Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Algunas Aplicaciones de los Métodos de la Teoría de Conjuntos a Problemas de Álgebra .

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

David José Fernández Bretón

Director: Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán - 9 de agosto de 2010.

A mi esposa Rocio,

a mis chicos,

y a mi pequeño o pequeña,

que ya pronto vendrá en camino.

Índice general

Agradecimientos III

INTRODUCCIÓN V

Capítulo 0. Resultados preliminares 1
1. Grupos abelianos 1
2. Invariantes cardinales del continuo 10
3. El axioma de Martin 18

Capítulo I. El problema de Whitehead 23
1. El problema de la extensión 23
2. Propiedades homológicas de los W-grupos 25
3. Acerca de los W-grupos numerables 27
4. Los W-grupos de orden ω_1 32
5. "Todo W-grupo es libre" es consistente 34
6. "Todo W-grupo es libre" es independiente 40

Capítulo II. La cofinalidad del grupo simétrico infinito 47
1. Los grupos simétricos y algunas de sus propiedades 47
2. La cofinalidad del grupo simétrico infinito 51
3. Una ligera variante del cardinal $\mathrm{cf}(S_\omega)$ y una cota superior para este último 53
4. Una cota inferior para $\mathrm{cf}(S_\omega)$ 60

Capítulo III. Cocientes del grupo simétrico infinito y su espectro abeliano maximal 67
1. Los cardinales $A(S_\omega/\mathbb{F})$ y $\mathfrak{a}$. 67
2. Los grupos $S_\omega/\mathbb{F}(\mathcal{I})$ y los cardinales $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ 75
3. Una cota inferior para el cardinal $A([\omega]^{<\omega})$ 82

Conclusiones 89

Bibliografía 91

Índice alfabético 93

Agradecimientos

En primer lugar, deseo agradecer a mi familia, que es la principal responsable de que este proyecto haya llegado a buen término. Esto incluye tanto a la familia que he formado con mi esposa Rocio, como a mi familia de origen, es decir, mis padres David y Nora, y mi hermano Maximiliano. Sobre todo, Rocio es la persona que me acompañó, me apoyó y, finalmente, con quien compartí mi vida durante la entera duración de mis estudios de maestría.

Debo también de agradecer a mi director de tesis, el Dr. Fernando Hernández Hernández, por guiar sabiamente mi aprendizaje de esta bella teoría que es la Teoría de Conjuntos, así como por canalizar adecuadamente mis intereses matemáticos. No está de más mencionar que además de esto, el Dr. Fernando me apoyó mucho más allá de lo razonable para que yo pudiera realizar mis estudios en el Posgrado Conjunto de Morelia.

Mención especial merecen las bibliotecas en las cuales obtuve el material de consulta necesario para realizar este trabajo. En primer lugar, deseo agradecer a la Biblioteca del Instituto de Matemáticas de la UNAM, Unidad Morelia, y sobre todo a Lidia González, quien es una excelente bibliotecaria con verdadera vocación de servicio, que de una forma u otra logró conseguir todo artículo o libro que yo llegase a necesitar. En segundo lugar, también es preciso agradecer a la biblioteca Jerzy Plebañsky del Centro de Investigación y Estudios Avanzados, que me proporcionó una parte importante de los libros y artículos utilizados en el presente trabajo. Ambas bibliotecas contribuyeron en gran medida a que esta tesis tomara forma, no sólo por proporcionarme el material que aparece mencionado en la bibliografía, sino también por proporcionarme todo el material de lectura que estuve asimilando durante estos dos años de estudios de maestría, y que lentamente fue modelando mi manera de pensar como matemático y, sobre todo, como conjuntólogo.

Es imposible no agradecer a Conacyt por apoyarme económicamente, por medio de la beca número 219224, gracias a la cual pude pasar estos dos años sin preocuparme por conseguir dinero que me permitiera subsistir; enfocando de esta manera mis esfuerzos única y exclusivamente a aprender matemáticas. Sin duda alguna, Conacyt es responsable directo de que esta tesis haya podido realizarse.

No podría finalizar estos agradecimientos sin mencionar a mis sinodales: los Dres. Michael Hrušak, David Meza, Luis Valero y Francisco Marmolejo, por tomarse el trabajo y el tiempo de leer, ciertamente con mucha atención, esta tesis; por sus valiosísimas sugerencias, y por presenciar el examen profesional.

Deseo hacer extensivo mi agradecimiento a todos mis compañeros y profesores del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas, quienes me proporcionaron el entorno intelectualmente estimulante que me permitió profundizar mis conocimientos dentro de la Matemática en general, y de la Teoría de Conjuntos en particular, con la confianza y convicción de que tal empresa es en verdad valiosa, importante, y que vale la pena.

Finalmente, no puedo dejar pasar la oportunidad de mostrar un poco de mi orgullo politécnico: agradezco a la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional por haberme proporcionado, durante mis estudios de licenciatura, una formación tan sólida que me permitió salvar todos los obstáculos que se me presentaron durante mis estudios de maestría, por difíciles que éstos fueran; amén de que me permitió adquirir la madurez matemática necesaria para asimilar rápidamente todos los conocimientos que necesitaba dominar en una rama de la Matemática que era totalmente nueva para mí, como lo es la Teoría de Conjuntos.

México, D.F., 9 de agosto de 2010.

INTRODUCCIÓN

Es sumamente célebre el resultado comúnmente conocido como *segundo teorema de incompletitud de Gödel*, que afirma que en cualquier sistema axiomático "suficientemente fuerte", necesariamente habrá proposiciones indecidibles, es decir, proposiciones tales que ni ellas ni su negación son demostrables dentro del sistema. En particular, dentro del sistema axiomático de la Teoría de Conjuntos, ZFE, debe de haber tales proposiciones indecidibles. Sin embargo, la manera en que Gödel demostró su resultado consistió básicamente en elaborar, dentro del sistema, una proposición que en cierto sentido afirmara de sí misma que no es demostrable. En virtud de ello, podría pensarse que todas las proposiciones que son indecidibles resultan ser tan "artificiales" como la que construyó Gödel, y de hecho, comúnmente los matemáticos tienden a pensar que los problemas que surgen de manera "natural" dentro de la matemática no serán afectados por el mencionado resultado de Gödel. Sin embargo, lentamente se han ido descubriendo proposiciones matemáticas genuinas que, pese a haber surgido de manera natural, han resultado ser indecidibles. Una de estas proposiciones, históricamente el primer ejemplo auténtico de este fenómeno, es la hipótesis del continuo que asegura que $2^\omega = \omega_1$.

Actualmente hay numerosos ejemplos de este tipo de problemas o de proposiciones en diversas áreas de las matemáticas, tales como la topología de conjuntos o el análisis matemático. El objetivo de este trabajo de tesis es recopilar algunos ejemplos representativos de la aparición de este tipo de problemas en el área del álgebra. Tres fueron los problemas elegidos. En primer lugar, se describe la solución dada al problema de Whitehead por S. Shelah. Posteriormente, se eligieron dos problemas concernientes a invariantes cardinales del continuo que pueden definirse en términos del grupo simétrico infinito, es decir, el grupo de permutaciones sobre una cantidad infinita numerable de símbolos. Estos invariantes cardinales son denotados por $\mathrm{cf}(S_\omega)$ y $A([\omega]^{<\omega})$, y son cardinales que se encuentran entre ω_1 y 2^ω. En este trabajo se presentan buenas cotas superiores e inferiores para ambos cardinales, ubicándolos adecuadamente en relación a los demás invariantes cardinales del continuo.

En primer lugar, se escribió un capítulo 0 para que éste contuviera todo aquello que, si bien es necesario para comprender el resto de la tesis, no representa una parte central de la misma, por lo que convenía reportar ese material en un capítulo aparte. En la primera sección se habla un poco de grupos abelianos libres, material utilizado en los capítulos I y III. Posteriormente, en la segunda sección, se introducen aquellos invariantes cardinales del continuo que se utilizarán en los capítulos II y III, demostrando las principales desigualdades que se dan entre ellos. Finalmente, en la tercera sección se menciona aquello en lo que consiste el axioma de Martin, así como un importante resultado acerca de preórdenes σ-centrados debido a M. Bell, que se utilizará en el capítulo III.

Posteriormente, el que propiamente es el primer capítulo de la tesis está destinado a hablar del problema de Whitehead, que consiste en caracterizar los grupos abelianos G tales que $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle$ (a tales grupos se les conoce como W-grupos, o grupos de Whitehead). La primera sección es básicamente una discusión que sirve para motivar y plantear el problema de Whitehead. En la segunda sección, se detallan algunas propiedades, que ya corresponden propiamente a la teoría de grupos, acerca de los W-grupos, que en general son análogas a propiedades que poseen los grupos abelianos libres. En la siguiente sección se demuestra que los W-grupos numerables son libres, mientras que en la cuarta sección se generalizan los métodos empleados en la sección anterior, con el objetivo de investigar el comportamiento y las propiedades de los W-grupos de cardinalidad ω_1. En la quinta sección se demuestra la consistencia (utilizando el axioma de constructibilidad) de que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 sea libre, mientras que en la sexta y última sección se demuestra la consistencia del enunciado opuesto, es decir, de que existen W-grupos que no son libres. En esta última prueba, se utiliza el axioma de Martin, estableciendo de esta manera que el problema de Whitehead es indecidible dentro del sistema axiomático ZFE.

A continuación, en el segundo capítulo se comienza a trabajar con el grupo simétrico infinito, es decir, el grupo S_ω de biyecciones de ω en ω; y sobre todo, con el invariante cardinal $\mathrm{cf}(S_\omega)$ definido en base a este grupo. En la primera sección se hablan los hechos básicos acerca de este grupo, mientras que en la segunda sección se define el invariante cardinal $\mathrm{cf}(S_\omega)$, la cofinalidad del grupo simétrico infinito, y se comienza a demostrar las primeras propiedades básicas de este invariante (por ejemplo, que $\mathrm{cf}(S_\omega) \geq \omega_1$, y que es consistente con ZFE que esta desigualdad sea estricta). En la tercera sección se trabaja con una ligera variante de este cardinal, el cardinal $\mathrm{cf}^*(S_\omega)$, con ayuda del cual se demuestra que $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$, y se avanza en la investigación de las posibles cotas inferiores de $\mathrm{cf}(S_\omega)$. Finalmente, en la última sección se expone el resultado principal de este capítulo, a saber, una demostración —debida a Brendle y Losada— dentro de ZFE de la desigualdad $\mathrm{cf}(S_\omega) \geq \mathfrak{g}$.

Por último, en el tercer capítulo se comienza a trabajar con ciertos cocientes del grupo S_ω, fundamentalmente con el cociente $S_\omega/\mathbb{F}$, en donde $\mathbb{F}$ es el subgrupo (que es normal en S_ω) de permutaciones que mueven únicamente a una cantidad finita de elementos. En la primera sección se define lo que es el espectro abeliano maximal, $A([\omega]^{<\omega})$, y se demuestra que $\mathfrak{a} \geq A([\omega]^{<\omega})$. En la tercera sección se demuestra que $\mathfrak{p} \leq A([\omega]^{<\omega})$. A manera de intermedio, en la segunda sección se define lo que es el espectro maximal generalizado $A(\mathcal{I})$, para $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. También se define el número casi ajeno maximal sobre un ideal $\mathcal{I}$, $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$, y se subraya el hecho de que nuestro viejo conocido $\mathfrak{a}$ no es otra cosa que $\mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Así, se demuestra que no puede generalizarse el resultado de la primera sección, en el sentido de que, si bien $\mathfrak{a}([\omega]^{<\omega}) \geq A([\omega]^{<\omega})$, es posible construir ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es consistente con ZFE que $A(\mathcal{I}) > \mathfrak{a}(\mathcal{I})$. Esto finaliza el presente trabajo de tesis.

Dada la tasa de aparición, en varias ramas de la matemática, de problemas que requieren un sólido conocimiento de las herramientas de la Teoría de Conjuntos para poder ser comprendidos y atacados, es de esperarse que lentamente dicho conocimiento vaya tornándose cada vez más indispensable para el matemático común y corriente. Áreas como la teoría de la medida, el álgebra o la topología de conjuntos se encuentran cada vez más cercanas a la teoría de conjuntos, y el conocimiento de esta última cada vez resulta más indispensable para comprender adecuadamente las primeras. El presente trabajo de tesis, centrado en el álgebra, espera poder ilustrar de una manera clara la naturalidad con la que surgen ciertos problemas, que de pronto parecen más conjuntistas que algebraicos, pero que en ningún momento dejan de ser auténticos problemas matemáticos, que carecen de toda traza de “artificialidad”.

Capítulo 0

Resultados preliminares

El objetivo de este capítulo es exponer, a manera de antecedentes, aquellos resultados que, si bien no resultan ser centrales en el desarrollo de la presente tesis, sí se utilizarán posteriormente en el curso de los argumentos que se presentarán en los sucesivos capítulos, y que normalmente no se mencionan en los cursos estándar de una maestría. La primera sección, acerca de grupos abelianos, contiene material que se utilizará en los primero y tercer capítulos. Las otras dos secciones, que tratan acerca de los invariantes cardinales del continuo y del axioma de Martin, contienen resultados que se utilizarán prácticamente a lo largo de toda la tesis.

1. Grupos abelianos

Comencemos por recordar algunos de los principales resultados sobre grupos abelianos y grupos abelianos libres, que nos permitirán tener el lenguaje necesario para plantear el problema de Whitehead, así como material para investigar el espectro abeliano maximal de algunos cocientes del grupo de permutaciones de los enteros. Recordemos que cuando se trabaja con grupos abelianos es común utilizar la notación aditiva. Esto quiere decir que, dado un grupo abeliano A, denotaremos a su operación de grupo con el símbolo $+$. Similarmente, si $a \in A$ entonces al inverso de a lo denotamos por $-a$ (y para abreviar, siempre que tengamos sumas del estilo de $a + (-b)$ las escribiremos como $a - b$); y al elemento identidad de A lo escribimos como 0 (lo cual no debe de causar confusión). Finalmente, si $n \in \mathbb{Z}$ entonces por na entendemos la suma $\underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ veces}}$ si $n > 0$, o bien la suma $\underbrace{-a - \cdots - a}_{-n \text{ veces}}$ si $n < 0$, o bien al elemento 0, si $n = 0$. Como una última notación, si $B \subseteq A$ es un subgrupo de A, entonces escribiremos $B \leq A$.

Definición 0.1. Sea A un grupo abeliano.

(i) Diremos que un elemento $a \in A$ es **de torsión** si es de orden finito (i.e. $(\exists n \in \mathbb{N})(na = 0)$).
(ii) Definimos la **torsión** de A como el conjunto $\mathrm{tor}(A) = \{a \in A \big| a \text{ es de torsión}\}$.
(iii) Decimos que A es **de torsión** cuando $\mathrm{tor}(A) = A$, y diremos que A es **libre de torsión** cuando $\mathrm{tor}(A) = \{0\}$.

Es fácil ver que $\operatorname{tor}(A)$ es un subgrupo de A: si $a, b \in \operatorname{tor}(A)$ entonces hay $n, m > 0$ tales que $na = 0 = mb$. Pero entonces $nm(a-b) = nma - nmb = m(na) - n(mb) = m0 - n0 = 0 - 0 = 0$, por lo tanto $a - b \in \operatorname{tor}(A)$ y $\operatorname{tor}(A) \leq A$. También (casi por definición) se cumple que $\operatorname{tor}(A)$ es un grupo de torsión. Por otra parte, el cociente $A/\operatorname{tor}(A)$ es libre de torsión, pues si $a + \operatorname{tor}(A)$ es un elemento de torsión en dicho cociente, entonces hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(a + \operatorname{tor}(A)) = na + \operatorname{tor}(A) = \operatorname{tor}(A)$, lo cual significa que $na \in \operatorname{tor}(A)$ pero entonces ha de existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que $(mn)a = m(na) = 0$, en donde $mn \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $a \in \operatorname{tor}(A)$ y por consiguiente ya de entrada se tenía que $a + \operatorname{tor}(A) = \operatorname{tor}(A)$, es decir, $\operatorname{tor}(A/\operatorname{tor}(A)) = \langle 0 \rangle$. Nótese que si $B \leq A$ es un subgrupo de torsión, entonces $B \subseteq \operatorname{tor}(A)$. Por otra parte, si $C \leq A$ es un subgrupo tal que A/C es libre de torsión, entonces $\operatorname{tor}(A) \subseteq C$ (pues si $a \in \operatorname{tor}(A)$, entonces hay un $n \in \mathbb{N}$ con $na = 0$ y por lo tanto $n(a + C) = na + C = 0 + C = C$, de modo que al ser A/C libre de torsión no hay más opción que $a + C = C$, i.e. $a \in C$). En otras palabras, $\operatorname{tor}(A)$ es el máximo subgrupo de A que es de torsión, y a su vez es el mínimo subgrupo de A que produce un cociente libre de torsión.

Recordemos que los grupos abelianos son exactamente los $\mathbb{Z}$-módulos. En particular, si A es un grupo abeliano y $X \subseteq A$, entonces el subgrupo generado por X en A (es decir, el $\subseteq$-mínimo subgrupo de A que contiene como subconjunto a X), denotado $\langle X \rangle$, es exactamente el conjunto de todas las $\mathbb{Z}$-combinaciones lineales (finitas) $n_1x_1 + \cdots + n_sx_s$ tales que $s \in \omega$ (convenimos en que la "suma vacía" con cero sumandos es igual a 0), $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{Z}$ y $x_1, \ldots, x_s \in X$. Similarmente, si $B, C \subseteq A$ entonces $B + C = \{b + c \big| b \in B \wedge c \in C\}$ es el subgrupo generado por $B \cup C$ en A.

Antes de continuar, estableceremos también algunas notaciones conjuntistas que utilizaremos de ahora en adelante. Dado un conjunto X y un número cardinal κ, $[X]^\kappa$ denotará al conjunto de subconjuntos de X de cardinalidad κ y $[X]^{<\kappa}$ es el conjunto de subconjuntos de X de cardinalidad $< \kappa$. Es decir,

$$\begin{aligned} [X]^\kappa &= \{Y \subseteq X \big| |Y| = \kappa\} \\ &\text{y} \\ [X]^{<\kappa} &= \{Y \subseteq X \big| |Y| < \kappa\}, \end{aligned}$$

en particular, $[X]^{<\omega}$ es el conjunto de subconjuntos finitos de X.

Definición 0.2. Un grupo abeliano A es **libre** si tiene una base, es decir, un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\langle X \rangle = A$ (i.e. X genera a A) y tal que, siempre que $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = 0$, para $\{\overset{n}{\underset{i=1}{m_i}}\} \subseteq \mathbb{Z}$, $\{\overset{n}{\underset{i=1}{x_i}}\} \in [X]^n$, se tiene que $(\forall i \in n + 1 \setminus \{0\})(m_i = 0)$ (es decir, X es $\mathbb{Z}$-linealmente independiente).

Equivalentemente, un conjunto X es una base para A si y sólo si hay una función inyectiva $i : X \hookrightarrow A$ que cumple con la propiedad universal de los grupos abelianos libres: dado cualquier grupo abeliano B y cualquier función $f : X \longrightarrow B$, existe un único morfismo de grupos $\hat{f} : A \longrightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall f"'] & A \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

En el caso cuando $X \subseteq A$ es una base según lo estipulado en la definición 0.2, la función inyectiva que cumple con la propiedad universal es simplemente la inclusión. Sin embargo, la equivalencia con la propiedad universal nos dice mucho más, pues nos asegura que los grupos libres son exactamente los objetos libres en la categoría de los grupos abelianos. En particular, cualesquiera dos grupos libres con la misma base X son isomorfos, lo cual se demuestra con facilidad y con la técnica estándar a partir de la propiedad universal.

Aunque aquí no probaremos la equivalencia de estas dos definiciones, sí bosquejaremos la demostración de una de las direcciones. Supongamos que $X \subseteq A$ es base según la definición 0.2, sea B otro grupo abeliano y $f : X \longrightarrow B$ una función. Definimos $\hat{f} : A \longrightarrow B$ de la manera siguiente: tomemos $a \in A$, como $\langle X \rangle = A$, hay enteros $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{Z}$ y elementos $x_1, \ldots, x_s \in X$ tales que $n_1 x_1 + \cdots + n_s x_s = a$; entonces definimos $\hat{f}(a) := n_1 f(x_1) + \cdots + n_s f(x_s)$. El hecho de que X sea $\mathbb{Z}$-linealmente independiente nos permitirá asegurar que $\hat{f}$ está bien definido, es decir, no depende de la representación de a como combinación lineal de elementos de X (pues de hecho, dicha representación será única). Finalmente, la unicidad de $\hat{f}$ también resulta ser casi inmediata (básicamente, definimos a $\hat{f}$ de la única manera posible que permite que el correspondiente diagrama conmute).

Siempre que un grupo abeliano A sea libre con base X, A es isomorfo a la suma directa de copias de $\mathbb{Z}$, tantas como elementos tenga X. Esto es, se verifica que (recordemos que el cuantificador $\forall^\infty$ se lee como: "para todo ... salvo posiblemente una cantidad finita"):

$$A \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} = {}^{(X)}\mathbb{Z} = \{ f \in {}^{X}\mathbb{Z} \,\big|\, (\forall^\infty x \in X)(f(x) = 0) \}.$$

Esto puede demostrarse con una idea muy similar a la del párrafo anterior. Dado $a \in A$, se tiene que a se escribe de manera única como una $\mathbb{Z}$-combinación lineal $n_1 x_1 + \cdots + n_s x_s$ de elementos distintos $x_1, \ldots, x_s \in X$, luego está bien definida la asignación $a \longmapsto f_a \in {}^{(X)}\mathbb{Z}$, en donde $f_a(x_i) = n_i$ para $1 \leq i \leq s$ y $f_a(x) = 0$ para cualquier $x \in X$ distinto de los x_i. Resulta más o menos claro que esta asignación es una biyección y además morfismo de grupos, por lo tanto un isomorfismo. Recíprocamente, es claro que los grupos abelianos de la forma ${}^{(X)}\mathbb{Z}$ son libres, con base $\{e_x\}_{x \in X}$, en donde para cada $x, y \in X$ tenemos que $e_x(y) = \delta_{x,y}$, la delta de Kronecker. También es claro que la función $i : X \hookrightarrow {}^{(X)}\mathbb{Z}$ dada por $i(x) = e_x$ satisface la propiedad universal arriba mencionada, es decir, hace que ${}^{(X)}\mathbb{Z}$ sea un grupo libre según la segunda definición que dimos de grupo libre, la que utiliza la propiedad universal.

Ahora podemos probar el recíproco de la equivalencia entre las dos definiciones de ser libre. Supongamos que tenemos una inyección $i : X \hookrightarrow A$ que cumple con la propiedad universal de los grupos libres. Pero entonces, también $x \longmapsto e_x$ es una inyección de X en ${}^{(X)}\mathbb{Z}$ que cumple con dicha propiedad universal, lo cual implica que $A \cong {}^{(X)}\mathbb{Z}$ y por lo tanto, como vimos en el párrafo anterior, A es libre de acuerdo con la definición 0.2. Más aún, bajo este isomorfismo, $i[X]$ debe corresponderse con $\{e_x\}_{x \in X}$ y esto significa que $i[X] \subseteq A$ es base para A en el sentido de la definición 0.2.

Así las cosas, toda la discusión anterior puede resumirse en la siguiente proposición.

Proposición 0.3. *Sea A un grupo abeliano y $X \subseteq A$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- *A es libre con base $X \subseteq A$ en el sentido de la definición 0.2.*
- *La función inclusión $X \hookrightarrow A$ satisface la propiedad universal de los grupos abelianos libres.*
- *$A \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$.*

❏

Estipulemos que el grupo trivial, $\langle 0 \rangle$, es libre con base $\emptyset$. Esta estipulación no contradirá los resultados ni las notaciones anteriores, tan pronto como convengamos en que la suma directa de grupos abelianos sin ningún sumando es igual a dicho grupo trivial.

Definición 0.4. Sea A un grupo abeliano libre con base X. Definimos el **rango** de A, como la cardinalidad $|X|$ de su base.

Esta definición pretende ser análoga a la de dimensión de un espacio vectorial. A continuación veremos que el rango de un grupo abeliano libre está bien definido.

Proposición 0.5. *Si A es un grupo abeliano libre, entonces dos bases cualesquiera de él tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Supongamos primero que A tiene una base X que es finita, y que Y es otra base de A con $|X| < |Y|$. Entonces, $A \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$. Obsérvese que $2A = \{2a \mid a \in A\}$ es un subgrupo de A, restrinjamos el isomorfismo anterior a $2A$. Es fácil ver que dicha restricción nos proporciona un isomorfismo $2A \cong \bigoplus_{x \in X} 2\mathbb{Z}$, y que al pasar al cociente, tenemos que $A/2A \cong \bigoplus_{x \in X} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, este último grupo es de cardinalidad $2^{|X|}$. Similarmente, si Y es finito entonces obtenemos que $|A/2A| = 2^{|Y|}$, mientras que si Y es infinito entonces $|A/2A| = \omega$, en ambos casos tenemos una contradicción con el hecho de que $|X| < |Y|$. Así, hemos terminado en el caso en que A tiene una base finita. Supongamos, por lo tanto, que A tiene una (y por consiguiente todas) base infinita X. Si probamos que $|A| = |X|$ habremos terminado. Pero sabemos que $A \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} = {}^{(X)}\mathbb{Z}$, luego basta probar que este último grupo es quien tiene cardinalidad $|X|$. Para $f \in {}^{(X)}\mathbb{Z}$, sea $\mathrm{sop}(f)$ el soporte de f, es decir, $\mathrm{sop}(f) = \{x \in X \big| f(x) \neq 0\}$. Por definición, $\mathrm{sop}(f) \in [X]^{<\omega}$. Más aún, cada f está completamente determinado por $f \upharpoonright \mathrm{sop}(f) : \mathrm{sop}(f) \longrightarrow \mathbb{Z}$. De esta forma, a cada $f \in {}^{(X)}\mathbb{Z}$ le corresponde de manera biyectiva un único par (Y, g) en donde $Y \in [X]^{<\omega}$ y $g : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$. Hay $|X|$ elementos $Y \in [X]^{<\omega}$ y, para cada uno de ellos (salvo en el caso en que $Y = \varnothing$, en cuyo caso sólo hay una) hay ω funciones : $Y \longrightarrow \mathbb{Z}$. Luego hay exactamente $|X|\omega = |X|$ elementos en ${}^{(X)}\mathbb{Z}$, por lo tanto $|A| = |{}^{(X)}\mathbb{Z}| = |X|$. ❏

Como corolario de todo lo anterior, para cada número cardinal κ hay un único (salvo isomorfismo) grupo abeliano libre de rango κ, a saber, la suma directa de κ copias de $\mathbb{Z}$, $\bigoplus_{\alpha<\kappa} \mathbb{Z}$. Equivalentemente, para cada conjunto X existe un único (salvo isomorfismo) grupo abeliano libre con base X, a saber, el único grupo abeliano libre de rango $|X|$.

Lema 0.6. *Sean A un grupo abeliano y $B \leq A$ tales que A/B es cíclico infinito. Entonces, hay un C tal que $A \cong B \oplus C$ (y, más aún, C es cíclico infinito, i.e. $C \cong A/B$). Es decir, B es un sumando directo de A.*

Demostración. Tenemos que $A/B = \langle a+B \rangle$. Sea $f : \langle a \rangle \oplus B \longmapsto A$, definido por $f(na, b) = na+b$. Es claro que f es un morfismo de grupos. Por otra parte, si $n \in \mathbb{Z}$ y $b \in B$ son tales que $0 = f(na, b) = na + b$ entonces $na = -b \in B$ y luego $B = na + B = n(a + B)$; siendo $A/B = \langle a + B \rangle$ cíclico infinito, no hay más remedio que concluir que $n = 0$ y *a fortiori* $b = 0$. Luego $\ker(f) = \langle 0 \rangle$, y f es inyectivo. Además, dado $a' \in A$ entonces $a' + B \in A/B = \langle a + B \rangle$, lo cual implica que para cierto $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que $a' + B = na + B$. Esto significa que $a' - na \in B$ y por lo tanto $(na, a' - na) \in \langle a \rangle \oplus B$ es un elemento tal que $f(na, a' - na) = a'$, lo cual nos confirma que f es suprayectiva y por lo tanto es un isomorfismo, de modo que $A \cong \langle a \rangle \oplus B$ y efectivamente B es un sumando directo de A.

❏

Proposición 0.7.

(i) *Un subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.*
(ii) *Un grupo abeliano finitamente generado y libre de torsión es libre.*

Demostración.

(i) Si A es un grupo abeliano libre con base X, entonces $A \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} = \bigoplus_{\alpha < \kappa} \mathbb{Z}$, en donde $\kappa = |X|$. Para cada $\alpha < \kappa$ definimos $A_\alpha := \left(\bigoplus_{\delta < \alpha} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \leq \delta < \kappa} \langle 0 \rangle \right)$. Es decir, $A_\alpha = \{ f \in {}^{(\kappa)}\mathbb{Z} \big| (\forall \alpha \leq \delta < \kappa)(f(\delta) = 0)\} = \{ f \in {}^{(\kappa)}\mathbb{Z} \big| \operatorname{sop}(f) \cap (\kappa \setminus \alpha) = \varnothing \}$. Si $B \leq A$, entonces hagamos $B_\alpha = B \cap A_\alpha$ (nótese que estamos identificando libremente a A con ${}^{(\kappa)}\mathbb{Z}$). Para cada $\alpha < \kappa$, es claro que $B_\alpha = B_{\alpha+1} \cap A_\alpha$, luego al pasar al cociente tenemos que $B_{\alpha+1}/B_\alpha = B_{\alpha+1}/(B_{\alpha+1} \cap A_\alpha) \cong (B_{\alpha+1} + A_\alpha)/A_\alpha$ por el segundo teorema de isomorfismo. Pero este último cociente es un subgrupo de $A_{\alpha+1}/A_\alpha \cong \mathbb{Z}$, luego $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ es o bien trivial, o bien isomorfo a $\mathbb{Z}$ (en todo caso, es libre de rango ≤ 1). Entonces, por el lema 0.6 podemos concluir que, para cierto $b_\alpha \in B_{\alpha+1}$, se tiene que $B_{\alpha+1} = B_\alpha \oplus \langle b_\alpha \rangle$ (si $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ es trivial, entonces $b_\alpha = 0$; en caso contrario b_α es tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha = \langle b_\alpha + B_\alpha \rangle$). De aquí ya resulta claro (tal vez módulo una inducción transfinita) que

$$B = \bigoplus_{\alpha < \kappa} B_\alpha = \bigoplus_{\alpha < \kappa} \langle b_\alpha \rangle \cong \bigoplus_{\alpha < \lambda} \mathbb{Z},$$

en donde $\lambda = |\{ \alpha \in \kappa \big| b_\alpha \neq 0 \}|$, en particular B es libre.

(ii) Como parte de la teoría de estructura de los grupos abelianos finitamente generados, sabemos que para cada grupo abeliano finitamente generado A existe un grupo libre F (con base finita) tal que $A \cong \operatorname{tor}(A) \oplus F$ (véanse, por ejemplo, [**12**, II.2, pp. 76-78] o [**25**, Teorema 73, p. 42]). En particular, si $\operatorname{tor}(A) = \langle 0 \rangle$, ya resulta claro que A es abeliano libre.

❏

La siguiente es una de las caracterizaciones más útiles de los grupos abelianos libres.

Definición 0.8. Sea $\pi : A \longrightarrow B$ un morfismo de grupos abelianos. Decimos que π **se escinde** si existe un morfismo $\rho : B \longrightarrow A$ (llamado la **escisión** de π) tal que $\pi\rho = \mathrm{id}_B$.

Es decir, π se escinde sii tiene una inversa derecha en la categoría de grupos abelianos. Nótese que, si π se escinde con escisión ρ, entonces necesariamente π será epimorfismo y ρ será monomorfismo. Traduzcamos esto en el lenguaje de las sucesiones exactas cortas. Recordemos que una sucesión de grupos abelianos y morfismos como la siguiente

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

se denomina **exacta** si, para cada n, tenemos que $f_{n-1}[A_{n-1}] = \ker(f_n)$. En particular, una sucesión

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

que es exacta, es lo que conocemos como una **sucesión exacta corta**. En este caso, la exactitud de la sucesión implica que f es un monomorfismo (debido a que la imagen de $! : \langle 0\rangle \to A$, que es $\langle 0\rangle$, debe de ser igual a $\ker(f)$) y que g es un epimorfismo (debido a que el núcleo de $! : C \to \langle 0\rangle$, que es todo C, debe de ser igual a la imagen $g[B]$). Utilizando esta terminología, estamos en condiciones de enunciar la siguiente definición y el subsecuente teorema.

Definición 0.9. Dada la sucesión exacta corta

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle \ ,$$

decimos que dicha sucesión se **escinde por la derecha** si el epimorfismo g se escinde, es decir, si hay un morfismo de grupos abelianos $u : C \longrightarrow B$ tal que $gu = \mathrm{id}_C$. Similarmente, decimos que la sucesión se **escinde por la izquierda** si hay un morfismo de grupos abelianos $v : B \longrightarrow A$ tal que $vf = \mathrm{id}_A$.

Con estas definiciones, recordemos un importante teorema del álgebra homológica que nos ayudará en lo sucesivo.

Teorema 0.10. *Sea*

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \langle 0\rangle$$

una sucesión exacta corta. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La sucesión se escinde por la izquierda.*
(ii) *La sucesión se escinde por la derecha.*
(iii) $B = f[A] \oplus U$*, en donde* $U \leq B$ *es tal que* $g \restriction U$ *es un isomorfismo de* U *en* C*. En particular,* $B \cong f[A] \oplus C$.

Demostración.

(i) $\Rightarrow$ (iii)**:** Sea $v : B \longrightarrow A$ una escisión por la izquierda para el diagrama. Afirmamos que $B = f[A] \oplus \ker(v)$. En efecto, tomemos $b \in B$ arbitrario. Por hipótesis $vf = \mathrm{id}_A$, luego $v(f(v(b))) = v(b)$ lo cual implica que $b - f(v(b)) \in \ker(v)$, luego $b = f(v(b)) + (b - f(v(b))) \in f[A] + \ker(v)$. Sólo resta ver que la suma es directa. Si $b \in f[A] \cap \ker(v)$, ello quiere decir que para cierto $a \in A$, $f(a) = b \in \ker(v)$. Pero entonces $0 = v(b) = v(f(a)) = a$ y por lo tanto $b = f(a) = f(0) = 0$. Así, $f[A] \cap \ker(v) = \langle 0 \rangle$ y esto implica que $B = f[A] \oplus \ker(v)$. Verifiquemos el enunciado correspondiente a $g \upharpoonright \ker(v)$. Por hipótesis $C = g[B] = g[f[A] \oplus \ker(v)] = g[f[A]] + g[\ker(v)] = \langle 0 \rangle + g[\ker(v)] = g[\ker(v)]$. Por lo tanto, $g \upharpoonright \ker(v)$ es epimorfismo sobre C, y además $\ker(g \upharpoonright \ker(v)) = \ker(g) \cap \ker(v) = f[A] \cap \ker(v) = \langle 0 \rangle$, lo cual implica que $g \upharpoonright \ker(v)$ es monomorfismo y por lo tanto es un isomorfismo entre $\ker(v)$ y C.

$(ii) \Rightarrow (iii)$**:** Sea $u : C \longrightarrow B$ una escisión para el diagrama. Demostremos que $B = f[A] \oplus u[C]$. En efecto, dado $b \in B$, como por hipótesis $gu = \mathrm{id}_C$, entonces $g(u(g(b))) = g(b)$, por lo tanto $b - u(g(b)) \in \ker(g) = f[A]$, de donde deducimos que $b = (b - u(g(b))) + u(g(b)) \in f[A] + u[C]$. Sólo resta demostrar que la suma es directa. Para ello, supongamos que $b \in f[A] \cap u[C]$. Entonces, existen $a \in A$ y $c \in C$ tales que $b = f(a) = u(c)$. Dado que $f[A] = \ker(g)$, esto implica que $c = g(u(c)) = g(f(a)) = 0$, luego $b = u(c) = u(0) = 0$ y por lo tanto $f[A] \cap u[C] = \langle 0 \rangle$. Entonces ya tenemos que $B = f[A] \oplus u[C]$. Demostremos ahora el enunciado referente a $g \upharpoonright u[C]$. Pero esto es inmediato, pues al ser u escisión de g, no tiene más remedio que ser monomorfismo, con lo cual tenemos que $u : C \longrightarrow u[C]$ es un epimorfismo y por lo tanto un isomorfismo, cuya inversa claramente es $g \upharpoonright u[C]$.

$(iii) \Rightarrow (i) \wedge (ii)$**:** Si $B = f[A] \oplus U$ con $g \upharpoonright U$ un isomorfismo entre U y C, entonces las funciones $v : f[A] \oplus U \longrightarrow A$ dadas por $v(f(a) + u) = a$ (que está bien definida por ser f un monomorfismo) y $u : C \longrightarrow f[A] \oplus U$ dada por $u = (g \upharpoonright U)^{-1}$ claramente serán escisiones, por la izquierda y por la derecha, respectivamente, para el diagrama en cuestión:

$$\begin{tikzcd} \langle 0 \rangle \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & f[A] \oplus U \arrow[l, dashed, bend left, "v"] \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[l, dashed, bend left, "u"] \arrow[r] & \langle 0 \rangle \end{tikzcd}$$

❑

Con lo que hemos visto hasta ahora, tenemos las herramientas necesarias para demostrar la siguiente caracterización de los grupos abelianos libres, que nos resultará muy útil en lo sucesivo.

Teorema 0.11. *Un grupo abeliano A es libre $\iff$ para todo grupo abeliano B, todo epimorfismo* $: B \twoheadrightarrow A$ *se escinde.*

Demostración.

$\Rightarrow$**:** Supóngase que A es libre, digamos que con base X, y sea $\pi : B \longrightarrow A$ un epimorfismo. Para cada $x \in X$ seleccionamos un $b_x \in B$ tal que $\pi(b_x) = x$, luego por la propiedad universal de los grupos abelianos libres, hay un único $\rho : A \longrightarrow B$ que es morfismo de grupos tal que

$(\forall x \in X)(\rho(x) = b_x)$. Pero entonces, para cada $x \in X$, se tiene que $\pi(\rho(x)) = \pi(b_x) = x$, pero también $(\forall x \in X)(\mathrm{id}_A(x) = x)$. Por la propiedad universal de los grupos abelianos libres, concluimos que $\pi\rho = \mathrm{id}_A$ y por lo tanto ρ es escisión para π.

$\Leftarrow$: Consideremos un grupo libre F que tenga a A como base, mediante la inyección $i : A \hookrightarrow F$. Sea, por la propiedad universal de los grupos abelianos libres, $\pi : F \longrightarrow A$ el único morfismo tal que $(\forall a \in A)(\pi(i(a)) = a)$. Por hipótesis, hay una escisión $\rho : A \longrightarrow F$ para π, misma que debe de ser inyectiva. Luego A es isomorfo a un subgrupo de F y por lo tanto por el teorema 0.7 parte (i), A es libre.

❑

Proposición 0.12. (i) *Si A es un grupo abeliano y $B \leq A$ es tal que A/B es libre, entonces $A \cong (A/B) \oplus B$.*

(ii) *En particular, si tanto B como A/B son libres, entonces A es libre, más aún, toda base de B se extiende a una base de A.*

Demostración.

(i) Como A/B es libre, entonces por el teorema 0.11 el epimorfismo canónico $A \twoheadrightarrow A/B$ se escinde. En particular, la sucesión exacta corta

$$\langle 0\rangle \longrightarrow B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/B \longrightarrow \langle 0\rangle$$

se escinde, y el lema 0.10 nos garantiza que $A \cong B \oplus (A/B)$.

(ii) Por el inciso (i), si A/B y B son libres entonces de inmediato $(A/B) \oplus B \cong A$ lo es. También es inmediata la parte del "más aún".

❑

Finalmente, ofrecemos la prueba de un resultado que, posteriormente, resultará tan útil como la técnica utilizada para demostrarlo.

Definición 0.13. Consideremos una sucesión de conjuntos $\langle A_\beta | \beta < \alpha\rangle$, para algún $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

(i) Diremos que la sucesión es una **cadena** si $(\forall \beta, \gamma \in \mathbf{Ord})(\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow A_\beta \subseteq A_\gamma)$.

(ii) Diremos que la cadena es **suave** si para cada ordinal límite $\beta < \alpha$, se tiene que $A_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$.

(iii) Diremos que la cadena es **estricta** si para cada β tal que $\beta + 1 < \alpha$, $A_\beta \neq A_{\beta+1}$. Equivalentemente, si reemplazamos las contenciones $\subseteq$ en la parte (i) por contenciones propias $\subsetneq$.

(*iv*) Finalmente, diremos que se trata de una **cadena de grupos** si los A_β son grupos para todo $\beta < \alpha$, y en tal forma que para $\beta < \gamma < \alpha$ se tiene que $A_\beta \leq A_\gamma$.

Teorema 0.14. *Sea $\langle A_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ una cadena suave de grupos tal que A_0 es libre y para cada β que satisface $\beta + 1 < \alpha$, se tiene que $A_{\beta+1}/A_\beta$ es libre. Entonces, $A = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ es libre. Más aún, para cada $\beta < \alpha$, A/A_β es libre.*

Demostración. Sea X_0 base de A_0. Construiremos por inducción transfinita una cadena suave de conjuntos $\langle X_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$ tal que para cada $\beta < \alpha$, X_β es base de A_β. Si conocemos X_β, entonces en particular A_β es libre y, dado que $A_{\beta+1}/A_\beta$ es libre, la proposición 0.12 nos asegura que $A_{\beta+1}$ es libre y que tiene una base $X_{\beta+1}$ que es extensión de X_β. Ahora, supongamos que $\beta < \alpha$ es un ordinal límite, y que conocemos X_γ para todo $\gamma < \beta$. En este caso, dado que la cadena de grupos es suave por hipótesis, tendremos que $X_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} X_\gamma$ será una base para $A_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} A_\gamma$. Finalmente, notemos que, una vez construida la cadena $\langle X_\beta \big| \beta < \alpha \rangle$, entonces $X = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} X_\beta$ será una base para $A = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ y por consiguiente A será libre; más aún, es claro que, para cada $\beta < \alpha$, $\{x + A_\beta \big| x \in X \setminus X_\beta\}$ será una base para A/A_β. ❑

2. Invariantes cardinales del continuo

En esta sección, definiremos aquellos invariantes cardinales del continuo que utilizaremos durante el presente trabajo de tesis. Recordemos que la **cardinalidad del continuo** es la cardinalidad del conjunto de números reales, que casualmente coincide con la cardinalidad del conjunto de subconjuntos de los números naturales y que se denota por una letra "c" gótica. Esto es, $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}| = |\wp(\omega)| = 2^\omega$. En general, un invariante cardinal del continuo es un cardinal dado por una definición combinatoria, que suele ser no menor a ω_1 y no mayor a $\mathfrak{c}$ (en particular, asumir la hipótesis del continuo trivializa a todos estos cardinales). Hay una gran cantidad de invariantes cardinales del continuo, y las relaciones de orden entre ellos han sido extensamente estudiadas, pero aquí tan sólo mencionaremos aquellos cardinales que habremos de utilizar posteriormente. Para ello es preciso enunciar algunas definiciones preliminares. Comencemos por definir las nociones de "casi menor o igual a" y "casi contenido en".

Definición 0.15.

- Dados dos conjuntos A y B, decimos que A está **casi contenido** en B, lo cual se escribe $A \subseteq^* B$, si $|A \setminus B| < \omega$. Es decir, si de hecho A está contenido en B salvo por una cantidad finita de elementos.

- Definimos el orden parcial $\leq^*$ en el conjunto ${}^\omega\omega$ que consta de las funciones : $\omega \longrightarrow \omega$ de la manera siguiente. Dadas $f, g \in {}^\omega\omega$, tendremos que $f \leq^* g$ si hay un $k \in \omega$ tal que para toda $n \geq k$ se satisface que $f(n) \leq g(n)$. Es decir,

$$\leq^* = \{(f, g) \in {}^\omega\omega \times {}^\omega\omega \,\big|\, (\forall^\infty n \in \omega)(f(n) \leq g(n))\}.$$

Una vez definidas las nociones de $\subseteq^*$ y $\leq^*$, procederemos a definir aquellos conceptos que motivan la definición de los invariantes cardinales.

Definición 0.16.

- Una familia $\mathscr{F} \subseteq {}^\omega\omega$ es **no acotada** si $\neg(\exists g \in {}^\omega\omega)(\forall f \in \mathscr{F})(f \leq^* g)$.
- Una familia $\mathscr{F} \subseteq {}^\omega\omega$ es **dominante** si $(\forall g \in {}^\omega\omega)(\exists f \in \mathscr{F})(g \leq^* f)$.
- Una sucesión $\langle f_\alpha \,\big|\, \alpha < \lambda\rangle$ de elementos de ${}^\omega\omega$ es una **λ-escala** si $(\forall \alpha < \beta < \lambda)(f_\alpha <^* f_\beta)$ y además $\{f_\alpha \,\big|\, \alpha < \lambda\}$ es una familia dominante.
- Una familia $\mathscr{G} \subseteq [\omega]^\omega$ es **densa por grupos** si se cumple lo siguiente:
  - (i) $(\forall X \in \mathscr{G})(\forall Y \in [\omega]^\omega)(Y \subseteq^* X \Rightarrow Y \in \mathscr{G})$
  - (ii) Para toda partición $\{I_n \,\big|\, n < \omega\}$ de ω en intervalos finitos, existe un $A \in [\omega]^\omega$ tal que $\bigcup_{n\in A} I_n \in \mathscr{G}$.
- Una familia $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es **casi disjunta** (o **casi ajena**) si $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \neq b \Rightarrow |a \cap b| < \omega)$. $\mathscr{A}$ es **casi disjunta maximal**[1] (o **maximal casi ajena**) si, además de ser casi disjunta, es $\subseteq$-maximal en el conjunto de las familias casi disjuntas.
- Una familia $\mathfrak{I} \subseteq [\omega]^\omega$ es **centrada** si $(\forall \mathcal{F} \in [\mathfrak{I}]^{<\omega})(|\bigcap \mathcal{F}| = \omega)$.
- Dada una familia $\mathfrak{I} \subseteq [\omega]^\omega$, y $A \in [\omega]^\omega$, entonces diremos que A es una **pseudointersección** para $\mathfrak{I}$ si $(\forall I \in \mathfrak{I})(A \subseteq^* I)$.

En este momento ya nos encontramos en posesión del lenguaje necesario para definir aquellos invariantes cardinales que utilizaremos durante el desarrollo de la presente tesis.

Definición 0.17.

- Se define el cardinal $\mathfrak{b}$, el **número de acotación**, como la mínima cardinalidad de una familia no acotada. Es decir,

$$\mathfrak{b} := \text{mín}\{\lambda \,\big|\, (\exists \mathscr{F} \subseteq {}^\omega\omega)(|\mathscr{F}| = \lambda \wedge \mathscr{F} \text{ es no acotada})\}.$$

[1]Usualmente, se dice que $\mathscr{A}$ es una familia MAD debido a las siglas de *maximal almost disjoint*, que significa “maximal casi disjunta”.

- Se define el cardinal $\mathfrak{d}$, el **número de dominancia**, como la mínima cardinalidad de una familia dominante. Es decir,

$$\mathfrak{d} := \text{mín}\{\lambda \big| (\exists \mathscr{F} \subseteq {}^{\omega}\omega)(|\mathscr{F}| = \lambda \wedge \mathscr{F} \text{ es dominante})\}.$$

- Se define el cardinal $\mathfrak{g}$, el **número de densidad por grupos**, como la mínima cardinalidad de una familia de familias densas por grupos con intersección vacía. Es decir,

$$\mathfrak{g} := \text{mín}\{\lambda \big| (\exists \{\mathscr{G}_\xi \big| \xi < \lambda\})[(\forall \xi < \lambda)(\mathscr{G}_\xi \text{ es densa por grupos}) \wedge \bigcap_{\xi<\lambda} \mathscr{G}_\xi = \varnothing]\}.$$

- Se define el cardinal $\mathfrak{a}$ como la mínima cardinalidad infinita de una familia casi disjunta maximal. Es decir,

$$\mathfrak{a} := \text{mín}\{\lambda \big| (\exists \mathscr{A} \subseteq [\omega]^{\omega})(\omega \leq |\mathscr{A}| = \lambda \wedge \mathscr{A} \text{ es casi disjunta maximal})\}.$$

- Se define el cardinal $\mathfrak{p}$ como la mínima cardinalidad de una familia centrada sin pseudointersecciones. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} := \text{mín}\{\lambda \quad \Big| \quad & (\exists \mathfrak{P} \subseteq [\omega]^{\omega})(|\mathfrak{P}| = \lambda \wedge \mathfrak{P} \text{ es centrada} \\ & \wedge \neg(\exists I \in [\omega]^{\omega})(I \text{ es pseudointersección para } \mathfrak{P}))\}. \end{aligned}$$

Recordemos algunas de las proposiciones elementales que establecen relaciones de orden entre los cardinales recientemente definidos.

Proposición 0.18. *Los cardinales* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{p}$ *están bien definidos y se encuentran entre* ω_1 *y* $\mathfrak{c}$.

Demostración.

- Es claro que ${}^{\omega}\omega$ es una familia de funciones que no es acotada, lo cual muestra que $\mathfrak{b}$ está bien definido. Además, dado que $|{}^{\omega}\omega| = \mathfrak{c}$, también es claro que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$. Ahora, sea $\{f_n \big| n < \omega\} \subseteq {}^{\omega}\omega$ una familia numerable, veamos que no puede ser no acotada, es decir, que es acotada. Sea $g : \omega \longrightarrow \omega$ de modo que, para cada $n < \omega$, $g(n) = \text{máx}\{f_i(n) \big| i \leq n\} + 1$. Dado que, en este caso, para cada $n < \omega$ se tiene que $\{m < \omega \big| g(m) \leq f_n(m)\} \subseteq n$, entonces $f_n \leq^* g$. Esto implica de inmediato que $\mathfrak{b} \geq \omega_1$.

- $\mathfrak{d}$ está bien definido por la misma razón por la que $\mathfrak{b}$ lo está, y $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$ por la misma razón por la que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$. Además, hemos de notar que toda familia dominante es, en particular, no acotada, lo cual de inmediato implica que $\mathfrak{d} \geq \mathfrak{b} \geq \omega_1$.

- En primer lugar, notemos que hay familias casi disjuntas de tamaño $\mathfrak{c}$: si partimos de una biyección $f : \mathbb{Q} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \omega$, para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ puedo elegir una sucesión de racionales $\langle r_n \big| n < \omega\rangle$ que sea estrictamente creciente y que converja a r, lo cual nos garantiza que la familia $\{\{f(r_n)\big| n < \omega\}\big| r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \subseteq [\omega]^\omega$ es casi ajena. Ahora bien, por el lema de Zorn es posible extender cada familia casi ajena a una casi ajena maximal, lo cual prueba que existen las familias casi ajenas maximales y, por lo tanto, que $\mathfrak{a}$ está bien definido. Notemos en este momento que $|[\omega]^\omega| = \mathfrak{c}$, con lo cual es claro que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$. Sea ahora $\mathscr{A}$ una familia casi disjunta con $|\mathscr{A}| = \omega$. Veamos que $\mathscr{A}$ no puede ser maximal: sea $\mathscr{A} = \{a_n \big| n < \omega\}$, y escojamos $k_0 \in a_0$ arbitrario. Inductivamente, si conocemos $k_0 \in a_0, k_1 \in a_1 \setminus a_0, k_2 \in a_2 \setminus (a_0 \cup a_1), \ldots, k_n \in a_n \setminus (a_0 \cup \cdots \cup a_{n-1})$, entonces el hecho de ser $\mathscr{A}$ una familia casi disjunta nos asegura que podemos escoger un $k_{n+1} \in a_{n+1} \setminus (a_0 \cup \cdots \cup a_n)$. De esta forma, si $a = \{k_n \big| n < \omega\}$, es inmediato que $(\forall n < \omega)(a \cap a_n \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\} \in [\omega]^{<\omega})$ y por lo tanto $\mathscr{A} \cup \{a\}$ es también casi ajena. De esta forma, necesariamente hemos de tener que $\omega_1 \leq \mathfrak{a}$.

- Para ver que $\mathfrak{p}$ está bien definido, utilizaremos el axioma de elección, ya que un ultrafiltro libre[2] sobre ω es un ejemplo de una familia centrada sin pseudointersecciones. En efecto, pues si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre ω, entonces de la teoría de ultrafiltros (consúltese, por ejemplo, [**26**, Lema 1.10, p. 389]) sabemos que $\mathcal{U}$ consta únicamente de conjuntos infinitos, es decir, $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$. Esto también implica que $\mathcal{U}$ es una familia centrada, ya que, si $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{U}$, entonces también $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{U}$, en particular tenemos que $X_1 \cap \cdots \cap X_n$ es un conjunto infinito. Finalmente, supongamos que $X \subseteq \omega$ es una pseudointersección para $\mathcal{U}$. En particular, X debe de ser infinito, así que podemos "dividirlo" en dos "mitades", es decir, escribir $X = Y \cup Z$ con $Y \cap Z = \varnothing$ y $|Y| = |Z| = \omega$. Entonces, tendremos que[3] o bien $Y \in \mathcal{U}$ o bien $Z \cup (\omega \setminus X) = \omega \setminus Y \in \mathcal{U}$. Ambas opciones contradicen el hecho de ser X una pseudointersección para $\mathcal{U}$: en el primer caso, tendríamos que $X \subseteq^* Y$, pero $X \setminus Y = Z$ que es infinito; en el segundo caso obtenemos $X \subseteq^* Z \cup (\omega \setminus X)$, pero $X \setminus (Z \cup (\omega \setminus X)) = X \setminus Z = Y$, que es infinito, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es una familia centrada sin pseudointersecciones, y el cardinal $\mathfrak{p}$ está bien definido.

  Además, tenemos que $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{c}$ por la misma razón por la que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$. Ahora tomemos $\mathfrak{P}$ una familia centrada numerable y veamos que necesariamente $\mathfrak{P}$ ha de tener una pseudointersección. Sea $\mathfrak{P} = \{A_n \big| n < \omega\}$. Escojamos $a_0 \in A_0$ e inductivamente, para cada $n < \omega$

---

[2]Recordemos que para demostrar la existencia de ultrafiltros libres, también llamados no principales, es necesario utilizar el lema de Zorn.

[3]De la teoría básica acerca de ultrafiltros, sabemos que un filtro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto S es ultrafiltro si y sólo si $(\forall X \subseteq S)((X \in \mathcal{U}) \vee (S \setminus X \in \mathcal{U}))$ ([**26**, Lema 1.6, p. 388]), de hecho, en ciertos textos se define un ultrafiltro no como un filtro $\subseteq$-maximal, sino como un filtro que satisface precisamente esta condición que acabamos de mencionar.

elijamos un $a_{n+1} \in (A_0 \cap \cdots \cap A_{n+1}) \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$, lo cual se puede hacer pues por hipótesis cada $A_0 \cap \cdots \cap A_{n+1}$ es infinito. Entonces, es claro que $A \subseteq A_0$ y que para cada $n < \omega$ se cumple que $A \setminus A_{n+1} \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$, que es finito. Por lo tanto $(\forall n < \omega)(A \subseteq^* A_n)$ y A es una pseudointersección para $\mathfrak{P}$. Esto demuestra que $\mathfrak{p} \geq \omega_1$.

❏

En el segundo punto de la demostración anterior, salió a relucir que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$. Esta es la primera de las desigualdades que a continuación demostraremos entre los diversos invariantes cardinales del continuo, que resultan ser importantes en varias de las aplicaciones que daremos durante el desarrollo de la presente tesis. Las otras desigualdades a demostrar son las siguientes.

Proposición 0.19.

- $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.
- $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$.

Demostración.

- Sea $\lambda < \mathfrak{b}$ y sea $\mathscr{A} = \{A_\alpha \big| \alpha < \lambda\}$ una familia casi disjunta, veamos que ésta no puede ser maximal. Sea $B_0 := A_0$ y, recursivamente, para cada $n < \omega$ sea $B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Debido a que $\mathscr{A}$ es casi disjunta, tenemos que $(\forall n < \omega)(|B_n| = \omega)$. Para cada $\lambda > \alpha \geq \omega$ definamos $f_\alpha \in {}^\omega\omega$ dada por, para cada $n < \omega$, $f_\alpha(n) := \text{máx}(A_\alpha \cap B_n) + 1$, con la convención de que $\text{máx}(\emptyset) = 0$. Por hipótesis, la familia $\{f_\alpha \big| \omega \leq \alpha < \lambda\}$ ha de ser acotada, por lo tanto podemos elegir una $f \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall \omega \leq \alpha < \lambda)(f_\alpha \leq^* f)$.

  Ahora, para cada $n < \omega$ elijamos un $a_n \in B_n \setminus f(n)$ y consideremos $A = \{a_n \big| n < \omega\}$. Si $n < \omega$, entonces por construcción tenemos que $A \cap A_n \subseteq \{a_0, \ldots, a_n\}$, y por lo tanto $A \cap A_n$ es finito. Ahora bien, para $\omega \leq \alpha < \lambda$, entonces hay un $n < \omega$ tal que para $k \geq n$, se tiene que $f(k) \geq f_\alpha(k)$. Luego, si $j \in A \cap A_\alpha$ entonces para cierto $i < \omega$ tenemos que $j = a_i \in (B_i \setminus f(i)) \cap A_\alpha$, luego por la definición de f_α, esto implica que $f(i) \leq j < f_\alpha(i)$ y por lo tanto $i < n$. Esto significa que $A \cap A_\alpha$ también es finito. Por lo tanto, hemos demostrado que $\mathscr{A} \cup \{A\}$ es casi disjunta, y por lo tanto $\mathscr{A}$ no puede ser maximal. Luego, si $\mathscr{A}$ es casi disjunta maximal entonces su cardinalidad no puede ser menor a $\mathfrak{b}$ y esto demuestra que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

- Sea $\kappa < \mathfrak{p}$, y consideremos cualquier familia $\mathscr{F} = \{g_\eta \big| \eta \leq \kappa\} \subseteq {}^\omega\omega$. Demostremos que $\mathscr{F}$ debe de ser acotada. Recursivamente, elegiremos, para $\eta \leq \kappa$, una función estrictamente creciente $f_\eta \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall \xi < \eta)(\mathrm{ran}(f_\eta) \subseteq^* \mathrm{ran}(f_\xi))$ y $(\forall n < \omega)(f_\eta(n) \geq \text{máx}\{g_\eta(k) \big| k \leq 2n\})$. Podemos comenzar tomando, para cada $n < \omega$, $f_0(n) := \text{máx}\{g_0(k) \big| k \leq 2n\} = \text{máx}(g_0[2n + 1])$; ahora realicemos el paso inductivo suponiendo que conocemos $\{f_\xi \big| \xi < \eta\}$. Debido a que, por hipótesis inductiva, tenemos que cada uno de los $\mathrm{ran}(f_\xi) \subseteq^* \mathrm{ran}(f_\delta)$ para $\xi < \delta < \eta$, entonces $\{\mathrm{ran}(f_\xi) \big| \xi < \eta\}$ es una familia centrada (de hecho, es lo que se denomina una **torre**) de tamaño $\eta \leq \kappa < \mathfrak{p}$, lo cual implica que hay una pseudointersección para esta familia, llamémosla A. Construiremos f_η de tal forma que $\mathrm{ran}(f_\eta) \subseteq A$, para de este modo cumplir con la primera condición. Para ello, ponemos $f_\eta(n) = \text{mín}\{a \in A \big| (\forall k \leq 2n)(g_\eta(k) \leq a) \wedge (\forall k < n)(f_\eta(k) < a)\} = \text{mín}(A \setminus (\text{máx}(g_\eta[2n+1]) \cup (\text{máx}(f_\eta[n]) + 1)))$, y de inmediato se ve que con esta definición se cumple la segunda condición impuesta a la construcción.

  Aseguramos que f_κ es una cota para $\mathscr{F}$. Sea $\xi \leq \kappa$. Dado que $\mathrm{ran}(f_\kappa) \subseteq^* \mathrm{ran}(f_\xi)$, hay un $m < \omega$ tal que $(\forall n < \omega)(f_\kappa(m+n) \in \mathrm{ran}(f_\xi))$. Pero siendo f_ξ inyectiva y estrictamente creciente, ha de tenerse que la enumeración creciente de $\mathrm{ran}(f_\xi)$ es justamente f_ξ; luego como además f_κ es inyectiva y estrictamente creciente, necesariamente se sigue que $(\forall n < \omega)(f_\kappa(m+n) \geq f_\xi(n))$. Ahora bien, debido a la segunda condición impuesta durante la construcción, tenemos que, para cada $2m \leq n < \omega$, se cumple

$$f_\kappa(n) = f_\kappa(n - m + m) \geq f_\xi(n - m) \geq g_\xi(n),$$

  la segunda desigualdad se debe a que, dado que $2m \leq n < \omega$, entonces $2(n - m) \geq n$ y por lo tanto la segunda condición impuesta en la construcción recursiva implica la desigualdad deseada.

  Esto prueba que $\mathscr{F}$ es acotada, luego no hay familias no acotadas de tamaño $< \mathfrak{p}$ y por lo tanto $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$.

❏

Las desigualdades que hemos demostrado hasta ahora pueden resumirse en el siguiente fragmento del **diagrama de Van Douwen**, en el cual una flecha que apunta del cardinal κ al cardinal λ significa que la desigualdad $\kappa \leq \lambda$ es demostrable en ZFE. En general, cualquiera de las desigualdades hasta ahora demostradas puede ser, consistentemente, una desigualdad estricta (también es consistente que todas sean igualdades, si suponemos la hipótesis del continuo). Sin embargo, no daremos aquí la demostración de este hecho, debido a que no lo necesitaremos para desarrollar los argumentos que tendrán lugar a continuación y durante todo el desarrollo de la presente tesis.

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{c} \\
\mathfrak{a} \arrow[ur] & \mathfrak{d} \arrow[u] \\
& \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[ul] \\
& \mathfrak{p} \arrow[u] \\
& \omega_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Notemos que hasta ahora no hemos definido ningún invariante cardinal que se relacione de manera evidente con las escalas. Es un hecho que en ZFE no se puede demostrar ni la existencia ni la no existencia de una escala, sin embargo, a continuación presentaremos un resultado que resulta ser de suma importancia. Para ello necesitamos de un lema preliminar.

Lema 0.20. *$\mathfrak{b}$ es un cardinal regular.*

Demostración. Sea

$$\mu := \text{mín}\{\lambda \big| (\exists \mathscr{F} \subseteq {}^{\omega}\omega)(|\mathscr{F}| = \lambda \wedge \mathscr{F} \text{ es una } \leq^* - \text{cadena no acotada})\}.$$

Aseguramos que $\mathfrak{b} = \mu$. Por la definición, es inmediato que $\mathfrak{b} \leq \mu$. Veamos ahora que $\mu \leq \mathfrak{b}$: sea $\mathscr{F} = \{g_\alpha \big| \alpha < \mathfrak{b}\}$ una familia no acotada. Tomemos $g_0 = f_0$ y, suponiendo que ya conocemos $\{f_\xi \big| \xi < \alpha\}$, recursivamente construiremos f_α. Para ello, notemos que $\{g_\xi \big| \xi \leq \alpha\} \cup \{f_\alpha \big| \xi < \alpha\}$ tiene cardinalidad $|\alpha| < \mathfrak{b}$, luego podemos elegir f_α que sea una cota superior para esta familia. Una vez que tengamos $\{f_\alpha \big| \alpha < \mathfrak{b}\}$, es claro que ésta será una familia no acotada y, por construcción, una cadena ($\xi < \alpha < \mathfrak{b} \Rightarrow f_\xi \leq^* f_\alpha$). Esto implica que $\mu \leq \mathfrak{b}$ y por lo tanto $\mu = \mathfrak{b}$. Ahora veamos que $\mu = \text{cf}(\mu)$: si $\{f_\alpha \big| \alpha < \mu\}$ es una cadena no acotada y $\langle \alpha_\delta \big| \delta < \text{cf}(\mu)\rangle$ es una sucesión cofinal en μ, entonces claramente $\{f_{\alpha_\delta} \big| \delta < \text{cf}(\mu)\}$ también será una cadena no acotada; luego la minimalidad de μ implica que $\mu = \text{cf}(\mu)$. Esto demuestra el lema. ❑

Proposición 0.21. *Existe una escala* $\iff \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$.

Demostración.

⇒: Sea $\langle f_\alpha \big| \alpha < \kappa\rangle$ una escala. Sin perder generalidad, podemos suponer que κ es un cardinal regular (debido a que, dada una sucesión $\langle \alpha_\delta \big| \delta < \text{cf}(\kappa)\rangle$ cofinal en κ, entonces $\langle f_{\alpha_\delta} \big| \delta < \text{cf}(\kappa)\rangle$

también es una escala). Dado que una escala es, en particular, una familia dominante, entonces de acuerdo con las hipótesis tenemos que $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \kappa$. Es por ello que bastará demostrar que $\kappa \leq \mathfrak{b}$. Así, sea $\lambda < \kappa$ y $\mathscr{F} = \{g_\alpha \big| \alpha < \lambda\} \subseteq {}^\omega\omega$, demostremos que $\mathscr{F}$ es una familia acotada. En efecto, por hipótesis, dado que las f_α forman una familia dominante, para cada $\alpha < \lambda$ hay un cierto $\beta_\alpha < \kappa$ tal que $g_\alpha \leq^* f_{\beta_\alpha}$. Sea $\beta := \sup_{\alpha<\lambda}\beta_\alpha$. El hecho de que κ es regular nos asegura que $\beta < \kappa$, por lo tanto, dado que los f_α forman una escala, tenemos que, para cada $\alpha < \lambda$, se satisface $g_\alpha \leq^* f_{\beta_\alpha} \leq^* f_\beta$. Esto significa que f_β es una $\leq^*$-cota superior para $\mathscr{F}$, luego no hay familias no acotadas de tamaño $< \kappa$ y por lo tanto $\kappa \leq \mathfrak{b}$.

$\Leftarrow$: Supongamos ahora que $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \kappa$. Por el lema anterior, tenemos que κ es un cardinal regular. Sea $\{g_\alpha \big| \alpha < \kappa\}$ una familia dominante. Definamos recursivamente nuestra escala $\{f_\alpha \big| \alpha < \kappa\}$ de la siguiente manera (muy similar a la cadena no acotada que construimos en el lema anterior): $f_0 = g_0$, y, si ya conocemos $\{f_\beta \big| \beta < \alpha\}$, para $\alpha < \kappa$, aprovechamos que $\kappa = \mathfrak{b}$ para concluir que podemos elegir f_α que sea una $\leq^*$-cota superior para $\{f_\beta \big| \beta < \alpha\} \cup \{g_\beta \big| \beta \leq \alpha\}$ (pues esta última tiene cardinalidad $\leq \omega\alpha < \mathfrak{b}$). Por construcción, si $\alpha < \beta < \kappa$ entonces $f_\alpha \leq^* f_\beta$. Además, dado $f \in {}^\omega\omega$, tenemos que, para cierto $\alpha < \kappa$, $f \leq^* g_\alpha \leq^* f_\alpha$ y por lo tanto $\{f_\alpha \big| \alpha < \kappa\}$ es una $\kappa = \mathfrak{b} = \mathfrak{d}$-escala.

❑

Finalmente, es el momento de hablar acerca del cardinal $\mathfrak{g}$. Hasta ahora no hemos dicho nada de él, pues no es un invariante cardinal tan "tradicional" como los otros que hemos mencionado. Sin embargo, es también un cardinal importante. Al igual que los otros cardinales arriba mencionados, $\mathfrak{g}$ se encuentra entre ω_1 y $\mathfrak{c}$. Más aún, se cumplen las desigualdades $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{g} \leq \mathfrak{d}$. A continuación demostraremos la primera de estas desigualdades. Por su parte, la desigualdad $\mathfrak{g} \leq \mathfrak{d}$ se encuentra demostrada en [**2**, Chapter 4, §3, pp. 216-217], pero no escribiremos aquí esa demostración ya que la mencionada desigualdad puede verse también como un corolario de los resultados que se obtendrán en el segundo capítulo del presente trabajo de tesis.

Lema 0.22. *Si $\mathscr{C}$ es una familia densa por grupos y $X \in [\omega]^\omega$, entonces $\mathscr{C} \cap [X]^\omega \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea $\{I_n \big| n < \omega\}$ una partición de ω en intervalos finitos tal que $(\forall n < \omega)(|I_n \cap X| = 1)$ (por ejemplo, sea $X = \{x_n \big| n < \omega\}$ enumeración creciente y definamos $I_0 := [0, x_0]$ y para $n < \omega$, $I_{n+1} := (x_n, x_{n+1}]$). Al ser $\mathscr{C}$ densa por grupos, sea $Y \in [\omega]^\omega$ tal que $\bigcup_{n\in Y} I_n \in \mathscr{C}$. Entonces, para $n \in Y$, se tiene que $x_n \in \bigcup_{n\in Y} I_n$, luego si $Z := \{x_n \big| n \in Y\}$ entonces tenemos que $Z \in [X]^\omega$ y $Z \subseteq \bigcup_{n\in Y} I_n \in \mathscr{C}$; con lo cual concluimos que $Z \in \mathscr{C}$. Por lo tanto $\mathscr{C} \cap [X]^\omega \neq \varnothing$. ❑

Proposición 0.23. $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{g}$.

Demostración. Sea $\{\mathscr{C}_\alpha \big| \alpha < \lambda\}$ una familia de familias densas por grupos, y supongamos que $\lambda < \mathfrak{p}$. Nuestro objetivo es demostrar que la intersección de esta familia es no vacía. Para ello, tomemos $X_0 \in \mathscr{C}_0$. Al ser $\mathscr{C}_1$ densa por grupos, el lema anterior nos asegura la existencia de algún $X_1 \in \mathscr{C}_1 \cap [X_0]^\omega$. Inductivamente, supóngase que conocemos una familia de tamaño $\alpha < \lambda$ de la siguiente manera:

$$X_0 {}^* {\supseteq} X_1 {}^* {\supseteq} \cdots {}^* {\supseteq} X_\xi {}^* {\supseteq} \cdots \quad \xi < \alpha$$

tal que para cada $\xi < \alpha$, $X_\xi \in \mathscr{C}_\xi$. Entonces, claramente $\{X_\xi \big| \xi < \alpha\}$ es una familia centrada, al ser $\alpha < \lambda < \mathfrak{p}$ ha de existir una pseudointersección $Y \in [\omega]^\omega$ para esa familia. Luego como $\mathscr{C}_\alpha$ es densa por grupos, el lema anterior nos garantiza que podemos elegir un $X_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha \cap [Y]^\omega$, de modo que, para $\xi < \alpha$, $X_\alpha \subseteq Y \subseteq^* X_\xi$. De este modo continúa nuestra construcción inductiva. Una vez que ya conocemos toda la familia de tamaño λ

$$X_0 {}^* {\supseteq} X_1 {}^* {\supseteq} \cdots {}^* {\supseteq} X_\alpha {}^* {\supseteq} \cdots \quad \alpha < \lambda,$$

tendremos que $\{X_\alpha \big| \alpha < \lambda\}$ será una familia centrada, al ser $\lambda < \mathfrak{p}$ entonces podemos encontrar una pseudointersección $X \in [\omega]^\omega$ para esa familia. Entonces, se cumple $(\forall \alpha < \lambda)(X \subseteq^* X_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha)$, al ser cada $\mathscr{C}_\alpha$ densa por grupos concluimos que $X \in \mathscr{C}_\alpha$. Por lo tanto $X \in \bigcap_{\alpha<\lambda} \mathscr{C}_\alpha \neq \varnothing$, y esto implica que $\mathfrak{g} \geq \mathfrak{p}$. ❑

3. El axioma de Martin

En el curso de los argumentos utilizados en la presente tesis, resultará necesario utilizar, en ocasiones, el axioma de Martin o algún otro principio relacionado estrechamente con este axioma. El axioma de Martin es un axioma que se sabe consistente con ZFE. Esto implica que sus consecuencias también son consistentes con ZFE, y por lo tanto, obtener implicaciones del axioma de Martin es obtener pruebas de la consistencia con ZFE de dichas implicaciones. Para formular adecuadamente este axioma, requeriremos de ciertas definiciones.

Definición 0.24.

(*i*) Un **conjunto preordenado** (a veces también denominado una **noción de forzamiento**) es un par $(\mathbb{P}, \leq)$ tal que $\leq$ es una relación reflexiva y transitiva (no necesariamente antisimétrica) en $\mathbb{P}$.

(*ii*) Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado es **denso** si $(\forall p \in \mathbb{P})(\exists q \in D)(q \leq p)$.

(*iii*) Un subconjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado es un **filtro** si ocurre que $(\forall p, q \in G)(\exists r \in G)(r \leq p \wedge r \leq q)$, además de que $(\forall p, q \in \mathbb{P})((p \in G \wedge p \leq q) \Rightarrow q \in G)$.

(*iv*) Si $\mathscr{D} \subseteq \wp(\mathbb{P})$ es una familia de densos en un conjunto preordenado $\mathbb{P}$, y $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro, entonces G es **$\mathscr{D}$-genérico** si $(\forall D \in \mathscr{D})(G \cap D \neq \varnothing)$.

(*v*) Decimos que dos elementos $p, q \in \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado son **incompatibles**, denotado $p \perp q$, si no existe ningún $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.

(*vi*) Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ de un conjunto preordenado es una **anticadena** si $(\forall p, q \in A)(p \perp q)$.

(*vii*) Un conjunto preordenado $\mathbb{P}$ **tiene la c.c.c.** (condición de cadena contable) si toda anticadena de $\mathbb{P}$ es numerable.

Definición 0.25. El **axioma de Martin**, denotado por AM, es la proposición siguiente: siempre que $\mathbb{P}$ sea un conjunto preordenado (no vacío) que tiene la c.c.c., y $\mathscr{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| < \mathfrak{c}$, existirá un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que es $\mathscr{D}$-genérico.

Notemos que en todo conjunto preordenado $\mathbb{P}$, si tengo $\mathscr{D}$ una familia numerable de densos, entonces siempre hay filtros $\mathscr{D}$-genéricos. En efecto, si $\mathscr{D} = \{D_n \big| n < \omega\}$, entonces escogemos $p_0 \in D_0$ e inductivamente, para cada $n < \omega$, nos aprovechamos de que D_{n+1} es denso para elegir un $p_{n+1} \in D_{n+1}$ con $p_{n+1} \leq p_n$. Finalmente, si hacemos $G := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists n < \omega)(p_n \leq p)\}$, no es difícil verificar que G es un filtro $\mathscr{D}$-genérico. Es por ello que, suponiendo la hipótesis del continuo, el axioma de Martin “no tiene mucho chiste”(es decir, $\mathsf{ZFE} + \mathsf{HC} \vdash \mathsf{AM}$). En consecuencia, generalmente suele utilizarse la teoría $\mathsf{ZFE} + \mathsf{AM} + \neg\mathsf{HC}$ para realizar determinadas pruebas de consistencia. Para demostrar la consistencia de $\mathsf{ZFE} + \mathsf{AM} + \neg\mathsf{HC}$, es necesario utilizar la técnica del forzamiento iterado. Toscamente hablando, el forzamiento consiste en partir de un modelo M (que puede suponerse transitivo y numerable, en donde la relación $\in$ se interpreta como la relación real de pertenencia; más aún, puede suponerse además que M satisface cualquier proposición que sea consistente con ZFE) de ZFE (el llamado modelo base), y considerar un conjunto preordenado $\mathbb{P} \in M$ (una noción de forzamiento). En general, M no contendrá filtros $G \subseteq P$ que intersecten a absolutamente todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Sin embargo, la magia del forzamiento consiste en que es posible construir (dentro de ZFE) un modelo $M[G]$ de ZFE tal que $M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$, en donde G sí es un filtro que intersecta a todos los subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ que son elementos de M (decimos que G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M). De esta forma, cualquier contradicción que tenga lugar dentro de $M[G]$ puede traducirse a una contradicción dentro de ZFE, en particular cualquier proposición que se satisfaga en algún modelo $M[G]$ construído a partir de una noción de forzamiento $\mathbb{P} \in M$ es consistente con ZFE, en el sentido de que ZFE jamás nos permitirá refutar la proposición en cuestión (nuevamente, todo esto es asumiendo como artículo de fe que ZFE es consistente).

TEOREMA 0.26. *Tomemos un modelo base M y supongamos que en M se satisface: $\kappa \geq \omega_1$, κ es regular y $2^{<\kappa} = \kappa$ (por ejemplo, si $M \models \mathsf{HGC}$ entonces todo cardinal regular κ satisface $2^{<\kappa} = \kappa$). Entonces, hay una noción de forzamiento $\mathbb{P} \in M$ tal que $M \models (\mathbb{P}$ es c.c.c$)$ y tal que para todo filtro G que es $\mathbb{P}$-genérico sobre M, se tiene que $M[G] \models (\mathsf{AM} \wedge \mathfrak{c} = \kappa)$.*

DEMOSTRACIÓN. Revísese [**14**, Chapter VIII, §6, pp. 278-281] y en especial el teorema 6.3 de la página 279, cuya demostración está en las páginas 279-281; o bien consúltese [**21**, Chapter II, §3, Theorem 3.4, pp. 65-68]. ❑

Ahora, vamos a describir algunas variantes del axioma de Martin. Sea $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$. Entonces, consideremos la siguiente proposición, que denotaremos por AM_κ: "Si $\mathbb{P}$ es un preorden c.c.c. y $\mathscr{D}$ es una familia de densos con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, entonces hay un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que es $\mathscr{D}$-genérico·". Entonces, nuestro viejo conocido AM no es otra cosa que $(\forall \kappa \in \mathbf{Card})(\omega \leq \kappa < \mathfrak{c} \Rightarrow \mathsf{AM}_\kappa)$. Sin embargo, esta formulación del axioma de Martin "por pedazos", tiene sus ventajas. Por ejemplo, sabemos que en todo modelo de ZFE se satisface AM_ω. Por otra parte, puede probarse que en todo modelo de ZFE es falso $\mathsf{AM}_\mathfrak{c}$ (por ejemplo, con el preorden $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ y la familia de densos $\mathscr{D} = \{\{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(p)\} \big| n < \omega\} \cup \{\{p \in \mathbb{P} \big| (\exists n \in \mathrm{dom}(p))(h(n) \neq p(n))\} \big| h \in {}^\omega 2\}$, que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$, se tiene que, si G es un filtro $\mathscr{D}$-genérico, entonces $\bigcup G$ será una función en ${}^\omega 2$ distinta de todas las $h \in {}^\omega 2$, lo cual es una contradicción). Esto da pie a que definamos aún un invariante cardinal más.

DEFINICIÓN 0.27. Se define el invariante cardinal $\mathfrak{m}$ como el mínimo cardinal κ tal que no se satisface AM_κ. Es decir,

$$\mathfrak{m} := \min\{\kappa \big| \neg \mathsf{AM}_\kappa\}.$$

Así, tenemos que necesariamente $\omega < \mathfrak{m} \leq \mathfrak{c}$, y AM no es otra cosa que la afirmación de que $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$.

A continuación, introduciremos una variante del invariante cardinal $\mathfrak{m}$. Existen más variantes, pero en el presente trabajo sólo mencionaremos la que se utilizará más adelante.

DEFINICIÓN 0.28. (*i*) Un preorden $\mathbb{P}$ es **σ-centrado** si hay una cantidad numerable de filtros, $G_n \subseteq \mathbb{P}$ para $n < \omega$, tal que $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_n$.

(*ii*) Se define el cardinal $\mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$ como el mínimo cardinal κ tal que no se satisface AM_κ restringido a los órdenes σ-centrados. Es decir, si M es el conjunto que contiene exactamente a aquellos cardinales κ para los cuales hay un preorden σ-centrado $\mathbb{P}$ y una familia $\mathscr{D}$ de densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| = \kappa$ tal que no existen $G \subseteq \mathbb{P}$ que sean filtros $\mathscr{D}$-genéricos, entonces

$$\mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado}) := \text{mín}(M).$$

Es claro que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$. Sin embargo, el siguiente teorema, debido a M. Bell, resulta aún más sorprendente.

Teorema 0.29 (Bell). $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$.

Demostración. Consúltese [**11**, Teorema 4.18, pp. 32-34]; o bien puede revisarse la fuente original que es [**3**, pp. 149-152]. ❑

De esta forma, el diagrama que teníamos anteriormente, queda complementado de la siguiente manera.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{c} & \\
\mathfrak{a} \arrow[ur] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
 & \mathfrak{b} \arrow[ul] \arrow[u] & \mathfrak{g} \arrow[ul] \\
 & \mathfrak{p} \arrow[u] \arrow[ur] & \\
 & \mathfrak{m} \arrow[u] & \\
 & \omega_1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Corolario 0.30. $\mathsf{AM} \Rightarrow (\mathfrak{c} = \mathfrak{a} = \mathfrak{d} = \mathfrak{b} = \mathfrak{p} = \mathfrak{g}) \wedge$ (existe una $\mathfrak{c}-$escala).

Demostración. Inmediata, pues $\mathsf{AM} \equiv$ “$\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$”. ❑

Capítulo I

El problema de Whitehead

Actualmente, son ya bastante conocidas las diversas aplicaciones de métodos de la teoría de conjuntos en áreas como la topología de conjuntos o el análisis matemático. Históricamente, creo que la primera aplicación al álgebra fue la solución al problema de Whitehead por S. Shelah. El objetivo de este capítulo es presentar dicho problema, junto con su solución.

1. El problema de la extensión

Definición I.1. Sean A, B y G grupos abelianos. Diremos que G es una **extensión de** A **por medio de** B si $A \leq G$ y $G/A \cong B$.

Obsérvese que G es isomorfo a una extensión de A por medio de B sii existen un monomorfismo $\iota : A \hookrightarrow G$ y un epimorfismo $\pi : G \twoheadrightarrow B$ tales que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

es exacta corta.

Si tenemos A, G grupos abelianos con $A \leq G$, entonces hay un único (salvo isomorfismo) B tal que G es una extensión de A por medio de B, a saber, $B = G/A$. El problema de la extensión plantea la pregunta recíproca: Dados A y B grupos abelianos, determinar todas las posibles extensiones de A por medio de B. Nótese que al menos hay una de estas extensiones, la suma directa $A \oplus B$. Pero puede haber varias: por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $2\mathbb{Z}$ por medio de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pues la siguiente sucesión es exacta corta,

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

pero es claro que $\mathbb{Z} \not\cong 2\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, pues el miembro derecho tiene torsión, mientras que $\mathbb{Z}$ es libre de torsión.

Desde luego, sólo nos interesa caracterizar hasta isomorfismo las extensiones de A por medio de B. Por ello, si G y G' son dos de tales extensiones, es decir, si hay monomorfismos $\iota : A \hookrightarrow G$, $\iota' : A \hookrightarrow G'$ y epimorfismos $\pi : G \twoheadrightarrow B$, $\pi' : G' \twoheadrightarrow B$ tales que ambas sucesiones

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow A \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

y

$$\langle 0\rangle \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota'} G' \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} B \longrightarrow \langle 0\rangle$$

son exactas cortas, entonces

Definición I.2. Diremos que $G \sim G'$ (G es **isomorfo como extensión de** A **por medio de** B a G') si existe un isomorfismo $\psi : G \xrightarrow{\sim} G'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[rd, two heads, "\pi"] \arrow[dd, "\psi"', "\wr"] & \\
A \arrow[ru, hook, "\iota"] \arrow[rd, hook, "\iota'"'] & & B \\
 & G' \arrow[ru, two heads, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Es fácil ver que la relación $\sim$ es de equivalencia, y es una relación más fuerte que sólo el "ser isomorfo". Baer definió una operación binaria entre las clases de equivalencia de estas extensiones, dotando al conjunto cociente de estructura de grupo. Este grupo se denota por $\operatorname{Ext}(B, A)$, y su elemento neutro resulta ser justamente la clase de equivalencia de $A \oplus B$. El siguiente teorema resulta fundamental para el estudio del problema de la extensión que realizaremos en el resto de este capítulo.

Teorema I.3. *Sea A un grupo abeliano. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\operatorname{Ext}(A, \mathbb{Z})$ *es el grupo trivial.*
- *Todo epimorfismo* $\pi : B \twoheadrightarrow A$ *tal que* $\ker \pi$ *es cíclico infinito se escinde.*

Demostración. Supongamos la primera condición, y sea $\pi : B \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo tal que $\ker \pi \cong \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que la sucesión

$$\langle 0\rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} B \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow \langle 0\rangle$$

es exacta, y entonces por hipótesis ha de tenerse que $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$. Por el teorema 0.10, tenemos que π se escinde (esencialmente, $B = A \times \mathbb{Z}$, entonces $a \mapsto (a, 0)$ funciona como escisión para π).

Recíprocamente, si la segunda condición se cumple, entonces si B es una extensión de $\mathbb{Z}$ por medio de A ello significa que

$$\langle 0\rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} B \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow \langle 0\rangle$$

es exacta corta, por hipótesis esto implica que π se escinde y por lo tanto el teorema 0.10 nos garantiza que $B \cong A \oplus \mathbb{Z}$. ❏

Definición I.4. Si A es un grupo abeliano que cumple con cualquiera de las dos (y consecuentemente con las dos) equivalencias del teorema anterior, se le denominará un **W-grupo**.

Recordemos que el teorema 0.11 nos aseguraba que los grupos abelianos libres son exactamente aquellos grupos abelianos A que escinden a todo epimorfismo $\pi : B \longrightarrow A$. En particular, los grupos abelianos libres A escinden a todo epimorfismo $\pi : B \longrightarrow A$ con núcleo cíclico infinito. Eso es el contenido del siguiente corolario.

Corolario I.5. *Todo grupo abeliano libre es un W-grupo.* □

El problema de Whitehead consiste en decidir si se cumple el recíproco del corolario anterior. Es decir, ¿se cumple que todo W-grupo es libre? A continuación analizaremos la solución que dio Shelah al problema de Whitehead.

2. Propiedades homológicas de los W-grupos

Recordemos que, dados dos grupos abelianos A, B, entonces $\mathrm{Hom}(A, B)$ es el grupo cuyo conjunto subyacente es exactamente el conjunto de funciones $f : A \longrightarrow B$ que son morfismos de grupo, y la operación de grupo viene dada como sigue: dados $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $f + g$ viene definido de tal forma que para cada $a \in A$, $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$. Es inmediato verificar que con esta operación, $\mathrm{Hom}(A, B)$ es un grupo abeliano cuyo elemento neutro es el morfismo trivial $0 : A \longrightarrow B$ que satisface que para cada $a \in A$, $0(a) = 0$. Dado un grupo abeliano C, la asignación $A \longmapsto \mathrm{Hom}(A, C)$ es funtorial contravariante. Esto significa que todo morfismo de grupos abelianos $f : A \longrightarrow B$ induce una asignación

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(f, C) : \mathrm{Hom}(B, C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C) \\ g &\longmapsto gf \end{aligned}$$

que respeta composiciones (lo cual quiere decir que, si $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y $g \in \mathrm{Hom}(B, D)$, entonces $\mathrm{Hom}(gf, C) = \mathrm{Hom}(f, C)\mathrm{Hom}(g, C)$, como es inmediato verificar). En otras palabras, tenemos que $\mathrm{Hom}(-, C)$ es un endofuntor contravariante en la categoría de grupos abelianos.

A continuación enunciaremos un importante lema del álgebra homológica que nos ayudará a comprender adecuadamente el problema de la extensión. Este lema se puede aplicar indiscriminadamente aún sin conocer cuál es la definición exacta de Ext. No lo demostraremos aquí por requerir un conocimiento profundo de dicha definición, así como de una gran cantidad de teoría previa del álgebra homológica.

Lema I.6 (Cartan-Eilenberg). *Supóngase que tenemos una sucesión exacta corta*

$$\langle 0\rangle \longrightarrow B \overset{f}{\hookrightarrow} C \overset{g}{\twoheadrightarrow} D \longrightarrow \langle 0\rangle \ .$$

Entonces, para todo grupo abeliano A existe una sucesión exacta

$$\begin{array}{l}\langle 0\rangle \longrightarrow \mathrm{Hom}(D,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,A)} \mathrm{Hom}(C,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,A)} \mathrm{Hom}(B,A) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}(D,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(C,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}(B,A) \longrightarrow \langle 0\rangle.\end{array}$$

Demostración. Este es el contenido de [**8**, Chapter IX, Theorem 51.3, p. 218-220], si bien para comprenderlo es preciso consultar esa misma obra desde la página 209. ❏

A continuación, comenzaremos a aplicar el lema anterior para obtener resultados que más adelante nos serán de gran ayuda.

Teorema I.7.

(*i*) *Todo subgrupo de un W-grupo es un W-grupo.*
(*ii*) *Todo W-grupo es libre de torsión.*
(*iii*) *Si $B \leq A$, y A es un W-grupo pero A/B no es un W-grupo, entonces existe un morfismo de grupos abelianos $\psi : B \longrightarrow \mathbb{Z}$ que no puede extenderse a un morfismo con dominio A (i.e. todo morfismo $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ es tal que $\varphi \restriction B \neq \psi$).*

Demostración.

(*i*) Sea A un W-grupo y $B \leq A$. Entonces, tenemos una sucesión exacta

$$\langle 0\rangle \longrightarrow B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/B \longrightarrow \langle 0\rangle \ ,$$

luego tomando los últimos tres términos de la sucesión exacta que el lema I.6 nos asegura que existe, tenemos una sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) \longrightarrow \langle 0\rangle$$

pero que A sea un W-grupo significa que $\mathrm{Ext}(A,\mathbb{Z}) = \langle 0\rangle$, luego la exactitud de la sucesión anterior nos fuerza a aceptar que $\mathrm{Ext}(B,\mathbb{Z}) = \langle 0\rangle$ y esto significa que B es un W-grupo.

(*ii*) Sea A un W-grupo. Demostremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el grupo cíclico de orden n (i.e. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) no es un W-grupo. Pero esto es cierto debido a que el epimorfismo canónico $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene núcleo cíclico infinito, y sin embargo no puede escindirse (pues cualquier escisión encajaría a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (que es un grupo de torsión) como subgrupo de $\mathbb{Z}$ (que es libre de torsión), lo cual es contradictorio). Así, si A no fuera libre de torsión entonces habría algún elemento $a \in A$ de torsión, es decir, tal que $\langle a \rangle$ es cíclico finito. Pero entonces, como acabamos de ver, $\langle a \rangle$ no puede ser un W-grupo, mientras que a la vez es un subgrupo del W-grupo A y esto contradice al inciso (i).

(iii) Bajo las hipótesis que se tienen, la sucesión

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow B \xhookrightarrow{\iota} A \twoheadrightarrow A/B \longrightarrow \langle 0 \rangle \ ,$$

es exacta corta, en donde $\iota : B \hookrightarrow A$ es el morfismo inclusión. Entonces, tomando exactamente los cuatro términos de enmedio en la sucesión que el lema I.6 nos asegura que existen, tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\iota, \mathbb{Z})} \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\quad g \quad} \mathrm{Ext}(A/B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\qquad} \mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) \ .$$

Por hipótesis A es un W-grupo, luego $\mathrm{Ext}(A, \mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle$. Entonces la exactitud de la sucesión anterior nos garantiza que g es un epimorfismo. Ahora bien, el hecho de que esta sucesión sea exacta también implica que $\mathrm{Hom}(\iota, \mathbb{Z})[\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})] = \ker(g)$. Pero como sabemos que g es epimorfismo y además por hipótesis A/B no es un W-grupo, es decir, $\mathrm{Ext}(A/B, \mathbb{Z}) \neq \langle 0 \rangle$, entonces es imposible que $\ker(g) = \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Z})$ y esto implica que $\mathrm{Hom}(\iota, \mathbb{Z})$ no puede ser suprayectivo. Prestemos atención: para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$, tenemos que $\mathrm{Hom}(\iota, \mathbb{Z})(\varphi) = \varphi\iota = \varphi \restriction B$, luego lo que acabamos de concluir es que hay un $\psi \in \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Z})$ tal que para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z})$ se cumple que $\varphi \restriction B \neq \psi$, que es lo que queríamos demostrar.

❏

3. Acerca de los W-grupos numerables

En la presente sección desarrollaremos bastantes resultados que entrelazan el estudio de los W-grupos numerables con el de la teoría de conjuntos, con miras a generalizar estos razonamientos en la siguiente sección para W-grupos de cardinalidad mayor. Ahora nos encaminaremos a demostrar que todo W-grupo numerable es libre.

Definición I.8. Sea A un grupo abeliano libre de torsión y $B \leq A$.

(i) Decimos que B es **puro** en A si A/B es libre de torsión.

(ii) Definimos la **cerradura pura** de B en A como el conjunto

$$\mathrm{C.P.}(B) = \{a \in A \big| (\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})(na \in B)\}.$$

La terminología de la definición anterior no se utiliza en general (aunque Shelah la introdujo en su artículo [**19**] sobre el problema de Whitehead). Normalmente, en la literatura, la terminología "subgrupo puro" denota otra cosa (ver, por ejemplo, [**8**, p. 113]). Es fácil ver que C.P.(B) es un subgrupo puro de A: si $a, b \in$ C.P.(B) entonces hay $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $na, mb \in B$, luego $(nm)(a - b) = m(na) - n(mb) \in B$, y por consiguiente $a - b \in$ C.P.(B). Por lo tanto, C.P.$(B) \leq A$. Ahora, si $x +$ C.P.$(B) \in A/$ C.P.(B) es un elemento de torsión, esto quiere decir que hay un $n \in \mathbb{N}$ con $nx +$ C.P.$(B) = n(x +$ C.P.$(B)) =$ C.P.(B), luego $nx \in$ C.P.(B) y por tanto, hay un $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $(mn)x = m(nx) \in B$, luego $x \in$ C.P.(B) y la parte de torsión de $A/$ C.P.(B) es trivial. De hecho, C.P.(B) es el subgrupo puro más pequeño de A que contiene a B: Pues si $B \subseteq C \leq A$ es otro subgrupo puro en A, y $a \in$ C.P.(B), entonces hay un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $na \in B \subseteq C$, luego $C = na + C = n(a + C)$ y por consiguiente, $a + C$ es un elemento de torsión en A/C, el cual es por hipótesis libre de torsión y por consiguiente $a + C = C$, lo que implica $a \in C$ y luego C.P.$(B) \subseteq C$.

Aunque B sea finitamente generado, no necesariamente C.P.(B) lo es. Por ejemplo, considérese el grupo (libre de torsión) $\mathbb{Q}$. En él, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ es finitamente generado. Pero es fácil comprobar que C.P.$(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$ (si $a/b \in \mathbb{Q}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces $b(a/b) = a \in \mathbb{Z}$). Y es bien conocido el hecho de que $\mathbb{Q}$ no es finitamente generado (si $a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n \in \mathbb{Q}$, con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{N}$; entonces basta tomar un número primo p que no divida a $b_1, \ldots, b_n$ y es inmediato comprobar que $1/p \notin \langle a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n \rangle$).

Sin embargo, en el caso cuando A es un grupo libre abeliano, A es libre de torsión, y entonces si $B \leq A$ es finitamente generado, tenemos que C.P.(B) es finitamente generado. En efecto, siendo A libre entonces B lo es. Si X es base para A y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es base para B, de tal forma que cada $b_i = m_{i,1}x_1 + \ldots + m_{i,k}x_k$ con $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$ (posiblemente algunos $m_{i,j} = 0$), entonces para cada $1 \leq i \leq n$ sea l_i el máximo común divisor de $\{m_{i,1}, \ldots, m_{i,k}\}$. De esta manera, si para cada $1 \leq i \leq n$ definimos $y_i := (m_{i,1}/l_i)x_1 + \cdots + (m_{i,k}/l_i)x_k$, es fácil comprobar que C.P.(B) tiene a $\{y_1, \ldots, y_n\}$ como base. En particular, si A es un grupo libre abeliano, entonces todo subgrupo finitamente generado $B \leq A$ está contenido en un subgrupo puro finitamente generado (como acabamos de ver, C.P.(B) testifica esto). El siguiente teorema nos proporciona una recíproca parcial (para grupos numerables) de lo que acabamos de afirmar.

Teorema I.9 (Criterio de Pontryagin). *Sea A un grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado de A está contenido en un subgrupo puro en A que es finitamente generado. Entonces, A es libre.*

Demostración. Sea $A = \{a_n \mid n < \omega\}$. Definimos por inducción una cadena suave $\langle B_n \mid n < \omega \rangle$ de subgrupos puros finitamente generados de A. En primer lugar, $B_0 = \langle 0 \rangle$. Si ya conozco B_n, sea B_{n+1} un subgrupo puro finitamente generado de A que contenga a $\langle B_n \cup \{a_n\} \rangle$. Es claro que $\bigcup_{n<\omega} B_n = A$.

Ahora, al ser B_n puro en A, ello implica que A/B_n es libre de torsión. Por tanto, $B_{n+1}/B_n \leq A/B_n$ es libre de torsión, además de ser finitamente generado ya que B_{n+1} lo es. Por lo tanto, por la proposición 0.7 parte (*ii*), B_{n+1}/B_n es libre para todo $n < \omega$; como además B_0 es libre (con base $\varnothing$), el teorema 0.14 nos asegura que A es libre. ❏

En adelante, como una cuestión de notación, siempre que tengamos un grupo abeliano B, π denotará la primera proyeción $\pi : B \times \mathbb{Z} \longrightarrow B$, es decir, $(b, n) \overset{\pi}{\mapsto} b$, para todo $(b, n) \in B \times \mathbb{Z}$.

Definición I.10. Sea B un grupo abeliano. Un $(B, \mathbb{Z})$**-grupo** es un grupo C tal que su conjunto subyacente es $B \times \mathbb{Z}$ y tal que tanto la proyección $\pi : C \longrightarrow B$ como el encaje de $\mathbb{Z}$ en C dado por $n \longmapsto (0, n)$ son morfismos de grupos abelianos.

Para un grupo abeliano B, el ejemplo más sencillo de un $(B, \mathbb{Z})$-grupo es $B \oplus \mathbb{Z}$. Lo importante de esta definición, es que si logramos encontrar un $(B, \mathbb{Z})$-grupo C tal que $\pi : C \longrightarrow B$ no se escinde, habremos demostrado que B no es un W-grupo, pues $\ker \pi = \langle 0 \rangle \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

Lema I.11. *Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \longrightarrow B$ se escinde. Entonces, $C \cong B \oplus \mathbb{Z}$. Más aún, puede construirse el isomorfismo $\varphi : C \overset{\sim}{\longrightarrow} B \oplus \mathbb{Z}$ de modo que preserve tanto a π como a su escisión $\rho : B \longrightarrow C$, en el sentido de que los dos siguientes diagramas conmutan:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, hook] & C \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] \\ & B \oplus \mathbb{Z} \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\pi"] & B \\ B \oplus \mathbb{Z} \arrow[u, "\varphi^{-1}"', "\wr"] \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

en donde la inclusión $B \hookrightarrow B \oplus \mathbb{Z}$ del primer diagrama es la evidente $b \mapsto (b, 0)$; y las dos π del segundo diagrama son la misma, vistas como funciones entre los conjuntos subyacentes.

Demostración. Observemos primero un par de hechos importantes para un $(B, \mathbb{Z})$-grupo C. En primer lugar, aún sin saber cuál es la operación de grupo para C, el hecho de que $\pi : C \longrightarrow B$ sea morfismo implica que, para cada $(b, n), (c, m) \in C$, $(b, n) + (c, m) = (b + c, k)$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Más aún, $(0, 0)$ es el elemento neutro de C ya que $(0, 0) + (0, 0) = (0, 0)$. Por último, tenemos que, para cada $b \in B$, $\rho(b) = (b, n)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, debido a que $\pi(\rho(b)) = b$. Sea $\psi : B \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow C$ definido por $\psi(b, n) = \rho(b) + (0, n)$. En efecto ψ es un morfismo por la definición de $(B, \mathbb{Z})$-grupo ($\psi((b, n) + (c, m)) = \psi(b + c, n + m) = \rho(b + c) + (0, n + m) = \rho(b) + \rho(c) + (0, n) + (0, m) = \psi(b, n) + \psi(c, m)$). Además, es monomorfismo, pues si $\psi(b, n) = \psi(c, m)$, esto quiere decir que $\rho(b) + (0, n) = \rho(c) + (0, m)$, lo cual implica que $\rho(b - c) = (0, m - n)$, luego la primera entrada de $\rho(b - c)$ (que como hicimos notar arriba, es justamente $b - c$) es igual a 0, i. e. $b = c$. También se sigue que $(0, m - n) = \rho(0) = (0, 0)$ y por tanto $m = n$. Así, ψ es inyectiva. Ahora, para ver que es suprayectiva, tomemos un $(b, n) \in C$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(0, m) = (b, n) - \rho(b)$. Entonces, $\psi(b, m) = \rho(b) + (0, m) = (b, n)$ y ψ es, por tanto, un isomorfismo cuya inversa φ claramente satisface lo pedido. ❏

Lo que el lema anterior nos está diciendo, es que siempre que C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo cuya proyección $\pi : C \longrightarrow B$ se escinde, entonces esencialmente podemos suponer sin pérdida de generalidad que C es en realidad $B \oplus \mathbb{Z}$ y que la escisión $\rho : B \longrightarrow B \oplus \mathbb{Z}$ viene dada por $\rho(b) = (b, 0)$. Recordando el teorema 0.10, estaríamos hablando de que la siguiente sucesión exacta corta se escinde:

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow C \twoheadrightarrow B \longrightarrow \langle 0 \rangle$$

y entonces, para todos los fines prácticos, se tiene que $C = B \oplus \mathbb{Z}$. Utilizaremos esto para demostrar el siguiente resultado.

Lema I.12. *Sean $B \leq A$, con A un W-grupo y tal que A/B no es W-grupo. Sea C un $(B, \mathbb{Z})$-grupo y ρ una escisión para $\pi : C \longrightarrow B$. Entonces, existe un $(A, \mathbb{Z})$-grupo D que es extensión de C tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : D \longrightarrow A$.*

Demostración. Por el lema anterior, podemos suponer que $C = B \oplus \mathbb{Z}$ y $(\forall b \in B)(\rho(b) = (b, 0))$. Sea $\tilde{D} = A \oplus \mathbb{Z}$. Por el teorema I.7 parte (*iii*), sea $\psi : B \longrightarrow \mathbb{Z}$ el morfismo de grupos abelianos que no puede extenderse a uno con dominio A. Definimos $\gamma : C \longrightarrow \tilde{D}$ como $\gamma(b, n) = (b, n + \psi(b))$. Supongamos que $\tilde{\sigma} : A \longrightarrow \tilde{D}$ es una escisión para $\pi : \tilde{D} \longrightarrow A$ tal que $\tilde{\sigma} \restriction B = \gamma\rho$. Sea $\varphi = \pi_{\mathbb{Z}}\tilde{\sigma} : A \longrightarrow \mathbb{Z}$. Entonces, para $b \in B$, tenemos que $\varphi(b) = \pi_{\mathbb{Z}}(\tilde{\sigma}(b)) = \pi_{\mathbb{Z}}(\gamma(\rho(b))) = \pi_{\mathbb{Z}}(\gamma(b, 0)) = \pi_{\mathbb{Z}}(b, \psi(b)) = \psi(b)$, y por lo tanto φ es una extensión de ψ, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, no existen tales $\tilde{\sigma}$. Si γ fuera una inclusión, habríamos terminado. En caso de que no lo sea, definimos $f : \tilde{D} \longrightarrow A \times \mathbb{Z}$ como

$$f(b, n) = \begin{cases} (b, n); & b \notin B \\ (b, n - \psi(b)); & b \in B. \end{cases}$$

Es fácil ver que f es una biyección, además, $f\gamma : B \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow A \times \mathbb{Z}$ es inyectiva. Definimos D como el grupo cuyo conjunto subyacente es $A \times \mathbb{Z}$ dotado con la estructura de grupo que hace de f un isomorfismo (i.e. $(\forall u, v \in A \times \mathbb{Z})(u + v = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v)))$). Luego, D es una extensión de C, y no hay escisiones $\sigma : A \longrightarrow D$ para $\pi : D \longrightarrow B$ que extiendan a $\rho : B \longrightarrow C$. ❏

El siguiente teorema fue demostrado por Stein en 1951. Existen demostraciones más sencillas, pero esta nos servirá como modelo para generalizar al caso de cardinalidad ω_1.

TEOREMA I.13. *Todo W-grupo numerable es libre.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un W-grupo. Entonces, A es libre de torsión (por el teorema I.7 parte (*ii*)). Bastará con ver que se satisface el criterio de Pontryagin. Supongamos que esto no ocurre, es decir, que hay un $B_0 \leq A$ finitamente generado que no está contenido en ningún subgrupo puro finitamente generado de A. En particular, $B = \text{C.P.}(B_0)$ no será finitamente generado. Por consiguiente, B es la unión de una cadena estricta de grupos finitamente generados $\langle B_n \big| n < \omega \rangle$. Por la definición de cerradura pura, B/B_0 es de torsión. Construiremos una cadena de grupos estricta $\langle C_n \big| n < \omega \rangle$ tal que cada C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo libre de torsión, y tal que $\pi : C = \bigcup\limits_{n<\omega} C_n \longrightarrow B$ no se pueda escindir. Sea S un conjunto finito de generadores de B_0. Afirmamos que todo morfismo de grupos abelianos $\rho : B \longrightarrow D$ con codominio libre de torsión está completamente determinado por sus valores en S: Pues si $b \in B$ entonces hay un $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tal que $nb \in B_0$, y $\rho(nb)$ sí está determinado por los valores de ρ en S; al ser D libre de torsión, $\rho(b)$ es la única solución de la ecuación $nX = \rho(nb)$. Así, sean $\{g_n \big| n < \omega\}$ todas las funciones que van de S en $B \times \mathbb{Z}$. Definimos C_0 como $B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Una vez que ya conocemos C_n, hay dos casos:

1: Si g_n puede extenderse a una escisión ρ para $\pi : C_n \longrightarrow B_n$, entonces, al ser $B_{n+1}/B_n \cong (B_{n+1}/B_0)/(B_n/B_0)$ de torsión, luego B_{n+1}/B_n no es un W-grupo, B_{n+1} lo es y C_n es un $(B_n, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C_n \longrightarrow B_n$ se escinde, por lo tanto por el lema anterior existe un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo, al cual definimos como C_{n+1}, que es extensión de C_n y tal que ρ no se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$.

2: En caso contrario, tomamos ρ como cualquier escisión para $\pi : C_n \longrightarrow B_n$ (hay al menos una dado que B_n es finitamente generado y libre de torsión, luego es libre), y por la misma razón que en el caso anterior, B_{n+1}/B_n no es de torsión, por lo tanto no es un W-grupo, lo cual nos permite definir (en virtud del lema anterior) a C_{n+1} como un $(B_{n+1}, \mathbb{Z})$-grupo extensión de C_n tal que ρ no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$.

Así, tendremos que $\pi : C = \bigcup\limits_{n<\omega} C_n \longrightarrow B$ no se escinde, pues si lo hiciera mediante $\rho : B \longrightarrow C$, entonces $(\exists n < \omega)(\rho \restriction S = g_n)$, luego $\rho \restriction B_n$ será una escisión para $\pi : C_n \longrightarrow B_n$ que extiende a g_n y que se extiende a una escisión para $\pi : C_{n+1} \longrightarrow B_{n+1}$ (a saber, $\rho \restriction B_{n+1}$), lo cual contradice a la construcción de los C_n. De esta forma, concluimos que B no es un W-grupo, y debería serlo al ser subgrupo de un W-grupo por el teorema I.7 parte (*i*). Esto es una contradicción. ❑

4. Los W-grupos de orden ω_1

Ahora deseamos generalizar estos razonamientos para W-grupos de cardinalidades mayores. Para tal fin, debemos ir generalizando varias de las nociones que utilizamos anteriormente. En particular, generalizaremos la noción de ser "libre de torsión" y de ser "puro".

Definición I.14. Sean $\kappa \in \mathbf{Card}$, con $\kappa \geq \omega_1$ y A un grupo abeliano.

(*i*) Decimos que A es **κ-libre** si $(\forall B \leq A)(|B| < \kappa \longrightarrow B$ es libre$)$.
(*ii*) Siendo A κ-libre y $B \leq A$, decimos que B es **κ-puro** en A si A/B es κ-libre.

Claramente, ser ω_1-libre, que significa que todo subgrupo numerable sea libre, generaliza a la noción de ser libre de torsión, la cual es equivalente a que todo subgrupo finitamente generado sea libre. Similarmente, ser ω_1-puro generaliza a la noción de ser puro. De hecho, es inmediato que, para cada $\kappa, \lambda \in \mathbf{Card}$, con $\omega_1 \leq \lambda < \kappa$, si A es κ-libre entonces A es λ-libre y libre de torsión, y por consiguiente si $B \leq A$ es κ-puro entonces es λ-puro y también puro. Es por ello que afirmábamos que estas nociones generalizaban otras que se utilizaron en la sección anterior.

Corolario I.15. *Todo W-grupo es ω_1-libre.*

Demostración. Inmediato del teorema I.7 parte (*i*) y del teorema I.13. ❑

Lo que sigue a continuación, es generalizar las hipótesis del Criterio de Pontryagin. Recordemos que dicho criterio asegura que todo grupo abeliano numerable libre de torsión tal que todo subgrupo finitamente generado está contenido en un subgrupo puro finitamente generado es libre. En esta ocasión, la idea es reemplazar "libre de torsión" por "ω_1-libre", "puro" por "ω_1-puro", y "finitamente generado" por "'numerable". Eventualmente, acabaremos por utilizar grupos de cardinalidad ω_1, pero no necesariamente seremos capaces de demostrar que bajo estas condiciones los grupos deben de ser libres.

Definición I.16. Sea A un grupo abeliano. Diremos que A satisface la **condición de Chase** si A es un grupo ω_1-libre tal que todo subgrupo numerable de A está contenido en un subgrupo numerable ω_1-puro en A.

Esta condición lleva el nombre de Chase debido a que fue él quien demostró, suponiendo HC (es decir, $2^\omega = \omega_1$), que todo W-grupo satisface esta condición. Nótese que, si A satisface la condición de Chase, entonces A satisface exactamente las hipótesis del criterio de Pontryagin (salvo la numerabilidad). Esto es, A es libre de torsión (por ser ω_1-libre) y todo subgrupo $B \leq A$ finitamente generado está contenido en un subgrupo finitamente generado puro en A. Pues si B es finitamente generado, entonces es numerable. Luego, la condición de Chase asegura la existencia de un subgrupo numerable ω_1-puro (en particular, puro) en A que contiene a B, luego C.P.(B) es a lo sumo numerable. Pero entonces, al ser A un grupo ω_1-libre, ha de tenerse que C.P.(B) es libre, y B es un subgrupo de C.P.(B) que es finitamente generado. Por lo tanto, la cerradura pura de B, calculada dentro de C.P.(B), ha de ser finitamente generada. Pero dicha cerradura pura es exactamente C.P.(B), luego C.P.(B) es finitamente generado, como queríamos demostrar. A continuación traduciremos la condición de Chase en términos de cadenas transfinitas de grupos.

Lema I.17. *Sea A un grupo abeliano de orden ω_1. Entonces, A satisface la condición de Chase $\iff$ A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que $A_0 = \langle 0 \rangle$ y que para todo $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es ω_1-puro en A.*

Demostración.

- $\Rightarrow$: Si A satisface la condición de Chase, tomando $A = \{a_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$, definimos la cadena de los A_α por inducción: $A_0 = \langle 0 \rangle$, si conocemos A_α entonces definimos $A_{\alpha+1}$ como un subgrupo numerable ω_1-puro de A que contenga a $\langle A_\alpha \cup \{a_\alpha\} \rangle$; finalmente, si ya conocemos A_γ para todo $\gamma < \alpha$ y α es un ordinal límite entonces $A_\alpha = \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma$.
- $\Leftarrow$: Todo subgrupo numerable $B \leq A$ está contenido en alguno de los $A_{\alpha+1}$, con $\alpha < \omega_1$.

❑

A continuación, presentamos el último resultado de esta sección, que realmente es el resultado crucial para trabajar el problema de Whitehead en grupos abelianos de orden ω_1, y que será de gran ayuda para demostrar que la solución a este problema es independiente de ZFE.

Teorema I.18. *Sea A un grupo abeliano que satisface la condición de Chase, y que por lo tanto es, por el lema anterior, la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y $A_{\alpha+1}$ ω_1-puro en A para todo $\alpha < \omega_1$. Sea*

$$E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \omega_1\text{−puro en } A\}$$

(nótese que en particular $E \subseteq \text{lím}(\omega_1)$). Entonces, A es libre $\iff$ E no es estacionario en ω_1.

Demostración.

- $\Leftarrow$: Si E no es estacionario, sea $\langle \alpha_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ la enumeración creciente de los elementos de un conjunto cerrado y no acotado C tal que $C \cap E = \emptyset$, y consideremos los grupos $B_\beta = A_{\alpha_\beta}$. Entonces, tendremos que, al ser C un cerrado, $\langle B_\beta \big| \beta < \omega_1 \rangle$ será una cadena suave de grupos, cuya unión, debido a que C es no acotado, es A. Al ser $C \cap E = \emptyset$, tenemos que B_β es ω_1-puro en A, para todo $\beta < \omega_1$, por lo tanto A/B_β es ω_1-libre. De esta forma, siendo $B_{\beta+1}$ numerable, podemos concluir que para todo $\beta < \omega_1$, $B_{\beta+1}/B_\beta$ es libre. Dado que $0 \notin E$, sin perder generalidad puedo cambiar C por $C \cup \{0\}$ y suponer que $B_0 = A_0 = \langle 0 \rangle$. Así pues, el teorema 0.14 nos permite asegurar que A es libre.

⇒: Supongamos que A es un grupo abeliano libre con base X. Construiremos por inducción transfinita una cadena suave $\langle X_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de X y una función normal $f : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, X_α será una base de $A_{f(\alpha)}$. Ponemos $X_0 = \emptyset$ y $f(0) = 0$. Para el caso cuando $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite y conocemos X_β para todo $\beta < \alpha$, basta poner $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$ y $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) \big| \beta < \alpha\}$, de modo que X_α será una base de $A_{f(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} A_{f(\beta)}$. Ahora, si ya conocemos X_α para $\alpha < \omega_1$, tomemos un $Y_0 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $X_\alpha \subsetneq Y_0$, y $\sigma_0 \in \mathbf{Ord}$ tal que $Y_0 \subseteq A_{\sigma_0}$, a continuación tomamos $Y_1 \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_{\sigma_0} \subseteq \langle Y_1 \rangle$, y así por inducción obtenemos una cadena $\langle Y_n \big| n < \omega \rangle$ de subconjuntos numerables de X que contienen a X_α, y una sucesión creciente de ordinales $\langle \sigma_n \big| n < \omega \rangle$ mayores que $f(\alpha)$ tales que para cada $n < \omega$, se tiene que $Y_n \subseteq A_{\sigma_n} \subseteq \langle Y_{n+1} \rangle$. Si hacemos $X_{\alpha+1} = \bigcup_{n<\omega} Y_n$ y $f(\alpha + 1) = \sup\{\sigma_n \big| n < \omega\}$, entonces $X_{\alpha+1}$ será base de $A_{f(\alpha+1)} = \bigcup_{n<\omega} A_{\sigma_n} = \bigcup_{n<\omega} \langle Y_n \rangle$.

De esta forma, esa cadena nos dice que E no es estacionario en ω_1 debido a que para cada $\alpha < \omega_1$, al ser $A/A_{f(\alpha)}$ grupo libre con base $\{x + A_{f(\alpha)} \big| x \in X \setminus X_\alpha\}$, en particular es ω_1-libre y por lo tanto $A_{f(\alpha)}$ será ω_1-puro en A, por lo cual $\{f(\alpha) \big| \alpha < \omega_1\}$ será un conjunto cerrado y no acotado que no intersecta a E.

❏

5. "Todo W-grupo es libre" es consistente

A continuación, veremos que hay un modelo de ZFE en el cual se cumple que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre. De hecho, basta tomar a $\mathbf{L}$, el universo construible, para ver que ahí se cumple el enunciado apenas mencionado. Este universo se construye de la manera siguiente: supongamos que tenemos un modelo de ZF, entonces, utilizaremos al conjunto $\mathrm{Def}(X)$, que es el conjunto de todos los conjuntos X-definibles (es decir, los conjuntos A tales que para cierta fórmula con una variable libre φ del lenguaje de la teoría de conjuntos, enriquecido con un símbolo de constante por cada elemento de X, se tiene que $A = \{x \in X \big| \varphi(x)\}$[1]), para cada conjunto X. Entonces, la jerarquía

[1]Para que esta construcción funcione, es necesario "reconstruír" el lenguaje de la teoría de conjuntos dentro de la teoría misma: algo análogo a lo que hizo Gödel al asociar a cada fórmula del lenguaje de la aritmética de Peano un número natural, de modo que al hablar de fórmulas y las relaciones entre ellas, en realidad se estuviera hablando

construíble está dada de la siguiente manera: $L_0 = \varnothing$, si conocemos L_α entonces $L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$, y si $\gamma \in \text{lím}(\mathbf{Ord})$ entonces $L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$. Finalmente, $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} L_\alpha$ es el universo de los conjuntos construibles. Entonces, se demuestra que $\mathbf{L}$ es una clase transitiva tal que sus elementos satisfacen todos los axiomas de ZF (en donde cada fórmula se interpreta restringiendo el dominio de sus cuantificadores a $\mathbf{L}$), además del axioma de elección, y el *axioma de constructibilidad*, que asegura que todo conjunto es construible, es decir, que la clase $\mathbf{L}$ agota todos los conjuntos existentes (este axioma se denota por $\mathbf{V} = \mathbf{L}$). De esta forma, toda proposición que pueda demostrarse que se satisface en $\mathbf{L}$ decimos que es una consecuencia del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Por ejemplo, HGC es una de las consecuencias más famosas de $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Los detalles de todo esto están en [**6**, Chapter II, §1-5; pp. 56-85].

En particular, la satisfacción del axioma de elección se deriva de la existencia de una relación global de buen orden $<_\mathbf{L}$, que es definible, y que bien ordena a todo el universo construíble $\mathbf{L}$. Asimismo, la HGC es consecuencia del así llamado *lema de condensación* ([**6**, Theorem 5.2, pp. 80-82]), que asegura lo siguiente: dado un ordinal límite α y un submodelo elemental $M \prec L_\alpha$, entonces existen únicos $\beta < \alpha$ y $\pi : \langle M, \in\rangle \cong \langle L_\beta, \in\rangle$ de tal suerte que si $N \subseteq M$ es transitivo entonces $\pi \upharpoonright N = \mathrm{id}_N$, y que para cada $m \in M$ se tiene que $\pi(m) <_\mathbf{L} m$. La importancia del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ radica en que, si encontráramos una contradicción en la teoría ZFE+$\mathbf{V} = \mathbf{L}$, entonces eso sería una contradicción que tiene lugar dentro de la clase transitiva $\mathbf{L}$ que podemos definir únicamente en ZF, luego la contradicción puede traducirse a una contradicción en ZF. Es por ello que, suponiendo que ZF es consistente (una suposición que *no* puede demostrarse en ZF, sino únicamente en teorías más fuertes, por lo cual esta suposición es posiblemente el único artículo de fe que debe defender cualquier matemático), tendremos que ZF + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ también lo será. Y, por consiguiente, toda consecuencia del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ también será consistente con ZF, lo cual significa que en ZF jamás seremos capaces de elaborar una refutación del enunciado en cuestión.

Formulemos ahora el principio que nos permitirá probar el resultado deseado acerca de los grupos de Whitehead. Para $\kappa \in \mathbf{Card}$ regular y E un subconjunto estacionario en κ, el principio combinatorio conocido como $\diamondsuit_\kappa(E)$ asegura que hay una sucesión $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E\rangle$ con $S_\alpha \subseteq \alpha$ para todo $\alpha \in E$ y tal que dado cualquier $X \subseteq \kappa$, el conjunto $\{\alpha \in E \big| X \cap \alpha = S_\alpha\}$ es estacionario en κ. A $\diamondsuit_\kappa(\kappa)$ se le conoce simplemente como $\diamondsuit_\kappa$, y nuestro viejo conocido $\diamondsuit$ no es otra cosa que $\diamondsuit_{\omega_1}$. A continuación, nos propondremos demostrar que para cada subconjunto estacionario $E \subseteq \omega_1$, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$

de números naturales y su aritmética. En este caso, a cada fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos se le asocia determinado conjunto, de modo que nociones tales como la de satisfacibilidad, etc., queden formalizadas dentro de la teoría ZF. Asimismo, esta "aritmetización" (que, en el caso que nos ocupa, más bien sería una "conjuntización") del lenguaje de teoría de conjuntos dentro de ZF nos permitirá cuantificar sobre proposiciones, con lo cual el operador Def queda bien definido. Los detalles necesarios están en [**6**, Chapter I, §9,10; pp. 31-48].

implica que se satisface $\diamondsuit(E)$ (es decir, $\diamondsuit_{\omega_1}(E)$). En el camino utilizaremos algunas herramientas de teoría de modelos, estoy convencido de que basta darle una leída a la primera sección de [**9**] para comprender la idea, en caso de que no se conozca el vocabulario correspondiente.

Lema I.19. *Sea $\lambda \in$ lím(**Ord**), con $\lambda > \omega_1$, y $X \subseteq L_\lambda$ con $|X| < \omega_1$. Entonces, existe un $N \prec L_\lambda$ tal que $X \subseteq N$, $|N| < \omega_1$ y $N \cap \omega_1 \in \omega_1$.*

Demostración. Sea N_0 el conjunto más pequeño (el teorema de Löwenheim-Skolem nos garantiza que existe al menos uno) tal que $N_0 \prec L_\lambda$ y $X \subseteq N_0$, y definamos $\alpha_0 := \sup(N_0 \cap \omega_1)$. Dado que $|N_0| = \text{máx}(|X|, \omega)$, entonces $\alpha_0 < \omega_1$. Ahora bien, por recursión para cada $n < \omega$ supongamos que conocemos $N_n \prec L_\lambda$ numerable y $\sup(N_n \cap \omega_1) = \alpha_n < \omega_1$. Entonces, sea N_{n+1} el conjunto más pequeño tal que $N_{n+1} \prec L_\lambda$ y $N_n \cup \alpha_n \subseteq N_{n+1}$, y definimos $\alpha_{n+1} := \sup(N_{n+1} \cap \omega_1)$. Nuevamente, como $N_{n+1} = \text{máx}(|N_n|, |\alpha_n|) < \omega_1$ entonces $\alpha_{n+1} < \omega_1$. Ahora tomemos $N = \bigcup\limits_{n<\omega} N_n$. Por el teorema de la cadena elemental, se tiene que $X \subseteq N \prec L_\lambda$, claramente $|N| < \omega_1$ y además, si hacemos $\alpha := \sup\{\alpha_n \big| n < \omega\} < \omega_1$, entonces $N \cap \omega_1 = \left(\bigcup\limits_{n<\omega} N_n\right) \cap \omega_1 = \bigcup\limits_{n<\omega} (N_n \cap \omega_1) \subseteq \sup\{\alpha_n \big| n < \omega\}$, debido a que cada $N_n \cap \omega_1 \subseteq \alpha_n$. Pero por otra parte, cada $\alpha_n \subseteq N_{n+1} \cap \omega_1$, luego $N \cap \omega_1 = \bigcup\limits_{n<\omega} (N_n \cap \omega_1) \supseteq \sup\{\alpha_n \big| n < \omega\}$. Por lo tanto, $N \cap \omega_1 = \alpha < \omega_1$. ❑

Teorema I.20. *Sea $E \subseteq \omega_1$ un conjunto estacionario. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica $\diamondsuit(E)$.*

Demostración. Construiremos recursivamente una sucesión (S_α, C_α) con $\alpha \in E$. Si ya conocemos (S_γ, C_γ) para cada $\gamma < \alpha \in \text{lím}(\omega_1)$, entonces sea (S_α, C_α) el $<_\mathbf{L}$-mínimo par ordenado de tal suerte que C_α es un cerrado y no acotado en α, $S_\alpha \subseteq \alpha$ y $(\forall \gamma \in C_\alpha \cap E)(S_\alpha \cap \gamma \neq S_\gamma)$, en caso de que exista al menos un par que satisfaga esta condición. En caso de que no haya tales pares, o de que α no sea un ordinal límite, hacemos $S_\alpha = C_\alpha = \varnothing$. Afirmamos que $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E\rangle$ es una $\diamondsuit(E)$-sucesión. En efecto, si suponemos lo contrario, y tomamos (S, C) el $<_\mathbf{L}$-mínimo par de subconjuntos de ω_1 tal que C es un cerrado y no acotado en ω_1 y $\{\gamma \in E \big| S \cap \gamma = S_\gamma\} \cap C = \varnothing$, esto quiere decir que $\gamma \in C \cap E \Rightarrow S \cap \gamma \neq S_\gamma$. Pero notemos que la sucesión $\langle (S_\alpha, C_\alpha) \big| \alpha \in E\rangle$ es definible en L_{ω_2} a partir de E (quizá no está de más mencionar en este momento que el orden $<_\mathbf{L}$ "respeta" el orden de aparición dentro de la jerarquía construíble, lo cual quiere decir que si $x \in L_\alpha$ y $y \in L_\beta \setminus L_\alpha$, con $\alpha < \beta$, entonces $x <_\mathbf{L} y$; es por ello que si algún x es el $<_\mathbf{L}$-mínimo tal que satisface cierta propiedad, y $x \in L_{\omega_2}$, entonces también será el $<_\mathbf{L} \upharpoonright L_{\omega_2}$-mínimo con la misma propiedad). Por lo tanto, (S, C) también es definible a partir de E en L_{ω_2} y la definición de ambos es absoluta.

Por el lema I.19, definamos recursivamente una sucesión de submodelos $N_\alpha \prec L_{\omega_2}$, de la manera siguiente. N_0 es el conjunto más pequeño tal que $|N_0| < \omega_1$, $N_0 \prec L_{\omega_2}$, $N_0 \cap \omega_1 \in \omega_1$ y $E \in N_0$. Una vez que conocemos el submodelo N_α numerable con $N_\alpha \cap \omega_1 \in \omega_1$, entonces elegimos $N_{\alpha+1}$ como el conjunto más pequeño tal que $N_{\alpha+1} \prec L_{\omega_2}$, $|N_{\alpha+1}| < \omega_1$, $N \cap \omega_1 \in \omega_1$ y $N_\alpha \cup \{N_\alpha\} \subseteq N_{\alpha+1}$. Y para los ordinales límite λ, tomamos $N_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} N_\alpha$. Es claro que $|N_\lambda| < \omega_1$, $N_\lambda \cap \omega_1 \in \omega_1$, y por el teorema de la cadena elemental $N_\lambda \prec L_{\omega_2}$. Para cada $\alpha < \omega_1$, hacemos $\delta_\alpha := N_\alpha \cap \omega_1$. Entonces, tenemos que $\langle \delta_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ es una sucesión normal (i.e. creciente y continua) en ω_1. Por lo tanto, el conjunto de sus puntos fijos $Z := \{\delta_\alpha \big| \delta_\alpha = \alpha\}$ es un cerrado y no acotado en ω_1. Por lo tanto, $E \cap Z \cap C \cap \text{lím}(\omega_1) \neq \varnothing$, tomemos un $\delta_\alpha = \alpha \in E \cap Z \cap C \cap \text{lím}(\omega_1)$. Por el lema de condensación, sea $\pi : N_\alpha \cong L_\beta$. Entonces, $\pi \restriction L_\alpha = \text{id}_{L_\alpha}$ (debido a que la definición de L_α es absoluta y $\alpha \in N_\alpha$), $\pi(\omega_1) = \alpha$ (por que $N_\alpha \cap \omega_1 = \gamma_\alpha = \alpha$), $\pi(E) = E \cap \alpha$, $\pi(\langle (S_\delta, C_\delta) \big| \delta \in E \rangle) = \langle (S_\delta, C_\delta) \big| \alpha \in E \cap \alpha \rangle$ y $\pi((S, C)) = (S \cap \alpha, C \cap \alpha)$. Dado que $\pi^{-1} : L_\beta \prec L_{\omega_2}$, entonces $(S \cap \alpha, C \cap \alpha)$ es el $<_{\mathbf{L}}$-mínimo par de subconjuntos de α tal que $C \cap \alpha$ es un cerrado y no acotado en α y $\gamma \in (C \cap \alpha) \cap (E \cap \alpha) \Rightarrow (S \cap \alpha) \cap \gamma \neq S_\gamma$. Esto implica que $(S \cap \alpha, C \cap \alpha) = (S_\alpha, C_\alpha)$ y en particular $S \cap \alpha = S_\alpha$, pero el hecho de que $\alpha \in C \cap E$ contradice nuestra elección de (S, C). ❏

Proposición I.21. *Supongamos el axioma* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$*, y sea* C *la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables* $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ *y* $E \subseteq \omega_1$ *un estacionario. Entonces, hay una sucesión* $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E \rangle$ *tal que* $S_\alpha \subseteq C_\alpha$ *para todo* $\alpha \in E$ *y tal que para cualquier* $X \subseteq C$*, el conjunto* $\{\alpha \in E \big| X \cap C_\alpha = S_\alpha\}$ *es estacionario.*

Demostración. Construimos por recursión, para $\alpha < \omega_1$, funciones inyectivas $f_\alpha : C_\alpha \longrightarrow \omega_1$ tales que cumplan $f_\alpha \subsetneq f_\beta$ para $\alpha < \beta$ y $\alpha \subseteq \text{ran}(f_\alpha) \in \omega_1$, de la manera siguiente: $f_0 : C_0 \longrightarrow |C_0|$ es cualquier biyección, si conocemos f_β para cualquier $\beta < \alpha$ y $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, ponemos simplemente $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$. Finalmente, si conocemos f_α entonces hacemos $f_{\alpha+1} : C_{\alpha+1} \longrightarrow \text{ran}(f_\alpha) + |C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha|$ de tal forma que $f_{\alpha+1} \restriction C_\alpha = f_\alpha$ y que $f_{\alpha+1} \restriction (C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha) : C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha \longrightarrow (\text{ran}(f_\alpha) + |C_{\alpha+1} \setminus C_\alpha|) \setminus \text{ran}(f_\alpha)$ sea una biyección. Ahora, si hacemos $f = \bigcup_{\alpha<\omega_1} f_\alpha : C \longrightarrow \omega_1$, claramente tendremos que f es biyección. Más aún, dado que $\alpha \longmapsto \text{ran}(f_\alpha)$ es una función normal, entonces $T = \{\alpha < \omega_1 \big| \text{ran}(f_\alpha) = \alpha\}$, el conjunto de puntos fijos de esta función, es un conjunto cerrado y no acotado en ω_1. Ahora sí, usamos el teorema anterior para obtener $\langle T_\alpha \big| \alpha \in E \rangle$ una $\diamondsuit(E)$-sucesión, y definimos, para cada $\alpha \in E$, $S_\alpha = f^{-1}[T_\alpha]$. Así, dado $\alpha \in E$, $T_\alpha \subseteq \alpha \subseteq \text{ran}(f_\alpha)$, por lo cual $S_\alpha \subseteq f^{-1}[\text{ran}(f_\alpha)] = C_\alpha$. Ahora, si $X \subseteq C$, entonces $\{\alpha \in E \big| X \cap C_\alpha = S_\alpha\} \supseteq T \cap \{\alpha \in E \big| f[X] \cap \alpha = T_\alpha\}$, el cual es estacionario por hipótesis. Luego $\langle S_\alpha \big| \alpha \in \omega_1 \rangle$ es la sucesión cuya existencia queríamos garantizar. ❏

Corolario I.22. *Supóngase que se satisface* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. *Sea B la unión de una cadena suave estricta de conjuntos numerables $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, Y un conjunto numerable, y $E \subseteq \omega_1$ estacionario. Entonces, hay una sucesión $\langle g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times Y \big| \alpha \in E \rangle$ tal que para toda función $h : B \longrightarrow B \times Y$ que satisfaga $(\forall \alpha \in E)(h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y)$, existe $\alpha \in E$ tal que $h \restriction B_\alpha = g_\alpha$.*

Demostración. Para cada $\alpha \in E$, definimos $C_\alpha = B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)$ y $C = B \times (B \times Y)$ de modo que podamos aplicar la proposicion anterior, y sea $\langle S_\alpha \big| \alpha \in E \rangle$ la sucesión cuya existencia asegura dicha proposición, luego $S_\alpha \subseteq B_\alpha \times (B_\alpha \times Y)$. Definimos g_α de acuerdo a dos posibles casos. Si S_α es una función con dominio B_α, entonces ponemos simplemente $g_\alpha = S_\alpha$. En caso contrario, hacemos g_α igual a una función : $B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times Y$ arbitraria. De esta forma, si $h : B \longrightarrow B \times Y$ entonces $h \subseteq B \times (B \times Y)$, luego tendremos que $\{\alpha \in E \big| h \cap B_\alpha \times (B_\alpha \times Y) = S_\alpha\}$ es estacionario, en particular es no vacío. Por lo tanto hay un $\alpha \in E$ tal que $h \cap B_\alpha \times (B_\alpha \times Y) = S_\alpha$. Si además h es tal que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times Y$, esto quiere decir que $S_\alpha = h \cap B_\alpha \times (B_\alpha \times Y) = h \restriction B_\alpha$. Entonces, S_α era una función con dominio B_α, luego por la definición de las g_α, se tiene que $g_\alpha = S_\alpha = h \restriction B_\alpha$. ❑

Hemos terminado con las consecuencias técnicas del axioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Finalmente, ha llegado la hora de utilizar esas consecuencias para establecer el resultado de consistencia que hemos venido anunciando a lo largo de toda esta sección.

Teorema I.23. *Sea B la unión de una cadena suave estricta $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ de grupos libres numerables tales que $E = \{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre$\}$ es estacionario en ω_1. Entonces, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ implica que B no es un W-grupo.*

Demostración. Definiremos por inducción transfinita una cadena de grupos $\langle C_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ tal que cada C_α sea un $(B_\alpha, \mathbb{Z})$-grupo y su unión C sea un $(B, \mathbb{Z})$-grupo tal que $\pi : C \longrightarrow B$ no se escinda. Por el corolario anterior, tenemos funciones $\{g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times \mathbb{Z} \big| \alpha \in E\}$ tales que para cada $h : B \longrightarrow B \times \mathbb{Z}$ que cumpla $\pi h = \mathrm{id}_B$, tendremos que hay un $\beta \in E$ tal que $h \restriction B_\beta = g_\beta$, debido a que $\mathrm{id}_{B_\alpha} = \mathrm{id}_B \restriction B_\alpha = (\pi h) \restriction B_\alpha = \pi(h \restriction B_\alpha)$, lo cual nos dice que $h[B_\alpha] \subseteq B_\alpha \times \mathbb{Z}$.

Comenzamos haciendo de C_0 cualquier $(B_0, \mathbb{Z})$-grupo, por ejemplo, $C_0 = B_0 \oplus \mathbb{Z}$. Si conocemos C_β para todo $\beta < \alpha$ y $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite, entonces hacemos $C_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. Ahora, si conocemos C_α, para definir $C_{\alpha+1}$ hay dos casos:

1: Si $\alpha \in E$ y $g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times \mathbb{Z}$ es una escisión para $\pi : C_\alpha \longrightarrow B_\alpha$. Entonces, dado que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre (pues $\alpha \in E$) y, al ser numerable, esto implica por el teorema I.13 que no es un W-grupo, amén de que $B_{\alpha+1}$ sí es W-grupo por ser libre, entonces por el lema I.12

hay una extensión $C_{\alpha+1}$ de C_α tal que es un $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo de tal suerte que g_α no puede extenderse a una escisión para $\pi : C_{\alpha+1} \longrightarrow B_{\alpha+1}$.

2: Si $\alpha \notin E$ o bien si $g_\alpha : B_\alpha \longrightarrow B_\alpha \times \mathbb{Z}$ no es una escisión para $\pi : C_\alpha \longrightarrow B_\alpha$, entonces tomamos $C_{\alpha+1}$ como cualquier $(B_{\alpha+1}, \mathbb{Z})$-grupo que extienda a C_α (nótese que por hipótesis B_α es libre, luego $\pi : C_\alpha \longrightarrow B_\alpha$ tiene al menos una escisión y eso significa que esencialmente $C_\alpha = B_\alpha \oplus \mathbb{Z}$, luego es natural hacer $C_{\alpha+1} = B_{\alpha+1} \oplus \mathbb{Z}$).

Así las cosas, hacemos $C = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} C_\alpha$. Si hubiera una escisión $\rho : B \longrightarrow C$, entonces habría un $\alpha \in E$ tal que $\rho \restriction B_\alpha = g_\alpha$, pero esto contradiría la definición de $C_{\alpha+1}$. Es por ello que π no se escinde y consecuentemente B no es un W-grupo.

❏

Finalmente, hemos llegado al momento de cumplir el objetivo que motivó a desarrollar toda la teoría anterior. El siguiente resultado es el más importante de esta sección.

Teorema I.24 (Shelah). ZFE + $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ *implica que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre.*

Demostración. Sea A un W-grupo de orden ω_1. Veremos que A satisface la condición de Chase. En primer lugar, por ser A un W-grupo, el corolario I.15 asegura que A es ω_1-libre. Si A no satisficiera la condición de Chase, habría un $B_0 \leq A$ numerable tal que para todo $C \leq A$ numerable con $B_0 \subseteq C$, se tiene que C no es ω_1-puro en A, i. e. A/C no es ω_1-libre, esto es, hay un $C' \leq A$ tal que C'/C es numerable y no es libre, en particular C' es numerable. En particular, hay un $B_1 \leq A$ numerable tal que B_1/B_0 no es libre. Y si conocemos $B_\alpha \leq A$ numerable, para $\alpha < \omega_1$, con $B_0 \subseteq B_\alpha$, entonces existirá un $B_{\alpha+1} \leq A$ numerable tal que $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre. Si $\alpha < \omega_1$ es un ordinal límite y conocemos B_β para cada $\beta < \alpha$, definimos simplemente $B_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} B_\beta$. Por lo tanto, tenemos una cadena suave estricta de subgrupos numerables de A, $\langle B_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$, tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ no es libre y tal que $A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. En particular, $\{\alpha < \omega_1 \big| B_{\alpha+1}/B_\alpha \text{ no es libre}\} = \omega_1$, el cual es estacionario en ω_1, por lo que el teorema anterior asegura que A no es un W-grupo y esto es autocontradictorio. Por lo tanto A satisface la condición de Chase.

Así, por el lema I.17, A es la unión de una cadena suave de grupos libres numerables $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1 \rangle$ con $A_0 = \langle 0 \rangle$ y tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es ω_1-puro en A. Consideremos los conjuntos $E = \{\alpha < \omega_1 \big| A_\alpha \text{ no es } \omega_1\text{–puro en } A\}$ y $E' = \{\alpha < \omega_1 \big| A_{\alpha+1}/A_\alpha \text{ no es libre}\}$. Por el teorema anterior, dado que A es un W-grupo entonces E' no es estacionario. Pero afirmamos que $E' = E$. En efecto, si $\alpha \in E'$ entonces $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre, luego A/A_α no es ω_1-libre, por lo tanto A_α no es ω_1-puro en A y $\alpha \in E$, por consiguiente $E' \subseteq E$. Ahora, supóngase que $\alpha \notin E'$. Entonces, $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ es libre. Para $\lambda > \alpha$, $A_\lambda/A_{\alpha+1}$ es libre dado que $A_{\alpha+1}$ es, por hipótesis, ω_1-puro en A (lo cual significa que $A/A_{\alpha+1}$

es ω_1-libre). Luego, $A_\lambda/A_{\alpha+1} \cong (A_\lambda/A_\alpha)/(A_{\alpha+1}/A_\alpha)$ es libre para todo $\lambda > \alpha$, al ser $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ libre, la proposición 0.12 nos asegura que A_λ/A_α es libre, para todo $\lambda > \alpha$. Por lo tanto, A/A_α es ω_1-libre, debido a que si $B/A_\alpha \leq A/A_\alpha$ es numerable, habrá un $\lambda > \alpha$ tal que $B \subseteq A_\lambda$, luego $B/A_\alpha \leq A_\lambda/A_\alpha$ y B/A_α será libre (por ser subgrupo de un libre, proposición 0.7 parte (i)). Por consiguiente, tenemos que A_α es ω_1-puro en A y por lo tanto $\alpha \notin E$, lo que implica que $E \subseteq E'$, luego $E = E'$ y E no es estacionario, por el teorema I.18 esto implica que A es libre. ❑

De esta forma, podemos concluir que no es posible refutar, en ZFE, que todo W-grupo de cardinalidad ω_1 es libre. En la siguiente sección, probaremos que este enunciado tampoco puede demostrarse en ZFE.

6. “Todo W-grupo es libre” es independiente

En la presente sección, veremos que también la respuesta “hay W-grupos que no son libres” es consistente con ZFE, lo cual nos dirá que la respuesta al problema de Whitehead es independiente de ZFE. Comenzaremos por realizar una construcción importante, si bien ésta se realiza asumiendo únicamente los axiomas de ZFE.

Construcción I.25. Construiremos un grupo abeliano de cardinalidad ω_1 que satisface la condición de Chase pero que no es libre. Lo haremos definiendo por inducción una cadena suave estricta $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ de grupos numerables, con $A_0 = \langle 0\rangle$, que satisfagan

1. $(\forall\alpha < \omega_1)(A_\alpha$ es libre$)$, $(\forall\beta < \alpha < \omega_1)(A_\alpha/A_{\beta+1}$ es libre$)$
2. $(\forall\alpha \in \text{lím}(\omega_1))(A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre$)$.

Una vez que tengamos esto, bastará poner $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$ para obtener lo deseado. En efecto, la primera condición nos garantiza que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_{\alpha+1}$ es ω_1-puro en A (pues todo subgrupo numerable de $A/A_{\alpha+1}$ está contenido en algún $A_\beta/A_{\alpha+1}$, y subgrupos de libres son libres), luego el lema I.17 nos asegura que A satisface la condición de Chase. Por otra parte, la última condición de la cadena nos dice que el conjunto de $\alpha < \omega_1$ tales que A_α no es ω_1-libre consta al menos de todos los ordinales límite, luego dicho conjunto es estacionario y el teorema I.18 nos garantiza que A no es libre.

Ahora vamos con la construcción. Como ya dijimos, $A_0 = \langle 0\rangle$. Si α es ordinal límite y conocemos A_β para cada $\beta < \alpha < \omega_1$, entonces escogemos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega\rangle$ cofinal en α tal que cada α_n sea un ordinal sucesor. Ponemos $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$. El teorema 0.14 nos garantiza que A_α es libre (debido a que A_{α_0} es libre y para cada $n < \omega$, $A_{\alpha_{n+1}}/A_{\alpha_n}$ lo es por ser todos los α_n ordinales sucesores), más aún, nos garantiza que A_α/A_{α_n} es libre para cada $n < \omega$. Además, para $\beta < \alpha$, hay un $n < \omega$ tal que $A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha_n}$, luego se tiene que $(A_\alpha/A_{\beta+1})/(A_{\alpha_n}/A_{\beta+1}) \cong A_\alpha/A_{\alpha_n}$ que es libre, como además el divisor en el cociente de la izquierda es libre, la proposición 0.12 nos permite asegurar que $A_\alpha/A_{\beta+1}$ es libre. Por lo tanto, la nueva cadena de longitud α que obtenemos al agregar A_α, sigue cumpliendo con la primera condición (la segunda, en este caso, ni siquiera necesita ser verificada). Ahora supóngase que conocemos A_α, y que queremos definir $A_{\alpha+1}$, para $\alpha < \omega_1$. Entonces tenemos dos casos:

1: α no es límite. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \oplus \mathbb{Z}$. Veamos que con este $A_{\alpha+1}$, la cadena seguirá cumpliendo lo que tiene que cumplir. Es claro que $A_{\alpha+1}$ es libre; además, dado $\beta < \alpha$, por hipótesis inductiva tenemos que $A_\alpha/A_{\beta+1}$ es libre, y también $(A_{\alpha+1}/A_{\beta+1})/(A_\alpha/A_{\beta+1}) \cong A_{\alpha+1}/A_\alpha = (A_\alpha \oplus \mathbb{Z})/A_\alpha \cong \mathbb{Z}$ lo es; de modo que por la proposición 0.12 concluimos que $A_{\alpha+1}/A_{\beta+1}$ es libre. Así, nuevamente se sigue cumpliendo la primera condición en la cadena, la segunda no necesita checarse en este caso.

2: α es un ordinal límite. Este es el caso más complicado de tratar. Elegimos una sucesión estrictamente creciente $\langle \alpha_n \big| n < \omega \rangle$ cofinal en α que conste de puros ordinales sucesores salvo en el caso de α_0, que tomaremos igual a 0. Por como se hizo la demostración del teorema 0.14, sabemos que hay una cadena suave estricta de conjuntos $\langle X_n \big| n < \omega \rangle$ de tal forma que cada X_n es base de A_{α_n} y $X := \bigcup_{n<\omega} X_n$ es base de $A_\alpha = \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha_n}$. Para cada $1 \leq n < \omega$ escogemos un $x_n \in X_n \setminus X_{n-1}$. Sea, para cada $n < \omega$, $Y_n = X_n \setminus \{x_i\}_{i=1}^{n}$ y sea B el subgrupo de A_α generado por $\bigcup_{n<\omega} Y_n = X \setminus \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Esto es, $B = \bigoplus_{X\setminus\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \leq \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z} = A_\alpha$.

Ahora, tomemos el producto directo de ω copias de $\mathbb{Z}$ (que indexaremos por medio de los x_i), es decir, sea $P = \prod_{i=1}^{\infty} \langle x_i \rangle \cong \prod_{x_i \in \{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z}$. En P, para cada $1 \leq m < \omega$, sea

$$
\begin{aligned}
z_m &= \text{“}\sum_{n\geq m} \frac{n!}{m!} x_n\text{”} \\
&= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1 \text{ entradas}}, 1, (m+1), (m+1)(m+2), \ldots) \in P.
\end{aligned}
$$

Ahora bien,

$$
B \oplus P = \left(\bigoplus_{X\setminus\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\prod_{x_i\in\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) \supseteq \left(\bigoplus_{X\setminus\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{x_i\in\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} \mathbb{Z} \right) = A_\alpha,
$$

por lo tanto tiene sentido considerar que $B \oplus P$ contiene como subgrupo a (una copia isomorfa a) A_α, y definir $A_{\alpha+1}$ como el subgrupo de $B \oplus P$ generado por $A_\alpha \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$.

Se puede verificar que $\bigcup_{n<\omega} Y_n \cup \{z_m \big| 1 \leq m < \omega\}$ es base de $A_{\alpha+1}$. En primer lugar, la independencia lineal es bastante inmediata de verificar, y para ver que este conjunto efectivamente genera a $A_{\alpha+1}$, lo único que podría causarnos problemas es ver que con los z_i podemos generar a los x_i, que son elementos de A_α. Pero un cálculo rápido a partir de la definición de los z_i nos confirma que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $z_m - (m+1)z_{m+1} = x_m$. Por consiguiente, $A_{\alpha+1}$ es libre. Ahora, para $k < \omega$, se tiene que $A_{\alpha+1}/A_{\alpha_k}$ es isomorfo al subgrupo de $A_{\alpha+1}$ generado por $\bigcup_{n>k}(Y_n \setminus Y_k) \cup \{z_m \big| k+1 \leq m < \omega\}$ (piénsese que en la expresión de $A_{\alpha+1}$ como suma directa de copias de $\mathbb{Z}$, hacer cociente sobre A_{α_k} es equivalente a tomar como triviales todos los factores que vienen indexados por un generador de A_{α_k}, así como hacer iguales a 0 a estos mismos generadores), luego es libre. Dado $\beta < \alpha$, hay un $n < \omega$ tal que $A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha_n}$, por lo tanto, dado que $A_{\alpha_n}/A_{\beta+1}$ es libre y $(A_{\alpha+1}/A_{\beta+1})/(A_{\alpha_n}/A_{\beta+1}) \cong A_{\alpha+1}/A_{\alpha_n}$ lo es, la proposición 0.12 nos permite asegurar que $A_{\alpha+1}/A_{\beta+1}$ es libre. Ahora, sólo resta ver la segunda condición, a saber, que $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ no es libre: observemos que para cada $1 \leq m < \omega$, se tiene que $m!z_m - z_1 = -\sum_{n=1}^{m-1} n!x_n = (-1, -2, -3!, \ldots, -(m-1)!, 0, 0, \ldots) \in A_\alpha$, luego $z_1 + A_\alpha = m!z_m + A_\alpha$. Como $z_1 \notin A_\alpha$, entonces $z_1 + A_\alpha$ es un elemento no cero de $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ que puede dividirse por cada $m \in \mathbb{N}$ (debido a que $z_1 + A_\alpha = m((m-1)!z_m + A_\alpha)$. Un grupo libre abeliano no tiene elementos que sean divisibles por todos los enteros positivos: pues si algún grupo libre abeliano A tiene base Y y $x = m_1x_1 + \cdots + m_nx_n \in A$, con $m_i \in \mathbb{Z}$ y $x_i \in Y$, entonces es claro que para cada k que sea mayor que el máximo común divisor de $\{m_i\}_{i=1}^{n}$, la ecuación $kX = x$ no tiene solución en A. Entonces, podemos concluir que $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ es libre.

Para demostrar la consistencia de la existencia de un W-grupo que no es libre, nuevamente debemos enriquecer ZFE con algún axioma adicional. En esta ocasión, el axioma de Martin, del cual hablamos en el capítulo anterior, será el que utilizaremos para realizar esta prueba de consistencia. Tomaremos, debido al teorema 0.26, un modelo para ZFE + AM + ¬HC, y todo lo que se satisfaga en este modelo será consistente con ZFE. En particular, veremos que en este modelo existe un W-grupo de tamaño ω_1 que no es libre. De hecho, este grupo no será otro que de la construcción I.25, pero el axioma de Martin nos permitirá demostrar que en efecto este grupo es un W-grupo.

Teorema I.26 (Shelah). ZFE + AM + ¬HC $\vdash$ *todo grupo abeliano de cardinalidad ω_1 que satisface la condición de Chase es un W-grupo.*

Demostración. Sea A un grupo de cardinalidad ω_1 que satisface la condición de Chase, y $\pi : B \longrightarrow A$ un epimorfismo cuyo núcleo es isomorfo a $\mathbb{Z}$ (en realidad, nos basta con que el núcleo sea numerable). Sea

$$\mathbb{P} = \{\varphi : S \longrightarrow B \;\Big|\; (\varphi \text{ es un homomorfismo}) \wedge \pi\varphi = \mathrm{id}_S$$
$$\wedge (S \text{ es un subgrupo finitamente generado puro en } A)\},$$

equipado con la relación de preorden $\varphi \leq \psi \iff \psi \subseteq \varphi$. Entonces, $\mathbb{P}$ es un conjunto preordenado no vacío (el único homomorfismo : $\langle 0 \rangle \longrightarrow B$ es un elemento de $\mathbb{P}$, ya que al ser A un grupo ω_1-libre (pues satisface la condición de Chase) es libre de torsión, luego $\langle 0 \rangle$ es un subgrupo puro en A que obviamente es finitamente generado).

Supongamos por el momento que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.. Para cada $a \in A$, sea $D_a = \{\varphi \in \mathbb{P} \big| a \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$. Veamos que D_a es denso en $\mathbb{P}$: sea $\varphi \in \mathbb{P}$, si $a \in \mathrm{dom}(\varphi)$ entonces $\varphi \in D_a$ y ya terminamos. Si no, sea $S = \mathrm{dom}(\varphi)$ y T un subgrupo puro en A finitamente generado que contiene a $S \cup \{a\}$ (dado que A satisface la condición de Chase, C.P.$(S + \langle a \rangle)$ es finitamente generado). Ahora, T/S es finitamente generado, y también es libre de torsión al ser S puro en A. Por lo tanto, la proposición 0.7 parte (*ii*) nos asegura que T/S es libre, luego la parte (*iii*) del mismo teorema nos asegura la existencia de una base para T de la forma $X \cup Y$ con X una base de S, $X \cap Y = \varnothing$. Definimos, pues, $\psi : T \longrightarrow B$ haciendo, por la propiedad universal de los grupos abelianos libres,

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x); \;\; x \in X \\ b_x; \;\; x \in Y \text{ y } b_x \in B \text{ con } \pi(b_x) = x \end{cases}$$

luego $\psi \in \mathbb{P}$ con $\psi < \varphi$ (como consecuencia de esto, por inducción, podemos extender cualquier $\varphi \in \mathbb{P}$ a alguna $\varphi' \in \mathbb{P}$ tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(\varphi')$, siempre que F sea cualquier subconjunto finito de A). Por lo tanto, AM nos asegura que, si $\mathscr{D} = \{D_a \big| a \in A\}$, entonces hay un filtro G que es $\mathscr{D}$-genérico. Es claro que, si $g = \bigcup G$, al ser G filtro, g será una función, y por ser $\mathscr{D}$-genérico tendremos que $A = \mathrm{dom}(g)$. Además, g cumple con la siguiente propiedad: Para cada $F \in [A]^{<\omega}$ hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(f)$ y $g \restriction F = f \restriction F$. En efecto, al ser $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$, hay elementos $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{P}$ tales que $(\forall i \in n + 1 \setminus \{0\})(g_i \in G \cap D_{a_i})$, al ser G un filtro y n finito, existe una $h \in G$ que extiende a todas las f_i, h es el elemento que estamos buscando.

Por si esto fuera poco, tenemos que necesariamente g es homomorfismo: pues si $a, b \in A$ entonces hay una $f \in \mathbb{P}$ tal que $f \restriction \{a, b, a + b\} = g \restriction \{a, b, a + b\}$, luego $g(a + b) = f(a + b) = f(a) + f(b) = g(a) + g(b)$. Además, tenemos que $\pi g(a) = \pi(f(a)) = a$, luego $\pi g = \mathrm{id}_A$ y g es escisión para π, con lo cual concluimos que A es un W-grupo.

Ahora, queremos ver que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c., para tal fin demostramos el siguiente lema.

Lema I.27. *Sea $I \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Entonces, hay un subgrupo $A' \leq A$ libre y puro en A, así como un subconjunto no numerable $J \subseteq I$ tal que* $(\forall \varphi \in J)(\mathrm{dom}(\varphi) \subseteq A')$.

Demostración. Sea $I = \{\varphi_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$, y para cada $\alpha < \omega_1$ sea $S_\alpha = \mathrm{dom}(\varphi_\alpha)$, que por hipótesis es un subgrupo puro en A finitamente generado; y (dado que S_α es finitamente generado y libre de torsión, la proposición 0.7 parte (*ii*) nos garantiza que es libre) sea Z_α una base de S_α. Sin perder generalidad, podemos suponer que para cierto $m < \omega$, $(\forall \alpha < \omega_1)(|Z_\alpha| = m)$. Más aún, por el lema del $\triangle$-sistema[2], podemos suponer que los Z_α forman un $\triangle$-sistema, digamos que con raíz R. Entonces, C.P.$(\langle R\rangle)$ es un subgrupo puro en A que está contenido en todos los S_α, por lo tanto podemos tomar un subgrupo T puro en A que esté contenido en una cantidad no numerable de S_α, maximal respecto de esta propiedad (se cumplen las hipótesis del lema de Zorn ya que si tenemos una cadena de subgrupos con esta propiedad, la cerradura pura de su yunta es una cota superior para la cadena), luego hay una sucesión estrictamente creciente $\langle \delta_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ tal que $(\forall \alpha < \omega_1)(T \subseteq S_{\delta_\alpha})$. T es libre debido a que es subgrupo de un grupo libre (cualquiera de los S_{δ_α} atestigua esto), luego podemos tomar una base X para T. Entonces, por la proposición 0.12, sabemos que para cada $\alpha < \omega_1$ existe un conjunto Y_α disjunto con X tal que $Y_\alpha \cup X$ es base de S_{δ_α}.

Construiremos a A' como la unión de una cadena suave $\langle A_\alpha \big| \alpha < \omega_1\rangle$ tal que para cada $\alpha < \omega_1$, $A_\alpha \leq A$ sea un subgrupo puro en A y $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ sea libre. Entonces, siempre que A_0 sea libre, el teorema 0.14 nos garantizará que A' es libre. Más aún, al ser la unión de subgrupos puros en A, A' también será puro en A: si $x + A' \in \mathrm{tor}(A/A')$ entonces para cierto $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $nx + A' = n(x + A') = A'$, con lo cual $nx \in A' = \bigcup_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$; de modo que para cierto $\alpha < \omega_1$ tenemos que $nx \in A_\alpha$ (i.e. $n(x + A_\alpha) = A_\alpha$ y por tanto $x + A_\alpha \in \mathrm{tor}(A/A_\alpha)$), siendo A_α puro en A no queda más opción que $x \in A_\alpha \subseteq A'$ y por lo tanto $\mathrm{tor}(A/A') = \langle 0\rangle$.

De esta forma, comenzamos haciendo $A_0 := T$, que es libre. Una vez que conocemos $\langle A_\gamma \big| \gamma < \alpha\rangle$, entonces si α es límite hacemos $A_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma$. Y finalmente, supongamos que conocemos $\langle A_\gamma \big| \gamma \leq \alpha\rangle$ y una sucesión estrictamente creciente de ordinales $\langle \sigma_{\gamma+1} \big| \gamma < \alpha\rangle$ tal que para cada $\gamma < \alpha$, $Y_{\sigma_{\gamma+1}} \subseteq A_{\gamma+1}$. Sea C_α un subgrupo numerable ω_1-puro que contiene a A_α, el cual existe debido a que A satisface la condición de Chase. Observemos que debe de existir un $\sigma_{\alpha+1}$ tal que $(\forall \gamma \leq \alpha)(\sigma_{\alpha+1} > \sigma_{\gamma+1} \wedge \langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle \cap C_\alpha = \langle 0\rangle)$, pues en caso contrario, al ser C_α numerable, entonces existiría un $c \in C_\alpha \setminus \{0\}$ y una cantidad no numerable de $\tau < \omega_1$ tales que $\tau > \sup\{\sigma_{\gamma+1} \big| \gamma \leq \alpha\}$ y con $c \in \langle Y_\tau\rangle$. Pero esto implicaría que C.P.$(T + \langle c\rangle) \subseteq S_{\delta_\tau}$ para esos mismos τ (la inclusión se debe a que $c \in \langle Y_\tau\rangle \leq S_{\delta_\tau}$ y $T \subseteq S_{\delta_\tau}$, y S_{δ_τ} es puro en A), y esto contradice la maximalidad de T. Entonces, hacemos $A_{\alpha+1} :=$ C.P.$(A_\alpha + \langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle)$. Por construcción, $\langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle \cap C_\alpha = \langle 0\rangle$, entonces $A_{\alpha+1} \cap C_\alpha = A_\alpha$ (ya que si $x \in A_{\alpha+1} \cap C_\alpha$ entonces para cierto $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $nx \in A_\alpha + \langle Y_{\sigma_{\alpha+1}}\rangle$

[2]El lema del $\triangle$-sistema dice que todo conjunto numerable de conjuntos finitos A tiene un subconjunto no numerable B que forma un **$\triangle$-sistema**, es decir, hay un r (llamado la **raíz** del $\triangle$-sistema) tal que para cualesquiera dos $a, b \in B$ distintos, $a \cap b = r$. La demostración puede verse en [**14**, pp. 49-50, o ej. 1 p. 86].

y también $nx \in C_\alpha \supseteq A_\alpha$, con lo cual necesariamente se concluye que $x \in A_\alpha$), lo cual significa que $A_{\alpha+1}/A_\alpha = A_{\alpha+1}/(A_{\alpha+1} \cap C_\alpha) \cong (A_{\alpha+1} + C_\alpha)/C_\alpha$, este último es un subgrupo numerable de A/C_α, que es un grupo ω_1-libre (pues C_α es ω_1-puro), y por lo tanto este cociente es libre.

Entonces basta hacer $J := \{\varphi_{\sigma_{\alpha+1}} \big| \alpha < \omega_1\}$ para que el lema quede demostrado en virtud de que $\mathrm{dom}(\varphi_{\sigma_{\alpha+1}}) = S_{\sigma_{\alpha+1}} = \langle X \cup Y_{\sigma_{\alpha+1}} \rangle \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq A'$, en donde la penúltima inclusión es consecuencia de que $Y_{\sigma_{\alpha+1}} \subseteq A_{\alpha+1}$ y $X \subseteq T = A_0 \subseteq A_{\alpha+1}$. ❏

Finalmente tenemos la herramienta necesaria para demostrar que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.. Sea $I \subseteq \mathbb{P}$ no numerable. Por el lema anterior, hay un subgrupo $A' \leq A$ que es libre y puro en A tal que, sin perder generalidad, contiene a $\mathrm{dom}(\varphi)$ para todos los $\varphi \in I$. Sea $X = \{x_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$ una base de A'. Dado que para cada $\varphi \in \mathbb{P}$ y cada subconjunto finito $F \subseteq A$ podemos encontrar un $\varphi' \in \mathbb{P}$ que extiende a φ y tal que $F \subseteq \mathrm{dom}(\varphi')$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cada $\varphi \in I$ hay un subconjunto finito $Z \subseteq X$ tal que $\mathrm{dom}(\varphi) = \langle Z \rangle$ (basta tomar un Z que contenga suficientes elementos de X como para generar a los generadores de $\mathrm{dom}(\varphi)$ (claramente hay un Z finito con esta propiedad), extender φ a una φ' cuyo dominio contenga a Z, y restringir esta última a $\langle Z \rangle$, el cual es puro en A (pues $(A/\langle Z \rangle)/(A'/\langle Z \rangle) \cong (A/A')$, en donde el grupo de la derecha es libre de torsión por ser A' puro en A, y el divisor de la izquierda es libre, de donde es fácil concluir que el dividendo de la izquierda también es libre de torsión) y finitamente generado). Sea $I = \{\varphi_\alpha \big| \alpha < \omega_1\}$ y para cada $\alpha < \omega_1$, por la observación anterior, $Y_\alpha \in [X]^{<\omega}$ una base para $\mathrm{dom}(\varphi_\alpha)$. Por el lema del $\triangle$-sistema, hay una cantidad no numerable de Y_α que forman un $\triangle$-sistema con raíz $R \subseteq X$. Así, podemos escoger un $T \subseteq X$ maximal respecto de estar contenido en una cantidad no numerable de los Y_α.

Contemos las posibles funciones $f : T \longrightarrow B$ que podrían llegar a extenderse a un elemento de $\mathbb{P}$. Necesitamos que, para cada $t \in T$, $\pi(f(t)) = t$. Como $\pi : B \longrightarrow A$ es epimorfismo, entonces π induce una biyección $\hat{\pi} : B/\ker(\pi) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Z$ dada por $\hat{\pi}(b + \ker(\pi)) = \pi(b)$. Por ello, es necesario que $f(t)$ sea un elemento de la única clase lateral cuyo valor bajo $\hat{\pi}$ sea t. Pero cada clase lateral tiene la cardinalidad de $\ker(\pi)$, que es numerable, por lo tanto hay ω posibles valores de $f(t)$ para cada $t \in T$, y habiendo una cantidad finita de elementos de T no puede haber más que ω posibles f. Tenemos entonces que, para una cantidad no numerable de α, $T \subseteq Y_\alpha$ y por el conteo anterior sólo puede haber una cantidad numerable de $\varphi_\alpha \upharpoonright T$ distintos. Por lo tanto, existe un subconjunto no numerable $L \subseteq \omega_1$ tal que $(\forall \alpha \in L)(T \subseteq Y_\alpha)$ y $(\forall \alpha, \beta \in L)(\varphi_\alpha \upharpoonright T = \varphi_\beta \upharpoonright T)$. Por el lema del $\triangle$-sistema, podemos suponer sin perder generalidad que $\{\mathrm{dom}(\varphi_\alpha) \big| \alpha \in L\}$ forma un $\triangle$-sistema, digamos que con raíz R. Es claro que debe tenerse que $T \subseteq R$, y además si la contención fuera propia, escogiendo $y \in R \setminus T$ se tendría que $T \cup \{y\}$ contradice la maximalidad de T. Por lo tanto, la raíz del $\triangle$-sistema es exactamente T, en particular podemos hallar dos $\alpha, \beta \in L$ distintos tales que

$Y_\alpha \cap Y_\beta = T$. Entonces, $\varphi_\alpha \restriction \langle T\rangle = \varphi_\beta \restriction \langle T\rangle$, con $\langle T\rangle = \mathrm{dom}(\varphi_\alpha) \cap \mathrm{dom}(\varphi_\beta)$. Por lo tanto, el único homomorfismo $\psi : \langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle \longrightarrow B$ que extiende a $\varphi_\alpha \cup \varphi_\beta$, será una extensión común de φ_α y φ_β, lo cual nos permitirá concluir que I no era una anticadena tan pronto como logremos demostrar que $\psi \in \mathbb{P}$. Para ello, basta ver que $\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle$ es un subgrupo puro en A (pues claramente es finitamente generado y también es claro que $\pi\psi = \mathrm{id}_{\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle}$). Primero veamos que este grupo es puro en A', debido a que $A'/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle$ es isomorfo al grupo libre con base $\{x_\delta \big| \delta \in \omega_1 \setminus (Y_\alpha \cup Y_\beta)\}$. Ahora bien, $(A/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle)/(A'/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle) \cong A/A'$ que es libre de torsión, siendo a su vez el dividendo del lado izquierdo libre de torsión por ser A' puro en A y $\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle$ puro en A'. Pero esto implica que $A/\langle Y_\alpha \cup Y_\beta\rangle$ es libre de torsión. En efecto, en general, si A/B y B son libres de torsión, entonces $\mathrm{tor}(A) \subseteq B$ y al ser B libre de torsión ha de tenerse que $\mathrm{tor}(A) = \langle 0\rangle$ y por lo tanto también A es libre de torsión. Con esto finaliza la demostración del teorema. ❏

Juntar el teorema anterior con la construcción I.25 nos permite concluir que, en cualquier modelo de ZFE + AM + ¬HC existen W-grupos que no son libres. Por lo tanto, es imposible refutar esto último sobre la base de ZFE, y entonces es imposible demostrar que todo W-grupo es libre. En resumen, hemos visto que para grupos de cardinalidad ω_1 no es posible demostrar ni refutar en ZFE el enunciado "todo W-grupo es libre". El problema de Whitehead es indecidible, como lo establece en resumidas cuentas el siguiente corolario.

Corolario I.28. *Sea* $\varphi \equiv$ "todo W – grupo es libre". *Entonces,* ZFE $\nvdash \varphi$ *y* ZFE $\nvdash \neg\varphi$. *Es decir,* φ *es indecidible.*

Capítulo II

La cofinalidad del grupo simétrico infinito

En el presente capítulo, estudiaremos la cofinalidad del grupo simétrico infinito, un invariante cardinal que puede definirse para cualquier grupo que no es finitamente generado. En particular, observaremos que la cofinalidad del grupo simétrico infinito está por debajo del número de dominancia. El resultado principal de este capítulo, es una demostración dentro de ZFE *de que la cofinalidad del grupo simétrico es mayor o igual al invariante cardinal* $\mathfrak{g}$*. De esta forma, tendremos cota superior e inferior para este invariante cardinal.*

1. Los grupos simétricos y algunas de sus propiedades

Como es costumbre, dado un conjunto X, denotaremos por S_X al **grupo simétrico** en X, es decir, al conjunto de todas las biyecciones de X en X, el cual forma un grupo con la composición de funciones como operación binaria. En particular, si $n < \omega$ entonces S_n es el conocido grupo de permutaciones de n elementos (tal grupo tiene orden $n!$); mientras que S_ω es el **grupo simétrico infinito**, el grupo de las permutaciones de una cantidad numerable de símbolos (cuyo orden es $2^\omega = \mathfrak{c}$). En general, puede probarse que para todo cardinal κ, su grupo de permutaciones S_κ tiene orden 2^κ. Dentro del presente trabajo nos concretaremos a estudiar el grupo simétrico en una cantidad numerable de símbolos, S_ω. Sin embargo, es conveniente notar que varios de los resultados que demostramos en la presente y en la siguiente sección se generalizan sin dificultad a los grupos S_κ, para cualquier cardinal κ, sencillamente sustituyendo todos los "ω" por "κ" en las correspondientes demostraciones. El objetivo de la presente sección, primordialmente, es llegar a demostrar el lema II.6, resultado que será fundamental en lo sucesivo.

Notación II.1.

- Dado un conjunto X y una permutación $\pi \in S_X$, denotaremos por $\mathrm{Mov}(\pi)$ a los elementos movidos por π, y por $\mathrm{Fij}(\pi)$ a los puntos fijos de π. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{Mov}(\pi) &:= \{x \in X \big| \pi(x) \neq x\} \\ \mathrm{Fij}(\pi) &:= \{x \in X \big| \pi(x) = x\} = X \setminus \mathrm{Mov}(\pi). \end{aligned}$$

- Denotaremos por $\mathbb{F}$ al subconjunto de S_ω que consta de aquellas permutaciones que dejan fijos a casi todos los elementos de ω, es decir,

$$\mathbb{F} := \{\pi \in S_\omega \big| |\operatorname{Mov}(\pi)| < \omega\}.$$

- Denotaremos por $\mathbb{A}$ al subconjunto de $\mathbb{F}$ que está generado por los 3-ciclos.

Notemos que $\mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$. En efecto, es inmediato el hecho de que $\mathbb{F}$ es un subgrupo, ya que para $\pi, \sigma \in \mathbb{F}$ tenemos que $\operatorname{Mov}(\pi\sigma^{-1}) \subseteq \operatorname{Mov}(\pi) \cup \operatorname{Mov}(\sigma^{-1}) = \operatorname{Mov}(\pi) \cup \operatorname{Mov}(\sigma)$, y este último es finito. Finalmente, para demostrar que este subgrupo es normal, basta utilizar el hecho fácilmente demostrable de que, para $\sigma, \pi \in S_\omega$, $\operatorname{Mov}(\sigma\pi\sigma^{-1}) = \sigma[\operatorname{Mov}(\pi)]$. Asimismo, $\mathbb{A} \trianglelefteq \mathbb{F}$, lo cual se demuestra utilizando las mismas técnicas que en el caso de los grupos simétricos finitos. Al grupo $\mathbb{A}$ se le conoce con el nombre de **grupo alternante infinito**. Notemos que, para cada $n < \omega$, hay un encaje natural $S_n \hookrightarrow S_\omega$, dado por $\sigma \longmapsto \sigma \cup \mathrm{id}_{\omega \setminus n}$. De esta forma, es claro que $\mathbb{F} = \bigcup\limits_{n<\omega} S_n$ y $\mathbb{A} = \bigcup\limits_{n<\omega} A_n$. Ahora bien, un resultado clásico de la teoría de los grupos simétricos infinitos S_κ (que aquí enunciamos para el caso particular S_ω) es aquél que afirma que la sucesión

$$\langle 0 \rangle \trianglelefteq \mathbb{A} \trianglelefteq \mathbb{F} \trianglelefteq S_\omega$$

es lo que se conoce como una **serie de composición de Jordan-Hölder** (para la demostración, puede consultarse [**1**]). Esto quiere decir que $\mathbb{A}$ es el único subgrupo normal no trivial de $\mathbb{F}$, quien a su vez es el único subgrupo normal no trivial de S_ω. En particular, si $H \trianglelefteq S_\omega$ es un subgrupo normal que contiene alguna permutación que mueve a una cantidad infinita de elementos, entonces $H = S_\omega$. Introduzcamos algunas notaciones más, y comencemos a demostrar los lemas necesarios para cumplir con el objetivo de esta sección.

Notación II.2. Sea $G \leq S_X$, y $A \subseteq X$. Introducimos la siguiente notación para los siguientes grupos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| g[A] = A\}, \\ \operatorname{stab}_A(G) &:= \{g \in G \big| (\forall n \in A)(g(n) = n)\}, \\ G \restriction A &:= \{\sigma \restriction A \big| \sigma \in \operatorname{Stab}_G(A)\}. \end{aligned}$$

El primero es el **estabilizador conjuntista** de A según G, el segundo es el **estabilizador puntual** de A según G. El último es el **subgrupo inducido** por $\operatorname{Stab}_G(A)$ en S_A.

Definición II.3. Sea X un conjunto infinito. Diremos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es una **mitad** de X si $|Y| = |X \setminus Y| = |X|$.

Lema II.4. *Sea $G \leq S_\omega$ tal que para toda mitad $X \subseteq \omega$ se cumple que $G \restriction X = S_X$. Entonces, $G = S_\omega$.*

Demostración. Sea X una mitad de ω y $H = \mathrm{Stab}_X(G) = \mathrm{Stab}_{\omega\setminus X}(G)$. Entonces, por hipótesis $S_X = G \upharpoonright X = H \upharpoonright X = \{\sigma \upharpoonright X \big| \sigma \in H\}$. Similarmente, $G \upharpoonright (\omega \setminus X) = H \upharpoonright (\omega \setminus X) = S_{\omega\setminus X}$. De esta forma, $H \subseteq \{\sigma \cup \pi \big| \sigma \in S_X \wedge \pi \in S_{\omega\setminus X}\}$. Así, si definimos $H_1 := \{\sigma \cup \mathrm{id}_{\omega\setminus X} \big| \sigma \in S_X\} \trianglelefteq H$ y $H_2 := \{\mathrm{id}_X \cup \pi \big| \pi \in S_{\omega\setminus X}\} \trianglelefteq H$, entonces es claro que $H = H_1 \cup H_2$ y $H_1 \cap H_2 = \langle 0 \rangle$, de modo que $H \cong H_1 \oplus H_2$. Ahora notemos que tanto S_X como $S_{\omega\setminus X}$ están naturalmente encajados en $\{\sigma \cup \pi \big| \sigma \in S_X \wedge \pi \in S_{\omega\setminus X}\}$ ($\sigma \longmapsto \sigma \cup \mathrm{id}_{\omega\setminus X}$ y $\sigma \longmapsto \sigma \cup \mathrm{id}_X$ son los encajes, respectivamente), y similarmente al caso de H, tenemos que $\{\sigma \cup \pi \big| \sigma \in S_X \wedge \pi \in S_{\omega\setminus X}\} \cong S_X \oplus S_{\omega\setminus X}$. Así, tenemos que $H = H_1 \oplus H_2 \subseteq S_X \oplus S_{\omega\setminus X}$, en donde cada factor del término de enmedio es un subgrupo de cada factor del término de la derecha. Ahora veamos que $H_1 \trianglelefteq S_X$. Tomemos $\tau \in H_1$ y $\sigma \in S_X$. Entonces, dado que $H \upharpoonright X = S_X$, existe un $\pi \in H$ tal que $\pi \upharpoonright X = \sigma$. Como $\tau \in H_1$, ello significa que $\tau \upharpoonright (\omega \setminus X) = \mathrm{id}_{\omega\setminus X}$. Luego, $(\sigma\tau\sigma^{-1}) \upharpoonright (\omega \setminus X) = \mathrm{id}_{\omega\setminus X} = (\pi\tau\pi^{-1}) \upharpoonright (\omega \setminus X)$, mientras que $(\sigma\tau\sigma^{-1}) \upharpoonright X = (\pi\tau\pi^{-1}) \upharpoonright X$. Esto significa que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \pi\tau\pi^{-1} \in H_1$, por lo tanto $H_1 \trianglelefteq S_X$ y por un razonamiento enteramente análogo tenemos que $H_2 \trianglelefteq S_{\omega\setminus X}$. Sin embargo, H_1 contiene un elemento que mueve a una infinidad de elementos de X. En efecto, sea Y una mitad de X. Dado que $G \upharpoonright X = S_X$, existe un $\sigma \in \mathrm{Stab}_Y(G)$ tal que $\sigma \upharpoonright (X \setminus Y)$ no tiene puntos fijos, y tal que $\sigma[X \setminus Y] = X \setminus Y$. Pero también $G \upharpoonright (\omega \setminus Y) = S_{\omega\setminus Y}$, luego existe un $\pi \in \mathrm{Stab}_{\omega\setminus Y}(G) = \mathrm{Stab}_Y(G)$ tal que $\pi \upharpoonright (X \setminus Y) = \mathrm{id}_{X\setminus Y}$ y $\pi \upharpoonright (\omega \setminus X) = [\sigma \upharpoonright (\omega \setminus X)]^{-1}$. Ello implicará que $(\sigma\pi) \upharpoonright (\omega \setminus X) = \mathrm{id}_{\omega\setminus X}$ y $\mathrm{Mov}((\sigma\pi) \upharpoonright X) \supseteq X \setminus Y$, de manera que $h = \sigma\pi \in H_1 \trianglelefteq S_X$ es tal que mueve a una infinidad de elementos de X. Luego, por las observaciones anteriores al lema, tenemos que $H_1 = \{\sigma \cup \mathrm{id}_{\omega\setminus X} \big| \sigma \in S_X\} \cong S_X$, y similarmente $H_2 \cong S_{\omega\setminus X}$, con lo cual se tiene que $H = \{\sigma \cup \pi \big| \sigma \in S_X \wedge \pi \in S_{\omega\setminus X}\}$.

Recapitulando, hasta el momento hemos podido concluir que para toda mitad $X \subseteq \omega$, $\{\sigma \cup \mathrm{id}_{\omega\setminus X} \big| \sigma \in S_X\} \subseteq G$. Veamos que esto implica que $G = S_\omega$. Sea $\sigma \in S_\omega$ arbitrario. Es claro que, si $\mathrm{Mov}(\sigma)$ es finito o bien una mitad, claramente $\sigma \in G$ por la observación anterior. Supongamos ahora que $\mathrm{Mov}(\sigma)$ es un conjunto cofinito. Observemos que σ determina una partición de ω, que viene dada por las distintas órbitas, es decir, conjuntos de la forma $\{\sigma^i(n) \big| i \in \mathbb{Z}\}$. Si hay una infinidad de órbitas, digamos que éstas son A_i con $i < \omega$, sean $\pi, \tau \in G$ tales que $\pi \upharpoonright \bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i} = \sigma \upharpoonright \bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i}$, $\pi \upharpoonright \bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i+1} = \mathrm{id}_{\bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i+1}}$; y $\tau \upharpoonright \bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i+1} = \sigma \upharpoonright \bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i+1}$, $\tau \upharpoonright \bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i} = \mathrm{id}_{\bigcup\limits_{i<\omega} A_{2i}}$; de modo que $\sigma = \pi\tau \in G$. En caso contrario, supongamos que existe tan sólo una órbita, que debe de ser infinita, $A = \{\sigma^i(n) \big| i \in \mathbb{Z}\}$. Dado que σ es biyección, todos los $\sigma^i(n)$ son distintos entre sí (pues de lo contrario, la órbita sería finita). Sea $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$ dada de la siguiente forma:

$$\pi(\sigma^i(n)) = \begin{cases} \sigma^{i+1}(n); \ i \geq 0 \\ \sigma^{i+2}(n); \ i \leq -1 \text{ par} \\ \sigma^i(n); \ i \leq -1 \text{ impar} \end{cases}$$

y $\tau : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A$ dada como sigue:

$$\tau(\sigma^i(n)) = \begin{cases} \sigma^i(n); \ i > 0 \\ \sigma^{i-1}(n); \ i \leq 0 \text{ par} \\ \sigma^{i+1}(n); \ i \leq 0 \text{ impar}, \end{cases}$$

es claro que $\pi, \tau \in G$, debido a que cada una de ellas mueve exactamente a una mitad de ω; un cálculo rápido nos indica que $\tau\pi = \sigma \restriction A$. Es claro que, si hay más de una órbita, el mismo procedimiento repetido tantas veces como órbitas existan, nos permitirá demostrar que $\sigma \in G$. Luego $G = S_\omega$. ❏

Lema II.5. *Sea $G \leq S_\omega$ y $A, B \subseteq \omega$ con $G \restriction A = S_A$ y $G \restriction B = S_B$. Si $|A \cap B| = \omega$ y $A \cup B = \omega$, entonces $G = S_\omega$.*

Demostración. Sea X una mitad de ω. Debe tenerse que o bien $X \cap A$ es mitad de A o bien $X \cap B$ es mitad de B. En efecto, recordemos que $A \cup B = \omega$; luego si $X \cap A$ no fuera mitad de A ello significa que $X \cap A$ o $A \setminus X$ es finito. En el primer caso, necesariamente $X \cap B$ es infinito, y también lo es $B \setminus X$ ya que este último contiene a $(B \cap A) \setminus X$, el cual es infinito en virtud de que $B \cap A$ lo es, y $(B \cap A) \cap X$ es finito en este caso. En el segundo caso, $B \setminus X$ debe ser infinito, y $B \cap X$ contiene a $(A \cap B) \cap X$ el cual es infinito debido a que $(A \cap B) \setminus X$ es finito por serlo $A \setminus X$. Luego $X \cap B$ es mitad de B.

Así, sin perder generalidad podemos suponer que $X \cap A$ es una mitad de A. Sea ahora Y una mitad de $A \cap B$. Como $G \restriction A = S_A$ entonces existe un $h_1 \in \mathrm{Stab}_A(G)$ tal que $h_1[X \cap A]$ es mitad de $A \cap B$. Luego, $h_1[X]$ es mitad de B y, dado que $G \restriction B = S_B$ y Y es mitad de $A \cap B$ (por lo tanto también es mitad de B), entonces hay un $h_2 \in \mathrm{Stab}_B(G)$ tal que $h_2[h_1[X]] = Y$. Un razonamiento similar al del teorema anterior muestra que $\mathrm{Stab}_X(G) \trianglelefteq \{\sigma \cup \mathrm{id}_{\omega \setminus X} \big| \sigma \in S_X\} \cong S_X$, y el hecho de que para toda mitad arbitraria Y de $A \cap B$ exista $h \in G$ tal que $h[X] = Y$, indica que hay una permutación en $\mathrm{Stab}_X(G)$ que mueve a una cantidad infinita de elementos de X. Nuevamente utilizando el hecho de que el único subgrupo normal no trivial de S_X es el que consta de las permutaciones que tan sólo mueven a una cantidad finita de elementos de X, concluimos que $\mathrm{Stab}_X(G) = \{\sigma \cup \mathrm{id}_{\omega \setminus X} \big| \sigma \in S_X\}$, en particular $G \restriction X = S_X$. Por el lema anterior, concluimos que $G = S_\omega$. ❏

Lema II.6 (MacPherson-Neumann). *Sea $G \leq S_\omega$. Supóngase que existe una mitad $X \subseteq \omega$ tal que $G \restriction X = S_X$. Entonces $(\exists \pi \in S_\omega)(S_\omega = \langle G, \pi \rangle)$.*

Demostración. Sea $Y \subseteq \omega$ cualquier mitad tal que $X \cup Y = \omega$ y $X \cap Y$ es una mitad de ω, y sea $\pi \in S_\omega$ cualquier permutación que intercambia a X y a Y (por ejemplo, que $\pi \restriction (X \cap Y)$ sea endobiyección de $X \cap Y$, mientras que $\pi \restriction (X \setminus Y)$ sea biyección entre $X \setminus Y$ y $Y \setminus X$; y $\pi \restriction (Y \setminus X)$ sea biyección entre $Y \setminus X$ y $X \setminus Y$). Entonces, tenemos que $\langle G, \pi \rangle \restriction X = S_X$ (debido a que ya $G \restriction X = S_X$), y además si $\sigma \in S_Y$, al ser $\pi \restriction Y$ una biyección entre Y y X entonces $(\pi \restriction Y)\sigma((\pi \restriction Y)^{-1}) \in S_X$, lo cual implica que para algún $\rho \in \mathrm{Stab}_X(G)$ tenemos $\rho \restriction X = (\pi \restriction Y)\sigma((\pi \restriction Y)^{-1})$ y eso significa que $\sigma = ((\pi \restriction Y)^{-1})(\rho \restriction X)(\pi \restriction Y) = (\pi^{-1}\rho\pi) \restriction Y \in \langle G, \pi \rangle \restriction Y$. Por el lema II.5, es inmediato concluir que $\langle G, \pi \rangle = S_\omega$. ❏

2. La cofinalidad del grupo simétrico infinito

Recordemos que, dado un cardinal infinito κ, su cofinalidad $\mathrm{cf}(\kappa)$ es la mínima longitud de una cadena de subconjuntos propios de κ cuya unión es κ. De manera completamente análoga se definirá la cofinalidad de un grupo, salvo pequeños detalles técnicos, casi diríamos que "de traducción": la infinitud del cardinal, en el caso de los grupos se traduce a que éstos no sean finitamente generados; mientras que la cadena de subconjuntos debe de reemplazarse por una cadena de subgrupos. De esta forma, dado un grupo que no es finitamente generado, se define un invariante cardinal muy similar a la cofinalidad de un cardinal, pero adaptado adecuadamente para reflejar propiedades de la estructura que tiene el grupo.

Definición II.7. Sea G un grupo que no es finitamente generado. Luego, hay una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\alpha \big| \alpha < \xi \rangle$ tal que $G = \bigcup_{\alpha < \xi} G_\alpha$. Así, definimos la **cofinalidad** de G, $\mathrm{cf}(G)$, como la mínima longitud de una tal cadena. Es decir,

$$\mathrm{cf}(G) := \mathrm{mín}\left\{\lambda \Big| (\exists \langle G_\alpha \big| \alpha < \lambda \rangle \text{ cadena estricta de subgrupos propios})(G = \bigcup_{\alpha < \lambda} G_\alpha)\right\}.$$

Es claro de la definición que $\mathrm{cf}(G)$ es un cardinal y es regular, ya que si G es la unión de una cadena estricta de subgrupos propios, $G = \bigcup_{\alpha<\lambda} G_\alpha$, entonces si $\langle \gamma_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(\lambda) \rangle$ es una sucesión cofinal en λ, necesariamente tendremos que $G = \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(\lambda)} G_{\gamma_\alpha}$.

Más aún, se tiene siempre que $\mathrm{cf}(G) \leq \mathrm{cf}(|G|)$. Pues si $G = \{g_\xi \big| \xi < |G|\}$ y $\langle \gamma_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(|G|) \rangle$ es una sucesión continua, cofinal en $|G|$, definimos, para cada $\alpha < \mathrm{cf}(|G|)$, $G_\alpha := \langle \gamma_\delta \big| \delta < \gamma_\alpha \rangle$. Dado que G no es finitamente generado, $G_n \subsetneq G$ para cada $n < \omega$. Ahora bien, para $\alpha \geq \omega$, cada uno de los G_α debe tener cardinalidad $|\alpha| \leq \alpha < |G|$, por lo tanto debe de ser un subgrupo propio. Entonces, $\langle G_\alpha \big| \alpha < \mathrm{cf}(|G|) \rangle$ será una cadena (no necesariamente estricta) de subgrupos propios de G con $G = \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(|G|)} G_\alpha$, lo cual implica que $\mathrm{cf}(G) \leq \mathrm{cf}(|G|)$.

A continuación comenzaremos el estudio de la cofinalidad del grupo simétrico infinito, $\mathrm{cf}(S_\omega)$. Nuestro primer objetivo será establecer que $\omega_1 \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{c}$ y que cualquiera de las dos desigualdades puede, de manera consistente, ser estricta. Una de las desigualdades viene del hecho recientemente mencionado: $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}(|S_\omega|) = \mathrm{cf}(2^\omega) \leq 2^\omega$. La otra desigualdad es el contenido del siguiente teorema.

Teorema II.8 (MacPherson-Neumann). $\mathrm{cf}(S_\omega) > \omega$.

Demostración. Sea S_ω la unión de una cadena de subgrupos propios, $S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha$. Probemos que $\lambda \geq \omega_1$. Notemos que, si para algún $\alpha < \lambda$ hay una mitad X tal que $H_\alpha \upharpoonright X = S_X$, entonces el lema II.6 nos asegura que para algún $\pi \in S_\omega$ se tiene que $S_\omega = \langle H_\alpha, \pi\rangle$, lo cual implica que, si $\pi \in H_\beta$ entonces $S_\omega = H_{\text{máx}\{\alpha,\beta\}}$ lo cual contradice que los H_γ son subgrupos propios. Por lo tanto, debe tenerse que $(\forall\alpha < \lambda)(\forall X \subseteq \omega)(X$ es mitad de $\omega \Rightarrow H_\alpha \upharpoonright X \neq S_X)$. Supongamos que $\lambda < \omega_1$. Realizemos una partición de ω en una cantidad numerable de mitades X_α, con $\alpha < \lambda$. Para cada $\alpha < \lambda$ escojamos un $\pi_\alpha \in S_{X_\alpha} \setminus (H_\alpha \upharpoonright X_\alpha)$ y hagamos $\pi = \bigcup_{\alpha<\lambda} \pi_\alpha \in S_\omega$. Esto significa que, para $\alpha < \lambda$, $\pi \upharpoonright X_\alpha = \pi_\alpha \notin H_\alpha \upharpoonright X_\alpha$. Pero entonces $\pi \notin \bigcup_{\alpha<\lambda} H_\alpha = S_\omega$, lo cual es absurdo. ❑

Este teorema puede generalizarse fácilmente para demostrar que, dado κ un cardinal infinito, $\mathrm{cf}(S_\kappa) > \kappa$. Esto puede verse como un análogo del lema de König para el caso de grupos simétricos.

De esta forma, sabemos que siempre se debe de cumplir $\omega_1 \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{c}$. Las dos desigualdades pueden ser simultáneamente igualdades si consideramos un modelo de HC. A continuación veremos que también es posible que una de las dos desigualdades sea estricta, mientras que la otra sea igualdad.

Teorema II.9. *Sea M un modelo base en el cual κ es un cardinal con $\kappa^\omega = \kappa > \omega_1$. Si G es un filtro* $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$*-genérico sobre M, entonces* $M[G] \models \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1 < 2^\omega = \kappa$.

Demostración. Es un hecho conocido que $M[G] \models 2^\omega = \kappa > \omega_1$, sólo falta ver que $M[G] \models \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1$. En M, sea $\kappa = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ la unión de una cadena creciente de conjuntos tal que $(\forall\alpha < \omega_1)(|X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha| = \kappa)$, y observemos que $\mathrm{Fn}(\kappa, 2) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathrm{Fn}(X_\alpha, 2)$. A partir de este momento, trabajaremos en $M[G]$. Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $G_\alpha := G \cap \mathrm{Fn}(X_\alpha, 2)$. Claramente G_α será $\mathrm{Fn}(X_\alpha, 2)$-genérico sobre M, luego tiene sentido definir, trabajando dentro de $M[G]$, a los subgrupos $H_\alpha := \{\pi \in S_\omega \,|\, \pi \in M[G_\alpha]\}$. Dentro de $M[G]$, es inmediato ver que, para cada $\alpha < \omega_1$, $H_\alpha \leq S_\omega$; también se ve con facilidad que $S_\omega = \bigcup_{\alpha<\omega_1} H_\alpha$. Únicamente resta demostrar que cada uno de los H_α es subgrupo propio de S_ω. Para esto, basta tomar un nuevo subconjunto $X \subseteq \omega$ con $X \in M[G_{\alpha+1}] \setminus M[G_\alpha]$. Es claro que X es una mitad de ω. Entonces, si $\pi \in S_\omega$ es tal que $\pi \upharpoonright X : X \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow X$ no tiene puntos fijos, y $\pi \upharpoonright (\omega\setminus X) = \mathrm{id}_{\omega\setminus X}$

(de modo tal que $\mathrm{Mov}(\pi) = X$), entonces es claro que $\pi \in S_\omega \setminus H_\alpha$. Luego, en $M[G]$ se cumple que $H_\alpha \subsetneq S_\omega$, y eso implica que $M[G] \models \mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1$. ❏

También es consistente con ZFE el hecho de que $\omega_1 < \mathfrak{c} = \mathrm{cf}(S_\omega)$. De hecho, esto es implicado por el axioma de Martin. Una demostración directa de este hecho se encuentra en [**17**, Theorem 1.10]. Sin embargo, nosotros demostraremos en la última sección de este capítulo que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$. Dado que $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{g}$, entonces con estos resultados es inmediato que $\mathsf{AM} \Rightarrow \mathrm{cf}(S_\omega) = \mathfrak{c}$.

Otro resultado que puede encontrarse en el artículo apenas mencionado es que la existencia de una λ-escala implica que $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \lambda$ ([**17**, Theorem 1.5]), en donde también se demuestra el resultado de manera directa. Sin embargo, más adelante demostraremos que de hecho se cumple la desigualdad $\mathfrak{d} \geq \mathrm{cf}(S_\omega)$, con lo cual el resultado que acabamos de mencionar se convierte en un corolario directo. En las siguientes secciones, estableceremos los resultados necesarios para demostrar las desigualdades que acabamos de anunciar.

3. Una ligera variante del cardinal cf(S_ω) y una cota superior para este último

Notación II.10. Sea $g \in {}^\omega\omega$ una función estrictamente creciente. Entonces, hacemos $F_0 := g(0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n := g(n) \setminus g(n-1)$. Definimos el siguiente subgrupo de S_ω:

$$P_g := \left\{ \bigcup_{n<\omega} \sigma_n \middle| (\forall n < \omega)(\sigma_n \in S_{F_n}) \right\} \cong \prod_{n<\omega} S_{F_n}.$$

Lema II.11 (Sharp-Thomas). *Sea $g \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente y supóngase que $\pi \in S_\omega$ satisface*

$$(\forall n < \omega)(\pi[g(n)], \pi^{-1}[g(n)] \subseteq g(n+1)).$$

Entonces, si $g_0, g_1 \in {}^\omega\omega$ vienen dadas por $g_i(n) = g(2n+i)$, tenemos que $\pi \in \langle P_{g_0}, P_{g_1} \rangle$.

Demostración. Tomemos g y π de acuerdo con las hipótesis. Realizaremos dos particiones en intervalos para ω. Sea $I_0 := g_0(0) = g(0)$ y, para $n \geq 1$, $I_n := g_0(n) \setminus g_0(n-1) = g(2n) \setminus g(2n-2)$. Similarmente, sea $J_0 := g_1(0) = g(1)$ y, para $n \geq 1$, $J_n := g_1(n) \setminus g_1(n-1) = g(2n+1) \setminus g(2n-1)$. Por recursión en $n < \omega$, construiremos una sucesión de permutaciones finitas $\varnothing = \varphi_0 \subseteq \varphi_1 \subseteq \cdots \varphi_n \subseteq \cdots$ que satisfagan dos condiciones: para cada $n < \omega$, requerimos que $\varphi_{n+1} \in \{\bigcup_{i\leq n} \sigma_i | (\forall i \leq n)(\sigma_i \in S_{J_i})\}$, y en segundo lugar que $(\pi\varphi_{n+1}) \restriction g_0(n) \in \{\bigcup_{i\leq n} \sigma_i | (\forall i \leq n)(\sigma_i \in S_{I_i})\}$. Para realizar el paso inductivo, supongamos que conocemos φ_n. Si $n = 0$, diremos que $J_{n-1} = \varnothing$. Aseguramos que para cada $l \in I_n \cap J_{n-1}$ se tiene que $\pi(\varphi_n(l)) \in I_n$. Para demostrar esto, notemos que dado que $\varphi_0 = \varnothing$, en el caso $n = 0$ no hay nada que probar; y supongamos ahora que $n > 0$. Sea $l \in I_n \cap J_{n-1}$. Entonces $\varphi_n(l) \in J_{n-1} = g(2n-1) \setminus g(2n-3) \subseteq g(2n) = g_0(n)$. Luego, por hipótesis, $\pi(\varphi_n(l)) \in \bigcup_{i\leq n} I_i = \bigcup_{i\leq n}(g(2i) \setminus g(2_i - 2)) = g(2n) = g_0(n)$. Además, también por hipótesis $(\pi \circ \varphi_n) \restriction g_0(n-1) \in \{\bigcup_{i\leq n-1} \sigma_i \big| (\forall i < n)(\sigma_i \in S_{I_i})\}$ y $l \neq g_0(n-1) = g(2n-2)$ (ya que $l \in I_n = g_0(n) \setminus g_0(n-1)$), entonces $\pi(\varphi_n(l)) \in g_0(n) \setminus g_0(n-1) = I_n$. Es por ello que, para construir φ_{n+1} como deseamos, basta asegurar que $\varphi_{n+1} \restriction J_n \in S_{J_n}$ (así garantizamos la primera condición) satisface $(\forall l \in I_n \cap J_n)(\pi(\varphi_{n+1}(l)) \in I_n)$, ya que los valores de $\pi \circ \varphi_{n+1}$ en J_i, para $i < n$, vienen controlados inductivamente por los pasos anteriores.

Construyamos, entonces la $\varphi_{n+1} \restriction J_n$ que cumple lo que necesitamos. Para ello, definiremos una $\Phi_n \in S_\omega$, dada de la manera siguiente:

$$\Phi_n(l) = \begin{cases} \varphi_n(l); \ l \in \operatorname{dom}(\varphi_n) \\ l; \ l \notin \operatorname{dom}(\varphi_n), \end{cases}$$

es decir, extendemos φ_n "pegándole" la identidad en $\omega \setminus \operatorname{dom}(\varphi_n)$. Sea $\psi := \pi \circ \Phi_n$. Entonces, tenemos que $\psi\left[\bigcup_{i<n} I_i\right] = \bigcup_{i<n} I_i$, debido a que en ese conjunto Φ_n vale lo mismo que φ_n y por la hipótesis inductiva. Sean $A = \{l \in I_n \big| \psi(l) \notin I_n\}$ y $B = \{l \in \omega \setminus I_n \big| \psi(l) \in I_n\}$. Dado que $\psi \in S_\omega$, es claro que $|A| = |B|$. Digamos que $A = \{a_i \big| 1 \leq i \leq t\}$ y $B = \{b_i \big| 1 \leq i \leq t\}$. Nuevamente debido a la hipótesis de inducción, ha de tenerse que, para $l \in A \cup B$, $\Phi_n(l) = l$ y por lo tanto $\psi(l) = \pi(l)$. Luego, si $b \in B$ entonces $\pi(b) \in I_n$; además, por hipótesis, dado que $\pi(b) \in I_n \subseteq g(2n)$, entonces $b = \pi^{-1}(\pi(b)) \in g(2n+1)$. Como además sabemos que $b \notin \bigcup_{i\leq n} I_i$, concluimos que $b \notin g(2n)$, por lo tanto $b \in g(2n+1) \setminus g(2n) = J_n$; luego $B \subseteq J_n \setminus I_n$. Pero también $A \subseteq I_n \setminus J_{n-1}$, debido a que $\phi_n \restriction \bigcup_{i<n} J_i \in S_{\bigcup_{i<n} J_i}$. Entonces, $A \subseteq J_n \cap I_n$ y $B \subseteq J_n \setminus I_n$. Si hacemos $\varphi_{n+1} \restriction J_n$ de tal forma que, para cada $1 \leq i \leq t$, $a_i \longmapsto b_i \longmapsto a_i$ y que deje fijo al resto de J_n, entonces $\varphi_{n+1} \restriction J_n \in S_{J_n}$. Además, si $l \in I_n \cap J_n$, entonces o bien $l \in A$, en cuyo caso $\varphi_{n+1}(l) \in B$ y por lo tanto $\pi(\varphi_{n+1}(l)) = \psi(\varphi_{n+1}(l)) \in I_n$, o bien $l \notin A$, en cuyo caso $\pi(\varphi_{n+1}(l)) = \pi(l) \in I_n$ (notemos que para $l \in J_n$, $\psi(l) = \pi(l)$ debido a que $\Phi(l) = l$). Por lo tanto φ_{n+1} satisface lo pedido.

Finalmente, sea $\varphi = \bigcup_{n<\omega} \varphi_n$. Es claro que $\varphi \in \{\bigcup_{n<\omega} \sigma_n \big| (\forall n < \omega)(\sigma_n \in S_{J_n})\}$ y que $\pi\varphi \in \{\bigcup_{n<\omega} \sigma_n \big| (\forall n < \omega)(\sigma_n \in S_{I_n})\}$. Esto es, $\varphi \in P_{g_1}$ y $\pi\varphi \in P_{g_2}$, luego $\pi = (\pi\varphi)\varphi^{-1} \in \langle P_{g_1}, P_{g_2}\rangle$ y hemos terminado. ❑

Corolario II.12. $S_\omega = \langle P_\varphi \big| \varphi \in {}^\omega\omega$ es estrictamente creciente$\rangle$.

Demostración. Para cada $\pi \in S_\omega$ definimos recursivamente una función g: $g(0) = 0$, $g(n+1) = \text{máx}(\{\pi(l) \big| l \in g(n)\} \cup \{\pi^{-1}(l) \big| l \in g(n)\}) + 1$. Entonces, por construcción se satisface que, para cada $n < \omega$, $\pi[g(n)], \pi^{-1}[g(n)] \subseteq g(n+1)$; por lo tanto el lema II.11 implicará que, si $g_0, g_1 \in {}^\omega\omega$ están dadas por $g_i(n) = g(2n+i)$, entonces $\pi \in \langle P_{g_0}, P_{g_1}\rangle \subseteq \langle P_\varphi \big| \varphi \in {}^\omega\omega$ es estrictamente creciente$\rangle$. ❑

Notación II.13.

- Para una función estrictamente creciente $\varphi \in {}^\omega\omega$, introducimos la notación
$$S^*_\varphi := \langle \pi \in S_\omega \big| \pi \leq^* \varphi \wedge \pi^{-1} \leq^* \varphi \rangle.$$
- Para $A \in [\omega]^\omega$, denotaremos por $\#_A \in {}^\omega\omega$ a la enumeración creciente de A.

El siguiente lema nos asegura que todo subgrupo de S_ω que es "suficientemente grande" (i.e. que contiene a $\mathbb{F}$) nos permite definir una familia densa por grupos.

Lema II.14. *Sea $G \leq S_\omega$ subgrupo propio tal que $\mathbb{F} \leq G$. Definimos la familia*
$$\mathscr{C}_G := \{A \in [\omega]^\omega \big| (\exists B \in [\omega]^\omega)(B \subseteq^* A \wedge S^*_{\#_B} \leq G)\}.$$
Entonces, $[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$ es una familia densa por grupos.

Demostración. Sea $A \in [\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$ y $B \in [\omega]^\omega$ con $B \subseteq^* A$. Entonces, ello significa que $(\forall C \in [\omega]^\omega)(C \subseteq^* A \Rightarrow \neg(S^*_{\#_C} \leq G))$. Así que, si tomamos un $C \subseteq^* B$ arbitrario, entonces también $C \subseteq^* A$, luego $S^*_{\#_C} \nleq G$ y ello implica que $B \notin \mathscr{C}_G$, la primera condición de densidad por grupos está satisfecha.

Ahora, sea $\omega = \bigcup\limits_{n<\omega} I_n$ una partición en intervalos finitos. Dado que, por el corolario II.12, $G \subsetneq S_\omega = \langle P_\varphi \,\big|\, \varphi \in {}^\omega\omega \text{ es estrictamente creciente}\rangle$, entonces ha de existir una $\varphi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente tal que $P_\varphi \nleq G$. Aseguramos que existen $A, B \in [\omega]^\omega$ tales que si $C = \bigcup\limits_{n\in A} I_n$ y $D = \bigcup\limits_{n\in B} I_n$ entonces $P_\varphi \leq \langle P_{\#_C}, P_{\#_D}\rangle$. En efecto, pongamos que cada $I_m = [\iota_m, \tau_m]$. De manera recursiva podemos definir una sucesión creciente de enteros r_n (y por lo tanto, una sucesión de estos intervalos I_{r_n}) tales que, para cada $n < \omega$ hay un l_n con $\tau_{r_n} < \varphi(l_n) < \iota_{r_{n+1}}$. Sea $A = \{r_{2n} \big| n < \omega\}$ y $B = \{r_{2n+1} \big| n < \omega\}$. Para cada $n < \omega$ se cumple que $\tau_{r_n} < \varphi(l_n) < \varphi(l_{n+1}) < \iota_{r_{n+2}}$.

Notemos que un elemento de $P_{\#_C}$ deja fijos a los elementos de cada I_{2n}, y permuta arbitrariamente a cada intervalo $(\tau_{r_{2n}}, \iota_{r_{2n+2}})$. Similarmente, un elemento de $P_{\#_D}$ deja fijos a los elementos de cada I_{2n+1}, y permuta arbitrariamente a cada intervalo $(\tau_{r_{2n+1}}, \iota_{r_{2n+3}})$. Definimos los siguientes grupos:
$$\begin{aligned} H := \{\sigma \in S_\omega \;\big|\; & (\forall n < \omega)(\sigma \restriction (\varphi(l_{2n+1}) \setminus \varphi(l_{2n})) \in S_{\varphi(l_{2n+1})\setminus\varphi(l_{2n})}) \\ & \wedge (\forall n < \omega)(\sigma \restriction (\varphi(l_{2n+2}) \setminus \varphi(l_{2n+1})) = \mathrm{id}_{\varphi(l_{2n+2})\setminus\varphi(l_{2n+1})})\}; \\ H' := \{\sigma \in S_\omega \;\big|\; & (\forall n < \omega)(\sigma \restriction (\varphi(l_{2n+2}) \setminus \varphi(l_{2n+1})) \in S_{\varphi(l_{2n+2})\setminus\varphi(l_{2n+1})})\} \\ & \wedge (\forall n < \omega)(\sigma \restriction (\varphi(l_{2n+1}) \setminus \varphi(l_{2n})) = \mathrm{id}_{\varphi(l_{2n+1})\setminus\varphi(l_{2n})})\}. \end{aligned}$$
Entonces, dado que, para cada $n < \omega$, se satisface que $\varphi(l_{2n+1}) \setminus \varphi(l_{2n}) \subseteq (\tau_{r_{2n}}, \iota_{r_{2n+2}})$ y $\varphi(l_{2n+2}) \setminus \varphi(l_{2n+1}) \subseteq (\tau_{r_{2n+1}}, \iota_{r_{2n+3}})$, entonces resulta claro que $H \subseteq P_{\#_C}$ y $H' \subseteq P_{\#_D}$. Pero $P_\varphi \subseteq \langle H, H'\rangle$, debido

a que la partición determinada por los intervalos $\varphi(n+1) \setminus \varphi(n)$ es un refinamiento de aquella que viene dada por los intervalos $\varphi(r_{n+1}) \setminus \varphi(r_n)$, y H mueve arbitrariamente aquellos de estos últimos intervalos que son impares (dejando fijos al resto), mientras que H' mueve los demás intervalos (los impares, dejando fijos a los pares). Luego cada elemento de P_φ se puede ver como el producto de los dos elementos adecuados de H y H' (tomando $\sigma \in H$ tal que σ restringido a los intervalos pares sea como el elemento dado de P_φ, y $\pi \in H$ tal que su comportamiento en los intervalos impares sea como dicho elemento, entonces el elemento que arbitrariamente elegimos en P_φ será el producto $\sigma\pi$). Esto implica que $P_\varphi \leq \langle P_{\#_C}, P_{\#_D}\rangle$.

Dado que $P_\varphi \not\leq G$, entonces se tiene que o bien $P_{\#_C} \not\leq G$, o bien $P_{\#_D} \not\leq G$, supongamos sin perder generalidad el primer caso. Aseguramos que en este caso, $C \in [\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$: pues de lo contrario, quiere decir que existe un $T \in [\omega]^\omega$ tal que $T \subseteq^* C$ y $S^*_{\#_T} \leq G$. Obsérvese que $P_{\#_T} \leq S^*_{\#_T}$ (pues si $\sigma \in P_{\#_T}$, entonces para $\#_T(i) \leq n < \#_T(i+1)$ se tiene que $\sigma(n) < \#_T(i+1)$, de modo que, siendo $\#_T$ estrictamente creciente, concluimos que $\sigma(n) < \#_T(n)$ y por lo tanto $\sigma \leq^* \#_T$, el mismo razonamiento nos muestra que $\sigma^{-1} \leq^* \#_T$), luego $P_{\#_T} \subseteq G$. Notemos también que $P_{\#_C} \leq \langle P_{\#_T}, \mathbb{F}\rangle$, pues si $\sigma \in P_{\#_C}$ entonces, dado que $C =^* T$, ha de haber un $\tau \in P_{\#_T}$ tal que $\tau =^* \sigma$. Dado que por hipótesis $\mathbb{F} \leq G$, se sigue de lo anterior que $P_{\#_C} \subseteq \langle P_{\#_T}, \mathbb{F}\rangle \subseteq G$, lo cual contradice lo supuesto. De manera enteramente análoga tenemos que si $P_{\#_D} \not\leq G$, se concluye que $D \in [\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$. Dado que tanto C como D son uniones de una cantidad infinita de los intervalos I_n, hemos terminado de demostrar que $[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_G$ es una familia densa por grupos. ❑

Definición II.15. Dado un grupo $G \leq S_\omega$ que no es finitamente generado, definimos el invariante cardinal $\mathrm{cf}^*(G)$ como el mínimo λ tal que existe una cadena estricta de subgrupos propios $\langle G_\xi \big| \xi < \lambda\rangle$ de tal forma que para cada $\psi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, hay un $\xi < \lambda$ tal que $S^*_\psi \leq G_\xi$ y con $G = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$.

Teorema II.16 (Thomas).

(*i*) $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.
(*ii*) $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.
(*iii*) *Es consistente con* ZFE *que* $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

Demostración.

(*i*) Es claro de la definición que $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$. Para probar la otra desigualdad, sea $\mathscr{F} = \{\varphi_\xi \big| \xi < \mathfrak{d}\}$ una familia dominante. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada φ_ξ es estrictamente creciente (en caso contrario, reemplazamos cada φ_ξ por $\psi_\xi(n) = \sup(\{\varphi_\xi(m) \big| m \leq n\} \cup \{\psi_\xi(n-1)\}) + 1$ y tendremos que $\varphi_\xi \leq^* \psi_\xi$). Ahora bien, notemos que dados $\xi, \eta < \mathfrak{d}$ existe un $\varepsilon < \mathfrak{d}$ tal que $\varphi_\xi, \varphi_\eta \leq^* \varphi_\varepsilon$ (basta elegir φ_ε que domine a la función $n \mapsto \text{máx}\{\varphi_\xi(n), \varphi_\eta(n)\}$).

Para cada $\xi < \mathfrak{d}$ definamos $G_\xi := \langle \pi \in S_\omega \big| (\exists \eta < \xi)(\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi_\eta) \rangle$. Probaremos que $\langle G_\xi \big| \xi < \mathfrak{d} \rangle$ es una cadena estricta de subgrupos propios como en la definición de $\mathrm{cf}^*(S_\omega)$. En primer lugar, $S_\omega = \bigcup_{\xi < \mathfrak{d}} G_\xi$: la parte $\supseteq$ es evidente, para probar la parte $\subseteq$ de esta igualdad notemos que para $\pi \in S_\omega$ han de haber un $\xi < \mathfrak{d}$ con $\pi \leq^* \varphi_\xi$ y un $\eta < \mathfrak{d}$ con $\pi^{-1} \leq^* \varphi_\eta$, luego eligiendo $\varepsilon < \mathfrak{d}$ con $\varphi_\xi, \varphi_\eta \leq^* \varphi_\varepsilon$ tenemos que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi_\varepsilon$ y por lo tanto $\pi \in G_{\varepsilon+1}$.

Ahora, debemos de ver que los G_ξ son subgrupos propios de S_ω. Supongamos, por el contrario, que para cierto $\theta < \mathfrak{d}$ se tiene que $G_\theta = S_\omega$. Sea $d \in {}^\omega\omega$ dada por $d(n) = 2n$. Sea C la cerradura del conjunto $\{\varphi_\alpha \big| \alpha < \theta\} \cup \{d\}$ bajo tomar composiciones (i.e. si definimos $C_0 := \{\varphi_\alpha \big| \alpha < \theta\} \cup \{d\}$, y recursivamente $C_{n+1} := \{f \circ g \big| f, g \in C_n\}$, entonces $C = \bigcup_{n<\omega} C_n$). Dado que $\mathfrak{d} \geq \omega_1$, tenemos que $|C| = \omega|C_0| = \omega\theta < \mathfrak{d}$. Asimismo, notemos que cada $f \in C$ es estrictamente creciente. Afirmamos que para cada $g \in G_\theta = S_\omega$ hay un $f \in C$ de tal forma que $g \leq^* f$. Para demostrar esta afirmación, bastará ver que si $h, g \in G_\theta$ y $f, f' \in C$ son tales que $g \leq^* f$ y $h \leq^* f'$, entonces $g \circ h \leq^* f \circ f'$ (pues si $g \in G_\theta$ entonces por definición $g = g_1 \cdots g_n$ de tal forma que para cada $1 \leq i \leq n$, $g_i \in S_\omega$ y hay un $\alpha_i < \theta$ con $g_i \leq^* \varphi_{\alpha_i}$, luego tendremos que $g = g_1 \cdots g_n \leq^* \varphi_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \varphi_{\alpha_n} \in C$). Así, sea $m < \omega$ tal que para $n \geq m$ se cumple $g(n) \leq f(n)$ y $h(n) \leq f'(n)$. Dado que $h \in S_\omega$, hay un $m' > m$ tal que para cada $n \geq m'$ se tiene que $h(n) \geq m$ (basta tomar $m' := \text{máx}\{m, h^{-1}(0), h^{-1}(1), \ldots, h^{-1}(m)\} + 1$). De esta forma, tenemos que $n \geq m'$ implica que $g(h(n)) \leq f(h(n)) \leq f(f'(n))$, la última desigualdad debido a que $h(n) \leq f'(n)$ y f es estrictamente creciente. Así, hemos demostrado que para $g \in G_\theta = S_\omega$ existe $f \in C$ con $g \leq^* f$, es decir, que en cierto modo C domina a $G_\theta = S_\omega$. Dado que $|C| < \mathfrak{d}$, la familia C no puede ser dominante, luego hay un $\varphi \in {}^\omega\omega$ tal que para cada $f \in C$ no es cierto que $\varphi \leq^* f$. Sin perder generalidad, podemos suponer φ estrictamente creciente y tal que $|\omega \setminus \mathrm{ran}(\varphi)| = \omega$. Luego, podemos construir $g \in S_\omega$ tal que para $n < \omega$, $g(2n) = \varphi(n)$ (ya que la suposición nos permite estipular que $g \upharpoonright \{2n+1 \big| n < \omega\} : \{2n+1 \big| n < \omega\} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \omega \setminus \mathrm{ran}(\varphi)$). Debido a que C domina a $G_\theta = S_\omega$, necesariamente hay un $f \in C$ con $g \leq^* f$, lo cual implica que, para n suficientemente grande, $\varphi(n) = g(2n) \leq f(2n) = f(d(n))$ por la definición de d, pero entonces $\varphi \leq^* f \circ d \in C$, lo cual es una contradicción al hecho de que $(\forall g \in C)(\varphi \not\leq^* g)$. Por lo tanto, los G_ξ para $\xi < \mathfrak{d}$ son subgrupos propios de S_ω.

Finalmente, para cada $\varphi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, tenemos que por definición $S^*_\varphi = \langle \pi \in S_\omega \big| \pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi \rangle$. Como existe un $\xi < \mathfrak{d}$ tal que $\varphi \leq^* \varphi_\xi$, concluimos que $S^*_\varphi \subseteq G_{\xi+1}$. Así, la cadena de subgrupos que hemos construido cumple con lo que tiene que cumplir, y por lo tanto $\mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$.

(*ii*) Sea $\lambda = \mathrm{cf}^*(S_\omega)$ y $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$ la unión de una cadena estricta de subgrupos propios tal que para cada $\varphi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente hay un $\xi < \lambda$ con $S^*_\varphi \leq G_\xi$. Dado que $\lambda = \mathrm{cf}^*(S_\omega) \geq \mathrm{cf}(S_\omega) > \omega$, podemos suponer que $\mathbb{F} \leq G_0$ (ya que $\mathbb{F}$ es de cardinalidad ω). La familia $[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_{G_\xi}$, construida tal como en el lema II.14, es una familia densa por grupos para cada $\xi < \lambda$.

Ahora observemos que $[\omega]^\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathscr{C}_{G_\xi}$. En efecto, si tomamos $A \in [\omega]^\omega$ entonces debemos de notar que hay a lo más una cantidad numerable de funciones $f \in {}^\omega\omega$ tales que $f \leq^* \#_A$. Por otra parte, para cada $\pi \in S_\omega$ tal que $\pi \leq^* \#_A$ existe un $\xi_\pi < \lambda$ tal que $\pi \in G_{\xi_\pi}$. Habiendo una cantidad a lo más numerable de tales π, entonces podemos elegir $\xi < \lambda$ que quede por arriba de todos los ξ_π. Luego, si $\pi \in S_\omega$ es tal que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \#_A$, entonces $\pi \in G_\xi$. Por lo tanto, $S^*_{\#_A} = \langle \pi \in S_\omega \big| \pi, \pi^{-1} \leq^* \#_A \rangle \subseteq G_\xi$, lo cual significa que $A \in \mathscr{C}_{G_\xi}$ y por lo tanto $[\omega]^\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathscr{C}_{G_\xi}$. Por ello, $\bigcap_{\xi<\lambda}([\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_{G_\xi}) = [\omega]^\omega \setminus \left(\bigcup_{\xi<\lambda} \mathscr{C}_{G_\xi}\right) = [\omega]^\omega \setminus [\omega]^\omega = \varnothing$. Luego, $\{[\omega]^\omega \setminus \mathscr{C}_{G_\xi} \big| \xi < \lambda\}$ es una familia de familias densas por grupos con intersección vacía, lo cual de inmediato implica que $\mathfrak{g} \leq \lambda = \mathrm{cf}^*(S_\omega)$.

(*iii*) Sea $V \vDash \mathsf{AM} + \neg\mathsf{HC}$. Trabajando dentro de V, dotamos al conjunto $\{0, 1\}$ de una medida $\mu : \wp(\{0, 1\}) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$ (sólo hay una medida que satisface esta condición). Sea $\mathscr{F}$ la mínima σ-álgebra de subconjuntos de ${}^{\omega_1}\{0, 1\}$ que contiene a cada uno de los conjuntos $\{f \in {}^{\omega_1}\{0, 1\} \big| f(\alpha) = 0\}$, para $\alpha < \omega_1$. Consideraremos la medida producto en $\mathscr{F}$, y sea $\mathcal{N}$ el ideal de elementos de $\mathscr{F}$ que tienen medida 0. Entonces, $\mathbb{B} := \mathscr{F}/\mathcal{N}$ es un álgebra booleana, el álgebra de medida de ${}^{\omega_1}\{0, 1\}$.

Si G es un filtro $\mathbb{B}$-genérico, entonces $V[G] \vDash (\omega_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}) \wedge (\mathrm{cf}(S_\omega) = \omega_1)$ (la demostración puede encontrarse en [**18**, Theorem 1.6])

Ahora bien, debido al lema 0.21, existe una $\mathfrak{c}$-escala en $V[G]$, digamos que $\langle \varphi_\xi \big| \xi < \mathfrak{c} \rangle$. Veamos que $V[G] \vDash \mathrm{cf}^*(S_\omega) = \mathfrak{c}$: si suponemos por el contrario que $\lambda = \mathrm{cf}^*(S_\omega) < \mathfrak{c}$, entonces S_ω se puede ver como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$ con la propiedad de que para cada $\psi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, hay un $\xi < \lambda$ con $S^*_\psi \subseteq G_\xi$. Al igual que en la parte (*i*), podemos suponer que cada φ_ξ es estrictamente creciente. Luego, para cada $\xi < \mathfrak{c}$ hay un $\eta_\xi < \lambda$ tal que $S^*_{\varphi_\xi} \leq G_{\eta_\xi}$. Como únicamente hay $\lambda < \mathfrak{c}$ distintos valores para η_ξ, mientras que hay $\mathfrak{c}$ distintos valores de ξ, por el principio de la pichonera ha de haber un $\eta < \lambda$ tal que para $\mathfrak{c}$ distintos valores de ξ se tiene que $\eta_\xi = \eta$. Esto es, hay un $X \subseteq \mathfrak{c}$ no acotado tal que $(\forall \xi \in X)(S^*_{\varphi_\xi} \leq G_\eta)$. Sea $\pi \in S_\omega$, entonces hay $\xi, \varepsilon < \mathfrak{c}$ tales que $\pi \leq^* \varphi_\xi$ y $\pi^{-1} \leq^* \varphi_\varepsilon$. Siendo X un conjunto no acotado, hay un $\zeta \in X$ tal que $\zeta > \max\{\xi, \varepsilon\}$. Luego $\varphi_\xi, \varphi_\varepsilon \leq^* \varphi_\zeta$, lo cual implica que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi_\zeta$ y por lo tanto, como

$\zeta \in X$, $\pi \in S^*_{\varphi_\zeta} \subseteq G_\eta$. Entonces, $S_\omega \subseteq G_\eta$, lo cual es contradictorio. Por ello concluimos que $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = 2^\omega$.

❑

La parte (i) del teorema anterior es crucial: estamos encontrando una cota superior para el invariante cardinal $\mathrm{cf}(S_\omega)$. El resto de este capítulo está fundamentalmente dedicado a encontrar una cota inferior para dicho cardinal.

Lema II.17 (Sharp-Thomas). *Supóngase que* $\langle G_\xi \big| \xi < \lambda\rangle$ *es una cadena estricta de subgrupos propios tal que* $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$ *y para cada* $g \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente existe un* $\xi < \lambda$ *con* $P_g \leq G_\xi$. *Entonces, para cada* $\varphi \in {}^\omega\omega$ *estrictamente creciente, existe un* $\xi < \lambda$ *tal que* $S^*_\varphi \leq G_\xi$. *En particular,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \lambda$.

Demostración. Sea $\varphi \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente. Para cada $t < \omega$, definiremos $\varphi_t \in {}^\omega\omega$ dada por $\varphi_t(n) = \varphi(n+t)$. Además, recursivamente definiremos $f_t \in {}^\omega\omega$: $f_t(0) = 0$; y $f_t(n+1) := \min\{m > f_t(n) \big| \varphi_t[f_t(n)] \in m\} = \max(\{f_t(n)\} \cup \varphi_t[f_t(n)]) + 1$. Afirmamos que para cada $\pi \in S_\omega$ tal que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi$, debe de existir un $t < \omega$ tal que $(\forall l < \omega)(\pi(l), \pi^{-1}(l) \leq \varphi_t(l))$. En efecto, dado que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi$ entonces hay un $m < \omega$ tal que para todo $n > m$ se tiene que $\pi(n), \pi^{-1}(n) \leq \varphi(n)$. Siendo φ estrictamente creciente, es posible encontrar un $t > m$ tal que $\varphi(t) \geq \pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(m), \pi^{-1}(0), \pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(m)$. Entonces, tenemos que para cada $n < \omega$ se cumple que $\pi(n), \pi^{-1}(n) \leq \varphi(t+n) = \varphi_t(n)$ (si $n \leq m$, esto se debe a que $\pi(n), \pi^{-1}(n) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t+n)$; mientras que si $n > m$ entonces $\pi(n), \pi^{-1}(n) \leq \varphi(n) \leq \varphi(t+n)$).

Así, tomemos un $\pi \in S_\omega$ tal que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi$ y $t < \omega$ tal que para cada $l < \omega$ se satisfaga $\pi(l), \pi^{-1}(l) \leq \varphi_t(l)$. Luego, para cada $n < \omega$, si $l \in f_t(n)$ entonces $\pi(l), \pi^{-1}(l) \leq \varphi_t(l) \in f_t(n+1)$. Esto significa que se cumplen hipótesis como las del lema II.11, lo cual implica que $\pi \in \langle P_{f'_t}, P_{f''_t}\rangle$, en donde $f'_t(n) = f_t(2n)$ y $f''_t(n) = f_t(2n+1)$. Por hipótesis, para cada $t < \omega$ hay un $\alpha_t < \lambda$ tal que $P_{f'_t}, P_{f''_t} \subseteq G_{\alpha_t}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que λ es un cardinal regular, por lo tanto hay un $\alpha < \lambda$ tal que para cada $t < \omega$ se tiene que $\alpha_t < \alpha$. Así, para todo $\pi \in S_\omega$ tal que $\pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi$, hay un $t < \omega$ tal que $\pi, \pi^{-1} \in \langle P_{f'_t}, P_{f''_t}\rangle \subseteq G_{\alpha_t} \subseteq G_\alpha$ y eso implica que $S^*_\varphi = \langle \pi \in S_\omega \big| \pi, \pi^{-1} \leq^* \varphi\rangle \leq G_\alpha$ ❑

Notación II.18.

- Sea $A \in [\omega]^\omega$. Para $\pi \in S_\omega$, definiremos la permutación $\pi^A \in S_\omega \restriction A = S_A$ (la permutación **inducida** en A por π) de modo tal que $(\forall n < \omega)(\pi^A(\#_A(n)) := \#_A(\pi(n)))$.

- Para $\Gamma \leq S_\omega$, definiremos el subgrupo $\Gamma^A \leq S_A$ (el subgrupo **inducido** por Γ en S_A) como $\Gamma^A := \{\pi^A \big| \pi \in \Gamma\}$. Este subgrupo no es otra cosa que el subgrupo de S_A que se corresponde con Γ bajo el isomorfismo entre S_ω y S_A que viene inducido por la biyección $n \mapsto a_n$ entre ω y A.

Lema II.19. *Sea $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$ y expresemos a S_ω como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios de longitud λ, $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi$. Supóngase que existe una mitad A de ω tal que para cada $g \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, hay un $\xi < \lambda$ tal que $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A$. Entonces,* $\mathrm{cf}^*(S_\omega) = \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Demostración. Fijemos una mitad A que cumple con lo enunciado en la hipótesis. Notemos que $S_A = S_\omega \upharpoonright A = \bigcup_{\xi<\lambda} \Gamma_\xi \upharpoonright A$. Además, se tiene que cada $\Gamma_\xi \upharpoonright A$ debe de ser un subgrupo propio de S_A: pues de lo contrario, habría un $\xi < \lambda$ tal que $S_A = \Gamma_\xi \upharpoonright A$, luego por el lema II.6 habría de existir un $\pi \in S_\omega$ tal que $S_\omega = \langle \Gamma_\xi, \pi \rangle$, lo cual contradice la elección de $\Gamma_{\xi+1}$ y de λ.

Dado que hay una biyección entre ω y A, es posible expresar a S_ω como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios $S_\omega = \bigcup_{\xi<\lambda} G_\xi$, escogiendo para cada $\xi < \lambda$ el subgrupo G_ξ tal que $G_\xi^A = \Gamma_\xi \upharpoonright A$. Así, para cada $g \in {}^\omega\omega$ estrictamente creciente, por hipótesis existe un $\xi < \lambda$ tal que $P_g^A \leq \Gamma_\xi \upharpoonright A = G_\xi^A$. Pero esto implica, de manera inmediata, que $P_g \leq G_\xi$. Entonces por el lema II.17, tenemos que $\mathrm{cf}^*(S_\omega) \leq \lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Con esto, el teorema II.16 parte (*i*), nos permite concluir que $\mathrm{cf}(S_\omega) = \mathrm{cf}^*(S_\omega)$. ❑

4. Una cota inferior para $\mathrm{cf}(S_\omega)$

Lo que queremos conseguir con todo esto es demostrar que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$. El teorema II.16 partes (*i*) y (*ii*) nos asegura que en todo modelo de ZFE se satisface $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$ y $\mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega)$. Así, tenemos dos casos posibles: el primero de ellos es que se cumpla $\mathrm{cf}(S_\omega) = \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, caso en el cual no hay nada que hacer y directamente se concluye que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}^*(S_\omega) = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Sin embargo, la parte (*iii*) del teorema II.16 nos advierte de que puede darse el caso en que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$. Así pues, en adelante supondremos que se cumple este último caso y demostraremos que bajo esta suposición también se tiene que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Construcción II.20. Expresemos a S_ω como la unión de una cadena estricta de subgrupos propios, $S_\omega = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, con $\lambda = \mathrm{cf}(S_\omega)$. Fijemos una mitad $A \subseteq \omega$. El lema II.19 asegura que, dado que $\mathrm{cf}(S_\omega) < \mathrm{cf}^*(S_\omega)$, habrá de existir una función estrictamente creciente $\psi \in {}^\omega\omega$ tal que $(\forall \alpha < \lambda)(P_\psi^A \nleq \Gamma_\alpha \upharpoonright A)$. Construiremos una familia $\{D_\alpha \big| \alpha < \lambda\}$ de conjuntos densos por grupos cuya intersección sea vacía.

Definamos $k_0 := \psi(0)$ y, para cada $n \geq 1$, $k_n := |\psi(n) \setminus \psi(n-1)|$. Observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\langle k_n \big| n < \omega\rangle$ es estrictamente creciente. Esto se debe a que, si $\varphi \in {}^\omega\omega$ es una función creciente tal que cada $\varphi(n) \setminus \varphi(n-1)$ pueda escribirse como una unión de algunos de los $\psi(k) \setminus \psi(k-1)$, entonces es inmediato que $P^A_\psi \leq P^A_\varphi$, luego para $\alpha < \lambda$ también tenemos que $P^A_\varphi \nsubseteq \Gamma_\alpha(A)$, así que podemos cambiar ψ por φ. Realizemos una partición de A en ω "intervalos" A_n de longitud k_n, es decir, A_0 contiene los primeros k_0 elementos de A, A_1 contiene los siguientes k_1 elementos, y así sucesivamente. Para cada $n < \omega$, sea $A_n = \{a_{1,n}, \ldots, a_{k_n,n}\}$ la enumeración creciente del intervalo A_n.

Por otro lado, podemos dividir a ω en ω subconjuntos infinitos B_m, y después partir cada B_m en ω subconjuntos finitos $F^m_1, F^m_2, \ldots$, con cada F^m_n de tamaño k_n. De esta forma, hemos conseguido una familia $\{F^m_n \big| n < \omega, m < \omega\}$ tal que para $m < \omega$, $|F^m_n| = k_n$; $\langle m, n\rangle \neq \langle u, v\rangle \Rightarrow F^m_n \cap F^u_v = \varnothing$, y $\bigcup\limits_{m,n<\omega} F^m_n = \omega$. Para cada $m, n < \omega$ sea $F^m_n = \{x^m_{1,n}, \ldots x^m_{k_n,n}\}$ la enumeración creciente de F^m_n. Ahora, para cada $Y \in [\omega]^\omega$ elegiremos una permutación $\Pi_Y \in S_\omega$ de la manera siguiente: comencemos por enumerar crecientemente $Y = \{y_j \big| j < \omega\}$, y exijamos que $(\Pi_Y \upharpoonright A)(a_{i,n}) = x^{y_n}_{i,n}$. De esta forma, tendremos que $\Pi_Y[A_n] = F^{y_n}_n$. Para $\Pi_Y \upharpoonright (\omega \setminus A)$, podemos permitir que sea cualquier biyección entre $\omega \setminus A$ y $\omega \setminus \Pi_Y[A] = \omega \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} F^{y_n}_n$.

Para cada $\alpha < \lambda$, definiremos el conjunto

$$\begin{aligned} D_\alpha := \{Z \in [\omega]^\omega \;\Big|\; & (\exists X =^* Z)(\exists \beta < \lambda)(\exists h \in \Gamma_\beta)(\exists \delta \geq \alpha, \beta) \\ & (\exists g \in P^A_\psi \setminus \Gamma_\delta \upharpoonright A)(\forall Y \subseteq X)((\mathit{\Pi}_Y^{-1} h \Pi_Y) \upharpoonright A = g)\} \end{aligned}$$

Verifiquemos que $\bigcap\limits_{\alpha<\lambda} D_\alpha = \varnothing$. Supongamos que $Z \in \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} D_\alpha$. Esto quiere decir que para cada $\alpha < \lambda$ existen $X_\alpha =^* Z$, $\beta_\alpha < \lambda$, $h_\alpha \in \Gamma_\beta$, $\delta_\alpha \geq \text{máx}\{\alpha, \beta_\alpha\}$ y $g_\alpha \in P^A_\psi \setminus (\Gamma_{\delta_\alpha} \upharpoonright A)$ tales que para cualquier $Y \subseteq X_\alpha$, se tiene que $(\mathit{\Pi}_Y^{-1} h_\alpha \Pi_Y) \upharpoonright a = g_\alpha$. Hay tan sólo ω subconjuntos de ω que son casi iguales a Z, pero debemos elegir λ conjuntos X_α. Entonces, por el principio de la pichonera, siendo λ un cardinal regular, hay un X_α que se repite λ veces. Esto significa que existe un $X =^* Z$ y un subconjunto no acotado $I \subseteq \lambda$ tal que $(\forall \alpha \in I)(X_\alpha = X)$. Dado que $\Pi_X \in S_\omega = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \Gamma_\alpha$, debe de existir un $\alpha \in I$ tal que $\Pi_X \in \Gamma_\alpha$. Entonces, dado que $\alpha, \beta_\alpha \leq \delta_\alpha$, tenemos que $\Pi_X \in \Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_{\delta_\alpha}$ y que $h_\alpha \in \Gamma_{\beta_\alpha} \subseteq \Gamma_{\delta_\alpha}$, luego $\mathit{\Pi}_X^{-1} h_\alpha \Pi_X \in \Gamma_{\delta_\alpha}$. Pero entonces podemos concluir que $g_\alpha = (\mathit{\Pi}_X^{-1} h_\alpha \Pi_X \in \Gamma_{\delta_\alpha}) \upharpoonright A \in \Gamma_{\delta_\alpha} \upharpoonright A$, lo cual es contradictorio.

La idea es mostrar que cada uno de los D_α de la construcción anterior es una familia densa por grupos. Esto nos dará el resultado deseado, pues tendremos entonces que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Notación II.21. Dada una mitad C de ω, denotaremos por $B(A, C)$ al conjunto $\bigcup\limits_{n\in C} A_n$, en donde los A_n son como en la construcción II.20.

Lema II.22. *Sea $C \subseteq \omega$ una mitad y $B = B(A, C)$. Entonces, existen $\pi_0, \pi_1 \in S_A$ tales que $P_\psi^A \leq \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_0, \pi_1 \rangle$.*

Demostración. Sean C_0, C_1 tales que $C_0 \cup C_1 = \omega$, $C_0 \cap C_1 = C$ y tanto $C_0 \setminus C$ como $C_1 \setminus C$ son infinitos. Sean también $B_0 = B(A, C_0)$ y $B_1 = B(A, C_1)$. Notemos que

$$P_\psi^A = \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B_0}(P_\psi^A), \mathrm{stab}_{A\setminus B_1}(P_\psi^A) \rangle.$$

En efecto, la parte $\supseteq$ de la igualdad de arriba se tiene por definición. Para ver la parte $\subseteq$, sea $\sigma \in P_\psi^A$. Nótese que entonces, σ ha de estabilizar (conjuntistamente) a cada A_n, luego también estabiliza a B_0 y a B_1. Es por ello que puedo definir π de tal forma que $\pi \restriction B_0 = \sigma \restriction B_0$, y $\pi \restriction (A \setminus B_0) = \mathrm{id}_{A\setminus B_0}$; y similarmente defino π' de tal forma que $\pi' \restriction (A \setminus B_0) = \sigma \restriction (A \setminus B_0)$ y $\pi' \restriction B_0 = \mathrm{id}_{B_0}$. Entonces, tendremos que $\pi \in \mathrm{stab}_{A\setminus B_0}(P_\psi^A)$, y que (dado que $A \setminus B_1 \subseteq B_0$) $\pi' \in \mathrm{stab}_{A\setminus B_1}(P_\psi^A)$, y $\sigma = \pi\pi'$, con lo cual hemos terminado.

En virtud de la observación anterior, basta encontrar $\pi_0, \pi_1 \in S_A$ tales que

$$\mathrm{stab}_{A\setminus B_0}(P_\psi^A) \leq \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_0 \rangle$$

y

$$\mathrm{stab}_{A\setminus B_1}(P_\psi^A) \leq \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_1 \rangle.$$

Encontremos, pues, π_0 que cumpla esta condición, y la construcción de π_1 será enteramente análoga. Sean $C = \{l_n \big| n < \omega\}$ y $C_0 = \{l_n^0 \big| n < \omega\}$ sendas enumeraciones crecientes. De esta forma, tenemos que $(\forall n < \omega)(n \leq l_n^0 \leq l_n)$. Para cada $n < \omega$, elijamos un subconjunto $\overline{A_{l_n}} \subseteq A_{l_n}$ tal que $|\overline{A_{l_n}}| = k_{l_n^0}$, lo cual tiene sentido pues la sucesión de la construcción II.20 $k_n = |A_n|$ era creciente. Escojamos cualquier π_0 de tal suerte que, para cada $n < \omega$, π_0 sea una biyección desde $\overline{A_{l_n}}$ sobre $A_{l_n^0}$ (ambas son de cardinalidad $k_{l_n^0}$), y además que sea una biyección desde $A \setminus \bigcup_{n<\omega} \overline{A_{l_n}}$ sobre $A \setminus \bigcup_{n<\omega} A_{l_n^0}$ (ambas son de cardinalidad ω). Entonces, sólo resta demostrar que, dado $h \in \mathrm{stab}_{A\setminus B_0}(P_\psi^A)$, se tiene que $h \in \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_0 \rangle$. Pero si $h \in \mathrm{stab}_{A\setminus B_0}(P_\psi^A)$ entonces h deja fijos a los puntos de $A \setminus B_0 = A \setminus \bigcup_{n\in C_0} A_n = A \setminus \bigcup_{n<\omega} A_{l_n^0}$. Así, definamos g de tal suerte que $g \restriction (A \setminus \bigcup_{n<\omega} \overline{A_{l_n}}) = \mathrm{id}_{A\setminus \bigcup_{n<\omega} \overline{A_{l_n}}}$, mientras que, para cada $n < \omega$, $g \restriction \overline{A_{l_n}} = (\pi_0^{-1} \restriction A_{l_n^0})(h \restriction A_{l_n^0})(\pi_0 \restriction \overline{A_{l_n}})$ (esto tiene sentido ya que, al ser $h \in P_\psi^A$, h estabiliza conjuntistamente a cada intervalo A_n). De esta forma, para $a \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\pi_0 g\pi_0^{-1})(a) &= \pi_0\left(\begin{cases}\pi_0^{-1}(a); & \pi_0^{-1}(a) \in A \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} \overline{A_{l_n}} \\ \pi_0^{-1}(h(\pi_0(\pi_0^{-1}(a)))); & \pi_0^{-1}(a) \in \overline{A_{l_n}}\end{cases}\right) \\ &= \pi_0\left(\begin{cases}\pi_0^{-1}(a); & a \in A \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} A_{l_n^0} \\ \pi_0^{-1}(h(a)); & a \in A_{l_n^0}\end{cases}\right) \\ &= \begin{cases}\pi_0(\pi_0^{-1}(a)); & a \in A \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} A_{l_0^n} \\ \pi_0(\pi_0^{-1}(h(a))); & a \in A_{l_0^n}\end{cases} \\ &= \begin{cases}a; & a \in A \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} A_{l_0^n} \\ h(a); & a \in A_{l_0^n}\end{cases} = h(a).\end{aligned}$$

Ahora sólo resta notar que g deja fijos a los puntos de $A \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} \overline{A_{l_n}} \supseteq A \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} A_{l_n} = A \setminus \bigcup\limits_{n\in C} A_n = A \setminus B$. Luego $g \in \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A)$, y por lo tanto $h = \pi_0 g \pi_0^{-1} \in \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_0\rangle$. Esto demuestra el lema. ❏

Corolario II.23. *Si $C \subseteq \omega$ es una mitad, entonces $(\forall\alpha < \lambda)(\mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A) \nleq \Gamma_\alpha \restriction A)$, en donde $B = B(A, C)$.*

Demostración. Supongamos que para algún α tenemos que $\mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A) \leq \Gamma_\alpha \restriction A$. Por el lema anterior, hay $\pi_0, \pi_1 \in S_A$ tales que $P_\psi^A \leq \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_0, \pi_1\rangle$. Sea $\beta < \lambda$ tal que $\pi_0, \pi_1 \in \Gamma_\beta \restriction A$. Luego, tendremos que

$$P_\psi^A \leq \langle \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A), \pi_0, \pi_1\rangle \leq \langle \Gamma_\alpha \restriction A, \Gamma_\beta \restriction A\rangle = \Gamma_{\text{máx}\{\alpha,\beta\}} \restriction A.$$

Esto contradice la manera como elegimos ψ en la construcción II.20. ❏

Lema II.24. *Para todas las particiones $Z = \{Z_n \big| n < \omega\}$ de ω en intervalos finitos, hay un $h \in S_\omega$ y una mitad $C \subseteq \omega$ tal que, si $B = B(A, C)$, entonces para toda $g \in \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A)$ existe un $E_g \subseteq \omega$ tal que $(\forall Y \subseteq \bigcup\limits_{n\in E} Z_n)((\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A = g)$.*

Demostración. Supongamos sin perder generalidad que $(\forall n < \omega)(\text{máx}(Z_n) + 1 = \text{mín}(Z_{n+1})$. Elegiremos por recursión números c_n, l_n para $n < \omega$ de la siguiente manera: $c_0 := \text{mín}(Z_0) = 0$ y $l_0 = k_0! = k_{c_0}!$, después $c_1 := \text{mín}(Z_{l_0})$ y $l_1 := k_{c_0}! + k_{c_0}!k_{c_1}! = l_0 + k_{c_0}!k_{c_1}!$. En general, $c_{n+1} := \text{mín}(Z_{l_n})$ y $l_{n+1} := l_n + k_{c_0}! \cdots k_{c_{n+1}}!$. Entonces hacemos $C = \{c_n \big| n < \omega\}$. Siendo los k_n una sucesión creciente, es claro que $C \subseteq \omega$ será una mitad.

Ahora definiremos a la permutación h por pedacitos, especificando lo que debe valer $h \restriction F_n^m$ para cada $n, m < \omega$. En primer lugar, si $n \notin C$ o $m < n$ entonces estipulamos que $h \restriction F_n^m = \mathrm{id}_{F_n^m}$. De esta forma, nos basta definir los $h \restriction F_{c_n}^m$ para $c_n \leq m$, pues para cada $n < \omega$ tenemos que, si $m < c_{n+1}$ (i.e. si $m \in \bigcup_{m<l_n} Z_m$), entonces $h \restriction F_{c_{n+1}}^m = \mathrm{id}_{F_{c_{n+1}}^m}$. En verdad, iremos definiendo los pedacitos restantes $h \restriction F_n^m$ de manera recursiva, primero para $c_0 \leq m < c_1$ y $n = c_0$, después para $c_1 \leq m < c_2$ y $n \in \{c_0, c_1\}$, posteriormente para $c_2 \leq m < c_3$ y $n \in \{c_0, c_1, c_2\}$ y así sucesivamente.

Ahora, para cada $n < \omega$, sea $I_n := k_n!$ y fijemos una enumeración de S_{k_n}, $S_{k_n} = \{\psi_0^n, \ldots, \psi_{I_n-1}^n\}$. Si $0 = c_0 \leq m < c_1$, entonces debe de haber un $j < l_0 = k_0! = I_0$ tal que $m \in Z_j$. Entonces definimos $h \restriction F_{c_0}^m = h \restriction F_0^m := (\psi_j^0)^{F_0^m}$. Posteriormente, supongamos que $c_1 \leq m < c_2$. Entonces hay un j con $l_0 \leq j < l_1$ tal que $m \in Z_j$. Fijemos una biyección entre $I_{c_0} I_{c_1}$ (producto de números) e $I_{c_0} \times I_{c_1}$. Entonces, $j - l_0 \in k_{c_0}! k_{c_1}! = I_{c_0} I_{c_1}$, luego a $j - l_0$ le corresponde un elemento $(j_0, j_1) \in I_{c_0} \times I_{c_1}$ bajo la biyección que ya especificamos. Hagamos $h \restriction F_{c_0}^m := (\psi_{j_0}^{c_0})^{F_{c_0}^m}$ y $h \restriction F_{c_1}^m := (\psi_{j_1}^{c_1})^{F_{c_1}^m}$.

Supongamos que ya hemos definido $h \restriction F_n^m$ para $n \in \{c_0, \ldots, c_i\}$ y $m < c_{i+1}$. Ahora lo definiremos para $n \in \{c_0, \ldots, c_{i+1}\}$ y $c_{i+1} \leq m < c_{i+2}$ (i.e. para $m \in \bigcup_{l_i \leq j < l_{i+1}} Z_j$). Al igual que hace rato, fijemos una biyección entre $I_{c_0} \cdots I_{c_{i+1}}$ y $I_{c_0} \times \cdots \times I_{c_{i+1}}$. Ahora si $c_{i+1} \leq m < c_{i+2}$, entonces hay un j con $l_i \leq j < l_{i+1}$ tal que $m \in Z_j$. Pero entonces notemos que $j - l_i \in k_{c_0}! \cdots k_{c_{i+1}}! = I_{c_0} \cdots I_{c_{i+1}}$, luego al número $j - l_i$ le corresponde, bajo la biyección especificada, una $(i+2)$-ada $(j_0, \ldots, j_{i+1}) \in I_{c_0} \times \cdots \times I_{c_{i+1}}$. Entonces, para $l \leq i+1$, hacemos $h \restriction F_{c_l}^m := (\psi_{j_l}^{c_l})^{F_{c_l}^m}$.

Comprobemos que C y h, tal como los hemos construido, satisfacen lo afirmado en el lema. Sea $B = B(A, C)$ y $g \in \mathrm{stab}_{A \setminus B}(P_\psi^A)$ arbitrario. Entonces, $g \restriction (A \setminus B) = \mathrm{id}_{A \setminus B}$. Como $g \in P_\psi^A$, entonces $g \restriction B$ estabiliza conjuntistamente a cada pedacito A_n con $n \in C$, es decir, a cada A_{c_n}. Entonces podemos encontrar $s \in \prod_{n<\omega} I_{c_n}$ tal que $g \restriction B = \bigcup_{n<\omega} (\psi_{s(n)}^{c_n})^{A_{c_n}}$. Elijamos recursivamente $t(n)$, para $n < \omega$, de tal forma que $t(0) < l_0$ y para $n < \omega$, $l_n < t(n+1) < l_{n+1}$. Comenzamos eligiendo $t(0) = s(0)$. Si ya conocemos $t(n)$, entonces consideremos la $n+2$-ada $(s(0), \ldots, s(n+1))$. A ésta le corresponde cierto número m bajo la biyección que fijamos hace rato, y si hacemos $t(n+1) := l_i + m$ entonces se cumplirá lo pedido. Sea $E_g := \{t(n) \big| n < \omega\}$. Tomemos ahora $Y \subseteq \bigcup_{n \in E} Z_n = \bigcup_{n<\omega} Z_{t(n)}$, y sea $Y = \{y_n \big| n < \omega\}$ su enumeración creciente. Es claro que, para cada $n < \omega$, se tiene que $y_{c_n} \geq c_n$ y que también $y_{c_n} \in \bigcup_{n \leq m < \omega} Z_{t(m)}$. Luego hay una $m \geq n$ tal que $y_{c_n} \in Z_{t(m)}$. Por construcción, a $t(m) - l_{m-1}$ le corresponde la $m+1$-ada $(s(0), \ldots, s(m))$ bajo la biyección de arriba, luego $h \restriction F_{c_n}^{y_{c_n}} = (\psi_{s(n)^{c_n}})^{F_{c_n}^{y_{c_n}}}$. Como $\Pi_Y[A_{c_n}] = F_{c_n}^{y_{c_n}}$, entonces tenemos que $(\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A_{c_n} = (\psi_{s(n)^{c_n}})^{A_{c_n}}$. Por lo tanto, $(\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction B = g \restriction B$; y como $h \restriction F_n^m = \mathrm{id}_{F_n^m}$ para $n \notin C$, entonces $(\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A_n = \mathrm{id}_{A_n}$ para $n \notin C$, luego $(\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A = g$, que es lo que se quería demostrar. ❏

Todo esto nos permite establecer el resultado que buscábamos.

Teorema II.25 (Brendle-Losada). $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega)$.

Demostración. Como ya se ha comentado, basta probar que cada uno de los D_α con $\alpha < \lambda$ de la construcción II.20 es densa por grupos. Fijemos $\alpha < \lambda$. Primeramente, sea $Z \in D_\alpha$ y $Y \in [\omega]^\omega$ tal que $Y \subseteq^* Z$. Tomemos X, β, h, δ, g como en la definición de D_α para Z, y sea $X' = (Y \cap Z) \cup (X \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$. Entonces $X' =^* Y$ y si $W \subseteq X'$ entonces también $W \subseteq X$ y por lo tanto $(\Pi_W^{-1} h \Pi_W) \restriction A = g$, que es lo que se debe de cumplir para que $Y \in D_\alpha$. Sea ahora $\{Z_n \big| n < \omega\}$ una partición de ω en intervalos finitos. Tomemos h como en el lema anterior y $\beta < \lambda$ tal que $h \in \Gamma_\beta$. Por el corolario II.23 existe un $g \in \mathrm{stab}_{A\setminus B}(P_\psi^A) \setminus \Gamma_{\text{máx}\{\alpha,\beta\}} \restriction A$. Sea $E \subseteq \omega$ tal que para cada $Y \subseteq \bigcup_{n\in E} Z_n$, $(\Pi_Y^{-1} h \Pi_Y) \restriction A = g$ (existe por el lema anterior). Esto implica que $\bigcup_{n\in E} Z_n \in D_\alpha$. ❑

De esta manera, hemos determinado que $\mathfrak{g} \leq \mathrm{cf}(S_\omega) \leq \mathfrak{d}$, acotando así con bastante precisión este invariante cardinal.

Capítulo III

Cocientes del grupo simétrico infinito y su espectro abeliano maximal

En este capítulo, nos enfocaremos a estudiar algunos cocientes del grupo simétrico infinito, en particular el cociente $S_\omega/\mathbb{F}$. Definiremos el espectro abeliano maximal de un grupo, y acotaremos el espectro abeliano maximal de $S_\omega/\mathbb{F}$ tanto por arriba como por abajo. También generalizaremos nuestro estudio a otros cocientes de S_ω definidos en base a un ideal, y veremos cómo al estudiar estos casos generales no es posible generalizar la cota superior del espectro abeliano maximal para estos cocientes de S_ω.

1. Los cardinales $A(S_\omega/\mathbb{F})$ y $\mathfrak{a}$.

El espectro abeliano maximal de un grupo, básicamente es la mínima cardinalidad no numerable de un subgrupo abeliano maximal del grupo en cuestión.

Definición III.1. Sea G un grupo. El **espectro de subgrupos abelianos** de G es el conjunto de números cardinales κ tales que existe $H \leq G$ abeliano maximal (es decir, abeliano y $\subseteq$-maximal en el conjunto de los subgrupos abelianos de G) de orden κ. El invariante cardinal $A(G)$, el espectro abeliano maximal de G, se define como el mínimo $\kappa > \omega$ tal que κ pertenece al espectro de subgrupos abelianos de G.

Resulta importante solicitar que $A(G)$ sea un cardinal no numerable, ya que en casi cualquier grupo no abeliano es posible encontrar subgrupos abelianos maximales que son numerables, y esto trivializaría la investigación de nuestro invariante cardinal. Por ejemplo, si hay un elemento $a \in G$ tal que no conmuta con ningún otro $b \in G \setminus \langle a \rangle$, entonces $\langle a \rangle$, que es numerable, es un subgrupo abeliano maximal.

El principal objetivo de la presente sección, es considerar el cociente $S_\omega/\mathbb{F}$ y demostrar que $A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$. Para ello construiremos cierto monomorfismo entre un grupo de orden $\leq \mathfrak{a}$ y $S_\omega/\mathbb{F}$, y demostraremos que la imagen de este monomorfismo es un subgrupo abeliano maximal de $S_\omega/\mathbb{F}$.

Construcción III.2. Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta de cardinalidad $\mathfrak{a}$. Consideremos el grupo abeliano libre con base $\mathscr{A}$, es decir, $\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} = \{f \in {}^{\mathscr{A}}\mathbb{Z} \big| |\operatorname{sop}(f)| < \omega\}$. Para cada $a \in \mathscr{A}$, definamos la función $\pi_a : a \longrightarrow a$ que viene dada por $\pi_a(i) := \text{mín}\{j \in a \big| j > i\}$. Es decir, π_a "recorre" los elementos de a un lugar "hacia la derecha". En otras palabras, si $\#_a$ es la enumeración creciente de a, tenemos que $\pi_a(\#_a(n)) = \#_a(n+1)$. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, π_a^j denotará, como es de esperarse, a la composición j-ésima de π_a. Es decir, si $j \geq 0$ entonces $\pi_a^j(\#_a(n)) = \#_a(n+j)$, mientras que si $j < 0$ entonces $\pi_a^j : a \setminus \#_a[-j] \longrightarrow a$ viene dada de igual forma por $\pi_a^j(\#_a(n)) = \#_a(n+j)$. Debido a esta descripción de los π_a^j, resulta inmediato que tanto $\mathrm{dom}(\pi_a^j)$ como $\mathrm{ran}(\pi_a^j)$ son subconjuntos cofinitos de a.

A continuación, definiremos una función $\Phi : \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \longrightarrow \wp(S_\omega)$ de la manera siguiente: dado $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$,

$$\Phi(f) := \Bigg\{\pi \in S_\omega \;\Bigg|\; (\exists F \in [\omega]^{<\omega})(\forall a, b \in \mathrm{sop}(f))\Bigg(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F \wedge (\forall n \in \omega \setminus F)\left(\pi(n) = \begin{cases} \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in \mathrm{sop}(f) \\ n; & \text{otro caso} \end{cases}\right)\Bigg)\Bigg\}.$$

Esta definición tiene sentido ya que, si $n \in \omega \setminus F$, entonces hay a lo más un elemento $a \in \mathrm{sop}(f)$ tal que $n \in a$: si $n \in a \cap b$ con $\{a, b\} \in [\mathrm{sop}(f)]^2$, entonces $n \in F$.

Sea $G := \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \,|\, \Phi(f) \neq \varnothing\}$. Veamos que $G = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \,|\, \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\} \leq \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. En efecto, sea $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$ tal que $\sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0$. Entonces, el hecho de que $\mathscr{A}$ sea casi disjunta, además de que $\mathrm{sop}(f)$ es finito, nos permite tomar un $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que $(\forall a, b \in \mathrm{sop}(f))(a \neq b \Rightarrow a \cap b \subseteq F)$ y tal que para cada $a \in \mathrm{sop}(f)$, $F \cap a$ sea un segmento inicial de a. Para cada $a \in \mathrm{sop}(f)$, sea a^* el conjunto que consta de los primeros $|f(a)|$ elementos de $a \setminus F$. Ahora sean $A^+ := \{a \in \mathrm{sop}(f) \,|\, f(a) > 0\}$ y $A^- := \{a \in \mathrm{sop}(f) \,|\, f(a) < 0\}$. Por construcción y por hipótesis, cada uno de los a^* con $a \in \mathrm{sop}(f)$ son disjuntos por pares, y hay una biyección $\theta : \bigcup_{a\in A^-} a^* \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \bigcup_{a\in A^+} a^*$. Sea $\pi \in S_\omega$ definido de la manera siguiente:

$$\pi(n) = \begin{cases} n; & n \notin \bigcup_{a\in\mathrm{sop}(f)} a \setminus F \\ \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \in A^+ \\ \pi_a^{f(a)}(n); & n \in a \setminus a^* \wedge a \in A^- \\ \theta(n); & n \in \bigcup_{a\in A^-} a^*, \end{cases}$$

no es difícil verificar que π es biyección. Ahora, sea $F' := F \cup \left(\bigcup_{a\in A^-} a^*\right) \in [\omega]^{<\omega}$. Observemos que F' atestigua que $\pi \in \Phi(f)$: si $\{a, b\} \in [\mathrm{sop}(f)]^2$ entonces $a \cap b \subseteq F \subseteq F'$. Además, para $n \in \omega \setminus F'$, si $n \in a \in \mathrm{sop}(f)$ entonces se da el segundo o el tercer caso de la definición de π, i.e. en cualquier caso $\pi(n) = \pi_a^{f(a)}(n)$; mientras que en caso contrario se da el primer caso de dicha definición (el último caso no puede darse ya que $n \notin F'$), de modo que $\pi(n) = n$ y de esta forma $\pi \in \Phi(f) \neq \varnothing$.

Recíprocamente, sea $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$ tal que $\sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) \neq 0$, demostremos que $\Phi(f) = \varnothing$. Supongamos, por el contrario, que $\Phi(f) \neq \varnothing$ y sea $\pi \in \Phi(f)$. Entonces, ha de existir un $F \in [\omega]^{<\omega}$ tal que si $\{a, b\} \in [\mathrm{sop}(f)]^2$ entonces $a \cap b \subseteq F$ y tal que para $n \in \omega \setminus F$, $\pi(n) = \pi_a^{f(a)}(n)$ si $n \in a \in \mathrm{sop}(f)$ y $\pi(n) = n$ en otro caso. Notemos que, agrandando adecuadamente a F, podemos suponer sin perder generalidad que, para cada $a \in \mathrm{sop}(f)$, $F \cap a$ es un segmento inicial de a, y más aún, que F contiene por lo menos a los primeros $|f(a)|$ elementos de a que ya no intersectan a ningún otro $b \in \mathrm{sop}(f)$. De esta forma, volvemos a definir $A^+ := \{a \in \mathrm{sop}(f) \big| f(a) > 0\}$ y $A^- := \{a \in \mathrm{sop}(f) \big| f(a) < 0\}$; y para $a \in A^+$ sea a^* el conjunto que consta de los primeros $f(a)$ elementos de $a \setminus F$, y para $a \in A^-$ sea a^* el conjunto que consta de los últimos $-f(a)$ elementos de a que son anteriores a $\min(a \setminus F)$. Esto es, para cada $a \in \mathrm{sop}(f)$, a^* es un subconjunto de a de tamaño $|f(a)|$ y todos los a^* son disjuntos a pares, sólo que en esta ocasión $a^* \cap F = \varnothing$ para $a \in A^+$, mientras que para $a \in A^-$ se tiene que $a^* \subseteq F$. Entonces, los lineamientos para el comportamiento de F nos aseguran que:

$$\pi \upharpoonright \bigcup_{a\in A^+}(a \setminus F) : \bigcup_{a\in A^+}(a \setminus F) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \bigcup_{a\in A^+}(a \setminus (F \cup a^*)),$$

$$\pi \upharpoonright \bigcup_{a\in A^-}(a \setminus F) : \bigcup_{a\in A^-}(a \setminus F) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \bigcup_{a\in A^-}((a \setminus F) \cup a^*),$$

$$\pi \upharpoonright \left[\omega \setminus \left(\left(\bigcup_{a\in\mathrm{sop}(f)} a\right) \cup F\right)\right] = \mathrm{id}_{\omega\setminus\left(\left(\bigcup_{a\in\mathrm{sop}(f)} a\right)\cup F\right)}.$$

Por lo tanto, la restricción de π al resto de ω en el dominio, es decir, a F, ha de ser una biyección de F al resto de ω en el codominio, que es $\left[F \cup \left(\bigcup_{a\in A^+} a^*\right)\right] \setminus \left(\bigcup_{a\in A^-} a^*\right)$. Sabiendo que los a^* son disjuntos entre sí, y que para $a \in A^+$ se satisface $a^* \cap F = \varnothing$, mientras que para $a \in A^-$ se cumple $a^* \subseteq F$, lo anterior necesariamente implica que $\bigcup_{a\in A^+} a^*$ y $\bigcup_{a\in A^-} a^*$ tienen la misma cardinalidad, pero esto contradice la hipótesis de que $\sum_{a\in\mathrm{sop}(f)} f(a) \neq 0$. De esta forma, queda demostrado que $G = \{f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z} \big| \sum_{a\in\mathscr{A}} f(a) = 0\}$. Es importante notar que G es no numerable. Esto se debe a que $|\mathscr{A} \times \mathscr{A}| = |\mathscr{A}| = \mathfrak{a} \geq \omega_1$, y hay una inyección de $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ en G (por ejemplo, a cada $(a, b) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$ le asignamos una $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{sop}(f) = \{a, b\}$ y $f(a) = 1 = -f(b)$).

En adelante, por Φ entenderemos realmente la restricción de la función Φ definida arriba al subgrupo $G \leq \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$. De esta forma, $\Phi : G \longrightarrow \wp(S_\omega) \setminus \{\varnothing\}$.

A continuación, veremos que la función de la construcción anterior es realmente un encaje de G en $S_\omega/\mathbb{F}$.

Lema III.3. *Sea* $\Phi : G \longrightarrow \wp(S_\omega) \setminus \{\varnothing\}$ *la función de la construcción III.2. Entonces,* $\operatorname{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ *y* $\Phi : G \longrightarrow S_\omega/\mathbb{F}$ *es un monomorfismo de grupos.*

Demostración. Notemos primero que $\Phi(0) = \mathbb{F}$. En efecto, si $\pi \in \Phi(0)$ entonces para cierto $F \in [\omega]^{<\omega}$ se tiene que para $n \in \omega \setminus F$, como $\operatorname{sop}(0) = \varnothing$ entonces $\pi(n) = n$. Esto es, $\operatorname{Mov}(\pi) \subseteq F \in [\omega]^{<\omega}$, y por lo tanto $\Phi(0) \subseteq \mathbb{F}$. Similarmente, si $\pi \in \mathbb{F}$ entonces $\operatorname{Mov}(\pi)$ atestigua que $\pi \in \Phi(0)$, luego $\Phi(0) = \mathbb{F}$.

Notemos ahora que si $\pi \in \Phi(f)$ y $\sigma \in \Phi(g)$, entonces $\pi\sigma \in \Phi(f + g)$. En efecto, estamos suponiendo que hay $F, F' \in [\omega]^{<\omega}$ tales que para $\{a, b\} \in [\operatorname{sop}(f)]^2$ se cumple $a \cap b \in F$ y para $\{a, b\} \in [\operatorname{sop}(g)]^2$ se cumple $a \cap b \in F'$, y tanto $\pi \restriction (\omega \setminus F)$ como $\sigma \restriction (\omega \setminus F')$ se comportan de manera adecuada. Notemos que $\operatorname{sop}(f + g) \subseteq \operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)$, y este último conjunto es finito. Ahora, sea

$$F'' := F \cup F' \cup \left(\bigcup_{\{a,b\} \in [\operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)]^2} a \cap b \right) \cup \sigma^{-1}[F],$$

entonces $F'' \in [\omega]^{<\omega}$, veamos que F'' atestigua que $\pi\sigma \in \Phi(f + g)$. Es claro que para $\{a, b\} \in [\operatorname{sop}(f + g)]^2$ se tiene que $a \cap b \subseteq \bigcup_{\{a,b\} \in [\operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)]^2} a \cap b \subseteq F''$. Ahora tomemos un $n \in \omega \setminus F''$, pueden ocurrir dos casos:

1: Si $n \in a \in \operatorname{sop}(f + g)$, entonces básicamente hay tres subcasos. En primer lugar, si $a \in \operatorname{sop}(f) \cap \operatorname{sop}(g)$ entonces como $n \notin F'$ tenemos que $\sigma(n) = \pi_a^{g(a)}(n) \in a$, y como $\sigma(n) \in a \setminus F$ entonces $\pi(\sigma(n)) = \pi_a^{f(a)}(\sigma(n)) = \pi_a^{f(a)+g(a)}(n) = \pi_a^{(f+g)(a)}(n)$. En segundo lugar, si $a \in \operatorname{sop}(f) \setminus \operatorname{sop}(g)$, entonces $\pi(n) = \pi_a^{f(a)}(n)$ y $\sigma(n) = n$, luego $\pi(\sigma(n)) = \pi_a^{f(a)}(n) = \pi_a^{(f+g)(a)}(n)$. Por último, si $a \in \operatorname{sop}(g) \setminus \operatorname{sop}(f)$, como $n \notin F'$ entonces $\sigma(n) = \pi_a^{g(a)}(n) \in a$ y como $\sigma(n) \notin F$ entonces $\pi(\sigma(n)) = \sigma(n) = \pi_a^{g(a)}(n) = \pi_a^{(f+g)(a)}(n)$.

2: En otro caso (i.e. que $(\forall a \in \operatorname{sop}(f+g))(n \notin a)$), supongamos en primer lugar que para algún $a \in \operatorname{sop}(f)$, $n \in a$. Entonces, dado que en este caso estamos suponiendo $(f + g)(a) = 0$, debe tenerse que $g(a) = -f(a)$, de tal modo que también $a \in \operatorname{sop}(g)$. Como $n \notin F'$, entonces $\sigma(n) = \pi_a^{g(a)}(n) = \pi_a^{-f(a)}(n) \in a$; como $\sigma(n) \notin F$, entonces $\pi(\sigma(n)) = \pi_a^{f(a)}(\sigma(n)) = \pi_a^{f(a)-f(a)}(n) = \pi_a^0(n) = n$. En segundo lugar, puede darse el caso que $(\forall a \in \operatorname{sop}(f))(n \notin a)$. Similarmente a como se razonó anteriormente, esto implica que $(\forall a \in \operatorname{sop}(g))(n \notin a)$ y por lo tanto, como $n \notin F' \cup F$ entonces $\pi(n) = n$ y $\sigma(n) = n$, luego $\pi(\sigma(n)) = n$.

Así, tenemos que $\pi\sigma \in \Phi(f + g)$. En este momento podemos demostrar que cada $\Phi(f)$ es una clase lateral. En efecto, sea $f \in G$ y $\pi \in \Phi(f)$. Dado que $\sigma \in \mathbb{F} = \Phi(0)$, tenemos que $\pi\sigma \in \Phi(f + 0) = \Phi(f)$ y por lo tanto $\pi\mathbb{F} \subseteq \Phi(f)$. Sea ahora $\sigma \in \Phi(f)$, y sean $F, F' \in [\omega]^{<\omega}$ conjuntos que atestiguan que $\pi, \sigma \in \Phi(f)$, respectivamente. Entonces, si $F'' := F \cup F'$, resulta claro que

$\pi \restriction (\omega \setminus F'') = \sigma \restriction (\omega \setminus F'')$. Esto automáticamente implica que $\mathrm{Mov}(\pi\sigma^{-1}) \subseteq F'' \cup \sigma[F''] \in [\omega]^{<\omega}$ y por lo tanto $\sigma \in \pi\mathbb{F}$, lo cual implica que $\Phi(f) = \pi\mathbb{F}$.

De esta forma, ha quedado demostrado que $\mathrm{ran}(\Phi) \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$. El hecho de que Φ es morfismo se sigue de que, para $\pi \in \Phi(f)$, $\sigma \in \Phi(g)$ se tiene que $\Phi(f)\Phi(g) = (\pi\mathbb{F})(\sigma\mathbb{F}) = (\pi\sigma)\mathbb{F} = \Phi(f+g)$.

En este punto, sólo resta demostrar que Φ es inyectivo. Para ello, sea $\{f, g\} \in [G]^2$. Supongamos que $\Phi(f) = \pi\mathbb{F}$ y $\Phi(g) = \sigma\mathbb{F}$, y sean $F, F' \in [\omega]^{<\omega}$ conjuntos que atestiguan que $\pi \in \Phi(f)$ y que $\sigma \in \Phi(g)$, respectivamente. Entonces, como $f \neq g$ ello significa que para cierto $a \in \mathscr{A}$, $f(a) \neq g(a)$. Hay una infinidad de elementos en $a \setminus (F \cup F')$, lo cual implica que para una infinidad de $n \in \omega$, se tiene que $\pi(n) = \pi_a^{f(a)}(n) \neq \pi_a^{g(a)}(n) = \sigma(n)$. Esto significa que $\Phi(f) = \pi\mathbb{F} \neq \sigma\mathbb{F} = \Phi(g)$. ❑

De esta forma, tenemos que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano (por ser isomorfo a G) y tiene cardinalidad $\omega_1 \leq |G| \leq \left|\bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}\right| = \left|\bigcup_{A\in[\mathscr{A}]^{<\omega}} {}^{A}\mathbb{Z}\right| = |[\mathscr{A}]^{<\omega}|\omega = |\mathscr{A}| = \mathfrak{a}$. Tan sólo resta ver que $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal en $S_\omega/\mathbb{F}$. Para ello, argumentaremos que para cualquier $\pi\mathbb{F} \in (S_\omega/\mathbb{F}) \setminus \Phi[G]$ se cumple que $\langle \Phi[G], \pi\mathbb{F}\rangle$ no es un subgrupo abeliano de $S_\omega/\mathbb{F}$.

Notación III.4. Para $(a, b) \in \mathscr{A} \times \mathscr{A}$, denotaremos por $f_{a,b} \in G$ a la función que viene dada de tal forma que $\mathrm{sop}(f_{a,b}) = \{a, b\}$ y $f_{a,b}(a) = 1 = -f_{a,b}(b)$. Asimismo, elegimos de una vez algún elemento fijo $\pi_{a,b}$ tal que $\Phi(f_{a,b}) = \pi_{a,b}\mathbb{F}$.

Lema III.5. *Sea $\pi\mathbb{F} \in (S_\omega/\mathbb{F}) \setminus \Phi[G]$ tal que $\langle \Phi[G], \pi\mathbb{F}\rangle$ es un subgrupo abeliano de $S_\omega/\mathbb{F}$, y sea $a \in \mathscr{A}$ tal que $|\mathrm{Mov}(\pi) \cap a| = \omega$. Entonces, $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a$ es un subconjunto cofinito de a.*

Demostración. Sea $b \in \mathscr{A} \setminus \{a\}$. Si la conclusión del lema fuera falsa, entonces $a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$ sería infinito. Ahora, notemos que, dado que $\pi_{a,b} \in \Phi(f_{a,b})$, entonces hay un $m < \omega$ tal que para $n \geq m$, se cumple que

$$\pi_{a,b}(n) = \begin{cases} \pi_b^{-1}(n); & n \in b \\ \pi_a(n); & n \in a \\ n; & n \notin a \cup b. \end{cases}$$

Hay una infinidad de $n \in a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$ tales que $n \geq m$, de esta forma, existe una infinidad de $n \in a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$ tales que $\pi_{a,b}(n) = \pi_a(n)$. Comenzando con algún $n \geq m$, tenemos que $\pi_{a,b}(n) = \pi_a(n) \in a$ y $\pi_a(n) \geq n \geq m$, entonces $\pi_{a,b}(\pi_{a,b}(n)) = \pi_a^2(n) \in a$. Continuando por inducción, vemos que, para $0 \leq j < \omega$ se tiene que $\pi_{a,b}^j(n) \in a$, y más aún, los $\pi_{a,b}^j(n)$ van siendo elementos sucesivos de a. De esta forma, siendo por hipótesis $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a$ infinito, hay algún j tal que $\pi_{a,b}^j(n) \in \mathrm{Mov}(\pi)$, y si elijo tal j mínimo entonces $k := \pi_{a,b}^{j-1}(n) \in a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$ mientras que $\pi_{a,b}(k) \in \mathrm{Mov}(\pi)$. Eligiendo un $k < n' \in a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$, repitiendo el proceso anterior, y volviendo a hacer todo esto una infinidad de veces, encontramos una infinidad de $n \in a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$ tales que $\pi_{a,b}(n) \in \mathrm{Mov}(\pi)$. Para cualquiera de estos n, tenemos que $\pi(\pi_{a,b}(n)) \neq \pi_{a,b}(n)$, mientras que $\pi_{a,b}(\pi(n)) = \pi_{a,b}(n)$. Esto quiere decir que $\pi\pi_{a,b}$ y $\pi_{a,b}\pi$ difieren en una infinidad de coordenadas, por lo tanto sus respectivas clases de equivalencia módulo $\mathbb{F}$ son distintas. Esto quiere decir que $\pi\mathbb{F}$ y $\pi_{a,b}\mathbb{F}$ no conmutan, lo cual contradice a la hipótesis. ❑

Lema III.6. *Sea $\pi\mathbb{F} \in (S_\omega/\mathbb{F}) \setminus \Phi[G]$ tal que $\langle \Phi[G], \pi\mathbb{F} \rangle$ es un subgrupo abeliano de $S_\omega/\mathbb{F}$, y sea $a \in \mathscr{A}$ tal que $|\mathrm{Mov}(\pi) \cap a| = \omega$. Entonces, $\pi[a] \subseteq^* a$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, que $|\pi[a] \setminus a| = \omega$. Esto significa que el conjunto $X := \{n \in a \big| \pi(n) \notin a\}$ es infinito. Demostremos que hay algún $b \in \mathscr{A} \setminus \{a\}$ tal que $\pi[X] \setminus b$ es infinito. Pues de lo contrario, podríamos escoger $b, c \in \mathscr{A} \setminus \{a\}$ distintos tales que $\pi[X] \subseteq^* b$ y $\pi[X] \subseteq^* c$; con lo cual $\pi[X] \subseteq^* b \cap c$, lo cual contradice el hecho de que $\pi[X]$ es infinito y $b \cap c$ es finito. Por lo tanto, podemos elegir un $b \in \mathscr{A} \setminus \{a\}$ de modo que $|\pi[X] \setminus b| = \omega$.

Ahora bien, para una cantidad cofinita de $n < \omega$ se tiene que

$$\pi_{a,b}(n) = \begin{cases} \pi_b^{-1}(n); & n \in b \\ \pi_a(n); & n \in a \\ n; & n \notin a \cup b, \end{cases}$$

luego para una cantidad cofinita de $n \in \pi^{-1}[\pi[X] \setminus b] \subseteq X \subseteq a$, tenemos que $\pi_{a,b}(n) = \pi_a(n) \neq n$. Así, para una cantidad cofinita de $n \in \pi^{-1}[\pi[X] \setminus b]$, tenemos que $\pi(\pi_{a,b}(n)) \neq \pi(n)$. Sin embargo, dado que esos $n \in X$ entonces $\pi(n) \notin a$, y como $n \in \pi^{-1}[\pi[X] \setminus b]$ y por lo tanto $\pi(n) \notin b$, luego para una cantidad cofinita de estos n, tenemos que $\pi_{a,b}(\pi(n)) = \pi(n)$. Así pues, podemos concluir que $\pi\pi_{a,b}$ y $\pi_{a,b}\pi$ difieren en una cantidad infinita de valores, lo cual significa que $\pi\mathbb{F}$ y $\pi_{a,b}\mathbb{F}$ no conmutan. Esto es una contradicción. ❑

Lema III.7. *Sea $\pi\mathbb{F} \in (S_\omega/\mathbb{F}) \setminus \Phi[G]$ tal que $\langle \Phi[G], \pi\mathbb{F} \rangle$ es un subgrupo abeliano de $S_\omega/\mathbb{F}$, y sea $a \in \mathscr{A}$ tal que $|\mathrm{Mov}(\pi) \cap a| = \omega$. Entonces, existe algún $i \in \mathbb{Z}$ tal que $\pi \restriction a =^* \pi_a^i \restriction a$.*

Demostración. Las hipótesis, junto con los lemas III.5 (que asegura que $a \setminus \mathrm{Mov}(\pi)$ es finito) y III.6 (que nos garantiza que $\pi[a] \subseteq^* a$), nos permiten asegurar que para una cantidad cofinita de $n \in a$ se cumple que $n \neq \pi(n) \in a$. Esto significa que, para cada uno de estos n, existe un $k(n)$ tal que $\pi(n) = \pi_a^{k(n)}(n)$.

Tomemos un $b \in \mathscr{A} \setminus \{a\}$ arbitrario, y supongamos que la conclusión del lema es falsa. Entonces, podemos encontrar una infinidad de $n \in a$ tales que $k(n) \neq k(\pi_a(n)) = k(\pi_{a,b}(n))$. Esto lo hacemos de la siguiente manera: elegimos n entre los que describimos en el párrafo anterior, y observamos si $k(n) \neq k(\pi_a(n))$, en caso contrario observamos si $k(\pi_a(n)) \neq k(\pi_a^2(n))$. En caso contrario, continúo con el proceso, y observo que debe de haber algún j tal que $k(\pi_a^j(n)) \neq k(\pi_a^{j+1}(n))$ (si no lo hubiera, esto significaría que $(\forall j < \omega)(k(\pi_a^j(n)) = k(\pi_a^{j+1}(n)))$, lo cual implica que $\pi(\pi_a^j(n)) = \pi_a^{k(n)+j}(n)$ para toda $j < \omega$, y esto significa que de hecho $\pi \upharpoonright a =^* \pi_a^{k(n)} \upharpoonright a$, contrario a la suposición de que la conclusión del lema es falsa), y, si desde un principio comenzamos con una n suficientemente grande, podemos asegurar que $\pi_a(\pi_a^j(n)) = \pi_{a,b}(\pi_a^j(n))$. Así es como encontramos la prometida infinidad de $n \in a$ tales que $k(n) \neq k(\pi_a(n)) = k(\pi_{a,b}(n))$. Para estos n, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_{a,b}(\pi(n)) &= \pi_{a,b}(\pi_a^{k(n)}(n)) = \pi_{a,b}(\pi_{a,b}^{k(n)}(n)) = \pi_{a,b}^{k(n)+1}(n)\\ &\neq \pi_{a,b}^{k(\pi_a(n))+1}(n) = \pi_{a,b}^{k(\pi_{a,b}(n))}(\pi_{a,b}(n)) = \pi(\pi_{a,b}(n))\end{aligned}$$

luego $\pi_{a,b}\pi$ y $\pi\pi_{a,b}$ difieren en una infinidad de valores de n, lo cual significa que $\pi\mathbb{F}$ y $\pi_{a,b}\mathbb{F}$ no conmutan. Esto está en flagrante contradicción con las hipótesis iniciales del lema. ❑

Mediante estos últimos tres lemas, estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema III.8 (Shelah-Steprāns). $A(S_\omega/\mathbb{F}) \leq \mathfrak{a}$.

Demostración. Sabemos ya que $\Phi[G] \leq S_\omega/\mathbb{F}$ es un subgrupo abeliano de cardinalidad $\leq \mathfrak{a}$. Por ello, bastará probar que $\Phi[G]$ es subgrupo abeliano maximal. Para tal fin, supongamos lo contrario. Esto nos permite elegir un $\pi\mathbb{F} \in (S_\omega/\mathbb{F}) \setminus \Phi[G]$ tal que $\langle \Phi[G], \pi\mathbb{F}\rangle$ es un subgrupo abeliano de $S_\omega/\mathbb{F}$. En este momento, todo se reduce a considerar dos casos:

1: Hay un subconjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{Mov}(\pi) \subseteq^* \bigcup_{i=1}^{n} a_i$. En este caso, tomamos uno de estos conjuntos que sea minimal respecto de esta propiedad. Observemos que cada $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a_i$ es infinito, pues de lo contrario, si algún $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a_j$ fuera finito, tendríamos de hecho que $\mathrm{Mov}(\pi) \subseteq^* \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_i$, lo cual contradice la minimalidad de $\{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces, por el lema III.7, para cada $1 \leq i \leq n$ existe un $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\pi \upharpoonright a_i =^* \pi_{a_i}^{k_i}$. Habremos de notar que, si definimos $f \in \bigoplus_{a\in\mathscr{A}} \mathbb{Z}$ de tal modo que $\mathrm{sop}(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$ y, para $1 \leq i \leq n$, $f(a_i) = k_i$, entonces el conjunto

$$F = \left(\bigcup_{1\leq i<j\leq n} (a_i \cap a_j)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \{n \in a_i | \pi(n) \neq \pi_{a_i}^{k_i}(n)\}\right) \cup \left(\mathrm{Mov}(\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} a_i\right) \in [\omega]^{<\omega}$$

atestigua que $\pi \in \Phi(f)$ (para $n \in \omega \setminus F$, si $n \in a_i$ entonces $\pi(n) = \pi_{a_i}^{k_i}(n) = \pi_{a_i}^{f(a_i)}(n)$ y en caso contrario, si $n \notin \bigcup_{i=1}^{n} a_i$, entonces también $n \notin \mathrm{Mov}(\pi)$ y por lo tanto $\pi(n) = n$). Esto de inmediato contradice la suposición de que $\pi\mathbb{F} \notin \Phi[G]$.

2: Supongamos, de manera exactamente opuesta al caso anterior, que no existe ningún subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{Mov}(\pi) \subseteq^* \bigcup_{i=1}^{n} a_i$. En este caso, notemos que podemos encontrar una cantidad no numerable de $a \in \mathscr{A}$ tales que $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a$ es infinito. En efecto, en primer lugar, es claro que en este caso $\mathrm{Mov}(\pi)$ es infinito y $\mathrm{Mov}(\pi) \notin \mathscr{A}$. Por lo tanto, por la maximalidad $\mathscr{A}$ hay un $a_0 \in \mathscr{A}$ tal que $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a_0$ es infinito. Como $\mathrm{Mov}(\pi) \not\subseteq^* a_0$ tendremos que $\mathrm{Mov}(\pi) \setminus a_0$ es infinito, y tampoco puede ser elemento de $\mathscr{A}$ (de lo contrario, $\mathrm{Mov}(\pi) \subseteq^* (\mathrm{Mov}(\pi) \setminus a_0) \cup a_0$, contrario a la hipótesis), por lo tanto hay algún a_1 tal que $(\mathrm{Mov}(\pi) \setminus a_0) \cap a_1$ es infinito. Dado que $\mathrm{Mov}(\pi) \not\subseteq^* a_0 \cup a_1$, entonces $\mathrm{Mov}(\pi) \setminus (a_0 \cup a_1)$ es infinito y no es elemento de $\mathscr{A}$ (de lo contrario, $\mathrm{Mov}(\pi) \subseteq^* (\mathrm{Mov}(\pi) \setminus (a_0 \cup a_1)) \cup a_0 \cup a_1$, contrario a la hipótesis), luego hay un $a_2 \in \mathscr{A}$ tal que $(\mathrm{Mov}(\pi) \setminus (a_0 \cup a_1)) \cap a_2$ es infinito. Continuando con el proceso, si ya conocemos $a_0, \ldots, a_n$ que intersectan a $\mathrm{Mov}(\pi)$ en una cantidad infinita de puntos, entonces, dado que por hipótesis $\mathrm{Mov}(\pi) \not\subseteq^* a_0 \cup \cdots \cup a_n$, hemos de tener que $\mathrm{Mov}(\pi) \setminus (a_0 \cup \cdots \cup a_n)$ es infinito y no es un elemento de $\mathscr{A}$ (de lo contrario, $\mathrm{Mov}(\pi) \subseteq^* (\mathrm{Mov}(\pi) \setminus (a_0 \cup \cdots \cup a_n)) \cup a_0 \cup \cdots \cup a_n$, contrario a la hipótesis). Por lo tanto, hay un $a_{n+1} \in \mathscr{A}$ tal que $(\mathrm{Mov}(\pi) \setminus (a_0 \cup \cdots \cup a_n)) \cap a_{n+1}$ es infinito. Notemos que los a_n obtenidos por medio de este proceso deben de ser distintos entre ellos. Veremos ahora cómo construir los a_ξ para $\omega \leq \xi < \omega_1$. Supóngase que ya conocemos los a_δ para $\delta < \xi$, entonces notemos que $\{B \cap a_\delta \big| \delta < \xi\}$ es una familia casi disjunta en $\mathrm{Mov}(\pi)$ (este último es un conjunto numerable), dado que ninguna familia casi disjunta numerable es maximal, entonces hay un $a \subseteq \mathrm{Mov}(\pi)$ tal que $(\forall \delta < \xi)(a \cap a_\delta =^* \varnothing)$. Si fuera el caso que, para cada $b \in \mathscr{A} \setminus \{a_\delta \big| \delta < \xi\}$, $\mathrm{Mov}(\pi) \cap b$ es finito, entonces también los $a \cap b$ serían finitos y (dado que también para cada $\delta < \xi$ se cumple que $a \cap a_\delta$ es finito) tendríamos que $\mathscr{A} \cup \{a\}$ sería casi ajena, lo cual es contradictorio. Por lo tanto hay un $a_\xi \in \mathscr{A} \setminus \{a_\delta \big| \delta < \xi\}$ tal que $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a_\xi$ es infinito.

Este proceso inductivo nos permite encontrar por lo menos ω_1 elementos $a \in \mathscr{A}$ tales que $\mathrm{Mov}(\pi) \cap a$ es infinito. Debido al lema III.7, para cada uno de estos $a \in \mathscr{A}$ existe un $i_a \in \mathbb{Z}$ tal que $\pi \upharpoonright a =^* \pi_a^{i_a} \upharpoonright a$. Dado que $\mathbb{Z}$ es numerable, ha de existir un valor $i \in \mathbb{Z}$ tal que para una cantidad no numerable de $a \in \mathscr{A}$ se cumple que $\pi \upharpoonright a =^* \pi_a^i \upharpoonright a$. Realizando nuevamente un razonamiento idéntico al anterior, encontramos que, para cierto $k < \omega$, se satisface que $\pi \upharpoonright \{n \in a \big| n \geq k\} = \pi_a^i \upharpoonright \{n \in a \big| n \geq k\}$ para una cantidad no numerable de $a \in \mathscr{A}$. Habiendo muchos a y poquitos $n \geq k$, entonces deben de existir por lo menos dos $a, b \in \mathscr{A}$ tales que para algún $n \geq k$, se cumple que que $n \in a \cap b$ y $\pi \upharpoonright \{n \in a \big| n \geq k\} =$

$\pi_a^i \upharpoonright \{n \in a \big| n \geq k\}$, además de que $\pi \upharpoonright \{n \in b \big| n \geq k\} = \pi_b^i \upharpoonright \{n \in b \big| n \geq k\}$. Notemos que $n \in \{m \in a \cap b \big| m \geq k\} \subseteq a \cap b$, luego el conjunto de enmedio es finito y no vacío. Sea, entonces, $j := \max\{m \in a \cap b \big| m \geq k\}$. Tenemos entonces que $\pi(j) = \pi_a^i(j) \neq \pi_b^i(j) = \pi(j)$, lo cual contradice aquello que supusimos. Por lo tanto, para cada $\pi\mathbb{F} \in (S_\omega/\mathbb{F}) \setminus \Phi[G]$, el subgrupo $\langle \pi\mathbb{F}, \Phi[G]\rangle$ es no abeliano. Luego $\Phi[G]$ es un subgrupo abeliano maximal de $S_\omega/\mathbb{F}$ y, de esta forma, el teorema ha quedado demostrado.

❏

2. Los grupos $S_\omega/\mathbb{F}(\mathcal{I})$ y los cardinales $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$

En esta sección, trabajaremos con algunos cocientes más generales del grupo S_ω, definidos en base a ciertos ideales. Recordemos que un **ideal sobre** ω, o simplemente un **ideal**, es un subconjunto no vacío $\mathcal{I} \subseteq \wp(\omega)$ tal que $(\forall A, B \in \mathcal{I})(A \cup B \in \mathcal{I})$ y $(\forall A \in \mathcal{I})(\forall B \subseteq A)(B \in \mathcal{I})$. Por ejemplo, uno de los ideales más comúnmente utilizados es el ideal de subconjuntos finitos de ω, $[\omega]^{<\omega}$.

Notación III.9. Sea $\mathcal{I}$ un ideal. En adelante, denotaremos por $\mathbb{S}(\mathcal{I})$ al subconjunto de S_ω que preserva elementos de $\mathcal{I}$. Es decir,

$$\mathbb{S}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| (\forall A \subseteq \omega)(A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I})\}.$$

Asimismo, denotaremos por $\mathbb{F}(\mathcal{I})$ al subconjunto de $\mathbb{S}(\mathcal{I})$ que mueve a "poquitos" elementos según $\mathcal{I}$. Es decir,

$$\mathbb{F}(\mathcal{I}) := \{\pi \in S_\omega \big| \operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}\}.$$

Notemos que, dado un ideal $\mathcal{I}$, $\mathbb{S}(\mathcal{I}) \leq S_\omega$. En efecto, si $\pi, \sigma \in \mathbb{S}(\mathcal{I})$, entonces para $A \subseteq \omega$, tenemos que $A \in \mathcal{I} \iff \pi[A] \in \mathcal{I} \iff \sigma[\pi[A]] \in \mathcal{I}$, luego $\sigma\pi \in \mathbb{S}(\mathcal{I})$. Similarmente, $\pi^{-1}[A] \in \mathcal{I} \iff A = \pi[\pi^{-1}[A]] \in \mathcal{I}$, luego $\pi^{-1} \in \mathbb{S}(\mathcal{I})$. Además, tenemos que $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \trianglelefteq \mathbb{S}(\mathcal{I})$ (notemos que claramente $\mathbb{F}(\mathcal{I}) \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{I})$). Esto se debe a que, si $\sigma \in \mathbb{S}(\mathcal{I})$ y $\pi \in \mathbb{F}(\mathcal{I})$, entonces $\operatorname{Mov}(\pi) \in \mathcal{I}$, lo cual implica que $\operatorname{Mov}(\sigma\pi\sigma^{-1}) = \sigma[\operatorname{Mov}(\pi)] \in \mathcal{I}$ y por lo tanto $\sigma\pi\sigma^{-1} \in \mathbb{F}(\mathcal{I})$. Notemos que, para el caso particular del ideal de conjuntos finitos, se tiene que $\mathbb{S}([\omega]^{<\omega}) = S_\omega$, y que aquello que dimos en llamar $\mathbb{F}$ no es, según la nueva notación, otra cosa que $\mathbb{F}([\omega]^{<\omega})$.

Definición III.10. Definimos el **espectro abeliano maximal** de $\mathcal{I}$ como el invariante cardinal $A(\mathbb{S}(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I}))$, mismo que de ahora en adelante denotaremos como $A(\mathcal{I})$.

Notemos que, de acuerdo con la nueva notación, el invariante cardinal $A(S_\omega/\mathbb{F})$ que estudiamos en la sección anterior será conocido, de ahora en adelante, como $A([\omega]^{<\omega})$.

Definición III.11. Sea $\mathcal{I}$ un ideal.

- Sean $a, b \subseteq \omega$. Diremos que a y b son **casi disjuntos módulo** $\mathcal{I}$ si $a \cap b \in \mathcal{I}$.
- Sea $\mathscr{A} \subseteq \wp(\omega)$. Diremos que $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta módulo** $\mathcal{I}$ si $\mathscr{A} \cap \mathcal{I} = \varnothing$ y $(\forall a, b \in \mathscr{A})(a \cap b \in \mathcal{I})$.
- $\mathscr{A}$ es una familia **casi disjunta maximal módulo** $\mathcal{I}$ si es una familia casi disjunta módulo $\mathcal{I}$ y es $\subseteq$-maximal.
- Definimos el invariante cardinal $\mathfrak{a}(\mathcal{I})$ como la mínima cardinalidad de una familia infinita que es casi disjunta maximal módulo $\mathcal{I}$. Es decir,

$$\mathfrak{a}(\mathcal{I}) := \text{mín}\{\lambda \big| (\exists \mathscr{A} \subseteq \wp(\omega))(\omega \leq |\mathscr{A}| = \lambda \wedge \mathscr{A} \text{ es casi disjunta maximal módulo } \mathcal{I})\}.$$

De acuerdo con la definición anterior, tenemos que nuestro viejo conocido $\mathfrak{a}$ no es otra cosa que $\mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. De esta forma, el resultado principal de la sección anterior es justamente la afirmación de que $A([\omega]^{<\omega}) \leq \mathfrak{a}([\omega]^{<\omega})$. Nos gustaría generalizar esto a cualquier ideal $\mathcal{I}$, de modo que la siguiente pregunta que surge de manera natural es si será cierto que $A(\mathcal{I}) \leq \mathfrak{a}(\mathcal{I})$, para cualquier ideal $\mathcal{I}$. El objetivo principal de esta sección es mostrar que la respuesta a esta pregunta es "no". Esto lo haremos construyendo una familia de ideales $\mathcal{I}$ para los cuales es relativamente consistente con ZFE que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}) < A(\mathcal{I})$.

Notación III.12. De ahora en adelante, $\mathcal{N} = \underset{i=0}{\overset{\infty}{(n_i)}} \in {}^{\omega}\omega$ será una sucesión estrictamente creciente tal que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+2} - n_{i+1}} = 0.$$

Hay una amplia variedad de sucesiones de este estilo (de hecho, hay $\mathfrak{c}$ de ellas). Por ejemplo, $n_i = 2^{i^2}$ funciona.

Definición III.13. Definiremos un ideal basado en la sucesión $\mathcal{N}$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) := \left\{ A \subseteq \omega \middle| \lim_{i \to \infty} \frac{|A \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0 \right\}.$$

Veamos que en efecto $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ es un ideal. Claramente, $\varnothing \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, luego $\mathcal{I}(\mathcal{N}) \neq \varnothing$. Sea ahora $A \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ y $B \subseteq A$. Entonces, para cada $i < \omega$ tenemos que $|B \cap [n_i, n_{i+1})| \leq |A \cap [n_i, n_{i+1})|$ y por lo tanto $\lim_{i\to\infty} \frac{|B \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \leq \lim_{i\to\infty} \frac{|A \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0$, entonces $B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Supongamos ahora que $A, B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Dado que en este caso $A, B \setminus A \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, podemos suponer sin perder generalidad que de hecho $A \cap B = \varnothing$. Pero en este caso,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|(A \cup B) \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = \lim_{i \to \infty} \frac{|A \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} + \lim_{i \to \infty} \frac{|B \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0 + 0 = 0,$$

luego $A \cup B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, esto completa la prueba de que $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ es un ideal.

Lema III.14. *Para cada $\pi \in \$(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$, es posible encontrar un $B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ tal que, para cada $i < \omega$, $\pi[[n_i, n_{i+1}) \setminus B] \subseteq [n_i, n_{i+1})$.*

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} B^+ &:= \bigcup_{i=0}^{\infty} \{n < \omega \big| n_i \leq n < n_{i+1} \wedge \pi(n) \geq n_{i+1}\}, \\ B^- &:= \bigcup_{i=0}^{\infty} \{n < \omega \big| n_i \leq n < n_{i+1} \wedge \pi(n) < n_{i+1}\}. \end{aligned}$$

En caso de que $B^+ \cup B^- \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, este conjunto funcionaría como asegura el lema y habremos terminado. En caso contrario, hemos de tener que $B^+ \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$ o $B^- \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$.

Supongamos primero que $B^+ \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Ello implica que hay un $\varepsilon > 0$ y un $Y \in [\omega]^\omega$ tales que

$$(\forall i \in Y)\left(\frac{|B^+ \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \geq \varepsilon\right).$$

Adelgazando adecuadamente a Y (por ejemplo, tomando el primer $i \in Y$ y escogiendo $j \in Y$ tal que $\pi[B^+ \cap [n_i, n_{i+1})] \subseteq n_j$, quitando de Y los elementos que están entre i y j y repitiendo el proceso para j (i.e. escogiendo $k \in Y$ tal que $\pi[B^+ \cap [n_i, n_{i+1})] \subseteq n_k$), y así sucesivamente, puedo adelgazar adecuadamente a Y de modo que me siga quedando un conjunto infinito), puedo suponer que, para cada $i, j \in Y$ con $i < j$ y para cada $m \in B^+ \cap [n_i, n_{i+1})$ se satisface que $\pi(m) < n_j$. Esto implica que $\pi[B^+] \cap [n_{i+1}, n_j) = \pi[B^+ \cap [n_i, n_{i+1})]$.

Así, tomemos $i, j, k \in Y$ con $i < k < j$. Notemos que $\pi[B^+] \cap [n_k, n_{k+1}) \subseteq \pi[B^+] \cap [n_{i+1}, n_j) = \pi[B^+ \cap [n_i, n_{i+1})]$, y este último conjunto tiene tamaño $\leq n_{i+1} - n_i$. Es por ello que (debido a que $i < k$)

$$\frac{|\pi[B^+] \cap [n_k, n_{k+1})|}{n_{k+1} - n_k} \leq \frac{n_{i+1} - n_i}{n_{k+1} - n_k} = \left(\frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+2} - n_{i+1}}\right)\left(\frac{n_{i+2} - n_{i+1}}{n_{i+3} - n_{i+2}}\right) \cdots \left(\frac{n_k - n_{k-1}}{n_{k+1} - n_k}\right) \xrightarrow{i \to \infty} 0.$$

Esto significa que $\pi[B^+] \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, lo cual es una contradicción con el hecho de que $B^+ \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$ y $\pi \in \$(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. Un argumento exactamente idéntico, pero cambiando π por π^{-1} nos muestra que tampoco puede ser cierto que $B^- \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Por lo tanto, $B^+, B^- \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ y entonces $B := B^+ \cup B^-$ atestigua lo asegurado por el lema. ❑

Este lema resultará ser de crucial importancia más adelante. Básicamente, es en la anterior demostración el único lugar donde se utiliza el hecho de que $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}-n_i}{n_{i+2}-n_{i+1}} = 0$. En adelante, comenzaremos a averiguar más de cerca el valor de $A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. Para ello, haremos uso de un par de definiciones que nos permitirán simplificar los argumentos.

Definición III.15. Sean $\sigma, \pi \in S_\omega$. Definimos el siguiente conjunto:

$$\text{N.C.}(\sigma, \pi) := \{n < \omega \big| \sigma(\pi(n)) \neq \pi(\sigma(n))\},$$

y, dado un ideal $\mathcal{I}$, diremos que σ y π **casi conmutan módulo** $\mathcal{I}$ si y sólo si $\text{N.C.}(\sigma, \pi) \in \mathcal{I}$.

Sean $\mathcal{I}$ un ideal y $\sigma, \pi \in \mathbb{S}(\mathcal{I})$. Supongamos que σ y π casi conmutan módulo $\mathcal{I}$. Entonces, ello significa que $\sigma\pi$ y $\pi\sigma$ tan sólo difieren en una cantidad "pequeña" de valores, según $\mathcal{I}$. De esta forma, podemos obtener $\sigma\pi$ multiplicando $\pi\sigma$ por una permutación que tan sólo mueva una cantidad de elementos en $\mathcal{I}$. En otras palabras, las clases laterales $\sigma\mathbb{F}(\mathcal{I})$ y $\pi\mathbb{F}(\mathcal{I})$ conmutan en el grupo cociente $\mathbb{S}(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I})$. Luego, para obtener subgrupos abelianos maximales de $\mathbb{S}(\mathcal{I})/\mathbb{F}(\mathcal{I})$, en general bastará con obtener subconjuntos de $\mathbb{S}(\mathcal{I})$ maximales respecto de la propiedad de que todos sus elementos casi conmutan módulo $\mathcal{I}$ entre sí.

Construcción III.16. Comencemos a partir de un $G \subseteq \mathbb{S}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$, que sea un subconjunto maximal respecto de la propiedad de que sus elementos casi conmutan módulo $\mathcal{I}(\mathcal{N})$. Tomemos $\pi \in G \setminus \mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. El lema III.14 nos asegura la existencia de un $B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ tal que, para cada $i < \omega$, $\pi[[n_i, n_{i+1}) \setminus B] \subseteq [n_i, n_{i+1})$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $B \subseteq \text{Mov}(\pi)$, de modo que para cada $i < \omega$ y para cada $j \in [n_i, n_{i+1}) \setminus B$, se cumple que $j \neq \pi(j) \in [n_i, n_{i+1})$. Dado que, para cada $i < \omega$, tenemos que $\pi \upharpoonright ([n_i, n_{i+1}) \setminus B)$ es una inyección con rango $[n_i, n_{i+1})$, entonces podemos elegir un $\tau \in S_\omega$ tal que $\tau \upharpoonright (\omega \setminus B) = \pi \upharpoonright (\omega \setminus B)$ y tal que, para cada $i < \omega$, $\tau \upharpoonright [n_i, n_{i+1}) \in S_{[n_i, n_{i+1})}$ (es decir, $\tau \in P_\mathcal{N}$, de acuerdo con la notación II.10). De esta forma, es claro que $\text{Mov}(\tau^{-1}\pi) \subseteq B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, por lo tanto, $\tau\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) = \pi\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \neq \mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

En este momento, para cada $Z \subseteq \omega$, elijamos un $\pi_Z \in S_\omega$ tal que

$$\left(\pi_Z \upharpoonright \omega \setminus \left(\bigcup_{i \notin Z} [n_i, n_{i+1}) \cap B\right)\right)(j) := \begin{cases} \tau(j); & j \in [n_i, n_{i+1}) \wedge i \in Z \\ j; & j \in [n_i, n_{i+1}) \setminus B \wedge i \notin Z \end{cases}.$$

Es decir, que para $i \in Z$, $\pi_Z \upharpoonright [n_i, n_{i+1}) = \tau \upharpoonright [n_i, n_{i+1})$, para $i \notin Z$, $\pi_Z \upharpoonright ([n_i, n_{i+1}) \setminus B) = \text{id}_{[n_i, n_{i+1}) \setminus B}$, y que $\pi_Z \upharpoonright \left(B \cap \bigcup_{i \notin Z} [n_i, n_{i+1})\right)$ sea una endobiyección arbitraria.

Ahora, enfoquémonos a demostrar que, para cada $Z \subseteq \omega$, $\pi_Z \in \mathbb{S}(\mathcal{I})$. Para ello, fijemos $Z \subseteq \omega$, tomemos un $A \subseteq \omega$ arbitrario y notemos que $|A \cap [n_i, n_{i+1})| \leq |\pi_Z[A] \cap [n_i, n_{i+1})| + |B \cap [n_i, n_{i+1})|$, y a la vez $|\pi_Z[A] \cap [n_i, n_{i+1})| \leq |A \cap [n_i, n_{i+1})| + |B \cap [n_i, n_{i+1})|$. Dado que $\lim_{i \to \infty} \frac{|B \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0$, esto implica que

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|A \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0 \iff \lim_{i \to \infty} \frac{|\pi_Z[A] \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 0,$$

i.e. que $A \in \mathcal{I}(\mathcal{N}) \iff \pi_Z[A] \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Esto implica que $\pi_Z \in \mathbb{S}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. Más aún, dado que $\text{Mov}(\tau) \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$ (pues ya dijimos que $\tau\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \notin \mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$), entonces hay un $\varepsilon > 0$ y un $X \in [\omega]^\omega$

tal que

$$(\forall i \in X)\left(\frac{|\{m \in [n_i, n_{i+1})\big|\tau(m) \neq m\}|}{n_{i+1} - n_i} = \frac{|\operatorname{Mov}(\tau) \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \geq \varepsilon\right).$$

En este momento, nos interesa demostrar que si $Z, W \subseteq X$ son tales que $|Z \triangle W| = \omega$, entonces $\pi_Z\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \neq \pi_W\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. Como $Z \triangle W$ es infinito, entonces o bien $Z \setminus W$ o bien $W \setminus Z$ es infinito, supongamos, sin perder generalidad, el primer caso. Sea $i \in Z \setminus W$, y $j \in [n_i, n_{i+1}) \setminus B$. Entonces, como $i \notin W$ y $j \notin B$, tenemos que $\pi_W(j) = j$. Como $i \in Z$, entonces $\pi_Z \upharpoonright [n_i, n_{i+1}) = \tau \upharpoonright [n_i, n_{i+1}) \in S_{[n_i, n_{i+1})}$. Luego, $\pi_Z^{-1}(\pi_W(j)) = \pi_Z^{-1}(j) = \tau^{-1}(j)$, el cual es $\neq j$ si y sólo si $\tau(j) \neq j$. De esta forma, para una infinidad de $i < \omega$ (pues esto se cumple para cada $i \in Z \setminus W$), tenemos que $|\operatorname{Mov}(\pi_Z^{-1}\pi_W) \cap [n_i, n_{i+1}) \setminus B| = |\operatorname{Mov}(\tau) \cap [n_i, n_{i+1}) \setminus B|$. En particular, dado que $B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$, si tomamos $0 < \delta < \varepsilon$, existirá un $m < \omega$ tal que para cada $n \geq m$ se satisface

$$\frac{|B \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \leq \delta$$

luego, para cada $i \in Z \setminus W$ que sea $\geq m$ (hay una infinidad de tales i), se cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{|\operatorname{Mov}(\pi_Z^{-1}\pi_W) \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} &\geq \frac{|\operatorname{Mov}(\pi_Z^{-1}\pi_W) \cap [n_i, n_{i+1}) \setminus B|}{n_{i+1} - n_i} \\
&= \frac{|\operatorname{Mov}(\tau) \cap [n_i, n_{i+1}) \setminus B|}{n_{i+1} - n_i} \\
&= \frac{|\operatorname{Mov}(\tau) \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} - \frac{|B \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \geq \varepsilon - \delta > 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\text{lím}\left(\frac{|\operatorname{Mov}(\pi_Z^{-1}\pi_W) \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i}\right) \neq 0$$

y por lo tanto $\operatorname{Mov}(\pi_Z^{-1}\pi_W) \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$, es decir, $\pi_Z\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \neq \pi_W\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Dado que es posible encontrar una familia $\mathscr{F} \subseteq \wp(X)$ tal que $(\forall A, B \in \mathscr{F})(|A \triangle B| = \omega)$ con $|\mathscr{F}| = \mathfrak{c}$ (por ejemplo, definimos, para $A, B \subseteq W$, $A =^* B$ si y sólo si $|A \triangle B| < \omega$, vemos que $=^*$ es una relación de equivalencia y que cada clase de equivalencia tiene sólo una cantidad numerable de elementos, y por lo tanto basta tomar $\mathscr{F}$ un conjunto completo de representantes módulo $=^*$), podemos concluir que el conjunto $\{\pi_Z\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))\big|Z \subseteq X\}$ nos proporciona $\mathfrak{c}$ elementos distintos de $\mathbb{S}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))/\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Teorema III.17. *$A(\mathcal{I}(\mathcal{N})) = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Tomemos un subgrupo abeliano maximal de $\mathbb{S}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))/\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$ arbitrario, llamémoslo $G/\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. Entonces, tenemos que G será un subconjunto de $\mathbb{S}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$ maximal respecto de la propiedad de que sus elementos casi conmutan módulo $\mathcal{I}(\mathcal{N})$. Tomemos, entonces, $\{\pi_Z\big|Z \subseteq X\}$

como en la construcción III.16. Si demostramos que G contiene a $\{\pi_Z \big| Z \subseteq X\}$, entonces $G/\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$ tendrá cardinalidad por lo menos (y por lo tanto, igual a) $\mathfrak{c}$. Esto nos dará el resultado del teorema.

Sea, entonces, $Z \subseteq \omega$ e intentemos demostrar que $\pi_Z \in G$. Para ello, tomemos $\rho \in G$ arbitrario y demostremos que π_Z casi conmuta con ρ, al ser G maximal esto nos permitirá concluir que $\pi_Z \in G$. Por el lema III.14, hay un $C \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ tal que, para cada $i < \omega$ y para cada $j \in [n_i, n_{i+1}) \setminus C$, se cumple que $\rho(j) \in [n_i, n_{i+1})$. Dado que ρ y π casi conmutan módulo $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ (debido a que $\rho, \pi \in G$), entonces tomemos un $D \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ tal que $(\forall j \in \omega \setminus D)(\rho(\pi(j)) = \pi(\rho(j)))$. Dado que $\rho \in \mathbb{S}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$, entonces $\rho^{-1}[B] \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ (en donde, nuevamente, $B \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ es como en la construcción III.16). Luego, tenemos que $E := B \cup \rho^{-1}[B] \cup C \cup D \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Quisiéramos demostrar que $\text{N.C.}(\pi_Z, \rho) \subseteq E \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Tomemos entonces $j \in \omega \setminus E$. Sea $i < \omega$ tal que $j \in [n_i, n_{i+1})$. Hay dos casos:

1: $i \in Z$: En este caso, $\pi_Z(j) = \tau(j) = \pi(j)$, debido a que $j \notin B$. Además, dado que también $j \notin C$, entonces $\rho(j) \in [n_i, n_{i+1})$, y como $j \notin E$ entonces $\rho(j) \notin B$, de modo que $\pi_Z(\rho(j)) = \pi(\rho(j)) = \rho(\pi(j)) = \rho(\pi_Z(j))$ (la igualdad de enmedio se debe a que $j \notin D$).
2: $i \notin Z$: Entonces, dado que $j, \rho(j) \notin B$, tenemos que $\pi_Z(j) = j$ y como $j \notin C$ entonces también $\rho(j) \in [n_i, n_{i+1})$. De esta manera, $\pi_Z(\rho(j)) = \rho(j) = \rho(\pi_Z(j))$.

De esta forma, $\text{N.C.}(\pi_Z, \rho) \subseteq E$ y por lo tanto π_Z casi conmuta con ρ. Luego $(\forall Z \subseteq X)(\pi_Z \in G)$ y por lo tanto $G/\mathbb{F}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Esto demuestra el teorema. ❑

El siguiente teorema establece que, a diferencia de $A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$, $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$ podría ser más pequeño que $\mathfrak{c}$.

Teorema III.18. $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) \leq \mathfrak{a}$.

Demostración. Sea $\mathscr{A}$ una familia maximal casi disjunta de tamaño $\mathfrak{a}$. Ahora, para cada $a \in \mathscr{A}$, sea $a^* := \bigcup_{i \in A} [n_i, n_{i+1})$; y sea $\mathscr{A}^* := \{a^* \big| a \in \mathscr{A}\}$. Claramente, si $a, b \in \mathscr{A}$ y $a \neq b$ entonces $a^* \neq b^*$, luego $\mathscr{A}^*$ es una familia de tamaño $\mathfrak{a}$. Dado que cada $a \in \mathscr{A}$ es infinito, entonces cada $a^* \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$ (pues para $n < \omega$, $n \in a \Rightarrow \frac{|a^* \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = 1$). Además, dados $a, b \in \mathscr{A}$ distintos, entonces $a \cap b$ es finito y por lo tanto $a^* \cap b^*$ es la unión de una cantidad finita de $[n_i, n_{i+1})$ y por lo tanto también es finito, en particular $a^* \cap b^* \in \mathcal{I}(\mathcal{N})$ (notemos que claramente $[\omega]^{<\omega} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{N})$). Luego $\mathscr{A}^*$ es una familia casi disjunta módulo $\mathcal{I}(\mathcal{N})$, así que bastará demostrar que es maximal. Sea, entonces $X \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Esto significa que hay un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$\hat{X} := \left\{ i < \omega \middle| \frac{|X \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \geq \varepsilon \right\}$$

es infinito. Dado que $\mathscr{A}$ es maximal casi disjunta, existe un $a \in \mathscr{A}$ tal que $a \cap \hat{X}$ es infinito. Pero, para cada $i \in a \cap \hat{X}$, tenemos que

$$\frac{|(a^* \cap X) \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} = \frac{|X \cap [n_i, n_{i+1})|}{n_{i+1} - n_i} \geq \varepsilon$$

(la igualdad se debe a que $i \in A$, la desigualdad a que $i \in \hat{X}$), lo cual implica que $\lim_{i\to\infty} \frac{|(a^*\cap X)\cap[n_i,n_{i+1})|}{n_{i+1}-n_i} \neq 0$ y por lo tanto $a^* \cap X \notin \mathcal{I}(\mathcal{N})$. Luego $\mathscr{A}^* \cup \{X\}$ ya no es casi disjunta módulo $\mathcal{I}(\mathcal{N})$. Entonces $\mathscr{A}^*$ es maximal y de tamaño $\mathfrak{a}$, que es lo que queríamos demostrar. ❑

Tan pronto como veamos que consistentemente $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$, habremos demostrado el resultado principal de esta sección, a saber, que es consistente que $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$. Pero lo que necesitamos no es más que un resultado clásico en el mundo del forzamiento.

Teorema III.19. *Sea $M \models \mathsf{ZFE} + \mathsf{HC}$ y sea $I \in M$. Sea G un filtro* $\mathrm{Fn}(I, 2)$*-genérico sobre M. Entonces, $M[G] \models \mathfrak{a} = \omega_1$.*

Demostración. En M, definiremos con cuidado una familia casi disjunta maximal $\mathscr{A}$ y veremos que ésta sigue siendo maximal en $M[G]$. Notemos primero que, si $X \subseteq \omega$ en $M[G]$, entonces hay un $I_0 \subseteq I$ numerable tal que, si $G_0 := G \cap \mathrm{Fn}(I_0, 2)$, entonces $X \in M[G_0]$. En efecto, tomemos $\mathring{X}$ un nombre bonito para subconjunto de $\check{\omega}$. Entonces, hay anticadenas A_n de $\mathrm{Fn}(I, 2)$, para $n < \omega$, tales que

$$\mathring{X} = \bigcup_{n<\omega}(\{\check{n}\} \times A_n).$$

Sea $I_0 := \bigcup\{\mathrm{dom}(p) \big| (\exists n < \omega)(p \in A_n)\}$. Dado que $\mathrm{Fn}(I, 2)$ tiene la c.c.c., entonces cada $|A_n| \leq \omega$, con lo cual $|I_0| = \omega$ en M. De esta forma, dado que cada $A_n \subseteq \mathrm{Fn}(I_0, 2)$, entonces $\mathring{X}$ es un $\mathrm{Fn}(I_0, 2)$-nombre y $X \in M[G_0]$. Por esta razón, para ver que $\mathscr{A}$ es maximal en $M[G]$, bastará suponer sin perder generalidad que $I = \omega$.

Procederemos ahora a construir $\mathscr{A}$. Sus elementos, $A_\xi \subseteq \omega$, serán elegidos recursivamente. Para empezar, aprovechemos que $M \models \mathsf{HC}$ para enumerar todos los $\langle p, \tau\rangle$ tales que $p \in \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ y τ es nombre bonito para subconjunto de $\check{\omega}$, de modo que $\langle p_\xi, \tau_\xi\rangle$, para $\omega \leq \xi < \omega_1$, sean todos esos pares. Para $n < \omega$, elijamos A_n cualesquiera conjuntos disjuntos. Ahora supongamos que conocemos A_η para $\eta < \xi$, con $\omega \leq \xi < \omega_1$. Entonces, elegiremos A_ξ que satisfaga las siguientes dos características:

1. $(\forall \eta < \xi)(|A_\eta \cap A_\xi| < \omega)$, y
2. Siempre que se satisfaga $p_\xi \Vdash$ “$|\tau_\xi| = \omega$” y $(\forall \eta < \xi)(p_\xi \Vdash$ “$|\tau_\xi \cap \check{A}_\eta| < \check{\omega}$”), entonces se tiene que $(\forall n < \omega)(\forall q \leq p_\xi)(\exists r \leq q)(\exists m \geq n)(m \in A_\xi \wedge r \Vdash$ “$\check{m} \in \tau_\xi$”).

Para ver que en efecto podemos elegir un A_ξ con esa propiedad, supongamos que se cumple el antecedente de la segunda condición (ya que de lo contrario, bastará elegir un A_ξ casi disjunto con el resto de los A_η). Sea $\{B_i \big| i < \omega\}$ una enumeración de $\{A_\eta \big| \eta < \xi\}$ y $\{\langle n_i, q_i\rangle \big| i < \omega\}$ una enumeración de $\omega \times \{q \big| q \leq p_\xi\}$. Debido a la suposición, para cada i se tiene que

$$q_i \Vdash \text{“}|\tau_\xi \setminus (\check{B}_0 \cup \cdots \cup \check{B}_i)| = \check{\omega}\text{”},$$

luego podemos elegir un $r_i \leq q_i$ y $m_i \geq n_i$ tal que $m_i \notin B_0 \cup \cdots \cup B_i$ y $r_i \Vdash \text{“}\check{m}_i \in \tau_\xi\text{”}$. Hacemos $A_\xi := \{m_i \big| i < \omega\}$, claramente por construcción A_ξ es infinito y casi disjunto con los A_η, y además se cumple el consecuente de la segunda condición.

Veamos ahora que $\mathscr{A} := \{A_\xi \big| \xi < \omega_1^M\}$ sigue siendo maximal en $M[G]$, en donde G es un $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$-genérico sobre M. Si $\mathscr{A}$ no fuera maximal en $M[G]$, entonces habría un par $\langle p_\xi, \tau_\xi\rangle$ tal que $p_\xi \in G$, $p_\xi \Vdash \text{“}|\tau_\xi| = \check{\omega}\text{”}$ y $p_\xi \Vdash \text{“}(\forall X \in \mathscr{A})(|\tau_\xi \cap X| < \check{\omega})\text{”}$. Esto es, en la etapa en la que se construyó A_ξ por recursión, se cumplía el antecedente de la segunda condición. Pero también se cumple, en particular, que $p_\xi \Vdash |\tau_\xi \cap \check{A}_\xi| < \check{\omega}$, de modo que hay un $q \leq p_\xi$ y un $n < \omega$ tales que

$$q \Vdash \text{“}\tau_\xi \cap \check{A}_\xi \subseteq \check{n}\text{”},$$

lo cual contradice que

$$(\exists r \leq q)(\exists m \geq n)(m \in A_\xi \wedge r \Vdash \check{m} \in \tau_\xi).$$

❑

Corolario III.20 (Shelah-Steprāns). *Es relativamente consistente con* ZFE *que* $\mathfrak{a}(\mathcal{I}(\mathcal{N})) < A(\mathcal{I}(\mathcal{N}))$.

Demostración. Tómese, por ejemplo, $I = \omega_2$ en el teorema anterior. Entonces, dados los teoremas III.17 y III.18, el resultado es inmediato. ❑

3. Una cota inferior para el cardinal $A([\omega]^{<\omega})$

En esta sección, nuevamente retomaremos el ideal $[\omega]^{<\omega}$, y acotaremos por abajo al cardinal $A([\omega]^{<\omega})$. Para ello, habremos de introducir un par de notaciones.

Definición III.21.

- Para $\pi \in S_\omega$ y $X \subseteq \omega$, definimos la **órbita** de X bajo π de la manera siguiente:

$$\text{órb}_\pi(X) := \{\pi^i(x) \big| i \in \mathbb{Z} \wedge x \in X\}.$$

- Si $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$ y $X \subseteq \omega$, definiremos

$$\begin{aligned} \text{órb}_{\mathcal{S}}(X) &:= \left\{ \left(\prod_{i=1}^{n} \pi_i^{j_i} \right)(x) \middle| n < \omega \wedge x \in X \wedge \pi_i \in \mathcal{S} \wedge j_i \in \{-1, 1\} \right\} \\ &= \{\pi(x) | x \in X \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\} = \bigcup_{\pi \in \langle S \rangle} \bigcup_{x \in X} \text{órb}_\pi(\{x\}). \end{aligned}$$

- Para $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$, definimos el conjunto de órbitas bajo $\mathcal{S}$ como

$$\Omega_{\mathcal{S}} := \{\text{órb}_{\mathcal{S}}(\{n\}) | n < \omega\}.$$

Lema III.22. *Sea $H/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal de $S_\omega/\mathbb{F}$. Supóngase que existe $\mathcal{S} = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\} \in [H]^{<\omega}$ y el conjunto $\{|a| | a \in \Omega_{\mathcal{S}}\}$ es infinito. Entonces, $|H/\mathbb{F}| = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Para $j < \omega$ sea $A_j := \bigcup(\Omega_{\mathcal{S}} \cap [\omega]^j) = \{n < \omega | |\text{órb}_{\mathcal{S}}(\{n\})| = j\}$. Notemos que $\mathscr{A} = \{A_j | 2 \leq j < \omega\}$ es una familia de conjuntos disjuntos a pares, que además por hipótesis es infinita. Para cada $\varnothing \neq A_j \in \mathscr{A}$, elijamos algún $j^* \leq n$ tal que $\pi_{j^*} \upharpoonright A_j \neq \text{id}_{A_j}$ (el cual existe ya que si, por el contrario, para cada $j^* \leq n$ se tuviera que $\pi_{j^*} \upharpoonright A_j = \text{id}_{A_j}$, entonces tendríamos que $j = 1$). Para cada $F : \mathscr{A} \longrightarrow 2$, sea $\theta_F \in S_\omega$ dado por

$$\theta_F(k) = \begin{cases} \pi_{j^*}(k); & k \in A_j \wedge F(A_j) = 1 \\ k; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

(es claro que $\theta_F \in S_\omega$ debido a que cada A_j es unión de órbitas de $\mathcal{S}$). Notemos que (claramente) $\theta_F =^* \theta_G \Rightarrow F =^* G$. Por lo tanto, $\{\theta_F \mathbb{F} | F : \mathscr{A} \longrightarrow 2\}$ es un conjunto que contiene $|{}^{\mathscr{A}}2| = 2^\omega = \mathfrak{c}$ elementos distintos. Así, si mostramos que cada $\pi \in H$ casi conmuta con cada uno de los θ_F, la maximalidad de $H/\mathbb{F}$ implicará que cada $\theta_F \mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$ y por lo tanto $|H/\mathbb{F}| = \mathfrak{c}$.

Tomemos entonces $\pi \in H$, y $F : \mathscr{A} \longrightarrow 2$, y demostremos que $\text{N.C.}(\theta_F, \pi) \in [\omega]^{<\omega}$. Sea j lo suficientemente grande como para que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} \text{N.C.}(\pi_i, \pi) \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} A_i$$

(que existe ya que el conjunto de la izquierda es finito). Luego, si $k > j$ entonces para cada $1 \leq i \leq n$, $\pi \upharpoonright A_k$ y $\pi_i \upharpoonright A_k$ conmutan. Así, para mostrar que $\text{N.C.}(\theta_F, \pi)$ es finito, bastará mostrar que $\pi \upharpoonright A_k \in S_{A_k}$ para cada $k > j$, pues de esta forma, para $m \in A_k$, tendremos que $\pi(m) \in A_k$, luego tanto j como $\pi(j)$ caen en el mismo caso en la definición de θ_F. Esto es,

$$\begin{aligned}\pi(\theta_F(m)) &= \begin{cases}\pi(\pi_{k^*}(m)); \ k \in A_j \wedge F(A_j) = 1\\ \pi(m); \ \text{otro caso}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\pi_{k^*}(\pi(m)); \ k \in A_j \wedge F(A_j) = 1\\ \theta_F(\pi(m)); \ \text{otro caso}\end{cases}\\ &= \theta_F(\pi(m)),\end{aligned}$$

y esto implicará que $\text{N.C.}(\theta_F, \pi) \subseteq \bigcup_{i=1}^{j} A_i$.

Así, enfoquémonos a demostrar que, para $k > j$, $\pi \restriction A_k \in S_{A_k}$. Pero si $a \in A_k$, entonces, debido a que $a \notin \text{N.C.}(\pi_i, \pi)$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $\pi \restriction \text{órb}_{\mathcal{S}}(\{a\})$ es una biyección desde $\text{órb}_{\mathcal{S}}(\{a\})$ hasta $\text{órb}_{\mathcal{S}}(\{\pi(a)\})$ (pues para $\sigma \in \langle \mathcal{S} \rangle$, $\pi(\sigma(a)) = \sigma(\pi(a))$). Así, si tuviéramos que $\pi(a) \in A_l$ para algún $l \neq k$, entonces necesariamente tendríamos que $|\text{órb}_{\mathcal{S}}(a)| = k \neq |\text{órb}_{\mathcal{S}}(\pi(a))|$, lo cual contradice que π es una biyección. ❑

Definición III.23.

- Para $\pi \in S_\omega$, definimos
$$I(\pi) := \{n < \omega \big| |\text{órb}_\pi(\{n\})| = \omega\}.$$
- Para $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$, definiremos
$$I^*(\mathcal{S}) := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \bigcup_{m \in I(\sigma)} \text{órb}_{\mathcal{S}}(\{m\}) = \{\pi(m) \big| (\exists \sigma \in \mathcal{S})(|\text{órb}_\sigma(\{m\})| = \omega) \wedge \pi \in \langle \mathcal{S} \rangle\}.$$

Notemos que, para $\mathcal{S} \subseteq S_\omega$, se cumple que $m \notin I^*(\mathcal{S}) \iff \text{órb}_{\mathcal{S}}(\{m\}) \cap I^*(\mathcal{S}) = \emptyset$.

A continuación enunciaremos, sin demostrarlo, un lema que nos será de utilidad al momento de demostrar el teorema principal de esta sección. La demostración resulta ser bastante larga, e incluirla en el presente trabajo muy probablemente nos distraería del objetivo principal de esta sección, que es demostrar la desigualdad $\mathfrak{p} \leq A([\omega]^{<\omega})$.

Lema III.24. *Sea $H \subseteq S_\omega$ un subgrupo no numerable, maximal respecto a la propiedad de que sus elementos casi conmutan entre sí. Si $|H| < \mathfrak{c}$, entonces $[\omega]^{<\omega} \cup \{I^*(\mathcal{S})\}_{\mathcal{S} \in [H]^{<\omega}}$ genera un ideal propio.*

Demostración. Consultar [**22**, Lemma 3.5, pp. 206-207]. ❑

Definición III.25. Una **involución** es una función $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A$ con $A \subseteq \omega$ tal que $\pi \circ \pi = \text{id}_A$.

TEOREMA III.26 (Shelah-Steprāns). *Sea $H/\mathbb{F} \leq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable. Entonces, $|H| \geq \mathfrak{p}$ (es decir, se cumple que $A([\omega]^{<\omega}) \geq \mathfrak{p}$).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $H/\mathbb{F} \subseteq S_\omega/\mathbb{F}$ un subgrupo abeliano maximal no numerable, y supongamos que $|H/\mathbb{F}| < \mathfrak{p}$.Definamos el siguiente preorden $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P} := \{p = (h^p, \mathcal{S}^p)\big| h^p \text{ es una involución finita} \wedge \mathcal{S}^p \in [H]^{<\omega}\},$$

en donde consideraremos que $p \leq q$ si y sólo si se cumplen las siguientes cuatro condiciones:

1. $h^p \supseteq h^q$,
2. $\mathcal{S}^p \supseteq \mathcal{S}^q$,
3. $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \emptyset$, y
4. siempre que $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma \in \mathcal{S}^q$, se cumple que $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$ y $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$.

Veamos que en efecto $\mathbb{P}$ es un preorden. La relación $\leq$ es claramente reflexiva, veamos ahora que es transitiva: supóngase que $p \leq q$ y $q \leq r$. Para probar que $p \leq r$, las primeras dos condiciones son inmediatas. Para la tercera condición, notemos que $\mathrm{dom}(h^p \setminus h^r) = \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \cup \mathrm{dom}(h^q \setminus h^r)$, luego basta ver que cada uno de los dos conjuntos del lado derecho son disjuntos con $I^*(\mathcal{S}^r)$. El segundo lo es por hipótesis. El primero es disjunto con $I^*(\mathcal{S}^q)$, pero el hecho de que $\mathcal{S}^r \subseteq \mathcal{S}^q$ implica que $I^*(\mathcal{S}^r) \subseteq I^*(\mathcal{S}^q)$ y eso implica lo deseado. Finalmente, para ver la cuarta condición, tomemos $\sigma \in \mathcal{S}^r$ y $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^r)$. Si $j \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q)$, entonces como $\sigma \in \mathcal{S}^r \subseteq \mathcal{S}^q$, por hipótesis $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^p \setminus h^q) \subseteq \mathrm{dom}(h^p \setminus h^r)$ y además $\sigma(h^p(j)) = h^p(\sigma(j))$. Por otra parte, si $j \in \mathrm{dom}(h^q \setminus h^r)$, entonces automáticamente (por ser $\sigma \in \mathcal{S}^r$) $\sigma(j) \in \mathrm{dom}(h^q \setminus h^r) \subseteq \mathrm{dom}(h^p \setminus h^r)$ y $\sigma(h^q(j)) = h^q(\sigma(j))$, pero $h^q(j) = h^p(j)$, y por lo tanto la condición se cumple. Entonces, $p \leq r$ y $\mathbb{P}$ es, en efecto, un conjunto preordenado.

Ahora queremos ver que $\mathbb{P}$ es un preorden σ-centrado. Notemos primeramente que si $p, q \in \mathbb{P}$ son tales que $h^p = h^q$, entonces es inmediato que $(h^p, \mathcal{S}^p \cup \mathcal{S}^q) \in \mathbb{P}$ es una extensión común para p y q. Por lo tanto, dada una involución finita h, sea

$$G_h := \{p \in \mathbb{P}\big|(\exists \mathcal{S} \in [H]^{<\omega})((h, \mathcal{S}) \leq p)\}.$$

Es claro que cada G_h es cerrado por arriba, y si $p, q \in G_h$ entonces hay $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in [H]^{<\omega}$ tales que $(h, \mathcal{S}) \leq p$ y $(h, \mathcal{S}') \leq q$, de donde inmediatamente se sigue que $(h, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$ es una extensión común para p y q. De modo que, para cada involución finita h, el conjunto $G_h \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro. Dado que tan sólo hay una cantidad numerable de involuciones finitas, podemos suponer que $\{h_n \big| n < \omega\}$ es el conjunto de todas ellas. Entonces, el preorden $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} G_{h_n}$ es la unión de una cantidad numerable de filtros, y por lo tanto es σ-centrado.

Ahora bien, para cada $\pi \in S_\omega$, el conjunto $D_\pi := \{p \in \mathbb{P} \big| \pi \in \mathcal{S}^p\}$ claramente es denso. Por otra parte, para $n < \omega$, aseguramos que el conjunto $E_n := \{p \in \mathbb{P} \big| n \in \mathrm{dom}(h^p) \cup I^*(\mathcal{S}^p)\}$ también es denso. Para convencernos de ello, tomemos $p \in \mathbb{P}$ y supongamos que $n \notin I^*(\mathcal{S}^p)$. Entonces, dado que, para cada $\sigma \in \langle \mathcal{S} \rangle$ se tiene que $\sigma(n) \notin I^*(\mathcal{S}^p)$, es fácil comprobar que $\text{órb}_{\mathcal{S}^p}(\{n\})$ es finito (se puede hacer por inducción sobre $|\mathcal{S}^p|$, debido a que si $\sigma \in \mathcal{S}^p$ entonces $\text{órb}_{\mathcal{S}^p}(\{n\}) =^* \text{órb}_\sigma(\text{órb}_{\mathcal{S}^p \setminus \{\sigma\}}(\{n\}))$, siendo el conjunto del lado derecho finito por hipótesis inductiva). Sea entonces $h = h^p \cup \mathrm{id}_{\text{órb}_{\mathcal{S}^p}(\{n\}) \setminus \mathrm{dom}(h^p)}$ y $q = (h, \mathcal{S}^p)$. Entonces, $q \in E_n$ y además se tiene que $q \leq p$: las dos primeras condiciones se cumplen de manera obvia, la tercera es debido a que $\text{órb}_{\mathcal{S}^p}(\{n\}) \cap I^*(\mathcal{S}^p) = \varnothing$, y la cuarta se cumple debido a que h es la identidad en $\mathrm{dom}(h \setminus h^p)$.

Ahora mostremos que, para $\pi \in H$, $k < \omega$, los conjuntos $D_{\pi,k} := \{p \in \mathbb{P} \big| (\exists j \geq k)(h^p(j) \neq \pi(k))\}$ son densos en $\mathbb{P}$. Sea $p \in \mathbb{P}$. Por el mismo razonamiento de hace un momento, cada $\text{órb}_{\mathcal{S}}(\{n\})$ que sea disjunto con $I^*(\mathcal{S}^p)$ es finito. Más aún, por el lema III.22, si $\{|a| \big| a \in \Omega_{\mathcal{S}^p}\}$ es infinito, entonces $\mathfrak{c} \geq \mathfrak{p} > |H| = \mathfrak{c}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\{|a| \big| a \in \Omega_{\mathcal{S}^p}\}$ es finito. Ahora bien, como $|H| < \mathfrak{c}$, el lema III.24 implica que $\{I^*(\mathcal{S}) \big| \mathcal{S} \in [H]^{<\omega}\} \cup [\omega]^{<\omega}$ genera un ideal propio. Luego, $I^*(\mathcal{S}^p)$ tiene complemento infinito. Entonces, $\{|a| \big| a \in \Omega_{\mathcal{S}^p}\}$ es finito, pero como hay una infinidad de $n < \omega$ en los a que son finitos, ha de existir una infinidad de $a \in \Omega_{\mathcal{S}^p}$ que tienen la misma cardinalidad (finita). Esto significa que puedo encontrar $\{A, B\} \in [\Omega_{\mathcal{S}^p}]^2$ tales que

1. $A = \text{órb}_{\mathcal{S}^p}(\{n\})$, $B = \text{órb}_{\mathcal{S}^p}(\{m\})$
2. A, B son disjuntos de $I^*(\mathcal{S}^p)$.
3. A, B son disjuntos de h^p.
4. $k < \text{mín}(A)$, $k < \text{mín}(B)$.
5. La función $\Phi : A \longrightarrow B$ dada por $\Phi(\pi(n)) = \pi(m)$, para cada $\pi \in \langle \sigma \rangle$, es una biyección.

Entonces, hay dos casos: el primero es que $\Phi = \pi \upharpoonright A$. Entonces, definimos $h = h^p \cup \mathrm{id}_A$ y $q = (h, \mathcal{S}^p)$. El segundo caso es cuando ocurre lo contrario, entonces hacemos $h = h^p \cup \Phi \cup \Phi^{-1}$ y $q = (h, \mathcal{S}^p)$. En ambos casos es claro que $q \leq p$ y por lo tanto $q \in D_{\pi,k}$.

Ahora bien, dado que por hipótesis (tomando en cuenta que $|\mathbb{F}| = \omega$) se tiene que $|H| \leq \mathfrak{p} = \mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$ (por el teorema 0.29), entonces si $\mathscr{D} = \{D_\pi \big| \pi \in H\} \cup \{E_n \big| n < \omega\} \cup \{D_{\pi,k} \big| \pi \in H \wedge k < \omega\}$, ha de existir un filtro G que es $\mathscr{D}$-genérico (pues $|\mathscr{D}| = |H| < \mathfrak{p}$). Sea $\pi_G : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\pi_G(j) = \begin{cases} h^p(j); & (\exists p \in G)(j \in \mathrm{dom}(h^p)) \\ j; & \text{otro caso.} \end{cases}$$

El hecho de que G es filtro implica que π_G está bien definida. Es fácil ver que $\pi_G \in S_\omega$, debido a que es una unión de involuciones finitas a las cuales se les "pega" un fragmento de id_ω. Aseguramos que $\pi_G\mathbb{F}$ conmuta con cada elemento $\pi\mathbb{F} \in H/\mathbb{F}$. Sea $p \in G$ con $\pi \in \mathcal{S}^p$, y supongamos que $j \in \omega \setminus \mathrm{dom}(h^p)$. Entonces, hay dos casos:

1: Para algún $q \in G$, $j \in \mathrm{dom}(h^q)$. En este caso, sin perder generalidad puedo suponer que $q \leq p$, por lo tanto, al ser $j \in \mathrm{dom}(h^q \setminus h^p)$ y $\pi \in \mathcal{S}^p$, puedo concluir que $\pi(h^q(j)) = h^q(\pi(j))$, y también se cumple que $\pi(j) \in \mathrm{dom}(h^q \setminus h^p) \subseteq \mathrm{dom}(h^q)$, por lo que $\pi_G(\pi(j)) = h^q(\pi(j))$. Por lo tanto, $\pi(\pi_G(j)) = \pi(h^q(j)) = h^q(\pi(j)) = \pi_G(\pi(j))$.

2: En otro caso, dado que $E_j \cap G \neq \emptyset$, entonces ha de existir un $q \in G$ con $j \in I^*(\mathcal{S}^q)$. Sin perder generalidad puedo suponer que $q \leq p$ y por lo tanto $\pi \in \mathcal{S}^q$. Como $j \in I^*(\mathcal{S}^q)$, entonces $\pi(j) \in I^*(\mathcal{S}^q)$. Luego toda extensión $r \in G$ de q satisface que $\pi(j) \notin \mathrm{dom}(h^r)$ (ya que si $r \leq q$ entonces $\mathrm{dom}(h^r \setminus h^q) \cap I^*(\mathcal{S}^q) = \emptyset$). Por lo tanto, $\pi_G(\pi(j)) = \pi(j)$, y así tenemos que $\pi(\pi_G(j)) = \pi(j) = \pi_G(\pi(j))$.

De esta forma, $\mathrm{N.C.}(\pi_G, \pi) \subseteq \mathrm{dom}(h^p)$ y π_G casi conmuta con π. Por la maximalidad de $H/\mathbb{F}$, esto implica que $\pi_G\mathbb{F} \in H$.

El problema ahora es que G también intersecta a todos los $D_{\pi,k}$ para $\pi \in H$, $k < \omega$, lo cual implica que, para cada $\pi \in H$, claramente $\pi \neq \pi_G$, y esto contradice el hecho recientemente demostrado de que $\pi_G\mathbb{F} \in H$. Por lo tanto, ha de tenerse que $|H/\mathbb{F}| \geq \mathfrak{p}$. ❑

De esta forma, los resultados obtenidos en esta sección junto con los de la primera sección, nos permiten asegurar que ya tenemos bastante información acerca del cardinal $A([\omega]^{<\omega})$: sabemos que éste se encuentra entre $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{a}$.

Conclusiones

En una primera aproximación, la principal conclusión del presente trabajo de tesis es que existe, o puede existir, una fuerte interacción entre el álgebra y la teoría de conjuntos. Tradicionalmente, se piensa que la "codificación" de los objetos del álgebra en términos de conjuntos no es más que un artificio para formalizar estas nociones, sin consecuencias a la hora de atacar problemas "reales", problemas "genuinamente matemáticos", que surgen de manera "natural". Sin embargo, es de esperar que la presente tesis muestre cómo es que ciertos problemas, que surgen de manera natural en el álgebra, reflejan la estructura conjuntista de los objetos del álgebra de una manera tan profunda que sólo pueden atacarse con los métodos de la teoría de conjuntos. Un ejemplo claro de esto lo constituye el problema de Whitehead, que fue atacado en el primer capítulo. La pregunta acerca de $\mathrm{Ext}(G, \mathbb{Z})$ es profundamente conjuntista: se refiere a la exploración de las posibles funciones de algún grupo A en G que satisfacen ciertas propiedades. En otras palabras, estamos explorando posibles subconjuntos de $A \times G$ para cada grupo A. La manera como los grupos y sus morfismos se definen en términos de conjuntos, tiene como consecuencia que las herramientas de la teoría de conjuntos resulten de primordial importancia en la exploración del problema de Whitehead, al grado de que este último resultó ser indecidible en el sistema axiomático ZFE.

En los últimos dos capítulos, se exploran problemas que, si bien conciernen al álgebra, claramente son conjuntistas desde el momento de su planteamiento. El grupo simétrico S_ω es el conjunto de biyecciones de ω en ω, de manera que investigar a este grupo necesariamente implica investigar el conjunto $\wp(\omega \times \omega)$. Tan es así, que el grupo S_ω tiene cardinalidad 2^ω, de modo que claramente su estructura y muchas de sus propiedades deberán depender del tamaño del continuo. Por lo tanto, es de esperarse que muchas de las propiedades del grupo S_ω varíen de acuerdo con los diversos modelos de ZFE que elijamos para trabajar con este grupo. Claros ejemplos de estas propiedades, son los invariantes cardinales $\mathrm{cf}(S_\omega)$ y $A([\omega]^{<\omega})$, mismos que logramos ubicar adecuadamente dentro de nuestro diagrama de los invariantes cardinales del continuo.

De esta forma, estos son invariantes cardinales que pueden ser iguales al continuo y estrictamente mayores que ω_1 (por ejemplo, en un modelo del axioma de Martin), o bien pueden ser iguales a ω_1 (por ejemplo, en un modelo de la hipótesis del continuo). O bien, pueden tomar diversos valores intermedios, como puede apreciarse claramente en el diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{c} & \\
\mathfrak{a} \arrow[ur] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
 & & \mathrm{cf}(S_\omega) \arrow[ul] \\
A([\omega]^{<\omega}) \arrow[uu] & \mathfrak{b} \arrow[uul] \arrow[uu] & \\
 & & \mathfrak{g} \arrow[uu] \\
 & \mathfrak{p} \arrow[uul] \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
 & \mathfrak{m} \arrow[u] & \\
 & \omega_1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Así pues, en conclusión, podemos asegurar que el conocimiento profundo del sistema axiomático ZFE resultará cada vez más fundamental para atacar los nuevos problemas que vayan surgiendo de manera natural dentro del álgebra.

Bibliografía

[1] Baer, R. *Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich*. Studia Math. vol. 5, pp. 15-17, 1934.

[2] Bartoszyński, Tomek y Judah, Haim *Set Theory. On the Structure of the Real Line.* A. K. Peters, Massachusetts, 1995.

[3] Bell, Murray G. *On the combinatorial principle* $P(c)$. Fundamenta Mathematicae vol. 114, pp. 149-157, 1981.

[4] Brendle, Jörg y Losada, Maria *The cofinality of the infinite symmetric group and groupwise density*. The Journal of Symbolic Logic vol. 68, pp. 1354-1361, 2003.

[5] Devlin, Keith J. *The Axiom of Constructibility.A Guide for the Mathematician.* Lecture Notes in Mathematics (617), Springer-Verlag, 1977.

[6] Devlin, Keith J. *Constructibility*. Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1984.

[7] Eklof, Paul C. *Whitehead's Problem is Undecidable*. American Mathematical Monthly vol. 83, pp. 775-788, 1976.

[8] Fuchs, László *Infinite abelian groups* Vol. 1, Pure and Applied Mathematics (36), Academic Press, 1970.

[9] Hernández-Hernández, Fernando *Submodelos elementales en topología*. Aportaciones Matemáticas, Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana vol. 35, pp. 147-174, 2005.

[10] Hrbacek, Karel y Jech, Thomas *Introduction to set theory.* 3rd. ed., Pure and Applied Mathematics (220), Marcel Dekker, 1999.

[11] Hrušak, Michael *Invariantes cardinales del continuo.* Notas mecanografiadas.

[12] Hungerford, Thomas W. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics (73), Springer Verlag, 1974.

[13] Jech, Thomas *Set Theory*. Pure and Applied Mathematics (79), Academic Press, 1978.

[14] Kunen, Kenneth *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (102), Elsevier, 2006.

[15] Macpherson, H. D. y Neumann, Peter M. *Subgroups of infinite symmetric groups*. Journal of the London Mathematical Society vol. 42, pp. 64-68, 1990.

[16] Neumann, Peter M. *Homogeneity of infinite permutation groups*. Bulletin of the London Mathematical Society vol. 20, pp. 305-312, 1988.

[17] Sharp, James D. y Thomas, Simon *Uniformization Problems and the Cofinality of the Infinite Symmetric Group*. Notre Dame Journal of Formal Logic vol. 35, pp. 328-345, 1994.

[18] Sharp, James D. y Thomas, Simon *Unbounded families and the cofinality of the infinite symmetric group*. Archive for Mathematical Logic vol. 34, pp. 33-45, 1995.

[19] Shelah, Saharon *Infinite abelian groups, Whitehead problem and some constructions*. Israel Journal of Mathematics vol. 18, pp. 243-256, 1974.

[20] Shelah, Saharon *A compactness theorem for singular cardinals, free algebras, Whitehead problem and transversals*. Israel Journal of Mathematics vol. 21, pp. 319-349, 1975.

[21] Shelah, Saharon *Proper and Improper Forcing*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1998.

[22] Shelah, Saharon y Steprāns, Juris *Possible cardinalities of maximal abelian subgroups of quotients of permutation groups of the integers*. Fundamenta Mathematicae vol. 196, pp. 197-235, 2007.

[23] Thomas, Simon *Groupwise density and the cofinality of the infinite symmetric group*. Archive for Mathematical Logic vol. 37, pp. 483-493, 1998.

[24] Van Douwen, Eric K., "The Integers and Topology". En Kunen, K. y Vaughan, J. E. (eds.); *Handbook of Set-Theoretic Topology*. North Holland, 1984; pp. 111-167.

[25] Vargas Mendoza, José Antonio; *Álgebra Abstracta*. Editorial Limusa, 1986.

[26] Villegas Silva, Luis Miguel; Rojas Rebolledo, Diego y Miranda Perea, Favio Ezequiel; *Conjuntos y modelos. Curso Avanzado.* Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa, 2000.

Índice alfabético

$\leq^*$, 11
$\subseteq^*$, 10

$\mathfrak{a}$, 12–14, 16, 21, 67, 73, 76, 80, 81
$\mathfrak{a}(\mathcal{I})$, 76, 80, 82
$\mathbb{A}$, 48, 55
$A(\mathcal{I})$, 67, 73, 76, 79, 82, 85
AM, 19–21, 42, 53
AM_κ, 20
anticadena, 19
axioma
 de constructibilidad, 35–39
 de Martin, 19, 42, 53

$\mathfrak{b}$, 11, 12, 14, 16, 21
base de un grupo abeliano libre, 2–4
$(B, \mathbb{Z})$-grupo, 29, 30

$\mathfrak{c}$, 10, 16, 21
cadena, 9
 de grupos, 10
 estricta, 9
 suave, 9
casi contenido, 10
c.c.c. (condición de cadena contable), 19
cerradura pura, 27–28
cf^*, 56, 59, 60
Chase, condición de, 32–33, 40, 42
cofinalidad de un grupo, 51
condición de Chase, 32–33, 40, 42
conjunto preordenado, 18
 σ-centrado, 20, 85
C.P., 27, 28

$\mathfrak{d}$, 12, 16, 21, 56
denso, 18
diagrama de Van Douwen, 15
$\diamond$, 35, 36

escala, 11, 16, 21, 53
escisión
 de un epimorfismo, 6, 8, 29, 30
 de una sucesión exacta corta, 7
espectro abeliano maximal, 67, 75
estabilizador
 conjuntista, 48
 puntual, 48
Ext, 24, 26
extensión (de grupos), 23–24

$\mathbb{F}$, 48
$\mathbb{F}(\mathcal{I})$, 75
familia
 casi ajena, 11, 13, 14
  maximal, 11, 13, 67
  módulo un ideal, 76
 casi disjunta, 11, 13, 14
  maximal, 11, 13, 67
  módulo un ideal, 76
 centrada, 11, 13
 densa por grupos, 11, 17, 55
 dominante, 11, 12
 no acotada, 11, 12, 15
Fij, 47
filtro, 18
 genérico, 19
forzamiento, 19

, noción de, 18
σ-centrada, 20, 85

$\mathfrak{g}$, 12, 17, 18, 21, 56, 65
grupo
abeliano libre, 2, 4, 6, 8, 10, 25, 28, 31, 39
, base de un, 2–4
, rango de un, 4
alternante infinito, 48, 55
de torsión, 1
libre de torsión, 1, 6, 26
simétrico infinito, 47–48, 50, 54, 55, 59, 60, 65

Hom, 25, 26

ideal, 75, 84
incompatibles, elementos, 19
involución, 84

lema
de condensación, 35
del $\triangle$-sistema, 44

$\mathfrak{m}$, 20, 21
$\mathfrak{m}(\sigma - \text{centrado})$, 20, 21, 86
mitad (de un conjunto infinito), 48
Mov, 47

ω_1-libre, 32
ω_1-puro, subgrupo, 32
órbita, 82–83

$\mathfrak{p}$, 12–14, 16, 18, 21, 85, 86
problema de Whitehead, 25, 46
pseudointersección, 11, 13
puro, subgrupo, 27

rango de un grupo abeliano libre, 4

S^*, 55, 56, 59
$\mathbb{S}(\mathcal{I})$, 75
S_ω, 47–48, 50, 54, 55, 59, 60, 65
sucesión exacta, 7
corta, 7, 26
, escisión de una, 7

torre, 15
torsión
, elemento de, 1
, grupo de, 1
, grupo libre de, 1, 6, 26
de un grupo, 1

universo construible, 34, 35

V = **L**, 35–39

W-grupo, 25–27, 29–32, 38, 39, 42, 46
Whitehead, problema de, 25, 46