincaré ( $\lambda \in \mathcal{P}$ ) y es no resonante, entonces  $v$  es analíticamente equivalente (localmente) a su parte lineal.

*Demostración.* Sea  $H = z + h$  tal que  $DH \cdot Az = v(H(z))$ . P.D.  $h$  es analítica y única.

Definiendo la transformación:

$$\mathcal{L}_A(h(z)) := \left[ \frac{dh}{dz} \right] Az - Ah(z)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(h(z)) + Ah(z) + Az &= \left[ 1 + \frac{dh}{dz} \right] \cdot Az \\ &= DH \cdot Az \\ &= A(z + h(z)) + w(z + h(z)) \\ &= Az + Ah(z) + S_w(h(z)) \end{aligned}$$

## 1.2. EL TEOREMA ANALÍTICO DE POINCARÉ

---

Si  $\mathcal{L}_A$  es invertible entonces:

$$h(z) = \mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w(h) \quad (1.12)$$

La ecuación anterior implica que encontrar  $h$  equivale a encontrar un punto fijo del operador  $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w(h)$ . Es necesario probar que  $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w(h)$  es una contracción fuerte.  $\lambda \in \mathcal{P}$  y es no resonante entonces siempre existe una distancia mínima de al origen, es decir  $\varepsilon < |\lambda_j - \langle m, \lambda \rangle| \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+^n, j \in \{1, \dots, n\}$ . Así:

$$\frac{1}{|\lambda_j - \langle m, \lambda \rangle|} < \frac{1}{\varepsilon}$$

Por otro lado, la inversa  $\mathcal{L}_A^{-1}$  está definida por la relación:

$$\mathcal{L}_A^{-1} : \sum_{k,m} a_{k,m} z^m \frac{\partial}{\partial z_k} \mapsto \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{\lambda_j - \langle m, \lambda \rangle} z^m \frac{\partial}{\partial z_k}$$

De esta forma, si  $h \in \mathcal{B}_\rho$  entonces:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A^{-1}(h)\|_\rho &= \sup_{|z| < \rho} \left| \mu \left( \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{\lambda_j - \langle m, \lambda \rangle} z^m \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k,m} |a_{k,m}| \rho^m \frac{\partial}{\partial z_k} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \|h\|_\rho \end{aligned}$$

Así,  $\mathcal{L}_A^{-1}$  está acotado, claramente es lineal y además, por el lema 1.28,  $S_v$  es contracción fuerte, entonces:

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w(h_2) - \mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w(h_1)\|_\rho &= \|\mathcal{L}_A^{-1} \circ (S_w(h_2) - S_w(h_1))\|_\rho \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|S_w(h_2) - S_w(h_1)\|_\rho \\
 &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{O}(\rho) \|h_2 - h_1\|_\rho
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w$  es una contracción fuerte, además  $\mathcal{B}_\rho$  es completo, entonces  $\mathcal{L}_A^{-1} \circ S_w$  tiene un único punto fijo  $h \in \mathcal{B}_\rho$ . El punto fijo  $h$  resuelve el problema de la linealización.

□

De manera casi análoga se puede mostrar que un campo holomorfo con parte lineal en el dominio de Poincaré es analíticamente equivalente a su forma normal formal. El teorema también es válido para campos que dependen analíticamente de un parámetro  $\eta$  si el espectro para  $\eta = 0$  está en el dominio de Poincaré.

**Definición 1.30** (Colección diofantina). Una colección  $\lambda \in \mathbb{C}^n$  en el dominio de Siegel se denomina *diofantina* si los pequeños denominadores no decrecen más rápido que un polinomio en  $m$ :

$$\frac{1}{\lambda_j - \langle m, \lambda \rangle} \leq c|m|^N \text{ para constantes } c, N > 0.$$

Las colecciones no diofantinas se llaman colecciones de Liouville y son un subconjunto de  $\mathcal{S}$  de medida cero si  $N > \frac{n-2}{2}$ .

Hemos estudiado el caso en el que los valores propios se encuentran en el dominio de Poincaré, para el dominio de Siegel únicamente mencionaremos el teorema de *Siegel*. En [3], pág. 71, se puede encontrar una prueba a un teorema de *Brjuno* con condiciones un menos restrictivas.

## 1.2. EL TEOREMA ANALÍTICO DE POINCARÉ

---

**Teorema 1.31** (Siegel). Un campo holomorfo con espectro  $\lambda \in \mathcal{S}$  diofantino y no resonante es analíticamente equivalente a su parte lineal.

## Capítulo 2

# Explosión de puntos dicríticos

Ya hemos visto como analizar un campo vectorial holomorfo, cerca de un punto singular, a través de sus formas normales formales (o analíticas). Esta situación se vuelve complicada cuando el campo carece de parte lineal o en su defecto ésta es bastante degenerada. La idea es construir una aplicación que “*explote*” un punto para transformarlo en una esfera y fuera de la esfera, sea un biholomorfismo entre una vecindad de la esfera y una vecindad agujerada del punto. De esta manera el comportamiento de la foliación cerca del punto singular puede estudiarse por partes.

## 2.1. Construcción de la explosión

Consideremos un punto  $p \in \mathbb{C}$ , sin pérdida de generalidad,  $p$  será el origen. Sea  $M$  una superficie holomorfa, buscamos una aplicación holomorfa  $\sigma : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  tal que:

- (1) La preimagen del origen es una curva compacta, irreducible y holomorfa  $\mathbb{E} \subset M$ .
- (2) La aplicación  $\sigma$  es uno a uno entre  $M \setminus \mathbb{E}$  y  $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$ .

Primero consideremos la *aplicación canónica*  $\mu$  que a cada punto  $p = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus 0$  le asocia la recta  $\{(tx, ty) : t \in \mathbb{C}, \text{ es decir, la recta que une a } p \text{ con el origen. Sea } G := \{(p, \mu(p))\}$  la gráfica de  $\mu$ , más adelante probaremos que esta es una superficie compleja (de dimensión 2) contenida en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}$  (que tiene dimensión 3), sea  $\mathbb{E} := \{0\} \times \mathbb{P}$ , consideremos la cerradura de  $G$ , que denotaremos por  $\mathbb{M}$ . Entonces el único punto que hay que agregar al dominio de  $\mu$  para que la gráfica sea cerrada es el origen en  $\mathbb{C}^2$  y lo que correspondería a su imagen, ya que todas las rectas  $\{(tx, ty)\}$  pasan por el origen, entonces  $\mathbb{M} = G \cup \mathbb{E}$ .

Por último, sea  $\pi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{C}^2$  la proyección cartesiana en la primera coordenada, definimos:

$$\sigma := \pi|_{\mathbb{M}} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

Gracias a la forma en que construimos  $\sigma$  a cada punto en  $G = \mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  corresponde uno y sólo un punto de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  y viceversa, por lo que  $\sigma$  es biyectiva restringida a  $G$ . Más aún,  $\sigma^{-1}(0) = \mathbb{E}$ .

**Definición 2.1** (Explosión). Se le llama *explosión* a la aplicación  $\sigma^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  y *divisor excepcional* a la curva  $\mathbb{E}$ .

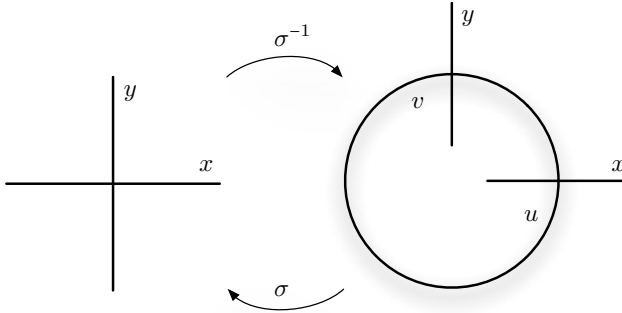


Figura 2.1: La explosión de una vecindad del origen en  $\mathbb{C}$  y las cartas  $(x, u)$  y  $(v, y)$ .

Veamos que en efecto  $\mathbb{M}$  es una variedad holomorfa de dimensión compleja 2 cerrada. Consideremos dos cartas afines  $u, v$  en la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$ , que corresponden a líneas que pasan por puntos  $(x, y) \neq (0, 0)$  y el origen, de esta manera, cada recta queda determinada de manera única por su pendiente, así:

$$(x : y) \xrightarrow{\mu} u = \frac{x}{y} \text{ si } x \neq 0, \quad (2.1)$$

$$(x : y) \xrightarrow{\mu} v = \frac{y}{x} \text{ si } y \neq 0. \quad (2.2)$$

Con esto, podemos definir un sistema de coordenadas sobre  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}$  en dos cartas, a decir  $(x, y, u)$  y  $(x, y, v)$ . De las ecuaciones 2.1 y 2.2 se sigue que, en estas cartas,  $\mathbb{M}$  está dado por las ecuaciones:

$$y - vx = 0,$$

respectivamente,

$$x - uy = 0,$$

## 2.1. CONSTRUCCIÓN DE LA EXPLOSIÓN

---

donde  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Claramente estas ecuaciones se pueden extender a la recta  $\{x = 0, y = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ , además, por ser polinomios son holomorfas. Más aún, el cambio de coordenadas  $v = \frac{1}{u}$  es holomorfo en la región donde las cartas se intersectan, por lo tanto  $\mathbb{M}$  es una variedad holomorfa de dimensión 2.

Podemos hacer una construcción análoga para los números reales. Entonces, ya que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$ , la superficie  $\mathbb{R}\mathbb{M}$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^2\mathbb{S}^1$ . No es difícil ver que  $\mathbb{R}\mathbb{M}$  es la banda de Moebius, con esto en mente, llamaremos a  $\mathbb{M}$  la *banda de Moebius compleja*.

La aplicación  $\sigma$  al ser un biholomorfismo de  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  a  $(\mathbb{C}^2, 0) \setminus \{0\}$  “jala” funciones y formas holomorfas mediante el *pull-back*  $\sigma^* f = f \circ \sigma$  y  $\sigma^* \omega$ , así mismo, la preimagen de conjuntos analíticos de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  será un conjunto analítico en  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$ . La manera más natural de extender estos objetos a  $\mathbb{M}$  es, primero llevarlos a  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  y luego tomar su cerradura en  $\mathbb{M}$ .

**Definición 2.2.** Dada una curva analítica  $\gamma \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ , la *explosión* de  $\gamma$  es la cerradura en  $\mathbb{M}$  de la preimagen de  $\gamma \setminus \{0\}$  bajo la aplicación  $\sigma$ , es decir:

$$\tilde{\gamma} = \overline{\sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\})}$$

Para probar que en efecto  $\tilde{\gamma}$  es una curva analítica hay que calcular explícitamente la explosión. Si  $\gamma = \{f = 0\}$  con  $f$  holomorfa, entonces, localmente, para cada punto  $a \in \mathbb{E}$  el germen  $f' = f \circ \sigma$  es idénticamente cero, si  $g$  es un irreducible que localmente define al divisor excepcional, entonces podemos dividir a  $f'$  entre la máxima potencia  $\nu$  de  $g$ . De esta manera, obtenemos un germen  $\tilde{f} = g^{-\nu} f'$  que, restringido  $\mathbb{E}$  sólo se anula en un conjunto finito de puntos, a decir  $\Sigma = \{p_i\}$ , y que en  $\mathbb{M} \setminus \mathbb{E}$  las curvas  $\tilde{\gamma} = \{\tilde{f} = 0\}$  y  $\sigma^{-1}(\gamma) = \{f' = 0\}$  coinciden.



Como el germen  $\tilde{f}$  sólo se anula en  $\{p_i\}$ , es invertible en  $\mathbb{E} \setminus \Sigma$ , entonces los puntos que hay que agregar para cerrar la curva son los  $\{p_i\}$ . Así,  $\tilde{\gamma} = \sigma^{-1}(\gamma \setminus \{0\}) \cup \Sigma$  es una curva analítica y coincide con la cerradura de la preimagen de  $\gamma \setminus \{0\}$ . Con esto hemos probado la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.** La explosión de una curva analítica es también una curva analítica en  $(\mathbb{M}, \mathbb{E})$  que intersecta al divisor excepcional solamente en un conjunto de puntos aislados.

**Definición 2.4.** Sea  $\mathcal{F}_v$  una foliación singular holomorfa de  $(\mathbb{C}, 0)$  definida por un campo vectorial  $v$ . La explosión de  $\mathcal{F}_v$  está dada por  $\tilde{\mathcal{F}}_v = \sigma * \mathcal{F}_v$ .

## 2.2. Campos dicríticos

Podemos clasificar los campos de acuerdo a la foliación obtenida mediante la explosión de un punto singular y la manera en que se acerca a la esfera de Riemann.

**Definición 2.5** (Separatriz). Sea  $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}$  una foliación definida por el germen en  $p$  de una ecuación diferencial analítica  $\dot{z} = \mathbf{v}(z)$ ,  $z \in (\mathbb{C}, 0)$ ,  $v(p) = 0$ . Decimos que la hoja  $\ell$  definida por una solución  $\varphi(t)$  de la ecuación es una *separatriz* si su cerradura  $\tilde{\ell} = \ell \cup \{p\}$  es (localmente) el germen de una curva analítica.

Si consideramos la explosión  $\tilde{\mathbf{v}}$  del campo  $\mathbf{v}$ , una posibilidad es que el divisor excepcional  $\mathbb{E}$  sea una separatriz de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{v}}$ , es decir, dependiendo de la carta, la curva  $\{x = 0\}$  (o bien  $\{y = 0\}$ ) se puede extender de manera analítica al punto singular. La otra posibilidad es que los puntos de  $\mathbb{E}$  pertenezcan a distintas hojas de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{v}}$ , que en este caso, intersectan transversalmente a  $\mathbb{E}$  salvo en un conjunto finito de puntos, donde lo harán tangencialmente.

## 2.2. CAMPOS DICRÍTICOS

---

Esto último corresponde a ciertas condiciones degeneradas de los términos principales del campo.

**Definición 2.6** (Punto dicrítico y no dicrítico). Un punto singular de una foliación  $\mathcal{F}$  holomorfa en  $(\mathbb{C}, 0)$  es *no dicrítico* si el divisor excepcional  $\mathbb{E} = \sigma^{-1}(0)$  es una separatriz de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma^* \mathcal{F}$ .

En caso de suceder lo contrario el punto se llamará *dicrítico*. Denotaremos por  $\mathcal{V}^d$  al conjunto de gérmenes dicríticos holomorfos.

Ahora veamos a qué condiciones en la ecuación del campo corresponde cada caso.

**Proposición 2.7.** Sea  $\mathbf{v}$  un campo vectorial definido por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n(x, y) + P_{n+1}(x, y) + \dots \\ Q_n(x, y) + Q_{n+1}(x, y) + \dots \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde  $P_k$  y  $Q_k$  son polinomios homogéneos de grado  $k \geq 1$  en las variables  $(x, y)$ , no idénticamente cero y que se anulan en el origen, sea  $H_k(x, y) = yP_k(x, y) - xQ_k(x, y)$ . La singularidad de un campo es

(1) no dicrítica si  $H_n(x, y) \not\equiv 0$ ,

(2) y dicrítica si  $H_n(x, y) \equiv 0$ .

*Demostración.* Para empezar calculemos la explosión del campo, sin

pérdida de generalidad, en la carta  $(v, y)$ ,  $x = vy$ :

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{y^2} \\ &= \frac{P(vy, y)y - vyQ(vy, y)}{y^2} \\ &= \frac{yH_n(vy, y) + y(H_{n+1}(vy, y) + \dots)}{y^2} \\ \dot{y} &= Q(vy, y) \\ &= Q_n(vy, y) + Q_{n+1}(vy, y) + \dots\end{aligned}$$

por ser los  $H_k$  homogéneos tenemos que  $H_k(vy, y) = y^k H_k(v, 1)$ , luego:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{n-1}H_n(v, 1) + y^n H_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y^{n+1}) \\ y^n Q_n(v, 1) + y^{n+1} Q_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y^{n+2}) \end{bmatrix}$$

podemos dividir toda la ecuación entre  $y^{n-1}$  para obtener el campo de direcciones (que seguiremos denotando por  $[\dot{v}, \dot{y}]$ ) dado por la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_n(v, 1) + yH_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y^2) \\ yQ_n(v, 1) + y^2Q_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y^3) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

o bien, en las cartas  $(x, u)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xP_n(1, u) + x^2P_{n+1}(1, u) + \mathcal{O}(x^3) \\ H_n(1, u) + xH_{n+1}(1, u) + \mathcal{O}(x^2) \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

Ahora analicemos qué sucede en cada caso. Sustituyendo  $x = vy$  en  $H_n(x, y)$  obtenemos  $y^n H_n(v, 1)$ , así, la condición  $H_n(x, y) \equiv 0$  es equivalente a evaluar en  $H_n(v, 1) \equiv 0$ .

- (1) Supongamos que  $H_n(v, 1) \neq 0$ . En tal caso, es claro que  $y = 0$  es una solución holomorfa de  $\dot{y}$  y por lo tanto  $\{y = 0\}$  es una

## 2.2. CAMPOS DICRÍTICOS

separatriz de la foliación, es decir, el punto singular  $(0,0)$  es no dicrítico. Más aún, en la explosión, el campo de direcciones  $[\dot{v}, \dot{y}]$  tiene puntos singulares exactamente en las raíces de  $H_n(v, 1)$ , que son a lo más  $\deg H_n = n + 1$ . Si el polinomio  $H_n(x, y)$  es divisible entre  $y$  significa que  $P_n(x, y) = y\tilde{P}(x, y)$ , esto implica que al computar la explosión en la carta  $(x, u)$  obtendremos un punto singular en  $(x = 0, u = 0)$ .

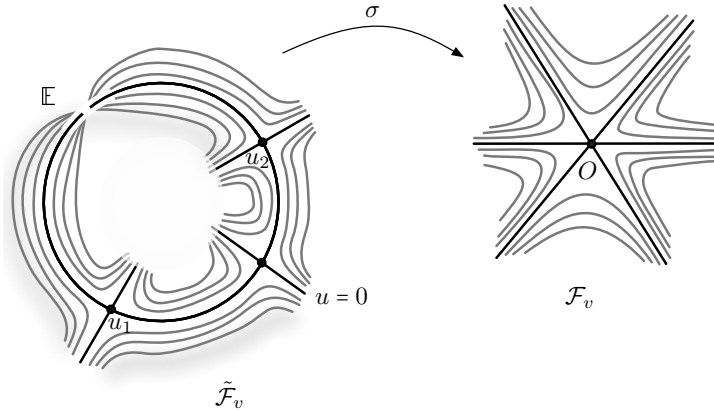


Figura 2.2: Explosión de un campo no dicrítico con tres separatrices

- (2) En el otro caso, es decir, si  $H_n(v, 1) \equiv 0$ , todavía podemos dividir el campo de direcciones 2.5 entre  $y$ , obteniendo así

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y) \\ Q_n(v, 1) + yQ_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y^2) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

En esta última, es evidente que  $y = 0$  no es una solución de la ecuación, entonces el divisor excepcional  $\mathbb{E}|_{(v,y)} = \{y = 0\}$  no es separatriz de la foliación y por lo tanto el punto es dicrítico.

□

Denotaremos por  $\mathcal{V}_n^d$  al subconjunto de gérmenes de  $\mathcal{V}^d$  de grado  $n$ , donde, si se escribe la ecuación 2.3 para  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_n^d$ , entonces  $n = \min_k \{(P_k, Q_k) : P_k \neq 0 \text{ o } Q_k \neq 0\}$ .

Resulta interesante estudiar la geometría de la foliación de un campo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{n+1}^d$ . Para empezar, evaluemos 2.6 sobre el divisor excepcional:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Big|_{y=0} = \begin{bmatrix} H_{n+1}(v, 1) \\ Q_n(v, 1) \end{bmatrix}.$$

Si consideramos el conjunto  $S = \{v : Q_n(v, 1) = 0\} \subset \mathbb{E}$ , fuera de  $S$  la foliación atraviesa transversalmente al divisor excepcional. Si  $S' = H_{n+1}(v, 1) = 0$ , entonces, tendremos puntos singulares en  $S \cap S'$  y en los puntos  $S \setminus S'$  la foliación llega tangente al divisor excepcional. También puede haber un punto singular o tangente en  $\infty$ , así pues, es necesario fijarse también en la explosión en las cartas  $(x, u)$ . La figura 2.3 muestra la foliación generada por un campo dicrítico con tres tangencias.

Observemos que la condición  $H_n(x, y) \equiv 0$  implica que

$$Q_n(x, y) = \frac{y}{x} P_n(x, y),$$

entonces existe  $R(x, y)$  tal que  $P_n(x, y) = xR(x, y)$  y  $Q_n(x, y) = yR(x, y)$ , de hecho,  $R$  es el máximo común divisor entre  $P_n$  y  $Q_n$ . Sustituyendo  $Q_n(v, 1)$  en la ecuación 2.6 por  $(yR(x, y))|_{(v,1)}$  obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{n+1}(v, 1) + \mathcal{O}(y) \\ R(v, 1) + \mathcal{O}(y) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

y en la otra carta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1, u) + \mathcal{O}(x) \\ H_{n+1}(1, u) + \mathcal{O}(x) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

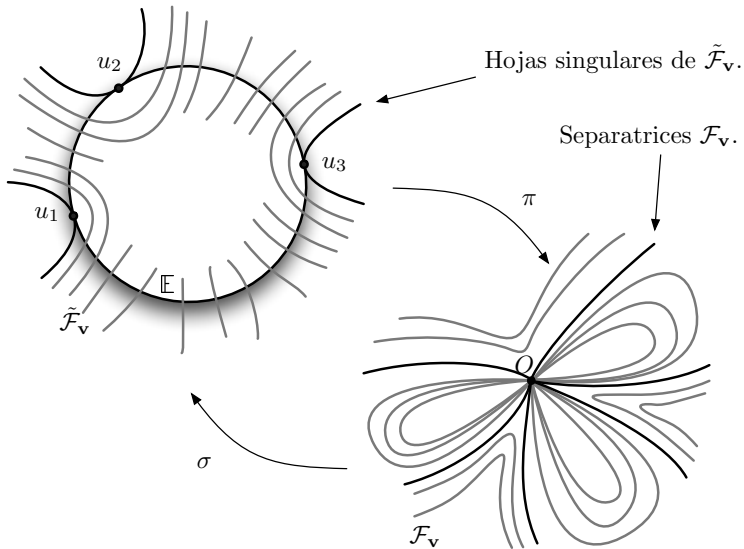


Figura 2.3: Un campo dicrítico para  $n = 3$  con su explosión.

Llamaremos  $\varphi_0(v, y)$  y  $\psi_0(v, y)$ , respectivamente a la primera y segunda componente de la ecuación 2.7. De esta forma, las hojas de la foliación están dadas por la ecuación diferencial

$$L(v, y) := \frac{dv}{dy} = \frac{\varphi_0(v, y)}{\psi_0(v, y)} \quad (2.9)$$

**Definición 2.8.** El conjunto de gérmenes dicríticos genéricos normalizados de orden  $n$  se denota por  $\mathcal{N}_n^{d,gen}$ , decimos que  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_n^{d,gen} \subset \mathcal{V}_n^d$  si:

- (1)  $R(x, y)$  tiene sólo factores simples, todos distintos de  $x$  o  $y$ , es

decir,

$$R(x, y) = \prod_{j=1}^{n-1} (y - u_j x),$$

donde  $u_i \neq u_j$  si  $i \neq j$ ,  $u_j \neq 0$ ,

(2)  $R(x, y)$  no tiene factores en común con  $H_{n+1}(x, y)$ .

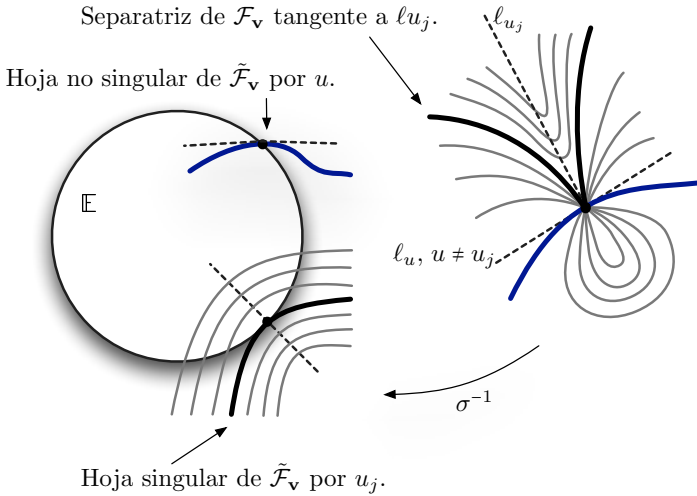


Figura 2.4: Un campo dicrítico genérico con una sola hoja tangente.

Basta observar las ecuaciones 2.7 y 2.8 para ver que si  $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_n^{d,gen}$  entonces hay explotar el campo solamente una vez para obtener una foliación sin puntos singulares sobre  $\mathbb{E}$ , más aún, salvo en  $n-1$  puntos (las raíces de  $R(1, u)$ ) las hojas de la foliación atraviesan a  $\mathbb{E}$  transversalmente. Las hojas que llegan tangentes al divisor excepcional son las que pasan por los puntos  $\{(x, u) : u = u_j\} = \{(v, y) : v = \frac{1}{u_j}\}$ ,

a éstas las llamaremos “*hojas singulares*”. Además, en una vecindad, del divisor excepcional no existen más puntos singulares que los  $u_j$ .

Lo anterior implica que, al regresar de la explosión, que para cualquier dirección “*no singular*”  $\ell_u = \{(x, y) : \frac{y}{x} = u \neq u_j\}$  existe una única curva de la foliación  $\mathcal{F}_v$  tangente a  $\ell_u$  en el origen y cuya cerradura es una curva analítica suave en el origen.

En contraste, para cada dirección “*singular*”  $\ell_{u_j} = \{(x, y) : \frac{y}{x} = u_j\}$  existe una curva, que resulta ser una parábola semicúbica, tangente a la dirección  $\ell_{u_j}$  en su cúspide (el origen). Esta curva es una separatriz de la foliación  $\mathcal{F}_v$  y se corresponde con la hoja singular de  $\tilde{\mathcal{F}}_v$  que pasa por el punto  $u_j$ .

### 2.3. El índice de Camacho-Sad

A continuación, introduciremos un lenguaje formal para poder definir el *índice de intersección* entre dos curvas y el *índice de Camacho-Sad*.

**Definición 2.9** (Divisor). Un *divisor* sobre una variedad compleja  $M$  es una unión finita de curvas analíticas e irreducibles, de codimensión 1, cada una asociadas a un número entero.

Denotaremos por  $Div(M)$  al conjunto de los divisores de  $M$ . Por definición, cada divisor  $D$  puede representarse como una “suma”  $\sum_{\gamma} k_{\gamma} \gamma$ . Es posible dar una estructura de grupo a  $Div(M)$  con una operación  $+$ ,  $(\sum k_{\gamma} \gamma) + (\sum k'_{\gamma} \gamma) = \sum (k_{\gamma} + k'_{\gamma})$ . Un divisor se llama *efectivo* si todas las  $k_{\gamma}$  son no negativas.

**Definición 2.10.** El *soporte* de un divisor  $D$  es la unión de todas las curvas que aparecen en el divisor con coeficientes distintos de cero:

$$|D| = \bigcup_{k_{\gamma} \neq 0} \gamma = \sum_{k_{\gamma} \neq 0} \gamma$$



## 2. EXPLOSIÓN DE PUNTOS DICRÍTICOS

---

Una función holomorfa  $f \in \mathcal{O}(M)$  define un divisor efectivo  $D_f$  cuyo soporte  $|D_f| = \{f = 0\}$ . Si el germen de  $f$  en un punto  $p \in M$  puede factorizarse de manera irreducible como  $f = \prod f_j^{\nu_j}$ , entonces cada función  $f_j$  define por si misma una curva analítica irreducible  $\gamma_j = \{f_j = 0\}$ , luego  $D_j = \gamma_j$  es un divisor bien definido. Más aún, el divisor  $D_f$  está conformado de la siguiente manera:

$$D_f = \sum_j \nu_j D_j.$$

Gracias a que cada  $D_j$  es conexa, la multiplicidad  $\nu_j$  no cambia si movemos  $p$  a lo largo de  $D_j$ . Si consideramos una función meromorfa  $h = \frac{f}{g}$ , donde  $f$  y  $g$  son holomorfas, entonces:

$$D_h := D_f - D_g.$$

Ahora, consideremos un sistema de ecuaciones  $\{f = 0, g = 0\}$  y  $\rho > 0$  suficientemente pequeño tal que el sistema tenga una única solución  $\{x = y = 0\}$  dentro de la bola  $B_\rho = \{|x^2| + |y^2| < \rho\}$ . De esta forma, para  $\varepsilon = \varepsilon(\rho)$  suficientemente pequeño, si  $a, b \in \mathbb{C}$ , con  $|a|, |b| < \varepsilon$ , las curvas de nivel  $\{f = a\}$  y  $\{g = b\}$  son suaves dentro de  $B_\rho$  y se intersectan transversalmente. La razón por la cual esto sucede resulta del lema de Sard, si  $a$  es un valor regular de  $f$  y  $b$  es un valor de  $g$  restringido a la curva  $\{f = a\}$ . Al ser transversales las curvas tenemos que  $\{f = a\} \cap \{g = b\} \cap B_\rho$  consiste de puntos aislados.

**Definición 2.11** (Índice de intersección). Bajo el esquema anterior, el índice de intersección entre dos divisores  $D_f$  y  $D_g$  en el origen es el número definido como:

$$D_f \cdot D_g = \#\{f = a\} \cap \{g = b\} \cap B_\rho.$$

El índice de autointersección estará dado por  $D_f \cdot D_f$ , es decir

$$D_f \cdot D_f = \#\{f = a\} \cap \{f = b\} \cap B_\rho,$$

### 2.3. EL ÍNDICE DE CAMACHO-SAD

---

o bien,

$$D_f \circ D_f = \#\{f = a\} \cap \{g = 0\} \cap B_\rho.$$

**Lema 2.12.** Sea  $D_f$  un divisor local irreducible, parametrizado por una función inyectiva y no constante  $\tau : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , es decir,  $f \circ \tau \equiv 0$ . Entonces, la intersección de  $D_f$  con otro divisor efectivo  $D_g$  es aislada si y sólo si el germen  $g \circ \tau$  no es idénticamente cero y la multiplicidad  $D_f \circ D_g = \text{ord}_0(g \circ \tau)$ .

Una prueba corta se puede encontrar en [3], pág. 127.

**Definición 2.13** (Índice de intersección).

**Definición 2.14** (Singularidad irreducible). Sea  $p$  un punto singular de un campo vectorial  $\mathbf{v}$  en coordenadas locales  $(x, y)$  dado por  $v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ . Consideremos la linealización de  $\mathbf{v}$  en el punto  $p$ , dada por

$$D\mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix}(p),$$

con valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . El punto  $p$  es *irreducible* si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$(1) \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{N},$$

$$(2) \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0 \text{ o bien } \lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0$$

La definición es independiente de las coordenadas que se utilicen, de hecho  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son invariantes de la foliación módulo un factor distinto de 0.

**Teorema 2.15.** (cf. [5]) Después de un número finito de explosiones todos los puntos singulares de la foliación obtenida son irreducibles.

**Definición 2.16** (Índice de Camacho-Sad). Sea  $S$  una curva invariante de una foliación  $\mathcal{F}_\mathbf{v}$  sobre una variedad  $M$  dada por un campo

vectorial  $\mathbf{v}$ , con  $M$  de dimensión compleja 2 y un punto  $p_0 \in M \cap S$ . Existe un sistema de coordenadas apropiado tal que  $S = \{(x, y) \in M : y = 0\}$ , entonces  $p_0 = (p, 0)$ . Si el campo  $\mathbf{v}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  definimos el *índice de Camacho-Sad* de  $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}$  en el punto  $p$  respecto a  $S$  se como:

$$i_0(\mathcal{F}, S) := \text{Res}_{x=p} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}(x, 0) \right) \Big|_{y=0}. \quad (2.10)$$

Si consideramos una 1-forma  $\omega = -Qdx + Pdy$  que corresponda a la foliación, el índice se define de igual manera.

**Observación 2.17.** Este índice no depende de las coordenadas ni de la elección de  $\omega$ . Más adelante se estudiará lo que es una *conexión* y se probará un resultado más general. También es importante notar que si el punto no es singular entonces el índice se anula.

**Observación 2.18.** Puede probarse que si el punto es irreducible, en el primer caso el cociente de los valores propios coincide con el índice de Camacho-Sad, en el segundo caso resulta que el índice es cero (cf. [5]).

El índice de Camacho-Sad, en cierta forma, concentra en los puntos singulares de la foliación el índice de autointersección de una curva compacta en los puntos singulares de la foliación.

**Definición 2.19.** El *índice total* de una foliación  $\mathcal{F}$  respecto a  $S$  es la suma de los índices sobre todos los puntos singulares ( $\Sigma = \{p_j\}$ ) que la foliación tiene sobre  $S$ :

$$i(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in \Sigma} i_p(\mathcal{F}, S)$$

Enunciaremos un teorema que demuestra que el índice de Camacho-Sad es un invariante. En el teorema 4.17 se estudia un resultado más fuerte y general.

### 2.3. EL ÍNDICE DE CAMACHO-SAD

---

**Teorema 2.20.** Sea  $M$  una variedad holomorfa de dimensión compleja 2 y  $S \subset M$  una curva holomorfa y compacta. Entonces, para toda foliación  $\mathcal{F}$  en  $M$ , que es tangente a la curva  $S$ , el *índice total* de  $\mathcal{F}$  respecto a  $S$  es siempre el mismo sin importar la foliación. Solamente depende de  $M$  y de la curva  $S$ .

## Capítulo 3

# Haces Vectoriales

Intuitivamente, es posible pegar un espacio vectorial ( $\mathbb{C}^n$ ) sobre cada punto de una variedad  $M$ , para obtener de esta manera una nueva variedad topológica  $E$ . En otras palabras, si  $\{U_\alpha\}$  es un atlas de  $M$ , entonces  $E$  estaría construido mediante productos cartesianos  $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$  pegados de cierta forma dentro de un espacio ambiente, que por el momento llamaremos *haz vectorial*, más adelante daremos una definición precisa y formal. La ventaja de trabajar con un haz vectorial es que en cada fibra  $p \times \mathbb{C}^n$  sobre un punto  $p \in M$  se tiene una estructura lineal.

### 3.1. Teoría local: sistemas lineales

Sea  $M$  una superficie de Riemann y sea

$$A = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{bmatrix}, \omega_{ij} \in \Lambda^1(M) \quad (3.1)$$

una matriz compuesta por 1-formas  $\omega_{ij}$ , definidas y holomorfas sobre  $M$ . Sean  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas en  $\mathbb{C}^n$  y consideremos el producto  $M \times \mathbb{C}^n$ . En este producto tomemos en cuenta la distribución 1-dimensional definida por los ceros de las  $n$  1-formas holomorfas  $\eta_i \in \Lambda^1(M \times \mathbb{C}^n)$  dadas por la siguiente fórmula:

$$\eta_j = dx_j - \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{ij} x_i.$$

Esta distribución define una foliación cuyas hojas, parametrizadas por  $M$ , satisfacen el sistema:

$$0 = dx_j - \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{ij} x_i$$

es decir, las funciones vectoriales holomorfas

$$x = (x_1, \dots, x_n) : M \rightarrow \mathbb{C}^n$$

son solución del sistema de 1-formas

$$dx_i = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_{ij} x_j \quad (3.2)$$

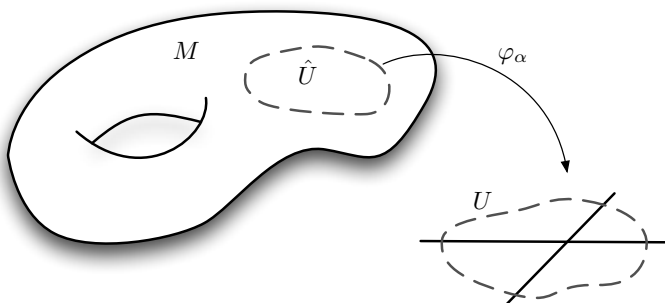
que en adelante escribiremos como

$$dx = Ax \quad (3.3)$$

Observemos que si consideramos una carta  $\hat{U} \subset M$  y su función coordenada  $t : \hat{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t(\hat{U}) = U$ , entonces cada 1-forma  $\omega_{ij}$  puede ser escrita como

$$\omega_{ij} = a_{ij}(t)dt,$$

donde  $a_{ij}(t)$  es una función holomorfa en  $U$ . Así, en la carta  $t$ , el



sistema de 1-formas se expresa como

$$dx_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j. \quad (3.4)$$

De manera natural, a partir del sistema 3.4, queda definido el sistema de ecuaciones ordinarias

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j,$$

que denotaremos por  $\dot{x} = A_\omega(t)x$ , (la notación  $A_\omega(t)$  nos permite recordar que la matriz  $A(t)$  fue definida por medio de las  $\omega_{ij}$  que determinan a la matriz  $A$ ). Las soluciones de  $\dot{x} = A_\omega(t)x$  forman un espacio lineal.

Si  $U$  es un dominio simplemente conexo, entonces podemos considerar una matriz fundamental de soluciones  $X(t)$ , es decir,  $\dot{X} =$

$A_\omega(t)X$ ,  $\det(X(t)) \neq 0 \forall t \in U$ . Esta matriz no es única: cualquier otra matriz fundamental  $\tilde{X}$  difiere de  $X$  por un producto con una matriz de coeficientes constantes,  $\tilde{X} = XQ$ .

Cabe hacer notar que los sistemas lineales de ecuaciones surgen de manera natural en distintos contextos. La ecuación de primera variación a lo largo de una solución de una ecuación diferencial es un ejemplo en el que aparece un sistema lineal y que nos permite comprender, que si bien éste tiene una estructura sencilla, el contexto global en el que se encuentra definida puede ser muy complicado.

En la siguiente sección veremos la forma de ver globalmente a los sistemas lineales, o más precisamente, a los sistemas que localmente son lineales.

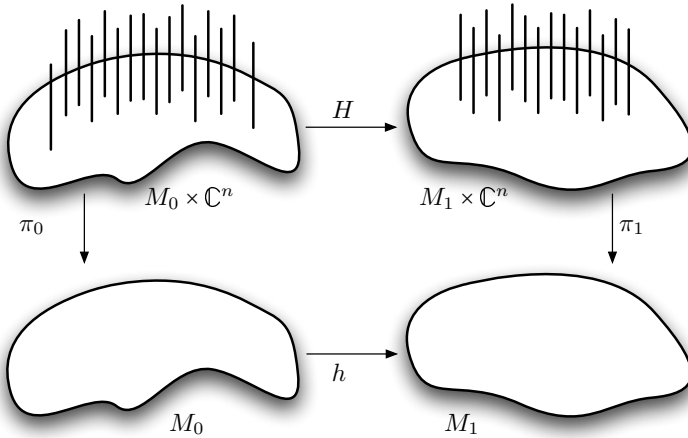
## 3.2. Haces vectoriales sobre variedades

La estructura del producto  $U \times \mathbb{C}^n$  del espacio de las fases en el que un sistema lineal está definido hace que las transformaciones de ese espacio en sí mismo estén obligadas a ser lineales en la coordenada en la segunda coordenada, es decir,  $\mathbb{C}^n$ . Por el *orden* de un sistema lineal nos referiremos a la dimensión de esta segunda coordenada.

**Definición 3.1** (Transformación de gauge). Sean  $M_0$  y  $M_1$  dos superficies de Riemann. Considerando los productos cartesianos  $E_i = M_i \times \mathbb{C}^n$  con sus respectivas proyecciones  $\pi_i : E_i \rightarrow M_i$  ( $i = 0, 1$ ),  $H : E_0 \rightarrow E_1$  es una *transformación de gauge* si:

- (1)  $H$  es holomorfa.
- (2) Existe  $h : M_0 \rightarrow M_1$  holomorfa tal que  $\pi_1 \circ H = h \circ \pi_0$
- (3)  $H|_{\tau_p} : \pi_0^{-1}(p) \rightarrow \pi_1^{-1}(h(p))$  es lineal para toda  $p \in M_0$ , donde  $\tau_p = \pi_0^{-1}(p)$ .





En otras palabras, una transformación de gauge es un holomorfismo que respeta las proyecciones y que es lineal en cada fibra  $\tau_p$ , con  $H \in GL(n, \mathcal{O}(M_0))$ . En coordenadas se ve como:

$$(p, x) \mapsto (h(p), H(p) \cdot x).$$

Se dice que  $H$  está fibrada sobre  $h$ . En lo que concierne a haces vectoriales se consideraremos  $h = id$  a menos que se especifique lo contrario.

La linealidad de  $H$  la convierte en una buena herramienta para estudiar sistemas lineales. Dos sistemas lineales del mismo orden sobre la misma variedad serán “gauge”- equivalentes si existe una transformación de gauge que lleve a uno en el otro.

### 3.2. HACES VECTORIALES SOBRE VARIEDADES

---

Dada una ecuación diferencial  $dX = A \cdot X$  y  $X(p)$  una solución fundamental, entonces  $Y(p) = H(p) \cdot X(p)$  será una solución a un sistema

$$dY = B \cdot Y,$$

multiplicando por  $Y^{-1}$  por la derecha se obtiene el cálculo explícito para la matriz  $B$ , donde:

$$\begin{aligned} B &= dY \cdot Y^{-1} \\ &= d(H \cdot X) \cdot (X^{-1} \cdot H^{-1}) \\ &= (dH \cdot X + H \cdot dX) \cdot X^{-1} \cdot H^{-1}; \end{aligned}$$

de esta forma,

$$B = (dH + H \cdot A) \cdot H^{-1}. \quad (3.5)$$

La fórmula anterior volverá a aparecer cuando se toque el tema de conexiones.

**Definición 3.2** (Trivialización). Sean  $M$  y  $E$  dos espacios topológicos,  $\pi : E \rightarrow M$  una aplicación continua,  $U_0 \subset M$  un conjunto abierto y  $\pi_0 : U_0 \times \mathbb{C}^n$  la proyección cartesiana habitual. Un homeomorfismo  $\Phi : \pi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0 \times \mathbb{C}^n$  es una *trivialización* (de  $\pi$  sobre  $U_0$ ) si  $\pi_0 \circ \Phi = \pi$ .

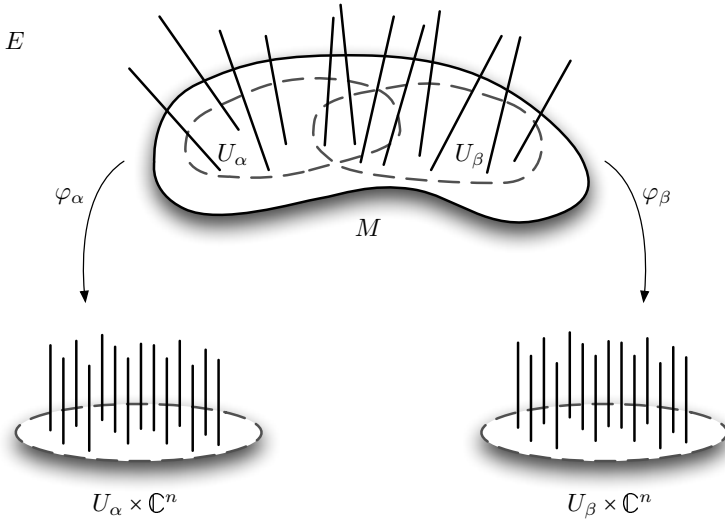
**Definición 3.3** (Haz vectorial). Sean  $\pi : E \rightarrow M$  como en la definición 3.2. La terna  $\pi : E \rightarrow M$  es un *haz vectorial* complejo de rango  $n$  si:

- (1) Existe una vecindad  $U_\alpha$  para todo punto  $p \in M$  y una trivialización de  $\pi$  sobre dicha vecindad.
- (2) Si  $\Phi_\alpha, \Phi_\beta$  son dos trivializaciones sobre  $U_\alpha, U_\beta$  respectivamente, tales que

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$$

entonces

$$\Phi_{\beta\alpha} = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \rightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$$



es una transformación de gauge fibrada sobre la identidad.

Un haz vectorial real de rango  $n$  se define de manera análoga.

En adelante, llamaremos a  $E$  el espacio total del haz, a  $M$  la base y a  $\pi$  la proyección. Si  $E$  y  $M$  son variedades holomorfas, la proyección es una función holomorfa y se pueden dar trivializaciones biholomorfas de  $\pi$  en una vecindad de todo punto  $p$  en la base, entonces se dice que el haz es holomorfo. Una manera conveniente de representar a  $\Phi_{\beta\alpha}$  es la siguiente:

$$\Phi_{\beta\alpha}(p, x) = (p, H_{\beta\alpha}(p) \circ x) \quad (3.6)$$

donde  $H_{\beta\alpha} \in GL(n, \mathcal{O}(\mathbb{C}))$ .

### 3.2. HACES VECTORIALES SOBRE VARIEDADES

---

**Definición 3.4** (Cociclo). sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  una cubierta abierta del espacio base  $M$ . Un *cociclo* es una colección de funciones matriciales holomorfas  $\mathcal{H} = \{H_{\beta\alpha}\}$  que satisface:

$$id = H_{\alpha\beta} \cdot H_{\beta\alpha} \text{ en } U_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha} \neq \emptyset \quad (3.7)$$

$$id = H_{\alpha\beta} \cdot H_{\beta\gamma} \cdot H_{\gamma\alpha} \text{ en } U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset, \quad (3.8)$$

y se dice que el cociclo está inscrito en la cubierta  $\mathcal{U}$ .

**Teorema 3.5.** Dada una variedad holomorfa  $M$  y una cubierta  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ , cualquier cociclo de matrices  $\mathcal{H}\{H_{\alpha\beta}\}$  (inscrito en  $\mathcal{U}$ ) puede construirse como la colección de transformaciones de gauge entre trivializaciones de un haz vectorial sobre  $M$ .

*Demostración.* Consideremos el haz con espacio total  $E = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times \mathbb{C}^n / \sim$ , donde  $\sim$  es la regla de pegado:  $(a, x) \sim (a', x') \iff a = a', x' = H_{\beta\alpha}(a)x$ .

Claramente  $\sim$  es reflexiva y simétrica. Para la transitividad basta observar que si  $(a, x) \sim (a', x') \sim (a'', x'')$  entonces  $a = a' = a''$  y  $x'' = H_{\gamma\beta}(a)x' = H_{\gamma\beta}(a)H_{\beta\alpha}(a)x = H_{\gamma\alpha}(a)x$ .

En cada carta  $U_\alpha$  podemos definir las proyecciones cartesianas correspondientes  $\pi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_\alpha$ . Estas proyecciones claramente respetan la relación  $\sim$ , es decir  $\pi_\alpha = \pi_\beta \circ H_{\beta\alpha}$ .

De esta forma, es posible definir una proyección globalmente analítica  $\pi : S \rightarrow T$ ,  $\pi|_{U_\alpha} = \pi_\alpha$ . Para cada  $U_\alpha$  fijo definimos  $\Phi_\alpha^{-1} = \imath|_{U_\alpha}$  (la inclusión en producto  $U_\alpha \times \mathbb{C}^n$  en  $S$ ). Así

$$\Phi_\beta = \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \circ \Phi_\alpha$$

Hemos probado la existencia una familia de trivializaciones asociadas al cociclo, hecho que es suficiente para garantizar la existencia

de un haz vectorial asociado a éste, sin que sea necesario dar las trivializaciones explícitamente.

□

**Ejemplo 3.6.** El *haz trivial* sobre una variedad  $M$ , que tiene por espacio total al producto  $M \times \mathbb{C}^n$ , su proyección es la proyección cartesiana en la primera coordenada  $\pi : M \times \mathbb{C}^n \rightarrow M$  y el cociclo asociado al haz, para cualquier par de trivializaciones del mismo, es simplemente  $\mathcal{H} = Id$ .

**Ejemplo 3.7.** Un ejemplo de suma importancia es el haz tangente a una variedad diferenciable  $M$ . Definimos

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

En este caso,  $T_p M$  es el conjunto de los vectores tangentes a  $M$  anclados en  $p$ .  $TM$  es también una variedad diferenciable con  $\dim TM = 2n$ , ya que  $n = \dim M = \dim T_p M$  y en cada punto de  $M$  estamos pegando una fibra de dimensión  $n$ . Tenemos lo siguiente:

$$\pi : TM \rightarrow M, \text{ con } \pi^{-1}(p) = T_p M$$

En un sistema de coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  el conjunto  $\{\partial/\partial x_j\}_{j=1}^n$  genera a los vectores tangentes a cada punto  $p$  (en la carta coordenada). Así, el cociclo que define la regla de pegado en las fibras del haz está dado por la matriz jacobiana del cambio de coordenadas.

El haz cotangente  $T^*M$  se define como el dual del haz tangente y es similar en estructura a  $TM$ . En este caso los elementos del haz son parejas  $(p, \omega)$ , donde  $\omega_p$  es un covector tangente o vector tangente dual, es decir, un funcional lineal definido como sigue:

### 3.2. HACES VECTORIALES SOBRE VARIETADES

---

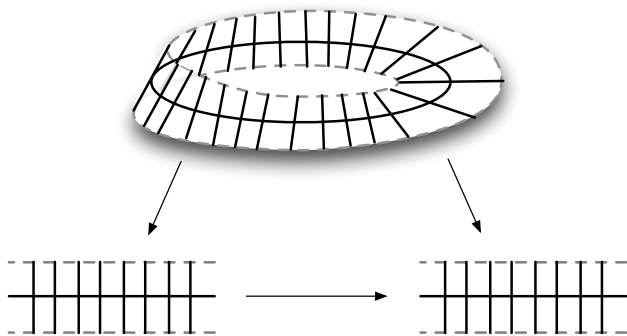
$$\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{C},$$

de aquí que a cada  $\omega \in T_p^* M$  sea una 1-forma. Más aún, el espacio tangente y el cotangente en un punto tienen la misma dimensión, por lo tanto son isomorfos.

**Ejemplo 3.8.** El haz normal, donde la fibra en cada punto  $p \in M$  está dada por  $N_p = T_p E \setminus T_p M$ .

**Ejemplo 3.9.** El haz estándar de grado  $d$ ,  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}$  es un haz lineal sobre una cubierta “estándar” de  $\mathbb{P}$ , dada como sigue: sea  $0 < r_1 < r_0$  y  $U_0 = \{z : |z| < r_0\}$ ,  $U_1 = \{z : r_1 < |z| \} \cup \{\infty\}$  y el cociclo dado por  $\{h_{01}, h_{10}\}$  por

$$h_{01}(z) = z^d = \frac{1}{h_{10}(z)} \text{ si } z \in A = U_0 \cap U_1.$$



La banda de Möbius es un haz estándar real sobre  $S^1$ , con grado  $d = -1$ .

**Definición 3.10** (Cocadena). Dada una cubierta  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ , una *cocadena*  $\mathcal{G}$  holomorfa de matrices subordinada a  $\mathcal{U}$  es una colección de funciones matriciales  $G_\alpha \in \text{Mat}(n, U_\alpha)$  holomorfas en la carta correspondiente.

Dos cociclos  $\mathcal{H} = \{H_{\beta\alpha}\}$  y  $\mathcal{H}' = \{H'_{\beta\alpha}\}$  inscritos en la misma cubierta son holomórficamente equivalentes si existe una cocadena de matrices, holomorfa, que los conjuga, es decir,

$$H'_{\beta\alpha} \cdot G_\alpha = G_\beta \cdot H_{\beta\alpha} \text{ en cada } U_{\alpha\beta}. \quad (3.9)$$

Si  $\{H_{\beta\alpha}\}$  y  $\{H'_{ij}\}$  son dos cociclos inscritos en cubiertas distintas  $\{U_\alpha\}$  y  $\{U'_i\}$ , entonces basta construir un refinamiento de ambas, a decir,  $\{U_\alpha \cap U'_i\}$ .

**Definición 3.11.** Se dice que un cociclo  $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$  es *soluble* si existe una cocadena holomorfa  $\{G_\alpha\}$  tal que

$$H_{\alpha\beta} = G_\alpha \cdot G_\beta^{-1}$$

Claramente, si un cociclo es soluble, entonces

$$H_{\alpha\beta} \cdot G_\beta = G_\alpha \cdot Id. \quad (3.10)$$

En otras palabras, el cociclo soluble es equivalente al cociclo trivial. De esta manera, los haces definidos por un cociclo soluble son biholomorficamente equivalentes al haz trivial.

**Definición 3.12** (Haces equivalentes). Una transformación de haces entre dos haces vectoriales  $\pi : E \rightarrow M$  y  $\pi' : E' \rightarrow M'$  es una aplicación holomorfa  $F : E \rightarrow E'$  que manda a las fibras de  $\pi$  en las fibras de  $\pi'$ , es decir, existe  $f : M \rightarrow M'$  tal que

$$\pi' \circ F = f \circ \pi.$$

Se dice que  $F$  está fibrada sobre  $f$ .

Dos haces son holomórficamente equivalentes si existe una transformación de haces, biholomorfa, entre ellos.

### 3.3. Clasificación de haces lineales en $\mathbb{P}^1$

**Lema 3.13.** Sean  $U_0, U_1 \subset \mathbb{P}$  dos regiones con frontera suave a trozos y cuya intersección  $V = U_0 \cap U_1$  también tiene frontera suave a trozos. Entonces toda función  $f \in \mathcal{A}(V)$ , holomorfa en  $V$  y continua sobre  $\bar{V} = \partial V \cup V$ , puede ser escrita como  $f = f_0 + f_1$ , con  $f_i \in \mathcal{A}(U_i)$ .

*Demostración.* Basta escribir  $\partial V = V_0 \cup V_1$  con  $V_i \subset \partial U_i$ ,  $V = V_0 \cup V_1$  y aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial V} \frac{f(t)dt}{t-z},$$

separando la integral,

$$2\pi i f(z) = \int_{V_0} \frac{f(t)dt}{t-z} + \int_{V_1} \frac{f(t)dt}{t-z} = f_0(z) + f_1(z),$$

donde

$$f_i(z) = \int_{V_i} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

Cada integral representa una función holomorfa sobre  $U_i$  y continua sobre  $\partial U_i$ .

□



**Proposición 3.14.** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un haz de rango 1,  $U$  y  $U'$  dos cartas de una cubierta de  $M$  tales que  $V = U \cap U' \neq \emptyset$  y  $W = U \cup U'$  son conexos y simplemente conexos. Entonces, el haz  $\pi|_W$  es equivalente al haz trivial.

*Demostración.* Sea  $h = H_{U,U'}$  una función biholomorfa y que no se anula en  $V$ . Por hipótesis  $V$  es simplemente conexo, entonces  $\log h$  es una función holomorfa y bien definida sobre  $V$ , aplicando el lema 3.13,

$$\log h = g - g',$$

con  $g$  holomorfa en  $U$  y  $g'$  en  $U'$ . Sacando la exponencial de la ecuación,

$$h = e^{g-g'} = \frac{e^g}{e^{g'}}.$$

Tanto  $e^g$  como  $e^{g'}$  son dos funciones holomorfas y que no se anulan. Así, es posible reemplazar el cociclo que define al haz  $\pi$  por uno equivalente tal que la función de pegado en  $V$  es la identidad. Por lo tanto, el haz  $\pi$  (y consecuentemente el cociclo que lo define) es equivalente al haz trivial sobre  $W$ .

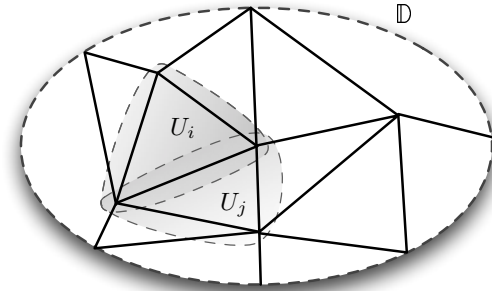
□

**Proposición 3.15.** Cualquier haz lineal  $\pi : E \rightarrow \mathbb{D}$  sobre el disco  $\mathbb{D}$  es biholomórficamente equivalente al haz trivial.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, el cociclo  $\mathcal{H} = \{H_{ij}\}$  está inscrito en una cubierta finita  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  que consiste en vecindades de alguna triangulación del disco, en caso de tratarse de

### 3.3. CLASIFICACIÓN DE HACES LINEALES EN $\mathbb{P}^1$

---



una cubierta arbitraria basta refinarla hasta obtener pequeñas vecindades de una triangulación.

Ya que  $\mathbb{D}$  es simplemente conexo y la cubierta finita, es posible reetiquetar los elementos de dicha cubierta de manera que

$$\tilde{U}_k = \{U_k \cup \dots \cup U_1\} \text{ y } U_{k+1} \cap \tilde{U}_k$$

son conexos y simplemente conexos.

Mediante inducción matemática, se prueba que el haz es equivalente al haz trivial sobre todo el disco. Por la proposición 3.14 el haz es equivalente al trivial sobre  $\tilde{U}_2$ .

Ahora, suponiendo que el haz es equivalente al trivial sobre  $\tilde{U}_k$ , aplicando la proposición 3.14 nuevamente, se tiene la equivalencia sobre  $\tilde{U}_{k+1} = U_{k+1} \cup \tilde{U}_k$ . Por el principio de inducción, el haz  $\pi$  es equivalente al haz trivial sobre el disco  $\mathbb{D}$ .

□

**Definición 3.16** (Cociclo de Birkhoff-Grothendieck). Sea  $\{U_0, U_1\}$

una cubierta “estándar” de  $\mathbb{P}$ . Un cociclo de matrices holomorfas inscrito en tal cubierta, biholomorfas en  $A = U_0 \cap U_1$  se llama de *Birkhoff-Grothendieck* si  $H_{01}|_A = H_{10}^{-1}|_A$ .

**Lema 3.17.** Todo cociclo  $\mathcal{H} = \{H_{ij}\}$  de rango 1 inscrito en la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$  es holomórficamente equivalente a un cociclo de Birkhoff-Grothendieck.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  la cubierta de  $\mathbb{P}$  en la que está inscrito el cociclo  $H$ . La cubierta  $\mathcal{U}$  se puede ordenar de tal manera que, para alguna  $k$ ,  $0 \in U_0 = U_1 \cup \dots \cup U_k \cong \mathbb{D}$ , donde  $\mathbb{D}$  es un disco, y  $\infty \in U_\infty = U_{k+1} \cup \dots$  sea *1-conexo*, es decir, en la carta  $w = \frac{1}{z}$  el conjunto  $U_\infty$  es un disco topológico. De esta forma se lleva a la cubierta original en una de Birkhoff-Grothendieck.

Por el lema 3.15 el cociclo  $\mathcal{H}$  es equivalente al trivial sobre  $U_0$  y análogamente, utilizando la carta  $w = \frac{1}{z}$ , el cociclo  $\mathcal{H}$  sobre  $U_\infty$  es equivalente al trivial, obteniendo así un cociclo de Birkhoff-Grothendieck.

□

**Teorema 3.18.** Todo cociclo de rango 1 de Birkhoff-Grothendieck  $\{h_{01}, h_{10}\}$  es holomórficamente equivalente a algún cociclo estándar de grado  $d$ .

*Demostración.* Sea  $H(z) = h_{01}(z) = \frac{1}{h_{10}(z)}$ . Por definición,  $H$  es holomorfa en  $A = \{z : r_1 < |z| < r_0\}$ . Escribiendo la serie de Laurent para  $H$ ,

$$H(z) = c_\nu z^\nu + c_{\nu+1} t^{\nu+1} + \dots, \quad \nu \in \mathbb{Z}, c_\nu \neq 0$$

es fácil ver que existe un único entero  $d$  (evidentemente  $d = \nu$ ) tal que  $z^{-d}H(z)$  es holomorfa y no se anula. En principio,  $H$  no se anula sobre  $A$ , en el caso contrario  $h_{10}$  tendría un polo en  $A$ , lo cual contradice la hipótesis de ser un cociclo de Birkhoff-Grothendieck.

### 3.3. CLASIFICACIÓN DE HACES LINEALES EN $\mathbb{P}^1$

---

Se sigue que  $z^{-d}H(z)$  tampoco se anula y es holomorfa, no sólo en  $A$  sino sobre todo  $U_0$ . De esta manera,

$$g(z) = \log z^{-d}H(z)$$

es una función bien definida, holomorfa en  $A$  y continua sobre la frontera. Aplicando el lema 3.13

$$g(z) = \int_{\partial U_0} \frac{g(t)dt}{t-z} - \int_{-\partial U_1} \frac{g(t)dt}{t-z} = g_0(z) - g_1(z).$$

Tomando la exponencial de  $g$ ,

$$z^{-d}H(z) = e^{g(z)} = \frac{e^{g_0(z)}}{e^{g_1(z)}}.$$

Reescribiendo  $G_i = e^{g_i(z)}$  si  $i = 0, 1$ , al ser funciones exponenciales no se anulan en ningún punto, tenemos una cocadena  $\{G_0, G_1\}$  que satisface la ecuación 3.9, es decir

$$H(z) \cdot G_1(z) = G_0(z) \cdot z^d.$$

Por lo tanto todo cociclo de Birkhoff-Grothendieck es holomórficamente equivalente a un cociclo estándar  $z^d$  para alguna  $d \in \mathbb{Z}$

□

**Teorema 3.19.** Todo haz lineal sobre la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$  es equivalente al haz estándar  $\zeta_d$  de algún grado  $d$ .

*Demostración.* Por 3.17 todo haz lineal es equivalente a uno de Birkhoff-Grothendieck, a su vez, este es equivalente a uno estándar por 3.18. □

Un ejemplo interesante es el haz tangente  $T\mathbb{P}$  de la esfera  $\mathbb{P}$ .

# Capítulo 4

## Secciones y conexiones

Al tratar con haces vectoriales importante introducir un nuevo lenguaje, el de secciones y conexiones, éste, entre otras cosas, nos permite definir invariantes globales de manera práctica. Localmente, podemos definir una derivada, hay una equivalencia con un abierto de un espacio euclídeo, etc., sin embargo, al pasar de lo *local* a lo *global* podemos obtener información sobre la estructura de la variedad respecto al espacio ambiente en el que ésta se encuentra.

### 4.1. Secciones meromorfas

**Definición 4.1** (Sección). Dado un haz vectorial holomorfo  $\pi : E \rightarrow M$ , una *sección* sobre el haz es una aplicación  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id$ , es decir,  $s(p) \in \pi^{-1}(p)$ ,  $p \in M$ .

Dada una sección holomorfa sobre un haz vectorial y una familia

#### 4.1. SECCIONES MEROMORFAS

---

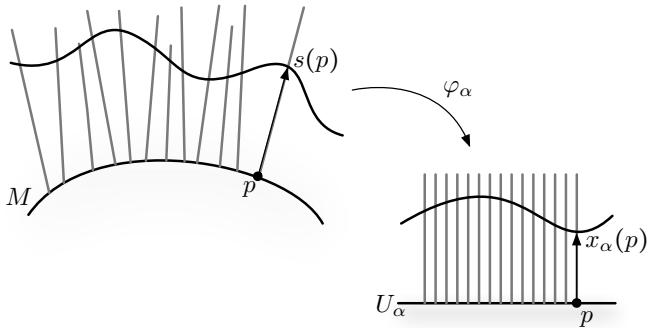
de trivializaciones  $\{\Phi_\alpha\}$  sobre cartas  $\{U_\alpha\}$  el conjunto  $\{x_\alpha\}$ , donde

$$x_\alpha = \Phi_\alpha \circ s|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

define una cocadena de vectores sobre el haz. Tomando otra trivialización  $\Phi_\beta$  sobre  $U_\beta$ , con  $U_{\alpha\beta} = U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$  y considerando el cociclo  $\mathcal{H} = \{H_{\alpha\beta}\}$  que define la regla de pegado sobre el haz,

$$H_{\beta\alpha} \cdot x_\alpha = \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\alpha \circ s = \Phi_\beta \circ s \quad \text{en } U_{\alpha\beta},$$

es decir, se respeta la regla de pegado  $x_\beta = H_{\beta\alpha}x_\alpha$  sobre la intersección de las cartas.



De manera análoga, dado el cociclo que define al haz y una cocadena holomorfa  $\{x_\alpha\}$  que satisface la regla de pegado, podemos definir una sección en cada carta, escribiendo  $s_\alpha = \Phi_\alpha^{-1} \circ x_\alpha$ .

Es claro que  $s_\alpha$  está bien definida en cada  $U_\alpha$ , además por ser  $\Phi_\alpha$  una trivialización, satisface  $\pi_\alpha \circ \Phi_\alpha = \pi$ , entonces tenemos lo siguiente:

$$\pi \circ s_\alpha = \pi_\alpha \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ x_\alpha = \pi_\alpha \circ x_\alpha = Id.$$

Por hipótesis se satisface la regla de pegado  $x_\beta = H_{\beta\alpha}x_\alpha$ , luego sobre  $U_{\alpha\beta}$  se tiene que

$$s_\beta = \Phi_\beta^{-1}x_\beta = \Phi_\beta^{-1}H_{\beta\alpha}x_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}x_\alpha = s_\alpha$$

por lo que es posible definir  $s$  de manera global simplemente por  $s|_{U_\alpha} := s_\alpha$ .

**Definición 4.2** (Orden de una función meromorfa). Dada una función  $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \mathcal{M}(M) \otimes \mathbb{C}^n$ , el *orden*  $f$  en el origen es el mínimo de los órdenes de sus componentes,

$$ord_0 f = \min_{1 \leq j \leq n} ord_0 f_j$$

donde  $ord_0 \varphi = \nu$  si y sólo si  $\varphi(z) = a_\nu t^\nu + a_{\nu+1} t^{\nu+1} + \dots$  con la constante  $a_\nu \neq 0$  y  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Si el punto en el que se desea calcular el orden es distinto al origen basta hacer una traslación.

Es fácil ver que el orden será cero salvo en los polos y ceros de la función. Si el punto  $p$  no es un polo es posible encontrar una vecindad de  $p$  donde la función es holomorfa, es decir, su serie de Laurent carece de términos de orden negativo, entonces  $ord_p \varphi \geq 0$ . Por otro lado si la función se anula en  $p$  entonces la serie alrededor del punto carece de término independiente y consecuentemente  $ord_p \varphi \geq 1$ .

La relación entre la definición 4.2 y la que se dió del grado de un haz estándar  $\zeta_d$  sobre la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$  es inmediata. Siguiendo los argumentos de la prueba de la proposición ?? se observa que  $ord_0 H$  es el único entero  $d$  tal que  $t^{-d}H(t)$  es una función holomorfa en una vecindad de  $p$  y que no se anula en dicho punto.

**Definición 4.3** (Sección meromorfa). Una cocadena meromorfa de vectores  $\{x_\alpha\}$  que satisface  $x_\beta = H_{\beta\alpha}x_\alpha$  en  $U_\alpha$ , donde  $H = \{H_{\alpha\beta}\}$  es

#### 4.1. SECCIONES MEROMORFAS

---

un cociclo, es una *sección meromorfa* sobre el haz definido por  $H$ . Se denota por  $\Gamma(E)$  al conjunto de todas las secciones meromorfas de un haz  $\pi : E \rightarrow M$ .

$\Gamma(E)$  posee naturalmente una estructura de espacio vectorial. Si  $s, s' \in \Gamma(E)$  y  $a \in \mathbb{C}$  es natural definir, para cada  $p \in M$

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p) \text{ y } (as)(p) = a \cdot s(p),$$

más aún, si  $f \in C^\infty(M)$  entonces

$$(f \cdot s)(p) = f(p) \cdot s(p),$$

es decir,  $\Gamma(E)$  es un módulo sobre el anillo de las funciones diferenciables.

**Teorema 4.4.** Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta y  $\pi : E \rightarrow M$  un haz lineal. El orden total de una sección meromorfa depende únicamente del haz sobre el cual se haya definida. En otras palabras, existe  $d \in \mathbb{Z}$  fija tal que

$$d = \deg s = \sum_{p \in M} \text{ord}_p s$$

para cualquier sección  $s$  sobre el haz.

*Demostración.* Sean  $s, s' \in \Gamma(E)$ . Como son dos secciones sobre el mismo haz de líneas, es claro que deben ser proporcionales, i.e., existe  $\varphi \in \mathcal{M}(M)$  tal que  $s = \varphi \cdot s'$ .

Como el orden en cada punto  $p$  es el mínimo exponente de la serie de Laurent alrededor de  $p$ , por las leyes de los exponentes, se tiene que  $\text{ord}_p \varphi \cdot s' = \text{ord}_p \varphi + \text{ord}_p s'$ , luego



$$\deg s = \sum_{p \in M} \text{ord}_p s = \sum_{p \in M} \varphi \cdot s = \sum_{p \in M} \text{ord}_p \varphi + \sum_{p \in M} \text{ord}_p s.$$

Al ser  $\varphi$  meromorfa, por el teorema del residuo, la suma del orden de  $\varphi$  sobre todos los puntos de  $M$  se anula, obteniendo  $\deg s = d = \deg s'$  para cualquier par de secciones en  $\Gamma(E)$ .  $\square$

**Corolario 4.5.** Un haz lineal  $\zeta_d$  sobre la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$  admite secciones holomorfas no triviales si y sólo si  $0 \leq d = \deg \pi$ .

*Demostración.* Sea  $s \in \Gamma(E)$  holomorfa y no trivial, es decir, no es idénticamente cero. Al ser  $s$  holomorfa sobre todo  $\mathbb{P}$  no tiene polos, entonces el orden de la sección en cualquier punto de la esfera es no negativo:

$$0 \leq \text{ord}_p s \quad \text{para todo } p \in \mathbb{P}.$$

Así, por el teorema 4.4, como todos los sumandos son no negativos se tiene que

$$0 \leq \sum_{p \in \mathbb{P}} \text{ord}_p s = \deg \pi$$

$\square$

Cuando se trabaja con haces de rango mayor que 1, para poder definir el grado, es necesario estudiar una construcción muy particular que permite asociar a cualquier haz otro con estructura lineal, es decir, de rango 1. Ya que dado un haz de rango  $n$  existe un cociclo  $\{H_{\alpha\beta}\}$  que lo define, con  $H_{\alpha\beta}(p) \in GL(n, \mathbb{C})$ , es posible calcular el determinante de estas matrices.

**Proposición 4.6.** Si  $\mathcal{H}$  es un cociclo de rango  $n$  entonces  $\det \mathcal{H} = \{h_{\alpha\beta}\}$ , con  $h_{\alpha\beta} = \det H_{\alpha\beta}$ , define un cociclo de rango 1. Además, si dos cociclos son equivalentes, sus determinantes también lo son.

*Demostración.* Es inmediato que el determinante satisface las condiciones de cociclo, se sigue del hecho que dadas dos matrices  $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$  entonces  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ , así las propiedades del cociclo original se heredan naturalmente al determinante.

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} \cdot h_{\beta\alpha} &= \det H_{\alpha\beta} \cdot \det H_{\beta\alpha} \\ &= \det H_{\alpha\beta} \cdot H_{\beta\alpha} = \det Id = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} \cdot h_{\beta\gamma} \cdot h_{\gamma\alpha} &= \det H_{\alpha\beta} \cdot \det H_{\beta\gamma} \cdot \det H_{\gamma\alpha} \\ &= \det H_{\alpha\beta} \cdot H_{\beta\gamma} \cdot H_{\gamma\alpha} = \det Id = 1, \end{aligned}$$

en las respectivas intersecciones  $U_{\alpha\beta}$  y  $U_{\alpha\beta\gamma}$ .

Para verificar que está bien definido basta tomar dos cociclos equivalentes  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  relacionados mediante una cocadena de matrices  $\{G_\alpha\}$ , así

$$H'_{\beta\alpha} \cdot G_\alpha = G_\beta \cdot H_{\beta\alpha},$$

como la cocadena  $\{G_\alpha\}$  es holomorfa, entonces cada  $g_\alpha = \det G_\alpha$  será una función holomorfa, luego  $\{g_\alpha\}$  es una cocadena holomorfa de funciones escalares y

$$h'_{\beta\alpha} \cdot g_\alpha = g_\beta \cdot h_{\beta\alpha}.$$

Por lo tanto  $\det \mathcal{H}$  y  $\det \mathcal{H}'$  son cociclos equivalentes.

□

**Definición 4.7.** El *determinante* de un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$  asociado a un cociclo  $\{H_{\alpha\beta}\}$ , es el haz lineal holomorfo asociado al cociclo  $\det H_{\alpha\beta}$ . Se denota a este haz por  $\det \pi$ .

**Definición 4.8** (Marco de secciones). Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial,  $U_\alpha$  una carta de  $M$ ,  $E_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ . Un *marco de secciones* es un conjunto  $S^\alpha S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \Gamma(E_\alpha)$  tal que, para todo  $p \in U_\alpha$ ,  $\{s_j(p)\}_{j=1}^n$  es una base para la fibra  $\tau_p$ .

Para simplificar la notación, omitiremos el superíndice  $\alpha$  del marco de secciones a menos que esto pueda llevar a alguna confusión.

Es evidente que cualquier sección  $s$  definida sobre el haz puede escribirse localmente, sobre  $U_\alpha$ , como

$$s = \sum_{j=1}^n a_j s_j \quad \text{con } a_j \in \mathcal{O}(M), s_j \in S^\alpha.$$

## 4.2. La derivada covariante

La derivada covariante es una generalización de la idea de derivada a los campos vectoriales sobre variedades. En esencia, es una operación que define de manera invariante los aspectos que ya conocemos sobre las superficies en  $\mathbb{R}^3$ , se relaciona de manera natural con las curvas geodésicas, el transporte paralelo y la curvatura. Más aún, proporciona un ejemplo fácil de entender geoméricamente, para después definir una conexión en objetos geométricos más complicados. Por el momento  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

## 4.2. LA DERIVADA COVARIANTE

---

Consideremos un difeomorfismo  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Recordemos que la derivada de  $f$  en la dirección de  $X$  está definida como sigue:

$$L_X f = X \cdot \nabla f = \langle X, \nabla f \rangle.$$

Ahora, si  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , podemos pensar en  $Y$  como una función vectorial  $(y_1, \dots, y_n)$  donde cada  $y_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . De esta forma, se puede extender naturalmente la definición de la derivada de un difeomorfismo en la dirección de un campo a la derivada de un campo en la dirección de otro:

$$D_X Y = (L_X y_1, \dots, L_X y_n).$$

Sin embargo, el vector  $D_X Y|_p$  no necesariamente está contenido en  $T_p M$ .

Supongamos que  $M$  es una variedad de Riemann y está encajada en un espacio ambiente  $E$ , podemos escribir  $T_p E = T_p M + N_p M$ , donde  $N_p M$  es el espacio normal a  $M$  en el punto  $p$ . Así,

$$D_X Y(p) = D_X Y|_{T_p M} + D_X Y|_{N_p M}.$$

La componente en el espacio tangente a  $M$  será la derivada covariante, que denotaremos por  $\nabla_X Y$ . Si  $n_p$  es el vector normal a  $M$  en el punto  $p$ , entonces

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, n \rangle n.$$

De esta manera,  $\nabla$  es un operador definido como sigue:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

a cada pareja de campos vectoriales  $(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$  le asigna el campo vectorial  $\nabla_X Y$ . Es inmediato el hecho de que la derivada

covariante es lineal en la primera entrada y en la segunda abre sumas y satisface la regla de Leibnitz, de hecho, hereda estas propiedades de la derivada direccional.

**Proposición 4.9.** Dados  $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}$  y una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , la derivada covariante satisface las siguientes propiedades:

- (1)  $\nabla_{X_1+X_2}Y = \nabla_{X_1}Y + \nabla_{X_2}Y.$
- (2)  $\nabla_{f \cdot X}Y = f \cdot \nabla_X Y.$
- (3)  $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- (4)  $\nabla_X(f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + (L_X f) \cdot Y$

*Demostración.* Las primeras tres son triviales y se heredan de manera inmediata de las propiedades de la derivada direccional y del producto interior. Para la cuarta, por las propiedades de la derivada de Lie. Sea  $z = (z_1, \dots, z_n) = (z_j)_{j=1}^n$  un sistema de coordenadas para  $M$  y expresemos al campo  $Y$  como  $Y = (y_1, \dots, y_n) = (y_i)$ . Observemos que:

$$\begin{aligned}
 L_X(fy_i) &= \left\langle X, \left( \frac{\partial}{\partial z_j} f y_i \right)_{j=1}^n \right\rangle \\
 &= \left\langle X, \left( \frac{\partial f}{\partial z_j} y_i + f \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right)_{j=1}^n \right\rangle \\
 &= \left\langle X, \left( \frac{\partial f}{\partial z_j} y_i \right)_{j=1}^n \right\rangle + \left\langle X, f \left( \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right)_{j=1}^n \right\rangle \\
 &= \langle X, \nabla f \rangle y_i + f \langle X, \nabla y_i \rangle \\
 &= (L_X f) y_i + f L_X y_i.
 \end{aligned}$$

Con lo anterior en mente, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 D_X fY &= D_X(fy_1, \dots, fy_n) \\
 &= (L_X(fy_1), \dots, L_X(fy_n)) \\
 &= (L_X f) \cdot Y + f \cdot (L_X y_1, \dots, L_X y_n) \\
 &= (L_X f) \cdot Y + f \cdot D_X Y,
 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 \nabla_X fY &= D_X fY - \langle D_X fY, n \rangle n \\
 &= fD_X Y + L_X f \cdot Y - \langle fD_X Y + L_X f \cdot Y, n \rangle n \\
 &= f(D_X Y - \langle D_X Y, n \rangle n) + L_X f \cdot Y - L_X f \langle Y, n \rangle n \\
 &= f\nabla_X Y + L_X f \cdot Y
 \end{aligned}$$

pues, como  $Y \in TM$  entonces  $\langle Y, n \rangle \equiv 0$ .

□

### 4.3. Conexiones sobre haces vectoriales

Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial complejo, en general, las secciones sobre el haz no pueden derivarse de manera canónica, ya que la derivada exterior no siempre está definida sobre todo el haz. Una conexión, en cierta forma, proporciona una forma de “derivar” las secciones sobre el haz. En particular, la derivada covariante como la definimos en la sección anterior es una conexión sobre el haz tangente  $TM$  de una variedad real  $M$ .

**Definición 4.10** (Conexión). Una *conexión* en un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$  es un operador bilineal

$$\begin{aligned}
 \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\rightarrow \Gamma(E) \\
 (X, s) &\rightarrow \nabla_X s
 \end{aligned}$$

tal que

(1) si  $f \in C^\infty$  entonces,

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s, \quad (4.1)$$

(2) y satisface la regla de Leibnitz,

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + L_X f \cdot s. \quad (4.2)$$

Para cada  $X$  fijo llamaremos a  $\nabla_X$  la derivada covariante en la dirección de  $X$ .

**Definición 4.11** (Sección plana). Dado un haz vectorial  $\pi : E \rightarrow M$ , una *sección plana* respecto a la conexión  $\nabla$  es un elemento  $s \in \Gamma(E)$  tal que  $\nabla_X s = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Ejemplo 4.12.** Consideremos un haz  $\pi : E \rightarrow M$  y una carta  $U \in M$ . Ya que, por definición, existe una trivialización sobre  $U$ ,  $E|_U = U \times \mathbb{C}^n$ . Sean  $(z_i)$  las coordenadas canónicas en  $\mathbb{C}^n$  y  $\{s_i\}$  un marco canónico de secciones, viendo a cada una como una función  $s_i : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $s_i(p) = (\delta_{ij})_{j=1}^n$ , donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Krönercker.

Claramente la derivada exterior  $D$  es una conexión, entonces tomemos  $\nabla = D$ , así

$$\nabla_X s_i = D_X s_i = (L_X \delta_{ij})_{j=1}^n \equiv 0,$$

en palabras, las  $s_i$  son planas respecto a  $\nabla$ . Ahora, dada  $s \in \Gamma(E)$ , podemos escribirla como combinación lineal de las  $s_i$ ; así, para calcular  $\nabla_X s$  basta aplicar las propiedades 4.1 y 4.2 que por definición cumple la conexión:

$$\nabla_X s = \nabla_X \sum a_i s_i = \sum \nabla_X (a_i s_i) = \sum (a_i \nabla_X s_i + L_X a_i \cdot s_i)$$

y puesto que las  $s_i$  son planas, se sigue que

$$\nabla_X s = \sum L_X a_i \cdot s_i.$$

### 4.3. CONEXIONES SOBRE HACES VECTORIALES

---

En general, dado  $\pi : E \rightarrow M$ , un abierto  $U \subset M$ , un marco local de secciones  $S = \{s_j\} \subset \Gamma(E|_U)$  y una conexión  $\nabla$  sobre el haz, por la definición de conexión  $\nabla_X s_j$  es una sección, entonces podemos expresarla como combinación de los elementos del marco  $S$ :

$$\nabla_X s_j = \sum \omega_j^i(X) s_i \quad \text{con } \omega_j^i \in \mathcal{M}(M).$$

Observemos que las aplicaciones  $\omega_j^i$  se evalúan en campos vectoriales. Puesto que  $\nabla$  es una conexión,

$$\nabla_{fX} s_j = \sum \omega_j^i(fX) s_i = \sum f \omega_j^i(X) s_i,$$

entonces las  $\omega_j^i$  actúan como un módulo sobre funciones escalares y por el teorema ?? son 1-formas. De esta manera la conexión queda determinada (sobre  $U$ ) por  $n^2$  1-formas que podemos acomodar en una matriz de  $n \times n$ , de hecho, la matriz  $\omega = (\omega_j^i)$  es una 1-forma matricial, es decir, valuada sobre  $GL(n, \mathbb{C})$ .

Generalizando, si  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta de  $M$  y  $S^\alpha$  un marco local de secciones en cada abierto  $U_\alpha$ , existe una 1-forma matricial  ${}^\alpha\omega$  que determina a la conexión en ese abierto,  $\omega_\alpha$  se llama la forma de conexión asociada a  $U_\alpha$ . Más aún, localmente, basta saber como opera la conexión sobre un marco de secciones para poder hacer el cálculo explícito de la conexión aplicada a una sección  $s \in \Gamma(E_\alpha)$ , expresando esta última como combinación lineal del marco.

**Proposición 4.13.** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un haz lineal. Dada  $s \in \Gamma(E)$  existe una única conexión respecto a la cual  $s$  es plana.

*Demostración.* Basta resolver la siguiente ecuación funcional:

$$\nabla_X s \equiv 0 \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{X}(M)$$

Supongamos que en cada  $U_\alpha$  nuestra sección está dada por la cocadena  $s \cong \{x_\alpha\}$ . Tomando en cada carta la sección canónica  $s_0 = 1$



(el marco de secciones consta de un solo elemento porque el haz es lineal) tenemos que  $s|_{U_\alpha} = x_\alpha \cdot s_0$ . Si vemos a la cocadena como una función escalar, entonces

$$0 = \nabla_X(x_\alpha \cdot s_0) = x_\alpha \nabla_X s_0 + L_X x_\alpha \cdot s_0.$$

De esta manera, tenemos la conexión definida explícitamente para la sección canónica en cada carta:

$$\nabla_X 1 = \frac{L_X x_\alpha}{x_\alpha} \cdot 1 = X \cdot d \log x_\alpha,$$

en otras palabras, la forma de conexión de  $\nabla$  en cada  $U_\alpha$  es  $\omega_\alpha = d \log x_\alpha$ .  $\square$

Nuevamente, tenemos objetos definidos de manera local. Para poder estudiarlos globalmente, necesitamos ver cómo se interrelacionan.

**Proposición 4.14.** Sean  $\pi : E \rightarrow M$  un haz vectorial de rango  $n$ ,  $\{U_\alpha\}$  una cubierta abierta de  $M$  y  $\{H_{\beta\alpha}\}$  el cociclo inscrito en ella. Tomando  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  y  $S = \{s_i\}$ ,  $T = \{t_i\}$  marcos de secciones en  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  respectivamente, dada una conexión  $\nabla$  sobre el haz, si  $\omega_\alpha$  y  $\omega_\beta$  son las formas de conexión de acuerdo al marco correspondiente, entonces se relacionan de la siguiente manera:

$$\omega_\beta = H_{\beta\alpha} \omega_\alpha H_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha} d(H_{\alpha\beta}).$$

Si escribimos  $H = H_{\alpha\beta}$ , obtenemos una fórmula más sencilla:

$$H \omega_\beta = \omega_\alpha H + dH. \tag{4.3}$$

### 4.3. CONEXIONES SOBRE HACES VECTORIALES

---

*Demostración.* Para empezar, denotaremos por  $\alpha = [\alpha_{ij}]$  y  $\beta = [\beta_{ij}]$  a  $\omega_\alpha$  y  $\omega_\beta$  respectivamente, con el fin de simplificar la notación.

Sean  $s = \{s_1, \dots, s_n$  y  $t = \{t_1, \dots, t_n\}$  marcos de secciones sobre  $U_\alpha$  y  $U_\beta$  respectivamente, inducidos por las trivializaciones correspondientes. Entonces, en  $U_{\alpha\beta}$  existen funciones  $h_j^i$  ( $i, j = 1, 2$ ) tales que:

$$t_j = \sum_{i=1}^n h_j^i s_i. \quad (4.4)$$

Más aún, cada  $s_i$  y  $t_i$ , por ser secciones en un haz de rango  $n$ , pueden verse como vectores  $s_i = (s_{ij})$  y  $t_i = (t_{ij})$ . Entonces, si escribimos cada sección como una fila en una matriz, obtenemos:

$$[s] = [s_{ij}], \quad [t] = [t_{ij}],$$

que, junto con la ecuación 4.4 resulta en:

$$[t] = [h_i^j][s]. \quad (4.5)$$

Es importante notar que, por construcción,  $[h_i^j] = H$ , hecho es aún más evidente gracias a 4.5.

Por simplicidad haremos los cálculos para  $n = 2$ , la prueba para  $n > 2$  es prácticamente igual.

Aplicando la conexión  $\nabla$  a  $t$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla [t] &= \nabla([h_i^j][s]) \\ &= \nabla \begin{bmatrix} h_1^1 & h_1^2 \\ h_2^1 & h_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \\ &= \nabla \begin{bmatrix} h_1^1(s_1) + h_1^2(s_2) \\ h_2^1(s_1) + h_2^2(s_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

aplicando la regla de Leibnitz de la conexión en cada entrada,

$$\nabla [t] = \left[ \begin{array}{c} h_1^1 \nabla(s_1) + h_1^2 \nabla(s_2) \\ h_2^1 \nabla(s_1) + h_2^2 \nabla(s_2) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} dh_1^1(s_1) + dh_1^2(s_2) \\ dh_2^1(s_1) + dh_2^2(s_2) \end{array} \right].$$

Es fácil notar que si desarrollamos el segundo sumando obtendremos  $dH \cdot [s]$ , así la ecuación anterior se convierte en:

$$\nabla [t] = \left[ \begin{array}{c} h_1^1 \nabla(s_1) + h_1^2 \nabla(s_2) \\ h_2^1 \nabla(s_1) + h_2^2 \nabla(s_2) \end{array} \right] + dH [s]. \quad (4.6)$$

□

**Ejemplo 4.15.** Si  $\pi : E \rightarrow M$  es un haz lineal y  $\nabla$  una conexión sobre este haz, entonces en  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  tenemos que

$$\omega_\beta = \frac{1}{h_{\alpha\beta}} \omega_\alpha h_{\alpha\beta} + \frac{1}{h_{\alpha\beta}} dh_{\alpha\beta},$$

como en este caso el producto es conmutativo, obtenemos

$$\omega_\beta = \omega_\alpha + d \log h_{\alpha\beta} \quad (4.7)$$

En particular, si se trata de un haz lineal sobre la esfera de Riemann  $\mathbb{P}^1$ , al ser éste equivalente a un haz estándar de grado  $d$  entonces,

$$\omega_1 = \omega_0 + d \log t^d.$$

Hemos visto que a cada conexión se le puede asociar (localmente) una 1-forma matricial, que en el caso de haces lineales corresponde a una matriz de una sola entrada, en este caso podemos definir el residuo de una conexión en un punto, así como su orden total.

### 4.3. CONEXIONES SOBRE HACES VECTORIALES

---

**Definición 4.16** (Forma de conexión). El conjunto singular  $\Sigma$  de una conexión meromorfa es la colección de puntos donde cada  $\omega_\alpha$  tiene un polo. Dada una conexión  $\nabla$  sobre un haz lineal  $\pi : E \rightarrow M$ , si  $p \in U_\alpha$ , entonces definimos  $res_p \nabla = res_p \omega_\alpha$ , donde  $\omega_\alpha$  es la *forma de conexión* de  $\nabla$  sobre  $U_\alpha$ .

Veamos que la definición es consistente, si  $p \in U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$  y  $\omega_\alpha, \omega_\beta$  son las formas de conexión sobre su respectivo abierto, inmediatamente obtenemos

$$res_p \omega_\beta = res_p \omega_\alpha + res_p d \log h_{\alpha\beta},$$

donde el último término se anula, pues estamos calculando el residuo a una función que tiene primera integral, entonces

$$res_p \omega_\beta = res_p \omega_\alpha.$$

El siguiente resultado nos permite mostrar la utilidad de las conexiones para definir objetos globales que dan lugar a invariantes.

**Teorema 4.17.** Sea  $M$  una superficie de Riemann compacta y  $\pi : E \rightarrow M$  un haz lineal. Entonces, la suma del total de los residuos de una conexión sobre el haz no depende de la conexión y es igual al grado del haz:

$$\sum_{p \in M} res_p \nabla = \deg \pi, \text{ para toda conexión } \nabla.$$

*Demostración.* Sean  $\nabla$  y  $\nabla'$  dos conexiones distintas sobre el haz. Cada una puede escribirse sobre cada carta  $U_\alpha$  mediante su forma de conexión  $\omega_\alpha$  y  $\omega'_\alpha$  respectivamente. Por la ecuación 4.7:

$$\omega_\beta = \omega_\alpha + d \log h_{\alpha\beta},$$

$$\omega'_\beta = \omega'_\alpha + d \log h_{\alpha\beta}.$$

Consideremos la conexión  $\nabla - \nabla'$ , entonces su forma de conexión en cada carta será  $\eta_\alpha = \omega_\alpha - \omega'_\alpha$ , luego, al escribir la relación entre  $\eta_\beta$  y  $\eta_\alpha$  se cancelan los términos  $d \log h_{\alpha\beta}$ :

$$\eta_\beta = \omega_\beta - \omega'_\beta = \omega_\alpha - \omega'_\alpha + d \log h_{\alpha\beta} - d \log h_{\alpha\beta} = \eta_\alpha,$$

entonces  $\eta_\alpha = \eta_\beta$  en cualquier intersección de las cartas, esto significa que  $\eta = \eta_\alpha$  es una 1-forma global bien definida sobre toda  $M$  y por consiguiente

$$0 = \sum_{p \in M} \text{res}_p \eta,$$

de donde es inmediato que

$$0 = \sum_{p \in M} \text{res}_p (\nabla - \nabla') = \sum_{p \in M} \text{res}_p \nabla - \sum_{p \in M} \text{res}_p \nabla'.$$

Por lo tanto, el orden total no depende de la conexión.

Ahora, basta trabajar con una conexión  $\nabla$  conveniente para hacer los cálculos. Tomemos  $s \in \Gamma(E)$  arbitraria y sea  $\{x_\alpha\} \cong s$  la cocadena de vectores que determina a la sección en cada carta. Sin pérdida de generalidad, consideremos a la cubierta  $U_\alpha$  de tal manera que si  $p_0$  es tal que  $x_\alpha(p_0) = 0$  entonces  $p_0$  está en un único elemento de la cubierta, es decir  $p_0 \in U_{\alpha\beta}$  si y sólo si  $\alpha = \beta$ .

Construyamos una conexión  $\nabla$  respecto a la cual  $s$  es plana, por la proposición 4.13, la forma de conexión en cada carta está dada por las derivadas logarítmicas de la sección, es decir,

$$\omega_\alpha = d \log x_\alpha,$$

### 4.3. CONEXIONES SOBRE HACES VECTORIALES

---

entonces

$$\sum_{p \in M} \text{res}_p \nabla = \sum_{\alpha, p \in U_\alpha} \text{res}_p d \log x_\alpha. \quad (4.8)$$

Notemos que  $k = \text{res}_p dx_\alpha/x_\alpha$  implica que  $x_\alpha$  tiene un cero de orden  $k$  en  $p$ , es decir,  $x_\alpha(z) = (z-p)^k g_\alpha(z)$  en una vecindad  $V \subset U_\alpha$  de  $p$  (donde  $g$  es holomorfa y distinta de cero), entonces

$$\text{res}_p \frac{dx_\alpha}{x_\alpha} = \text{ord}_p x_\alpha,$$

luego, por la expresión 4.8 tenemos

$$\sum_{p \in M} \text{res}_p \nabla = \sum_{\alpha, p \in U_\alpha} \text{ord}_p x_\alpha,$$

es decir,

$$\sum_{p \in M} \text{res}_p \nabla = \sum_{p \in M} \text{ord}_p s,$$

que por el teorema 4.4 coincide con el grado del haz.

□

## Capítulo 5

# El Teorema de Savelev

Antes de enunciar el teorema principal de este capítulo, es necesario introducir varias definiciones y enunciar algunos resultados que utilizaremos en la demostración de dicho teorema. Prácticamente podemos calcar las definiciones e ideas que utilizamos para trabajar con haces vectoriales, omitiendo el requisito de linealidad en las fibras. A estos nuevos objetos les llamaremos “*haces fibrados*”. Para empezar, estudiaremos el caso de un haz fibrado sobre la esfera y lo identificaremos con un haz lineal, que en efecto, será el haz *normal* sobre la esfera. Más adelante definiremos las variedades de Stein y probaremos que toda variedad de Riemann abierta satisface los requisitos de la definición. Para terminar con la sección enunciaremos un teorema de Siu (1976) y uno de sus corolarios, que será necesario para completar la prueba al teorema de Savelev.

## Capítulo 6

# Foliaciones dicríticas genéricas

En este capítulo expondremos un resultado para campos vectoriales dicríticos donde se aplican varios conceptos que estudiamos en los capítulos anteriores, permitiéndonos relacionar de una manera muy natural los invariantes obtenidos en diferentes contextos.

De esta manera, primero explotaremos el punto singular de un campo dicrítico para después pegar una vecindad de este en una vecindad de la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$ . Luego, aplicaremos el teorema de Savelev y veremos la relación que se da con el índice de Camacho-Sad y más adelante construiremos un biholomorfismo que permita dar una forma normal analítica del campo en cuestión.



## 6.1. La construcción de Loray

Para empezar, consideremos la explosión  $\tilde{\mathbf{v}}$  de un punto singular de un campo vectorial  $\mathbf{v}$  en la carta  $(v, y)$ . Buscaremos, en cierta forma, rectificar la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{v}}$  de la explosión de  $\mathbf{v}$  de tal forma que quede transversal a  $\mathcal{F}_y$ .

**Proposición 6.1.** En una vecindad del punto  $(v = 0, y = 0)$  de la explosión de  $\mathbf{v}$  existe un biholomorfismo  $G : (v, y) \mapsto (g(v, y), y)$  tal que:

- (1) corresponde a la identidad en los ejes  $\{v = 0\}$  y  $\{y = 0\}$ ,
- (2) transforma a las hojas de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{v}}$  en las rectas  $v = k$  con  $k$  constante.

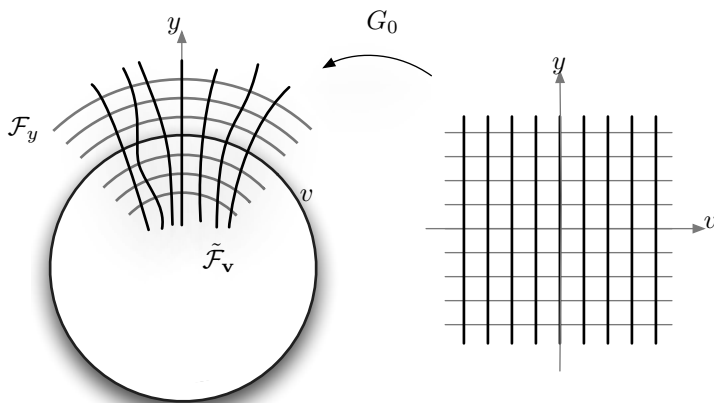


Figura 6.1: Rectificación de la foliación  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{v}}$

*Demostración.* Recordando la ecuación 2.9, sabemos que las hojas de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbf{v}}$  están dadas por la ecuación diferencial

$$L(v, y) := \frac{dv}{dy} = \frac{\varphi_0(v, y)}{\psi_0(v, y)}.$$

Gracias a que el campo cumple con las propiedades de genericidad (definición 2.8) la función  $\psi_0(0, 0) \neq 0$  y por lo tanto la ecuación diferencial  $L(v, y)$  es holomorfa. Consideremos para cada condición inicial  $v = v_0$  la solución  $V(v_0, 0)$  de  $L$ . Definimos a una aplicación como sigue:

$$G_0 : (v_0, y) \mapsto V(v_0, y),$$

de esta manera,  $G = G_0^{-1}$  es el biholomorfismo que buscamos.  $\square$

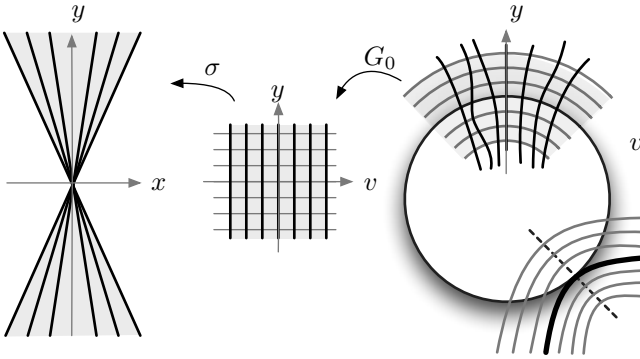


Figura 6.2: Construcción de  $F$ .

Consideremos un germe de campo vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{N}_2^{d, gen}$ , existen constantes  $\varepsilon_0, \delta_0$  y un difeomorfismo  $F : U \rightarrow F(U)$ , donde  $U = \{|y| < \delta_0, |x| < \varepsilon_0|y|\}$ , tal que:

- (1)  $F$  es la identidad en  $\{x = 0, 0 < |y| < \delta_0\}$ ,

- (2)  $F\{(v, k) \text{ tales que } k \text{ es constante}\} = \{(v, k)\}$  y
- (3)  $F$  transforma a las rectas  $\{v = k\}$ , con  $k$  constante, en las hojas de la foliación  $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}$ .

La construcción es bastante sencilla, basta tomar  $F = \pi \circ G_0 \circ \sigma^{-1}$ , donde  $\pi$  es la proyección de la explosión y  $\sigma$  es la implosión.

El siguiente paso es extender  $\mathbf{v}$  en una vecindad de la esfera de Riemann  $\mathbb{P}$ , es decir, compactificar el campo. Haremos el pegado de la siguiente manera:

Sean  $r, R, R', \varepsilon, \varepsilon'$  números positivos tales que  $r < R < R' < \delta_0$  y  $\varepsilon' < \varepsilon < r\delta_0$  y sean  $U_0 = \{(x, y) \in (\mathbb{C}, 0) : |x| < \varepsilon\}$  y  $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P} : |x| < \varepsilon, |y| > r\}$ . Si  $U_{0,1} = U_0 \cap U_1$  pegamos la foliación mediante  $F|_{U_{0,1}}$ .

Hemos construido un objeto que, al menos en cada  $U_i$  es Hausdorff, además la función  $F$  es biholomorfa, entonces el espacio total  $E$  que obtenemos del pegado es también Hausdorff. Más aún, por construcción tenemos cartas coordenadas, por lo tanto  $E$  es una variedad holomorfa.

Observemos que las hojas de la foliación se extienden holomórficamente de  $U_0$  a  $U_1$  de manera natural por  $F$ . Viendo a  $U_1$  en la carta  $(x, z)$ , donde  $zy \equiv 1$ , las rectas  $\{v = k\}$  ( con  $v = \frac{x}{y}$ ) se transforman en las hipérbolas  $\{zx = k\}$ , es decir,

$$\ell_k = \{(x, z) : z = \frac{k}{x}\},$$

en esta carta, hay un único punto singular en  $(x = 0, z = 0)$ . Sabemos que esta foliación corresponde al campo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

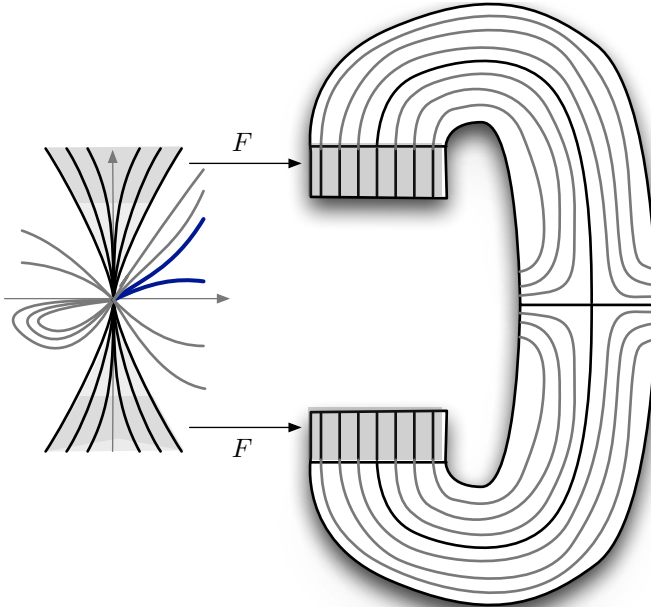


Figura 6.3: Pegado con el campo constante.

cuyo punto singular es un punto silla. De esta forma, tenemos una foliación  $\mathcal{F}_v$  definida globalmente sobre  $E$ , con dos únicos puntos singulares, uno dicrítico en  $p_0 := (x = 0, y = 0)$  y un punto silla en  $p_1 := (x = 0, y = \infty)$ .

Por otro lado, dado que  $F$  dejaba a las curvas  $y = k$  invariantes, esta foliación también se extiende de manera natural a  $U_1$ .

**Proposición 6.2.** Bajo el esquema anterior, si  $n = 1$ , entonces el índice de autointersección de  $\mathbb{P} \hookrightarrow E$  es 0.

*Demostración.* Aplicando la definición 2.16 a ambos puntos singulares, para calcular el índice de Camacho-Sad:

$$i_0 = \text{Res}_{y=0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \right) \Big|_{x=0} = 1$$

$$i_1 = \text{Res}_{z=0} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x}{z} \right) \Big|_{x=0} = -1$$

Ya que no hay más puntos singulares sobre  $E$ , la suma total  $i_0 + i_1 = 0$ . Por el teorema ?? esta suma coincide con el índice de autointersección de la esfera encajada en  $E$ .  $\square$

Ya que se satisfacen las hipótesis del teorema 5.7 (Savelev), existe un biholomorfismo  $H : (E, \mathbb{P}) \rightarrow (\{(\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{P}\}, \{0\} \times \mathbb{P})$ .

## 5.1. Preliminares al teorema de Savelev

**Definición 5.1** (Haz fibrado holomorfo). Sean  $C, E, M$  variedades holomorfas. Una aplicación holomorfa  $\pi : E \rightarrow M$  define un *haz fibrado* si para cada punto  $p \in M$  existe una vecindad  $U$  de  $p$  en  $M$  y un biholomorfismo

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times C$$

tal que, para  $u \in \pi^{-1}(U)$  arbitraria,  $\pi(u) = \pi_0 \circ \varphi(u)$ , donde  $\pi_0$  es la proyección en la primera componente.

Consideremos una cubierta  $\{U_\alpha\}$  de  $M$  y un conjunto de trivializaciones  $\{\varphi_\alpha\}$  inscrito en la cubierta, si  $p \in U_{\alpha\beta}$  y  $x \in \pi^{-1}(p) = C$ , entonces existe una función  $F : U_{\alpha\beta} \times C \rightarrow \text{Diff}C$  tal que

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, x) = (p, F(p, x)) \text{ , con } F(p, x) \in C.$$

**Proposición 5.2.** Consideremos un haz fibrado holomorfo  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}$ , con  $\pi$  de rango 1 (y por lo tanto la fibra también) sobre la esfera de Riemman  $\mathbb{P} \hookrightarrow E$  encajada en  $E$ . Entonces  $\ker d\pi \cong N$ .

*Demostración.* Para la fibra en cada punto  $p \in \mathbb{P}$  tenemos que

$$T_p(\pi^{-1}(p)) = \ker d_p\pi.$$

Como la proyección es de rango 1, entonces  $T_p(\pi^{-1}(p))$  es transversal a  $\mathbb{P}$  y por lo tanto,

$$T_p E = \ker d\pi(p) \oplus T_p \mathbb{P}.$$

Por otro lado, sabemos que

$$T_p E = N_p \oplus T_p \mathbb{P}, \text{ donde } N_p = T_p E / T_p \mathbb{P},$$

así, existen dos sucesiones exactas que satisfacen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & N_p & \longrightarrow & T_p E & \xrightarrow{d_p \pi} & T_p \mathbb{P} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & & \nearrow \cdots & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \ker d_p \pi & \longrightarrow & T_p E & \longrightarrow & T_p \mathbb{P} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

De esta manera podemos identificar al haz normal con el núcleo de la derivada de la proyección,  $N \cong \ker d\pi$ .  $\square$

**Definición 5.3** (Variedad de Stein). [10] Una variedad holomorfa  $M$  se llama *variedad de Stein* si:

- (1)  $\mathcal{O}(M)$  separa a los de puntos de  $M$ , es decir, para cualquier pareja  $x \neq y \in M$  existe  $f \in \mathcal{O}(M)$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ ,
- (2) para todo conjunto discreto  $\{x_j\} \subset M$  existe una función holomorfa sobre  $M$  que tiene polos exactamente en  $\{x_j\}$ .

**Teorema 5.4.** Toda superficie de Riemann  $M$ , abierta, es una variedad de Stein. Más aún, si  $\{x_j\} \in M$  es un conjunto discreto y  $\{c_j\} \subset \mathbb{C}$ , entonces existe una función  $f \in \mathcal{O}(M)$  tal que  $f(x_j) = c_j$  para cada  $j$ .

*Demostración.* Por el teorema de Weirstrass hay una función  $h$  holomorfa, de divisor  $\sum x_i$ . La función  $g_i = c_i/h$  sobre  $U_i$  un único polo en  $x_i$ . Por lo tanto  $g_i - g_j$  es holomorfa sobre la intersección. El teorema de Mittag Leffler nos provee de una función meromorfa  $g$  tal que  $g - g_i$   $\square$

**Teorema 5.5** (Siu, 1976). [12] Sea  $X$  un espacio complejo,  $S$  una subvariedad de  $X$ . Si  $S$  es de Stein, entonces existe una vecindad  $V$  en  $X$  de  $S$  tal que  $V$  es de Stein.

**Corolario 5.6.** Sea  $M$  una variedad compleja y  $U$  una variedad de Stein,  $\iota : U \hookrightarrow M$  una inmersión holomorfa. Sea  $N$  el haz normal de  $U$  dentro de  $M$ , es decir, cada fibra es  $N_p = T_p M \setminus T_p U$  para cada punto  $p \in U \subset M$ . Entonces existe una vecindad abierta  $V$  de  $U$  en  $N$  y una inmersión holomorfa  $\tilde{\iota} : V \hookrightarrow M$  que extiende a  $\iota$ .

## 5.2. Demostración del teorema de Savelev

**Teorema 5.7** (Savelev, 1982). [11] Sea  $M$  una variedad holomorfa y  $\mathbb{P} \hookrightarrow M$  un encaje tal que el haz normal  $N$  de  $\mathbb{P}$  tiene grado 0, entonces el haz  $\pi : M \rightarrow \mathbb{P}$  es holomórficamente trivial en una vecindad de  $\mathbb{P}$ .

*Demostración.* Consideremos una cubierta estándar  $\{U_0, U_1\}$  de  $\mathbb{P}$  y sea  $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ . Por el teorema 5.5, [12], ya que cada  $U_i$  es un disco topológico, podemos trivializar en el haz una vecindad alrededor de  $\mathbb{P}$ , es decir, existen coordenadas apropiadas  $(z, x_i) \in U_i \times (\mathbb{C}, 0)$  donde la proyección  $\pi$  es paralela a la segunda coordenada.

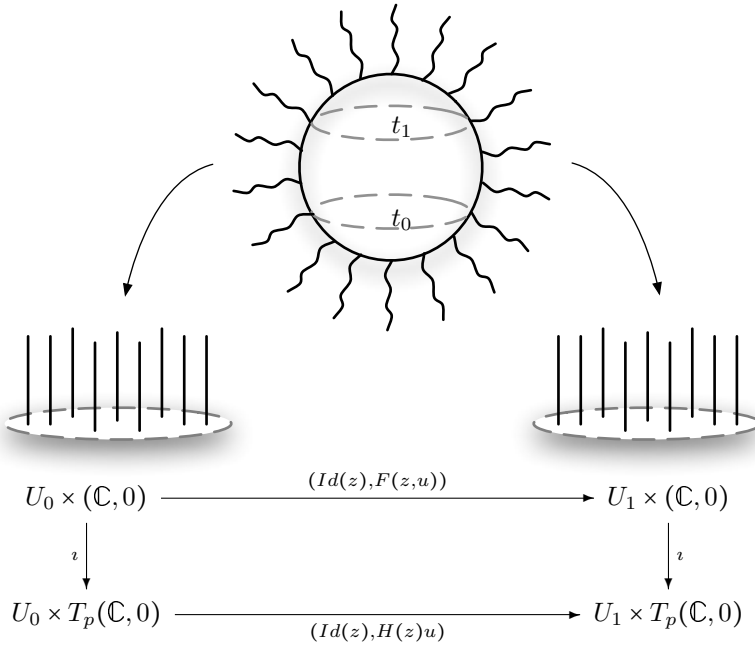
En estas coordenadas, la regla de pegado  $\tilde{H}$  debe respetar a la proyección en cada fibra, por lo tanto

$$\pi(\tilde{H}(z, x_0)) = \pi(z, x_0) = z,$$

o lo que es equivalente,  $\tilde{H}$  es la identidad en la primera coordenada. Entonces existe una función  $F$  tal que:

$$(z, x_0) \xrightarrow{\tilde{H}} (z, F(z, x_0)).$$





Reescribamos a la función  $F$  de la siguiente manera:

$$F(z, u) = u + f(z, u),$$

y definimos una función  $H$  como la derivada de  $F$  en la segunda coordenada, así,

$$H(z) = \frac{\partial F}{\partial u}(z, 0).$$

Gracias a que en las coordenadas que estamos trabajando  $\pi$  es paralela a la coordenada  $u$ , tenemos que  $H$  coincide con  $d\pi$ . Por la proposición 5.2 podemos identificar el haz en las coordenadas  $(z, x_i)$  con su linealización a través de la derivada.

## 5.2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE SAVELEV

---

De esta forma,  $H$  es la regla de pegado en el haz normal  $N$ . Por hipótesis  $\text{deg } N = 0$ , es decir, es equivalente al trivial, entonces, por 3.10, existen funciones  $\varphi_i$  holomorfas y que no se anulan en  $U_i$  tales que

$$H = \frac{\varphi_1}{\varphi_0},$$

esto implica, que bajo el cambio de coordenadas  $(z, v_i) = (z, \varphi_i(z)y_i)$  el cociclo que da la regla de pegado en el haz normal es la identidad.

$$\begin{array}{ccc} U_0 \times T_0(\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{(Id(z), H(z)u)} & U_1 \times T_0(\mathbb{C}, 0) \\ (z, y_0) & & (z, y_1) \\ \varphi_0(z) \downarrow & & \downarrow \varphi_1(z) \\ (z, v_0) & \xrightarrow{(Id, Id)} & (z, v_1) \end{array}$$

Teniendo esto en mente, podemos decir que el haz asociado al cociclo  $\{G, G^{-1}\}$ , donde  $G = \varphi_1 \circ F \circ \varphi_0^{-1}$ , es equivalente al haz original  $\pi : E \rightarrow M$ . Más aún, escribiendo  $G(z, v_0) = v_0 + g(z, v_0)$ , entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(z, 0) \equiv 0$$

pues la  $\frac{\partial G}{\partial v}(z, 0) = Id$  por construcción. Por lo tanto

$$g(z, v) = a(z)v^2 + O(v^3).$$

Resumiendo, hemos encontrado coordenadas en las que el cociclo del haz normal es la identidad, esto implica que existe una coordenada común  $x$  en las fibras sobre la intersección  $U_{01}$ . Ahora el problema queda reducido a encontrar cambios de coordenadas  $H_i(z, x)$ ,

$$H_i : M \rightarrow U_i \times T_0(\mathbb{C}, 0)$$

tales que  $H_1 = G \circ H_0$ , es decir,

$$H_1(z, x) = H_0(z, x) + g(z, H_0(z, x)). \quad (5.1)$$

Reescribiendo a  $H_i$  como  $x + h_i(z, x)$  y cancelando los términos comunes a ambos lados obtenemos

$$h_1(z, x) = h_0(z, x) + g(z, x + h_0(z, x)). \quad (5.2)$$

Haremos algo similar a la prueba del teorema de linealización de Poincaré (1.29). Sean  $\mathcal{B}_\rho^i$  el espacio de funciones continuas sobre  $U_i$ , definimos la transformación  $\mathcal{L}$  como sigue, si escribimos la serie de Laurent respecto a  $z$  para  $g$  y tomamos a  $h_0$  como la parte de Taylor de la serie y  $h_1$  la parte con las potencias negativas de  $z$  entonces:

$$\mathcal{L} : g \mapsto h = (h_0, h_1) \in \mathcal{B}_\rho^0 \times \mathcal{B}_\rho^1.$$

Claramente es acotado, pues

$$\|L(g)\|_\rho = \|(h_0, h_1)\|_\rho = \|h_0\| + \|h_1\|$$

y los  $h_i$  son acotados. Ahora, por el lema 1.28 el operador  $S_g$  definido por  $S_g(h(z)) = g(z, (Id + h_0)(z))$  es una contracción fuerte y por lo tanto también lo es la composición  $T = \mathcal{L} \circ S_g$ . Entonces el operador  $T$  tiene un único punto fijo  $h$ :

$$h = T(h),$$

que es equivalente a resolver la ecuación 5.2. Esta  $h = (h_0, h_1)$  nos proporciona los cambios de coordenadas necesarios para poder trivializar una vecindad de la esfera en el haz.

□



# Bibliografía

- [1] V. I. Arnol'd, *Ordinary differential equations*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1978. Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman. MR0508209 (58 #22707)
- [2] Daniel Huybrechts, *Complex geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction. MR2093043 (2005h:32052)
- [3] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. MR2363178 (2009b:34001)
- [4] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 5th ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2008. MR2431897 (2009g:53036)
- [5] J.-F. Mattei and R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 4, 469–523 (French). MR608290 (83b:58005)
- [6] Shigeyuki Morita, *Geometry of differential forms*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 201, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the two-volume Japanese original (1997, 1998) by Teruko Nagase and Katsumi Nomizu; Iwanami Series in Modern Mathematics. MR1851352 (2002k:58001)
- [7] L. Ortiz-Bobadilla, E. Rosales-González, and S. M. Voronin, *Rigidity theorems for generic holomorphic germs of dicritic foliations and vector fields in  $(\mathbb{C}^2, 0)$* , Mosc. Math. J. **5** (2005), no. 1, 171–206 (English, with English and Russian summaries). MR2153473 (2006e:32040)
- [8] ———, *Analytic normal forms of germs of holomorphic dicritic foliations*, Mosc. Math. J. **8** (2008), no. 3, 521–545, 616 (English, with English and Russian summaries). MR2483223 (2010a:34200)
- [9] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953. MR0055409 (14,1070c)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [10] Éric Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Mathematics, vol. 77, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989 (French). MR1034955 (90k:30085)
- [11] V. I. Savel'ev, *Zero-type imbedding of a sphere into complex surfaces*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **4** (1982), 28–32, 85 (Russian, with English summary). MR671883 (84d:32007)
- [12] Yum Tong Siu, *Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood*, Invent. Math. **38** (1976/77), no. 1, 89–100. MR0435447 (55 #8407)