



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA MATEMÁTICA DE LA REFRACCIÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

RAÚL GUTIÉRREZ HERNÁNDEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. GUSTAVO CRUZ PACHECO
2010**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Gutiérrez
Hernández
Raúl
53411042
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemático
403062199

2. Datos del tutor

Dr
Gustavo
Cruz
Pacheco

3. Datos del sinodal 1

Dr
Jorge
Fujioka
Rojas

4. Datos del sinodal 2

Dr
C. Arturo
Vargas
Guadarrama

5. Datos del sinodal 3

Dra
María del Carmen
Jorge
y Jorge

6. Datos del sinodal 4

Dra
Clara
Garza
Hume

7. Datos del trabajo escrito

Teoría Matemática de la Refracción
80 p
2010

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a Dios que simplemente me ha dado todo.

Les agradezco a mis padres por su cariño, apoyo y paciencia durante toda la carrera. A mi mamá Guillermina Hernández H. que siempre demuestra ser una verdadera madre. A mi papá Raúl Gutiérrez J. que es un ejemplo de entrega en todo lo que hace. A mi hermana Nancy Gutiérrez H. y a su familia por su interés y apoyo.

A Cynthia Nizeida Avelino P. por su amor, apoyo y comprensión. Cynthia siempre tiene una sonrisa y un beso para mí sean cuales sean las circunstancias. A la familia Avelino Palacios por su apoyo y preocupación.

A Gustavo Cruz Pacheco por su gran ayuda y paciencia. Gustavo es una persona muy importante para mi desarrollo en todos los sentidos durante mi carrera.

Al departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS, UNAM. Al personal de limpieza, a las secretarias, a Ana y Ramiro y por supuesto a los investigadores siempre dispuestos a ayudar, en especial al Dr. C. Arturo Vargas G.

A mis sinodales Dra. María del Carmen Jorge y J., Dra. Clara Garza H., Dr. C. Arturo Vargas G. y Dr. Jorge Fujioka R. Me enseñaron que siempre es posible hacer mejor las cosas.

A todos ellos muchas gracias, sin ellos habría sido imposible.

"Las Matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo".
Galileo Galilei

Índice general

AGRADECIMIENTOS	III
INTRODUCCIÓN	VII
1. LEY DE SNELL CLÁSICA, ÓPTICA GEOMÉTRICA	1
1.1. Leyes de Reflexión y Refracción Clásicas	1
1.2. Sistemas Ópticos	5
1.3. Reflexión Total	9
1.4. El Arcoiris	11
1.5. La Cáustica	16
2. ECUACIONES DE MAXWELL, TEORÍA ONDULATORIA	19
2.1. La Ecuación de Onda	20
2.2. Paquete de Ondas	23
2.3. La Ecuación Eiconal	25
2.4. Los Rayos y su Intensidad	26
2.5. Dos Medios Homogéneos de Distinto Índice de Refracción	32
3. LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER	37
3.1. Vector de Polarización	38
3.2. Índice de Refracción No-lineal	41
3.3. Variación Lenta en el Índice de Refracción	47
3.4. La Cáustica y la Ecuación de Airy	49
3.5. Deducción de la Ecuación No-lineal de Schrödinger	51
4. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN NO-LINEALES	59
4.1. Solución Tipo Solitón	59
4.2. Ecuación No-lineal de Schrödinger con un Término Potencial	63
4.3. La Interfase	65
4.4. Variedad de Comportamientos del Rayo	70
Conclusiones	77

INTRODUCCIÓN

El descubrimiento de Maxwell de que la luz es una onda electromagnética fue uno de los grandes descubrimientos de la humanidad que unificó el entendimiento de una gran variedad de fenómenos. Con escasas excepciones, esta teoría electromagnética y en particular la óptica fueron hasta mediados del siglo XX teorías lineales. Fué hasta el descubrimiento del láser en los 60's del siglo pasado, que se tuvieron intensidades suficientemente grandes para que los efectos no-lineales provenientes de la reacción con algunos materiales fueran perceptibles. Desde hace 20 años, es común encontrar una gran variedad de fenómenos ópticos donde los efectos no-lineales son determinantes; un ejemplo canónico es la propagación de pulsos de gran intensidad luminosa en fibras ópticas. Actualmente, con la fabricación de metamateriales compuestos por nanoestructuras artificiales, se tiene una enorme variedad de fenómenos donde los efectos no-lineales son de gran importancia. A la par de este proceso experimental, se ha desarrollado una teoría matemática de óptica no-lineal siguiendo los avances ya probados en otras áreas como la mecánica de fluidos.

Los fenómenos producidos por la refracción de la luz han llamado la atención de la humanidad desde tiempos remotos. Sólo hay que recordar que en la Mitología Sumeria, el arcoiris es el collar de Ishtar, collar con el que prometió a los hombres que un nuevo diluvio universal no ocurriría. El primer propósito de este trabajo es mostrar cómo con matemáticas relativamente elementales se pueden explicar varios de estos fenómenos. Aquí, la luz se piensa como compuesta de rayos luminosos que se propagan en línea recta (o en geodésicas, si el medio es más complicado). Esta teoría lleva el nombre de óptica geométrica y es de enorme utilidad aún en problemas muy complicados. Además, dando una interpretación adecuada, la óptica geométrica es una muy buena aproximación para algunos fenómenos ópticos. Hay que agregar también, que su utilidad no se restringe a la óptica, esta teoría es muy útil en todas las áreas de aplicación de las ondas, como por ejemplo la sismología o la ingeniería de costas e incluso en la propagación de frentes difusivos.

El segundo propósito, es estudiar una generalización de la ley de Snell de la refracción lineal al caso en que los medios son tanto dispersivos como no-lineales. Esta generalización de Aceves, Moloney y Newell, a diferencia de la ley de Snell, muestra una variedad de comportamientos del rayo cuando cruza una

interfase no-lineal. Para describir este fenómeno, hay que calcular la ecuación no-lineal de Schrödinger asociada al problema. Hay que aclarar que la ecuación no-lineal de Schrödinger es una ecuación canónica que aparece en una gran cantidad de problemas de Mecánica de Fluidos, Plasmas, Óptica, y en general siempre que un paquete de ondas se vea afectado por dispersión y no-linealidad, con el mismo orden de magnitud independientemente del medio de propagación.

La tesis está organizada de la siguiente forma. En el Capítulo 1, se estudian las leyes de la reflexión y de la refracción clásicas. A continuación se usa la ley de Snell para explicar la formación del arcoiris y calcular su tamaño, es decir, el ángulo que forma con el observador y su grosor. Se muestra también que en la cáustica, que hace visible al arcoiris, la óptica geométrica predice una intensidad infinita, lo cual es evidentemente erróneo y cuya corrección viene en el Capítulo 3.

En el Capítulo 2 se introduce la teoría ondulatoria de la luz. A partir de las ecuaciones de Maxwell se muestra que la luz es una onda electromagnética. Después se muestra la diferencia entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo; esta diferencia es muy importante cuando se estudian las envolventes de los paquetes de ondas en medios no-lineales. Finalmente se muestra que la óptica geométrica del Capítulo 1 es el caso límite de la teoría ondulatoria cuando la longitud de onda tiende a cero.

En el Capítulo 3 se introduce el fenómeno de la polarización y se muestra que a primer orden funciona modificando el índice de refracción. Se deduce la relación de dispersión lineal de un paquete de ondas y se estudia la ecuación de su envolvente. Como parte de esta teoría se muestra cómo la teoría ondulatoria regulariza la singularidad predicha por la óptica geométrica dando como resultado la función de Airy. Finalmente, se deduce la ecuación no-lineal de Schrödinger para la envolvente de un paquete de ondas cuando la refracción y la no-linealidad son del mismo orden de magnitud.

En el Capítulo 4 se estudia la generalización de la ley de Snell descubierta por A. Aceves, J. Moloney y A.C. Newell. Primero calculamos el solitón de la ecuación no-lineal de Schrödinger. A continuación estudiamos como se comporta un solitón al cruzar una interfase no-lineal. Para esto se desarrolla una teoría aproximada donde el solitón es una partícula moviéndose clásicamente en un potencial auxiliar. Se muestra como hay una variedad de comportamientos, el solitón puede rebotar en la interfase, cruzar con una velocidad terminal diferente o incluso quedar atrapado en la interfase. Finalmente se comenta sobre las limitaciones de esta teoría aproximada.

En una tesis de matemáticas es difícil inclinarse demasiado hacia el arte y la mitología, a menos que se desee hacer uno de esos híbridos que muy frecuentemente son desafortunados. Aún así, esta tesis estaría incompleta sin hacer una referencia al excelente libro de Lee y Fraser que fue una de las inspiraciones

de este trabajo, "The Rainbow Bridge: Rainbows in Art, Myth and Science"
[Raymond].

Capítulo 1

LEY DE SNELL CLÁSICA, ÓPTICA GEOMÉTRICA

En este capítulo, estudiaremos la luz como formada por rayos; esta teoría aproximada es conocida como óptica geométrica. En esta aproximación, si pensamos a la luz como formada por fotones (teoría corpuscular), un rayo de luz es la trayectoria de un fotón, por otra parte, si pensamos en la luz como formada por ondas (teoría ondulatoria), un rayo es una línea imaginaria en la dirección de propagación de la onda. En óptica tenemos varios fenómenos que se pueden estudiar sin necesidad de hacer hipótesis sobre la naturaleza de la luz.

1.1. Leyes de Reflexión y Refracción Clásicas

En esta sección deduciremos las leyes de reflexión y refracción. Para esto suponemos que la luz toma el camino de distancia más corta para deducir la reflexión y nos daremos cuenta que esta suposición es incorrecta para la refracción, la correcta es que la luz toma la trayectoria que le toma el menor tiempo recorrer.

En distintos medios la luz se propaga con una velocidad v menor a la velocidad en el vacío c , el cociente entre una y otra se llama índice de refracción del medio $n = \frac{c}{v}$, si el medio es isótropo y homogéneo el índice de refracción es constante, en un medio homogéneo anisótropo n depende de la dirección de propagación y si el medio no es homogéneo n depende de la posición (más adelante se verá que el índice de refracción depende también de la longitud de onda).

Si tenemos tres medios distintos como por ejemplo vidrio, agua y aire y queremos medir el índice n de vidrio contra agua lo hacemos de la siguiente manera. Sean n_{12} el índice de aire contra agua, n_{13} el de aire contra vidrio y n_{23} el de agua contra vidrio. Luego el índice n_{12} es la razón de la velocidad de la luz en el aire (v_1) y la velocidad de la luz en el agua (v_2), n_{13} la razón de la

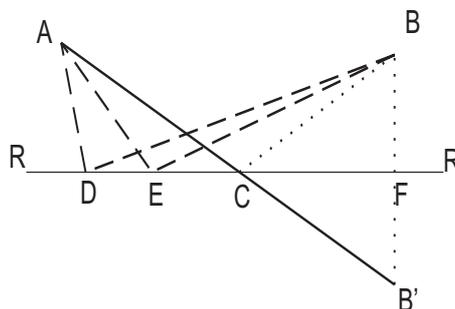


Figura 1.1: En la reflexión el punto C es el que minimiza la distancia que recorre un rayo para ir del punto A al punto B , con la condición de ir al espejo antes de ir al punto B .

velocidad en el aire y la velocidad en el vidrio (v_3) y n_{23} la razón de la velocidad en el agua y la velocidad en el vidrio, entonces

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{\frac{v_1}{v_3}}{\frac{v_1}{v_2}} = \frac{n_{13}}{n_{12}}.$$

Es decir, podemos obtener el índice de refracción para dos medios a partir de los índices de esos medios cada uno contra el aire lo cual no parece evidente. Entonces, en general, si n_i es la velocidad de la luz en el medio i con relación a la velocidad en el vacío, el índice del medio i contra el medio j le llamamos n_{ij} nos queda

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}.$$

Vamos a deducir primero la ley de la reflexión, donde suponemos que la luz escoge la trayectoria de distancia más corta, después veremos que para la refracción, la trayectoria de distancia más corta, nos da una trayectoria incorrecta.

Supongamos entonces que la luz choca en un espejo, es decir, si un rayo de luz tiene que ir de un punto A a otro B , la trayectoria de distancia más corta es una línea recta de A a B , pero si agregamos la condición de que el rayo vaya al espejo antes de llegar a B ya no se ve claro qué trayectoria escoger (Figura 1.1).

Sea RR' el espejo plano, si uno piensa en ir lo más rápido posible al espejo y luego a B sobre ADB , con D sobre el espejo, tendríamos una larga trayectoria DB , si nos movemos hacia la derecha, a E , incrementamos AE con respecto a AD pero acortamos EB con respecto a DB , la pregunta es ¿cuál es el punto C , sobre el espejo, que toma el tiempo más corto?

Del otro lado de RR' construimos B' de tal forma que la distancia de B' a RR' sea igual a la distancia de B a RR' y además que la recta BB' sea

perpendicular a RR' . Sea F la intersección de la recta BB' con RR' , ahora como BFR es ángulo recto, EB es igual a EB' , si sumamos las distancias $AE + EB$ o $AE + EB'$ el problema se convierte en saber cuál es la distancia más corta entre A y B' , entonces tenemos la respuesta, el punto C está sobre RR' y sobre la recta que une A y B' , entonces si ACB' es una línea recta luego el ángulo BCF es igual al ángulo $B'CF$ y también al ángulo ACR , es decir

$$\angle ACR = \angle BCF$$

que nos da la ley de reflexión:

- o El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Ahora deducimos la ley de refracción, para esto, usamos que la velocidad de la luz en el agua es menor que la velocidad de la luz en el aire, es decir, si la velocidad de la luz en el aire es menor que la velocidad de la luz en el vacío por el factor n_1 ($c = n_1 v_1$) y la velocidad de la luz en el agua es menor que la velocidad de la luz en el vacío por el factor n_2 ($c = n_2 v_2$), luego $n_1 < n_2$. Supongamos entonces que estamos en un punto A en el aire y queremos llegar a un punto B en el agua. Uno podría pensar que en línea recta llegamos más rápido de un punto a otro pero en este caso nos damos cuenta que uno puede incrementar la distancia en el aire para acortar la distancia en el agua porque aquí vamos más lento. La pregunta es entonces qué tanto tengo que recorrer en el aire y qué tanto tengo que recorrer en el agua. Aquí nos damos cuenta que la luz recorre la trayectoria que le toma el menor tiempo y no la distancia más corta que sí nos sirvió en el caso anterior pero porque la luz se mantiene en el mismo medio y en ese caso son equivalentes tomar la distancia más corta y tomar el menor tiempo de recorrido. Este principio es llamado "Principio de Fermat" el cual dice que la luz toma el camino que le toma el menor tiempo recorrer [Courant I], [Feynman I].

Sea RR' la frontera entre un medio y otro, como se ve en la Figura 1.2, donde suponemos que la parte superior es aire y la parte inferior es agua. Sea a la distancia horizontal de AB y sean b_1, b_2 las distancias de A y B a la recta RR' respectivamente, es decir, la distancia vertical de AB es $b_1 + b_2$. Queremos encontrar el punto C sobre RR' que minimice el tiempo para ir del punto A al punto B . Sea NN' la normal a la recta RR' que pasa por el punto C y supongamos que la distancia horizontal AC es x . Sean $\theta_i = \angle ACN$ y $\theta_r = \angle BCN'$. Luego si llamamos d_1 la distancia AC y d_2 la distancia CB entonces el tiempo que nos toma ir de A a B es

$$t = \frac{d_1}{\frac{c}{n_1}} + \frac{d_2}{\frac{c}{n_2}} \quad (1.1)$$

con $\frac{c}{n_1}, \frac{c}{n_2}$ las velocidades en el aire y en el agua respectivamente.

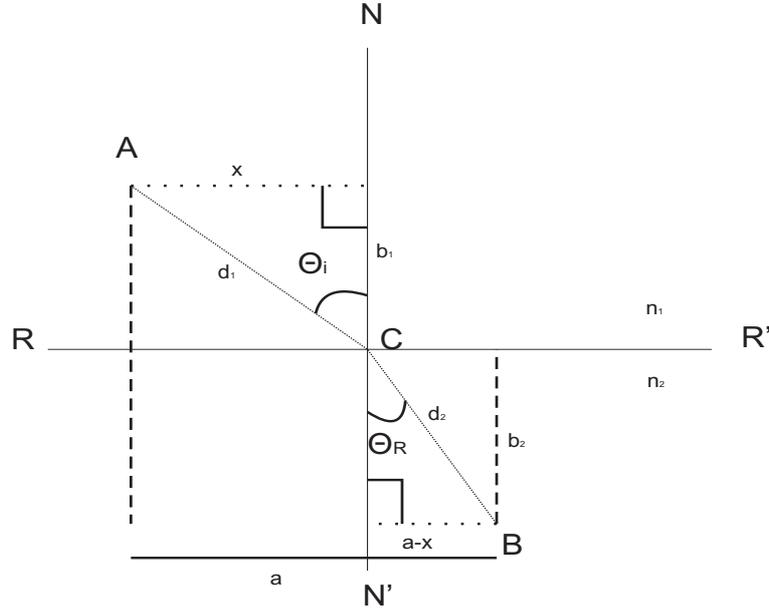


Figura 1.2: En la refracción el punto C es el que minimiza el tiempo que tarda el rayo en ir del punto A al punto B , con A y B en medios con distinto índice de refracción.

Necesitamos ver a t como una función de x , ponemos entonces a d_1 y a d_2 en términos de x . Según la Figura 1.2, $d_1 = \sqrt{b_1^2 + x^2}$ y $d_2 = \sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}$ sustituimos en (1.1) y tenemos

$$t = \frac{\sqrt{b_1^2 + x^2}}{\frac{c}{n_1}} + \frac{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}{\frac{c}{n_2}}.$$

Para minimizar el tiempo calculamos x tal que $\frac{dt}{dx} = 0$, entonces de

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{\frac{c}{n_1} \sqrt{b_1^2 + x^2}} + \frac{x-a}{\frac{c}{n_2} \sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}} = 0,$$

tenemos

$$x \frac{c}{n_2} \sqrt{b_2^2 + (a-x)^2} = (a-x) \frac{c}{n_1} \sqrt{b_1^2 + x^2} \quad (1.2)$$

y si sustituimos $\text{sen } \theta_i = \frac{x}{d_1} = \frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}}$, $\text{sen } \theta_r = \frac{a-x}{d_2} = \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}$ en (1.2) llegamos a la ley de refracción o ley de Snell:

$$n_1 \text{sen } \theta_i = n_2 \text{sen } \theta_r.$$

◦ El cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es igual al cociente de las velocidades de ambos medios.

1.2. Sistemas Ópticos

Vamos a revisar algunos sistemas ópticos aplicando lo visto anteriormente, para esto necesitamos una fórmula geométrica. Si tenemos un triángulo de altura pequeña h y base larga b , la diagonal d es más larga que la base (Figura: 1.3), la diferencia $\Delta = d - b$ la aproximamos sabiendo que

$$d^2 - b^2 = h^2, (d - b)(d + b) = h^2$$

y si $d + b \approx 2d$, luego

$$\Delta \approx \frac{h^2}{2d}.$$

Supongamos que tenemos dos medios, digamos aire y vidrio y también que en el aire la velocidad es $\frac{1}{n_1}$ y en el vidrio la velocidad es $\frac{1}{n_2}$, con n_1 y n_2 sus respectivos índices de refracción. Supongamos que tenemos un punto O en el aire a una distancia d del punto P sobre la superficie del vidrio PT y otro punto O' en el vidrio a una distancia d' del mismo punto P (Figura: 1.4).

Queremos diseñar la curva de la superficie del vidrio PT de tal manera que todo rayo proveniente de O choque en el vidrio y se dirija hacia O' . La curva tiene que ser de tal forma que el tiempo que le toma a la luz recorrer OP más el tiempo que le toma recorrer PO' sea constante no importa en qué parte de la superficie se encuentre P . Ahora supongamos que P está cerca del eje, trazamos la perpendicular PQ con Q sobre la recta OO' ; sea h la altura PQ . Si pensamos a la superficie pasando por P como plana, el tiempo que toma ir de O a P excedería el tiempo que toma ir de O a Q y del otro lado ir de P a O' excedería el tiempo de Q a O' , por esta razón la superficie no es plana, el exceso lo compensamos con TQ donde T es la intersección de la recta OO' con la superficie del vidrio. El exceso de tiempo que toma recorrer OP es $\frac{n_1 h^2}{2d}$ y el exceso de tiempo que toma recorrer PO' , del lado derecho es $\frac{n_2 h^2}{2d'}$, esos tiempos deben compensarse con TQ y el exceso de tiempo en TQ sería la diferencia de $n_2 TQ$, que es el tiempo en el vidrio, y $n_1 TQ$ que es el tiempo que tomaría el rayo si TQ estuviera en el aire.

Entonces para encontrar la longitud TQ , necesitamos saber que tanto hay que curvar el lente. Consideramos la circunferencia de radio r que pasa por T , con centro en el punto C que se encuentra sobre la recta OO' , luego TQ es igual a $\frac{h^2}{2r}$, por lo tanto tenemos

$$\frac{n_1 h^2}{2d} + \frac{n_2 h^2}{2d'} = (n_2 - n_1) \frac{h^2}{2r}$$

luego

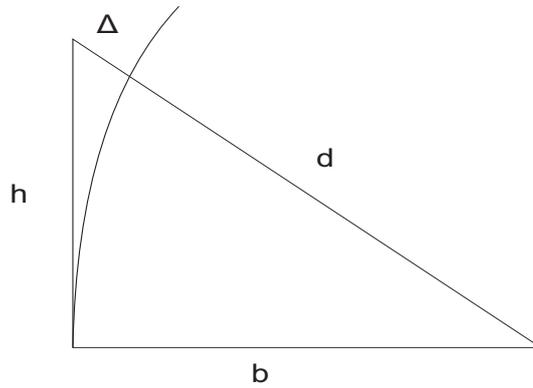
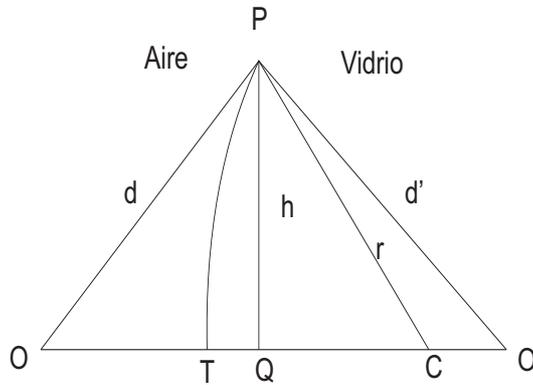


Figura 1.3: Fórmula geométrica para sistemas ópticos.

Figura 1.4: Enfoque de luz: del punto O , que se encuentra en aire, al punto O' , que se encuentra en vidrio.

$$\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d'} = \frac{(n_2 - n_1)}{r} \quad (1.3)$$

entonces si queremos enfocar la luz de O a O' calculamos el radio de curvatura de la superficie usando (1.3).

Ahora con la misma curvatura r no sólo enfocaríamos dos puntos sino cualesquiera tales que la suma de los recíprocos de sus distancias multiplicados uno por n_1 (el recíproco de la distancia en el primer medio) y otro por n_2 , (el recíproco de la distancia en el segundo medio) sea constante.

Por ejemplo si $d \rightarrow \infty$ entonces d' debe decrecer o lo que es lo mismo si O se aleja de la superficie, O' se acerca a la superficie y viceversa. Si O va hacia

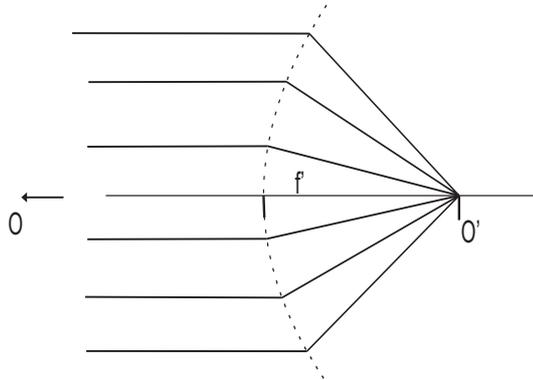


Figura 1.5: Enfoque de rayos paralelos.

infinito, O' se acerca a una cierta distancia de la superficie llamada longitud focal f' para ese el medio (Figura 1.5), por lo tanto si vienen rayos paralelos del primer medio hacia la superficie del segundo medio entonces éstos se dirigen hacia O' a una distancia focal f' de la superficie, análogamente si la fuente de luz viniera del segundo medio como rayos paralelos, éstos se dirigirían hacia O a una distancia focal f de la superficie dentro el primer medio, o se puede ver de otra forma, si la fuente estuviera en O a la distancia f de la superficie entonces después de chocar con la superficie del segundo medio saldrían rayos paralelos, así tenemos las siguientes relaciones con la ecuación (1.3)

$$\begin{aligned} \frac{n_2}{f'} &= \frac{(n_2 - n_1)}{r}, & f' &= \frac{rn_2}{(n_2 - n_1)} \\ \frac{n_1}{f} &= \frac{(n_2 - n_1)}{r}, & f &= \frac{rn_1}{(n_2 - n_1)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La ecuación (1.3) se puede escribir, en términos de f según (1.4), como

$$\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d'} = \frac{n_1}{f}.$$

La situación se vuelve interesante si $d < f$, entonces $\frac{n_1}{d} > \frac{n_1}{f}$ y luego $d' < 0$, la fórmula sigue sirviendo si dibujamos los rayos divergiendo de O , éstos chocan con la superficie, pero no convergen a un punto, porque O está más cerca de la superficie que cuando salen en forma paralela de la superficie, entonces éstos divergen como si vinieran de un llamado punto virtual O' que se encuentra en el primer medio precisamente a una longitud d' de la superficie del segundo medio, ésta aparente imagen se llama imagen virtual, cuando no es así se le llama imagen real (Figura: 1.6). Entonces cuando d' es negativo, O' se encuentra del mismo lado de la superficie que O y la fórmula también es correcta.

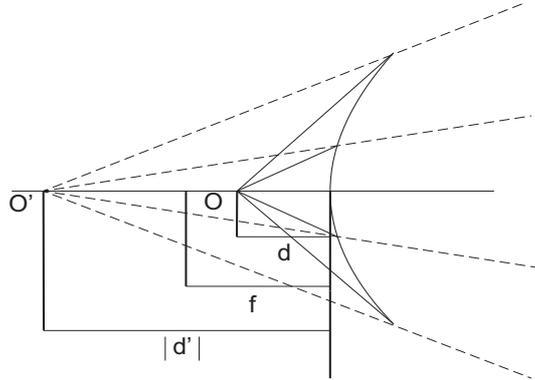


Figura 1.6: Imagen virtual.

Del caso cuando $r \rightarrow \infty$, se observa que $\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d'} = 0$, entonces $n_2 d = n_1 d'$, esto significa que si miramos un punto en un medio desde otro medio más denso, el punto se verá más profundo de lo que realmente está por el factor $\frac{n_2}{n_1}$ y si por el contrario el punto está en el medio más denso y lo vemos desde el medio menos denso, éste se verá menos profundo de lo que realmente está por el factor $\frac{n_1}{n_2}$. Esto es lo que pasa cuando vemos el fondo de una alberca desde fuera, el fondo se ve menos profundo de lo que realmente es. Por ejemplo, si la alberca tiene 1.5 m. de profundidad nosotros la vemos con una profundidad aproximada de $(1.5 \text{ m.})\left(\frac{1}{\frac{4}{3}}\right) = 1.125 \text{ m.}$ desde afuera, ya que el índice de refracción del aire es casi 1 y el índice de refracción del agua es $\frac{4}{3}$.

Ahora supongamos que queremos enfocar dos puntos O , O'' y que tenemos dos superficies de diferente curvatura con vidrio entre ellas, primero enfocamos O a un punto alternativo O' usando la primera superficie y olvidando la segunda, luego enfocamos O' a O'' usando la segunda superficie, es decir, en general podemos tener k superficies y hacer k veces el procedimiento.

Un caso especial es si tenemos dos superficies muy juntas (Figura 1.7), tan cerca que podemos ignorar pequeños errores debidos a la distancia entre las superficies; nuevamente queremos enfocar los puntos O y O' . Supongamos que un rayo choca en el punto P , que se encuentra sobre el lente, el exceso de tiempo de ir de O a O' es $\frac{n_1 h^2}{2d} + \frac{n_1 h^2}{2d'}$ si ignoramos la parte entre las superficies de longitud l con índice n_2 , entonces la longitud de vidrio l debe compensar el exceso de tiempo de OPO' , luego la longitud l está dada por la relación

$$\frac{n_1 h^2}{2d} + \frac{n_1 h^2}{2d'} = (n_2 - n_1)l. \quad (1.5)$$

Si queremos expresar l en términos de los radios r_1 y r_2 de las dos superficies, suponiendo que $r_1 < r_2$, tenemos

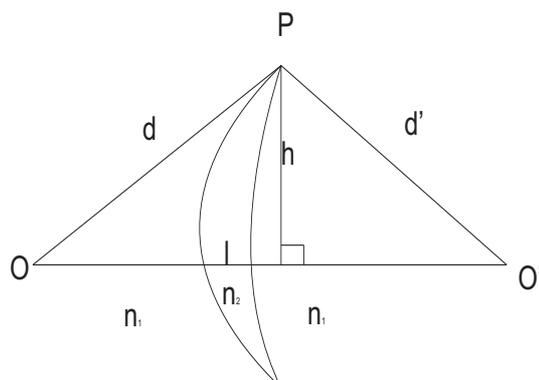


Figura 1.7: Enfoque de la luz, con los puntos O y O' que se encuentran en el aire, a través de vidrio.

$$l = \frac{h^2}{2r_1} - \frac{h^2}{2r_2} \quad (1.6)$$

y si sustituimos (1.6) en (1.5) entonces

$$\frac{n_1}{d} + \frac{n_1}{d'} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1.7)$$

luego de la ecuación (1.7), se observa en este caso que $\frac{1}{f} = \frac{1}{f'}$, entonces

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$$

y de esta fórmula se ve que si d se mueve hacia algún lado, d' también se mueve en la misma dirección, es decir, si d crece entonces d' debe decrecer para mantener la igualdad y viceversa si d decrece entonces d' debe crecer. Otra observación es que si queremos simetría (las distancias de O a P y de P a O' son iguales) entonces d y d' son iguales a $2f$.

1.3. Reflexión Total

No hemos analizado qué pasa cuando en la ley de Snell

$$\text{sen } \theta_r = \frac{\text{sen } \theta_i}{n_{12}}$$

obtenemos un número imaginario para el ángulo de refracción θ_r . Esto pasa cuando la luz es propagada de un medio denso hacia otro medio menos denso, es decir

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} < 1.$$

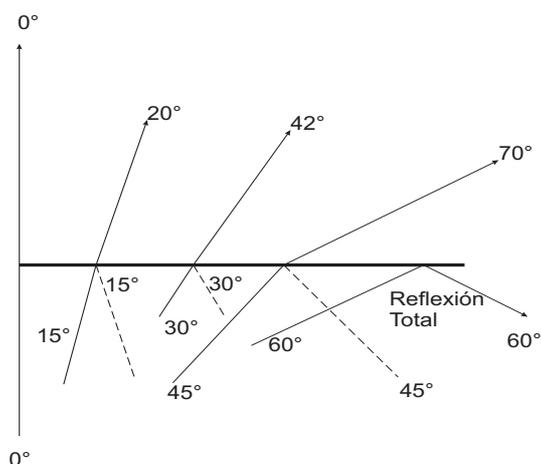


Figura 1.8: Reflexión total en el agua.

Lo que se observa es que la luz se refleja totalmente. Este fenómeno se conoce como reflexión total interna. Para explicarlo, imaginemos que tenemos un láser dentro de agua apuntando hacia la superficie, que es frontera entre el agua y el aire. Si el ángulo de incidencia lo vamos haciendo más y más grande, se observa refracción y reflexión (Figura 1.8), pero además la intensidad de los rayos reflejados y refractados va variando también, es decir, si el ángulo de incidencia es más cercano a 0° entonces la mayor parte de luz es refractada, pero si el ángulo de incidencia va creciendo, la intensidad de la luz reflejada es mayor que la intensidad de la luz refractada. Como se está propagando luz de un medio denso hacia otro medio menos denso, según la ley de Snell, el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción, y por tanto el ángulo de reflexión es menor que el ángulo de refracción, luego conforme incrementa el ángulo de incidencia, el ángulo de refracción alcanzará el valor de 90° antes que el ángulo de incidencia y es claro que si el ángulo de refracción rebasa los 90° el rayo refractado cae en el agua lo cual no es posible. Entonces hay un ángulo de incidencia, llamado ángulo crítico, con el cual el ángulo de refracción es de 90° grados, este ángulo se puede calcular usando la ley de Snell, en el caso de agua y aire tenemos que el ángulo crítico es 48.6°

$$n_1 = 1.333\dots,$$

$$n_2 = 1.000\dots,$$

$$\theta_r = 90^\circ,$$

$$\theta_i = 48.6^\circ.$$

Por tanto si el ángulo de incidencia es mayor a 48.6° entonces no hay refracción, lo que hay es reflexión y tenemos reflexión total interna.

La reflexión total interna sólo se presentan si se cumplen las condiciones:

- La fuente de luz se encuentra en un medio más denso y se dirige hacia un medio menos denso.
- El ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico.

No habrá reflexión total interna si por ejemplo, la luz viaja de agua ($n = 1.333\dots$) hacia vidrio ($n = 1.52$) porque el ángulo de incidencia siempre es mayor que el de refracción. El fenómeno ocurre si el ángulo de refracción llega a 90° antes que el ángulo de incidencia llegue a 90° .

El ángulo crítico de agua-aire es 48.6° pero este ángulo depende de los medios, por ejemplo, para vidrio-aire el ángulo crítico es 41.1° , para diamante-aire el ángulo crítico es 24.4° , para diamante-agua el ángulo crítico es 33.4° .

Hay ciertas ventajas si se usa la reflexión total, por ejemplo, la luz es reflejada totalmente en los prismas y no hay superficie metálica que refleje el 100 por ciento de la luz incidente; otra ventaja es que las propiedades reflectantes no cambian, es decir, no se alteran por el deslustrado de la superficie del prisma en este caso. Una desventaja podría ser que se pierde luz por reflexión en las superficies donde entra y sale luz.

1.4. El Arcoiris

En esta sección analizamos algunos casos en donde el rayo incidente, al chocar con una superficie que divide a dos medios, se refracta, viaja sobre un segundo medio y al llegar de nuevo a otra superficie que divide a los mismos medios éste se refleja o se refracta otra vez para regresar al medio en el cual estaba.

Supongamos entonces, que hay un rayo incidente ϕ sobre una capa transparente, sean ϕ' el ángulo de refracción, n el índice del medio donde se encuentra la capa y n' el índice de refracción de la capa con $n < n'$ (Figura: 1.9).

Por triángulos congruentes, tenemos que el rayo emergente es paralelo al rayo incidente, es decir, el rayo no es desviado, sólo es desplazado, observando la Figura 1.9, si el grosor de la capa es h , entonces $OO' = \frac{h}{\cos(\phi')}$ y el desplazamiento es

$$HO' = OO' \sin(\phi - \phi') = \frac{h}{\cos(\phi')} \sin(\phi - \phi').$$

Ahora consideremos un rayo de luz incidente con ángulo de incidencia ϕ sobre la cara de un prisma. Sea n el índice de refracción del prisma, α el ángulo del vértice y supongamos que el prisma se encuentra en el aire (Figura: 1.10).

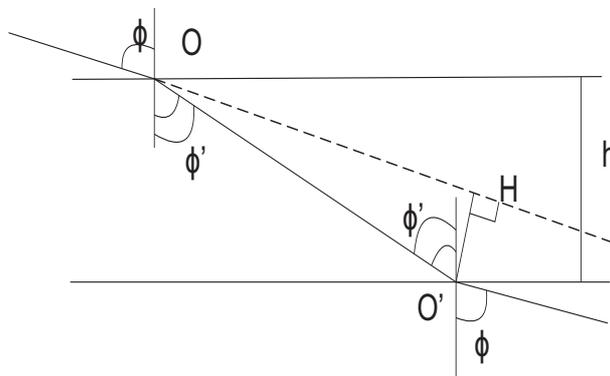


Figura 1.9: Desviación de un rayo al pasar a través de una capa transparente.

Queremos calcular el ángulo de desviación δ , es decir, el ángulo que ha girado el rayo con respecto a su trayectoria original después de salir del prisma. Usando la ley de Snell en la primera superficie $\sin \phi = n \sin \phi'$, calculamos el ángulo de refracción, encontramos el ángulo de incidencia en la segunda cara y usamos la ley de Snell para la segunda superficie $\sin \phi = n \sin \phi'$ y así encontramos el ángulo de refracción para la segunda superficie.

Para calcular δ nos fijamos en el triángulo $ON'O'$ donde tenemos que $\widehat{N'O'O} = \phi - \phi'$ y $\widehat{N'O'O} = \epsilon - \epsilon'$ entonces $180^\circ = \widehat{ON'O'} + \delta$ y luego $\delta = \widehat{N'O'O} + \widehat{N'O'O} = \phi - \phi' + \epsilon - \epsilon'$. Del triángulo ONO' tenemos $\phi' + \epsilon' + \widehat{ONO'} = 180^\circ$, como ON es perpendicular a OA y $O'N$ es perpendicular a $O'A$, $\widehat{ONO'} + \widehat{AO'O} = 180^\circ$ y entonces $\widehat{ONO'} = 180^\circ - \alpha$, luego $\phi' + \epsilon' = \alpha$. Así tenemos

$$\delta = \phi + \epsilon - \alpha$$

que nos da la desviación del rayo después de pasar por el prisma. La importancia de tal desviación esta, por ejemplo, en el arcoiris que se produce cuando un rayo de luz interseca una gota de agua. La gota lo descompone en todos sus colores y además lo desvía. Parte de la luz que se refracta en la gota se refleja en las paredes de la gota y se vuelve a refractar para salir de la gota. La gota hace el papel como lo haría un prisma; con la primera refracción la luz se separa en colores y la segunda refracción los separa aún mas.

La luz proveniente del Sol se encuentra con gotas de agua en el aire y parte de ella se refleja mientras que otra parte de penetra en las gotas. La luz que se refleja sin entrar a la gota no está separada en colores, para ver los colores la luz debe entrar a la gota y luego regresar, pero, ¿cómo pasa esto?; pues una vez dentro del agua, la luz ya está separada en colores debido a que cada color tiene velocidad diferente y por lo tanto su ángulo de refracción es diferente. Cada

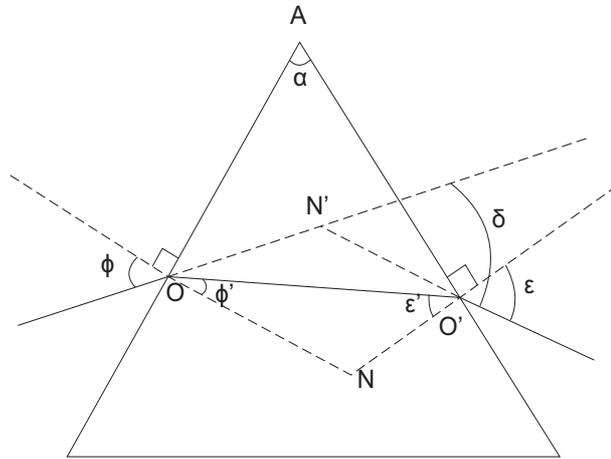


Figura 1.10: Desviación de un rayo al pasar a través de un prisma.

- Rojo
- Verde
- Azul

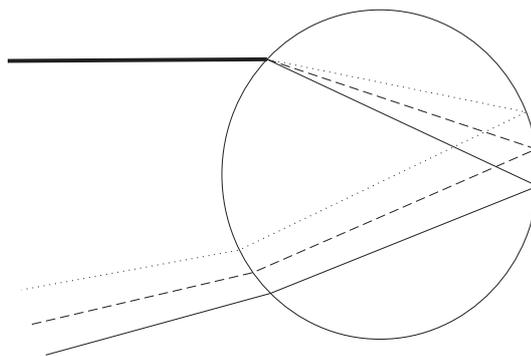


Figura 1.11: Separación del rayo de luz solar en colores, al entrar en una gota de agua.

color se encuentra con otro cambio de medio, agua-aire, entonces parte de la luz se refracta y otra parte se refleja. La luz que se refleja dentro de la gota y se encuentra de nuevo la frontera agua-aire, y nuevamente parte de la luz se refracta. De esta forma surgen los colores (Figura 1.11).

El espectro aparece porque, la luz está formada por diferentes colores y cada color tiene diferente frecuencia, el índice de refracción depende de la frecuencia y por lo tanto cada color tiene diferente desviación al entrar a la gota de agua. En este caso los índices de refracción correspondientes para el rojo, verde y azul son $n_r = 1.32986$, $n_v = 1.3358$, $n_a = 1.34009$ respectivamente. Entonces según la ley de Snell el azul se desvía más y el rojo se desvía menos, es decir, los colores se irán separando según la frecuencia, de ahí la palabra arcoiris, ahora ¿por qué arco?.

Como los rayos del Sol vienen desde muy lejos podemos considerar que vienen paralelos, ahora estos rayos se desviarán más o menos dependiendo del índice de refracción y del ángulo de incidencia. Si nos fijamos en la luz roja solamente, el ángulo que forman la luz incidente del Sol y la luz que viene de regreso, después de refractarse, reflejarse y refractarse otra vez en la gota, va creciendo conforme el ángulo de incidencia crece hasta llegar a un ángulo de máxima desviación a partir del cual ese ángulo comienza a disminuir.

Vamos a conocer el ángulo de desviación máxima (Figura 1.12). Sea γ el ángulo máximo de desviación, como tenemos dos triángulos la suma de los ángulos tiene que ser 180° , entonces

$$360 = \gamma + 2\theta_i + 2(180 - 2\theta_r)$$

luego

$$\gamma = 4\theta_r - 2\theta_i$$

usando la ley de Snell y que el primer medio es aire

$$\theta_r = \arcsen \frac{\text{sen } \theta_i}{n}$$

entonces

$$\gamma = 4 \arcsen \left(\frac{\text{sen } \theta_i}{n} \right) - 2\theta_i$$

para encontrar el ángulo máximo de desviación, derivamos con respecto a θ_i e igualamos a cero

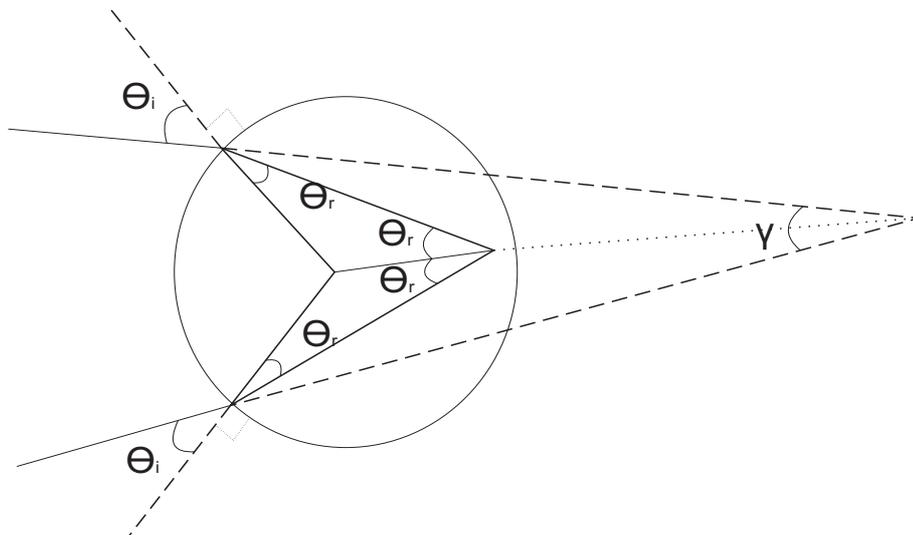


Figura 1.12: Ángulo de desviación de un rayo después de ser refractado, reflejado y refractado nuevamente.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\gamma}{d\theta_i} &= 4 \frac{\frac{\cos \theta_i}{n}}{\left(1 - \frac{(\text{sen } \theta_i)^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - 2 = 0 \\
 2 \frac{\cos \theta_i}{n} &= \left(1 - \frac{(\text{sen } \theta_i)^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 2(1 - (\text{sen } \theta_i)^2)^{\frac{1}{2}} &= (n^2 - (\text{sen } \theta_i)^2)^{\frac{1}{2}} \\
 4 - 4(\text{sen } \theta_i)^2 &= n^2 - (\text{sen } \theta_i)^2 \\
 \text{sen } \theta_i &= \left(\frac{4 - n^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

es una fórmula para conocer el ángulo máximo de desviación. Por ejemplo, para el color rojo $n_r \approx 1.33$ entonces $\theta_{i,r} = 59^\circ 35' 5'' 7$ y el ángulo máximo de desviación $\gamma_r = 42^\circ 30' 58'' 98$.

Entonces, al llegar los múltiples rayos del Sol sobre la gota de agua, éstos se reflejan y refractan de tal modo que los rayos del mismo color se acumulan alrededor de su ángulo máximo de desviación y el color de esos rayos abunda en la zona del ángulo de desviación máxima.

Haciendo lo mismo para el color azul tenemos que $\theta_{i,a} = 59^\circ 0' 15''$ y $\gamma_a = 41^\circ 4' 15'' 53$, es decir, el ángulo para mirar el color azul es menor que para ver el rojo, así que el color azul estará más abajo.

Si calculamos el ángulo máximo de desviación para el color violeta, obtenemos $\gamma_v = 40^\circ$. Por lo tanto entre el rojo y el violeta, que son los colores frontera del arcoiris, hay una distancia de 2° , que es el ancho del arcoiris.

1.5. La Cústica

En la sección anterior mostramos que los rayos se acumulan alrededor del ángulo máximo de desviación y de esa forma vemos los colores en el arcoiris pero en realidad el acumulamiento es lo que se conoce como cústica (Figura 1.13). En esta sección mostraremos que el hecho de que la inclinación de los rayos tiene un máximo, es suficiente para la creación de una cústica. La cústica se define como la envolvente de la familia de rayos luminosos (o como el lugar geométrico de los puntos donde los rayos adyacentes se cortan). Mostraremos que si en una familia de rectas la pendiente tiene un máximo, la familia genera una cústica. Se pueden ver más ejemplos sobre cústicas en [Haberman].

Entonces supongamos que tenemos una familia general de rectas que representan los rayos

$$x = D(\rho)y + \alpha\rho \quad (1.9)$$

con $D(\rho)$ la inclinación de las rectas, α constante y ρ el parámetro. Podríamos poner también una función que dependa de ρ en el término independiente pero, para el desarrollo de Taylor será suficiente la aproximación a primer orden.

Usamos lo probado en la sección anterior con la ecuación (1.8) donde mostramos que los rayos tienen una amplitud máxima. Sea $\rho = \rho_M$ el punto donde $D(\rho)$ tiene un máximo (Figura 1.14). Aproximamos entonces $D(\rho)$ a segundo orden alrededor de ρ_M , es decir, hacemos $D(\rho) = D_M - D_2(\rho - \rho_M)^2$ donde $D_M = D(\rho_M)$ es la inclinación máxima y el término lineal no aparece porque en ρ_M hay un máximo. Nótese que el tamaño de D_M no es importante, para la generación de la cústica, lo que es fundamental es la estructura de la curva en el máximo. Derivamos (1.9) con respecto a ρ y tenemos,

$$0 = -2D_2(\rho - \rho_0)y + \alpha \quad (1.10)$$

luego, despejamos ρ de (1.10) y sustituimos en (1.9) lo cual nos da la cústica (envolvente)

$$\begin{aligned} x = Dy + \alpha\rho &= (D_M - D_2(\frac{\alpha}{2D_2y})^2)y + \alpha(\rho_M + \frac{\alpha}{2D_2y}) \\ &= D_M y + \alpha\rho_M + \frac{\alpha^2}{2D_2y}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

En (1.11) observemos que lejos de la gota de agua (y grande) la cústica es una recta (Figura 1.13, otra vez).

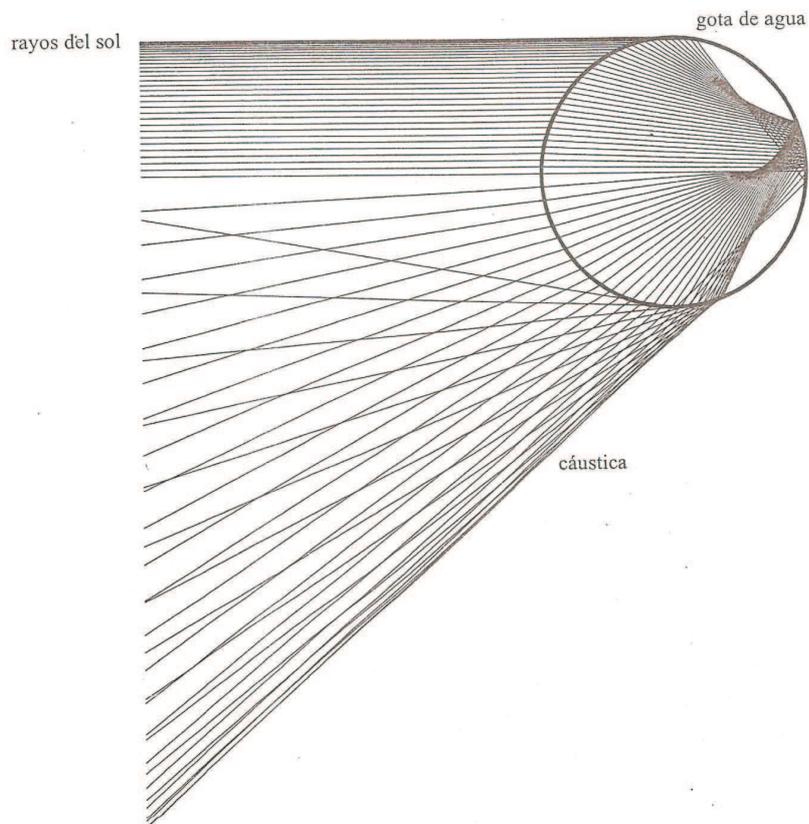


Figura 1.13: La cáustica.

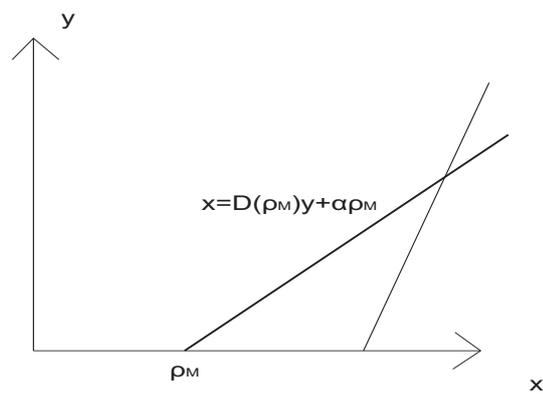


Figura 1.14: Primer instante en que se intersectan los rayos.

Como mencionamos al inicio de esta sección, sobre la cáustica tenemos acumulación de rayos que se puede relacionar con que la intensidad tiende a infinito en la cáustica. Para mostrar esto, utilizamos que la intensidad de un simple rayo está dada por $I_{\text{rayo}} = k\delta(D - D_0)$ donde D_0 es un punto cercano a la cáustica, k es una constante y δ es la delta de Dirac [Berry]. La luz de los rayos se concentra cerca de D_M , luego, la intensidad de la luz cerca de la cáustica es

$$\begin{aligned} I &= \int I_{\text{rayo}} d\rho = k \int \delta(D - D_0) d\rho \\ &= k \int \delta(D_M - D_2(\rho - \rho_M)^2 - D_0) d\rho. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Resolvemos (1.12) con un cambio de variable $u = D_2(\rho - \rho_M)^2$ y (1.12) es

$$I = \frac{k}{2\sqrt{D_2}} \int \frac{\delta(D_M - D_0 - u)}{\sqrt{u}} du = H(D_M - D_0) \frac{k}{2\sqrt{D_2(D_M - D_0)}} \quad (1.13)$$

donde H es la función de Heaviside ($H(x) = 0$ para $x < 0$, $H(x) = 1$ para $x > 0$). Observemos en (1.13) que $I \rightarrow \infty$ conforme nos acercamos a la cáustica ($\rho \rightarrow \rho_M$ o $D_0 \rightarrow D_M$).

Las rectas forman la cáustica pero al tener soluciones bivaluadas que no tienen sentido, las aproximaciones a partir de ecuaciones en derivadas parciales cerca de la cáustica pueden no ser válidas. En el Capítulo 3 veremos, por ejemplo, que necesitamos hacer una aproximación distinta (a la aproximación de variación lenta de la onda para el método llamado "WKBJ") para puntos de la cáustica y concluir que la intensidad de la onda en la cáustica sí crece mucho pero no se va a infinito.

Capítulo 1

ECUACIONES DE MAXWELL, TEORÍA ONDULATORIA

En este capítulo se considera la luz como un fenómeno ondulatorio donde utilizaremos las ecuaciones de Maxwell que modelan los fenómenos electromagnéticos. Maxwell, usando estas ecuaciones, muestra que los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} satisfacen la ecuación de onda cuya velocidad está dada por $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ (ϵ es la constante que determina la capacidad del medio para retener carga eléctrica, μ es la constante que determina la capacidad del medio para atraer al campo magnético), cuyo valor en el vacío, resulta ser la velocidad de la luz en el vacío, c . De esta forma concluyó que la luz es una onda electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell son las siguientes:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mu}{c} \mathbf{j} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

La primera ecuación resulta de la ley de Gauss, la cual nos dice, que el flujo del campo eléctrico en una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total que se encuentra en tal superficie (ρ es la densidad de carga eléctrica). La segunda ecuación nos dice que no existen monopolos magnéticos (imanes con un solo polo) en la superficie cerrada, es decir, la cantidad de líneas del campo que entran es igual a la cantidad de líneas del campo que salen. La tercera ecuación es la ley de Faraday que nos dice que la circulación del campo eléctrico por una trayectoria cerrada es proporcional a la variación del campo magnético a través de la superficie rodeada por tal trayectoria. Finalmente la cuarta ecuación

es la ley de Ampere generalizada por Maxwell que nos dice que la circulación del campo magnético a través de una trayectoria cerrada es proporcional a la corriente más la variación del campo eléctrico sobre la superficie que rodea tal trayectoria (\mathbf{j} es la densidad de corriente) [Born], [Feynman II].

1.1. La Ecuación de Onda

En este trabajo consideramos medios dieléctricos, es decir, sin corrientes ni cargas ($\rho = \mathbf{j} = 0$). Esta sección la dedicamos a deducir la ecuación de onda para el medio eléctrico \mathbf{E} y encontramos la solución que ocupamos posteriormente pensando básicamente en la propagación de la onda en una sola dirección. Las ecuaciones de Maxwell para medios dieléctricos son

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

La forma en que procederemos, para la deducción de la ecuación de onda, es la siguiente. Aplicamos el rotacional a la ley de Faraday (ecuación (1.1.3)) y usamos la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ para obtener

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\tag{1.2}$$

luego, intercambiamos el rotacional con la derivada en (1.2) y usamos las ecuaciones (1.1.1) y (1.1.4) para llegar a la ecuación de onda para \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.\tag{1.3}$$

De (1.3) la solución que nos interesa es la llamada onda plana, que es la onda que se propaga en una sola dirección, ondas más complicadas se pueden formar por superposición de ondas planas. Sea \mathbf{r} el vector de posición de un punto P en el espacio con $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z)$ vector unitario en alguna dirección fija. Consideremos soluciones de (1.3) de la forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, t).$$

Escogemos nuevos ejes cartesianos $\mathbf{O}\alpha$, $\mathbf{O}\beta$ y $\mathbf{O}\gamma$ con $\mathbf{O}\gamma$ en la dirección de \mathbf{s} , entonces tenemos

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \gamma$$

y luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= s_x \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= s_y \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= s_z \frac{\partial}{\partial \gamma}.\end{aligned}$$

De esas igualdades tenemos que $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \gamma^2}$, y si sustituimos en (1.3), entonces

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \gamma^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

donde $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ y con el cambio de variables

$$\begin{aligned}\gamma - vt &= p \\ \gamma + vt &= q\end{aligned}$$

llegamos a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial p \partial q} = 0. \quad (1.4)$$

La solución general de (1.4) es

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(p) + \mathbf{E}_2(q) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - vt) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + vt) \quad (1.5)$$

con \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 funciones arbitrarias. Las soluciones de la forma (1.5) son llamadas ondas planas, pues si t es constante el argumento permanece constante para todos los puntos del plano $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \text{constante}$ perpendicular a \mathbf{s} .

La solución más elemental en la teoría ondulatoria y que es la base de nuestro trabajo, es la onda armónica en espacio-tiempo que se explicará a continuación. Si fijamos un punto en el espacio \mathbf{r}_0 , la perturbación de onda sólo es función del tiempo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = F(t).$$

Consideremos el caso cuando $F(t)$ tiene la forma

$$F(t) = a \cos(\omega t).$$

Donde a es la amplitud y a ωt se le llama la fase. La frecuencia es $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ y representa el número de vibraciones por segundo, ω es la frecuencia angular que nos da las vibraciones en 2π segundos y T es el periodo de las vibraciones. Soluciones de la ecuación de onda de la forma anterior se llaman armónicas con respecto al tiempo. Consideremos una función de onda que represente una onda plana armónica propagándose en la dirección \mathbf{s} . Según lo visto para una onda plana, cambiamos t por $t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v}$ y tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v}\right)\right).$$

Esta ecuación se mantiene si reemplazamos $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ por $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \lambda$ con $\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = vT$. λ es la longitud de onda y $\lambda_0 = cT = n\lambda$ es la longitud de onda, con la misma frecuencia, pero en el vacío (c es la velocidad de la luz en el vacío). Usando las cantidades $k = nk_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}$ y $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$, el número de onda y el número de onda en el vacío respectivamente, definimos el vector de onda como

$$\mathbf{k} = k\mathbf{s}.$$

$\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{s}$ es el vector correspondiente al vacío. Si usamos esta definición tenemos

$$\omega\left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{v}\right) = k(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

Consideramos funciones de onda armónicas más complicadas, es decir, si suponemos que a depende de \mathbf{r} tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (1.6)$$

Usamos exponenciales para escribir la ecuación (1.6) como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}(a(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t})$$

donde los frentes

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$$

son llamados frentes de onda o frentes co-fasales. La solución armónica más general ya no es periódica con respecto al espacio pero la fase sí es periódica, es igual para (\mathbf{r}, t) y para $(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t)$ siempre que

$$\omega dt - (\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.7)$$

Si llamamos \mathbf{q} al vector unitario $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ entonces (1.7) es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{(\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \cdot \mathbf{q}}$$

La expresión es mínima cuando el vector \mathbf{q} es normal al frente co-fasal, es decir, cuando $\mathbf{q} = \frac{\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{|\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})|}$ y observemos que $|\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})| = k$, entonces

$$v^{(p)} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

es llamada la velocidad de fase y es la velocidad con que cada frente avanza. Para ondas más complejas la velocidad de fase puede ser diferente a $\frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

1.2. Paquete de Ondas

Cualquier onda $E(\mathbf{r}, t)$ se puede ver como superposición de ondas monocromáticas de frecuencias diferentes. Ésta es la forma más usual de ver las ondas de luz donde ellas están formadas por combinaciones lineales de paquetes de ondas planas con sus vectores de onda y frecuencias diferentes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \int_0^\infty a_\omega(\mathbf{r}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_\omega \cdot \mathbf{r})} d\omega.$$

Una onda es casi monocromática si las a_ω difieren en forma importante de cero sólo en un intervalo

$$\bar{\omega} - \frac{1}{2} \Delta\omega \leq \omega \leq \bar{\omega} + \frac{1}{2} \Delta\omega$$

alrededor de $\bar{\omega}$, con $\frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1$. Si es así tenemos lo que se llama paquete de ondas, el cual utilizaremos posteriormente para derivar la ecuación no-lineal de Schrödinger, en la presente sección.

Comenzamos con dos ondas monocromáticas planas con igual amplitud y diferentes frecuencias y números de onda propagadas, en la dirección \mathbf{z} :

$$\mathbf{E}(z, t) = a e^{-i(\omega t - kz)} + a e^{-i((\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z)}$$

luego podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= a(e^{\frac{1}{2}i(t\delta\omega - z\delta k)} + e^{-\frac{1}{2}i(t\delta\omega - z\delta k)})e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \\ &= 2a \cos\left(\frac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)\right)e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \omega + \frac{1}{2}\delta\omega \\ \bar{k} &= k + \frac{1}{2}\delta k \end{aligned}$$

son la frecuencia principal y el número de onda principal respectivamente. $\mathbf{E}(z, t)$ puede ser vista como una onda plana de frecuencia $\bar{\omega}$ y longitud de onda $\frac{2\pi}{\bar{k}}$ propagada en la dirección \mathbf{z} con amplitud no constante. El máximo valor de la amplitud es $\delta t = \frac{4\pi}{\delta\omega}$ o $\delta z = \frac{4\pi}{\delta k}$ para z fija o t fija respectivamente, mientras que el máximo de la fase se alcanza en los valores $\delta t = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ o $\delta z = \frac{2\pi}{\bar{k}}$ para z fija o t fija respectivamente. Los planos de amplitud máxima se propagan con una velocidad

$$v^{(g)} = \frac{\delta z}{\delta t} = \frac{\frac{4\pi}{\delta k}}{\frac{4\pi}{\delta\omega}} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \quad (1.8)$$

mientras los planos de fase constante se propagan con velocidad

6CAPÍTULO 1. ECUACIONES DE MAXWELL, TEORÍA ONDULATORIA

$$v^{(p)} = \frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\bar{\omega}}} = \frac{\bar{\omega}}{k}.$$

A $v^{(g)}$ se le llama la velocidad del paquete de ondas o velocidad de grupo. Si el medio no es dispersivo (separación de las ondas de distinta frecuencia y por consiguiente de diferente longitud de onda) n no depende de ω , la velocidad de fase y la velocidad del paquete son iguales a $\frac{c}{n}$. Si el medio es dispersivo las velocidades son diferentes en general.

Estamos suponiendo que $\delta\omega$ es pequeño, entonces reemplazamos $\frac{\delta\omega}{\delta k}$ por $\frac{d\omega}{dk}$ en (1.8), luego la velocidad del paquete queda

$$v^{(g)} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Esta relación se vale para condiciones más generales, por ejemplo, consideremos un paquete de ondas unidimensional

$$\mathbf{E}(z, t) = \int_{\Delta\omega} a_\omega e^{-i(\omega t - \kappa z)} d\omega \quad (1.9)$$

donde $\Delta\omega$ es el intervalo con frecuencia $\bar{\omega}$ ($\frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1$) y cada a_ω difiere en forma importante de cero. Sea $\bar{k} = n(\bar{\omega})\frac{\bar{\omega}}{c}$ el número de onda correspondiente, entonces la ecuación 1.9 se puede ver como

$$\mathbf{E}(z, t) = A(z, t)e^{-i(\bar{\omega}t - \bar{k}z)}$$

con

$$\begin{aligned} A(z, t) &= \int_{\Delta\omega} a_\omega e^{-i((\omega - \bar{\omega})t - (k - \bar{k})z)} d\omega \\ &= \int_{\Delta\omega} a_\omega e^{-i((\omega - \bar{\omega})(t - \frac{(k - \bar{k})z}{(\omega - \bar{\omega})})} d\omega. \end{aligned}$$

Si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño

$$A(z, t) \approx \int_{\Delta\omega} a_\omega e^{-i((\omega - \bar{\omega})(t - \frac{dk}{d\omega}|_{\bar{\omega}}z))} d\omega.$$

Otra vez \mathbf{E} se puede ver como una onda plana de amplitud variable de frecuencia $\bar{\omega}$, número de onda \bar{k} en la dirección \mathbf{z} . La amplitud se puede ver como una superposición de ondas armónicas con frecuencias $\omega - \bar{\omega}$. Como A es complejo, en general, el argumento de A da una contribución a la fase $\bar{\omega}t - \bar{k}z$. Los frentes

$$t = \frac{dk}{d\omega}|_{\bar{\omega}} z$$

tienen amplitud constante y el máximo de $|A|$ es dado de nuevo por la velocidad del paquete

$$v^{(g)} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\bar{k}}$$

donde la velocidad del paquete y la velocidad de la fase, con frecuencia $\bar{\omega}$, están relacionados por

$$v^{(g)} = \frac{d}{dk}(v^{(p)}k) = v^{(p)} + k \frac{dv^{(p)}}{dk} = v^{(p)} - \lambda \frac{dv^{(p)}}{d\lambda}.$$

1.3. La Ecuación Eiconal

La parte de la óptica que supone la longitud de la onda en el vacío igual a cero es llamada óptica geométrica. Tal suposición se hace debido a que la luz visible relacionada con el campo electromagnético se caracteriza por tener oscilaciones muy rápidas lo cual indica una frecuencia muy grande y por lo tanto la longitud de onda es pequeña. En las siguientes secciones hablaremos de los rayos de luz y volveremos a deducir las leyes de reflexión y refracción, pero ésta vez a partir de las ecuaciones de Maxwell suponiendo la longitud de onda igual a cero. La ecuación base de la óptica geométrica es la llamada ecuación eiconal y en esta sección vamos a deducirla.

Consideremos un campo armónico,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

en un medio isótropo no-conductor. $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ son funciones vectoriales complejas, donde las partes reales de (1.10) representan los campos y $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell sin corrientes ni cargas. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_0 + ik_0\epsilon\mu\mathbf{E}_0 &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_0 - ik_0\mathbf{B}_0 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_0 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ es el número de onda en el vacío y λ_0 es la longitud de onda en el vacío. Consideremos formas más generales de campos oscilantes, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}(\mathbf{r})e^{ik_0\varphi(\mathbf{r})} \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{b}(\mathbf{r})e^{ik_0\varphi(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

donde $\varphi(\mathbf{r})$ es una función real de posición la cual mostraremos tiene que ver con la trayectoria óptica, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de posición. En las ecuaciones de Maxwell \mathbf{e}, \mathbf{b} y φ están relacionadas, pero mostraremos que para λ_0 pequeña φ satisface una ecuación diferencial, independiente de \mathbf{e} y \mathbf{b} . Calculamos el rotacional de $\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0$ y la divergencia de $\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_0 &= (\nabla \times \mathbf{e} + ik_0 \nabla \varphi \times \mathbf{e}) e^{ik_0 \varphi}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_0 &= (\nabla \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \nabla \epsilon + ik_0 \mathbf{e} \cdot \nabla \varphi) e^{ik_0 \varphi}.\end{aligned}$$

Análogamente para $\nabla \times \mathbf{B}_0$, $\nabla \cdot \mathbf{B}_0$. Sustituimos en (1.11) y tenemos

$$\begin{aligned}\nabla \varphi \times \mathbf{b} + \epsilon \mu \mathbf{e} &= -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \mathbf{b}, \\ \nabla \varphi \times \mathbf{e} - \mathbf{b} &= -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \mathbf{e}, \\ \mathbf{e} \cdot \nabla \varphi &= -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{e} \cdot \nabla \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{e}), \\ \mathbf{b} \cdot \nabla \varphi &= -\frac{1}{ik_0} (\mathbf{b} \cdot \nabla \mu + \nabla \cdot \mathbf{b}).\end{aligned}\tag{1.12}$$

Como queremos ver qué pasa para k_0 grande ignoramos el lado derecho de (1.12) y tenemos

$$\begin{aligned}\nabla \varphi \times \mathbf{b} + \epsilon \mu \mathbf{e} &= 0, \\ \nabla \varphi \times \mathbf{e} - \mathbf{b} &= 0, \\ \mathbf{e} \cdot \nabla \varphi &= 0, \\ \mathbf{b} \cdot \nabla \varphi &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Si despejamos \mathbf{e} de (1.13.1) y sustituimos en (1.13.2) tenemos

$$\nabla \varphi \times \left(\frac{-\nabla \varphi \times \mathbf{b}}{\epsilon \mu} \right) - \mathbf{b} = 0,$$

se sigue que

$$\frac{1}{\epsilon \mu} (-\nabla \varphi (\nabla \varphi \cdot \mathbf{b}) + \|\nabla \varphi\|^2 \mathbf{b}) = \mathbf{b}$$

y por (1.13.4) tenemos

$$\|\nabla \varphi\|^2 = n^2\tag{1.14}$$

con $n^2 = \epsilon \mu$ llamado el índice de refracción, como ya habíamos visto. La función φ es la función eiconal y (1.14) es conocida como la ecuación eiconal (del Alemán 'eikonal' que significa imagen).

1.4. Los Rayos y su Intensidad

En esta sección recobramos, a partir de la teoría ondulatoria, los rayos de luz del Capítulo 1, para esto usamos el vector de Poynting que veremos está en la dirección normal a las ondas frontales que fueron definidas en la sección anterior. Además veremos la ley de conservación de la intensidad de la luz.

Consideremos el vector

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}^*}{\mu} \right), \quad (1.15)$$

donde \mathbf{b}^* es el conjugado del vector \mathbf{b} . Luego, de (1.13.2) tenemos $\mathbf{b} = \nabla\varphi \times \mathbf{e}$ y usando la identidad $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$, (1.15) es

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi\mu} ((\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*)\nabla\varphi - (\mathbf{e} \cdot \nabla\varphi)\mathbf{e}^*).$$

Si además usamos (1.13.3) y $n^2 = \epsilon\mu$, tenemos

$$\mathbf{S} = \frac{c}{n^2} \frac{2\epsilon(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*)}{16\pi} \nabla\varphi \quad (1.16)$$

donde la cantidad $\langle w \rangle = \frac{2\epsilon(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*)}{16\pi}$ representa la densidad de energía (véase [Born], Capítulo 1). Ahora por la ecuación eikonal (ecuación (1.14)) tenemos que $\mathbf{s} = \frac{\nabla\varphi}{n}$ es un vector unitario y como $v = \frac{c}{n}$ entonces (1.16) es

$$\mathbf{S} = v\langle w \rangle \mathbf{s}.$$

El vector \mathbf{S} se define como el vector de Poynting y está en la dirección normal a las ondas frontales y su magnitud es igual al producto de la densidad de energía total con la velocidad .

Los rayos de luz pueden ahora ser definidos como las trayectorias ortogonales a los frentes de onda $\varphi = \text{constante}$. Si $\mathbf{r}(s)$ es el vector posición de un punto P sobre un rayo y s es la longitud de arco entonces $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}$ y la ecuación del rayo queda como

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\varphi. \quad (1.17)$$

Luego, de (1.13.3) y (1.13.4), los vectores eléctrico y magnético son ortogonales al rayo en todo punto.

Para la longitud óptica de la curva consideramos dos frentes de onda vecinos $\varphi = \text{constante}$ y $\varphi + d\varphi = \text{constante}$ (Figura 1.1), de (1.14) y (1.17)

$$\frac{d\varphi}{ds} = \nabla\varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = n \quad (1.18)$$

entonces la distancia sobre una normal cortando los dos frentes es inversamente proporcional al índice de refracción, es decir, directamente proporcional a $v = \frac{c}{n}$.

La integral $\int_C n ds$ a lo largo de una curva C es conocida como la longitud óptica de la curva. Denotemos por paréntesis cuadrados a la longitud óptica de un rayo que une a P_1 y P_2 sobre la curva C

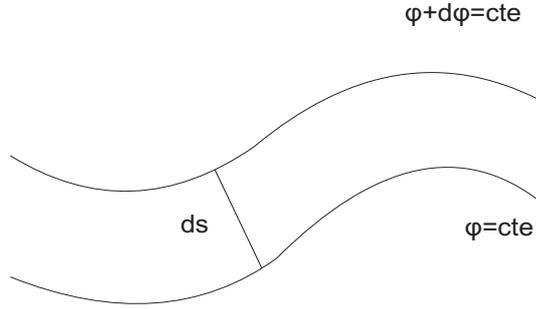


Figura 1.1: Dos frentes de onda vecinos.

$$[P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n ds = \varphi(P_2) - \varphi(P_1).$$

Como ya hemos visto $v = \frac{c}{n}$, entonces

$$n ds = \frac{c}{v} ds = c dt$$

donde dt es el tiempo necesario para que la energía viaje una distancia ds a lo largo del rayo

$$[P_1 P_2] = c \int_{P_1}^{P_2} dt.$$

Entonces la longitud óptica $[P_1 P_2]$ es igual al producto de la velocidad de la luz en el vacío y el tiempo que necesita la luz para viajar de P_1 a P_2 .

La intensidad de la luz se define como el valor absoluto del vector de Poynting

$$I = |\mathbf{S}| = v \langle w \rangle$$

y usando que la divergencia del gradiente es cero, tenemos

$$\nabla \cdot \left(I \frac{\nabla \varphi}{n} \right) = \nabla \cdot (I \mathbf{s}) = 0 \quad (1.19)$$

lo cual nos da una ley de conservación local de la intensidad.

Tomemos un haz de rayos procediendo de un elemento dS_1 de un frente de onda $\varphi(\mathbf{r}) = a_1$ que intersectan a otro elemento dS_2 de otro frente de onda $\varphi(\mathbf{r}) = a_2$ (Figura 1.2). Integramos (1.19) y usamos el teorema de Gauss [Courant II], entonces

$$\int I \mathbf{s} \cdot \nu dS = 0, \quad (1.20)$$

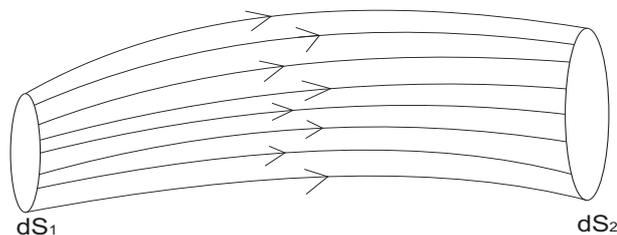


Figura 1.2: Haz de rayos procediendo de un elemento de área dS_1 , sobre un frente de onda, a otro elemento de área dS_2 , sobre otro frente de onda vecino.

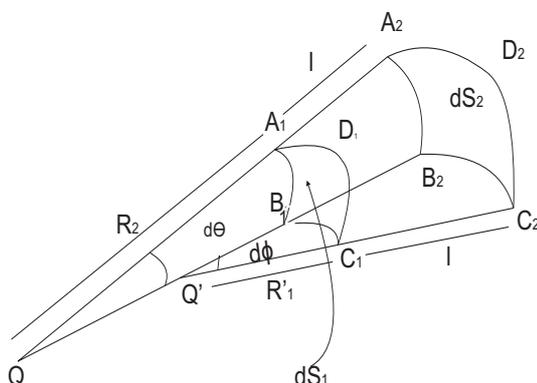


Figura 1.3: Haz de rayos a través de superficies de área acotadas por segmentos de línea curvos.

donde ν es un vector normal al elemento dS_2 ; entonces $\mathbf{s} \cdot \nu = 1$ sobre dS_1 , ya que el vector normal a la superficie está en la dirección de los rayos, y $\mathbf{s} \cdot \nu = -1$ sobre dS_2 , ya que el vector normal a la superficie está en dirección opuesta a la dirección de los rayos, entonces (1.20) se reduce a

$$I_1 dS_1 = I_2 dS_2 \quad (1.21)$$

con I_1, I_2 intensidades en dS_1, dS_2 respectivamente. Luego $I dS$ permanece constante a lo largo del tubo de rayos lo cual se conoce como la ley de intensidad de óptica geométrica. Esta ley puede ser expresada en otra forma, supongamos que dS_1 y dS_2 están acotadas por segmentos de línea curvos, si R_1 y R'_1 son los radios de curvatura de A_1B_1 y B_1C_1 (Figura 1.3), entonces

$$\begin{aligned} R_1 d\theta &= A_1B_1, \\ B_1C_1 &= R'_1 d\phi, \end{aligned}$$

donde $d\theta, d\phi$ son los ángulos subtendidos por A_1B_1, B_1C_1 respectivamente en los centros Q, Q' . Luego

$$dS_1 = A_1 B_1 \cdot B_1 C_1 = R_1 R'_1 d\theta d\phi.$$

De igual forma para dS_2 , que es donde los rayos a través de dS_1 encuentran otro frente de onda,

$$dS_2 = A_2 B_2 \cdot B_2 C_2 = R_2 R'_2 d\theta d\phi.$$

Si l es la distancia entre dS_1 y dS_2 , entonces

$$\begin{aligned} R_2 &= l + R_1 \\ R'_2 &= l + R'_1 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{R_1 R'_1}{R_2 R'_2} = \frac{R_1 R'_1}{(R_1 + l)(R'_1 + l)} \quad (1.22)$$

donde estamos usando (1.21). Ahora, si $R_1 \ll l$ y $R'_1 \ll l$, (1.22) se reduce a

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1 R'_1}{l^2} \quad (1.23)$$

donde el recíproco $\frac{1}{R_1 R'_1}$ es llamado curvatura gaussiana de la superficie. La ecuación (1.23) nos dice que la intensidad en algún punto es proporcional a la curvatura gaussiana de un frente de onda que pasa por ese punto. En particular, si todos los rayos rectilíneos tienen un punto en común, los frentes de onda son esferas centradas en ese punto y $R_1 = R'_1$, $R_2 = R'_2$. Luego, tenemos (sin subíndices)

$$I = \frac{\text{constante}}{R^2}.$$

Retomamos el caso general de un haz arbitrario de rayos. Buscamos una expresión en términos de φ para la variación de intensidad en cada rayo. En (1.19) usamos $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}$ y $\nabla \cdot (\nabla) = \nabla^2$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{I}{n} \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{I}{n} &= 0 \\ \implies \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \ln \frac{I}{n} &= 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$\nabla \varphi \cdot \nabla$ es la derivada direccional en la dirección del gradiente de φ , la cual coincide con la dirección del rayo, por lo tanto podemos sustituir el operador $\nabla \varphi \cdot \nabla$ por una derivada en la dirección del rayo, es decir

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \nabla \varphi \cdot \nabla, \quad (1.25)$$

donde τ es un parámetro que especifica la posición a lo largo del rayo. (1.24) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \ln \frac{I}{n} = -\nabla^2 \varphi,$$

integramos y tenemos

$$\frac{I}{n} = e^{-\int \nabla^2 \varphi d\tau}, \quad (1.26)$$

ahora de (1.18) y (1.25) obtenemos que

$$d\tau = \frac{d\varphi}{\|\nabla\varphi\|^2} = \frac{1}{n^2} d\varphi = \frac{ds}{n}$$

entonces finalmente tenemos las expresiones para la razón de intensidades en dos puntos del rayo

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_2}{n_1} e^{-\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\nabla^2 \varphi}{n^2} d\varphi} = \frac{n_2}{n_1} e^{-\int_{s_1}^{s_2} \frac{\nabla^2 \varphi}{n} ds}$$

donde las integrales son tomadas a lo largo del rayo.

Hemos definido los rayos de luz como las trayectorias ortogonales a los frentes de onda $\varphi(x, y, z) = \text{constante}$ y además tenemos la ecuación (1.17), $n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\varphi$, donde \mathbf{r} es un vector de posición y s es la longitud del rayo. Derivamos (1.17) con respecto a s ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} (\nabla\varphi) \\ &= \nabla(\nabla\varphi) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ &= \nabla(\nabla\varphi) \cdot \frac{1}{n} \nabla\varphi \\ &= \frac{1}{2n} \nabla((\nabla\varphi)^2) \\ &= \frac{1}{2n} \nabla(n^2) \\ &= \nabla n \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (1.27)$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial que involucra a los rayos de luz y el índice de refracción. En un medio homogéneo, es decir $n = \text{constante}$, tenemos

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0$$

entonces

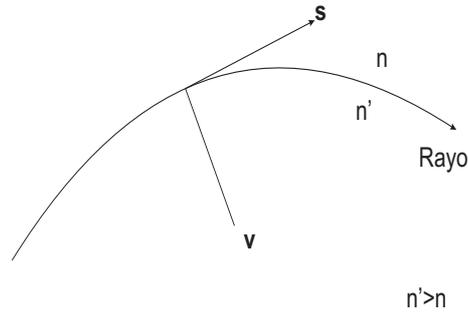


Figura 1.4: El rayo se dirige hacia la zona de mayor índice de refracción.

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$$

con \mathbf{a} y \mathbf{b} constantes, luego tenemos que \mathbf{r} es una línea recta, por lo tanto en un medio homogéneo los rayos de luz son rectas.

Vamos a considerar el vector curvatura de un rayo de luz, es decir

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \mathbf{K} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu} \quad (1.28)$$

donde $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s}$, ρ es el radio de curvatura y $\boldsymbol{\nu}$ es el vector normal unitario en un punto sobre el rayo. De (1.27) y (1.28) tenemos

$$n\mathbf{K} = \nabla n - \frac{dn}{ds}\mathbf{s}. \quad (1.29)$$

Esta relación muestra que el gradiente de n cae en el plano osculante del rayo. Multiplicamos (1.29) por \mathbf{K} y usando (1.28) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{n}{\rho^2} &= \nabla n \cdot \frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} - \frac{dn}{ds}\mathbf{s} \cdot \frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} \\ \implies \frac{1}{\rho} &= |\mathbf{K}| = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla \ln n \end{aligned}$$

y como ρ es positivo implica que si vamos en la dirección de $\boldsymbol{\nu}$ el índice de refracción incrementa, es decir, el rayo apunta hacia la región de mayor índice de refracción (Figura 1.4).

1.5. Dos Medios Homogéneos de Distinto Índice de Refracción

En las secciones anteriores se ha considerado al índice de refracción como una función continua, vamos a ver qué pasa cuando los rayos de luz cruzan una

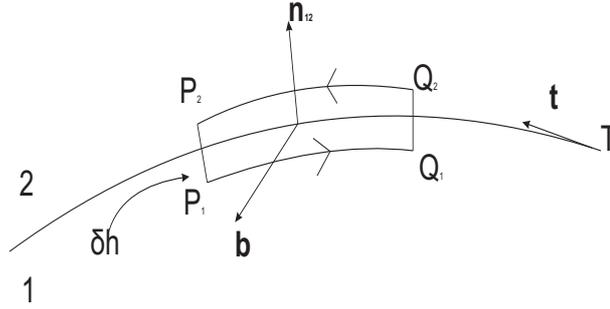


Figura 1.5: Capa de transición donde el índice de refracción n cambia rápidamente pero en forma continua.

superficie que separa dos medios homogéneos de diferente índice de refracción. Esto se puede hacer si suponemos un cambio rápido del campo vectorial de un lado a otro. En esta sección recobramos las leyes de refracción y reflexión del Capítulo 1 al considerar dos medios de distinto índice de refracción.

De (1.17) y usando la identidad $\nabla \times (\nabla) = 0$, el vector $n\mathbf{s} = n \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ llamado vector del rayo, satisface

$$\nabla \times (n\mathbf{s}) = 0. \quad (1.30)$$

Ahora reemplazamos la superficie de discontinuidad T por una capa de transición donde ϵ , μ y n cambian rápidamente en forma continua de un lado a otro (Figura 1.5), tomamos un elemento plano con lados P_1Q_1 , P_2Q_2 paralelos y con P_1P_2 , Q_1Q_2 perpendiculares a T . Si \mathbf{b} es el vector normal a esta área tenemos por (1.30), integrando a través del área y usando el teorema de Stokes [Courant II], que

$$\int (\nabla \times (n\mathbf{s})) \cdot \mathbf{b} dS = \int n\mathbf{s} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.31)$$

con la segunda integral tomada sobre la frontera $P_1Q_1Q_2P_2$. Si llamamos δs_1 y δs_2 a las longitudes de P_1Q_1 y P_2Q_2 respectivamente entonces sobre cada una de ellas tenemos los valores constantes \mathbf{s}_1 y \mathbf{s}_2 respectivamente ya que suponemos longitudes pequeñas, luego (1.31) se transforma en

$$n_1\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_2 + \text{contribución de paredes} = 0.$$

Tomamos el límite cuando $\delta h \rightarrow 0$ y la contribución de las paredes tiende a cero. Si además usamos que $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t} = -\mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}$ y $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}_{12}$, donde \mathbf{n}_{12} es el vector normal a la frontera de la superficie apuntando del primer medio hacia el segundo, tenemos entonces $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{n}_{12} \times (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1)) = 0$ y como \mathbf{b} es cualquier vector, luego

$$\mathbf{n}_{12} \times (n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1) = 0. \quad (1.32)$$

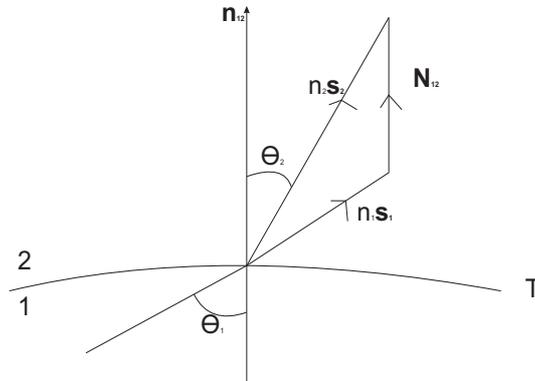


Figura 1.6: Ley de Snell o ley de refracción.

De la ecuación (1.32) obtenemos que la componente tangencial del rayo vector $n\mathbf{s}$ es continuo a través de la superficie, o lo que es lo mismo, el vector $\mathbf{N} = n_2\mathbf{s}_2 - n_1\mathbf{s}_1$ es normal a la superficie.

En la figura 1.6, si llamamos θ_1 y θ_2 a los ángulos que hace el rayo incidente y refractado respectivamente con la normal \mathbf{n}_{12} a la superficie, usando (1.32) tenemos que

$$n_2(\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_2) = n_1(\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{s}_1) \quad (1.33)$$

entonces

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1. \quad (1.34)$$

De (1.32) tenemos que el rayo refractado cae en el mismo plano que el rayo incidente y la normal a la superficie (plano de incidencia) y de (1.34) que la razón del seno del ángulo de refracción y el seno del ángulo de incidencia es igual a la razón $\frac{n_1}{n_2}$ de los índices de refracción. Estos dos resultados expresan la ley de refracción o ley de Snell.

Debemos esperar otra onda, la onda reflejada, que se propaga de regreso en el primer medio. Hacemos $n_2 = n_1$ en (1.33), (1.34) y tenemos que el rayo reflejado cae en el plano de incidencia y además

$$\sin \theta_2 = \sin \theta_1,$$

luego,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1.$$

Estas dos últimas igualdades nos dan la ley de reflexión (Figura 1.7).

1.5. DOS MEDIOS HOMOGÉNEOS DE DISTINTO ÍNDICE DE REFRACCIÓN 17

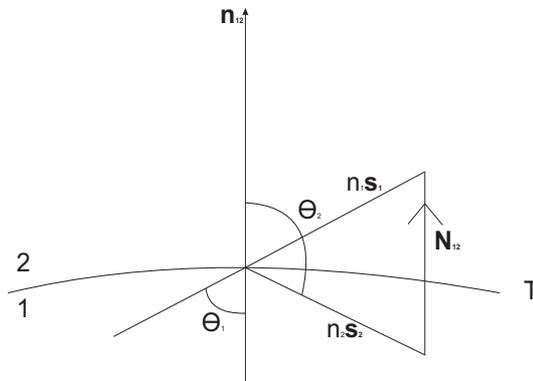


Figura 1.7: Ley de reflexión.

En el Capítulo 1 usamos la ley de Snell para calcular el tamaño del arcoiris usando óptica geométrica. Esta teoría aproximada nos dice que cerca de la cáustica la intensidad luminosa tiende a infinito, esto es claramente incorrecto, en el siguiente capítulo veremos cómo la teoría de ondas regulariza esta singularidad y predice un valor finito para la intensidad en la cáustica.

Capítulo 1

LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER

En este capítulo se modela la envolvente de un paquete de ondas en un medio dieléctrico donde vamos a suponer que el índice de refracción depende de la amplitud de la onda, resultando así la ecuación no-lineal de Schrödinger. Para esto, introduciremos el vector de polarización \mathbf{P} .

Cuando a un material dieléctrico se le aplica un campo eléctrico \mathbf{E} , el material crea dipolos (sistemas de dos cargas, de igual magnitud y opuestas, cercanas entre sí) haciendo que éstos se orienten en la dirección del campo eléctrico influyendo en la intensidad del campo. Se puede pensar que el material está constituido por moléculas polares (aunque no fuera así, al acercarse un campo eléctrico las moléculas serían polarizadas). Si el dieléctrico no está electrizado sus moléculas están distribuidas al azar (Figura 1.1).

Si al material se le acerca una carga eléctrica las moléculas del material se reorientan y se alinean (Figura 1.2). A tal fenómeno se le llama polarización eléctrica, así que, introducimos el vector de polarización $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ que nos da información del comportamiento del material al aplicar el campo eléctrico. Si bien es cierto que cada material reacciona de forma diferente al aplicársele un campo, también es cierto que se han encontrado características iguales en muchos materiales que tienen que ver con la función de polarización. Por ejemplo, si se anula el campo eléctrico \mathbf{E} , entonces también el vector de polarización \mathbf{P} se anula y si el medio es isótropo (en el cual las propiedades físicas no dependen de la dirección) las direcciones de \mathbf{P} y \mathbf{E} son iguales, luego, el vector de polarización es de la forma $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ donde χ es la susceptibilidad eléctrica del material, que es la función que los relaciona. Al introducir la polarización, en las ecuaciones de Maxwell, debemos introducir, aparte de la carga eléctrica,

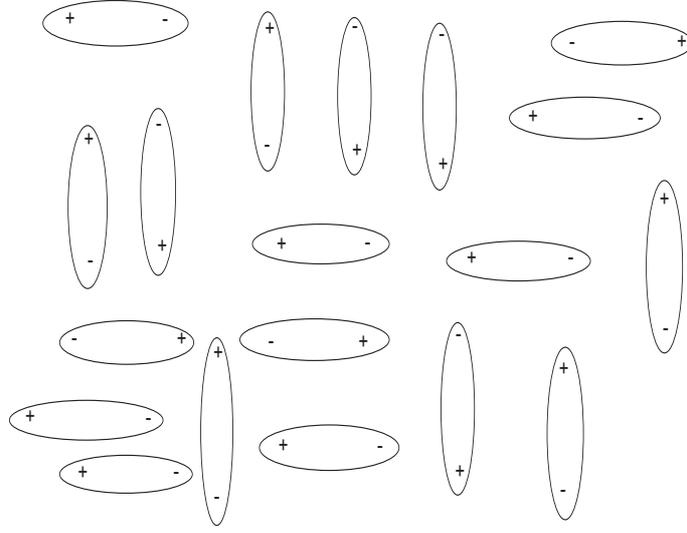


Figura 1.1: Las moléculas del material se encuentran distribuidas al azar antes de aplicarles el campo eléctrico E .

la carga de polarización eléctrica que nos da como resultado utilizar el vector $\mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{E} + \chi\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}$ en lugar de utilizar sólo el vector \mathbf{E} donde la permitividad eléctrica queda como $\epsilon = \sqrt{1 + \chi}$ [Newell], [Fujioka] y [Billingham].

1.1. Vector de Polarización

Los materiales no responden de forma inmediata a la estimulación del campo eléctrico y en esta sección introducimos los efectos de retardo, es decir, el tiempo que tarda el material en reaccionar a la estimulación de la luz. Para esto usaremos el vector de polarización y la susceptibilidad eléctrica, en la ecuación de onda para \mathbf{E} , resultando así que el índice de refracción depende de la frecuencia.

Supongamos un medio dieléctrico e isótropo. En la mayoría de los materiales dieléctricos la permeabilidad magnética μ es casi uno, luego, hacemos $\mu = 1$ y $\epsilon = \sqrt{1 + \chi}$, según lo comentado en la introducción de este capítulo, para sustituir en la ecuación de onda para \mathbf{E} obtenida en el Capítulo 2. Entonces la ecuación de onda es ahora

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1 + \chi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

o escrita de otra forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.2)$$

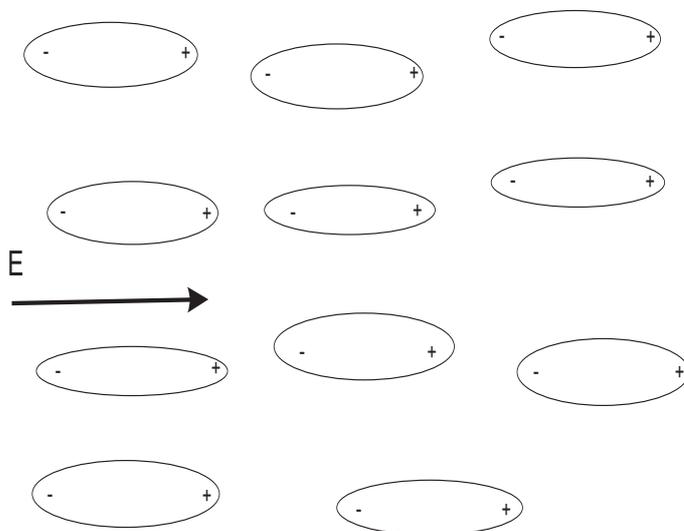


Figura 1.2: Las moléculas del material se alinean al aplicarles el campo eléctrico E .

donde ahora $n = \sqrt{1 + \chi}$ es el índice de refracción del medio y el campo eléctrico se propaga con velocidad $\frac{c}{n}$. Si introducimos el vector $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ en la ecuación (1.1) tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

La materia no responde instantáneamente a la estimulación de la luz. En un medio isótropo el retardo es corregido como

$$\mathbf{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau$$

con

$$\chi(t - \tau) = 0 \text{ si } t < \tau. \quad (1.4)$$

y el valor de χ para $t > \tau$ depende de las propiedades físicas del medio en el cual se esté propagando la luz.

Si usamos la transformada de Fourier con su inversa

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt,$$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

y la aplicamos al vector \mathbf{P} (usando el teorema de convolución), tenemos que

$$\hat{\mathbf{P}}(\omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\omega).$$

Luego la transformada de la ecuación (1.2) queda como

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \hat{\chi}(\omega)) \hat{\mathbf{E}} = 0$$

con el índice de refracción que depende de la frecuencia $n = \sqrt{1 + \hat{\chi}(\omega)}$. De la condición (1.4) tenemos la siguiente relación

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{i\omega t} dt = \int_0^{\infty} \chi(t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.5)$$

Como la dependencia de \mathbf{P} sobre el tiempo de retardo de \mathbf{E} es pequeña conforme $\tau \rightarrow -\infty$, esperamos que $\chi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ lo suficientemente rápido para que $\hat{\chi}(\omega)$ exista para todo ω real. Todo lo que se requiere es que $\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(t)| dt < \infty$.

Observemos que la integral (1.5) converge si ω es complejo y $\omega = \omega_r + i\omega_i$ con $\omega_i > 0$, así tenemos el factor $e^{-\omega_i t}$ en el integrando. Por lo tanto $\hat{\chi}(\omega)$ no sólo existiría para ω en la parte superior del plano complejo sino que $\hat{\chi}(\omega)$ sería diferenciable y por lo tanto holomorfa (función definida para un conjunto abierto del plano complejo y diferenciable para cualquier punto del conjunto), luego, $\hat{\chi}(\omega)$ es analítica ahí. Con estas suposiciones y usando el teorema de Cauchy, tenemos

$$\int_{C_A} \frac{\hat{\chi}(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} = 0 \quad (1.6)$$

donde C_A es el contorno que se ve en la Figura 1.3. Tenemos (1.6) porque la integral a lo largo de C_A se puede deformar a una integral a lo largo de C_R : $\bar{\omega} = Re^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$ con R grande, sin cambiar su valor, porque el integrando es analítico en la región entre las semicircunferencias y la integral a lo largo de C_R es cero si $R \rightarrow \infty$.

Escribimos (1.6) como

$$\int_{C_A} \frac{\hat{\chi}(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} - \pi i \hat{\chi}(\omega) = 0, \quad (1.7)$$

donde la integral es el valor principal de Cauchy, es decir

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} \right)$$

el segundo término de (1.7) resulta de evaluar la integral sobre la semicircunferencia $\bar{\omega} - \omega = \epsilon e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$.

Ahora, si $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}_1(\omega) + i\hat{\chi}_2(\omega)$ y sustituimos en (1.7) entonces

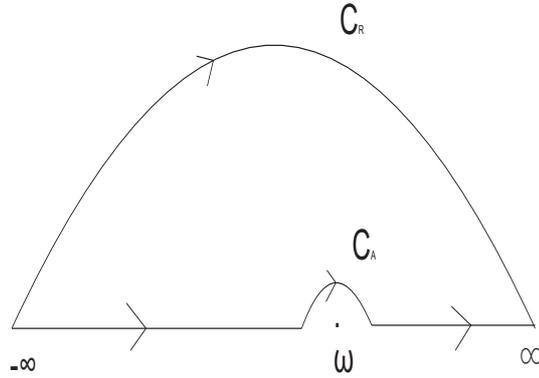


Figura 1.3: Región donde se usa el teorema de Cauchy.

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}_1(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} + i\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}_2(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega} - i\pi(\hat{\chi}_1(\omega) + i\hat{\chi}_2(\omega)) = 0$$

y tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_1(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}_2(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \\ \hat{\chi}_2(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}_1(\bar{\omega})}{\bar{\omega} - \omega} d\bar{\omega}, \end{aligned}$$

al igualar las partes real e imaginaria están relacionadas son las llamadas relaciones de Kramers-Krönig.

Hemos visto que debido a la reacción finita del medio ($\chi(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$), la susceptibilidad es en general compleja y además que ésta depende de la frecuencia. La parte real $\hat{\chi}_1(\omega)$ modifica la propagación y la parte imaginaria $\hat{\chi}_2(\omega)$ tiene que ver con la absorción o amplificación de la energía del campo eléctrico por el medio. El hecho que $\hat{\chi}(\omega)$ dependa de la velocidad significa que diferentes frecuencias viajan a velocidades distintas. La dependencia del índice de refracción sobre la frecuencia no debe sorprender tanto, ya que hemos visto en el Capítulo 1, cómo la luz se divide en colores (el arcoiris). En la Figura 1.4 se observan curvas clásicas de $\hat{\chi}_1(\omega)$, $\hat{\chi}_2(\omega)$.

1.2. Índice de Refracción No-lineal

En ésta sección mostramos la dependencia del índice de refracción sobre la intensidad. Al utilizar la solución del tipo tren de ondas, deducimos la dispersión no-lineal que relaciona el vector de onda, la frecuencia y la intensidad del campo. Para esto hacemos un desarrollo en serie de potencias de la polarización

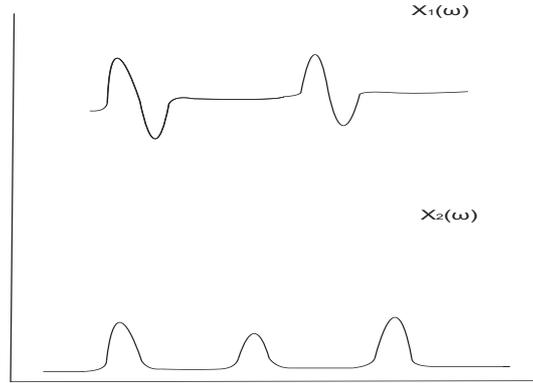


Figura 1.4: Curvas clásicas de las partes real e imaginaria de la susceptibilidad eléctrica.

utilizando los componentes de la susceptibilidad eléctrica. Concluimos así que la propagación de un paquete de ondas depende de la intensidad del campo.

Consideremos pues, la más elemental y familiar solución y que es base para la mayor parte de la discusión, la onda plana o llamada tren de ondas

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(Ae^{i\theta} + (*)) \quad (1.8)$$

donde \mathbf{e} es un vector unitario en la dirección de la polarización de \mathbf{E} . A es la amplitud compleja, $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ es la fase, el vector $\mathbf{k} = (l, m, k)$ es llamado vector de onda y ω la frecuencia como se vio en el capítulo anterior, además estamos considerando la parte compleja conjugada (*).

El plano de fase constante se mueve en la dirección de \mathbf{k} y la condición $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, de las ecuaciones de Maxwell, significa que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$, es decir, el campo eléctrico cae en el plano de fase constante. La dirección del vector de onda \mathbf{k} , que es normal al plano de fase constante, es llamada la dirección de la luz.

La función (1.8) satisface (1.2) siempre y cuando se cumpla la relación de dispersión,

$$D = D(l, m, k, \omega) = (l^2 + m^2 + k^2 - \frac{n^2 \omega^2}{c^2}) = 0. \quad (1.9)$$

En un medio no lineal, la función D depende también de la amplitud del campo A . Para deducir la versión no-lineal de la dispersión (1.9) necesitamos considerar la serie de potencias de la polarización. En el caso más general la componente i del vector de polarización P es

$$\begin{aligned}
P_i = & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \chi_{ij}^{(1)}(t-\tau) E_j(\tau) d\tau + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \chi_{ijk}^{(2)}(t-\tau_1, t-\tau_2) E_j(\tau_1) E_k(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \chi_{ijkl}^{(3)}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) E_j(\tau_1) E_k(\tau_2) E_l(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Esta forma general con diferentes funciones $\chi_{ij}^{(1)}$, $\chi_{ijk}^{(2)}$, ..., etc., se usa para materiales anisótropos (las propiedades físicas dependen de la dirección) tales como los cristales. Aparte de que el campo de polarización \mathbf{P} no necesariamente se alinea con el campo eléctrico \mathbf{E} debido a las simetrías del cristal, las componentes de (1.10) pueden estar relacionadas y mantenerse invariantes bajo rotaciones y reflexiones. En este trabajo no se estudiará este tipo de materiales. El lector interesado puede ver una introducción en [Born].

Para el propósito de este trabajo utilizamos una sola dirección de propagación y además consideramos un material isótropo y con simetría esférica ($\chi^{(2)} = 0$) [Newell], [Fujioka].

Sean \mathbf{E} y \mathbf{P} polarizadas en una sola dirección, la dirección \mathbf{z} , con $\mathbf{E} = \mathbf{e}E$ y $\mathbf{P} = \mathbf{e}P$, independientes de las coordenadas transversales x, y , es decir, $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}$. Sustituimos en (1.3) y tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) E(z, \tau) d\tau = \\
\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) E(\tau_1) E(\tau_2) E(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Si suponemos que el término de la derecha es pequeño con respecto al término lineal, es decir, $|\chi^{(3)}| |E|^3 \ll |\chi^{(1)}| |E|$ a orden ϵ y resolvemos (1.11) iterativamente considerando

$$E = E_0 + \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots \tag{1.12}$$

donde E_0 es la solución tipo onda plana

$$E_0 = A e^{ikz - i\omega t} + A^* e^{i\omega t - ikz}$$

con $k = \frac{\sqrt{1 + \chi^{(1)}(\omega)}}{c} \omega$, A constante. Ahora, sustituimos (1.12) en (1.11)

$$\begin{aligned}
& -k^2 A e^{ikz-i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} A e^{ikz-i\omega t} + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) A e^{ikz-i\omega\tau} d\tau \\
& -k^2 A^* e^{-ikz+i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} A^* e^{-ikz+i\omega t} + \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) A^* e^{-ikz+i\omega\tau} d\tau \\
& + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) E_1(\tau) d\tau \\
& = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) (A e^{ikz-i\omega\tau_1} + A^* e^{-ikz+i\omega\tau_1}) \\
& (A e^{ikz-i\omega\tau_2} + A^* e^{-ikz+i\omega\tau_2}) (A e^{ikz-i\omega\tau_3} + A^* e^{-ikz+i\omega\tau_3}) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
\end{aligned} \tag{1.13}$$

y usando

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-\tau) e^{-i\omega t} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(s) e^{-i\omega(t-s)} ds = e^{-i\omega t} \hat{\chi}(\omega), \\
\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-\tau) e^{i\omega t} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(-s) e^{i\omega(t+s)} ds = e^{i\omega t} \hat{\chi}(-\omega),
\end{aligned} \tag{1.14}$$

tenemos el lado izquierdo de (1.13)

$$\begin{aligned}
& e^{ikz-i\omega t} A (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega))) + e^{-ikz+i\omega t} A^* (-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega))) \\
& + \epsilon (\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \chi^{(1)}(t-\tau) E_1(\tau) d\tau)
\end{aligned}$$

y el lado derecho de (1.13)

$$\begin{aligned}
& \epsilon (\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3) \\
& (A^3 e^{3ikz-i\omega\tau_1-i\omega\tau_2-i\omega\tau_3} + A^2 A^* e^{ikz-i\omega\tau_1+i\omega\tau_2-i\omega\tau_3} \\
& + A^2 A^* e^{ikz-i\omega\tau_1-i\omega\tau_2-i\omega\tau_3} + A(A^*)^2 e^{-ikz+i\omega\tau_1+i\omega\tau_2-i\omega\tau_3} \\
& + A(A^*)^2 e^{-ikz+i\omega\tau_1-i\omega\tau_2+i\omega\tau_3} + (A^*)^3 e^{-3ikz+i\omega\tau_1+i\omega\tau_2+i\omega\tau_3}) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3) + \dots \\
& = \epsilon (\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{\chi}^{(3)}(\omega, \omega, \omega) A^3 e^{3ikz-3i\omega t} + 3\hat{\chi}^{(3)}(-\omega, \omega, \omega) A^2 A^* e^{ikz-i\omega t} \\
& + 3\hat{\chi}^{(3)}(\omega, -\omega, -\omega) A(A^*)^2 e^{-ikz+i\omega t} + \hat{\chi}^{(3)}(-\omega, -\omega, -\omega) (A^*)^3 e^{-3ikz+3i\omega t})) + \dots
\end{aligned}$$

La ecuación para E_1 , que son los términos con ϵ , nos queda

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) E_1(\tau) d\tau \\
&= \frac{-9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^3 e^{3ikz-3i\omega t} - \frac{3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^2 A^* e^{ikz-i\omega t} \\
& \quad - \frac{3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A (A^*)^2 e^{-ikz+i\omega t} - \frac{9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} (A^*)^3 e^{-3ikz+3i\omega t},
\end{aligned} \tag{1.15}$$

luego, hacemos

$$E_1 = F_1(z) e^{-i\omega t} + F_1^*(z) e^{i\omega t} + F_3(z) e^{-3i\omega t} + F_3^*(z) e^{3i\omega t}$$

para sustituir en (1.15)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} e^{-i\omega t} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2} e^{i\omega t} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} e^{-3i\omega t} + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial z^2} e^{3i\omega t} \\
& \frac{\omega^2}{c^2} F_1 e^{-i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} F_1^* e^{i\omega t} - \frac{9\omega^2}{c^2} F_3 e^{-i\omega t} + \frac{9\omega^2}{c^2} F_3^* e^{3i\omega t} \\
& - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) (F_1 e^{-i\omega\tau} + F_1^* e^{i\omega\tau} + F_3 e^{-3i\omega\tau} + F_3^* e^{3i\omega\tau}) d\tau \\
&= \frac{-9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^3 e^{3ikz-3i\omega t} - \frac{3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^2 A^* e^{ikz-i\omega t} \\
& \quad - \frac{3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A (A^*)^2 e^{-ikz+i\omega t} - \frac{9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} (A^*)^3 e^{-3ikz+3i\omega t}
\end{aligned}$$

y usando nuevamente (1.14) tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} e^{-i\omega t} + \frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2} e^{i\omega t} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} e^{-3i\omega t} + \frac{\partial^2 F_3^*}{\partial z^2} e^{3i\omega t} \\
& \frac{\omega^2}{c^2} F_1 e^{-i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} F_1^* e^{i\omega t} - \frac{9\omega^2}{c^2} F_3 e^{-i\omega t} + \frac{9\omega^2}{c^2} F_3^* e^{3i\omega t} \\
& + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) F_1 e^{-i\omega t} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(1)}(\omega) F_1^* e^{i\omega t} \\
& + \frac{9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(1)}(3\omega) F_3^* e^{-3i\omega t} + \frac{9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(1)}(-3\omega) F_3 e^{3i\omega t} \\
&= - \frac{9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^3 e^{3ikz-3i\omega t} - \frac{3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^2 A^* e^{ikz-i\omega t} \\
& \quad - \frac{3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A (A^*)^2 e^{-ikz+i\omega t} - \frac{9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} (A^*)^3 e^{-3ikz+3i\omega t},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

luego, los términos con $e^{-i\omega t}$ son

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} + k^2(\omega) F_1 = \frac{-3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^2 A^* e^{ik(\omega)z} \tag{1.17}$$

y los términos con $e^{-3i\omega t}$ son

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} + k^2(3\omega)F_3 = \frac{-9\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^3 e^{3ik(\omega)z}. \quad (1.18)$$

Para que nuestra expansión sea uniforme, debemos quitar la resonancia. Como k no es lineal en el sentido que $k(3\omega) \neq 3k(\omega)$ entonces F_3 sí está acotada, no así con F_1 ya que $e^{ik(\omega)z}$ es solución de la ecuación (1.17) haciendo su parte izquierda igual a cero, es decir, es solución de la ecuación homogénea entonces F_1 tendría un término proporcional a $\hat{\chi}^{(3)} A^2 A^* e^{ik(\omega)z}$ y en algún momento para alguna z , E_1 sería mayor que E_0 y la expansión no sería uniforme. Supongamos entonces que A no es constante, si A varía lentamente con z , aparece otro término en (1.16)

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} e^{ikz-i\omega t} - 2ik \frac{\partial A^*}{\partial z} e^{-ikz+i\omega t}. \quad (1.19)$$

Al calcular $\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}$ las segundas derivadas de A con respecto a z son de orden ϵ^2 y se omiten, igualando (1.19) a la parte que nos da la resonancia, se obtiene

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} e^{ikz-i\omega t} = \frac{-3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^2 A^* e^{ikz-i\omega t},$$

luego,

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{-3\omega^2}{c^2} \hat{\chi}^{(3)} A^2 A^*$$

y sustituyendo $k = \frac{\sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}}}{c} \omega$ tenemos

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{3i\omega}{2c} \frac{\hat{\chi}^{(3)}}{\sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}(\omega)}} A^2 A^*.$$

Si $|A| = |A_0|$

$$\frac{dA}{A} = \frac{3i\omega}{2c} \frac{\hat{\chi}^{(3)}}{\sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}(\omega)}} |A_0|^2 dz,$$

luego,

$$A = A_0 e^{i \frac{3\omega}{2c} \frac{\hat{\chi}^{(3)}}{\sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}(\omega)}} |A_0|^2 z}. \quad (1.20)$$

Sustituimos (1.20) en E_0 y tenemos

$$E_0 = A_0 e^{i \frac{3\omega}{2c} \frac{\hat{\chi}^{(3)}}{\sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}(\omega)}} |A_0|^2 z} e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

entonces el nuevo número de onda, recordando que $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1+\hat{\chi}^{(1)}(\omega)}$, está dado por

$$k(\omega, |A_0|^2) = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega)} + \frac{3}{2} \frac{\hat{\chi}^{(3)}}{\sqrt{1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega)}} |A_0|^2 \right)$$

y por lo tanto el índice de refracción no lineal es

$$n(\omega, |A_0|^2) = \sqrt{1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega)} + \frac{3}{2} \frac{\hat{\chi}^{(3)}}{\sqrt{1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega)}} |A_0|^2.$$

Llegamos a la conclusión que para amplitud finita, el paquete de ondas tiene una dispersión no lineal

$$k = \frac{n(\omega, |A_0|^2)\omega}{c}.$$

Si incluimos las direcciones x y y la dispersión resulta ser

$$l^2 + m^2 + k^2 = \frac{n^2(\omega, |A_0|^2)\omega^2}{c^2}.$$

Otra observación es que si tuviéramos $k(3\omega) = 3k(\omega)$, la ecuación (1.18) sería resonante y sería más complicada la solución, de ahí la importancia de que la susceptibilidad eléctrica dependa de la frecuencia.

1.3. Variación Lenta en el Índice de Refracción

En esta sección suponemos una variación lenta del índice de refracción y así encontramos la envolvente de la onda A . El caso cuando A tiende a infinito se verá en la siguiente sección.

Sea χ la susceptibilidad eléctrica y n el índice de refracción variando lentamente con respecto a x y sea $\mathbf{E} = \mathbf{y}E$ polarizado en la dirección \mathbf{y} . Supongamos que no hay retardo y que n no depende de la frecuencia. Buscamos soluciones de (1.3) de la forma

$$E(x, z, t) = Ae^{i\theta} + A^*e^{-i\theta} + \epsilon E_1 + \dots$$

donde $\theta = lx + kz - \omega t$ y por lo tanto $\mathbf{k} = (l, k) = \nabla\theta$ y $\omega = \frac{\partial\theta}{\partial t}$, vector de onda y frecuencia de onda respectivamente, además suponemos que la distancia del intervalo, llamémosle L , donde n varía es mucho más grande que la longitud de onda λ , es decir, escogemos $\epsilon = \frac{\lambda}{L} \ll 1$.

Como n varía lentamente con respecto a x , esto es $n = n(X)$, donde $X = \epsilon x$ es la variable lenta, supondremos que también l es función que depende de la variable lenta X y a continuación probaremos que k es constante, es decir k no depende de X

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = l, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = k,$$

entonces

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} = \frac{\partial l}{\partial z}$$

luego

$$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$$

porque l no depende de z . Entonces k es constante y solamente l depende de la dirección en la que cambia n .

Calculamos las derivadas parciales para E con A , n y l funciones que varían lentamente con respecto a $X = \epsilon x$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \epsilon^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} e^{i\theta} + \epsilon 2il \frac{\partial A}{\partial X} e^{i\theta} + i\epsilon \frac{\partial l}{\partial X} A e^{i\theta} - l^2 A e^{i\theta} + \frac{\partial^2(*)}{\partial X^2} + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial X^2} + \dots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= -k^2 A e^{i\theta} + \frac{\partial^2(*)}{\partial z^2} + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} + \dots \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 A e^{i\theta} + \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \dots \end{aligned}$$

Sustituimos en (1.3) y tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} e^{i\theta} + \epsilon 2il \frac{\partial A}{\partial X} e^{i\theta} + i\epsilon \frac{\partial l}{\partial X} A e^{i\theta} - l^2 A e^{i\theta} + \frac{\partial^2(*)}{\partial X^2} + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial X^2}, \\ -k^2 A e^{i\theta} + \frac{\partial^2(*)}{\partial z^2} + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \left(-\omega^2 A e^{i\theta} + \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2} + \epsilon \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} \right) + \dots = 0, \end{aligned}$$

donde $(*)$ es la parte conjugada de E y los términos dominantes nos dan nuevamente la dispersión (de forma equivalente la parte $(*)$)

$$D(l, 0, k, \omega)A = \left(l^2 + k^2 - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) A = 0.$$

De los términos de orden ϵ tenemos

$$\nabla^2 E_1 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + \left(2il \frac{\partial A}{\partial x} + i \frac{\partial l}{\partial x} A \right) e^{i\theta} + (*) = 0$$

y como queremos soluciones acotadas para E_1 hacemos

$$2l \frac{\partial A}{\partial X} + \frac{\partial l}{\partial X} A = 0,$$

luego,

$$(lA^2)' = 0 \implies lA^2 = cte = l_0 A_0^2 \quad (1.21)$$

y por lo tanto

$$A(X) = \left(\frac{l_0}{l(X)}\right)^{1/2} A_0 \quad (1.22)$$

con

$$l(X) = \sqrt{\frac{n^2(X)\omega^2}{c^2} - k^2}. \quad (1.23)$$

Este método se conoce como método "WKB" en honor a Wentzel, Kramers, Brillouin y Jeffreys. De nuevo, la ecuación (1.23) es la ecuación eiconal y la ecuación (1.22) se llama la conservación de la acción de la onda. Nótese que recuperamos el resultado del Capítulo 1, que en la cáustica $A(X)$ tiende a infinito como $\frac{1}{\sqrt{l(X)}}$ (ecuación (1.22)).

1.4. La Cáustica y la Ecuación de Airy

En la sección anterior se mostró que si el índice de refracción n varía lentamente, entonces el número de onda l también varía lentamente.

La ecuación (1.22) muestra que cuando $l(X) \rightarrow 0$, $A(X) \rightarrow \infty$. Estos puntos, donde $l(X) = 0$, forman la cáustica que estudiamos en el Capítulo 1. Evidentemente cuando $l(X) \rightarrow 0$ la aproximación estudiada en la sección anterior no es válida, lo que sucede en realidad es que en la cáustica la intensidad luminosa crece a un valor finito. A continuación mostramos cómo la teoría ondulatoria regulariza la singularidad de la óptica geométrica.

Supongamos que $n^2(x)$ es una constante más una pequeña perturbación lineal. La perturbación, en el caso del arcoiris, es la dependencia del índice de refracción respecto a la longitud de onda. Sustituyendo en la ecuación (1.2) el cuadrado del índice de refracción $n_0^2 - \alpha x$, obtenemos

$$\nabla^2 E - \frac{n_0^2 - \alpha x}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.24)$$

Proponemos como solución de (1.24) a

$$E = B(x)e^{ikz-i\omega t} + B^*(x)e^{-ikz+i\omega t}, \quad (1.25)$$

con $k = \frac{n_0\omega}{c}$ de lo cual, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 E &= \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - k^2 B(x)e^{ikz-i\omega t} + \nabla^2(*) \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 B(x)e^{ikz-i\omega t} + \frac{\partial^2(*)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

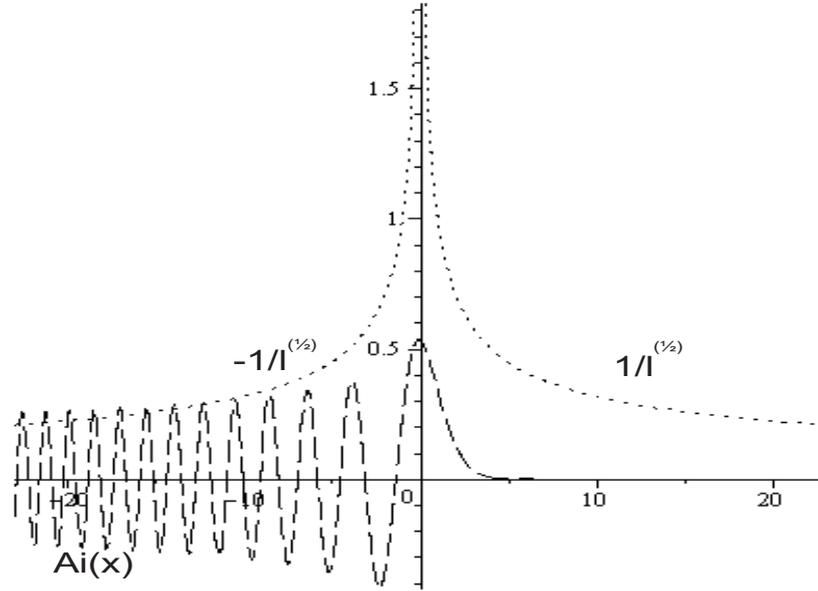


Figura 1.5: La teoría de ondas, con la ecuación de Airy, regulariza la singularidad de la óptica geométrica donde resultó que la intensidad de la luz se va a infinito como $\frac{1}{\sqrt{i}}$ en la cáustica.

que sustituimos y

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} e^{ikz - i\omega t} - k^2 B(x) e^{ikz - i\omega t} + \frac{n_0^2}{c^2} \omega^2 B(x) e^{ikz - i\omega t} - \frac{\omega^2 \alpha x}{c^2} B(x) e^{ikz - i\omega t} + (*) = 0,$$

como $k = \frac{n_0 \omega}{c}$ luego,

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \alpha x B = 0. \quad (1.26)$$

La ecuación (1.26) es la ecuación de Airy para B . Si $x > 0$, $B(x)$ es la solución que cae exponencialmente y para $x < 0$, hay una solución para el vector de onda entrante $(\sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, 0, k)$ y otra para el reflejado con vector de onda $(-\sqrt{n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2}, 0, k)$ y con la amplitud dada por (1.22). En la Figura 1.5 podemos ver una comparación de la función de Airy contra la función $\frac{1}{\sqrt{i}}$. Mientras que en la óptica geométrica A tiende a infinito en la cáustica, en la teoría ondulatoria A alcanza un máximo y luego cae exponencialmente.

1.5. Dedución de la Ecuación No-lineal de Schrödinger

Para la última sección de este capítulo usamos el paquete de ondas, visto como una combinación lineal de ondas planas, donde su envolvente varía lentamente con el espacio y con el tiempo. Así, deducimos la ecuación de Schrödinger para la envolvente del paquete de ondas y concluimos que el paquete de ondas es gobernado por dicha ecuación donde el índice de refracción depende de la intensidad del campo eléctrico.

Consideramos entonces un paquete de ondas

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}(A(x, y, z, t)e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega_0 t)} + (*)) \quad (1.27)$$

con $\mathbf{e}A = \sum_j \mathbf{e}_j a_j e^{i(\epsilon \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} - \epsilon \omega_j t)}$ función de $\epsilon \mathbf{x}$ y ϵt con $\epsilon \ll 1$. Así A es una función que varía lentamente con respecto al espacio y al tiempo y además, en esta combinación, los vectores de onda y las frecuencias están en una banda de orden μ , con $0 < \mu \ll 1$, alrededor de \mathbf{k}_0 , ω_0 con $D(l_0, m_0, k_0, \omega_0) = 0$ (ver ecuación (1.9)).

Los vectores de onda y las frecuencias son de la siguiente forma:

$$\mathbf{k}_0 + \epsilon \mathbf{k}_j, \omega_0 + \epsilon \omega_j$$

con $\mathbf{k}_j = (l_j, m_j, k_j)$, donde para cada j se satisface la relación de dispersión (ecuación (1.9)) que conocemos.

Vamos a suponer que \mathbf{E} está en la dirección \mathbf{y} , además los vectores de onda $\mathbf{k}_0 + \epsilon \mathbf{k}_j$ están en el plano (x, z) , es decir, A varía lentamente con respecto a x , z y t solamente. Sustituimos (1.27) en (1.3) con $\mathbf{k}_0 = (0, 0, k_0)$ y $\mathbf{e} = (0, 1, 0)$. Para esto calculamos las derivadas parciales de \mathbf{E} , considerando que la susceptibilidad eléctrica y por lo tanto el índice de refracción son constantes, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) e^{i\theta}, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t} \right) e^{i\theta}, \end{aligned}$$

donde $\theta = (\mathbf{k}_0 + \epsilon \mathbf{k}_j) \cdot \mathbf{x} - (\omega_0 + \epsilon \omega_j)t$, entonces

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2i\omega_0 \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (1.28)$$

Considerando los términos con primera derivada, recordando que cada derivada es de orden ϵ .

$$k_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \omega_0 \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.29)$$

usando $k_0 = \omega_0 \frac{n}{c}$ (1.29) se reduce a

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (1.30)$$

Este resultado nos dice que A a orden ϵ es sólo función de $t - \frac{c}{n}z$, es decir, el paquete de ondas se mueve rígidamente con velocidad $\frac{c}{n}$. Ahora estudiaremos la corrección a orden ϵ^2 . Usando (1.30) tenemos que $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$, lo sustituimos en (1.28), que a orden ϵ^3 , nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + 2i\omega_0 \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial A}{\partial t} &= 0 \\ \implies \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + 2ik_0 \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial t} &= 0 \\ \implies \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{i2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Nótese que $\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ es igual a cero sólo a orden ϵ . A orden ϵ^2 la corrección es $\frac{1}{i2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$. La ecuación (1.31) se llama aproximación paraxial porque los rayos, las normales a los planos de fase constante de todo el paquete de onda, son casi paralelos. Si hacemos el cambio de variable

$$\tau = t - \frac{n}{c}z$$

en (1.31), entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{1}{i2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= 0 \\ \implies \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{n}{c} \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{i2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= 0 \\ \implies \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{i2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) describe la dispersión del paquete de ondas en la dirección transversa, esto se conoce como la difracción. Esta aproximación paraxial nos da la forma en que se modifica el paquete en ondas de orden ϵ^2 en z y t que son las variables contenidas en la fase.

Ahora veamos cómo queda la equivalente a la ecuación paraxial (ecuación (1.31)) cuando incluimos el retardo. La equivalente a la ecuación (1.3) con retardo es

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau = 0. \quad (1.33)$$

La integral anterior cuando se sustituye \mathbf{E} , dada en (1.27), queda como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) (\mathbf{e} A e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - i\omega_0 \tau}) d\tau$$

1.5. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER 17

y si le tomamos la transformada de Fourier con el teorema de convolución entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau e^{i\omega t} dt = \hat{\chi}^{(1)}(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\omega) \quad (1.34)$$

donde $\hat{\mathbf{E}}(\omega)$ es la transformada del paquete de ondas que está centrado en ω_0 y $-\omega_0$. Podemos hacer

$$\hat{\mathbf{E}}(\omega) = \hat{A}(\omega - \omega_0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}. \quad (1.35)$$

Sustituimos (1.35) en (1.34) y además desarrollamos $\hat{\chi}^{(1)}(\omega)$ alrededor de ω_0 para tener

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{(1)} \hat{\mathbf{E}}(\omega) &= \hat{\chi}^{(1)} \hat{A}(\omega - \omega_0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}} \\ &= \hat{A}(\omega - \omega_0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}} \left(\hat{\chi}^{(1)}(\omega_0) + \hat{\chi}^{(1)'}(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \hat{\chi}^{(1)''}(\omega_0) \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ahora, invirtiendo (1.36) se llega a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0) \hat{A}(\omega - \omega_0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}} e^{-i\omega t} d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(1)'}(\omega_0) \hat{A}(\omega - \omega_0) (\omega - \omega_0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}} e^{-i\omega t} d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(1)''}(\omega_0) \hat{A}(\omega - \omega_0) \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}}} e^{-i\omega t} + \dots d\omega. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Sea $s = \omega - \omega_0$, fijándonos sólo en el lado derecho de (1.37) tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}} - i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0) \hat{A}(s) e^{-ist} ds \\ &+ \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}} - i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\chi}^{(1)'}(\omega_0) \hat{A}(s) s e^{-ist} + \hat{\chi}^{(1)''}(\omega_0) \hat{A}(s) \frac{s^2}{2} e^{-ist} + \dots ds \right), \end{aligned} \quad (1.38)$$

usamos $\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n} = (-i\omega)^n \hat{f}(\omega)$, entonces, (1.38) es

$$\begin{aligned} &e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}} - i\omega_0 t} \left(\hat{\chi}^{(1)}(\omega_0) A + \frac{\hat{\chi}^{(1)'}(\omega_0)}{-i} \frac{\partial A}{\partial t} \right. \\ &\left. + \frac{\hat{\chi}^{(1)''}(\omega_0)}{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\hat{\chi}^{(1)'''}(\omega_0)}{i} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + \frac{\hat{\chi}^{(1)''''}(\omega_0)}{1} \frac{\partial^4 A}{\partial t^4} + \dots \right) \end{aligned}$$

y (1.34) nos queda entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \hat{\mathbf{x}} - i\omega_0 t} \hat{\chi}^{(1)} \left(\omega_0 - i \frac{\partial}{\partial t} \right) A. \quad (1.39)$$

Calculamos la segunda derivada parcial a (1.39) con respecto a t

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{i\hat{k}_0 \cdot \hat{x} - i\omega_0 t} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) A) \\ &= -\omega_0^2 e^{i\hat{k}_0 \cdot \hat{x} - i\omega_0 t} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) A(x, y, z, t) \\ &\quad - 2i\omega_0 e^{i\hat{k}_0 \cdot \hat{x} - i\omega_0 t} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial}{\partial t} A(x, y, z, t) \\ &\quad + e^{i\hat{k}_0 \cdot \hat{x} - i\omega_0 t} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} A(x, y, z, t), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-\tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau \\ = -(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})^2 e^{i\hat{k}_0 \cdot \hat{x} - i\omega_0 t} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) A(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Sustituimos (1.40) en (1.33) y llegamos a

$$\begin{aligned} -k_0^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \\ + \frac{2}{c^2} i\omega_0 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\omega_0^2}{c^2} A + \frac{(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})^2}{c^2} \hat{\chi}^{(1)}(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) A = 0, \end{aligned}$$

usando $k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}$ y $n(\omega) = \sqrt{1 + \hat{\chi}^{(1)}(\omega)}$ tenemos

$$-k_0^2 A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k^2(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}) A = 0.$$

Desarrollando k^2 en su serie de Taylor hasta la segunda derivada alrededor de ω_0 entonces

$$\begin{aligned} -k_0^2 A + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k^2(\omega_0) A \\ + (k^2(\omega_0))' i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{(k^2(\omega_0))''}{2} \left(\frac{-\partial^2 A}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1.41) \\ \implies 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (k^2(\omega_0))' i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{(k^2(\omega_0))''}{2} \left(\frac{-\partial^2 A}{\partial t^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nos quedamos sólo con las primeras parciales de la ecuación (1.41), que son las de orden ϵ , y tenemos

$$\begin{aligned} 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + (k^2(\omega_0))' i \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \\ \implies 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + 2k(\omega_0) \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0) i \frac{\partial A}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

1.5. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER 19

luego,

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0) \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (1.42)$$

y si a (1.42) la derivamos parcialmente con respecto a z y luego respecto a t e igualamos las dos ecuaciones resultantes obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0)\right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

la cual sustituimos en (1.41), luego,

$$\begin{aligned} & 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0)\right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\ & + (k^2(\omega_0))' i \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{(k^2(\omega_0))''}{2} \left(\frac{-\partial^2 A}{\partial t^2}\right) = 0 \\ \implies & 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial z} + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0)\right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2k(\omega_0) \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0) \frac{\partial A}{\partial t} \\ & - \left(\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0)\right)^2 + k(\omega_0) \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_0)\right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0) \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_0) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (1.43)$$

De igual forma que cuando no incluimos retardo, nótese que $\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial \omega}(\omega_0) \frac{\partial A}{\partial t}$ es igual a cero sólo a orden ϵ . A orden ϵ^2 la corrección es $-\frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}(\omega_0) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$. La ecuación (1.43) es la equivalente a la ecuación paraxial (ecuación (1.31)), sólo que en (1.43) se incluye el retardo en la susceptibilidad eléctrica. Si suponemos que A depende también lentamente de y , (1.43) nos queda

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial l^2} \Big|_{(0,0,\omega_0)}\right) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial m^2} \Big|_{(0,0,\omega_0)}\right) \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \\ & + \frac{\partial A}{\partial z} + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_{(0,0,\omega_0)}\right) \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_{(0,0,\omega_0)}\right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde se está usando que $k = \sqrt{\frac{n^2(\omega)\omega^2}{c^2} - l^2 - m^2}$ y por tanto $\frac{\partial^2 k}{\partial l^2} \Big|_{(0,0,\omega_0)} = \frac{\partial^2 k}{\partial m^2} \Big|_{(0,0,\omega_0)} = -\frac{1}{k_0}$.

Otra forma de llegar a (1.44), suponiendo que A depende también lentamente de y , es usando la relación de dispersión (ecuación (1.9)) con los operadores

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} A e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} &= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} i \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) A, \\ \frac{\partial}{\partial y} A e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} &= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} i \left(-i \frac{\partial}{\partial y}\right) A, \\ \frac{\partial}{\partial z} A e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} &= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} i \left(k_0 - i \frac{\partial}{\partial z}\right) A, \\ \frac{\partial}{\partial t} A e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} &= e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} - i \left(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}\right) A,\end{aligned}$$

es decir, con

$$D\left(-i \frac{\partial}{\partial x}, -i \frac{\partial}{\partial y}, k_0 - i \frac{\partial}{\partial z}, \omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}\right) A = 0$$

tenemos

$$\begin{aligned}\left(\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(k_0 - i \frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right. \\ \left. - \frac{n^2(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})}{c} \left(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) A(x, y, z, t) = 0\end{aligned}\tag{1.45}$$

y de aquí se sigue (1.44).

Variaciones pequeñas δn de orden ϵ^2 se pueden incluir en (1.44) cambiando n por $n + \delta n$ en (1.45). De esta forma aparecen los nuevos términos $\frac{2n\delta n(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})^2}{c^2} A + \frac{(\delta n)^2(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})^2}{c^2} A$ y al despreciar el segundo término (segundo orden), el primero (primer orden) nos queda como

$$\begin{aligned}\frac{2n(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})\delta n}{c^2} \left(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 A \\ \implies \frac{2k(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})}{c} \left(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t}\right) \delta n A,\end{aligned}$$

el cual, si lo aproximamos en serie de Taylor alrededor de ω_0 y tomamos sólo el primer término llegamos a

$$\frac{2k_0(\omega_0 + i \frac{\partial}{\partial t})}{c} \delta n A = \frac{2k_0\omega_0\delta n A}{c} + \frac{2k_0 i}{c} \frac{\partial(\delta n A)}{\partial t}$$

de nuevo despreciando el segundo término por ser más pequeño y al dividir entre $2ik_0$ tenemos

$$-i \frac{\omega_0}{c} \delta n A = -i \frac{k_0}{n(\omega_0)} \delta n A$$

y como al evaluar $\frac{\partial k}{\partial n}$ en el punto $(0, 0, \omega_0)$ nos da $\frac{k_0}{n(\omega_0)}$ por fin (1.44), con todas las parciales de k evaluadas en el punto $(0, 0, \omega_0)$, nos queda

1.5. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER 21

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial l^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial m^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial A}{\partial z} \\ & + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right) \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right) \delta n A = 0. \end{aligned} \quad (1.46)$$

De la ecuación (1.46) se puede llegar a la ecuación de Schrödinger. Supongamos que la amplitud es de orden ϵ entonces $|A|^2$ es de orden ϵ^2 y podemos cambiar δn por $\delta n(x, y) + n_1 |A|^2$ en (1.46) (cuando se considera $n^2 = a_1^2 + a_2 |A|^2$ con a_1 y a_2 constantes, se dice que el medio es de Kerr), donde este término nos dice que puede haber pequeñas variaciones en el índice de refracción debido a pequeños cambios en espacio o intensidad del campo, luego,

$$\frac{i}{2} c_3 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{i}{2} c_2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial A}{\partial z} + c_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} c_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i k_0 \left(\frac{\delta n}{n(\omega_0)} + \frac{n_1 |A|^2}{n(\omega_0)} \right) A = 0 \quad (1.47)$$

donde $c_3 = \frac{\partial^2 k}{\partial l^2}$, $c_2 = \frac{\partial^2 k}{\partial m^2}$, $c_1 = \frac{\partial k}{\partial \omega}$ y $c_0 = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}$ todas las derivadas parciales evaluadas en el punto $(0, 0, \omega_0)$. De la ecuación (1.47) deducimos la ecuación no-lineal de Schrödinger si suponemos que sólo hay dispersión en la dirección de propagación de la onda, es decir, A no depende ni de x ni de y y además $\delta n = 0$. Así obtenemos

$$\frac{\partial A}{\partial z} + c_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} c_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - i k_0 \frac{n_1 |A|^2}{n(\omega_0)} A = 0.$$

La dispersión sólo en la dirección de propagación de la onda se usa para estudiar la propagación en fibras ópticas, que son fabricadas basándose en la reflexión total al chocar la luz con las paredes de la fibra, donde las pérdidas en la transmisión de luz son prácticamente sólo en la dirección de su propagación [Palais].

Capítulo 1

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN NO-LINEALES

En este capítulo mostraremos que la no-linealidad afecta de manera drástica la reflexión y transmisión del rayo en los casos en que el índice de refracción depende de la intensidad del campo. Para esto, se utilizará la ecuación no-lineal de Schrödinger deducida en el capítulo anterior. Esta ecuación tiene una solución exacta de la forma $f(x - ct)$ que representa un paquete de ondas coherente. Usamos la teoría de modulaciones de Whitham para aproximar este paquete de ondas por una partícula moviéndose en un potencial auxiliar. Esta teoría aproximada da una generalización de la ley de Snell. El paquete de ondas, que es la generalización del rayo de luz, cruza la interfase y, en este caso, puede tener tres comportamientos distintos dependiendo del valor inicial de la velocidad. El paquete de ondas puede cruzar la interfase y continuar viajando en la misma dirección con una velocidad diferente como en la ley de Snell lineal. El paquete de ondas puede retroceder en la interface como si se reflejara. Finalmente, el paquete de ondas puede quedar atrapado en la interfase.

1.1. Solución Tipo Solitón

Un paquete de ondas al cruzar la interfase (división entre el primer medio y el segundo) se puede descomponer en multisolitones, solitones o en radiación y se puede tratar cada caso por separado. En este trabajo consideramos un ejemplo sencillo al suponer que tenemos un solitón en el primer medio y se mantiene la forma de solitón al cruzar la interfase aunque modifica su anchura y velocidad. En esta primera sección mostraremos que la ecuación de Schrödinger tiene soluciones de onda viajera.

Del capítulo anterior tenemos

$$\frac{\partial A}{\partial z} + c_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} c_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - ik_0 \frac{n_1 |A|^2}{n(\omega_0)} A = 0. \quad (1.1)$$

Vamos a poner la ecuación (1.1) en una forma conveniente, para encontrar la solución en forma de solitón, haciendo algunos cambios de variable. Para esto, empezamos haciendo

$$z = z, \tau = t - c_1 z,$$

luego, las derivadas parciales de la ecuación (1.1) nos quedan como

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= -c_1 \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{\partial A}{\partial z}, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} \end{aligned}$$

y las sustituimos en (1.1) para llegar a la ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} c_0 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - ik_0 \frac{n_1 |A|^2}{n(\omega_0)} A = 0. \quad (1.2)$$

Sustituimos,

$$z = \frac{k_0 n_1}{2n_0} z, \tau = \sqrt{\frac{k_0 n_1}{n_0}} \frac{t}{\sigma c_0}$$

donde $\sigma = \text{sng}(c_0)$ y la ecuación (1.2) es ahora $\frac{i}{2} A_z(z, t) - \frac{\sigma}{2} A_{tt}(z, t) + |A(z, t)|^2 A(z, t) = 0$. En este trabajo utilizaremos soluciones tipo solitón por lo que necesitamos que $\sigma = -$ [Newell], entonces obtenemos la ecuación

$$\frac{i}{2} A_z(z, t) + \frac{1}{2} A_{tt}(z, t) + |A(z, t)|^2 A(z, t) = 0. \quad (1.3)$$

Buscamos soluciones para (1.3) de la forma $A(z, t) = f(t)e^{i\omega z}$, que es una onda estacionaria, con $f(t)$ real, luego,

$$A_z(z, t) = i\omega f(t)e^{i\omega z}, A_{tt}(z, t) = f''(t)e^{i\omega z}, |A(z, t)|^2 = f^2(t) \quad (1.4)$$

y si sustituimos (1.4) en (1.3) tenemos la ecuación

$$-\omega \frac{f}{2} + \frac{f_{tt}}{2} + f^3 = 0 \quad (1.5)$$

que resolvemos a continuación.

Multiplicando a (1.5) por f_t queda

$$-\omega \frac{(f^2)'}{4} + \frac{(f_t^2)'}{4} + \frac{(f^4)'}{4} = 0 \quad (1.6)$$

y al integrar (1.6) tenemos

$$-\omega f^2 + f_t^2 + f^4 = k$$

con k constante. Que tiene soluciones acotadas para toda k pero queremos soluciones que tiendan a cero ($A \rightarrow 0$) cuando $t \rightarrow \mp\infty$ necesariamente $k = 0$, entonces, tomando la raíz positiva tenemos

$$f_t = f\sqrt{\omega - f^2}.$$

De aquí se sigue que

$$\frac{df}{f\sqrt{\omega - f^2}} = dt,$$

luego,

$$\frac{df}{\sqrt{\omega} f \sqrt{1 - \frac{f^2}{\omega}}} = dt.$$

Hacemos el cambio de variable $\cos u = \frac{f}{\sqrt{2\omega}}$ e integramos para llegar a

$$-\frac{1}{\sqrt{\omega}} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} = t + \text{constante}$$

entonces tomando la constante cero

$$1 + \sqrt{1 - \frac{f^2}{\omega}} = \frac{f}{\sqrt{\omega}} e^{-\sqrt{\omega}t}. \quad (1.7)$$

Despejamos, de (1.7), la solución no trivial que resulta ser

$$f = \sqrt{\omega} \operatorname{sech}(\sqrt{\omega}t).$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (1.3), con $\gamma = \sqrt{\omega}$, es

$$A(z, t) = \gamma \operatorname{sech}(\gamma t) e^{i\gamma^2 z}. \quad (1.8)$$

Para obtener una onda viajera a partir de esta onda estacionaria, necesitamos hacer un pequeño paréntesis para hablar de la invarianza de Galileo. Uno de los resultados más importantes de Galileo es la llamada invarianza galileana. Galileo describió este fenómeno poniendo como ejemplo un barco moviéndose con velocidad constante en mar tranquilo, donde una persona se encuentra debajo de la cubierta; Galileo dice que la persona no puede sentir si el barco se mueve o el barco está parado. Matemáticamente la situación es suponer que tenemos dos sistemas de referencia s y s' . El sistema s está quieto y el sistema s' se mueve con velocidad constante v con respecto al sistema s . El eje x' de s'

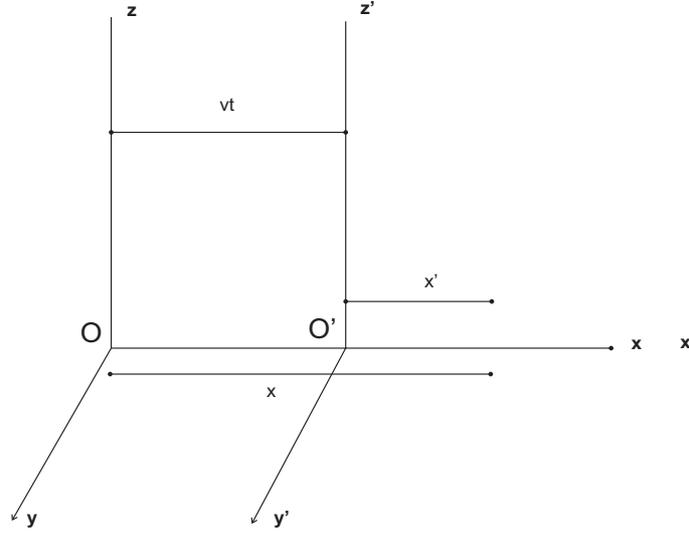


Figura 1.1: La invarianza de Galileo (Las leyes físicas son las mismas en los dos sistemas).

se desliza sobre el eje x de s y se mantienen paralelos los ejes y', z' y y, z de s' y s respectivamente (Figura 1.1). Como se ve en la figura la relación entre x y x' es $x' = x - vt$ donde vt representa el desplazamiento de x' sobre x . La relación entre ambos sistemas está dada por la siguiente transformación

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

El principio de invariancia dice que las leyes físicas son las mismas en ambos sistemas.

Terminamos así el paréntesis (para una explicación más amplia de la invarianza galileana se puede ver el libro [Feynman I]). Volviendo a (1.8) mostraremos que la ecuación de Schrödinger cumple ser invariante frente a traslaciones temporales. Es decir, si $A(z, t)$ es solución de (1.3), $A(z, t - cz)e^{i\alpha z + i\beta z}$ también es solución de (1.3), α y β serán calculadas a continuación.

Calculamos las derivadas parciales a $F(z, t) = A(z, t - cz)e^{i\alpha z - i\beta t}$

$$\begin{aligned} F_z &= (A_z - cA_t)e^{i\alpha z - i\beta t} + i\alpha A e^{i\alpha z - i\beta t} \\ F_{tt} &= A_{tt}e^{i\alpha z - i\beta t} - 2i\beta A_t e^{i\alpha z - i\beta t} - \beta^2 A e^{i\alpha z - i\beta t} \\ |F|^2 F &= |A|^2 A e^{i\alpha z - i\beta t}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Sustituimos (1.9) en (1.3) y concluimos que si α y β están dados por

$$\beta = -\frac{c}{2}, \quad \alpha = -\beta^2 = -\frac{c^2}{4}, \quad (1.10)$$

1.2. ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER CON UN TÉRMINO POTENCIAL 5

la solución viajando con velocidad c también satisface la ecuación (1.3). Usamos (1.8) y (1.10) para tener las soluciones tipo solitón para la ecuación (1.3)

$$A(z, t) = \gamma \operatorname{sech}(\gamma(t + cz)) e^{i(\gamma^2 - \frac{c^2}{4})z + i\frac{c}{2}t}. \quad (1.11)$$

1.2. Ecuación No-lineal de Schrödinger con un Término Potencial

En esta sección consideramos la ecuación no-lineal de Schrödinger más un término potencial VA . V puede representar, para aplicaciones físicas por ejemplo, términos no-lineales que pudieron haber sido despreciados a un primer orden o alguna reacción debido al material. Además, en esta sección también, obtendremos algunas identidades que utilizaremos en la siguiente sección.

Consideremos la siguiente ecuación de Schrödinger con el potencial de perturbación VA

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2|A|^2 A = VA. \quad (1.12)$$

Sean $p = \int_{-\infty}^{\infty} AA^* dx$ la intensidad, $\bar{x} = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} xAA^* dx$ la posición promedio y $\nu = i \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A \frac{\partial A^*}{\partial x} - A^* \frac{\partial A}{\partial x}) dx$, como se verá a continuación, la velocidad promedio. A partir de las definiciones anteriores mostraremos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= 0, \\ \frac{d\bar{x}}{dz} &= \nu, \\ \frac{d\nu}{dz} &= -2 \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} AA^* dx. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Para probar (1.13.1) tenemos, de la definición de intensidad, que

$$\frac{dp}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} AA^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dA}{dz} A^* + A \frac{dA^*}{dz} \right) dx \quad (1.14)$$

y de (1.12) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} A_z &= iA_{xx} + 2i|A|^2 A - iVA, \\ A_z^* &= -iA_{xx}^* - 2i|A|^2 A^* + iVA^*. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Multiplicamos (1.15.1) por A^* y (1.15.2) por A y las sumamos para llegar a la ecuación

$$A_z A^* + AA_z^* = i(A_{xx} A^* - A_{xx}^* A) = i((A_x A^*)_x - (AA_x^*)_x). \quad (1.16)$$

Sustituimos (1.16) en (1.14) y resolvemos

$$\frac{dp}{dz} = i(A_x A^* - A A_x^*)_{-\infty}^{\infty} + i \int_{-\infty}^{\infty} (A_x A_x^* - A_x A_x^*) dx = 0,$$

así concluimos la prueba de (1.13.1).

Para probar (1.13.2) usamos nuevamente (1.14) y tenemos

$$\frac{d\bar{x}}{dz} = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{\infty} x (A A^*)_z dx = \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} x (A_{xx} A^* - A_{xx}^* A) dx, \quad (1.17)$$

luego, resolvemos (1.17) por partes y llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dz} &= \frac{i}{p} ((x A_x A^* - x A A_x^*)_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (A A_x^* - A_x A^*) dx) \\ &= \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A A_x^* - A_x A^*) dx \\ &= \nu \end{aligned}$$

y queda probada (1.13.2).

Finalmente para probar (1.13.3) la integramos por partes y tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial z} &= \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A_z A_x^* + A A_{xz}^* - A_z^* A_x - A^* A_{xz}) dx \\ &= \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A A_z^* - A_z A^*)_x dx + 2 \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A_z A_x^* - A_x A_z^*) dx \\ &= 2 \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A_z A_x^* - A_x A_z^*) dx. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Multiplicamos (1.15.1) por A_x^* y (1.15.2) por A_x , luego, restamos y sustituimos el resultado en (1.18) para tener

$$\begin{aligned} &2 \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (A_z A_x^* - A_z^* A_x) dx \\ &= 2 \frac{i}{p} \int_{-\infty}^{\infty} i (A_{xx} A_x^* + A_x A_{xx}^* + 2(|A|^2 A A_x^* + |A|^2 A_x A^*) \\ &\quad - V(A A_x^* + A_x A^*)) dx \\ &= \frac{-2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} ((A_x A_x^*)_x + 2|A|^2 (|A|^2)_x \\ &\quad - V(|A|^2)_x) dx. \end{aligned} \quad (1.19)$$

El primer término de la integral (1.19.3) se hace cero en más/menos infinito y el segundo término de la misma queda omitiendo constantes

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 (|A|^2)_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(|A|^2)^2}{2} \right)_x dx = \left(\frac{(|A|^2)^2}{2} \right)_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

así, (1.19.3) queda como

$$\begin{aligned} & \frac{2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} V(|A|^2)_x dx \\ &= \frac{2}{p} (V|A|^2)_{-\infty}^{\infty} - \frac{2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} V_x |A|^2 dx \\ &= \frac{-2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} V_x |A|^2 dx \end{aligned}$$

y de esta forma tenemos probadas las ecuaciones de (1.13).

1.3. La Interfase

En esta sección estudiamos soluciones tipo solitón que cruzan una interfase que separa dos medios de Kerr con características distintas.

Supongamos que tenemos dos medios con distinto índice de refracción, el primer medio del lado izquierdo con $n^2 = n_0^2 + \alpha_0 |A|^2$ para $x < 0$ y el segundo medio del lado derecho con $n^2 = n_1^2 + \alpha_1 |A|^2$ para $x > 0$, Figura (1.2). Para esto iniciamos con la ecuación de onda que describe la propagación de la misma, para el plano $\mathbf{x} - \mathbf{z}$

$$\nabla^2 E - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.20)$$

Primero, hacemos el cambio de variable $E(x, z, t) = E'(x, z)e^{i\omega t}$, que sustituimos en (1.20) para tener la ecuación

$$E'_z z + E'_{xx} + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} E' = 0. \quad (1.21)$$

Usamos la aproximación paraxial, deducida en el Capítulo 3 sección 3.5, y el cambio de variable $E'(x, z) = F(x, z)e^{i\lambda \frac{\omega}{c} z}$ en (1.21) llegamos a esto

$$2i\lambda \frac{\omega}{c} F_z + F_{xx} - (\lambda^2 - n^2) \frac{\omega^2}{c^2} F = 0,$$

donde estamos considerando variación lenta en el índice de refracción y por lo tanto F es una función de variación lenta. Con el cambio de variables $x' = x \frac{\omega}{c}$ y $z' = z \frac{\omega}{c}$, omitiendo las primas en las variables, obtenemos

$$2i\lambda F_z + F_{xx} - (\lambda^2 - n^2) F = 0. \quad (1.22)$$

En la ecuación (1.22) se sustituirá el índice de refracción n^2 para los dos medios de Kerr. En el lado izquierdo de la interfase ($x < 0$), $n^2 = n_0^2 + \alpha_0 |A|^2$

mientras que en lado derecho de la interfase ($x > 0$), $n^2 = n_1^2 + \alpha_1 |A|^2$ como dijimos al principio de la sección. Lo que se va a hacer en esta sección es reducir el número de parámetros como sea posible y para esto hacemos un reescalamiento en la ecuación (1.22) para obtener nuevamente la ecuación normalizada (1.3) más un término potencial que será cero en uno de los dos medios de propagación. Utilizamos el siguiente reescalamiento

$$F(x, z) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} A(x, z') e^{i \frac{n_0^2 - \lambda^2}{2\lambda} z} \quad (1.23)$$

con $z' = \frac{z}{2\lambda}$, del cual tenemos

$$\begin{aligned} F_z &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{1}{2\lambda} A_{z'} \frac{1}{2\lambda} + i \frac{n_0^2 - \lambda^2}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} A \\ F_{xx} &= \sqrt{\frac{2}{\alpha}} A_{xx} \\ |F|^2 &= \frac{2}{\alpha} |A|^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Para $x < 0$ sustituimos $n^2 = n_0^2 + \alpha_0 |A|^2$ en (1.22) y tenemos

$$2i\lambda F_z + F_{xx} - \lambda^2 F + n_0^2 F + \alpha_0 |F|^2 F = 0. \quad (1.25)$$

Sustituimos (1.23) en (1.25) utilizando (1.24) y para $x < 0$ llegamos a

$$iA_{z'} + A_{xx} + 2|A|^2 A = 0. \quad (1.26)$$

Para $x > 0$ hacemos lo mismo, utilizamos el rescalamiento pero sustituimos su índice de refracción correspondiente $n^2 = n_1^2 + \alpha_1 |A|^2$ en (1.22), y tenemos

$$2i\lambda F_z + F_{xx} - \lambda^2 F + n_1^2 F + \alpha_1 |F|^2 F = 0. \quad (1.27)$$

Utilizamos (ecuación (1.23)) para (1.27) y si $x > 0$ llegamos a

$$\begin{aligned} iA_{z'} + A_{xx} + (n_1^2 - n_0^2)A + 2\frac{\alpha_1}{\alpha_0} |A|^2 A &= 0 \\ \Rightarrow iA_{z'} + A_{xx} + 2|A|^2 A = (n_0^2 - n_1^2)A + 2(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}) |A|^2 A. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Primero estudiamos el lado izquierdo de la interfase. Usamos (1.26) y (1.28), omitiendo la prima en la variable z , tenemos la ecuación que describe la propagación de la onda

$$i \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 2|A|^2 A = VA = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \Delta A - 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) |A|^2 A, & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

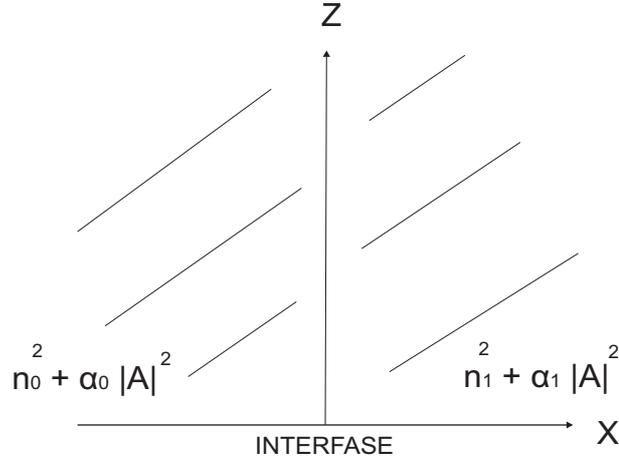


Figura 1.2: Dos medios de Kerr.

es decir, $V = H(x)(\Delta - 2(\frac{1}{\alpha} - 1)|A|^2)$ ([Aceves (a)], [Wabnitz]) con $\Delta = n_0^2 - n_1^2$, $\alpha = \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ y $H(x)$ la función Heaviside.

Usando (1.11) la solución de (1.29) es de la forma

$$A(x, z) = 2\beta_0 \operatorname{sech}(2\beta_0(x - \bar{x}))e^{i((2\beta_0)^2 - \frac{\nu^2}{4})z + i\frac{\nu}{2}x} \quad (1.30)$$

donde β_0 es la constante para el primer medio. Luego, de las ecuaciones (1.13.2) y (1.13.3) tenemos

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z^2} = \frac{\partial \nu}{\partial z} = \frac{-2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} V_x |A|^2 dx \quad (1.31)$$

y como $|A|^2$ sólo es función de x y \bar{x} , la ecuación (1.31) se puede escribir como el gradiente de un potencial, es decir,

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z^2} = -\frac{\partial U_L(\bar{x})}{\partial \bar{x}}. \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) es la segunda ley de Newton que describe el movimiento de la partícula y como sabemos de las condiciones iniciales dadas (posición y velocidad), la partícula seguirá una única trayectoria. Podemos encontrar la forma explícita de $U_L(\bar{x})$; para esto, calculamos V_x

$$V_x = \Delta \delta(x) + 2(1 - \alpha^{-1})\delta(x)|A|^2 + 2(1 - \alpha^{-1})H(x)\frac{\partial |A|^2}{\partial x}$$

y lo sustituimos en (1.13.3) para llegar a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nu}{\partial z} &= \frac{-2}{p} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta \delta(x) |A|^2 + 2(1 - \alpha^{-1}) \delta(x) |A|^4 \\
&\quad + 2(1 - \alpha^{-1}) H(x) \frac{\partial |A|^2}{\partial x} |A|^2) dx \\
&= -\frac{2}{p} (\Delta |A|^2 + 2(1 - \alpha^{-1}) |A|^4 \\
&\quad + 2(1 - \alpha^{-1}) \int_0^{\infty} \frac{\partial |A|^2}{\partial x} |A|^2 dx) \\
&= -\frac{2}{p} (\Delta |A|^2 + 2(1 - \alpha^{-1}) |A|^4 + 2(1 - \alpha^{-1}) \frac{|A|^4}{2} \Big|_0^{\infty}) \\
&= -\frac{2}{p} (\Delta |A|^2 + (1 - \alpha^{-1}) |A|^4),
\end{aligned} \tag{1.33}$$

donde ahora $|A|^2$ ya no depende de x ni depende de z . Usando (1.31), (1.32) y (1.33) tenemos

$$\frac{\partial U_L(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{2}{p} (\Delta |A|^2 + (1 - \alpha^{-1}) |A|^4), \tag{1.34}$$

luego, sustituimos (1.30) en (1.34) y tenemos la ecuación

$$\frac{\partial U_L(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{8}{p} \Delta \beta_0^2 \operatorname{sech}^2(2\beta_0 \bar{x}) + \frac{32}{p} (1 - \alpha^{-1}) \beta_0^4 \operatorname{sech}^4(2\beta_0 \bar{x}),$$

la cual integramos para encontrar U_L

$$\begin{aligned}
U_L(\bar{x}) &= \frac{8}{p} \int (\beta_0^2 \Delta \operatorname{sech}^2(2\beta_0 \bar{x}) + (1 - \alpha^{-1}) 16 \beta_0^4 \operatorname{sech}^4(2\beta_0 \bar{x}) d\bar{x}) \\
&= \frac{4}{p} \beta_0 \Delta \tanh(2\beta_0 \bar{x}) \\
&\quad + \frac{32(\alpha - 1)}{\alpha p} \beta_0^4 \int \operatorname{sech}^2(2\beta_0 \bar{x}) \operatorname{sech}^2(2\beta_0 \bar{x}) d\bar{x} \\
&= \frac{4}{p} \beta_0 \Delta \tanh(2\beta_0 \bar{x}) \\
&\quad + \frac{32(\alpha - 1)}{\alpha p} \beta_0^4 \left(\frac{\tanh(2\beta_0 \bar{x})}{2\beta_0} - \frac{\tanh^3(2\beta_0 \bar{x})}{6\beta_0} \right) \\
&= \frac{4\beta_0 \Delta \alpha - 16\beta_0^3(1 - \alpha)}{\alpha p} \tanh(2\beta_0 \bar{x}) \\
&\quad + \frac{16\beta_0^3(1 - \alpha)}{3\alpha p} \tanh^3(2\beta_0 \bar{x}).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Podemos encontrar una expresión analítica para \bar{x} y ν , y así obtener las trayectorias posibles.

A (1.32) la multiplicamos por $\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}$ y tenemos

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial z^2} = -\frac{\partial U_L(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial z}, \quad (1.36)$$

integramos (1.36) con respecto a z para llegar a

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} \right)^2 = -U_L(\bar{x}) + k \quad (1.37)$$

con k constante.

Usamos (1.13.2) con (1.37) y así

$$\frac{1}{2} \nu^2 = -U_L(\bar{x}) + k \quad (1.38)$$

para $\bar{x} < 0$.

Para el lado derecho, hacemos algo similar donde el potencial es ahora $V = (1 - H(x))(-\Delta - 2(\alpha - 1)|A|^2)$ y suponemos además, distinta intensidad a la del lado izquierdo, es decir,

$$A(x, z) = 2\beta_1 \operatorname{sech}(2\beta_1(x - \bar{x})) e^{i((2\beta_1)^2 - \frac{\nu^2}{4})z + i\frac{\nu}{2}x} \quad (1.39)$$

con β_1 constante que nos da la intensidad del segundo medio y análogamente, al caso anterior, ahora se cumplen

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} &= 0, \\ \frac{d\bar{x}}{dz} &= \nu, \\ \frac{d\nu}{dz} &= -\frac{\partial U_R}{\partial \bar{x}}. \end{aligned}$$

Tenemos así, el potencial para $\bar{x} \geq 0$

$$U_R(\bar{x}) = \frac{4\beta_1 \Delta \alpha - 16\beta_1^3(\alpha - 1)}{p} \tanh(2\beta_1 \bar{x}) + \frac{16\beta_1^3(\alpha - 1)}{3p} \tanh^3(2\beta_1 \bar{x}) \quad (1.40)$$

y análogo a (1.37) tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} \right)^2 = -U_R(\bar{x}) + k$$

con k constante. De esta forma, hemos reducido el problema de cómo cruza el solitón la interfase a las ecuaciones (1.30) y (1.39) con U_L y U_R dados por (1.35) y (1.40) respectivamente. Esta reducción de un número infinito de grados de libertad a un número finito de grados de libertad se conoce como modulación de Whitham.

1.4. Variedad de Comportamientos del Rayo

En esta sección final vamos a escoger el plano fase de tal forma que nos permita ver los diferentes casos para las trayectorias de la partícula.

Necesitamos ver algunas gráficas de \bar{x} contra $U(\bar{x})$ y así, obtener el plano fase deseado. Para esto, vamos a reducir el número de parámetros y así trabajar con más facilidad. En (1.35) hacemos $p = 4\beta_0$ y en (1.40) hacemos $p = 4\beta_1$, luego,

$$U_L(\bar{x}) = \frac{\Delta\alpha - 4\beta_0^2(1-\alpha)}{\alpha} \tanh(2\beta_0\bar{x}) + \frac{4\beta_0^2(1-\alpha)}{3\alpha} \tanh^3(2\beta_0\bar{x}),$$

$$U_R(\bar{x}) = \Delta - 4\beta_1^2(\alpha-1) \tanh(2\beta_1\bar{x}) + \frac{4\beta_1^2(\alpha-1)}{3} \tanh^3(2\beta_1\bar{x})$$

entonces,

$$U_L(\bar{x}) = \Delta(1 - (\alpha C_0)^{-1}) \tanh(2\beta_0\bar{x}) + \Delta(3\alpha C_0)^{-1} \tanh^3(2\beta_0\bar{x}),$$

$$U_R(\bar{x}) = \Delta(1 - (\alpha C_1)^{-1}) \tanh(2\beta_1\bar{x}) + \Delta(3\alpha C_1)^{-1} \tanh^3(2\beta_1\bar{x}),$$
(1.41)

donde,

$$C_0 = \frac{\Delta}{4\beta_0^2(1-\alpha)}, \quad C_1 = \frac{\alpha\Delta}{4\beta_1^2(\alpha-1)}.$$

Nos fijamos en las primeras derivadas de (1.41) con respecto a \bar{x} y llegamos a

$$\frac{dU_L}{d\bar{x}} = 2\beta_0\Delta \operatorname{sech}^2(2\beta_0\bar{x})(1 - (\alpha C_0)^{-1} \operatorname{sech}^2(2\beta_0\bar{x})),$$

$$\frac{dU_R}{d\bar{x}} = 2\beta_1\Delta \operatorname{sech}^2(2\beta_1\bar{x})(1 - (\alpha C_1)^{-1} \operatorname{sech}^2(2\beta_1\bar{x})).$$
(1.42)

Nótese que existen puntos críticos en (1.42.1) sólo si $0 < \alpha C_0 < 1$ (Figura 1.3 inciso a)) y existen puntos críticos en (1.42.2) sólo si $0 < \alpha C_1 < 1$ (Figura 1.4 incisos b) y c)). Si por el contrario en (1.42.1) $\alpha C_0 > 1$, la función es creciente (Figura 1.3 inciso b)) y en (1.42.2) $\alpha C_1 > 1$, la función es creciente (Figura 1.3 inciso a)).

Nos enfocamos primero en la Figura 1.3. En el caso a) ($C_1 = 0.53$), dependiendo de su velocidad, observamos que la partícula puede regresar o puede atravesar la interfase ($\bar{x} = 0$). Sabemos que si la partícula pasa el punto máximo de la curva entonces es seguro que la partícula cruza la interfase, lo cual no pasa en el caso b) ($C_0 = 1.53$).

En la Figura 1.4, tenemos tres curvas. Si suponemos que la partícula va de derecha a izquierda, para el caso a) ($C_1 = 1.16$) la partícula no tiene forma de

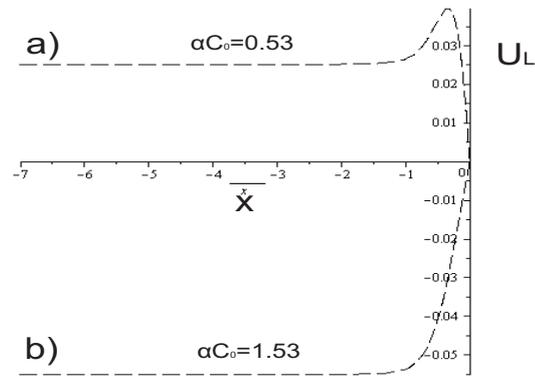


Figura 1.3: Plano fase para $\bar{x} < 0$ (primer medio de Kerr).

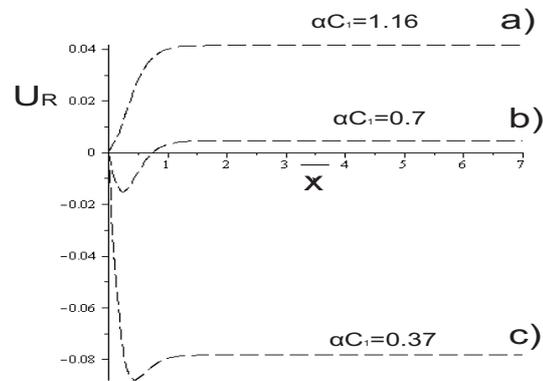


Figura 1.4: Plano fase para $\bar{x} > 0$ (segundo medio de Kerr).

regresar antes de cruzar la interfase, así como en el caso *b*) ($C_1 = 0.7$) donde tampoco hay forma de regresar antes de la interfase, ya que $U_R(0) < U_R(\infty)$, pero podríamos tener una partícula atrapada en el mínimo de U_R , esto muestra que el rayo puede quedar atrapado cerca de la interfase, como en el caso *c*, aunque en este último caso, la partícula sí puede regresar antes de cruzar la interfase.

Podemos ejemplificar todos estos casos, juntando U_L y U_R en una sola función y tomando los parámetros convenientes, es decir,

$$U(\bar{x}) = H(\bar{x})U_R(\bar{x}) + (1 - H(\bar{x}))U_L(\bar{x})$$

con la ecuación correspondiente a (1.38) que en este caso nos queda

$$\frac{1}{2}\nu^2 = -U(\bar{x}) + k. \quad (1.43)$$

Con (1.43) podemos dar una curva como ejemplo, considerando $\bar{x} < 0$ y $\bar{x} > 0$, para obtener diferentes recorridos de la partícula que muestren lo que se comentó antes (Figura 1.5). En la Figura 1.5 se observa el potencial, es decir, \bar{x} contra $U(\bar{x})$. A partir de esta gráfica podemos tener varios casos del plano fase. Observamos que para este potencial, suponiendo que la partícula va de izquierda a derecha, la partícula puede regresar antes de cruzar la interfase ó puede regresar después de cruzar la interfase ya que $U(\infty)$ es mayor que el máximo de la curva en el lado izquierdo, la otra posibilidad es pasar sin regresar. Ahora del otro lado, suponiendo que la partícula va de derecha a izquierda, la partícula no tiene forma de regresar ni pasando la interfase, por la misma razón que de izquierda a derecha puede regresar después de pasar la interfase y también tenemos el caso de la onda atrapada en el mismo. Todas estas trayectorias se pueden observar en la Figura 1.6, donde tenemos 5 casos distintos:

Caso 1 (Curva 1). ν_- es mayor que ν_+ , es decir, la partícula en el segundo medio tiene velocidad menor a la velocidad que tenía en el primer medio (antes de cruzar la interfase pensando que la partícula viaja de izquierda a derecha). Este caso se puede ver en la Figura 1.7, donde se puede ver físicamente el solitón, estas gráficas fueron hechas resolviendo numéricamente la ecuación no-lineal de Schrödinger. Nótese la diferencia de los ángulos de incidencia y de refracción.

Caso 2 (Curva 2). El rayo es reflejado después de pasar por $\bar{x} = 0$. Además se puede observar cómo el ángulo del rayo incidente es igual al ángulo del rayo reflejado. Como en el caso 1, aquí también se puede ver la Figura 1.8 que muestra físicamente la partícula, nótese cómo la partícula hace un pequeño recorrido dentro el segundo medio (lado derecho) antes de ser reflejada.

Caso 3 (Curva 3). Onda atrapada, correspondiente al mínimo del potencial (Figura 1.5). Esta aproximación predice que la onda se queda oscilando para siempre alrededor del mínimo de U . Debido a la radiación dispersiva, no incluida en este trabajo, una onda con muy baja velocidad podría ser atrapada en el

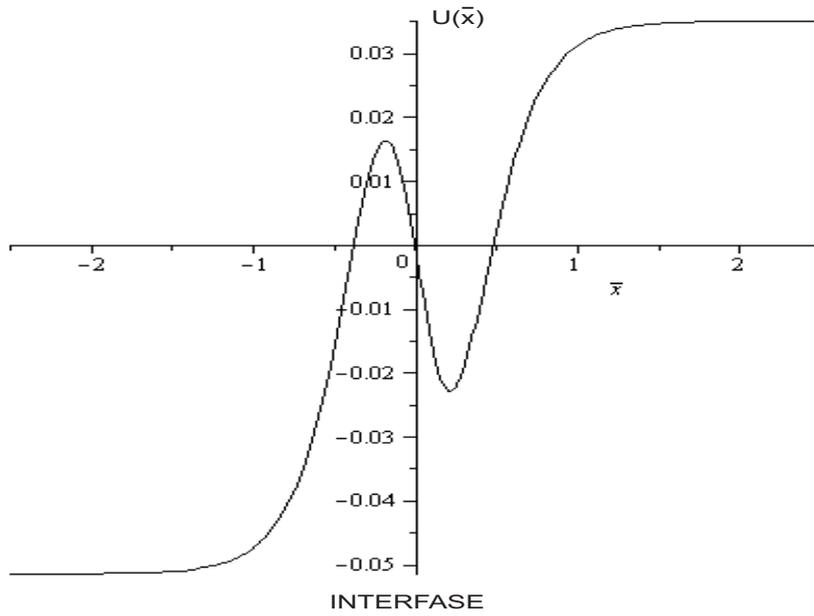


Figura 1.5: Plano fase para toda \bar{x} (los dos medios de Kerr).

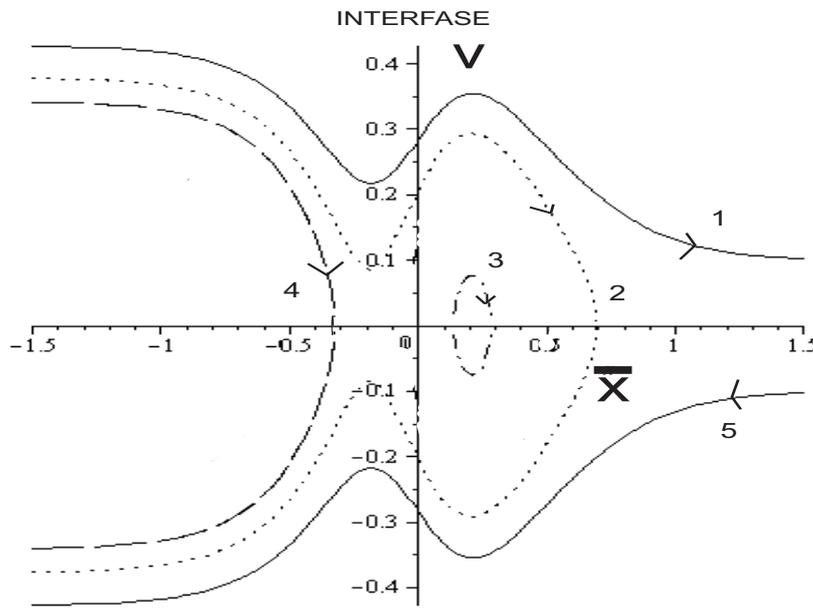


Figura 1.6: Diferentes trayectorias del rayo usando el potencial de la Figura 1.5.

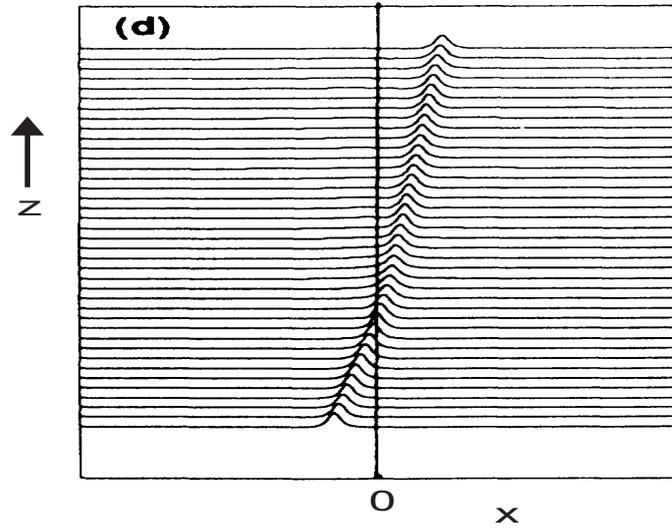


Figura 1.7: Ley de Snell (Ley de refracción) para el solitón al cruzar la interfase (tomada del artículo [Aceves (a)]).

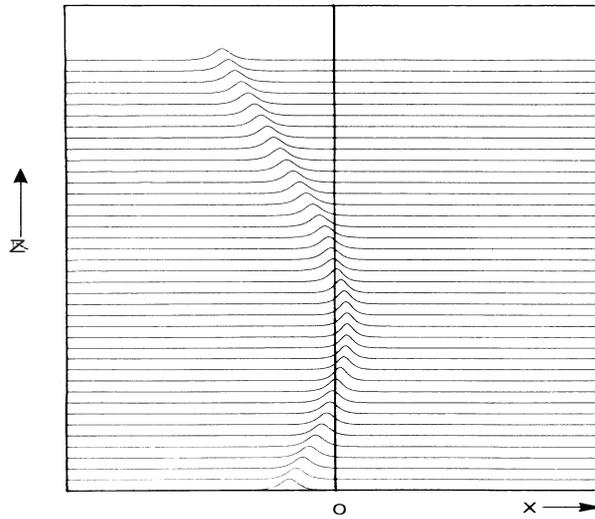


Figura 1.8: El solitón se regresa después de pasar la interfase (tomada del artículo [Aceves (a)]).

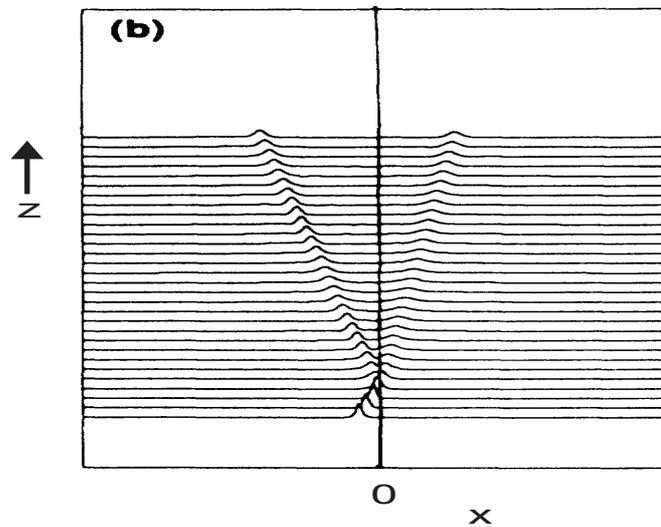


Figura 1.9: Solitón dividido en dos solitones al chocar con la interfase (tomada del artículo [Aceves (a)]).

mínimo y oscilaría en forma amortiguada hasta quedar en el punto correspondiente al mínimo (en este caso la partícula no viene del medio que se encuentra a la izquierda).

Caso 4 (Curva 4). El rayo es reflejado antes de pasar por $\bar{x} = 0$. Igual que en el caso 2, se puede observar cómo el ángulo del rayo incidente es igual al ángulo del rayo reflejado.

Caso 5 (Curva 5). Rayo transmitido de derecha a izquierda.

Llegamos así a lo que queríamos mostrar; el rayo puede tener diferentes comportamientos, debido a la no-linealidad, que no se obtienen para el caso lineal (ley de Snell). Este ejemplo, aunque simple, da una idea de cómo cambia la trayectoria del rayo al considerar el índice de refracción dependiente de la intensidad del campo.

Un caso para el cual no puede ser usado este método, por ejemplo, es cuando el solitón se divide en dos solitones al chocar con la interfase [Aceves (b)]. Véase la Figura 1.9, la cual fue hecha resolviendo numéricamente, sin aproximación, la ecuación no-lineal de Schrödinger.

Conclusiones

En este trabajo nos propusimos entender la generalización de la reflexión y de la refracción, es decir las leyes de reflexión y refracción no-lineales, para mostrar así los diferentes casos que se presentan. No hubiéramos logrado tal propósito sin estudiar antes la óptica geométrica que nos proporcionó, de manera relativamente sencilla, las bases necesarias que tienen que ver con la reflexión y refracción lineales para el entendimiento posterior de nuestro modelo.

Comenzamos utilizando la óptica geométrica que nos sirvió para entender distintos fenómenos, entre ellos la cáustica y el arcoiris, que resultan de la ley de Snell clásica. Nos dimos cuenta que para la cáustica la óptica geométrica no es suficiente, es decir la conclusión de que la intensidad tiende a infinito en la cáustica no es correcta, y que necesitamos de la teoría ondulatoria para corregir esto. Tal corrección la hicimos en el Capítulo 3 donde resultó que la amplitud de un paquete de ondas satisface la ecuación de Airy, cuya solución nos muestra que la intensidad alcanza un valor máximo y por lo tanto es finita en la cáustica.

En el Capítulo 2 introdujimos las ecuaciones de Maxwell que son la base de la teoría ondulatoria y se consideró la luz como una onda electromagnética. Al introducir esta “nueva teoría” se abrieron más posibilidades para entender los fenómenos ópticos y comprobamos que obtenemos los mismos resultados del Capítulo 1, como por ejemplo, cuando dedujimos nuevamente las leyes de refracción y reflexión clásicas. En el Capítulo 3 al introducir la polarización eléctrica con retardo, es decir, el tiempo que tarda el material en reaccionar a una estimulación eléctrica, concluimos que la envolvente de un paquete de ondas satisface la ecuación no-lineal de Schrödinger al considerar que el índice de refracción, esta vez no-lineal, depende de la intensidad del rayo.

Finalmente utilizamos la solución tipo solitón de la ecuación no-lineal de Schrödinger para modelar el rayo viajando a través de dos medios con distintos índices de refracción. Tuvimos una variedad de resultados en las leyes de reflexión y refracción no-lineales al escoger un potencial adecuado, del cual, mostramos los diferentes casos. Cabe señalar que, aunque la aproximación presentada nos ofrece varios resultados, las limitaciones mencionadas al final del Capítulo 4 sugieren otros comportamientos interesantes. Una pregunta interesante, por ejemplo, es si un solo solitón puede dar origen a un solitón atrapado

en la interfase más otro solitón que logre escapar, o si se puede liberar a un solitón atrapado por medio de otro solitón. También sería interesante ver cómo se comporta el solitón cuando pasa a un medio con características muy diferentes, como por ejemplo, con índice de refracción negativo.

Bibliografía

- [Aceves (a)] ACEVES A. B., NEWELL A.C., MOLONEY J. V.: I. Equivalent-Particle Theory for a Single Interface. *Theory Light-Beam Propagation at Nonlinear Interfaces*, 1989a, **39**, pp. 1809–1827.
- [Aceves (b)] ACEVES A. B., NEWELL A.C., MOLONEY J. V.: II. Multiple-Particle and Multiple-Interface Extensions. *Theory Light-Beam Propagation at Nonlinear Interfaces*, 1989b, **39**, pp. 1828–1840.
- [Born] BORN MAX, WOLF EMIL.: *Principles of Optics*, 1975.
- [Feynman I] FEYNMAN RICHARD P., SANDS MATTHEW, LEIGHTON ROBERT B.: *The Feynman Lectures on Physics Vol. I*, 1963.
- [Feynman II] FEYNMAN RICHARD P., SANDS MATTHEW, LEIGHTON ROBERT B.: *The Feynman Lectures on Physics Vol. II*, 1964.
- [Fujioka] FUJIOKA JORGE.: *NLS: Una Introducción a la Ecuación Nolineal de Schrödinger*, 2003.
- [Haberman] HABERMAN RICHARD.: *Ecuaciones en Derivadas Parciales*, 2003.
- [Billingham] BILLINGHAM J., KING A. C.: *Wave Motion*, 2000.
- [Berry] BERRY M. V., KLEIN S.: Diffraction Near Fake Caustics. *Journal Physics*, 1997, **18**, pp. 303–306.
- [Newell] NEWELL ALAN C., MOLONEY JEROME V.: *Nonlinear Optics*, 1992.
- [Palais] PALAIS JOSEPH C.: *Fiber Optic Communications*, 1984.
- [Raymond] RAYMOND L. LEE, ALISTAIR B. FRASER.: *The Rainbow Bridge*, 2001.
- [Courant I] COURANT RICHARD, FRITZ JOHN.: *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. I*, 2001.
- [Courant II] COURANT RICHARD, FRITZ JOHN.: *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. II*, 2004.
- [Wabnitz] WABNITZ S., ACEVES A. B., KODAMA Y.: Control of Optical Soliton Interactions. *Optical Fiber Technology*, 1995, **1**, pp. 187–217.