



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**“ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS  
EN MATERIALES COMPUESTOS”**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA MECÁNICA—DISEÑO MECÁNICO

P R E S E N T A :

**MARIO ACOSTA FLORES**

TUTOR:

**DRA. FLORENCIA SERRANÍA SOTO**

**2010**





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## DEDICATORIA ESPECIAL

EL PRESENTE TRABAJO LO DEDICO MUY ESPECIALMENTE A MI GRAN AMIGO, ASESOR Y MAESTRO EL DR. LUIS A. FERRER ARGOTE POR SUS CONSEJOS Y APOYO INCONDICIONAL QUE ME BRINDÓ Y SOBRE TODO PORQUE SIENDO LA AUTORIDAD QUE FUE, ME DIO EL PRIVILEGIO DE SU ASESORÍA, LO QUE HIZO QUE ESTE PROYECTO DE INVESTIGACIÓN LLEGARA A SU FIN Y TENGA LOS RESULTADOS QUE TIENE. LAMENTO MUCHO NO HABERLE DADO LA SATISFACCIÓN DE PRESENCIAR LA CULMINACIÓN DE ESTE TRABAJO, PERO LE ENVÍO UN ABRAZO MUY SINCERO DONDE QUIERA QUE SE ENCUENTRE.

---

## AGRADECIMIENTOS

TE AGRADEZCO DIOS PORQUE ME DISTE LA DICHA DE VIVIR Y LA FUERZA QUE NECESITÉ, EN MUCHOS MOMENTOS DIFÍCILES QUE SE PRESENTARON DURANTE EL PROYECTO DE DOCTORADO.

UN AGRADECIMIENTO MUY ESPECIAL A MIS TRES GRANDES TESOROS, MIS HIJAS, ALEJANDRITA, CLARISITA Y NATHALITA POR LA MOTIVACIÓN E ILUSIONES QUE ME DIERON DÍA A DÍA DURANTE LOS AÑOS QUE DURÓ ESTE TRABAJO.

AGRADEZCO A MI ESPOSA POR SU PACIENCIA.

A MI MADRE Y A MI PADRE POR SU GRAN EJEMPLO DE LUCHA, SUS SABIOS CONSEJOS Y APOYO INCONDICIONAL BRINDADO.

A MIS HERMANOS ANTONIO, DANIEL Y GUSTAVO, POR SU DISPOSICIÓN Y APOYO, QUE ME MOTIVO MUCHO A SEGUIR LUCHANDO.

A LA DRA. FLORENCIA SERRANÍA POR LA CONFIANZA Y AMISTAD QUE NOS BRINDÓ AL DR. FERRER Y A MÍ, Y MUY ESPECIALMENTE, POR LA ASESORÍA BRINDADA EN EL PROYECTO DOCTORAL.

AL DR. CARRERA POR LA PRESIÓN MOTIVACIONAL QUE ME BRINDÓ EN TODO MOMENTO Y POR SUS CONSEJOS PROFESIONALES EN EL DESARROLLO DE LA TESIS.

AL DR. FEDERICO SABINA POR SU SABIA ASESORÍA DURANTE EL PRINCIPIO DEL PROYECTO DOCTORAL Y QUE POR RAZONES DE TRABAJO NO ESTÁ PRESENTE EN ESTOS MOMENTOS.

A FRANCISCO, POR SU GRAN AMISTAD Y PORQUE ESTUVO PRESENTE SIEMPRE QUE NECESITÉ SU APOYO.

A EUSEBIO PORQUE NO DUDÓ EN APOYARME SIEMPRE QUE PUDO.

AL DR. LEOPOLDO GONZÁLEZ POR SUS CONSEJOS Y APOYO PROFESIONAL.

AL DR. SANTILLÁN POR LOS CONSEJOS EN EL DESARROLLO DEL PRESENTE TRABAJO.

AL DR. BORJA Y AL DR. REIVICH POR SUS CONSEJOS, APOYO Y MOTIVACIÓN BRINDADA.

A LULÚ POR SU AMISTAD Y POR EL APOYO BRINDADO EN REVISAR Y DAR FORMATO AL PRESENTE TRABAJO.

A JESÚS TRENADO Y A PEDRO OJEDA POR SU AMISTAD Y DISPOSICIÓN EN APOYARME EN TODO MOMENTO.

A LUCY Y A SOCO POR SU GRAN AMISTAD Y POR EL APOYO MOTIVACIONAL Y ADMINISTRATIVO QUE ME BRINDARON.

A LA SRA. MARIANA MURGUÍA PORQUE TOMÓ EL LUGAR MOTIVACIONAL QUE EL DR. FERRER TENÍA.

---

AL ING. JOSÉ J. PIÑA Y AL ING. ALBERTO PROM POR SU AMISTAD E INTERÉS EN QUE TERMINARA ESTE TRABAJO.

AGRADEZCO AL POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM POR HACERME CRECER PROFESIONALMENTE DURANTE ESTE PERIODO.

AGRADEZCO TAMBIÉN A CONACYT POR SU APOYO ECONÓMICO.

DE PARTE DE MI ESPOSA, DE MIS HIJAS Y MÍA, LE ESTAMOS ETERNAMENTE AGRADECIDOS  
DR. FERRER

---

# ÍNDICE

DEDICATORÍA ESPECIAL	i
AGRADECIMIENTOS	ii
ÍNDICE	iv
GLOSARIO DE TÉRMINOS	vi
SIMBOLOGÍA	viii
RESUMEN	ix
INTRODUCCIÓN GENERAL	x
Motivo de la investigación	x
Relevancia del trabajo	x
Objetivos	xi
Contenido	xii
CAPÍTULO 1            ANTECEDENTES	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Extensómetros eléctricos de resistencia variable (strain gages) para el análisis experimental de esfuerzos.	6
1.3 Aportaciones a problemas existentes	7
CAPÍTULO 2            DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	8
2.1 Definición del problema	8
2.2 Objetivos específicos	8
2.3 Restricciones	9
2.4 Hipótesis general	9
CAPÍTULO 3            DESARROLLO DE MODELOS	10
3.1 Modelo de elasticidad lineal	11
3.2 Modelo lineal de tensión en laminados compuestos simétricos	11
3.3 Modelo Lineal para Materiales Compuestos Laminados Simétricos sujetos a Flexión	22

---

CAPÍTULO 4	ANÁLISIS EXPERIMENTAL DE ESFUERZOS EN	
	MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS SIMÉTRICOS	30
4.1	Justificación de las pruebas experimentales	30
4.2	Pruebas de tensión simple	32
4.3	Pruebas de Flexión	35
4.4	Pruebas experimentales	41
4.5	Resultados y análisis	45
CAPÍTULO 5	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	51
5.1	Conclusiones	51
5.2	Recomendaciones	52
APÉNDICE A.	CONCEPTOS TEÓRICOS	54
APÉNDICE B.	MODELO DE ELASTICIDAD LINEAL	59
APÉNDICE C.	MECÁNICA DE LÁMINAS SIMÉTRICAS	61
APÉNDICE D.	TEORÍA DE FLEXIÓN DE LÁMINAS	72
APÉNDICE E.	PROPIEDADES DE LAS COMPONENTES DE LOS LAMINADOS	86
APÉNDICE F.	INTERFACE	87
REFERENCIAS		91

---

## Glosario de términos

<b>Capa isotrópica</b>	Capas de material continuo, homogéneo con mismas propiedades elásticas en todas las direcciones.
<b>Capa o lámina</b>	Componente de un compuesto laminado
<b>Capa ortotrópica</b>	Capas de material continuo, homogéneo y con propiedades elásticas diferentes en cada plano de simetría.
<b>Compuesto laminado</b>	Conjunto de láminas o capas
<b>Compuesto laminado simétrico</b>	Laminado constituido por un grupo de capas que considera misma configuración en cada mitad de la lámina.
<b>Constantes efectivas o promedio</b>	Son las constantes que resultan de promediar las constantes de todas las capas que constituyen un material compuesto laminado.
<b>Ejes de simetría del laminado</b>	Son los ejes de simetría del compuesto laminado.
<b>Esfuerzo global</b>	Esfuerzo promedio que resulta de la integrar los esfuerzos locales (longitudinales y transversales) de cada capa través de todo el espesor del laminado compuesto.
<b>Esfuerzo global o promedio</b>	Esfuerzo promedio que resulta de la integrar los esfuerzos locales (longitudinales y transversales) de cada capa través de todo el espesor del laminado compuesto.
<b>Esfuerzo interlaminar</b>	Esfuerzo promedio que resulta de la integración de esfuerzos a través de la capa o pliegue.
<b>Esfuerzo longitudinal</b>	Esfuerzo que tiene misma dirección que el eje longitudinal del compuesto laminado

---

<b>Esfuerzo transversal</b>	Es un esfuerzo que tiene dirección ortogonal al eje longitudinal del compuesto laminado.
<b>Estado de deformaciones homogéneas</b>	Se define como aquel estado de deformaciones que es igual para todos los puntos que constituyen el cuerpo en análisis.
<b>Estado de esfuerzos homogéneo</b>	Se define como aquel estado de esfuerzos que es igual para todos los puntos que constituyen el cuerpo en análisis.
<b>Interface</b>	Es una capa física que se forma entre las componentes de los materiales compuestos.
<b>Laminado isotrópico</b>	Es un compuesto que tiene propiedades elástica promedio iguales en todas las direcciones.
<b>Laminado ortotrópico</b>	Es un compuesto que tiene propiedades elástica diferentes para cada plano de simetría.
<b>Material compuesto</b>	Un material compuesto es aquel que está formado de 2 o más componentes en una escala macroscópica, distinguibles físicamente y separables mecánicamente.
<b>Modelo global</b>	Es el modelo analítico que considera un material compuesto laminado como homogéneo.
<b>Modelo local</b>	Es el modelo analítico que considera únicamente una capa, homogénea, de un material compuesto laminado.
<b>Momento global</b>	Es el momento que se aplica en las fronteras del compuesto laminado
<b>Momento interlaminar</b>	Momento que, por la diferencia en las propiedades elásticas, resulta en cada capa constituyente al aplicar un momento al compuesto laminado.

---

## Simbología

$\sigma_{Gx}$	Esfuerzo global (promedio) en la dirección $x$
$\sigma_{Gy}$	Esfuerzo global(promedio) en la dirección $y$
$\sigma_{Lx}$	Esfuerzo local (interlaminar) longitudinal en la dirección $x$
$\sigma_{Ly}$	Esfuerzo local (interlaminar) transversal en la dirección $y$
$\sigma_{Lyz}$	Esfuerzo local (interlaminar) cortante
$E_{Gx}$	Módulo de Young global (promedio)en la dirección $x$
$E_{Gy}$	Módulo de Young (promedio)global en la dirección $y$
$\nu_{Gxy}$	Relación de Poisson global (promedio)
$E_{Lx}$	Módulo de Young local (interlaminar)en la dirección $x$
$E_{Ly}$	Módulo de Young local (interlaminar)en la dirección $y$
$\nu_{Lxy}$	Relación de Poisson longitudinal (promedio)
$\varepsilon_1^0$	Deformación homogénea en la dirección $1$
$\varepsilon_2^0$	Deformación homogénea en la dirección $2$
$\sigma_{G1}$	Esfuerzo global (promedio) en la dirección $1$
$\sigma_{G2}$	Esfuerzo global(promedio) en la dirección $2$
$A_{11}, A_{21}, A_{22}$	Constante promedio equivalentes en los planos $1$ y $2$
$Q_{11}, Q_{21}, Q_{22}$	Constantes para cada capa en los planos $1$ y $2$
$Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{xy}$	Constantes para cada capa en los planos de simetría $1$ y $2$
$\varepsilon_x$	Deformación en la dirección $x$
$\varepsilon_y$	Deformación en la dirección $y$
$M_{G1}$ y $M_{G2}$	Momentos globales con respecto a los ejes $1$ y $2$
$D_{11}, D_{22}$ y $D_{12}$	Módulos equivalentes en las direcciones $1$ y $2$
$k_1$ y $k_2$	Curvaturas en las direcciones $1$ y $2$
$M_{L1}$ y $M_{L2}$	Momentos locales en las capas con respecto a los ejes $1$ y $2$
$E_I$	Módulo de Young de la interface, isotrópica
$M_I$	Momento local en la interface

---

## **RESUMEN**

El análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos, por la trascendencia de estos últimos, hacen que sea fundamental en los desarrollos tecnológicos, aunque, los trabajos publicados muestran limitaciones en su aplicación; por ejemplo: los trabajos en donde se aplica la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable, se limitan a únicamente analizar el punto instrumentado. En este estudio, con la finalidad de poder analizar esfuerzos en forma experimental en materiales compuestos simétricos, se presenta un modelo con el cual en forma simple y sistemática y con información obtenida instrumentando en las fronteras, permite evaluar además de esfuerzos globales o promedio, también los valores de esfuerzos (locales) a lo largo de todo el espesor del compuesto laminado. El modelo en conjunto se compone de, el modelo constitutivo global (el laminado completo) y, de los modelos constitutivos de sus componentes (capas que constituyen al laminado).

---

# INTRODUCCIÓN GENERAL

## **Motivo de la investigación**

El análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos es fundamental para el análisis del comportamiento mecánico, la investigación, desarrollo y aplicación en los desarrollos tecnológicos. Es importante hacer notar que en muchos de los casos de estudio, los parámetros de interés y su efecto no pueden ser evaluados más que en forma experimental. La información que se obtiene a partir de medidas experimentales es real, y lleva consigo, el efecto mecánico de un gran número de variables no controladas (existentes en el material como resultado de su complejidad estructural y de fabricación) que se encuentran presentes y que es imposible incluir eficientemente en un modelo teórico (defectos de fibras, no uniformidad en los espesores de las capas, pureza de las resinas, defectos estructurales, defectos de pegado, etc.), por la complejidad de su inclusión o porque en muchos casos se desconoce el efecto de su presencia (por ejemplo los efectos de interfase entre capas, entre otras). Se ha observado, como se muestra en los antecedentes (capítulo 1) sobre análisis de esfuerzos, que existen conceptos (esfuerzos interlaminares, efectos de la interfase, y otros) que no se han trabajado a profundidad en forma experimental, por la falta de un modelo simple, consistente, y compatible con las técnicas experimentales.

El eficiente análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos requiere dos cosas fundamentalmente: conocimiento amplio del comportamiento mecánico de los materiales y dominio de la técnica experimental a utilizar. Actualmente, se puede notar que existe un gran desfase entre los trabajos de investigación que se llevan a cabo utilizando herramientas numéricas y los que utilizan la experimentación, lo cual deja un vacío muy grande como lo dicta el método de la ciencia (Introducción a la Lógica y al Método Científico, M. Cohen y E. Nagel, 2000).

Cabe mencionar que el análisis experimental de esfuerzos que se desarrolla actualmente se limita al análisis del estado de esfuerzos en el punto instrumentado, lo que limita el alcance para validar análisis numéricos y para analizar comportamientos mecánicos en un punto bajo condiciones de esfuerzos específicas, frentes de grietas, etc.

## **Relevancia del trabajo**

El estudio desarrollado es relevante en el campo experimental de los materiales compuestos porque además de ser un modelo simple y de fácil aplicación en el análisis global y local de esfuerzos y de proporcionar información real en la evaluación del comportamiento mecánico, la información obtenida del análisis puede ser utilizada en forma eficiente para validar o evaluar soluciones numéricas, además de que el modelo puede ser utilizado para obtener experimentalmente las constantes elásticas promedio y las de las capas constituyentes.

---

Considerando la importancia del análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos, el estudio desarrollado en este trabajo doctoral propone un modelo, con el cual es posible en forma experimental, conocer no sólo el estado de esfuerzos promedio real de un punto instrumentado, sino también su variación a lo largo de todo el espesor del compuesto. Lo anterior es posible determinando las deformaciones en las fronteras del punto de interés.

Es importante resaltar que el estudio presentado tiene como objetivo principal determinar experimentalmente el estado de esfuerzos en puntos instrumentados y su variación a lo largo de todo el espesor del compuesto laminado, sin importar la geometría ni las condiciones de frontera del problema global. Lo anterior implicó tener que desarrollar un modelo con el que utilizando herramientas experimentales se logra el objetivo, para lo cual sólo se requiere conocer las propiedades elásticas y la concentración dimensional de las capas constituyentes. Con el modelo desarrollado es posible evaluar experimentalmente el estado de esfuerzos puntual, el estado de promedio global en el punto y el estado de esfuerzos local (interlaminar), lo cual es de gran importancia y es relevante aun considerando en el modelo los esfuerzos como funciones constantes y lineales (para los casos de tracción y flexión) a través del espesor del laminado.

El modelo propuesto consiste en resolver un modelo teórico conformado por un problema constitutivo global (laminado compuesto) y por un número de problemas constitutivos locales (capas constituyentes).

Como ejemplos reales y para validar este trabajo se analizaron compuestos laminados metálicos sometidos a, tensión simple, y, a flexión, evaluando la distribución de esfuerzos a través del espesor de un compuesto laminado. Llevando a cabo un análisis experimental inverso se obtuvieron las constantes elásticas de los materiales constituyentes. Los resultados experimentales, evaluados al comparar las constantes elásticas de las componentes, fueron consistentes y con errores relativamente bajos.

Es importante resaltar que los resultados obtenidos, también pueden ser utilizados en forma eficiente para validar o evaluar soluciones numéricas.

## **Objetivos**

### Objetivo General

Analizar experimentalmente esfuerzos en materiales compuestos laminados simétricos.

### Objetivos particulares

- a) Desarrollar un modelo lineal basado en la teoría de la elasticidad lineal, en la teoría clásica de láminas y en el principio de superposición, con el cual

---

sea posible el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos laminados simétricos.

- b) Utilizando la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable se resuelva el problema en términos de esfuerzos.
- c) Determinar experimentalmente esfuerzos globales y locales en materiales compuestos laminados simétricos.
- d) Contar con un método para evaluar o validar soluciones numéricas.
- e) Evaluar el modelo de tal forma que permita conocer su eficacia y los alcances del mismo cuando se combina con el análisis experimental.
- f) Realizar un estudio experimental con el que se analicen los efectos mecánicos y las propiedades mecánicas de la interfase en compuestos laminados (isotrópicos), asumiendo su existencia como de una capa virtual.

## **Contenido**

El contenido de la tesis se encuentra estructurado de la siguiente forma:

- En el capítulo 1 se presentan antecedentes de trabajos publicados desde los 70's sobre análisis de esfuerzos en materiales compuestos, lo anterior justifica la importancia de este trabajo doctoral. La información recopilada se encuentra estructurada en forma cronológica, considerando dos partes relevantes: los desarrollos numéricos y los experimentales.
- En el capítulo 2 se define el problema que se resuelve en este trabajo, acompañado con las restricciones que lo enmarcan mecánicamente.
- En el capítulo 3 se desarrollan los modelos lineales para problemas de tensión y flexión, basados en la teoría de la elasticidad lineal, en la teoría clásica de láminas y en el principio de superposición, con los cuales es posible evaluar en forma experimental esfuerzos en materiales compuestos laminados simétricos.
- En el capítulo 4 se describen tanto físicamente como en forma analítica las pruebas realizadas, se los resultados para mostrar los alcances del presente estudio. En las pruebas se utilizaron probetas de compuestos laminados simétricos constituidos por capas ortotrópicas, y, se fabricaron materiales compuestos laminados con componentes isotrópicas de latón y aluminio, las probetas se sometieron a tensión simple y flexión. El análisis experimental de esfuerzos se valida, en ambos casos, determinando las constantes elásticas de las capas componentes, que se conocen pero que en los modelos se consideran desconocidas..

- 
- En el capítulo 5 se presentan las conclusiones y las recomendaciones que resultan del estudio.
  - En los apéndices A, B, C, D, E y F se incluyen conceptos que se consideran relevantes para el entendimiento y justificación del estudio presentado, se presentan los fundamentos de la teoría clásica de láminas para el análisis de esfuerzos en problemas de tensión y de flexión y se agregan las tablas de los resultados.

# **Capítulo 1**

## **Antecedentes**

El estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos estructurales (esfuerzos, delaminación, resistencia, fallas, nuevos materiales, etc.) ha adquirido importancia relevante por la innumerable cantidad de sus aplicaciones y nuevos desarrollos tecnológicos. En el mercado, se puede encontrar una gran variedad de materiales compuestos, por mencionar algunos, se tienen los reforzados con fibras longitudinales (de carbón, kevlar, vidrio, etc.).

Las ventajas de utilizar materiales compuestos, desde el punto de vista mecánico son muchas, razón por lo que se ha desarrollado mucha investigación al respecto. De los campos de mayor interés son: los de análisis esfuerzos (interlaminares, transversales, de borde, residuales, normales, etc.) y el de la obtención de propiedades mecánicas, los métodos utilizados para la solución son experimentales y numéricos.

En este capítulo se presenta como antecedentes una revisión de trabajos de investigación publicadas sobre el análisis de esfuerzos en materiales compuestos. Todo trabajo de investigación que se desarrolla en el campo de la mecánica de materiales compuestos, pasa, indiscutiblemente, por los trabajos de investigación de Nicholas J. Pagano, pionero en estudios realizados sobre mecánica de materiales compuestos. La revisión incluye trabajos publicados para analizar el comportamiento mecánico de materiales compuestos, utilizando soluciones experimentales, analizando conceptos relacionados con el comportamiento mecánico (esfuerzos globales, esfuerzos interlaminares, esfuerzos residuales, esfuerzos térmicos, fractura, etc.) y utilizando soluciones numéricas. Se presenta también el estado del arte sobre análisis experimental en materiales compuestos y un breve análisis del porque los extensómetros eléctricos son en la actualidad (Dally J. W. y Riley W. F., 2005) los más utilizados en análisis experimental de esfuerzos, con algunas aplicaciones en materiales compuestos en publicaciones del 2008 y 2009.

### **1.1 Antecedentes**

En los primeros trabajos realizados por uno de los pioneros en mecánica de materiales compuestos, N. J. Pagano, analizó los efectos físicos de deflexión que se generan por los elementos de sujeción cuando una probeta (de placa y cilíndrica) de un compuesto reforzado con fibras es sometido a tensión, considerando diferentes orientaciones de las fibras con respecto a la dirección de aplicación de la carga (Pagano y Halpin 1968).

La teoría clásica de láminas fue la primera herramienta para analizar el comportamiento mecánico placas laminadas compuestas (Tsai, 1980, Jones, 1975, Parton, 1993, Ugural, 1999). Dicha teoría se basa en las hipótesis de

---

kirchhoff, dando resultados aceptables de desplazamientos y de esfuerzos en el plano, y no considera los esfuerzos cortantes transversales en el análisis. Lo anterior no puede ser ignorado en placas no tan delgadas ni en láminas compuestas con elevadas diferencias en las propiedades elásticas de las capas que las conforman. Lo anterior es porque las suposiciones que se hacen se cumplen sólo en parte del problema y no en todo (Pagano 1981), lo que limita su aplicación en problemas de mayor complejidad (fractura, esfuerzos interlaminares, esfuerzos residuales, etc.). Lo anterior ha motivado a través de los años el desarrollo de diversos modelos numéricos, que permiten analizar problemas mecánicos imposibles de analizar con la teoría clásica. Pagano en 1969 presenta una solución exacta para un compuesto laminado en flexión cilíndrica y en 1974 un trabajo en el que justifica la importancia de las propiedades efectivas (globales) en las soluciones de compuestos reforzados con fibras. Puppo y Evensen (1970) desarrollaron la primera aproximación para la solución de laminas compuestas pero despreciaron los esfuerzos normales interlaminares, Whitney (1973) propuso otro método utilizando una teoría de mayor orden para analizar materiales compuestos, la cual fue extendida por Pagano (1974). Desde entonces, se han desarrollado otros métodos para analizar el comportamiento mecánico de los materiales compuestos (Dawe , 1993, Silva, 1993, Zeng, 1997, Tay, 1993).

A la fecha, los alcances de la teoría clásica de láminas han mejorado y actualmente existen un gran número de teorías para análisis de láminas. Las teorías más importantes son las siguientes (Toledan, 1988, Chattopadhyay, 1996, Zuo 1998, Wu, 1993, Tripathi, 1996, Mallikarjuna 1993, Xiao, 1998, Verijenko, 1993, Kam, 1993, Thomsen, 1993, Yang, 1997, Kim, 1996):

1. Teorías de esfuerzos cortantes transversales
2. Teoría de análisis capa a capa
3. Teorías de superposición local-global
4. Una mejora de la teoría clásica de láminas considerando la existencia de la interface

Existen diferentes planteamientos por medio de ecuaciones diferenciales y diferentes ordenes en las teorías de esfuerzos cortantes transversales, dependiendo del número de funciones agregadas a la teoría clásica para considerar dichos efectos. El análisis de los desplazamientos en el plano se mejora dependiendo del orden de la ecuación propuesto. Debido a la diferencia en los módulos de las capas que conforman la lámina y a que el análisis que se realiza es global, los resultados arrojan una distribución de esfuerzos tipo zig-zag, por lo que se presentan errores relevantes a nivel local.

Con el propósito de minimizar errores locales, la teoría de análisis capa por capa (layerwise) analiza la lámina como un ensamble de láminas individuales; lo anterior mejorar los resultados tanto a nivel global como local.

Una tercera alternativa de solución, se presenta mediante la teoría de superposición local-global que utiliza una mezcla de la teoría de esfuerzos

---

cortantes de tercer orden y de la teoría de análisis de capa a capa de primer orden.

Sobre los efectos mecánicos ocasionados por torsión en materiales compuestos también se han llevado a cabo estudios teóricos y experimentales, sin embargo, por la complejidad de su análisis no se ha profundizado mucho (Shultz 1998 y Swanson,1998). Savoia, en 1993 realizó un estudio que aplica la analogía de la membrana para analizar los esfuerzos por torsión utilizando el método de la sección transformada, lo que da como resultado un análisis con muchas simplificaciones.

Kwon, (1993), Brinson, (1998), Zinoviev (1999) y Chen (1996), han desarrollado diversos modelos numéricos y aplicado diversas técnicas experimentales (foto acústicas, con ultrasonido, por interferometría de Moiré, de extensometría eléctrica, etc.) para el diseño de materiales compuestos y la obtención de las propiedades efectivas de los materiales compuestos con diferentes configuraciones. Sin embargo, los resultados son promedio. Para obtener las propiedades mecánicas del corazón de materiales compuestos tipo sándwich. Masters (1996), por ejemplo, desarrolló uno de los modelos que parten del análisis de una celda unitaria, conociendo de antemano, las propiedades del material del que ésta es fabricada

En la literatura se encuentran también estudios realizados sobre el efecto en el comportamiento mecánico de los materiales compuestos laminados considerando la calidad de la adhesión, entre la fibra y matriz, estos trabajos han sido desarrollados por Lin, 1993, Burton, 1997 y Hana 1996. Otros análisis pero entre caras laterales y corazón de compuestos tipo sandwich han sido realizados por (Kahraman , 1996). También se encuentran estudios sobre los efectos que tiene la desalineación de las fibras e imperfecciones geométricas (Paluch, 1996, Hale, 1997, Agbossou, 1998, Zeng, 1997, .- Kahraman, 1996, Tay , 1993, Lin 1993, Burton 1997, Hana, 1996), sobre los efectos de la humedad (Davies , 1996) y la temperatura (Kominar , 1996) etc. Se ha reportado también un trabajo que muestra la importancia de los efectos inducidos por los procesos de manufactura utilizados en la fabricación (Jain, 1997). Es trascendente mencionar que los estudios muestran la importancia de los análisis experimentales en la evaluación del comportamiento mecánico en elementos estructurales fabricados de materiales compuestos.

La interface es una capa física que se forma entre las componentes de los materiales compuestos, se considera que ésta se produce por la unión en los compuestos (por pegamento, fusión, metálica o de resina, defectos de manufactura, etc.) o por la unión entre materiales con propiedades mecánicas diferentes. Es importante mencionar que la interface existe, si no visualmente si como algo que tiene influencia en el comportamiento mecánico, y que su estructura y composición tienen un papel muy importante y es diferente para cada tipo de material por lo que su descripción mecánica es fundamental, Maligno, Warrior y Long (2010), presentan un estudio micromecánico para investigar los efectos que tiene la interface, en las constantes elásticas del modelo, considera los efectos del proceso de curado del material compuesto

---

reforzado con fibras unidireccionales, los resultados numéricos los comparan con datos experimentales de la literatura.

La investigación, utilizando técnicas experimentales, se desarrolla principalmente en las áreas de manufactura, diseño mecánico y análisis mecánico. Zhang, (2004), utilizando la teoría clásica de láminas, obtiene en forma global los esfuerzos residuales que se generan durante la fabricación de los compuestos por la diferencia de coeficientes de expansión térmica. Un estudio sobre análisis de fractura lo hace Anderson (2004). Papanicolaou (2004) aplica un modelo analítico para estudiar la no linealidad del material en función de la orientación de las fibras. Bosia, (2004), colocando extensómetros eléctricos en diferentes puntos de una lámina sujeta a flexión, analiza la no linealidad que hay en diferentes puntos con grandes deflexiones, sin embargo no propone ningún modelo para el análisis. Nordin (2005) analiza el comportamiento no lineal presentando el modelo viscoelástico no lineal de un compuesto. Gillespie (2005) analiza la resistencia interlaminar para altas velocidades de deformación y de compresión. En el análisis de falla, Whitney (2006) desarrolla un modelo local/global para analizar el efecto de una grieta en las propiedades de módulo de cortante, en forma general, en análisis de falla se encuentran trabajos sobre los efectos que en el comportamiento mecánico pueden ser causados por: delaminación realizados por Gu, 1999), fracturas y propagación de grietas por Chuang, (1999)

Los estudios mencionados en general son obtenidos a partir de la realización de pruebas mecánicas simples y no presentan modelos analíticos. En su mayoría, utilizan para su evaluación soluciones obtenidas con el Método de los Elementos Finitos (MEF), o en muchos casos solamente analizan las gráficas obtenidas directamente de los resultados (algunas veces auxiliados con la técnica de extensometría eléctrica).

En publicaciones más recientes Mailly y Wang (2008) analizan el estado global de esfuerzos y el comportamiento a la falla de un compuesto de resina epóxica reforzado con fibras de vidrio unidireccionales sometido a un estado biaxial de esfuerzos, las deformaciones fueron medidas con extensómetros eléctricos colocados en la zona de análisis. Shokrieh y Ghasemi (2007) publican un trabajo de investigación donde analizan esfuerzos residuales utilizando el método del barreno y un extensómetro eléctrico tipo roseta para medir deformaciones, Sevkat y Liaw (2009) presentan un estudio sobre el daño que sufre un compuesto laminado cuando es sometido al impacto de una bala, la deformación dinámica inducida fue medida utilizando extensómetros eléctricos instrumentados en la probeta. Makeev y Ignatius (2009) presentan un nuevo método, realizando pruebas de flexión en un compuesto laminado simétrico simplemente apoyado, para analizar en campo completo esfuerzos cortantes interlaminares, con la ventaja de que el compuesto puede tener mayor diversidad de dimensiones, Maligno y Warrior (2010) publican un estudio micromecánico para investigar los efectos que tiene la interface, en las constantes elásticas del modelo, considera los efectos del proceso de curado del material compuesto reforzado con fibras unidireccionales y los resultados numéricos los compara con datos experimentales de la literatura.

---

La idealización de los materiales compuestos en los modelos analíticos desarrollados da como resultado que el comportamiento real de estos, no sea preciso, ya que el proceso de fabricación involucra muchas variables difícil de controlar y de definir en el comportamiento mecánico de los compuestos fabricados. Por tal motivo, la determinación experimental de las propiedades mecánicas efectivas de las componentes de los compuestos y el análisis experimental de esfuerzos siguen siendo un problema que debe resolverse.

Actualmente, muchos autores, siguen utilizando la descripción matemática de los materiales compuestos con estructura regular a través de la teoría clásica de láminas y de métodos numéricos de homogeneización.

Las suposiciones para el análisis, tanto por el método de homogeneización como por la teoría clásica de láminas para materiales laminados, son las establecidas por Tsai (1980), Dato (1994), Parton (1993) :

1. La concentración de fibra en el material compuesto con respecto al de la matriz es pequeña.
2. La unión entre la fibra y la matriz es perfecta e infinitesimalmente delgada y no existen desplazamientos relativos entre ellos.
3. Se considera una unión perfecta entre las capas.
4. Se desprecian los efectos de una interface formada entre ellas.
5. Los desplazamientos son continuos a través de la interface.
6. En las láminas, los desplazamientos son continuos a través de las fronteras por lo que no existe desplazamiento relativo entre las capas que la conforman.
7. Los desplazamientos y las deformaciones son pequeños, etc.

Llevando a cabo una comparación de las tres teorías (soluciones numéricas), mostradas se concluye lo siguiente:

- a) La teoría de deformación cortante da buenos resultados en la distribución global de esfuerzos, pero pobres en la distribución local de esfuerzos.
- b) La teoría de análisis capa por capa da buenos resultados tanto en la distribución de esfuerzos global como en la distribución local.
- c) La teoría de esfuerzos cortantes tiene la ventaja de la eficiencia numérica con respecto a la de capa por capa, esto porque en esta última el número de variables se encuentra en función del número de capas que conforman la lámina ( $12n$ ).
- d) La teoría de superposición tiene ventajas sobre la de esfuerzos cortantes por exactitud numérica, y sobre la de análisis de capa por capa por eficiencia computacional.

- 
- e) La solución de las teorías analizadas se obtiene numéricamente y los resultados se evalúan al compararse, unas con otras, y, con análisis obtenidos con el método del elemento finito.

Existen trabajos de investigación que se han desarrollado analizando esfuerzos interlaminares producidos tanto por una unión perfecta como por una unión débil (Bai, 1997), los resultados son numéricos.

Las teorías mejoradas, desarrolladas para el análisis del comportamiento mecánico de materiales compuestos laminados, no consideran la existencia de interface entre las capas que conforman una lámina.

## **1.2 Extensómetros eléctricos de resistencia variable (strain gages) para el análisis experimental de esfuerzos.**

En la actualidad existen muchos dispositivos electromecánicos que pueden convertir señales mecánicas (desplazamientos, fuerzas) en señales eléctricas, las cuales pueden ser monitoreadas para analizar el comportamiento mecánico de elementos mecánicos sometidos a sollicitaciones estáticas, y, dinámicas. Los potenciómetros son utilizados para medir grandes desplazamientos pero su desventaja es su limitada frecuencia, por lo que no se aplican en pruebas dinámicas. De los transformadores diferenciales utilizados, también para medir desplazamientos, los más usados son los LVDT (linear variable differential transformer), sin embargo, tiene una limitada capacidad para mediciones dinámicas. Los sensores de capacitancia pueden ser aplicados para trabajar a altas temperaturas, ofreciendo comportamiento lineal, sin embargo, por sus principios de operación limitan la frecuencia de respuesta. Existen otros más, pero ninguno de esos sistemas de medición exhibe todas las propiedades requeridas para un óptimo análisis, como las que ofrecen los extensómetros eléctricos de resistencia variable (strain gages), ya que además de ser una técnica muy simple y de bajo costo de aplicación, ofrecen exactitud de medida también a altas frecuencias, por lo anteriormente descrito es que en la actualidad son los más ampliamente usados para el análisis experimental de esfuerzos (Dally J. W. y Riley W. F., 2005).

Su aplicación en el análisis experimental de materiales compuestos no es la excepción, como lo muestra Mailly y Wang (2008) cuando analizan el estado biaxial de esfuerzos en compuestos reforzados con fibras longitudinales de vidrio. Shokrieh y Ghasemi (2007) publican un trabajo de investigación donde analizan esfuerzos residuales utilizando el método del barreno y un extensómetro eléctrico tipo roseta para medir deformaciones. Sevkat y Liaw (2009) presentan un estudio sobre el daño que sufre un compuesto laminado cuando es sometido al impacto de una bala, la deformación dinámica inducida fue medida utilizando extensómetros eléctricos instrumentados en la probeta..

---

### 1.3 Aportaciones a problemas existentes

Los problemas de interés detectados en el estudio que se llevó a cabo sobre análisis experimental del comportamiento mecánico de materiales compuestos laminados son los siguientes:

1. El análisis experimental de esfuerzos en el plano, a nivel global y local (interlaminares) se ha tratado poco [N. Pagano, Global-Local Laminate Variational Model]. Es importante plantear un modelo simple, mejorando la Teoría Clásica de Láminas con el que sea posible el análisis de esfuerzos tanto a nivel global como a nivel local. Análisis de esfuerzos puntuales en problemas complejos no son fáciles de obtener con soluciones numéricas.
2. Como lo recomienda Kant (2000) es importante analizar a fondo y entender el fenómeno físico de lo que significan los esfuerzos interlaminares bajo diversas condiciones de frontera.
3. Actualmente no se tiene un método experimental simple con el que se lleven a cabo análisis experimentales sobre los efectos mecánicos que ocasiona una interface visiblemente inexistente entre las capas de una lámina..
4. La obtención experimental de propiedades elásticas de materiales compuestos laminados se realiza sólo a nivel global, efectivas [Acosta, 1998], es importante, considerando técnicas experimentales, determinarlas también localmente, esto es, obtener las propiedades elásticas de las capas o láminas que prevalecen una vez que forman parte del compuesto, llevando consigo propiedades de la interface entre capas (pegamento, defectos de pegado, fusión de capas, etc.). La utilización de dichas propiedades en las soluciones numéricas de análisis de esfuerzos debe mejorar considerablemente la eficiencia en los resultados.
5. No se ha realizado un estudio en el cual se muestren los alcances experimentales de la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable en el análisis de esfuerzos en materiales compuestos laminados.

---

## **Capítulo 2**

### **Definición del Problema**

En este capítulo se define el problema motivo de este trabajo doctoral y la hipótesis que guía a su solución, se definen problemas particulares, y, se mencionan las restricciones consideradas. El apoyo teórico para la comprensión del estudio se presenta en el apéndice A.

#### **2.1 Definición del problema**

Se requiere hacer análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos laminados simétricos.

#### **2.2 Objetivos específicos**

1. Establecer un modelo lineal que mejore la teoría clásica de láminas, con el cual se pueda llevar a cabo análisis experimental de esfuerzos, en cualquier laminado simétrico y para cualquier condición de frontera.
2. Analizar esfuerzos interlaminares en el plano, tanto a nivel global (promedio) como local (interlaminares en las capas constituyentes ortotrópicas o isotrópicas).
3. Evaluar el modelo de tal forma que permita conocer su eficiencia y los alcances del mismo cuando se combina con el análisis experimental.
4. Mostrar los alcances y limitaciones de la técnica de extensometría eléctrica en el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos.
5. El modelo propuesto debe ser útil para evaluar y validar soluciones numéricas.
6. Con el modelo debe ser posible, también, evaluar experimentalmente los efectos mecánicos y las propiedades mecánicas de la interface en compuestos laminados, asumiendo su existencia como de una capa virtual.

---

### **2.3 Restricciones**

El modelo lineal de los compuestos laminados simétricos en estudio tiene las siguientes restricciones:

- a) El comportamiento mecánico de los materiales compuestos laminados se modela por ecuaciones lineales y cumple con las leyes fundamentales de la mecánica de los medios continuos; leyes de Newton y la conservación de la masa y la energía.
- b) Las del modelo de elasticidad lineal
- c) Las capas de la lámina son relativamente delgadas.
- d) El material compuesto laminado es simétrico.
- e) Se asume homogeneidad en cada capa o pliegue o grupo de capas.
- f) Los materiales que lo conforman son elástico-lineales
- g) La unión entre las capas es perfecta.
- h) El problema tanto global como local es de esfuerzos planos.
- i) Los esfuerzos transversales son función únicamente de las fuerzas aplicadas en las caras de la capa.
- j) En los materiales compuestos se consideran dos niveles de esfuerzos, locales (por pliegue o por capa) y globales (por lámina).
- k) El análisis de esfuerzos locales asume capas isotrópicas u ortotrópicas, constituidas por fibras alineadas unidireccionalmente dentro de una matriz.

### **2.4 Hipótesis General**

Es posible llevar a cabo el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos laminados simétricos, mediante la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable, utilizando el principio de superposición. Para cumplir con el objetivo, se planteará un modelo lineal constitutivo que permitirá determinar los esfuerzos en el plano, globales y locales (interlaminares), conociendo las deformaciones en la frontera.

---

## Capítulo 3

### Desarrollo de Modelos

En este capítulo, utilizando el principio de superposición, se desarrollan los modelos para materiales compuestos laminados simétricos con los que experimentalmente, conocidas las deformaciones en las fronteras, se logra el análisis experimental de esfuerzos. Con los modelos es posible determinar, el estado de esfuerzos en un punto y su distribución a través de su espesor, esfuerzos globales (promedio), esfuerzos interlaminares (normales y transversales en las capas) y momentos interlaminares (normales y transversales en las capas). Lo anterior es posible si las propiedades globales y las de las capas constituyentes son conocidas. Los modelos de esfuerzos planteados analizan el problema total  $G + L$  como un conjunto de problemas, un problema global  $G$  de esfuerzos, y, un conjunto de problemas locales  $L$ , ver figuras 3.1. Los modelos se fundamentan en el modelo de la teoría de la elasticidad lineal, ver apéndice B, la teoría clásica de láminas compuestas, ver apéndice C, y el principio de superposición. La importancia de los modelos presentados es que con ellos, experimentalmente, es posible analizar esfuerzos en cualquier punto bajo condiciones de frontera de tensión o compresión y de flexión, determinando no sólo el estado de esfuerzos promedio real de un punto instrumentado, sino también su variación a lo largo de todo el espesor.

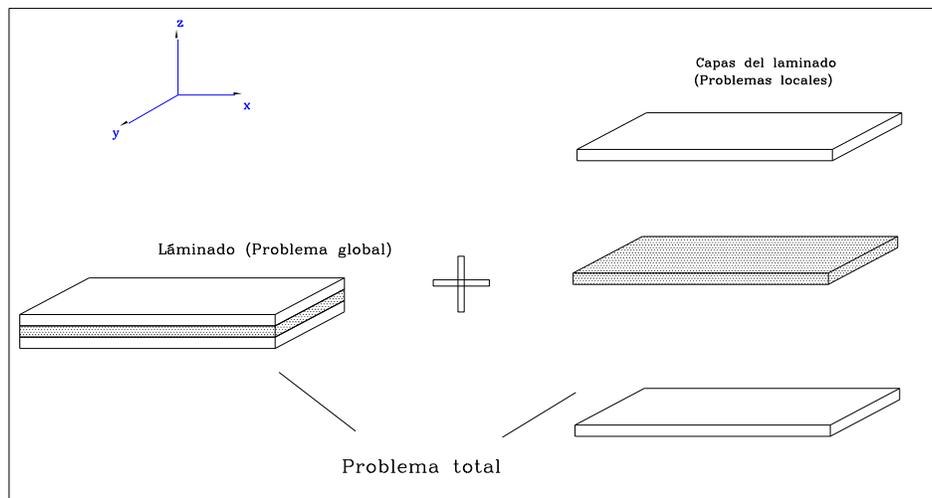


Figura 3.1. Modelo de esfuerzos de un laminado con capas isotrópicas, un conjunto constituido por un problema global de esfuerzos, y, un conjunto de problemas locales.

El principio de superposición se aplica en los modelos propuestos por considerar que las ecuaciones que definen su comportamiento mecánico son lineales. Lo anterior permite descomponer un problema mecánico en dos o más subproblemas y analizarlo como "superposición" o "suma" de estos.

---

Una aplicación más de los modelos, permite desarrollar otros equivalentes, utilizando mismos criterios (análisis global-local); por ejemplo: modelos en los cuales se considera la existencia de una interface entre las capas constituyentes de la lámina, ver apéndice F. La interface se genera, como se ha comenta en el apéndice A, como resultado de la unión entre las capas de un compuesto laminado. Con estos modelos es posible analizar y caracterizar, experimentalmente, los efectos que tiene una interface en el comportamiento mecánico de láminas compuestas.

### 3.1 Modelo de elasticidad lineal

El modelo de elasticidad lineal obedece las leyes fundamentales de la de la mecánica de los medios continuos: las leyes de Newton y las leyes de la conservación de la masa y la energía, y, posee las siguientes restricciones: el medio posee masa, es continuo, es lineal, es elástico- lineal y homogéneo.

El modelo de elasticidad lineal se encuentra conformado por el modelo de esfuerzos, el modelo de deformaciones, y por el modelo constitutivo (Ley generalizada de Hooke), ver apéndice B.

### 3.2 Modelo lineal de tensión en laminados compuestos simétricos

El modelo de esfuerzos a utilizar en este estudio para una lámina compuesta sometida a esfuerzos de tensión o compresión es constitutivo y se basa en la siguiente hipótesis: “Es posible, utilizando el principio de superposición, plantear un modelo que de información sobre la distribución de esfuerzos en un material compuesto laminado, si se considera como un conjunto constituido por: un problema global de esfuerzos, y, un conjunto de problemas locales”.

Con el modelo es posible determinar:

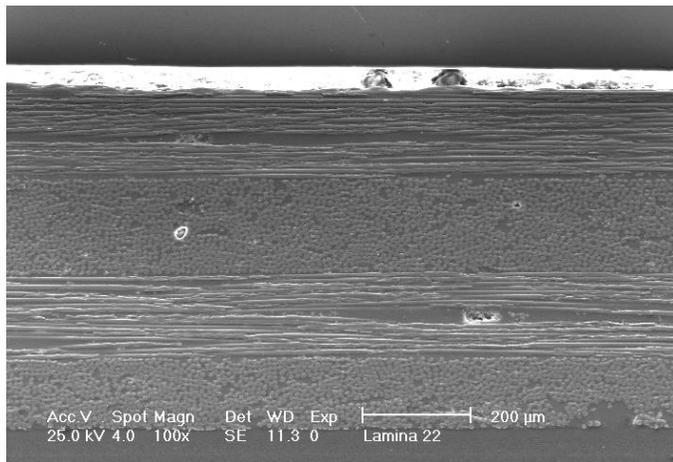
- 1) la distribución de esfuerzo promedio global  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$
- 2) la distribución de esfuerzos local a lo largo de todo el espesor, es decir, conocer los esfuerzos interlaminares (normales y transversales)  $\sigma_{Lx}$ ,  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$
- 3) las propiedades elásticas, promedio de la lámina (Módulos de Young  $E_{Gx}$ ,  $E_{Gy}$  y relación de Poisson  $\nu_{Gxy}$ ) y de las componentes de la lámina (Módulos de Young  $E_{Lx}$ ,  $E_{Ly}$  y relación de Poisson  $\nu_{Lxy}$ ), si estas son desconocidas.

---

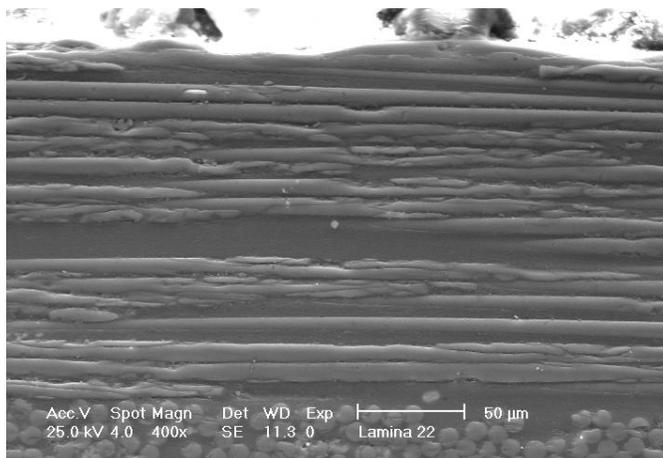
## Restricciones del modelo:

### R1: De las capas constituyentes

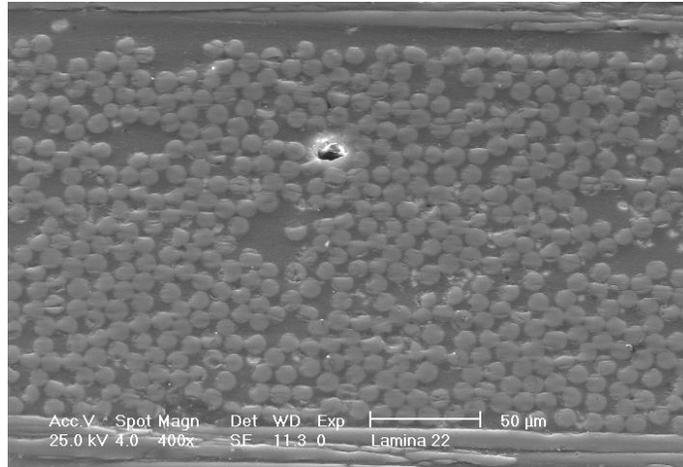
- l) Las capas de la lámina son delgadas.
- m) Considerando capas ortotrópicas de resina reforzadas con fibras, la distribución de las fibras en las capas es homogénea. Lo anterior es una idealización, ver fotografías 3.1, 3.2 y 3.3.



Fotografía 3.1. Análisis microscópico de una lámina compuesta por capas ortotrópicas reforzadas con fibras de vidrio.



Fotografía 3.2. Análisis microscópico, detalle lateral de las fibras.



Fotografía 3.3. Análisis microscópico, detalle frontal de las fibras.

- n) El modelo mecánico (considerado así también por la teoría clásica de láminas) considera que la unión entre capas es perfecta y los desplazamientos y las deformaciones son continuos a través de la interface [Tsai y Jones].
- o) El modelo es lineal y cumple con las restricciones de la teoría de la elasticidad (lineal, elástico-lineal, continuo y homogéneo)
- p) Los espesores de las capas son constantes a lo largo de toda la lámina.

### **R2: de esfuerzos, problema global**

- q) El modelo es lineal [Durelli]
- r) El modelo no considera los efectos de borde en la lámina, considera que el estado de esfuerzos es homogéneo en todo el laminado.
- s) El problema es de esfuerzos planos.

### **R3: de esfuerzos interlaminares, problema local**

- t) El problema para cada una de las capas es biaxial de esfuerzos.
- u) Los esfuerzos transversales son función únicamente de la resultante de las fuerzas cortantes aplicadas en las caras de las capas por diferencia entre las propiedades elásticas.
- v) El esfuerzo normal  $\sigma_{Ly}$  tiene una distribución promedio constante a través del espesor de la capa, figura 3.2 (a).
- w) La distribución de esfuerzos promedio  $\tau_{Lyz}$  es lineal, figura 3.2 (b), para una capa en el extremo de la lámina y para una capa intermedia respectivamente.

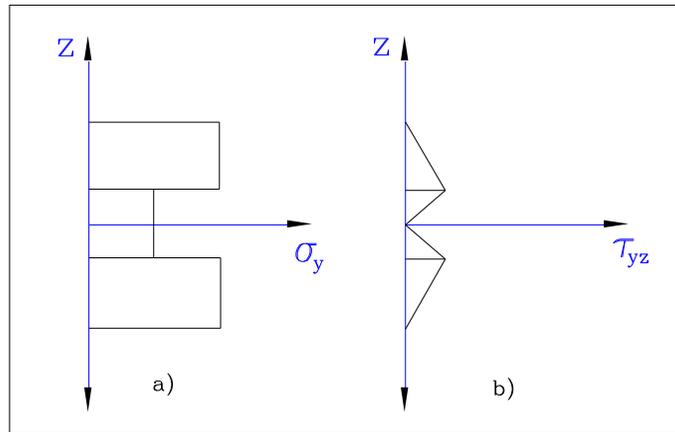


Figura 3.2. Distribución de esfuerzos interlaminar (local) para un laminado de tres capas.

#### **R4: globales del material compuesto laminado simétrico**

El modelo mecánico utilizado para el análisis experimental es el siguiente:

1. El laminado compuesto se encuentra constituido por capas homogéneas.
2. La unión entre capas es perfecta.
3. El espesor del compuesto laminado es homogéneo.

#### **Análisis de esfuerzos global, problema de tensión:**

En este trabajo se considera el problema global  $G$  como un compuesto laminado total, y se analiza su comportamiento como si se tratara de un material homogéneo, isotrópico u ortotrópico. Para describir físicamente su comportamiento mecánico se considera el problema de tensión simple, aunque el problema pudiera ser biaxial de esfuerzos. El comportamiento mecánico global de la lámina es en promedio función del comportamiento mecánico de todas las capas.

En una prueba de tensión simple a un material compuesto laminado, lejos de la aplicación de las cargas (Principio de Saint-Venant), el estado de esfuerzos promedio se considera uniaxial de esfuerzos, ver figura 3.3.

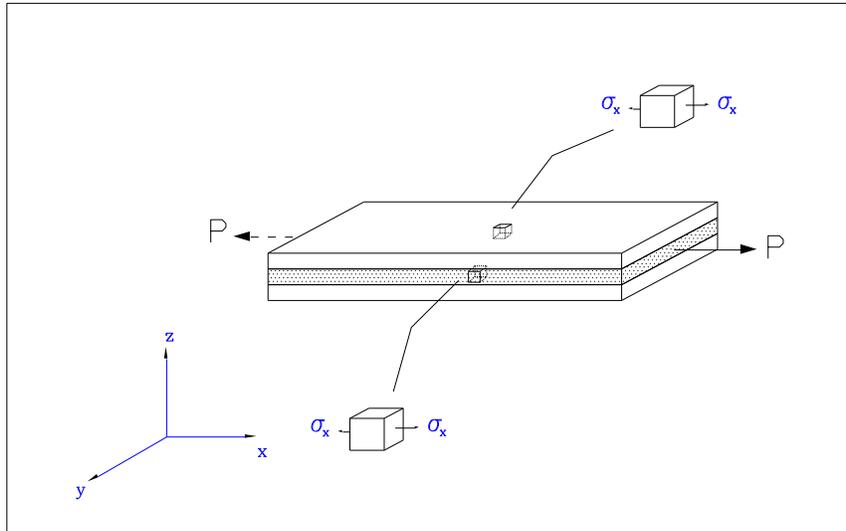


Figura 3.3. Modelo global, problema uniaxial de esfuerzos en todos los puntos de la lámina.

Para el problema global se asume que el estado de deformaciones es homogéneo, por lo que las deformaciones en las direcciones 1 y 2,  $\varepsilon_1^0$  y  $\varepsilon_2^0$ , son constantes en todos los puntos, esto es:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(z) &= \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2(z) &= \varepsilon_2^0\end{aligned}\quad 3.1)$$

Los esfuerzos globales promedio en forma general se representan por las ecuaciones constitutivas siguientes:

$$\begin{aligned}\sigma_{G1} &= (1/h)[A_{11}\varepsilon_1^0 + A_{21}\varepsilon_2^0] \\ \sigma_{G2} &= (1/h)[A_{21}\varepsilon_1^0 + A_{22}\varepsilon_2^0]\end{aligned}\quad 3.2)$$

donde las  $A$ 's son constantes equivalentes que en promedio son función (ver apéndice C), en la dirección 1 y 2 de análisis, de las propiedades de todas las capas que componen el laminado,  $h$  es el espesor de la lámina, los términos  $\varepsilon_1^0$  y  $\varepsilon_2^0$  son las deformaciones para un estado de deformaciones homogéneo y  $\sigma_{G1}, \sigma_{G2}$  son los esfuerzos promedio en las direcciones 1 y 2.

### Esfuerzos interlaminares

Considerando un compuesto laminado sujeto a tensión simple, al estado de esfuerzos en los puntos de cada una de las capas (análisis local) se le llamará estado de esfuerzos interlaminar, y a las componentes de esfuerzos, esfuerzos interlaminares ( $\sigma_{Lx}$ ,  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$ ).

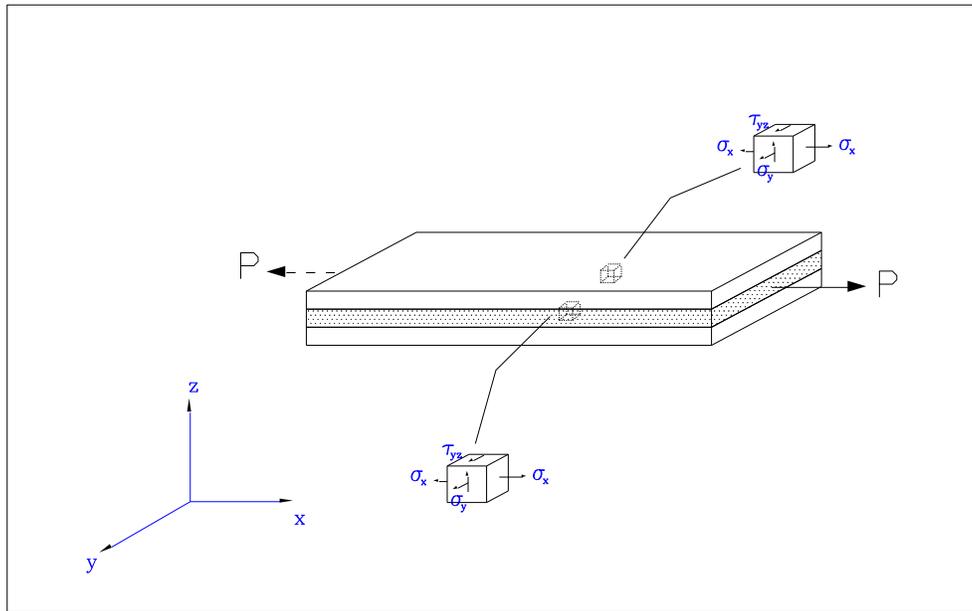


Figura 3.4. Modelo local, problema triaxial de esfuerzos en todos los puntos de la lámina.

El estado de esfuerzos interlaminar y el nivel de los esfuerzos interlaminares ( $\sigma_{Lx}$ ,  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$ ), tomando como ejemplo una prueba de tensión simple, es función del valor y de la diferencia en las propiedades elásticas de las capas constituyentes y de las condiciones de frontera. El estado de esfuerzos es triaxial, ver figura 3.4.

Las componentes de esfuerzos interlaminares son: transversales  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$  e interlaminar longitudinal  $\sigma_{Lx}$ . En la figura 3.5 (a) se muestra un material compuesto conformado por dos materiales con diferentes relaciones de Poisson, considere que los módulos de Young son equivalentes. Si los materiales tuvieran libertad de deformación (no existiera unión entre ellos) en la dirección  $y$  y fuesen sometidos a tensión por una carga uniforme  $P$  en la dirección  $x$ , se observaría en los materiales una deformación diferente en la dirección  $y$ , figura 3.5 (b). El material con mayor valor en la relación de Poisson  $\nu$  (material superior), tendría mayor deformación transversal. Considerando ahora, unión perfecta entre las capas (delgadas), al aplicar la carga  $P$ , las capas se deforman en forma uniforme tanto en la dirección  $x$  como en la -dirección  $y$ , lo que es verdad, únicamente si los esfuerzos transversales  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$  que lo hacen posible, son diferente de cero, figura 3.5 (c).

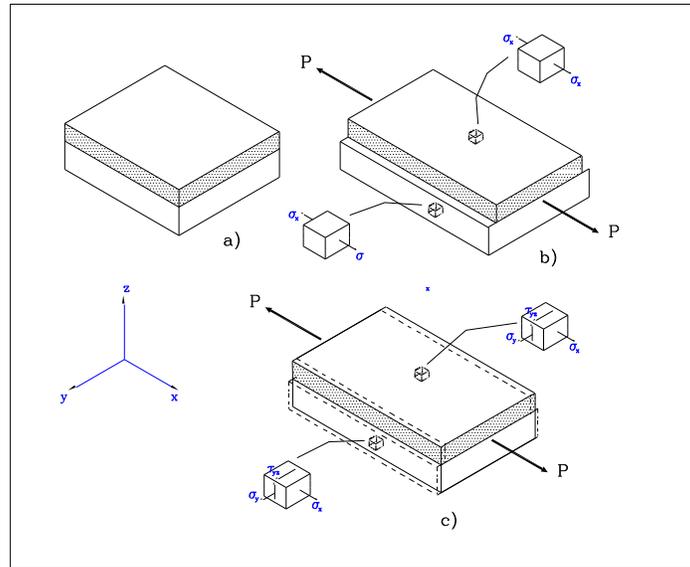


Figura 3.5. Origen de esfuerzos interlaminares en un problema de tensión por diferencia en las constantes elásticas de sus componentes.

La distribución de esfuerzos  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$ , a través del espesor de cada una de las capas no es constante, ver figura 3.6, con valores de esfuerzo cortante máximos en las caras de unión entre capas (interface), disminuyendo a través del espesor.

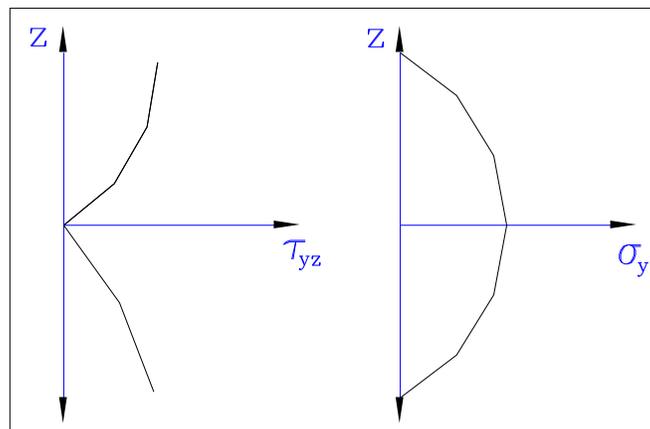


Figura 3.6. Análisis cualitativo, considerado en este trabajo, de la distribución de esfuerzos interlaminares  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$ , a través de una capa.

Se considera que las fuerzas cortantes en las caras de las capas dependen de la ubicación y de la orientación de las capas en la lámina. Cuando las capas se posicionan en el extremo de la lámina las fuerzas cortantes son igual con cero en la cara libre.

En general las ecuaciones constitutivas, que analizan el problema en una dirección diferente a los ejes de simetría del laminado, ver apéndice C, son:

$$\begin{aligned}\sigma_{L1} &= Q_{11}\varepsilon_1^\circ + Q_{12}\varepsilon_2^\circ \\ \sigma_{L2} &= Q_{21}\varepsilon_1^\circ + Q_{22}\varepsilon_2^\circ\end{aligned}\quad 3.3)$$

donde las constantes para cada capa constituyente y para las direcciones arbitrarias 1 y 2 son  $Q_{11}$ ,  $Q_{21}$  y  $Q_{22}$  y se definen en función de las constantes con respecto a los ejes de simetría  $x$  y  $y$  de cada capa, como:

$$\begin{aligned}Q_{11} &= m^4 Q_{xx} + 2m^2 n^2 Q_{xy} + n^4 Q_{yy} \\ Q_{21} &= 2m^2 n^2 Q_{xx} + (m^4 + n^4) Q_{xy} + m^2 n^2 Q_{yy} \\ Q_{22} &= n^4 Q_{xx} + 2m^2 n^2 Q_{xy} + m^4 Q_{yy}\end{aligned}\quad 3.4)$$

Definiendo a  $n$  y  $m$  como, ver figura 3.7:

$$\begin{aligned}n &= \text{sen}\theta \\ m &= \text{cos}\theta\end{aligned}\quad 3.5)$$

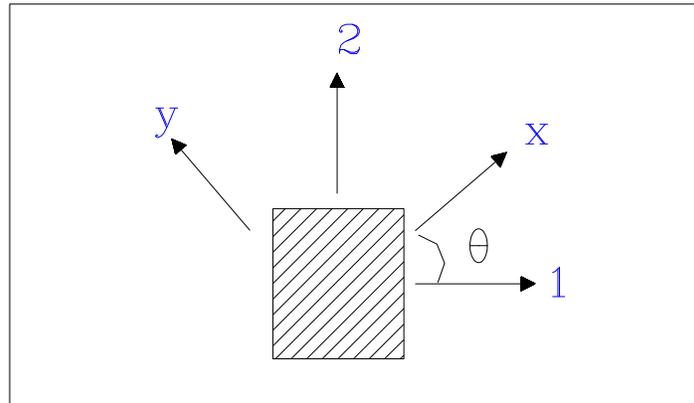


Figura 3.7. Ángulo  $\theta$  con respecto a la orientación de las fibras o ejes principales.

Definiendo las constantes de las ecuaciones en función de constantes ingenieriles como:

$$\begin{aligned}Q_{xx} &= ((E_x)/(1-\nu_x\nu_y)) \\ Q_{yy} &= ((E_y)/(1-\nu_x\nu_y)) \\ Q_{xy} &= ((\nu_x E_x)/(1-\nu_x\nu_y))\end{aligned}\quad 3.6)$$

$$Q_{xy} = ((\nu_y \varepsilon_x) / (1 - \nu_x \nu_y))$$

$$Q_s = \varepsilon_s$$

### Principio de superposición

El principio de superposición aplica a los modelos propuestos por considerar que éstos son problema lineales. Así, el problema total puede ser sustituido por un conjunto de problemas individuales para cada condición de carga, y, el estado de esfuerzos globales (promedio o totales)  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$ , son la suma de los estados de esfuerzos individuales (locales), ver figura 3.8 para un problema de tensión simple, esto es:

$$\begin{aligned} \sigma_{G1} &= n_I \sigma_{L1I} + n_{II} \sigma_{L1II} + n_{III} \sigma_{L1III} + \dots + n_i \sigma_{L1i} \\ \sigma_{G2} &= n_I \sigma_{L2I} + n_{II} \sigma_{L2II} + n_{III} \sigma_{L2III} + \dots + n_i \sigma_{L2i} \end{aligned} \quad 3.7)$$

donde  $\sigma_{L1i}$  y  $\sigma_{L2i}$  son los esfuerzos en cada capa en las direcciones 1 y 2.

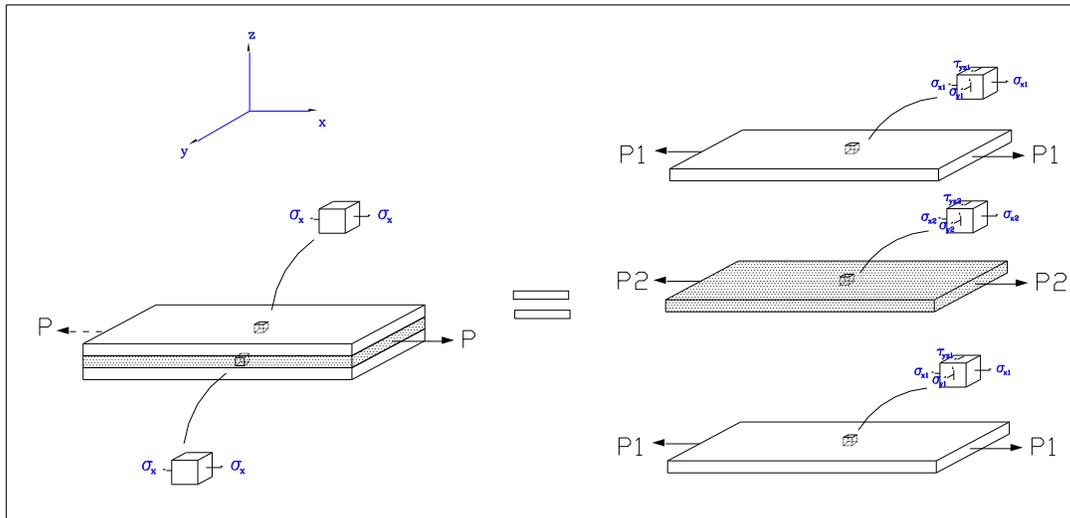


Figura 3.8. Modelo total real del problema de tensión simple.

Definiendo fracción volumétrica como:

$$n_i = h_i / h$$

y

$$1 = n_I + n_{II} + n_{III} + \dots + n_i \quad 3.8)$$

donde  $n_i$  son las fracciones volumétricas con diferente propiedad o para capas ortotrópicas con orientación  $\theta_i$  en la dirección analizada y  $h$  y  $h_i$  son los espesores total y de las capas o grupos de capas, respectivamente.

### Modelo de esfuerzos resultante

Como resultado, el modelo constitutivo considera un modelo global (compuesto laminado con propiedades elásticas efectivas, promedio) y el conjunto de modelos locales, (capas de material continuo, homogéneo y anisotrópico), ver figuras 3.9.

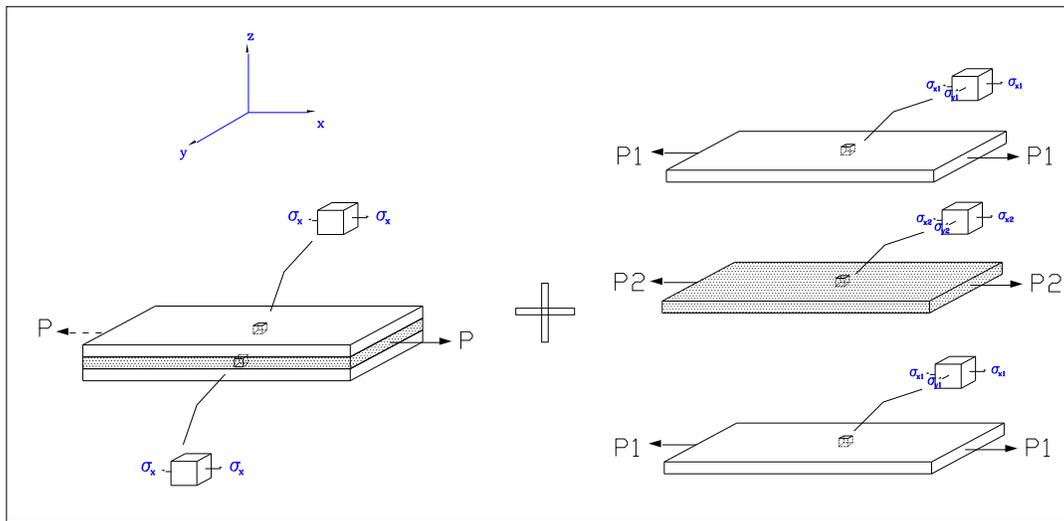


Figura 3.9. Modelo constitutivo resultante.

En el modelo local, no se toman en cuenta los esfuerzos interlaminares  $\tau_{yz}$ , porque se considera un estado de deformaciones homogéneo en las capas. Cabe hacer notar, que para efectos mecánicos, se toman en cuenta únicamente esfuerzos interlaminares longitudinales  $\sigma_x$  y transversales  $\sigma_y$ , que se asumen homogéneos a través del espesor de las capas. Lo anterior implica que el estado de esfuerzos interlaminar en todos los puntos de una capa presenta esfuerzos planos. El valor máximo de esfuerzo  $\tau_{yz}$  aplicado interlaminarmente, es determinado posteriormente, en forma externa al modelo, utilizando para ese fin, el esfuerzo interlaminar transversal  $\sigma_y$ .

Las ecuaciones que definen el modelo propuesto en este trabajo son:

$$\begin{aligned} \sigma_{L1} &= Q_{11}\varepsilon_1^o + Q_{12}\varepsilon_2^o \\ \sigma_{L2} &= Q_{21}\varepsilon_1^o + Q_{22}\varepsilon_2^o \end{aligned} \tag{3.9}$$

y

$$\begin{aligned}\sigma_{G1} &= n_I \sigma_{L1I} + n_{II} \sigma_{L1II} + n_{III} \sigma_{L1III} + \dots + n_i \sigma_{Lxi} \\ \sigma_{G1} &= n_I \sigma_{L2I} + n_{II} \sigma_{L2II} + n_{III} \sigma_{L2III} + \dots + n_i \sigma_{Lyi}\end{aligned}\quad 3.10$$

### Esfuerzo cortante $\tau_{Lyz}$

Al aplicar en el modelo una fuerza o desplazamiento en la frontera, en la dirección  $x$ , la fuerza que ocasiona los esfuerzos  $\sigma_{Ly}$  es tangencial a las caras de las capas, por lo que se presentan esfuerzos cortantes  $\tau_{Lyz}$ .

La existencia de los esfuerzos cortantes se analizó en este capítulo, ver la figura 3.5.

Por definición:

$$\tau_{Lyz} = \lim\{\Delta A \rightarrow 0\}((\Delta F)/(\Delta A)) \quad 3.11$$

el valor de la fuerza  $\Delta F$  se obtiene a partir del conocimiento de  $\sigma_{Ly}$  local promedio, ver figura 3.9, ya que

$$\sigma_{Ly} = \lim\{\Delta A \rightarrow 0\}((\Delta F)/(\Delta A)) \quad 3.12$$

Si el valor de esfuerzo normal promedio  $\sigma_{Ly}$  es conocido y también el área de aplicación, con la normal en la dirección  $z$ , entonces la fuerza promedio puede ser determinada. Conociendo el valor de la fuerza y el área, ver figura 3.10, se obtiene el valor del esfuerzo  $\tau_{Lyz}$  en la frontera de la capa. Para facilitar el análisis considérese el ancho del elemento con valor unitario.

$$A_n = h(1)$$

$$A_t = b(1)$$

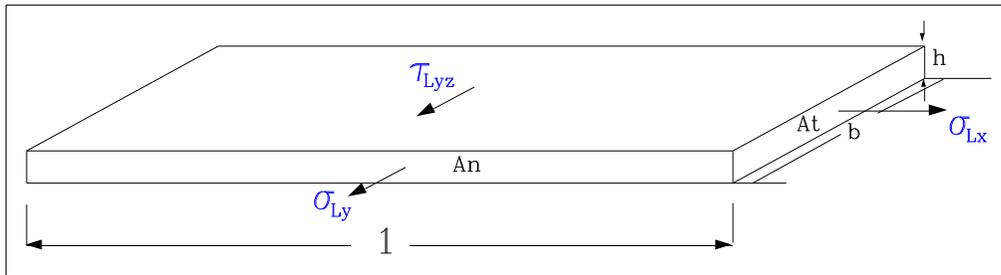


Figura 3.10. Análisis de esfuerzos para la determinación de  $\tau_{Lyz}$ .

donde  $h$  es el espesor de la capa y  $b$  es el ancho de la probeta,  $A_n$  y  $A_t$  son las áreas normal y transversal en la dirección normal  $x$ . El esfuerzo en la dirección  $y$  es:

$$\sigma_{Ly} = p/A_n$$

---

por lo tanto

$$p = \sigma_{Ly} An$$

El esfuerzo cortante máximo se obtiene en las capas colocadas en los extremos de la lámina,

$$\begin{aligned} \tau_{Lyz} &= (\sigma_y An) / (At) \\ \tau_{Lyz} &= (\sigma_y An) / (At) \end{aligned} \quad 3.13)$$

El esfuerzo cortante máximo promedio  $\tau_{Lmax yz}$  en las capas intermedias se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \tau_{Lyz} &= (\sigma_y An) / (2At) \\ \tau_{Lyz} &= (\sigma_y An) / (2At) \end{aligned}$$

finalmente

$$\tau_{Lmax yz} = (\sigma_y h) / (2 b) \quad 3.14)$$

Como se ha mencionado anteriormente, la distribución de  $\sigma_{Ly}$  no es constante por lo que  $\tau_{Lyz}$  no es lineal a través del espesor de las capas.

### **3.3 Modelo Lineal para Materiales Compuestos Laminados Simétricos sujetos a Flexión**

El análisis del comportamiento mecánico de materiales laminados compuestos sujetos a flexión utilizando la teoría clásica de láminas, es complejo y sólo permite conocer los momentos de flexión globales  $M_G$ . Con el modelo resultado de este trabajo, es posible determinar momentos interlaminares de flexión  $M_L$ , con lo cual es posible determinar la distribución de esfuerzos. Para la determinación de  $M_L$ , se lleva a cabo un análisis equivalente al desarrollado para el problema de tensión. El modelo de flexión propuesto es un conjunto constitutivo  $G + L$  constituido por un modelo constitutivo global  $G$  y un conjunto de modelos constitutivos locales  $L$ 's, ver figura 3.11.

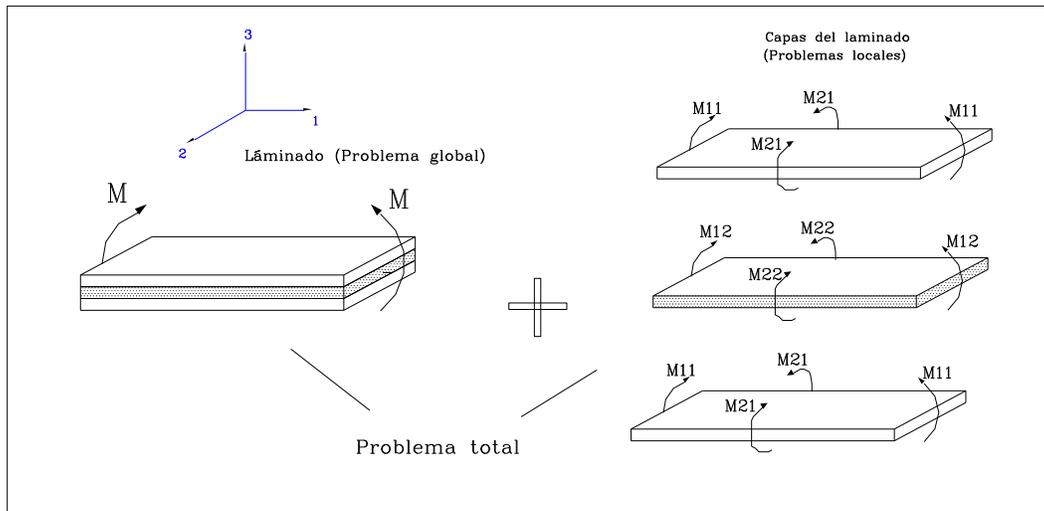


Figura 3.11. Modelo de flexión, modelo constitutivo global  $G$  y un conjunto de modelos constitutivos locales  $L$ 's.

### Restricciones del modelo lineal de flexión

Las restricciones del modelo coinciden en su mayoría con las del modelo de tensión simple, para el modelo global mecánico y para las capas constituyentes, sin embargo, existen otras consideraciones en el modelo de esfuerzos que se citarán en esta sección.

#### R1: Restricciones adicionales de esfuerzos en el problema de flexión

- La deflexión de la superficie media es pequeña comparada con el espesor de la placa.
- El plano medio permanece sin deformación después de la flexión.
- El modelo no considera los efectos de borde en la lámina,
- el estado de esfuerzos es lineal en todo el laminado.
- Se considera que globalmente, secciones transversales normales al eje neutro planas antes de la deformación permanecen planas después de la flexión, esto es, que las deformaciones promedio  $\gamma_{Gxz}$  y  $\gamma_{Gyz}$  son despreciables.
- Los esfuerzos globales normales al plano medio  $\sigma_{Gz}$  son pequeños comparados con las otras componentes de esfuerzo  $\sigma_{Gx}$  y  $\sigma_{Gy}$ , por lo que pueden ser despreciables.
- El problema para cada una de las capas es biaxial de esfuerzos.
- Los esfuerzos transversales son función únicamente de la resultante de las fuerzas cortantes aplicadas en las caras de las capas por diferencia entre las propiedades elásticas.
- El esfuerzo normal  $\sigma_{Ly}$  tiene una distribución lineal a través del espesor de la capa.
- No se consideran los esfuerzos interlaminares cortantes  $\tau_{Gyz}$ .

---

## Análisis general global del problema de flexión pura

En una lámina compuesta sujeta a flexión pura, al considerar la hipótesis de que secciones transversales normales al eje neutro planas antes de la deformación permanecen planas después de la misma, implica decir que la distribución del esfuerzo  $\sigma_x$  es lineal a través del espesor de la lámina. El problema global se considera uniaxial de esfuerzos, ver figura 3.12.

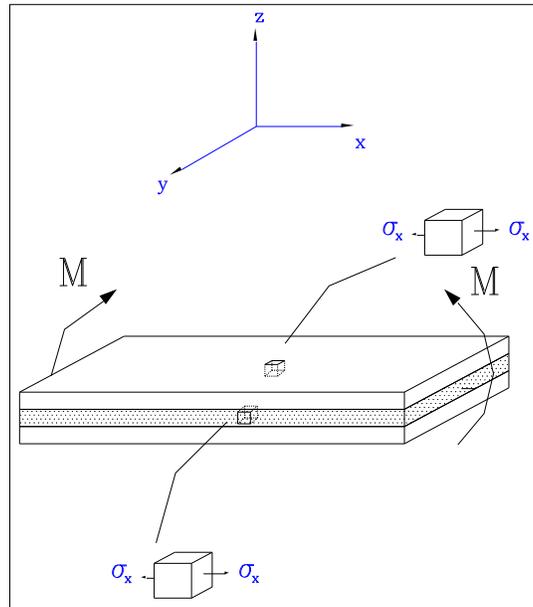


Figura 3.12. Problema de flexión pura en un laminado compuesto.

El estado de deformaciones para todos los puntos es lineal.

Las ecuaciones constitutivas que modelan un compuesto laminado en forma global, ver apéndice D son:

$$\begin{aligned} M_{G1} &= D_{11}k_1 + D_{21}k_2 \\ M_{G2} &= D_{21}k_1 + D_{22}k_2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde  $M_{G1}$  y  $M_{G2}$  son los momentos globales con respecto a los ejes 1 y 2, respectivamente, ver figura 3.13, los cuales no necesariamente son aplicados en los ejes de simetría, y las  $D$ 's son módulos equivalentes en esas direcciones, las  $k$ 's son las curvaturas definidas como:  $k_1$  y  $k_2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{G1} &= -zk_1 \\ \varepsilon_{G2} &= -zk_2 \end{aligned}$$

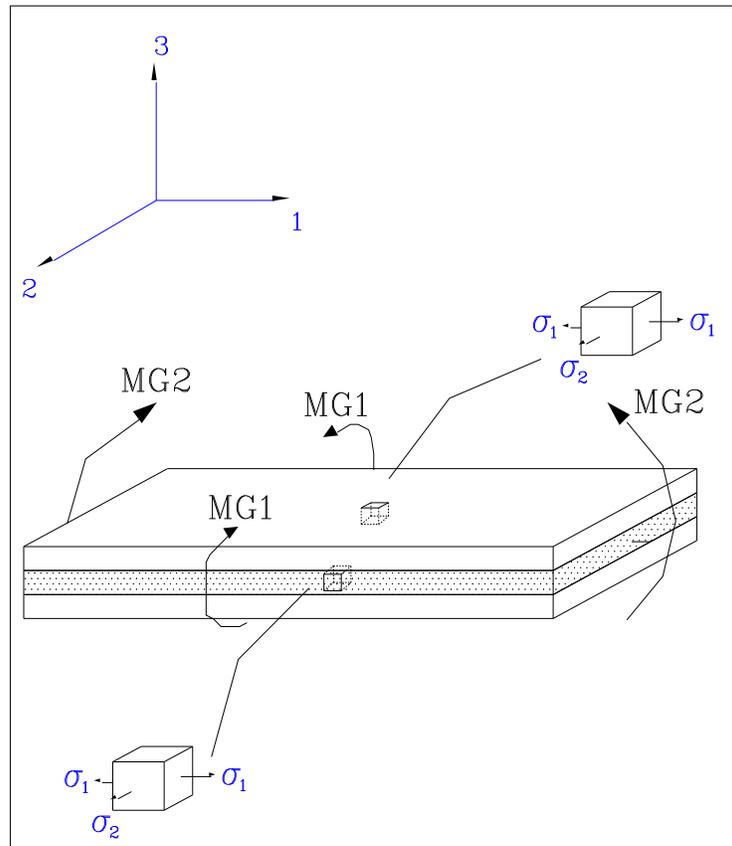


Figura 3.13. Problema global de flexión.

### Momentos interlaminares, modelo local

Si se asume una lámina compuesta constituida por capas con diferentes propiedades elásticas, homogéneas, continuas y anisotrópicas o isotrópicas, sometida a flexión pura, y se analiza lo que sucede en cada capa, las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas, no son iguales. Lo anterior obedece a que dichas fuerzas son función de las propiedades elásticas de las capas constituyentes y de su posición en la lámina.

Lo anterior se puede visualizar en la figura 3.14), donde se tiene una lámina compuesta simétrica constituida por dos materiales metálicos isotrópicos con propiedades elásticas diferentes, figura 3.14 a). Al someter la lámina a un momento de flexión pura  $M_G$ , a nivel local, se generan esfuerzos interlaminares transversales  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$ , debido a la diferencia en las propiedades elásticas, lo que hace que localmente el problema sea triaxial de esfuerzos, ver figura 3.15). Lo anterior es porque las capas que debían deformarse como se ve con líneas punteadas, son forzadas, por la unión entre capas, a deformarse como se observa con línea continua, ver figura 3.14b).

Cabe hacer notar que si el efecto de flexión es ocasionado por la aplicación de fuerzas transversales al eje longitudinal de las láminas, también se tienen

esfuerzos cortantes  $\tau_{Lxy}$ , los que con el modelo desarrollado en este trabajo no son posible determinar.

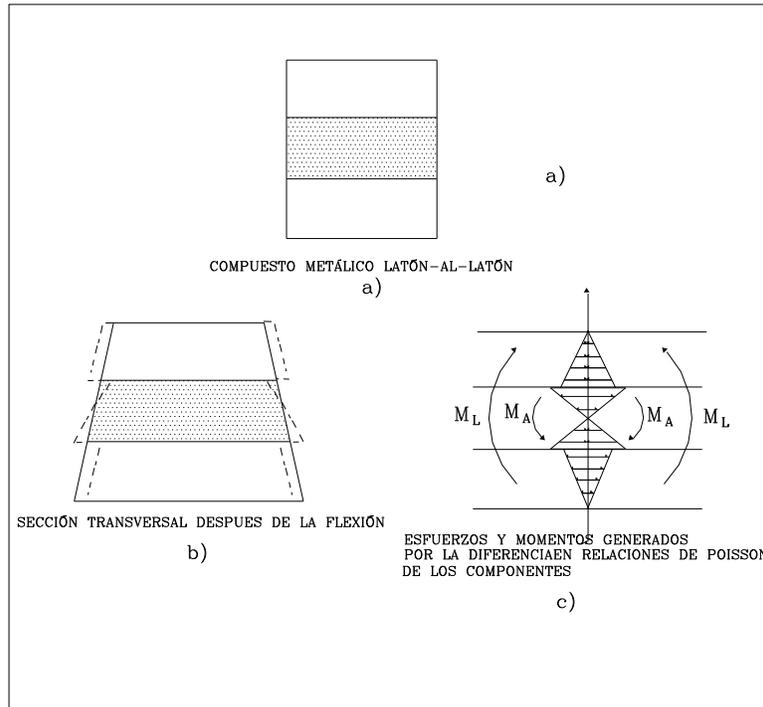


Figura 3.14. Análisis mecánico en un compuesto laminado sujeto a flexión.

A nivel local se tienen esfuerzos interlaminares  $\sigma_{Ly}$  y  $\tau_{Lyz}$ , a través del espesor de las capas. Lo anterior implica decir que el estado de esfuerzos interlaminares en todos los puntos de una capa es triaxial de esfuerzos, ver figura 3.15.

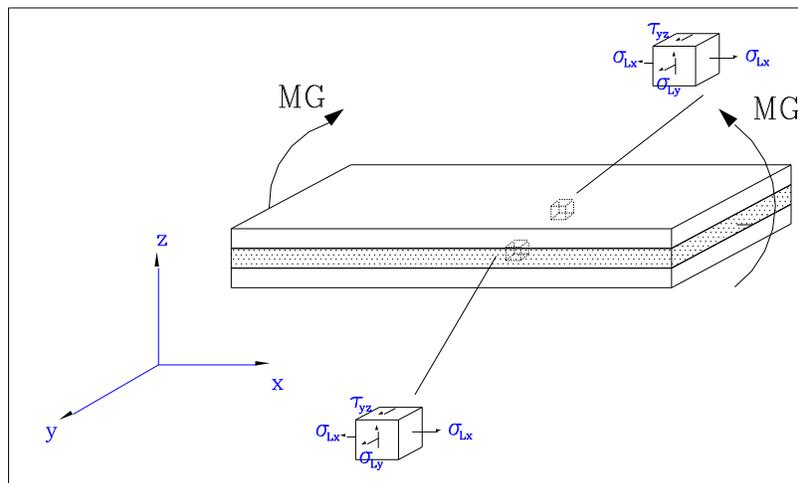


Figura 3.15. Esfuerzos interlaminares locales en un compuesto laminado sujeto a flexión.

Donde, en forma general tenemos para flexión:

$$M = \int \sigma z dz$$

y en dos direcciones arbitrarias en un plano

$$\begin{aligned} M_1 &= \int \sigma_1 z dz \\ M_2 &= \int \sigma_2 z dz \end{aligned} \quad 3.16)$$

los esfuerzos en una dirección arbitraria diferente a los ejes de simetría son:

$$\sigma_1 = Q_{11}\varepsilon_1^\circ + Q_{12}\varepsilon_2^\circ$$

$$\sigma_2 = Q_{21}\varepsilon_1^\circ + Q_{22}\varepsilon_2^\circ$$

$Q_{11}$  y  $Q_{21}$  son las mismas que en la ecuación 3.7).

### Principio de superposición.

El modelo desarrollado en este trabajo para láminas compuestas sujetas a flexión, por considerar que se trata de un problema lineal, el problema total o global puede ser sustituido por un conjunto de problemas individuales, ver figura 3.16. Los momentos totales aplicados son la suma de los momentos individuales, esto es:

$$\begin{aligned} M_{G1} &= M_{L11} + M_{L12} + M_{L13} + \dots \\ M_{G2} &= M_{L21} + M_{L22} + M_{L23} + \dots \end{aligned} \quad 3.17)$$

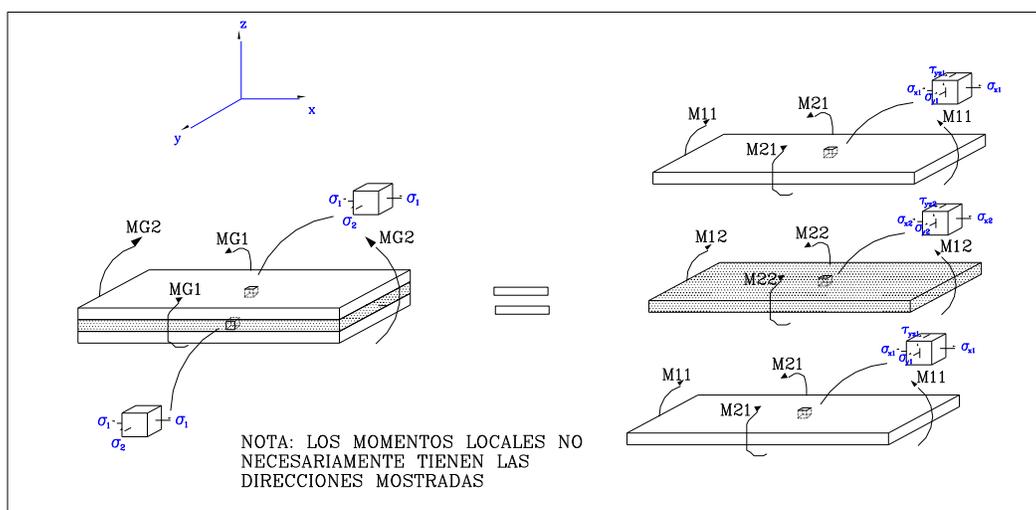


Figura 3.16. Ejemplo de principio de superposición en flexión de laminados compuestos.

donde  $M_{G1}$  y  $M_{G2}$  son los momentos globales con respecto a los ejes 1 y 2, respectivamente. Los momentos  $M_{L11}$ ,  $M_{L12}$ ,  $M_{L13}$ , y  $M_{L21}$ ,  $M_{L22}$ ,  $M_{L23}$ , etc. son los momentos locales (en cada capa) con respecto a los ejes 1 y 2.

### Modelo de flexión resultante

El modelo  $M + L$  considerado aquí para definir los efectos mecánicos ocasionados por flexión en un compuesto laminado está constituido por un modelo global (compuesto aminado con propiedades elásticas efectivas, promedio) y sus modelos locales que lo constituyen (material continuo, homogéneo y anisotrópico), ver figura 3.17.

En los modelos locales considerados al igual que en el modelo de tensión no se toman en cuenta los esfuerzos interlaminares  $\tau_{Lyz}$ , por lo que es válido considerar en las capas un estado de deformaciones lineal, esto es que, se toman en cuenta únicamente esfuerzos interlaminares  $\sigma_{Ly}$ , que se asumen lineales a través del espesor de las capas. Lo anterior implica que el estado de esfuerzos interlaminares en todos los puntos de una capa es biaxial de esfuerzos.

Al cumplir con la hipótesis, de que los esfuerzos cortantes interlaminares son iguales a cero y de la misma forma que las secciones transversales normales al eje neutro son planas antes de la deformación y permanecen planas después de la misma, implica, asumir otra hipótesis: “ si existieran esfuerzos normales transversales a nivel local, éstos deberán ser lineales”. Por lo anterior, es posible decir que en cada capa se tienen momentos transversales interlaminares  $M_L$ 's, ver figura 3.14 c).

El sentido de los momentos interlaminares es función de las propiedades elásticas de las capas componentes y de su posición en la lámina.

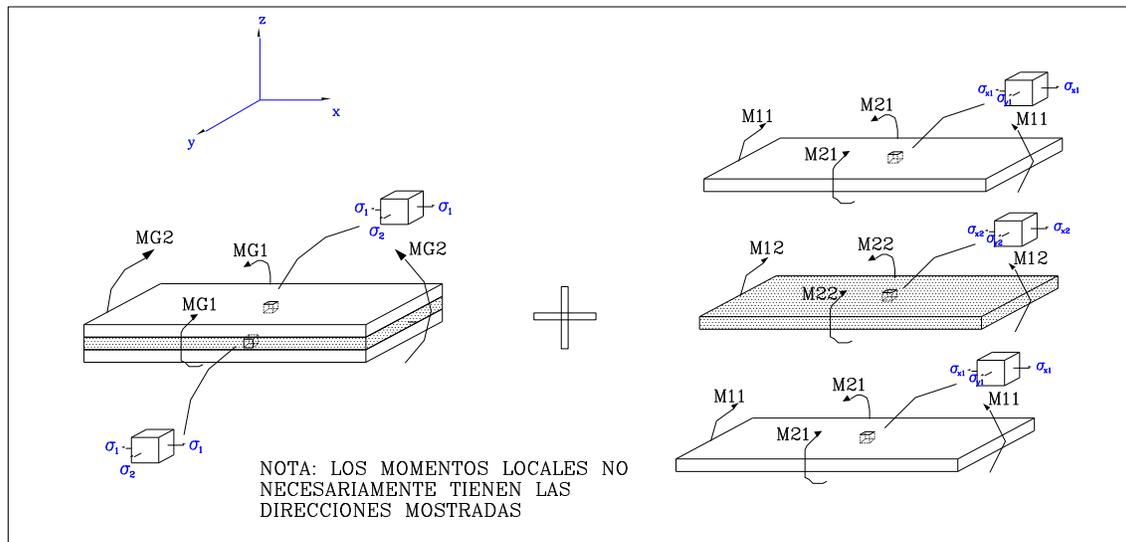


Figura 3.17. Modelo de flexión resultante.

---

Las ecuaciones que definen la propuesta en este estudio son las ecuaciones son entonces:

$$\begin{aligned} ML1 &= \int \sigma L1_z dz \\ ML2 &= \int \sigma L2_z dz \end{aligned} \quad 3.18)$$

$$\begin{aligned} M_{G1} &= M_{L11} + M_{L12} + M_{L13} + \dots \\ M_{G2} &= M_{L21} + M_{L22} + M_{L23} + \dots \end{aligned} \quad 3.19)$$

---

## **Capítulo 4**

### **Análisis Experimental de Esfuerzos en Materiales Compuestos Laminados Simétricos**

En este capítulo se aplican los modelos desarrollados en el capítulo 3 para analizar experimentalmente esfuerzos en materiales compuestos laminados. La validación de los modelos se hace asumiendo que se desconocen las propiedades elásticas de las componentes, las cuales se determinan también experimentalmente.

Las pruebas realizadas son sobre probetas de materiales compuestos laminados constituidos por: a) capas metálicas isotrópicas de latón y de aluminio y, b) por capas ortotrópicas de resina epóxica reforzada con fibras longitudinales de vidrio, se presentan resultados y se hace un análisis sobre los mismos.

Es importante destacar que, al asumir conocer las constantes elásticas para determinar experimentalmente esfuerzos, la evaluación de una probeta para cada tipo de prueba es suficiente.

#### **4.1. Justificación de las pruebas experimentales**

Para validar y mostrar la eficiencia de los modelos desarrollados se plantean y se realizan pruebas experimentales sobre probetas de materiales compuestos laminados conformados por capas metálicas (de aluminio y latón) y por capas ortotrópicas (de resina epóxica reforzada con fibras longitudinales de vidrio). Las pruebas mecánicas que se llevaron a cabo son de tensión simple y de flexión.

El análisis experimental consiste en someter las probetas a tensión simple, y, a flexión y medir las deformaciones globales en las fronteras. Para determinar las deformaciones, las probetas fueron instrumentadas con extensómetros eléctricos de resistencia variable (strain gages). El arreglo de la instrumentación utilizado para ambas pruebas, es tal, que se eliminan posibles errores mecánicos inducidos durante las pruebas experimentales, ver figura 4.1.

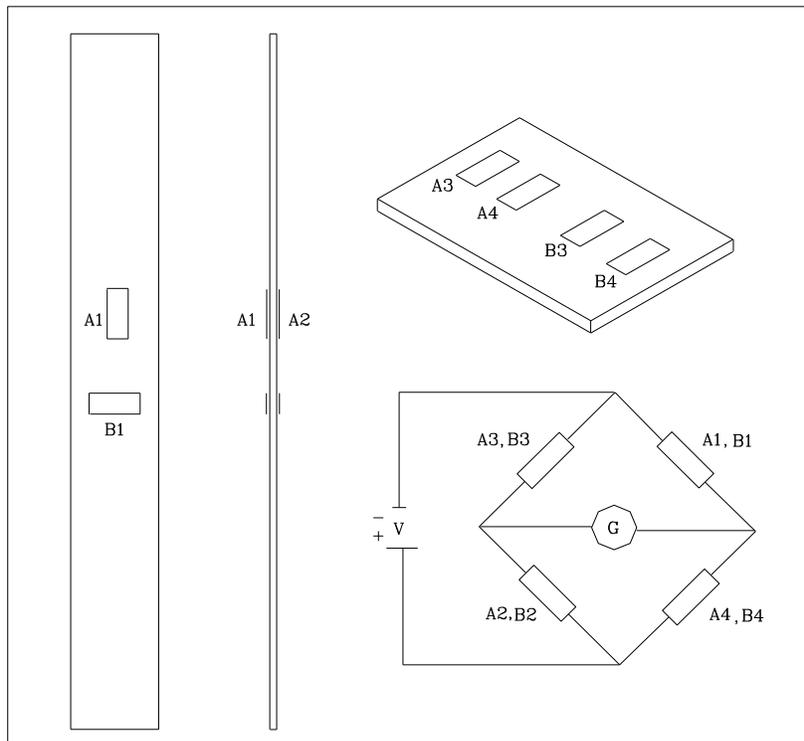


Figura 4.1. Instrumentación de probetas.

El análisis de los resultados y su validación se lleva a cabo determinando esfuerzos globales y locales, y, las constantes elásticas de las componentes de los laminados, asumiendo que éstas últimas se ignoran. Como el número de ecuaciones que definen cada uno de los laminados son insuficientes para poder determinar tanto esfuerzos o momentos y las constantes elásticas globales y locales de los laminados, se llevaron a cabo dos pruebas, tanto para tensión simple como para flexión, combinando en la solución las ecuaciones para ambos modelos. La restricción que se pide para cada tipo de prueba mecánica es que las configuraciones de los laminados generen ecuaciones linealmente independientes. Las probetas, aunque con capas de materiales iguales, son diferentes en su configuración, cumpliendo así con el número suficiente de ecuaciones constitutivas independientes. La combinación de ecuaciones debe ser consistente.

Las probetas fabricadas se asume cumplen con las hipótesis y las restricciones especificadas en el capítulo 3 tanto para los problemas de tensión como para el de flexión.

Para cumplir con las restricciones de los modelos, en las pruebas se debe garantizar en todos los puntos de las probetas un estado de esfuerzos global homogéneo, para tensión simple, y un estado de esfuerzos global lineal, para la prueba de flexión. Lo anterior implica decir que la eficiencia de los resultados experimentales está en función del control de las variables que durante la prueba afectan el comportamiento mecánico de las probetas (punto de aplicación de las cargas, empotramientos simétricos, orientación de los extensómetros, etc.).

---

## 4.2 Pruebas de tensión simple

Las pruebas experimentales de tensión simple se llevaron a cabo en una máquina universal, ver fotografía 1. Las pruebas realizadas fue sobre dos tipos de compuestos laminados, uno con capas metálicas y otro con capas ortotrópicas.



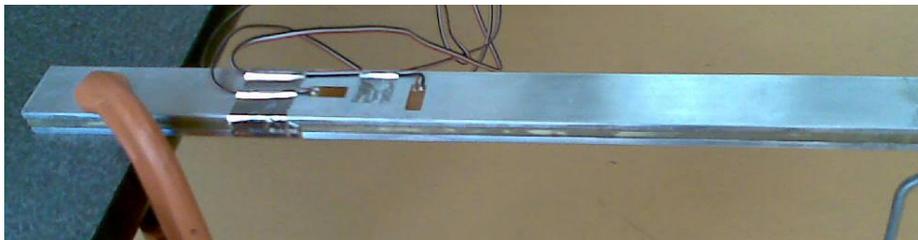
Fotografía 1. Prueba de tensión.

### Tensión en laminado metálico

Como se ha comentado, para cumplir con los objetivos planteados es necesario trabajar con un sistema de ecuaciones que requiere de la realización de pruebas experimentales sobre dos probetas con configuraciones diferentes.

Las probetas de laminados constituidos con capas metálicas isotrópicas son simétricas y están conformadas de la siguiente forma, ver fotografías 2.

- 1) Aluminio-latón-aluminio (ALA)
- 2) latón-aluminio-latón (LAL)



Fotografía 2. Probeta aluminio-latón-aluminio.

---

Las dimensiones de las probetas son:

Espesor de capas de aluminio: 3.28 mm  
Espesor de capas de latón: 3.28 mm  
Ancho de las capas y del laminado: 25.4 mm

Espesor del laminado ALA: 9.835 mm  
Espesor del laminado LAL: 9.725 mm

Los extensómetros que fueron instrumentados del: CEA-13-240-LZ-120

El conjunto de ecuaciones, obtenido con el modelo planteado en la sección 3.3 y el apéndice B, que fue utilizado y resuelto para el análisis experimental de tensión de los laminados metálicos es el siguiente:

$$0 = -\sigma_{XL1} + S_{L11} \times \varepsilon_{11} + S_{L12} \times \varepsilon_{12},$$

$$0 = -\sigma_{YL1} + S_{L21} \times \varepsilon_{11} + S_{L22} \times \varepsilon_{12},$$

$$0 = -\sigma_{XA1} + S_{A11} \times \varepsilon_{11} + S_{A21} \times \varepsilon_{12},$$

$$0 = -\sigma_{YA1} + S_{A12} \times \varepsilon_{11} + S_{A11} \times \varepsilon_{12},$$

$$0 = -\sigma_{XL2} + S_{L11} \times \varepsilon_{21} + S_{L12} \times \varepsilon_{22},$$

$$0 = -\sigma_{YL2} + S_{L21} \times \varepsilon_{21} + S_{L22} \times \varepsilon_{22},$$

$$0 = -\sigma_{XA2} + S_{A22} \times \varepsilon_{21} + S_{A21} \times \varepsilon_{22},$$

$$0 = -\sigma_{YA2} + S_{A12} \times \varepsilon_{21} + S_{A11} \times \varepsilon_{22},$$

$$0 = (0.326) \times \sigma_{YL1} + (0.674) \times \sigma_{YA1},$$

$$0 = (0.6543) \times \sigma_{YL2} + (3426) \times \sigma_{YA2},$$

$$0 = -\sigma_{XP1} + (0.326) \times \sigma_{XL1} + (0.674) \times \sigma_{XA1},$$

$$0 = -\sigma_{XP2} + (0.6573) \times \sigma_{XL2} + (0.3426) \times \sigma_{XA2},$$

$$0 = -S_{L12} + S_{L21}$$

$$0 = -S_{A12} + S_{A21}$$

En el sistema de ecuaciones  $\sigma_{XL1}$ ,  $\sigma_{YL1}$ ,  $\sigma_{XA1}$ ,  $\sigma_{YA1}$ ,  $\sigma_{XL2}$ ,  $\sigma_{YL2}$ ,  $\sigma_{XA2}$ ,  $\sigma_{YA2}$ , son los esfuerzos locales para las probetas A-L-A y L-A-L, respectivamente,  $\sigma_{XP1}$ ,  $\sigma_{XP2}$ , son los esfuerzos globales aplicados para cada una de las probetas. Las constantes elásticas  $S_{L11}$ ,  $S_{L12}$ ,  $S_{A11}$ ,  $S_{A12}$ , pertenecen al latón y al aluminio, respectivamente. Las  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{21}$  y  $\varepsilon_{22}$  son deformaciones en la dirección longitudinal y en la dirección transversal para cada una de las probetas.

## Tensión en laminado ortotrópico

Se seleccionaron dos probetas laminadas simétricas para completar con el sistema de ecuaciones. Las probetas de laminados constituidos con capas ortotrópicas están conformadas de la siguiente forma, ver figura 4.2:

- 1)  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_T$  (LTLTL)
- 2)  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_T$  (TLTLT)

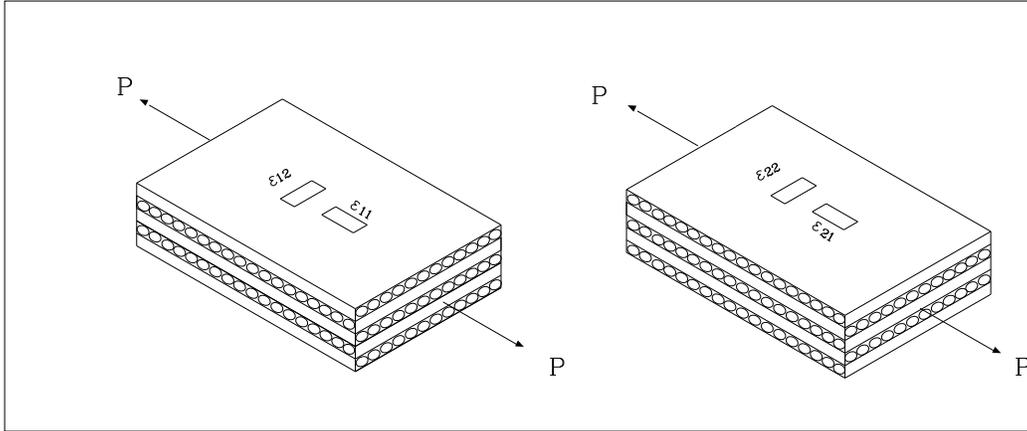


Figura 4.2. Probetas de compuestos laminados con capas ortotrópicas sujetas a tensión simple.

El conjunto completo de ecuaciones constitutivas utilizadas en el modelo para los laminados  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_T$  y  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_T$  son:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\sigma_{XL1} + S_{11} \times \varepsilon_{11} + S_{12} \times \varepsilon_{12} \\
 0 &= -\sigma_{YL1} + S_{21} \times \varepsilon_{11} + S_{22} \times \varepsilon_{12} \\
 0 &= -\sigma_{XT1} + S_{22} \times \varepsilon_{11} + S_{21} \times \varepsilon_{12} \\
 0 &= -\sigma_{YT1} + S_{12} \times \varepsilon_{11} + S_{11} \times \varepsilon_{12} \\
 0 &= -\sigma_{XL2} + S_{11} \times \varepsilon_{21} + S_{12} \times \varepsilon_{22} \\
 0 &= -\sigma_{YL2} + S_{21} \times \varepsilon_{21} + S_{22} \times \varepsilon_{22} \\
 0 &= -\sigma_{XT2} + S_{22} \times \varepsilon_{21} + S_{21} \times \varepsilon_{22} \\
 0 &= -\sigma_{YT2} + S_{12} \times \varepsilon_{21} + S_{11} \times \varepsilon_{22} \\
 \\ 
 0 &= 3 \times \sigma_{YL1} + 2 \times \sigma_{YT1}, \\
 0 &= 2 \times \sigma_{YL2} + 3 \times \sigma_{YT2}, \\
 0 &= -\sigma_{XP1} + (3/5) \times \sigma_{XL1} + (2/5) \times \sigma_{XT1}, \\
 \\ 
 0 &= -S_{12} + S_{21}
 \end{aligned}$$

---

Donde  $\sigma_x$  son los esfuerzos en la dirección longitudinal,  $\sigma_y$  esfuerzos en la dirección transversal, la L significa que se trata de las capas orientadas a  $0^\circ$  y T a  $90^\circ$ .  $S_{11}$ ,  $S_{12}$  y  $S_{22}$  son las constantes elásticas de las capas ortotrópicas. Las  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{21}$  y  $\epsilon_{22}$  son deformaciones en la dirección longitudinal y en la dirección transversal para cada una de las probetas.

Las dimensiones de las probetas son:

Espesor aproximado de las capas ortotrópicas: = 0.166 mm

Ancho del laminado: 15.82 mm

Espesor de los laminados  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_T$  y  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_T$ :  
0.83 mm

### 4.3 Pruebas de Flexión

Las pruebas de flexión se llevaron a cabo sometiendo los compuestos laminados, vigas en voladizo, a una carga en el extremo libre, ver figura 4.3.

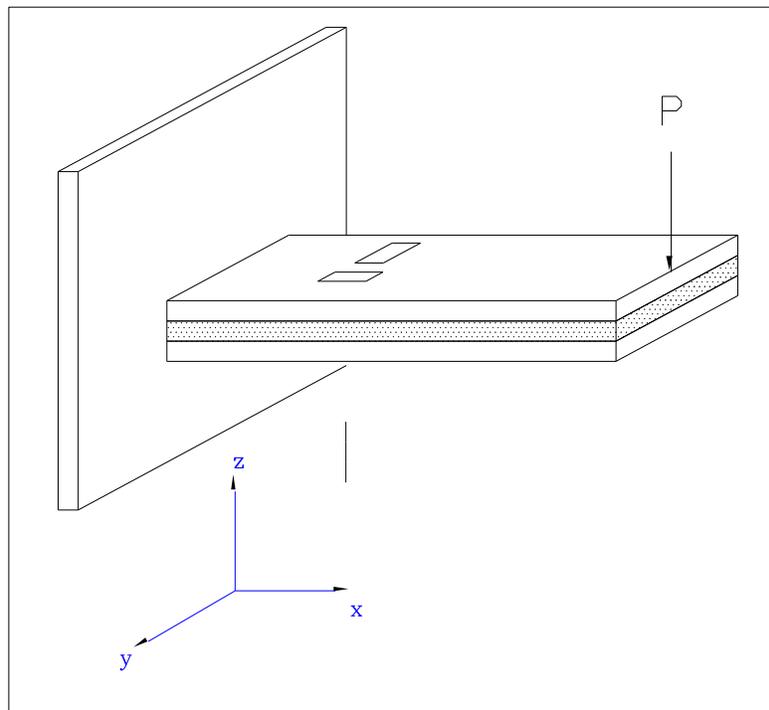


Figura 4.3. Prueba de flexión.

Es importante decir que las pruebas de flexión no son de flexión pura, sin embargo, en el análisis no se considerarán los esfuerzos cortantes producidos por las fuerzas cortantes, los cuales se asume no afectan el valor de los esfuerzos normales e interlaminares transversales considerados en el modelo de flexión planteado. El análisis de dichos esfuerzos cortantes queda fuera de este estudio y se propone que a futuro se desarrolle otro modelo en el cual si se considere su determinación.

Las pruebas preparadas para laminados compuestos con capas metálicas isotrópicas son: aluminio-latón-aluminio y latón-aluminio-latón. La selección de los materiales obedece a que los materiales son comerciales y tienen diferencia relevante en sus relaciones de Poisson ( $\nu_A = 0.34$  y  $\nu_L = 0.31$ ) importante para que los niveles de esfuerzos transversales también sean relevantes.

### Flexión en laminado metálico

Las pruebas experimentales de flexión sobre las probetas con configuraciones:

- 1) Aluminio-latón-aluminio (A-L-A)
- 2) Latón-aluminio-latón (L-A-L)

se observan en la figura 4.4.

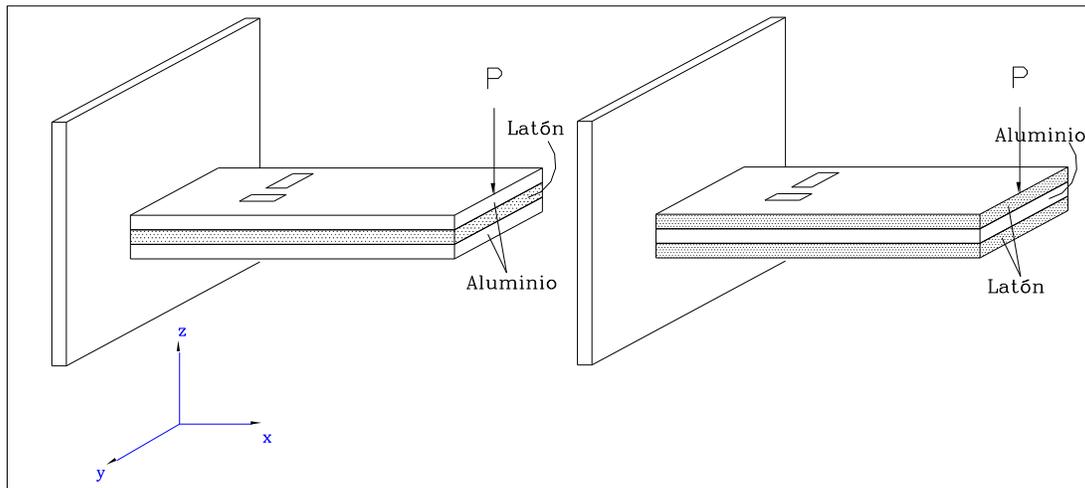


Figura 4.4. Pruebas de flexión, probetas metálicas A-L-A y L-A-L.

Considerando a  $M_{T1}$  como el momento global total aplicado se tiene

$$M_{T1} = M_{A1} + M_{L1}$$

donde  $M_{A1}$  y  $M_{L1}$  son los momentos locales resultantes en las capas de aluminio y la del latón (en el medio), respectivamente. La componente  $M_{A1}$  agrupa a

$$M_{A1} = M_{A1S} + M_{A1I}$$

donde  $M_{A1S}$  es el momento en la capa de aluminio superior y  $M_{A1I}$  es el momento sobre la capa de aluminio inferior.

Analizando para los momentos locales se tiene, ver apéndice D:

$$M_{A1} = B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XA} \times k_{X1}) + B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XYA} \times k_{Y1})$$

$$M_{L1} = (B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XL} \times k_{X1})) + B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XYL} \times k_{Y1})$$

donde B es el ancho del elemento sujeto a flexión, Z`S dan la posición de las capas, ver apéndice D, y las Q`S son las constantes elásticas del aluminio y latón. Con k<sub>X1</sub> y k<sub>Y1</sub> como las curvaturas de flexión en el problema. Las curvaturas en función de las deformaciones globales son

$$\varepsilon_{X1} = k_{X1} \times (h_1/2)$$

$$\varepsilon_{X2} = k_{Y1} \times (h_1/2)$$

para  $\varepsilon_{X1}$  y  $\varepsilon_{Y1}$  como las deformaciones globales en la dirección X y Y, respectivamente.

Analizando ahora los momentos transversales, generados por la diferencia en las relaciones de Poissón de las componentes de las láminas se tiene

$$M_{T2} = M_{A2} + M_{L2},$$

donde  $M_{T2}$  es el momento en la dirección transversal global (cero en nuestras pruebas experimentales) y  $M_{A2}$  y  $M_{L2}$  son los momentos transversales en el aluminio y el latón. También

$$M_{A2} = M_{A2S} + M_{A2I},$$

$M_{A2S}$  es el momento en la capa de aluminio superior y  $M_{A2I}$  es el momento sobre la capa de aluminio inferior.

Donde

$$M_{A2} = (B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XYA} \times k_{X1}) + B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XA} \times k_{Y1}))$$

$$M_{L2} = (B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XYL} \times k_{X1}) + B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XL} \times k_{Y1}))$$

### **Sistema completo de ecuaciones utilizadas para el análisis experimental de flexión**

El sistema de ecuaciones que se tiene para las dos pruebas diferentes, es el siguiente:

$$0 = -M_{T1} + M_{A1} + M_{L1}$$

$$0 = -M_{A1} + B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XA} \times k_{X1}) + B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XYA} \times k_{Y1})$$

$$0 = -M_{L1} + (B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XL} \times k_{X1})) + B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XYL} \times k_{Y1})$$

$$0 = -M_{T2} + M_{A2} + M_{L2},$$

$$0 = -M_{A2} + (B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XYA} \times k_{X1})) + B \times ((2/3) \times (Z_2^3 - Z_1^3) \times Q_{XA} \times k_{Y1})$$

$$0 = -M_{L2} + (B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XYL} \times k_{X1})) + B \times ((2/3) \times (Z_1^3) \times Q_{XL} \times k_{Y1})$$

$$0 = -\varepsilon_{X1} + k_{X1} \times (h_1/2)$$

$$0 = -\varepsilon_{Y1} + k_{Y1} \times (h_1/2)$$

$$0 = -M_{T12} + M_{A12} + M_{L12}$$

$$0 = -M_{L12} + (B \times ((2/3) \times (Z_{22}^3 - Z_{12}^3) \times Q_{XL} \times k_{X12})) + B \times ((2/3) \times (Z_{22}^3 - Z_{12}^3) \times Q_{XYL} \times k_{Y12})$$

$$0 = -M_{A12} + (B \times ((2/3) \times (Z_{12}^3) \times Q_{XA} \times k_{X12})) + B \times ((2/3) \times (Z_{12}^3) \times Q_{XYA} \times k_{Y12})$$

$$0 = -M_{T22} + M_{A22} + M_{L22}$$

$$0 = -M_{L22} + (B \times ((2/3) \times (Z_{22}^3 - Z_{12}^3) \times Q_{XYL} \times k_{X12})) + B \times ((2/3) \times (Z_{22}^3 - Z_{12}^3) \times Q_{XL} \times k_{Y12})$$

$$0 = -M_{A22} + (B \times ((2/3) \times (Z_{12}^3) \times Q_{XYA} \times k_{X12})) + B \times ((2/3) \times (Z_{12}^3) \times Q_{XA} \times k_{Y12})$$

$$0 = -\varepsilon_{X12} + k_{X12} \times (h_2/2)$$

$$0 = -\varepsilon_{X12} + k_{X12} \times (h_2/2)$$

$$0 = -\varepsilon_{Y12} + k_{Y12} \times (h_2/2)$$

Se tiene que  $Q_{XA}$ ,  $Q_{YA}$ ,  $Q_{XYA}$ ,  $Q_{XL}$ ,  $Q_{YL}$  y  $Q_{XYL}$  son constantes elásticas del aluminio y del latón, respectivamente.  $h_2$  es la altura de la probeta 2 (L-A-L).

### **Flexión en lamina ortotrópica**

Como ya se mencionó también se evaluó a un conjunto de probetas de compuestos laminados constituidos por capas ortotrópicas, de resina epóxica con fibras longitudinales de vidrio como refuerzo. También se tomaron dos laminados con arreglos diferentes. Los arreglos son:  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]_T$  y  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_T$ . Cabe mencionar que por el número de incógnitas (2 módulos de Young, 2 relaciones de Poisson y los momentos interlaminares), el conjunto de ecuaciones completo, sin considerar interface, para los problemas son:

---

$$0 = -h_1 + 10 \times h_{11},$$

$$0 = -Z_1 + h_{11},$$

$$0 = -Z_2 + 3 \times h_{11},$$

$$0 = -Z_3 + 5 \times h_{11},$$

$$0 = -h_2 + 6 \times h_{22},$$

$$0 = -Z_{12} + h_{22},$$

$$0 = -Z_{22} + 3 \times h_{22},$$

$$0 = -Q_{XXC} + (Q_{XXC2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -Q_{YYC} + (Q_{YYC2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -Q_{XYC} + (Q_{XYC2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -Q_S + (Q_{S2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -M_{T1} + (BB \times (D_{11} \times K_{XX} + D_{21} \times K_{YY})),$$

$$0 = -M_{T2} + (BB \times (D_{21} \times K_{XX} + D_{22} \times K_{YY})),$$

$$0 = -D_{11} + U_1 \times H_1 + U_2 \times V_1 + U_3 \times V_2,$$

$$0 = -D_{21} + U_4 \times H_1 - U_3 \times V_2,$$

$$0 = -D_{22} + U_1 \times H_1 - U_2 \times V_1 + U_3 \times V_2,$$

$$0 = -U_1 + ((1/8) \times (3 \times Q_{XXC} + 2 \times Q_{XYC} + 3 \times Q_{YYC} + 4 \times Q_S)),$$

$$0 = -U_2 + ((1/2) \times (Q_{XXC} - Q_{YYC})),$$

$$0 = -U_3 + ((1/8) \times (Q_{XXC} - 2 \times Q_{XYC} + Q_{YYC} - 4 \times Q_S)),$$

$$0 = -U_4 + ((1/8) \times (Q_{XXC} + 6 \times Q_{XYC} + Q_{YYC} - 4 \times Q_S)),$$

$$0 = -U_{12} + ((1/8) \times (3 \times Q_{XXC2} + 2 \times Q_{XYC2} + 3 \times Q_{YYC2} + 4 \times Q_{S2})),$$

$$0 = -U_{22} + ((1/2) \times (Q_{XXC2} - Q_{YYC2})),$$

$$0 = -U_{32} + ((1/8) \times (Q_{XXC2} - 2 \times Q_{XYC2} + Q_{YYC2} - 4 \times Q_{S2})),$$

$$0 = -U_{42} + ((1/8) \times (Q_{XXC2} + 6 \times Q_{XYC2} + Q_{YYC2} - 4 \times Q_{S2})),$$

$$0 = -V_1 + ((2/3) \times (2 \times Z_1^3 - 2 \times Z_2^3 + Z_3^3)),$$

$$0 = -V_2 + ((2/3) \times (Z_3^3)),$$

---

$$0 = -\varepsilon_{XX} + k_{XX} \times (h_1/2),$$

$$0 = -\varepsilon_{YY} + k_{YY} \times (h_1/2),$$

$$0 = -M_{T12} + (BB \times (D_{112} \times k_{XX2} + D_{212} \times k_{YY2})),$$

$$0 = -D_{112} + U_{12} \times H_2 + U_{22} \times V_{11} + U_{32} \times V_{22},$$

$$0 = -D_{212} + U_{42} \times H_2 - U_{32} \times V_{22},$$

$$0 = -V_{11} + ((2/3) \times (-2 \times Z_{12}^3 + Z_{22}^3)),$$

$$0 = -V_{22} + ((2/3) \times (Z_{22}^3)),$$

$$0 = -\varepsilon_{XX2} + k_{XX2} \times (h_2/2),$$

$$0 = -\varepsilon_{YY2} + k_{YY2} \times (h_2/2)$$

$$0 = -h_1 + 10 \times h_{11},$$

$$0 = -Z_1 + h_{11},$$

$$0 = -Z_2 + 3 \times h_{11},$$

$$0 = -Z_3 + 5 \times h_{11},$$

$$0 = -h_2 + 6 \times h_{22},$$

$$0 = -Z_{12} + h_{22},$$

$$0 = -Z_{22} + 3 \times h_{22},$$

$$0 = -Q_{XXC} + (Q_{XXC2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -Q_{YYC} + (Q_{YYC2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -Q_{XYC} + (Q_{XYC2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -Q_S + (Q_{S2} \times (h_{11}/h_{22})),$$

$$0 = -M_{T1} + (BB \times (D_{11} \times k_{XX} + D_{21} \times k_{YY})),$$

$$0 = -M_{T2} + (BB \times (D_{21} \times k_{XX} + D_{22} \times k_{YY})),$$

$$0 = -D_{11} + U_1 \times H_1 + U_2 \times V_1 + U_3 \times V_2,$$

$$0 = -D_{21} + U_4 \times H_1 - U_3 \times V_2,$$

$$0 = -D_{22} + U_1 \times H_1 - U_2 \times V_1 + U_3 \times V_2,$$

$$0 = -U_1 + ((1/8) \times (3 \times Q_{XXC} + 2 \times Q_{XYC} + 3 \times Q_{YYC} + 4 \times Q_S)),$$

$$0 = -U_2 + ((1/2) \times (Q_{XXC} - Q_{YYC})),$$

$$0 = -U_3 + ((1/8) \times (Q_{XXC} - 2 \times Q_{XYC} + Q_{YYC} - 4 \times Q_S)),$$

$$0 = -U_4 + ((1/8) \times (Q_{XXC} + 6 \times Q_{XYC} + Q_{YYC} - 4 \times Q_S)),$$

$$0 = -U_{12} + ((1/8) \times (3 \times Q_{XXC2} + 2 \times Q_{XYC2} + 3 \times Q_{YYC2} + 4 \times Q_{S2})),$$

$$0 = -U_{22} + ((1/2) \times (Q_{XXC2} - Q_{YYC2})),$$

$$0 = -U_{32} + ((1/8) \times (Q_{XXC2} - 2 \times Q_{XYC2} + Q_{YYC2} - 4 \times Q_{S2})),$$

$$0 = -U_{42} + ((1/8) \times (Q_{XXC2} + 6 \times Q_{XYC2} + Q_{YYC2} - 4 \times Q_{S2})),$$

$$0 = -v_1 + ((2/3) \times (2 \times Z_1^3 - 2 \times Z_2^3 + Z_3^3)),$$

$$0 = -v_2 + ((2/3) \times (Z_3^3)),$$

$$0 = -\varepsilon_{XX} + k_{XX} \times ((h_1 / 2)),$$

$$0 = -\varepsilon_{YY} + k_{YY} \times ((h_1 / 2)),$$

$$0 = -M_{T12} + (BB \times (D_{112} \times k_{XX2} + D_{212} \times k_{YY2})),$$

$$0 = -D_{112} + U_{12} \times H_2 + U_{22} \times V_{11} + U_{32} \times V_{22},$$

$$0 = -D_{212} + U_{42} \times H_2 - U_{32} \times V_{22},$$

$$0 = -v_{11} + ((2/3) \times (-2 \times Z_{12}^3 \times Z_{22}^3)),$$

$$0 = -v_{22} + ((2/3) \times (Z_{22}^3)),$$

$$0 = -\varepsilon_{XX2} + k_{XX2} \times ((h_2 / 2)),$$

$$0 = -\varepsilon_{YY2} + k_{YY2} \times ((h_2 / 2)),$$

Donde los coeficientes se definen en el apéndice D. Cabe señalar que para completar el sistema de ecuaciones linealmente independientes se incluyen ecuaciones que relacionan la posición de las capas.

#### 4.4 Pruebas experimentales

Para validar y mostrar la eficiencia de los modelos desarrollados para el análisis experimental de esfuerzos en pruebas de tensión simple y de momentos en pruebas de flexión, se plantean y se realizaron pruebas experimentales sobre cuatro probetas de compuestos laminados conformados de capas metálicas de aluminio y latón (dos) y por capas ortotrópicas (dos). Es importante mencionar

---

que experimentalmente se deben cuidar todas las variables posibles para garantizar que el estado de esfuerzos sea homogéneo para la prueba de tensión y lineal para la prueba de flexión, es decir, que el estado de esfuerzos sea constante o lineal en todos los puntos de las probetas que se ensayan.

El proceso de la prueba experimental consistió en:

- Etapa 1) Fabricación e instrumentación de probetas con configuraciones Al-latón-Al (dos) y Latón-Al-Latón (dos) y las constituidas por capas ortotrópicas. Las propiedades del aluminio y del latón se obtuvieron realizando pruebas de flexión en probetas de cada material en forma individual, ver fotografías 3 y 4.



Fotografías 3 y 4. Obtención de las propiedades mecánicas de aluminio y latón.

- Etapa 2) Instrumentación de las probetas. El número de extensómetros instrumentados son cuatro, dos longitudinales y dos transversales y el arreglo utilizado en el Puente de Wheatstone es de puente completo, para lo cual se utilizan dos elementos instrumentados en otro elemento para completar el puente. Lo anterior es para eliminar errores experimentales durante las pruebas, esto porque durante pruebas de tensión, por el tipo de prueba no nada más someten a la probeta a un estado de esfuerzos uniaxial (tensión), sino que también se provoca flexión.
- Etapa 3) Someter las probetas a pruebas de tensión simple en una máquina universal. El modelo utilizado es el presentado para cálculo de esfuerzos interlaminares (normales y transversales). Los resultados de las pruebas fueron también utilizados en modelos que consideraron la existencia de una interface, ver apéndice F.
- Etapa 4) Realización de pruebas de flexión sobre probetas conformadas por capas de aluminio y latón, y por capas ortotrópicas. Un análisis considerando interface se muestra en el apéndice F.

---

## Realización de las pruebas experimentales

Se llevaron a cabo las pruebas de tensión simple y las pruebas de flexión simple para los compuestos laminados metálico y ortotrópico.

Las pruebas de tensión se llevaron a cabo en una máquina universal Shimadzu, ver fotografías 5, 6 y 7. Se tomaron lecturas tomando como parámetro la carga aplicada por la máquina universal y se tomaron ambas lecturas, de carga y de las deformaciones con el puente de wheatstone.

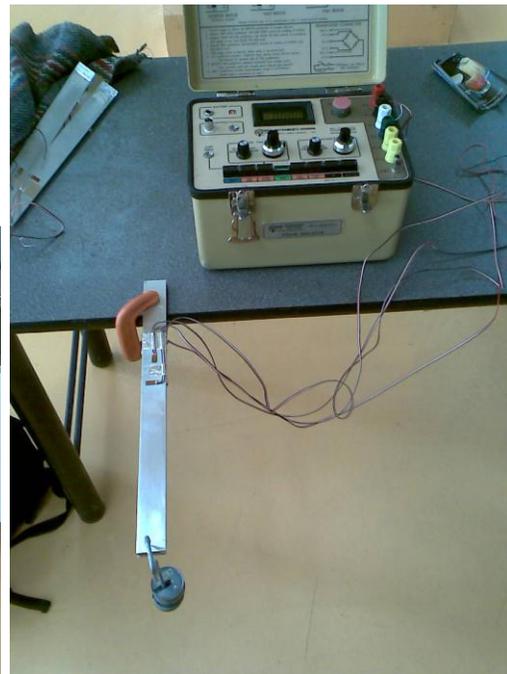
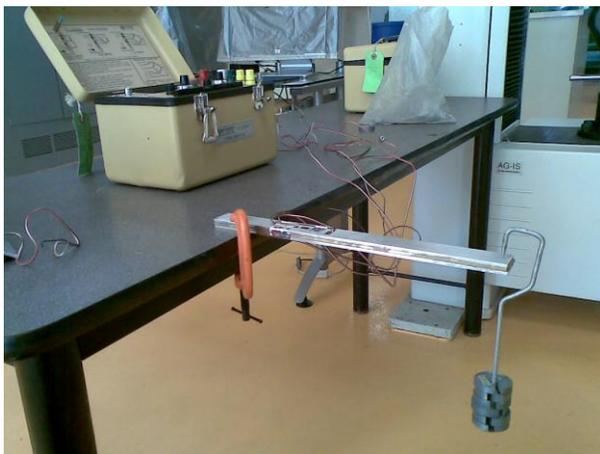


Fotografías 5 y 6. Prueba de tensión simple, material compuesto laminado metálico A-L-A.



Fotografía 7. Prueba de tensión simple, material compuesto laminado metálico A-L-A, acercamiento.

Las pruebas de flexión fueron llevadas a cabo en dos probetas por cada prototipo, en forma de una viga en cantiliver, ver fotografías 8 y 9, aplicando pesos conocidos y tomando la lectura de las deformaciones.



Fotografías 8 y 9. Prueba de flexión, material compuesto laminado metálico A-L-A.

---

## 4.5 Resultados y análisis

Se tienen los resultados, de las pruebas experimentales realizadas sobre materiales compuestos laminados sujetos a tensión y a flexión, determinando esfuerzos globales, esfuerzos locales, para las pruebas de tensión simple, y, de momentos globales y momentos locales para las pruebas de flexión. La validación se obtiene determinando las constantes elásticas de las componentes de los materiales compuestos laminados utilizados en las pruebas.

Se presentan los resultados y se hace un análisis de los mismos. Es importante aclarar que se llevaron a cabo do repeticiones de pruebas experimentales y análisis de datos por cada configuración.

Para la determinación de las constantes en todos los casos se llevó a cabo un análisis de las gráficas  $\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}$ ,  $E - \varepsilon_{xx}$  y  $\nu - \varepsilon_{xx}$  y se seleccionó el intervalo que mostró mayor linealidad, el cual se utilizó en las ecuaciones correspondientes.

Se planteó y se evaluó también un problema para tensión y para flexión en donde se considera la existencia de una interface isotrópica entre las capas ortotrópicas o isotrópicas. Se asume un espesor real para el análisis y se evalúan resultados para diferentes valores de éstos.

### Laminado metálico

Se llevaron a cabo pruebas de flexión, dos por material, para determinar las propiedades elásticas de las componentes del laminado metálico, latón y aluminio y los resultados promedio son los mostrados en la tabla 1.

Módulo de Young del aluminio ( $E_A$ ) (G Pa)	66.5
Relación de Poisson del aluminio ( $\nu_A$ )	0.34
Módulo del Young del latón ( $E_L$ ) (Gpa)	98
Relación de Poisson del latón ( $\nu_L$ )	0.307

Tabla 4.1. Propiedades elásticas del aluminio y latón.

Los resultados obtenidos para determinar esfuerzos globales e interlaminares y las constantes elásticas se observan en la tabla 4.2 y 4.3, respectivamente.

<b>Probeta 1 (A-L-A)</b>	(MPa)
-	
Esfuerzo global longitudinal	3.37
Esfuerzo global transversal	0
-	
Esfuerzo interlaminar longitudinal Aluminio	2.9
Esfuerzo interlaminar longitudinal Latón	4.36
Esfuerzo interlaminar transversal Aluminio	0.05
Esfuerzo interlaminar transversal Latón	0.105
-	
<b>Probeta 2 (L-A-L)</b>	
-	
Esfuerzo global longitudinal	2.78
Esfuerzo global transversal	0
-	
Esfuerzo interlaminar longitudinal Aluminio	2.1
Esfuerzo interlaminar longitudinal Latón	3.14
Esfuerzo interlaminar transversal Aluminio	0.065
Esfuerzo interlaminar transversal Latón	0.034

Tabla 4.2. Esfuerzos globales e interlaminares del laminado metálico, pruebas de tensión simple.

	<b>Constantes reales (Gpa)</b>	<b>Constantes Evaluadas (Gpa)</b>	<b>% desviación</b>
Módulo de Young del aluminio ( $E_A$ )	66.5	67.8	2.02
Relación de Poisson del aluminio ( $\nu_A$ )	0.34	0.34268	0.79
Módulo del Young del latón ( $E_L$ )	98	103.25	5.35
Relación de Poisson del latón ( $\nu_L$ )	0.307	0.305	-0.52

Tabla 4.3. Constantes obtenidas para evaluar el modelo de esfuerzos, prueba de tensión simple.

Se puede observar, considerando las constantes elásticas como incógnitas y como parámetro de evaluación, que los porcentajes de desviación con respecto a los valores de las constantes de los materiales son relativamente muy bajos. Las desviaciones encontradas para el módulo de Young del aluminio de 2 % y de su relación de poisson de 0.8 %, para el latón de 5.3 % y 0.5 %, respectivamente. Lo anterior implica decir que la determinación de los esfuerzos interlaminares es confiable.

Se puede observar que los esfuerzos interlaminares transversales, aunque bajos, son relevantes, ya que alcanzan un valor aproximado de 3.5 % y de 1.5% para la probeta LAL y para la ALA, respectivamente, con respecto a los esfuerzo longitudinal ales  $\sigma_x$  del aluminio y latón, lo cual debe influir en forma importante en el análisis total del comportamiento mecánico del laminado.

En las pruebas de flexión se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 4.5 y 4.6.

<u>Probeta 1 (A-L-A)</u>	(Nm)
-	
Momento global longitudinal	0.3011
Momento global transversal	0
-	
Momento interlaminar longitudinal Aluminio	0.29
Momento interlaminar longitudinal Latón	0.0162
Momento interlaminar transversal Aluminio	0.0010 6
Momento interlaminar transversal Latón	- 0.0010 6
<u>Probeta 2 (L-A-L)</u>	
Momento global longitudinal	0.156
Momento global transversal	0
-	
Momento interlaminar longitudinal Aluminio	0.004
Momento interlaminar longitudinal Latón	0.152
Momento interlaminar transversal Aluminio	0.0002 7
Momento interlaminar transversal Latón	- 0.0002 7

Tabla 4.5. Momentos interlaminares obtenidos con las pruebas de flexión.

	<b>Constantes reales (Gpa)</b>	<b>Constantes Evaluadas (Gpa)</b>	<b>% desviación</b>
Módulo de Young del aluminio ( $E_A$ )	66.5	65.6	-1.35
Relación de Poisson del aluminio ( $\nu_A$ )	0.34	0.343	0.88
Módulo del Young del latón ( $E_L$ )	98	98.64	0.65
Relación de Poisson del latón ( $\nu_L$ )	0.307	0.2803	-8.7

Tabla 4.6. Constantes obtenidas para evaluar el modelo de flexión.

Los resultados experimentales muestran muy buenos resultados en la determinación de las constantes, lo que implica decir que el modelo hace posible determinar momentos interlaminares confiables. Los momentos interlaminares muestran valores relevantes con respecto al momento global aplicado de alrededor de 1%.

En general se observan buenos resultados, con variaciones de aproximadamente 1% para los módulos de Young de aluminio y latón, de 0.88 % para la relación de Poisson del aluminio y de 8.7% en la relación de Poisson del latón.

### Laminado ortotrópico

Para las pruebas que se llevaron a cabo se consideraron como parámetro de comparación las constantes de las capas ortotrópicas obtenidas por Acosta (1998) y por Navarrete y Serranía (2002) con un método fotoacústico, las cuales se presentan en la tabla 4.8.

<b>Constantes</b>	<b>Efectivas (Acosta)</b>	<b>Navarrete y Serranía</b>
$E_x$	53 GPa	51 GPa
$E_y$	23.3 GPa	13.42 GPa
$\nu_{xy}$	0.23	-----
$\nu_{yx}$	0.1	-----
$G_{xy}$	8.35 GPa	-----

Tabla 4.8. Constantes de las capas ortotrópicas, obtenidas en la tesis de maestría de Acosta (1998) y por un método fotoacústico (Navarrete, Serranía, 2002).

Los resultados obtenidos para determinar esfuerzos globales, interlaminares y las constantes elásticas se observan en la tabla 4.9 y 4.10.

<u>Probeta I (3-2)</u>	(MPa)
-	
Esfuerzo global longitudinal	47.34
Esfuerzo global transversal	0
-	
Esfuerzo interlaminar longitudinal (0°)	61.5
Esfuerzo interlaminar longitudinal (90°)	26.02
Esfuerzo interlaminar transversal (0°)	2.15
Esfuerzo interlaminar transversal (90°)	-3.23
<u>Probeta II (2-3)</u>	(MPa)
Esfuerzo global longitudinal	27.62
Esfuerzo global transversal	0
Esfuerzo interlaminar longitudinal (0°)	44.6
Esfuerzo interlaminar longitudinal (90°)	18.9
Esfuerzo interlaminar transversal (0°)	2
Esfuerzo interlaminar transversal (90°)	-1.33

Tabla 4.9. Esfuerzos globales e interlaminares del laminado ortotrópico, pruebas de tensión simple.

El valor de los esfuerzos interlaminares transversales son relevantes, ver tabla 4.9, y alcanzan un valor de hasta 12 % en la capa ubicada a 90° y de 3.5 % para la ubicada a 0° referidos a la probeta 3-2. En la probeta 2-3 los valores fueron de hasta 7 % en la capa ubicada a 90° y de 4.5 % para la ubicada a 0°.

Los resultados, al igual que los obtenidos en el laminado metálico, también fueron muy buenos y las desviaciones encontradas se observan en la tabla 4.4, siendo las desviaciones encontradas máximas para el módulo de Young longitudinal  $E_x$  de 1.9 % y 3.76 % para el módulo transversal  $E_y$ . La relaciones de Poisson  $\nu_{xy}$  y  $\nu_{yx}$  tuvieron diferencias también mínimas de 0.5 % y de 0.27 %, respectivamente.

	<b>Constantes Tesis</b>	<b>Constantes Evaluadas</b>	<b>% desviación</b>
Módulo de Young $E_X$ (GPa)	53	52	-1.92
Módulo del Young $E_Y$ (GPa)	23.3	22.4	-3.7
Relación de Poisson $\nu_{XY}$	0.23	0.231	0.51
Relación de Poisson $\nu_{YX}$	0.1	0.0997	-0.27

Tabla 4.10. Constantes obtenidas de las capas ortotrópicas, para evaluar el modelo de Tensión simple.

	<b>Constantes (Acosta)</b>	<b>Constantes Evaluadas</b>	<b>% desviación</b>
$E$ efectiva 3-2 (GPa)	41.32	41.4	0.23
$\nu$ efectiva 3-2	0.1486	0.15	1.83

Tabla 4.11. Constantes globales (promedio o efectivas) de la probeta 3-2.

En la tabla 4.11 se presentan los valores globales (efectivos o promedio) de la lámina 3-2, se puede notar que las variaciones son muy pequeñas.

En las pruebas de flexión se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 4.12, para las propiedades de las capas ortotrópicas.

	<b>Constantes (Tesis Maestría Acosta)</b>	<b>Constantes Evaluadas</b>	<b>% desviación</b>
Módulo de Young $E_X$ (GPa)	53	53.2	-0.37
Módulo del Young $E_Y$ (GPa)	23.3	24.1	-3.3
Relación de Poisson $\nu_{XY}$	0.23	0.224	2.67
Relación de Poisson $\nu_{YX}$	0.1	0.102	1.96

Tabla 4.12. Constantes obtenidas para evaluar el modelo de flexión.

Los resultados muestran que las variaciones experimentales son entre 3% en promedio, lo cual muestra que las pruebas realizadas y los análisis gráficos se llevaron a cabo en forma correcta.

---

## **Capítulo 5**

### **Conclusiones y recomendaciones**

#### **5.1 Conclusiones**

Como resultado del desarrollo de un modelo simple y sistemático (utilizando los modelos constitutivos de la teoría de la elasticidad lineal, la teoría clásica de láminas y el principio de superposición), que hace posible el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos simétricos laminados y la obtención de sus propiedades elásticas, se presentan las conclusiones y recomendaciones respectivas.

El método (inverso) utilizado para la evaluación experimental de este trabajo, es asumir en el análisis que las constantes elásticas de las capas que constituyen los compuestos laminados son desconocidas, determinarlas y evaluarlas con respecto a valores ya conocidos. Del análisis experimental que se llevó a cabo, considerando las pruebas realizadas a dos diferentes compuestos laminados (capas isotrópicas y capas ortotrópicas), se obtienen las siguientes conclusiones:

- Se logró desarrollar un modelo global-local simple, con el cual sistemáticamente, para cualquier laminado compuesto simétrico y para cualquier condición de frontera (con errores promedio obtenidos de 3 %), mejorando a la teoría clásica de láminas es posible analizar en esfuerzos en forma experimental.
- Con el modelo es posible determinar esfuerzos interlaminares normales y transversales, considerando que, en tensión o compresión, los esfuerzos normales transversales son homogéneos a través del espesor de las capas y que en flexión estos tienen distribución lineal. También, es posible evaluar esfuerzos globales (promedio). La determinación de esfuerzos interlaminares muestran consistencia ya que con el criterio de evaluación, se encontraron errores máximos de 8 % y de 1.5 % en promedio, para los compuestos metálicos y ortotrópicos, ver tablas 4.2 y 4.9.
- Con el modelo planteado, aunque en forma indirecta, es posible determinar para cada una de las capas componentes, a partir de la determinación de esfuerzo interlaminar transversal normal, el esfuerzo cortante máximo interlaminar transversal.
- Como consecuencia, el modelo propuesto puede ser utilizado para determinar las constantes elásticas de las capas constituyentes (isotrópicas u ortotrópicas), ver tablas 4.3 y 4.10, lo cual es importante

---

porque su evaluación lleva consigo factores no considerados cuando se calculan éstas en forma idealizada.

- Los resultados muestran que los modelos y la metodología experimental propuesta pueden ser utilizados para evaluar, analizar y validar soluciones numéricas.
- La restricción propuesta en el problema de flexión, de que la distribución de esfuerzos normales transversales interlaminares es lineal, permite la determinación de los definidos en este estudio como momentos interlaminares. La determinación de momentos interlaminares son consistentes ya que se así lo muestran los cálculos de las constantes elásticas, ver tablas 4.6 y 4.12.
- Las hipótesis de uniformidad y de linealidad en la distribución de esfuerzos hacen que la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable sea consistente y compatible con los modelos planteados.
- Con el modelo es posible analizar los efectos de la interface si se considera ésta como una capa más de material isotrópico en el compuesto laminado, ver apéndice F.

## **5.2 Recomendaciones**

Las recomendaciones que se dan, como resultado del desarrollo de este trabajo y analizando sus alcances, son las siguientes:

- a) Llevar a cabo un estudio profundo sobre la caracterización y los efectos que tiene una interface entre las capas en el comportamiento mecánico de los compuestos laminados. Con el modelo es posible si se considera la interface como una capa más de material isotrópico.
- b) Llevar a cabo un estudio sobre los efectos de borde para evaluar el en forma experimental el problema de la delaminación, resultado de los esfuerzos interlaminares producidos.
- c) Desarrollar un modelo equivalente al de este estudio para evaluar en forma experimental esfuerzos en compuestos laminados simétricos sometidos a torsión.
- d) Desarrollar un modelo análogo al de este estudio para llevar a cabo un estudio experimental de los efectos que tienen los esfuerzos térmicos interlaminares, que resultan de la diferencia en los coeficientes de expansión térmica de las componentes de un compuesto laminado simétrico.
- e) Desarrollar un software para que en forma sistemática, aplicando el modelo propuesto en este trabajo, se lleve a cabo el análisis experimental

---

de esfuerzos en diseños mecánicos que utilicen compuestos laminados. Lo anterior es importante en muchas áreas de aplicación de estos materiales; por ejemplo, la aviación.

- f) Utilizar el análisis experimental de esfuerzos como una herramienta fundamental en la investigación, desarrollo y aplicación de materiales compuestos.
- g) Desarrollar un método con el cual puedan ser determinados los esfuerzos cortantes que se producen por las fuerzas aplicadas en un problema de flexión diferente al de flexión pura.

---

## **APÉNDICE A**

### **Conceptos teóricos**

#### **A.1 Antecedentes**

En este anexo se analizan conceptos relevantes para este trabajo; tales como: material compuesto, Principio de Saint-Venant, Estado de esfuerzos, principio de superposición, propiedades globales y locales, la teoría clásica de láminas, la técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable y su aplicación en materiales compuestos, etc..

#### **A.2 Definición de material compuesto**

Un material compuesto es aquel que está formado de 2 o más componentes en una escala macroscópica, distinguibles físicamente y separables mecánicamente, y con propiedades superiores a las de sus constituyentes (sinergia).

Estos materiales nacen de la necesidad de obtener materiales que combinen propiedades de los cerámicos, los plásticos, los metales, etc. de manera tal, que sea posible manipular las propiedades del material, variando aspectos como son: la rigidez, la resistencia a la fatiga, la resistencia a la corrosión, la resistencia a la abrasión, la reducción de peso, la capacidad de trabajo a altas y bajas temperaturas, etc.

Algunas de las aplicaciones de los materiales compuestos que podemos encontrar actualmente son:

1. En la industria naval: hélices, navíos, submarinos, depósitos de agua y combustible, ductos de ventilación, boyas, etc.
2. En la industria militar y aeroespacial: cohetes, hélices de aviones y helicópteros, recipientes a presión, naves de desembarque, etc.
3. En la industria automotriz: partes de carrocería de automóviles, camiones y ómnibus, para-golpes, paneles de instrumentos, revestimientos internos, etc.
4. En la industria civil: perfiles estructurales, pisos, paneles y placas divisorias, hormigón armado, hormigón con fibras, refuerzos estructurales, etc.
5. En la industria del deporte: cascos, esquís, raquetas de tenis, palos de golf más largos y esbeltos, piscinas, arcos y flechas, bicicletas, cañas de pesca, etc.

Los materiales compuestos pueden ser clasificados en tres grupos: los reforzados con partículas, los reforzados con fibras (de vidrio, de carbono, kevlar, etc.) y los estructurales (tipo sándwich).

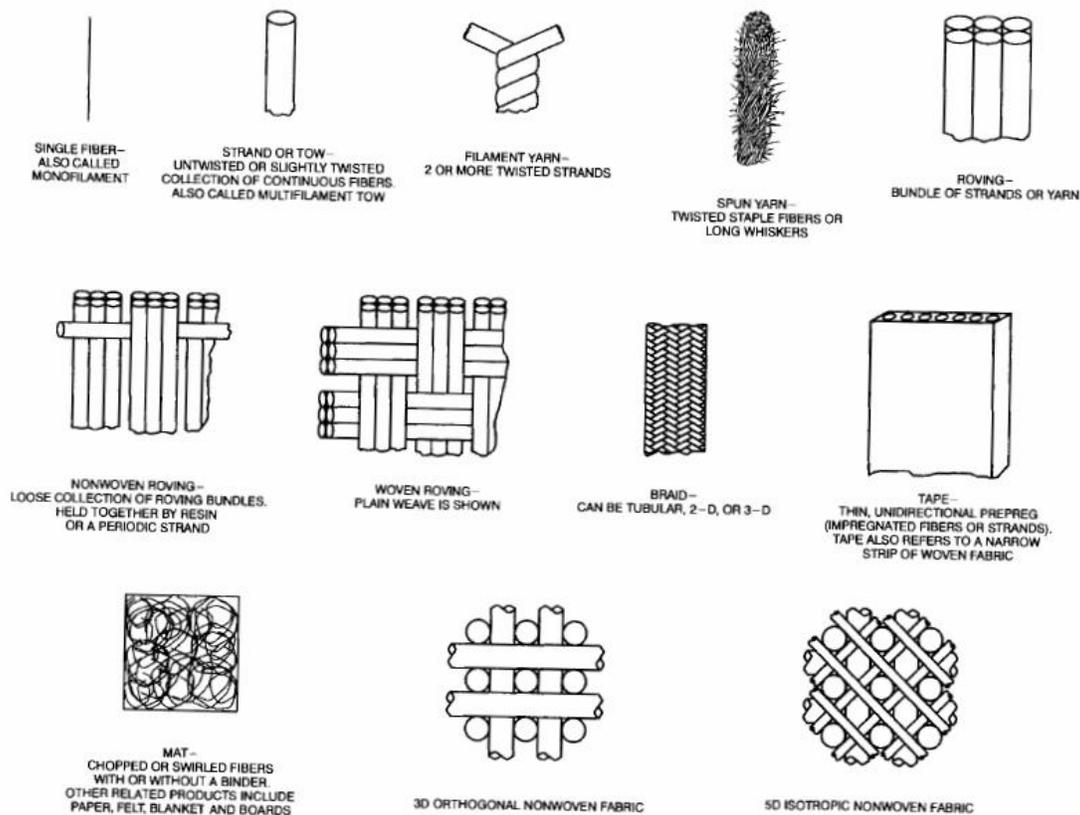


Figura 1: Diversas configuraciones y empaquetamiento de fibras. Fuente: Staab, J. Laminar Composites.[04].

### A.3 Principio de Saint-Venant

Para propósito de análisis estático o dinámico, si un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo se reemplaza por otro sistema de fuerzas estáticamente equivalente, el estado de esfuerzos y de deformaciones en puntos lejos de las cargas aplicadas es idéntico.

### A.4 Principio de Superposición

El principio de superposición permite descomponer un problema mecánico en dos o más subproblemas, siempre y cuando las ecuaciones que definan su comportamiento mecánico sean lineales.

---

## A.5 Estado de esfuerzos en un punto

La forma de definir las condiciones mecánicas de un punto es con el estado de esfuerzos en un punto, esto es los esfuerzos actuando en todos los planos (ecuaciones de transformación de esfuerzos [A. J. Durelli]) o las componentes de esfuerzos en planos que coinciden a un sistema de referencia; por ejemplo;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  con respecto al sistema xyz.

## A.6 Análisis de esfuerzos

En este trabajo el análisis de esfuerzos en materiales compuestos implicará, lo cual definiremos, tres niveles de esfuerzos; globales (por lámina), interlaminares (por pliegue o capa) y puntuales. Ver figuras # y %.

Los esfuerzos globales son el resultado promedio de la integración de esfuerzos locales (longitudinales y transversales) de cada capa través de todo el espesor del laminado compuesto.

A nivel local los esfuerzos interlaminares (normales y transversales por pliegue o capa) son resultado de esfuerzos promedio de la integración de esfuerzos a través de la capa o pliegue.

Esfuerzos interlaminares puntuales son aquellos que se determinan en cualquier punto del laminado compuesto, los cuales dependiendo el problema de tensión o flexión son función de los modelos planteados en este trabajo.

## A.7 Propiedades globales y locales de un compuesto laminado

Generalmente, las propiedades elásticas globales (promedio o efectivas) de un compuesto laminado, se determinan a partir del conocimiento de: las propiedades elásticas de cada una de sus capas, de las dimensiones, del número (si es que se tienen conjuntos de capas con misma dirección), de la orientación y de la posición de los grupos de capas o de cada una de las capas individuales en el laminado. Las propiedades de las capas individuales (locales) a su vez, se determinan del conocimiento de las propiedades elásticas de la matriz y de las fibras de refuerzo. Sin embargo, existen factores que no son considerados y que alteran en mayor o menor grado el valor ideal de las propiedades elásticas tanto las efectivas del laminado como las de las capas individuales, dependiendo de: el proceso de fabricación, la unión entre las capas componentes, las propiedades térmicas hígricas [1] de cada una de las capas constituyentes, etc. Dichos factores hacen que la determinación experimental tanto de las propiedades elásticas globales como la de las capas (locales) sea importante, sobre todo si éstas se requieren para llevar a cabo análisis numéricos o experimentales del comportamiento mecánico de un compuesto laminado y se quieren resultados más precisos.

---

## **A.8 Interface**

La interface es una capa física que se forma entre las componentes de los materiales compuestos, se considera que ésta se produce por la unión en los compuestos (por pegamento, fusión, metálica o de resina, etc., defectos de manufactura) o por la unión entre materiales con propiedades mecánicas diferentes.

## **A.9 Extensometría eléctrica de resistencia variable**

La técnica de extensometría eléctrica de resistencia variable es una de las más usadas para el análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos [Perry 1992, Acosta]. Buenos resultados pueden ser obtenidos si se combina y aplica eficientemente, un modelo mecánico representativo de materiales compuestos laminados, el método científico [Cohen y Nagel] como herramienta para el entendimiento de los problemas mecánicos a resolver y como guía para la obtención de su solución, y, la técnica de extensometría eléctrica que proporcione la información útil necesaria para la obtención de la misma.

Existen varios factores que pueden conducir a errores de medición y alterar los resultados de los análisis experimentales: por errores conceptuales teóricos, por la naturaleza del material del elemento a analizar y el funcionamiento del propio extensómetro [Tesis de Maestría Acosta], instalación, cambios de temperatura; por ejemplo, la sensibilidad transversal del extensómetro, desalineación en su instalación, cambios de temperatura, etc. Errores de hasta 50% pueden ser el resultado por problemas de desalineación en la instalación del extensómetro y por efectos de sensibilidad transversal, [Tuttle 1984].

La selección del extensómetro y del quipo a utilizar en las pruebas, el uso de factores de compensación, y el manejo de resultados dependen directamente del tipo de problema a resolver.

## **A.10 La técnica de extensometría eléctrica en el análisis de esfuerzos en materiales compuestos**

Los extensómetros eléctricos de resistencia variable son sensores que miden deformaciones promedio puntuales donde se instrumentan, por lo que la información que puede obtenerse de ellos es real y pertenece únicamente al punto instrumentado. Con la información proporcionada por los extensómetros sólo es posible determinar los valores de deformaciones o de esfuerzos en otros puntos de un elemento cuando se cuenta con un modelo en el que se considera que la distribución de esfuerzos es homogénea o es lineal. No es posible conocer las deformaciones en otros puntos del elemento analizado cuando no se cumple con todos los puntos anteriormente mencionados.

En este trabajo se presentan dos modelos con los que es posible analizar experimentalmente el comportamiento mecánico interlaminar y global, utilizando la técnica de extensometría eléctrica, en problemas de tensión simple o de flexión

---

pura de materiales compuestos laminados. En ellos se considera distribución de esfuerzos homogénea o lineal.

### **A.11 Teoría clásica de láminas**

La teoría clásica de láminas es base para el desarrollo de este trabajo, lo relacionado al problema de tensión simple se puede consultar en el texto de Tsai, en el trabajo de tesis de maestría de de M. Acosta y apéndice C. Los fundamentos de laminados compuestos sujetos a flexión lo podemos consultar en el anexo D y capítulo 3 de este trabajo.

---

## APÉNDICE B

### Modelo de elasticidad lineal

#### B1. Modelo de elasticidad lineal

El modelo de elasticidad lineal obedece las leyes fundamentales de la de la mecánica de los medios continuos: las leyes de Newton y las leyes de la conservación de la masa y la energía, y, posee las siguientes restricciones: el medio posee masa, es continuo, es lineal, es elástico- lineal y homogéneo.

El modelo de elasticidad lineal (15 ecuaciones con 15 incógnitas) se encuentra conformado por el modelo de esfuerzos, el modelo de deformaciones, y por el modelo constitutivo (Ley generalizada de Hooke).

#### Modelo de esfuerzos (ecuaciones de equilibrio):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0\end{aligned}\tag{B1}$$

Donde,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  son las componentes de esfuerzos normales y cortantes, respectivamente y X, Y y Z son fuerzas de cuerpo.

#### Modelo de deformaciones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right); & \varepsilon_y &= \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right); & \varepsilon_z &= \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{B2}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Donde  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ , y  $\gamma_{zx}$  son las componentes de deformaciones normales y angulares y  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

### **Modelo constitutivo**

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z + C_{14} \gamma_{xy} + C_{15} \gamma_{yz} + C_{16} \gamma_{zx} \\ \sigma_y &= C_{21} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \varepsilon_z + C_{24} \gamma_{xy} + C_{25} \gamma_{yz} + C_{26} \gamma_{zx} \\ \sigma_z &= C_{31} \varepsilon_x + C_{32} \varepsilon_y + C_{33} \varepsilon_z + C_{34} \gamma_{xy} + C_{35} \gamma_{yz} + C_{36} \gamma_{zx} \quad \text{B3)} \\ \tau_{xy} &= C_{41} \varepsilon_x + C_{42} \varepsilon_y + C_{43} \varepsilon_z + C_{44} \gamma_{xy} + C_{45} \gamma_{yz} + C_{46} \gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= C_{51} \varepsilon_x + C_{52} \varepsilon_y + C_{53} \varepsilon_z + C_{54} \gamma_{xy} + C_{55} \gamma_{yz} + C_{56} \gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= C_{61} \varepsilon_x + C_{62} \varepsilon_y + C_{63} \varepsilon_z + C_{64} \gamma_{xy} + C_{65} \gamma_{yz} + C_{66} \gamma_{zx} \end{aligned}$$

Donde  $C_{11}, \dots, C_{66}$  son las constantes elásticas, independientes tanto de los esfuerzos como de las deformaciones.

---

## APÉNDICE C

### Mecánica de láminas simétricas

#### C1 Mecánica de láminas simétricas

La suposición de que las deformaciones en el plano  $xy$  son constantes, es válida cuando el espesor de la lámina es pequeño en comparación con el largo y el ancho de la misma. Si la lámina es simétrica, entonces:

$$\begin{aligned}\epsilon_1(z) &= \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2(z) &= \epsilon_2^0 \\ \epsilon_6(z) &= \epsilon_6^0\end{aligned}\tag{C1}$$

el exponente cero (0) significa que las deformaciones en función de  $z$  son constantes.

La distribución de esfuerzos no es constante y varía de capa (o grupo de capas) a capa (otro grupo de capas). Si se hace un análisis global de la lámina es posible obtener las ecuaciones constitutivas en función de las propiedades y de la orientación de cada grupo de capas [Tsai], para eso se partirá de el concepto de esfuerzo promedio:

$$\begin{aligned}\sigma_1^- &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_1 dz \\ \sigma_2^- &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_2 dz \\ \sigma_6^- &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_6 dz\end{aligned}\tag{C2}$$

si los esfuerzos están definidos por las siguientes relaciones esfuerzo-deformación (en función de las constantes de rigidez en una dirección cualesquiera):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= Q_{11}\epsilon_1 + Q_{12}\epsilon_2 + Q_{16}\epsilon_6 \\ \sigma_2 &= Q_{21}\epsilon_1 + Q_{22}\epsilon_2 + Q_{26}\epsilon_6 \\ \sigma_6 &= Q_{61}\epsilon_1 + Q_{62}\epsilon_2 + Q_{66}\epsilon_6\end{aligned}\tag{C3}$$

y si las deformaciones son consideradas constantes:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{11}\epsilon_1^0 + Q_{12}\epsilon_2^0 + Q_{16}\epsilon_6^0) dz \\
 \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{21}\epsilon_1^0 + Q_{22}\epsilon_2^0 + Q_{26}\epsilon_6^0) dz \\
 \bar{\sigma}_6 &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Q_{61}\epsilon_1^0 + Q_{62}\epsilon_2^0 + Q_{66}\epsilon_6^0) dz
 \end{aligned} \tag{C4}$$

como lo que varía pliegue a pliegue son las constantes  $Q_{ij}$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{h} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz \epsilon_1^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz \epsilon_2^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{16} dz \epsilon_6^0 \right] \\
 \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{h} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{21} dz \epsilon_1^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} dz \epsilon_2^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{26} dz \epsilon_6^0 \right] \\
 \bar{\sigma}_6 &= \frac{1}{h} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{61} dz \epsilon_1^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{62} dz \epsilon_2^0 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz \epsilon_6^0 \right]
 \end{aligned} \tag{C5}$$

definiendo ahora como módulos equivalentes a las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz & A_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{21} dz \\
 A_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{12} dz & A_{61} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{61} dz \\
 A_{61} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{61} dz & A_{66} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{66} dz
 \end{aligned} \tag{C6}$$

y con el tensor  $A_{ij}$  simétrico, esto es:

$$\begin{aligned}
 A_{21} &= A_{12} \\
 A_{61} &= A_{16} \\
 A_{62} &= A_{26}
 \end{aligned} \tag{C7}$$

reescribiendo las expresiones (C5) quedan así:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_1 &= \frac{1}{h} [A_{11}\epsilon_1^0 + A_{21}\epsilon_2^0 + A_{61}\epsilon_6^0] \\
 \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{h} [A_{21}\epsilon_1^0 + A_{22}\epsilon_2^0 + A_{62}\epsilon_6^0] \\
 \bar{\sigma}_6 &= \frac{1}{h} [A_{61}\epsilon_1^0 + A_{62}\epsilon_2^0 + A_{66}\epsilon_6^0]
 \end{aligned}
 \tag{C8}$$

El resultado son las ecuaciones constitutiva efectiva o globales, donde los módulos equivalentes de una lámina multidireccional son el promedio aritmético de los módulos de rigidez individuales fuera de sus ejes de simetría de las capas o grupos de capas.

Las unidades de las  $Q_{ij}$  son  $Pa$  (o  $N/m^2$ ) y si se observa las  $A_{ij}$  están en  $Pa \cdot m$  (o  $N/m$ ). De lo anterior se puede definir un esfuerzo equivalente ( $N_e$ ), con unidades de fuerza por unidad de ancho y espesor  $h$  como:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= h\bar{\sigma}_1 \\
 N_2 &= h\bar{\sigma}_2 \\
 N_6 &= h\bar{\sigma}_6
 \end{aligned}
 \tag{C9}$$

se llega finalmente a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= A_{11}\epsilon_1^0 + A_{21}\epsilon_2^0 + A_{61}\epsilon_6^0 \\
 N_2 &= A_{21}\epsilon_1^0 + A_{22}\epsilon_2^0 + A_{62}\epsilon_6^0 \\
 N_6 &= A_{61}\epsilon_1^0 + A_{62}\epsilon_2^0 + A_{66}\epsilon_6^0
 \end{aligned}
 \tag{C10}$$

Las cuales relacionan el esfuerzo equivalente con las deformaciones (constantes).

La forma de conocer el esfuerzo en cada capa o grupo de capas a partir del conocimiento de las deformaciones y esfuerzos globales se muestra esquemáticamente en la figura 1.13 de [Acosta, M].

## C2 Módulos equivalentes

Se ha mencionado ya que los módulos equivalentes de una lámina multidireccional es el promedio aritmético de los módulos de rigidez individuales, fuera de sus ejes de simetría de

las capas o grupos de capas, por lo que de las ecuaciones de multiángulo y (C5) se tiene:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta) dz \\
 &= U_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz + U_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 2\theta dz + U_3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta dz \\
 A_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{21} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (U_4 - U_2 \cos 4\theta) dz & (C11) \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U_4 dz - U_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta dz \\
 A_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{22} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta) dz \\
 &= U_1 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz - U_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 2\theta dz + U_3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{s1} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q_{s1} dz = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \left( \frac{1}{2} U_1 \text{sen} 2\theta + U_2 \text{sen} 4\theta \right) dz \\
&= \frac{1}{2} U_1 \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \text{sen} 2\theta dz + U_2 \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \text{sen} 4\theta dz \\
A_{s2} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q_{s2} dz = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \left( \frac{1}{2} U_1 \text{sen} 2\theta - U_2 \text{sen} 4\theta \right) dz \\
&= \frac{1}{2} U_1 \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \text{sen} 2\theta dz - U_2 \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \text{sen} 4\theta dz \\
A_{ss} &= \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q_{ss} dz = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} (U_1 - U_2 \cos 4\theta) dz \\
&= U_1 \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} dz - U_2 \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} \cos 4\theta dz
\end{aligned}$$

las  $U$ 's salen como constantes porque éstas no varían en un compuesto ya que no dependen de  $z$ .

---

Definiendo ahora:

$$\begin{aligned}V_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 2\theta dz \\V_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta dz \\V_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \operatorname{sen} 2\theta dz \\V_4 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \operatorname{sen} 4\theta dz\end{aligned}\tag{C12}$$

los valores de  $V$ 's dependen de la orientación de las capas o grupos de capas en la lámina multidireccional. Las ecuaciones (C11) quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}A_{11} &= U_1 h + U_2 V_1 + U_3 V_2 \\A_{21} &= U_4 h - U_3 V_2 \\A_{22} &= U_1 h - U_2 V_1 + U_3 V_2 \\A_{\sigma 1} &= \frac{1}{2} U_2 V_3 + U_3 V_4 \\A_{\sigma 2} &= \frac{1}{2} U_2 V_3 - U_3 V_4 \\A_{\sigma\sigma} &= U_3 h - U_3 V_2\end{aligned}\tag{C13}$$

de la definición de  $V$ 's y normalizando esas ecuaciones con respecto al espesor de la lámina, con la finalidad de que los valores sean adimensionales y no importe el sistema de unidades

con los que se esté trabajando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 V_1^* &= \frac{V_1}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 2\theta dz \\
 V_2^* &= \frac{V_2}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta dz \\
 V_3^* &= \frac{V_3}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{sen} 2\theta dz \\
 V_4^* &= \frac{V_4}{h} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \text{sen} 4\theta dz
 \end{aligned} \tag{C14}$$

si las capas o grupos de capas que conforman la lámina tienen la misma orientación y mismo material lo anterior puede reemplazarse por una sumatoria:

$$\begin{aligned}
 V_1^* &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i [z_i - z_{i-1}] \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \cos 2\theta_i h_i \\
 V_2^* &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \cos 4\theta_i [z_i - z_{i-1}] \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \cos 4\theta_i h_i \\
 V_3^* &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \text{sen} 2\theta_i [z_i - z_{i-1}] \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \text{sen} 2\theta_i h_i \\
 V_4^* &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \text{sen} 4\theta_i [z_i - z_{i-1}] \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \text{sen} 4\theta_i h_i
 \end{aligned} \tag{C15}$$

donde  $h_i$  es el espesor del  $i$ -ésimo grupo e inicia de  $-\frac{h}{2}$ .

Definiendo ahora la fracción volumétrica como:

$$\begin{aligned} v_i &= \text{fracción volumétrica con orientación } \theta_i \\ &= \frac{h_i}{h} \end{aligned} \quad (\text{C16})$$

y si cada  $i$  representa una orientación, entonces (B13) queda:

$$\begin{aligned} V_1^* &= \sum_{i=1}^h \cos 2\theta_i v_i \\ &= v_1 \cos 2\theta_1 + v_2 \cos 2\theta_2 + v_3 \cos 2\theta_3 + \dots \\ V_2^* &= \sum_{i=1}^h \cos 4\theta_i v_i \\ &= v_1 \cos 4\theta_1 + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots \\ V_3^* &= \sum_{i=1}^h \text{sen} 2\theta_i v_i \\ &= v_1 \text{sen} 2\theta_1 + v_2 \text{sen} 2\theta_2 + v_3 \text{sen} 2\theta_3 + \dots \\ V_4^* &= \sum_{i=1}^h \text{sen} 4\theta_i v_i \\ &= v_1 \text{sen} 4\theta_1 + v_2 \text{sen} 4\theta_2 + v_3 \text{sen} 4\theta_3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C17})$$

donde la suma de las fracciones volumétricas es:

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = 1 \quad (\text{C18})$$

los límites de  $V^*$ 's son los siguientes:

$$-1 \leq V^* \leq 1$$

lo anterior me da la posibilidad de conocer las propiedades mecánicas efectivas o globales.

### C3. Ecuaciones constitutivas de una lámina multidireccional

Los valores de las  $U$ 's en función de las constantes ingenieriles:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{8} \left[ \frac{3E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + \frac{3E_y}{1 - \nu_x \nu_y} + \frac{2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + 4E_{ss} \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[ \frac{3E_y + 3E_x + 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + 4E_{ss} \right] \\
 U_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{E_x - E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \right] \\
 U_3 &= \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] \\
 U_4 &= \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x + 6\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] \\
 U_5 &= \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + 4E_{ss} \right]
 \end{aligned} \tag{C19}$$

si tomamos las ecuaciones (C15) y (C17) para cualquier lámina multidireccional se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (v_1 \cos 2\theta_1 + v_2 \cos 2\theta_2 + v_3 \cos 2\theta_3 + \dots) h \\
 V_2 &= (v_1 \cos 4\theta_1 + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots) h \\
 V_3 &= (v_1 \sin 2\theta_1 + v_2 \sin 2\theta_2 + v_3 \sin 2\theta_3 + \dots) h \\
 V_4 &= (v_1 \sin 4\theta_1 + v_2 \sin 4\theta_2 + v_3 \sin 4\theta_3 + \dots) h
 \end{aligned} \tag{C20}$$

ahora si se tienen las relaciones (B18) y :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= U_1 h + U_2 V_1 + U_3 V_2 \\
 A_{21} &= U_4 h - U_5 V_2 \\
 A_{33} &= U_1 h - U_2 V_1 + U_3 V_2 \\
 A_{s1} &= \frac{1}{2} U_2 V_3 + U_3 V_4 \\
 A_{s2} &= \frac{1}{2} U_2 V_3 - U_3 V_4 \\
 A_{ss} &= U_5 h - U_3 V_2
 \end{aligned} \tag{C21}$$

se llega a los valores de los módulos promedio para  $n$  capas o  $n$  grupos de capas:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{3E_y + 3E_x + 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + 4E_{ss} \right] h + \frac{1}{2} \left[ \frac{E_x - E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \right] (v_1 \cos 2\theta_1 \\
&\quad + v_2 \cos 2\theta_2 + v_3 \cos 2\theta_3 + \dots) h + \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] (v_1 \cos 4\theta_1 \\
&\quad + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots) h \\
A_{21} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x + 6\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] h - \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] (v_1 \cos 4\theta \\
&\quad + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots) h \\
A_{22} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{3E_y + 3E_x + 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + 4E_{ss} \right] h - \frac{1}{2} \left[ \frac{E_x - E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \right] (v_1 \cos 2\theta_1 \\
&\quad + v_2 \cos 2\theta_2 + v_3 \cos 2\theta_3 + \dots) h + \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] (v_1 \cos 4\theta_1 \\
&\quad + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots) h \\
A_{s1} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{E_x - E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \right] (v_1 \sin 2\theta_1 + v_2 \sin 2\theta_2 + v_3 \sin 2\theta_3 + \dots) h \\
&\quad + \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] (v_1 \sin 4\theta_1 + v_2 \sin 4\theta_2 + v_3 \sin 4\theta_3 + \dots) h \\
A_{s2} &= \frac{1}{4} \left[ \frac{E_x - E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \right] (v_1 \sin 2\theta_1 + v_2 \sin 2\theta_2 + v_3 \sin 2\theta_3 + \dots) h \\
&\quad - \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] (v_1 \sin 4\theta_1 + v_2 \sin 4\theta_2 + v_3 \sin 4\theta_3 + \dots) h \\
A_{ss} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} + 4E_{ss} \right] h - \frac{1}{8} \left[ \frac{E_y + E_x - 2\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} - 4E_{ss} \right] \\
&\quad + v_1 \cos 4\theta_1 + v_2 \cos 4\theta_2 + v_3 \cos 4\theta_3 + \dots) h
\end{aligned} \tag{C22}$$

estos resultados en las ecuaciones (C10):

$$\begin{aligned}
N_1 &= A_{11} \epsilon_1^0 + A_{21} \epsilon_2^0 + A_{s1} \epsilon_s^0 \\
N_2 &= A_{22} \epsilon_1^0 + A_{s2} \epsilon_2^0 + A_{ss} \epsilon_s^0 \\
N_s &= A_{s1} \epsilon_1^0 + A_{s2} \epsilon_2^0 + A_{ss} \epsilon_s^0
\end{aligned} \tag{C23}$$

y con (C8):

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sigma_1 h \\
N_2 &= \sigma_2 h \\
N_s &= \sigma_s h
\end{aligned} \tag{C24}$$

---

me dan como resultado las ecuaciones constitutivas para cualquier lámina multidireccional, conocidas las fracciones volumétricas y las orientaciones de cada grupo de capas. Estas ecuaciones contienen propiedades globales o efectivas ( $A$ 's) y deformaciones y esfuerzos promedio.

---

## APÉNDICE D

### Teoría de flexión de láminas

#### D.1 Marco Teórico

El marco teórico presentado en este apéndice [Tsai, Ugural, Vinson, etc] tiene como función ser un trabajo de consulta para análisis experimental de esfuerzos en materiales compuestos, con las simplificaciones y limitaciones correspondientes. El reporte incluye el desarrollo para la obtención de las ecuaciones constitutivas que gobiernan el comportamiento a flexión de los materiales laminados y el tipo sandwich utilizados en esta etapa experimental.

El código utilizado para definir los materiales compuestos tipo sandwich, tiene la misma convención que la usada en compuestos laminados [Acosta 1998], agregando únicamente la parte correspondiente a el corazón  $z_c$ , por ejemplo el material compuesto tipo sandwich utilizado en este trabajo, queda definido por el código siguiente:

$$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/z_c]_B$$

la secuencia inicia en  $-h/2$ ,  $h$  es el espesor total del material.

#### D.2 Relaciones momento-curvatura

Existe una diferencia entre los módulos de rigidez y de conformación utilizados para análisis mecánico en el plano, en el cual sólo el volumen fracción de las capas constituyentes de las láminas es importante. Para obtener las ecuaciones constitutivas y los módulos involucrados correspondientes a el problema de flexión, es fundamental la posición en que se encuentran colocadas las capas o grupos de capas dentro de la lámina. En el análisis de esfuerzos en el plano se consideró la distribución de esfuerzos simétrica, por lo que se analizó un esfuerzo promedio.

Las relaciones momento-curvatura son clave para el análisis de flexión en materiales compuestos (similar a las relaciones esfuerzo-deformación en el análisis de esfuerzos en el plano). Las constantes involucradas en dichas relaciones son los módulos de flexión. Si la distribución de esfuerzos fuese antisimétrica, el esfuerzo promedio sería cero, de ahí que el de involucrar el momento ( $M$ ) en lugar del esfuerzo resultante, esto es:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz \\ M_\varepsilon &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varepsilon z dz \end{aligned} \tag{D1}$$

la unidad del momento es  $N$  o  $Nm/m$ , momento por unidad de ancho de la lámina con espesor  $h$  y ancho  $b$ . El signo de los momentos tienen la convención utilizada por Tsai.

### D.2.1 Análisis de Deformaciones

Para analizar el comportamiento mecánico de placas sometidas a flexión se hacen las siguientes suposiciones fundamentales de la teoría clásica (hipótesis de Kirchhoff):

- 1.- La deflexión de la superficie media es pequeña comparada con el espesor de la placa.
- 2.- El plano medio permanece indeformado después de la flexión.
- 3.- Secciones originalmente planas permanecen planas después de la flexión. Esto es  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son despreciables y también la deformación  $\epsilon_z$ .
- 4.- Los esfuerzos normales al plano medio son pequeños comparados con las otras componentes de esfuerzo, por lo que pueden ser despreciables.

Si la placa no es tan delgada D1 y D4 no se aplican.

### D.2.2 Relaciones deformación-curvatura

Por las suposiciones hechas en el punto 3, las relaciones deformación-desplazamiento quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (D2)$$

Integrando la ecuación  $\epsilon_z$  se obtiene lo siguiente:

$$w = w(x, y) \quad (D3)$$

lo que significa que la deflexión no varía sobre el espesor de la placa, la normal a la placa no se deforma, únicamente rota. Integrando:

$$\begin{aligned}u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)\end{aligned}$$

donde  $u_0$  y  $v_0$  corresponden a los desplazamientos en el plano medio, por lo que son igual con cero. Finalmente:

$$\begin{aligned}u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (D4)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones anteriores en las relaciones deformación-desplazamiento para  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ .

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (D5)$$

Las ecuaciones anteriores proveen las deformaciones en algún punto de la placa.

Definiendo ahora el inverso del radio de curvatura como la curvatura ( $k$ ), la cual es definida como la variación de la pendiente de la curva con respecto a la distancia a lo largo

de la curva. Las curvaturas en la superficie media con respecto a los planos  $xy$ ,  $yz$  y  $xz$ , son:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = k_x \\ \frac{1}{r_y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = k_y \\ \frac{1}{r_{xy}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = k_{xy}\end{aligned}\quad (D6)$$

y relaciones deformación-curvatura quedan de la siguiente forma:

$$\epsilon_x = -zk_x \quad \epsilon_y = -zk_y \quad \gamma_{xy} = -2zk_{xy} \quad (D7)$$

Es importante remarcar que en las ecuaciones anteriores no se involucra a las constantes elásticas, por lo que pueden ser utilizadas tanto para materiales elásticos como inelásticos [Ugural, 1999]. Las ecuaciones me dicen que el estado de deformaciones varía linealmente con la distancia a el medio plano.

### D.2.2 Relaciones esfuerzo-curvatura

Las relaciones esfuerzo deformación para un para un material isotrópico lineal y homogéneo son las siguientes:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\end{aligned}\quad (D8)$$

Sustituyendo ahora  $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  para una placa delgada:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (D9)$$

sustituyendo ahora las relaciones deformación-curvatura:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (k_y + \nu k_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{Ez}{1-\nu} k_{xy}\end{aligned}\quad (D10)$$

Las relaciones anteriores se utilizan para que una vez conocidas las curvaturas  $k$ 's, obtenidas conocido el estado de deformaciones en la superficie, obtener el estado de esfuerzos en cualquier punto sobre  $z$ .

Lo anterior puede ser utilizado para materiales compuestos, con las ecuaciones constitutivas correspondientes. Cabe mencionar que si el problema es de esfuerzos combinados, se requiere conocer el estado de deformaciones en ambas caras del material (superior e inferior).

#### D.2.4 Relaciones momento-curvatura

La contribución de los efectos del corazón y de las caras del material compuesto tipo sandwich, puede ser descritos matemáticamente.

Los módulos de flexión pueden ser determinados en términos de los módulos en el plano y de las relaciones momento-curvatura.

Para obtener las relaciones momento-curvatura se deben considerar las relaciones esfuerzo-deformación, dentro de la deformación de momento:

$$M_1 = \int \sigma z dz \quad (D11)$$

las relaciones esfuerzo deformación fuera de los planos principales son:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= Q_{11}\epsilon_1 + Q_{12}\epsilon_2 + Q_{16}\epsilon_6 \\ \sigma_2 &= Q_{21}\epsilon_1 + Q_{22}\epsilon_2 + Q_{26}\epsilon_6 \\ \sigma_6 &= Q_{61}\epsilon_1 + Q_{62}\epsilon_2 + Q_{66}\epsilon_6 \end{aligned} \quad (D12)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int (Q_{11}\epsilon_1 + Q_{12}\epsilon_2 + Q_{16}\epsilon_6) z dz \\ M_2 &= \int (Q_{21}\epsilon_1 + Q_{22}\epsilon_2 + Q_{26}\epsilon_6) z dz \\ M_6 &= \int (Q_{61}\epsilon_1 + Q_{62}\epsilon_2 + Q_{66}\epsilon_6) z dz \end{aligned} \quad (D13)$$

y por las relaciones deformación-curvatura

$$\begin{aligned} M_1 &= \int (Q_{11}k_1 + Q_{12}k_2 + Q_{16}k_6) z^2 dz \\ M_2 &= \int (Q_{21}k_1 + Q_{22}k_2 + Q_{26}k_6) z^2 dz \\ M_6 &= \int (Q_{61}k_1 + Q_{62}k_2 + Q_{66}k_6) z^2 dz \end{aligned} \quad (D14)$$

Como las curvaturas son constantes

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \int (Q_{11}z^2 dz)k_1 + \int (Q_{12}z^2 dz)k_2 + \int (Q_{16}z^2 dz)k_6 \\
 M_2 &= \int (Q_{21}z^2 dz)k_1 + \int (Q_{22}z^2 dz)k_2 + \int (Q_{26}z^2 dz)k_6 \\
 M_6 &= \int (Q_{61}z^2 dz)k_1 + \int (Q_{62}z^2 dz)k_2 + \int (Q_{66}z^2 dz)k_6
 \end{aligned} \tag{D15}$$

definiendo ahora como módulos equivalentes a las siguientes constantes:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \int Q_{11}z^2 dz & D_{21} &= \int Q_{21}z^2 dz \\
 D_{22} &= \int Q_{22}z^2 dz & D_{62} &= \int Q_{62}z^2 dz \\
 D_{61} &= \int Q_{61}z^2 dz & D_{66} &= \int Q_{66}z^2 dz
 \end{aligned} \tag{D16}$$

$D_{ij}$  es simétrico, ésto es:

$$\begin{aligned}
 D_{21} &= D_{12} \\
 D_{61} &= D_{16} \\
 D_{62} &= D_{26}
 \end{aligned} \tag{D17}$$

finalmente se tienen lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= D_{11}k_1 + D_{21}k_2 + D_{61}k_6 \\
 M_2 &= D_{21}k_1 + D_{22}k_2 + D_{62}k_6 \\
 M_6 &= D_{61}k_1 + D_{62}k_2 + D_{66}k_6
 \end{aligned} \tag{D18}$$

que son las relaciones momento curvatura de láminas simétricas, en términos de las constantes de rigidez en el plano.

Invirtiendo las relaciones D18) tendríamos las siguientes relaciones momento-curvatura en términos de las constantes de conformación.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= d_{11}M_1 + d_{21}M_2 + d_{61}M_6 \\
 k_2 &= d_{21}M_1 + d_{22}M_2 + d_{62}M_6 \\
 k_6 &= d_{61}M_1 + d_{62}M_2 + d_{66}M_6
 \end{aligned} \tag{D19}$$

---

### D.2.5 Determinación del módulo de rigidez flexionante

Para evaluar los módulos de flexión deben desarrollarse las integrales de las ecuaciones D16), para lo cual se utilizarán las constantes de rigidez para fuera de ejes, las cuales son, utilizando las ecuaciones de multiángulo son:

$$\begin{aligned}Q_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\Q_{21} &= U_4 - U_2 \cos 4\theta \\Q_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\Q_{61} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\Q_{62} &= \frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\Q_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta\end{aligned}\tag{D20}$$

esto es:

$$\begin{aligned}D_{11} &= \int Q_{11} z^2 dz \\&= \int (U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta) z^2 dz \\&= U_1 \int z^2 dz + U_2 \int \cos 2\theta z^2 dz + U_3 \int \cos 4\theta z^2 dz \\D_{21} &= \int Q_{21} z^2 dz = \int (U_4 - U_2 \cos 4\theta) z^2 dz \\&= U_4 \int z^2 dz - U_2 \int \cos 4\theta z^2 dz \\D_{22} &= \int Q_{22} z^2 dz = \int (U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta) z^2 dz \\&= U_1 \int z^2 dz - U_2 \int \cos 2\theta z^2 dz + U_3 \int \cos 4\theta z^2 dz\end{aligned}\tag{D21}$$

$$\begin{aligned}
D_{\epsilon_1} &= \int Q_{\epsilon_1} z^2 dz = \int \left( \frac{1}{2} U_2 \text{sen} 2\theta + U_3 \text{sen} 4\theta \right) z^2 dz \\
&= \frac{1}{2} U_2 \int \text{sen} 2\theta z^2 dz + U_3 \int \text{sen} 4\theta z^2 dz \\
D_{\epsilon_2} &= \int Q_{\epsilon_2} z^2 dz = \int \left( \frac{1}{2} U_2 \text{sen} 2\theta - U_3 \text{sen} 4\theta \right) z^2 dz \\
&= \frac{1}{2} U_2 \int \text{sen} 2\theta z^2 dz - U_3 \int \text{sen} 4\theta z^2 dz \\
D_{\epsilon_3} &= \int Q_{\epsilon_3} z^2 dz = \int (U_4 - U_5 \cos 4\theta) z^2 dz \\
&= U_4 \int z^2 dz - U_5 \int \cos 4\theta z^2 dz
\end{aligned}$$

donde las invariantes  $U'$ s son por definición:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{xx} + 2Q_{xy} + 3Q_{yy} + 4Q_{ss}) \\
U_2 &= \frac{1}{2} (Q_{xx} - Q_{yy}) \\
U_3 &= \frac{1}{8} (Q_{xx} - 2Q_{xy} + Q_{yy} - 4Q_s) \\
U_4 &= \frac{1}{8} (Q_{xx} + 6Q_{xy} + Q_{yy} - 4Q_{ss}) \\
U_5 &= \frac{1}{8} (Q_{xx} - 2Q_{xy} + Q_{yy} - 4Q_{ss})
\end{aligned} \tag{D22}$$

y las constantes de rigidez en el plano en función de las constantes ingenieriles son:

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} & Q_{yy} &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} & Q_{yx} &= \frac{\nu_x E_y}{1 - \nu_x \nu_y} \\
Q_{xy} &= \frac{\nu_y E_x}{1 - \nu_x \nu_y} & Q_{ss} &= E_{ss}
\end{aligned} \tag{D23}$$

Definiéndose las siguientes igualdades, donde se desprecian los efectos ocasionados por el

---

corazón:

$$\begin{aligned}V_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 2\theta z^2 dz \\V_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cos 4\theta z^2 dz \\V_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \operatorname{sen} 2\theta z^2 dz \\V_4 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \operatorname{sen} 4\theta z^2 dz\end{aligned}\tag{D24}$$

definiendo una altura  $h^*$  donde se desprecian los efectos del corazón como:

$$\begin{aligned}h^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \\&= 2 \int_{z_c}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \\&= \frac{2}{3} [z^3]_{z_c}^{\frac{h}{2}} \\&= \frac{2}{3} \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^3 - z_c^3 \right]\end{aligned}\tag{D25}$$

donde  $z_c$  es la mitad el espesor del material compuesto analizado.

Si  $z_c^*$  es el volumen fracción del corazón:

$$z_c^* = \frac{2z_c}{h}$$

también se tiene

$$z_c = \frac{hz_c^*}{2}\tag{D26}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 h^* &= \frac{2}{3} \left[ \frac{h^3}{8} - \left( \frac{hz_c^*}{2} \right)^3 \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left[ \frac{h^3}{8} - \frac{h^3 z_c^{*3}}{8} \right] \\
 &= \frac{1}{2} [h^3 - h^3 z_c^{*3}] \\
 &= \frac{h^3}{2} [1 - z_c^{*3}] \\
 &= I^* [1 - z_c^{*3}]
 \end{aligned} \tag{D27}$$

$I^*$  es definido como:

$$I^* = \frac{I}{b} = \frac{h^3}{12} \tag{D28}$$

sustituyendo ahora  $h^*$  y las  $V$ 's en los módulos de flexión para láminas simétricas, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= U_1 h^* + U_2 V_1 + U_3 V_2 \\
 D_{21} &= U_4 h^* - U_5 V_3 \\
 D_{22} &= U_1 h^* - U_2 V_1 + U_3 V_2 \\
 D_{1e} &= \frac{1}{2} U_2 V_3 + U_3 V_4 \\
 D_{2e} &= \frac{1}{2} U_2 V_3 - U_3 V_4 \\
 D_{ee} &= U_4 h^* - U_5 V_3
 \end{aligned} \tag{D29}$$

se puede observar que la evaluación de los módulos se obtiene si se determinan los factores geométricos  $V$ 's. Es importante notar que para un mismo material las  $U$ 's permanecen constantes y las  $V$ 's cambian de lámina a lámina. Para una misma lámina pero diferente material únicamente nuevas  $U$ 's deben ser calculadas.

### D.3 Evaluación de las constantes $V$ 's

Las relaciones involucradas en el análisis de flexión se facilita si se ponen todos los términos se encuentran en función de factores adimensionales. Despreciando los efectos del

corazón se tiene que las  $V$ 's son:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 2 \int_{z_c}^{\frac{h}{3}} \cos 2\theta z^2 dz \\
 V_2 &= 2 \int_{z_c}^{\frac{h}{3}} \cos 4\theta z^2 dz \\
 V_3 &= 2 \int_{z_c}^{\frac{h}{3}} \text{sen} 2\theta z^2 dz \\
 V_4 &= 2 \int_{z_c}^{\frac{h}{3}} \text{sen} 4\theta z^2 dz
 \end{aligned} \tag{D30}$$

como cada capa o grupo de capas tienen la misma dirección, las ecuaciones anteriores pueden ser cambiadas por una sumatoria, esto es:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=c+1}^{m/2} \cos 2\theta_i [z_i^3 - z_{i-1}^3] \\
 V_2 &= \frac{2}{3} \sum_{i=c+1}^{m/2} \cos 4\theta_i [z_i^3 - z_{i-1}^3] \\
 V_3 &= \frac{2}{3} \sum_{i=c+1}^{m/2} \text{sen} 2\theta_i [z_i^3 - z_{i-1}^3] \\
 V_4 &= \frac{2}{3} \sum_{i=c+1}^{m/2} \text{sen} 4\theta_i [z_i^3 - z_{i-1}^3]
 \end{aligned} \tag{D31}$$

La sumatoria corresponde a un material compuesto tipo sandwich con láminas en las caras. La letra  $m$  indica el número de capas o grupo de capas y  $n$  es el número total de capas en el material. El espesor del corazón, del cual se desprecian al momento sus efectos, debe darse en término de capas.

Para simplificar las ecuaciones que representen el problema de flexión se realizan las siguientes simplificaciones:

a) obtener el espesor del corazón como múltiplo del espesor de cada capa ( $h_0$ ), entonces la relación siguiente será un entero:

$$c = \frac{z_c}{h_0} \tag{D32}$$

dentro de la sumatoria se tiene:

$$\begin{aligned}
 z_0 &= ch_0 \\
 z_1 &= (c + n_1 + n_2)h_0 \\
 &\vdots \\
 z_{ns} &= (c + n_1 + n_2 + \dots + n_i)h_0
 \end{aligned} \tag{D33}$$

$n_i$  es el número de capas del grupo  $i$ . Asumiendo:

$$t_i = \frac{z_i}{h_0} \tag{D34}$$

donde  $t_i$  es el volumen fracción y es adimensional, se tiene:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{2h_0^3}{3} \sum_{i=c+1}^{m/3} \cos 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \\
 V_2 &= \frac{2h_0^3}{3} \sum_{i=c+1}^{m/3} \cos 4\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \\
 V_3 &= \frac{2h_0^3}{3} \sum_{i=c+1}^{m/3} \text{sen} 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \\
 V_4 &= \frac{2h_0^3}{3} \sum_{i=c+1}^{m/3} \text{sen} 4\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3]
 \end{aligned} \tag{D35}$$

Definiendo nuevas constantes geométricas  $V^*$ s:

$$\begin{aligned}
 V_1^* &= \frac{12}{h^3} V_1 = \frac{V_1}{I^*} \\
 V_2^* &= \frac{12}{h^3} V_2 = \frac{V_2}{I^*} \\
 V_3^* &= \frac{12}{h^3} V_3 = \frac{V_3}{I^*} \\
 V_4^* &= \frac{12}{h^3} V_4 = \frac{V_4}{I^*}
 \end{aligned} \tag{D36}$$

$n$  es el número total de capas e incluye el corazón que se encuentra en términos de capas:

$$h = nh_0$$

y en las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
V_1^* &= \frac{12}{h^3} V_1 \\
&= \frac{12}{h^3} \left[ \frac{2h_0^3}{3} \sum_{i=c+1}^{m/2} \cos 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right] \\
&= \frac{8h_0^3}{h^3} \left[ \sum_{i=c+1}^{m/2} \cos 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right] \\
&= \frac{8}{n^3} \left[ \sum_{i=c+1}^{m/2} \cos 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right] \tag{D37}
\end{aligned}$$

donde ya se dijo que  $m$  es el número de grupos de capas,  $n$  es el número total de capas e  $i$  es el número de grupo de capas. Poniendo las relaciones en términos del número de capas y del factor peso de cada una de ellas:

$$\begin{aligned}
V_1^* &= \frac{8}{n^3} \left[ \sum_{i=c+1}^{n/2} \cos 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right] \\
V_2^* &= \frac{8}{n^3} \left[ \sum_{i=c+1}^{n/2} \cos 4\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right] \tag{D38} \\
V_3^* &= \frac{8}{n^3} \left[ \sum_{i=c+1}^{n/2} \text{sen} 2\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right] \\
V_4^* &= \frac{8}{n^3} \left[ \sum_{i=c+1}^{n/2} \text{sen} 4\theta_i [t_i^3 - t_{i-1}^3] \right]
\end{aligned}$$

Finalmente con las ecuaciones anteriores y las ecuaciones D29, se obtienen los valores de los

módulos de flexión, esto es:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= U_1 h^* + U_2 V_1^* I^* + U_3 V_2^* I^* \\
 D_{21} &= U_4 h^* - U_3 V_2^* I^* \\
 D_{22} &= U_1 h^* - U_2 V_1^* I^* + U_3 V_2^* I^* \\
 D_{16} &= \frac{1}{2} U_2 V_3^* I^* + U_3 V_4^* I^* \\
 D_{26} &= \frac{1}{2} U_2 V_3^* I^* - U_3 V_4^* I^* \\
 D_{66} &= U_3 h^* - U_3 V_2^* I^*
 \end{aligned} \tag{D39}$$

#### D.4 Ecuaciones constitutivas para el problema de flexión de materiales compuestos

Finalmente las ecuaciones constitutivas que gobiernan el problema de flexión en materiales compuestos estructurales se obtienen al sustituir las ecuaciones anteriores en la ecuaciones D18) queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= [U_1 h^* + U_2 V_1^* I^* + U_3 V_2^* I^*] k_1 + [U_4 h^* - U_3 V_2^* I^*] k_2 \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{2} U_2 V_3^* I^* + U_3 V_4^* I^* \right] k_6 \\
 M_2 &= [U_4 h^* - U_3 V_2^* I^*] k_1 + [U_1 h^* - U_2 V_1^* I^* + U_3 V_2^* I^*] k_2 \\
 &\quad + \left[ \frac{1}{2} U_2 V_3^* I^* - U_3 V_4^* I^* \right] k_6 \\
 M_6 &= \left[ \frac{1}{2} U_2 V_3^* I^* + U_3 V_4^* I^* \right] k_1 + \left[ \frac{1}{2} U_2 V_3^* I^* - U_3 V_4^* I^* \right] k_2 \\
 &\quad + [U_3 h^* - U_3 V_2^* I^*] k_6
 \end{aligned} \tag{D40}$$

las ecuaciones anteriores dan la posibilidad de conocer los momentos existentes si se conocen las propiedades mecánicas efectivas reales de las capas, la orientación y el volumen fracción de cada grupo de capas, y el valor de las constantes de curvatura.

La ecuación general de flexión para la parte isotrópica es:

$$\begin{aligned}
 M &= \int (\sigma z dz) \\
 &= 2 \int \left( \frac{E}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \right) z^2 dz \\
 &= \frac{2}{3} \sum \left( \frac{E}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \right) (z_j^3 - z_{j-1}^3)
 \end{aligned} \tag{D41}$$

$$M = \frac{2}{3} \sum b \left( \frac{E}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \right) (z_j^3 - z_{j-1}^3)$$

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2}{3} \sum \left( \frac{E h_0^3}{1-\nu^2} (k_x + \nu k_y) \right) (t_j^3 - t_{j-1}^3) \\
 &= \frac{2}{3} \sum \left( \frac{E h_0^3}{(1-\nu^2) z} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \right) (t_j^3 - t_{j-1}^3)
 \end{aligned}$$

Un momento final con  $N.m$  es:

$$M_f = \frac{2}{3} \sum \left( \frac{E h_0^3 b}{(1-\nu^2) z} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \right) (t_j^3 - t_{j-1}^3) \tag{D42}$$

---

## Apéndice E

### Propiedades de las componentes de los laminados

Módulo de Young del aluminio ( $\epsilon$ ) (GPa)	66.5
relación de Poisson del aluminio ( $\nu$ )	0.34
Módulo del Young del latón ( $\epsilon$ ) (GPa)	98
Relación de Poisson del latón ( $\nu$ )	0.307

Tabla E1. Propiedades elásticas del aluminio y latón.

Constante	Efectivas (propias)	Método fotoacústico
$E_x$	53 GPa	51 GPa
$E_y$	23.3 GPa	13.42 GPa
$\nu_{xy}$	0.23	-----
$\nu_{yx}$	0.1	-----
$G_{xy}$	8.35 GPa	-----

Tabla E2. Constantes de las capas ortotrópicas, obtenidas en la tesis de maestría de Acosta y por un método fotoacústico (Obtenidas por la Dra. Margarita Navarrete)

---

## Apéndice F Interface

### F.1. Interface en materiales compuestos laminados

Una expansión al modelo propuesto en este trabajo permite desarrollar otros modelos equivalentes en los cuales se consideran la existencia de una interface entre las capas constituyentes de la lámina, ver figura F1. La interface se genera, como ya se ha comentado, como resultado de la unión entre las capas. Con estos modelos será posible analizar experimentalmente sus efectos en el comportamiento mecánico de láminas compuestas y su caracterización.

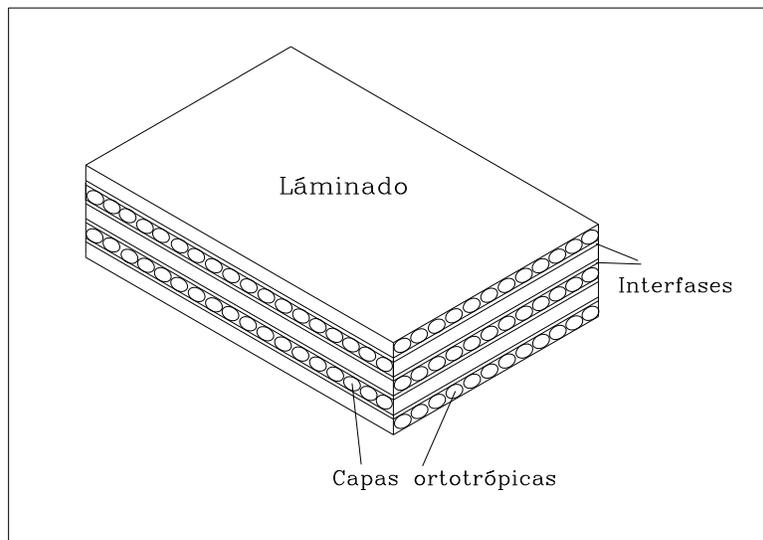


Figura F1. Interface en un compuesto laminado con capas ortotrópicas

En este trabajo han sido desarrollados dos modelos simplificados para análisis en láminas compuestas conformadas por materiales metálicos y ortotrópicos, en los que es posible conocer los esfuerzos y los momentos de flexión (incluyendo los interlaminares).

El análisis mejora a la teoría clásica de láminas, al considerar la existencia de esfuerzos interlaminares y más si se considera una interface entre las capas.

Es importante remarcar que la interface existe, si no visualmente si como algo que tiene influencia en el comportamiento mecánico. La interface es una capa o zona producida por la unión (por pegamento, fusión, metálica o de resina, etc.) o por la unión entre materiales con propiedades mecánicas diferentes.

Las hipótesis establecidas en el análisis son las siguientes:

- 1) La interface existe y tiene un espesor uniforme real.

- 2) La interface es isotrópica y sus propiedades  $E_I$  y  $\nu_I$  son homogéneas a través de su espesor.
- 3) El análisis del comportamiento mecánico y la caracterización de láminas compuestas se mejora si se considera la interface.
- 4) Si la interface se detecta físicamente y tiene propiedades mecánicas, el análisis experimental global de láminas realizado será mejorado.

## F2. Interface en problemas de tensión

Los efectos mecánicos de la interface en problemas de tensión a nivel global son despreciables, sin embargo en el análisis local, ver figura F2, tiene efectos importantes. En problemas de flexión la existencia de la interface tiene efectos mecánicos mayores dependiendo de su posición.

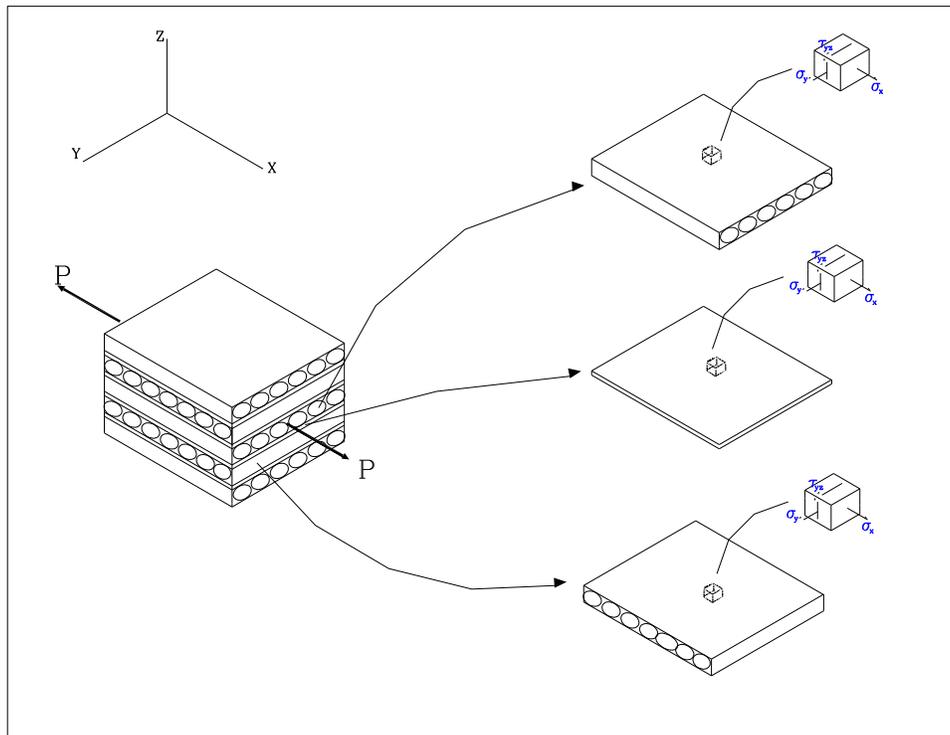


Figura F2. Esfuerzos en un laminado con capas ortotrópicas, considerando una capa isotrópica como interface.

## F3. Interface en problemas de flexión

La existencia de la interface en un problema de flexión tiene efectos importantes (en función de su posición) en el comportamiento mecánico, lo que hace importante su consideración en los modelos, tanto en los numéricos como en los experimentales. En este trabajo se considera y es posible caracterizar, asumiendo para ésta un espesor virtual, esto es, considerar que puede ser representada por

una capa más con espesor definido. Se considera que la interface es una capa con espesor uniforme, de material continuo, homogéneo, elástico-lineal e isotrópico.

El problema general de flexión planteado considera tanto capas isotrópicas u ortotrópicas como capas isotrópicas como interfaces. El análisis de momentos por el principio de superposición es la suma de los momentos en las capas constituyentes parte ortotrópica o isotrópica y los momentos en la interface isotrópica, esto es:

$$M_G = M_O + M_I \quad \text{F1)}$$

donde  $M_G$  es el momento global aplicado y  $M_O$  y  $M_I$  son los momentos correspondientes a la parte ortotrópica o isotrópica y a la interface, respectivamente.

Resultados del análisis de la interface.

Los resultados obtenidos considerando la existencia de la interface entre las capas se puede observar en la tabla 4.4. En este análisis se asumieron diferentes índices de concentraciones de espesor de interface con respecto a los espesores de las capas.

Relaciones	1-3	1-7	1-15	1-64
Módulo de Young del aluminio ( $\square$ ) (Gpa)	64.5	66.4	67.2	67.7
Relación de Poisson del aluminio ( $\square\square\square$ )	0.336	0.34	0.3414	0.3423
Módulo del Young del latón ( $\square$ ) (Gpa)	112	107	105	104
Relación de Poisson del latón ( $\square\square\square$ )	0.292	0.3	0.303	0.305
Módulo del Young de la interface (Gpa)	77.8	77.8	77.8	77.8
Relación de Poisson de la interface	0.358	0.358	0.358	0.358

Tabla F1. Análisis de la interface evaluando diferentes porcentajes de concentración.

Se puede notar, en la tabla F1, que las propiedades de las interfaces, supuestas isotrópicas, no cambia significativamente con la variación en el espesor supuesto de la interface, por lo que éstas si pueden obtenerse con el modelo planteado.

Cabe señalar que se hizo un estudio en donde también se consideró el espesor de la capa (espesor de influencia) como incógnita, pero los resultados obtenidos de ésta no fueron consistentes, incluso se obtuvieron valores negativos. Se asume

---

que los errores existentes, por tratarse de pruebas experimentales que involucra controlar varios parámetros son relevantes, suficientes para hacer que los resultados no fueran confiables.

---

## Referencias

- 1.- Acosta, M. Tesis de Maestría, UNAM, 1998.
- 2.- Agbossou, A., and Lagache, M., 1998, Fiber Distribution Effects in Linear Viscoelastic Behaviour of Polymer Matrix Composites: Computation Modelling and Experimental Comparison, *Mechanical Research Communication*, Vol. 25, No. 1.
- 3.- Agbossou, A., Lagache, M., 1998, Fiber Distribution Effects in Linear Viscoelastic Behaviour of Polymer Matrix Composites: Computation Modelling and Experimental Comparison, *Mechanical Research Communication*, Vol. 25, No. 1.
- 4.- Allison, J.E., and Cole, G.S., *JOM*, enero 1993, p. 19.
- 5.- Andersons, J. and König, M., 2004, Dependence of fracture toughness of composite laminates on interface ply orientations and delamination growth direction, *Composites Science and Technology* 64 (13-14), pp. 2139-2152.
- 6.- Bai, Q. Sh., Murakami, S., and Kanagawa, Y., 1997, A Lamination Theory Incorporating Effect of Interlaminar Deformation, *Journal of Composite Materials*, vol. 31, no. 20.
- 7.- Bosia, F., Facchini, M., Botsis, J., Gmür, T., and de'Sena, D., 2004, Through-the-thickness distribution of strains in laminated composite plates subjected to bending, *Composites Science and Technology* 64 (1), pp. 71-82.
- 8.- Brinson, L. C., 1998, Comparison of Micromechanics Methods for Effective Properties of Multiphase Viscoelastic Composites, *Composite Structures*, 4.
- 9.- Burton, W. Scott, and Noor, A K., 1997, Structural Analysis of the Adhesive Bond in a Honeycomb Core Sandwich Panel, *Finite Elements in Analysis and Design*.
- 10.- Chattopadhyay, A., and Gu, H., 1996, Exact Elasticity Solution for Buckling of Composite Laminates, *Composite Structures*, 34.
- 11.- Chen, Hong-Ji, and Tsai, Stephens W., 1996, Three-Dimensional Effective Moduli of Symmetric Laminates, *Journal of Composite Materials*, vol. 30, no. 8.

- 
- 12.- Chuang, J. Y., and Y., Huang, Fracture Analysis of Cellular Materials: A Strain Gradient Model, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 46, No. 5.
  - 13.- Davies, Peter, Pomies, Frederic, and Caelsson, Leif A., 1996, Influence of Water Absorption on Transverse Tensile Properties and Shear Fracture Toughness of Glass/Polypropylene, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No.9.
  - 14.- Dawe, D. J., and Wang, S., 1993, Free Vibration of Generally-laminated, Shear-deformable, Composite Rectangular Plates Using a Spline Rayleigh-Ritz Method, *Composite Structures* 25 (1-4), pp. 77-87.
  - 15.- Desai, C., Zaman, M. Lightner J., Siriwardane, H., 1984, Thin layer element for interfaces and joints, *Int. J. Numer. Anal. Meth.*
  - 16.- Gillespie, J.W, Gama, B.A., Cichanowski, C.E., and. Xiao, J.R., 2005 , Interlaminar shear strength of plain weave S2-glass/SC79 composites subjected to out-of-plane high strain rate compressive loadings, *Composites Science and Technology* 65 (11-12), pp. 1891-1908.
  - 17.- Gu, Haozhong, and Chattopadhyay, Aditi, 1999, An Experimental Investigation of Delamination buckling and Postbuckling of Composite Laminates, *Composite Science and Technology*, 59, 903-910.
  - 18.- Guell, David C., and Graham, Alan L., 1996, Improved Mechanical Properties in Hydrodynamically Aligned, Short-Fiber Composite Materials, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 1.
  - 19.- Hale, Richard D., 1997, Influence of In-Plane Fiber Misalignment on Moiré Interferometry Results, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 24.
  - 20.- Hana, K., Kotaki, M. and Hamada, H., 1996, Evaluation of Fiber / Resin Interphase Phenomena with Strand Embedded Tensile Test, *Materials Letters*, 29, 117-120.
  - 21.- Jain, Lalit K., and Mai, Yiu-Wing., 1997, Stresses and Deformation Induced during Manufacturing: Theoretical Analysis of Composite Cylinders and Shells, *Journal of Composite Materials*, Vol. 31, No. 7.
  - 22.- Jones, Roberts M., *Mechanics of Composite Materials*, 1975
  - 23.- Kahraman, Ramazan, 1996, Influence of Fiber-Matrix Bond Strength on the Performance of Nicalon/CAS-II Composite, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 8.

- 
- 24.- Kant, T., Swaminathan, K., 2000, Estimation of transverse/interlaminar stresses in laminated composites ± a selective review and survey of current developments, *Composite Structures*, 49.
  - 25.- Kim, Seung Jo, and Yoon, Ki Won, 1996, Shear Correction Factors for Thin-Walled Composite Boxbeam Considering Non Classical Behaviours, *Journal Of Composite Materials*, vol. 31, No. 10.
  - 26.- Kominar, V., 1996, Thermo-Machanical Regulation of Residual Stresses in Polymers and Polymer Composites, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 3.
  - 27.- Kwon, Y. W., 1993, Calculation of Effective Moduli of Fibrous Composite with Micro-mechanical Damage, *Composite Structures*, 25,1993, 187-192.
  - 28.- Lin, Chien-Chang, and Ko, Tseng-Chung, 1993, Adhesive Interface Element for Bonding of Laminated Plates, *Composite Structures*, 25.
  - 29.- Lin, Chien-Chang, Ko, and Tseng-Chung, 1993, Adhesive Interface Element for Bonding of Laminated Plates, *Composite Structures*, 25.
  - 30.- Mal, A.K., Karim, M. R., Bar-Cohen, Y., 1990, Determination of the properties of composite interfaces by an ultrasonic method, *Mater Sci Eng A*.
  - 31.- Maligno, A. R., Warrior, A. C., Long, A. C., 2010, Effects of interphase material properties in inidirectional fibre reinforced composites, Effects of interphase material properties in unidirectional fibre reinforced composites, *Composites Science and Technology* 65
  - 32.- Mallikarjuna and Kant, T., 1993, A Critical Review and some Results of Recently Developed Refined Theories of Fiber-Reinforced Laminated Composites and Sandwiches, *Composite Structures*, 23, 293-312.
  - 33.- Masters, I. G., and Evans, K. E., 1996, Models for the Elastic Deformation of Honeycombs, *Composite Structures*, 35.
  - 34.- Navarrete, M., Serranía, F., 2002, An experimental-numerical technique for evaluating the elastic constants of unidirectional laminates by optoacoustic method: comparison with some theoretical results, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 9(2).

- 
- 35.- Nordin, Lars-Olof, and Varna, Janis, 2005 , Nonlinear viscoelastic behavior of paper fiber composites, *Composites Science and Technology* 65 (10), pp. 1609-1625.
  - 36.- Pagano, J. N., 1981, Global-local variational model, *Mechanics of Composite Materials*.
  - 37.- Paluch, Bernard, 1996, Analysis of Geometric Imperfections Affecting the Fibers in Unidirectional Composites, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 4.
  - 38.- Papanicolaou, G.C., Zaoutsos, S.P., and Kontou, E.A., 2004 , Fiber orientation dependence of continuous carbon/epoxy composites nonlinear viscoelastic behavior, *Composites Science and Technology* 64 (16), pp. 2535-2545.
  - 39.- Parton, V. Z., Kudryavtsev, B. A., *Engineering Mechanics of Composite Structures*, 1993.
  - 40.- Savoia, Marco, and Tullini, Nerio, 1993, Torsional Response of Inhomogeneous and Multilayer Composite Beams, *Composite Structures*, 25, 587-594.
  - 41.- Shultz, Mauro, and Filipou, Phillip C., 1998, Generalized Warpin Torsion Formulation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, No. 3.
  - 42.- Silva, A., and Travassos, J., 1993, Mechanical Bending Behaviour of Composite T-Beams, *Composite Structures*, 25.
  - 43.- Staab, G. H., *J. Laminar Composites*, 1999.
  - 44.- Sun, H., Pan, N., Mechanical characterization of the interfaces in laminated composites, *Composite Structures*, 74 (2006)
  - 45.- Swanson, Stephen R., 1998, Torsion of Laminated Rectangular Rods, *Composite Structures*, 42, 23-31.
  - 46.- Tay, T. E., and Lim, E. H., 1993, Analysis of Stiffness Loss in Cross-Ply Composites Laminates, *Composite Structures*, 25.
  - 47.- Tay, T. E., and Lim, E. H., 1993, Analysis of Stiffness Loss in Cross-Ply Composites Laminates, *Composite Structures*, 25.
  - 48.- Thomsen, Ole Thybo, 1993, Analysis of Local Bendig Effects in Sandwich Plates with Orthotropic Face Layers Subjected to Localised Loads, *Composite Structures*, 25.

- 
- 49.- Toledan, A., and Murakami, H., 1988, Shear-Deformable Two\_Layer Plate Theory with Interlayer Slip, *Journal Of Engineering Mechanics*, vol. 114, No. 4.
  - 50.- Tripathi, Devesh, Chen, Fangping, and Jones, Frank R., 1996, A Comprehensive Model to Predict the Stress Fields in a Single Fibre Composite, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 14.
  - 51.- Tsai, Stephen W., Introduction to Composite Materials, 1980
  - 52.- Ugural, Ansel , Stresses in Plates and Shells, 1999.
  - 53- Verijenko, V. E., 1993, Nonlinear Analysis of Laminated Composite Plates and Shells Includin the Effects of Shear and Normal Deformation, *Composite Structures*, 25.43.- Kam, T. Y. , Lin, S. C., and Hsiao, K. M., 1993, Reliability Analysis of Nonlinear Laminated CompositesPlate Structures, *Composite Structures*, 25.
  - 54.- Whitney, James M., and Gawandi· Anis, 2006 , Effective interlaminar shear moduli in composites containing transverse ply cracks, *Composites Science and Technology* 66 (14), pp. 2591.
  - 55.- Wu, Chih-Ping, and Hsu, Chih-Shung, 1993, A New Local High-Order Laminate Theory, *Composite Sructures*, 21.
  - 56.- Xiao, W., Blandford, G.E., Layerwise Composite Plate Analysisi Using an Element Template Methodology, *Journal Of Engineering Mechanics*, vol. 124, No. 5, abril 1998.
  - 57.- Yang, Chihdar, 1997, Buckling Analysis of Thick-Walled Composites Pipe under External Pressure, *Journal Of Composite Materials* vol. 31, No. 4.
  - 58.- Zeng, Qing-Dun, and Wang, Zi-Li, 1997, A Study of the Influence of Interfacial Damage on Stress Concentrations in Unidirectional Composites, *Composite Science and Technology*, 57, 129-135.
  - 59.- Zhang, Yunfa, Xia, Zihui and Ellyin, Fernand, 2004, Evolution and influence of residual stresses/strains of fiber reinforced laminates, *Composites Science and Technology* 64 (10-11), pp. 1613-1621.
  - 60.- Zinoviev, Peter A., and Smerdov,, Andrey A., 1999, Ultimate Properties of Unidirectional Fiber Composites, *Composite Science and Technology*, 59 (1999), 59.
  - 61.- Zuo, Q. H., and Hjelmstad, K. D., 1998, Piecewise Linear Warping Theory for Multilayered Elastic Beams, *Journal Of Engineering Mechanics*, vol. 124, no. 4.

---