UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Particiones y Funciones Generadoras. Del Juego de dados a la Teoría Aditiva

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

ABEL GARCÍA GUTIÉRREZ

DIRECTOR DE TESIS:
Mat. Julio César Guevara Bravo
2010

1. Datos del alumno García Gutiérrez Abel (044 55) 28 60 98 29 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 081528099
2. Datos del tutor Mat Julio César Guevara Bravo
3. Datos del sinodal 1 M en C José Rafael Martínez Enríquez
4. Datos del sinodal 2 M en C José Guerrero Grajeda
5. Datos del sinodal 3 M en A P María del Pilar Alonso Reyes
6. Datos del sinodal 4 Mat Ernesto Mayorga Saucedo
7. Datos del trabajo escrito. Particiones y Funciones Generadoras Del Juego de dados a la Teoría Aditiva 173 p 2010

DEDICATORIA

Es esta hoja la más difícil de escribir; primero, porque quizá sea la única que sea leída por mis seres queridos y después, porque ellos al leerla deberán sentirse enormemente homenajeados. Se trata de una dedicatoria para agradecerles el haberme traído de la mano hasta este momento:

A quienes me enseñaron a caminar por la vida. A los que me bastó observar para aprender a ser. Verlos vivir es y será la mejor de mis clases como alumno. Su acompañamiento permanente es la experiencia más valiosa que guardo. Gracias Mamá. Gracias Papá.

A mis hermanas que son las primeras a las que recurro en caso de alegría y de tristeza, y que me han enseñado a ser hermano. Gracias Ara. Gracias Lupis.

A mi esposa amada que me ha dado el mejor de los "Sí" que he logrado, aquel que dice "Sí, te quiero". Que me has enseñado a ser querido y a querer como pareja. Que me diste a los siguientes que tengo que agradecer, a mis queridos hijos. Gracias Capotitos.

Algún día, hijos, quizás lleguen a estas líneas y leerán que el estar cerca de ustedes es el momento del día por mí más esperado. Gracias Karimu, Yaiye y… Chafuka.

A mi "pequeña" familia, GustavoAritaGusGala, DonHugoClemen, La Tía, HugoFerAnaLaura, LauraDavidAleDiego, EdnaLuisAketzaliIta, Horacio, GabyGerardoDany, Ceci, FerKapuki, AbuelitosAbuelitas, TíoChechelMarthitaPrimos, PepeSolPrimos, TíosPrimosdeToluca, que llenan mis ratos libres para poder sobrevivir los no tan libres. Gracias a todos.

A mis ex-compañeritos de banca y que han sido testigos de mis pasos aunque sea a ratitos. Gracias Ernesto, Gilberto, Roberto, Daniel,…

A mis ex-compañeros del pasado que estarán siempre en mi futuro. Gracias Anke, Frauke, Mwalimu, Charles, Steve, Ana, Silvia, Alicia,…

A César que llevó su papel de director de tesis al de mi "perspicaz" amigo. A ti que supiste tener la palabra adecuada académica y de amigo cuando tanto la necesite. Gracias Director.

A mis sinodales por sus líneas entre mis líneas.

A la vida por tener tanta gente a la que agradecer.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde el siglo XVIII el tema de las particiones[1] ha ocupado un lugar cada día más consolidado dentro de la teoría de los números. Los problemas que abarca se encuentran en la frontera con la teoría aditiva de los números, por lo que es frecuente usar como herramienta para su estudio los elementos del cálculo y del análisis.

La teoría de particiones tuvo sus primeras manifestaciones paralelamente cuando las empezaron a tomar en cuenta la teoría de la probabilidad y posteriormente el cálculo combinatorio. Por ello el origen de las particiones podría enmarcarse junto con la construcción de las primeras ideas para formalizar de manera teórica los juegos de azar.

Pero es hasta el siglo XVIII cuando las particiones toman un perfil propio, delimitando sus problemas y desarrollando sus métodos propios. Estos procesos dieron inicio con Jacob Bernoulli y Pierre Rémond de Montmort. Pero quien les dio un verdadero lugar dentro de la teoría de los números fue Leonhard Euler. Asimismo es importante mencionar que en este trabajo de tesis también abordamos a personajes importantes que trabajaron en esa zona primigenia entre particiones y juegos de azar, y ellos son Cardano, Galileo y un seudo Ovidio.

Un aspecto fundamental de la tesis fue el trabajar directamente con los textos originales de los seis autores arriba mencionados, y cabe mencionar que los trabajos no eran de fácil acceso, tanto por la ubicación como por los idiomas. Por ello consideramos que podía ser de interés agregar a la tesis, en un apéndice, la traducción al español de dos de los trabajos que son difíciles de encontrar y que a la vez son breves, y nos referimos a los de Galileo y del Seudo Ovidio.

El haber empleado en la tesis textos históricos como una vía inicial de análisis se debe a nuestra convicción de que somos en gran parte la suma de todas las experiencias anteriores, ajenas y propias, y consideramos que lo mismo sucede con todo el conocimiento científico. Al analizar el cómo y el porqué se resolvieron ciertos problemas a

[1] Pero antes de seguir con esta introducción consideramos que es oportuno recordar ¿Qué son las particiones? Entendemos por particiones de un número natural ***n***, a todas las maneras de representarle como suma de números naturales. Por ejemplo, el número 5 puede ser representado por 4+1, 3+2 y por el 5 mismo, cuando se desea que todos los números sean diferentes; o bien 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1 y 5 si conviene que los números puedan ser iguales entre ellos.

través del tiempo, crea una estructura que propicia la mejor comprensión del tema. Además, un enfoque que parte del estudio de lo sencillo hasta llegar a lo complejo nos abre la posibilidad de apreciar lo presente a partir de lo anterior.

El contenido de las cuatro secciones de la tesis es el siguiente:

El **Capítulo I** muestra un momento histórico de las matemáticas donde la solución de un problema se limitaba a su contexto más cercano y donde las generalizaciones aún no eran posibles para este tema. Las obras incluidas fueron escritas aparentemente entre el siglo XIII y principios del XVII. Se trata de la trilogía formada por *De Vetula* posiblemente escrita en el siglo XIII por el Seudo-Ovidio, el *Liber de Ludo Aleae* redactado aproximadamente en 1564 por Gerolamo Cardano, y *Sopra le Scoperti dei Dadi,* escrita alrededor de 1615 por Galileo Galilei.

Este capítulo muestra cómo las aplicaciones -y en particular los juegos de azar– dieron origen a las futuras generalizaciones que ahora caracterizan a la teoría de particiones.

En el **Capítulo II** se presentan las primeras generalizaciones para las particiones, las cuales, como se verá, compartieron metodologías y resultados. Los trabajos revisados fueron el *Ars Conjectandi,* obra de Jacob Bernoulli (publicado en 1713), y el *Essay d'analyse sur les Jeux de Hazard* escrito por Pierre Rémond de Montmort (publicado en 1708). Por un lado Bernoulli sienta las bases para una teoría más formal respecto al cálculo combinatorio, y por el otro Montmort presenta las primeras generalizaciones para calcular las particiones que se generan con el juego de dados. Lo que hay que resaltar en su trabajo es que aborda el problema para n dados con m caras cada uno.

En el **Capítulo III** se revisó ampliamente la obra escrita por Leonard Euler concerniente a particiones. Y es importante decir que a partir de él se considera que las particiones adquieren sus principios fundamentales, así como su propia identidad dentro de la teoría de los números.

Los documentos considerados fueron: *Observationes analyticae variae de combinationibus* de 1741, *Introductio in analysin infinitorum* 1748 y el *Partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas* de 1768. Para 1783 Euler regresa a las particiones con otros artículos sobresalientes que coronarían su trabajo sobre el tema (se mencionan en el capítulo), y el resultado que sorprendió a la comunidad fue el que hoy conocemos como *Teorema de los Números Pentagonales*.

En el **Colofón** respondemos preguntas que surgieron desde el capítulo I, pero que no fueron abordadas inmediatamente porque estaban fuera del contexto histórico que le dimos a ese capítulo, además de que las respuestas eran extensas. Por estas razones consideramos que era más adecuado escribir en un colofón estas reflexiones sin tener el problema estructural de usar elementos teóricos de cualquiera de los tres capítulos. Es importante mencionar que si el lector lo desea podría dirigirse directamente del Capítulo I al Colofón. Sin embargo, si la lectura pretende reflejar el acontecer histórico, entonces se recomienda leerlo hasta después del Capítulo III.

CAPÍTULO I
LOS ORÍGENES EN TRES AUTORES

Cuando se estudia el origen de la teoría de particiones es recomendable remitirse paralelamente al análisis de la historia de algunos juegos de azar. En particular, el estudio del juego de dados nos encamina a la necesidad de voltear a mirar algunas formas de conteo y al problema de la representación de ciertos enteros positivos expresados como suma de otros enteros positivos, es decir a las particiones de un entero positivo. Así, las particiones y los juegos de dados se vinculan en tanto sus características inherentes son similares pues ambos conciernen a conjuntos de enteros que se interrelacionan.

Si bien nuestra ruta de estudio del origen de la teoría de particiones comparte senderos con la de los orígenes de la probabilidad, en este trabajo nos remitiremos sólo a aquellos aspectos donde se requirió del uso de las particiones.

Mientras que el estudio del origen de la probabilidad inició quizás con la historia de Nala sobre la cosmovisión hindú[2], en nuestro caso recurriremos a los primeros trabajos sobre juegos de azar en los que ya se abordaba la idea de representar enteros como suma de otros enteros.

Los trabajos seleccionados para este capítulo fueron escritos aparentemente entre los siglos XIII y XVII. Se trata de la trilogía: *De Vetula*, *Liber de Ludo Aleae* y *Sopra le Scoperti dei Dadi,* cuyos autores son Seudo-Ovidio [1662], Cardano y Galileo [1718], respectivamente.

Enseguida exponemos una visión panorámica de las tres obras, ahondando más en la obra de Galileo debido a las características propias de los tres textos.

[2] Calva Sánchez [2005] nos dice: "En el tercer libro de la epopeya hindú *El Mahábarta* se narra la historia de Nala, el cual es poseído por Kala, un semidiós de los dados, provocando con esto que Nala [perdiera] su reino jugando y apostando. Después de vagar por algunos años, Nala se encuentra con Rtuparna, quien presume de sus habilidades matemáticas, afirmando que en dos grandes ramas de un árbol hay un cierto número de hojas y frutos. Para hacer esta afirmación Rtuparna cuenta las hojas y los frutos de una pequeña rama. Nala pasa toda una noche contando para verificar lo que Rtuparna afirma, quedando sorprendido por su exactitud".

De Vetula[3]

El trabajo es un poema escrito en latín y forma parte de una biografía de Ovidio. Su autoría y antigüedad aún no han sido completamente comprobadas; se presume que el poema fue escrito por Ovidio o por algún seguidor de él. Por ello el poema se adjudica a un tal Seudo-Ovidio.

Si admitimos que el autor fue Ovidio (-43 a.c. – c. el 17 d.c.), entonces estaríamos pensando en un documento del inicio de la era cristiana. En el caso de Richard de Fournival, otro posible autor, se ubicaría el documento a mediados del siglo XIII. La mayor parte de la bibliografía consultada coincide en que se trata de un escrito fechable alrededor del siglo XIII.

Una traducción del título sería "la anciana" o "la viuda", y está dividido en tres libros:

I) El primer libro describe la juventud de Ovidio, sus amores y algunos de sus pasatiempos.

II) El segundo libro detalla una tragicómica historia pasional. Después Ovidio muestra desilusión de los placeres del amor y se dedica a las actividades filosóficas.

III) El tercer libro trata la conversión de Ovidio al cristianismo.

La obra puede considerarse como un poema moral, donde Ovidio es llevado a transformar su vida pasando de los placeres mundanos a la aceptación de la fe cristiana. Y la obra fue conocida en el pasado, ya que algunas de las primeras referencias a ella las podemos encontrar en el *Opus Maius* de Roger Bacon, escrita entre 1266 y 1269 (ver [Robathan, 1968] y [Westacott, 1953]).

De Vetula es posiblemente el primer trabajo que contiene cálculos útiles para el estudio de la combinatoria y la probabilidad. El poema no suele formar parte de la historia de las matemáticas, pues está catalogado principalmente entre los trabajos de corte moral, y no entre los de ciencia. Y esta clasificación incompleta también puede deberse a que el texto fue de difícil acceso, pues no fue sino hasta mediados del siglo XIX que los historiadores pudieron consultar un original en la Biblioteca Británica.

Los primeros reconocimientos a *De Vetula* como un texto que aportaba elementos al cálculo combinatorio y probabilístico están representados por autores como Guerry [1864]

---

[3] En los apéndices se puede encontrar una edición facsimilar de la parte del documento que corresponde al estudio matemático del juego de dados. También se puede revisar una traducción al español, hecha para ser utilizada en esta tesis. Cabe mencionar que podría ser la primera traducción que se hace al español.

quienes abordaron el aspecto social de la estadística en Francia e Inglaterra durante los siglos XVIII y XIX. O también está Todhunter [1865], que opinaba que *De Vetula* era una obra que aportaba datos importantes para la historia de la probabilidad. En épocas más recientemente Kendall [1956] aportó una visión más crítica con una obra que se adentra en los orígenes de los cálculos aritméticos. Y posteriormente David F. N. [1962], en una obra muy reconocida, describe los resultados más sobresalientes para el juego de tres dados y que están contenidos en el poema del seudo Ovidio.

En la actualidad *De Vetula* ya comienza a ser en sí misma un referente para los que estudian la historia de los juegos de azar, así como los juegos de tablero. Un ejemplo es el Alquerque, que después se fusionaría con el ajedrez, y que dio origen al actual juego de damas. El seudo-Ovidio, en la página 25 de su obra, hace mención al libro sobre juegos que escribió Alfonso X, rey de Castilla. El autor, aficionado al Alquerque, en el capítulo llamado *Libro del Alquerque*, describe las reglas del juego y sus características. El libro de Alfonso X podría incluirse entre aquellos documentos históricos que aportan elementos para la reconstrucción de los juegos.

Ilustración 1 - Juego del Alquerque

La matemática que se emplea en *De Vetula* para calcular las particiones es la que hoy conocemos como permutaciones y combinaciones. Y no son elementos matemáticos extraños para la época. Según Edwards [1987], los resultados básicos de permutaciones y combinaciones se conocían en Francia por lo menos desde principios del siglo XIV, aunque cabe mencionar que hay datos de épocas anteriores sobre el uso de estos resultados. Un caso probado es en la India.

Antes de continuar con la sección del poema que nos concierne, es conveniente describir lo que se refiere en esta tesis, como "juego de dados". Entiéndase dicho juego como el acto de arrojar un número determinado de dados *n*, mismos que contienen un número definido de caras *m*, y que lo que interesa para ganar es lograr un número deseado *d* a través de la adición de cada una de las caras resultantes de los dados arrojados. Así, si se tienen 3 dados iguales de seis caras, cada cara tiene además inscrito alguno de los siguientes enteros {1, 2, 3, 4, 5, 6}, y si el número deseado es el 18, dicho número sólo puede ser logrado cuando las caras resultantes muestran al 6 en los tres dados.

En la parte que corresponde al juego de dados, al poema lo podríamos dividir en tres partes, las cuales están escritas en verso y explicitadas a través de sus respectivas tablas:

<u>En la primer parte</u> Seudo-Ovidio se encarga de listar todos los posibles resultados que se pueden lograr con los tres dados. Además, a cada uno le asigna cuáles y cuántas sumas (particiones) diferentes se tienen para lograr esas cantidades, sin incluir aún el orden (ver Tabla I). Es decir, considera al 6+6+5, 6+5+6 y al 5+6+6 como un solo caso.

Tabula I.

666						18
665						17
664	655					16
663	654	555				15
662	653	644	554			14
661	652	643	553	445		13
651	642	633	552	543	444	12
641	632	551	542	533	443	11
631	622	541	532	442	433	10
621	531	522	441	432	333	9
611	521	431	422	332		8
511	421	331	223			7
411	321	222				6
311	221					5
211						4
111						3

Tabla 1

Podemos observar que las particiones generadas por las ternas suman entre 3 y el 18, y –cada uno de estos números en el intervalo- tienen entre 1 y 6 particiones que los representan. La tabla 1 muestra las posibilidades que se tienen de obtener los números entre el 3 y el 18, sin considerar el orden y cuando se juega con tres dados convencionales[4]. Así, el total de sumas distintas es 56.

En la segunda parte se encarga de reordenar los resultados anteriores en las siguientes categorías:

I) Las tres caras iguales.
II) Dos iguales y una distinta.
III) Todas distintas continuas.
IV) Todas distintas discontinuas.
V) Todas distintas con dos continuas y una discontinua.

Y, por supuesto, se conservan los 56 casos posibles.

Tabula II.

Omninò Similes.					
666	555	444	333	222	111
Duo Similes et tertius dissimilis.					
665	664	663	662	661	
556	554	553	552	551	
446	445	443	442	441	
336	335	334	332	331	
226	225	224	223	221	
116	115	114	113	112	
Omninò Dissimiles continui.					
654	543	432	321		
Discontinui.					
642	531	641	631		
Duo Continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

Tabla 2

[4] Como dado convencional nos referimos a aquellos que tienen los números entre el 1 y el 6. Pero más adelante se usarán dados no convencionales cuyas caras pueden tener números repetidos, negativos o hasta el cero.

En la tercera parte Seudo-Ovidio enumera todos los casos, donde ya se toma en cuenta el orden, es decir, considera, por ejemplo, al 6+6+5, 6+5+6 y al 5+6+6 como casos distintos. Así, de los 56 casos que tenía originalmente para las particiones de los números del 3 al 18, ahora se tienen 216 en total para los mismos números.

Tabula III.

Qvot Punctaturas, et qvot Cadentias habeat qvilibet numerorū compositorum.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Tabla 3

La tabla podría leerse de la siguiente manera: del último renglón resulta que para lograr un 10 o un 11 existen 6 formas distintas sin considerar al orden, y existen 27 formas distintas si se considera el orden.

Es importante señalar que aún cuando las similitudes entre los tres trabajos –que en este capítulo se reseñan- son significativas, será hasta presentar el trabajo de Galileo haremos un análisis más puntual, y la razón es que el texto de Galileo contiene una exposición más completa sobre las particiones en el juego de dados. Así, veremos que las tres obras tratan de manera semejante el tema, pero no profundizaremos en los casos de Seudo-Ovidio y Cardano.

Liber de Ludo Aleae (El libro de los juegos de azar)

La obra de Girolamo Cardano (1501-1576) aborda los juegos de azar en el contexto de la justicia, siendo éste el principal tema del *Liber de Ludo Aleae*. Él no sólo enfocó el tema desde la perspectiva de los cálculos matemáticos, sino que también guió su análisis hacia temas tales como las trampas en los juegos. Para Cardano el principio fundamental de los juegos de azar debe descansar en la igualdad y, por tanto, en la justicia. Y en este sentido por igualdad se entiende que los jugadores tengan las mismas oportunidades en cualquier juego de azar. Así, Cardano modela los cálculos matemáticos para tener un elemento que contribuya a dar mayor grado de igualdad y, en consecuencia, más justicia para los jugadores.

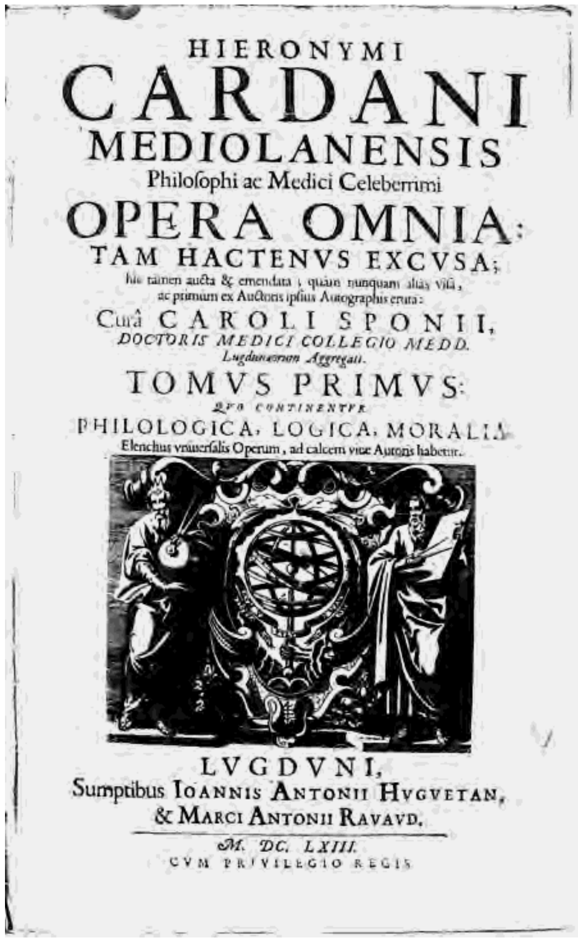

HIERONYMI
CARDANI
MEDIOLANENSIS
Philoſophi ac Medici Celeberrimi
OPERA OMNIA:
TAM HACTENVS EXCVSA;
hic tamen aucta & emendata; quàm nunquam alias viſa,
ac primum ex Auctoris ipſius Autographis eruta:
Curâ CAROLI SPONII,
DOCTORIS MEDICI COLLEGIO MEDD.
Lugdunæorum Aggregati.
TOMVS PRIMVS:
QVO CONTINENTVR
PHILOLOGICA, LOGICA, MORALIA.
Elenchus vniuerſalis Operum, ad calcem vitæ Autoris habetur.
LVGDVNI,
Sumptibus IOANNIS ANTONII HVGVETAN,
& MARCI ANTONII RAVAVD.
M. DC. LXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS

Ilustración 2

Sabemos que Cardano no sólo fue un teórico y un moralista de los juegos, fue también un practicante y, posiblemente, en el asunto de las trampas y las desigualdades le tocó ser víctima. En su obra *Mi Vida* (1991) escribe lo siguiente:

> Durante años he estado jugando a esos juegos —más de 40 años al ajedrez y alrededor de 25 a los dados— y en esos años cada uno de esos días, ¡vergüenza me da decirlo! Así pues he estado haciendo desperdicio de mi honra, de mi hacienda y de mi tiempo.
> Tales son las razones de aquella infame holganza. Prueba de ello fue que en cuanto pude llevar una vida digna, dejé el vicio. Por tanto no fue afición al juego la mía ni ansias de dinero, sino amargura y escapatoria. (Cardano (1991), *Mi Vida*, 149).

La idea de su principio de igualdad se remonta a la ***Ética de Aristóteles*** (Libro V, Capítulo III, *De la justicia que consiste en los repartimientos*). Él define lo que es injusto como aquello que es desigual y lo justo como lo que es igual. Nos dice

> …un acto justo involucra necesariamente al menos cuatro condiciones: dos personas para los que es de hecho justo, y dos partes a compartir en que su justicia está expuesta. Y habrá la misma igualdad entre las partes como entre las personas, porque las partes a compartir tendrán la misma proporción entre ellas, como entre las personas; pues si las personas no son iguales, no tendrán entonces partes compartidas iguales; y es cuando personas iguales tienen, o se les asigna, partes compartidas diferentes, o bien, cuando las personas que no son iguales, tienen iguales partes compartidas, es entonces que se suscitan discusiones y reclamos.

Cardano se basó en la filosofía de Aristóteles por su definición del principio de equidad que resulta fundamental en el juego, y lo confirma su análisis del juego en donde menciona que los participantes no tienen las mismas oportunidades de ganar. Él escribió [ver Bellhouse 2005, p 188]

> Otras preguntas deberán ser consideradas más sutilmente, ya que los matemáticos también pueden ser engañados, pero de forma distinta. Yo he deseado que este asunto no quede oculto, ya que mucha gente, al no entender a Aristóteles, han sido engañados y con pérdidas. Así que hay una regla general, a decir, que debemos considerar al circuito completo, y al número de aquellos repartos que representan de cuántas maneras el resultante favorable puede ocurrir, y comparar con tal número el resto del circuito, y de acuerdo a tal proporción deberán ser las pagas correspondientes, para que uno compita en términos iguales.

Entonces tenemos que tanto Cardano como el Seudo-Ovidio manejan su análisis de las posibilidades que tienen los jugadores de dados bajo un contexto moral de la igualdad de circunstancias, para que así nadie sea víctima de las trampas de los que sí pueden tener conocimientos matemáticos del juego.

El tema de los dados es tratado en el Capítulo XIII intitulado *De Numeris compositis, tam usque ad sex, quam ultra, y tam in duaubus Aleis, quam in tribus*.

Cardano y el autor de *De Vetula* se plantearon problemas semejantes que requerían el cálculo de las particiones con tres sumandos de los números entre el 3 y el 18. A continuación presentamos la tabla que Cardano utilizó en su análisis:

Conſenſus ſortis in duabus Aleis.

2	12	1	3	11	2	4	10	3.	Æqual.
5	9	4	6	8	5	7	8	18.	Ad Frit.

Conſenſus ſortis in tribus Aleis tum Frit.

Sortis			Fritilli.	
			3	115
3	18	1	4	125
4	17	3	5	126
5	16	6	6	133
6	15	10	7	33
7	14	15	8	36
8	13	21	9	37
9	12	25	10	36
10	11	27	11	38
			12	26

Circuitus 216.
Æqualitas 108.

Tabla 4

Ambos iniciaron con el análisis del problema de la suma de las caras resultantes al arrojar tres dados, para después afirmar que: i) hay 6 tiros diferentes cuando las caras son iguales (por ejemplo la terna (1, 1, 1)), ii) 30 tiros con dos caras iguales y una diferente (por ejemplo, (1, 1, 2)) y iii) 20 tiros con las tres caras diferentes (como el tiro (1, 2, 3)). Sostuvieron que las 30 particiones de ii) se obtienen a partir de 6 × 5, ya que hay seis maneras de obtener la pareja de iguales y cinco maneras de obtener la tercera cara diferente de las otras dos. En el caso de las 20 formas con las tres caras diferentes, sólo el autor del *De Vetula* describió cómo las obtuvo, e incluso desglosó los casos considerando si eran números consecutivos o no entre ellos.

Cardano pudo usar elementos más modernos de la matemática combinatoria, por ejemplo, para el caso de los 20 tiros con las tres caras diferentes, estos tiros se obtienen determinando el número de combinaciones obtenidas a partir de la elección de tres caras, tomadas de las seis diferentes del dado. Cardano fácilmente pudo haber obtenido este número de un triángulo aritmético, como uno que presentó Tartaglia [1556], y que seguramente él conocía, pero no lo hizo así.

En el momento de considerar el orden en las tiradas, tanto Cardano como el seudo-Ovidio muestran que por cada tirada que tenga dos caras iguales y una diferente hay otras dos maneras de obtener la misma suma (por ejemplo, los tres tiros (1, 1, 2), (1, 2, 1), y (2, 1, 1) generan al cuatro). De manera semejante, hay seis particiones para obtener la misma suma cuando se tienen tres caras diferentes.

La principal diferencia entre las dos obras –en lo correspondiente al juego de dados- se encuentra primordialmente en la forma en que cada uno expone sus ideas. El autor de *De Vetula* proporciona una tabla para mostrar cada una de las diferentes sumas de las caras que aparece (véase facsimilar y traducción en el apéndice). Por su lado Cardano es menos explicito en su forma de presentar los datos de las sumas.

Para terminar, cabe recordar que el juego de dados no es la parte central en ninguna de las obras; por ello, no sería justo pensar que el *De Vetula* es una obra superior a la de Cardano, sólo por la presentación del juego de dados. A las dos obras las tenemos que ver como complementarias, ya que atienden a épocas y paradigmas diferentes.

Sopra le Scoperti dei Dadi (Concerniente a una Investigación sobre Dados)[5]

El caso de Galileo (1564-1642) nos lleva directamente a contemplar una mentalidad plural, nos incita a pensar en él, en cuanto a la ciencia se refiere como el inicio y final de un periodo. Es como un monumento sembrado en la glorieta de una gran avenida, que al llegar a ella, la avenida cambia de rumbo, y quizás ni cuenta se da uno de ello.

Aun cuando la teoría de particiones tuvo presencia en tiempos anteriores a los de Galileo, el documento *Sopra le scoperti dei dadi*, es considerado por muchos como el iniciador de esta área de investigación. Al igual que los otros trabajos que hemos mencionado, aborda un problema específico, que da muestras de su momento histórico, con elementos que van desde el trabajo matemático y hasta los aspectos socio-culturales que se pueden deducir de él.

El documento responde a un problema que el Gran Duque de Toscana, Ferdinando de Medici, ordenó a Galileo resolver. El problema surge de un juego de dados llamado *Pasadiez*, que consistía en lanzar 3 dados y donde la tirada ganadora era aquella cuya suma de los puntos fuese mayor a diez y la perdedora el caso contrario. El problema se lo planteó a Galileo de la siguiente manera:

Al arrojar los tres dados, resulta que experimentalmente se ve que el número 11 aparece con más frecuencia que el 12, y el 10 con más frecuencia que el 9, y esto sucede a pesar de

[5] En los apéndices se puede consultar una edición facsimilar junto con la traducción al español de la obra de Galileo.

que cada uno de estos 4 números pueden representarse con seis particiones, donde cada una tiene 3 sumandos (ver tabla 1).

Si bien las observaciones que pueden hacerse de cualquier fenómeno son la fuente del conocimiento científico, y se dice que es donde el trabajo científico requiere de más rigor, ¿es correcto el razonamiento del problema planteado a Galileo? Él calcula y responde que si bien la observación es correcta (el número 11 sale con más frecuencia que el 12, y el 10 con más frecuencia que el 9), no así el razonamiento del mismo (a pesar de que cada uno de estos 4 números pueden obtenerse como la suma de 6 tercias distintas) que da lugar al problema que se le plantea.

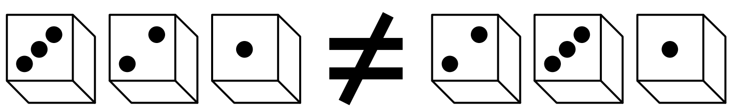
Galileo advierte entonces que

> *en un juego de dados ciertos números son más ventajosos que otros… ello sucede porque es posible obtenerlos con una mayor variedad de números.*

El duque, al considerar sólo las seis particiones, omitió la variedad de casos que cada tercia puede representar.

Tal omisión es frecuente en el cálculo combinatorio, y le sucedió incluso a Leibniz (1646-1716) al no considerar el orden en la observación de cada uno de los casos. Por ejemplo, sin la atención adecuada se puede asumir que el orden no cuenta y considerar que 3+2+1 es igual a 2+3+1, siendo que

.



.

son particiones de orden diferente.

Galileo inicia con las siguientes consideraciones:

- Que un dado tenga 6 caras $\Rightarrow$ se pueden lograr 6 tiradas diferentes.

  Con 2 dados $\Rightarrow$ se tienen $6^2 = 36$ tiradas diferentes.

  Con 3 dados $\Rightarrow$ se tienen $6^3 = 216$ tiradas diferentes.

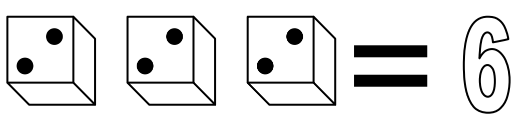
- Ya que las combinaciones dan lugar a las particiones de 3, 4, 5,…, 18, entonces faltaría encontrar cuántos casos corresponden a cada número de los anteriores. Pero bastaría con conocer lo que sucede del 3 hasta el 10, ya que “aquello que pertenezca a uno de estos números, también pertenecerá a aquél que es próximo mayor", es decir, el comportamiento de las tiradas es simétrico.[6]

Galileo, a diferencia de Cardano y Seudo-Ovidio, considera desde un inicio el orden y procede a analizar el número de permutaciones de cada una de las categorías de las tiradas, a decir, cuando todas las caras son iguales, cuando dos son iguales y una diferente, y cuando son todas diferentes.

De manera esquemática (ver tabla 5) él dará una clasificación de las diferentes tiradas de los tres dados. Empieza por listar cada una de las combinaciones que generan a cada número del 3 al 10, las clasifica según la suma de sus elementos y señala el número de permutaciones de cada una de ellas. Finalmente, suma las cantidades para encontrar así el número buscado, que nos dice de cuántas maneras diferentes se puede lograr tal o cual número, considerando el orden.

Entonces, al igual que Cardano y Seudo-Ovidio, obtiene que hay –sin tomar en cuenta las permutaciones de cada uno de ellos– a) 6 diferentes tiros cuando las caras son iguales (por ejemplo la terna (2, 2, 2)); b) 30 tiros con dos caras iguales y una diferente (por ejemplo, (1, 1, 2)) y c) 20 tiros con las tres caras diferentes (como un tiro (1, 4, 3)):

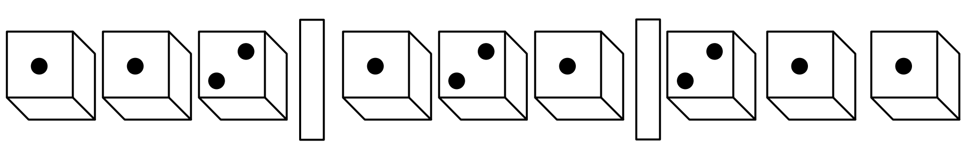
a) La suma de los puntos de 3 dados, cuyas caras son iguales, podemos lograrla sólo mediante una única tirada de ellos. Ejemplo:



y el seis no se puede representar de otra forma con caras iguales que no sean éstas.

Y como cada dado tiene sólo seis caras diferentes, entonces hay 6x1 diferentes tiros cuando las tres caras son iguales.

b) La suma que se hace de 3 números, en los cuales **dos son iguales y el tercero diferente**, podemos obtenerla por **3 tiradas**. Ejemplo:



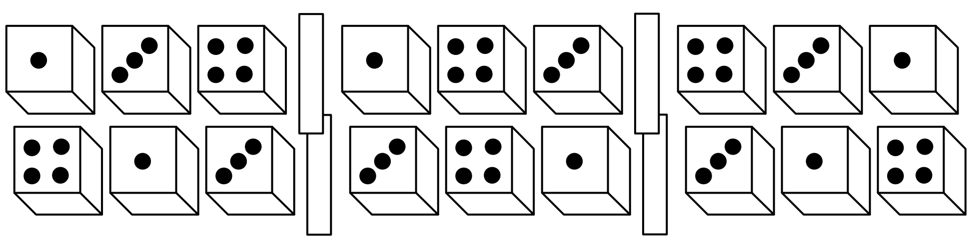
[6] Una forma interesante de comprender esto es que pensemos en las caras opuestas de las tiradas resultantes. En un dado la suma de las caras opuestas es siempre 7. Por ejemplo, si el resultado fuese 1, 3, 5, con suma 9, la cara opuesta sería 6.4.2, con suma 12; luego entonces, lo que se conozca de suma 9, será lo mismo de la suma 12. Y así en todos los otros casos.

Así, como tenemos 30 formas diferentes de generar ternas con dos caras iguales y una diferente, entonces con cada una de ellas podemos calcular las permutaciones si consideramos que tenemos dos elementos repetidos. Éste es un caso particular de uno general que nos permite calcular las permutaciones de *n* elementos, donde r, s, t,…, k son repetidos. Así, tenemos que las permutaciones distintas de *n* elementos tomadas de *n* en *n*, en donde hay un primer tipo de *r* objetos iguales entre sí, *s* objetos iguales entre sí de un segundo tipo, y así sucesivamente hasta *k* objetos iguales entre sí, tienen la representación $\frac{n!}{r!s!t!\cdots k!}$, y para nuestro caso particular, que son las permutaciones de 3 elementos, con dos de ellos repetidos, es $\frac{3!}{2!}=3$.

Este tipo de razonamientos no era nuevo para las épocas de Cardano y Galileo, pero ninguno de los dos lo usó. En el caso de Galileo quizá fue por las características del lector que le pidió la investigación.

Para terminar el caso, de las 30 formas diferentes que se tenían para sumar dos caras iguales y una diferente, y considerando que cada una se puede permutar de tres formas, entonces tenemos 90 maneras de generar estas sumas con las caras.

c) La suma de los puntos formada por **tres números diferentes**, podemos lograrla de **seis maneras para cada una de las tiradas (sumas)**. Ejemplo:



En este caso Galileo -al igual que Cardano- está usando elementos del cálculo de combinaciones para poder encontrar las combinaciones de 3 en 3 elementos tomados de entre 6, que en nuestra terminología actual sería:

$$C_6^3=\frac{6!}{3!(6-3)!}=5\times 4=20$$

Seudo-Ovidio y Cardano no explican cómo enfrentaron este caso c); ellos simplemente se dan a la tarea de contarlos y dar un resultado.

Así, teniendo las 20 combinaciones diferentes ahora multiplicamos por las permutaciones de cada una de ellas, y como aquí son tres elementos diferentes, entonces directamente es $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, y de aquí obtenemos las $20 \times 6 = 120$ formas de sumar las caras con tres elementos diferentes.

Finalmente, de los casos a), b) y c) tenemos las $6 + 90 + 120 = 216$ particiones diferentes para representar a los números entre el 3 y el 18, como suma de tres enteros iguales o diferentes, tomados de las caras de los tres dados convencionales.

Con base en lo anterior todo lo que acontece en el juego –a partir de las reflexiones de Galileo- puede ser comprendido con la ayuda de la tabla[7] siguiente:

PUNTOS A SUMAR																
10		**9**		**8**		**7**		**6**		**5**		**4**		**3**		
6+3+1	6	6+2+1	6	6+1+1	3	5+1+1	3	4+1+1	3	3+1+1	3	2+1+1	3	1+1+1	1	
6+2+2	3	5+3+1	6	5+2+1	6	4+2+1	6	3+2+1	6	3+2+1	3					
5+4+1	6	5+2+2	3	4+3+1	6	3+3+1	3	2+2+2	1							
5+3+2	6	4+4+1	3	4+2+2	3	3+2+2	3									
4+4+2	3	4+3+2	6	3+3+2	3											
4+3+3	3	3+3+3	1													
TOTAL DE PARTICIO-NES	27		25		21		15		10		6		3		1	108
11		**12**		**13**		**14**		**15**		**16**		**17**		**18**		
TOTAL DE PARTICIO-NES	27		25		21		15		10		6		3		1	108
															GRAN TOTAL DE PARTICIONES	**216**

Tabla 5 - La tabla resume todas las posibles particiones que se requieren para sumar de 3 a 18 puntos, que son las posibles tiradas de tres dados tradicionales. Como ejemplo el 6+3+1, que es el caso en que las tres caras son diferentes entre ellas, puede ser obtenido de 6 maneras diferentes (6+3+1, 6+1+3, 3+1+6, 3+6+1, 1+3+6, 1+6+3). Además, nos dice que el 10 y el 11 pueden ser representados por 27 particiones diferentes (6+3+6+6+3+3=27).

A continuación mencionamos algunas de las preguntas relacionadas con el juego que pueden ser contestadas con lo visto hasta ahora.

¿Por qué era correcta la observación del Gran Duque de que “El número 11 sale con más frecuencia que el 12, y el 10 con más frecuencia que el 9”?

[7] La tabla se modificó ligeramente para una mejor comprensión de la misma. La original puede ser consultada en los anexos.

El que el número 11 salga con más frecuencia que el 12 se debe a que el número de casos de 11 (27 casos) es mayor que el de 12 (25 casos).

⇨ p(11) = 27/216 = 0.125 mientras que p(12) = 25/216 = 0.116

⇨ p(11) > p(12)

Lo mismo sucede para el caso de 10 y 9.

¿El juego del pasadiez es justo?

Para que un juego sea justo se requiere que exista la misma probabilidad de ganar que la de perder. Ganar en el juego del pasadiez significa sumar más de diez puntos y existen 108 casos para ello; perder en el juego significa sumar menos de diez puntos y existen 108 casos para ello también.

⇨ la probabilidad de ganar es la misma que la de perder, ***i.e***.

P[suma > 10] = 108/216 = 0.5

P[suma ≤ 10] = 108/216 = 0.5

⇨ El juego es justo.

Para concluir el capítulo quisiéramos hacer notar que el valor de los trabajos analizados radica no sólo en su antigüedad, ya que podría haber opiniones actuales en el sentido de que estos textos son aportaciones muy elementales. Lo importante es que proporcionan elementos para poder reconstruir el desarrollo de las ideas relativas a la combinatoria, las particiones y la probabilidad. Analizar un problema desde un perfil histórico nos da la oportunidad de crecer en lo analítico y con ello acercarnos a la comprensión de lo abstracto.

Otro aspecto importante que mencionar es que el capítulo nos presenta respuestas referentes sólo a un caso particular de tres dados convencionales, con caras numeradas entre el 1 y el 6. Y aunado a esto, es importante mencionar que hasta ahora todo lo hemos construido con métodos intuitivos, donde no se encuentran los elementos demostrativos a los que estamos acostumbrados actualmente, es decir, los de la formalidad matemática que hoy conocemos.

El siguiente paso natural dentro de las inquietudes matemáticas sería el de generalizar los resultados obtenidos y demostrarlos con mayor rigor y formalidad.

Una vez visualizado el inicio de las primeras particiones que representan a determinados números enteros, pasamos a formular nuevas preguntas que surgen de inquietudes relacionadas con el juego de dados, y que se enlazan con la teoría de las particiones. Algunas de las preguntas podrían ser:

1) ¿Podemos generalizar el juego del pasadiez a *n* dados y convencernos de que la suma de las particiones para los puntos anteriores al "Punto de Pase"[8] es igual a la representación de las particiones de los números mayores al "Punto de Pase"? Entiéndase por "Punto de Pase" al valor para el que el número de particiones presenta una inflexión. En el caso de un número de dados impares el "Punto de Pase" es (7n-1)/2. Por ejemplo, para 3 dados el "Punto de Pase" es el 10, para el intervalo [3,10] y el 11, para [11,18] como se puede ver en la tabla siguiente:

Puntos a sumar	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Número de Particiones	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Tabla 6

En el caso de un número de dados pares las reglas del juego tendrían que modificarse ya que el punto de inflexión tiene otras características, como se puede apreciar en la siguiente tabla:

Puntos a Sumar	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
# Part.	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1

Tabla 7

El "Punto de Pase" para números pares es (7n) / 2, que en el ejemplo anterior sería 14. Luego, para seguir con la idea de que el juego fuera justo, tendríamos que considerar que la tirada ganadora sería aquella cuya suma de los puntos fuese mayor a 14 y la perdedora menor a 14, y que la tirada igual a 14 no debería de contar.

---

[8] Vassilios C. Hombas [2004] en su texto *Generalizing Galileo's Passedix Game* es el que nombra a ese punto de inflexión como "Passpoint".

2) Ya sabemos que con tres dados puedo tener las particiones de los números entre 3 y 18, y que cada uno de los números tiene una cantidad de particiones que se muestran en la primera tabla del punto anterior.

   Surge la pregunta: ¿podemos formar la misma cantidad de particiones para cada uno de los números de la tabla, pero con 3 dados diferentes a los convencionales?

3) Puedo generalizar la misma pregunta en 2) para n dados

   Estas preguntas ya no las respondemos en este capítulo; las respuestas se encontrarán en el Colofón titulado "Respuestas varias". La razón de separar las respuestas, como ya se dijo, es por el contexto histórico que pretende mostrar la tesis, y las respuestas a los tres problemas son presentadas en un marco afín a la matemática moderna.

CAPÍTULO II

La enumeración suficiente de las partes. Jacob Bernoulli y Pierre Rémond de Montmort

Introducción

Como ya vimos en el capítulo I, los tres autores trabajaron con el caso particular de particiones de tres sumandos, y esto recoge los resultados de la práctica de los juegos de azar con tres dados. Es de recordar que ninguno de los tres tuvo como intención centrar este tema dentro de sus respectivas obras. Tanto el Seudo-Ovidio como Cardano presentaron sus conocimientos al respecto como parte de una inquietud personal, y es porque ellos se consideraban afectados por las ingratitudes e injusticias que les había dejado la práctica del juego de dados. En el caso de Galileo, su escrito fue la respuesta a la solicitud de una opinión acerca de las mayores o menores posibilidades de obtener algunos resultados para el caso de tres dados.

Entonces, en los casos del capítulo anterior tenemos respuestas particulares a inquietudes puntuales, y es quizá por esta razón que no se generalizan los resultados —para *n* dados— a partir de la teoría que ellos manejan. Aunque cabe mencionar que seguramente estaban en plenas posibilidades de aportar resultados más extensos, pero parece ser que el perfil que a ellos les interesaba abordar en esos momentos era otro, y como se puede ver en sus escritos, lo hicieron de manera notable.

En este capítulo mostramos cómo fue posible pasar del manejo de las ideas a nivel de conjeturas y propuestas experimentales[9] con las que era muy complicado construir teorías matemáticas, a un paradigma donde ya se encontraban las primeras bases de lo que ahora es la teoría de la probabilidad, y que se vio acompañada de múltiples aportaciones para lo que sería la teoría de particiones. Así, se avanzó en el desarrollo teórico para encontrar formas más eficaces que dieran mayor certidumbre a la práctica de algunos juegos de azar. Para

[9] Aunado a lo anterior mencionamos que en siglos anteriores al XVII, otros frenos para que los juegos de azar lograran una base matemática que los sustentarán se debieron a que estaban más vinculados con las cuestiones mágicas, religiosas o morales, y por ello se suponía que los resultados estaban más sujetos a voluntades divinas que a un modelo matemático.

ello se generaron teorías que mejoraban el conteo de posiciones de los elementos involucrados en un juego. Sabemos que Huygens marcó la pauta para que Jacob Bernoulli (1654 - 1705) y Pierre Rémond de Montmort (1678 - 1719) escribieran lo que son las primeras aportaciones a la teoría de la probabilidad. Pero no perdamos de vista que detrás del desarrollo de la teoría de la probabilidad también se comenzaba a posicionar la teoría de las particiones, que indudablemente se vio beneficiada por los importantes avances generados por J. Bernoulli y M. Montmort en el cálculo combinatorio.

Ahora, en las secciones que siguen documentaremos brevemente la búsqueda de enumeración de partes; dicha etapa, a nuestro parecer, queda propiamente representada con el trabajo de Jacob Bernoulli [2005] titulado *Ars Conjectandi* publicado en 1713, y por el de Pierre Rémond de Montmort [1708] *Essay d'analyse sur les Jeux de Hazard*, publicado en 1708.

Acerca del "*Ars Conjectandi* " El arte de conjeturar

El libro de Jacob Bernoulli apenas ha sido reconocido como piedra fundamental en los orígenes de la probabilidad; y todavía lo ha sido en menor proporción en el caso de la teoría de particiones.

En el primer capítulo del *Ars Conjectandi*, Bernoulli retoma cuestionamientos que Chrisitian Huyges hiciera sobre el tema del azar, y los analiza clarificando sus métodos. Dado que nuestro estudio está más dirigido hacia la cuestión de las particiones, tomaremos el caso concerniente al comportamiento de los dados y de algunas de sus interrogantes: "Con un dado, ¿en cuántas tiradas se puede lograr un 6, o cualquier otro número de puntos? de la misma manera, con dos dados, ¿de cuántas maneras se pueden lograr dos seises? o ¿con tres dados, tres seises?".

La manera en que Bernoulli primeramente resuelve el problema es a partir de desarrollar una metodología para contar uno por uno y donde se consideran todas las posibilidades.

Y ya en vías de la generalización, Bernoulli responde al problema de encontrar el número de maneras de tirar cualquier número de puntos con cualquier número de dados —planteamiento que no abordaron ni Cardano ni Galileo—, a partir de la construcción de tablas que muestran las soluciones.

En el segundo capítulo del *Ars Conjectandi*, "La doctrina de las Permutaciones y Combinaciones", hace una recolección de las distintas formas conocidas hasta entonces de la combinatoria. Estas son herramientas básicas para remediar un aspecto que considera clave en la solución de problemas: "La enumeración suficiente de las partes". Y con estas aportaciones al cálculo combinatorio se establecerán relaciones matemáticas útiles para el desarrollo de la teoría de particiones, la cual tomaría su vida propia unos 40 años después de la muerte de Jacob.

Acerca del "*Essai d'analyse sur les Jeux de Hazard*", *Ensayo del análisis sobre los juegos de azar*

Nos pareció relevante incluir el escrito -dada la cercanía en tiempo y en temática- que apareció por primera vez (de manera anónima) en 1708, pero sin perder de vista que el *Ars Conjectandi* de Bernoulli se publicó en 1713. Esta cercanía quizá no fuera circunstancial. Resulta, por un lado, que Montmort recurrió al anonimato, por otro que Bernoulli muere antes de haber concluido su obra, también que existía una gran desconfianza entre la familia de los Bernoulli y, por último, se aprecia una similitud de temas en las obras de ambos. Entonces, con estos elementos actuando simultáneamente cabe pensar que alguno de los dos autores conocía el trabajo del otro al momento de escribir su propia obra.

Por las circunstancias que rodearon a ambos documentos podemos considerar al de Montmort como posterior al de Bernoulli, ya que fue cuestión más de tiempos de impresión que de las fechas en las que escribieron sus trabajos.

En el prefacio de la segunda edición (1713), Montmort reconoce ampliamente el trabajo de J. Bernoulli. En lo que concierne a la aplicación de las matemáticas se refiere a él de la siguiente manera: "*él pertenece a ese pequeño número de hombres raros que son propensos a inventar*". Incluso se atreve a rebautizar la obra de Bernoulli, cuyo título original *De art conjenctandi,* cambió a *l'art de deviner* (De *El arte de conjeturar* a *El arte de adivinar*). Y en este tenor analiza una serie de juegos de la época teniendo como objetivo encontrar generalizaciones que además pudieran llevarse a otras actividades del ser humano, pues "el azar tiene reglas, y éstas pueden encontrarse"[10].

Una de las proposiciones que consideraremos especialmente es la XVI, y se debe a que en ella se encuentra parte de las generalizaciones que nos interesan. Así, la proposición XVI dice:

> "Al tirar al azar un número cualquiera ***d*** de dados, cuyo número de caras es ***f,*** también cualquiera, encontrar cuántas posibilidades existen de lograr tal o tal punto ***p,*** a voluntad".

Es de notar que intrínsecamente estamos buscando las particiones de algunos números que queremos obtener al arrojar los dados. El método empleado para la solución del problema es una generalización basada en términos recurrentes y apoyada en la construcción de tablas, y de manera no tan explicita, pero sí importante, está el uso de los números triangulares.

En general, la pregunta clave del Capítulo 2 será ¿cómo enumerar suficientemente a todas las partes en estudio?

Antes de terminar esta introducción es muy importante señalar que este capítulo va a proporcionar los elementos matemáticos que son necesarios para poder vincular el desarrollo de las particiones con los elementos que proporciona el análisis combinatorio. Un ejemplo de ello es la relación que se da entre las particiones que generan los conjuntos

---

[10] "Es particularmente en los juegos de azar que aparece la debilidad del espíritu humano y la inclinación que existe a la superstición. Nada es más común que ver que los jugadores atribuyan su infortunio a personas que se les acercan y a otras circunstancias que no son menos indiferentes a los eventos del juego….en fin, la mayoría buscan sus ventajas donde no están, o bien ellos les descuidan completamente.

Se puede decir poco más o menos la misma cosa de la conducta de los hombres en todas las acciones de la vida donde el azar toma parte. Estos son los mismos prejuicios que les gobiernan, es la imaginación que norma sus pasos, y que origina ciegamente sus temores y sus esperanzas. Frecuentemente ellos abandonan un pequeño bien cierto por perseguir temerariamente un bien más grande, cuya adquisición es [tenida] como imposible; y a menudo, por demasiada desconfianza, ellos renuncian a esperanzas considerables y bien fundadas para conservar un bien cuyo valor no tiene punto de proporción con aquel que ellos desprecian. El principio general de esos prejuicios y de esos errores es que la mayoría de los hombres atribuyan la distribución del bien y del mal, y generalmente todos los eventos de este mundo, a un poder fatal que agita sin orden y sin regla. Ellos creen que se tiene uno que abandonar a esa Divinidad deslumbradora llamada Fortuna…la gente crea su propia buena o mala suerte por su conducta, en su mayor parte. Aquellos que son sabios dejan lo menos posible al destino. Nosotros no podemos conocer el futuro, ¡pero siempre podemos en juegos de azar, y a menudo en otros asuntos de la vida, conocer exactamente qué tan probable es que algo vaya a ocurrir de alguna manera más que otra! Y ya que existen límites de nuestro propio conocimiento, nosotros deberíamos al menos alcanzarlos.

Todos sabemos que cuando la certeza [evidencia] es imposible, deberíamos buscar la verosimilitud [probabilidad] para aproximarnos a la verdad…hay algunas verosimilitudes que son mayores que otras [cuando se les considera] al infinito…no ha sido suficientemente reconocido hasta el presente que uno puede dar reglas infalibles para calcular las diferencias entre diversas probabilidades. "

de dados y las diagonales del triángulo de Pascal. Pero más sobresalientes serán los vínculos que cristalizará Euler –que se exponen en el capítulo tres de la tesis- para la teoría de las particiones, y que no hubieran sido posibles sin los elementos combinatorios que le proporcionaron los trabajos de Jacob Bernoulli y de Pierre Rémond de Montmort. Por lo antes mencionado es que este capítulo pareciera no relacionarse totalmente con la gestación de las particiones, como sí lo es con el cálculo combinatorio.

CAPÍTULO 2.1

Ars Conjectandi (El arte de conjeturar)

Jacob Bernoulli

A mediados del siglo XVII, mientras Pierre de Fermat y Blaise Pascal daban forma a los cimientos de la teoría de la probabilidad, nace Jacob Bernoulli en la por entonces importante ciudad comercial de Basilea (27 de diciembre de 1654).

El abuelo de Jacob Bernoulli, originario de la Holanda católica, pero él mismo adscrito al credo protestante, se refugia y establece en Basilea en el año de 1622. La actividad económica que caracterizó a los antecesores de Jacob fue el comercio de especias, pigmentos e ingredientes médicos. Es relevante hacer mención de ello, pues Jacob se propuso toda su vida dedicarse tanto a algo distinto a lo de su padre y abuelo, como a algo distinto de lo que quería su padre para él, a saber la Teología. Pero algo de las inquietudes prácticas de la familia influyó en él, y esto se hace patente en algunas aplicaciones prácticas de sus descubrimientos matemáticos, entre las que se encuentran las que aparecen en el capítulo IV del *Ars Conjectandi*.

Cabe mencionar que Jacob Bernoulli eligió como emblema a Faetón, el personaje de la mitología Griega que, desobedeciendo a su padre, condujo su carruaje demasiado cerca del sol y por ello fue aniquilado por Zeus, y así evitar la destrucción de la tierra. Además, Bernoulli añadió en su obra la siguiente leyenda que lo caracterizaba "Invito patre sidera verso" (A pesar de mi padre, me dirijo a las estrellas). Lo cual evidencia el interés de Bernoulli por aproximarse a todo lo que para él fuese más verdadero.

El *Ars conjectandi* fue escrito durante los últimos años de vida de Jacob Bernoulli y aparentemente quiso trascender e ir más allá de los juegos de azar, buscando aplicaciones en "los asuntos civiles, morales y económicos"; sin embargo, por su enfermedad y muerte no logró terminar su obra.

En esa época la aristocracia acostumbraba auxiliarse de los matemáticos para poder dominar los juegos de mesa que estaban de moda. Aparentemente Bernoulli no contaba con ese tipo de relaciones, situación contraria a la de Huygens. Y fue este último quien, a través de sus cuestionamientos, motivó a J. Bernoulli a escribir el *Ars conjectandi*. Pero es importante aclarar que el interés de Bernoulli por encontrar soluciones más generales fue motivado más por la ciencia que por el simple juego, y esto se podrá apreciar en sus proposiciones.

Ahora, antes de entrar a la primera tabla de Bernoulli, recordemos algunos de los cuestionamientos de Huygens:

"Con un dado, ¿con cuántas tiradas se puede lograr un 6 o cualquier otro número de puntos? de la misma manera, con dos dados, ¿de cuántas maneras se pueden lograr dos seises? o ¿con tres dados, tres seises? "

Bernoulli la reformula a ¿cuál es el número de maneras de obtener cualquier número de puntos con cualquier número de dados?

Para responder Bernoulli propone un algoritmo que podría entenderse mejor con la siguiente tabla. Cabe mencionar que el ejemplo manejado por Bernoulli es el de encontrar todas las particiones de 12, con cuatro dados tradicionales.

A	B	C	D		¿∑= 12?	Tiradas
1	1	1	1	incrementar A		
2	1	1	1			
3	1	1	1			
4	1	1	1			
5	1	1	1			
6	1	1	1			
2	2	1	1	incrementar B a 2, variar A desde 2		
3	2	1	1			
4	2	1	1			
5	2	1	1			
6	2	1	1			
3	3	1	1	incrementar B a 3, variar A desde 3		
4	3	1	1			
5	3	1	1			
6	3	1	1			
4	4	1	1	incrementar B a 4, variar A desde 4		
5	4	1	1			
6	4	1	1		6.4.1.1	12
5	5	1	1	incrementar B a 5, variar A desde 5	5.5.1.1	6
6	5	1	1	ya no es necesario incrementar A		
6	6	1	1	ya no es necesario incrementar B a 6 y variar A desde 6		
2	2	2	1	incrementar C a 2, variar A desde 2		
3	2	2	1			
4	2	2	1			
5	2	2	1			
6	2	2	1			
3	3	2	1	incrementar B a 3, variar A desde 3		
4	3	2	1			
5	3	2	1			
6	3	2	1		6.3.2.1	24
5	4	2	1	incrementar B a 4, disminuir A en 1	5.4.2.1	24
				no incrementar B a 5 o 6, pues se tendría que disminuir a A 4 o 3, y éstas serian repeticiones		
3	3	3	1	incrementar C a 3, variar A desde 3		
4	3	3	1			
5	3	3	1		5.3.3.1	12
4	4	3	1	incrementar B a 4, disminuir A a 4	4.4.3.1	12
				ya no se puede aumentar ninguno de los primeros tres números pues o excederían de 12 o se repetirían		
2	2	2	2	incrementar D a 2, variar A desde 2		
3	2	2	2			
4	2	2	2			
5	2	2	2			
6	2	2	2		6.2.2.2	4
5	3	2	2	incrementar B y disminuir el primero por 1	5.3.2.2	12
4	4	2	2	incrementar B y disminuir el primero por 2	4.4.2.2	6
				ya no se puede aumentar ninguno de los primeros dos números pues o excederían de 12 o se repetirían		
3	3	3	2	incrementar C a 3, variar A desde 3		
4	3	3	2		4.3.3.2	12
				ya no se puede aumentar ninguno de los primeros dos números pues o excederían de 12 o se repetirían		
3	3	3	3	incrementar D a 3	3.3.3.3	1
				ya no se puede aumentar ninguno de los primeros dos números pues o excederían de 12 o se repetirían		
						125

Tabla 8

Entonces, se trata de un algoritmo en el que crece progresivamente el valor de las caras de los dados de forma ordenada, y se pregunta –en la columna tres- si la suma de los puntos es igual al número deseado, que en este caso es el 12. Y si el resultado es 12, entonces se contabiliza la tirada en la última columna, junto con sus permutaciones, que atiende a lo ya conocido.

●) Las permutaciones de 4 elementos donde 2 son diferentes y 2 son repetidos, es 12.

●) Las permutaciones de 4 elementos donde los primeros 2 son iguales y los otros 2 son 6.

●) Las permutaciones de 4 elementos donde 3 son iguales y uno diferente, son igual a 4.

●) Las permutaciones de 4 elementos donde todos son diferentes, son 24.

Por lo poco explícito que le resulta el método, Bernoulli prefiere exponerlo a través de la siguiente tabla:

Número de Dados	Puntos a lograr																				
I	1	2	3	4	5	6															
II	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12										
III	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18					
IV	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
V	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
VI	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Número de tiradas por número dado de dados																					
I	1	1	1	1	1	1															
		1	1	1	1	1	1														
			1	1	1	1	1	1													
				1	1	1	1	1	1												
					1	1	1	1	1	1											
						1	1	1	1	1	1										
II	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1										
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1									
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1								
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1							
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1						
						1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
III	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1					
		1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1				
			1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1			
				1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1		
					1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	
						1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1
IV	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1
		1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4
			1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10
				1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20
					1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35
						1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56
V	1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126
		1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205
			1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305
				1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420
					1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540
						1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651
VI	1	6	21	56	126	252	456	756	1161	1666	2247	2856	3431	3906	4221	4332	4221	3906	3431	2856	2247

Tabla 9 - La explicación que Bernoulli da para la construcción de la tabla es la siguiente:

> "Ya que cada dado adicional multiplica al número de tiradas por 6, es claro porqué los números de tiradas del dado precedente deberán ser repetidos seis veces y añadidos. Y como los números de puntos correspondientes a estas diversas tiradas son incrementadas por uno, dos, tres o más, dependiendo si el dado adicional muestra uno, dos, tres o más puntos, es también claro porqué ésta fila de tiradas se tiene que mover un lugar a la derecha cada vez, a saber, porque cada número de tiradas corresponde a un número de puntos mayores en uno que en la fila precedente."

Una posibilidad más para poder entender la construcción de la tabla sería la de utilizar el algoritmo de la multiplicación, considerando a cada número como un individuo, es decir, como número de posibilidades que se producen:

										1	1	1	1	1	1
									x						
										1	1	1	1	1	1

										1	1	1	1	1	1
									1	1	1	1	1	1	
								1	1	1	1	1	1		
							1	1	1	1	1	1			
						1	1	1	1	1	1				
					1	1	1	1	1	1					

					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
				x											
										1	1	1	1	1	1

					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					

1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Tenemos que cada una de las casillas, que representa a cada cara de un dado, se combina con las otras, cubriendo con ello todas las particiones posibles. Luego, al sumarse dan origen a una nueva casilla que resume el número de particiones acumuladas que cuenten con las mismas características. Así, de la primera multiplicación se obtienen 1 de una característica en particular, 2 de otra y así sucesivamente con 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

En la segunda multiplicación se parte ahora de combinar las resultantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1 con las caras de un tercer dado. Lo que nos da origen entonces a

1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

y así sucesivamente.

La parte dos del *Ars Conjectandi* trata sobre “La doctrina de las permutaciones y combinaciones”. Bernoulli aporta las herramientas para la solución de problemas donde es común encontrarse con “la enumeración suficiente de las partes”. [11]

En lo que resta de la sección presentamos a través de tablas la forma en que Bernoulli expone su teoría del cálculo combinatorio. Es importante ver que con él se dan los primeros pasos para tener un marco teórico de la teoría de la combinatoria como hoy la conocemos. Entonces, sintetizamos estas ideas en las siguientes tablas:

I. Permutaciones: Variaciones en las que, al preservar la misma cantidad de cosas, su orden y posición son alterados de diferentes maneras. Responden a ¿de cuántas maneras diversas cosas pueden ser transpuestas o mezcladas entre ellas, de tal manera que se considere a todas y que cambien tan sólo su orden o posición?		
Problemática	Solución	Ejemplo
1. Si todas las ***n*** cosas que permutan difieren una de la otra	n!	{a,b,c} {abc,acb,bac,bca, cab,cba} 3!= 6.
2. Si algunas de las cosas que permutan son iguales	El número de permutaciones considerando a todas diferentes divididas por el número de permutaciones de las cosas similares.	{L,E,O P,O,L,D,U,S} $\frac{9!}{(2!x2!)}=\frac{362,880}{4}=90,720$

Tabla 10

[11] Bernoulli escribe: “La variedad infinita, que se manifiesta tanto en los trabajos de la naturaleza como en la acción humana, constituye la principal belleza de este universo, y se deriva claramente de la composición diversa, mezcla y transposición de sus partes con cada una. Pero ya que la multitud de las cosas que concurren para producir un efecto es a menudo tan grande y variada que es muy difícil contar todas las maneras en que su composición o mezcla puedan o no ocurrir, no hay error en el que hasta el más prudente y circunspecto más frecuentemente caiga que el error que los lógicos comúnmente llaman “la enumeración insuficiente de las partes”. Esto es tan verdadero que me atrevo a decir que ésta es casi la única fuente desde donde surge los innumerables y más serios errores que nosotros diariamente cometemos en nuestro pensar, ya sea de cosas por entender o acerca de cosas por hacer”.

II. Combinaciones consideradas por sí mismas: Son colecciones tales que de una multitud dada de cosas, algunas son removidas y reunidas, sin importar el orden o posición. Responden a la pregunta ¿cuántas veces, de un número dado de cosas, 2,3, o 4, etc., pueden ser tomadas, de tal manera que todas las mismas cosas nunca sean tomadas más de una vez? El número de cosas reunidas es llamado exponente de la combinación. Algunos llaman a las colecciones: "com2inaciones", "com3inaciones", "com4inaciones"[12], etc. Un término más apropiado sería "Elecciones".		
Problemática	Solución	Ejemplo
1. Si todas las ***n*** cosas a combinar son diferentes y si en ninguna combinación deba aparecer la cosa dos veces, encontrar absolutamente todas las combinaciones, esto es, de todos los exponentes de una sola vez.	2^n-1 (incluye las unidades, pares, triples, etc.)	multitud = {a,b,c} {a,b,c,ab,ac,bc,abc} $2^3-1=7$
	2^n (incluye las unidades, pares, triples, etc. y al conjunto vacío[13], que es cuando no se quita ninguno)	{a,b,c,ab,ac,bc,abc, ∅ } $2^3=8$
	2^n-n-1 (incluye sólo pares, triples, etc.)	{ab,ac,bc,abc} $2^3-3-1=4$

Tabla 11

III. Combinaciones de un solo exponente por separado; incluyendo números figurados (números comúnmente significados que son generados por la adición continua o colección de proporciones aritméticas y de los números que son generados por ellos) y sus propiedades.

	Exponentes de las combinaciones											
Número de cosas por combinar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII …
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12 …	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Tabla 12

[12] El número está relacionado con el exponente de la combinación y es la notación de Bernoulli.
[13] Bernoulli utiliza el término "nullion".

Problemática	Solución	Ejemplo
IV. Encontrar el número de combinaciones de ***n*** elementos con un solo exponente ***r*** por separado;	$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$	Número de maneras con que 4 cosas pueden ser tomadas de entre 10 cosas es $\frac{10(9)(8)(7)}{4!}=5040/24=210$ que en la tabla anterior es la suma de las cifras sombreadas, que es además la cifra de la columna siguiente correspondiente al número de cosas por combinar + 1.
• Dados un número de cosas que serán combinadas y el exponente de la combinación, encontrar la cantidad de combinaciones en las que ocurren ciertas cosas prescritas y determinadas de algún número de cosas designadas, sin incluir a ciertas otras (cosas prescritas y determinadas).	$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-b+1)}{b!}\times$ $\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\cdots(n-m-c-b+1)}{(c-b)!}$	De un número de cosas ***n*** que serán combinadas entre ellas en grupos de exponente ***c***, designar ciertas cosas A, B, C, D, E, cuyo número es ***m***, el cuál puede ser más grande o menor al exponente ***c***. Y se pregunta de cuántas combinaciones algunas cosas, a decir A, B y C de las cosas designadas, cuyo número es ***b***, se encuentran juntas, excluyendo las otras D y E. m= 5 y b=3 $10\times\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{(c-3)!}$

Tabla 13

V. Encontrar el número de combinaciones cuando cualquiera de las cosas que será combinada es diferente de las otras, pero que puede ocurrir más de una vez en la misma combinación.

		Exponentes de las combinaciones											
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII…
Número de cosas por combinar	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
	4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
	5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
	6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
	7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
	8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
	9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
	10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960

Problemática	Solución	Ejemplo
• Encontrar el número de combinaciones con un exponente dado cuando la misma cosa puede ser incluida más de una vez en la misma combinación (incluye al conjunto vacío).	$\frac{(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}{(n-1)!}$ y si c >n entonces $\frac{(c+1)(c+2)\cdots(c+n)}{(n)!}$	Número de cuádruples contenidos en 10 cosas diferentes $\frac{(10)(11)(12)(13)}{4!}=17160/24=715$, que en la tabla anterior es la suma de las cifras sombreadas, que es además la cifra de la columna siguiente correspondiente al número de cosas por combinar.

Tabla 14

Problemática	Solución	Ejemplo
VI. Encontrar el número de combinaciones cuando algunas de las cosas que serán combinadas son iguales, pero que ninguna puede ser repetida más seguido en una combinación que como se encuentra en el número total de cosas.	Aumentar en uno los números de dimensiones que cada una de las cosas tiene y multiplicarlo entre ellos.	Se desea que ***a,b,c,d*** se combinen pero con la condición que la ***a*** no ocurra más de 5 veces, que la letra ***b*** más de 4, la ***c*** más de 3 y la ***d*** más de 2 veces.; pero esto es lo mismo a tener a aaaaabbbbcccdd, o a encontrar a todos los divisores de $a^5b^4c^3d^2$. Solución: (5+1)(4+1)(3+1)(2+1)= 360. La cifra incluye al conjunto vacío que sería el 1 como divisor. En el caso de divisores deberá de asumirse que ***a,b,c,d*** invoquen a tantos números primos diferentes a 1 y entre ellos. La doctrina de este capítulo puede servir especialmente para encontrar el número de divisores de cualquier cantidad dada.
• Encontrar el número de divisores o combinaciones de cada uno de los números de dimensiones o de los exponentes de las combinaciones.	Continuando con el mismo ejemplo anterior de $a^5b^4c^3d^2$.	

	Número de dimensiones o exponentes de las combinaciones															
Cantidades o cosas para ser combinadas		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	a^5	1	1	1	1	1	1									
			1	1	1	1	1	1								
				1	1	1	1	1	1							
					1	1	1	1	1	1						
						1	1	1	1	1	1					
	a^5b^4	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1					
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
				1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
					1	2	3	4	5	5	4	3	2	1		
	$a^5b^4c^3$	1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1		
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
				1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
	$a^5b^4c^3d^2$	1	4	10	19	30	41	49	52	49	41	30	19	10	4	1

Tabla 15

<table>
<tr><td colspan="3">VII. Sobre considerar juntamente combinaciones y permutaciones. Encontrar las variedades que diversas cosas, una vez combinadas, puedan ser transpuestas (sin combinarse consigo mismas).</td></tr>
<tr><td>Problemática</td><td>Solución</td><td>Ejemplo</td></tr>
<tr><td>1. Encontrar el número de opciones de una multitud n, de las cuales ninguna pueda ser combinada consigo misma en combinaciones de un solo exponente c.</td><td>$n(n-1)(n-2)\cdots(n-c+1)$</td><td>Número de cuádruples contenidos en 10 cosas diferentes, incluyendo todas sus variadas transposiciones
$(10)(9)(8)(7)=5040$</td></tr>
<tr><td>2. Encontrar el número total de opciones o de todos los exponentes de varias cosas diversas, de la cuales ninguna puede ser combinada consigo misma.</td><td>Sumar los números de combinaciones encontrados por la regla anterior de cada uno de los exponentes. Otra manera no trivial de hacerlo es utilizando la siguiente propiedad:
El número de combinaciones de cualquier número de cosas es igual a uno más que el número de combinaciones de aquel con un número menor de cosas, multiplicado por el número de cosas dadas. (No incluye al conjunto vacío).</td><td>Combinar 4 cosas, como individuos, pares, triples,…, nónuplos = 986,409.
<table>
<tr><td># cosas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td># comb.</td><td>1</td><td>4</td><td>15</td><td>64</td><td>325</td><td>1956</td></tr>
<tr><td># cosas</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>etc.</td><td></td></tr>
<tr><td># comb.</td><td>13699</td><td>109600</td><td>986409</td><td>9864100</td><td>etc.</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Tabla 16

VIII. Sobre considerar juntamente combinaciones y permutaciones. Encontrar a las variedades que diversas cosas, una vez combinadas, puedan ser transpuestas (se pueden combinar consigo mismas).		
Problemática	Solución	Ejemplo
3. Encontrar el número de opciones de una multitud ***n***, cualquiera de las cuales puede ser combinada consigo misma, en combinaciones de un solo exponente ***c***.	n^c	Número de cuádruples contenidos en 9 numerales diferentes, incluyendo todas sus variadas transposiciones. (sin incluir al cero) $9^4=6561$
4. Encontrar el número total de opciones o de todos los exponentes, teniendo como máximo ***c***, de una multitud de cosas ***n*** diversas, cualquiera de las cuales puede ser combinada consigo misma.	$\frac{(n^c-1)(n)}{(n-1)}$	Combinar 10 numerales, como individuos, pares, triples,…, séxtuples $\frac{(10^6-1)(10)}{(10-1)}=1,111,110$
Es en este punto donde Bernoulli establece una relación entre las combinaciones y las potencias de los polinomios[14].		

Tabla 17

[14] "Es adecuado notar aquí una simpatía entre las combinaciones en este sentido y las potencias de los polinomios. Debido a que para encontrar todos los pares de las letras a,b,c,d, las letras solas se prefijarán a todas las letras; y para encontrar los triples, las letras solas una vez más se prefijarán a todos los pares, etc., como se menciona al principio de este capítulo, y ya que la misma cosa se hace cuando la cantidad literal a+b+c+d es elevado a al cuadrado, al cubo, etc., se sigue que las mismas letras, si son consideradas como partes de la raíz de algún polinomio, exponen por sus pares todos los componentes del cuadrado del polinomio, por sus triples todos los componentes del cubo, por sus cuádruples de la potencia cuatro, y así sucesivamente, de tal manera que los componentes de cualquier potencia no están expresados excepto por la colección de las combinaciones de las partes de la raíz de exponente igual al índice de la potencia; sin embargo, existe esta diferencia, que todos los componentes que consisten de las mismas letras únicamente transpuestas de varias maneras, debido a que ellas designan la misma cantidad, están comúnmente unidas en un solo término con el propósito de ser breves, asignándolo a ellas como prefijo al número de componentes equivalentes, el cuál es comúnmente llamado el coeficiente del término. Por consiguiente es fácil discernir que el coeficiente de cualquier término expresa el número de permutaciones de las letras que constituyen ese término. El número de términos, desde luego, en cualquier potencia es igual al número de combinaciones con exponentes igual al índice de la potencia que puede estar establecido entre las partes de la raíz olvidándose de su orden. El número de estas combinaciones se encontró en el Capítulo V.
Habiendo observado esto a veces tendrá un gran valor significativo, ya que de aquí se puede rápidamente encontrar tanto el número de términos como el coeficiente de cualquier término en cualquier potencia. Entonces, por ejemplo, la potencia 10 del trinomio a+b+c, por la regla del Capítulo V, consistirá de: $\frac{(c+1)(c+2)\cdots(c+n-1)}{(n-1)!}=\frac{(10+1)(10+3-1)}{(3-1)!}=\frac{(11)(12)}{2}=66$ términos, de los cuales a^5b^3cc, por la regla 2 del Capítulo I, tendrá el coeficiente $\frac{10!}{5!3!2!}=2,520$. Similarmente, el cubo de la parte cuarta de la raíz a+b+c+d contendrá $\frac{(3+1)(3+2)(3+4-1)}{(4-1)!}=20$ términos, de los cuales a^2b y abc, tendrán los coeficiente $\frac{3!}{2!1!}=3$ y $\frac{3!}{1!1!1!}=6$ respectivamente".

Problemática
IX. Encontrar el número de opciones de varias cosas, de las cuales algunas son las mismas, pero ninguna deberá estar incluida en una opción más seguido que lo que se encuentra en el total de número de cosas, el orden se toma a consideración.
Ejemplo
Si se desea que ***a,b,c*** se combinen y permuten de todas las maneras pero con la condición que la ***a*** no ocurra más de 4 veces, que la letra ***b*** más de 3 y la ***c*** más de 2. Esto es lo mismo a tener a aaaabbbcc, o a $a^4b^3c^2$. Y se determinarán el número de estas combinaciones tanto de un solo exponente como el de todos los exponentes juntos.
Solución

Exponentes de las combinaciones												
Cosas que van a ser combinadas	a^4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		1	1	1	1	1		Se insertan 4 (exponente de a) + 1 unidades				
			1	2	3	4	5	Se insertan 4 +1 números laterales				
				1	3	6	10	15	Se insertan 4 +1 números triangulares			
					1	4	10	20	35	“ “ números piramidales		
	a^4b^3	1	2	4	8	15	25	35	35		Se suman los anteriores.	
			1	4	12	32	75	150	245	280	1,2,4,8,… x 1,2,3,4,...	
				1	6	24	80	225	525	980	1260	1,2,4,8.., x 1,3,6,10..
	$a^4b^3c^2$	1	3	9	26	71	180	410	805	1260	1260	$\sum$= 4025

No incluye al conjunto vacío.

Tabla 18

CAPÍTULO 2.2

Ensayo sobre el análisis de los juegos de azar

Pierre Rémond de Montmort

Como dijimos en la introducción de este capítulo, con Montmort se generalizan algunos resultados que en su origen sólo fueron casos particulares. En este caso particular, Montmort nos muestra cómo relacionar procesos ilimitados, como son por ejemplo el triángulo de Pascal y la obtención de cualquier partición en juego de dados y no sólo de 2 o 3, si no de cualquier otra cantidad. Ahora presentamos la proposición XVI, misma que resulta importante para la teoría de las particiones:

> **Al tirar al azar un número cualquiera *d* de dados, cuyo número de caras es *f*, también cualquiera, encontrar cuántas posibilidades existen de lograr tal o tal punto *p*, a voluntad.**

Para responder Montmort primero recurre al triángulo de M. Pascal, mismo que es analizado en la Propuesta I del *Ensayo sobre el análisis de los juegos de azar*. Y dice:

> "Un número de cosas cualesquiera son propuestas, por ejemplo, las letras a, b, c, d, e, f, g,…. y se pregunta de cuántas maneras diferentes se pueden tomar las cosas, de una en una, de dos en dos, de tres en tres, o de todas las maneras posibles".

El problema lo resuelve utilizando los valores del triángulo:

	# DE COSAS														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
de 1 en 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
de 2 en 2		1	3	6	10	**15**	21	28	36	45	55	66	78	91	105
de 3 en 3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455
de 4 en 4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
					1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
						1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
							1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
								1	9	45	165	495	1287	3003	6435
									1	10	55	220	715	2002	5005
										1	11	66	286	1001	3003
											1	12	78	364	1365
												1	13	91	455
													1	14	105
														1	15
															1

Tabla 19

Misma que en notación moderna equivaldría a decir:

	# DE COSAS														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C_0^0	$C_1^0 = C_1^1$	$C_2^0 = C_2^2$	$C_3^0 = C_3^3$	$C_4^0 = C_4^4$	$C_5^0 = C_5^5$	$C_6^0 = C_6^6$	$C_7^0 = C_7^7$	$C_8^0 = C_8^8$	$C_9^0 = C_9^9$	$C_{10}^0 = C_{10}^{10}$	$C_{11}^0 = C_{11}^{11}$	$C_{12}^0 = C_{12}^{12}$	$C_{13}^0 = C_{13}^{13}$	$C_{14}^0 = C_{14}^{14}$	$C_{15}^0 = C_{15}^{15}$
de 1 en 1	$C_1^1 = C_1^0$	$C_2^1 = C_2^1$	$C_3^1 = C_3^2$	$C_4^1 = C_4^3$	$C_5^1 = C_5^4$	$C_6^1 = C_6^5$	$C_7^1 = C_7^6$	$C_8^1 = C_8^7$	$C_9^1 = C_9^8$	$C_{10}^1 = C_{10}^9$	$C_{11}^1 = C_{11}^{10}$	$C_{12}^1 = C_{12}^{11}$	$C_{13}^1 = C_{13}^{12}$	$C_{14}^1 = C_{14}^{13}$	$C_{15}^1 = C_{15}^{14}$
de 2 en 2		$C_2^2 = C_2^0$	$C_3^2 = C_3^1$	$C_4^2 = C_4^2$	$C_5^2 = C_5^3$	$C_6^2 = C_6^4$	$C_7^2 = C_7^5$	$C_8^2 = C_8^6$	$C_9^2 = C_9^7$	$C_{10}^2 = C_{10}^8$	$C_{11}^2 = C_{11}^9$	$C_{12}^2 = C_{12}^{10}$	$C_{13}^2 = C_{13}^{11}$	$C_{14}^2 = C_{14}^{12}$	$C_{15}^2 = C_{15}^{13}$
de 3 en 3			$C_3^3 = C_3^0$	$C_4^3 = C_4^1$	$C_5^3 = C_5^2$	$C_6^3 = C_6^3$	$C_7^3 = C_7^4$	$C_8^3 = C_8^5$	$C_9^3 = C_9^6$	$C_{10}^3 = C_{10}^7$	$C_{11}^3 = C_{11}^8$	$C_{12}^3 = C_{12}^9$	$C_{13}^3 = C_{13}^{10}$	$C_{14}^3 = C_{14}^{11}$	$C_{15}^3 = C_{15}^{12}$
de 4 en 4				$C_4^4 = C_4^0$	$C_5^4 = C_5^1$	$C_6^4 = C_6^2$	$C_7^4 = C_7^3$	$C_8^4 = C_8^4$	$C_9^4 = C_9^5$	$C_{10}^4 = C_{10}^6$	$C_{11}^4 = C_{11}^7$	$C_{12}^4 = C_{12}^8$	$C_{13}^4 = C_{13}^9$	$C_{14}^4 = C_{14}^{10}$	$C_{15}^4 = C_{15}^{11}$
					$C_5^5 = C_5^0$	$C_6^5 = C_6^1$	$C_7^5 = C_7^2$	$C_8^5 = C_8^3$	$C_9^5 = C_9^4$	$C_{10}^5 = C_{10}^5$	$C_{11}^5 = C_{11}^6$	$C_{12}^5 = C_{12}^7$	$C_{13}^5 = C_{13}^8$	$C_{14}^5 = C_{14}^9$	$C_{15}^5 = C_{15}^{10}$
						$C_6^6 = C_6^0$	$C_7^6 = C_7^1$	$C_8^6 = C_8^2$	$C_9^6 = C_9^3$	$C_{10}^6 = C_{10}^4$	$C_{11}^6 = C_{11}^5$	$C_{12}^6 = C_{12}^6$	$C_{13}^6 = C_{13}^7$	$C_{14}^6 = C_{14}^8$	$C_{15}^6 = C_{15}^9$
							$C_7^7 = C_7^0$	$C_8^7 = C_8^1$	$C_9^7 = C_9^2$	$C_{10}^7 = C_{10}^3$	$C_{11}^7 = C_{11}^4$	$C_{12}^7 = C_{12}^5$	$C_{13}^7 = C_{13}^6$	$C_{14}^7 = C_{14}^7$	$C_{15}^7 = C_{15}^8$
								$C_8^8 = C_8^0$	$C_9^8 = C_9^1$	$C_{10}^8 = C_{10}^2$	$C_{11}^8 = C_{11}^3$	$C_{12}^8 = C_{12}^4$	$C_{13}^8 = C_{13}^5$	$C_{14}^8 = C_{14}^6$	$C_{15}^8 = C_{15}^7$
									$C_9^9 = C_9^0$	$C_{10}^9 = C_{10}^1$	$C_{11}^9 = C_{11}^2$	$C_{12}^9 = C_{12}^3$	$C_{13}^9 = C_{13}^4$	$C_{14}^9 = C_{14}^5$	$C_{15}^9 = C_{15}^6$
										$C_{10}^{10} = C_{10}^0$	$C_{11}^{10} = C_{11}^1$	$C_{12}^{10} = C_{12}^2$	$C_{13}^{10} = C_{13}^3$	$C_{14}^{10} = C_{14}^4$	$C_{15}^{10} = C_{15}^5$
											$C_{11}^{11} = C_{11}^0$	$C_{12}^{11} = C_{12}^1$	$C_{13}^{11} = C_{13}^2$	$C_{14}^{11} = C_{14}^3$	$C_{15}^{11} = C_{15}^4$
												$C_{12}^{12} = C_{12}^0$	$C_{13}^{12} = C_{13}^1$	$C_{14}^{12} = C_{14}^2$	$C_{15}^{12} = C_{15}^3$
													$C_{13}^{13} = C_{13}^0$	$C_{14}^{13} = C_{14}^1$	$C_{15}^{13} = C_{15}^2$
														$C_{14}^{14} = C_{14}^0$	$C_{15}^{14} = C_{15}^1$

Tabla 20

$C_{15}^{15} =$
C_{15}^{0}

La forma en que Montmort utiliza el triángulo se puede aclarar con el siguiente ejemplo: ¿De cuántas maneras podemos tomar grupos de objetos de dos en dos, de un conjunto de seis? $C_6^2 = C_6^4 = 15$, que se obtiene de cruzar la columna de seis cosas con la fila de dos en dos, datos que aparecen en las dos tablas anteriores.

Pero no debemos de perder de vista que las particiones que generan los diferentes conjuntos de dados están representadas por las horizontales de los respectivos triángulos presentados antes. Por ejemplo, cuando se tienen tres dados el número de particiones que se generan para el 3, 4, 5, 6, ..., 18, son las cantidades 1,3, 6, 10, 15, respectivamente, y resulta que esos números son los mismos que se generan en la tercera horizontal de los triángulos de Pascal. Y una de las preguntas que nos hacemos es ¿cómo encontrar las particiones de un número determinado, con un conjunto determinado de dados? es decir, ¿cómo encuentro las particiones de un determinado número usando n dados, sin tener que desarrollar todo el triángulo pero siguiendo los principios combinatorios que nos marcan los triángulos de Pascal? La primera respuesta la encontramos en Montmort cuando escribe lo siguiente:

> **Al tirar al azar un número cualquiera *d* de dados, cuyo número de caras es *f*, también cualquiera, las posibilidades que existen de lograr tal o tal punto *p* a voluntad, se encuentran de la siguiente manera:**

> "Sea p-d+1 = q, y sea designado por esta notación arbitraria $\boxed{q}$ el número figurado del orden d, que corresponde a q, se dirá, el primer número del orden d, si q=1; y el segundo del orden d, si q=2; y el tercero si q=3, etc..
>
> La fórmula $\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ + $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}-\frac{d(d-1)(d-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times\boxed{q-3f}+$
> $\frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times\boxed{q-4f}-$etc., expresa el número buscado".

La manera en que Montmort expone la fórmula es vaga, aún dentro de la forma en que se escribían las matemáticas en el siglo XVIII. Entonces, para una mejor comprensión de la expresión, presentamos algunos ejemplos que ilustran el comportamiento de los términos de la fórmula.

Para dos dados tradicionales (d = 2, f = 6)

Si tenemos dos conjuntos, y cada uno es de los números {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,….}, y de ellos tomamos combinaciones de dos en dos, esto es, un elemento de cada conjunto, entonces el número de ellos estaría dado en los valores del triángulo de Pascal, como lo demuestra la tabla siguiente:

Σ=2	Σ=3	Σ=4	Σ=5	Σ=6	Σ=7	Σ=8	Σ=9	Σ=10	Σ=11	Σ=12	Σ=..
1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6	1+7	1+8	1+9	1+10	1+11	…
	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1	10+1	11+1	…
		2+2	2+3	2+4	2+5	2+6	2+7	2+8	2+9	2+10	…
			3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2	10+2	…
				3+3	3+4	3+5	3+6	3+7	3+8	3+9	…
					4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3	…
						4+4	4+5	4+6	4+7	4+8	…
							5+4	6+4	7+4	8+4	…
								5+5	5+6	5+7	…
									6+5	7+5	…
										6+6	…
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Tabla 21

Sin embargo, lo que necesitamos son las combinaciones de 2 dados de 6 caras cada uno, entonces los conjuntos a combinarse consisten sólo de {1, 2, 3, 4, 5, 6}, por lo que es necesario quitar de la tabla aquellas particiones no existentes para los dados (la parte sombreada). Para ello Montmort menciona que los resultados para dos dados coinciden en su totalidad con los valores del triángulo de Pascal (la parte sin sombra), para aquellos valores donde el número de caras (f = 6) es mayor o igual a p-d+1.

Cuando el número de caras (*f* = 6) es menor a p-d+1, es necesario sustraer de los valores del triángulo de Pascal, aquellas particiones no existentes cuando se tiran ***d*** dados de seis caras. Que en este caso serían 7+1, 1+7 (2 casos para cuando la suma es 8); 8+1, 1+8, 7+2, 2+7 (4 casos para cuando la suma es 9); 9+1, 1+9, 8+2, 2+8, 7+3, 3+7 (6 casos para cuando la suma es 10); 10+1, 1+10, 9+2, 2+9, 8+3, 3+8, 7+4, 4+7 (8 casos para cuando la suma es 11); 10+2, 2+10, 9+3, 3+9, 8+4, 4+8, 7+5, 5+7, 11+1, 1+11 (10 casos para cuando la suma es 12).

No. a lograr (p)	p-d+1=q	De Pascal $\boxed{q}$	Maneras de lograrlo
2	2-2+1=1	1	$\boxed{q} = 1$
3	3-2+1=2	2	$\boxed{q} = 2$
4	4-2+1=3	3	$\boxed{q} = 3$
5	5-2+1=4	4	$\boxed{q} = 4$
6	6-2+1=5	5	$\boxed{q} = 5$
7	7-2+1=6	6	$\boxed{q} = 6$
8	8-2+1=7	7	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f} = \boxed{7}$ - (2 x $\boxed{7-6}) = 7-(2x1) = 5$
9	9-2+1=8	8	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f} = \boxed{8}$ - (2 x $\boxed{8-6}) = 8-(2x2) = 4$
10	10-2+1=9	9	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f} = \boxed{9}$ - (2 x $\boxed{9-6}) = 9-(2x3) = 3$
11	11-2+1=10	10	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f} = \boxed{10}$ - (2 x $\boxed{10-6}) = 10-(2x4) = 2$
12	12-2+1=11	11	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f} = \boxed{11}$ - (2 x $\boxed{11-6}) = 11-(2x5) = 1$
		66	36

Tabla 22

El número buscado de la Proposición XVI se obtiene entonces, a partir de los números del triángulo de Pascal, quitando y añadiendo los casos sobrantes y faltantes. En el caso de los dados es necesario considerar que se tiene un número determinado de caras, y que por ello también existe un número máximo para lo que suman todos los puntos, por ejemplo: de dos dados tradicionales el número máximo que se puede lograr es el 12, y por tanto, todos aquellos valores mayores a 12, habrán que sustraerse. Que en la fórmula sería $\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$, véase la última columna de la tabla anterior.

Para tres dados tradicionales (d = 3, f = 6)

De manera análoga, si tenemos tres conjuntos y cada uno tiene a los números naturales {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,….} y de ellos tomamos las combinaciones, de tres en tres (esto es, un elemento de cada conjunto), entonces el número de ellos estaría dado en los valores del triángulo de Pascal (en la tabla, que aunque se cuentan, no se muestran casos como 1+3+1, 3+1+1, etc.).

Σ=3	Σ=4	Σ=5	Σ=6	Σ=7	Σ=8	Σ=9	Σ=10	Σ=11	Σ=12	Σ=13	Σ=14	Σ=15	Σ=16	Σ=17	Σ=18
1+1+1	1+1+2	1+1+3	1+1+4	1+1+5	1+1+6	1+1+7	1+1+8	1+1+9	1+1+10	1+1+11	1+1+12	1+1+13	1+1+14	1+1+15	1+1+16
		1+2+2	1+2+3	1+2+4	1+2+5	1+2+6	1+2+7	1+2+8	1+2+9	1+2+10	1+2+11	1+2+12	1+2+13	1+2+14	1+2+17
				1+3+3	1+3+4	1+3+5	1+3+6	1+3+7	1+3+8	1+3+9	1+3+10	1+3+11	1+3+12	1+3+13	1+3+14
						1+4+4	1+4+5	1+4+6	1+4+7	1+4+8	1+4+9	1+4+10	1+4+11	1+4+12	1+4+13
								1+5+5	1+5+6	1+5+7	1+5+8	1+5+9	1+5+10	1+5+11	1+5+12
										1+6+6	1+6+7	1+6+8	1+6+9	1+6+10	1+6+11
			2+2+2	2+2+3	2+2+4	2+2+5	2+2+6	2+2+7	2+2+8	2+2+9	2+2+10	2+2+11	2+2+12	2+2+13	2+2+14
					2+3+3	2+3+4	2+3+5	2+3+6	2+3+7	2+3+8	2+3+9	2+3+10	2+3+11	2+3+12	2+3+13
							2+4+4	2+4+5	2+4+6	2+4+7	2+4+8	2+4+9	2+4+10	2+4+11	2+4+12
									2+5+5	2+5+6	2+5+7	2+5+8	2+5+9	2+5+10	2+5+11
											2+6+6	2+6+7	2+6+8	2+6+9	2+6+10
						3+3+3	3+3+4	3+3+5	3+3+6	3+3+7	3+3+8	3+3+9	3+3+10	3+3+11	3+3+12
								3+4+4	3+4+5	3+4+6	3+4+7	3+4+8	3+4+9	3+4+10	3+4+11
										3+5+5	3+5+6	3+5+7	3+5+8	3+5+9	3+5+10
												3+6+6	3+6+7	3+6+8	3+6+9
									4+4+4	4+4+5	4+4+6	4+4+7	4+4+8	4+4+9	4+4+10
											4+5+5	4+5+6	4+5+7	4+5+8	4+5+9
													4+6+6	4+6+7	4+6+8
												5+5+5	5+5+6	5+5+7	5+5+8
														5+6+6	5+6+7
															6+6+6
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136

Tabla 23

Dado que los conjuntos consisten sólo de seis elementos {1, 2, 3, 4, 5, 6}, es necesario que quitemos aquellas particiones no existentes $\boxed{q}$ - d × $\boxed{q-f}$, así como añadir las faltantes

+ $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}$ (lo sombreado se quita). Entonces la última columna de la tabla muestra la expresión de Montmort:

Número a lograr (p)	p-d+1=q	De Pascal $\boxed{q}$	Maneras de lograrlo
3	3-3+1=1	1	$\boxed{q}$ = 1
4	4-3+1=2	3	$\boxed{q}$ = 3
5	5-3+1=3	6	$\boxed{q}$ = 6
6	6-3+1=4	10	$\boxed{q}$ = 10
7	7-3+1=5	15	$\boxed{q}$ = 15
8	8-3+1=6	21	$\boxed{q}$ = 21
9	9-3+1=7	28	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ = $\boxed{7}$ - (3 x $\boxed{7-6}$) = 28 − (3*x*1) = 25
10	10-3+1=8	36	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ = $\boxed{8}$ - (3 x $\boxed{8-6}$) = 36 − (3*x*3) = 27
11	11-3+1=9	45	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ = $\boxed{9}$ - (3 x $\boxed{9-6}$) = 45 − (3*x*6) = 27
12	12-3+1=10	55	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ = $\boxed{10}$ - (3 x $\boxed{10-6}$) = 55 − (3*x*10) = 25
13	13-3+1=11	66	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ = $\boxed{11}$ - (3 x $\boxed{11-6}$) = 66 − (3*x*15) = 21
14	14-3+1=12	78	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ = $\boxed{12}$ - (3 x $\boxed{12-6}$) = 78 − (3*x*21) = 15
15	15-3+1=13	91	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ + $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}$ = $\boxed{13}$ - (3 × $\boxed{13-6}$) + (3 × $\boxed{13-12}$) =91−(3×28)+(3×1)=10
16	16-3+1=14	105	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ + $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}$ = $\boxed{14}$ - (3 × $\boxed{14-6}$) + (3 × $\boxed{14-12}$) =105−(3×36)+(3×3)=6
17	17-3+1=15	120	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ + $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}$ = $\boxed{15}$ - (3 × $\boxed{15-6}$) + (3 × $\boxed{15-12}$) =120−(3×45)+(3×6)=3
18	18-3+1=16	136	$\boxed{q}$ - d x $\boxed{q-f}$ + $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}$ = $\boxed{16}$ - (3 × $\boxed{16-6}$) + (3 × $\boxed{16-12}$) =136−(3×55)+(3×10)=1

Tabla 24

Y como ejemplo final de la fórmula de Montmort mostramos el número de tiradas que existen para lograr cada número posible con 8 dados tradicionales:

Número a lograr		De Pascal		Maneras de lograrlo
8	48	1		1
9	47	8		8
10	46	36		36
11	45	120		120
12	44	330		330
13	43	792		792
14	42	1716	1716-(8x1)	1708
15	41	3432	3432-(8x8)	3368
16	40	6435	6435-(8x36)	6147
17	39	11440	11440-(8x120)	10480
18	38	19448	19448-(8x330)	16808
19	37	31824	31824-(8x792)	25488
20	36	50388	50388-(8x1716)+(28x1)	36688
21	35	77520	77520-(8x3432)+(28x8)	50288
22	34	116280	116280-(8x6435)+(28x36)	65808
23	33	170544	170544-(8x11440)+(28x120)	82384
24	32	245157	245157-(8x19448)+(28x330)	98813
25	31	346104	346104-(8x31824)+(28x792)	113688
26	30	480700	480700-(8x50388)+(28x1716)-(56x1)	125588
27	29	657800	657800-(8x77520)+(28x3432)-(56x8)	133288
28	28	888030	888030-(8x116280)+(28x6435)-(56x36)	135954

Tabla 25

De la tabla observamos que por ejemplo que existen 1708 maneras de lograr al número 14 o 42 con 8 dados.

Hemos mostrado tres ejemplos de cómo se comporta la fórmula de Montmort, pero la explicación más analítica y a la vez más comprensible la proporcionamos al presentar el trabajo de Euler en el siguiente capítulo; y antes de finalizar con los ejemplos, mostraremos de manera más explícita la fórmula de Montmort y su relación con las diagonales del triángulo de Pascal.

Para el caso de los dos dados, nótese que la diagonal sombreada en el siguiente triángulo, corresponde precisamente a los números de particiones:

									1									
								1		**1**								
							1		**2**		1							
						1		**3**		3		1						
					1		**4**		6		4		1					
				1		**5**		10		10		5		1				
			1		**6**		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Tabla 26

Así, la fórmula de Montmort pretende obtener las particiones de cualquier número S, con n dados, sin tener que calcular todo el triángulo; por ejemplo, cuando S = 32 y n = 7, entonces la cantidad de particiones para el 32 con 7 dados es:

$$\mathrm{C}_7^0\mathrm{C}_{31}^6 - \mathrm{C}_7^1\mathrm{C}_{25}^6 + \mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{19}^6 - \mathrm{C}_7^3\mathrm{C}_{13}^6 + \mathrm{C}_7^4\mathrm{C}_7^6$$

y esto es el equivalente de la fórmula de Montmort

$$\boxed{q} - \mathrm{d} \times \boxed{q-f} + \frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f} - \frac{d(d-1)(d-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times\boxed{q-3f}$$

que nos muestra que le tenemos que quitar y poner particiones para obtener el resultado.

CAPÍTULO III.

La infinita imaginación de Euler sobre lo finito

En los dos capítulos anteriores ya escribimos sobre algunos desarrollos de las primeras cuestiones donde se involucran intrínsecamente a las particiones de un entero positivo. Es claro que sólo a partir de los trabajos de Bernoulli y Montmort se lograron algunos resultados de carácter más general. Por un lado Bernoulli sienta las bases para que el cálculo combinatorio proporcionara los elementos que se requerirían más adelante; y por el otro, Montmort proporciona una forma que permite calcular las particiones de un número con una cantidad *n* fija de sumandos (tomados por ejemplo de *n* dados), sin tener que calcular todo el polinomio generado o el triángulo de Pascal. Aunque es importante recordar que esta aportación de Montmort es parcial, ya que su exposición, aunque sí logra un resultado de carácter general, lo obtiene a través de métodos más empíricos, y como se vio en el capítulo 2, la fórmula que enuncia en su obra es muy confusa.

Para mediados del siglo XVIII el trabajo con particiones ya adquiere un desarrollo propio, es decir, las particiones ya no serían un elemento complementario o coincidente de las recientes teorías, la de probabilidad y del cálculo combinatorio. A partir de estas fechas las particiones empezarán a establecerse como un paradigma en las matemáticas, con resultados sorprendentes, y plenamente vigente hasta la actualidad. Y quien se encargó de llevarlas por este camino de la consolidación fue Leonhard Euler.

Los problemas de Philippe Naudé

Por los datos históricos parece que el interés de Euler por el tema de las particiones surgió de una carta que Philippe Naudé (1684-1747) le envió el 4 de septiembre de 1740. En ella, entre otras cosas, le preguntó sobre el número de formas diferentes en que un número entero positivo *m* podría expresarse como la suma de *n* sumandos naturales distintos (y también cuando no fueran distintos).

Ya sabemos que cuando Euler se interesaba en un tema no lo hacía de manera superficial. No respondía exclusivamente lo que se le preguntaba, con frecuencia se adentraba en los problemas más allá de lo que le exigía la pregunta que se le hacía, y habitualmente llegó a desarrollar verdaderos paradigmas que dieron lugar a nuevas teorías en las ciencias matemáticas. Y en este contexto podemos ver que a partir de las preguntas de Naudé las particiones tomaron su camino de la mano de Euler.

Se conocen —en un primer periodo, hasta 1770— cuatro artículos en donde explícitamente Euler desarrolló sus ideas acerca de las particiones.[15] Son los siguientes:

1) La primera respuesta a las interrogantes de Philippe Naudé se encuentran en el documento E158,[16] originalmente presentado el 6 de Abril de 1741, pero publicado hasta 1751 con el título: *Observationes analyticae variae de combinationibus* ***(Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones).***

2) En el documento con clasificación E101 y publicado en 1748 con el título *Introductio in analysin infinitorum* (Introducción al Análisis de Infinitos). Se encuentra en el capítulo XVI otra versión de lo publicado en el artículo 1). Este capítulo de la *Introductio* tiene como título: ***De las particiones de números*****.**

Cabe señalar que este trabajo aparece en el segundo lugar de la cronología, aun cuando apareció publicado antes que el 1).

3) En 1750 retoma el tema y aporta más progresos en su escrito E191, mismo que apareció publicado en 1753 con el título: *De Partitione numerorum* ***(De las Particiones de números)***.

4) Pasó un largo periodo para que apareciera su artículo E394, que fue presentado en 1768 y publicado en 1770, con el título: *De Partitione numerorum in partes tam*

[15] Existen otros donde trabaja de manera particular el vínculo de los números poligonales con las particiones, y es en uno de ellos donde desarrolló el maravilloso teorema de los números pentagonales. Esto se verá más adelante.

[16] La clasificación E158 se refiere a la que desarrolló Eneström para toda la obra de Euler. A partir de esta clasificación todos sus trabajos se clasifican con un número determinado y una E que le precede.

numero quam specie datas. (***Sobre la partición de números en partes de un cierto tipo de números determinados*).**

En estos documentos *Euler r*esponde también al problema generalizado de encontrar las maneras en que un número dado N puede ser logrado con un número n fijo de dados, cuyas m caras son $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, o incluso cuando los dados son diferentes entre ellos. Y resolver este problema incluiría cualquier caso más específico, como el del juego “Pasadiez” que le fue presentado a Galileo. Euler incluye además una sección sobre los problemas de Fermat -donde propone la utilización de sus métodos no inductivos para demostrar algunos teoremas “elegantes” que hasta ese momento no habían sido demostrados-, que se clasifican en la teoría aditiva de los números poligonales.

La forma en que Euler plantea y resuelve los problemas es, en opinión de Andrews (2007), insuperable en varios de sus párrafos; esta observación y la opinión que le mereció las hemos tomado como propias conforme avanzamos en esta investigación.

CAPÍTULO 3.1

Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones

Recordemos que la motivación de Euler para adentrarse en el tema de las particiones fue responder a las siguientes preguntas:

> "Encontrar de cuántas maneras diferentes un número dado *m* puede ser particionado en μ partes enteras, ya sea iguales o diferentes"

Y otra forma en la que trata dicho cuestionamiento fue a través de una manera inversa, en la cual primero se generan las particiones y después se ve a qué resultado se llega. El enunciado es:

> "Encontrar de cuántas maneras diferentes un número dado *m* puede encontrarse cuando se suman μ números enteros cualesquiera, ya sea iguales o diferentes".

Entonces, la diferencia entre la primera y la segunda forma es que mientras que en la primera se pide encontrar de cuántas formas puedo partir a *m* en μ sumandos, en la segunda se trata de sumar μ números cualesquiera, iguales o diferentes, y ver cuántas de las sumas nos generan a *m*.

Es importante adelantar que el trato que Euler le da al tema en su primer artículo es extenso, y por momentos poco explícito en los objetivos.

Lo primero que hace Euler es proponer funciones que generen a través de sus coeficientes las diferentes formas en las que se pueden elegir 1, 2, 3, 4 o *n* números, iguales o diferentes, tomados –un elemento de cada uno- de entre L conjuntos iguales. Lo que hace en su artículo es lo siguiente.

Comienza por considerar la siguiente expresión y desarrolla cada sumando:

$$P = \frac{az}{1-az} + \frac{bz}{1-bz} + \frac{cz}{1-cz} + \frac{dz}{1-dz} + \frac{ez}{1-ez} + \ldots =$$
$$az + a^2z^2 + a^3z^3 + a^4z^4 + \ldots$$
$$bz + b^2z^2 + b^3z^3 + b^4z^4 + \ldots$$
$$cz + c^2z^2 + c^3z^3 + c^4z^4 + \ldots$$
$$dz + d^2z^2 + d^3z^3 + d^4z^4 + \ldots$$
$$ez + e^2z^2 + e^3z^3 + e^4z^4 + \ldots$$
$$+\ldots$$

y al agrupar los términos según la potencia de z, se tiene que:

$$P = z(a+b+c+d+e+\ldots)+z^2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\ldots)$$
$$+z^3(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\ldots)+z^4(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+\ldots)+\ldots$$

Y al remplazar por

$$A=a+b+c+d+e+\ldots$$
$$B=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\ldots$$
$$C=a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\ldots$$
$$D=a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+\ldots$$
$$E=a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+\ldots$$
$$\ldots$$

Entonces, $P = Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\ldots$.

En forma análoga, si se considera a $Q=\frac{az}{1+az}+\frac{bz}{1+bz}+\frac{cz}{1+cz}+\frac{dz}{1+dz}+\frac{ez}{1+ez}+\ldots$

entonces

$$Q=\frac{az}{1+az}+\frac{bz}{1+bz}+\frac{cz}{1+cz}+\frac{dz}{1+dz}+\frac{ez}{1+ez}+\ldots=$$
$$z(a+b+c+d+e+\ldots)-z^2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\ldots)$$
$$+z^3(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\ldots)-z^4(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+\ldots)+\ldots$$

Y se obtiene que $Q = Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+Ez^5-\ldots$

Ahora, sea el producto $R=(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots$

que al ser desarrollado produce

$$R=(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots$$
$$=1+z(a+b+c+d+e+\ldots)+z^2(ab+ac+bc+ad+bd+\ldots)$$
$$+z^3(abc+abd+bcd+\ldots)+z^4(abcd+\ldots\ldots\ldots.)+\ldots$$

y al considerar que

$$\alpha=a+b+c+d+e+\ldots$$
$$\beta=ab+ac+ad+ae+\ldots+bc+\ldots$$
$$\gamma=abc+abd+abe+\ldots+bcd+\ldots$$
$$\delta=abcd+abce+\ldots+bcde+\ldots$$
$$\varepsilon=abcde+\ldots$$
$$\ldots$$

Se obtiene entonces que $R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + ...$

Y de manera semejante si se considera a:

$S = (1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots$,

y al desarrollar nuevamente los productos se tiene que

$$S = (1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots$$
$$= 1 - z(a+b+c+d+e+...) + z^2(ab+ac+bc+ad+bd+...)$$
$$-z^3(abc+abd+bcd+...) + z^4(abcd+...) - ...$$

y remplazando los factores que multiplican a las potencias de z, se obtiene

$$S = 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + ...$$

Para terminar con las funciones que presenta en el artículo, propone desarrollar los recíprocos de las dos anteriores.

Entonces, si consideramos a

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots}$$

donde cada factor es igual a

$$\frac{1}{(1-az)} = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + a^4z^4 + \ldots$$
$$\frac{1}{(1-bz)} = 1 + bz + b^2z^2 + b^3z^3 + b^4z^4 + \ldots$$
$$\frac{1}{(1-cz)} = 1 + cz + c^2z^2 + c^3z^3 + c^4z^4 + \ldots$$
$$\frac{1}{(1-dz)} = 1 + dz + d^2z^2 + d^3z^3 + d^4z^4 + \ldots$$

…

Y al multiplicar los polinomio generados, y después de la factorización de las potencias de z, se obtiene:

$$\frac{1}{S} = 1 + \mathrm{A}z + \mathrm{B}z^2 + \boldsymbol{C}z^3 + \boldsymbol{D}z^4 + \boldsymbol{E}z^5 + \ldots.$$

Donde

$$\mathrm{A} = a+b+c+d+e+\dots$$
$$\mathrm{B} = a^2+ab+b^2+ac+bc+c^2+\dots$$
$$\mathbf{C} = a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2c+abc+\dots$$
$$\mathbf{D} = a^4+a^3b+a^2b^2+a^2bc+abcd+\dots$$
$$\mathbf{E} = a^5+a^4b+a^3b^2+a^3bc+a^2bcd+\dots$$
$$\dots$$

Y de forma análoga, si se tiene a $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots}$

entonces $\dfrac{1}{R} = 1-\mathrm{A}z+\mathrm{B}z^2-\mathbf{C}z^3+\mathbf{D}z^4-\mathbf{E}z^5+\dots$.

Resumiendo, tenemos hasta ahora que

$A=a+b+c+d+e+\dots$ $B=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\dots$ $C=a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\dots$ $D=a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+\dots$ $E=a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+\dots$ $\dots$	$P=\dfrac{az}{1-az}+\dfrac{bz}{1-bz}+\dfrac{cz}{1-cz}+\dfrac{dz}{1-dz}+\dfrac{ez}{1-ez}+\dots=$ $Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\dots$ $Q=\dfrac{az}{1+az}+\dfrac{bz}{1+bz}+\dfrac{cz}{1+cz}+\dfrac{dz}{1+dz}+\dfrac{ez}{1+ez}+\dots=$ $Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+Ez^5-\dots$
$\alpha=a+b+c+d+e+\dots$ $\beta=ab+ac+ad+ae+bd+\dots$ $\gamma=abc+abd+abe+bcd+\dots$ $\delta=abcd+abce+bcde+\dots$ $\varepsilon=abcde+\dots$ $\dots$	$R=(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots=$ $1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\dots$ $S=(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots=$ $1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4-\varepsilon z^5+\dots$
$\mathrm{A}=a+b+c+d+e+\dots$ $\mathrm{B}=a^2+ab+b^2+ac+bc+c^2+\dots$ $\mathbf{C}=a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2c+abc+\dots$ $\mathbf{D}=a^4+a^3b+a^2b^2+a^2bc+abcd+\dots$ $\mathbf{E}=a^5+a^4b+a^3b^2+a^3bc+a^2bcd+\dots$ $\dots$	$\dfrac{1}{S}=\dfrac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots}=$ $1+\mathrm{A}z+\mathrm{B}z^2+\mathbf{C}z^3+\mathbf{D}z^4+\mathbf{E}z^5+\dots$ $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots}=$ $1-\mathrm{A}z+\mathrm{B}z^2-\mathbf{C}z^3+\mathbf{D}z^4-\mathbf{E}z^5+\dots$

Tabla 27

Es importante notar que Euler con estas funciones generadoras exhibe las formas en las que podemos tomar elementos iguales o diferentes, entre diferentes conjuntos. Es decir, nos muestra cómo puede construir los conjuntos de ordenaciones con repetición, las combinaciones de elementos diferentes y las combinaciones con elementos diferentes o con repetición. Así, la primera columna de la tabla anterior nos indica lo que estamos mencionando, y la siguiente tabla lo esquematiza más claramente:

1. Ordenaciones con repetición tomadas de 1, 2, ..., elementos iguales.	$A=a+b+c+d+e+...$ $B=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+...$ $C=a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+...$ $D=a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+...$ $E=a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+...$ ...	Si la sucesión *a, b, c, d, e, f,...* tiene n elementos, también los tiene A, B, C,…
2. Combinaciones de uno en uno, de dos en dos,…, de r en r.	$\alpha=a+b+c+d+e+...$ $\beta=ab+ac+ad+ae+...+bc+...$ $\gamma=abc+abd+abe+...+bcd+...$ $\delta=abcd+abce+...+bcde+...$ $\varepsilon=abcde+...$ ...	Entonces se tienen C_n^r combinaciones (con r = 1, 2, 3,... ..) según toque a $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...$
3. Combinaciones tomadas de uno en uno, de dos en dos,…, de r en r.	A $=a+b+c+d+e+...$ B $=a^2+ab+b^2+ac+bc+c^2+...$ ***C*** $=a^3+a^2b+ab^2+b^3+a^2c+abc+...$ ***D*** $=a^4+a^3b+a^2b^2+a^2bc+abcd+...$ ***E*** $=a^5+a^4b+a^3b^2+a^3bc+a^2bcd+...$ ...	Combinaciones con 1, 2, 3,...... o *n* elementos donde se puede tener elementos repetidos.

Tabla 28

Después de construir los polinomios para P, Q, R y S ahora Euler se propone la tarea de establecer un vínculo entre los grupos de coeficientes { *a, b, c, d, e, f,...*}, $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...\}$ y { A ,B ,***C,D,E,***... }, y lo hace para mostrar cómo se pueden expresar unos en términos de los otros. La forma en la que construye las relaciones es una muestra de su gran destreza en el manejo de las series. Ahora damos una muestra de cómo lo hizo para establecer las igualdades

$$\begin{aligned}
&A=\alpha\\
&\alpha A-B=2\beta\\
&\beta A-\alpha B+C=3\gamma\\
&\gamma A-\beta B+\alpha C-D=4\delta\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Euler transita por el siguiente razonamiento:

Sea $R=(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots$,

por tanto $\log(R)=\log(1+az)+\log(1+bz)+\log(1+cz)+\log(1+dz)+\log(1+ez)+\cdots$

y diferenciando:

$$\frac{d(\log R)}{dz}=\frac{1}{R}\frac{dR}{dz}=\frac{d}{dz}(\log(1+az)+\log(1+bz)+\log(1+cz)+\log(1+dz)+\cdots)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{R}\frac{dR}{dz}=\frac{a}{1+az}+\frac{b}{1+bz}+\frac{c}{1+cz}+\frac{d}{1+dz}+\frac{e}{1+ez}+\frac{f}{1+fz}+\ldots$$

Que multiplicado por z

$$\frac{z}{R}\frac{dR}{dz}=\frac{az}{1+az}+\frac{bz}{1+bz}+\frac{cz}{1+cz}+\frac{dz}{1+dz}+\frac{ez}{1+ez}+\frac{fz}{1+fz}+\ldots$$

$$\Rightarrow Q=\frac{z}{R}\frac{dR}{dz}.$$

Lo mismo sucede para S:

$$\log(S)=\log(1-az)+\log(1-bz)+\log(1-cz)+\log(1-dz)+\log(1-ez)+\cdots$$

$$\frac{d(\log S)}{dz}=\frac{1}{S}\frac{dS}{dz}=\frac{d}{dz}(\log(1-az)+\log(1-bz)+\log(1-cz)+\log(1-dz)+\cdots)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{S}\frac{dS}{dz}=-\frac{a}{1-az}-\frac{b}{1-bz}-\frac{c}{1-cz}-\frac{d}{1-dz}-\frac{e}{1-ez}-\frac{f}{1-fz}-\ldots$$

Que multiplicado por z

$$\frac{z}{S}\frac{dS}{dz}=-\frac{az}{1-az}-\frac{bz}{1-bz}-\frac{cz}{1-cz}-\frac{dz}{1-dz}-\frac{ez}{1-ez}-\frac{fz}{1-fz}-\ldots$$

$$\Rightarrow P=\frac{-z}{S}\frac{dS}{dz}.$$

Por otro lado sabemos que

$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + ...$, y $\dfrac{dR}{dz} = \alpha + 2\beta z + 3\gamma z^2 + 4\delta z^3 + ...$

Que multiplicado por z

$\dfrac{zdR}{dz} = \alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + ... \Rightarrow si\ Q = \dfrac{zdR}{Rdz}$ = entonces

Q= $\dfrac{\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + ...}{1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + ...}$

Pero además sabemos que

$Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - ...$

$Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - ... = \dfrac{\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + ...}{1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + ...}$

$\Rightarrow (Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - ...)(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + ...) =$

$\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + ...$

Multiplicando término a término

$$\begin{array}{l}
Az - Bz^2 \quad + Cz^3 \quad - Dz^4 \quad + Ez^5 \quad - ... \\
\qquad + \alpha Az^2 - \alpha Bz^3 + \alpha Cz^4 - \alpha Dz^5 + \alpha Ez^6 - ... \\
\qquad\qquad + \beta Az^3 - \beta Bz^4 + \beta Cz^5 - \beta Dz^6 + \beta Ez^7 - ... \\
\qquad\qquad\qquad + \gamma Az^4 - \gamma Bz^5 + \gamma Cz^6 - \gamma Dz^7 + \gamma Ez^8 - ...
\end{array}$$

...

Y comparando ambos lados de la igualdad tenemos efectivamente que

$A = \alpha$

$\alpha A - B = 2\beta$

$\beta A - \alpha B + C = 3\gamma$

$\gamma A - \beta B + \alpha C - D = 4\delta$

...

De manera semejante construye las relaciones

$\alpha - \mathrm{A} = 0$

$\beta - \mathrm{A}\,\alpha + \mathrm{B} = 0$

$+\gamma - \mathrm{A}\,\beta + \mathrm{B}\,\alpha - \boldsymbol{C} = 0$

$+\delta - \mathrm{A}\,\gamma + \mathrm{B}\,\beta - \boldsymbol{C}\,\alpha + \boldsymbol{D} = 0$

...

Y también

$\mathsf{A}\,,= A$

$2\mathsf{B} = \mathsf{A}A + B$

$3\boldsymbol{\mathsf{C}} = \mathsf{B}A + \mathsf{A}\,,B + C$

$4\boldsymbol{\mathsf{D}} = \boldsymbol{\mathsf{C}}\,A + \mathsf{B}B + \mathsf{A}C + D$

$5\boldsymbol{\mathsf{E}} = \boldsymbol{\mathsf{D}}\,A + \boldsymbol{\mathsf{C}}\,B + \mathsf{B}C + \mathsf{A}D + E$

$\ldots$

Y para terminar de establecer las relaciones entre los polinomios, construye diversas identidades exclusivamente para los polinomios R y S

$$R = (1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots$$

$$S = (1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots$$

$R = (1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez)\cdots$	$S = (1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez)\cdots$
$R = 1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots$	$S = 1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4-\ldots$
$R = \dfrac{1}{1-\mathsf{A}z+\mathsf{B}z^2-\boldsymbol{\mathsf{C}}\,z^3+\boldsymbol{\mathsf{D}}\,z^4-\boldsymbol{\mathsf{E}}\,z^5+\ldots}$	$S = \dfrac{1}{1+\mathsf{A}z+\mathsf{B}z^2+\boldsymbol{\mathsf{C}}\,z^3+\boldsymbol{\mathsf{D}}\,z^4+\boldsymbol{\mathsf{E}}\,z^5+\ldots}$
$R = \dfrac{\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots}{\mathsf{A}z-\mathsf{B}z^2+\boldsymbol{\mathsf{C}}\,z^3-\boldsymbol{\mathsf{D}}\,z^4+\boldsymbol{\mathsf{E}}\,z^5-\ldots}$	$S = \dfrac{-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4+\ldots}{-\mathsf{A}z-\mathsf{B}z^2-\boldsymbol{\mathsf{C}}\,z^3-\boldsymbol{\mathsf{D}}\,z^4-\boldsymbol{\mathsf{E}}\,z^5-\ldots}$
$R = \dfrac{\alpha z+2\beta z^2+3\gamma z^3+4\delta z^4+\ldots}{Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+Ez^5-\ldots}$	$S = \dfrac{-\alpha z+2\beta z^2-3\gamma z^3+4\delta z^4+\ldots}{-Az-Bz^2-Cz^3-Dz^4-Ez^5-\ldots}$
$R = \dfrac{Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+Ez^5-\ldots}{\mathsf{A}z-2\mathsf{B}z^2+3\boldsymbol{\mathsf{C}}\,z^3-4\boldsymbol{\mathsf{D}}\,z^4+5\boldsymbol{\mathsf{E}}\,z^5+\ldots}$	$S = \dfrac{-Az-Bz^2-Cz^3-Dz^4-Ez^5-\ldots}{-\mathsf{A}z-2\mathsf{B}z^2-3\boldsymbol{\mathsf{C}}\,z^3-4\boldsymbol{\mathsf{D}}\,z^4-5\boldsymbol{\mathsf{E}}\,z^5-\ldots}$

Tabla 29

Hasta ahora lo que ha hecho Euler es exhibir una manera de generar las ordenaciones y combinaciones de un conjunto a través de funciones generadoras, y también establecer relaciones entre los coeficientes de los polinomios generadores. En la sección que sigue los polinomios fundamentales para dar respuesta a los problemas de Naudé son el R y el S.

3.1.2 Soluciones al primer problema de Naudé

Ya vimos en la primera sección de este capítulo que Euler construyó polinomios cuyos coeficientes determinan las maneras en las que se pueden seleccionar grupos de elementos con ciertas cardinalidades, y cuyos elementos sean iguales o diferentes. Pero hasta este momento aún no se han vinculado estos polinomios con las particiones de un entero, los resultados dados por Euler se han enmarcado más en el cálculo combinatorio. Pero no se requieren grandes modificaciones a lo antes expuesto para que nos adentre en las particiones de un entero, y esto lo hará a través de los polinomios R y S.

Con base en los desarrollos anteriores, si se considera el caso en que

$$\{a,b,c,d,e,\ldots\}=\{n^1,n^2,n^3,n^4,n^5,n^6,\ldots\}$$

entonces se tienen las siguientes equivalencias en los polinomios ya conocidos P, Q, R, S:

$A=n+n^2+n^3+n^4+n^5+\ldots=\frac{n}{1-n}$ $B=n^2+n^4+n^6+n^8+n^{10}+\ldots=\frac{n^2}{1-n^2}$ $C=n^3+n^6+n^9+n^{12}+n^{15}+\ldots=\frac{n^3}{1-n^3}$ $D=n^4+n^8+n^{12}+n^{16}+n^{20}+\ldots=\frac{n^4}{1-n^4}$ $E=n^5+n^{10}+n^{15}+n^{20}+n^{25}+\ldots=\frac{n^5}{1-n^5}$ $\ldots$	$P=\frac{n^1z}{1-n^1z}+\frac{n^2z}{1-n^2z}+\frac{n^3z}{1-n^3z}+\frac{n^4z}{1-n^4z}+\ldots=$ $Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\ldots$ $Q=\frac{n^1z}{1+n^1z}+\frac{n^2z}{1+n^2z}+\frac{n^3z}{1+n^3z}+\frac{n^4z}{1+n^4z}+\ldots=$ $Az-Bz^2+Cz^3-Dz^4+Ez^5-\ldots$
$\underline{\alpha=n+n^2+n^3+n^4+n^5+\ldots}$ $\underline{\beta=n^1n^2+n^1n^3+n^1n^4+n^1n^5+\ldots+n^2n^3+\ldots}=$ $n^3+n^4+2n^5+2n^6+3n^7+3n^8+4n^9+4n^{10}+\ldots$ $\gamma=n^1n^2n^3+n^1n^2n^4+n^1n^2n^5+\ldots+n^2n^3n^4+\ldots=$ $\underline{n^6+n^7+2n^8+3n^9+4n^{10}+5n^{11}+7n^{12}+\ldots}$ $\delta=n^1n^2n^3n^4+n^1n^2n^3n^5+\ldots+n^2n^3n^4n^5+\ldots=$ $\underline{n^{10}+n^{11}+2n^{12}+3n^{13}+5n^{14}+6n^{15}+9n^{16}+\ldots}$ $\varepsilon=n^1n^2n^3n^4n^5+\ldots=$ $\underline{n^{15}+n^{16}+2n^{17}+3n^{18}+5n^{19}+7n^{20}+10n^{21}+\ldots}$ $\underline{\varsigma=n^{21}+n^{22}+2n^{23}+3n^{24}+5n^{25}+7n^{26}+11n^{27}+\ldots}$ $\underline{\eta=n^{28}+n^{29}+2n^{30}+3n^{31}+5n^{32}+7n^{33}+11n^{34}+\ldots}$ $\ldots$	$R=(1+n^1z)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\cdots=$ $1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\varepsilon z^5+\varsigma z^6+\eta z^7+\ldots$ $S=(1-n^1z)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)\cdots=$ $1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4-\varepsilon z^5+\varsigma z^6-\eta z^7+\ldots$

$\mathrm{A} = n^1 + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + ..$ $\mathrm{B} = n^2 + n^1n^2 + n^4 + n^1n^3 + n^2n^3 + n^6 + ...$ $\boldsymbol{C} = n^3 + n^2n^2 + n^1n^4 + n^6 + n^2n^3 + n^1n^2n^3 + ...$ $\boldsymbol{D} = n^4 + n^3n^2 + n^2n^4 + n^2n^2n^3 + n^1n^2n^3n^4 + ...$ $\boldsymbol{E} = n^5 + n^4n^2 + n^3n^4 + n^3n^2n^3 + n^2n^2n^3n^4 + ...$ ...	$\frac{1}{S} = \frac{1}{(1-n^1z)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)\cdots} =$ $1 + \mathrm{A}z + \mathrm{B}z^2 + \boldsymbol{C}z^3 + \boldsymbol{D}z^4 + \boldsymbol{E}z^5 + ...$ $\frac{1}{R} = \frac{1}{(1+n^1z)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\cdots} =$ $1 - \mathrm{A}z + \mathrm{B}z^2 - \boldsymbol{C}z^3 + \boldsymbol{D}z^4 - \boldsymbol{E}z^5 + ...$

Tabla 30

Es muy importante observar que sobre la nueva forma en que se desarrollan las series de coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...$, Euler puntualiza lo siguiente:

> En todas estas series, el coeficiente de cada potencia de n [en lo subrayado] indica de cuántas maneras diferentes el exponente de n puede ser logrado de tantas partes diferentes como la serie se numera desde la primera. En otras palabras, el coeficiente de cualquier término indica de cuántas maneras el exponente de n puede ser logrado de la adición de tantos números enteros diferentes entre ellos, como la posición de la serie del cuál el término se toma, se numera comenzando con α .[17]

Para aclarar lo mencionado, Euler muestra que los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...$ contienen a los enteros que se generan con particiones de 1, 2, 3, 4, ... sumandos, es decir, de manera ordenada se crean las particiones con 1, 2, 3, 4, ... sumandos sin importar qué números se emplean en ellas, y lo que indican las potencias de Z son precisamente las cantidades de sumandos por partición, y entonces $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...$ muestran a los números generados, así como a las cantidades de particiones para cada uno de ellos.

De esto Euler da el siguiente ejemplo:

> … Entonces, en la séptima serie
>
> [$\underline{\eta = n^{28} + n^{29} + 2n^{30} + 3n^{31} + 5n^{32} + 7n^{33} + 11n^{34} + ...}$]
>
> el coeficiente de la potencia n^{34} es 11, y es así porque el número 34 puede ser representado con siete partes (sumandos) diferentes [como lo indica la potencia de z en el término ηz^7 del polinomio R], y de once maneras; las representaciones son:

[17] Euler, Leonhard. [1751].

34=1+2+3+4+5+6+13,

34=1+2+3+4+5+7+12,

34=1+2+3+4+5+8+11,

34=1+2+3+4+5+9+10,

34=1+2+3+4+6+7+11,

34=1+2+3+4+6+8+10,

34=1+2+3+4+7+8+9,

34=1+2+3+5+6+7+10,

34=1+2+3+5+6+8+9,

34=1+2+4+5+6+7+9,

34=1+3+4+5+6+7+8.

Y es con estos elementos con los que Euler responde al primer problema de Naudé, en un caso particular en que decía: “¿De cuántas maneras diferentes el número 50 puede surgir de la adición de 7 números enteros diferentes?

La serie que responde a este problema -dice Euler- es la de η, pues el coeficiente de cualquier término de ella indica las maneras diferentes en que el exponente *n* puede ser escrito con 7 enteros diferentes; además nótese que los 7 enteros están indicados por el exponente de *z* en ηz^7, que corresponde a uno de los sumandos del polinomio R. Así, del desarrollo de la serie de η —que Euler no incluye— tenemos que:

$$\begin{aligned}\eta = n^{28} + n^{29} + 2n^{30} + 3n^{31} + 5n^{32} + 7n^{33} + 11n^{34} + \\ 15n^{35} + 21n^{36} + 28n^{37} + 38n^{38} + 49n^{39} + 65n^{40} + 82n^{41} + \\ 105n^{42} + 131n^{43} + 164n^{44} + 201n^{45} + 248n^{46} + 300n^{47} + \\ 364n^{48} + 436n^{49} + 522n^{50} + \ldots\end{aligned}$$

y de aquí observamos que el término $522n^{50}$ indica que el número 50 tiene 522 particiones con enteros positivos diferentes, y cada una con 7 sumandos.

Es imposible no reconocer que estos métodos empleados por Euler son extensos y muy laboriosos, y él mismo lo reconoce cuando menciona que “encontrar el coeficiente sería “demasiado cansado””.

Una alternativa para los términos $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...$

Euler ya había mencionado la dificultad que se presentaba al calcular los coeficientes de las potencias de z en el polinomio R, esto es, el conjunto $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...$ Una forma de poder obtener los términos que contienen cada uno de estos coeficientes, sin tener que recurrir a lo anterior, fue a través de tener una función generadora para cada uno de ellos. Aquí podemos ver a un Euler que verdaderamente parece un mago a la hora de manejar las series, pues nos da una exhibición de cómo pasar de las expresiones de $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...$, que son tortuosas e inmanejables, a una función que contiene empaquetados a todos los términos. La forma en que Euler encontró los valores de $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...$ fue expandiendo las diversas fórmulas y usando inducción; pero después consideró necesaria otra manera diferente de demostrarlo, una en que la inducción no tomará parte:

Entonces toma nuevamente los valores $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,...$ que aparecen en la serie

$$R = (1+n^1z)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\cdots = 1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots,$$

después calcula[18] a *R(nz)* en lugar de *R(z)* (Recurso ya conocido en demostraciones anteriores de Euler). Así,

$$R(nz) = (1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)(1+n^5z)\cdots ,$$

y relaciona *R(nz) con R(z)* observando que $R(z) = (1+nz)R(nz) =$

$$1+\alpha nz+\beta n^2z^2+\gamma n^3z^3+\delta n^4z^4+\ldots$$

Entonces, aplicando el mismo principio de $R(z) = (1+nz)R(nz)$ tenemos que, igualando término a término,

$$R = (1+nz)(1+\alpha nz+\beta n^2z^2+\gamma n^3z^3+\delta n^4z^4+\ldots) =$$

$$1+\alpha nz+\beta n^2z^2+\gamma n^3z^3+\delta n^4z^4+\ldots$$

$$nz+\alpha n^2z^2+\beta n^3z^3+\gamma n^4z^4+\delta n^5z^5+\ldots$$

y que sabemos = $1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\ldots$

$$\alpha n+n=\alpha \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{n}{1-n}$$

$$\beta n^2+\alpha n^2=\beta \quad \Rightarrow \beta = \frac{\alpha n^2}{1-n^2} = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)}$$

[18] Recurrimos a la notación de funciones por conveniencia, pues Euler aún no lo hace.

$$\gamma n^3 + \beta n^3 = \gamma \quad \Rightarrow \gamma = \frac{\beta n^3}{1-n^3} = \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$

$$\delta n^4 + \gamma n^4 = \delta \quad \Rightarrow \delta = \frac{\gamma n^4}{1-n^4} = \frac{n^{10}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$

...

Así pues, es de notarse que cualquiera de los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...$ puede ser formado por los anteriores y se dice de ellos que forman series recurrentes.

Y esto es otra manera de encontrar $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, ...,$ multiplicando $\frac{n^1}{1-n^1}$ primero por $\frac{n^2}{1-n^2}$, luego por $\frac{n^3}{1-n^3}$, y así sucesivamente $\frac{n^4}{1-n^4}, ...$

Con ello Euler nos muestra que el problema de Naudé está resuelto mediante una presentación diferente; ahora, el polinomio

$$R = (1+n^1 z)(1+n^2 z)(1+n^3 z)(1+n^4 z)\cdots \quad = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + ...$$

tendrá a lo coeficientes

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$

$$\beta = \frac{\alpha n^2}{1-n^2} = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)}$$

$$\gamma = \frac{\beta n^3}{1-n^3} = \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$

$$\delta = \frac{\gamma n^4}{1-n^4} = \frac{n^{10}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta n^5}{1-n^5} = \frac{n^{15}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)}$$

$$\varsigma = \frac{\varepsilon n^6}{1-n^6} = \frac{n^{21}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)(1-n^6)}$$

$$\eta = \frac{\varsigma n^7}{1-n^7} = \frac{n^{28}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)(1-n^6)(1-n^7)}$$

...

Y para el caso de las particiones del 50 con 7 sumandos cada una —y aunque Euler no lo exprese directamente—, sería llegar mediante la función de η, que como se mencionó con anterioridad, contiene al término $522n^{50}$, que nos dice que el número 50 puede ser logrado de 522 formas diferentes, al sumar 7 números enteros diferentes entre ellos.

Segundo problema de Naudé

La segunda parte del problema es cuando las particiones pueden realizarse con sumandos iguales o diferentes.

Ahora bien, recordemos la última sección de la tabla 30

$\mathsf{A} = n^1+n^2+n^3+n^4+n^5+..$ $\mathsf{B} = n^2+n^1n^2+n^4+n^1n^3+n^2n^3+n^1n^4+...$ $\boldsymbol{C} = n^3+n^2n^2+n^1n^4+n^6+n^2n^3+n^1n^2n^3+...$ $\boldsymbol{D} = n^4+n^3n^2+n^2n^4+n^2n^2n^3+n^1n^2n^3n^4+...$ $\boldsymbol{E} = n^5+n^4n^2+n^3n^4+n^3n^2n^3+n^2n^2n^3n^4+...$ ...	$\frac{1}{S}=\frac{1}{(1-n^1z)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)\cdots}=$ $1+\mathsf{A}z+\mathsf{B}z^2+\boldsymbol{C}z^3+\boldsymbol{D}z^4+\boldsymbol{E}z^5+...$ $\frac{1}{R}=\frac{1}{(1+n^1z)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\cdots}=$ $1-\mathsf{A}z+\mathsf{B}z^2-\boldsymbol{C}z^3+\boldsymbol{D}z^4-\boldsymbol{E}z^5+...$

Si desarrollamos más los valores de $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ ... obtenemos:

$\mathsf{A} = n^1+n^2+n^3+n^4+n^5+..$

$\mathsf{B} = n^2+n^1n^2+n^4+n^1n^3+n^2n^3+n^1n^4+...=$

$n^2+n^3+2n^4+2n^5+3n^6+3n^7+4n^8+4n^9+...$

$\boldsymbol{C} = n^3+n^2n^2+n^1n^4+n^6+n^2n^3+n^1n^2n^3+...=$

$n^3+n^4+2n^5+3n^6+4n^7+5n^8+7n^9+...$

$\boldsymbol{D} = n^4+n^3n^2+n^2n^4+n^2n^2n^3+n^1n^2n^3n^4+...=$

$n^4+n^5+2n^6+3n^7+5n^8+6n^9+9n^{10}+...$

$\boldsymbol{E} = n^5+n^4n^2+n^3n^4+n^3n^2n^3+n^2n^2n^3n^4+...$

...

Y de ellos podríamos ver los coeficiente de cada potencia de n, y así saber de cuántas maneras diferentes el exponente de n puede ser particionado en 2 sumandos iguales o diferentes (el caso de B), en 3 partes iguales o diferentes (el caso de $\boldsymbol{C}$), ….

Ejemplo: el término $7n^9$ de la serie $\boldsymbol{C}$ nos dice que el 9 puede ser particionado en 3 sumandos iguales o diferentes de 7 maneras:

9 = 1+1+7, 9 = 1+4+4,

9 = 1+2+6, 9 = 2+2+5,

9 = 1+3+5, 9 = 2+3+4,

9 = 3+3+3.

Se puede ver entonces que el otro problema que propuso Naudé queda resuelto con estas últimas series.

Pero Euler no dejará expresados a los coeficientes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\ldots$ como series infinitas, de manera semejante a como lo hizo para $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$. También construirá funciones generadoras para ellos. Para esto realiza lo mismo que hizo para R, pero ahora parte de $\frac{1}{S}$:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{(1-n^1 z)(1-n^2 z)(1-n^3 z)(1-n^4 z)\cdots} =$$

$$1 + \mathrm{A} z + \mathrm{B} z^2 + \boldsymbol{C}\, z^3 + \boldsymbol{D}\, z^4 + \boldsymbol{E}\, z^5 + \ldots$$

Considera $\frac{1}{S(nz)}$ en lugar de $\frac{1}{S(z)}$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{(1-n^2 z)(1-n^3 z)(1-n^4 z)(1-n^5 z)\cdots} =$$

$$1 + \mathrm{A} nz + \mathrm{B} n^2 z^2 + \boldsymbol{C}\, n^3 z^3 + \boldsymbol{D}\, n^4 z^4 + \boldsymbol{E}\, n^5 z^5 + \ldots$$

Y relaciona $\frac{1}{S(nz)}$ con $\frac{1}{S(z)}$ observando que $\frac{1}{S(z)} = \frac{1}{S(nz)}\left(\frac{1}{1-nz}\right)$

Multiplicamos la serie $\frac{1}{S(nz)}$ por $1-nz$ y resulta que

$$\frac{1}{S}(1-nz) = \left(1 + \mathrm{A} z + \mathrm{B} z^2 + \boldsymbol{C}\, z^3 + \boldsymbol{D}\, z^4 + \boldsymbol{E}\, z^5 + \ldots\right)(1-nz) =$$

$$\begin{array}{llllll} 1 + \mathrm{A} z & + \mathrm{B} z^2 & + \boldsymbol{C}\, z^3 & + \boldsymbol{D}\, z^4 & + \boldsymbol{E}\, z^5 & + \ldots \\ \quad - nz & - \mathrm{A} nz^2 & - \mathrm{B} nz^3 & - \boldsymbol{C}\, nz^4 & - \boldsymbol{D}\, nz^5 & - \ldots \end{array}$$

$$= 1 + \mathrm{A} nz + \mathrm{B} n^2 z^2 + \boldsymbol{C}\, n^3 z^3 + \boldsymbol{D}\, n^4 z^4 + \boldsymbol{E}\, n^5 z^5 + \ldots$$

e iguala término a término para obtener:

$$\frac{1}{S}(1-nz)=\left(1+\mathrm{A}z+\mathrm{B}z^2+\boldsymbol{C}\,z^3+\boldsymbol{D}\,z^4+\boldsymbol{E}\,z^5+\ldots\right)(1-nz)=$$

$$1+\mathrm{A}z\quad+\mathrm{B}z^2\quad+\boldsymbol{C}\,z^3\quad+\boldsymbol{D}\,z^4\quad+\boldsymbol{E}\,z^5\quad+\ldots$$

$$-nz\quad-\mathrm{A}nz^2\quad-\mathrm{B}nz^3\quad-\boldsymbol{C}\,nz^4\quad-\boldsymbol{D}\,nz^5\quad-\ldots$$

$$=1+\mathrm{A}nz+\mathrm{B}n^2z^2+\boldsymbol{C}\,n^3z^3+\boldsymbol{D}\,n^4z^4+\boldsymbol{E}\,n^5z^5+\ldots$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{A}-n=\mathrm{A}n\Rightarrow\qquad \mathrm{A}=\frac{n}{(1-n)}$$

$$\mathrm{B}-\mathrm{A}n=\mathrm{B}n^2\Rightarrow\quad \mathrm{B}=\frac{\mathrm{A}n}{(1-n^2)}=\frac{n^2}{(1-n)(1-n^2)}$$

$$\boldsymbol{C}-\mathrm{B}n=\boldsymbol{C}\,n^3\Rightarrow\quad \boldsymbol{C}=\frac{\mathrm{B}n}{(1-n^3)}=\frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\,n=\boldsymbol{D}\,n^4\Rightarrow\quad \boldsymbol{D}=\frac{\boldsymbol{C}\,n}{(1-n^4)}=\frac{n^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$

Y de aquí surge una nueva relación entre A, B, $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\ldots$ y los valores $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\ldots$, los cuales ya tenían funciones generadoras. Finalmente, lo que se tiene es:

$$\alpha=\mathrm{A},\quad \beta=n\mathrm{B},\quad \gamma=n^3\boldsymbol{C},\quad \delta=n^6\boldsymbol{D},\quad \varepsilon=n^{10}\boldsymbol{E}$$

$$\ldots$$

Otro caso particular

Al final del artículo Euler hace mención de una observación que aún no había sido capaz de demostrar con el debido rigor. Observó que si los factores – infinito en número- del producto $(1-n^1)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)\ldots$ son expandidos multiplicándolos directamente, producen la serie

$$1-n^1-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+n^{51}+\ldots,$$

donde no aparecen todos los enteros en las potencias de n; por ejemplo, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 13, ...no aparecen, y los que sí están son únicamente de la forma $\frac{3x^2+x}{2}$ y $\frac{3x^2-x}{2}$. Además, todos los coeficientes del polinomio son 1 ó -1, y para el caso de las potencias que no aparecen el coeficiente es cero. Aquí se ve que Euler obtiene este resultado cuando al respecto está apenas en una etapa de reflexión, si bien ésta será su gran aportación a la teoría de las particiones, pues le llevará al resultado que se conoce como *Teorema de los números pentagonales*, y sobre el cual se comentará más adelante en esta tesis.

CAPÍTULO 3.2

De las particiones de números

En esta sección analizamos el trabajo de Euler titulado *De partitio numerorum* (*De las particiones de números*), que es el capítulo XVI de su obra *Introductio in Analysin Infinitorum*. Ya mencionamos al inicio del capítulo que este trabajo fue el primero que se le conoció sobre el tema de particiones, pero que el primero que escribió fue el que se analizó en la sección anterior.

Pero antes de entrar al contenido del capítulo XVI es importante hacer algunos comentarios acerca de esta obra, es considerada una de las más importantes para las matemáticas. La *Introductio in Analysin Infinitorum* salió a la luz en 1748, y los principales críticos de la historia de las matemáticas opinan que sería riesgoso decir que fue la obra más importante de Euler, pero sí coinciden en que fue una de las que más fama y respeto le aportaron en el mundo de las ciencias exactas.

Esta obra retoma algunos resultados escritos para memorias anteriores, presenta trabajos innovadores y desarrolla otros que previamente habían abordado Leibniz, Newton y los Bernoulli. Desde el título se puede entender que el autor usó procesos infinitos para desarrollar una fase previa a sus cálculos.

Antes de la *Introductio*[19] el análisis estudiaba las propiedades de las curvas, pero después de ella el análisis estudiará las propiedades de las funciones que dan lugar a las curvas. Así, a partir de Euler y su *Introductio* el concepto de función sería un elemento básico para las matemáticas.

En este contexto llegamos al capítulo XVI de la *Introductio* donde Euler trata a las particiones de números desde la perspectiva del desarrollo de funciones polinomiales. Pero como primero escribió su artículo ***Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones*** —que se publicó después de la *Introductio* —, entonces en este capítulo XVI encontramos un contenido semejante al del artículo antes mencionado, pero aquí ya no se encuentran tantos pormenores en los cálculos como sí ocurrió previamente.

[19] Algunos de los resultados que se exponen son: expansión y suma de series, muestra la relación entre exponenciales y funciones trigonométricas para demostrar que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$, curvas algebraicas y trascendentes, clasificación de curvas, representación de superficies con las ecuaciones generales de segundo grado pero en tres dimensiones, transformación de coordenadas en el espacio y curvatura de superficies.

Podemos ver que este artículo es como una versión mejor presentada del escrito anterior que además era más extenso.

Nos presenta cuatro funciones generadoras fundamentales que son:

1) $\left(1+x^1z\right)\left(1+x^2z\right)\left(1+x^3z\right)\left(1+x^4z\right)\left(1+x^5z\right)\cdots$

2) $\left(1-x^1z\right)\left(1-x^2z\right)\left(1-x^3z\right)\left(1-x^4z\right)\left(1-x^5z\right)\cdots$

3) $\dfrac{1}{\left(1+x^1z\right)\left(1+x^2z\right)\left(1+x^3z\right)\left(1+x^4z\right)\left(1+x^5z\right)\cdots}$

4) $\dfrac{1}{\left(1-x^1z\right)\left(1-x^2z\right)\left(1-x^2z\right)\left(1-x^3z\right)\left(1-x^4z\right)\cdots}$

Aquí se va a exponer el tema de las particiones directamente en términos de su vínculo con las funciones generadoras, es decir, ya no como parte de una de las respuestas a los problemas de Naudé. Es más, ya ni siquiera menciona lo relacionado con Naudé.

Ya sabemos que del desarrollo de la función $\left(1+x^1z\right)\left(1+x^2z\right)\left(1+x^3z\right)\left(1+x^4z\right)\left(1+x^5z\right)\cdots$ se obtiene el polinomio $1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+...$ cuyos coeficientes contienen los enteros que son partición de 2, 3, 4, ... enteros, es decir, tantos enteros como la potencia de *z.* Pero otra forma de verlo –aunque Euler no lo menciona así- es que si desarrollamos los productos obtenemos que cada sumando es de la forma $\lambda z^m x^n$, y entonces aquí podemos interpretar en cada término que λ es la cantidad de particiones que se pueden obtener para *n* con *m* sumandos cada una. La diferencia con la forma en que Euler lo maneja es que él lo presenta así:

$$\left(1+x^1z\right)\left(1+x^2z\right)\left(1+x^3z\right)\left(1+x^4z\right)\left(1+x^5z\right)\cdots=$$

$$\begin{aligned}
&1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+...)\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+...)\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+...)\\
&+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+...)\\
&+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+...)\\
&+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+...)\\
&+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+...)\\
&+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+...)+...
\end{aligned}$$

y aquí podemos ver que las potencias de los factores z, z^2, z^3, z^4,....indican la cardinalidad de la partición según se tome la potencia de x. Por ejemplo, si se toma $5x^{14}$ en la respectiva z^4 , entonces se tiene el término 5 z^4x^{14}, y podemos decir que existen 5 particiones del números 14 y cada una de ellas tiene 4 sumandos. Entonces podemos ver que se puede llegar a lo mismo, pero que un camino requiere más pasos que el otro.

En la *Introductio* hace algo diferente a lo anterior, y lo hace con respecto a los números que intervienen para formar las particiones. Veamos nuevamente la primera función $(1+x^1z)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\cdots$ y como todos los exponentes de x son el conjunto de los enteros positivos, entonces sabemos que las particiones que se generan son con números tomados de ese conjunto. Pero si tomamos la función

$$(1+x^1)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)(1+x^9)(1+x^{11})\cdots$$

entonces los términos son de la forma λx^n , y λ indica la cantidad de particiones de *n*. Pero nótese que las particiones de *n* son únicamente con números pares, que es el conjunto que usamos para los exponentes de las *x*. También nótese que tomamos z = 1, lo que indica que los coeficientes de *x* nos proporcionan el número de particiones totales del exponente de *x*, pero sin dar una clasificación de ellas a partir de la cantidad de sumandos. Así se puede ver que el exponente de z juega el papel de contador de la cantidad de veces que se multiplican las potencias de x en la función.

Por lo tanto podemos ver que a través de las funciones generadoras de Euler es posible tomar cualquier conjunto de números que convenga y con ellos ver qué números se generan con sus particiones, y que además estén compuestas por 1, 2, 3, ... elementos. Es decir, se puede tomar un conjunto cualquiera $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$, posteriormente se construye la función

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\cdots = 1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\ldots.$$

y, como se analizó antes, se tiene que en P se puede encontrar la suma $x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+\ldots$, de Q, la suma del producto de 2 potencias diferentes $x^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\gamma}+x^{\beta+\gamma}+x^{\alpha+\delta}+x^{\beta+\delta}+\ldots$, de R, la suma del producto de 3 potencias diferentes $x^{\alpha+\beta+\gamma}+x^{\alpha+\beta+\delta}+\ldots$, etc.. Entonces, el desarrollo del polinomio nos daría de cuántas maneras diferentes un número dado puede ser obtenido de la suma de un número determinado de miembros de los números naturales, en este caso de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$.

Otra identidad importante para la generación de particiones que también se analizará dentro del presente capítulo es

$$\frac{1}{(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\cdots}=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\dots.$$

Recuérdese que un caso particular de esta función era la respuesta al segundo problema de Naudé, en el que se pedía la condición de que las particiones podían incluir elementos iguales o diferentes. Entonces se tendría que P = la suma de las potencias $x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+\dots$, Q = la suma del producto de 2 potencias iguales o diferentes $x^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\gamma}+x^{\beta+\gamma}+x^{\alpha+\delta}+x^{\beta+\delta}+\dots$, R = la suma del producto de 3 potencias iguales o diferentes $x^{\alpha+\beta+\gamma}+x^{\alpha+\beta+\delta}+\dots$

Un caso particular sería si consideramos a $\{\alpha,\beta,\gamma,\dots\}$ como los números naturales. Entonces tenemos que

$$\frac{1}{(1-x^1z)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\dots}=$$

$$\begin{aligned}
&1+z(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\dots)\\
&+z^2(x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+4x^8+4x^9+5x^{10}+\dots)\\
&+z^3(x^3+x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+8x^{10}+10x^{11}+\dots)\\
&+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+\dots)\\
&+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+\dots)\\
&+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+\dots)\\
&+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+\dots)\cdot\\
&+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+\dots)\\
&+\dots
\end{aligned}$$

de donde, por ejemplo, si se desea saber de cuántas maneras el número 13 puede ser logrado con la suma de 5 números enteros, y sin importar que sean repetidos (ejemplo: 3+3+3+3+1), basta con tomar el coeficiente del término $x^{13}z^5$, que es 18.

Pero consideramos que es importante ver cómo se generan las particiones con elementos repetidos, y para ello tomemos el caso de $z=1$. Así, sea la función

$$\frac{1}{(1-x^1)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}\cdots=\frac{1}{(1-x^1)}\frac{1}{(1-x^2)}\frac{1}{(1-x^3)}\frac{1}{(1-x^4)}\frac{1}{(1-x^5)}\dots.$$

donde cada factor es de la forma

$$\frac{1}{\left(1-x^{1}\right)}=1+x^{1}+x^{1+1}+x^{1+1+1}+x^{1+1+1+1}+....$$

$$\frac{1}{\left(1-x^{2}\right)}=1+x^{2}+x^{2+2}+x^{2+2+2}+x^{2+2+2+2}+....$$

$$\frac{1}{\left(1-x^{3}\right)}=1+x^{3}+x^{3+3}+x^{3+3+3}+x^{3+3+3+3}+....$$

Entonces, al multiplicar los polinomios se obtiene lo siguiente:

$$(1+x^{1}+x^{1+1}+x^{1+1+1}+x^{1+1+1+1}+....)\times(1+x^{2}+x^{2+2}+x^{2+2+2}+x^{2+2+2+2}+....)\times$$

$$(1+x^{3}+x^{3+3}+x^{3+3+3}+x^{3+3+3+3}+....)\times...\times(1+x^{s}+x^{s+s}+x^{s+s+s}+x^{s+s+s+s}+....)\times...=$$

$1 \ +x^1+2x^2+ 3x^3 +5x^4 \ + 7x^5+11x^6+15x^7 +22x^8+...$

Ahora, nótese que cada término del producto tendrá potencias con sumandos que pueden ser repetidos, por ejemplo, para $5x^4$ se tienen cinco particiones del número cuatro, que son 4, 1+1+1+1, 2+2, 2+1+1, 3+1. Otro ejemplo es el término $11x^6$ que nos dice que el número 6 puede ser obtenido de 11 maneras diferentes, a saber, 6, 1+5, 2+4, 3+3, 1+2+3, 1+1+4, 2+2+2, 1+1+2+2, 1+1+1+3, 1+1+1+1+2, 1+1+1+1+1+1.

Y siguiendo su particular estilo de escribir, Euler, sin relacionar directamente una parte con otras del escrito, enuncia una serie de resultados importantes:

1. Un número *n* se deja partir de tantas maneras en *m* partes diferentes, como el número $n-\frac{m(m+1)}{2}$ se puede obtener al sumar 1,2,3,…,*m*.
2. Un número *n* se puede partir de tantas maneras en *m* partes, ya sean iguales o diferentes, como el número $n-m$ se puede obtener al sumar 1,2,3,…,*m*.
3. El número *n* se puede partir de tantas maneras en *m* partes diferentes, como el número $n-\frac{m(m+1)}{2}$ se puede partir en *m* partes, ya sean iguales o diferentes.
4. El número *n* se puede partir de tantas maneras en *m* partes, ya sean iguales o diferentes, como el número $n+\frac{m(m+1)}{2}$ se puede partir en *m* partes diferentes.

De lo anterior se desprende que si consideramos a *L* como el número que indica de cuántas maneras el número *n* se puede lograr al sumar 1,2,3,…,*m-1*. A *M* como el número que indica de cuántas maneras el número *n-m* se puede lograr al sumar 1,2,3,…,*m*. Y a *N* como el número que indica de cuántas maneras el número *n* se puede lograr al sumar 1,2,3,…, *m*, entonces tendríamos que

$$L = N - M, \text{ y } N = L + M.$$

Y atención con este último resultado, pues será con la ayuda de ésta sencilla regla con lo que se construye una tabla de donde es posible obtener cualquier valor de cualquier partición (el anexo incluye la tabla hasta el número 100). Además, se verá que las columnas, que son series recurrentes, tienen una relación estrecha con los números naturales, con los triangulares, los piramidales, etc.

Con todo lo anterior Euler ya mostró un amplio manejo de las funciones generadoras para obtener particiones. Es ahora que manifestará la posibilidad de ejecutar operaciones algebraicas con ellas, y sin perder la posibilidad de vincular las nuevas expresiones con particiones de enteros. Así, casi al final de este capítulo de la *Introductio* enuncia un resultado que ha cobrado una gran importancia en la teoría de particiones, y al que se conoce como **ley de paridad** de Euler, y es el siguiente:

Para todo entero n, el número de particiones de n usando sólo enteros positivos impares, iguales o diferentes, es igual al número de particiones de n usando enteros positivos diferentes.

Por ejemplo, sean $P_0(n)$ y $P_e(n)$ las particiones de un entero positivo *n* usando sólo enteros positivos impares (iguales o diferentes) y pares, respectivamente. Para el caso particular de 7, las particiones con sumandos impares, iguales o diferentes, son: 5+1+1, 3+3+1, 3+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1+1, entonces, $P_0(n) = 5$; y con enteros cualesquiera diferentes, se tiene: 5+2, 4+3, 6+1, 1+2+4, y se llega a que $P_e(n) = 5$; por tanto se ve que $P_0(n) = P_e(n)$, y con esto se ejemplifica el enunciado de Euler.

Para este resultado Euler no comenta más, pero a continuación se expone una de las demostraciones conocidas:

La función generadora para $P_0(n)$ es $\dfrac{1}{(1-x^1)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)}\cdots$, y si a esta función se le multiplica por $\prod\limits_{\substack{todo\\ n\,par}} \dfrac{(1-x^n)}{(1-x^n)}$ entonces se tiene que:

$$\frac{1}{\left(1-x^{1}\right)\left(1-x^{3}\right)\left(1-x^{5}\right)\left(1-x^{7}\right)\left(1-x^{9}\right)}\cdots=\frac{\left(1-x^{2}\right)\left(1-x^{4}\right)\left(1-x^{6}\right)\left(1-x^{8}\right)\left(1-x^{10}\right)\ldots}{\left(1-x^{1}\right)\left(1-x^{2}\right)\left(1-x^{3}\right)\left(1-x^{4}\right)\left(1-x^{5}\right)\ldots.}\cdots$$

$$=\left(1+x^{1}\right)\left(1+x^{2}\right)\left(1+x^{3}\right)\left(1+x^{4}\right)\left(1+x^{5}\right)\ldots..=P_e(n)$$

Así, se puede ver que las funciones generadoras son iguales, y en consecuencia el número de particiones de *n* usando sólo enteros positivos impares, iguales o diferentes, es igual al número de particiones de *n* usando enteros positivos diferentes.

Y otro resultado que es conocido pero sobresaliente en lo que respecta a su manejo de las funciones generadoras es:

"Cada número natural se puede construir de manera única como suma de elementos del conjunto {1, 2, 4, 8, 16, 32,…}, es decir, de potencias de dos".

Y una demostración que propone es la siguiente:

Tómese el producto $\left(1+x^{1}\right)\left(1+x^{2}\right)\left(1+x^{4}\right)\left(1+x^{8}\right)\left(1+x^{16}\right)\left(1+x^{32}\right)\cdots$ y veamos que es igual a $1+\mathrm{x}^{1}+\mathrm{x}^{2}+\mathrm{x}^{3}+\mathrm{x}^{4}+\mathrm{x}^{5}+\mathrm{x}^{6}+\mathrm{x}^{7}+\mathrm{x}^{8}+\ldots$ esto es, como los exponentes en $\left(1+x^{1}\right)$, $\left(1+x^{2}\right)$, $\left(1+x^{4}\right)$, $\left(1+x^{8}\right)$,..... son potencias de 2, entonces de

$1+\mathrm{x}^{1}+\mathrm{x}^{2}+\mathrm{x}^{3}+\mathrm{x}^{4}+\mathrm{x}^{5}+\mathrm{x}^{6}+\mathrm{x}^{7}+\mathrm{x}^{8}+\ldots$ se tiene que cada entero positivo es una suma de potencias diferentes de 2, y además, como los coeficientes del polinomio resultante son 1, entonces se tiene que la representación con potencias de 2 es única.

Y para probar esto nos dice que:

$$P(x)=\left(1+x^{1}\right)\left(1+x^{2}\right)\left(1+x^{4}\right)\left(1+x^{8}\right)\left(1+x^{16}\right)\left(1+x^{32}\right)\cdots=1+\alpha\mathrm{x}+\beta\mathrm{x}^{2}+\gamma\mathrm{x}^{3}+\delta\mathrm{x}^{4}+\varepsilon\mathrm{x}^{5}+\zeta\mathrm{x}^{6}+\eta\mathrm{x}^{7}+\ldots$$

$$P(x^{2})=\left(1+x^{2}\right)\left(1+x^{4}\right)\left(1+x^{8}\right)\left(1+x^{16}\right)\left(1+x^{32}\right)\cdots=\frac{P(x)}{(1+x)}.$$

$$\frac{P(x)}{(1+x)}=1+\alpha\mathrm{x}^{2}+\beta\mathrm{x}^{4}+\gamma\mathrm{x}^{6}+\delta\mathrm{x}^{8}+\varepsilon\mathrm{x}^{10}+\ldots$$

$$\Rightarrow P(x)=1+x+\alpha\mathrm{x}^{2}+\alpha\mathrm{x}^{3}+\beta\mathrm{x}^{4}+\beta\mathrm{x}^{5}+\gamma\mathrm{x}^{6}+\gamma\mathrm{x}^{7}+\delta\mathrm{x}^{8}+\delta\mathrm{x}^{9}+\ldots$$

Y comparando los términos de P(x)

$\alpha\mathrm{x}=x\Rightarrow\alpha=1$

$\beta\mathrm{x}^{2}=\alpha\mathrm{x}^{2}\Rightarrow\beta=\alpha$

$\gamma\mathrm{x}^{3}=\alpha\mathrm{x}^{3}\Rightarrow\gamma=\alpha$

...

$\Rightarrow P=1+\mathrm{x}^{1}+\mathrm{x}^{2}+\mathrm{x}^{3}+\mathrm{x}^{4}+\mathrm{x}^{5}+\mathrm{x}^{6}+\mathrm{x}^{7}+\mathrm{x}^{8}+\ldots$

Y así concluye que la representación de un entero positivo como suma de potencias de dos es única.

Posteriormente Euler da un ejemplo del uso de los enteros como suma de potencias de 2. Afirma que se puede calcular el peso de cualquier objeto (sin considerar fracciones) si se cuenta sólo con los pesos {1, 2, 4, 8, 16, 32, ...}, por ejemplo con los pesos {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512} podemos calcular el peso de cualquier objeto que pese hasta 1024 unidades.

Pero Euler guarda otro ejemplo interesante donde ahora usará particiones con elementos negativos, y lo hace para poder pesar objetos usando menos pesas, y esto será posible usando las del tipo {1, 3, 3^2, 3^3, 3^4,…}, pero algo adicional es que ahora requiere usar ambos lados de la balanza.

Este proceso se sustenta en la propiedad de que "cada número puede ser representado con la suma y resta sólo de elementos de la serie geométrica {1, 3, 3^2, 3^3, 3^4,…}. Por ejemplo: 1=1, 2=3-1, 3=3, 4=3+1, 5=9-3-1, 6=9-3, 7=9-3+1, 8=9-1, 9=9, 10=9+1, 11=9+3-1, 12=9+3,...

Este resultado lo justificará Euler al demostrar que:

$$\left(x^{-1}+1+x^{1}\right)\left(x^{-3}+1+x^{3}\right)\left(x^{-9}+1+x^{9}\right)\left(x^{-27}+1+x^{27}\right)\cdots=P(x)$$
$$=1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\ldots+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}+x^{-6}+x^{-7}+x^{-8}+\ldots$$

Y para probarlo, nos dice que

$$P(x)=\ldots+cx^{-3}+bx^{-2}+ax^{-1}+1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\ldots$$
$$P(x^3)=\ldots+cx^{-9}+bx^{-6}+ax^{-3}+1+\alpha x^3+\beta x^6+\gamma x^9+\delta x^{12}+\ldots=\frac{P(x)}{(x^{-1}+1+x^1)}.$$
$$\Rightarrow P(x)=\ldots+ax^{-4}+ax^{-3}+ax^{-2}+x^{-1}+1++x+\alpha x^2+\alpha x^3+\alpha x^4+\beta x^5+\beta x^6+\beta x^7+\ldots$$

Y comparando los términos de P(x) en ambas igualdades, se tiene que

$$\alpha x=x\Rightarrow\alpha=1$$
$$\beta x^2=\alpha x^2\Rightarrow\beta=\alpha$$
$$\gamma x^3=\alpha x^3\Rightarrow\gamma=\alpha$$

...

y de la misma forma

$$ax^{-1}=x^{-1}\Rightarrow a=1,\ bx^{-2}=ax^{-2}\Rightarrow b=a,\ cx^{-3}=ax^{-3}\Rightarrow c=a,\ \ldots$$
$$\Rightarrow P(x)=1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\ldots$$
$$+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}+x^{-6}+x^{-7}+x^{-8}+\ldots$$

Y, en palabras de él, este resultado para P(x) significa que:

"Es de notarse que todas la potencias de x, tanto las de exponente positivo como las de negativo, aparecen [en el polinomio generador]; y por consiguiente todos los números de la progresión geométrica cuyo cociente es 3 pueden ser construidos de una única manera, unos a través de la adición y otros a través de la sustracción".

CAPÍTULO 3.3

Sobre la partición de números en partes de un cierto tipo de números determinados.

Como ya se escribió al inicio de este capítulo, Euler regresó al tema de las particiones en 1768 con el artículo *De Partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*. (***Sobre la partición de números en partes de un cierto tipo de números determinados***). Pero este retorno de Euler a las particiones también es su inmersión al juego de dados. Resulta que Euler en este escrito aborda el tema de cuáles son las particiones que generan los dados cuando son arrojados, y pueden ser 1, 2 ó n dados, con 6 o más caras cada uno. La manera en cómo manejará el tema será por la vía de los polinomios generadores, y por éste mismo medio tratará de encontrar un camino para dar respuesta a los problemas aditivos de Fermat sobre números poligonales, aquellos para lo que es válido decir: Todo número entero positivo se puede escribir como suma de poligonales del mismo orden, es decir, todo número es la suma de tres triangulares, de cuatro cuadrados, cinco pentagonales, seis hexagonales, y así sucesivamente.

El regreso a los dados

En este artículo de 1768 Euler responde a la pregunta generalizada ¿de cuántas maneras un número dado N puede ser obtenido con un número n de dados, cuyas m caras, para cada uno, son $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, o incluso cuando los dados son diferentes entre ellos? Esto en términos de particiones se traduciría como ¿de cuántas maneras distintas un número dado N puede ser obtenido a partir de sumar n partes, tomadas cada una de ellas de las m caras del dado $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\}$?

Y con esto, intrínsecamente se resuelve cualquier caso más específico, como sería el problema galileano del inicio, el que aparece en el "Pasadiez".

En la primera incursión en el problema, Euler analiza el caso para n dados, con las 6 caras tradicionales, y lo resuelve analizando la siguiente expresión

$$(\mathrm{x}^1+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^5+\mathrm{x}^6)^n = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + \ldots + Mx^N + \ldots + x^{6n}.$$

La parte izquierda de la igualdad es:

$$(\mathrm{x}^1+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^5+\mathrm{x}^6)(\mathrm{x}^1+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^5+\mathrm{x}^6)\ldots.(\mathrm{x}^1+\mathrm{x}^2+\mathrm{x}^3+\mathrm{x}^4+\mathrm{x}^5+\mathrm{x}^6)$$

(con n factores)

y lo que tenemos aquí es el producto de n polinomios de grado 6 (que es la representación de los n dados), y por tanto cuando se multiplican todos los términos lo que se obtiene serán potencias de x, donde cada potencia tendrá exactamente seis sumandos, es decir, cada potencia será una de las particiones que generan los n dados cuando son arrojados. Así, Euler traslada y resuelve el problema al terreno de las funciones generadoras, donde para cualquier término Mx^N, el número N puede ser obtenido con M particiones diferentes, como lo indica el coeficiente.

Ahora, ya se puede ver que la cantidad de particiones que generan los dados para cada números queda determinado por los coeficientes de

$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + ... + Mx^N + ... + x^{6n}.$$

A partir de esto Euler dedicará amplio espacio del artículo para encontrar los coeficientes.

Método para encontrar los coeficientes

Euler parte de las siguientes dos expresiones:

$$V = (\mathrm{x}^1 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^5 + \mathrm{x}^6)^n = (x^1(1 + \mathrm{x}^1 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^5))^n =$$
$$x^n(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n$$

$$V = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + ... + Mx^N + ... + x^{6n} =$$
$$x^n(1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + ...)$$

Y propone que $Z = \frac{V}{x^n}$, y como $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$, entonces al derivar ambos lados del logaritmo de

$$Z = \frac{V}{x^n} = (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n$$

$$\frac{d}{dx}(\ln Z) = \frac{d}{dx}\left(\ln(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx} = n\left(\frac{1}{1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}\right)\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4\right)$$

y al multiplicar por x

$$\frac{x}{Z}\frac{dZ}{dx} = \frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}$$

Y como $Z = 1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots$,
entonces

$$\ln Z = \ln(1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln Z) = \frac{d}{dx}\left(\ln(1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dx} = \left(\frac{1}{1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots}\right)\left(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\right)$$

que multiplicado por x

$$\frac{x}{Z}\frac{dZ}{dx} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + ..}{1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots}$$

y al igualar ambas expresiones de $\frac{x}{Z}\frac{dZ}{dx}$ obtiene que:

$$\frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + ..}{1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots}$$

Y después de multiplicar e igualar

$$\frac{nx + 2nx^2 + 3nx^3 + 4nx^4 + 5nx^5}{1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5} = \frac{Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + ..}{1 + Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots}$$

$$\begin{aligned}
nx + nAx^2 + nBx^3 + nCx^4 + nDx^5 + nEx^6 + nFx^7 + nGx^8 + \ldots \\
+ 2nx^2 + 2nAx^3 + 2nBx^4 + 2nCx^5 + 2nDx^6 + 2nEx^7 + 2nFx^8 + \ldots \\
+ 3nx^3 + 3nAx^4 + 3nBx^5 + 3nCx^6 + 3nDx^7 + 3nEx^8 + \ldots \\
+ 4nx^4 + 4nAx^5 + 4nBx^6 + 4nCx^7 + 4nDx^8 + \ldots \\
+ 5nx^5 + 5nAx^6 + 5nBx^7 + 5nCx^8 + \ldots
\end{aligned}$$

$=$

$$\begin{aligned}
Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + 5Ex^5 + 6Fx^6 + 7Gx^7 + 8Hx^8 + \ldots \\
+ Ax^2 + 2Bx^3 + 3Cx^4 + 4Dx^5 + 5Ex^6 + 6Fx^7 + 7Gx^8 + \ldots \\
+ Ax^3 + 2Bx^4 + 3Cx^5 + 4Dx^6 + 5Ex^7 + DFx^8 + \ldots \\
+ Ax^4 + 2Bx^5 + 3Cx^6 + 4Dx^7 + 5Ex^8 + \ldots \\
+ Ax^5 + 2Bx^6 + 3Cx^7 + 4Dx^8 + \ldots \\
+ Ax^6 + 2Bx^7 + 3Cx^8 + \ldots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&A = n \\
&2B = (n-1)A + 2n \\
&3C = (n-2)B + (2n-1)A + 3n \\
&4D = (n-3)C + (2n-2)B + (3n-1)A + 4n \\
&5E = (n-4)D + (2n-3)C + (3n-2)B + (4n-1)A + 5n \\
&6F = (n-5)E + (2n-4)D + (3n-3)C + (4n-2)B + (5n-1)A \\
&7G = (n-6)F + (2n-5)E + (3n-4)D + (4n-3)C + (5n-2)B \\
&8H = (n-7)G + (2n-6)F + (3n-5)E + (4n-4)D + (5n-3)C \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Con esto último tenemos que cualquier coeficiente puede ser obtenido por los 5 anteriores como máximo.

Pero si expresamos a cada uno mediante los anteriores, por ejemplo

$$
\begin{aligned}
&2B - A = (n-1)A + 2n - n \\
&2B = nA + n
\end{aligned}
$$

y así para todos, entonces obtenemos una forma más simple::

$$
\begin{aligned}
&A = n \\
&2B = (n+1)A \\
&3C = (n+2)B \\
&4D = (n+3)C \\
&5E = (n+4)D \\
&6F = (n+5)E - 6n \\
&7G = (n+6)F - (6n-1)A + 5n \\
&8H = (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A \\
&9I = (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B \\
&10K = (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

y con ello encontraríamos cada coeficiente a partir de los 3 anteriores. Entonces, de la expresión general para n dados

$$V = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + Ex^{n+5} + \ldots$$

podemos ver en la siguiente tabla los casos particulares para 2, 3 y 4 dados

2 Dados	3 Dados	4 Dados
$A=2$	$A=3$	$A=4$
$2B=3A$	$2B=4A$	$2B=5A$
$3C=4B$	$3C=5B$	$3C=6B$
$4D=5C$	$4D=6C$	$4D=7C$
$5E=6D$	$5E=7D$	$5E=8D$
$6F=7E-12$	$6F=8E-18$	$6F=9E-24$
$7G=8F-11A+10$	$7G=9F-17A+15$	$7G=10F-23A+20$
$8H=9G-10B+9A$	$8H=10G-16B+14A$	$8H=11G-22B+19A$
$9I=10H-9C+8B$	$9I=11H-15C+13B$	$9I=12H-21C+18B$
$10K=11I-8D+7C$	$10K=12I-14D+12C$	$10K=13I-20D+17C$
$11L=12K-7E+6D$	$11L=13K-13E+11D$	$11L=14K-19E+16D$
$12M=13L-6F+5E$	$12M=14L-12F+10E$	$12M=15L-18F+15E$
...	...	...

Tabla 31

Para entender mejor la regla, Euler nos dice lo siguiente:

Sea $(N)^{(n)}$ la notación para indicar el número de casos en que el número N puede ser logrado por n dados. Entonces se tiene que:

1. $(n)^{(n)}=1$ nos dice que el número n puede ser logrado con n dados una sola vez
2. $(n+1)^n=A,(n+2)^n=B,(n+3)^n=C,(n+4)^n=D,(n+5)^n=E,$
   $(n+6)^n=F,(n+7)^n=G,(n+8)^n=H,(n+9)^n=I,(n+10)^n=K,...$
3. Para $(P)^{(n)}$ donde $P<n$ entonces $(P)^{(n)}=0$

Analizando el caso de $10K$, para cualquier n tenemos que

$10K=10(n+10)^{(n)}=(n+9)(n+9)^{(n)}-(6n-4)(n+4)^{(n)}+(5n-3)(n+3)^{(n)}$ de donde, generalizando:

$$\lambda(n+\lambda)^{(n)}=(n+\lambda-1)(n+\lambda-1)^{(n)}-(6n+6-\lambda)(n+\lambda-6)^{(n)}+(5n+7-\lambda)(n+\lambda-7)^{(n)}.$$

Y sustituyendo $n+\lambda=N,\ \lambda=N-n$ tenemos que

$$(N)^{(n)}=\frac{(N-1)(N-1)^{(n)}-(7n+6-N)(N-6)^{(n)}+(6n+7-N)(N-7)^{(n)}}{N-n}.$$

Y de aquí resulta claro que si $P<n$ entonces $(P)^{(n)}=0$.

Método para conocer coeficientes a partir de otros coeficientes

Euler enuncia lo siguiente:

"los coeficientes pueden también ser fácilmente definidos para cualquier número de dados, si se conocen aquellos coeficientes del número de dados menos uno."

Para ello Euler utiliza la expresión para seis caras iguales y n dados:

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n = x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \ldots$$

después tomemos

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1} = x^{n+1} + A'x^{n+2} + B'x^{n+3} + C'x^{n+4} + D'x^{n+5} + \ldots$$

y como

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) =$$
$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^{n+1}$$
$$\Rightarrow$$
$$(x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \ldots)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6) =$$
$$x^{n+1} + A'x^{n+2} + B'x^{n+3} + C'x^{n+4} + D'x^{n+5} + \ldots$$
$$\Rightarrow$$
$$\begin{aligned}
&x^{n+1} + Ax^{n+2} + Bx^{n+3} + Cx^{n+4} + Dx^{n+5} + \ldots +\\
&\quad x^{n+2} + Ax^{n+3} + Bx^{n+4} + Cx^{n+5} + Dx^{n+6} + \ldots +\\
&\quad\quad x^{n+3} + Ax^{n+4} + Bx^{n+5} + Cx^{n+6} + Dx^{n+7} + \ldots +\\
&\quad\quad\quad x^{n+4} + Ax^{n+5} + Bx^{n+6} + Cx^{n+7} + Dx^{n+8} + \ldots +\\
&\quad\quad\quad\quad x^{n+5} + Ax^{n+6} + Bx^{n+7} + Cx^{n+8} + Dx^{n+9} + \ldots +\\
&\quad\quad\quad\quad\quad x^{n+6} + Ax^{n+7} + Bx^{n+8} + Cx^{n+9} + \ldots +
\end{aligned}$$
$$=$$
$$x^{n+1} + A'x^{n+2} + B'x^{n+3} + C'x^{n+4} + D'x^{n+5} + \ldots$$

E igualando término a término

$A' = A + 1$	Y restando cada una de la anterior:
$B' = B + A + 1$	$B' = A' + B$
$C' = C + B + A + 1$	$C' = B' + C$
$D' = D + C + B + A + 1$	$D' = C' + D$
$E' = E + D + C + B + A + 1$	$E' = D' + E$
$F' = F + E + D + C + B + A$	$F' = E' + F - 1$
$G' = G + F + E + D + C + B$	$G' = F' + G - A$
$\ldots$	$\ldots$

y si utilizamos la notación anterior $(N)^{(n)}$:

$$\begin{aligned}&(n+1)^{(n)} = A, (n+6)^{(n)} = F, (n+7)^{(n)} = G\\&(n+7)^{(n+1)} = F', (n+8)^{(n+1)} = G'\end{aligned}.$$

De la ecuación $G' = F' + G - A$ tenemos que $(n+8)^{(n+1)} = (n+7)^{(n+1)} + (n+7)^{(n)} - (n+1)^{(n)}$,

y generalizando $(n+1+\lambda)^{(n+1)} = (n+\lambda)^{(n+1)} + (n+\lambda)^{(n)} - (n+\lambda-6)^{(n)}$.

Y sustituyendo $n+\lambda = N$, tenemos la siguiente relación:

$$(N+1)^{(n+1)} = (N)^{(n+1)} + (N)^{(n)} - (N-6)^{(n)}.$$

Este resultado nos hace notar que $N-6 < n \Rightarrow (N-6)^{(n)} = 0$ y que todos los números son enteros, lo que no es tan claro en la ley anterior.

Método para conocer coeficientes directamente

Hasta ahora se ha demostrado que los coeficientes pueden ser obtenidos a través del uso de sus predecesores; sin embargo es posible encontrarlos directamente. Para ello Euler plantea lo siguiente:

Para el caso de dados tradicionales de seis caras

Como $1+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5 = \dfrac{1-x^6}{1-x^1}$ y V=$\dfrac{x^n(1-x^6)^n}{(1-x)^n}$, y por el desarrollo de las series

$$(1-x^6)^n = 1 - \frac{n}{1}x^6 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{12} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{18} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{24} + \ldots$$

$$\frac{x^n}{(1-x)^n} = x^n + \frac{n}{1}x^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^{n+2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n+3} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n+4} + \ldots$$

Aunque ya se tenía con anterioridad que

$$\begin{aligned}&A = n\\&2B = (n+1)A = (n+1)n\\&3C = (n+2)B = \ldots\\&4D = (n+3)C\\&5E = (n+4)D\\&6F = (n+5)E - 6n\\&7G = (n+6)F - (6n-1)A + 5n\\&8H = (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A\\&9I = (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B\\&10K = (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C\ldots\end{aligned}$$

$$(n)^{(n)} = 1$$

$$A = (n+1)^{(n)} = \frac{n}{1}$$

$$B = (n+2)^{(n)} = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$$

$$C = (n+3)^{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$D = (n+4)^{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$E = (n+5)^{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$F = (n+6)^{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{n}{1}\cdot 1$$

$$G = (n+7)^{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n}{1}$$

$$H = (n+8)^{(n)} = \frac{n(n+1)...(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$$

$$I = (n+9)^{(n)} = \frac{n(n+1)...(n+8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$K = (n+10)^{(n)} = \frac{n(n+1)...(n+9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...10} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$L = (n+11)^{(n)} = \frac{n(n+1)...(n+10)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...11} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)...(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$M = (n+12)^{(n)} = \frac{n(n+1)...(n+11)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...12} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)...(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1$$

$$N = (n+13)^{(n)} = \frac{n(n+1)...(n+12)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...13} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)...(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n}{1}$$

...

Y como término general, para un dado de seis caras:

$$(n+\lambda)^{n} = \frac{n(n+1)...(n+\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\lambda} - \frac{n}{1}\cdot\frac{n(n+1)...(n+\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(\lambda-6)} +$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{n(n+1)...(n+\lambda-13)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(\lambda-12)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n(n+1)...(n+\lambda-19)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(\lambda-18)} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{n(n+1)...(n+\lambda-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...(\lambda-24)} - ...$$

El regreso con Montmort

En este contexto es oportuno regresar a la fórmula de Montmort para encontrar directamente los coeficientes del polinomio generador de las particiones del conjunto de dados. Recordemos que el planteamiento de Montmort es:

> **Al tirar al azar un número cualquiera *d* de dados, cuyo número de caras es *f*, también cualquiera, las posibilidades que existen de lograr tal o tal punto *p* a voluntad se encuentran de la siguiente manera:**
>
> "Sea p-d+1 = q, y sea designado por esta notación arbitraria $\boxed{q}$ el número figurado del orden d, que corresponde a q, se dirá, el primer número del orden d, si q=1; y el segundo del orden d, si q=2; y el tercero si q=3, etc..
>
> La fórmula $\boxed{q}$ - d $\times$ $\boxed{q-f}$ + $\frac{d(d-1)}{1\cdot 2}\times\boxed{q-2f}-\frac{d(d-1)(d-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\times\boxed{q-3f}+$ $\frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times\boxed{q-4f}-$etc., expresa el número buscado".

Ya mencionamos que éste planteamiento no mostraba explícitamente la manera de calcular las particiones requeridas, además de que Montmort sólo justifica de manera experimental su resultado. Ahora expondremos una construcción más explícita de la fórmula que proporciona las particiones directamente, sin tener que usar procesos recurrentes, o desarrollar extensos productos polinomiales.

Antes de pasar a analizar la función generadora es conveniente recordar la relación entre las particiones que generan 2, 3, ó n dados y las diagonales del triángulo de Pascal [véase Neff 1982]. Por ejemplo, las particiones que generan dos dados para los números entre el 2 y el 12 son los coeficientes del polinomio generador

$$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12},$$

que a la vez son los números que forman la diagonal sombreada del triángulo; otro ejemplo sería con tres dados, para los números entre el 3 y el 18, y nuevamente se tienen los coeficientes del polinomio generador.

$$x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+$$
$$15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}$$

que a la vez son los números que forma la siguiente diagonal del triángulo.

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Tabla 32

Es importante notar que después del sexto número se rompe la igualdad entre los coeficientes y los números de la diagonal, y la razón es que los dados sólo tienen seis caras y no pueden generar más números que igualen las características de las diagonales, la igualdad se va extendiendo en la medida en que los dados tengan más caras.

Y sabemos que el polinomio generador para un dado es

$$P(t)=\left(t^1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6\right)=\frac{t(1-t^6)}{(1-t)},$$

y para *n* dados es $P_n(t)=\dfrac{t^n(1-t^6)^n}{(1-t)^n}=t^n(1-t^6)^n\dfrac{1}{(1-t)^n}$. De lo último se tiene que el factor

$\dfrac{1}{(1-t)^n}=(1-t)^{-n}$ es igual a $C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}t+C_{n+1}^{n-1}t^2+C_{n+2}^{n-1}t^3+C_{n+3}^{n-1}t^4+\ldots.$ Véase que los coeficientes de este polinomio son los elementos de la *n*-ésima diagonal del triángulo; por ejemplo, para $(1-t)^{-3}$ se tiene que

$$(1-t)^{-3} = 1+3t+6t^2+10t^3+15t^4+\ldots.$$

y 1, 3, 6, 10, 15, .. son números de la tercera diagonal.

Así, en general se tiene que los coeficientes binomiales para potencias positivas y negativas de binomios se pueden esquematizar de la siguiente manera [véase Robinson 1947]:

$(1-t)^{-3}$

$(1-t)^{-4}$

$(1-t)^{-5}$

$(1+t)^2$

$(1+t)^3$

$(1+t)^4$

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Tabla 33

Regresando a $P_n(t)=t^n(1-t^6)^n\dfrac{1}{(1-t)^n}$ se puede obtener que:

$$t^n(1-t^6)^n\frac{1}{(1-t)^n}= \ t^n\left(C_n^0-C_n^1t^6+C_n^2t^{12}-C_n^3t^{18}+...+(-1)^nC_n^nt^{6n}\right)\times$$

$$\times\left(C_{n-1}^{n-1}+C_n^{n-1}t+C_{n+1}^{n-1}t^2+C_{n+2}^{n-1}t^3+C_{n+3}^{n-1}t^4+....\right)$$

y una parte de los coeficientes del polinomio obtenido son las particiones generadas por *n* dados. Para el caso de 2 dados resulta que:

$$P_2(t)=t^2(1-t^6)^2\frac{1}{(1-t)^2}= \ t^2\left(C_2^0-C_2^1t^6+C_2^2t^{12}\right)\times$$

$$\times\left(C_1^1+C_2^1t+C_3^1t^2+C_4^1t^3+C_5^1t^4+....\right),$$

y de este producto infinito tomamos los coeficientes vinculados hasta t^{12}, donde 12 es el máximo número que se puede obtener con 2 dados y entonces los coeficientes son:

$t^2 : C_2^0C_1^1=1$

$t^3 : C_2^0C_2^1=2$

$t^4 : C_2^0C_3^1=3$

$t^5 : C_2^0C_4^1=4$

$t^6 : C_2^0C_5^1=5$

$t^7 : C_2^0C_6^1=6$

$t^8 : C_2^0C_7^1-C_2^1C_1^1=5$

$t^9 : C_2^0C_8^1-C_2^1C_2^1=4$

$t^{10} : C_2^0C_9^1-C_2^1C_3^1=3$

$t^{11} : C_2^0C_{10}^1-C_2^1C_4^1=2$

$t^{12} : C_2^0C_{11}^1-C_2^1C_5^1=1$

Aquí se puede ver que el conjunto de resultados es exactamente el mismo que el de los coeficientes del polinomio generador para dos dados:

$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}=$

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\times(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6).$$

y a la vez son los términos que nos muestra Montmort en su fórmula.

Pero recordemos que el problema que deseamos resolver es el de encontrar cualquiera de los coeficientes de un polinomio generado por *n* dados. En el caso particular de 2 dados no hay problema porque es pequeña la cantidad de cálculos que se realizan. El problema se hace presente si queremos el coeficiente de la potencia 456 cuando estamos generando particiones con 250 dados convencionales. Es claro que llegar al polinomio generador con estas características es inoperante, pero sí podemos plantear una forma general para cada uno de los coeficientes de los términos de

$$t^n(1-t^6)^n\frac{1}{(1-t)^n} = t^n\left(C_n^0 - C_n^1 t^6 + C_n^2 t^{12} - C_n^3 t^{18} + \ldots + (-1)^n C_n^n t^{6n}\right)\times$$
$$\times\left(C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1}t + C_{n+1}^{n-1}t^2 + C_{n+2}^{n-1}t^3 + C_{n+3}^{n-1}t^4 + \ldots\right),$$

y se propone que los coeficientes sean de la forma $g=\sum_{x=0}^{u}(-1)^x C_n^x C_{s-6x-1}^{n-1}$, donde s = número del que se quiere encontrar sus particiones. Además, se requiere que $C_n^r = 0$ si r > n; entonces $C_n^x \neq 0$ si x está entre 0 y n, y en particular $C_{s-6x-1}^{n-1} \neq 0$ si n-1 $\leq$ s - 6x - 1

$$\Rightarrow n \leq s - 6x$$
$$\Rightarrow x \leq \frac{s-n}{6}$$
$$\Rightarrow u = \left[\frac{s-n}{6}\right] \quad \text{(parte entera)}$$

Un ejemplo de cómo usar la fórmula $g=\sum_{x=0}^{u}(-1)^x C_n^x C_{s-6x-1}^{n-1}$ es cuando queremos encontrar las particiones de 26 usando 6 dados. En este caso se tiene que s = 26, n = 6 y u = $\left[\frac{26-6}{6}\right]=3$, y por tanto

$$g=\sum_{x=0}^{3}(-1)^x C_6^x C_{25-6x}^5 = C_6^0 C_{25}^5 - C_6^1 C_{19}^5 + C_6^2 C_{13}^5 - C_6^3 C_7^5 =$$

$$= (1)(53130)-6(11628)+15(1287)-20(21)=2247.$$

Finalmente se puede ver que las particiones del 26 usando 6 dados convencionales es 2247, y no se tuvo que desarrollar $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6$ para poder extraer el coeficiente de x^{26}.

Sobre los problemas de Fermat

Desde su arribo a San Petersburgo Euler parecía estar conciente de que los problemas aditivos de Fermat sobre números poligonales estarían presentes en sus inquietudes intelectuales durante varias décadas.

En este artículo Euler propone la utilización de sus métodos no inductivos para intentar demostrar algunos –calificados como “elegantes”- teoremas que hasta ese momento no habían sido demostrados. Los problemas que enuncia Euler son los siguientes:

1. Todos los números son o triangulares o suma de dos o tres triangulares. Pero como el cero también ocurre en el orden de los triangulares, el teorema podría formularse diciendo que todos los números pueden ser suma de tres triangulares. Y él plantea la siguiente solución:

   Si los números triangulares son considerados exponentes de la siguiente serie $1+x^1+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+x^{28}+...=S$, bastaría con demostrar que si

   $$(1+x^1+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+x^{28}+....)^3$$

   es expandida, entonces el polinomio que se obtiene tendría a todos los enteros positivos entre las potencia de x, y cada una de ellas sería suma de tres triangulares. De esta manera sí se toma en cuenta el orden de las partes.

   De forma alternativa, se puede utilizar la siguiente serie donde la condición del orden no se toma en cuenta, a diferencia de lo que ocurrió con la anterior.

   $$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^3z)(1-x^6z)(1-x^{10}z)(1-x^{15}z)...}$$

   La serie expandida dará origen a la siguiente serie $1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+...$ donde $P, Q, R, S,...$ son funciones de *x*. De tal forma que

   $P=1+x^1+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+x^{28}+...$ mientras que Q también contiene aquellas potencias de x cuyos exponentes son los agregados de dos números triangulares. Y entonces se necesitará demostrar que cada potencia de x ocurre en la función R, con tres números triangulares.

2. Todos los números pueden escribirse como la suma de 4 cuadrados.

   Método propuesto:

   Si los números cuadrados son considerados exponentes del siguiente polinomio $1+x^1+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+x^{36}+...=S$, bastaría con demostrar que si

$$(1+x^1+x^4+x^9+x^{16}+x^{25}+x^{36}+...)^4=S^4$$

   es expandida, entonces en las potencias del polinomio obtenido aparecerán todos los enteros positivos

   De forma alternativa se puede utilizar la siguiente serie en donde la condición del orden no se toma en cuenta, a diferencia de la anterior.

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^4z)(1-x^9z)(1-x^{16}z)(1-x^{25}z)...}$$

   La serie expandida dará origen a la siguiente serie $1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+...$ donde $P,Q,R,S,...$ son algunas funciones de x. De tal forma que $P=1+x^1+x^4+x^9+x^{16}+...$, mientras que Q también contiene aquellas potencias de x cuyos exponentes son los agregados de dos números cuadrados. Y entonces se necesitará demostrar que cada potencia de x ocurre en la función S, con cuatro números cuadrados.

3. Y para generalizar nos dice Euler: Todos los números son la suma de *m* o menos números poligonales con un número de lados igual a *m*.

Como se puede ver Euler tampoco está demostrando los problemas, lo que está haciendo es plantear un camino alternativo, ya que demostrar que siempre aparecerán todos los enteros positivos en cada uno de los polinomios antes expuestos en los tres casos mencionados, no es un asunto trivial. Pero es admirable que su presencia o influencia se dejaba sentir en diversos problemas importantes, y que si bien no los pudo resolver todos, sí dejó elementos que otros retomarían para terminar la misión de llevarlos a buen fin.

Pero aún falta por coronar el trabajo de Euler en lo que corresponde a las particiones. Retomará el tema aproximadamente diez años después para sorprender a todos con su nueva incursión en la que vincula a las particiones de un entero con los números pentagonales, con lo que plantearía de manera formal algo que tenía en mente desde que escribió el artículo de 1741, y que es el *Teorema de los números pentagonales*.

El teorema de los números pentagonales

Las particiones de un entero no quedaron en posibles propiedades casuales para ciertos números o en un tipo de divertimento matemático vinculado con los dados. Euler no tardó mucho en proporcionarnos un resultado de carácter general para todos los enteros positivos, y gracias a él sería posible entender que a través de las particiones podríamos conocer más acerca de la estructura de los enteros.

Y como ya se mencionó antes, el resultado al que nos referimos es el *Teorema de los Números Pentagonales*, y se enuncia de la siguiente manera:

Para todo entero positivo n:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

Aquí vemos nuevamente el producto infinito $\left(1-x^1\right)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right).....$ que hemos usado frecuentemente a partir del estudio de los problemas que le propuso Philippe Naudé a Euler.[20] Pero el resultado de Euler nos dice que si desarrollamos el producto de arriba se obtiene:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+......$$

y los exponentes son números pentagonales o afines a ellos. Y si regresamos al vínculo entre exponentes y coeficientes que proporciona el cálculo de particiones de un entero, entonces el teorema de Euler nos está diciendo que también existe una relación de particiones entre los exponentes y los coeficientes de

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+......,$$

[20] Recordemos que se usó el recíproco de este producto para calcular particiones con elementos repetidos y diferentes.

esto es, nótese que los coeficientes de este polinomio se forman sumado y restando términos semejantes, y como cada término nos representa una partición según su exponente, entonces los coeficientes que aparecen en el polinomio son el resultado de las sumas y restas de cantidades de particiones que representan al mismo número, y por esto podemos replantear el teorema de la siguiente forma:

Sean

$p_{pd}(m) =$ el número de particiones de un entero positivo *m*, con la característica de que los sumandos de cada una son diferentes y la cantidad de sumandos en cada una es una cantidad par.

$p_{id}(m) =$ el número de particiones de un entero positivo *m* en donde los sumandos de cada una son diferentes, pero ahora la cantidad de sumandos en cada partición es una cantidad impar.

Entonces

$$p_{pd}(m) - p_{id}(m) = \left(\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & \mathrm{m} \neq \dfrac{n(3n \pm 1)}{2} \\ (-1)^n & \text{si} & \mathrm{m} = \dfrac{n(3n \pm 1)}{2} \end{array} \right)$$

Así, el teorema que enunciamos para los números pentagonales bajo la forma

Para todo entero positivo n:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

también se puede ver como:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right) = 1 + \prod_{n=1}^{\infty}\left(p_{ed}(n) - p_{od}(n)\right)x^n$$

Con este resultado podemos percibir que los coeficientes de

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + ...$$

son $p_{pd}(m) - p_{id}(m)$, lo que significa que una infinidad de enteros positivos tienen las mismas cantidades de particiones -con elementos diferentes- con un número par de sumandos y con un número impar, y es así que se generan los ceros en los coeficientes que anulan una infinidad de la potencias de *x*, y los términos que aparecen en $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + ...$ son los que tienen a los coeficientes

$$(p_{pd}(m) - p_{id}(m)) = \pm 1,$$

cuyas potencias correspondientes en los términos del polinomio sólo son pentagonales o afines a ellos, es decir, $\frac{3x^2 - x}{2}$ o $\frac{3x^2 + x}{2}$.

Este resultado fue verdaderamente sorprendente para sus contemporáneos y para los que lo retomaron posteriormente, como fue el caso de D'Alembert, Legendre, Franklin, Sylvester, Waring y Hardy, entre otros. Como ejemplo veamos los comentarios de André Weil [1974] ya que reflejan la importancia de este resultado de Euler:

> "Trabajando con series y productos, [Euler] descubrió un número de hechos que le parecieron bastante inusitados y sorprendentes. Se fijó en el siguiente producto infinito:
>
> $$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ \ldots$$
>
> y formalmente comenzó a expandirlo. Ya había obtenido antes muchos productos y series de ese tipo; en algunos casos obtuvo algo que dio lugar a una ley definida, y en otros casos las cosas parecieron ser más bien aleatorias. Pero con ésta tuvo bastante éxito. Calculó por lo menos quince o veinte términos; la fórmula comienza así:
>
> $$\prod (1-x^n) = 1 - x + x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} \ldots$$
>
> donde esta ley, ante los ojos inexpertos, puede que no se muestre a primera vista. En notación moderna, es como sigue:
>
> $$\prod_1^{\infty} (1-q^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}$$
>
> Donde hemos cambiado x por q ya que q se ha vuelto la notación estándar en la teoría de funciones elípticas desde Jacobi. Los exponentes forman una progresión de naturaleza simple. Esta relación fue inmediata para Euler después de escribir unos 20 términos; es muy probable que haya calculado unos 100. Muy razonablemente dice, "esto es bastante cierto, aunque no puedo probarlo"; diez años más tarde lo probó. Él no podría haber adivinado que probablemente ambos, serie y producto, serían parte de la teoría de funciones modulares elípticas. Éste es otro vínculo entre la teoría de números y la de funciones elípticas".

Antecedentes y demostraciones del teorema de los números pentagonales.

Desde noviembre de 1740 Euler ya había intercambiado correspondencia con Daniel Bernoulli acerca de las propiedades del producto $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$, y unos meses después publicó su primer comentario al respecto en el artículo de 1741, ***Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones*** (E158), y como ya se mencionó, ahí sólo enuncia el producto y una forma general de sus exponentes.

Durante la década de los 40 Euler sigue explorando la expresión sin llegar a una justificación que lo satisfaga, y en una carta que le escribe a Christian Goldbach en octubre 15, 1743 [véase: Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965], menciona:

> " Si estos factores $(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)$ etc. son multiplicados hasta el infinito, entonces se va generando la siguiente serie:
> $1-n^1-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+n^{51}+n^{57}-etc.$ de la cual es fácil mostrar por inducción que todos los términos son de la forma $n^{\frac{3xx+x}{2}}$, y que llevan el signo + cuando x es un número par, y el signo - cuando x es impar. De cualquier manera no he encontrado un método por el cual probar la identidad de estas dos expresiones. El honorable Prof. Niklaus Bernoulli tampoco ha sido capaz de probar nada de esto que no sea por inducción".

) 47 (

EVOLVTIO

PRODVCTI INFINITI

$(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$

IN SERIEM SIMPLICEM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Poſito $s=(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. facile patet fore:

$$s=1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-xx)-x^4(1-x)1-xx)(1-x^3)-\text{etc.}$$

quae ſeries cum iam ſit infinita, quaeritur, ſi ſinguli eius termini euoluantur, qualis ſeries ſecundum ſimplices poteſtates ipſius x ſit proditura. Cum igitur duo primi termini $1-x$ iam ſint euoluti, loco reliquorum omnium ſcribatur littera A, ita vt ſit $s=1-x-A$, ideoque

$$A=xx(1-x)+x^3(1-x)(1-xx)+x^4(1-x)(1-xx)(1-x^3)\text{ etc.}$$

Ilustración 3

Y aquí considérese que el proceso de inducción no es el método que actualmente usamos como herramienta demostrativa plenamente establecida, aquí se está refiriendo a una extensión de los cálculos para después ver que se cumple uno a uno, pero sin poder generalizarlo.

Ya sabemos que la primera mención de Euler sobre este punto fue en su artículo de 1741, pero él regresaría y abordaría el tema directamente en [1783] con el artículo *De mirabilis proprietatibus numerorum pentagonalium*, y en el mismo año publicó *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)\,(1-x^3)\ldots$ *in series simplicen,*

En estos artículos presenta un desarrollo del producto

$$S=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots\ldots\ldots$$

Y después de largos reacomodos lo expresa de la forma:

$$\begin{aligned}
S &= 1-x-Ax^2\\
Ax^2 &= x^2(1-x^3)-Bx^7\\
Bx^7 &= x^7(1-x^5)-Cx^{15}\\
Cx^{15} &= x^{15}(1-x^7)-Dx^{26}\\
Dx^{26} &= x^{26}(1-x^9)-Ex^{40}
\end{aligned}$$

De estas identidades tomamos sólo el primer sumando del lado derecho de cada una, y de manera general se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&(1-x^{2n-1})\\
&(1-x^{2(n+1)-1})x^{3n-1}\\
&(1-x^{2(n+2)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)}\\
&(1-x^{2(n+3)-1})x^{(3n-1)+(3(n+1)-1)+(3(n+2)-1)},
\end{aligned}$$

es importante notar que es de estos productos de donde se extraen los términos irreducibles del polinomio

$$S=1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\ldots$$

Del desarrollo de los productos en *S* se puede ver que los exponentes con coeficiente negativo atienden a una suma con términos de la forma 3n – 1, 3(n + 1) -1, 3(n + 2)-1, etc. Como puede apreciarse en el desarrollo anterior a esas observaciones, el exponente del término *x* que acompaña a C es:

$$(3n - 1) + (3(n + 1) - 1) + (3(n + 2) - 1) + \ldots$$

Entonces, la regla que surge aquí es clara. Se trata de una suma de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1)$$

Y que podemos desarrollar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n}(3i-1) = \sum_{i=1}^{n}3i - n = 3\sum_{i=1}^{n}i - n = 3(\frac{n(n+1)}{2}) - n = \frac{3n^2+3n-2n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

llegando nada menos que a una forma aproximada de los números pentagonales.

Sólo falta llegar a los términos con coeficientes positivos. Para ello analizamos nuevamente el conjunto de identidades en términos generales, y de ellas se puede extraer que los términos positivos tienen un exponente formado por la suma de:

$\sum_{i=1}^{n-1}(3i-1)$ más el número impar correspondiente al renglón de la tabla, es decir, 2n-1.

Entonces, el exponente es:

$$(\sum_{i=1}^{n-1}(3i-1)) + (2n - 1) = \frac{(n-1)(3n-2)}{2} + 2n - 1 = \frac{3n^2 - 2n - 3n + 2 + 4n - 2}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

es decir, precisamente el pentagonal *n*-ésimo con signo menos. Como este número está entre los otros dos, esto explica la alternancia entre los dos tipos de pentagonales y la forma en que se van generando.

Esta manera de llegar a los exponentes pentagonales no resultó del todo satisfactoria para Euler dado que sabía que no había logrado una demostración bajo los términos de lo que se concebía como demostración matemática. Es principalmente una construcción, algo confusa por su extensión, pero que dio lugar a que posteriormente otros la retomaran para formalizar una demostración.

Es importante mencionar que parte de los cálculos para llegar a estos resultados fueron previamente expuestos en 1760 en su artículo *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum.*

Las demostraciones que complacerían al más meticuloso en cuanto a la formalidad matemática llegarían posteriormente con Ferrers [véase Tattersall 2005, p. 311-317] y sus diagramas, también con Edwards [1983] y los métodos analíticos, los por inducción con Jordan Bell [2006] o por biyecciones con Erdos [véase Aigner y Ziegle 2010].

Este resultado de Euler coronó sus reflexiones sobre particiones y funciones generadoras que iniciaron con las preguntas de Philippe Naudé al inicio de los 40,[21] pero además, a partir de las primeras generalizaciones de Euler, las particiones ya se podían mover en un terreno de certidumbre, y ocupar un lugar propio en la teoría de los números, esperando que otros se interesaran por ellas como fue el caso de Hardy o de Ramanujan, por mencionar algunos muy conocidos.

[21] Pero a la vez éste fue el inicio de más estudios del producto

$$S = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7).$$

Por mencionar un ejemplo podemos recurrir al planteamiento de Edward Waring [1991] en 1782 sobre las potencias de las raíces del polinomio *S* y su relación con la suma de los divisores de la potencia.

COLOFÓN – RESPUESTAS VARIAS

Los juegos de azar pueden llegar a ser empleados como una herramienta pedagógica o también como una manera entretenida de generar modelos matemáticos a partir de datos experimentales. Y un caso particular de ellos es el juego de arrojar un determinado conjunto de dados. Sobre esta base, en el presente capítulo se retoma al juego de dados llamado *Pasadiez* –tratado en el Capítulo I- y se analizan otras de sus posibilidades. Buscamos entonces otros juegos similares al *Pasadiez* con sus propias reglas y dados no convencionales, es decir, dados con elementos repetidos, nulos o negativos.

Comencemos por recordar las características del *Pasadiez*:

El juego consiste en lanzar 3 dados iguales cuyas caras son {1, 2, 3, 4, 5, 6}. La tirada ganadora es aquella cuya suma de los puntos es mayor a diez y la perdedora el caso contrario.

Nos preguntamos

1) ¿Podemos generalizar el juego del pasadiez a ***n*** dados y ver que la representación de las particiones para los puntos anteriores al “Punto de Pase”[22] es igual a la representación de las particiones de los números mayores al “Punto de Pase”? Recuérdese que por “Punto de Pase” nos referimos al valor donde sucede una inflexión, es decir, el punto que marca la simetría entre los valores de la izquierda y los de la derecha (véase la tabla de abajo). En el caso de un número ***n*** de dados impares el punto de pase es ***(7n-1)/2*** y, en el caso de pares, es ***(7n)/2***.

2) Ya sabemos que con tres dados convencionales se pueden tener las particiones de los números entre 3 y 18, usando tres conjuntos con números entre 1 y 6, y cada uno de los números tiene una cantidad de particiones que se muestran en la tabla:

Puntos por sumar	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Número de	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

[22] Vassilios C. Hombas (2004) en su texto ***Generalizing Galileo’s Passedix Game*** llama a ese punto de inflexión “Passpoint”: Punto de pase.

Particiones																

Tabla 34

Entonces, surge la pregunta: ¿Podemos formar la misma cantidad de particiones para cada uno de los números de la tabla, pero con 3 dados diferentes a los convencionales? ¿Puedo generalizar la misma pregunta para *n* dados?

Pregunta uno

La primera pregunta atiende a la duda de poder justificar la existencia de patrones simétricos para las formas de representar al conjunto de números entre 2 y 12 con diferentes tiradas de los dos dados. Veamos qué ocurre. Cuando se juega con dos dados se tiene la siguiente tabla de particiones:

Suma de los dos dados	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de particiones del número de arriba	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabla 35

Cuando se juega con tres dados se obtiene la siguiente tabla:

Suma de los tres dados	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Cantidad de particiones del número de arriba	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Tabla 36

Como se puede ver en las tablas, las diferentes formas en que se pueden obtener los números 2 al 12 ó 3 al 18, con dos o tres dados respectivamente, tiene un comportamiento simétrico, es decir, para el caso de dos dados las cantidades se repiten cuando los números representados son menores que 6 y cuando son mayores que 6. Para el caso de tres dados la repetición se genera entre 3 y el 10, y en el intervalo 11 al 18.

Para justificar este comportamiento simétrico se tiene que considerar primero que cada dado tiene la característica de que al sumar cualesquiera dos caras opuestas la suma es siete. Entonces, cuando se arrojan tres dados se tendría como resultado la suma de tres caras a_1

+ a_2 + a_3, y la suma de sus tres caras opuestas correspondientes es *(7-* a_1*)* + *(7-* a_2*)* + *(7-* a_3*)*. Así, la suma total de las caras obtenidas y sus opuestas es $7\times3 = 21$.

Entonces, por cada resultado $a_1 + a_2 + a_3$ que se obtiene de arrojar los tres dados se obtiene su contraparte $(7- a_1) + (7- a_2) + (7- a_3)$. De esta forma, si tenemos *t* sumas que dan como resultado a *m*, entonces se tienen *t* sumas que dan como resultado a $(7\times3 – (a_1 + a_2 + a_3))= 21-m$. Por ejemplo, de la segunda tabla tenemos que el *7* puede ser representado por 15 particiones. Y por la correspondencia de las caras opuestas el *(21-7) = 14* puede también tener 15 particiones que lo representan. Entonces, por la correspondencia uno a uno entre las particiones formadas con las caras frontales y las de las caras opuestas, tenemos que se forma la estructura simétrica de las sumas.

Ahora, este resultado se puede generalizar cuando se emplean *n* dados, de manera que la tabla correspondiente tiene la siguiente estructura:

Suma de los *n* dados	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$		α		$6n-3$	$6n-2$	$6n-1$	$6n$
Cantidad de formas de obtener el número de arriba	1	a	b	c		λ		c	b	a	1

Tabla 37

Donde

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{6n-n}{2} + n = \dfrac{7n}{2} & \text{cuando n es par} \\[2ex] \dfrac{6n-(n-1)}{2} + (n-1) = \dfrac{7n-1}{2} & \text{cuando n es impar} \end{cases}$$

Así, en α es donde se encuentra el punto de inflexión –o punto de pase- para la simetría de las diferentes particiones que se pueden obtener para los números de los intervalos $[n,...,\alpha]$ *y* $[\alpha+1,…, 6n]$ *(ó* $[n,...,\alpha-1]$ *y* $[\alpha+1,…, 6n]$ cuando *n* es par).

Entonces, generalizando el caso anterior de tres dados, tenemos que si se arrojan *n* dados se obtiene una suma $a_1 + a_2 + a_3 + … + a_n$, que a la vez tiene su contraparte $(7- a_1) + (7- a_2) + (7- a_3) + … + (7- a_n)$. Y nuevamente, si tenemos *t* sumas que dan como resultado a *m*, entonces tenemos *t* sumas que dan como resultado a $(7 \times n - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)) = (7 \times n - m)$.

Ahora bien, Vassilios (2004) propone visualizar la simetría de las cantidades de particiones pero desde la perspectiva de que existe la misma probabilidad de que el resultado caiga en uno u otro lado según los intervalos mencionados arriba. Así, tenemos el siguiente resultado que expresa lo anterior:

Teorema

Sean *n* dados convencionales, donde *n* es impar. Demostrar que la probabilidad de que una tirada caiga en uno u otro de los intervalos de simetría es igual. Es decir, demostrar que:

$$\text{Prob.}\left[\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n\right)>\left(\frac{7n-1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

Demostración:

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ la tirada resultante de n (impar) dados convencionales.

Si resulta que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n>\left(\frac{7n-1}{2}\right)$, entonces,

podríamos tener que

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n \geq \left(\frac{7n-1}{2}\right)+1=\left(\frac{7n+1}{2}\right)$$

Y además, como

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n>\left(\frac{7n-1}{2}\right) \Rightarrow -\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n\right)<-\left(\frac{7n-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 7n-\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n\right)<7n-\left(\frac{7n-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(7-\alpha_1\right)+\left(7-\alpha_2\right)+\ldots+\left(7-\alpha_n\right)<\left(\frac{7n+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(7-\alpha_1\right)+\left(7-\alpha_2\right)+\ldots+\left(7-\alpha_n\right)\leq\left(\frac{7n+1}{2}\right)-1=\left(\frac{7n-1}{2}\right)$$

Entonces cada tirada $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$ tiene asociada una única tirada $\left(7-\alpha_1\right)+\left(7-\alpha_2\right)+\ldots+\left(7-\alpha_n\right)$ y viceversa. Además, cada una pertenece a un espacio de posibilidades de la misma cardinalidad, esto es, la tirada $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n$ cae en un espacio de posibilidades de cardinalidad $6n-\left(\frac{7n-1}{2}\right)=\frac{5n+1}{2}$, y la tirada $(7-\alpha_1)+(7-\alpha_2)+...+(7-\alpha_n)$ en el correspondiente $\left(\frac{7n-1}{2}\right)-(n-1)=\frac{5n+1}{2}$.

Y como $\frac{7n-1}{2}$ y $\frac{7n+1}{2}$ son consecutivos, entonces la probabilidad de que la suma de $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n$ sea mayor que $\frac{7n-1}{2}$ es $\frac{1}{2}$.

Para complementar, si

$$\sum \alpha_i = S \ , \ \sum \alpha_i^{'} = S^{'} \ \text{ y } S+S^{'}=7n,$$

entonces se tendría que las posibilidades de que las particiones *S* y *S’* aparezcan en diferentes tiradas de los *n* dados son las mismas, y esto es por el comportamiento simétrico de la forma en que aparecen las particiones (tiradas).

Así, si $S+S^{'}=7n$ se tendría que

$$\begin{aligned}\text{Prob}\left[S^{'}\right] &= \text{Prob}\left[\sum \alpha_i^{'}\right] = \text{Prob}\left[\sum \left(7-\alpha_i^{'}\right)\right] \\ &= \text{Prob}\left[7n-S^{'}\right], \text{y como } S+S'=7n \Rightarrow \\ &= \text{Prob}\left[S\right]\end{aligned}$$

Entonces, las probabilidades para cualesquiera dos particiones que sumen ambas 7n es la misma, para toda n.

De los resultados anteriores se concluye que la simetría de las particiones queda completamente comprobada. Entonces podemos considerar la posibilidad de usar dados con 8, 10, 12, 20, 30 o 100 caras; donde la suma de las caras opuestas tienen que sumar lo mismo; por ejemplo para el caso de uno con 20 lados la suma de las caras tiene que ser 21; para el de 10 la suma tiene que ser de 11. Ahora bien, cabría preguntarse si la colocación de los puntos de cada dado fuera distinta a la tradicional, es decir, por ejemplo, que la cara opuesta al uno no fuera el seis sino algún otro número, ¿tendría algún orden ese pequeño caos? Es decir, si en lugar de que el dado tradicional, que podría ilustrarse como

	1	
	3	
	6	
2	4	5

se tuviera un dado no tradicional con la siguiente distribución

	1	
	6	
	2	
4	5	3

¿Cómo sería su comportamiento?

Es claro que se mantendrían las mismas particiones en cualquiera de las distribuciones como lo indican las tablas 35 y 36; sin embargo, para mantener la correspondencia uno a uno —por ejemplo en el caso de tres dados, la correspondencia simétrica entre el 8 y el 13—, habrá de considerarse como cara opuesta a aquella que sume 7 y no cualquier cara físicamente opuesta. En el caso del dado no tradicional mostrado anteriormente, la tirada 1+1+1 = 3, con una única posible representación, tendría su correspondiente cara física opuesta 2+2+2 = 6, con 25 formas posibles de ser obtenida. Así, las posibilidades ya no son las mismas para las caras opuestas a cada tirada.

Pregunta dos

Para este problema tenemos algunas variantes.

Parte 1) Encontrar dos dados que puedan generar la misma cantidad de particiones, como se muestra en el segundo renglón de la tabla de abajo, aunque cada conjunto de particiones no represente exactamente a las cantidades mostradas en el primer renglón.

Suma de los dos dados	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de particiones del número de arriba	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabla 38

Esto es, lo que queremos es encontrar dados que generen los mismos espacios de probabilidades, a pesar de que los números resultantes no sean el 2, 3, 4,..., 12 para el caso de dos dados, o que sean el 3, 4, 5,..., 18 para tres. Por ejemplo, con dos dados convencionales se pueden generar las particiones de la tabla de arriba, pero con los dados {1, 5, 9, 13, 17, 21} y {1, 5, 9, 13, 17, 21} obtenemos los datos de la siguiente tabla

Suma de los dos dados	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
Cantidad de particiones del número de arriba	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabla 39

Así, los números que aparecen en el primer renglón de cada tabla tienen las mismas cantidades de particiones que los pueden representar como suma de los respectivos conjuntos asociados con los dados correspondientes. Y desde el punto de vista del azar los números {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} y {2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42} tiene las mismas posibilidades de aparecer, respectivamente, pero con dados diferentes. Además, se analizarán los casos para tres o más dados.

Parte 2) Aquí pretendemos encontrar dos dados que generen los mismos conjuntos de particiones del segundo renglón, para los mismos números del primer renglón de la tabla. Esto es, encontrar dos dados diferentes a los convencionales, y no necesariamente iguales entre ellos, de tal forma que generen los mismos datos –de ambos renglones- de la tabla de arriba. De igual forma se analizarán los casos para más dados.

PARTE 1)

Caso de dos dados iguales con caras que corresponden al conjunto convencional {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Como ya se mencionó en el capítulo III, es posible asociar los números de las caras de cada dado a los exponentes de un polinomio de grado 6 y de coeficientes unitarios. Entonces, con ambos polinomios asociados a los dados, es posible obtener una función generadora que dé lugar a las particiones de los números entre 2 y 12. Así, si se desarrolla el producto de los polinomios, obtenemos que

$$\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right) =$$

$$\begin{array}{cccccc}
x^1x^1+ & x^1x^2+ & x^1x^3+ & x^1x^4+ & x^1x^5+ & x^1x^6+ \\
x^2x^1+ & x^2x^2+ & x^2x^3+ & x^2x^4+ & x^2x^5+ & x^2x^6+ \\
x^3x^1+ & x^3x^2+ & x^3x^3+ & x^3x^4+ & x^3x^5+ & x^3x^6+ \\
x^4x^1+ & x^4x^2+ & x^4x^3+ & x^4x^4+ & x^4x^5+ & x^4x^6+ \\
x^5x^1+ & x^5x^2+ & x^5x^3+ & x^5x^4+ & x^5x^5+ & x^5x^6+ \\
x^6x^1+ & x^6x^2+ & x^6x^3+ & x^6x^4+ & x^6x^5+ & x^6x^6
\end{array}$$

Sabemos por álgebra elemental que el siguiente paso es agrupar los términos que tengan potencias iguales, pero no se hará aún, porque lo que interesa es ver el comportamiento de los exponentes como las particiones de un entero. Así, del desarrollo anterior extraemos sólo las parejas de exponentes y las asociamos con aquellas cuya suma es igual. Y para que sea de manera más esquemática lo haremos a través de una tabla que contiene a las parejas de exponentes del polinomio y las sumas comunes quedan de manera natural en diagonal por la forma en que se desarrollaron los productos de $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ y $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$ (véase la tabla de abajo). Con ello logramos que los coeficientes, es decir, las particiones queden agrupados, y así será más fácil su conteo para obtener el número total de ellas para cada número entre 2 y 12:

# de particiones	1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
1	2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
2	3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
3	4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
4	5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
5	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6
6	5	4	3	2	1	# de particiones

Tabla 40

Ya sabíamos que el total de particiones de los dos dados es 6 x 6 = 36, y si se suman las particiones que hay por diagonal en la tabla se obtiene que las particiones para 2 es uno, esto es, $p(2)=1$, para el 3 son 2, es decir $p(3)=2$, y así sucesivamente

$p(4)=3,\ p(5)=4,\ p(6)=5,\ p(7)=6,\ p(8)=5,\ p(9)=4,\ p(10)=3,$ p(11)=2, p(12)=1.

Mediante un proceso elemental se llega a que

$\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\times\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$ es igual a

$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$.

Pero como se puede ver, lo importante de este producto de polinomios es la interpretación de la relación entre el coeficiente y el exponente de cada término. Y nos referimos a que cada potencia de *x* tendrá un coeficiente que indica de cuántas maneras esta potencia puede resultar de la multiplicación de dos términos de la expresión, esto es, de cuántas maneras su exponente puede ser producido por la adición de dos números de la secuencia 1, 2, 3, 4, 5, 6. Así, el término Mx^N nos indica que el número *N* puede tener tantas particiones con dos números iguales o diferentes entre el 1 y el 6 como lo indica el coeficiente M. Ejemplo: el análisis de $5x^6$ nos dice que el número 6 puede tener cinco particiones con dos dados: 6=1+5, 6=2+4, 6=3+3, 6=4+2, 6=5+1.

Caso de dos dados iguales pero con caras distintas a las convencionales

Si queremos tener una forma general para construir dados con caras diferentes a las convencionales, y generar el mismo conjunto de coeficientes del polinomio $1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$, es decir, la misma cantidad de particiones asociadas con cada partición de x, tenemos que multiplicar los siguientes polinomios asociados con dos dados:

$$(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)=$$

$$\begin{array}{llllll}
x^{a+a}+ & x^{a+b}+ & x^{a+c}+ & x^{a+d}+ & x^{a+e}+ & x^{a+f}+ \\
x^{b+a}+ & x^{b+b}+ & x^{b+c}+ & x^{b+d}+ & x^{b+e}+ & x^{b+f}+ \\
x^{c+a}+ & x^{c+b}+ & x^{c+c}+ & x^{c+d}+ & x^{c+e}+ & x^{c+f}+ \\
x^{d+a}+ & x^{d+b}+ & x^{d+c}+ & x^{d+d}+ & x^{d+e}+ & x^{d+f}+ \\
x^{e+a}+ & x^{e+b}+ & x^{e+c}+ & x^{e+d}+ & x^{e+e}+ & x^{e+f}+ \\
x^{f+a}+ & x^{f+b}+ & x^{f+c}+ & x^{f+d}+ & x^{f+e}+ & x^{f+f}=
\end{array}$$

Seguimos el mismo acomodo de los sumandos como en el caso anterior, y como queremos que los coeficientes sean los mismos que los del polinomio $1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$, entonces podemos suponer que los exponentes son iguales en todos los términos que están en cada diagonal del arreglo de arriba. Para ello de

$$\lambda_1 x^{\beta_1} \;+\; \lambda_2 x^{\beta_2} \;+\; \ldots \;+\; \lambda_{11} x^{\beta_{11}}$$

se obtiene que

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4,\ \lambda_5 = 5,\ \lambda_6 = 6,\ \lambda_7 = 5,\ \lambda_8 = 4,$$
$$\lambda_9 = 3,\ \lambda_{10} = 2,\ \lambda_{11} = 1.$$

Ahora bien, para conservar estos coeficientes, independientemente de cómo sean $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$, seguimos el procedimiento mencionado de sumar en diagonal, y con ello sucede que

$2b=a+c \Rightarrow c=2b-a$ (de la tercera diagonal)

$a+d=b+c \Rightarrow d=b+c-a \Rightarrow d=b+2b-a-a=3b-2a$ (de la cuarta diagonal)

$a+e=b+d \Rightarrow e=b+d-a \Rightarrow e=b+3b-2a-a=4b-3a$ (de la quinta diagonal)

$a+f=b+e \Rightarrow f=b+e-a \Rightarrow f=b+4b-3a-a=5b-4a$ (de la sexta diagonal)

Cabe mencionar que para que esto pase, todos los elementos de $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ tienen que ser estrictamente diferentes entre ellos, o bien todos iguales; si no fuera así, entonces el arreglo rectangular - de arriba- para obtener los coeficientes $1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 5\quad 4\quad 3\quad 2\quad 1$, se vería alterado y la relación de los coeficientes en las diagonales ya no generaría lo que necesitamos[23].

Entonces, el formato del dado tendría las siguientes características: $\{a, b, 2b-a, 3b-2a, 4b-3a, 5b-4a\}$, y nótese que la diferencia entre el número de una cara y su inmediata anterior es constante, es decir, ***b-a***. Además, la suma de las caras opuestas es constante e igual a 5b-3a.

Y con lo anterior ya podemos generar ejemplos de dos dados iguales –diferentes a las convencionales- que den lugar a cantidades de particiones iguales a las de la función generadora $1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$.

---

[23] El caso donde se manejan dados donde sus caras se puedan repetir se abordará más adelante.

Ahora, regresando a $\{a, b, 2b-a, 3b-2a, 4b-3a, 5b-4a\}$, tomamos valores para $a\ y\ b$ y obtenemos respectivamente más dados. En la siguiente tabla podemos ver algunos ejemplos:

a	b	$2b-a$	$3b-2a$	$4b-3a$	$5b-4a$
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	5	7	9	11
1	4	7	10	13	16
1	5	9	13	17	21
1	0	–1	–2	–3	–4
0	1	2	3	4	5

Tabla 41

Así, con el polinomio

$$\left(x^{a}+x^{b}+x^{(2b-a)}+x^{(3b-2a)}+x^{(4b-3a)}+x^{(5b-4a)}\right)$$

el generador es:

$$\left(x^{a}+x^{b}+x^{(2b-a)}+x^{(3b-2a)}+x^{(4b-3a)}+x^{(5b-4a)}\right)$$
$$\left(x^{a}+x^{b}+x^{(2b-a)}+x^{(3b-2a)}+x^{(4b-3a)}+x^{(5b-4a)}\right)=$$

$$x^{2a}+2x^{a+b}+3x^{2b}+4x^{3b-a}+5x^{4b-2a}+6x^{5b-3a}+$$
$$5x^{6b-4a}+4x^{7b-5a}+3x^{8b-6a}+2x^{9b-7a}+x^{10b-8a}$$

Y de la tabla de ejemplos, si tomamos a $a=1\ y\ b=4$, obtenemos al polinomio generador $x^{2}+2x^{5}+3x^{8}+4x^{11}+5x^{14}+6x^{17}+5x^{20}+4x^{23}+3x^{26}+2x^{29}+x^{32}$.

En resumen: con $a=1\ y\ b=4$ tenemos dos dados iguales con las caras {1, 4, 7, 10, 13, 16}, y de ellos se pueden formar las particiones de los números {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32}, donde cada uno tendrá la cantidad de particiones {1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2,1} respectivamente. Y para finalizar tenemos que este último conjunto es el mismo que el de los coeficientes de $1x^{2}+2x^{3}+3x^{4}+4x^{5}+5x^{6}+6x^{7}+5x^{8}+4x^{9}+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$, que es lo que se quería encontrar.

Caso de dos dados diferentes y cada uno con caras distintas
a las convencionales

Ahora se expresan las particiones de dos sumandos, donde uno pertenece al conjunto $\{a,\ b,\ c, d,\ e,\ f\}$ y el otro a $\{a',\ b',\ c', d',\ e',\ f'\}$, y además los conjuntos son diferentes entre ellos y diferentes de $\{1,\ 2,\ 3, 4,\ 5,\ 6\}$.

Procediendo como en los casos anteriores, se multiplican los dos polinomios y se forma el arreglo de igual manera

$$\left(x^a + x^b + x^c + x^d + x^e + x^f\right)\left(x^{a'} + x^{b'} + x^{c'} + x^{d'} + x^{e'} + x^{f'}\right) =$$

$$\begin{array}{llllll}
x^{a+a'}+ & x^{a+b'}+ & x^{a+c'}+ & x^{a+d'}+ & x^{a+e'}+ & x^{a+f'}+ \\
x^{b+a'}+ & x^{b+b'}+ & x^{b+c'}+ & x^{b+d'}+ & x^{b+e'}+ & x^{b+f'}+ \\
x^{c+a'}+ & x^{c+b'}+ & x^{c+c'}+ & x^{c+d'}+ & x^{c+e'}+ & x^{c+f'}+ \\
x^{d+a'}+ & x^{d+b'}+ & x^{d+c'}+ & x^{d+d'}+ & x^{d+e'}+ & x^{d+f'}+ \\
x^{e+a'}+ & x^{e+b'}+ & x^{e+c'}+ & x^{e+d'}+ & x^{e+e'}+ & x^{e+f'}+ \\
x^{f+a'}+ & x^{f+b'}+ & x^{f+c'}+ & x^{f+d'}+ & x^{f+e'}+ & x^{f+f'}
\end{array}$$

Y para conservar los coeficientes de la función generadora

$$1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 1x^{12},$$

es decir, los números {1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2,1}, establecemos las siguientes relaciones entre los exponentes de las diagonales:

$a + b' = b + a' \Rightarrow b - a = b' - a' = k$ (de la segunda diagonal)

$\Rightarrow b = a + k$

$b' = a' + k$

y por otro lado

$a + c' = b + b' = c + a' \Rightarrow$ (de la tercera diagonal)

$b' - c' = a - b \Rightarrow c' = b' + k$

$b' - a' = c - b \Rightarrow c = b + k$

$a + d' = b + c' = c + b' = d + a' \Rightarrow$ (de la cuarta diagonal)

$d' = c' + k$

$d = c + k$

$a + e' = b + d' = c + c' = d + b' = e + a' \Rightarrow$ (de la quinta diagonal)
$e' = d' + k$
$e = d + k$

$a + f' = b + e' = c + d' = d + c' = e + b' = f + a' \Rightarrow$ (de la sexta diagonal)
$f' = e' + k$
$f = e + k$

Si consideramos que $k = b - a,\ k = b' - a'$, y sustituyendo *b* en *c, c* en *d, d* en *e* y *e* en *f*, obtenemos que $\{a,\ b,\ c, d,\ e,\ f\} = \{a,\ a+k,\ a+2k, a+3k,\ a+4k,\ a+5k\}$, y de manera semejante para $\{a',\ b',\ c', d',\ e',\ f'\} = \{a', a'+k, a'+2k, a'+3k, a'+4k, a'+5k\}$.

Así, como cada conjunto representa a cada dado

$$\Rightarrow \left(x^{a} + x^{a+k} + \ldots + x^{a+5k}\right)\left(x^{a'} + x^{a'+k} + \ldots + x^{a'+5k}\right) =$$
$$x^{a+a'} + 2x^{a+a'+k} + 3x^{a+a'+2k} + 4x^{a+a'+3k} + 5x^{a+a'+4k} + 6x^{a+a'+5k} +$$
$$5x^{a+a'+6k} + 4x^{a+a'+7k} + 3x^{a+a'+8k} + 2x^{a+a'+9k} + x^{a+a'+10k}$$

con $k = b - a = b' - a'$.Y ésta es la función generadora de las particiones de los exponentes.

Como ejemplo de parejas de dados que generan a los mismos coeficientes de $1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 1x^{12}$ tenemos la tabla

a	*a*+*k*	*a*+2*k*	*a*+3*k*	*a*+4*k*	*a*+5*k*		*a*'	*a*'+*k*	*a*'+2*k*	*a*'+3*k*	*a*'+4*k*	*a*'+5*k*
0	0	0	0	0	0	*y*	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	*y*	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	*y*	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	*y*	10	11	12	13	14	15
1	3	5	7	9	11	*y*	3	5	7	9	11	13
1	3	5	7	9	11	*y*	11	13	15	17	19	21
6	5	4	3	2	1	*y*	1	0	–1	–2	–3	–4

Tabla 42

En resumen: tenemos un conjunto infinito de parejas de conjuntos que asociamos a las caras de dados. Estos pueden generar, a través de cada tirada una suma (partición) de determinados números que tienen un espacio de posibilidades igual al de los dados convencionales $\{1,\ 2,\ 3, 4,\ 5,\ 6\}$.

Así, con los dados convencionales tenemos la función generadora $1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$. Y si tomamos por ejemplo —de la tabla de arriba— $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ y $\{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, su función generadora sería

$$1x^4+2x^6+3x^8+4x^{10}+5x^{12}+6x^{14}+5x^{16}+4x^{18}+3x^{20}+2x^{22}+1x^{24},$$

y nótese que tiene los mismos coeficientes que la anterior función generadora. Finalmente, los números del conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, ..., 12\}$ tienen las particiones correspondientes a los coeficientes, respectivamente, y las mismas cantidades de particiones tienen los números $\{4, 6, 8, 10, 12, ..., 24\}$. Entonces, con dos juegos de dados diferentes podemos generar números con el mismo espacio de posibilidades.

Es importante observar que es posible conservar el orden de aparición de los coeficientes del polinomio

$$1x^4+2x^6+3x^8+4x^{10}+5x^{12}+6x^{14}+5x^{16}+4x^{18}+3x^{20}+2x^{22}+1x^{24}$$

en los otros polinomios generadores, correspondientes a las otras parejas de dados, porque estos se construyeron respetando la alternancia ascendente y descendente de los exponentes en el producto de los dos polinomios asociados con los dos dados, así como la aparición de los productos en las diagonales del rectángulo que se formó con los 36 productos.

Caso cuando los dos dados son diferentes, pero con la posibilidad de que algunas de las caras puedan ser repetidas (en este caso consideramos a dos de ellas iguales).

Con esta configuración de los dados se busca nuevamente que se conserve el mismo espacio de posibilidades de los dos dados iguales y además convencionales. Esto es, se necesitan dos polinomios que den origen a una función generadora con los mismos coeficientes -los del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2,1\}$- correspondientes a las particiones de los dados tradicionales.

Comencemos por multiplicar los polinomios en cuestión:

$$(x^{a}+x^{b}+x^{c}+x^{d}+x^{e}+x^{f})(x^{a'}+x^{b'}+x^{b'}+x^{d'}+x^{d'}+x^{f'})=$$
$$x^{a}x^{a'}+x^{a}x^{b'}+x^{a}x^{b'}+x^{a}x^{d'}+x^{a}x^{d\acute{}}+x^{a}x^{f'}+$$
$$x^{b}x^{a'}+x^{b}x^{b'}+x^{b}x^{b'}+x^{b}x^{d'}+x^{b}x^{d'}+x^{b}x^{f'}+$$
$$x^{c}x^{a'}+x^{c}x^{b'}+x^{c}x^{b'}+x^{c}x^{d'}+x^{c}x^{d'}+x^{c}x^{f'}+$$
$$x^{d}x^{a'}+x^{d}x^{b'}+x^{d}x^{b'}+x^{d}x^{d'}+x^{d}x^{d'}+x^{d}x^{f'}+$$
$$x^{e}x^{a'}+x^{e}x^{b'}+x^{e}x^{b'}+x^{e}x^{d'}+x^{e}x^{d'}+x^{e}x^{f'}+$$
$$x^{f}x^{a'}+x^{f}x^{b'}+x^{f}x^{b'}+x^{f}x^{d'}+x^{f}x^{d'}+x^{f}x^{f'}=$$

Como se puede observar, dadas las características de sus exponentes, existen dos columnas que pueden ser agrupadas con otras:

$$x^{a}x^{a'}+2x^{a}x^{b'}+2x^{a}x^{d'}+x^{a}x^{f'}+$$
$$x^{b}x^{a'}+2x^{b}x^{b'}+2x^{b}x^{d'}+x^{b}x^{f'}+$$
$$x^{c}x^{a'}+2x^{c}x^{b'}+2x^{c}x^{d'}+x^{c}x^{f'}+$$
$$x^{d}x^{a'}+2x^{d}x^{b'}+2x^{d}x^{d'}+x^{d}x^{f'}+$$
$$x^{e}x^{a'}+2x^{e}x^{b'}+2x^{e}x^{d'}+x^{e}x^{f'}+$$
$$x^{f}x^{a'}+2x^{f}x^{b'}+2x^{f}x^{d'}+x^{f}x^{f'}$$

Además, recordemos que para el polinomio resultante se busca conservar los coeficientes {1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2,1}. Entonces, para ello se reacomodan los términos de tal manera que las diagonales quedan estructuradas de la siguiente manera:

$$x^{a}x^{a'}+2x^{a}x^{b'}+2x^{a}x^{d'}+x^{a}x^{f'}+$$
$$x^{b}x^{a'}+2x^{b}x^{b'}+2x^{b}x^{d'}+x^{b}x^{f'}+$$
$$x^{c}x^{a'}+2x^{c}x^{b'}+2x^{c}x^{d'}+x^{c}x^{f'}+$$
$$x^{d}x^{a'}+2x^{d}x^{b'}+2x^{d}x^{d'}+x^{d}x^{f'}+$$
$$x^{e}x^{a'}+2x^{e}x^{b'}+2x^{e}x^{d'}+x^{e}x^{f'}+$$
$$+x^{f}x^{a'}+2x^{f}x^{b'}+2x^{f}x^{d'}+x^{f}x^{f'}$$

Y escrito de otra manera

$$
\begin{array}{l}
x^{a}x^{a'}+2x^{a}x^{b'}+2x^{a}x^{d'}+x^{a}x^{f'}+\\
\qquad x^{b}x^{a'}+2x^{b}x^{b'}+2x^{b}x^{d'}+x^{b}x^{f'}+\\
\qquad\qquad x^{c}x^{a'}+2x^{c}x^{b'}+2x^{c}x^{d'}+x^{c}x^{f'}+\\
\qquad\qquad\qquad x^{d}x^{a'}+2x^{d}x^{b'}+2x^{d}x^{d'}+x^{d}x^{f'}+\\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^{e}x^{a'}+2x^{e}x^{b'}+2x^{e}x^{d'}+x^{e}x^{f'}+\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^{f}x^{a'}+2x^{f}x^{b'}+2x^{f}x^{d'}+x^{f}x^{f'}\\
\hline
1x^{a+a'}+2x^{a+b'}\quad +3\ldots\quad +4\ldots\quad +5\ldots\quad +6\ldots\quad +5\ldots\quad +4\ldots\quad +3\ldots\quad +2x^{f+d'}\quad +1x^{f+f'}
\end{array}
$$

Y para que estos números sean los coeficientes, entonces se requiere que los exponentes cumplan con lo siguiente:

$\Rightarrow$

$a+d'=b+a'$ (de la tercera diagonal)

$a+f'=b+b'=c+a'$ (de la cuarta diagonal)

$b+d'=c+b'=d+a'$ (de la quinta diagonal)

$b+f'=c+d'=d+b'=e+a'$ (de la sexta diagonal)

$c+f'=d+d'=e+b'$ (de la séptima diagonal)

$d+f'=e+d'=f+a'$ (de la octava diagonal)

$e+f'=f+b'$ (de la novena diagonal)

Y de estas igualdades se obtiene que:

$$a+d'=b+a'\Rightarrow b-a=d'-a'$$
$$a+f'=b+b'=c+a'\Rightarrow b-a=f'-b',c-b=b'-a'$$
$$b+d'=c+b'=d+a'\Rightarrow c-b=d'-b',d-c=b'-a'$$
$$b+f'=c+d'=d+b'=e+a'\Rightarrow c-b=f'-d',d-c=d'-b',e-d=b'-a'$$
$$c+f'=d+d'=e+b'\Rightarrow d-c=f'-d',e-d=d'-b'$$
$$d+f'=e+d'=f+a'\Rightarrow e-d=f'-d',f-e=d'-a'$$
$$e+f'=f+b'\Rightarrow f-e=f'-b'$$

y posteriormente se puede llegar a que

$$b'-a'=f'-d'=d'-b'=c-b=d-c=e-d,$$

Y denótese a estas diferencias con una constante *k.*

Como $f'-d'=d'-b'=k \Rightarrow f'-b'=2k$ y, además, ya que

$$f'-d'=k,\ d'-b'=k, b'-a'=k\ ,$$

entonces, $f'-b'=d'-a'=2k$.

De forma análoga, como $c-b=d-c=k \Rightarrow d-b=2k$ y, además, dado que $c-b=\mathrm{e}-d \Rightarrow d-b=e-c=2k$.

Por lo tanto $f'-b'=d'-a'=d-b=e-c=b-a=f-e=2k$.

Así, de estos últimos resultados podemos despejar y sustituir de manera recursiva para obtener de manera explícita los dos conjuntos $\{a',b',b',d',d',f'\}$ y $\{a,b,c,d,e,f\}$ o su equivalente por las igualdades anteriores:

$\{a',a'+k,a'+k,a'+2k,a'+2k,a'+3k\}$ y $\{a,a+2k,a+3k,a+4k,a+5k,a+7k\}$

Cuyo polinomio general es:

$$1x^{a'+a}+2x^{a'+a+k}+3x^{a'+a+2k}+4x^{a'+a+3k}+5x^{a'+a+4k}+6x^{a'+a+5k}+$$
$$5x^{a'+a+6k}+4x^{a'+a+7k}+3x^{a'+a+8k}+2x^{a'+a+9k}+1x^{a'+a+10k}$$

Como ejemplos de estos dados tenemos que para *k*=1:

a	*a*+2*k*	*a*+3*k*	*a*+4*k*	*a*+5*k*	*a*+7*k*		*a*'	*a*'+*k*	*a*'+*k*	*a*'+2*k*	*a*'+2*k*	*a*'+3*k*
0	2	3	4	5	7	*y*	1	2	2	3	3	4
1	3	4	5	6	8	*y*	1	2	2	3	3	4
2	4	5	6	7	9	*y*	0	1	1	2	2	3
–1	1	2	3	4	6	*y*	10	11	11	12	12	13
10	12	13	14	15	17	*y*	–1	0	0	1	1	2
–8	–6	–5	–4	–3	–1	*y*	–5	–4	–4	–3	–3	–2
0	2	3	4	5	7	*y*	0	1	1	2	2	3

Tabla 43

Y un ejemplo desarrollado es:

$$\left[x^1+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8\right]\left[x^1+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4\right]=$$

$(x^1+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8)(x^1+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4)=$

$x^{1+1}+x^{1+2}+x^{1+2}+x^{1+3}+x^{1+3}+x^{1+4}+$

$x^{3+1}+x^{3+2}+x^{3+2}+x^{3+3}+x^{3+3}+x^{3+4}+$

$x^{4+1}+x^{4+2}+x^{4+2}+x^{4+3}+x^{4+3}+x^{4+4}+$

$x^{5+1}+x^{5+2}+x^{5+2}+x^{5+3}+x^{5+3}+x^{5+4}+$

$x^{6+1}+x^{6+2}+x^{6+2}+x^{6+3}+x^{6+3}+x^{6+4}+$

$x^{8+1}+x^{8+2}+x^{8+2}+x^{8+3}+x^{8+3}+x^{8+4}=$

$x^{1+1}+2x^{1+2}+2x^{1+3}+x^{1+4}+$

$+1x^{3+1}+2x^{3+2}+2x^{3+3}+x^{3+4}+$

$+x^{4+1}+2x^{4+2}+2x^{4+3}+x^{4+4}+$

$+x^{5+1}+2x^{5+2}+2x^{5+3}+x^{5}y^{4}+$

$+x^{6+1}+2x^{6+2}+2x^{6+3}+x^{6+4}+$

$+x^{8+1}+2x^{8+2}+2x^{8+3}+x^{8+4}$

$x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$

Para concluir, el caso en el que los dos dados son diferentes pero con algunas caras posiblemente repetidas —dos de ellas iguales– queda resuelto con la función generadora:

$$\begin{aligned}&1x^{a'+a}+2x^{a'+a+k}+3x^{a'+a+2k}+4x^{a'+a+3k}+5x^{a'+a+4k}+6x^{a'+a+5k}+\\&5x^{a'+a+6k}+4x^{a'+a+7k}+3x^{a'+a+8k}+2x^{a'+a+9k}+1x^{a'+a+10k}\end{aligned}.$$

Cuando los dos dados son diferentes, pero con sólo una de las caras -en uno de los dos dados- posiblemente repetida.

Ésta es la última configuración que se presenta para dos dados, y se podría pensar que la exposición será semejante a los otros casos, pero no es así.

Como en los casos anteriores, con esta configuración se busca nuevamente que se conserve el mismo espacio de posibilidades, esto es, que se generen los mismos coeficientes que en los dos dados convencionales.

Entonces, se multiplican los polinomios como antes:

$$(x^{a}+x^{b}+x^{c}+x^{d}+x^{e}+x^{f})(x^{a'}+x^{b'}+x^{c'}+x^{c'}+x^{d'}+x^{f'})=$$
$$x^{a}x^{a'}+x^{a}x^{b'}+x^{a}x^{c'}+x^{a}x^{c'}+x^{a}x^{d´}+x^{a}x^{f'}+$$
$$x^{b}x^{a'}+x^{b}x^{b'}+x^{b}x^{c'}+x^{b}x^{c'}+x^{b}x^{d'}+x^{b}x^{f'}+$$
$$x^{c}x^{a'}+x^{c}x^{b'}+x^{c}x^{c'}+x^{c}x^{c'}+x^{c}x^{d'}+x^{c}x^{f'}+$$
$$x^{d}x^{a'}+x^{d}x^{b'}+x^{d}x^{c'}+x^{d}x^{c'}+x^{d}x^{d'}+x^{d}x^{f'}+$$
$$x^{e}x^{a'}+x^{e}x^{b'}+x^{e}x^{c'}+x^{e}x^{c'}+x^{e}x^{d'}+x^{e}x^{f'}+$$
$$x^{f}x^{a'}+x^{f}x^{b'}+x^{f}x^{c'}+x^{f}x^{c'}+x^{f}x^{d'}+x^{f}x^{f'}=$$

y sabemos que los exponentes tienen que sumar lo mismo en cada una de las diagonales para conservar los coeficientes del polinomio original:

$$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}.$$

Entonces, bajo las condiciones mencionadas se tiene que los exponentes se comportan con las siguientes características:

$a+b'=b+a'$ (de la segunda diagonal)

$a+c'=b+b'$ (de la tercera diagonal)

$a+d'=b+c'=c+a'$ (de la cuarta diagonal)

$a+f'=b+d'=c+b'=d+a'=e+a'$ (de la quinta diagonal)

$b+f'=c+c'=d+a'=e+b'=f+a'$ (de la sexta diagonal)

$c+d'=d+c'=e+c'$ (de la séptima diagonal)

$c+f'=d+d'=e+d'=f+b'$ (de la octava diagonal)

$e+f'=f+c'$ (de la novena diagonal)

$d+f'=f+d'$ (de la décima diagonal)

Posteriormente se tiene que:

$$a+b'=b+a' \quad \Rightarrow b-a=b'-a'$$
$$a+c'=b+b' \quad \Rightarrow b-a=c'-b'$$
$$a+d'=b+c'=c+a' \quad \Rightarrow b-a=d'-c' \ , c-b=c'-a'$$
$$a+f'=b+d'=c+b'=d+a'=e+a' \quad \Rightarrow b-a=f'-d' \ , c-b=d'-b', d-c=b'-a' \ , e=d$$
$$b+f'=c+c'=d+a'=e+b'=f+a' \quad \Rightarrow c-b=f'-c' \ , d-c=c'-a' \ , \ f-e=b'-a'$$
$$c+d'=d+c'=e+c' \quad \Rightarrow d-c=d'-c' \ , e=d$$
$$c+f'=d+d'=e+d'=f+b' \Rightarrow d-c=f'-d' \ , \ e=d, \ f-e=d'-b'$$
$$e+f'=f+c' \Rightarrow f-e=f'-c'$$
$$d+f'=f+d' \Rightarrow f-d=f'-d'$$

Si se considera que $b-a=k$ entonces se obtiene que

$$b'-a'=c'-b'=d'-c'=f'-d'=b-a=f-e=k$$

y de $b'-a'=c'-b'=k \Rightarrow c'-a'=2k \ \Rightarrow$

$$c'-a'=c-b=d'-b'=f'-c'=f-e=2k \ ,$$

finalmente se muestra que $f-e=k$ y $f-e=2k$, lo cual sólo sucede cuando $k = 0$. Entonces, ello implicaría que todas las caras fueran iguales entre ellas, y no es lo que se buscaba. Por lo tanto el caso donde los dos dados son diferentes, pero que sólo una de las caras se repite, es inexistente.

Ya se mostró que es posible generar una infinidad de parejas de conjuntos de seis elementos cada uno —que representan a los dados—, y que con ellos es posible formar conjuntos de particiones que tienen la misma cardinalidad que los generados por los dos conjuntos convencionales

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ y } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

es decir, puedo construir dados diferentes a los convencionales que me generen los mismos coeficientes que el polinomio generador:

$$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12} \ .$$

Para terminar esta parte de dos conjuntos se presenta una tabla-resumen de los dos conjuntos (dados) y los polinomios generadores que siempre tendrán los mismos coeficientes (particiones asociadas con cada número).

Casos en los que se conserva el número de particiones (o espacio de posibilidades) representadas en los coeficientes del polinomio generador
Dos dados iguales convencionales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **Polinomio generador:** $1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$
Dos dados iguales no convencionales $\{a, b, 2b-a, 3b-2a, 4b-3a, 5b-4a\}$ **Polinomio generador:** $x^{2a}+2x^{a+b}+3x^{2b}+4x^{3b-a}+5x^{4b-2a}+6x^{5b-3a}+$ $5x^{6b-4a}+4x^{7b-5a}+3x^{8b-6a}+2x^{9b-7a}+x^{10b-8a}$
Dos dados diferentes y distintos a los convencionales: $\{a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ a+4k,\ a+5k\}$ y $\{a', a'+k, a'+2k, a'+3k, a'+4k, a'+5k\}$. Para cualquier k en los enteros **Polinomio generador:** $x^{a+a'}+2x^{a+a'+k}+3x^{a+a'+2k}+4x^{a+a'+3k}+5x^{a+a'+4k}+6x^{a+a'+5k}+$ $5x^{a+a'+6k}+4x^{a+a'+7k}+3x^{a+a'+8k}+2x^{a+a'+9k}+x^{a+a'+10k}$
Dos dados diferentes y uno con dos caras repetidas $\{a', a'+k, a'+k, a'+2k, a'+2k, a'+3k\}$ y $\{a, a+2k, a+3k, a+4k, a+5k, a+7k\}$ Para cualquier k en los enteros **Polinomio generador:** $1x^{a'+a}+2x^{a'+a+k}+3x^{a'+a+2k}+4x^{a'+a+3k}+5x^{a'+a+4k}+6x^{a'+a+5k}+$ $5x^{a'+a+6k}+4x^{a'+a+7k}+3x^{a'+a+8k}+2x^{a'+a+9k}+1x^{a'+a+10k}$

Tabla 44

Caso de tres dados

Tres dados iguales tradicionales

Al igual que con dos dados, ahora asociamos los números de las caras de cada dado a los exponentes de tres polinomios de grado 6 y de coeficientes unitarios, respectivamente. Entonces, del producto

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)\,,$$

es posible obtener una función generadora que dé lugar a las particiones, con tres sumandos, de los números entre 3 y 18.

De los productos de potencias de *x* que resultan de multiplicar los tres polinomios se toman las tres potencias de cada sumando y posteriormente se pueden manejar como una suma de tres sumandos, lo cual es una de las particiones que nos interesan. Y como se hizo para los dos dados, el producto de los polinomios se presenta en arreglos rectangulares, que para el caso de los tres polinomios serán seis arreglos, cada uno de 36 sumandos (ver página siguiente).

De esta forma podemos asociar los términos que tengan sumas comunes en los exponentes, a través de los términos que se encuentran en las diagonales. Con ello se logra que los sumandos con los mismos exponentes, es decir, las mismas particiones, queden agrupados, y así será más fácil su conteo para obtener el número total de particiones para cada número entre 3 y 18.

En el desarrollo del producto y para cada uno de los seis arreglos rectangulares, se nombrará con *j* al número de particiones para representar a ***i***. Así, se propone la notación $p(i)=j$ para las particiones de *i*.

Ahora, se presentan los seis arreglos rectangulares y para cada uno se contabilizan las particiones para cada ***i***, y al final se hará la suma total.

$$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)=$$

$$x^1x^1x^1+x^1x^2x^1+x^1x^3x^1+x^1x^4x^1+x^1x^5x^1+x^1x^6x^1+$$

$$x^2x^1x^1+x^2x^2x^1+x^2x^3x^1+x^2x^4x^1+x^2x^5x^1+x^2x^6x^1+$$

$$x^3x^1x^1+x^3x^2x^1+x^3x^3x^1+x^3x^4x^1+x^3x^5x^1+x^3x^6x^1+$$

$$x^4x^1x^1+x^4x^2x^1+x^4x^3x^1+x^4x^4x^1+x^4x^5x^1+x^4x^6x^1+$$

$$x^5x^1x^1+x^5x^2x^1+x^5x^3x^1+x^5x^4x^1+x^5x^5x^1+x^5x^6x^1+$$

$$x^6x^1x^1+x^6x^2x^1+x^6x^3x^1+x^6x^4x^1+x^6x^5x^1+x^6x^6x^1+$$

..........p(3)=1,p(4)=2,p(5)=3,p(6)=4,p(7)=5,p(8)=6,p(9)=5,p(10)=4,p(11)=3,p(12)=2,p(13)=1

Hasta este momento del producto, el 5 puede ser logrado de 3 maneras diferentes: 1+3+1, 2+2+1, 3+1+1, es decir *p(5)=3*.

Continuamos con el producto:

$$x^1x^1x^2+x^1x^2x^2+x^1x^3x^2+x^1x^4x^2+x^1x^5x^2+x^1x^6x^2+$$

$$x^2x^1x^2+x^2x^2x^2+x^2x^3x^2+x^2x^4x^2+x^2x^5x^2+x^2x^6x^2+$$

$$x^3x^1x^2+x^3x^2x^2+x^3x^3x^2+x^3x^4x^2+x^3x^5x^2+x^3x^6x^2+$$

$$x^4x^1x^2+x^4x^2x^2+x^4x^3x^2+x^4x^4x^2+x^4x^5x^2+x^4x^6x^2+$$

$$x^5x^1x^2+x^5x^2x^2+x^5x^3x^2+x^5x^4x^2+x^5x^5x^2+x^5x^6x^2+$$

$$x^6x^1x^2+x^6x^2x^2+x^6x^3x^2+x^6x^4x^2+x^6x^5x^2+x^6x^6x^2+$$

..........p(4)=1,p(5)=2,p(6)=3,p(7)=4,p(8)=5,p(9)=6,p(10)=5,p(11)=4,p(12)=3,p(13)=2,p(14)=1

$$x^1x^1x^3+x^1x^2x^3+x^1x^3x^3+x^1x^4x^3+x^1x^5x^3+x^1x^6x^3+$$

$$x^2x^1x^3+x^2x^2x^3+x^2x^3x^3+x^2x^4x^3+x^2x^5x^3+x^2x^6x^3+$$

$$x^3x^1x^3+x^3x^2x^3+x^3x^3x^3+x^3x^4x^3+x^3x^5x^3+x^3x^6x^3+$$

$$x^4x^1x^3+x^4x^2x^3+x^4x^3x^3+x^4x^4x^3+x^4x^5x^3+x^4x^6x^3+$$

$$x^5x^1x^3+x^5x^2x^3+x^5x^3x^3+x^5x^4x^3+x^5x^5x^3+x^5x^6x^3+$$

$$x^6x^1x^3+x^6x^2x^3+x^6x^3x^3+x^6x^4x^3+x^6x^5x^3+x^6x^6x^3+$$

..........p(5)=1,p(6)=2,p(7)=3,p(8)=4,p(9)=5,p(10)=6,p(11)=5,p(12)=4,p(13)=3,p(14)=2,p(15)=1

$x^1x^1x^4+x^1x^2x^4+x^1x^3x^4+x^1x^4x^4+x^1x^5x^4+x^1x^6x^4+$

$x^2x^1x^4+x^2x^2x^4+x^2x^3x^4+x^2x^4x^4+x^2x^5x^4+x^2x^6x^4+$

$x^3x^1x^4+x^3x^2x^4+x^3x^3x^4+x^3x^4x^4+x^3x^5x^4+x^3x^6x^4+$

$x^4x^1x^4+x^4x^2x^4+x^4x^3x^4+x^4x^4x^4+x^4x^5x^4+x^4x^6x^4+$

$x^5x^1x^4+x^5x^2x^4+x^5x^3x^4+x^5x^4x^4+x^5x^5x^4+x^5x^6x^4+$

$x^6x^1x^4+x^6x^2x^4+x^6x^3x^4+x^6x^4x^4+x^6x^5x^4+x^6x^6x^4+$

..........p(6)=1,p(7)=2,p(8)=3,p(9)=4,p(10)=5,p(11)=6,p(12)=5,p(13)=4,p(14)=3,p(15)=2,p(16)=1

$x^1x^1x^5+x^1x^2x^5+x^1x^3x^5+x^1x^4x^5+x^1x^5x^5+x^1x^6x^5+$

$x^2x^1x^5+x^2x^2x^5+x^2x^3x^5+x^2x^4x^5+x^2x^5x^5+x^2x^6x^5+$

$x^3x^1x^5+x^3x^2x^5+x^3x^3x^5+x^3x^4x^5+x^3x^5x^5+x^3x^6x^5+$

$x^4x^1x^5+x^4x^2x^5+x^4x^3x^5+x^4x^4x^5+x^4x^5x^5+x^4x^6x^5+$

$x^5x^1x^5+x^5x^2x^5+x^5x^3x^5+x^5x^4x^5+x^5x^5x^5+x^5x^6x^5+$

$x^6x^1x^5+x^6x^2x^5+x^6x^3x^5+x^6x^4x^5+x^6x^5x^5+x^6x^6x^5+$

..........p(7)=1,p(8)=2,p(9)=3,p(10)=4,p(11)=5,p(12)=6,p(13)=5,p(14)=4,p(15)=3,p(16)=2,p(17)=1

$x^1x^1x^6+x^1x^2x^6+x^1x^3x^6+x^1x^4x^6+x^1x^5x^6+x^1x^6x^6+$

$x^2x^1x^6+x^2x^2x^6+x^2x^3x^6+x^2x^4x^6+x^2x^5x^6+x^2x^6x^6+$

$x^3x^1x^6+x^3x^2x^6+x^3x^3x^6+x^3x^4x^6+x^3x^5x^6+x^3x^6x^6+$

$x^4x^1x^6+x^4x^2x^6+x^4x^3x^6+x^4x^4x^6+x^4x^5x^6+x^4x^6x^6+$

$x^5x^1x^6+x^5x^2x^6+x^5x^3x^6+x^5x^4x^6+x^5x^5x^6+x^5x^6x^6+$

$x^6x^1x^6+x^6x^2x^6+x^6x^3x^6+x^6x^4x^6+x^6x^5x^6+x^6x^6x^6$

..........p(8)=1,p(9)=2,p(10)=3,p(11)=4,p(12)=5,p(13)=6,p(14)=5,p(15)=4,p(16)=3,p(17)=2,p(18)=1

En la siguiente tabla se contabilizan todas las $p(i)=j$, correspondientes a cada uno de los arreglos rectangulares, y con ello se muestran las particiones para cada uno de los números entre el 3 y el 18.

p(3)	p(4)	p(5)	p(6)	p(7)	p(8)	p(9)	p(10)	p(11)	p(12)	p(13)	p(14)	p(15)	p(16)	p(17)	p(18)
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**25**	**27**	**27**	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**

Tabla 45

Cada término del último renglón es la suma de los números de la columna respectiva, que son los p(i) en cada arreglo rectangular para cada i.

Entonces, por lo anterior ya podemos expresar que el producto de $\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)$ es

$$x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+$$
$$15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}$$

La interpretación de este polinomio generador es la misma que en los casos anteriores, esto es, el término Mx^N nos dice que el número N puede ser logrado de tantas maneras con tres números iguales o diferentes entre el 1 y el 6, como lo indica el coeficiente M. Ejemplo, analizando $6x^5$ nos dice que el número 5 puede ser logrado de seis maneras con tres dados: 5=1+2+2, 5=2+1+2, 5=2+2+1, 5=1+1+3, 5=1+3+1, 5=3+1+1.

Nótese que las columnas de la tabla de arriba tienen un comportamiento ascendente, descendente o incluso mixto, y esto se debe a la forma en que se acomodan los arreglos rectangulares al desarrollar las multiplicaciones. Entonces, sucede que la suma de los exponentes de los términos en la n-ésima diagonal del primer arreglo es la misma que la suma de los de la diagonal en el (n-1)-ésima diagonal del segundo arreglo, y así sucesivamente hasta que el siguiente arreglo permite tomar una diagonal con la misma suma de exponentes. Por ejemplo, si tomamos la quinta diagonal del primer bloque rectangular, cuyos exponentes suman 7, y posteriormente la cuarta diagonal del segundo bloque, y así sucesivamente hasta tomar la primera diagonal del quinto bloque

$$x^1x^5x^1 \qquad x^1x^4x^2 \qquad x^1x^3x^3 \qquad x^1x^2x^4 \qquad x^1x^1x^5$$
$$x^2x^4x^1 \qquad x^2x^3x^2 \qquad x^2x^2x^3 \qquad x^2x^1x^4$$
$$x^3x^3x^1 \qquad x^3x^2x^2 \qquad x^3x^1x^3$$
$$x^4x^2x^1 \qquad x^4x^1x^2$$
$$x^5x^1x^1$$

podemos ver todas las ternas de exponentes son particiones que suman 7, y también se podrá ver que la suma de las cantidades de las particiones corresponden a los datos de la quinta columna de la **tabla 45**.

Tres dados iguales cuyas caras son los números impares {1,3,5,7,9,11}

Al igual que en el caso de dos dados ahora también queremos tres conjuntos iguales, asociados con las caras de los dados, y que puedan generar el mismo espacio de posibilidades que los dados convencionales, es decir, que al arrojar los dados generen las mismas posibilidades para los números entre 3 y 33, como lo fue para los números entre 3 y 18. En otras palabras, encontrar otro polinomio que genere los mismos coeficientes del polinomio generador asociado con los dados convencionales,

$$x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}$$
$$+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}$$

Y antes de pasar a un resultado general se presenta el caso de las caras impares para mostrar que sí es posible obtener ese espacio de posibilidades.

Entonces, asociamos los números {1,3,5,7,9,11} con los exponentes del producto de los tres polinomios

$$(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11}),$$

y la función generadora resultante dará lugar a las particiones impares de los números entre 3 y 33.

La metodología que se seguirá es la misma que se ha venido aplicando y consiste en agrupar las sumas comunes a través de sumar diagonales recorriendo los seis arreglos rectangulares obtenidos al multiplicar los tres polinomios.

En la tabla se muestran las cantidades obtenidas de las mencionadas sumas diagonales.

p(3)	**p(5)**	**p(7)**	**p(9)**	**p(11)**	**p(13)**	**p(15)**	**p(17)**	**p(19)**	**p(21)**	**p(23)**	**p(25)**	**p(27)**	**p(29)**	**p(31)**	**p(33)**
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**25**	**27**	**27**	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**

Tabla 46

El último renglón muestra las particiones correspondientes a los números entre 3 y 33, y como se puede ver son las mismas cantidades que aparecen en los coeficientes del polinomio generador de los dados convencionales.

Por lo anterior ya podemos mostrar que el producto de

$(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})$ es

$$x^3+3x^5+6x^7+10x^9+15x^{11}+21x^{13}+25x^{15}+27x^{17}+27x^{19}+25x^{21}+21x^{23}$$
$$+15x^{25}+10x^{27}+6x^{29}+3x^{31}+x^{33},$$

y como se puede ver, los coeficientes de este polinomio generador y del correspondiente a los dados convencionales son los mismos.

La interpretación de la función generadora es semejante a las anteriores, es decir, cada potencia N de x está en relación con el respectivo coeficiente que indica su número de particiones con tres sumandos (iguales o diferentes), cada una empleando números impares entre 1 y 11. Por ejemplo, analizando $6x^7$ indica que el número 7 puede ser logrado de seis maneras con tres dados de caras {1,3,5,7,9,11}: 7=1+1+5, 7=1+5+1, 7=5+1+1, 7=1+3+3, 7=3+3+1, 7=3+1+3 (véase también la tercera columna de la tabla).

Tres dados iguales pero con caras distintas a las convencionales

Es en este caso que se busca una manera general de encontrar tres dados iguales, de seis caras diferentes cada uno, y que con ellos se pueda obtener el mismo espacio de posibilidades que con los tres dados convencionales.

Para comenzar, se asignan variables a los números de las caras de cada dado y además serán los exponentes de un polinomio de grado 6 y coeficientes unitarios. Así, se tendrán los tres polinomios (correspondientes a tres dados), cuyo producto

$$(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f),$$

da origen a una función generadora que muestra las particiones de los números entre 3*a* y 3*f* (suponiendo que los valores de { *a, b, c, d, e, f* } se encuentran ordenados de forma ascendente).

De los productos y sumas que resultan de la función generadora extraemos sólo las ternas que se encuentran en los exponentes y, posteriormente, asociamos los términos comunes (es decir, las particiones) a través de sumar las diagonales -de la misma forma que se ha estado haciendo- que tengan elementos con potencias iguales. Así, con el proceso anterior logramos que los coeficientes puedan representar de la misma manera el número total de particiones para cada número entre 3a y 3f.

Ahora pasamos a la construcción de los polinomios requeridos, y para ello consideramos al número de particiones j que se necesitan para lograr S_i, y que se obtienen a través de $p(S_i)=j$. Además, como se podrá observar, por motivos prácticos, se hizo uso de los seis arreglos rectangulares, y al final se podrán contar todas las $p(S_i)=j$ correspondientes a cada S_i.

Entonces, al multiplicar los tres polinomios

$(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)=$

$x^a x^a x^a + x^a x^b x^a + x^a x^c x^a + x^a x^d x^a + x^a x^e x^a + x^a x^f x^a +$

$x^b x^a x^a + x^b x^b x^a + x^b x^c x^a + x^b x^d x^a + x^b x^e x^a + x^b x^f x^a +$

$x^c x^a x^a + x^c x^b x^a + x^c x^c x^a + x^c x^d x^a + x^c x^e x^a + x^c x^f x^a +$

$x^d x^a x^a + x^d x^b x^a + x^d x^c x^a + x^d x^d x^a + x^d x^e x^a + x^d x^f x^a +$

$x^e x^a x^a + x^e x^b x^a + x^e x^c x^a + x^e x^d x^a + x^e x^e x^a + x^e x^f x^a +$

$x^f x^a x^a + x^f x^b x^a + x^f x^c x^a + x^f x^d x^a + x^f x^e x^a + x^f x^f x^a +$

..........$p(S_1)=1, p(S_2)=2, p(S_3)=3, p(S_4)=4, p(S_5)=5, p(S_6)=6, p(S_7)=5, p(S_8)=4, p(S_9)=3, p(S_{10})=2, p(S_{11})=1$

Por ejemplo, hasta este momento del producto, S_3 se puede obtener de 3 maneras diferentes. Véase que de la tercera diagonal se obtiene $a+c+a$, $b+b+a$, $c+a+a$, es decir, $p(S_3)=3$.

Los siguientes productos generan los otros cinco arreglos rectangulares

$x^a x^a x^b + x^a x^b x^b + x^a x^c x^b + x^a x^d x^b + x^a x^e x^b + x^a x^f x^b +$

$x^b x^a x^b + x^b x^b x^b + x^b x^c x^b + x^b x^d x^b + x^b x^e x^b + x^b x^f x^b +$

$x^c x^a x^b + x^c x^b x^b + x^c x^c x^b + x^c x^d x^b + x^c x^e x^b + x^c x^f x^b +$

$x^d x^a x^b + x^d x^b x^b + x^d x^c x^b + x^d x^d x^b + x^d x^e x^b + x^d x^f x^b +$

$x^e x^a x^b + x^e x^b x^b + x^e x^c x^b + x^e x^d x^b + x^e x^e x^b + x^e x^f x^b +$

$x^f x^a x^b + x^f x^b x^b + x^f x^c x^b + x^f x^d x^b + x^f x^e x^b + x^f x^f x^b +$

..........$p(S_2)=1, p(S_3)=2, p(S_4)=3, p(S_5)=4, p(S_6)=5, p(S_7)=6, p(S_8)=5, p(S_9)=4, p(S_{10})=3, p(S_{11})=2, p(S_{12})=1$

$x^a x^a x^c + x^a x^b x^c + x^a x^c x^c + x^a x^d x^c + x^a x^e x^c + x^a x^f x^c +$

$x^b x^a x^c + x^b x^b x^c + x^b x^c x^c + x^b x^d x^c + x^b x^e x^c + x^b x^f x^c +$

$x^c x^a x^c + x^c x^b x^c + x^c x^c x^c + x^c x^d x^c + x^c x^e x^c + x^c x^f x^c +$

$x^d x^a x^c + x^d x^b x^c + x^d x^c x^c + x^d x^d x^c + x^d x^e x^c + x^d x^f x^c +$

$x^e x^a x^c + x^e x^b x^c + x^e x^c x^c + x^e x^d x^c + x^e x^e x^c + x^e x^f x^c +$

$x^f x^a x^c + x^f x^b x^c + x^f x^c x^c + x^f x^d x^c + x^f x^e x^c + x^f x^f x^c +$

..........$p(S_3)=1, p(S_4)=2, p(S_5)=3, p(S_6)=4, p(S_7)=5, p(S_8)=6, p(S_9)=5, p(S_{10})=4, p(S_{11})=3, p(S_{12})=2, p(S_{13})=1$

$x^a x^a x^d + x^a x^b x^d + x^a x^c x^d + x^a x^d x^d + x^a x^e x^d + x^a x^f x^d +$

$x^b x^a x^d + x^b x^b x^d + x^b x^c x^d + x^b x^d x^d + x^b x^e x^d + x^b x^f x^d +$

$x^c x^a x^d + x^c x^b x^d + x^c x^c x^d + x^c x^d x^d + x^c x^e x^d + x^c x^f x^d +$

$x^d x^a x^d + x^d x^b x^d + x^d x^c x^d + x^d x^d x^d + x^d x^e x^d + x^d x^f x^d +$

$x^e x^a x^d + x^e x^b x^d + x^e x^c x^d + x^e x^d x^d + x^e x^e x^d + x^e x^f x^d +$

$x^f x^a x^d + x^f x^b x^d + x^f x^c x^d + x^f x^d x^d + x^f x^e x^d + x^f x^f x^d +$

..........$p(S_4)=1, p(S_5)=2, p(S_6)=3, p(S_7)=4, p(S_8)=5, p(S_9)=6, p(S_{10})=5, p(S_{11})=4, p(S_{12})=3, p(S_{13})=2, p(S_{14})=1$

$x^a x^a x^e + x^a x^b x^e + x^a x^c x^e + x^a x^d x^e + x^a x^e x^e + x^a x^f x^e +$

$x^b x^a x^e + x^b x^b x^e + x^b x^c x^e + x^b x^d x^e + x^b x^e x^e + x^b x^f x^e +$

$x^c x^a x^e + x^c x^b x^e + x^c x^c x^e + x^c x^d x^e + x^c x^e x^e + x^c x^f x^e +$

$x^d x^a x^e + x^d x^b x^e + x^d x^c x^e + x^d x^d x^e + x^d x^e x^e + x^d x^f x^e +$

$x^e x^a x^e + x^e x^b x^e + x^e x^c x^e + x^e x^d x^e + x^e x^e x^e + x^e x^f x^e +$

$x^f x^a x^e + x^f x^b x^e + x^f x^c x^e + x^f x^d x^e + x^f x^e x^e + x^f x^f x^e +$

..........$p(S_5)=1, p(S_6)=2, p(S_7)=3, p(S_8)=4, p(S_9)=5, p(S_{10})=6, p(S_{11})=5, p(S_{12})=4, p(S_{13})=3, p(S_{14})=2, p(S_{15})=1$

$x^a x^a x^f + x^a x^b x^f + x^a x^c x^f + x^a x^d x^f + x^a x^e x^f + x^a x^f x^f +$

$x^b x^a x^f + x^b x^b x^f + x^b x^c x^f + x^b x^d x^f + x^b x^e x^f + x^b x^f x^f +$

$x^c x^a x^f + x^c x^b x^f + x^c x^c x^f + x^c x^d x^f + x^c x^e x^f + x^c x^f x^f +$

$x^d x^a x^f + x^d x^b x^f + x^d x^c x^f + x^d x^d x^f + x^d x^e x^f + x^d x^f x^f +$

$x^e x^a x^f + x^e x^b x^f + x^e x^c x^f + x^e x^d x^f + x^e x^e x^f + x^e x^f x^f +$

$x^f x^a x^f + x^f x^b x^f + x^f x^c x^f + x^f x^d x^f + x^f x^e x^f + x^f x^f x^f$

..........$p(S_6)=1, p(S_7)=2, p(S_8)=3, p(S_9)=4, p(S_{10})=5, p(S_{11})=6, p(S_{12})=5, p(S_{13})=4, p(S_{14})=3, p(S_{15})=2, p(S_{16})=1$

Posteriormente, al sumar las diagonales correspondientes a cada uno de los bloques se puede formar la siguiente tabla:

$p(S_1)$	$p(S_2)$	$p(S_3)$	$p(S_4)$	$p(S_5)$	$p(S_6)$	$p(S_7)$	$p(S_8)$	$p(S_9)$	$p(S_{10})$	$p(S_{11})$	$p(S_{12})$	$p(S_{13})$	$p(S_{14})$	$p(S_{15})$	$p(S_{16})$
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
0	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**25**	**27**	**27**	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**

Tabla 47

Así, por lo anterior ya podemos ver que el producto de

$(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)$ es

$$x^{S_1}+3x^{S_2}+6x^{S_3}+10x^{S_4}+15x^{S_5}+21x^{S_6}+25x^{S_7}+27x^{S_8}+27x^{S_9}+25x^{S_{10}}+$$
$$21x^{S_{11}}+15x^{S_{12}}+10x^{S_{13}}+6x^{S_{14}}+3x^{S_{15}}+x^{S_{16}}.$$

Cada sumando Mx^N de la función generadora tiene un coeficiente M que indica la cantidad de particiones con tres sumandos, iguales o diferentes, -tomados cada uno del conjunto { *a, b, c, d, e, f* }- que representan a su potencia N. Por ejemplo, analizando $6x^{S_3}$ nos dice que el número S_3 puede ser generado de seis maneras con tres dados cuyas caras son { *a, b, c, d, e, f* }.

Resta por analizar las características de los valores de la sucesión $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}\}$ y posteriormente poder generar casos particulares de los dados que tienen el mismo espacio de posibilidades que los dados convencionales.

Entonces, de las diagonales del primer arreglo rectangular se tiene que

$2a+c=2b+a$ (de la tercera diagonal)

$\Rightarrow c=2b-a$

$2a+d=a+b+c$ (de la cuarta diagonal)

$\Rightarrow d=b+c-a$

$\Rightarrow d=b+2b-a-a=3b-2a$

$2a+e=b+d+a$ (de la quinta diagonal)

$\Rightarrow e=b+d-a$

$\Rightarrow e=b+3b-2a-a=4b-3a$

$2a + f = b + e + a$ (de la sexta diagonal)

$\Rightarrow f = b + e - a$

$\Rightarrow f = b + 4b - 3a - a = 5b - 4a$

Ahora bien, si consideramos que $b = a + k$, de los resultados anteriores se vería que:

$b = a + k$

$c = 2b - a = 2a + 2k - a = a + 2k$

$d = 3b - 2a = 3a + 3k - 2a = a + 3k$

$e = 4b - 3a = 4a + 4k - 3a = a + 4k$

$f = 5b - 4a = 5a + 5k - 4a = a + 5k$

Y de esto el conjunto de seis elementos asociado con los dados tendría las siguientes características:

$$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\} = \{a,\ a + k,\ a + 2k,\ a + 3k,\ a + 4k,\ a + 5k\}.$$

Nótese que la diferencia entre el número de una cara y su inmediata anterior es una constante *k*; además, la suma de las caras opuestas es constante e igual a 2*a* + 5*k*.

Entonces ya se pueden generar ejemplos con tres dados iguales –diferentes a los convencionales- que den lugar a cantidades de particiones iguales a las de la función generadora

$x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} +$
$15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}$

Ejemplos:

k	a	$a+k$	$a+2k$	$a+3k$	$a+4k$	$a+5k$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	4	7	10	13	16	19
4	5	9	13	17	21	25
–1	0	–1	–2	–3	–4	–5
1	1	2	3	4	5	6

Tabla 48

Así, al considerar el polinomio $\left(x^{a}+x^{a+k}+x^{a+2k}+x^{a+3k}+x^{a+4k}+x^{a+5k}\right)\Rightarrow$ el polinomio generador es:

$$\left(x^{a}+x^{a+k}+x^{a+2k}+x^{a+3k}+x^{a+4k}+x^{a+5k}\right)\left(x^{a}+x^{a+k}+x^{a+2k}+x^{a+3k}+x^{a+4k}+x^{a+5k}\right)$$
$$\left(x^{a}+x^{a+k}+x^{a+2k}+x^{a+3k}+x^{a+4k}+x^{a+5k}\right)=$$

$$x^{3a}+3x^{3a+k}+6x^{3a+2k}+10x^{3a+3k}+15x^{3a+4k}+21x^{3a+5k}+25x^{3a+6k}+27x^{3a+7k}+$$
$$27x^{3a+8k}+25x^{3a+9k}+21x^{3a+10k}+15x^{3a+11k}+10x^{3a+12k}+6x^{3a+13k}+3x^{3a+14k}+x^{3a+15k}$$

Y de la tabla de ejemplos, si tomamos $a=0\ y\ \mathrm{k}=-1$, obtenemos el polinomio generador

$$x^{0}+3x^{-1}+6x^{-2}+10x^{-3}+15x^{-4}+21x^{-5}+25x^{-6}+27x^{-7}+27x^{-8}+25x^{-9}+$$
$$21x^{-10}+15x^{-11}+10x^{-12}+6x^{-13}+3x^{-14}+x^{-15},$$

entonces, con $a=0\ y\ \mathrm{k}=-1$ se tienen tres dados iguales con las caras {0, -1, -2, -3, -4, -5} que darán lugar a los números {0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, -14, -15}, donde cada uno tendrá la cantidad de particiones {1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1} respectivamente, y nótese que son los mismos números que los coeficientes de

$$x^{3}+3x^{4}+6x^{5}+10x^{6}+15x^{7}+21x^{8}+25x^{9}+27x^{10}+27x^{11}+25x^{12}+21x^{13}+$$
$$15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}$$

N dados iguales pero con caras distintas a las tradicionales en general

Dentro de los capítulos II y III se pueden consultar generalizaciones para este caso, en particular las hechas por Bernoulli, Montmort y Euler. Sin embargo, faltaría por mencionar las características que dados distintos a los tradicionales deberían tener para conservar cada uno los mismos espacios de posibilidades cuando se manejen *n* dados.

Para comenzar, se asignan variables a los números de las caras de cada dado y que además serán los exponentes de un polinomio de grado 6 y con coeficientes unitarios. Entonces se tiene que el desarrollo del producto

$$(x^{a}+x^{b}+x^{c}+x^{d}+x^{e}+x^{f})(x^{a}+x^{b}+x^{c}+x^{d}+x^{e}+x^{f})\ldots(x^{a}+x^{b}+x^{c}+x^{d}+x^{e}+x^{f}),$$

da origen a una función generadora que muestra las particiones (de n sumandos cada una) de los números entre *na* y *nf* (suponiendo que los valores de { *a, b, c, d, e, f* } se encuentran ordenados de menor a mayor). Las funciones generadoras pueden ser fácilmente construidas extendiendo los valores de la **tabla 9**, por ejemplo.

Como en los otros casos se tienen los arreglos rectangulares, de los cuales el primero es:

$$(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)\cdots(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f)=$$

$$\begin{aligned}
&x^a x^a x^a \cdots x^a + x^a x^b x^a \cdots x^a + x^a x^c x^a \cdots x^a + x^a x^d x^a \cdots x^a + x^a x^e x^a \cdots x^a + x^a x^f x^a \cdots x^a +\\
&x^b x^a x^a \cdots x^a + x^b x^b x^a \cdots x^a + x^b x^c x^a \cdots x^a + x^b x^d x^a \cdots x^a + x^b x^e x^a \cdots x^a + x^b x^f x^a \cdots x^a +\\
&x^c x^a x^a \cdots x^a + x^c x^b x^a \cdots x^a + x^c x^c x^a \cdots x^a + x^c x^d x^a \cdots x^a + x^c x^e x^a \cdots x^a + x^c x^f x^a \cdots x^a +\\
&x^d x^a x^a \cdots x^a + x^d x^b x^a \cdots x^a + x^d x^c x^a \cdots x^a + x^d x^d x^a \cdots x^a + x^d x^e x^a \cdots x^a + x^d x^f x^a \cdots x^a +\\
&x^e x^a x^a \cdots x^a + x^e x^b x^a \cdots x^a + x^e x^c x^a \cdots x^a + x^e x^d x^a \cdots x^a + x^e x^e x^a \cdots x^a + x^e x^f x^a \cdots x^a +\\
&x^f x^a x^a \cdots x^a + x^f x^b x^a \cdots x^a + x^f x^c x^a \cdots x^a + x^f x^d x^a \cdots x^a + x^f x^e x^a \cdots x^a + x^f x^f x^a \cdots x^a +
\end{aligned}$$

$$\text{..........}p(S_1)=1, p(S_2)=2, p(S_3)=3, p(S_4)=4, p(S_5)=5, p(S_6)=6, p(S_7)=5, p(S_8)=4, p(S_9)=3, p(S_{10})=2, p(S_{11})=1$$

Para poder sumar los términos en común, es decir, cuando los exponentes son iguales, tiene que suceder que

$(n-1)a+c=2b+(n-2)a$ (de la tercera diagonal)

$\Rightarrow c=2b-a$

$(n-1)a+d=(n-2)a+b+c$ (de la cuarta diagonal)

$\Rightarrow d=b+c-a$

$\Rightarrow d=b+2b-a-a=3b-2a$

$(n-1)a+e=b+d+(n-2)a$ (de la quinta diagonal)

$\Rightarrow e=b+d-a$

$\Rightarrow e=b+3b-2a-a=4b-3a$

$(n-1)a+f=b+e+(n-2)a$ (de la sexta diagonal)

$\Rightarrow f=b+e-a$

$\Rightarrow f=b+4b-3a-a=5b-4a$

Ahora bien, si consideramos que $b=a+k$, de los resultados anteriores tendríamos que

$b = a + k$
$c = 2b - a = 2a + 2k - a = a + 2k$
$d = 3b - 2a = 3a + 3k - 2a = a + 3k$
$e = 4b - 3a = 4a + 4k - 3a = a + 4k$
$f = 5b - 4a = 5a + 5k - 4a = a + 5k$

Entonces resulta que el formato es de hecho universal e independiente de cuántos dados se consideren

$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\} = \{a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ a+4k,\ a+5k\}$.

Es importante resaltar esto último, producto de la tesis, ya que ahí se definen las características que habrían de cumplir los elementos de los conjuntos, cuando se fija el número de particiones así como el número que representa la partición; y para continuar con el caso de los dados obtuvimos los siguientes ejemplos que son iguales para cualquier número de ellos:

k	a	$a+k$	$a+2k$	$a+3k$	$a+4k$	$a+5k$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
2	3	5	7	9	11	13
3	4	7	10	13	16	19
4	5	9	13	17	21	25
−1	0	−1	−2	−3	−4	−5
1	1	2	3	4	5	6

Tabla 49

Así, del polinomio $\left(x^a + x^{a+k} + x^{a+2k} + x^{a+3k} + x^{a+4k} + x^{a+5k}\right) \Rightarrow$

el polinomio generador es:

$$\left(x^a + x^{a+k} + x^{a+2k} + x^{a+3k} + x^{a+4k} + x^{a+5k}\right)\cdots\left(x^a + x^{a+k} + x^{a+2k} + x^{a+3k} + x^{a+4k} + x^{a+5k}\right) =$$

$$c_1 x^{na} + c_2 x^{na+k} + c_3 x^{na+2k} + c_4 x^{na+3k} + \ldots + c_{5n+1} x^{na+5nk}$$

Como se puede apreciar, con encontrar los coeficientes $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_{5n+1}$ el problema queda completamente resuelto.

Para terminar esta parte, y como se vio en el caso de dos conjuntos, ahora se presenta una tabla-resumen de los tres conjuntos (dados) y los polinomios generadores que siempre tendrán los mismos coeficientes (particiones asociadas con cada número).

Casos en los que se conserva el número de particiones (o espacio de posibilidades) representadas en los coeficientes del polinomio generador
Tres dados iguales convencionales: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **Polinomio generador:** $x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} +$ $15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}$
Tres dados iguales con caras de números impares $\{1,3,5,7,9,11\}$ **Polinomio generador:** $x^3 + 3x^5 + 6x^7 + 10x^9 + 15x^{11} + 21x^{13} + 25x^{15} + 27x^{17} + 27x^{19} + 25x^{21} + 21x^{23} +$ $15x^{25} + 10x^{27} + 6x^{29} + 3x^{31} + x^{33}$
Tres dados iguales con caras distintas a las tradicionales en general: $\{a,\ a+k,\ a+2k, a+3k,\ a+4k,\ a+5k\}$ para k en los enteros **Polinomio generador:** $x^{3a} + 3x^{3a+k} + 6x^{3a+2k} + 10x^{3a+3k} + 15x^{3a+4k} + 21x^{3a+5k} + 25x^{3a+6k} + 27x^{3a+7k} +$ $27x^{3a+8k} + 25x^{3a+9k} + 21x^{3a+10k} + 15x^{3a+11k} + 10x^{3a+12k} + 6x^{3a+13k} + 3x^{3a+14k} + x^{3a+15k}$
N dados iguales con caras distintas a las tradicionales en general $\{a,\ a+k,\ a+2k, a+3k,\ a+4k,\ a+5k\}$ para k en los enteros **Polinomio generador:** $c_1x^{na} + c_2x^{na+k} + c_3x^{na+2k} + c_4x^{na+3k} + \ldots + c_{5n+1}x^{na+5nk}$

Tabla 50

PARTE 2)

Para esta parte lo que se busca es un análisis más encaminado a encontrar conjuntos diferentes pero que puedan generar exactamente las mismas sumas en sus particiones.

En la **PARTE 1)** lo importante era encontrar conjuntos (es decir, dados) con los mismos espacios de posibilidades o, en otras palabras, conjuntos que generaran los mismos coeficientes en sus respectivos polinomios generadores.

Ahora, empezaremos por encontrar dos dados que generen los mismos conjuntos de particiones que los generados por los dados convencionales. Si se hace referencia a la tabla de abajo, entonces lo que se requiere son dos dados diferentes que generen los mismos datos de los dos renglones.

Suma de los dos dados	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de formas de obtener el número de arriba	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabla 51

Ya sabemos que se puede representar a cada una de las tiradas (o las particiones) de los dos dados convencionales a través del producto de dos polinomios, entonces se tiene que:

$$f(x) = p(x)q(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$$

Y de aquí obtenemos que la función generadora es

$$f(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

y de la cual ya sabemos que los coeficientes son la cantidad de las particiones de dos números entre el 1 y el 6 que representan al exponente respectivo. Entonces, la pregunta a responder es ¿se pueden encontrar otros polinomios ***p(x)*** y ***q(x)***, asociados con las caras de dos dados, y que su producto sea la misma función generadora ***f(x)?***.

Lo primero es encontrar una factorización para p(x), y para ello hacemos lo siguiente:

$$p(x) = x\left(1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right) = x\left(\frac{x^6 - 1}{x - 1}\right) = x\left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right) = x\left(\frac{\left(1 - x^3\right)\left(1 + x^3\right)}{(1 - x)}\right)$$

$$= x\left(\frac{\left(1 - x^3\right)}{(1 - x)}\right)\left(1 + x^3\right) = x\left(1 + x + x^2\right)\left(1 + x^3\right) = x\left(1 + x + x^2\right)(1 + x)\left(1 - x + x^2\right)$$

Lo mismo hacemos para *q(x)* y se obtiene que:

$$p(x)q(x) = \left(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)\left(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right)$$
$$= \left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]$$

Ahora se tiene la posibilidad de poder reagrupar los factores, combinándolos entre los dos polinomios, pero no se puede hacer de forma arbitraria. Las reagrupaciones deben de permitir que cada uno de los nuevos polinomios tenga exactamente seis sumandos, que serán los mismos que se asocien con las caras de los nuevos dados que se buscan. Visto de otro modo, para x = 1, p(x) = 6, lo cual refleja el total de las caras en el dado. Pero en la factorización de p(x)

$$p(x) = \left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]$$

se tiene que p(1) = $(1+1+1)(1+1)(1-1+1) = (1)(1+1+1)(1+1)(1) = 6$. Y es importante hacer notar que los factores que hacen posible que se conserve el p(1) = 6 son $\left(1+x+x^2\right)$ y $(1+x)$. Entonces, en las posibilidades que se tienen para reagrupar los factores de *p(x)* y *q(x)* solamente se pueden mover los factores x y $\left(1-x+x^2\right)$, no así los factores $\left(1+x+x^2\right)$ y $(1+x)$, porque de lo contrario, el polinomio resultante no tendría 6 caras.

Entonces, por lo expuesto anteriormente, se puede proponer la siguiente factorización:

$$p(x)q(x) = \left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)^2\right]\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right],$$

y desarrollando los 2 factores por separado

$$= \left[x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8\right]\left[x + 2x^2 + 2x^3 + x^4\right]$$
$$= \left[x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8\right]\left[x^1 + x^2 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4\right]$$
$$= \left[x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right]\left[x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6\right]$$
$$p(x)q(x) = \left[x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8\right]\left[x^1 + x^2 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4\right]$$

Y lo más importante es que

$$\left[x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8\right]\left[x^1 + x^2 + x^2 + x^3 + x^3 + x^4\right] =$$

$$\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right) =$$

$$= f(x) = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}.$$

Así, se obtiene que ambas factorizaciones dan lugar a la misma función generadora f(x), y de $\left[x^1+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8\right]\left[x^1+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4\right]$ podemos extraer los exponentes para asociarlos con las caras de los dos dados que nos generarán exactamente los mismos conjuntos de particiones. Por lo tanto, los dados que tienen los conjuntos de números {1, 3, 4, 5, 6, 8} y {1, 2, 2, 3, 3, 4} generan las mismas particiones y dan los mismos resultados que los convencionales {1, 2, 3, 4, 5, 6} y {1, 2, 3, 4, 5, 6} (y se cumple que arroja exactamente los mismos valores de toda la tabla de arriba).

Regresando a la factorización

$$p(x)q(x) = \left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]$$

Mencionamos que $\left(1+x+x^2\right)$ y $(1+x)$ son determinantes para la construcción de los conjuntos que requerimos, pero no es así con x y con $\left(1-x+x^2\right)$.

El producto de p(x)q(x) se puede escribir de la siguiente manera

$$p(x)q(x) = [ACB][ACB].$$

Donde C = $\left(1+x+x^2\right)(1+x)$, mientras que A = (x) y B = (1-x+x^2).

Con esta notación de *A, B y C* para los factores de los polinomios, podemos decir que el caso anterior

$$p(x)q(y) = \left[x^1+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8\right]\left[x^1+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4\right],$$

se puede escribir como p(x)q(x) = $\left[\mathrm{ACB}^2\right][\mathrm{AC}]$.

Bajo esta notación podemos ver que las factorizaciones permitidas para el producto p(x)q(x) pueden ser $\left[A^2CB\right][CB], \left[A^2CB^2\right][C], \left[A^2C\right]\left[CB^2\right]$.

Y para cada caso se tiene lo siguiente:

Caso $\left[A^2CB\right][CB]$:

$$\begin{aligned} p(x)p(x) &= \left[x^2\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right] \\ &= \left[x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7\right]\left[x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5\right], \end{aligned}$$

y de los exponentes se obtienen los dos conjuntos (o dados) {2,3,4,5,6,7} y {0,1,2,3,4,5}.

Caso $\left[A^2CB^2\right]\left[C\right]$:

$$\begin{aligned} p(x)\,p(x) &= \left[x^2\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)^2\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right] \\ &= \left[x^2+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8\right]\left[x^0+x^1+x^1+x^2+x^2+x^3\right], \end{aligned}$$

y de los exponentes se obtienen los dos conjuntos (o dados) {2,4,5,6,7,9} y {0,1,1,2,2,3}

Caso $\left[A^2C\right]\left[CB^2\right]$:

$$\begin{aligned} p(x)\,p(x) &= \left[x^2\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)^2\right] \\ &= \left[x^2+x^3+x^3+x^4+x^4+x^5\right]\left[x^0+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7\right]. \end{aligned}$$

y de los exponentes se obtienen los dos conjuntos (o dados) {2,3,3,4,4,5} y {0,2,3,4,5,7}.

Es importante recordar que las cuatro factorizaciones

$\left[A^2CB\right]\left[CB\right], \left[A^2CB^2\right]\left[C\right], \left[A^2C\right]\left[CB^2\right], \left[ACB^2\right]\left[AC\right]$ son iguales al polinomio

$$f(x) = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12},$$

entonces, cada factorización proporciona dos nuevos dados (conjuntos) que generan exactamente los mismos resultados que los dados convencionales {1, 2, 3, 4, 5, 6}

En la siguiente tabla se encuentra una recapitulación de los datos obtenidos:

Factorización	Dado 1	Dado 2	Suma de CarasOpuestas	
$[ACB][ACB]$	{1,2,3,4,5,6}	{1,2,3,4,5,6}	{7,7}	7+7=14
$\left[A^2CB\right][CB]$	{2,3,4,5,6,7}	{0,1,2,3,4,5}	{9,5}	9+5=14
$\left[A^2CB^2\right][C]$	{2,4,5,6,7,9}	{0,1,1,2,2,3}	{11,3}	11+3=14
$\left[A^2C\right]\left[CB^2\right]$	{2,3,3,4,4,5}	{0,2,3,4,5,7}	{7,7}	7+7=14
$\left[ACB^2\right][AC]$	{1,3,4,5,6,8}	{1,2,2,3,3,4}	{9,5}	9+5=14

Tabla 52

Hasta ahora hemos mostrado cuatro nuevas formas de generar las particiones que representa la función generadora

$$f(x) = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\ldots.+2x^{11}+x^{12}.$$

Cabe mencionar que las cuatro parejas de conjuntos entran en la categoría de dados lúdicos, es decir, a pesar de que tres de las parejas tienen un dado con una cara cero, estos sí se pueden usar para el entretenimiento.

Ahora, ¿será posible que podamos construir dados con características más matemáticas que lúdicas? Con esto nos referimos a dados que puedan tener números que ya no sean solamente los enteros positivos y el cero. O dicho de otra manera, encontrar dos conjuntos con enteros en general de tal forma que las particiones de dos sumandos, que se forman tomando un número de cada uno, dé como resultado las cantidades de los exponentes y coeficientes del polinomio generador original

$$f(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + ... + 2x^{11} + x^{12}.$$

Entonces, regresando a la expresión

$$p(x)q(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) ,$$

y con factorizar x^2 en $p(x)$ se obtiene:

$$x^2\left(\frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) ,$$

y al multiplicar x^2 por el segundo factor se obtiene que

$$p(x)q(x) = \left(x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4\right)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8) ,$$

y de los exponentes se forman los dados {-1,0.1.2.3.4} y {3,4,5,6,7,8}. Y nótese que estos conjuntos asociados con los polinomios correspondientes dan lugar a la igualdad

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12} = \\ &\left(x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4\right)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8). \end{aligned}$$

Pero ésta no es la única forma en la que se pueden construir dos conjuntos que involucran números negativos, una forma general de hacerlo es si se factoriza x^m en el primer factor de

$$p(x)q(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) .$$

Entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} p(x)q(x) &= x^m(x^{-m+1} + x^{-m+2} + x^{-m+3} + x^{-m+4} + x^{-m+5} + x^{-m+6})(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \\ &= (x^{-m+1} + x^{-m+2} + x^{-m+3} + x^{-m+4} + x^{-m+5} + x^{-m+6})(x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m3} + x^{m+4} + x^{m+5} + x^{m+6}) \end{aligned}$$

y de esto tenemos que para todo entero m, los conjuntos

{-*m*+1, -*m*+2, -*m*+3, -*m*+4, -*m*+5, -*m*+6,} y {*m*+1, *m*+2, *m*+3, *m*+4, *m*+5, *m*+6,} satisfacen las particiones requeridas por el polinomio.

$$f(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

Es de mencionarse que los conjuntos antes mencionados generan las particiones vinculadas con el producto p(x)q(x) = $[\mathrm{ACB}][\mathrm{ACB}]$.

Y procediendo de manera semejante podemos encontrar parejas de conjuntos asociados con las otras cuatro factorizaciones

$$\left[A^2CB\right][CB],\left[A^2CB^2\right][C],\left[A^2C\right]\left[CB^2\right],\left[ACB^2\right][AC]$$

y que también dan lugar a parejas de conjuntos que pudieran generar las mismas particiones de la función

$$f(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + x^{12}$$

Veamos ahora las cuatro factorizaciones restantes

I) $\left[A^2CB\right][CB] = \left[x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7\right]\left[x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right]$

Se factoriza x^t en el primer factor y se obtiene:

$$p(x)p(x) = x^t\left[x^{-t+2} + x^{-t+3} + x^{-t+4} + x^{-t+5} + x^{-t+6} + x^{-t+7}\right]\left[x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right]$$
$$= \left[x^{-t+2} + x^{-t+3} + x^{-t+4} + x^{-t+5} + x^{-t+6} + x^{-t+7}\right]\left[x^t + x^{t+1} + x^{t+2} + x^{t+3} + x^{t+4} + x^{t+5}\right]$$

y de esto resulta que para todo entero ***t*** los conjuntos

{-t+2, -t+3, -t+4, -t+5, -t+6, -t+7,} y {t, t+1, t+2, t+3, t+4, t+5,} satisfacen las particiones requeridas por el polinomio. Nótese que este resultado es de enteros consecutivos, semejante al anterior.

II) $\left[A^2CB^2\right][C] = \left[x^2 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^9\right]\left[x^0 + x^1 + x^1 + x^2 + x^2 + x^3\right]$

Factorizando x^s se obtiene

$$p(x)p(x) = x^s\left[x^{-s+2} + x^{-s+4} + x^{-s+5} + x^{-s+6} + x^{-s+7} + x^{-s+9}\right]\left[x^0 + x^1 + x^1 + x^2 + x^2 + x^3\right]$$
$$= \left[x^{-s+2} + x^{-s+4} + x^{-s+5} + x^{-s+6} + x^{-s+7} + x^{-s+9}\right]\left[x^s + x^{s+1} + x^{s+1} + x^{s+2} + x^{s+2} + x^{s+3}\right]$$

y de aquí resulta que para todo entero ***s*** los conjuntos

{-s+2, -s+4, -s+5, -s+6, -s+7, -s+9} y {s, s+1, s+1, s+2, s+2, s+3,} satisfacen las particiones requeridas por el polinomio.

III) $\left[A^2C\right]\left[CB^2\right] = \left[x^2+x^3+x^3+x^4+x^4+x^5\right]\left[x^0+x^2+x^3+x^4+x^5+x^7\right]$

Siguiendo un proceso semejante al factorizar x^r se obtiene que

$$p(x)\,p(x) = \left[x^{-r+2}+x^{-r+3}+x^{-r+3}+x^{-r+4}+x^{-r+4}+x^{-r+5}\right]\left[x^r+x^{r+2}+x^{r+3}+x^{r+4}+x^{r+5}+x^{r+7}\right]$$

y para todo entero *r* los conjuntos

{-r+2, -r+3, -r+3, -r+4, -r+4, -r+5} y {r, r+2, r+3, r+4, r+5, r+7,} satisfacen las particiones requeridas por el polinomio.

IV) $\left[ACB^2\right]\left[AC\right] = \left[x^1+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8\right]\left[x^1+x^2+x^2+x^3+x^3+x^4\right]$

Siguiendo un proceso semejante al factorizar x^q se obtiene que

$$p(x)\,p(x) = \left[x^{-q+1}+x^{-q+3}+x^{-q+4}+x^{-q+5}+x^{-q+6}+x^{-q+8}\right]\left[x^q+x^{q+2}+x^{q+2}+x^{q+3}+x^{q+3}+x^{q+4}\right]$$

y para todo entero *q* los conjuntos

{-q+1, -q+3, -q+4, -q+5, -q+6, -q+8} y {q, q+2, q+2, r+3, r+3, r+4,} satisfacen las particiones requeridas por el polinomio.

Finalmente, se puede tener una infinidad de parejas de conjuntos que se asocian con dos dados, y con ellos se pueden obtener las mismas cantidades de particiones para los mismos números. O, en otras palabras, se tiene una infinidad de representaciones con dos factores para

$$f(x) = x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}.$$

A continuación se mostrará otra manera de responder a la problemática planteada en la **PARTE 2)**.

Para ello es necesario considerar los siguientes casos:

1. Cuando todas las caras son diferentes entre ellas.

De la Parte I, concerniente al caso donde los dos dados son diferentes y cada uno con caras distintas a las convencionales, se sabe que pueden ser expresadas de la siguiente manera

$$\left(x^a+x^b+x^c+x^d+x^e+x^f\right)\left(x^{a'}+x^{b'}+x^{c'}+x^{d'}+x^{e'}+x^{f'}\right).$$

Y que para conservar los coeficientes de la función generadora

$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$ tiene que suceder que

$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\} = \{a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ a+4k,\ a+5k\}$

y que $\{a', b', c', d', e', f'\} = \{a', a'+k, a'+2k, a'+3k, a'+4k, a'+5k\}$.

Ahora bien y si además se busca que las particiones den origen al conjunto $\{2, 3, 4, 5, 6, ..., 12\}$, es decir, que los coeficientes también coincidan, tendríamos que

$$a + a' = 2$$
$$a + 5k + a' + 5k = 12$$

de donde

$$a + a' = 2 \Rightarrow a' = 2 - a$$
$$a + 5k + a' + 5k = 12 \Rightarrow a + a' + 10k = 12 \Rightarrow 2 + 10k = 12 \Rightarrow k = 1,$$

y sustituyendo se encuentra entonces la solución general para el caso donde todas las caras de cada dado son distintas entre ellas:

$$\{a, b, c, d, e, f\} = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5\}$$
$$\{a', b', c', d', e', f'\} = \{2-a, 3-a, 4-a, 5-a, 6-a, 7-a\}$$

Y que coinciden con todas las características de la función generadora

$$1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 1x^{12}$$

Como ejemplos tenemos

a	Dado 1	Dado 2	Σ CarasOpuestas	
1	{1,2,3,4,5,6}	{1,2,3,4,5,6}	{7,7}	$7+7=14$
2	{2,3,4,5,6,7}	{0,1,2,3,4,5}	{9,5}	$9+5=14$
-1	{-1,0,1,2,3,4}	{3,4,5,6,7,8}	{3,11}	$11+3=14$
-2	{-2,-1,0,1,2,3}	{4,5,6,7,8,9}	{1,13}	$7+7=14$
-3	{-3,-2,-1,0,1,2}	{5,6,7,8,9,10}	{-1,15}	$9+5=14$

Tabla 53

2. Cuando las caras se repiten.

Para el caso donde los dados son diferentes, pero que algunas de las caras pueden ser repetidas (dos de ellas iguales), se sabe que pueden expresarse como

$$(x^a + x^b + x^c + x^d + x^e + x^f)(x^{a'} + x^{b'} + x^{b'} + x^{d'} + x^{d'} + x^{f'})$$

Y para conservar los coeficientes de la función generadora

$$1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 5x^6 + 6x^7 + 5x^8 + 4x^9 + 3x^{10} + 2x^{11} + 1x^{12}$$

tiene que suceder que los dados buscados $\{a', b', b', d', d', f'\}$ y $\{a, b, c, d, e, f\}$ tengan las siguientes características:

$$\{a, a+2k, a+3k, a+4k, a+5k, a+7k\} \text{ y } \{a', a'+k, a'+k, a'+2k, a'+2k, a'+3k\}$$

Ahora bien, y si además se busca que las particiones den origen al conjunto $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...,\ 12\}$, es decir, que los coeficientes también coincidan, se tendría que

$$a+a'=2$$
$$a+7k+a'+3k=12$$

De donde

$$a+a'=2 \Rightarrow a'=2-a$$
$$a+7k+a'+3k=12 \Rightarrow a+a'+10k=12 \Rightarrow 2+10k=12 \Rightarrow k=1$$

Sustituyendo se encuentra entonces la solución general para el caso donde los dados son diferentes, pero que algunas de las caras pueden ser repetidas (dos de ellas iguales, por ejemplo):

$$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}=\{a,\ a+2,\ a+3,\ a+4,\ a+5,\ a+7\}$$
$$\{a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ f'\}=\{2-a, 3-a, 3-a, 4-a, 4-a, 5-a\}$$

Y que coinciden con todas las características de la función generadora

$$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$$

Como ejemplos tenemos

a	Dado 1	Dado 2	Σ CarasOpuestas	
1	{1,3,4,5,6,8}	{1,2,2,3,3,4}	{9,5}	$7+7=14$
2	{2,4,5,6,7,9}	{0,1,1,2,2,3}	{11,3}	$9+5=14$
–1	{-1,1,2,3,4,6}	{3,4,4,5,5,6}	{5,9}	$11+3=14$
–2	{-2,0,1,2,3,5}	{4,5,5,6,6,7}	{3,11}	$7+7=14$
–3	{-3,-1,0,1,2,4}	{5,6,6,7,7,8}	{1,13}	$9+5=14$

Tabla 54

Tres dados

Y para terminar esta sección nos podemos cuestionar qué sucede con tres dados. Lo que se quiere es encontrar tres dados que generen los mismos conjuntos de particiones que los generados por los dados convencionales. Y como en el caso de los dos dados, si se hace referencia a la tabla de abajo, lo que se quiere son tres dados diferentes que generan los mismos datos contenidos en los dos renglones.

Suma de los tres dados	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Cantidad de formas de obtener el número de arriba	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Tabla 55

Se sabe que se puede representar a cada una de las tiradas (o las particiones) de los tres dados convencionales a través del producto de tres polinomios, esto es así:

$$p(x)q(x)r(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) =$$

Y da lugar a la función generadora

$$f(x) = x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + 25x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + x^{18}$$

Ahora, ¿es posible encontrar otros polinomios *p(x), q(x) y r(x)*, asociados con las caras de tres dados, y que su producto sea la misma función generadora *f(x)?*.

Como en el caso de dos polinomios, se puede factorizar a cada uno y llegar a lo siguiente:

$$f(x) = \left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right],$$

y como en el caso anterior

$f(x) = [ACB][ACB][ACB]$, donde C = $\left(1+x+x^2\right)(1+x)$, se tiene que mantener en su lugar, mientras que A = (x) y B = $(1\text{-}x\text{+}x^2)$ son los que tienen la capacidad de generar otras factorizaciones sin alterar el hecho de que se tienen que conservar los seis sumandos por cada uno de los tres factores resultantes, con excepciones tales como $\left[A^3CB^3\right][C][C]$

donde no se logra restringir a seis sumandos[24]. Entonces, combinando los factores A y B se pueden mostrar algunos de los resultados obtenidos:

$\left[A^2CB\right][CB][ACB],\left[A^2CB^2\right][C][ACB],\left[A^2C\right]\left[CB^2\right][ACB]$ y $\left[\mathrm{ACB}^2\right][\mathrm{AC}][ACB]$

$\left[A^3CB\right][CB][CB],\left[A^3C\right]\left[CB^3\right][C]$, $\left[\mathrm{ACB}^3\right][\mathrm{AC}][AC], etc.$

(que dan lugar a polinomios iguales a *f(x)* pero con dados diferentes al del conjunto {1,2,3,4,5,6}). Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\left[A^2CB\right][CB][ACB]&=\left[xx\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\\&\quad\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\\&=\left[x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7\right]\left[x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5\right]\\&\quad\left[x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right]\end{aligned}$$

de aquí se extraen los exponentes y se obtienen los tres conjuntos que se pueden asociar con los dados, a saber $\{(2,3,4,5,6,7),(0,1,2,3,4,5),(1,2,3,4,5,6)\}$, y estos generan los mismas particiones relacionadas con la función generadora original emanada de los dados convencionales.

Otros ejemplos son:

$$\begin{aligned}\left[A^2CB^2\right][C][ACB]&=\left[x^2\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)^2\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right]\\&\quad\left[x\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]\\&=\left[x^2+x^4+x^5+x^6+x^7+x^9\right]\left[x^0+x^1+x^1+x^2+x^2+x^3\right]\\&\quad\left[x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right]\end{aligned}$$

los conjuntos (dados) son: $\{(2,4,5,6,7,9),(0,1,1,2,2,3),(1,2,3,4,5,6)\}$

24

$$\begin{aligned}\left[A^3CB^3\right][C][C]&=\left[x^3\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)^3\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right]\\&\quad\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right]\\&=\left[x^3-x^4+2x^5+x^7+x^8+2x^{10}-x^{11}+x^{12}\right]\left[x^0+x^1+x^1+x^2+x^2+x^3\right]\\&\quad\left[x^0+x^1+x^1+x^2+x^2+x^3\right]\end{aligned}$$

$$\left[A^3CB^2\right][CB][C]=\left[x^3\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)^2\right]\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\left(1-x+x^2\right)\right]$$
$$\left[\left(1+x+x^2\right)(1+x)\right]$$
$$=\left[x^3+x^5+x^6+x^7+x^8+x^{10}\right]\ \left[x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5\right]$$
$$\left[x^0+x^1+x^1+x^2+x^2+x^3\right]$$

los conjuntos (dados) son: $\{(3,5,6,7,8,10),(0,1,2,3,4,5),(0,1,1,2,2,3)\}$

Así, tenemos tres conjuntos de tres dados cada uno que al arrojarlos generan los mismos números que los dados convencionales, y además la misma cantidad de particiones que ellos. Visto desde otro ángulo, se tienen tres diferentes formas de representar al mismo polinomio generador

$$f(x)=x^3+3x^4+6x^5+10x^6+15x^7+21x^8+25x^9+27x^{10}+27x^{11}+25x^{12}+$$
$$21x^{13}+15x^{14}+10x^{15}+6x^{16}+3x^{17}+x^{18}.$$

Dados con números complejos y otros números

Hasta ahora en ninguno de los casos se notó algún tipo de restricción en cuanto al tipo de números que podrían tener los dados. Por ello los mismos resultados obtenidos podrían ser aplicados a dados cuyas configuraciones incluyan otros conjuntos de números.

Para terminar este capitulo se ejemplificará a través de los números complejos que es posible extender las posibilidades de las caras de los dados y seguir conservando el mismo espacio de posibilidades que en los dados convencionales. Ya sólo se considerará un caso, y se refiere a cuando se tienen dos dados iguales entre ellos pero diferentes a los convencionales, y la novedad es que se asignarán valores complejos y fraccionarios.

Ahora, haciendo uso del resultado obtenido con anterioridad donde se establece que si se tienen cualesquiera parejas de dados con la siguiente configuración $\{a,b,2b-a,3b-2a,4b-3a,5b-4a\}$, su función generadora sería entonces

$$x^{2a}+2x^{a+b}+3x^{2b}+4x^{3b-a}+5x^{4b-2a}+6x^{5b-3a}+5x^{6b-4a}+4x^{7b-5a}+$$
$$3x^{8b-6a}+2x^{9b-7a}+x^{10b-8a},$$

de donde se sigue que si se toman diferentes valores complejos y fraccionarios para a y b, se obtendrían las siguientes configuraciones de dados:

a	b	$2b-a$	$3b-2a$	$4b-3a$	$5b-4a$
$1+2i$	$2+3i$	$3+4i$	$4+5i$	$5+6i$	$6+7i$
$1+5i$	$3+2i$	$5-i$	$7-4i$	$9-7i$	$11-10i$
i	$2i$	$3i$	$4i$	$5i$	$6i$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$

Tabla 56

Si se elige el caso en que $a=1+5i$ y $b=3+2i$, entonces se obtienen dos dados iguales con las caras {1+5i, 3+2i, 5-i, 7-4i, 9-7i, 11-10i}, que cuando se arrojen darán lugar a los números {2+10i, 4+7i, 6+4i, 8+i, 10-2i, 12-5i, 14-8i, 16-11i, 18-14i, 20-17i, 22-20i}, donde cada uno tendrá la cantidad de particiones {1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2,1} respectivamente. Todo ello queda resumido en la siguiente función generadora:

$$x^{2+10i}+2x^{4+7i}+3x^{6+4i}+4x^{8+i}+5x^{10-2i}+6x^{12-5i}+5x^{14-8i}+4x^{16-11i}+$$
$$3x^{18-14i}+2x^{20-17i}+x^{22-20i}$$

Esto indica que tiene los mismos coeficientes que

$$1x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+1x^{12}$$

que es la función generadora de los dados {1, 2, 3, 4, 5, 6} y {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Finalmente, se tiene que los dados:

{1+5i, 3+2i, 5-i, 7-4i, 9-7i, 11-10i} y {1+5i, 3+2i, 5-i, 7-4i, 9-7i, 11-10i}

Arrojan números con el mismo espacio de posibilidades que los obtenidos con

{1, 2, 3, 4, 5, 6} y {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Conclusiones

> "[…] juntos [el alma de Patroclo le dice a Aquiles] nos hemos criado en tu palacio, desde que Menecio me llevó de Opunte a vuestra casa por un deplorable homicidio —cuando encolerizándome en el juego de la taba[25] maté involuntariamente al hijo de Anfidamante—, y el caballero Peleo me acogió en su morada, me crió con regalo y me nombró tu escudero […]" Homero (siglo VI a. C.?) *La Ilíada*.

Como se puede apreciar en la cita anterior, la presencia de los juegos de dados en la vida cotidiana data de épocas antiguas. ¿Qué habría sido de la vida de Patroclo y la del hijo de Anfidamante si entonces ya se hubieran hecho esfuerzos por calcular el valor de las posibilidades que se tenían para ganar o perder al momento de jugar?

En este trabajo de tesis se mostraron los primeros intentos por enumerar las posibilidades que se tenían para obtener los mejores resultados en el juego de dados; y paralelamente, en las mismas épocas se puede ver que se formalizó la idea de las particiones asociadas a cada una de las tiradas de dos, tres o cualquier cantidad de dados. En este contexto, en el capítulo I abordamos los primeros textos que se conocen sobre la relación del juego de dados y las particiones de cada elemento de un conjunto determinado

En el capítulo II se ve que a partir de J. Bernoulli y de Pierre R. Montmort la teoría de la probabilidad empezó a tomar un camino propio; y por el lado de las particiones, éstas adquirieron las herramientas matemáticas que requerían para que posteriormente también pudieran tener personalidad como una disciplina propia de las matemáticas. Leibniz conoció sus trabajos (*Ars Conjectandi* y *Essay d'analyse sur le jeux de hazard*, respectivamente), y a partir de ellos parece que fue el primero que consideró la descomposición de los números enteros como suma de otros enteros, pero lo innovador fue que lo estudió de manera independiente, sin ninguna relación con los juegos.

En el tercer capítulo de la tesis mostramos que Euler fue el primero en realizar aportaciones importantes que marcaron el inicio de lo que sería la teoría de las particiones y, en consecuencia, de una parte de la teoría aditiva de los números.

A partir de la segunda mitad del siglo XVIII las particiones y la teoría de la probabilidad consolidaron sus caminos de forma independiente. La dedicación de Euler —que surgió a partir de su interés por responder los problemas que le propuso Naudè— dio

[25] Taba es el hueso conocido como astrágalo, y con ellos se practica un juego de apuestas semejante al de los dados.

como resultado el *teorema de los números pentagonales*, que tenía como elemento primordial el uso de funciones generadoras; estas funciones fueron sin duda la gran base algebraica para desarrollar las particiones y para muchas otras disciplinas de la matemática.

Después de estudiar las aportaciones de Euler en este campo de la teoría de los números, afirmamos que casi todos los descubrimientos posteriores en teoría de particiones han hecho uso de algunos elementos que Euler aportó en sus artículos dedicados a este tema.

La trascendencia de las particiones

Después de Euler y hasta mediados del siglo XIX, no se hicieron grandes aportaciones en el estudio de las particiones. Pero a partir de este periodo la expansión de las matemáticas llevó a que nuevos temas como la teoría de variables complejas y la teoría de funciones elípticas interactuaran profundamente con las particiones; y grandes matemáticos como Legendre, Gauss y Cauchy hicieron descubrimientos importantes a partir de las bases que encontraron en los trabajos de Euler. Por ejemplo Legendre [1830] reformuló el teorema de los números pentagonales que originalmente establecía la relación entre los exponentes y los coeficientes emanados de la función generadora como

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n-1)}{2}},$$

migrándolo sólo a un planteamiento de la diferencia entre la cardinalidad de dos conjuntos, donde cada elemento de uno de los conjuntos es una partición con un número par de sumandos, y el elemento del otro es de una cantidad impar; el planteamiento es el siguiente

$$p_{pd}(m)-p_{id}(m)=\begin{pmatrix} 0 & \text{si} & \mathrm{m}\neq\dfrac{n(3n\pm 1)}{2} \\ (-1)^n & \text{si} & \mathrm{m}=\dfrac{n(3n\pm 1)}{2} \end{pmatrix},$$

donde $p_{pd}(m)=$ el número de particiones de un entero positivo *m*, con la característica de que los sumandos de cada una son diferentes y la cantidad de ellos en cada una es par.

$p_{id}(m)=$ el número de particiones de un entero positivo *m* en donde los sumandos de cada una son diferentes, pero ahora la cantidad de sumandos en cada partición es impar.

Entre 1750 y 1850 surgió un gran interés por encontrar fórmulas explícitas para $P_k(n)$ (el número de particiones de *n* con a lo más *k* sumandos), sin tener que desarrollar funciones generadoras; fueron P. Paoli, A. De Morgan, J. Herschel, T. Kirkman y H. Warburton quienes encontraron fórmulas explicitas para valores pequeños de *k*.

Fue J. J. Sylvester [1882] en la década de los 80 del siglo XIX el matemático más sobresaliente en el tema de las particiones; escribió un trabajo notable *Constructive Theory of Partitions*. A su alrededor se interesaron por el tema personajes como Fabian Franklin y Norman Ferrers; al segundo se le debe el nombre de los diagramas que llevan su nombre y que fueron una herramienta novedosa para esquematizar las particiones, gracias a este método gráfico se pudieron replantear algunas demostraciones, entre ellas la del teorema de los números pentagonales de Euler.

Para estas épocas no debería sorprender que las particiones ya tuvieran una vida fuera de su interés intrínseco. Y en este contexto Cauchy [1845] estudió por primera vez el problema de un conjunto de *n* objetos que se divide en subgrupos, en los que lo importante es el tamaño de cada grupo, entonces el objeto de interés es una partición de n; en esta dirección es que Cauchy estudió las clases de conjugación del grupo simétrico, su enumeración requería la clasificación por tamaños de los ciclos, y para ello usó las particiones.

Posteriormente Gauss y Cauchy también se interesaron por los problemas vinculados a las trayectorias *lattice*[26], que se podían trabajar con las funciones

$$\begin{bmatrix} \dfrac{n+m}{n} \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})...(1-q^{n+m})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^m)}$$

y daban lugar a polinomios conocidos como *polinomios Gaussianos*; que son fundamentales para el estudio de las series hipergeométricas. Además este tipo de polinomios se vinculan con el número total de espacios vectoriales de dimensión *n* sobre campos finitos, que tienen bases canónicas con la característica de poder ser representadas con diagramas de Ferrers.

No debemos terminar este trabajo sin mencionar el gran impacto que generaron las particiones en Hardy, Ramanujan y Rademacher. Los dos primeros trabajaron

[26] Trayectorias en rejillas

conjuntamente con series asintóticas para calcular el comportamiento de particiones de un entero *n*. Ramanujan además es coautor junto con Leonard Rogers de dos resultados muy importantes: las identidades de Rogers-Ramanujan [véase Hardy 1983].

Primera identidad de Rogers-Ramanujan.
Sea $f(n)$ el número de particiones de n de manera que todos sus sumandos son de la forma 5k + 1 ó 5k + 4, y $g(n)$ el número de particiones cuyos sumandos se diferencian al menos en 2. Entonces $f(n) = g(n)$.

Segunda identidad de Rogers-Ramanujan.
Sea $r(n)$ el número de particiones de n cuyos sumandos son todos de la forma 5k + 2 ó 5k + 3, y si $s(n)$ es el número de particiones cuyas partes se diferencian al menos en 2 y que no contienen al 1, entonces $r(n) = s(n)$.

Hasta nuestros días se sigue trabajando la posibilidad de tener demostraciones más directas para estas identidades, entre ellas el método de biyecciones para $f(n) = g(n)$ y para $r(n) = s(n)$ [véase Andrews 2004].

Después de la muerte de Ramanujan en 1920 Hardy y Littlewood unieron esfuerzos y publicaron una serie de artículos sobre particiones; estos trabajos dieron resultados profundos sobre las sumas de cuadrados, el problema de Waring, primos gemelos y la conjetura de Goldbach, entre otros temas. Con estas aportaciones queda nuevamente de manifiesto que otra vertiente de la teoría de los números ya también estaban tomando su propio camino, nos referimos a la teoría aditiva de los números.

Las identidades de Rogers-Ramanujan no se quedaron en una serie de propiedades intrínsecas de las particiones. Rodney Baxter [1980] propuso una aplicación notable de las identidades en la mecánica estadística; fue en el sentido de vincularlas con el modelo *lattice* bidimensional de un gas, donde las partículas pueden estar en los vértices de un triangulo *lattice*. Esta relación específicamente ayudó a modelar el comportamiento del gas, usando —entre otros elementos— las funciones generadoras asociadas a las identidades de Rogers-Ramanujan. El puente que tendió Baxter entre lo físico y las representaciones aditivas de los enteros ha sido útil para lo que se conoce como el modelo de hexágono rígido [véase Andrews 1981].

Las particiones y funciones generadoras son actualmente herramientas de las matemáticas que no tiene límites y que cada día dan más sorpresas por sus aplicaciones y por sus propiedades intrínsecas (como ejemplo de esto último en el colofón respondimos una serie de inquietudes que nos surgieron a lo largo de los tres capítulos, algunas de ellas fueron en el sentido de generalizar los problemas de Galileo, y otras en las que se abandonó el tratar de encontrar únicamente el número de particiones generados por un conjunto de enteros, para ahora investigar las características que habrían de cumplir los elementos de los conjuntos, si se fijan el número de particiones así como la cantidad que representa la partición).

APÉNDICES

OPUSCULUM
Auctoris incerti:

LIBRI TRES DE VETULA,

OVIDII,
falsò sic dicti,

Diversorum Exemplarium, vetustorum et recentium, collatione revisi, lacunis, quibus Francofurtana Editio scatebat, exemti, & tabulis æneis exornati,

Anno MDCLXI.

XXIV

Quizás, sin embargo dirás que ciertos números son mejores que otros, de los que usan los jugadores, y es por la razón que, ya que un dado tiene seis lados y sólo seis números, entonces en tres dados hay dieciocho [posibilidades].

Y de ellos solamente tres pueden estar arriba de los dados [cuando se arrojan], estos [resultados de los tres dados] varían de diferentes maneras, y de ellos son producidos dieciséis números compuestos [del 3 al 18]. Sin embargo, ellos no aparecen con la misma frecuencia, ya que el mayor y el menor de ellos rara vez salen, y los [que se encuentran a la mitad] salen con mayor frecuencia [ver tabla I].

Y los restantes, cuanto más cerca estén de los medianos, son mejores y salen con mayor frecuencia. Estos, cuando aparecen [los que se encuentran en los extremos de la primera columna], tienen sólo una terna de números en los dados.

Esos [los que se encuentran en la parte media de la tabla, que representan al 9, 10, 11 y 12] tienen seis, y el resto tiene configuraciones intermedias entre los dos,

Así, de esta manera hay dos números mayores [6,6,6 y 6,6,5], al igual que dos menores [1,1,1 y 2,1,1], y éstos tienen sólo una configuración.

Los dos que siguen, el mayor [que representa al número 16], el otro menor [que representa al 5], tienen dos configuraciones de números en cada [terna de] dados.

Asimismo, después de ellos tienen tres cada uno, luego cuatro cada uno, y [después] cinco por número [en el caso del 13 y 8], y mientras que los siguientes en la sucesión alcanzan a los cuatro números medianos [9, 10, 11, y 12] que tienen seis configuraciones [es decir, ternas de dados] cada uno.

La tabla [I] les hará más fácil estas cosas:

Tabula I.

666						18
665						17
664	655					16
663	654	555				15
662	653	644	554			14
661	652	643	553	445		13
651	642	633	552	543	444	12
641	632	551	542	533	443	11
631	622	541	532	442	433	10
621	531	522	441	432	333	9
611	521	431	422	332		8
511	421	331	223			7
411	321	222				6
311	221					5
211						4
111						3

XXIV

FOrtè tamen dices, quosdam præstare quibusdã
Ex numeris, quibus est lusoribus usus, eò quod
Cum decius sit sex laterum, sex & numerorum
Simplicium, tribus in deciis sunt octo decemque,
Quorum non nisi tres possunt deciis superesse;
Hi diversimodè variantur, & inde bis octo
Compositi numeri nascuntur, non tamen æquæ
Virtutis, quoniam majores atque minores
Ipsorum raro veniunt, mediique frequenter,
Et reliqui, quantò mediis quamvis propiores,
Tantò præstantes, & sæpius advenientes.
His punctatura tantùm venientibus una,
Illis sex, aliis mediocriter inter utrosque,
Sic ut sint duo majores, totidemque minores,
Una quibus sit punctatura, duoque sequentes,
Hic major, minor ille, quibus sit bina duobus.
Rursum post istos sit terna, deinde quaterna,
Quinaque, sicut eis succedunt appropiando
Quattuor ad medios, quibus est punctatio sena,
Quæ reddet leviora tibi subjecta tabella.

Estas son las cincuenta y seis maneras de aparecer de los números, y el número de ellos ya no puede ser ni menor ni mayor.

Para cuando los tres números que hacen la tirada son iguales [como el 666, 333], y ya que seis tiradas pueden ser [con los tres números] iguales entre ellas, entonces también hay seis configuraciones de tiradas en los [tres] dados, una para cada número [entre 1 al 6].

Pero cuando uno de ellos no es como los otros [ver segunda sección de la tabla II], y dos son iguales, las configuraciones de ternas en los dados pueden variar de treinta maneras, [Y esto es] porque si duplicas los seis números [es decir, si tomamos al 66, 55, 44, 33, 22, 11], y después de que le has añadido todos los números que restan [ver segunda sección de la tabla II], entonces te resultarán treinta, como si multiplicaras seis por cinco.

Pero si todos los otros tres números son diferentes, entonces contarás veinte configuraciones de ternas en los dados [ver secciones 3, 4, 5 de tabla II]

Por esta razón: Tres números [la terna de dados] pueden ser diferentes y sucesivos de cuatro maneras [sección 3, tabla II], y la misma cantidad de diferentes pero no sucesivos [sección 4, tabla II]. Pero si dos son sucesivos y un tercero es no sucesivo [se tienen doce maneras, ver sección 5 tabla II], descubrirás de un lado dos veces tres maneras, y del otro tres veces dos maneras.

La Tabla [II] colocada debajo para tu lectura lo clarifica:

XXV

Asimismo, si uno mira más de cerca en las configuraciones de las ternas de los dados, hay algunas que tienen una sola forma de aparecer, y hay otras que tienen tres o seis, y es porque las maneras [en que caen los dados] no pueden ser diferentes cuando los tres números en cuestión son los mismos [como el 4,4,4 ó 2,2,2]. Pero, si uno [de los números de la terna] fuera diferente, y [los otros] dos iguales, tres maneras de caer emergen, [y esto sucede] después de que un número diferente aparece [en la cara superior] de cualquiera de los dados.

Pero si todos [los números de la terna] son diferentes, descubrirás que ella puede variar de seis maneras, ya que, cuando das cualquier posición a uno de los tres

Tabula II.

Omninò Similes.					
666	555	444	333	222	111
Duo Similes et tertius dissimilis.					
665	664	663	662	661	
556	554	553	552	551	
446	445	443	442	441	
336	335	334	332	331	
226	225	224	223	221	
116	115	114	113	112	
Omninò Dissimiles Continui.					
654	543	432	321		
Discontinui.					
642	531	641	631		
Duo Continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

números, los dos restantes cambian de lugar [como en 6,4,2 o 3,2,1].

Tan pronto como aparecen las extensiones de [cada una] de las ternas,

Hi sunt sex & quinquaginta modi veniendi,
Nec numerus minor esse potest, vel major, eorũ.
Nam quando similes fuerint sibi tres numeri, qui
Jactum componunt, quia sex componibiles sunt,
Et punctaturæ sunt sex, pro quolibet una.
Sed cum dissimilis aliis est unus eorum,
Atque duo similes, triginta potest variari
Punctatura modis, quia, si duplicaveris ex se
Quemlibet, adjuncto reliquorum quolibet, inde
Producens triginta, quasi sex quintuplicabis.
Quod si dissimiles fuerint omninò sibi tres,
Tunc punctaturas viginti connumerabis.
Hoc ideò, quia continui possunt numeri tres
Quattuor esse modis; discontinui totidem: sed
Si duo continui fuerint, discontinuusque
Tertius, invenies hinc tres bis, & inde duos ter:
Quod tibi declarat oculis subjecta figura.

Vide Tabulam Secundam,
paginâ proximè sequente.

XXV.

Rursum sunt quædam subtilius inspicienti
De punctaturis, quibus una cadentia tantùm est;
Suntq; quibus sunt tres aut sex, quia schema cadẽdi
Tunc differre nequit, quando similes fuerint tres
Prædicti numeri. Si verò sit unus eorum
Dissimilis, similesque duo, tria schemata surgunt,
Dissimili cuicunque superposito deciorum.
Sed si dissimiles sunt omnes, invenies sex
Verti posse modis, quia, quemlibet ex tribus uni
Cum dederis, reliqui duo permutant loca; Sicut
Punctaturarum docet alternatio. Sicque

Quin-

entonces ellas varían de cincuenta y seis maneras [es decir, ternas que generan los dados al arrojarlos], a doscientas dieciséis [ternas que es la totalidad de las] maneras de caer.
Cuando [las 256 ternas] han sido divididas entre los números que los jugadores utilizan [es decir, la suma de los tres dados que son del 3 al 18], y como sólo [son 256 ternas], y ellas tiene que ser distribuidas entre ellos [los números entre el 3 y el 18], entonces aprenderás totalmente bien qué tanta ganancia o pérdida con cualquiera de ellas [las ternas] se podría obtener.
La tabla [III] puede hacerte claro esto:

Cuantas configuraciones de ternas [hay] con los [tres] dados, y
las maneras de lograr cada uno de los números compuestos
[entre el 3 y el 18 usando las 256 ternas]…

Tabula III.

Qvot Punctaturas, et qvot Cadentias habeat qvilibet numerorũ compositorum.

3	18	Punctatura	1	Cadentia	1
4	17	Punctatura	1	Cadentiæ	3
5	16	Punctaturæ	2	Cadentiæ	6
6	15	Punctaturæ	3	Cadentiæ	10
7	14	Punctaturæ	4	Cadentiæ	15
8	13	Punctaturæ	5	Cadentiæ	21
9	12	Punctaturæ	6	Cadentiæ	25
10	11	Punctaturæ	6	Cadentiæ	27

Quinquaginta modis & ſex diverſificantur
In punctaturis, punctaturæque ducentis
Atque bis octo cadendi ſchematibus, quibus inter
Compoſitos numeros, quibus eſt luſoribus uſus,
Diviſis, proût inter eos ſunt diſtribuendi,
Plenè cognosces, quantæ virtutis eorum
Quilibet esſe poteſt, ſeu quantæ debilitatis:
Quod ſubſcripta poteſt tibi declarare figura.

OPERE DI GALILEO GALILEI

NOBILE FIORENTINO

ACCADEMICO LINCEO

Già Lettore delle Mattematiche nelle Università di Pisa, e di Padova, dipoi Sopraordinario nello Studio di Pisa

Primario Filosofo, e Mattematico

DEL SERENISSIMO

GRAN DUCA DI TOSCANA

NUOVA EDIZIONE

Coll' aggiunta di varj Trattati dell' istesso Autore non più dati alle stampe

Tomo Terzo.

IN FIRENZE. MDCCXVIII.

Nella Stamp. di S.A.R. Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi

Con licenza de' Superiori.

CONSIDERAZIONE
DI
GALILEO GALILEI
SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.

CHe nel giuoco de i dadi, alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente, e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che depende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6. e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v. g. il 6. o il 7. li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5., 1. 2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorche il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'egual uso duvriano esser reputati; si vede nondimeno, che la lunga osservazione ha fatto da i giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10. e l'11. che il 9, e il 12.

E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocchè il 9. si compone con 1. 2. 6., 1. 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4., 3. 3. 3. che sono sei triplicità, ed il 10. con 1. 3. 6., 1. 4. 5. 2. 2. 6., 2. 3. 5., 2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur son 6. combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con speranza, non solamente di sciorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento, e giudizio compartite, ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza, che io possa al mio fine, comincio a considerare, come essendo un dado terminato da 6. faccie, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei faccie, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse; onde è manifesto tali combinazioni esser 6. volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciascuna delle sue faccie, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte delli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi essere 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti de i tiri di tre dadi non sono se non 16. cioè 3. 4. 5. fino a 18. tra i quali si hanno a compartire le dette 216. scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne toc-

CONSIDERACIONES DE GALILEO GALILEI
SOBRE EL JUEGO DE DADOS

(Galileo Galilei, Opere, Firenze, Barbera, 8 (1898), pp. 591 – 594)

El hecho de que en un juego de dados ciertos números son más ventajosos que otros tiene una razón muy obvia, ***i.e.***, que algunos se logran con mayor facilidad y son más frecuentes que otros, ello depende de que es posible obtenerlos con una mayor variedad de números: así, los números 3 y 18, sólo se pueden escribir de una manera usando tres números [dados], con el 6.6.6 , con el 1.1.1, y de ningún otro modo, y [entonces, el 3 y el 18] son más difíciles de obtener que, por ejemplo, el 6 o el 7, los cuales pueden ser obtenidos de más formas, esto es, el 6 con 1.2.3, con 2.2.2 con 1.1.4, y un 7 con 1.1.5, 1.2.4, 1.3.3 y 2.2.3. Como 9 y 12 pueden ser obtenidos con la misma cantidad de maneras que 10 y 11, entonces sus usos deben ser considerados de igual forma. Sin embargo, una extensa observación ha hecho considerar a los jugadores [de dados] que el 10 y el 11 son más ventajosos que el 9 y el 12.

El 9 y el 10 (y lo que se diga entiéndase para 12 y 11) se pueden obtener con una misma diversidad de números, y lo afirmo ya que el 9 es obtenido por 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3, que son seis tercias, y el 10 por 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4, que también seis combinaciones, y de ninguna otra forma [existen otras].

Ahora, por atender a quien me encargó desarrollar aquello que se me ocurra acerca de tal problema, expondré mis ideas, [y lo haré] con la esperanza no sólo de resolver tal duda, sino también para abrir camino y poder divisar precisamente las razones por las cuales todas las particularidades del juego han sido acomodadas y ajustadas con gran atención y juicio.

Y para alcanzar mi meta con la mayor claridad de la que soy capaz comenzaré por considerar un dado que tiene seis caras, y sus diferentes tiradas pueden caer en cualquiera de ellas [las caras]. Seis tiradas diferentes pueden ser logradas, y no más, cada una diferente de la otra.

Pero si junto con el primer dado tiramos un segundo, el cual también tiene 6 caras, entonces podremos lograr 36 tiradas, diferentes entre ellas, y es porque cada cara del primer dado puede ser combinada con cada una del segundo, y en consecuencia pueden hacerse 6 tiradas diferentes, por consiguiente es claro que tales combinaciones son 6 veces 6, ***i.e.*** 36. Y si añadimos un tercer dado, y ya que cada una de sus 6 caras puede ser combinada con cada una de las 36 combinaciones de los otros 2 dados, podremos encontrar que las combinaciones de los 3 dados son 6 veces 36, *i.e.* 216, y todas diferentes entre ellas. Pero debido a que los números [obtenidos] de las tiradas de 3 dados son sólo 16, esto es, 3.4.5, etc. hasta, 18, y entre ellos se repartirán las mencionadas 216 tiradas, entonces es necesario que muchas tiradas deban pertenecer a chino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3. sino al 10. perchè quello, che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quello, che resta: la prima è, che quel punto de i tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali non si può produrre, se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi, e così il 3. non si può formare se non dalle tre faccie dell'asso, ed il 6. quando si dovesse comporre con tre dui, non si sarebbe se non da una sola scoperta. Seconda: il punto, che si compone da i tre numeri, due de' quali sieno i medesimi, e il terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v. g. il 4. che nasce dal 2. e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scuopra 2. e il secondo, e terzo, scuoprano asso. E così v. g. l'8. in quanto resulta da 3. 3. 2. può prodursi parimente in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2. e li altri 3. per uno, o scuoprendo il secondo dado 2. ed il primo, e terzo 3. o finalmente scuoprendo il terzo dado 2. ed il primo, e secondo 3. Terza: quel numero di punti, che si compone di tre numeri differenti può prodursi in 6. maniere, come per esempio, l'8. mentre si compone da 1. 3. 4. si può fare con 6. scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. il secondo 3. e il terzo 4. seconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il secondo 4. e il terzo 3. terza, quando il secondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4. quarta, facendo il secondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3. quinta, quando facendo il terzo dado 1. il primo faccia 3. e il secondo 4. sesta, quando sopra l'1. del terzo dado, il primo farà 4. e il secondo 3. Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte de i tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità, che nascono da due numeri eguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle, che nascono da tre numeri tutti differenti si formano in sei maniere. Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si possono formare tutti i numeri de i tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti de i tiri dal 10. in giù sino al 3. e sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio

1
3
6
10
15
21
25
27
108
108
216

10		9		8		7		6		5		4		3	
6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3		3		1
5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1		6				
5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3		10						
4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3		15								
4 3 3	3	3 3 3	1		21										
	27		25												

nella

algunos de estos números; y si se encuentran cuántas pertenecen a cada uno, habremos preparado la manera para encontrar lo que queremos saber, y bastará hacer tal investigación desde el 3 hasta el 10, porque aquello que pertenezca a uno de estos números también pertenecerá a aquel [opuesto] de arriba abajo.

Tres particularidades deberán ser mencionadas para un claro entendimiento de lo que procede: la **primera** es que [aquella suma de] los números de 3 dados, que está compuesta de 3 números iguales, puede ser sólo lograda por una única tirada de los dados, y así el 3 puede lograrse sólo por las tres caras de ases [de unos], y un 6, si habrá de hacerse con 3 [números] dos, puede sólo lograrse con una sola tirada. La **segunda,** [corresponde] a la suma que se forma de 3 números, en las cuales dos son iguales y el tercero diferente, pueden ser producidos por 3 tiradas, por ejemplo, el 4 que es formado de un 2 y de 2 ases, puede ser logrado por 3 diferentes tiradas; esto es, cuando el primer dado muestra 2 y el segundo y el tercero muestran el as, [o cuando el segundo dado un 2 y el primero y el tercero el as; o el tercero un 2 y el primero y el segundo un as]. Y así, por ejemplo, un 8, cuando es formado por 3.3.2, puede también lograrse de tres maneras: ***i.e.*** cuando el primer dado muestra un 2 y los otros un 3 cada uno, o cuando el segundo dado muestra al 2 y el primero y el tercero el 3, o finalmente cuando el tercero muestra un dos y el primero y el segundo 3. El **tercero,** que la suma de los números formada por tres números diferentes puede ser lograda de 6 maneras, por ejemplo, el 8 que está formado por 1.3.4, puede ser [también] logrado con 6 tiradas distintas [usando los mismos números]: primero, cuando el primer dado muestra al 1, el segundo 3 y el tercero 4; segundo, cuando el primer dado muestra al 1, pero el segundo 4 y el tercero 3; tercero, cuando el segundo dado muestra 1, y el primero 3 y el tercero 4; cuarto, cuando el segundo aún es 1, y el primero 4 y el tercero 3; quinto, cuando el tercero muestra 1, el primero muestra 3, y el segundo 4; sexto, cuando el tercero muestra 1, el primero será 4 y el segundo 3.

Hemos expuesto aquí tres casos. El primero, que las ternas, esto es, la suma de las tiradas de los 3 dados, que están formadas por tres números iguales, pueden ser obtenidas sólo de una forma; segundo, que las ternas que están formadas por dos números iguales y el tercero diferente, son logradas de tres maneras; tercero, que aquellas ternas que están formadas de

1 3 6	10		9		8		7		6		5		4		3	
10	631	6	621	6	611	3	511	3	411	3	311	3	211	3	111	1
15	622	3	531	6	521	6	421	6	321	6	321	3				
21	541	6	522	3	431	6	331	3	222	1						
25	532	6	441	3	422	3	322	3								
27	442	3	432	6	332	3										
108	433	3	333	1												
108		27		25		21		15		10		6		3		1
216																

tres números diferentes son obtenidas de 6 maneras. De estos casos podemos fácilmente deducir de cuántas maneras, o dicho de otro modo, en cuántas tiradas diferentes todos los números [que son suma] de tres dados pueden ser formados. Lo anterior puede ser fácilmente comprendido a partir de la tabla siguiente:

En la parte superior están indicados los números de las tiradas desde el 10 hasta al 3, y debajo de ellos [se presentan] las diferentes ternas con las cuales cada uno [de los números entre 3 y 10] pueden resultar; y al lado de ellos, se encuentra indicado el número de maneras en que cada terna puede ser permutada, y bajo ellos está finalmente indicada la suma de todas las posibles formas de producir estas tiradas. Así, por ejemplo, nella prima caſella abbiamo il punto 10. e ſotto di eſſo 6. triplicità di numeri, con i quali egli ſi p) comporre, che ſono 6. 3. 1., 6. 2. 2., 5. 4. 1., 5. 3. 2., 4. 4. 2., 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità 6. 3. 1. è compoſta di tre numeri diverſi, può (come ſopra ſi è dichiarato) eſſer fatta da 6. ſcoperte di dadi differenti ; però accanto ad eſſa triplicità 6. 3. 1. ſi nota 6. ed eſſendo la ſeconda 6. 2. 2. compoſta di due numeri eguali, e di un altro diverſo, non può produrſi ſe non in 3. differenti ſcoperte, però ſe gli nota accanto 3. la terza triplicità 5. 4, 1. compoſta di tre numeri diverſi può farſi da 6. ſcoperte, onde ſi nota col numero 6. e così dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle ſcoperte è raccolta la ſomma di tutte: dove ſi vede, come il punto 10. può farſi da 27. ſcoperte di dadi differenti, ma il punto 9. da 25. ſolamente, e l' 8. da 21. il 7. da 15. il 6. da 10. il 5. da 6. il 4. da 3. e finalmente il 3. da 1. le quali tutte ſommate inſieme aſcendono al numero di 108. Ed eſſendo altrettante le ſcoperte de i ſoſſopri, cioè de i punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. ſi raccoglie la ſomma di tutte le ſcoperte poſſibili a farſi colle faccie de i tre dadi, che ſono 216. E da queſta tavola potrà ognuno ch'intenda il giuoco, andar puntualiſſimamente miſurando tutti i vantaggi per minimi, che ſieno delle zare, degl'incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in eſſo giuoco ſi oſſerva.

en la primera columna tenemos al número 10, y debajo de él hay 6 ternas de números con los cuales se puede formar [el 10], y son 6.3.1, 6.2.2, 5.4.1, 5.3.2, 4.4.2, 4.3.3. Y como la primera terna 6.3.1 está compuesta por tres números diferentes, entonces puede (como arriba se menciona) ser obtenida por seis tiradas diferentes de los dados. Ahora, al lado de la terna 6.3.1 se encuentra un 6; la segundo terna es 6.2.2 y está formado de 2 números iguales y otro diferente, y puede ser lograda únicamente mediante 3 tiradas diferentes, [por ello] al lado se escribe un 3; la tercera terna 5.4.1, formada de tres números diferentes, puede ser lograda por 6 tiradas, y entonces se indica un 6 [en la columna de al lado], y así con todas las otras [ternas]. Para terminar, al final de la columna se encuentra la suma del número de tiradas de todos; ahí se ve que el número 10 pueden ser obtenido de 27 tiradas diferentes de los dados, pero el número 9 únicamente por 25, el 8 por 21, el 7 por 15, el 6 por 10, el 5 por 6, el 4 por 3 y, finalmente, el 3 por 1, y sumados todos juntos se obtiene el número 108. Y siendo de igual cantidad las tiradas de los opuestos superiores, esto es, para los números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, se agrupa la suma de todas las posibles tiradas que pueden ser logradas con las caras de los tres dados, y es 216. Y de esta tabla, cualquiera que entienda el juego puede medir, con gran exactitud, todas las ventajas, por pequeñas que puedan ser, del *zare*,[27] del *incontri*, y de cualquier otra regla especial observada en este juego.

[27] Zare era un juego con 3 dados, cuyas reglas eran quizás aquéllas del juego conocido por nosotros como Hazard. Incontri es empleado aquí probablemente como un término técnico en el Zare.

BIBLIOGRAFÍA

Aigner, Martin y Ziegle, Günter M. 2010. *Proofs from The Book.* (Consultar capítulo 32) New York: Springer Verlag 4a ed.

Andrews, George. 1981. *The hard-hexagon model and Rogers—Ramanujan type identities.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 78: 5290-5292.

______________. 2004. *Integer Partitions*. Cambridge University Press.

______________. 2007. Euler's "De Partitio Numerorum". Trabajo patrocinado por la National Science Foundation Grant DMS 0200097

Aristotle 1952. *The Nicomachean Ethics*. Translated by W. D. Ross. The Great Books, Encyclopaedia Britannica. Vol. 9.

Baxter, R. J. 1980. *Hard hexagons: exact solution*. Journal of Physics A: Mathematical and General 13: L61–L70.

Bell, Jordan. 2006. *Euler and the pentagonal number theorem*. En: arxiv.org/abs/math/0510054v2. Cornell University Library.

Bellhouse, David. 2005. Decoding Cardano's *Liber de Ludo Aleae*. *Historia Mathematica* 32: 180–202.

Bernoulli, Jacob. 2005. *The Art of Conjecturing*. The Johns Hopkins University Press.

Calva S., Luis 2005. Consideraciones sobre algunos conceptos básicos de probabilidad. Tesis para el título de Actuario. México: Facultad de Ciencias, UNAM.

Cardano, Girolamo. 1991. *Mi vida*. Madrid: Alianza Editorial.

Cauchy, A. 1845. *Mémoire sur la résolution des équations lineaires symboliques, et sur les conséquences remarquables que cette résolution entraîne aprés elle dans la theorie des permutations.* Œuvres complètes, serie 1, tomo 9, 417-430. *C. R., t. XXI, p. 1123.*

David, F. N. 1962. *Gods, Games and Gambling.* London: Griffen.

De Montmort, Pierre Rémond. 1708. *Essai d'analyse sur les Jeux de Hazard*. Juré Libraire de l'Université. Paris.

De Mora, Charles Marisol. 1972. Los inicios de la teoría de la probabilidad: siglo XVI y XVII. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Dunham, William. 2000. *Euler, El maestro de todos los matemáticos.* España: Nivola ediciones.

Edwards, A. W. 1987. *Pascal's Arithmetical Triangle*. London: Griffen.

____________. 1983. *Euler´s Pentagonal Number Theorem*. Mathematics Magazine. Vol 56: 279-284.

Euler, Leonhard. 1748. *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. (Introducción al Análisis de infinitos). [E101]. Se consultó la traducción al alemán por H. Maser. 1885.

____________. 1751. *Observationes analyticae variae de combinationibus.* **(*Diversas observaciones analíticas sobre combinaciones*).** [E158]. Se consultó la traducción al inglés de Jordan Bell.

____________. 1760. *Demonstratio Theorematis Circa Ordinem In Summis Divisorum Observatum.* Publicado en: *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, pp. 75-83.* Existe una traducción al inglés por: Jordan Bell, 2005.

____________. 1770. *De Partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas*. **(*Sobre la partición de números en partes de un cierto tipo de números determinados*).** [E394]. Se consultó la traducción al inglés de Jordan Bell.

____________. 1783. *De Mirabilis Propietatibus Numerorum Pentagonalium.* Publicado en: *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae.* Pp. 56-75. Existe una traducción al inglés por: Jordan Bell, 2005.

____________. 1783. *Evolutio Producti Infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ *etc. in seriem simplicem.* Publicado en: *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae,* pp. 47-55. Existe una traducción al inglés por Jordan Bell, 2004.

Galilei, Galileo. 1718. *Opere di Galileo Galilei*. Tomo terzo. Firenze.

Guerry, A. M. 1864. *Statistique Morale de Angleterre Comparee avec la Statistique Morale de la France*. Paris: Bailliere et Fils.

Hardy, G. H. y Wright, E. M. 1983. *An Introduction to the Theory of Numbers.* 5ª ed., London: Oxford University Press.

Hombas, Vassilios. 2004. *Generalizing Galileo´s Passedix. Game.http://interstat.statjournals.net/YEAR/2004/articles/0401001.pdf*

Juškevič, A. P. & Winter, E. 1965. *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729-1764*. Berlin: Akademie-Verlag.

Kendall, M.G. 1956. *The Beginnings of a Probability Calculus*. Biometrika 43, 1-14. Reimpreso en: Studies in the History of Probability and Statistics, Volumen 1, 1970, Eds. E.S. Pearson & M.G. Kendall. London: Griffen.

Langton, Stacy. 2007. *Some Combinatorics in Jacob Bernoulli's Ars Conjectandi*. En *Euler at 300. An Appreciation*, Robert Bradley (Ed). The Mathematical Association of America.

Legendre, A. M. 1830. *Théorie des nombres*. Vol. II. París; Duprat.

Neff, John D. 1982. *Dice tossing and Pascal's triangle*. The Two-Year College Mathematics Journal. Vol 13: 311-314.

Newman, Donald. 1998. *Analytic Number Theory*. New York: Springer Verlag.

Pseudo-Ovid. 1662. *Brunellus Vigelli & Vetula Ovidii. Seu: Opuscula Duo Actorum Incertorum*. Wolfenbiittel, Stern.

Robathan, D. M. 1968. *The Pseudo-Ovidian De Vetula*. Amsterdam: Hakkert.

Robinson, L.V. 1947. *Pascal's Triangle and Negative Exponents*. The American Mathematical Monthly. Vol 54:540-541.

Sánchez Giralda, Tomás. 2007. *Euler y las Particiones.* Unión Revista Iberoamericana de Educación Aritmética. Número 10.

Shaffer Glenn. *The significance of Jacob's Bernoulli's Ars Conjectandi for the Philosophy of Probability Today.* www.glennshafer.com/assets/downloads/articles/article55.pdf.

Sylvester, J. 1882. *A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion*. American J. Math. V 5: 251-330, V6 (1884):334.336.

Tartaglia, N. 1556. *General trattato di numeri e misure*. Venice.

Tattersall, James J. 2005. *Elementary Number Theory in Nine Chapters.* 2nd Edition. Cambridge University Press.

Todhunter, I. 1865. *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge University Press. Reimpreso en 1965, por Chelsea Publishing, New York.

Waring, Edward. 1991. *Meditationes Algebraicae*. USA: American Mathematical Society.

Weil, André.1974. ‘‘Two Lectures on Number Theory, Past and Present’’. *L’Enseignement Mathématique*. 20: 87-110.
Westacott, E. 1953. *Roger Bacon in Life and Legend*. London: Rockliff. Reimpreso por Folcroft Library Editions, 1974.