



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA
DE WATSON AL PROBLEMA DE ONDAS
OCEÁNICAS SOBRE UNA ESFERA
GIRATORIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

MAURICIO JAVIER DEL RAZO SARMINA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Aplicación de la Transformada de Watson
al Problema de Ondas Oceánicas sobre
una Esfera Giratoria

Mauricio Javier del Razo Sarmina

Facultad de Ciencias, Agosto de 2010

1. Datos del Alumno Del Razo Sarmina Mauricio Javier 58 12 60 92 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Física 303596909	2. Datos del tutor Dr. Antonmaria Minzoni Alessio
3. Datos del sinodal 1 Dr. Eugenio Ley Koo	4. Datos del sinodal 2 Dr. Carlos Málaga Iguñiz
5. Datos del sinodal 3 Dr. Ramón Gabriel Plaza Villegas	6. Datos del sinodal 4 Dr. David Philip Sanders
7. Datos del trabajo escrito Aplicación de la Transformada de Watson al Problema de Ondas Oceánicas sobre una Esfera Giratoria. 166 p. 2010	

A mis padres y a mis hermanos.

*“ No soy un santo. Al menos
que para tí un santo es un
pecador que simplemente
sigue esforzándose.”*
Nelson Mandela.

Agradecimientos

*"Lo más terrible se aprende enseguida
y lo hermoso nos cuesta la vida."*

Sócrates.

Me resulta imposible agradecer a todas aquellas personas que me han apoyado durante mi formación tanto personal como académica. A pesar de que estos agradecimientos me parecen insuficientes, me gustaría darle las gracias, antes que a nadie, a mi madre Sandra, a quien le debo todo. Su amor, cariño, cuidado y comprensión, no sólo conmigo sino con el resto de la gente, han sido y seguirán siendo mi mejor maestro. Su dedicación, esfuerzo, fortaleza, humildad, inteligencia y sabiduría están presentes incluso en las situaciones más adversas; me han abierto los ojos más de una vez y con seguridad lo harán de nuevo. Ella ha sido la mejor madre y sin duda la más completa, su ejemplo siempre será una meta en el horizonte. También me gustaría agradecer con muy especial cariño a mi padre, Víctor, quien, a pesar de no poder tener un contacto tan continuo conmigo, me conoce demasiado y siempre tiene un sabio y bondadoso consejo a la mano. Gracias a él aprendí una de las lecciones más importantes en mi vida: que el humor, la humildad y el cariño son esenciales en la vida diaria. Sin él, yo no sería quien soy y nada de esto sería posible. Mamá, papá, gracias por enseñarme lo hermoso, yo sé que les ha costado la vida aprenderlo y enseñármelo.

Gracias también a toda mi familia, cuya unidad y felicidad siempre me ha brindado seguridad. A mis hermanos, Jose Víctor y Carlos, que han sido amigos, padres, enemigos, consejeros, bancos, choferes, maestros, costales de box, guardianes y cantidad de cosas, no me imagino la vida sin ustedes. A mi tía y a mi tío, Zahia y Ricardo Trabulsi, que me han dado diversión, hobbies, trabajo, consejos, platicas, albergue y muchas cosas más, no saben

cuanto aprecio todo lo que han hecho por mi. A mi mamá grande, que se enoja si le digo abuela, me faltan palabras para agradecerte, gracias por siempre cuidar de mi. A mis primitos, Nicolas y Mateo Trubulsi, gracias por el simple hecho de existir y recordarme la alegría de la infancia. A mi Yeddo, gracias por los buenos recuerdos; el sólo recordar tu cara me hace sonreír. A Avi, gracias por tu incondicional amor y cariño.

Esta resolución fue posible gracias a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. En especial, quisiera agradecer a algunos de los profesores que tuve la oportunidad de conocer allí durante mis estudios. Particularmente me gustaría agradecer a mi profesor, Antonmaria Minzoni, por todo el apoyo que me ha dado y la confianza que me tiene. No sólo me ha dado muy buenas lecciones de física y matemáticas, también me ha dado lecciones de vida que jamás olvidaré. Recuerdo sus clases como las más divertidas e interesantes de toda la carrera, de éstas nació mi gusto por las matemáticas aplicadas. También quisiera agradecer a mis sinodales, quienes son excelentes profesores y muy buenas personas. A Ramón Plaza, por siempre considerarme, acogerme e inspirarme confianza. A David Sanders, por siempre recibirme con una sonrisa, y por mostrarme que la física estadística puede ser muy interesante sin tener que ser un dolor de cabeza. A Eugenio Ley Koo, por sus excelentes clases y su continua preocupación en que entienda. A Carlos Málaga, por todo su apoyo y preocupación durante el proceso de correcciones. Gracias por sus comentarios y sugerencias que me ayudaron a entender más y a mejorar este trabajo. Finalmente, me gustaría agradecer a Ricardo Méndez Fragoso, María del Carmen Jorge y Jorge, María de los Angeles Ortiz Flores, Edgar Vazquez Luis y Miguel Alcubierre Moya, entre otros, cuyas clases recuerdo con mucho cariño.

Por último, quiero darle las gracias a todos mis amigos y amistades, ustedes saben quiénes son. A mis amigos de la prepa, en especial Márquez, Borro, Ricky, Alan y Carlos, que más que amigos ya son como hermanos. Sin ellos, la vida tendría mucho menos sentido. A mis amigos de la carrera, que han hecho de mis días en la facultad los mejores que pudiese haber deseado. Gracias amigos, yo no sería quien soy si no fuera por su confianza, amistad y apoyo.

Mauricio J. del Razo Sarmina

Agosto 2010.

Índice general

Agradecimientos	IX
Introducción	XI
I Difracción de Ondas Eléctricas por la Tierra	1
1. Planteamiento y solución del problema	3
1.1. Planteamiento del problema	5
1.2. Potenciales de Debye	7
1.3. La ecuación de Helmholtz	9
1.4. Solución con frontera esférica conductora	11
1.5. Wronskianos y la identidad de Abel	14
1.6. Aproximación del Conductor Perfecto	15
2. La transformada de Watson de Π	17
2.1. El contorno	18
2.1.1. La aproximación de Laplace	20
2.2. La transformada	25
3. Los ceros de ξ	27
3.1. Otra representación integral de las funciones de Hankel	27
3.2. Aplicando el método del descenso más rápido	29
3.2.1. Aplicando el método de Newton	31
3.2.2. Bifurcaciones	34
3.2.3. El plano γ y el plano n/x	36
3.2.4. La representación asintótica	39
3.3. Los ceros	41

4. ¿Y la Física?	47
4.1. Los ceros	47
4.2. Ondas alrededor de la Tierra	49
4.3. Pulsos alrededor de la Tierra	50
4.4. Otros resultados	55
II Ondas Oceánicas sobre una Esfera Giratoria	57
5. Ecuaciones de Movimiento	59
5.1. Ecuaciones de Euler	59
5.2. Ecuación de Vorticidad Bidimensional	63
6. Soluciones a la ecuación de vorticidad	69
6.1. Una solución particular en la esfera	70
6.2. Soluciones en el plano tangente	74
6.2.1. La relación de dispersión para ondas planas	75
6.2.2. Empleando Series de Fourier en y	77
6.2.3. Empleando la Transformada de Fourier en y	87
6.2.4. Empleando Series de Fourier en x	95
6.2.5. Empleando la Transformada de Fourier en x	97
6.3. Una solución general en la esfera	108
7. La transformada de Watson	115
7.1. En la solución particular en la esfera.	115
7.2. En la solución obtenida con series de Fourier en y	116
7.3. En la solución obtenida con series de Fourier en x	118
7.4. En la solución general en la esfera.	121
7.5. ¿En qué soluciones?	124
Conclusiones	125
A. Desarrollo en Ondas Esféricas Centradas en el Origen	131
A.1. Un Primer Desarrollo	131
A.2. El Desarrollo en Ondas Esféricas	133
B. Programa	139
C. Gráficas de los Contornos	143

Introducción

En el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, de las ecuaciones diferenciales parciales y de la física en general es usual encontrarse con soluciones en forma de series. Estas series suelen incluir desde funciones trigonométricas hasta funciones especiales y factoriales. Dada la complejidad de estas soluciones, no es garantía su rápida convergencia. Además, en algunos casos, la interpretación física de las soluciones escritas en esta forma puede ser engañosa y difícil de abstraer.

El problema clásico de la difracción de ondas eléctricas por la Tierra fue uno de estos problemas. La convergencia de la solución es sumamente lenta y extraer la interpretación física no es tarea fácil. Como mencionaremos más adelante, este problema fue tratado por grandes mentes como Poincaré, Heaviside y Sommerfeld sin mucho éxito. No fue hasta 1918 que G.N. Watson lo resolvió utilizando un método que ahora se conoce como la Transformada de Watson, la cual transforma la serie en otra serie que converge mucho más rápidamente. La solución obtenida por Watson requiere tan sólo dos términos de la serie para obtener resultados semejantes a los que se obtenían con 8000 términos de la serie original¹. Como consecuencia, la solución de Watson arrojaba resultados físicos que resultaban mucho más apropiados para describir el fenómeno experimentalmente. Más aún, la nueva serie es mucho más fácil de interpretar físicamente.

El presente trabajo consiste en dos partes, al inicio de cada una se presenta una introducción más detallada. La primera es una versión detallada del artículo de 1918 [24], dentro del contexto y los intereses de esta tesis, en el que Watson resuelve el problema de la difracción de ondas eléctricas por la Tierra. Los objetivos que se pretenden cubrir en esta primera parte son varios. Primero, pretende poner al alcance de estudiantes a nivel Licen-

¹Ver el artículo [12].

ciatura el primer trabajo en el que se empleó la transformada de Watson, ya que el artículo original no es fácil de leer y no explica con detalle los cálculos realizados. Segundo, el estudio detallado del problema nos da la pauta sobre cómo y bajo qué circunstancias se puede emplear la Transformada de Watson, por lo cual este estudio nos sirve para comprender mejor el empleo y funcionamiento de la transformada. Finalmente, se realiza una interpretación física bastante más completa de la realizada por Watson, con el fin de mostrar el poder de la transformada y establecer un punto de referencia para poder comparar con futuros trabajos, como lo intenta ser la segunda parte de esta tesis. En esta parte reconocemos la importancia de las singularidades en las soluciones en torno a la transformada de Watson, las cuales a su vez están asociadas a la función de Green y a la topología del problema.

La segunda parte trata sobre las ondas oceánicas sobre una esfera giratoria. Se deduce un modelo sencillo bidimensional con el que se pueden describir las ondas planetarias u ondas de Rossby. Estas ondas son consecuencia principalmente de la fuerza de Coriolis y son trascendentales para el entendimiento y predicción de los cambios climáticos en la Tierra. Primero se toma la ecuación bidimensional sobre la esfera recién obtenida, cuya solución nos ayuda a entender físicamente las ondas de Rossby, pero desafortunadamente no tiene singularidades y no resulta útil para hacer la transformada de Watson como veremos en el capítulo 7. El hecho de que no tuviera singularidades era de esperarse, ya que no obtuvimos la función de Green de la ecuación. Incluso si lo hubiésemos hecho, tampoco habría tenido singularidades ya que la solución se puede expresar en términos de armónicos esféricos, los cuales son de cuadrado integrable. Dado que la transformada de Watson no se pudo aplicar, se toma la ecuación sobre un plano tangente a la esfera con tal de buscar más soluciones en las que se pueda intentar aplicar la transformada. La aproximación del plano tangente es ampliamente usada en oceanografía, ya que retiene mucha información sobre la variación del parámetro de Coriolis en el espacio. Como nos interesan las ondas de Rossby que son originadas por la fuerza de Coriolis, esta aproximación resulta de gran utilidad para extraer información sobre las ondas oceánicas sobre una esfera giratoria. También es importante reconocer sus limitaciones, no solamente generales, si no en el contexto de la transformada de Watson. El emplear el plano tangente nos puede dar información sobre fenómenos locales en la esfera, pero no globales. Esto se debe a la geometría misma y a que las condiciones de frontera cambian de un caso a otro, mientras en la esfera son periódicas, en el plano pueden to-

marse como nulas en infinito o de muchas otras maneras como se verá en el capítulo seis. En el contexto de la transformada de Watson, al emplear la aproximación del plano tangente, se está perdiendo la topología en la cual ya sabemos que sí funciona la transformada de Watson. En otras palabras, al pasar de la esfera al plano, se cambió la topología del problema, por lo tanto también la función de Green y las singularidades asociadas a ésta, las cuales sabemos son fundamentales para la transformada de Watson. Por el otro lado, se va a explorar qué información podemos obtener al intentar emplear la transformada de Watson en las soluciones sobre el plano tangente. Finalmente, se emplea una generalización a tres dimensiones de la ecuación bidimensional sobre la esfera que se tenía, ecuación que no se deduce en este trabajo y que describe ondas de Rossby en un fluido estratificado. En este caso la solución se parece mucho a la obtenida en la primera parte del trabajo y plantea la posibilidad de emplear la transformada de Watson de manera análoga a la primera parte. Aunque se analizan muchos aspectos de esta última solución en torno a la transformada de Watson, en especial en torno a los efectos de la relación de dispersión, se deja como un problema abierto ya que no se ha estudiado con el detalle que se requiere, ni la física de la ecuación generalizada, ni la posibilidad de hacer la transformada de Watson.

El objetivo de esta segunda parte es solucionar y entender físicamente el problema, para después intentar aplicarle la Transformada de Watson a las soluciones en las que se pueda intentar y observar las dificultades que pueden surgir en el proceso, además de entender un poco más sobre cuándo es conveniente aplicarla y cuándo es posible emplearla.

El objetivo general de la tesis es promover el uso y la comprensión de la transformada de Watson a alumnos y científicos ajenos al método, ya que, aplicado en áreas inexploradas, puede llevar a nuevos descubrimientos científicos, como ya lo hizo en el caso de las ondas eléctricas difractadas por la Tierra. A continuación se presenta un ejemplo sencillo de la Transformada de Watson para familiarizar al lector con el método.

La transformada de Watson: Un ejemplo sencillo

A continuación daremos un ejemplo sencillo de la transformada de Watson para familiarizar al lector con el método. Esencialmente, transforma una suma infinita a otra suma infinita más conveniente para el problema

en cuestión. Por lo general, resulta más conveniente en el sentido de que converge más rápido. La transformación se logra escribiendo la suma infinita como una integral compleja. Después, se deforma el contorno de la integral compleja y se obtiene otra suma infinita. Veamos un ejemplo, sabemos del electromagnetismo que el desarrollo multipolar es

$$V(r, \theta) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos(\theta)), \quad (1)$$

donde P_n son los polinomios de Legendre y V es el potencial electrostático. Por ahora, la física no es muy importante, sólo queremos dar un ejemplo de la transformada. Es importante notar que esta suma sólo converge para $r < a$. Empleando que $P_n(-\cos(\theta)) = (-1)^n P_n(\cos(\theta))$, para n entero, se tiene que

$$V = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (-1)^n P_n(-\cos(\theta)). \quad (2)$$

Usando el teorema de los residuos de Cauchy², vamos a comprobar que podemos reescribir esa suma infinita como

$$V = \frac{1}{2ia} \int_C \left(\frac{r}{a}\right)^s P_s(-\cos(\theta)) \frac{ds}{\sin(s\pi)},$$

con C encerrando los polos del integrando en el eje real positivo, es decir, encerrando los ceros de $\sin(s\pi)$, $s = 0, 1, 2, 3, \dots$. Podemos ver C en la figura (1).

Calculemos la integral para verificar que en efecto obtenemos la suma (2). Como los polos de un integrando de la forma $f(s)/g(s)$ están en $g(s_n) = 0$ y sus residuos se calculan como $f(s_n)/g'(s_n)$, podemos emplear el teorema de los residuos de Cauchy, obteniendo que

$$V = \frac{1}{2ia} \int_C \left(\frac{r}{a}\right)^s P_s(-\cos(\theta)) \frac{ds}{\sin(s\pi)} = \frac{2\pi i}{2ia} \sum_{s_n} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{s_n} P_{s_n}(-\cos(\theta))}{\pi \cos(s_n\pi)}.$$

Y como s_n son los polos que encierra C , entonces $s_n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Sustituyendo, se sigue que

$$V = \frac{1}{2ia} \int_C \left(\frac{r}{a}\right)^s P_s(-\cos(\theta)) \frac{ds}{\sin(s\pi)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(-\cos(\theta)) (-1)^n,$$

² $\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum \text{Residuos}(f(z))$, C orientado positivo. Ver [3].

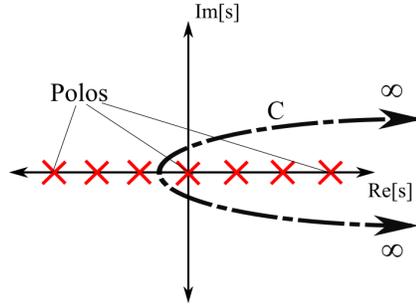


Figura 1: Contorno C

donde recuperamos (2). Ahora hagamos la transformada, para esto tomaremos la misma integral sobre otro contorno conveniente. El contorno elegido completo $C_T = C + AB + C_2 + MN$ se muestra en la figura (2).

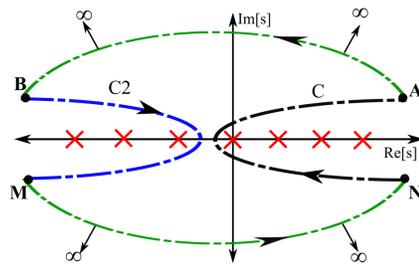


Figura 2: Deformación del Contorno

Por consiguiente, $\int_{C_T} = \int_C + \int_{AB} + \int_{C_2} + \int_{MN}$, donde por brevedad no escribimos el integrando. Usando nuevamente el teorema de los residuos podemos ver que $\int_{C_T} = 0$, ya que C_T no encierra ningún polo del integrando. También ocurre que, cuando mandamos el contorno $C_T \rightarrow \infty$, las integrales \int_{AB} y \int_{MN} tienden a cero³. Sólo queda $\int_C + \int_{C_2} = 0$, es decir

$$V = \frac{1}{2ia} \int_C \left(\frac{r}{a}\right)^s P_s(-\cos(\theta)) \frac{ds}{\sin(s\pi)} = -\frac{1}{2ia} \int_{C_2} \left(\frac{r}{a}\right)^s P_s(-\cos(\theta)) \frac{ds}{\sin(s\pi)}.$$

³Esto se prueba más adelante en un ejemplo muy similar.

Notemos que C_2 está orientado en sentido negativo. Para poder usar el teorema de Cauchy, requerimos que esté orientado en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Llamemos C_2' al contorno orientado en sentido positivo de modo que $\int_{C_2} = -\int_{C_2'}$, entonces

$$V = \frac{1}{2ia} \int_{C_2'} \left(\frac{r}{a}\right)^s P_s(-\cos(\theta)) \frac{ds}{\sin(s\pi)}.$$

Finalmente, se puede ver en la figura (2), que C_2' encierra los polos del integrando $s = -1, -2, -3, \dots$. Aplicando el teorema de los residuos de Cauchy una última vez obtenemos que

$$V = \frac{1}{a} \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(-\cos(\theta)) (-1)^n.$$

Éste es el resultado de usar la transformada de Watson. Obsérvese que ahora la suma sí converge para $r > a$. En este caso la suma obtenida es muy similar en forma a la original, pero en general esto no necesariamente ocurre.

Es importante notar que el contorno se puede deformar de múltiples formas y aun así obtener el mismo resultado, no hay una regla general. En gran medida esta deformación estará limitada por el problema en cuestión.

Parte I

Difracción de Ondas Eléctricas por la Tierra

*"Una mirada hacia atrás vale
más que una hacia adelante."*
Arquímedes.

Capítulo 1

Planteamiento y solución del problema

Entre 1885 y 1889 Heinrich Rudolph Hertz pudo transmitir y recibir ondas electromagnéticas de radio¹ en el laboratorio. Además, probó experimentalmente que estas ondas se reflejan y refractan siguiendo las leyes de la óptica geométrica. Su dispositivo experimental para transmitir ondas resulta muy interesante y sencillo; un ejemplo de este dispositivo se puede apreciar en la figura (1.1a).

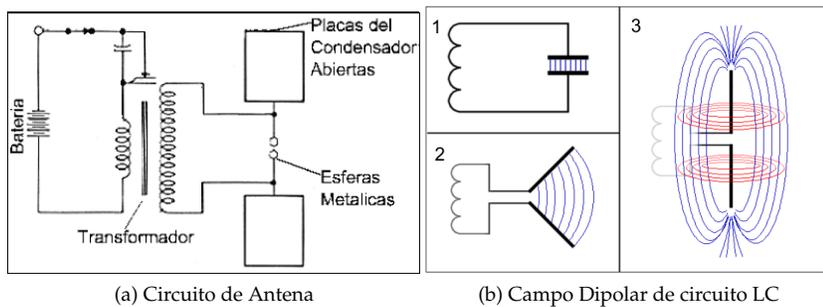


Figura 1.1: Antena Dipolar

El dispositivo somete a unas esferas metálicas separadas, a una diferencia

¹Longitud de onda grande.

de potencial muy alta; la diferencia de potencial oscila por la estructura del circuito. Cuando esta diferencia de potencial es lo suficientemente grande, se genera una chispa entre las esferas, la cual genera una corriente. Esta corriente pasa por las placas abiertas del condensador y oscila al igual que la diferencia de potencial. Las placas abiertas actúan como antena dipolar transmitiendo ondas electromagnéticas.

¿Por qué las esferas metálicas están separadas? Sabemos que para generar radiación electromagnética, con suficiente intensidad, se requiere acelerar mucho cargas o corrientes. Las esferas metálicas separadas se encuentran sometidas a una diferencia de potencial alta, lo cual las lleva a sufrir una descarga súbita, una chispa, como los rayos en las tormentas. Resulta evidente que esta descarga súbita es en efecto una corriente (o cargas) muy acelerada; considerando que la diferencia de potencial oscila, nuestro dispositivo radía continuamente.

Muy primitivamente se puede pensar al dispositivo como un inductor y un condensador en serie (circuito LC). El condensador se abre como en la figura (1.1b) obteniendo un campo dipolar eléctrico que oscila. Las líneas azules en la figura (1.1b) representan el campo eléctrico y las rojas el campo magnético. Ya que producen un campo dipolar que oscila, a estos dispositivos y a sus variaciones se les suele llamar antena dipolar, oscilador Hertziano, dipolo de Hertz, etc.

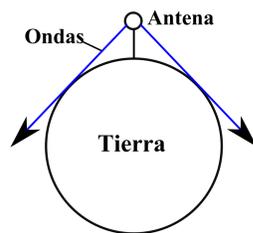


Figura 1.2: Onda Limitada

En 1901 Guglielmo Marconi logró hacer la primera transferencia de radio transatlántica usando estos dispositivos. Marconi pudo mandar una señal de radio desde Inglaterra hasta Canadá, cubriendo aproximadamente un sexto de la circunferencia terrestre. Antes de este logro, muchos matemáticos habían predicho que la curvatura de la Tierra no permitiría el paso de las ondas después de cierta distancia. Lo anterior resulta de pensar a las ondas electromagnéticas limitadas por la óptica geométrica, como un láser (ver figura (1.2)).

Los científicos no entendían bien lo que ocurría. Surgieron dos teorías principales: la primera planteaba explicar el fenómeno usando la difracción de

las ondas por la Tierra, y la segunda planteaba explicarlo mediante la reflexión de las ondas entre la superficie de la Tierra y la atmósfera. Durante 15 años muchos científicos, entre ellos Poincaré, Nicholson, MacDonald, Love, Sommerfeld, Zenneck, March, Rybczynski, Heaviside, Kennely, Austin, Eccles, el mismo Marconi y varios más, intentaron resolver el problema. Ninguno pudo resolverlo satisfactoriamente, pero sí establecieron la pauta para que en 1918 G. N. Watson lo resolviera. La diferencia esencial entre el trabajo de Watson y los trabajos anteriores consiste en el empleo de la transformada de Watson. A continuación, en los capítulos 1,2,3 y 4, se presentará una versión simplificada y detallada del artículo publicado en 1918[24], así como una interpretación física más completa del trabajo.

1.1. Planteamiento del problema

Suponemos a la Tierra un conductor homogéneo imperfecto esférico con radio a . Ésta se encuentra rodeada de un dieléctrico homogéneo. Se coloca una antena dipolar, como la mencionada en la introducción, a una distancia $b > a$ en el eje z . La antena emite con periodo $T = 2\pi/\omega$. Ver figura (1.3).

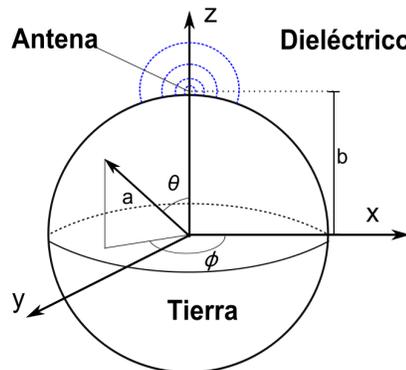


Figura 1.3: Tierra y Antena Dipolar

Como las ondas de radio emitidas son electromagnéticas, cumplen con las

ecuaciones de Maxwell (para dieléctricos y en unidades Gaussianas o cgs),

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0; & \nabla \cdot \vec{B} &= 0; \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}; & \nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho,\end{aligned}$$

donde \vec{E} es el campo eléctrico, \vec{B} el campo magnético, c la velocidad de la luz y se utilizó la ley de ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, con σ la conductividad. Ahora bien, como la antena es armónica en el tiempo, separamos variables de modo que

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x})e^{i\omega t} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\vec{x})e^{i\omega t}. \quad (1.1)$$

Así pues, podemos hacer explícita la derivada respecto al tiempo en la ley de Faraday y en la ley de Ampère. Sustituyendo las derivadas respecto al tiempo tenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{i\omega}{c} \vec{B} = -\frac{i\omega\mu}{c} \vec{H} = -\gamma \vec{H}; \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{i\omega}{c} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E} = \left(\frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi}{c} \sigma\right) \vec{E} = \beta \vec{E},\end{aligned}$$

donde utilizamos $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$, con ϵ la permitividad eléctrica y μ la permeabilidad magnética². Además, tomamos $\gamma = \frac{i\omega\mu}{c}$ y $\beta = \frac{i\omega\epsilon}{c} + \frac{4\pi}{c} \sigma$. Notemos que estas ecuaciones están escritas para \vec{E} y \vec{H} en función de la posición y del tiempo. Dividiendo toda la ecuación entre $e^{i\omega t}$, eliminamos la dependencia en t obteniendo

$$\boxed{\nabla \times \vec{E}_0 = -\gamma \vec{H}_0 \quad \nabla \times \vec{H}_0 = \beta \vec{E}_0.} \quad (1.2)$$

Estas dos serán nuestras ecuaciones principales. No tomamos en cuenta las ecuaciones de Maxwell con divergencia porque se cumplen automáticamente. Tomemos divergencia por ambos lados de estas ecuaciones. Como la divergencia de un rotacional es cero, entonces $\nabla \cdot \vec{E}_0 = 0$ y $\nabla \cdot \vec{H}_0 = 0$, esto es consecuencia de suponer (1.1). Lo anterior aparenta ser contradictorio con la ley de Gauss eléctrica. Sin embargo para tiempos largos no lo es, ya que en el caso de conductores, ρ tiende a cero rápidamente conforme avanza el tiempo. Probar esto es un ejercicio sencillo, se sugiere utilizar la ley de Ampère y la ley de Gauss eléctrica para obtener una ecuación diferencial en ρ y después preguntarse cómo debe ser la conductividad.

²Para esto supusimos que el material es isotrópico, al igual que en la ley de Ohm.

1.2. Potenciales de Debye

En las ecuaciones que acabamos de deducir necesitamos encontrar 6 cantidades, 3 para \vec{H}_0 y 3 para \vec{E}_0 . Vamos a reducir esas 6 a una sola, el potencial eléctrico de Debye. Los potenciales de Debye son ampliamente usados en optica y en problemas de difracción de ondas electromagnéticas, en especial en aquellos problemas con topología esférica, ver [2, pag. 759]. De ahora en adelante denotaremos a \vec{H}_0 y \vec{E}_0 simplemente como \vec{H} y \vec{E} . Escribiendo (1.2) en coordenadas esféricas, tenemos

$$\beta E_r = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[\frac{\partial r \sin(\theta) H_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial r H_\theta}{\partial \phi} \right], \quad (1.3)$$

$$\gamma H_r = \frac{-1}{r^2 \sin(\theta)} \left[\frac{\partial r \sin(\theta) E_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial \phi} \right], \quad (1.4)$$

$$\beta E_\theta = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r \sin(\theta) H_\phi}{\partial r} \right], \quad (1.5)$$

$$\gamma H_\theta = \frac{-1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r \sin(\theta) E_\phi}{\partial r} \right], \quad (1.6)$$

$$\beta E_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r H_\theta}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right], \quad (1.7)$$

$$\gamma H_\phi = \frac{-1}{r} \left[\frac{\partial r E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right]. \quad (1.8)$$

Como nuestro campo será emitido por una antena dipolar y esta alineado con el eje z , resulta claro que $H_r = 0$. Esto se ve muy claramente en la figura (1.1b)³. Reescribiendo (1.5) y (1.7) se tiene

$$\beta E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial r H_\phi}{\partial r}, \quad \beta E_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial r H_\theta}{\partial r}. \quad (1.9)$$

Sustituyendo E_θ y E_ϕ de (1.9) en (1.8) y (1.6) respectivamente obtenemos

$$\frac{\partial^2 r H_\phi}{\partial r^2} + k^2 r H_\phi = -\beta \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 r H_\theta}{\partial r^2} + k^2 r H_\theta = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \frac{\partial E_r}{\partial \phi}, \quad (1.10)$$

donde $k^2 = -\beta\gamma$. Estas ecuaciones nos servirán más adelante. Por otro lado, como $H_r = 0$ entonces por (1.4) $\frac{\partial r \sin(\theta) E_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial \phi} = 0$. Por lo tanto, podemos

³De hecho sólo $H_\phi \neq 0$. Esta suposición no es necesaria para la construcción de los potenciales de Debye, pero en este caso simplifica los cálculos. Para una deducción más general ver [2] pg.760, [22] o el artículo [17].

escribir E_θ y E_ϕ como gradientes de un escalar⁴. Entonces tenemos que

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \quad E_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi}.$$

Tomando $U = \frac{\partial r \Pi}{\partial r}$, obtenemos

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi}{\partial r \partial \theta}; \quad E_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial^2 r \Pi}{\partial r \partial \phi}.$$

A Π se le conoce como el potencial eléctrico escalar de Debye⁵. Igualando estas dos ecuaciones a (1.9) respectivamente e integrando respecto a r se tiene que

$$H_\phi = -\frac{\beta}{r} \frac{\partial r \Pi}{\partial \theta}, \quad H_\theta = \frac{\beta}{r \sin(\theta)} \frac{\partial r \Pi}{\partial \phi},$$

donde la constante de integración se tomó como 0, ya que resulta irrelevante para que se cumplan las ecuaciones de Maxwell (1.9). Ya obtuvimos cinco de las 6 componentes en función del potencial de Debye. Usando (1.3), sustituimos H_θ y H_ϕ recién obtenidas y obtenemos la última componente

$$E_r = -\frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi^2} \right].$$

Por lo tanto los campos en función del potencial de Debye nos quedan como:

$$E_r = \frac{-1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial \sin(\theta) \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Pi}{\sin(\theta) \partial \phi^2} \right] \quad H_r = 0 \quad (1.11)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r \Pi}{\partial r \partial \theta} \quad H_\theta = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 0 \quad (1.12)$$

$$E_\phi = \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial^2 r \Pi}{\partial r \partial \phi} = 0 \quad H_\phi = -\beta \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}. \quad (1.13)$$

⁴Esto es análogo al hecho de que si $\nabla \times f = 0$ entonces f se puede escribir como el gradiente de un potencial: $f = \nabla \Phi$, sólo que en dos dimensiones sobre la superficie de una esfera.

⁵Es importante notar que Watson se refiere a Π como función Hertziana. Hay un potencial que se llama potencial vectorial de Hertz. El potencial de Debye multiplicado por el vector radial nos da la componente radial del vector de Hertz. Para un tratamiento muy completo sobre los potenciales referirse a [17].

H_θ y E_ϕ se igualaron a cero porque en nuestro problema hay simetría axial respecto a ϕ . Es decir, no hay dependencia alguna en ϕ y, consecuentemente, las parciales respecto a ϕ tienen que ser cero. Es justamente esta simetría y el hecho de que $H_r = 0$ lo que nos garantiza que el campo obtenido es un campo dipolar⁶.

Así el problema se reduce a encontrar el potencial Π ; veamos qué ecuación debe de cumplir. Sustituimos las componentes obtenidas, E_r , H_θ y H_ϕ , en las dos ecuaciones (1.10). Integramos respecto a θ y ϕ respectivamente y se obtiene una misma ecuación en ambos casos, lo cual implica que la constante de integración tiene que ser cero. La ecuación obtenida es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(r\Pi) = -\frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta) \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi^2} \right].$$

Acomodando términos,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r\Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \phi^2} + k^2 \Pi = 0,$$

que es lo mismo que la ecuación de onda estacionaria o la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas. Es decir:

$$\boxed{\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0.} \quad (1.14)$$

Ya sabemos qué ecuación cumple Π . Las condiciones de frontera se obtienen trivialmente de las ecuaciones que relacionan los campos \vec{E} y \vec{B} con el potencial de Debye. Una vez obtenida Π , podemos obtener todas las componentes de los campos. Así hemos reducido nuestro problema a una ecuación de onda estacionaria con condiciones de frontera relativamente simples. Las condiciones de frontera explícitas se obtendrán más adelante.

1.3. La ecuación de Helmholtz

En nuestro problema queremos resolver la ecuación de Helmholtz con una fuente (antena) fuera del origen y una frontera esférica conductora. Un primer paso sería resolver esta ecuación en el espacio libre con una fuente en el origen. Tenemos

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = 0. \quad (1.15)$$

⁶Para ver cómo se puede obtener el campo dipolar ver [2, pag.85-87]. Una versión aproximada se puede ver en [7, pag.444-447].

Notemos que nuestra función no depende ni de θ ni de ϕ , ya que la antena está en el origen y además estamos en espacio libre. Resolvamos esta ecuación. Utilizando el laplaciano en coordenadas esféricas nos permite escribir

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + k^2 G = 0,$$

lo cual se transforma en

$$rG'' + 2G' + k^2 G = \frac{d^2}{dr^2} (rG) + k^2 rG = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $\tilde{G} = rG$, se reduce a

$$\tilde{G}'' + k^2 \tilde{G} = 0,$$

cuya solución es $\tilde{G} = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$, con A y B constantes. Regresando a la variable anterior queda

$$G = A \frac{e^{ikr}}{r} + B \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Despreciamos la onda que no se propaga hacia afuera, ya que tenemos una fuente emisora. Tomando en cuenta el hecho de que usamos $e^{i\omega t}$ como función temporal sólo nos queda

$$G = B \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Esta función resulta ser singular en $r = 0$; en realidad es solución a la ecuación: $(\nabla^2 + k^2)G(r) = 4\pi\delta(r)$. De hecho, es la función de Green de la ecuación de Helmholtz en espacio libre (Ver [13, 7-24 pag.400]).

¿Qué pasa si ahora la antena no está en el origen? Hagamos una traslación. La distancia entre la antena (origen) y el punto donde evaluamos la función es r . Si movemos el oscilador del origen a un punto \vec{r}' y el punto de evaluación lo llamamos \vec{r} , entonces $r = R = |\vec{r}' - \vec{r}|$. No confundir \vec{r} con $r = R$, por eso se cambió de nombre. Por lo tanto, la solución a la ecuación de Helmholtz en el espacio libre para una antena en \vec{r}' en el punto \vec{r} es:

$$\boxed{G(\vec{r}) = \frac{e^{-ikR}}{R}}, \quad (1.16)$$

donde R lo podemos escribir por la ley de cosenos como $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r'}$. Ahora bien, escribiremos esta función de Green de la ecuación de Helmholtz en el espacio libre como una suma infinita de ondas esféricas centradas en el origen. La deducción del siguiente desarrollo se puede consultar en el Apéndice A.

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = -\frac{i}{krr'} \sum_n (2n+1)P_n(\mu) \sqrt{\frac{\pi kr'}{2}} J_{n+1/2}(kr') \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr), \quad (1.17)$$

con P los polinomios de Legendre, J las funciones de Bessel y $H^{(2)}$ las funciones de Hankel de segundo orden. En terminos matemáticos, expresamos una onda esférica, cuya fuente se encuentra fuera del origen, como suma de ondas esféricas cuyas fuentes se encuentran en el origen.

1.4. Solución con frontera esférica conductora

Ya se vio que el potencial eléctrico de Debye cumple con la ecuación de Helmholtz, por lo cual este potencial Π_0 , en el espacio libre, cumple con (1.16). Es decir:

$$\Pi_0 = \frac{e^{-ikR}}{R},$$

donde $R = |\bar{r} - \bar{b}| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\mu}$, con $\bar{b} = b\hat{z}$ la posición de nuestra antena dipolar, \bar{r} la posición del observador y $\mu = \cos(\theta)$. Nótese que θ es el ángulo polar y también es el ángulo entre \bar{b} y \bar{r} , y que μ ahora denotará el coseno del ángulo polar y no la constante del medio. Por consiguiente, R denota la distancia entre el observador y la antena dipolar. Por (1.17) podemos desarrollar Π_0 como

$$\Pi_0 = \begin{cases} -\frac{i}{krb} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\xi_n(kb)\psi_n(kr)P_n(\mu) & r < b, \\ -\frac{i}{krb} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\xi_n(kr)\psi_n(kb)P_n(\mu) & r > b, \end{cases} \quad (1.18)$$

donde

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{n+1/2}(x), \quad \xi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(x), \quad (1.19)$$

con $J_{n+1/2}$ la función de Bessel de primer orden, y $H_{n+1/2}^{(2)}$ la función de Hankel de segundo orden. Ahora debemos reconocer que las constantes del medio son diferentes afuera y adentro de la esfera conductora; para diferenciarlas se usará un subíndice i para referirse a las del interior de la esfera.

Ahora, veamos cuáles son las condiciones de frontera que se deben de satisfacer. Del electromagnetismo sabemos que las componentes tangenciales (angulares) de \vec{E} y \vec{H} tienen que ser continuas (Ver [7, pag.333]). Es decir en la superficie de la esfera $r = a$ se tiene que H_ϕ y E_θ son continuas⁷. Para poder satisfacer estas condiciones de frontera se requiere que, además del potencial en el espacio libre Π_0 , tengamos algo más, necesitamos la solución general. Resulta ideal proponer un potencial para el interior de la esfera Π_i y otro potencial Π_d , que corresponderá al potencial de los campos difractados o dispersados. De modo que el potencial afuera de la esfera este dado por $\Pi_0 + \Pi_d$ y el de adentro por Π_i . Fijándonos en las ecuaciones (1.12) y (1.13) y aplicando la continuidad de H_ϕ y E_θ en $r = a$ obtenemos

$$\beta_i \Pi_i = \beta(\Pi_0 + \Pi_d); \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_i) = \frac{\partial}{\partial r}(r\Pi_0 + r\Pi_d), \quad (1.20)$$

donde nos olvidamos de las derivadas respecto a θ , ya que nos importa la continuidad al movernos en dirección radial. Ahora bien, debemos encontrar una expresión adecuada para Π_i y Π_d . Como bien sabemos, las funciones de Hankel son singulares en el origen⁸. Además, tienden a cero conforme el argumento tiende a infinito. Lo que nos hace pensar que una expansión apropiada sería

$$\begin{aligned} \Pi_d &= -\frac{i}{krb} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(2n+1)\xi_n(kr)P_n(\mu); \\ \Pi_i &= -\frac{i}{k_i r b} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(2n+1)\psi_n(k_i r)P_n(\mu). \end{aligned}$$

Ya sabemos que son soluciones porque (1.18) son solución. Además, Π_i no es singular adentro de la esfera, y Π_d tiende a cero conforme se aleja de la

⁷El resto de las componentes angulares no nos importan porque son cero. Respecto a las radiales, también hay condiciones de continuidad, pero no es difícil probar que con las condiciones que acabamos de dar y las ecuaciones de Maxwell, se satisfacen automáticamente.

⁸Ya que son combinaciones lineales de funciones de Bessel J_n y Y_n donde las segundas son singulares en el origen, ver Capítulo 4.

Tierra tal y como esperaríamos de una onda difractada. Ya sólo nos queda averiguar el valor de A_n y B_n , y tenemos dos ecuaciones dadas por las ecuaciones de fronteras (1.20). Resolvamos el sistema, sustituyendo los potenciales Π_0 , Π_d y Π_i evaluados en $r = a$ en las condiciones de frontera 1.20 se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\mu) \left[\frac{\xi_n(kb)\psi_n(ka)\beta}{k} + \frac{\beta\xi_n(ka)}{k}A_n - \frac{\beta_i\psi_n(k_i a)}{k_i}B_n \right] = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\mu) [-\xi_n(kb)\psi'_n(ka) - \xi'_n(ka)A_n + \psi'_n(k_i a)B_n] = 0.$$

Como los polinomios de Legendre son una base completa y ortogonal, por independencia lineal las cantidades entre corchetes están igualadas a cero. Es decir

$$\frac{\beta\xi_n(ka)}{k}A_n - \frac{\beta_i\psi_n(k_i a)}{k_i}B_n = -\frac{\xi_n(kb)\psi_n(ka)\beta}{k},$$

$$-\xi'_n(ka)A_n + \psi'_n(k_i a)B_n = \xi_n(kb)\psi'_n(ka).$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas lo podemos resolver usando el método de determinantes. Sólo resolvemos para A_n , ya que el campo adentro de la esfera no nos importa. Entonces

$$\Delta = \frac{\beta_i}{k_i}\psi_n(k_i a)\xi'_n(ka) - \frac{\beta}{k}\psi'_n(k_i a)\xi_n(ka),$$

$$\Delta_{A_n} = -\frac{\beta_i}{k_i}\xi_n(kb)\psi'_n(ka)\psi_n(k_i a) + \frac{\beta}{k}\psi'_n(k_i a)\xi_n(kb)\psi_n(ka).$$

Por lo tanto, el valor de A_n es

$$A_n = \frac{\Delta_{A_n}}{\Delta} = -\frac{\xi_n(kb) \left[\psi'_n(ka)\psi_n(k_i a) - \frac{\beta k_i}{\beta_i}\psi'_n(k_i a)\psi_n(ka) \right]}{\psi_n(k_i a)\xi'_n(ka) - \frac{\beta k_i}{\beta_i}\psi'_n(k_i a)\xi_n(ka)}.$$

En consecuencia obtenemos el valor buscado de Π_d . Como nos interesa saber qué pasa cerca de la superficie terrestre $r = a$, aproximamos $r \approx a$. Sustituyendo A_n en $\Pi_d(r = a)$ y sumándole $\Pi_0(r = a)$, factorizando y sacando denominador común, obtenemos el potencial apenas afuera de la esfera, $\Pi = \Pi_0(a) + \Pi_d(a)$ que es

$$\Pi = \frac{-i}{kab} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\mu) \left[\frac{\xi_n(kb)\psi_n(k_i a) [\psi_n(ka)\xi'_n(ka) - \xi_n(ka)\psi'_n(k_i a)]}{\psi_n(k_i a)\xi'_n(ka) - \frac{\beta k_i}{\beta_i}\psi'_n(k_i a)\xi_n(ka)} \right]. \quad (1.21)$$

Sin embargo, esta expresión se puede simplificar sustancialmente usando el Wronskiano y la aproximación del conductor perfecto.

1.5. Wronskianos y la identidad de Abel

Supongamos una ecuación de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Supongamos $y_1(x)$ y $y_2(x)$ soluciones, por lo tanto se cumple

$$\begin{aligned} y_1(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) - y_2(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) &= 0 \\ &= (y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0. \end{aligned}$$

Llamémosle $W = y_1y_2' - y_2y_1'$ que ya sabemos que es el Wronskiano, por lo tanto $W' = y_1y_2'' - y_2y_1''$. Consecuentemente la ecuación de arriba se convierte en $W' + p(x)W = 0$, cuya solución es trivial,

$$\boxed{W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}} \quad (1.22)$$

A ésta se conoce como la identidad de Abel para calcular Wronskianos. Por supuesto necesitamos conocer la ecuación que cumplen nuestras funciones para poderlo encontrar. Sabemos que las funciones esféricas de Bessel $j_n(x)$, Neumann $y_n(x)$ y las dos funciones esféricas de Hankel $h_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{2}{z}y' + \left(1 - \frac{n(n+1)}{z^2}\right)y = 0, \quad (1.23)$$

donde las funciones esféricas se pueden escribir como

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+1/2}(x), \quad y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}Y_{n+1/2}(x), \quad h_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{n+1/2}(x).$$

En nuestro problema utilizamos otras funciones semejantes: $\xi_n(x)$ y $\psi_n(x)$ (ver (1.19)). Estas últimas se pueden escribir como

$$\psi_n(x) = j_n(x)x, \quad \xi_n(x) = h_n^{(2)}(x)x.$$

Despejando $j_n(x)$ o $h_n^{(2)}(x)$ y sustituyendo en la ecuación diferencial (1.23) obtenemos la ecuación diferencial que satisfacen $\psi_n(x)$ y $\xi_n(x)$,

$$y'' + \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right)y = 0. \quad (1.24)$$

Podemos ver que el coeficiente de y' es cero, es decir $p(x) = 0$. Consecuentemente de (1.22), se tiene que el Wronskiano es constante, es decir: $\psi_n(x)\zeta_n'(x) - \zeta_n(x)\psi_n'(x) = \text{cte}$. Entonces, evaluando en cualquier valor de x , por ejemplo en uno, obtenemos

$$\psi_n(x)\zeta_n'(x) - \zeta_n(x)\psi_n'(x) = -i. \quad (1.25)$$

Retomando la ecuación (1.21) identificamos el Wronskiano que acabamos de encontrar y lo sustituimos por $-i$, obteniendo

$$\Pi = \frac{-1}{kab} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\mu) \left[\frac{\xi_n(kb)\psi_n(k,a)}{\psi_n(k,a)\xi_n'(ka) - \frac{\beta k_i}{k\beta_i}\psi_n'(k,a)\xi_n(ka)} \right]. \quad (1.26)$$

Continuemos simplificando esta expresión con la aproximación del conductor perfecto.

1.6. Aproximación del Conductor Perfecto

En la deducción de las ecuaciones, vimos que las constantes de los medios están dadas por

$$\gamma = \frac{iw\mu}{c}; \quad \beta = \frac{iw\epsilon}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c}; \quad k^2 = -\beta\gamma = -\frac{iw\mu}{c^2}(4\pi\sigma + i\epsilon w).$$

Supongamos que la Tierra es un conductor perfecto, por lo que $\sigma_i \rightarrow \infty$. Debido a que la Tierra está rodeada por un dieléctrico la conductividad afuera debe ser cero. Veamos qué pasa con la fracción k/β afuera y adentro de la esfera

$$\frac{k}{\beta} = \frac{w\sqrt{\mu\epsilon}}{i\epsilon w} = \text{cte}; \quad \frac{k_i}{\beta_i} = \frac{\sqrt{w^2\mu_i\epsilon_i - 4\pi\sigma_i iw\mu_i}}{4\pi\sigma_i + i\epsilon_i w}.$$

Tomando el límite cuando $\sigma_i \rightarrow \infty$ en el segundo caso se sigue que

$$\frac{k_i}{\beta_i} \approx \frac{\text{cte}}{\sqrt{\sigma}} \approx 0.$$

Por lo tanto, el denominador de (1.26) se simplifica considerablemente, obteniendo

$$\Pi = -\frac{1}{kab} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\mu) \left[\frac{\xi_n(kb)}{\xi_n'(ka)} \right]. \quad (1.27)$$

Éste es el potencial deseado cuando nos encontremos cerca de la superficie terrestre, y cuando consideramos a la Tierra un conductor perfecto. Desafortunadamente, la convergencia de esta serie es muy lenta y no resulta útil para explicar los datos obtenidos experimentalmente. Además, resulta un tanto complicado extraer la física de esta expresión matemática. En los capítulos 2,3 y 4 veremos cómo y qué ocurre al aplicarle la transformada de Watson a esta solución.

Capítulo 2

La transformada de Watson de Π

La transformada de Watson consiste en convertir una suma infinita a una integral en el plano complejo. Al evaluar esta integral compleja se puede convertir en otra suma infinita que converge más rápidamente o resulta más conveniente para nuestro problema. Hagamos esta transformada para nuestro potencial Π obtenido en el capítulo anterior.

Primero queremos escribir (1.27) como los residuos de una integral compleja, fijémonos en

$$\int s \frac{P_{s-1/2}(-\mu)\xi_{s-1/2}(kb)}{\cos(s\pi)\xi'_{s-1/2}(ka)} ds; \quad (2.1)$$

integral que, dado un contorno apropiado, podemos evaluar usando el Teorema de los Residuos de Cauchy¹. Como los polos de un integrando de la forma $f(z)/g(z)$ están en $g(z_i) = 0$ y sus residuos se calculan como $f(z_i)/g'(z_i)$, el teorema dice que

$$\int_C \frac{f(z)}{g(z)} = 2\pi i \sum_i \frac{f(z_i)}{g'(z_i)}, \quad (2.2)$$

siempre y cuando $g'(z_i) \neq 0$ y $f(z_i) \neq 0$. Dado que el coseno se anula en $s = n + 1/2$, con n entero, la suma de los residuos de la integral (2.1) en

¹ $\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum \text{Residuos}(f(z))$ con C un camino cerrado y orientado positivos y f analítica sobre y dentro de C excepto en los polos.

$s = n + 1/2$ son

$$\sum_n (n + 1/2) \frac{P_n(-\mu) \xi_n(kb)}{\pi \sin(\pi(n + 1/2)) \xi'_n(ka) + 0}.$$

Aplicando la identidad $P_n(\mu) = (-1)^n P_n(-\mu)$, que es válida para n entero², y tomando en cuenta el hecho de que $\sin(\pi(n + 1/2)) = (-1)^n$, la suma de los residuos se simplifica a

$$\sum_n \frac{1}{2\pi} (2n + 1) P_n(\mu) \frac{\xi_n(kb)}{\xi'_n(ka)}.$$

Que es prácticamente igual a (1.27) excepto por constantes. Es por esto que vamos a estudiar detalladamente la integral (2.1). Se encontrará un contorno apropiado para la integral, el cual evidentemente debe encerrar los polos $s = n + 1/2$. Al evaluar la integral sobre este contorno, obtendremos automáticamente otra serie infinita para nuestro potencial.

2.1. El contorno

Para poder encontrar un contorno apropiado, tendremos que usar ciertas propiedades del integrando (1.27), como lo es la paridad. Tomemos la identidad $P_n(z) = P_{-n-1}(z)$ (Ver referencia [26, pag.312]), por lo tanto $P_{s-1/2}(-\mu) = P_{-s-1/2}(-\mu)$, entonces, $P_{s-1/2}(-\mu)$ es par en s . Además, haciendo uso de la identidad

$$H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(x), \quad (2.3)$$

y por como definimos ξ_n en (1.19), obtenemos

$$\frac{\xi_{s-1/2}(kb)}{\xi'_{s-1/2}(ka)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi kb}{2}} H_s^{(2)}(kb)}{\sqrt{\frac{\pi ka}{2}} H_s^{(2)\prime}(ka) + \frac{\pi}{\sqrt{8\pi ka}} H_s^{(2)}(ka)}. \quad (2.4)$$

Cambiando s por $-s$, usando la relación (2.3) y usando la derivada respecto a x de (2.3), se sigue que

$$\frac{\xi_{-s-1/2}(kb)}{\xi'_{-s-1/2}(ka)} = \frac{e^{-i\nu\pi} \xi_{s-1/2}(kb)}{e^{-i\nu\pi} \xi'_{s-1/2}(ka)} = \frac{\xi_{s-1/2}(kb)}{\xi'_{s-1/2}(ka)}.$$

²Esta identidad se puede obtener de la fórmula de Rodrigues usando el binomio de Newton, derivando y aplicando regla de la cadena.

En consecuencia la fracción $\frac{\xi_{s-1/2}(kb)}{\xi'_{s-1/2}(ka)}$ es par respecto a s . Como el coseno es par, las funciones de Legendre son par, la fracción es par y la función s es impar, todo el integrando es impar.

Ahora bien, probemos otras dos propiedades importantes, definamos $\eta_n(x)$ como

$$\eta_{s-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_s^{(1)}(x).$$

Ya sabemos que $\eta_{s-1/2}$ y $\xi_{s-1/2}$ son soluciones a (1.24), por consiguiente, su Wronskiano es constante. Evaluando para alguna x , por ejemplo en uno, obtenemos

$$\eta'_{s-1/2}(x)\xi_{s-1/2} - \eta_{s-1/2}(x)\xi'_{s-1/2} = 2i. \quad (2.5)$$

Dado que supusimos que apenas estamos afuera de la superficie terrestre $x = ka$, donde a es el radio de la Tierra y $k^2 = -\beta\gamma = \frac{w^2\mu\epsilon}{c^2}$, x es real y positivo. Las derivadas de $\eta_{s-1/2}(x)$ y $\xi_{s-1/2}(x)$ están dadas por

$$\eta'_{s-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_s^{(1)'}(x) + \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} H_s^{(1)}(x), \quad (2.6)$$

$$\xi'_{s-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_s^{(2)'}(x) + \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} H_s^{(2)}(x), \quad (2.7)$$

donde (2.7) es la función con la que nos encontramos en la integral compleja. Además, se sabe que las funciones de Hankel cumplen que

$$H_s^{(1)}(x) = J_s(x) + iY_s(x) \quad H_s^{(2)}(x) = J_s(x) - iY_s(x).$$

Entonces, si s es real y positivo, las funciones de Bessel de primer y segundo orden $J_s(x)$, $Y_s(x)$ son reales. Sustituyendo $H_s^{(1)}(x)$ y $H_s^{(2)}(x)$ en (2.6) y (2.7) respectivamente, resulta evidente que $\eta'_{s-1/2}(x)$ y $\xi'_{s-1/2}(x)$ son complejos conjugados. Es decir, que si uno de los dos se hace cero el otro también, pero esto no puede ocurrir ya que (2.5) se cumple para cualquier x . Por lo tanto, $\xi'_{s-1/2}(x)$ nunca es cero para x y s positivas (reales).

De manera similar se puede probar que, si s es puramente imaginario, $\xi'_{s-1/2}(x)$ es complejo conjugado de $\eta_{-s-1/2}(x)$. Además, no es difícil probar que $\eta_{-s-1/2}(x) = e^{s\pi i} \eta'_{s-1/2}(x)$. Nuevamente, si uno se anula, el otro también, pero eso no puede ocurrir por (2.5). Por lo tanto, $\xi'_{s-1/2}(x)$ nunca se anula

para s positivas o puramente imaginarias (x positiva). En otras palabras, $\xi'_{s-1/2}(x)$ no contribuye con ningún polo en el eje real positivo ni en el eje imaginario del plano complejo s .

Con lo anterior en mente, ya podemos elegir un buen contorno. Sabemos que debe de encerrar los polos $s = n + 1/2$, que son los polos que nos dan el potencial como la suma infinita original. Además, sabemos que el integrando es impar y que la función $\xi'_{s-1/2}(ka)$ no se anula en el eje imaginario ni en la parte positiva del eje real, por lo que no hay polos del integrando ni en el eje imaginario ni en el eje real excepto por los del coseno. Una buena opción resulta un semicírculo de radio R ($R \rightarrow \infty$) cerrado y centrado en el origen con parte real positiva, como el contorno Cr de la figura (2.1).

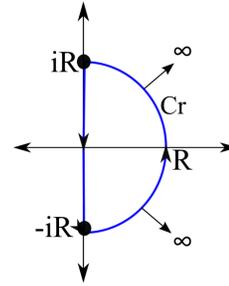


Figura 2.1: Contorno en Plano s

Como el integrando es una función impar de s , la integral sobre el eje imaginario se anula: $\int_{-iR}^{iR} = 0$. Resulta que la integral sobre el semicírculo también se anula cuando $R \rightarrow \infty$. Para corroborar esto tendremos que emplear desarrollos asintóticos del integrando para $s \gg 1$:

2.1.1. La aproximación de Laplace

En esta sección encontraremos las representaciones asintóticas para $s \gg 1$ de las funciones en el integrando, es decir, de las funciones de Legendre y las funciones de Hankel de segundo orden. Una representación asintótica nos da el valor aproximado de una función para cuando uno de sus parámetros o variables son muy grandes. El objetivo de esto es probar que la integral sobre el semicírculo tiende a cero conforme el radio tiende a infinito. Empecemos tomando una representación integral de las funciones de Legendre conocida como primera integral de Laplace (Ver referencia [25, pag.157]):

$$P_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]^n d\phi.$$

La cual se puede reescribir como

$$P_n(\cos(\theta)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{n \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]} d\phi. \quad (2.8)$$

Para encontrar la aproximación deseada usaremos una versión más general del método de Laplace. El método empleado será el del descenso más rápido, el cual se explica con más detalle en el capítulo 3 y se puede consultar en las referencias [18] o [4]. Llamemos $h(\phi) = \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]$, el método nos pide encontrar los puntos críticos de $h(\phi)$, derivemos

$$h'(\phi) = \frac{-i \sin(\theta) \sin(\phi)}{\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)};$$

$$h''(\phi) = \frac{-i \sin(\theta) \cos(\phi)}{\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)} + \frac{\sin^2(\theta) \sin(\phi)}{[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]^2}.$$

Para que sea crítico, requerimos que $h'(\phi_0) = 0$, es decir $\sin(\phi_0) = 0$ con ϕ entre 0 y π , lo cual implica que $\phi_0 = 0, \pi$ son los dos puntos críticos dentro de los límites de integración. Mas vale que tomemos en cuenta los dos posibles puntos críticos $\phi_0 = 0, \pi$. Para hacer esto, requerimos separar la integral (2.8) en dos, de manera que la primera integral tenga un punto crítico en $\phi_0 = 0$ y la otra lo tenga en $\phi_0 = \pi$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{n \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]} d\phi + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi e^{n \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]} d\phi.$$

Vamos a aplicar el método de del descenso más rápido a cada una. Empecemos por la primera, desarrollamos $h(\phi)$ en serie de Taylor a segundo orden alrededor del punto crítico $\phi = 0$,

$$h(\phi) \approx h(0) + h'(0)\phi + \frac{h''(0)\phi^2}{2}.$$

Como $h'(0) = 0$ por ser crítico, podemos hacer el siguiente cambio de variable,

$$h(\phi) - h(0) \approx \frac{h''(0)\phi^2}{2} = -\tau^2, \quad (2.9)$$

con $\tau^2 > 0$, ya que $h''(0) < 0$ por ser un máximo en el camino de descenso más rápido. Sustituyendo $h(\phi) = h(0) - \tau^2$ en la primer integral se tiene que

$$\frac{1}{\pi} e^{n \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]} \int_0^\infty e^{-n\tau^2} \frac{d\phi}{d\tau} d\tau.$$

La mayor contribución a la integral es alrededor del máximo; el resto es despreciable. En consecuencia se nos permite cambiar el límite superior a infinito. Usando propiedades del logaritmo y que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ podemos reescribirlo como

$$\frac{1}{\pi} e^{in\theta} \int_0^{\pi/2} e^{-n\tau^2} \frac{d\phi}{d\tau} d\tau. \quad (2.10)$$

La derivada $d\phi/d\tau$ la podemos obtener de (2.9) y es

$$\phi = \tau \sqrt{\frac{-2}{h''(0)}} = \tau \sqrt{\frac{2(\cos(\theta) + i \sin(\theta))}{i \sin(\theta)}} \Rightarrow \frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{\frac{2(\cos(\theta) + i \sin(\theta))}{i \sin(\theta)}}.$$

Sustituyendo en (2.10), obtenemos

$$\frac{1}{\pi} e^{in\theta} \sqrt{\frac{2(\cos(\theta) + i \sin(\theta))}{i \sin(\theta)}} \int_0^{\infty} e^{-n\tau^2} d\tau = \frac{1}{\pi} e^{i(n+1/2)\theta} \sqrt{\frac{2}{i \sin(\theta)}} \int_0^{\infty} e^{-n\tau^2} d\tau.$$

La integral es la mitad de una Gaussiana y su valor es $\sqrt{\pi/n}/2$, simplificando queda

$$\frac{1}{2\sqrt{i}} e^{i(n+1/2)\theta} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin(\theta)}} = \frac{1}{2} e^{i[\theta(n+1/2)-\pi/4]} \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin(\theta)}},$$

donde usamos que $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, por lo tanto,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{n \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]} d\phi \approx \frac{1}{2} \frac{e^{i[\theta(n+1/2)-\pi/4]}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sin(\theta)}.$$

De manera completamente análoga, usando a $\phi = \pi$ como el punto crítico, obtenemos la segunda integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{n \log[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \cos(\phi)]} d\phi \approx \frac{1}{2} \frac{e^{-i[\theta(n+1/2)-\pi/4]}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sin(\theta)}.$$

Sumando ambas integrales, obtenemos la aproximación buscada

$$P_n(\cos(\theta)) \approx \frac{1}{2} \frac{e^{i[\theta(n+1/2)-\pi/4]}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sin(\theta)} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i[\theta(n+1/2)-\pi/4]}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sin(\theta)} = \frac{\cos[\theta(n+1/2) - \pi/4]}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sin(\theta)}.$$

Tomando en cuenta que en verdad buscamos $P_{n-1/2}(-\cos(\theta))$, recorremos la n y cambiamos θ por $\theta-\pi$ ya que $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$, obteniendo finalmente que

$$P_{n-1/2}(-\cos(\theta)) \approx \frac{\cos[n(\pi-\theta) - \pi/4]}{\sqrt{\frac{(n+1/2)\pi}{2}} \sin(\theta)}. \quad (2.11)$$

Notemos que el seno se quedó igual, ya que $\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$, y que esta representación sólo es válida cuando $\theta \neq \pi$ por el denominador.

De manera análoga, podemos aproximar $H_n^{(2)}$ usando una integral llamada la integral de Poisson, solo que esta vez podemos emplear una versión más sencilla y análoga al método del descenso más rápido, el método de Laplace el cual nuevamente se puede consultar en [18] o [4]. La integral de Poisson es,

$$J_n(x) = \frac{(\frac{x}{2})^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 \cos(xt)(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Usando el método de Laplace se obtiene

$$J_n(x) \approx \frac{(\frac{x}{2})^n}{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \sqrt{n - \frac{1}{2}}}. \quad (2.12)$$

Además, sabemos que las funciones de Bessel para n complejo se definen como

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (x/2)^{n+2s}}{\Gamma(s+1)\Gamma(1+n+s)},$$

y cuando $n \rightarrow \infty$ y x está fijo el término dominante de la suma es el primero, por lo que

$$J_n(x) \approx \frac{(x/2)^n}{\Gamma(1+n)}. \quad (2.13)$$

Se deja al lector ver que (2.12) y (2.13) son equivalentes conforme $n \rightarrow \infty$, se sugiere graficar en una computadora. Usando la siguiente identidad

$$H_n^{(2)} = \frac{J_{-n}(x) - e^{in\pi} J_n(x)}{-i \sin(n\pi)},$$

la cual es muy facil de probar, podemos sustituir (2.12) o (2.13) para obtener la representación asintótica deseada. Usemos (2.13) por ser más compacta, obteniendo

$$H_n^{(2)} \approx \frac{i}{\sin(n\pi)} \left[\frac{(\frac{x}{2})^{-n}}{\Gamma(1-n)} - \frac{e^{in\pi}(\frac{x}{2})^n}{\Gamma(1+n)} \right]. \quad (2.14)$$

Nótese que el segundo término es despreciable, ya que se trata de una exponencial sobre una función Gamma (factorial), con $Re(n) > 0$, entonces sólo nos quedamos con el primer término. Con estas dos representaciones asintóticas podemos ver cómo se comporta el integrando para $s \gg 1$. Recordando que la integral a resolver es

$$\int_{Cr} s \frac{P_{s-1/2}(-\mu)\xi_{s-1/2}(kb)}{\cos(s\pi)\xi'_{s-1/2}(ka)} ds,$$

con Cr como en la figura (2.1). Ya vimos que la parte de la integral sobre el eje imaginario se cancela por la paridad del integrando, sólo queda la parte sobre el semicírculo. Haciendo $s \rightarrow \infty$, podemos sustituir las representaciones que acabamos de encontrar. Fijámonos en (2.4) y sustituyendo el primer término de la representación 2.14, obtenemos que

$$\frac{\xi_{s-1/2}(kb)}{\xi'_{s-1/2}(ka)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi kb}{2}} (\frac{kb}{2})^{-s}}{-s \sqrt{\frac{\pi ka}{2}} (\frac{ka}{2})^{-s-1} + \frac{\pi}{\sqrt{8\pi ka}} (\frac{x}{2})^{-s}} = ka \frac{(b/a)^{1/2-s}}{1/2-s}.$$

Multiplicando por (2.11), por s y dividiendo entre el coseno, obtenemos la representación asintótica de todo el integrando cuando $s \rightarrow \infty$

$$ska \frac{(b/a)^{1/2-s}}{1/2-s} \frac{\cos[s(\pi-\theta) - \pi/4]}{\cos(s\pi) \sqrt{\frac{(s+1/2)\pi}{2}} \sin(\theta)} \approx \frac{(b/a)^{1/2-s}}{\sqrt{s}},$$

lo cual evidentemente se va a cero conforme $s \rightarrow \infty$. Entonces, la integral sobre el semicírculo del contorno Cr es cero. Dicho de manera más formal siempre podemos acotar por arriba el integrando sobre el semicírculo con una función que tienda a cero conforme $R \rightarrow \infty$, y después aplicar el lema de Jordan (Ver [3]) para obtener que la integral sobre el semicírculo es cero. Dicho ésto, finalmente podemos decir que la integral sobre todo el contorno Cr es cero, es decir

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \int_{Cr} s \frac{P_{s-1/2}(-\mu)\xi_{s-1/2}(kb)}{\cos(s\pi)\xi'_{s-1/2}(ka)} ds = 0. \quad (2.15)$$

Conforme el radio R^3 del semicírculo Cr de la figura (2.1) se va infinito.

2.2. La transformada

Ya se vio en (2.15) que la integral sobre el contorno elegido es cero. Usando el Teorema de los Residuos de Cauchy, podemos reescribir la integral como la suma de los residuos, con sus correspondientes constantes,

$$\int_C \frac{2\pi s}{kab} \frac{P_{s-1/2}(-\mu)\xi_{s-1/2}(kb)}{\cos(s\pi)\xi'_{s-1/2}(ka)} ds = 2\pi i \sum \text{Residuos} = 0.$$

Como la integral es cero, entonces $\sum \text{Residuos} = 0$. Usando (2.2) para calcular los residuos, se obtiene que

$$\frac{1}{kab} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)P_n(\mu) \frac{\xi_n(kb)}{\xi'_n(ka)} + \frac{2\pi}{kab} \sum_{\nu} \frac{\nu P_{\nu-1/2}(-\mu)\xi_{\nu-1/2}(kb)}{\cos(\nu\pi) \left[\frac{\partial \xi'_{s-1/2}(ka)}{\partial s} \right]_{s=\nu}} = 0,$$

donde la primer suma se debe a los ceros del coseno, y la segunda se refiere a los ceros de $\xi'_{s-1/2}(ka)$, contabilizados por ν . Si nos fijamos bien, tenemos la suma infinita (1.27) con un signo menos del lado izquierdo, lo que nos lleva automáticamente a

$$\boxed{\Pi = \frac{2\pi}{kab} \sum_{\nu} \frac{\nu P_{\nu-1/2}(-\mu)\xi_{\nu-1/2}(kb)}{\cos(\nu\pi) \left[\frac{\partial \xi'_{s-1/2}(ka)}{\partial s} \right]_{s=\nu}}}. \quad (2.16)$$

Y he aquí la transformada de Watson; expresamos el potencial como otra suma infinita. Sólo queda un gran problema por resolver, no sabemos donde están los ceros de $\xi'_{s-1/2}(ka)$ como función de s , y la suma esta sumada sobre estos ceros. Si no conocemos esos ceros, no podemos hacer nada con la nueva solución obtenida, así que habrá que encontrarlos.

Antes de pasar al siguiente capítulo, es importante notar que se pudo hacer la transformada de Watson gracias a que nuestra solución contaba con singularidades, es decir los ceros de $\xi'_{s-1/2}(ka)$ como función de s . A su vez, estas singularidades surgen de la función de Green del problema en la esfera, como se puede ver en la sección 1.4 del primer capítulo.

³No confundir con la R usada en la ec. de Helmholtz.

Capítulo 3

Los ceros de ξ

Ahora vamos a estudiar los ceros de $\xi'_{s-1/2}(ka)$. Para esto, encontraremos representaciones asintóticas de unas funciones muy parecidas a $H_n^{(1)}(x)$ y $H_n^{(2)}(x)$ por el método del descenso rápido. Con ayuda de estas representaciones, encontraremos el valor aproximado de los ceros de $\xi'_{s-1/2}(ka)$, lo cual nos ayudará a estudiar la nueva solución obtenida mediante la transformada de Watson en el capítulo anterior. Empecemos derivando una representación integral de las funciones de Hankel que nos resultará muy útil.

3.1. Otra representación integral de las funciones de Hankel

Partamos de las integrales Sommerfeld, las cuales se pueden encontrar en [21, pag.89],

$$H_v^{(1)}(x) = \frac{e^{-iv\pi/2}}{\pi} \int_{C_1} e^{iv\alpha} e^{ix\cos(\alpha)} d\alpha, \quad H_v^{(2)}(x) = \frac{e^{-iv\pi/2}}{\pi} \int_{C_2} e^{iv\alpha} e^{ix\cos(\alpha)} d\alpha.$$

Una posibilidad de C_1 y C_2 se ilustra en la figura (3.1).

Ahora bien, estas integrales se pueden escribir de distintas maneras. Uno siempre puede cambiar el sistema de referencia haciendo los cambios de variables apropiados, lo cual se verá reflejado en rotaciones, traslaciones o deformaciones de los contornos vistos en el nuevo sistema de referencia.

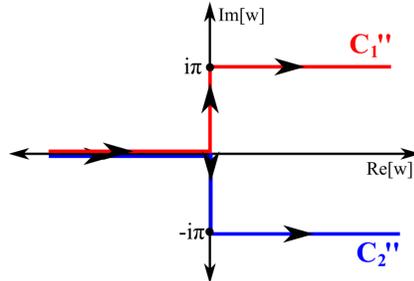


Figura 3.2: Contornos de Sommerfeld trasladados y rotados en plano w

3.2. Aplicando el método del descenso más rápido

Es imperativo que el lector esté familiarizado con el método. Quien no esté familiarizado con el método referirse a las referencias [4], [16], [15] o [18] como *The Method of Steepest Descent*. A continuación, daremos un bosquejo muy simplificado del método. Éste se utiliza para aproximar integrales de la forma

$$\int_C e^{\lambda h(z)} dz,$$

con C un contorno en el plano complejo y $\lambda \gg 1$. La idea básica consiste en deformar el contorno C , de modo que se concentren las contribuciones más importantes a la integral cerca de un punto. Después, se desarrolla en serie de Taylor alrededor de ese punto y se resuelve la integral. Para ilustrar el procedimiento, separemos $h(z)$ en parte real y parte imaginaria

$$h(z) = R(z) + iI(z).$$

Queremos concentrar las contribuciones más importantes a la integral cerca de un punto. Como $h(z)$ es el argumento de la exponencial, $I(z)$ corresponde a oscilaciones del integrando que por ahora ignoraremos. La mayor contribución a la integral viene del máximo de $R(z)$ sobre el contorno. Notemos que $R(z)$ no tiene un máximo absoluto ya que $h(z)$ es analítica y consecuentemente $R(z)$ es armónica (ver [3] o [18]). Por esto, resulta conveniente que el contorno pase por el punto silla de $R(z)$ ¹; a partir de este

¹Los puntos silla corresponden a puntos estacionarios, es decir, puntos z_0 dados por $h'(z_0) = 0$ y $h''(z_0) \neq 0$

punto, el contorno debe tomar el camino de descenso más rápido. Por la analiticidad de las funciones, se puede ver que este camino corresponde a $I(z) = \text{cte}$ ², lo cual automáticamente nos evita el problema de las oscilaciones del integrando. Una vez identificado el camino de descenso rápido, se desarrolla $h(z)$ en serie de Taylor alrededor del punto silla o estacionario z_0 ; se sustituye en la integral y se resuelve. Nótese que entre mayor sea λ , mejor será la aproximación.

Apliquemos el método a (3.1). Cambiando de variable para poder factorizar x ³

$$n = x \cosh(\alpha + i\beta) = x \cosh(\gamma).$$

Siendo n un valor complejo arbitrario. Es suficiente tomar la región con $-\infty < \alpha < \infty$ y $0 < \beta < \pi$. Ya que esta región, al aplicarle el \cosh , se mapea a todo el plano complejo. Aplicando el cambio de variable obtenemos que el argumento de la exponencial en (3.1) es

$$x \sinh(w) - xw \cosh(\gamma).$$

Queremos deformar nuestro contorno de integración de modo que pase por los puntos estacionarios de $\sinh(w) - w \cosh(\gamma)$. Derivando respecto a w e igualando a cero

$$\cosh(w) - \cosh(\gamma) = 0.$$

La primer solución es trivial $w = \gamma$. Además, el \cosh es par entonces $w = -\gamma$ también es solución. Por lo tanto, los puntos estacionarios están en $\pm\gamma$. Usando identidades hiperbólicas, se puede ver que $\pm\gamma + n2\pi i$ es solución. No se llega a nada útil tomando $n \neq 0$.

El contorno no sólo tiene que pasar por los puntos estacionarios que acabamos de encontrar, también debe evitar oscilaciones y garantizar el descenso más rápido. Esto se logra tomando

$$\text{Im} [x \sinh(w) - xw \cosh(\gamma)] = \text{cte},$$

donde Im se refiere a la parte imaginaria. Además, como pasa por el punto estacionario $\pm\gamma$, esa constante debe de valer $\text{cte} = \text{Im} [x \sinh(\pm\gamma) - (\pm\gamma)x \cosh(\pm\gamma)]$.

²Se debe de tener cuidado ya que también corresponde al camino de ascenso más rápido.

³No confundir estas nuevas variables con las constantes correspondientes al medio del primer capítulo.

Igualando obtenemos

$$\boxed{\operatorname{Im} [\sinh(w) - \cosh(\gamma)w] = \pm \operatorname{Im} [\sinh(\gamma) - (\gamma) \cosh(\gamma)]}, \quad (3.2)$$

donde se usó que el cosh es par y el sinh es impar para factorizar los signos. Esta ecuación nos va a definir los contornos de integración. Resulta evidente que esta es una ecuación trascendental y que no es trivial. Para obtener los contornos podemos seguir dos caminos, analizar el álgebra a mano o resolver el problema numéricamente. Nosotros optaremos por resolverlo numéricamente ya que resulta más pedagógico⁴.

3.2.1. Aplicando el método de Newton

El método de Newton, en su forma más sencilla, nos ayuda a encontrar las x que cumplen con $f(x) = 0$. Una manera fácil de deducirlo es a partir del desarrollo en serie de Taylor. Se da un valor inicial x y queremos que $f(x + dx) \approx 0$, entonces $f(x + dx) = f(x) + dx * f'(x) + .. = 0$, por lo tanto, $dx \approx -f(x)/f'(x)$, entonces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3.3)$$

Se da una primera aproximación x_0 y se obtiene x_1 que es más cercana a la buscada y así sucesivamente. De la misma manera, usando el desarrollo en Taylor, se generaliza a mas variables

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - \left[D\vec{f}(\vec{x}_n) \right]^{-1} \vec{f}(\vec{x}_n), \quad (3.4)$$

donde $D\vec{f}(\vec{x}_n)$ es la matriz jacobiana. En nuestro problema queremos encontrar las w que satisfacen (3.2) usando el método de Newton. Como w es compleja la podemos pensar como una función de dos variables. Empecemos renombrando la ecuación (3.2). El lado izquierdo lo llamaremos $f(w, \gamma)$, y el lado derecho simplemente lo llamaremos $g(\gamma)$. Escribamos $f(w, \gamma)$ explícitamente. Tomando $w = u + iv$ y $\gamma = \alpha + i\beta$ nos permite escribir

$$f(w, \gamma) = \operatorname{Im} [\sinh(u + iv) - (u + iv) \cosh(\alpha + i\beta)].$$

Aplicando directamente las identidades hiperbólicas:

$$\sinh(a + b) = \sinh(a) \cosh(b) + \sinh(b) \cosh(a), \quad (3.5)$$

$$\cosh(a + b) = \sinh(a) \sinh(b) + \cosh(a) \cosh(b), \quad (3.6)$$

⁴Para el tratamiento algebraico se puede revisar [25] pg. 262

y usando las identidades $\cosh(ix) = \cos(x)$ y $\sinh(ix) = i \sin(x)$, obtenemos que $f(w, \gamma)$ es

$$\text{Im} [\sinh(u) \cos(v) + i \cosh(u) \sin(v) - (u + iv) [\cosh(\alpha) \cos(\beta) + i \sinh(\alpha) \sin(\beta)]].$$

En donde ya podemos tomar la parte imaginaria, por lo que

$$f(w, \gamma) = \cosh(u) \sin(v) - v \cosh(\alpha) \cos(\beta) - u \sinh(\alpha) \sin(\beta),$$

lo cual implica que la ecuación (3.2) se puede escribir como

$$\cosh(u) \sin(v) - v \cosh(\alpha) \cos(\beta) - u \sinh(\alpha) \sin(\beta) = \pm g(\gamma).$$

Nótese que no se escribió $g(\gamma)$ explícitamente. Para el método de Newton necesitamos una función igualada a cero. Llamémosla F_+ para el punto estacionario $w = \gamma$ y F_- para el punto estacionario $w = -\gamma$,

$$F_+(w, \gamma) = \cosh(u) \sin(v) - v \cosh(\alpha) \cos(\beta) - u \sinh(\alpha) \sin(\beta) - g(\gamma) = 0, \quad (3.7)$$

$$F_-(w, \gamma) = \cosh(u) \sin(v) - v \cosh(\alpha) \cos(\beta) - u \sinh(\alpha) \sin(\beta) + g(\gamma) = 0. \quad (3.8)$$

Recordando de (3.2) que

$$g(\gamma) = \text{Im} [\sinh(\gamma) - (\gamma) \cosh(\gamma)].$$

Estas son las ecuaciones que se tienen que resolver numéricamente. Se pueden tomar dos caminos. Emplear el método de Newton en dos variables (u, v) o tomar una variable como constante (v) y emplear el método de Newton sobre la otra variable (u). Ambos funcionan, aquí emplearemos el segundo camino. Se eligió el segundo para que el programa fuera más legible. Veamos qué resultados arroja el programa. El código de programación y detalles del funcionamiento del programa se pueden ver en el apéndice B. En la figura (3.3) podemos ver los valores complejos de w que satisfacen (3.7) y (3.8) para $\gamma = i\pi/2$. El contorno rojo (el de arriba) es solución a $F1_+$ y el negro (el de abajo) es solución de $F1_-$.

Fijándonos en el contorno rojo, tenemos dos posibles contornos, uno será el de descenso más rápido, y el otro será el de ascenso más rápido. Para saber

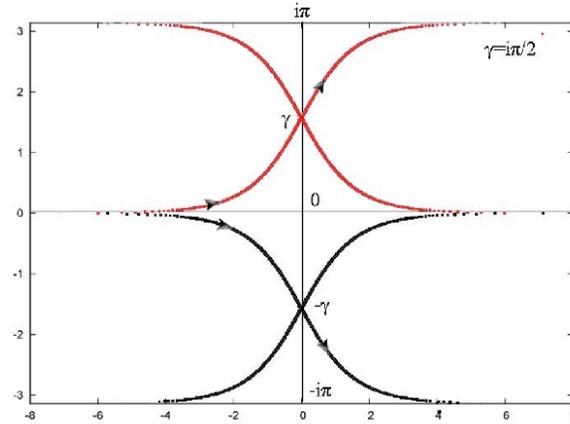


Figura 3.3: Contornos de Integración para $\gamma = i\frac{\pi}{2}$

cual es el correcto hay que encontrar en que contorno $w = \gamma$ es máximo. Lo anterior se puede hacer tomando un valor arbitrario, cercano a $w = \gamma$ sobre cada contorno, evaluar y comparar. Resulta que los contornos de descenso rápido corresponden a los contornos con flechitas de la figura (3.3). Nombramos C_1 al contorno rojo que tiene flechitas y C'_1 al que no. Análogamente para los contornos negros, nombramos C_2 al que tiene flechitas y C'_2 al que no.

Los nombres C_1 y C_2 se usaran para referirse a los contornos de descenso más rápido de (3.7) y (3.8) respectivamente, sin importar el valor de γ usado.

Ya tenemos los contornos de descenso rápido, sólo nos falta hacer el desarrollo en serie de Taylor y evaluar la integral, pero antes habrá que hacerse cargo de otro problema, las bifurcaciones. Veamos de donde surge este problema, para encontrar los ceros buscados será necesario definir dos funciones $S_n^{(1)}$ y $S_n^{(2)}$ como

$$S_n^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{C_1} e^{x \sinh(w) - nw} dw, \quad S_n^{(2)}(x) = -\frac{1}{i\pi} \int_{C_2} e^{x \sinh(w) - nw} dw. \quad (3.9)$$

Nótese que todo lo que hemos hecho hasta ahora, en cuanto al método del descenso más rápido, es completamente análogo para estas dos nuevas

funciones.

Fijándonos en los contornos C_1 y C_2 que acabamos de obtener y en las ecuaciones (3.1) es evidente que $S_n^{(1)}(x) = H_n^{(1)}(x)$ y $S_n^{(2)}(x) = H_n^{(2)}(x)$ para $\gamma = i\pi/2$. De hecho, esto es cierto para un amplio rango de valores de γ ; sin embargo, no resulta cierto para cualquier valor de γ . Al pasar ciertas fronteras, los contornos cambian drásticamente de forma mediante bifurcaciones, lo cual implica que las funciones $S_n^{(1)}$ y $S_n^{(2)}$ serán diferentes ya que el contorno de integración será diferente. Considerando que usaremos las representaciones asintóticas de estas dos funciones para encontrar los ceros, resulta fundamental estudiar estas bifurcaciones antes de finalizar con el método del descenso más rápido.

3.2.2. Bifurcaciones

Al ir variando γ en la ecuación (3.2) los contornos van cambiando de forma. Resulta ser que en el plano γ hay unas fronteras que al ser cruzadas cambian cualitativamente la forma de los contornos. A estos cambios les llamaremos bifurcaciones. En la figura (3.4), tenemos el contorno C_1 y C_1' para distintos valores cercanos de γ .

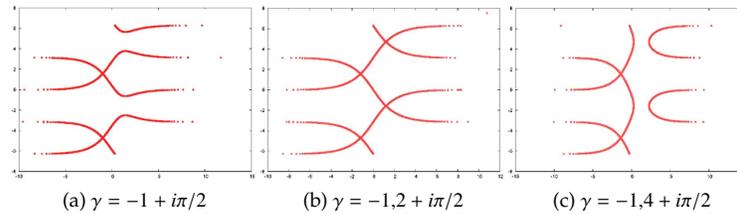


Figura 3.4: Proceso de Bifurcación

La figura (3.4) representa el proceso de bifurcación que sufren los contornos al ir variando γ . La bifurcación ocurre justo cuando los contornos se pegan en algunos puntos, a estos puntos los llamaremos puntos dobles⁵. Por lo tanto, si encontramos las regiones en el plano γ donde aparecen es-

⁵Puntos por los que una curva definida por $F(x, y) = 0$ cruza dos veces. Es decir, tiene dos valores de la pendiente (dy/dx). Para un tratamiento completo sobre puntos dobles consultar [6, vol.2 pag.413]

tos puntos, podremos saber donde ocurren las bifurcaciones.

Una manera de encontrarlos es tomando las parciales igualadas a cero: $F_x = F_y = 0$. Tomemos las parciales de (3.7) (o de (3.8)) igualadas a cero,

$$\begin{aligned} F_u &= \sinh(u) \sin(v) - \sinh(\alpha) \sin(\beta) = 0, \\ F_v &= \cosh(u) \cos(v) - \cosh(\alpha) \cos(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Recordando que $w = u + iv$ y $\gamma = \alpha + i\beta$; $w = \gamma$ es solución trivial. Además, $\sinh(u) \sin(v)$ y $\cosh(u) \cos(v)$ son pares respecto a γ , ya que son productos de funciones pares o impares. Entonces, $w = -\gamma$ también es solución. Finalmente el sin y el cos tienen periodicidad 2π , por lo tanto le podemos sumar múltiplos de 2π a la parte imaginaria de w . Es decir, los puntos dobles están en: $w = \pm\gamma + n2\pi i$, con n entero.

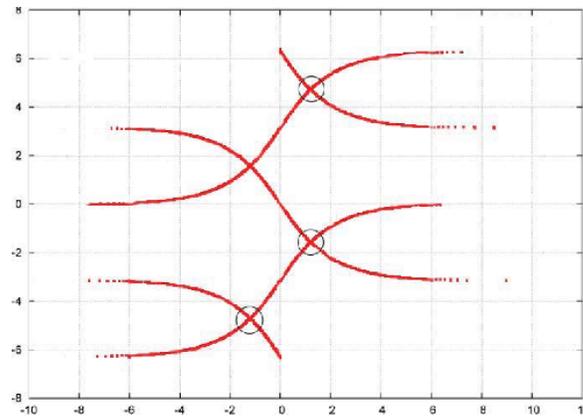


Figura 3.5: Aparición de Tres Puntos Dobles

En la figura (3.5) tenemos $\gamma = -1,2 + i\pi/2$. Es fácil notar que los puntos dobles en esta figura coinciden con los encontrados $w = \pm\gamma + n2\pi i$. Sólo tres de estos puntos dobles nos darán ecuaciones útiles y son justamente los marcados en la figura (3.5). Estos corresponden a

$$\boxed{w = -\gamma \quad w = 2\pi i - \gamma \quad w = \gamma - 2\pi i} \quad (3.10)$$

3.2.3. El plano γ y el plano n/x

Para saber las fronteras de bifurcación en el plano γ hay que saber donde es que aparecen los puntos dobles. Ya sabemos de (3.10) que estos aparecen cuando $w = -\gamma, 2\pi i - \gamma, \gamma - 2\pi i$. Sustituyendo (3.10) respectivamente en las ecuaciones de los contornos (3.2), tomando el signo positivo del lado derecho, es decir C_1^6 , obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} [\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)] &= 0, \\ \operatorname{Im} [\sinh(\gamma) - (\gamma - i\pi) \cosh(\gamma)] &= 0, \\ \operatorname{Im} [2\pi i \cosh(\gamma)] &= 0,\end{aligned}$$

donde nuevamente hicimos uso de la paridad de las funciones hiperbólicas y de las identidades (3.5) y (3.6). Obteniendo su forma explícita con $\gamma = \alpha + i\beta$ y una vez más usando las identidades (3.5) y (3.6) se sigue que

$$\begin{aligned}\cosh(\alpha) \sin(\beta) - \beta \cosh(\alpha) \cos(\beta) - \alpha \sinh(\alpha) \sin(\beta) &= 0, \\ \cosh(\alpha) \sin(\beta) - \beta \cosh(\alpha) \cos(\beta) - \alpha \sinh(\alpha) \sin(\beta) + \pi \cosh(\alpha) \cos(\beta) &= 0, \\ \cosh(\alpha) \cos(\beta) &= 0.\end{aligned}$$

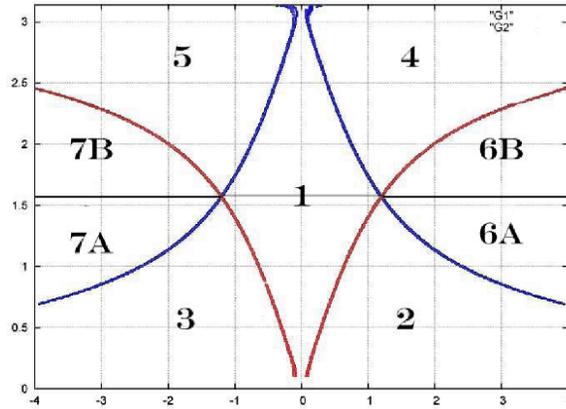


Figura 3.6: Plano γ

La tercer ecuación es trivial, tiene como solución $\beta = \pi/2$ ya que el \cosh nunca se anula y $0 < \beta < \pi$. Las primeras dos ecuaciones las resolvemos

⁶Se puede tomar el otro signo (C_2), pero las ecuaciones serán las mismas.

con el programa usando el método de Newton. Las soluciones están representadas en la figura (3.6). La línea roja que sale del cero es la solución de la primera ecuación, la línea azul que sale de $i\pi$ es solución a la segunda y la línea negra central es la solución de la tercera ecuación. Estas líneas representan la aparición de puntos dobles. Cruzar cualquiera de estas en el plano γ implica una bifurcación de los contornos. Se nombraron las regiones delimitadas por estas líneas en el plano γ . Notemos que no separamos la región 1 en dos. La razón es que al cruzar la línea negra dentro de la región 1 provoca bifurcaciones en otros contornos que no son C_1, C'_1, C_2 ni C'_2 . Recordando que $n = x \cosh(\gamma)$, podemos mapear este plano al plano n/x (figura (3.7)).

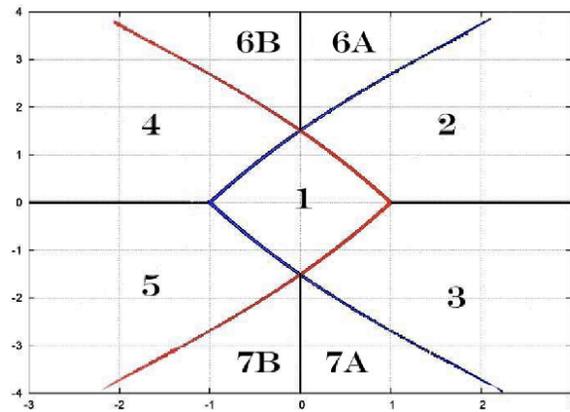


Figura 3.7: Plano n/x

Sólo nos interesan aquellas regiones que cumplan con $-x < n < x$ o $-1 < n/x < 1$, ya que esta será una condición necesaria para la representación asintótica que usaremos más adelante. Se graficaron los contornos para cada región; las gráficas se pueden ver en el apéndice C. Los contornos rojos representan a C_1 y C'_1 y los negros a C_2 y C'_2 .

Veamos cómo cambia $S_n^{(1)}(x)$. En las gráficas del apéndice se ve que en las regiones 1, 3 y 4, C_1 no cambia de forma y que sus puntos finales están en $-\infty$ hasta $+\infty + i\pi$, por lo tanto, en esas regiones $S_n^{(1)}(x) = H_n^{(1)}(x)$. Ahora bien,

veamos qué ocurre si sumamos $H_n^{(1)}(x)$ y $H_n^{(2)}(x)$,

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) &= \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty+i\pi} e^{x \sinh(w)-nw} dw - \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty-i\pi} e^{x \sinh(w)-nw} dw \\ &\Downarrow \\ H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x) &= \frac{1}{i\pi} \int_{\infty-\pi i}^{\infty+\pi i} e^{x \sinh(w)-nw} dw. \end{aligned}$$

Si nos fijamos en las regiones 2 y 6A podemos ver que el contorno C_1 cambia de forma y tiene sus puntos finales en $\infty - \pi i$ hasta $\infty + \pi i$, por lo tanto, en esas regiones $S_n^{(1)}(x) = H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)$. Así pues, multipliquemos $H_n^{(2)}(x)$ por $e^{-2n\pi i}$

$$\begin{aligned} e^{-2n\pi i} H_n^{(2)}(x) &= \frac{-1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty-i\pi} e^{x \sinh(w)-nw-2n\pi i} dw \\ &= \frac{-1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty-i\pi} e^{x \sinh(w+2\pi i)-n(w+2\pi i)} dw = \frac{-1}{i\pi} \int_{-\infty+2\pi i}^{\infty+i\pi} e^{x \sinh(w')-n(w')} dw', \end{aligned}$$

donde usamos que $\sinh(w + 2\pi i) = \sinh(w)$, por lo tanto

$$H_n^{(2)}(x) + e^{-2n\pi i} H_n^{(2)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{-\infty+2\pi i} e^{x \sinh(w)-nw} dw.$$

Y en las regiones 5 y 7B el contorno C_1 se deforma y tiene como puntos finales $-\infty$ hasta $-\infty + 2\pi i$, por lo que en esas regiones $S_n^{(1)}(x) = H_n^{(1)}(x) + e^{-2n\pi i} H_n^{(2)}(x)$. El comportamiento de $S_n^{(1)}(x)$ en las dos regiones faltantes, y de $S_n^{(2)}(x)$ en todas las regiones se obtiene de manera análoga. Juntando todos los resultados obtenemos los cuadros (3.1) y (3.2).

Región	$S_n^{(1)}(x) =$
1, 3, 4	$H_n^{(1)}(x)$
2, 6A	$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)$
5, 7B	$H_n^{(1)}(x) + e^{-2n\pi i} H_n^{(2)}(x)$
6B	$(e^{2n\pi i} + 1)H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)$
7A	$H_n^{(1)}(x) + e^{-2n\pi i}(H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x))$

Cuadro 3.1: Valores de $S_n^{(1)}(x)$

Región	$S_n^{(2)}(x) =$
1, 2, 5	$H_n^{(2)}(x)$
3, 7A	$H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)$
4, 6B	$e^{2n\pi i} H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)$
6A	$H_n^{(2)}(x) - e^{2n\pi i} (H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x))$
7B	$(e^{-2n\pi i} - 1)H_n^{(2)}(x) + H_n^{(1)}(x)$

Cuadro 3.2: Valores de $S_n^{(2)}(x)$

A todo este análisis sobre la deformación de estos contornos en las diferentes regiones se le puede encontrar en la literatura como *Contornos de Debye*. Estos cuadros serán fundamentales para encontrar los ceros buscados, pero antes terminemos con el método del descenso más rápido. Ya sólo nos faltaba desarrollar en serie de Taylor para encontrar la representación asintótica de $S_n^{(1)}(x)$ y $S_n^{(2)}(x)$.

3.2.4. La representación asintótica

Como ya tenemos los contornos correctos para el descenso más rápido y hemos resuelto el tema de las bifurcaciones, podemos continuar aproximando la integral. Empecemos por aproximar $S_n^{(1)}(x)$, recordando la integral

$$S_n^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{C_1} e^{x \sinh(w) - nw} dw = \frac{1}{i\pi} \int_{C_1} e^{x(\sinh(w) - w \cosh(\gamma))}. \quad (3.11)$$

Llamémosle h al argumento de la exponencial sin la x

$$h(w) = \sinh(w) - w \cosh(\gamma).$$

Desarrollando en serie de Taylor a segundo orden alrededor del punto estacionario o punto silla de C_1 , es decir, alrededor de γ tenemos

$$h(w) \approx h(\gamma) + (w - \gamma)h'(\gamma) + (w - \gamma)^2 \frac{h''(\gamma)}{2},$$

pero como γ es punto estacionario, $h'(\gamma) = 0$, por lo tanto

$$h(w) - h(\gamma) \approx (w - \gamma)^2 \frac{h''(\gamma)}{2}.$$

Fijándonos que en la parte izquierda de la ecuación las partes imaginarias se cancelan por la ecuación que cumple C_1 (3.2+), por lo tanto el lado derecho es puramente real. Y como en el camino del descenso más rápido (C_1) $h(\gamma)$ es máximo, entonces, $h''(\gamma) < 0$. Con esto podemos definir una nueva variable como

$$-\tau^2 = h(w) - h(\gamma) \approx (w - \gamma)^2 \frac{h''(\gamma)}{2}. \quad (3.12)$$

Notemos que $h''(\gamma) = \sinh(\gamma)$. Despejando w y derivando respecto a τ se tiene que

$$w = \tau \sqrt{\frac{-2}{\sinh(\gamma)}} + \gamma \quad \frac{dw}{d\tau} = \sqrt{\frac{-2}{\sinh(\gamma)}}.$$

De la ecuación (3.12), $h(w) \approx -\tau^2 + h(\gamma)$, sustituyendo en la integral (3.11), obtenemos

$$S_n^{(1)}(x) \approx \frac{1}{i\pi} \int_{\tau_a}^{\tau_b} e^{x(-\tau^2 + h(\gamma))} \frac{dw}{d\tau} d\tau = \frac{1}{i\pi} \sqrt{\frac{-2}{\sinh(\gamma)}} e^{xh(\gamma)} \int_{\tau_a}^{\tau_b} e^{-x\tau^2} d\tau,$$

donde τ_a y τ_b corresponden a los valores de τ en los puntos iniciales y finales del contorno C_1 . Estos no son de gran importancia, por lo general se toman los límites de integración en $-\infty$ y ∞ , lo cual es válido por que la exponencial decae muy rápido alrededor de $w = \gamma$ ($\tau = 0$) (porque elegimos el contorno de descenso más rápido y porque $x \gg 1$). Por lo tanto, queda

$$S_n^{(1)}(x) \approx \frac{1}{i\pi} \sqrt{\frac{-2}{\sinh(\gamma)}} e^{xh(\gamma)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau^2} d\tau.$$

La integral de la derecha es una gaussiana con solución $\sqrt{\pi/x}$, sustituyendo $h(\gamma)$, obtenemos

$$S_n^{(1)}(x) \approx \frac{1}{i\pi} \sqrt{\frac{-2\pi}{x \sinh(\gamma)}} e^{x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma))}.$$

Usando que el $\sinh(x) = -i \sin(ix)$, y que el \sin es impar podemos simplificar a

$$S_n^{(1)}(x) \approx \frac{1}{i\sqrt{-i}} \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin(-i\gamma)}} e^{x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma))}.$$

Y como $i\sqrt{-i} = e^{i\pi/2}e^{-i\pi/4} = e^{i\pi/4}$, entonces finalmente obtenemos que

$$\boxed{S_n^{(1)}(x) \approx \frac{e^{x(\sinh(\gamma)-\gamma \cosh(\gamma))-i\pi/4}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} \sin(-i\gamma)}; \quad S_n^{(2)}(x) \approx \frac{e^{-x(\sinh(\gamma)-\gamma \cosh(\gamma))+i\pi/4}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} \sin(-i\gamma)}}. \quad (3.13)$$

El procedimiento para obtener $S_n^{(2)}(x)$ es completamente análogo, sólo que aplicado sobre C_2 y usando el punto estacionario correspondiente $w = -\gamma$. Éstas son las representaciones asintóticas buscadas para $x \gg 1$, si se desea mayor precisión se pueden tomar más términos de la serie de Taylor. Es necesario mencionar que estas integrales sólo convergen cuando $x > |n|$ ⁷. Usando que $n = x \cosh(\gamma)$, podemos reescribir estas ecuaciones como

$$S_n^{(1)}(x) \approx \frac{e^{x \sinh(\gamma) - n\gamma - i\pi/4}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} \sin(-i\gamma)} \quad S_n^{(2)}(x) \approx \frac{e^{-x \sinh(\gamma) + n\gamma + i\pi/4}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} \sin(-i\gamma)}.$$

Considerando a n y x como variables independientes podemos derivarlas obteniendo

$$\frac{\partial S_n^{(1)}(x)}{\partial n} \approx -\gamma S_n^{(1)}(x), \quad \frac{\partial S_n^{(2)}(x)}{\partial n} \approx \gamma S_n^{(2)}(x), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial S_n^{(1)}(x)}{\partial x} \approx \sinh(\gamma) S_n^{(1)}(x), \quad \frac{\partial S_n^{(2)}(x)}{\partial x} \approx -\sinh(\gamma) S_n^{(2)}(x), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 S_n^{(1)}(x)}{\partial n \partial x} \approx -\gamma \sinh(\gamma) S_n^{(1)}(x), \quad \frac{\partial^2 S_n^{(2)}(x)}{\partial n \partial x} \approx -\gamma \sinh(\gamma) S_n^{(2)}(x), \quad (3.16)$$

donde despreciamos el segundo término de la derivada en x porque casi no contribuye para $x \gg 1$. Nótese que como $0 < \text{Im}(\gamma) < \pi$, las derivadas se anulan sólo cuando $S_n^{(1)}(x)$ o $S_n^{(2)}(x)$ se anula.

3.3. Los ceros

Finalmente, para encontrar los ceros de $\xi'_{s-1/2}(ka)$, utilizaremos las representaciones asintóticas (3.13) y los cuadros (3.1) y (3.2). Empecemos por aproximar los ceros de $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ y consecuentemente de sus derivadas para $n \gg 1$.

$$S_n^{(1)}(x) \approx 0 \quad S_n^{(2)}(x) \approx 0,$$

⁷Resultado que no demostraremos, ver referencia [25, pag.237]

para esto requerimos que el numerador sea mucho más pequeño que el denominador en los desarrollos asintóticos (3.13). Como $x \gg 1$, lo anterior se logra tomando $\text{Re}(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) = 0$, entonces obtenemos que para $S_n^{(1)}(x)$ se cumple que

$$S_n^{(1)}(x) = \frac{e^{i[x(\text{Im}(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) - \pi/4)]}}{\sqrt{\frac{\pi x}{2}} \sin(-i\gamma)} \approx 0.$$

Notemos que el numerador contiene una exponencial con argumento puramente imaginario, entonces su módulo es 1. El denominador es un número muy grande, ya que $x \gg 1$. La fracción completa tiene un valor muy cercano a cero. Análogamente se cumple lo mismo para $S_n^{(2)}(x)$, por lo tanto los ceros de $S_n^{(1)}(x)$ y $S_n^{(2)}(x)$ con $n \gg 1$ están cerca de la región (en el plano γ)

$$\text{Re}(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) = 0. \quad (3.17)$$

En la figura (3.8) podemos ver la región (3.17) de color negro. Ahora encon-

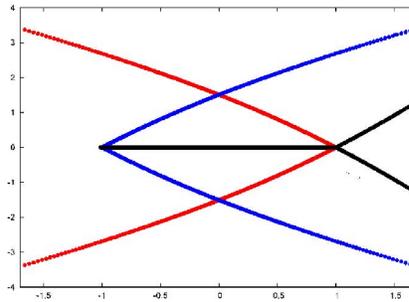


Figura 3.8: Región (3.17) en el plano n/x

traremos los ceros de $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ y de sus derivadas para $n \gg 1$. Supongamos que se cumple (3.17), entonces $S_n^{(1)}(x) \approx 0$ y $S_n^{(2)}(x) \approx 0$. Fijándonos en los cuadros (3.1) y (3.2) podemos probar que esto implica que $H_n^{(1)}(x) \approx 0$

y que $H_n^{(2)}(x) \approx 0$. Veamos:

$$\begin{aligned}
\text{Region1 : } & S_n^{(1)} = H_n^{(1)} = 0 & S_n^{(2)} = H_n^{(2)} = 0 \\
\text{Region2 : } & S_n^{(1)} = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} = 0 & S_n^{(2)} = H_n^{(2)} = 0 \\
& \Rightarrow H_n^{(1)} = 0 \\
\text{Region3 : } & S_n^{(1)} = H_n^{(1)} = 0 & S_n^{(2)} = H_n^{(1)} + H_n^{(2)} = 0 \\
& \Rightarrow H_n^{(2)} = 0 \\
\text{Region4 : } & S_n^{(1)} = H_n^{(1)} = 0 & S_n^{(2)} = e^{2n\pi i} H_n^{(1)} + H_n^{(2)} = 0 \\
& \Rightarrow H_n^{(2)} = 0 \\
\text{Region5 : } & S_n^{(1)} = H_n^{(1)} + e^{-2n\pi i} H_n^{(2)} = 0 & S_n^{(2)} = H_n^{(2)} = 0 \\
& \Rightarrow H_n^{(2)} = 0.
\end{aligned}$$

Y análogamente nos seguimos hasta la región 7B, por lo tanto, los ceros de $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$ también están cerca de la región (3.17). Haciendo un razonamiento completamente análogo, utilizando (3.15), se obtiene que los ceros de las derivadas $H_n^{(1)'}(x)$ y $H_n^{(2)'}(x)$, para $n \gg 1$ también están cerca de (3.17).

Como queremos encontrar los ceros de $\xi'_{n-1/2}(x)$, recordemos que $\xi_{n-1/2}(x) = \sqrt{\pi x/2} H_n^{(2)}(x)$. Entonces, podemos aproximar su derivada respecto a x para $x \gg 1$ como

$$\xi'_{n-1/2}(x) \approx \sqrt{\frac{\pi x}{2}} H_n^{(2)'}(x),$$

por lo que basta con encontrar los ceros de $H_n^{(2)'}(x)$ y ya sabemos que éstos se encuentran cerca de (3.17). De la figura (3.8) y de la figura (3.7), se puede ver que los ceros buscados (línea negra) se encuentran cerca de las regiones 1, 2 o 3. En las regiones 1 y 2 $H_n^{(2)'}(x) = S_n^{(2)'}(x)$ y de la representación (3.13) es fácil ver que estrictamente $S_n^{(2)}(x) \neq 0$ ya que la exponencial del numerador nunca es cero. Por lo tanto $S_n^{(2)'}(x) \neq 0$, entonces los ceros buscados deben de estar en la región 3. De los cuadros (3.1) y (3.2) sabemos que en la región 3 se cumple que

$$S_n^{(1)'}(x) = H_n^{(1)'}(x), \quad S_n^{(2)'}(x) = H_n^{(1)'}(x) + H_n^{(2)'}(x),$$

donde se derivó respecto a x . Entonces se cumple que

$$H_n^{(2)'}(x) = S_n^{(2)'}(x) - H_n^{(1)'}(x) = S_n^{(2)'}(x) - S_n^{(1)'}(x).$$

Y como queremos $H_n^{(2)'}(x) = 0$, entonces $S_n^{(2)'}(x) - S_n^{(1)'}(x) = 0$. Usando las relaciones (3.15) obtenemos que $S_n^{(1)}(x) = -S_n^{(2)}(x)$, es decir

$$e^{x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) - i\pi/4} = -e^{-x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) + i\pi/4}.$$

Dividiendo entre $e^{-x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) - i\pi/4}$ se tiene que

$$\begin{aligned} e^{2x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma))} &= -e^{i\pi/2} \\ \Rightarrow 2x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) &= i\pi/2 - i\pi(2m + 1), \end{aligned}$$

donde usamos que $-e^{i\pi/2} = e^{i(\pi/2 - \pi)} = e^{i(\pi/2 - \pi - 2m\pi)}$, con m entero, y sacamos el log. Simplificando obtenemos que

$$x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) = -i\pi(m + 1/4), \quad (3.18)$$

donde $x = ka$ con $k = w\sqrt{\mu\epsilon}/c$ y que $\gamma = \alpha + i\beta$. También sabemos que x es grande, entonces necesitamos que $m \gg x$ para obtener soluciones no triviales para γ . Además, sabemos que $|\gamma|$ no es pequeño por lo que no conviene escribir sólo los terminos de segundo orden en γ de (3.18)

$$x(\gamma \cosh(\gamma)) = i\pi(m + 1/4), \quad (3.19)$$

reescribiendo el cosh

$$x\gamma \frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} = i\pi(m + 1/4).$$

Y como $\text{Re}[\gamma] < 0$, esto se aproxima como

$$\gamma \frac{e^{-\gamma}}{2} = \frac{i\pi(m + 1/4)}{x}.$$

Sacando el logaritmo se obtiene

$$\log \frac{\gamma}{2} - \gamma = \log(i\pi) + \log(m + 1/4) - \log x.$$

Como ya vimos que $m \gg x \gg \pi > 1$, entonces esta relación se aproxima como

$$\boxed{\gamma \approx -\log m} \quad (3.20)$$

Recordando que queremos encontrar $n = x \cosh \gamma$, resulta evidente de (3.19) y de (3.20) que

$$\boxed{n \approx -\frac{i\pi(m + 1/4)}{\log m}}, \quad (3.21)$$

la cual es una primera aproximación para n y fue la que obtuvo Watson en su artículo [24]. Esta aproximación se puede mejorar aun más. Haremos una iteración del método de Newton alrededor de nuestra primera aproximación (3.20). Llamemosle $F(\gamma)$ a

$$F(\gamma) = x(\sinh(\gamma) - \gamma \cosh(\gamma)) + i\pi(m + 1/4) = 0$$

Aplicandole una iteración del método de Newton obtenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 - \frac{F(\gamma_0)}{F'(\gamma_0)} = \gamma_0 - \frac{x[\sinh(\gamma_0) - \gamma_0 \cosh(\gamma_0)] + i\pi(m + 1/4)}{-x\gamma_0 \sinh(\gamma_0)} \\ &= \gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\tanh(\gamma_0)} + \frac{i\pi(m + 1/4)}{x\gamma_0 \sinh(\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Resulta conveniente definir

$$\boxed{A_m = \gamma_0 + \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\tanh(\gamma_0)}, \quad B_m = i \frac{\pi(m + 1/4)}{\gamma_0 \sinh(\gamma_0)},} \quad (3.22)$$

de modo que, $\gamma_1 = A_m + B_m/x$. Notemos también que como γ_0 es real, entonces A_m es real y B_m es imaginario. Ahora, veremos que $B_m/x \ll 1$. Usando que $\gamma_0 = -\log m$ queda

$$B_m = \frac{i\pi(m + 1/4)}{\log m \sinh(\log m)}.$$

Y como $\sinh(\log m) = (e^{\log m} - e^{-\log m})/2 \approx m/2$, ya que $m \gg 1$, entonces

$$B_m \approx \frac{i2\pi m}{m \log m} \approx \frac{1}{\log m} \ll 1.$$

Como x también es grande, entonces B_m/x es aun más pequeño. Ahora tenemos un nuevo valor de n que es $n = x \cosh(A_m + B_m/x)$. Como B_m/x es chico, expandamos en serie de Taylor a segundo orden alrededor de A_m . Es decir

$$n = x \cosh\left(A_m + \frac{B_m}{x}\right) \approx x \left[\cosh(A_m) + \frac{B_m}{x} \sinh(A_m) + \frac{B_m^2}{2x^2} \cosh(A_m) \right],$$

que son los ceros v_m buscados

$$\boxed{v_m = n \approx x \cosh(A_m) + B_m \sinh(A_m) + \frac{B_m^2}{2x} \cosh(A_m).} \quad (3.23)$$

Además, como x y A_m son reales y B_m imaginario, el primer y tercer término del lado derecho corresponden a la parte real de los ceros y el segundo término corresponde a la parte imaginaria de estos. Despreciando la parte real por ser pequeña y usando que $A_m \approx \gamma_0$, recuperamos nuestra primera aproximación (3.21). Finalmente, como $B_m \ll 1$, entonces $|B_m^2/x| \ll 1$ y evidentemente menor que $x \cosh(A_m)$ porque x y A_m son grandes, por lo que la parte real de ν_m es positiva. También resulta evidente que la parte imaginaria de ν_m es negativa ya que $\gamma_0 = -\log m < 0$ lo que hace que $\sinh(A_m) < 0$.

Estos son los ceros buscados de $\xi'_{n-1/2}(ka)$ como función de n . Su parte real es positiva y su parte imaginaria es negativa, lo cual garantiza que se encuentran dentro del contorno de la figura (2.1) tal y como esperábamos. Si uno desea obtener los ceros con mayor precisión, hay otros métodos. El lector puede revisar el artículo [10] o utilizar estas aproximaciones como los valores iniciales de un algoritmo numérico para calcular los ceros.

Es importante resaltar que esta última aproximación de los ceros no la obtuvo Watson en su artículo y resulta una parte fundamental para la interpretación física de los pulsos que viajan alrededor de la Tierra. Es con la ayuda de estos ceros que vamos a estudiar la solución obtenida con la transformada de Watson en el capítulo anterior.

Capítulo 4

¿Y la Física?

En este capítulo presentaremos un análisis de la física de la solución obtenida al emplear la transformada de Watson, con ayuda de los ceros obtenidos en el capítulo anterior. Algunos de los resultados mostrados en esta sección apenas y se tratan en el artículo de Watson [24], y algunos otros ni siquiera se mencionan. El objetivo es mostrar todos los resultados físicos que se obtienen gracias al empleo de la transformada de Watson.

4.1. Los ceros

Ahora bien, daremos una primera interpretación física de los ceros obtenidos y de la transformada de Watson (2.16). Recordando la solución final que obtuvimos

$$\Pi = \frac{2\pi}{kab} \sum_{\nu_m} \frac{\nu_m P_{\nu_m-1/2}(-\mu) \xi_{\nu_m-1/2}(kb)}{\cos(\nu\pi) \left[\frac{\partial \xi'_{s-1/2}(ka)}{\partial s} \right]_{s=\nu_m}}, \quad (4.1)$$

con $\nu_m = n_m$ los ceros (3.23) encontrados en el capítulo anterior. Aludiendo a la aproximación de Laplace (2.11) para $P_{n-1/2}(-\mu)$ se obtiene

$$P_{\nu_m-1/2}(-\cos(\theta)) \approx \frac{\cos[\nu_m(\pi - \theta) - \pi/4]}{\sqrt{\frac{(\nu_m+1/2)\pi}{2} \sin(\theta)}} \quad (4.2)$$

$$= \frac{\left[e^{i[\nu_m(\pi-\theta)-\pi/4]} + e^{-i[\nu_m(\pi-\theta)-\pi/4]} \right]}{2 \sqrt{\frac{(\nu_m+1/2)\pi}{2} \sin(\theta)}}. \quad (4.3)$$

Recordando que Π es solución a la ecuación de onda estacionaria (1.15), la solución completa en el tiempo será $e^{i\omega t}\Pi$ ¹. Multiplicando (4.1) por $e^{i\omega t}$ y sustituyendo la aproximación de Laplace se obtiene

$$e^{i\omega t}\Pi = e^{i\omega t} \frac{2\pi}{kab} \sum_{\nu_m} \frac{\nu_m \left[e^{i[\nu_m(\pi-\theta)-\pi/4]} + e^{-i[\nu_m(\pi-\theta)-\pi/4]} \right] \zeta_{\nu_m-1/2}(kb)}{2 \left[\sqrt{\frac{(\nu_m+1/2)\pi}{2}} \sin(\theta) \right] \cos(\nu_m\pi) \left[\frac{\partial \zeta_{s-1/2}(ka)}{\partial s} \right]_{s=\nu_m}}. \quad (4.4)$$

Fijándonos en las exponenciales de la ecuación anterior podemos reconocer dos factores muy importantes,

$$e^{i[-\nu_m\theta+\omega t]} \quad \text{y} \quad e^{i[\nu_m\theta+\omega t]}.$$

Separando ν_m en parte real e imaginaria, como dijimos en (3.23), se tiene que

$$e^{\text{Im}[\nu_m]\theta} e^{-i[\text{Re}[\nu_m]\theta-\omega t]} \quad \text{y} \quad e^{-\text{Im}[\nu_m]\theta} e^{i[\text{Re}[\nu_m]\theta+\omega t]}. \quad (4.5)$$

Las exponenciales recién obtenidas representan ondas viajando en la dirección θ y $-\theta$ respectivamente. El argumento de la exponencial imaginaria, $\mp i[\text{Re}[\nu_m]\theta \pm \omega t]$, nos da la fase y la longitud de las ondas. El argumento de la exponencial real, $e^{\pm \text{Im}[\nu_m]\theta}$, nos da la amplitud. Esto quiere decir que los ceros (3.23) tienen un significado físico muy importante; su parte real representa el radio terrestre multiplicado por el número de onda de las ondas que viajan alrededor de la Tierra, y su parte imaginaria nos dice como cambia su amplitud al viajar alrededor de la Tierra.

$$\underbrace{n_m}_{\text{Relacionado con:}} = \underbrace{\text{Re}[n_m]}_{\text{Longitud de Onda}} + i \underbrace{\text{Im}[n_m]}_{\text{Amplitud}}$$

Fijándonos en (3.23) podemos ver los valores obtenidos de $\text{Re}[n_m]$ y $\text{Im}[n_m]$. Recordando que $\text{Re}[n_m] > 0$ y $\text{Im}[n_m] < 0$, resulta evidente que conforme θ crece (o decrece) la amplitud decrece. Evidentemente, hay más términos que tomar en cuenta, pero esto nos da una idea inicial del significado físico que tienen los ceros encontrados.

¹Esto es consecuencia de las ecuaciones (1.1), (1.11), (1.12) y (1.13).

4.2. Ondas alrededor de la Tierra

Ya vimos que los ceros encontrados ν_m caracterizan en gran parte las ondas que viajan alrededor de la Tierra. Notemos que el desarrollo (4.4) es una suma sobre ν_m . Consecuentemente, cada término de la suma representa una onda con diferente longitud de onda y con una amplitud característica. Muy semejante a las series de Fourier, sólo que ahora estamos sumando sobre un número complejo ν_m y no sobre un entero.

Obtengamos otros resultados interesantes, desarrollemos $\sec \nu_m \pi$ de la siguiente manera,

$$\sec \nu_m \pi = \frac{1}{\cos \nu_m \pi} = 2(e^{-\nu_m \pi i} - e^{-3\nu_m \pi i} + e^{-5\nu_m \pi i} - \dots).$$

Usando este desarrollo podemos reescribir el potencial (4.4) como

$$e^{i\omega t} \Pi = \frac{2\pi}{kab} \sum_{\nu_m} \frac{\nu_m \xi_{\nu_m-1/2}(kb)}{\left[\sqrt{\frac{(\nu_m+1/2)\pi}{2}} \sin(\theta) \right] \left[\frac{\partial \xi_{s-1/2}(ka)}{\partial s} \right]_{s=\nu_m}} F(\theta, \nu_m), \quad (4.6)$$

con

$$F(\theta, \nu_m) = e^{i\omega t} \left[e^{\nu_m(i\pi-\theta)-i\pi/4} + e^{-i\nu_m(\pi-\theta)+i\pi/4} \right] (e^{-\nu_m \pi i} - e^{-3\nu_m \pi i} + e^{-5\nu_m \pi i} \dots).$$

Haciendo el producto de $F(\theta, \nu_m)$ se obtiene

$$\begin{aligned} F(\theta, \nu_m) &= e^{-i\pi/4+\omega t} [e^{-i\nu_m \theta} - e^{-i\nu_m \theta - 2\pi i \nu_m} + e^{-i\nu_m \theta - 4\pi i \nu_m} + \dots] + \\ &\quad e^{i\pi/4+\omega t} [e^{+i\nu_m \theta - 2\pi i \nu_m} - e^{+i\nu_m \theta - 4\pi i \nu_m} + \dots] \\ &= e^{-i\pi/4} \sum_{m'=0}^{\infty} (-1)^m e^{-i[\nu_m(\theta-2\pi m')-\omega t]} + e^{i\pi/4} \sum_{m'=0}^{\infty} (-1)^{m+1} e^{i[\nu_m(\theta-2\pi m')+\omega t]}. \end{aligned}$$

Nuevamente tenemos dos exponenciales que representan ondas con argumento $\mp i[\nu_m(\theta - 2\pi m') \mp \omega t]$. De manera completamente análoga, podemos separar ν_m en parte real e imaginaria. Lo importante en este desarrollo es que θ viene acompañado de $2\pi m'$, de donde podemos deducir que $m' = 1$ corresponde a una onda que ya avanzó 2π , que es lo mismo que una vuelta entera alrededor de la Tierra. De la misma forma, $m' = 2$ corresponde a una onda que ya le dio 2 vueltas a la Tierra, etc.

Recordando que $F(\theta, \nu_m)$ está adentro de la suma (4.6), podemos decir que, cada onda caracterizada por ν_m a su vez se descompone en otra suma de

ondas sobre m' . Cada término de esta suma sobre m' representa las ondas que ya le dieron una, dos, tres... ($m' = 1, 2, 3 \dots$) vueltas completas a la Tierra. En la figura (4.1) podemos ver estas ondas para $m' = 1, 2$ y 3.

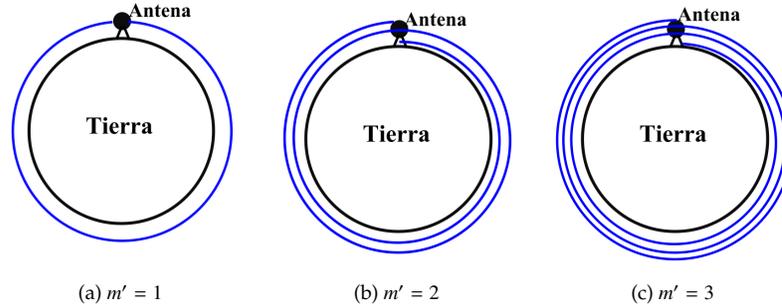


Figura 4.1: Ondas viajando alrededor de la Tierra 1, 2 y 3 veces.

4.3. Pulsos alrededor de la Tierra

Finalmente obtendremos unos últimos resultados que no fueron presentados en el artículo de Watson[24]. Para obtenerlos, debemos de notar ciertas dependencias. Los ceros ν_m dependen linealmente de $x = ka$ según la ecuación (3.23), pero k la habíamos definido como $k^2 = -\beta\gamma$. Es decir $k = w \sqrt{\mu\epsilon}/c$, por lo tanto los ceros ν_m dependen de la frecuencia angular w .

En principio tomamos w como constante, ahora vamos a sumar nuestro potencial sobre un continuo de frecuencias angulares, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} \Pi(w) dw,$$

donde usamos que Π depende de ν_m que a su vez depende de w . Ahora bien, hagamos el cambio de variable $s = iw$ y nuestra superposición quedara como,

$$\frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} \Pi(s) ds.$$

Esto se parece a la transformada inversa de Laplace. Sólo falta una constante real σ en los límites de integración que debe de ser mayor que la parte real de los polos de $\Pi(s)$. De (3.23), podemos ver que como $x \propto s$, entonces $\Pi(s)$ va a tener un polo en $s = 0^2$. Es por esto que podemos tomar $\sigma \approx 0$, pero $\sigma > 0$ y reescribir nuestra ecuación como la transformada inversa de Laplace

$$\frac{1}{i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \Pi(s) ds. \quad (4.7)$$

Por la complejidad de $\Pi(s)$, resulta muy complicado resolver esta integral. Para poderla resolver habrá que hacer el desarrollo asintótico de $\Pi(s)$ para $x = ka$ grande y el índice ν_m fijo. El desarrollo asintótico de las funciones de Hankel para $x \gg 1$ obtenido por el método del descenso más rápido es

$$H_\nu^{(2)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\nu_m\pi/2-\pi/4)}.$$

Y como $\xi_n = \sqrt{\pi x/2} H_{n+1/2}^{(2)}$, entonces

$$\xi_{\nu_m-1/2}(x) \sim e^{-i(x-\nu_m\pi/2-\pi/4)},$$

de donde se sigue que

$$\frac{\partial \xi_{s-1/2}^{\nu_m}(x)}{\partial s} \sim \frac{\partial}{\partial s} [-i e^{-i(x-\nu_m\pi/2-\pi/4)}] = \frac{\pi}{2} e^{-i(x-\nu_m\pi/2-\pi/4)},$$

por lo tanto

$$\frac{\xi_{\nu_m-1/2}(kb)}{\frac{\partial \xi_{s-1/2}^{\nu_m}(ka)}{\partial s}} \sim \frac{2}{\pi} e^{-ik(b-a)} \approx \frac{2}{\pi}, \quad (4.8)$$

ya que $b \approx a$. Ahora, como $\cos(\nu_m\pi) = (e^{i\nu_m\pi} + e^{-i\nu_m\pi})/2$, $\text{Im}[\nu_m] < 0$ y ν_m es grande, entonces

$$\cos \nu_m\pi \sim \frac{e^{i\nu_m\pi}}{2}. \quad (4.9)$$

Y finalmente usando (4.3) y nuevamente que $\text{Im}[\nu_m] < 0$ y ν_m es grande, obtenemos

$$P_{\nu_m-1/2}(-\cos \theta) \sim \frac{e^{i[\nu_m(\pi-\theta)-\pi/4]}}{\sqrt{2\pi \sin \theta} \sqrt{\nu_m}}. \quad (4.10)$$

²Esto será evidente más adelante que se haga la representación asintótica de $\Pi(s)$

Usando (4.8), (4.9) y (4.9), podemos escribir cada término de $\Pi(s)$ como

$$\Pi_m \sim A \frac{\sqrt{v_m}}{k \sqrt{\sin \theta}} e^{-i[v_m \theta]}, \quad \text{con} \quad A = \frac{4 \sqrt{2}}{ab \sqrt{\pi}}, \quad (4.11)$$

lo cual queremos dejar en función de s . Usando (3.23), que $x = ka$, que

$$k = w \sqrt{\mu \epsilon} / c \quad (4.12)$$

y que $s = iw$, obtenemos los ceros en función de s

$$v_m = -is \frac{a \sqrt{\mu \epsilon}}{c} \cosh A_m + B_m \sinh A_m + i \frac{B_m^2 c}{2sa \sqrt{\mu \epsilon}} \cosh A_m,$$

Lo que nos conduce a

$$v_m = i\alpha_m s + \beta_m + i \frac{\gamma_m}{s}, \quad \text{con :} \quad (4.13)$$

$$\alpha_m = -\frac{a \sqrt{\mu \epsilon}}{c} \cosh A_m, \quad \beta_m = B_m \sinh A_m, \quad \gamma_m = \frac{B_m^2 c}{2a \sqrt{\mu \epsilon}} \cosh A_m. \quad (4.14)$$

Y con ayuda de (3.22) podemos ver que α_m y γ_m son reales y negativos y que β_m es imaginario y negativo, con esto podemos aproximar una parte de (4.11)

$$\frac{\sqrt{v_m}}{k} = \frac{\sqrt{i\alpha_m s + \beta_m + i\gamma_m/s}}{-is \sqrt{\mu \epsilon} / c}.$$

Considerando que $a \approx 6,378 \times 10^8 \text{ cm}$, $c \approx 2,998 \times 10^{10} \text{ cm/s}$, $\mu \approx \epsilon \approx 1$ en aire seco y en cgs (Gaussiano), que $\gamma_0 = -\log m$ y que $w = s/i \approx 100 \text{ kHz}$ para ondas de radio, entonces es fácil ver que

$$\alpha_m s \gg \beta_m + i\gamma_m/s.$$

Entonces,

$$\frac{\sqrt{v_m}}{k} \approx \frac{\sqrt{i\alpha_m s}}{-is \sqrt{\mu \epsilon} / c} = -\frac{c \sqrt{\alpha_m}}{\sqrt{is \mu \epsilon}}$$

y podemos reescribir (4.11) como

$$\begin{aligned}\Pi_m &\sim -A \frac{c \sqrt{\alpha_m}}{\sqrt{\sin \theta} \sqrt{i s \mu \epsilon}} e^{-i[(i\alpha_m s + \beta_m + i \frac{\gamma_m}{s})\theta]} \\ &= \frac{B}{\sqrt{s}} e^{(\alpha_m s + \frac{\gamma_m}{s})\theta} \quad \text{con} \quad B = \frac{-4c}{ab} \sqrt{\frac{2\alpha_m}{i\pi\mu\epsilon \sin \theta}} e^{-i\pi/4 - i\beta_m\theta}.\end{aligned}$$

Sólo nos falta obtener la transformada inversa de Laplace de esto,

$$\boxed{\Pi_m \sim \frac{B}{\sqrt{s}} e^{(\alpha_m s + \frac{\gamma_m}{s})\theta}}. \quad (4.15)$$

Ahora, como $\Pi(s) = \sum_m \Pi_m$ y queremos calcular la integral (4.7), calculamos la integral de cada término

$$\begin{aligned}&\frac{1}{i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \Pi_m ds \\ &\approx \frac{B}{i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} s^{-1/2} e^{s(\alpha_m\theta+t) + \frac{\gamma_m}{s}\theta} ds.\end{aligned}$$

Notemos que $\alpha_m\theta + t$ es un término de propagación y por lo tanto α_m debe de tener unidades de tiempo, es decir de distancia entre velocidad. Como $\alpha_m = -\frac{a\sqrt{\mu\epsilon}}{c} \cosh Am$, a tiene unidades de centímetros, μ y ϵ son adimensionales en cgs Gaussiano, c es la velocidad de la luz y $\cosh Am \approx m$ y es adimensional, entonces nuestras ondas se propagan con una velocidad de c/m .

Para resolver la integral usaremos una representación integral de las funciones de Bessel, la cual se puede encontrar en [25, pag.177],

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\nu-1} e^{t - \frac{z^2}{4t}} dt, \quad (4.16)$$

con $c > 0$. Haciendo el cambio de variable $s' = s[\alpha_m\theta + t]$ y $ds' = ds[\alpha_m\theta + t]$ obtenemos

$$\frac{B}{i \sqrt{\alpha_m\theta + t}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} s'^{-1/2} e^{s' + \frac{\gamma_m}{s'}\theta(\alpha_m\theta+t)} ds'.$$

Y ya nos queda de la forma (4.16), entonces $\nu = -1/2$ y

$$-\frac{z^2}{4} = \gamma_m\theta(\alpha_m\theta + t) \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{-4\gamma_m\theta(\alpha_m\theta + t)}.$$

Entonces la integral queda como

$$B2\pi \left(\frac{-\gamma_m \theta}{\alpha_m \theta + t} \right)^{1/4} J_{-1/2} \left(\sqrt{-4\gamma_m \theta (\alpha_m \theta + t)} \right).$$

O recordando el valor de B, lo podemos escribir más convenientemente como

$$\frac{1}{i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \Pi_m ds = C \frac{e^{-i\beta_m \theta}}{\sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{-\gamma_m \theta}{\alpha_m \theta + t} \right)^{1/4} J_{-1/2} \left(\sqrt{-4\gamma_m \theta (\alpha_m \theta + t)} \right), \quad (4.17)$$

$$\text{con } C = \frac{8c}{ab} \sqrt{\frac{2\pi\alpha_m}{-\mu\epsilon}}. \quad (4.18)$$

Graficando la expresión (4.17) para x constante en función del tiempo se obtiene la figura (4.2). En esta figura se ven muy claramente varios fenóme-

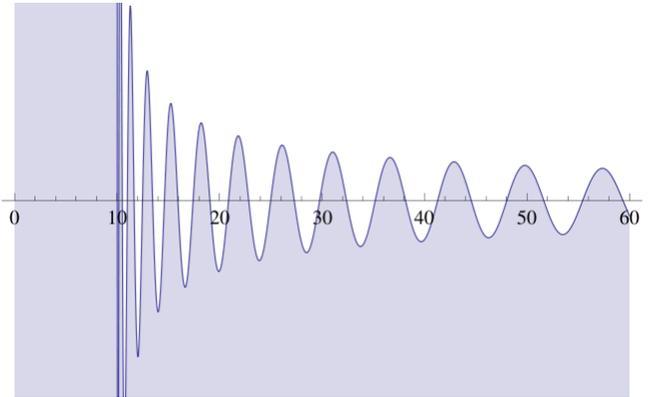


Figura 4.2: Pulso en función del tiempo para x constante.

nos que ocurren con el pulso. Si nos encontramos parados en algún punto de la Tierra y el pulso se genera en el polo Norte, no percibiremos el pulso de forma inmediata, hay que esperar cierto tiempo a que se propague hasta el punto en donde nos encontramos. Este tiempo se puede calcular a partir de la expresión

$$\sqrt{-4\gamma_m \theta (\alpha_m \theta + t)},$$

que se encuentra adentro de la función de Bessel del resultado (4.17). Como $\gamma_m < 0$, entonces $\alpha_m \theta + t > 0$ para que la raíz sea real, es decir

$$t > -\alpha_m \theta, \quad \text{con :} \quad \alpha_m < 0.$$

Durante este tiempo nosotros no vemos nada y es justo lo que observamos al inicio de la gráfica en la figura (4.2). Una vez pasado este tiempo, nos llega el pulso seguido por una cola, la cual es consecuencia de la dispersión de las ondas. Este efecto de dispersión se origina de la función de Bessel en (4.17), el cual a su vez es consecuencia matemática directa del factor que va como γ_m/s en (4.15). Finalmente hay un factor en (4.17) que disminuye la amplitud conforme θ crece, el término es $e^{-i\beta_m \theta}$, es importante recordar que β_m es imaginario y negativo.

Estamos viendo que en la propagación del pulso hay tres fenómenos físico muy importantes, propagación, dispersión y disminución de amplitud. Recordando la expresión de los ceros obtenidos en función de s (4.13),

$$v_m = i\alpha_m s + \beta_m + i \frac{\gamma_m}{s}$$

podemos ver que el primer término que es proporcional a s es el que está relacionado con la propagación. El tercer término que es inversamente proporcional a s es el que está relacionado con la dispersión y el segundo término que es constante está relacionado con la disminución de la amplitud. Los tres fenómenos involucrados en la propagación de pulsos alrededor de la Tierra son consecuencia directa de la forma matemática de los ceros obtenidos.

El emplear la Transformada de Watson le dio un significado físico mucho más profundo y claro a la solución que la serie original, además mejoró la convergencia de nuestra solución. En [12] mencionan que se hubiesen requerido 8000 términos de la serie original para obtener los mismos resultados que con tan sólo dos términos de la serie obtenida por medio de la transformada de Watson.

4.4. Otros resultados

George Neville Watson obtuvo más resultados de su trabajo. El lector ya familiarizado con el problema se puede referir al artículo original sin tanta

dificultad. A continuación se mencionan estos resultados.

Primero, obtuvo resultados numéricos asumiendo que la Tierra era un conductor perfecto. Con estos resultados, encontró que la onda difractada alrededor de la Tierra no era lo suficientemente intensa como para explicar los resultados empíricos, lo cual, demanda la existencia de otros fenómenos físicos para explicar los resultados experimentales. Por ejemplo, la reflexión de las ondas en la atmósfera. Watson, aun inconforme, hizo los estudios para el caso de un conductor imperfecto. Para el lector interesado, estos cálculos resultan relativamente sencillos y se pueden consultar en el artículo original [24]. Estos estudios lo llevaron a darse cuenta de que, ya sea en Tierra o agua de mar, la diferencia entre los resultados obtenidos suponiendo un conductor perfecto o uno imperfecto eran despreciables. En

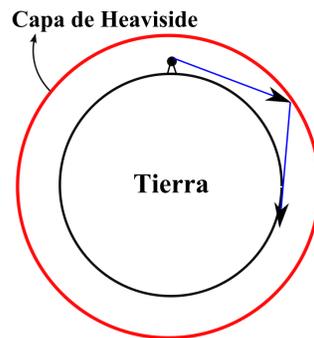


Figura 4.3: Reflexión en la capa de Heaviside

pocas palabras, Watson probó que la difracción de ondas alrededor de la Tierra y las ondas que viajan por dentro de la Tierra no bastan para explicar la transmisión de ondas alrededor de la Tierra. Para explicar el fenómeno, se requiere incluir la reflexión de éstas en la atmósfera. En específico, en la capa de Heaviside, esta es una capa delgada de gas ionizado entre los 90 y 150 km de altura, la cual fue descubierta en 1924 justamente porque refleja las ondas de radio. La figura (4.3) ilustra el fenómeno en cuestión.

Parte II

Ondas Oceánicas sobre una Esfera Giratoria

*"Lo que sabemos es una gota de agua,
lo que ignoramos es el océano."*
Isaac Newton.

Capítulo 5

Ecuaciones de Movimiento

Un tipo de ondas que resulta sumamente importante estudiar para entender los cambios climáticos son las ondas planetarias o ondas de Rossby. Estas ondas deben su existencia a la rotación de la Tierra, es decir a la Fuerza de Coriolis. Son sumamente difíciles de observar en el océano, esto se debe a que estas ondas pueden tener longitudes de onda de cientos de kilómetros, amplitudes de apenas unos cuantos centímetros y velocidades de propagación muy lentas. La ecuación que deduciremos a continuación resulta apropiada para describir estas ondas, ya que desprecia movimientos en la dirección radial (amplitud) por ser muy pequeños y toma en cuenta mayormente el término de Coriolis.

La deducción se hará partiendo de las ecuaciones de Euler, en específico las de conservación de momento. Después, se obtendrá la ecuación de conservación de vorticidad absoluta que es consecuencia de sacarle el rotacional a las ecuaciones de Euler, y se escribirá con ayuda de la función de corriente.

5.1. Ecuaciones de Euler

A continuación presentaremos una deducción muy simple de las ecuaciones de Euler. La manera más sencilla para describir un fluido en su totalidad es a través del campo de velocidades \vec{v} que lo rige y las fuerzas a las que está sometido. Este campo de velocidades se puede representar como un espacio lleno de flechas (vectores de velocidad) cuya magnitud y dirección dependen de la posición y del tiempo como se ve en la figura (5.1).

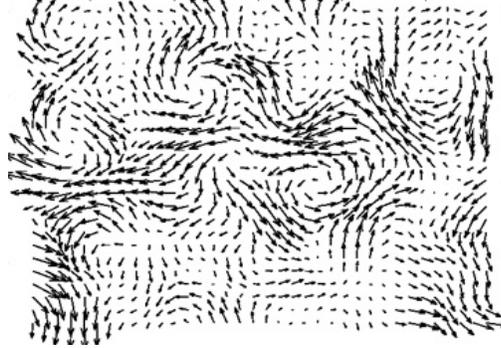


Figura 5.1: Foto de algún campo de velocidades.

Este campo representa la velocidad que siente un elemento de fluido al pasar por un punto fijo en el espacio a un tiempo dado. Como ya decíamos, éste tiene que ser función de la posición y del tiempo, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, donde la posición \vec{x} es un punto fijo en el espacio. A esta descripción del movimiento se le llama la descripción Euleriana o espacial. Un ejemplo sencillo se da en un río. La descripción Euleriana da la velocidad que experimenta un elemento de fluido al pasar por cierto punto, pero no da la velocidad que experimenta este elemento de fluido al moverse con el río¹.

Para obtener las ecuaciones de movimiento de nuestro océano tendremos que escribir la segunda ley de Newton para un fluido. Sabemos por la segunda ley que la fuerza es el cambio de momento respecto al tiempo, es decir,

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (5.1)$$

Debido a que la segunda ley es para cuerpos², entonces necesitamos conocer el momento de un cuerpo, pero el fluido es un continuo, entonces habrá que calcular el momento de un elemento de fluido. Primero, intentemos escribir la velocidad del elemento de fluido en términos del campo de velocidades. Para esto consideremos la trayectoria \vec{x} de un elemento de fluido. Como el elemento se mueve, su trayectoria dependerá del tiempo,

¹La Descripción que da la velocidad de un elemento de fluido moviéndose con el río es la descripción Lagrangiana.

²No para el campo de velocidades que es lo que buscamos.

entonces $\vec{x} = \vec{x}(t)$.

Escribamos la velocidad del elemento de fluido \vec{U} en función del campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Esto se logra substituyendo la posición $\vec{x}(t)$ del elemento de fluido en la dependencia espacial del campo de velocidades: $\vec{U} = \vec{v}(\vec{x}(t), t)$. Separando el campo de velocidades en sus componentes: $\vec{v} = (u, v, w)$, con u, v y w a su vez funciones de $\vec{x}(t)$ y de t como acabamos de ver. Usando regla de la cadena, derivamos la primer componente de la velocidad $u(\vec{x}(t), t)$ respecto a t , obteniendo

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

O bien como $(u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$, entonces

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = (u, v, w) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Haciendo lo mismo de manera análoga para las otras dos variables de la velocidad, v y w , obtenemos otras dos ecuaciones. Las tres ecuaciones obtenidas se pueden escribir como una sola ecuación vectorial,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (5.2)$$

Esta ecuación representa la aceleración de un elemento de fluido arbitrario en función del campo de velocidades. Al operador $\frac{D}{Dt}$ se le llama Derivada Material ya que mide el cambio respecto al tiempo de alguna propiedad de un elemento de fluido en movimiento.

Para escribir la segunda ley de Newton, necesitamos la derivada del momento respecto al tiempo para un elemento de fluido en movimiento, para esto requerimos primero escribir el momento de un elemento de fluido como la integral,

$$\vec{p} = \int_V \rho \vec{v} dV,$$

donde V es el volumen del elemento de fluido, ρ es la densidad del fluido³. Es importante notar que esta integral es sobre un elemento de fluido que se

³Nótese que ya supusimos que el fluido es incompresible ya que $\rho = \text{cte}$.

mueve conforme avanza el tiempo, entonces tomar la derivada respecto al tiempo de esta integral no es algo trivial. Para meter la derivada temporal a la integral sobre el volumen material, hay que hacer uso del teorema de transporte de Reynolds. Después se expande el integrando y se emplea la conservación de masa para anular dos términos, el resultado final es,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV, \quad (5.3)$$

y se puede ver en [1, pag. 137]. Como ya tenemos la derivada del momento, calculemos las fuerzas que actúan sobre nuestro fluido. Éstas pueden ser de dos tipos, las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie. Las fuerzas de cuerpo son fuerzas de largo alcance que penetran adentro del fluido y actúan sobre todos los elementos del fluido, ejemplos de éstas pueden ser la gravedad, la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga. Las fuerzas de superficie son las fuerzas de contacto que actúan sobre la superficie de nuestro elemento de fluido, ya que éste se encuentra en contacto con otros elementos de fluido a la vez, por ejemplo la presión y los esfuerzos de corte. La fuerza superficial neta sobre el elemento de fluido es,

$$\vec{F}_s = \int_{\partial V} \vec{T} ds,$$

con ∂V la frontera del elemento de fluido. En el caso de un fluido ideal, es decir un fluido no viscoso, no hay esfuerzos de corte y la única contribución a las fuerzas de superficie es la presión, entonces $\vec{T} = -P\hat{n}$, con \hat{n} la normal al elemento de fluido. Empleando el teorema de Gauss para pasar de una integral de superficie a una de volumen, obtenemos

$$\vec{F}_s = - \int_V \nabla P dV.$$

Agregando las posibles fuerzas de cuerpo, queda

$$\vec{F} = \int_V (-\nabla P) dV + F_{cpo}^{\vec{}} = \int_V (-\nabla P + \rho A_{cpo}^{\vec{}}) dV, \quad (5.4)$$

donde $A_{cpo}^{\vec{}}$ es la aceleración debido a las fuerzas de cuerpo y ρ la densidad del fluido. Retomando las ecuaciones (5.4) y (5.3) e igualando según la segunda ley de Newton obtenemos

$$\int \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int (-\nabla P + \rho A_{cpo}^{\vec{}}) dV.$$

Como esto es cierto para cualquier volumen, los integrandos deben de ser iguales. Dividiendo entre ρ , queda

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + A_{cpo}. \quad (5.5)$$

Esta ecuación representa la conservación de momento, ya que se dedujo a partir de la segunda ley de Newton, y se conoce como la ecuación de Euler. Junto con la conservación de masa, que en este caso es $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ por suponer incompresibilidad, tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, \vec{v} y P .

5.2. Ecuación de Vorticidad Bidimensional

La ecuación de vorticidad se obtiene sacándole el rotacional a la ecuación de Euler que acabamos de deducir, pero antes veamos como incorporar las fuerzas asociadas al movimiento de rotación uniforme, es decir la fuerza centrífuga y la de Coriolis, a la ecuación de Euler. Empecemos con la fuerza de Coriolis que es

$$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{A}_c = -2\vec{\Omega} \times \vec{v},$$

con Ω la velocidad angular de la Tierra, \vec{v} la velocidad del elemento de fluido moviéndose en la Tierra y A_c la aceleración de Coriolis. Fijando un sistema de referencia localmente plano en el ángulo Θ , tenemos que z es normal a la Tierra, y va en dirección norte y x al este. Vamos a representar al océano como una capa delgada de agua respecto al radio terrestre, como las ondas de Rossby tienen un amplitud muy pequeña en relación a su longitud de onda, supondremos que la componente normal z de la velocidad es nula. Además, tampoco tomaremos en cuenta la componente normal de la aceleración de Coriolis, ya que es pequeña en comparación con la gravedad⁴. Tomando lo anterior en cuenta, podemos escribir la \vec{A}_c como

$$\vec{A}_c = -2(-v_y\Omega \cos \Theta, v_x\Omega \cos \Theta) = 2\Omega \cos \Theta(v_y, -v_x),$$

donde a $f = 2\Omega \cos \Theta$ se le denomina el parámetro de Coriolis. En este caso, Θ es la co-latitud, es decir, el ángulo medido a partir del eje polar en donde fijamos nuestro sistema de referencia localmente plano, pero nos conviene

⁴Esta aproximación es ampliamente usada en oceanografía, ver [20].

tomar la latitud que se mide a partir del ecuador, entonces el parámetro de Coriolis se convierte en $f = 2\Omega \sin \theta$, con θ la latitud. Ahora podemos incorporar esta aceleración a la ecuación de Euler, (5.5),

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + 2\Omega \sin \theta (v_y, -v_x),$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{Dv_x}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fv_y, \\ \frac{Dv_y}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fv_x. \end{aligned}$$

Pareciera ser que la gravedad y la fuerza centrífuga no fuerón tomadas en cuenta, pero ambas fuerzas de cuerpo son conservativas, así que las podemos escribir como el gradiente de algo. De esta manera las podemos incluir en la variable P , es decir el término ∇P contiene el gradiente de presiones original, la gravedad y la aceleración centrífuga. A esta nueva P se le conoce como presión modificada. Tomemos el rotacional bidimensional de la ecuación vectorial⁵, que es lo mismo que tomar la parcial respecto a x de la segunda, la parcial respecto a y de la primera y restarlas, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{Dv_y}{Dt} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{Dv_x}{Dt} = -f \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - v_x \frac{\partial f}{\partial x} - v_y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (5.6)$$

pero como $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ por ser incompresible, el primer término del lado derecho desaparece. Además, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{DA}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} + v_y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} \\ &= \frac{D}{Dt} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y}, \end{aligned}$$

el término del lado izquierdo se puede escribir como

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

⁵ $\nabla \times \vec{a} = -\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x}$.

Además, como $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$ y estamos en dos dimensiones lo podemos simplificar a

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] + \frac{\partial v_y}{\partial y} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = \frac{Dw}{Dt} + w \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right],$$

donde w es la componente normal de \vec{w} . Nótese que el último término es cero, ya que la cantidad entre paréntesis corresponde a la divergencia que bien sabemos es cero ya que supusimos incompresibilidad. Por lo tanto, la ecuación (5.6) se simplifica a

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{Dt} &= -v_x \frac{\partial f}{\partial x} - v_y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \circ \\ \frac{Dw}{Dt} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, como el parámetro de Coriolis f es constante en el tiempo, entonces $\partial f / \partial t = 0$, lo que quiere decir que los dos últimos términos del lado izquierdo corresponden a la derivada material de f , Df/Dt . Entonces, se sigue que

$$\frac{D}{Dt} (w + f) = 0,$$

es decir, la cantidad $w + f$ se conserva a lo largo de una trayectoria material y en el tiempo. Dado que w corresponde a la vorticidad relativa a la Tierra⁶ y f corresponde a la vorticidad del planeta, a la cantidad $\xi = w + f$ le llamaremos vorticidad absoluta, y se cumple que

$$\boxed{\frac{D\xi}{Dt} = 0}, \quad (5.7)$$

es decir se conserva, lo cual tiene sentido ya que no hay disipación de energía ni fuerzas no conservativas⁷. Por esto mismo, podemos decir que esta última ecuación es válida no solo en el sistema localmente plano, si no en toda la superficie esférica. De manera más formal, la vorticidad absoluta

⁶Todo el campo de velocidades es relativo a la Tierra y definimos w como la componente normal de $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$. Se hace de esta manera ya que nos interesa saber como se ven las ondas desde un punto fijo en la Tierra. Por esta misma razón, agregamos la fuerza de Coriolis como una fuerza de cuerpo.

⁷La vorticidad absoluta se describe desde un sistema inercial. La vorticidad relativa se describe montados en la Tierra y esa no se conserva, ya que entra en juego la fuerza de Coriolis, la cual es una fuerza no conservativa.

es el rotacional de la velocidad vista desde un sistema inercial. El rotacional es circulación por unidad de área, y como la componente normal de la velocidad es cero, la superficie es uniforme y el área es tomada de la misma forma en cualquier punto de la Tierra. Entonces, el teorema de circulación de Kelvin nos dice que la circulación se conserva en trayectorias materiales, que es lo mismo que (5.7). Reescribiendo la derivada material tenemos que

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\xi = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}\xi) - \xi\nabla \cdot \vec{v} = 0,$$

donde usamos la siguiente identidad vectorial: $\nabla \cdot (A\vec{x}) = \vec{x} \cdot \nabla A + A\nabla \cdot \vec{x}$. Nuevamente el último término del lado derecho es una divergencia y consecuentemente es cero. Como la ecuación (5.7) es válida en la esfera, usemos la divergencia en coordenadas esféricas tomando en cuenta que la componente radial o normal de la velocidad es cero, podemos reescribir esta ecuación de la siguiente manera,

$$\frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\xi v_\theta \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial\phi}(\xi v_\phi) \right] = 0, \quad (5.8)$$

con v_θ, v_ϕ las velocidades en la dirección θ y ϕ y a el radio de la Tierra. Nótese también que se emplean senos y no cosenos en la divergencia. Esto es así porque θ es la latitud y no la co-latitud. Mas aun, como $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, la condición de continuidad nos garantiza la existencia de una función de corriente, ψ . Entonces,

$$v_\theta = \frac{1}{a \cos\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \quad y \quad v_\phi = -\frac{\partial\psi}{a\partial\theta}, \quad (5.9)$$

lo cual lo podemos sustituir en (5.8) y obtener

$$\begin{aligned} \frac{D\xi}{Dt} &= \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{a^2 \cos\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\xi \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right) - \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\xi \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) \right] \\ &= \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{a^2 \cos\theta} \left[\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} - \frac{\partial\xi}{\partial\phi} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right] = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{D\xi}{Dt} &= \frac{\partial\xi}{\partial t} + J(\psi, \xi) = 0, \quad \text{con :} \quad J(A, B) = \frac{1}{a^2 \cos\theta} \left[\frac{\partial A}{\partial\phi} \frac{\partial B}{\partial\theta} - \frac{\partial B}{\partial\phi} \frac{\partial A}{\partial\theta} \right]. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta este último resultado y recordando que $\xi = w + f$ y que $\partial f / \partial t = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{D\xi}{Dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + J(\psi, w + f) = 0, \\ &= \frac{\partial w}{\partial t} + J(\psi, w) + J(\psi, f) = 0, \end{aligned}$$

ya que J es lineal en cada argumento, lo cual es trivial demostrarlo. El último término se puede simplificar a

$$\begin{aligned} J(\psi, f) &= J(\psi, 2\Omega \sin \theta) \\ &= \frac{1}{a^2 \cos \theta} \left[2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \cos \theta - 0 \right] = \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial t} + J(\psi, w) + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0. \quad (5.10)$$

Finalmente, como w es la componente normal de $\vec{w} = \nabla \times \vec{v}$, en coordenadas esféricas se escribe como

$$w = \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{\partial \cos \theta v_\phi}{\partial \theta} \right].$$

Recordando que θ es la latitud y no la co-latitud. Podemos volver a emplear (5.9) y obtener

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{a^2 \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{a^2 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \nabla^2 \psi. \end{aligned}$$

Es decir, la relación entre la vorticidad relativa y la función de corriente es $w = \nabla^2 \psi$. Lo que quiere decir que podemos interpretar a la vorticidad como el promedio de la curvatura de la función de corriente. Esta relación nos permite escribir nuestra ecuación (5.10) en su forma final,

$$\boxed{\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0.} \quad (5.11)$$

A esta ecuación se le encuentra en la literatura como "Barotropic Vorticity Equation" describe a las ondas de Rossby. Cuenta con tres términos, el primer término es el cambio de la vorticidad en el tiempo, el segundo corresponde a los efectos no-lineales y el tercero da la contribución gracias al efecto de Coriolis.

Para obtener información relevante sobre las ondas de Rossby, podemos suponer movimientos pequeños y despreocupar el término no lineal $J(\psi, \nabla^2 \psi)$ para quedarnos únicamente con el término de Coriolis.

Capítulo 6

Soluciones a la ecuación de vorticidad

En este capítulo resolveremos la ecuación de vorticidad que se obtuvo en el capítulo anterior, pero linealizada. Como supusimos que el término de Coriolis es mucho mayor que el término no lineal, la ecuación que vamos a resolver será

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0. \quad (6.1)$$

Como ya se mencionó en la introducción, comenzaremos resolviendo la ecuación bidimensional sobre la esfera, la cual no tiene singularidades y no le podemos aplicar la transformada de Watson como veremos en el capítulo 7. Por el otro lado, sí nos da información física relevante de las ondas de Rossby y está basada en el artículo [9], por lo que nos da un punto de referencia de lo que esperamos obtener en las soluciones que encontremos en este capítulo. Después se resolverá la ecuación sobre un plano tangente a la esfera, aproximación ampliamente usada para describir ondas de Rossby ya que retiene la variación del parámetro de Coriolis en el espacio. Como las ondas de Rossby se originan por la fuerza de Coriolis, ésta es una aproximación muy útil. A pesar de las limitaciones de esta aproximación, nos da información relevante sobre las ondas oceánicas sobre una esfera giratoria, al menos localmente. Además, el haber cambiado de topología esférica a plana no necesariamente implica que las soluciones obtenidas no sean candidatas para aplicarles la transformada de Watson. Lo que sí es importante es que las soluciones a las que les queremos aplicar la trans-

formda de Watson tengan singularidades, es por esto que es buena idea buscar las funciones de Green de la ecuación en los distintos casos. Finalmente empleamos una generalización a tres dimensiones de la ecuación bidimensional obtenida, la cual describe ondas de Rossby en un fluido estratificado. Gran parte de la física de esta ecuación queda fuera del alcance de esta tesis, pero afortunadamente en las variables angulares se puede tratar de manera análoga al caso anterior. Esta última solución se deja como un problema abierto y una guía para futuros intentos.

No todas las soluciones obtenidas en este capítulo son obtenidas con el fin de aplicarles la transformada de Watson, muchas se obtienen únicamente con el fin de entender las ondas de Rossby. Debido a que la mayoría de las soluciones obtenidas en el plano tangente son aproximadas, buscaremos soluciones por diferentes métodos para entender los fenómenos físicos asociados a la ecuación y descartar errores que podrían ser ocasionados por las aproximaciones realizadas. Esto nos dará una visión global del comportamiento de la ecuación. Además, nos dará un rango de soluciones más amplio en las que podemos intentar emplear la transformada de Watson en el siguiente capítulo. La variedad de soluciones obtenidas, tanto en el plano como en la esfera, es importante para entender en que circunstancias y que elementos se necesitan para aplicar la transformada de Watson y en cuales no.

6.1. Una solución particular en la esfera

Retomando la ecuación original (6.1), con $a = 1$ para dejarlo igual que en [9],

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0.$$

La solución más sencilla es la estacionaria, es decir cuando la derivada temporal del Laplaciano es cero, entonces

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0, \quad \Rightarrow \quad \psi = \text{constante}.$$

Es decir, ψ no depende de θ y es constante en ϕ . Las líneas de corriente se ven como en la figura (6.1).

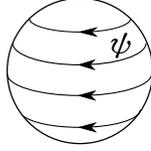


Figura 6.1: Solución estacionaria sobre la esfera.

A continuación encontraremos una solución particular, suponiendo que

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2\Omega}{\dot{\phi}} \psi \right), \quad (6.2)$$

con $\dot{\phi}$ la derivada de ϕ respecto al tiempo la cual es constante. Esta suposición es hecha por Longuet Higgins, ver referencia [9]. Básicamente nos dice que el cambio de la vorticidad $\nabla^2 \psi$ en el tiempo es igual a $\frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{d\psi}{d\phi}$, que es el cambio de la función de corriente en la dirección ϕ . Esto se podría pensar como forzar a que la propagación de la vorticidad, o su cambio de cualquier tipo en el tiempo, sea a lo largo de la dirección ϕ . Sustituyendo en (6.1) queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2\Omega}{\dot{\phi}} \psi \right) &= -2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \dot{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} &= 0, \end{aligned}$$

la cual podemos resolver usando características, ya que

$$\frac{d}{dt} \psi(\phi(t), t) = \psi_t + \psi_\phi \dot{\phi}.$$

Por lo tanto, $\phi = \dot{\phi}t + \phi_0$ es una característica con ϕ_0 una constante. Suponiendo que en $t = 0$, $f(\phi_0)$ es solución, entonces para t arbitrario $f(\phi - \dot{\phi}t)$. Dado que también hay dependencia en θ , la solución debe ser de la forma

$$\psi = f(\theta, \phi - \dot{\phi}t).$$

Ahora, notemos que los armónicos esféricos cumplen que

$$\nabla^2 S_n + n(n+1)S_n = 0.$$

Es decir, satisfacen automáticamente (6.2), si se cumple que $-2\Omega/\dot{\phi} = n(n+1)$, con esto hemos encontrado un conjunto de soluciones particulares de la forma

$$\psi = S_n(\theta, \phi - \dot{\phi}t) \quad \text{con :} \quad \dot{\phi} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}.$$

Estas soluciones las podemos entender como armónicos esféricos que se mueven con velocidad angular $\dot{\phi} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}$. Por ejemplo, para $n = 1$, el armónico esférico $S_1(\theta, \phi_0)$ rota con velocidad angular $-\Omega$ visto desde dentro de la esfera, y como la Tierra gira con velocidad Ω , el sistema no se mueve en absoluto visto desde un sistema fijo afuera. Para $n > 1$, el armónico esférico rota más lento que $-\Omega$. Visto desde la Tierra, estos modos giran cada vez más lento hacia el oeste conforme n aumenta, pero visto desde un sistema fijo externo, estos modos giran cada vez más rápido intentando alcanzar la velocidad angular de la Tierra conforme n crece. En otras palabras, el sistema tiende a ser llevado por la rotación de la Tierra. Esto es consistente con los resultados obtenidos de la relación de dispersión para el caso de ondas planas, ya que las ondas, vistas desde la Tierra, se mueven al oeste.

Unas posibles soluciones serían,

$$P_n^s(\cos \theta)e^{is(\phi - \dot{\phi}t)} \quad \text{y} \quad Q_n^s(\cos \theta)e^{is(\phi - \dot{\phi}t)},$$

donde P_n^s y Q_n^s denotan las funciones de Legendre y $\dot{\phi} = -2\Omega/(n(n+1))$. Notemos que $s = 0$ corresponde a un modo estacionario, es decir, visto desde la Tierra no se mueve. Esto es congruente con lo argumentado anteriormente ya que si $s = 0$, entonces $n = 0$ forzosamente, y ya vimos que $n = 0$ corresponde al modo que se mueve junto con la Tierra, el cual es sumamente aburrido e irrelevante, ya que es constante.

También debemos notar que el polo de los armónicos esféricos no tiene que coincidir necesariamente con el polo de rotación de la Tierra. Lo único importante es que el polo de cada armónico esférico, en función de n , gire alrededor del eje de rotación terrestre con velocidad angular $w = -2\Omega/(n(n+1))$, de este modo, nos podemos olvidar de la dependencia temporal por completo, lo cual no haremos ahora para evitar confusiones.

La forma de los patrones que se propagan hacia el oeste con velocidad angular $\dot{\phi} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}$ se pueden ver en la figura (6.2). Recordando que estas imágenes representan la función de corriente, las líneas que se ven en la

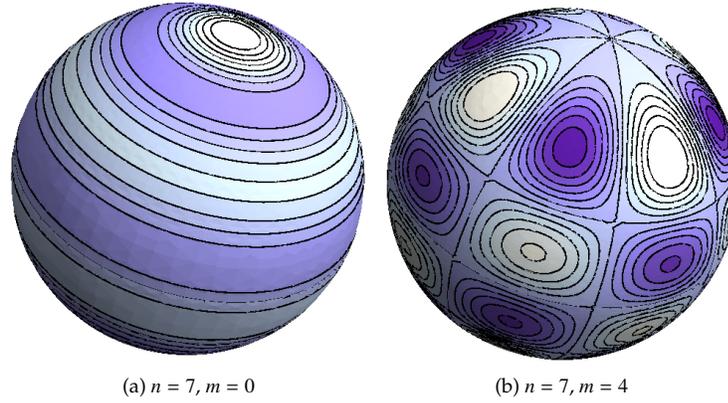


Figura 6.2: Solución en armónicos esféricos.

figura corresponden a la función de corriente constante, es decir líneas de corriente. Esto quiere decir que para el caso *b*) tenemos muchos vórtices propagándose a la izquierda, los más claros girando en un sentido y los más oscuros en el otro, ya que el cambio de color corresponde al cambio de signo de la función de corriente. En el caso de *a*) tenemos una especie de vórtice degenerado. En la zona clara las líneas de corriente van para un lado y en la zona oscura van para el otro. Recordemos que estos patrones giran con velocidad angular $\dot{\phi} = \frac{-2\Omega}{n(n+1)}$ vistos desde la Tierra.

Obtengamos una solución completa, tomemos el conjunto de soluciones,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-n}^n A_n^s P_n^s(\cos \theta) e^{is(\phi + \frac{2\Omega}{n(n+1)}t)},$$

con A_n^s constantes que dependen de n y s . Evaluando en $t = 0$ e igualándolo a una condición inicial, por ejemplo, $\delta(\theta)\delta(\phi)$, podemos emplear la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y de las exponenciales para obtener el valor de las constantes A_n^s . Multiplicando por P_n^s y por $e^{-is'\phi}$, e integrando

en los límites correspondientes, usando el hecho que

$$\int_{-1}^1 P_n^s(x) P_{n'}^s(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+s)!}{(n-s)!} \delta_{nn'} \quad \text{y}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-in'x} dx = 2\pi \delta_{nn'},$$

obtenemos que

$$A_n^s = \frac{(2n+1)(n-s)!}{4\pi(n+s)!},$$

Por lo que nuestra solución final queda,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-n}^n \frac{(2n+1)(n-s)!}{4\pi(n+s)!} P_n^s(\cos \theta) e^{is(\phi + \frac{2\Omega}{n(n+1)}t)}. \quad (6.3)$$

Recordemos que esta es tan sólo es una solución particular al problema en cuestión, dado que hicimos una suposición al principio la cual puede excluir muchas soluciones. La solución obtenida básicamente consiste de armónicos esféricos que se propagan a la izquierda (Oeste) con una velocidad que depende de n .

6.2. Soluciones en el plano tangente

Tomaremos de (6.1), $x \approx a\phi$ y $y \approx a\theta$ como en la figura (6.3), para ϕ y θ chicas, de modo que el parámetro de Coriolis lo podemos linealizar para $y \approx 0$ como $f = 2\Omega \sin y/a \approx 2\Omega y/a$. Llamémosle β al cambio de f en la dirección y , es decir $\beta = \frac{df}{dy} = 2\Omega/a$, con esto obtenemos la aproximación en el plano β , la cual básicamente consiste en linealizar el parámetro de Coriolis y ver el comportamiento de la ecuación en el plano tangente. Esta aproximación es ampliamente usada para describir Ondas de Rossby. La ecuación a resolver resulta simplemente

$$(\psi_{xx} + \psi_{yy})_t + \beta \psi_x = 0, \quad (6.4)$$

ya que $dx = a d\phi$, donde los subíndices denotan derivadas respecto a esa variable.

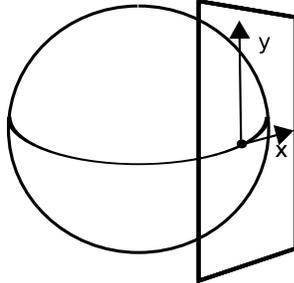


Figura 6.3: Plano tangente a la esfera.

6.2.1. La relación de dispersión para ondas planas

Propongamos como solución una onda plana de la siguiente forma,

$$\psi = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - wt)},$$

con $\vec{k} = (k, l) = (\kappa \cos \alpha, \kappa \sin \alpha)$ el vector de onda, w la frecuencia, κ la norma del vector de onda \vec{k} y α la dirección de propagación de la onda. Sustituyendo, se obtiene que

$$-iw[-k^2 - l^2] + i\beta k = 0, \quad \Rightarrow \quad (6.5)$$

$$\frac{w}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + l^2} = -\frac{\beta}{\kappa^2}. \quad (6.6)$$

Esta última es la relación de dispersión que se debe cumplir para ondas planas. La cantidad w/k es la velocidad de un frente que se propaga en la dirección x . Como tomamos $\beta = 2\Omega/a$ positivo, w/k es siempre negativa. Es decir, el frente se propaga a la izquierda (Oeste) con velocidad β/κ^2 , la cual sólo depende de la norma del vector de onda y no de la dirección de propagación. Ésta es una propiedad de las ondas de Rossby, siempre se propagan hacia el Oeste. Esto tiene mucho sentido, ya que si uno está parado sobre la Tierra y esta tiene una velocidad angular positiva (Este), al hacer una perturbación en el agua, visto desde la Tierra, aparenta ser que ésta se propaga hacia el Oeste gracias a la fuerza de Coriolis.

La relación de dispersión también se puede escribir como

$$\begin{aligned} k^2 + l^2 + \frac{\beta k}{w} &= 0, \quad \Rightarrow \\ k^2 + \frac{\beta k}{w} + \left(\frac{\beta}{2w}\right)^2 + l^2 &= \left(\frac{\beta}{2w}\right)^2, \quad \Rightarrow \\ \left(k + \frac{\beta}{2w}\right)^2 + l^2 &= \left(\frac{\beta}{2w}\right)^2. \end{aligned}$$

Lo anterior quiere decir que, para valores fijos de la frecuencia w , los vectores de onda \vec{k} se encuentran sobre un círculo con centro en $-\beta/2w$ y con radio $\beta/2w$. Reescribiendo de nuevo la relación de dispersión

$$w = -\beta k / (k^2 + l^2),$$

podemos obtener las velocidades de grupo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial k} &= \frac{\beta(k^2 - l^2)}{(k^2 + l^2)^2} = \frac{\beta}{\kappa^2} \cos 2\alpha \quad \text{y} \\ \frac{\partial w}{\partial l} &= \frac{\beta 2kl}{(k^2 + l^2)^2} = \frac{\beta}{\kappa^2} \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Veamos la figura (6.4) para entender mejor lo que sucede. El círculo dibu-

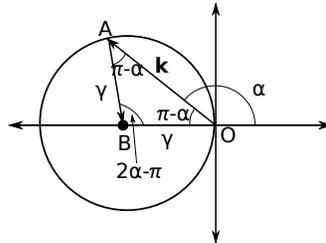


Figura 6.4: Plano del vector de onda \vec{k} .

jado son los posibles vectores de onda que puede haber para una w fija. El vector \vec{k} forma un ángulo de α con el eje x . Consecuentemente el vector \vec{BA} forma un ángulo de $2\alpha - \pi$, es decir el vector \vec{AB} forma un ángulo de 2α con el eje x . Tomando en cuenta que la magnitud del vector \vec{AB} es $\beta/2w$, ya que es el radio del círculo, podemos escribir la velocidad de grupo como

$$\vec{v}_g = \frac{\beta}{\kappa^2} (\cos 2\alpha, \sin 2\alpha) = \frac{2w}{\kappa^2} \vec{AB}.$$

Esto es interesante, ya que mientras el vector de onda siempre tiene componente en x negativa y esta restringido a un círculo, la velocidad de grupo siempre apunta hacia el centro del círculo. En concreto, si una onda plana se propaga al Este, tendrá una velocidad de grupo al Oeste, o si se propaga al Noroeste, entonces tendrá una velocidad de grupo al Sur. Un análisis más elaborado sobre esta relación se pueden buscar en [20, pag.108] o en [9].

En otras palabras, la velocidad de fase siempre tiene una componente en dirección Oeste, pero la velocidad de grupo puede apuntar en cualquier dirección. Entonces, a pesar de que las ondas siempre se propaguen hacia el oeste, puede haber un flujo de energía en cualquier dirección, ya que la velocidad de grupo esta asociada al flujo de energía. Esto es congruente con las soluciones obtenidas más adelante en la esfera, ya que todas nuestras velocidades de fase se propagan al oeste.

6.2.2. Empleando Series de Fourier en y .

Como queremos obtener la función de Green de la ecuación (6.4), escribamos la ecuación con una fuente puntual en $y = 0$ y $x = 0$, e instantánea en $t = 0$,

$$(\psi_{xx} + \psi_{yy})_t + \beta\psi_x = \delta(x)\delta(y)\delta(t).$$

Esta ecuación diferencial parcial se puede transformar en una ecuación diferencial ordinaria con ayuda de la transformada de Laplace y las series de Fourier. Sin pérdida de generalidad tomemos $\beta = 1$ para simplificar los cálculos. Usando el hecho de que

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0),$$

donde \mathcal{L} denota la transformada de Laplace y $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. Calculemos la Transformada de Laplace de toda la ecuación obteniendo,

$$s[\tilde{\psi}_{xx} + \tilde{\psi}_{yy}] + \tilde{\psi}_x = \delta(x)\delta(y). \quad (6.7)$$

La función $\tilde{\psi}$ es la transformada de Laplace de la función ψ ; la condición inicial usada es $f(0) = 0$. Ya se removió la dependencia temporal, ahora

falta deshacerse de una de las variables espaciales. Para esto desarrollemos $\tilde{\psi}$ en serie de Fourier en y ,

$$\tilde{\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{imy}, \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} s[A_{m,xx} e^{imy} - m^2 A_m e^{imy}] + A_{m,x} e^{imy} = \delta(x)\delta(y).$$

En realidad el valor $m = 0$ no es necesario tomarlo en cuenta ya que es un modo estacionario, tal y como se vio en el caso de la esfera. Multiplicando por e^{-imy} e integrando de $-\pi$ a π podemos usar la ortogonalidad de las exponenciales y obtener que

$$2\pi(s[A_{m,xx} - m^2 A_m] + A_{m,x}) = \delta(x).$$

Que es lo mismo que

$$A_m'' + \frac{A_m'}{s} - m^2 A_m = \frac{\delta(x)}{2\pi s}, \quad (6.8)$$

donde las $'$ denotan derivadas respecto a x . Ésta ya es una ecuación diferencial ordinaria que es muy sencilla de resolver. Para resolver la homogénea, propongamos como solución e^{rx} . Sustituyendo se obtiene el polinomio característico

$$r^2 + \frac{r}{s} - m^2 = 0, \quad \Rightarrow$$

$$r_{\pm} = -\frac{1}{2s} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{s^2} + 4m^2}.$$

Es fácil notar que $r_+ > 0$ y que $r_- < 0$, por lo tanto para tener soluciones que tengan sentido físico hay que asegurarse que las soluciones estén acotadas, entonces,

$$A_m = \begin{cases} Ae^{r_- x} & x \geq 0, \\ Be^{r_+ x} & x < 0, \end{cases}$$

con A y B constantes. Como $\tilde{\psi}$ debe ser continua en $x = 0$, entonces A_m también debe serlo. Evaluando ambos casos en cero e igualando obtenemos que $A = B$. Para calcular la constante A , integremos la ecuación 6.8 de $-\epsilon$ a

$\epsilon,$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_x(\epsilon) - \tilde{\psi}_x(-\epsilon) + \frac{1}{s}(\tilde{\psi}(\epsilon) - \tilde{\psi}(-\epsilon)) - m^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi s}, \quad \Rightarrow \\ \tilde{\psi}_x(\epsilon) - \tilde{\psi}_x(-\epsilon) = \frac{1}{2\pi s}, \end{aligned}$$

ya que $\tilde{\psi}$ es continua en cero y ϵ tenderá a cero. Sustituyendo nuestra solución se obtiene que

$$Ar_-e^{r_-\epsilon} - Ar_+e^{-r_+\epsilon} + Ae^{r_-\epsilon} - Ae^{-r_+\epsilon} = \frac{1}{2\pi s}.$$

Haciendo ϵ tender a cero y despejando A obtenemos

$$A = \frac{1}{2\pi s(r_- - r_+)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1 + 4m^2 s^2}},$$

y la solución queda

$$A_m = \begin{cases} \frac{e^{r_-x}}{2\pi \sqrt{1 + 4m^2 s^2}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{r_+x}}{2\pi \sqrt{1 + 4m^2 s^2}} & x < 0. \end{cases}$$

Recordando que la frecuencia es velocidad entre longitud de onda, nos conviene concentrarnos en las frecuencias pequeñas, ya que estas describen a las ondas con longitudes de onda muy grandes que son las que nos interesan. Más aun, como la frecuencia es pequeña y es el inverso del periodo nos interesará lo que ocurre después de largos intervalos de tiempo. Es por esto que desarrollaremos en Taylor a primer orden las raíces r_{\pm} para las frecuencias $s \ll 1$, entonces

$$\begin{aligned} r_{\pm} = -\frac{1}{2s} \pm \frac{1}{2s} \sqrt{1 + 4m^2 s^2} \approx -\frac{1}{2s} \pm \frac{1}{2s}(1 + 2m^2 s^2), \quad \Rightarrow \\ r_- \approx -\frac{1}{s} - m^2 s \quad \text{y} \\ r_+ \approx m^2 s, \end{aligned}$$

donde usamos el desarrollo en serie de Taylor de $\sqrt{1+h} \approx 1+h/2$, lo cual simplifica A_m considerablemente dejando

$$A_m = \begin{cases} \frac{e^{-x/s-m^2sx}}{2\pi\sqrt{1+4m^2s^2}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{m^2sx}}{2\pi\sqrt{1+4m^2s^2}} & x < 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Ahora, nos falta invertir la transformada de Laplace original para recuperar ψ . El caso más sencillo es el caso $x < 0$, así que empecemos por éste. Usando que

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = H(t-a)f(t-a) \quad y$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right] = J_0(at),$$

con H la función escalón de Heaviside y J_0 la función de Bessel de orden cero, podemos invertir A_m para $x < 0$ si lo escribimos como

$$A_{m, x<0} = \frac{e^{m^2sx}}{4\pi|m|\sqrt{\left(\frac{1}{2m}\right)^2 + s^2}}.$$

Entonces, resulta evidente que $\mathcal{L}^{-1}[A_{m, x<0}]$ es

$$\frac{H(t+m^2x)J_0\left(\frac{1}{2m}(t+m^2x)\right)}{4\pi|m|},$$

con lo que obtenemos la solución de ψ para $x < 0$ que es

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imy} \frac{H(t+m^2x)J_0\left(\frac{1}{2m}(t+m^2x)\right)}{4\pi|m|}, \quad (6.10)$$

con $m \neq 0$ por razones que veremos más adelante. Antes de describir físicamente esta solución, concentrémonos en obtener la transformada inversa de Laplace para el caso en que $x > 0$. Para esto podemos emplear dos métodos, ambos arrojarán resultados que nos ayudaran a entender el comportamiento de la ecuación. El primero es utilizar la convolución para invertir

y dejar el resultado en forma integral para su evaluación numérica, y el segundo es utilizar el método del descenso rápido para aproximar la integral inversa de Laplace.

Para resolver usando la convolución hay que escribir $A_{x \geq 0}^m$ como el producto de dos funciones de s ,

$$A_{x \geq 0}^m = \frac{e^{-m^2 s x}}{2\pi \sqrt{1 + 4m^2 s^2}} e^{-x/s}.$$

De este modo, podemos emplear la convolución que dice que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau,$$

con f y g las transformadas inversas de Laplace de F y G respectivamente. Haciendo

$$F(s) = \frac{e^{-m^2 s x}}{2\pi \sqrt{1 + 4m^2 s^2}} \Rightarrow f(t) = \frac{H(t - m^2 x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t - m^2 x)\right)}{4\pi|m|},$$

lo cual se obtiene de manera análoga al caso $x < 0$. Sólo nos falta invertir

$$G(s) = e^{-x/s}.$$

Calculemos la Transformada inversa de Laplace de G ,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-x/s} e^{st} ds, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s' - \frac{xt}{s'}} \frac{ds'}{t} \quad \text{con : } s' = st. \end{aligned}$$

Esta integral es una función de Bessel, lo cual es evidente al emplear la representación integral de las funciones de Bessel¹,

$$\boxed{J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-\nu-1} e^{s - \frac{z^2}{4s}} ds,} \quad (6.11)$$

con $\nu = -1$ y $z^2/4 = xt$, entonces $g(t)$ se escribe como

$$g(t) = \sqrt{\frac{x}{t}} J_{-1}(2\sqrt{xt}).$$

¹Ésta se puede encontrar en [25, pg.177].

Recordando la convolución, podemos obtener la transformada inversa de Laplace de $A_{x \geq 0}^m$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(A_{x \geq 0}^m) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\tau - m^2x)J_0\left(\frac{1}{2m}(\tau - m^2x)\right)}{4\pi|m|} \sqrt{\frac{x}{t - \tau}} J_{-1}\left(2\sqrt{x(t - \tau)}\right) d\tau.\end{aligned}$$

Eliminando la función escalón de Heaviside con el límite de integración obtenemos finalmente,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(A_{x \geq 0}^m) = \int_{m^2x}^{\infty} \frac{\sqrt{x}J_{-1}\left(2\sqrt{x(t - \tau)}\right)J_0\left(\frac{1}{2m}(\tau - m^2x)\right)}{4\pi|m|\sqrt{t - \tau}} d\tau.} \quad (6.12)$$

Esta integral es el valor exacto de la transformada inversa que estamos buscando, pero esta integral no tiene solución analítica y se tiene que evaluar numéricamente para cada t , m y x dados. Además de consumir mucho tiempo computacional, la integral tiene un polo en $t = \tau$ lo cual puede hacer que la aproximación numérica sea muy mala. Finalmente, como las funciones se encuentran adentro de la integral, resulta difícil dar una interpretación física de los términos que la componen y su contribución al resultado final. Es por todas estas razones que intentaremos resolver la transformada inversa por otro método más conveniente.

Utilicemos el método del descenso más rápido para aproximar la integral de la transformada inversa de Laplace. En la parte uno ya se explicó como funciona este método y de donde se deduce, así que ahora lo aplicaremos directamente. Este método sirve para aproximar integrales complejas y el resultado general es,

$$f(t) = \int_C g(s)e^{th(s)} ds \sim g(s_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{th''(s_0)}} e^{th(s_0)} \quad \text{con :} \quad h'(s_0) = 0, \quad (6.13)$$

donde z_0 es punto crítico de $h(z)$ ². La integral a resolver es la siguiente

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(A_m)_{x \geq 0} &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{-x/s - m^2 s x + s t}}{\sqrt{1 + 4m^2 s^2}} ds, \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{t(s - \frac{x}{t}(1/s + m^2 s))}}{\sqrt{1 + 4m^2 s^2}} ds.\end{aligned}$$

La suposición para poder emplear el método del descenso más rápido será que $t \gg 1$, la cual es congruente con la hecha en el caso anterior en donde $s \ll 1$, y también que x/t es constante. Entonces hay que encontrar los puntos críticos de $h(s)$,

$$\begin{aligned}h(s) = s - \frac{x}{t}(1/s + m^2 s) &\Rightarrow h'(s_0) = 1 - \frac{x}{t}(-1/s_0^2 + m^2) = 0 \\ \Rightarrow s_0 &= \pm \sqrt{\frac{1}{m^2 - t/x}}.\end{aligned}$$

Además como $t \gg 1$, conviene asegurarse de que $t \geq m^2 x$, de modo que los puntos críticos s_0 no pasen de ser reales a ser imaginarios al variar t poniendo en riesgo nuestra aproximación. De esta manera, los puntos críticos son puramente imaginarios. Ahora, nuestra integral tiene dos cortes rama dados por el término $1/\sqrt{1 + 4m^2 s^2}$, hay que tener cuidado que los puntos críticos nunca pasen por los cortes rama. Dado que $1/\sqrt{1 + 4m^2 s^2} = 1/(\sqrt{1 + 2msi}\sqrt{1 - 2msi})$, usando la rama principal del logaritmo, los cortes rama estarán desde los puntos $s = i/(2m)$ y $s = -i/2m$ hasta $i\infty$ y $-i\infty$ respectivamente, lo que quiere decir que nuestros puntos críticos deben de estar en el segmento entre $s = -i/(2m)$ y $s = i/2m$, es decir,

$$\begin{aligned}\frac{-i}{2m} < s_0 < \frac{i}{2m} &\Rightarrow \frac{-1}{2m} < \sqrt{\frac{1}{t/x - m^2}} < \frac{1}{2m} \\ \Rightarrow \frac{1}{t/x - m^2} < \frac{1}{4m^2} &\Rightarrow 4m^2 < t/x - m^2 \\ &\Rightarrow t > 5m^2 x,\end{aligned}$$

lo cual concuerda con el hecho de que $t \gg 1$. Además, como pedimos que x/t sea constante y $x, t > 0$, esta condición nos dice que $0 \leq \frac{x}{t} < (1/5m^2)$, es

²Para detalles de la fórmula y el método ver [16, pag.50]

decir la constante esta acotada entre 0 y $1/(5m^2)$.

Debido a que no hay cambio en la parte real de $h(s)$ al usar el punto crítico con signo positivo o negativo, resulta equivalente usar uno o el otro, así que por simplicidad elegiremos el positivo. Calculemos $h''(s_0)$,

$$h''(s) = \frac{-2x}{ts^3} \Rightarrow h''(s_0) = -\frac{2x}{t} \left(m^2 - \frac{t}{x}\right)^{3/2} \neq 0,$$

con lo que ya podemos emplear (6.13) para obtener que

$$\mathcal{L}^{-1}(A_m)_{x \geq 0} = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{e^{ih(s_0)}}{\sqrt{1 + 4m^2/(m^2 - t/x)}} \sqrt{\frac{\pi}{x(m^2 - t/x)^{3/2}}},$$

y como $h(s_0)$ es

$$h(s_0) = \frac{1}{\sqrt{m^2 - t/x}} - \frac{x}{t} \left(\sqrt{m^2 - t/x} + \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - t/x}} \right),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(A_m)_{x \geq 0} &= \frac{1}{4\pi^2 i} e^{\frac{t}{\sqrt{m^2 - t/x}} - x \frac{1+m^2}{\sqrt{m^2 - t/x}}} \sqrt{\frac{\pi}{x(m^2 - t/x)^{3/2}(1 + 4m^2/(m^2 - t/x))}}, \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} e^{\frac{i}{\sqrt{t/x - m^2}}(t - x(1+m^2))} \sqrt{\frac{\pi}{x(m^2 - t/x)^{3/2} + 4m^2 x(m^2 - t/x)^{1/2}}}. \end{aligned}$$

Juntándola con la solución para $x < 0$ (6.10), obtenemos la solución final,

$$\psi = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{imy} \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi} H(t - 5m^2 x) e^{\frac{i}{\sqrt{t/x - m^2}}(t - x(1+m^2))}}{4\pi^2 i \sqrt{x(m^2 - t/x)^{3/2} + 4m^2 x(m^2 - t/x)^{1/2}}} & x \geq 0; \\ \frac{H(t + m^2 x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t + m^2 x)\right)}{4\pi|m|} & x < 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Nótese que agregamos una función de Heaviside para el caso $x \geq 0$ ya que nos garantiza que $t \geq 5m^2 x$. Hagamos lo mismo, pero con una fuente más suave en y para obtener una mejor solución. Dejemos el análisis para el final.

Cambio de fuente en y

Retomando (6.7), cambiemos la $\delta(y)$ por e^{-ay^2} con $a > 0$, entonces al emplear la ortogonalidad o superposición tenemos que calcular la integral,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ay^2} e^{-imy} dy.$$

Ésta se puede resolver exactamente completando el cuadrado y utilizando Erf, pero quedará en función de Erf y eso sólo complica las cosas, así que aproximemos para cuando a no es chica. En tal caso la exponencial decae tan rápido que las contribuciones más grandes a la integral serán cerca del cero, por lo tanto no cambiara mucho si movemos los límites de integración de $-\infty$ a ∞ . Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} e^{-imy} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{m^2}{4a}},$$

ya que esa integral es la transformada de Fourier de una Gaussiana. Y como sólo depende de m y de la constante a , este factor queda constante a lo largo de todas las manipulaciones que hicimos en el caso anterior. De hecho sólo hace falta multiplicarlo por la solución que ya teníamos para obtener la solución para la nueva fuente. La solución queda,

$$\psi = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{imy} \begin{cases} \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t - 5m^2 x) e^{i \frac{1}{\sqrt{t/x-m^2}}(t-x(1+m^2))}}{4\pi \sqrt{ai} \sqrt{x(m^2 - t/x)^{3/2} + 4m^2 x(m^2 - t/x)^{1/2}}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t + m^2 x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t + m^2 x)\right)}{4 \sqrt{a\pi} |m|} & x < 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Las gráficas de esta solución para la suma de los término $m = -1$ y $m = 1$, y la suma de $m = -2$ y $m = 2$ las podemos ver en la figura (6.5). Analicemos la solución para $x \geq 0$, el término más importante es la exponencial. Se pueden apreciar dos fenómenos. El primero consiste en la propagación a la derecha asociada al término $t - x(1 + m^2)$. Éste muy probablemente sea consecuencia de haber aproximado para tiempos grandes ya que las ondas propaguen a la derecha no tiene mucho sentido físico, tal y como lo vimos al obtener la relación de dispersión.

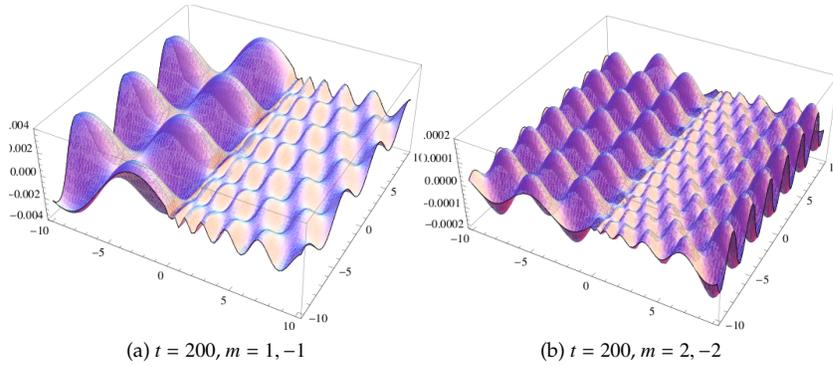


Figura 6.5: Solución con series de Fourier en y .

Por el otro lado, todo el argumento de la exponencial para $t \gg 1$ se comporta como \sqrt{tx} , lo cual quiere decir que a conforme t crece veremos que el patrón se comprime en x . Para ver este fenómeno, veamos las curvas de nivel de la solución en la figura (6.6), donde es muy claro como después de un tiempo, el patrón del lado derecho $x > 0$ se comprimió.

Para $x < 0$, el análisis es muy sencillo, el argumento de la función de Bessel es un término que propaga a la izquierda. Es importante notar que la velocidad de propagación esta relacionada con la frecuencia m , esta dará lugar a fenómenos de dispersión.

Cuando la función de corriente es constante, representa líneas de corriente. Es decir, los contornos de la figura (6.6) son líneas de corriente y son círculos. En otras palabras son vórtices, los que son más claros son vórtices en un sentido y lo más oscuros son vórtices en el otro sentido, ya que la función de corriente cambia de signo. Esta solución representa vórtices propagándose a la izquierda mientras del lado derecho se van comprimiendo. La solución del lado izquierdo es sumamente parecida a la solución que se obtendrá en la esfera, vórtices propagándose al Oeste (izquierda).

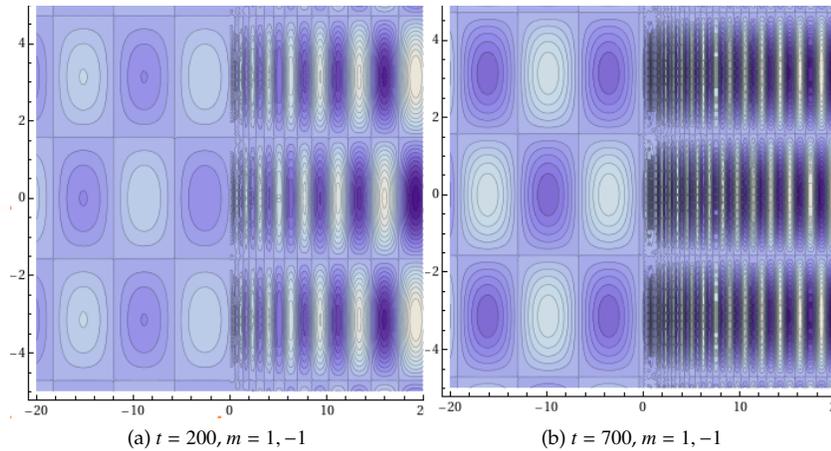


Figura 6.6: Curvas de Nivel de la solución a diferentes tiempos.

6.2.3. Empleando la Transformada de Fourier en y .

Retomando la Transformada de Laplace de la ecuación original (6.7),

$$s[\tilde{\psi}_{xx} + \tilde{\psi}_{yy}] + \tilde{\psi}_x = \delta(x)\delta(y). \quad (6.16)$$

Empleando la convención apropiada de la transformada de Fourier, que es cualquiera en la que la exponencial en la integral de la transformada inversa de Fourier tenga signo positivo de modo que,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (iw)^n \hat{f}(w).$$

Al aplicarla a la ecuación se obtiene,

$$s[-l^2 \hat{\psi} + \hat{\psi}_{xx}] + \hat{\psi}_x = \delta(x),$$

reescribiendola,

$$\hat{\psi}_{xx} + \frac{\hat{\psi}_x}{s} - l^2 \hat{\psi} = \frac{\delta(x)}{s}.$$

Que es exactamente igual a la ecuación (6.8), que obtuvimos al emplear series de Fourier en y , y por lo tanto nuestra solución es exactamente igual

a (6.9), excepto por una constante que depende de la convención usada. Evidentemente, en vez de tener los coeficientes de Fourier A_m , tendremos la Transformada de Fourier $\hat{\psi}$ de $\tilde{\psi}$,

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \frac{e^{-x/s-l^2 sx}}{\sqrt{1+4l^2 s^2}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{l^2 sx}}{\sqrt{1+4l^2 s^2}} & x < 0. \end{cases}$$

Nótese que cambiamos m por l para resaltar que ya no se trata de un espectro discreto. Nuevamente como estamos aproximando para $s \ll 1$, podemos aproximar la raíz en el denominador a uno. La aproximación puede parecer muy abrupta, pero el cálculo se hizo con una mejor aproximación sin tener mejoras cualitativas en los resultados, entonces nos queda,

$$\hat{\psi} = \begin{cases} e^{-x/s-l^2 sx} & x \geq 0; \\ e^{l^2 sx} & x < 0. \end{cases}$$

Ahora como la transformada de Fourier de esas funciones es bien conocida,

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{l^2}{4a}}] = \sqrt{2a}e^{-ay^2},$$

con a constante, podemos invertir la transformada de Fourier en y obteniendo $\tilde{\psi}$,

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \frac{e^{-x/s-\frac{y^2}{4sx}}}{\sqrt{2sx}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{\frac{y^2}{4sx}}}{\sqrt{-2sx}} & x < 0. \end{cases}$$

Sólo falta tomar la transformada inversa de Laplace de estas funciones las cuales nuevamente serán funciones de Bessel. El procedimiento para obtenerlas es análogo al empleado en la sección anterior y no tiene sentido repetirlo. Al multiplicar por e^{st} , integrar y cambiar de variable nos quedan

integrales como (6.11). El resultado final es,

$$\psi \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x}} \left[\frac{x + \frac{y^2}{4x}}{t} \right]^{1/4} J_{-1/2} \left[2\sqrt{t \left(x + \frac{y^2}{4x} \right)} \right] & x \geq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{-2x}} \left[\frac{-y^2}{4xt} \right]^{1/4} J_{-1/2} \left[2\sqrt{\frac{-y^2 t}{4x}} \right] & x < 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Para hacer un análisis más completo, mostramos la gráfica de esta función a diferentes tiempos en la figura (6.7). Es evidente que la solución tiene una

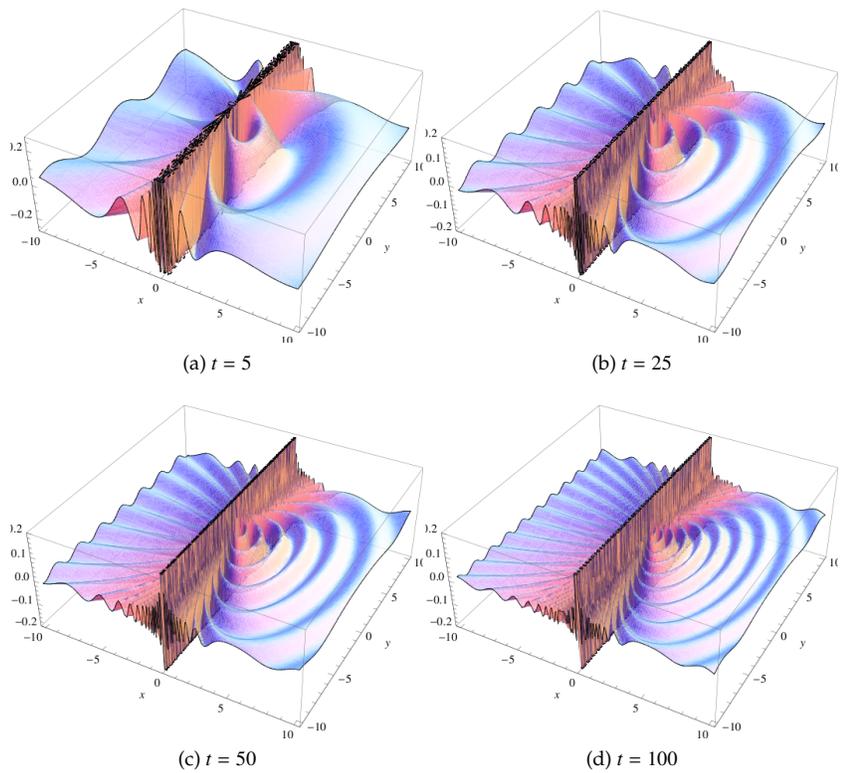


Figura 6.7: Solución empleando la Transformada de Fourier.

singularidad en $x = 0$, esta se puede deber a dos razones. Se puede deber a las aproximaciones usadas o a las fuentes empleadas, ya que se emplea la delta tanto en x como en y . A continuación resolveremos un caso con una fuente más suave, pero antes será necesario hacer algunos comentarios de la solución obtenida.

La solución para $x > 0$ contiene como argumento de la función de Bessel un término que va como $t \left(x + \frac{y^2}{4x} \right)$, veamos las curvas de nivel de esta función. Tomemos k una constante, entonces

$$\begin{aligned} x + \frac{y^2}{4x} = k &\quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{4} = kx - x^2 \quad \Rightarrow \\ x^2 - kx + \frac{k^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \frac{k^2}{4} &\quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{k}{2} \right)^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{k^2}{4}, \end{aligned}$$

la cual evidentemente es la ecuación de un elipse; las curvas de nivel son elipses. Al multiplicar este término por t dentro del argumento de la función de Bessel, hace que todo este patrón de elipses se comprima hacia el origen conforme t crece. Es decir, para $x \geq 0$ nuestra solución comprime elipses y eso es justamente lo que vemos en la figura (6.7).

En el caso de $x < 0$, el argumento de la función de Bessel es, $\frac{y^2 t}{4x}$, sus curvas de nivel,

$$\frac{y^2}{4x} = k \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4kx,$$

las cuales son parábolas tales y como se ven en la figura (6.7). Esto quiere decir que conforme t crece las parábolas se comprimen, pero en este caso no es tan claro el como se comprimen como en el caso anterior. Si tomamos y fija, el argumento queda como t/x , el cual al hacer crecer t expande en la dirección x . De la misma forma, si tomamos x fija, el argumento va como ty , el cual comprime en la dirección y . Es decir, la solución para $x < 0$ expande en x y comprime en y patrones con forma parabólica.

Para un análisis más completo, veamos las curvas de nivel graficadas en la figura (6.8). En ésta se puede apreciar lo que acabamos de comentar sobre parábolas y elipses, pero vemos aun más cosas. Dentro de las parábolas, se forman vórtices con forma parabólica. Esto se debe a que la amplitud de la solución (6.17) también depende de la posición y esta altera la forma de las curvas de nivel de ψ . Lo anterior significa que mientras de un lado

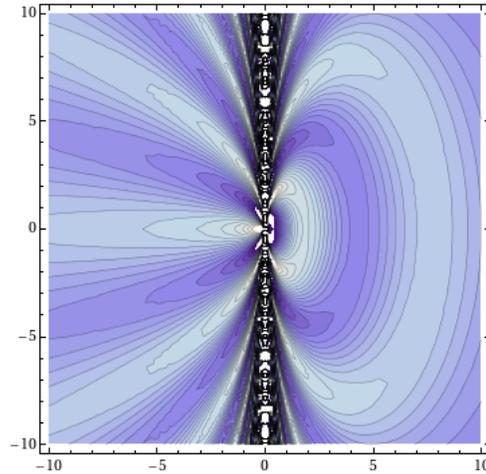


Figura 6.8: Curvas de nivel de (6.17).

comprime vórtices elípticos, del otro lado expande vórtices parabólicos. Fijándonos más de cerca, la figura (6.8) se parece un poco a (6.6), pero como si lo hubiésemos comprimido en y hacia el origen, esto es consecuencia de haber empleado la transformada de Fourier en vez de las series, es decir, de haber supuesto un espectro continuo y no discreto.

Cambio de fuente

Antes de continuar con el análisis de la solución veamos que pasa si ponemos una fuente más suave, por ejemplo $\delta(x)e^{-y^2}$. Podríamos emplear el principio de superposición para funciones de Green, pero no quedará una integral amigable, así que mejor volvamos a la primera ecuación de esta sección (6.16), y empleemos la transformada de Fourier, pero con nuestra nueva fuente, lo cual da como resultado,

$$\hat{\psi}_{xx} + \frac{\hat{\psi}_x}{s} - l^2 \hat{\psi} = \frac{\delta(x) e^{-l^2/4}}{s \sqrt{2}}.$$

Todo es análogo a lo hecho para la fuente anterior, buscamos soluciones a la homogénea y con ayuda de estas calculamos el valor de la constante para obtener la solución particular. Como es de esperarse, la solución que-

da exactamente igual, excepto por un factor nuevo que va como $\frac{e^{-l^2/4}}{\sqrt{2}}$. La solución se ve de la forma,

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \frac{e^{-x/s-l^2sx-l^2/4}}{\sqrt{2}\sqrt{1+4l^2s^2}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{l^2sx-l^2/4}}{\sqrt{2}\sqrt{1+4l^2s^2}} & x < 0, \end{cases}$$

donde nuevamente aproximamos, para $s \ll 1$, la raíz en el denominador a uno, dejando

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \frac{e^{-x/s-l^2(sx+1/4)}}{\sqrt{2}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{l^2(sx-1/4)}}{\sqrt{2}} & x < 0, \end{cases}$$

lo cual lo podemos invertir con la misma fórmula empleada antes: $\mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{l^2}{4s}}] = \sqrt{2}ae^{-ay^2}$, obteniendo

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \frac{e^{-x/s-y^2/(1+4sx)}}{\sqrt{1+4sx}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{-y^2/(1-4sx)}}{\sqrt{1-4sx}} & x < 0. \end{cases}$$

Ahora nos falta tomar la transformada de Laplace de este resultado, para esto intentemos escribirla de un forma semejante a la integral (6.11). Empecemos con $x \geq 0$, nuevamente aproximamos para $s \ll 1$ la raíz en el denominador a uno. Después, aproximemos con una serie de Taylor el factor en la exponencial $\frac{1}{1+4sx} \approx 1 - 4sx$, lo que nos da,

$$\psi = \frac{e^{-y^2}}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st+4y^2xs-x/s} ds,$$

donde ya aplicamos la Transformada inversa de Laplace a $\hat{\psi}$. Cambiemos de variable $s' = s(t + 4y^2x)$, entonces

$$\psi = \frac{e^{-y^2}}{2\pi i(t + 4y^2x)} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s'-x(t+4y^2x)/s'} ds',$$

la cual ya es una integral de Bessel del tipo (6.11), escribiéndolo apropiadamente

$$\psi = \frac{e^{-y^2} \sqrt{x}}{\sqrt{t + 4y^2x}} J_{-1}[2\sqrt{x(t + 4y^2x)}].$$

De manera semejante lo hacemos para $x < 0$. Tenemos

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-y^2/(1-4sx)+st} ds',$$

cambiando de variable a $s' = 1 - 4sx$, obtenemos

$$\psi = \frac{e^{\frac{t}{4x}}}{-8x\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-y^2/s' - ts'/(4x)} ds'.$$

Nuevamente cambiando de variable a $s'' = -ts'/(4x)$, queda

$$\psi = \frac{e^{\frac{t}{4x}}}{-2t\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{y^2t/(4xs'')+s''} ds'',$$

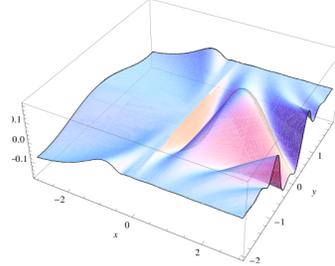
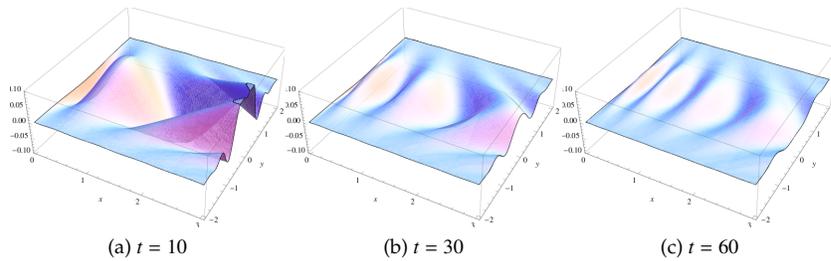
lo cual nuevamente ya es una integral de Bessel del tipo (6.11), escribiéndolo como función de Bessel,

$$\psi = e^{\frac{t}{4x}} \sqrt{\frac{-y^2}{4xt}} J_{-1}[\sqrt{-y^2t/x}].$$

Escribiendo las dos soluciones,

$$\psi = \begin{cases} \frac{e^{-y^2} \sqrt{x}}{\sqrt{t + 4y^2x}} J_{-1}[2\sqrt{x(t + 4y^2x)}] & x \geq 0; \\ e^{\frac{t}{4x}} \sqrt{\frac{-y^2}{4xt}} J_{-1}[\sqrt{-y^2t/x}] & x < 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

Nuevamente mostramos el comportamiento de esta solución gráficamente en la figura (6.9). Si usamos las mismas escalas no se observa bien lo que ocurre en $x < 0$ o $x \geq 0$ veamos las soluciones por separado, para $x \geq 0$ podemos ver la figura (6.10), y para $x < 0$ podemos ver la figura (6.11). Cabe notar que ahora las solución no es singular para $x = 0$, así que la singularidad se deba muy probablemente a las fuentes usadas. Es difícil saber si realmente es sólo por esa razón que la singularidad desapareció ya que

Figura 6.9: Solución a $t = 5$ Figura 6.10: Solución con Gaussiana para $x \geq 0$.

hicimos varias aproximaciones para llegar a este último resultado.

Nuevamente, para $x < 0$ tenemos el mismo fenómeno que en el caso de la fuente anterior, comprime en y , expande en x , pero para $x \geq 0$ es un poco diferente. El argumento dentro de la función de Bessel es $x(t + 4y^2x)$. De aquí, se pueden observar dos fenómenos interesantes. Hay propagación de hipérbolas a la izquierda por el factor $t + 4y^2x$, ya que $4y^2x = cte$ son hipérbolas, pero también hay un fenómeno de compresión en x , ya que todo el término de propagación está multiplicado por x . Este último es más fácil de entender para $t \gg 1$ ya que todo el argumento aproxima a xt , lo cual es evidentemente una compresión en x conforme t crece.

Básicamente tenemos lo mismo que con la fuente anterior. Compresión en x para $x \geq 0$ y expansión en x para $x < 0$. Al utilizar una fuente diferente, apareció un término que de algún modo u otro propaga. Considerando esta solución y la encontrada anteriormente con series de Fourier en y ,

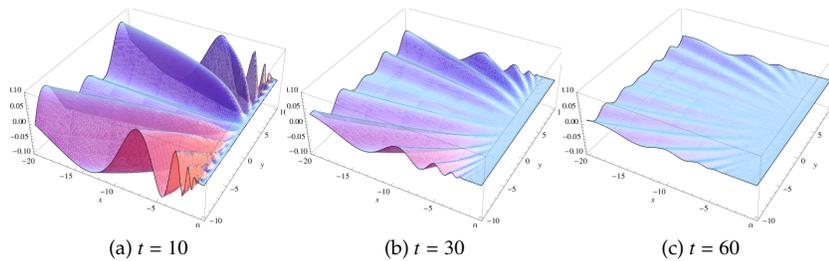


Figura 6.11: Solución con Gaussiana para $x < 0$.

podemos decir que las soluciones son una combinación de términos que propagan, comprimen o expanden. Eso quiere decir que si uno fuerza una solución que propaga, como lo hicimos para el caso de ondas planas, probablemente se este perdiendo una buena parte de la solución.

Por el otro lado, hemos empleado diversas aproximaciones, y podría ser que nuestra solución este siendo afectada gravemente. No estamos seguros si los fenómenos de compresión y expansión están asociados al hecho de haber empleado aproximaciones asintóticas o de cualquier otro tipo. En específico, resulta muy curioso el fenómeno de compresión para $x \geq 0$ que continuamente surge de las soluciones. Intentemos por otros métodos y veamos si este fenómeno se debe a emplear aproximaciones o no.

6.2.4. Empleando Series de Fourier en x .

Partimos de cuando aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación original y obteníamos (6.7),

$$s[\tilde{\psi}_{xx} + \tilde{\psi}_{yy}] + \tilde{\psi}_x = \delta(x)\delta(y).$$

Luego desarrollamos $\tilde{\psi}$ en Fourier en x ,

$$\tilde{\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx},$$

con B_m los coeficientes de Fourier. Sustituimos, integramos y usamos la ortogonalidad de la exponencial compleja³, obteniendo que para cada m se

³No repetimos este procedimiento porque es completamente análogo al empleado al hacer series de Fourier en y .

cumple

$$s[-m^2 B_m + B_m''] + imB_{m,x} = \frac{\delta(y)}{2\pi},$$

donde ' denota derivada respecto a y . Reescribiendo la ecuación se tiene que

$$B_m'' + B_m \left(\frac{im}{s} - m^2 \right) = \frac{\delta(y)}{2\pi s}. \quad (6.19)$$

Ecuación cuyas soluciones homogéneas son muy fáciles y son de la forma

$$B_m = e^{\pm \sqrt{m^2 - im/s}}.$$

Ahora, como m^2 es real y positivo, tomamos la raíz de $\sqrt{m^2 - im/s}$ con parte real positiva, de manera que podamos tener soluciones físicamente posibles, es decir acotadas cuando $y \rightarrow \infty$, entonces nos queda,

$$B_m = \begin{cases} Ae^{-y\sqrt{m^2 - im/s}} & y \geq 0; \\ Be^{y\sqrt{m^2 - im/s}} & y < 0. \end{cases}$$

Como esperamos que la función sea continua en $y = 0$, entonces es trivial que $A = B$. El coeficiente A lo determinará el lado derecho de la ecuación. Integrando la ecuación de $-\epsilon$ a ϵ obtenemos

$$B_m'(\epsilon) - B_m'(-\epsilon) = \frac{1}{2\pi s},$$

ya que B_m es continua y la integral de la delta es uno. Sustituyendo los valores correspondientes de B_m ,

$$-A\sqrt{m^2 - im/s} - B\sqrt{m^2 - im/s} = \frac{1}{2\pi s} \quad \text{como :} \quad A = B \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{-1}{4\pi s \sqrt{m^2 - im/s}},$$

lo que nos lleva al valor final de B_m ,

$$B_m = \begin{cases} \frac{-e^{-y\sqrt{m^2 - im/s}}}{4\pi s \sqrt{m^2 - im/s}} & y \geq 0; \\ \frac{-e^{y\sqrt{m^2 - im/s}}}{4\pi s \sqrt{m^2 - im/s}} & y < 0. \end{cases}$$

Falta hacer la transformada inversa de Laplace, la cual en este caso no la pudimos obtener, pero hay algo rescatable de este intento y es por eso que se incluye en la tesis. Los coeficientes B_m no dependen de x , al hacer la transformada inversa de Laplace, suponiendo que pudiéramos, el resultado no va a depender en absoluto de x . Es decir nuestra solución estará en forma de una serie donde cada término será de la forma e^{imx} multiplicado por una función que depende de t , y , y m . Sumándole el hecho que la serie va sumada en m de menos infinito a infinito, no hay ninguna diferencia en nuestra solución si $x < 0$ o si $x \geq 0$. Este hecho resulta interesante ya que todas las demás soluciones que se obtienen si dependen del signo de x .

Esto último nos hace dudar nuevamente al respecto de la compresión en $x \geq 0$ que hemos visto en nuestras soluciones anteriores ya que no puede haber compresión para $x < 0$ y $x \geq 0$ a la vez. Eso sería equivalente a concentrar vórtices en el origen, lo cual no tiene ningún sentido. Nuevamente esto nos hace creer que este fenómeno de compresión se deba a las aproximaciones empleadas.

Por el otro lado, cuando imponemos una serie de Fourier en x , estamos suponiendo que nuestra solución es periódica. Esto tiene mucho sentido ya que queremos solucionar el problema sobre una esfera y la variable x corresponde a la variable ϕ , evidentemente también se vale pensar el océano como un plano infinito para fenómenos más locales. Quizás el hecho de que no exista el fenómeno de compresión se deba a suponer soluciones periódicas en x .

6.2.5. Empleando la Transformada de Fourier en x .

Nuevamente partimos de (6.7),

$$s[\tilde{\psi}_{xx} + \tilde{\psi}_{yy}] + \tilde{\psi}_x = \delta(x)\delta(y).$$

Ahora aplicaremos la transformada de Fourier en x , pero usaremos una convención diferente a la que usamos en la sección anterior para simplificar cálculos. Esta vez usaremos la convención en donde la exponencial de la transformada inversa tiene el signo negativo, en específico,

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx} dx && \Rightarrow \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-iwx} dw, \end{aligned}$$

donde $\hat{f}(w)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$. Al aplicarla a la derivada n -ésima salen factores de la forma $(-iw)^n$, es decir,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (-iw)^n \hat{f}(w),$$

donde \mathcal{F} denota la transformada de Fourier. Aplicando la transformada en x a toda la ecuación y usando el hecho que la transformada de la delta es $1/2\pi$ obtenemos,

$$s[-k^2 + \hat{\psi} + \hat{\psi}_{yy}] - ik\hat{\psi} = \frac{\delta(y)}{2\pi}.$$

Que es lo mismo que,

$$\hat{\psi}_{yy} + \hat{\psi}\left(-k^2 - \frac{ik}{s}\right) = \frac{\delta(x)}{2\pi s}.$$

Si nos fijamos en (6.19), es exactamente la misma ecuación que cuando empleamos series de Fourier en x , pero con un signo cambiado y usando k como la frecuencia en vez de m para resaltar que se trata de un espectro continuo. El cambio de signo se debe a que no usamos la convención equivalente, si hubiésemos usado la equivalente, la ecuación sería igual. Las soluciones también son iguales, pero con el signo cambiado. El método para obtenerlas es exactamente igual al empleado en el caso de las serie de Fourier en x , y por lo tanto no lo repetiremos aquí. Las soluciones son,

$$\hat{\psi} = \begin{cases} \frac{-e^{-y\sqrt{k^2+ik/s}}}{4\pi s \sqrt{k^2+ik/s}} & y \geq 0; \\ \frac{-e^{y\sqrt{k^2+ik/s}}}{4\pi s \sqrt{k^2+ik/s}} & y < 0. \end{cases}$$

Tomemos la transformada inversa de Fourier para $y \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{-y\sqrt{k^2+ik/s}}}{4\pi s \sqrt{k^2+ik/s}} e^{-ikx} dk.$$

Esta integral la podemos intentar resolver usando variable compleja. Para esto, es importante notar que $\sqrt{k^2+ik/s}$ tiene dos ramas,

$$\sqrt{k^2+ik/s} = \sqrt{k} \sqrt{k + \frac{i}{s}} \quad (6.20)$$

$$= \sqrt{|k|} \sqrt{|k+i/s|} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}, \quad (6.21)$$

con

$$\theta_1 = \text{Arg}(k) \quad \text{y} \quad \theta_2 = \text{Arg}(k + i/s),$$

donde usamos que un numero complejo z se puede escribir en su forma polar $z = Re^{i\theta}$, con R su norma y θ el argumento. Elijamos las ramas al gusto, evidentemente esta elecci3n puede determinar si se puede o no resolver la integral,

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq \frac{3\pi}{2},$$

de modo que la rama de la ra3z de k va de 0 a $i\infty$, y la de $k + i/s$ va de $-i/s$ a $-i\infty$, como se ve en la figura (6.12a). Como la integral de Fourier va de

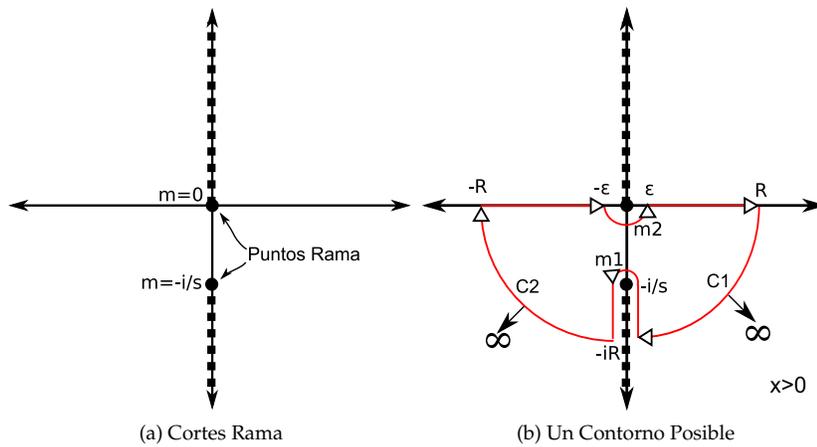


Figura 6.12: Plano k

$-\infty$ a ∞ , podemos cerrar el contorno por arriba o por abajo. Empecemos cerrando por abajo como en la figura (6.12a). Adem3s queremos que la parte circular del contorno, es decir $C1$ y $C2$ en la figura (6.12b), se vaya a cero al mandarlo al infinito. Considerando que nuestra integral tiene el t3rmino e^{-ikx} , y $k = a + ib$ y $b \rightarrow \infty$, entonces, $e^{-ikx} = e^{-iax}e^{bx}$. Para que este t3rmino no explote a infinito, x tiene que ser positivo ya que $b < 0$ por como elegimos

el contorno. Evidentemente si cerramos el contorno por arriba obtendremos la solución para $x < 0$.

Fijámonos en la figura (6.12b) y usando el teorema de los residuos que ya hemos empleado anteriormente tenemos que,

$$\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{m_2} + \int_{\epsilon}^R + \int_{C_1} + \int_{-iR}^{-i/s} + \int_{m_1} + \int_{-i/s}^{-iR} + \int_{C_2} = 0,$$

donde haremos tender ϵ a cero y R a ∞ para recuperar la transformada inversa de Fourier. Veamos que pasa con las integrales en las muescas m_2 y m_1 . Empecemos por m_2 ,

$$\int_{m_2} \frac{-e^{-y\sqrt{k^2+ik/s}}}{4\pi s \sqrt{k^2+ik/s}} e^{-ikx} dk, \quad (6.22)$$

como queremos ver que pasa cuando $k \rightarrow 0$, hagamos Taylor cerca del cero de la siguiente manera

$$k^2 + \frac{ik}{s} \approx \frac{ik}{s},$$

y sustituyamos obteniendo,

$$\begin{aligned} & \int_{m_2} \frac{-e^{-y\sqrt{ik/s}}}{4\pi s \sqrt{ik/s}} e^{-ikx} dk \\ &= \int_0^{-\pi} \frac{-e^{-y\sqrt{|k/s|}e^{i\theta/2}}}{4\pi s \sqrt{|k/s|}e^{i\theta/2}} e^{-i|k|e^{i\theta}x} d\theta, \end{aligned}$$

donde usamos que $k = |k|e^{i\theta}$. Esta última integral la podemos acotar fácilmente, en el argumento de las exponenciales sólo nos interesa la parte real, ya que la parte imaginaria es oscilatoria, entonces,

$$\begin{aligned} \left| \int_{m_2} \frac{-e^{-y\sqrt{|k/s|}e^{i\theta/2}}}{4\pi s \sqrt{|k/s|}e^{i\theta/2}} e^{-i|k|e^{i\theta}x} dk \right| &\leq \int_{m_2} \frac{-e^{-y\sqrt{|k/s|}\cos\theta/2}}{4\pi s \sqrt{|k/s|}e^{i\theta/2}} e^{-|k|\cos\theta x} dk \\ &\leq \frac{e^{-y\sqrt{|k/s|}\cos\theta_c/2}}{4\pi s \sqrt{|k/s|}e^{i\theta_c/2}} e^{-|k|\cos\theta_c x} |k|\pi. \end{aligned}$$

El último paso es consecuencia del teorema del valor intermedio, en donde tomamos θ_c el punto en donde el integrando es máximo. Queremos encontrar el límite cuando $|k| \rightarrow 0$, usemos la regla de l'Hôpital, derivando el

denominador y el numerador despreciando constantes que resultan irrelevantes obtenemos,

$$\left[\frac{e^{-\sqrt{|k|-|k|}}}{\sqrt{|k|}} |k| \right]_{|k| \rightarrow 0} = \left(2\sqrt{k} \left[|k| e^{-\sqrt{|k|-|k|}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{|k|}} - 1 \right) + e^{-\sqrt{|k|-|k|}} \right] \right)_{|k| \rightarrow 0} = 0.$$

Es decir, la integral sobre la muesca $m2$ es cero, análogamente se demuestra para $m1$. Ahora falta ver que pasa con $C1$ y $C2$, ya vimos que el factor con e^{-ikx} se acota si elegimos el signo de x apropiado, pero falta ver que pasa con la otra exponencial,

$$e^{y\sqrt{k^2+ik/s}} = e^{-y\sqrt{|k||k+i/s|}} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

donde la escribimos en función del ángulo de sus ramas. Como $y \geq 0$ y $\sqrt{|k||k+i/s|} \geq 0$, requerimos que,

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \right] = \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \geq 0,$$

que es lo mismo que,

$$-\pi/2 \leq \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \leq \pi/2.$$

De esta manera, al hacer tender $|k| \rightarrow \infty$, la exponencial tiende a cero. Veamos si se cumple, fijémonos primero para $C1$. La parte imaginaria de k es negativa y la parte real es positiva, los ángulos permitidos por las ramas para θ_1 y θ_2 en esta zona son,

$$\begin{aligned} -\pi/2 &\leq \theta_1 \leq 0, \\ -\pi/2 &\leq \theta_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces, el máximo valor que puede tomar $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ es cero y el mínimo es $-\pi/2$. Esto quiere decir que el factor con la exponencial si tiende a cero en $C1$ conforme $|k| \rightarrow \infty$. De manera análoga, en $C2$, los ángulos permitidos son,

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \theta_1 \leq -\pi/2, \\ -\pi &\leq \theta_2 \leq 3\pi/2. \end{aligned}$$

El máximo valor de $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ es $\pi/2$ y el mínimo es cero, en donde de nuevo se cumple la condición para acotar la exponencial. Ya vimos que las dos

exponenciales tienden a cero cuando mandamos a $C1$ y a $C2$ al infinito, sólo falta el denominador del integrando, pero este evidentemente también tiende a cero al mandar el contorno al infinito, con esto probamos que en el contorno elegido y las ramas elegidas, las integrales sobre $C1$ y $C2$ tienden a cero conforme mandamos el contorno a infinito.

Hasta ahora hemos logrado que la integral original,

$$\int_{-R}^{-\epsilon} + \int_{m2} + \int_{\epsilon}^R + \int_{C1} + \int_{-iR}^{-i/s} + \int_{m1} + \int_{-i/s}^{-iR} + \int_{C2} = 0,$$

$$\text{si, } R \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-i\infty}^{-i/s} + \int_{-i/s}^{-i\infty} = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} = - \int_{-i\infty}^{-i/s} - \int_{-i/s}^{-i\infty}.$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ es justamente la transformada inversa de Fourier que buscamos que es igual a $\tilde{\psi}$. Para obtenerla, basta resolver las otras dos integrales,

$$\tilde{\psi} = \int_{-i\infty}^{-i/s} \frac{e^{-y\sqrt{k^2+ik/s}}}{4\pi s \sqrt{k^2+ik/s}} e^{-ikx} dk + \int_{-i/s}^{-i\infty} \frac{-e^{-y\sqrt{k^2+ik/s}}}{4\pi s \sqrt{k^2+ik/s}} e^{-ikx} dk$$

$$= \int_{-i\infty}^{-i/s} \frac{e^{-y\sqrt{|k||k+i/s|}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}} e^{-ikx} dk + \int_{-i/s}^{-i\infty} \frac{e^{-y\sqrt{|k||k+i/s|}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}} e^{-ikx} dk,$$

en donde usamos (6.21) para reescribir el integrando en función del ángulo de sus ramas. Fijándonos en la figura (6.12b) podemos ver que la integral $\int_{-i\infty}^{-i/s}$, pasa del lado derecho de la rama y por lo tanto,

$$\theta_1 = -\pi/2, \quad \text{y} \quad \theta_2 = -\pi/2.$$

Igualmente, la integral $\int_{-i/s}^{-i\infty}$ pasa por el lado izquierdo de la rama por lo que,

$$\theta_1 = -\pi/2, \quad \text{y} \quad \theta_2 = 3\pi/2,$$

lo que simplifica nuestras integrales a,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi} &= \int_{-i\infty}^{-i/s} \frac{e^{-y\sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ix} e^{i\pi/2}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} dk + \int_{-i/s}^{-i\infty} \frac{e^{-y\sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ix} e^{-i\pi/2}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} dk, \\
 &= \int_{-i\infty}^{-i/s} \frac{e^{iy\sqrt{|k||k+i/s|}}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ikx} idk - \int_{-i/s}^{-i\infty} \frac{e^{-iy\sqrt{|k||k+i/s|}}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ikx} idk, \\
 &= - \int_{-i/s}^{-i\infty} \frac{e^{iy\sqrt{|k||k+i/s|}} + e^{-iy\sqrt{|k||k+i/s|}}}{4\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ikx} idk, \\
 &= - \int_{-i/s}^{-i\infty} \frac{i \cos\left(y\sqrt{|k||k+i/s|}\right)}{2\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ikx} dk.
 \end{aligned}$$

Esta última integral es en realidad una integral real, para dejar más claro este hecho hagamos el cambio de variable $k = -ib$, con $b > 0$, para esto fijémonos que,

$$\sqrt{|k||k+i/s|} = \sqrt{|-ib||-ib+i/s|} = \sqrt{b(-1/s+b)} = \sqrt{b^2 - b/s},$$

ya que por los límites de integración se cumple que $b > 1/s$. Una vez dicho esto y que $dk = -idb$ la integral nos queda,

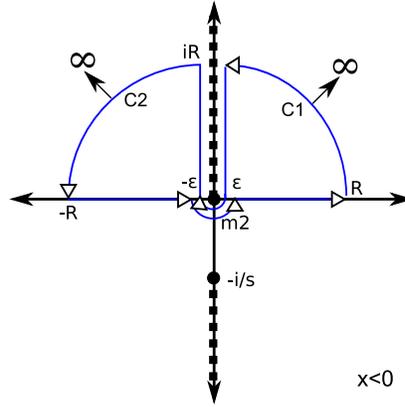
$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi s} \int_{1/s}^{\infty} \frac{\cos\left(y\sqrt{b^2 - b/s}\right)}{\sqrt{b^2 - b/s}} e^{-bx} db.$$

Es importante recordar que esta solución sólo se cumple para $x \geq 0$, ya que cerramos el contorno por abajo. Si los cerramos por arriba como en la figura (6.13), podemos hacer exactamente el mismo proceso y obtenemos una integral igual, pero con el límite de integración cambiado,

$$\tilde{\psi} = \int_0^{i\infty} \frac{i \cos\left(y\sqrt{|k||k+i/s|}\right)}{2\pi s \sqrt{|k||k+i/s|}} e^{-ikx} dk,$$

la cual funciona para $x < 0$, ya que sólo así se acota el término e^{-ikx} . Nuevamente esta es una integral real por lo que nos conviene hacer el cambio de variable $k = ib$, con $b > 0$, pero en este caso la raíz se comportará de manera diferente,

$$\sqrt{|k||k+i/s|} = \sqrt{|ib||ib+i/s|} = \sqrt{b(b+1/s)} = \sqrt{b^2 + b/s},$$

Figura 6.13: Contorno para $x < 0$.

lo que nos lleva finalmente a la solución para $x < 0$,

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi s} \int_0^{\infty} \frac{\cos(y\sqrt{b^2 + b/s})}{\sqrt{b^2 + b/s}} e^{bx} db.$$

Condensando las dos soluciones, se obtiene

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi s} \int_{1/s}^{\infty} \frac{\cos(y\sqrt{b^2 - b/s})}{\sqrt{b^2 - b/s}} e^{-bx} db & x \geq 0; \\ \frac{1}{2\pi s} \int_0^{\infty} \frac{\cos(y\sqrt{b^2 + b/s})}{\sqrt{b^2 + b/s}} e^{bx} db & x < 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Si recordamos, todo este proceso lo hicimos para $y \geq 0$, pero en realidad es igual para ambos casos. Este hecho es fácil de ver ya que la única diferencia entre las soluciones, para y positiva o negativa, está en el signo de la exponencial. Por lo tanto, al escribir las integrales sobre las ramas, es decir $\int_{-i\infty}^{-i/s} + \int_{-i/s}^{-i\infty}$, terminamos sumando dos exponenciales con signos cambiados, por lo que da igual si inicialmente tenía el signo positivo o negativo, al sumarlas siempre nos da un coseno que es el que obtenemos en nuestra solución.

Este resultado deja mucho que desear; las integrales se ven bastante poco amigables y aun nos falta tomar la transformada inversa de Laplace. De cualquier manera, es importante reconocer que hasta este punto no se ha realizado ninguna aproximación. Como es costumbre, a partir de este punto tendremos que aproximar, desafortunadamente no podemos emplear el método de la fase estacionaria, ya que los puntos de fase estacionaria se encuentran en el eje negativo de b , pero si observamos con cuidado en ambas integrales, el coseno esta acotado, la exponencial es decreciente y la raíz igual. Esto quiere decir que la mayor contribución a la integral pareciera estar cerca del límite inferior de integración ya sea 0 o $1/s$. Falta tomar en cuenta las oscilaciones del coseno, pero también es evidente que oscila menos para valores de b pequeños, en específico para los límites inferiores en cada caso.

Empecemos aproximando para el caso $x < 0$ de (6.23), desarrollemos en serie de Taylor alrededor del límite inferior 0,

$$b^2 + b/s \approx \frac{b}{s},$$

lo que nos da como resultado la siguiente integral,

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{\cos(y\sqrt{b/s})}{\sqrt{b}} e^{bx} db. \quad (6.24)$$

Considerando que el coseno se puede escribir como la suma de dos exponenciales complejas, esta integral es la suma de dos integrales del tipo,

$$\int \frac{e^{im'\sqrt{x}+n'x}}{\sqrt{x}} dx,$$

con m' y n' constantes reales. Haciendo el cambio de variable $u = 2\sqrt{x}$, entonces $du = dx\sqrt{x}$ y la integral queda,

$$\int e^{-imu-nu^2} du,$$

con $m = -m'/s$ y $n = -n'/4$ otras constantes reales. Completamos el cuadrado del argumento de la exponencial,

$$\begin{aligned} -nu^2 - imu &= -nu^2 - imu - \left(\frac{im}{2\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{im}{2\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= -\left(\sqrt{nu} + \frac{im}{2\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{im}{2\sqrt{n}}\right)^2. \end{aligned}$$

Entonces, la integral se escribe como,

$$e^{\left(\frac{im}{2\sqrt{n}}\right)^2} \int e^{-\left(\sqrt{nu} + \frac{im}{2\sqrt{n}}\right)^2} du.$$

Nuevamente cambiando de variable, $v = \sqrt{nu} + \frac{im}{2\sqrt{n}}$, entonces $dv = \sqrt{n} du$, obtenemos

$$\frac{e^{-\frac{-m^2}{4n}}}{\sqrt{n}} \int e^{v^2} dv,$$

pero sabemos que $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \text{Erf}[x]/2$, entonces la solución de la integral es,

$$\int \frac{e^{-im' \sqrt{x+n'} x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{e^{-\frac{-m^2}{4n}}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{Erf} \left[\sqrt{nu} + \frac{im}{2\sqrt{n}} \right].$$

Con ayuda de este resultado, podemos resolver la integral (6.24), obteniendo que,

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi \sqrt{s}} \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{-2}{4s}}}{\sqrt{-x}}.$$

A esta función si sabemos sacarle su transformada de Laplace inversa, nuevamente multiplicamos e^{st} , integramos y hacemos el cambio de variable $s' = st$ obteniendo una integral como 6.11, la cual reescribimos a continuación,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} s^{-\nu-1} e^{s-\frac{z^2}{4s}} ds.$$

El procedimiento es completamente análogo al caso en el que empleamos la transformada de Fourier en y , así que no se repetirá, el resultado final para $x < 0$ es

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{-8\pi x}} \left(\frac{-y^2}{xt}\right)^{1/4} J_{-1/2} \left[\sqrt{\frac{-y^2 t}{x}} \right].$$

Ahora, hagámoslo para el caso $x \geq 0$ de (6.23). Éste resulta un poco más complicado por el límite de integración. En este caso la contribución principal estará cerca de $1/s$, entonces desarrollemos en serie de Taylor alrededor de $1/s$,

$$b^2 - b/s \approx \frac{1}{s}(b - 1/s).$$

Entonces, la integral nos queda,

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{s}} \int_{1/s}^{\infty} \frac{\cos\left(y\sqrt{\frac{1}{s}(b-1/s)}\right)}{\sqrt{b-1/s}} e^{-bx} db.$$

Haciendo el cambio de variable $u = b - 1/s$ obtenemos,

$$\frac{e^{-x/s}}{2\pi\sqrt{s}} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(y\sqrt{\frac{u}{s}}\right)}{\sqrt{u}} e^{-ux} db.$$

Que es exactamente de la misma forma que la que obtuvimos para $x < 0$, así que de manera análoga se obtiene que,

$$\tilde{\psi} = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{y^2}{4sx} - \frac{x}{s}}}{2\pi\sqrt{s}\sqrt{x}},$$

función que sabemos invertir en Laplace de manera completamente análoga al caso $x < 0$, obteniendo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{8\pi x}} \left(\frac{4x}{t} + \frac{y^2}{xt} \right)^{1/4} J_{-1/2} \left[\sqrt{4xt + \frac{y^2 t}{x}} \right].$$

Escribiendo la solución final obtenida,

$$\tilde{\psi} \approx \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8\pi x}} \left(\frac{4x}{t} + \frac{y^2}{xt} \right)^{1/4} J_{-1/2} \left[\sqrt{4xt + \frac{y^2 t}{x}} \right] & x \geq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{-8\pi x}} \left(\frac{-y^2}{xt} \right)^{1/4} J_{-1/2} \left[\sqrt{\frac{-y^2 t}{x}} \right] & x < 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

Si nos fijamos en la solución que obtuvimos al emplear la transformada de Fourier en y (6.17), podemos ver que la solución es muy semejante. Si la graficamos se ve prácticamente lo mismo, y probablemente si cambiamos la fuente por otra más suave obtendremos un resultado similar al que obtuvimos al cambiar la fuente en el otro caso. Este último resultado nos hace creer más que las soluciones que hemos obtenido han sido, en gran medida, acertadas, y que el fenómeno de compresión no emerge del empleo de la asíntota, ya que se utilizaron mucho menos aproximaciones y llegamos a una solución prácticamente igual.

6.3. Una solución general en la esfera

Antes de empezar, es importante resaltar que falta mucho por estudiar de este último problema, física y matemáticamente, y que lo siguiente se plantea como una guía para futuras investigaciones en el contexto de la transformada de Watson y las ondas oceánicas.

En la primera parte, el tomar la fuente en $r = b$ y fijarse en la solución para $r < b$ y $r > b$ (1.18), dio origen a las singularidades, ya que de allí sale la función de Bessel en el denominador. ¿Porqué no intentar lo mismo en este problema? ¿Qué pasará si intentamos resolver la ecuación de vorticidad en tres dimensiones agregando un grado de libertad en la variable radial? Esto parece no tener sentido físico alguno, ya que la función de corriente sólo se puede definir para flujos bidimensionales, pero afortunadamente no es el caso. De hecho, si se puede obtener una ecuación análoga en tres dimensiones agregando la variable radial. Desafortunadamente, la deducción de esta ecuación requiere introducir varios conceptos que ya se encuentran fuera del alcance de esta tesis, pero si resolvemos y nos fijamos en r constante, la función ψ se comporta de manera análoga al caso bidimensional, es decir sólo habrá vorticidad en las variables angulares. La ecuación es prácticamente la misma excepto por una constante ϵ ,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_{Ang}^2 + \frac{\epsilon^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \right] \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0, \quad (6.26)$$

donde ∇_{Ang}^2 es la parte angular del laplaciano en coordenadas esféricas y $\beta = 2\Omega/a^2$ es una constante⁴. La deducción de la ecuación se puede encontrar en [20, 4.6.2 pag.113] y describe las ondas de Rossby en un fluido estratificado. La constante esta definida por $\epsilon = f_0/N$, donde f_0 es el primer término de la serie de Taylor alrededor de $y = 0$ del parámetro de Coriolis y N es la frecuencia de flotabilidad⁵. Nótese que cuando N es grande esta ecuación se aproxima a la ecuación bidimensional que hemos estado tratando. Todo esto no será muy importante para el análisis que haremos, ya que nos fijaremos en r constante, olvidándonos así de lo efectos y cambios que puedan ocurrir en la variable radial, y sólo nos fijaremos en la parte angular de la solución que será análoga al caso anterior. Esto no quiere decir que los efectos en la variable radial no sean importantes, lo son y hay que

⁴Nótese que no es la misma β que en la aproximación del plano tangente, tiene a^2 en vez de a .

⁵En ingles se le llama "buoyancy frequency".

dedicarle estudio al tema, pero esto sólo es un esbozo para guiar investigaciones futuras. No se pretende explicar toda la física que se puede obtener de la ecuación (6.26), ya que ese es otro problema un poco más complicado al tratado originalmente en este trabajo.

Tomemos $\epsilon = 1$ y tenemos exactamente la misma ecuación, pero en tres dimensiones,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0.$$

Obtengamos la función de Green de esta ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} &= \frac{\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')\delta(t-t')}{r^2 \cos \theta} \\ &= \frac{\delta(r-r')\delta(\sin \theta - \sin \theta')\delta(\phi-\phi')\delta(t-t')}{r^2}, \end{aligned}$$

donde θ es la latitud y no la co-latitud. Usemos el hecho de que los armónicos esféricos son completos y ortonormales, entonces podemos escribir

$$\delta(\sin \theta - \sin \theta')\delta(\phi - \phi') = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Además, sabemos que

$$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(t'-t)}}{2\pi} dw,$$

entonces la ecuación queda,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(t'-t)}}{2\pi} \frac{\delta(r-r')}{r^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi').$$

Propongamos como solución,

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(t'-t)}}{2\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') g_{lm}(r, r'), \quad (6.27)$$

sustituyendo obtenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{l,m} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(t'-t)}}{2\pi} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) (-iw) + \beta im \right] g_{lm}(r, r') \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iw(t'-t)}}{2\pi} \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{\delta(r-r')}{r^2}. \end{aligned}$$

donde el término con $l(l+1)$ es lo único que queda de la parte angular del laplaciano. Además, notemos que las integrales sobre w son transformadas inversas de Fourier, entonces podemos aplicar la transformada de Fourier y deshacernos de las integrales⁶. Después, usando el hecho de que los armónicos esféricos son linealmente independientes, igualamos coeficientes obteniendo,

$$\left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - \frac{\beta m}{w} \right] g_{lm}(r, r') = -\frac{\delta(r-r')}{iwr^2}, \quad (6.28)$$

donde también dividimos entre $-iw$. De esta ecuación, reconocemos que el operador aplicado a g_{lm} es la suma del laplaciano en coordenadas esféricas mas una constante, es decir el operador de Helmholtz, lo que quiere decir que la constante esta relacionada con el número de onda κ de nuestras soluciones, es decir

$$\kappa^2 = -\frac{\beta m}{w} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \sqrt{-\frac{\beta m}{w}}. \quad (6.29)$$

Ésta es una relación de dispersión, es mas si nos fijamos en la relación de dispersión obtenida en el caso de ondas planas (6.6), es exactamente la misma. Por lo tanto, todos los resultados obtenidos en ese caso también aplican en éste. Resolvamos la ecuación, multiplicando por r^2 y haciendo el cambio de variable,

$$g_{lm} = \frac{\gamma_{lm}}{\sqrt{kr}},$$

dejando a la ecuación diferencial como,

$$r^2 \frac{d^2 \gamma_{lm}}{dr^2} + r \frac{d\gamma_{lm}}{dr} + [k^2 r^2 - (l+1/2)^2] \gamma_{lm} = 0,$$

si $r \neq r'$. Ésta es la ecuación de Bessel y sus soluciones son funciones de Bessel de orden $l+1/2$, por lo tanto, de acuerdo al cambio de variable, las funciones g_{lm} son funciones esféricas de Bessel multiplicadas por una constante. Recordando (6.27), la solución a nuestra ecuación, olvidando

⁶La dependencia temporal se puede quitar aplicando la transformada de Fourier o la transformada de Laplace en el tiempo, pero de esta manera queda más claro la relación con el problema de Watson y con la relación de dispersión en el caso de ondas planas.

por ahora la integral sobre dw , es de la forma,

$$\psi_0 = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') A_{lm} j_l(kr) & r < b; \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') B_{lm} h_l^{(2)}(kr) & r > b, \end{cases}$$

donde $r' = b$ es la posición de la fuente puntual, y usamos j_l para el caso $r < b$ ya que son acotadas en cero y $h_l^{(2)}$ para $r > b$ porque son acotadas en infinito. Por comodidad, vamos a escribirlo de la siguiente manera,

$$\psi_0 = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{A_{lm}}{kr} \chi_l(kr) & r < b; \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \frac{B_{lm}}{kr} \xi_l(kr) & r > b, \end{cases}$$

con,

$$\chi_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} J_{l+1/2}(kr) \quad \text{y} \quad \xi_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{l+1/2}^{(2)}(kr),$$

que son exactamente las mismas funciones que las que usamos en la primera parte del trabajo. Estas soluciones son las soluciones a la ecuación homogénea, falta encontrar el valor con la delta. Primero que nada la solución debe ser continua en $r = b$, entonces,

$$A_{lm} \chi_l(kb) = B_{lm} \xi_l(kb) \quad \Rightarrow \quad A_{lm} = B_{lm} \frac{\xi_l(kb)}{\chi_l(kb)}.$$

Después, multiplicamos por r^2 la ecuación (6.28), e integramos de $b - \epsilon$ a $b + \epsilon$, dejando

$$r^2 \frac{\partial g_{lm}}{\partial r} \Big|_{b-\epsilon}^{b+\epsilon} = \frac{-1}{iw},$$

ya que los demás término de la ecuación son continuos en $r = b$ y desaparecen al hacer $\epsilon \rightarrow 0$. Sustituyendo los valores correspondientes de g_{lm} y

haciendo $\epsilon \rightarrow 0$, queda

$$B_{lm} \left[b\xi'_l(kb) - \frac{\xi_l(kb)}{k} \right] - B_{lm} \frac{\xi_l(kb)}{\chi_l(kb)} \left[b\chi'_l(kb) - \frac{\chi_l(kb)}{k} \right] = \frac{-1}{iw} \quad \Rightarrow$$

$$bB_{lm} \left[\xi'_l(kb) - \chi'_l(kb) \frac{\xi_l(kb)}{\chi_l(kb)} \right] = \frac{-1}{iw} \quad \Rightarrow$$

$$B_{lm} \left[\frac{chi_l(kb)\xi'_l(kb) - \xi_l(kb)\chi'_l(kb)}{\chi_l(kb)} \right] = \frac{-1}{iw b}.$$

La parte del numerador de la fracción del lado izquierdo corresponde al Wronskiano que ya habíamos encontrado antes (1.25) en el primer capítulo, y es $-i$, por lo tanto,

$$B_{lm} = \frac{\chi_l(kb)}{-wb} \quad \text{y} \quad A_{lm} = \frac{\xi_l(kb)}{-wb}.$$

La solución queda como,

$$\psi_0 = \begin{cases} \frac{-1}{wkbr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \xi_l(kb) \chi_l(kr) & r < b; \\ \frac{-1}{wkbr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \chi_l(kb) \xi_l(kr) & r > b. \end{cases}$$

Finalmente, para poder imponer una condición de frontera, hay que poner una función perturbada fuera de la Tierra que también sea solución, por ejemplo

$$\psi_d = \frac{-1}{wkbr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') C_{lm} \xi_l(kr),$$

ya que como estamos fuera de la Tierra no importa si es singular en el origen y debe decaer al infinito. De este modo, la solución completa, sin el factor temporal debe ser $\psi_{est} = \psi_0 + \psi_d$. Ahora podemos aplicar la condición de frontera,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r \psi_{est}}{\partial t \partial r} &= 0 \quad \text{en :} \quad r = a \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial r \psi_{est}}{\partial r} &= 0 \quad \text{en :} \quad r = a. \end{aligned}$$

Ésta se puede consultar en [19, 6.12 pag.378]. Aplicando esta condición llegamos fácilmente a que,

$$C_{lm} = -\xi_l(kb) \frac{\chi_l(kr)}{\xi_l'(kr)},$$

lo que nos lleva al valor final de ψ_{est} ,

$$\begin{aligned} \psi_{est} &= \frac{-1}{wkbr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\xi_l(kb) \chi_l(kr) - \xi_l(kb) \xi_l(kr) \frac{\chi_l(kr)}{\xi_l'(kr)} \right] \\ &= \frac{-1}{wkbr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\frac{\xi_l(kb) (\chi_l(kr) \xi_l'(kr) - \xi_l(kr) \chi_l(kr))}{\xi_l'(kr)} \right] \\ &= \frac{i}{wkbr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\frac{\xi_l(kb)}{\xi_l'(kr)} \right], \end{aligned}$$

ya que nuevamente nos encontramos con el Wronskiano (1.25). Ya hemos obtenido la solución final, que es,

$$\boxed{\psi_{est} = \frac{i}{wkba} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\frac{\xi_l(kb)}{\xi_l'(ka)} \right]}, \quad (6.30)$$

en donde

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(t'-t)}}{2\pi} \psi_{est} dw,$$

y tomamos $r = a$, ya que nos interesa que es lo que pasa en las variables angulares para r constante. La integral sobre dw equivale a tomar la transformada inversa de Fourier (o de Laplace) de ψ_{est} . Esto fue justamente lo que hicimos en el el capítulo 4 al evaluar los pulsos alrededor de la Tierra. De hecho, está es una deducción análoga y un poco más moderna del mismo problema que en la primera parte, en donde fue hecho de manera similar al artículo original. Como podemos ver, ψ_{est} es casi de la misma forma que Π en el problema de la primera parte, exceptuando que ahora tenemos armónicos esféricos y no sólo polinomios de Legendre. Esto nos hace pensar que es posible que se pueda hacer la transformada de Watson

en este problema también.

Si tomamos $\theta' = 0$ y $\phi' = 0$, nuevamente ψ ilustra patrones como los de la figura (6.2), que representan vórtices en sentido positivo o negativo. La única diferencia con la solución (6.3) del caso anterior, son los coeficientes que ahora tienen el factor $\left[\frac{\xi_l(kb)}{\xi_l(ka)} \right]$ y el polinomio asociado de Legendre evaluado en cero que ambos son constantes. Fijándonos en la relación de dispersión obtenida (6.29), podemos interpretar esta solución en relación al problema de ondas oceánicas sobre una esfera giratoria. De (6.29) se sigue que,

$$\frac{w}{m} = \frac{-\beta}{\kappa^2},$$

donde w/m resulta ser la velocidad de fase en ϕ y es siempre negativa, ya que $\beta > 0$. Esto ya lo habíamos visto en el caso de la relación de dispersión de ondas planas y se obtienen exactamente los mismo resultados. En el caso de ondas electromagnéticas podemos ver de (4.12) que la relación de dispersión solamente establecía congruencia con el hecho de que las ondas electromagnéticas viajan a la velocidad de la luz y no nos daba más información al respecto, no como en este caso.

Además, como $\kappa^2 = l^2 + m^2$, despreciando el número de onda en la dirección radial, los patrones de la solución (6.30), con l y m constante se propagarán con la misma velocidad negativa en ϕ . Entre mayores sean l o m , la velocidad de fase en x se hace menor. Comparando esto con solución la obtenida en (6.3), podemos ver cierta consistencia en nuestras soluciones. Se obtiene un comportamiento muy similar, vórtices propagándose al Oeste. Sólo que en este caso la velocidad de fase en x depende de m y l , mientras que en la solución particular sólo de l depende,⁷. En conclusión esta solución parece ser apropiada para describir ondas de Rossby bidimensionales sobre la esfera.

⁷En el caso de la solución particular sobre la esfera l y m corresponden a n y s respectivamente.

Capítulo 7

La transformada de Watson

En este capítulo final intentaremos aplicar la transformada de Watson a las distintas soluciones obtenidas. Evidentemente sólo nos servirá para las soluciones que están escritas en forma de series. Esto excluye, de manera automática, a las soluciones obtenidas en el capítulo anterior por medio de la transformada de Fourier ya sea en x o en y . Para el resto de las soluciones, veremos que es lo que se puede hacer y a que resultados nos lleva.

7.1. En la solución particular en la esfera.

Recordando la solución que obtuvimos en la esfera (6.3),

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-n}^n \frac{(2n+1)(n-s)!}{4\pi(n+s)!} P_n^s(\cos \theta) e^{is(\phi + \frac{2\Omega}{n(n+1)}t)}.$$

Como se puede ver hay dos sumas en esta solución lo cual puede traer consigo varios problemas.

Esta doble suma la podemos escribir de muchas maneras como una integral compleja. Podemos incluso intentar escribirla como una doble integral compleja, pero antes de intentar casos más complicados veamos el más sencillo. Tomemos $s = s_0$ una constante y nos olvidamos del resto,

entonces,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(n-s_0)!}{4\pi(n+s_0)!} P_n^{s_0}(\cos \theta) e^{is_0(\phi + \frac{2\Omega}{n(n+1)}t)}.$$

Nuevamente nos fijamos en la integral,

$$\psi = \int_{C_1, C_2} \frac{(2n+1)(n-s_0)!}{\cot(m\pi + \pi/2)4\pi(n+s_0)!} P_n^{s_0}(\cos \theta) e^{is_0(\phi + \frac{2\Omega}{n(n+1)}t)} dn.$$

Como esta es una integral compleja, es importante sustituir el factorial por la función gamma. La cuestión es que la función gamma no tiene ceros, entonces esta integral sólo tiene polos en el $\cot(m\pi + \pi/2)$ que son los que recuperan nuestra solución original. Por lo tanto, como la serie original no tiene polos, no podemos emplear la transformada de Watson en esta solución por más que se nos ocurran maneras originales de escribir la suma original como una integral compleja. Como ya se mencionó esto era de esperarse, ya que no se obtuvo la función de Green de esta ecuación, y aunque la hubieramos obtenido, la solución está en términos de armónicos esféricos que son de cuadrado integrable y no dan lugar a singularidades.

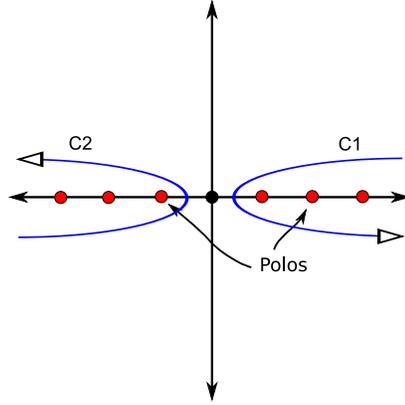
7.2. En la solución obtenida con series de Fourier en y .

Empecemos por la solución obtenida empleando series de Fourier en y y con una fuente bastante suave (6.15),

$$\psi = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{imy} \begin{cases} \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t - 5m^2x) e^{i \frac{1}{\sqrt{t|x-m^2}}(t-x(1+m^2))}}{4\pi \sqrt{a} i \sqrt{x(m^2 - t/x)^{3/2} + 4m^2x(m^2 - t/x)^{1/2}}} & x \geq 0; \\ \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t + m^2x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t + m^2x)\right)}{4 \sqrt{a\pi} |m|} & x < 0. \end{cases}$$

Primero el caso con $x < 0$, fijémonos en la integral,

$$\int_{C_1, C_2} \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t + m^2x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t + m^2x)\right)}{4 \sqrt{a\pi} |m| \cot(\pi m + \pi/2)} e^{imy} dm,$$

Figura 7.1: Contornos en plano m .

con el contorno de integración $C1$ y $C2$ como se ven en la figura (7.1). Al aplicar el teorema de los residuos sobre los ceros de $\cot(\pi m + \pi/2)$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi i \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t + m^2 x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t + m^2 x)\right)}{-4\sqrt{a\pi}|m| \csc^2(\pi m + \pi/2)} e^{imy} \\
 &= 2\pi i \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t + m^2 x) J_0\left(\frac{1}{2m}(t + m^2 x)\right)}{-4\sqrt{a\pi}|m|} e^{imy}.
 \end{aligned}$$

Que es igual a la solución original, excepto por una constante, ahora para hacer la transformada habría que fijarnos en que otros polos tiene la función original. El único polo está en $m = 0$, si evaluáramos los residuos en el polo $m = 0$ perderíamos la dependencia en x , y además el argumento de la función de Bessel es singular en $m = 0$. Así que no importa como cerremos el contorno, como el único polo es $m = 0$, jamás obtendríamos una solución práctica al emplear la transformada de Watson.

Veamos que pasa en el caso $x \geq 0$, análogamente nos fijamos en la integral,

$$\int_{C1, C2} \frac{e^{-m^2/(4a)} H(t - 5m^2 x) e^{i \frac{1}{\sqrt{t/x - m^2}}(t - x(1 + m^2))}}{\cot(\pi m + \pi/2) 4\pi \sqrt{a} \sqrt{x(m^2 - t/x)^{3/2} + 4m^2 x(m^2 - t/x)^{1/2}}} e^{imy} dm,$$

con la cual, nuevamente empleando el teorema de los residuos, recuperamos la solución original. Esta solución parece no tener polos, pero si tiene puntos ramas, los cuales se encuentran igualando el interior de la raíz en el denominador a cero y son $m = \pm \sqrt{i/(5x)}$. Esto nos hace pensar en una nueva transformada de Watson en la cual en vez de igualar la suma original a la suma sobre ciertos polos, la igualemos a integrales sobre cortes ramas. Desafortunadamente en este caso no se puede aplicar debido a que los puntos ramas se encuentran en el eje real en $m = \pm \sqrt{i/(5x)}$, entonces los cortes rama forzosamente cruzan el contorno $C1$ y $C2$ o todos los polos generados por el $\cot m\pi + \pi/2$. Incluso en caso de lograr resolver este problema de alguna manera ingeniosa, hay otro problema a la hora de cerrar los contornos y mandarlos a infinito. Este problema surgirá en la proxima sección.

7.3. En la solución obtenida con series de Fourier en x .

Ahora veamos que pasa en el caso de series de Fourier en x . Recordando el capítulo anterior, no pudimos obtener una solución en este caso, pero es posible que la transformada de Watson nos pueda ayudar a obtenerla. Logramos obtener que,

$$\tilde{\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx},$$

con,

$$B_m = \begin{cases} \frac{-e^{-y\sqrt{m^2-im/s}}}{4\pi s \sqrt{m^2-im/s}} & y \geq 0; \\ \frac{-e^{y\sqrt{m^2-im/s}}}{4\pi s \sqrt{m^2-im/s}} & y < 0. \end{cases}$$

Nuevamente fijémonos en la integral,

$$\int_{C1,C2} \frac{\pm e^{-y\sqrt{m^2-im/s}}}{4\pi s \sqrt{m^2-im/s} \cot(m\pi + \pi/2)} e^{imx} dm. \quad (7.1)$$

Al evaluar sobre $C1$ y $C2$ con el teorema de los residuos, recuperamos la solución original ya sea para $y \geq 0$ o $y < 0$. Debido a la raíz $\sqrt{m^2 - im/s}$ tenemos cortes ramas en $m = 0$ y $m = i/s$ pongamos las ramas y el contorno de integración como en la figura (7.2). La idea en este caso es nuevamente

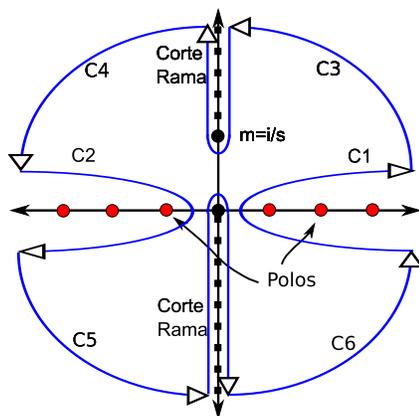
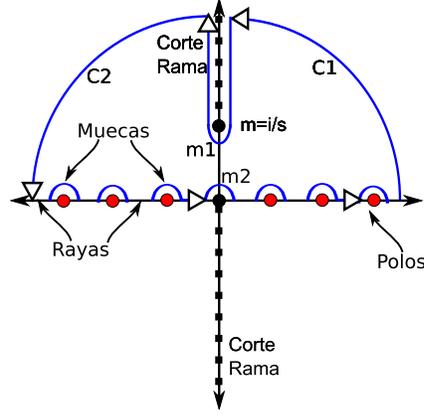


Figura 7.2: Contornos en plano m .

convertir la suma original, es decir la integral sobre los contornos $C1$ y $C2$, en una integral sobre las dos ramas. Se ve prometedor, es más los contornos $C3$, $C4$, $C5$ y $C6$ parecen irse a cero en la exponencial que involucra a y . El único problema es la exponencial de Fourier e^{imx} , ya que si suponemos $x > 0$ la parte imaginaria de m tiene que ser positiva para que la exponencial se vaya a cero, lo cual evidentemente no ocurre en $C5$ y $C6$. Del mismo modo, si $x < 0$, la parte imaginaria de m tiene que ser negativa, lo cual no ocurre para $C3$ y $C4$. Este mismo problema fue el que mencionamos en la sección anterior y nos hubiese ocurrido al intentar cerrar el contorno. Eso quiere decir que quizás no es una muy buena idea intentar aplicar la Transformada de Watson en las variables de frecuencia de Fourier, pero antes de darnos por vencido, hagamos un último intento.

Tomemos la integral (7.1), que se obtiene de la solución para $y \geq 0$, suponemos $x > 0$ ¹ y resolvamos la integral en el contorno C' ilustrado en la figura (7.3). De manera completamente análoga a la sección 6.1.5, la integral sobre las muescas de las ramas, $m1$ y $m2$ es cero. La integral sobre el

¹Si $x < 0$, podemos tomar el contorno por abajo y agarrar la otra rama como en 6.1.5.

Figura 7.3: Contorno C' en el plano m .

resto de las muescas va a ser $-i\pi B_0$, donde B_0 es el residuo en el polo, ver [3, secc.75 pag.267]. La integral sobre las rayas va a ser la integral de menos infinito a infinito de la función, y la integral sobre $C1$ y $C2$ se va a cero porque $y \geq 0$, $x > 0$ y $m = ib$, con $b > 0$. No repito los detalles porque son análogos a los ya hechos en la sección 6.1.5. Todo esto nos da un resultado algo interesante,

$$\begin{aligned} \int_{C'} \frac{\pm e^{-y\sqrt{m^2-im/s}}}{4\pi s \sqrt{m^2-im/s} \cot(m\pi + \pi/2)} e^{imx} dm &= 0 \\ &= -i \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_m}{\cot(m\pi + \pi/2)} e^{imx} dm + \int_{Ramas} \frac{B_m}{\cot(m\pi + \pi/2)} e^{imx} dm \\ \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_m}{i \cot(m\pi + \pi/2)} e^{imx} dm + \int_{Ramas} \frac{B_m}{i \cot(m\pi + \pi/2)} e^{imx} dm. \end{aligned}$$

Tenemos expresada las series de Fourier en x de $\tilde{\psi}$ como la suma de dos integrales. La primer integral, se asemeja a la transformada inversa de Fourier de B_m , excepto por el factor cotangente y la segunda es una integral sobre las ramas como las que ya resolvimos en 6.1.5. El factor cotangente complica mucho la solución de estas integrales, incluso al emplear aproxi-

maciones; no intentaremos resolverlas. Lo que si es importante reconocer es que se obtiene una solución muy similar a la de 6.1.5, en otras palabras, a pesar de no poder obtener una solución final, nuestra solución aparenta comportarse de diferente manera para $x > 0$ que para $x < 0$. Este hecho se ve muy claramente en la segunda integral, la integral sobre las ramas. Para $x > 0$, el caso que acabamos de resolver, tomamos la rama superior de $1/s$ a ∞ , si resolviéramos el caso para $x < 0$ estaríamos forzados a usar la otra rama, la que va de 0 a $-\infty$ de manera completamente análoga a 6.1.5. En esa sección vimos que el tomar una rama o la otra, daba a lugar a comportamientos muy distintos, básicamente compresión para $x > 0$ y expansión para $x < 0$.

En resumen, el intentar aplicar la transformada de Watson en la variable de Fourier m no resultó exitoso, pero si arrojó resultados curiosos que deberían ser estudiados con más detalle. El resultado final obtenido relaciona la serie de Fourier con la transformadas de inversa de Fourier de algo muy parecido, algo similar a la fórmula de Poisson. Mas aun, la compresión en $x > 0$, un comportamiento que parecía oculto, en la función obtenida antes de emplear la transformada de Watson, parece volver a aparecer al aplicarla. Evidentemente esto no lo podemos constatar con los resultados obtenidos hasta ahora, pero sería interesante averiguar si realmente aparece ese comportamiento, o si sólo es consecuencia de observar el fenómeno localmente. En otras palabras, habíamos pensado que era posible que los fenómenos de compresión para $x > 0$ sólo aparecían cuando tomábamos dominios no acotados y no periódicos. Localmente un dominio acotado y periódico se puede pensar como no acotado y no periódico, como el océano. En términos matemáticos, la serie de Fourier se comporta localmente como la transformada de Fourier.

7.4. En la solución general en la esfera.

La solución obtenida fue (6.30), es decir

$$\psi_{est} = \frac{i}{wkba} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta', \phi') \left[\frac{\xi_l(kb)}{\xi_l'(ka)} \right]. \quad (7.2)$$

Esta solución es muy similar a la solución (1.27) obtenida en la primera parte de la tesis antes de intentar hacer la transformada de Watson. La diferencia crucial es que ahora tenemos armónicos esféricos y no sólo los polinomios de Legendre. El punto clave es que contamos con la función

$\xi'_l(ka)$ en el denominador, eso quiere decir que tenemos los mismos ceros que en la primera parte y ya no los tenemos que volver a calcular.

Supongamos por ahora que podemos hacer la transformada de Watson de manera completamente análoga a la primer parte de la tesis, para ésto habría que suponer $m = m_0$ constante y sólo preocuparse por la suma en l . Obtendríamos algo análogo a (2.16), pero con armónicos esféricos,

$$\psi = \frac{-1}{wkba} \sum_{m=m_0}^{\nu} \frac{Y_{\nu-1/2, m_0}(\theta, \phi) Y_{\nu-1/2, m_0}^*(\theta', \phi') \xi_{\nu-1/2}(kb)}{\cos(\nu\pi) \left[\frac{\partial \xi'_{\nu-1/2}(ka)}{\partial l} \right]_{s=\nu}},$$

con ν los ceros (3.23), que son

$$\nu_\mu = n \approx x \cosh(A_\mu) + B_\mu \sinh(A_\mu) + \frac{B_\mu^2}{2x} \cosh(A_\mu), \quad (7.3)$$

con $x = ka$. Haciendo el análogo al análisis físico realizado en la sección 4.1 al problema de ondas electromagnéticas obtendríamos algo muy similar a (4.5), pero con $e^{im\phi}$, es decir,

$$e^{\pm i\text{Im}[\nu_m]\theta} e^{\mp i[\text{Re}[\nu_m]\theta - w] + im\phi}.$$

Nuevamente la parte imaginaria de los ceros, es decir el término de en medio de (7.3), esta relacionada con la amplitud de las ondas. La parte real esta funcionando como el número de onda en θ y m como el número de onda en ϕ . El punto más importante es que k no es la misma en el caso de ondas electromagnéticas que en el caso de ondas de Rossby. Es decir, cada problema tiene diferentes relaciones de dispersión. De hecho, en el caso de ondas electromagnéticas podemos ver de (4.12) que k es proporcional a w , en este caso k es inversamente proporcional \sqrt{w} como se ve en (6.29). Este hecho es crucial al interpretar la solución de green final, o en otras palabras, el pulso viajando en la Tierra. Para esto hay que tomar la solución con todo y su parte temporal,

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(t-t')}}{2\pi} \psi_{est} dw, \quad (7.4)$$

lo cual es completamente análogo a lo realizado en la sección 4.3. En esta misma sección reconocimos que la interpretación física de cada uno de los términos de los ceros ν_μ dependia de su relación con la frecuencia s o w . El primer término que era proporcional a s estaba relacionado con la propagación, el constante con la amplitud y el inversamente proporcional con la

dispersión. En ese caso k es proporcional a $s \approx iw$. Ahora, para las ondas oceánicas, dijimos que k es inversamente proporcional a $iw \approx s$. Eso quiere decir que el comportamiento y la interpretación física de nuestros ceros será totalmente diferente. El primer término de los ceros que era proporcional a s , ahora será inversamente proporcional a \sqrt{s} . El tercer término que era inversamente proporcional a s , ahora será proporcional a \sqrt{w} y el segundo término permanece constante y relacionado con la amplitud como acabamos de ver.

¿Cuál es la nueva interpretación física de los ceros? Con lo que tenemos hasta ahora, no podemos saber, ya que no podemos hacer la transformada inversa de Laplace como lo hicimos en la sección 4.3. Esto porque con la nueva relación de dispersión (6.29) aplicada a los ceros (7.3), no podemos escribir (7.4) como una integral de la forma de (4.16), aunque quizás se pueda resolver empleando otros métodos.

Antes de todo esto, supusimos de manera muy optimista que se puede hacer la transformada de Watson. Desgraciadamente no se puede, al menos no de la misma manera que en la primera parte de la tesis. Este hecho se basa en un simple pero importante detalle que es la paridad del coeficiente de normalización de los armónicos esféricos en el eje imaginario de la variable l . En otras palabras, al escribir nuestra serie como una integral compleja y al evaluarla sobre el contorno (2.1), la parte de la integral sobre el eje imaginario no es cero, ya que el integrando no es impar como en el caso de ondas electromagnéticas.

¿Para qué hice un análisis físico, si la transformada no se puede hacer? A pesar de que no se pudiera hacer como aquí se planteó, el análisis hecho, sobre todo entorno a la relación dispersión, es algo de suma importancia al hacer la transformada de Watson, ya que cambia la interpretación de los ceros y la física de un modelo que matemáticamente puede parecer prácticamente igual. Además, falta a estudiar con mucho más detalle este resultado, ya que quizás ajustando, deformando o girando los contornos, o quizás con algún otro truco podríamos lograr aplicar la transformada de Watson. Esto se deja como tema para futuras investigaciones.

7.5. ¿En qué soluciones?

Descubrimos que no es una buena idea intentar emplear la transformada de Watson en las variables de frecuencia de las series de Fourier, esto podría ser consecuencia del problema particular que estamos tratando o no. La dificultad de emplearla en variables de Fourier viene al cerrar el contorno de manera circular en el semiplano inferior y superior, ya que el término e^{imx} forzosamente no converge para uno de los dos. Si nos las ingeniamos para cerrarlo sólo por la mitad superior o inferior empleando la paridad del integrando o simplemente dejándolo en términos de integrales sobre partes del contorno, quizás pueda ser útil aplicarla sobre variables de Fourier, pero habría que investigar más a detalle al respecto para poder concluir algo concreto.

Otra posibilidad sería buscar soluciones por métodos completamente diferentes. Por ejemplo, resolver la ecuación sobre la esfera con series de Fourier en ϕ y tratar de encontrar los polinomios que cumplen la ecuación en θ , ya sea por el método de Frobenius o cualquier otro que se nos ocurra. De este modo, obtendríamos una suma de polinomios que podrían prestarse a que se lleve acabo la transformada de Watson sobre su índice y no sobre el índice de Fourier.

También es muy importante tomar en cuenta las propiedades particulares de la solución para elegir un contorno. Por ejemplo, en la primera parte de la tesis se empleó la paridad del integrando para eliminar una parte del contorno de integración. Esta simple propiedad fue la que no nos permitió hacer la transformada en la solución general sobre la esfera, entonces es muy importante identificar las propiedades relevantes de la solución para elegir un contorno conveniente y poder realizar la transformada.

Por último, resulta indispensable que la solución tenga polos o cortes rama, en la variable sobre la cual queremos hacer la transformada de Watson. Como ya hemos repetido a lo largo de la tesis, uno pensaría que los polos podrían aparecer por muchas razones, pero por lo general los polos están asociados a fuentes puntuales, es decir a funciones de Green. La estructura de la función de Green y por consecuencia de los polos, dependen de la ecuación diferencial y de la coordenadas usadas en el problema. Si la transformada de Watson no funciona en unas coordenadas podría llegar a funcionar en otras.

Conclusiones

Tal y como lo observamos en la primer parte de la tesis, la aplicación de la transformada de Watson puede traer muchísimas ventajas, desde acelerar la convergencia de la serie hasta brindar un significado físico más contundente a nuestra solución. Por el otro lado, en la segunda parte también vimos que para poderla aplicar, el problema requiere cumplir varias condiciones, como que la serie original tenga polos o cortes rama. El estudio y entendimiento de estas condiciones y de los procesos que se llevan a cabo en la transformación son, evidentemente, trascendentales para su empleo en futuros problemas. En este trabajo hemos descrito estos procesos y analizado algunas de estas condiciones en el contexto de dos problemas de interés físico.

En la primera parte describimos estos procesos, basados en el artículo de Watson [24] sobre el problema de la difracción de ondas eléctricas por la Tierra, con el fin de esclarecer y hacer más accesible a estudiantes, y a académicos en general, el empleo de la transformada de Watson. Ésta es una parte fundamental de la tesis ya que no parece haber ejemplos tan complejos y detallados de la transformada y del artículo de Watson en la literatura. Además, lo que hay no es de fácil lectura. También se mostró el poder y lo práctico de aplicar la transformada en este problema al generar una interpretación física mucho más clara, a partir de la solución transformada y mediante un análisis físico que no se hizo en el artículo original. Este último consistió en la obtención de una mejor aproximación analítica de los ceros de ξ . Con ésta se pudieron analizar los pulsos que viajan alrededor de la Tierra, mostrando así una relación muy clara entre los ceros de ξ y tres fenómenos fundamentales que ocurren cuando los pulsos viajan alrededor de la Tierra: propagación, dispersión y disminución de amplitud. Cada uno de estos relacionado directamente con un término de los ceros obtenidos.

En la segunda parte, se dedujo un modelo ya conocido para describir las ondas de Rossby, es decir, las ondas generadas por la fuerza de Coriolis. Se intenta solucionar la ecuación obtenida mediante distintos métodos y aproximaciones obteniendo resultados muy interesantes. Cuando nos concentramos en resolver la ecuación en el plano tangente. Obtuvimos la relación de dispersión para ondas planas, en donde vemos que en efecto sólo está permitida la propagación al Oeste, a pesar de que la velocidad de grupo y , por consecuencia, el flujo de energía, puede ir en cualquier dirección. Más adelante, aplicamos series de Fourier en y y obtuvimos un efecto de propagación de vórtices hacia la izquierda (Oeste) muy similar al obtenido en el caso de la esfera, pero obtuvimos un nuevo fenómeno para $x > 0$; un efecto de compresión de vórtices del lado derecho. En este punto no se tenía la seguridad de si este efecto era causa de las aproximaciones empleadas, o si realmente así se comportaba nuestro modelo. Consecuentemente, se continuó buscando soluciones por otros métodos. El siguiente método fue la transformada de Fourier en y . En este caso obtuvimos una solución muy curiosa, del lado izquierdo (Oeste) se observa expansión de parábolas o de vórtices parabólicos, mientras que del lado derecho se observa compresión de elipses o vórtices elípticos. Esta solución mostraba este comportamiento extraño, además de ser singular en $x = 0$, así que decidimos cambiar la condición inicial por una más suave. En vez de una delta en y , pusimos una Gaussiana. Del lado izquierdo obtuvimos nuevamente expansión de parábolas, pero del lado derecho obtuvimos propagación al Oeste (izquierda) y compresión en x , constatando los resultados anteriores. También intentamos resolver empleando series de Fourier en x , pero no pudimos; el intento no fue en vano. Surgieron nuevas dudas, ya que si se pudiera obtener la solución en dicho caso, no habría habido diferencia entre la solución del lado izquierdo y derecho. Esto último significa que el efecto de compresión que estábamos observando del lado derecho no existía, ya que implicaría que hay compresión de ambos lados lo cual no tiene sentido físico. Finalmente intentamos solucionar el problema mediante la transformada de Fourier en x y obtuvimos prácticamente lo mismo que al emplear la transformada de Fourier en y , pero empleando muchas menos aproximaciones. Fue con este último resultado que constatamos que la compresión del lado derecho no era consecuencia de las aproximaciones empleadas.

También, se obtuvieron dos soluciones sobre la esfera. La primera es la misma que obtuvo Longuet Higgins en [9]. En esta solución observamos

vórtices que se propagan al Oeste en forma de armónicos esféricos con una velocidad angular que depende del número de onda en θ de los polinomios asociados de Legendre. La segunda la obtuvimos al incluir la variable radial al problema para tratar que se asemejara más al problema de la primera parte de la tesis. Esta vez observamos lo mismo que en la solución anterior, sólo que ahora los coeficientes dependían de funciones de Bessel, y la velocidad angular dependía tanto del número de onda en θ como del número de onda en ϕ de los polinomios asociados de Legendre. Más aún, obtuvimos la misma relación de dispersión que habíamos obtenido en el plano tangente.

¿Qué podemos extraer de toda esta información? En definitiva, hay propagación de vórtices al Oeste. La compresión en x del lado derecho la observamos en tres de seis métodos empleados. No la observamos al emplear series de Fourier en x , a pesar de que no obtuvimos una solución final, sí vimos que aunque la obtuviéramos no habría. Tampoco la observamos en el caso de la esfera y de la relación de dispersión, lo cual se debe a que supusimos soluciones que se propagan. Esto nos lleva a pensar que este fenómeno no es consecuencia de las aproximaciones empleadas sino del modelo y de las suposiciones que hagamos sobre nuestra solución. Por ejemplo, si elegimos emplear series de Fourier en x , estamos suponiendo una solución periódica, lo cual podría hacer desaparecer la parte compresiva de la ecuación. Esto último es más evidente si suponemos una solución que se propaga desde un principio, ya que no hay manera de que se comprima conforme t crece. En otras palabras, parece haber una diferencia cualitativa considerable al emplear la transformada de Fourier en vez de la serie, o el suponer soluciones que se propagan o no.

Veamos más precisamente donde radica esa diferencia. Si nos fijamos en la solución en la esfera, es fácil notar que su equivalente en el plano es el suponer series de Fourier en x , ya que la solución en la esfera va sumada sobre $e^{im\phi}$. En la esfera obtuvimos como resultado propagación al Oeste y nada de compresión en ϕ . En el plano no pudimos resolverlo, pero si sabemos que en nuestra solución no podía haber compresión en x . Esto constata el hecho de que el suponer soluciones periódicas hace desaparecer la parte compresiva. Por el otro lado, al emplear la transformada, ya sea en x o en y , no parece haber efectos relevantes de propagación para $t \gg 1$ en ninguna dirección, sólo de compresión y expansión a la derecha y a la izquierda respectivamente. Finalmente al emplear series de Fourier en y , la compresión no desapareció en absoluto, ya que no supusimos periodicidad en x , sino

en y , pero si obtuvimos una solución muy diferente a la obtenida empleando la transformada de Fourier en y .

Esto quiere decir que si forzamos una solución de cualquier tipo, ya sea periódica o que propague, probablemente nos estamos perdiendo gran parte de la información que brinda el modelo ya que parece haber una combinación de propagación, compresión y expansión. Debido a que la transformada de Fourier es útil para dominios infinitos no periódicos, podemos pensar que la solución obtenida es lo que se vería localmente en el océano, y lo que obtenemos empleando la serie de Fourier es lo que se vería si viéramos la esfera desde lejos, como en la solución obtenida en la esfera. Esto querría decir que el fenómeno de compresión sólo es visible localmente, habría que constatar este hecho experimentalmente.

También es importante fijarse cómo el cambiar la fuente por una más suave, cambió la solución obtenida al emplear la transformada de Fourier en y . Además de que desapareció la singularidad y que el lado izquierdo se quedó muy similar, el lado derecho pasó de comprimir vórtices elípticos a comprimir algo que se asemeja más a una hipérbola. Esto nos hace pensar que es de suma importancia emplear una fuente más apropiada físicamente para obtener resultados más reales.

Finalmente, hablemos nuevamente sobre la transformada de Watson. En ninguna de las soluciones obtenidas pudimos aplicar la transformada, pero sí obtuvimos algo de información de cuándo se puede o no aplicar y qué necesitamos para aplicarla. En primer lugar vimos que puede ser complicado aplicarla a las variables de frecuencia de Fourier, ya que al cerrar el contorno la exponencial de Fourier diverge ya sea en el semi-plano inferior o en el superior. Para cerrar el contorno sólo por el semi-plano inferior o superior, se tendrían que usar propiedades particulares del integrando como lo podría ser la paridad, como en el caso de la primera parte de la tesis. En su defecto, se podría dejar en términos de la integral sobre el contorno que no se pudo anular, como lo intentamos en 7.2, lo cual nos podría llevar a resultados interesantes.

También vimos, al intentar aplicar la transformada de Watson a una función con cortes ramas, que esta se puede no sólo emplear con los polos, sino también con los cortes rama, obteniendo integrales que se pueden aproximar o resolver por métodos numéricos. Esto amplía el horizonte de aplicabilidad de la transformada, ya que muchas soluciones contienen factores

con raíces y por consecuencia con cortes ramas. Además, notamos que es importante que los polos que dan lugar a la solución original no coincidan con los polos que dan lugar a la transformada, ya que al evaluar los residuos en estos polos la solución se complica mucho más en vez de simplificarse, esto es consecuencia de la fórmula (2.2).

Se reconoció que, por lo general, los polos están asociados a la función de Green, la cual a su vez depende de la forma de la ecuación diferencial y de las coordenadas empleadas. Por eso se intentó resolver una versión del problema que matemáticamente y topológicamente se parecían más al problema original de Watson. Esta versión corresponde a la solución general sobre la esfera. A pesar de que se obtuvo algo muy similar a lo que obtuvo Watson en su trabajo, no pudimos aplicar la transformada de Watson por un problema de paridad con los coeficientes de los armónicos esféricos, pero sí obtuvimos varios resultados interesantes. Estos están estrechamente relacionados con la relación de dispersión del problema. En primer lugar, en el caso de ondas electromagnéticas la relación de dispersión sólo nos decía que las ondas producidas viajaban a la velocidad de la luz, lo cual es muy sensato. En el caso de ondas de Rossby, la relación de dispersión nos restringía la propagación de ondas al Oeste. Además relaciona esta velocidad con los números de onda en θ y ϕ , entre mayores los números, menor la velocidad. Es importante resaltar que este último problema no se ha estudiado con el detalle suficiente y es probable que haciendo alguna deformación en el contorno o con algún truco matemático se pueda aplicar la transformada de Watson.

En el contexto de la transformada de Watson la relación de dispersión resulta trascendental, ya que la aproximación obtenida de los ceros de ξ tiene tres términos. Uno es proporcional a k , otro constante y otro es inversamente proporcional a k . La magnitud del vector de onda k , depende de la frecuencia w y esa dependencia la da la relación de dispersión. Al hacer la superposición de frecuencias w , como en 4.3, la física del sistema puede cambiar por completo, así como la interpretación de los ceros ξ , ya que la dependencia de w cambia por completo. En el caso de ondas electromagnéticas, cada término estaba asociado a un fenómeno: propagación, atenuación y dispersión. En el caso de ondas de Rossby, el término de atenuación que es el constante hubiera sido el mismo, pero los términos de propagación y dispersión no. El término de propagación que antes era proporcional a w , en el caso de ondas de Rossby hubiera sido inversamente proporcional a \sqrt{w} , y el término de dispersión que era inversamente pro-

porcional a w , hubiera sido proporcional a \sqrt{w} . Desafortunadamente no se pudo resolver la integral de superposición de frecuencias con la relación de dispersión de las ondas de Rossby, privándonos de una interpretación física más profunda de lo que hubiera pasado si hubiésemos sido capaces de emplear la transformada de Watson en el problema de ondas oceánicas.

Apéndice A

Desarrollo en Ondas Esféricas Centradas en el Origen

Antes de empezar con los desarrollos vamos a ver una representación integral de las funciones esféricas de Bessel,

$$j_n(x) = \frac{x^n}{2^{n+1}n!} \int_{-1}^1 e^{ixt} (1-t^2)^n dt, \quad (\text{A.1})$$

donde $j_n(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{n+1/2}(x)$ y cumple la ecuación (1.23). Se deja como ejercicio probar que en efecto es solución de (1.23) y que sus primeros términos coinciden con los de $j_n(x)$. Se sugiere sustituir la integral en (1.23) y escribir el integrando como una derivada respecto a t , $(\int_{-1}^1 \frac{d}{dt} [e^{ixt} (1-t^2)^{n+1}] dt)$, después resolver la integral original para varios valores de n y comparar con los originales.

A.1. Un Primer Desarrollo

Ahora, queremos expresar la solución de la ec. de Helmholtz, que acabamos de obtener, en términos de una suma infinita de funciones especiales (polinomios de Legendre y funciones de Bessel). Para esto primero vamos a desarrollar una función mas sencilla, $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{ikr\cos(\theta)}$. Multiplicándola por

132 Apéndice A. Desarrollo en Ondas Esféricas Centradas en el Origen

$P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta)$ e integrando obtenemos

$$\int_{\pi}^0 e^{ikr \cos(\theta)} P_n(\cos(\theta)) \sin(\theta) d\theta = \int_{-1}^1 e^{ikru} P_n(u) du,$$

donde usamos $u = \cos(\theta)$. Por el otro lado, sabemos que los polinomios de Legendre satisfacen la fórmula de Rodrigues,

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (u^2 - 1)^n.$$

Sustituyendo $P_n(u)$ en la integral se sigue que

$$\int_{-1}^1 e^{ikru} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (u^2 - 1)^n du.$$

Integrando por partes obtenemos que

$$\frac{1}{2^n n!} \left[e^{ixu} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} (u^2 - 1)^n \Big|_{u=-1}^{u=1} - ikr \int_{-1}^1 e^{ikru} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (u^2 - 1)^n du \right].$$

Al evaluar el lado izquierdo nos da cero. Repitiendo la integración por partes n veces en total adopta la forma

$$\int_{-1}^1 e^{ikru} P_n(u) du = \frac{(ikr)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 e^{ikru} (1 - u^2)^n du,$$

donde la integral del lado derecho es igual a la representación integral para las funciones esféricas de Bessel (A.1). Sustituyendo esta última se sigue que

$$\int_{-1}^1 e^{ikru} P_n(u) du = \frac{(ikr)^n}{2^n n!} j_n(kr) \frac{2^{n+1} n!}{(kr)^n}.$$

Simplificando obtenemos

$$\int_{-1}^1 e^{ikru} P_n(u) du = 2i^n j_n(kr), \quad (\text{A.2})$$

lo cual nos da una segunda representación integral de las funciones esféricas de Bessel. Ahora, supongamos que e^{ikru} acepta el desarrollo

$$e^{ikru} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(kr) P_n(u),$$

con $F_n(kr)$ desconocido. Multiplicando por $P_m(u)$, integrando respecto a u de -1 a 1 y usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre $\int_{-1}^1 P_n(u)P_m(u)du = 2\delta_{nm}/(2n+1)$, obtenemos

$$\int_{-1}^1 e^{ikru} P_n(u) du = F_n(kr) \frac{2}{2n+1}.$$

Despejando $F_n(kr)$ y usando la representación integral (A.2), observamos que $F_n(kr) = (2n+1)i^n j_n(kr)$. Recordando que $j_n(kr) = \sqrt{\pi/2kr} J_{n+1/2}(kr)$, resulta que el desarrollo buscado es

$$e^{ikr \cos(\theta)} = e^{ikr} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n(\cos(\theta)). \quad (\text{A.3})$$

Matemáticamente, esta ecuación representa una onda plana expresada como una suma de ondas esféricas. Este desarrollo es ampliamente usado y extremadamente útil. Se le conoce como la fórmula de Bauer (Ver [25, 4.82 pag.127] o para una prueba más general ver [25, 11.5 pag.368]). A nosotros nos servirá para obtener un segundo desarrollo que es trascendental para este trabajo.

A.2. El Desarrollo en Ondas Esféricas

Obtengamos el segundo desarrollo, este consistirá en desarrollar la solución a la ecuación de Helmholtz en el espacio libre. Definamos $F(R) = \frac{e^{-\beta R}}{R}$ con β un complejo arbitrario. Tomemos su transformada de Fourier en tres dimensiones en coordenadas esféricas

$$\hat{F}(R) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{-\beta R}}{R} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} d^3 R = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \frac{e^{-\beta R}}{R} e^{ikR \cos(\theta)} R^2 \sin(\theta) dR d\theta d\phi.$$

Integrado en todo el espacio; R de 0 a ∞ , θ de 0 a π y ϕ de 0 a 2π . Cambiando de variable a $u = ikR \cos(\theta)$, resolviendo la integral sobre θ e integrando sobre ϕ , veremos que

$$\hat{F}(R) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta R}}{R} \frac{[e^{-ikR} - e^{ikR}]}{-ikR} 2\pi R^2 dR = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} e^{-\beta R} \frac{\sin(kR)}{k} dR,$$

donde usamos $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$. Integrando dos veces por partes se tiene

$$\hat{F}(R) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta^2 + k^2}.$$

134 Apéndice A. Desarrollo en Ondas Esféricas Centradas en el Origen

Ahora, tomamos la transformada inversa

$$F(R) = \int \hat{F}(R) e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} d^3k = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{\beta^2 + k^2} k^2 \sin(\theta_k) dk d\theta_k d\phi_k. \quad (\text{A.4})$$

Nuevamente integrado en todo el espacio. Vamos a sustituir $e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$ por otra cosa. Como $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, entonces $e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}$. Utilizando el primer desarrollo (A.3)¹ se obtiene que

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n(\cos(\theta))$$

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} = \sum_{n'=0}^{\infty} (2n'+1) (-i)^{n'} \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}} J_{n'+1/2}(kr') P_{n'}(\cos(\theta')).$$

En estos desarrollos podemos cambiar las funciones de Legendre por armónicos esféricos. Esto se logra empleando el teorema de adición para armónicos esféricos que dice²:

$$P_l(\cos(\theta)) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_1, \phi_1) Y_l^m(\theta_2, \phi_2),$$

donde las relaciones entre los ángulos se muestran en la figura (A.1). Los armónicos esféricos están definidos por³,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\phi},$$

y siendo ortonormales

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) d\phi d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.5})$$

¹El desarrollo sobre $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}$ es fácil de probar, solo hace falta meterle el signo a la k o a la r y usar identidades de las funciones de Bessel.

²Se puede encontrar en la literatura como *Addition Theorem for Spherical Harmonics*, la prueba no es complicada. Ver referencia [23, pag.122]

³Los armónicos esféricos son la parte angular completa de las soluciones a la ecuación de Laplace.

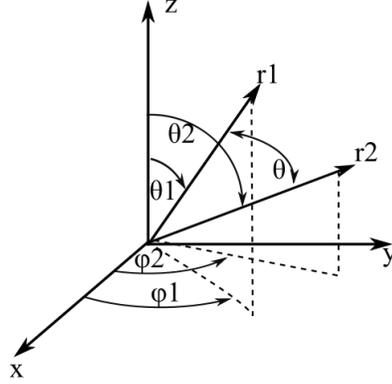


Figura A.1: Ángulos para el teorema de adición

Tomando $\theta_1 = \theta_r$, $\theta_2 = \theta_k$ y $\phi_1 = \phi_r$, $\phi_2 = \phi_k$ los desarrollos se transforman en

$$e^{ik \cdot r} = \sum_{n,m} 4\pi i^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) Y_n^m(\theta_r, \phi_r) Y_n^m(\theta_k, \phi_k)$$

$$e^{-ik \cdot r'} = \sum_{n',m'} 4\pi (-i)^n \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}} J_{n'+1/2}(kr') Y_{n'}^{m'}(\theta_{r'}, \phi_{r'}) Y_{n'}^{m'}(\theta_k, \phi_k)$$

donde, θ_r , $\theta_{r'}$ y θ_k , son los ángulos polares de r , r' y k respectivamente en algún sistema de referencia. Los ángulos originales θ y θ' son los ángulos entre r y k y entre r' y k respectivamente.

Sustituyendo en (A.4) tenemos la multiplicación de dos series infinitas e integradas respecto θ_k y ϕ_k . Como los armónicos esféricos son ortonormales, es decir satisfacen (A.5), al hacer la integral sobre θ_k y ϕ_k nos salen dos deltas $\delta_{nm'} \delta_{nm'}$; lo cual implica que solo quedan los términos con $n = n'$ y $m = m'$,

$$F(R) = 8 \sum_{n,m} Y_n^m(\theta_r, \phi_r) Y_n^m(\theta_{r'}, \phi_{r'}) \int_0^\infty \frac{\pi}{2k} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(kr')}{\sqrt{r'}} \frac{k^2 dk}{\beta^2 + k^2}.$$

Aplicando nuevamente el teorema de adición de los armónicos de esféricos

podemos ver que

$$\sum_m Y_n^m(\theta_r, \phi_r) Y_n^m(\theta_{r'}, \phi_{r'}) = P_n(\cos(\gamma)) \frac{2n+1}{4\pi},$$

donde γ es el ángulo entre r y r' . Además, las funciones esféricas de Bessel están dadas por $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$, con lo que podemos reescribir $F(R)$,

$$F(R) = 8 \sum_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos(\gamma)) \int_0^\infty \frac{j_n(kr) j_n(kr')}{\beta^2 + k^2} k^2 dk. \quad (\text{A.6})$$

Resolvamos la integral del lado derecho. Primero que nada, las funciones esféricas de Bessel son pares o impares dependiendo del índice n . Dado que hay dos funciones multiplicándose el producto siempre es par, por lo tanto el integrando es par, entonces $\int_0^\infty = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty$.

Ahora bien, supongamos que $r > r'$, los polos del integrando están en $k = \pm i\beta = \pm(-k_0)$. Además, como se cumple que $j_l(x) = \frac{1}{2}(h_l^1(x) + h_l^2(x))$, entonces la integral se transforma en

$$\int_0^\infty \frac{j_n(kr) j_n(kr')}{\beta^2 + k^2} k^2 dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{j_n(kr') (\frac{1}{2}(h_l^1(kr) + h_l^2(kr)))}{\beta^2 + k^2} k^2 dk.$$

Sabemos que $h_l^1(kr)$ tiende a cero conforme r tiende a infinito en el semiplano superior del plano complejo, y sabemos que $h_l^2(kr)$ igual, pero en el semiplano inferior. Entonces, como $r > r'$, se puede probar que los productos $h_l^1(kr) j_n(kr')$ y $h_l^2(kr) j_n(kr')$ también tienden a cero en sus semiplanos respectivos, lo cual, nos permite separar en dos la integral y tomar contornos complejos de la siguiente forma

$$\int_0^\infty \frac{j_n(kr) j_n(kr')}{\beta^2 + k^2} k^2 dk = \frac{1}{4} \int_{c_1} \frac{j_n(kr') h_l^1(kr)}{\beta^2 + k^2} k^2 dk - \frac{1}{4} \int_{c_2} \frac{j_n(kr') h_l^2(kr)}{\beta^2 + k^2} k^2 dk,$$

con c_1 un semicírculo orientado positivo en el semiplano superior, y c_2 un semicírculo orientado positivo en el semiplano inferior, como en la figura (A.2). El signo negativo del segundo término es necesario ya que c_2 recorre el eje real en sentido contrario al deseado.

La integral en los semicírculos se va a cero, solo queda la parte que va de $-\infty$ a ∞ . Por el teorema de residuos de Cauchy, esta integral queda igualada a los residuos por $2\pi i$. Usando la regla del cociente para encontrar los

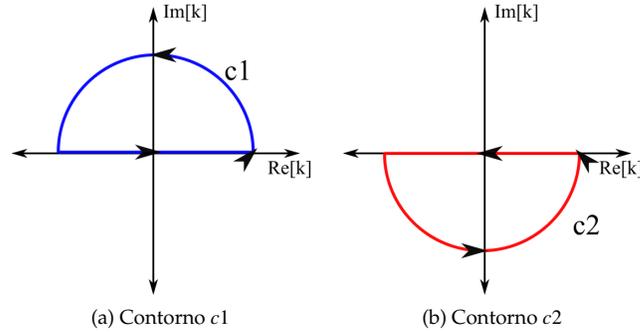


Figura A.2: Contornos c1 y c2

residuos se tiene que⁴,

$$\int_0^{\infty} \frac{j_n(kr)j_n(kr')}{\beta^2 + k^2} k^2 dk = -\frac{\pi i k_0}{4} j_n(-k_0 r') h_1^{(1)}(-k_0 r) - \frac{\pi i k_0}{4} j_n(k_0 r') h_1^{(2)}(k_0 r).$$

Haciendo uso de la paridad de las funciones esféricas de Bessel obtenemos

$$j_n(-k_0 r') = (-1)^n j_n(k_0 r') \quad h_n^{(1)}(-k_0 r) = (-1)^n h_n^{(2)}(k_0 r).$$

La integral se simplifica a

$$\int_0^{\infty} \frac{j_n(kr)j_n(kr')}{\beta^2 + k^2} k^2 dk = -\frac{\pi i k_0}{2} j_n(k_0 r') h_n^{(2)}(k_0 r),$$

y entonces (A.6) queda como

$$F(R) = -\frac{2}{\pi} \sum_n (2n + 1) P_n(\cos(\gamma)) \frac{\pi i k_0}{2} j_n(k_0 r') h_n^{(2)}(k_0 r).$$

Recordando que $F(R) = \frac{e^{-\beta R}}{R}$, que $i\beta = -k_0$ y como se definen las funciones esféricas de Bessel $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$ se tiene que

$$\frac{e^{-ik_0 R}}{R} = -i k_0 \sum_n (2n + 1) P_n(\cos(\gamma)) \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r'}} J_{n+1/2}(k_0 r') \sqrt{\frac{\pi}{2k_0 r}} H_{n+1/2}^{(2)}(k_0 r).$$

⁴Ver introducción para detalles sobre cómo encontrar los residuos o ver [3].

138 Apéndice A. Desarrollo en Ondas Esféricas Centradas en el Origen

Acomodando términos y escribiendo $k_0 = k$ y $\cos(\gamma) = \mu$ (sin peligro de confundir con variables anteriores) se transforma finalmente en

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = -\frac{i}{krr'} \sum_n (2n+1) P_n(\mu) \sqrt{\frac{\pi kr'}{2}} J_{n+1/2}(kr') \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr),$$

con $R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r'}$. Este es el desarrollo buscado para $r > r'$. Si $r' > r$ solo intercambian de lugar r y r' . Matemáticamente obtuvimos una onda esférica, cuya fuente se encuentra fuera del origen, como suma de ondas esféricas cuyas fuentes se encuentran en el origen. Este desarrollo es muy usado en física, sobretodo en problemas de difracción. Es un resultado particular del teorema de adición de Gegenbauer⁵, también se le encuentra en la literatura como desarrollo de Rayleigh.

⁵Ver [25, 11.4 pag.362] o ver [11] para una deducción alterna.

Apéndice B

Programa

El programa acepta como entrada $xmin$, $xmax$, $ymin$, $ymax$ y γ . Fija un valor de $v = ymin$, da como condición inicial $u = xmin$, llama al método de Newton aplicado sobre u y se obtiene un cero. Después se varia u , se vuelve a llamar al método de Newton obteniendo otro cero y así sucesivamente hasta llegar a $u = xmax$. Nuevamente todo el proceso se repite para un nuevo valor de v y así sucesivamente hasta llegar a $v = ymax$. La función Ceros sirve para calcular los contornos de Debye; la función Ceros2 sirve para calcular el plano γ o el plano n/x .

```
from numpy import *
PI=4.*arctan(1.0)

#Definimos la funcion F1- o F1+ para los contornos
def f1(x,y,g):
    al=g.real
    be=g.imag
    a=sinh(g)-g*cosh(g)
    b=cosh(x)*sin(y)-y*cosh(al)*cos(be)-x*sinh(al)*sin(be)
    #La curva c1 corresponde a (out=b-a.imag)
    #La curva c2 corresponde a (out=b+a.imag)
    out=b-a.imag
    return out

#Definimos la derivada de la funcion F1- o F1+
def df1(x,y,g):
    al=g.real
```

```

be=g.imag
a=sinh(x)*sin(y)-sinh(al)*sin(be)
return a

#Definimos la funcion para los planos
def f2(x,y,ga):
    a=cosh(x)*sin(y)-y*cosh(x)*cos(y)-x*sinh(x)*sin(y)
    #Agregar la parte comentada para obtener la otra curva
    a=a+PI*cosh(x)*cos(y)
    return a

#Definimos la derivada de la funcion para los planos
def df2(x,y,ga):
    a=-y*sinh(x)*cos(y)-sin(y)*x*cosh(x)
    #Agregar la parte comentada para obtener la otra curva
    a=a+PI*sinh(x)*cos(y)
    return a

#Metodo de Newton
def Newton(x,y,ga,f,df):
    dz=1.
    i=0
    #Corremos el metodo de Newton en "x" tomando y=cte.
    while dz>.001:
        x=x-f(x,y,ga)/df(x,y,ga)
        dz=abs(f(x,y,ga))
        i=i+1
        #Asegura que Newton no se quede en un ciclo infinito
        if i > 100:
            #Se asegura de no imprimir ese valor de x
            x=10000
            break
    return x

#Ceros de la funcion 1
def Ceros(xmin,xmax,ymin,ymax,greal,gimag):
    #Definimos gamma
    ga=complex(greal,gimag)
    #Creamos malla de condiciones iniciales con los limites
    y=ymin
    while y<ymax:
        y=y+.005
        x=xmin
        while x<xmax:

```

```

x0=Newton(x,y,ga,f1,df1)
x=x+.5
#Aseguramos que los valores no sean inf o Nan.
if x0 < 1000:
    print x0, y

#Ceros de la funcion 2
def Ceros2(xmin,xmax,ymin,ymax):
    #ga es variable fantasma, un parametro libre en Newton()
    ga=0
    #Creamos malla de condiciones iniciales con los limites
    y=ymin
    while y<ymax:
        y=y+.005
        x=xmin
        while x<xmax:
            x0=Newton(x,y,ga,f2,df2)
            x=x+.5
            #Hacemos cambio de variable (Puede borrar "cosh")
            z=cosh((complex(x0,y)))
            #Aseguramos que los valores no sean inf o Nan.
            if abs(z)<4:
                print z.real, z.imag

#SOLO LLAMAR A Ceros O A Ceros2 NO A AMBOS!

#Llama a funcion Ceros, pide(xmin,xmax,ymin,ymax,greal,gimag)
#Donde xmin,xmax,ymin,ymax da los limites de cond. iniciales
#Y greal y gimag son la parte real e imaginaria de gamma

Ceros(-10,10,-2*PI,0,-1,2.5)

#Llama a la funcion Ceros2, pide: (xmin,xmax,ymin,ymax)
#Donde xmin,xmax,ymin,ymax da los limites de cond. iniciales
#Ceros2(-2.5,2.5,.1,PI)

```

También se puede hacer de manera mas dinámica en Mathematica.
Las bifurcaciones de los contornos de Debye:

```

Manipulate[
  ContourPlot[{{Im[

```

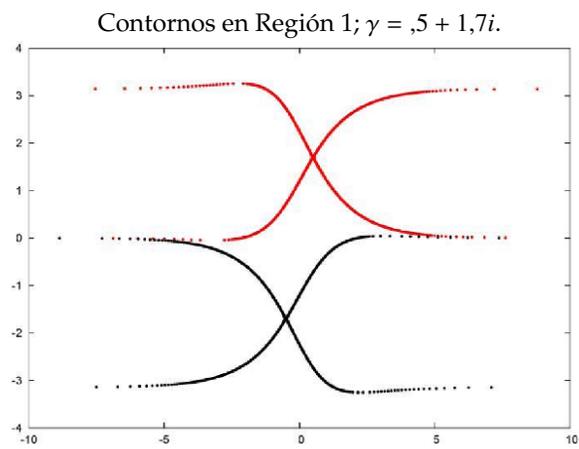
```
Sinh[x + I*y] - (x + I*y)*Cosh[a + I*b] -  
Sinh[a + I*b] + (a + I*b)*Cosh[a + I*b]] == 0}, {x, -10  
,10}, {y, -2*Pi, 2*Pi}}, {a, -3, 3}, {b, 0, Pi}]
```

El plano γ :

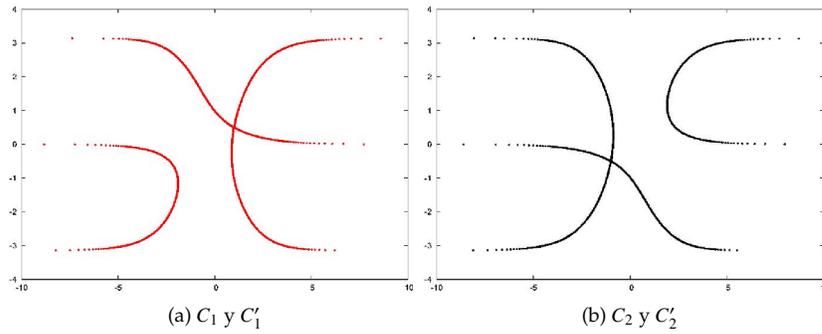
```
ContourPlot[{Im[Sinh[x + I*y] - (x + I*y)*Cosh[x + I*y]] == 0  
Im[Sinh[x + I*y] - (x + I*y - I*Pi)*Cosh[x + I*y]] == 0,  
Re[Sinh[x + I*y] - (x + I*y)*Cosh[x + I*y]] == 0},  
{x, -3, 3}, {y, 0, Pi}]
```

Apéndice C

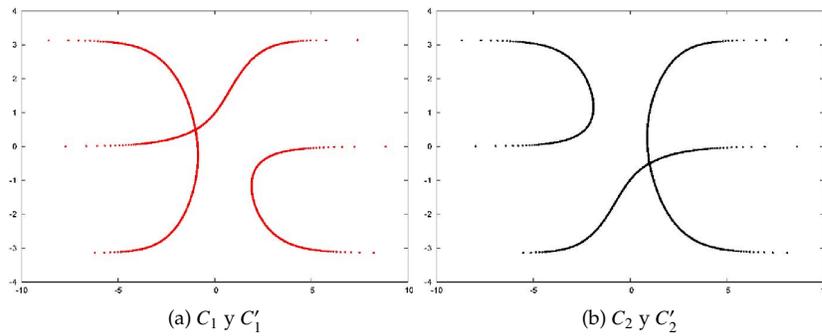
Gráficas de los Contornos



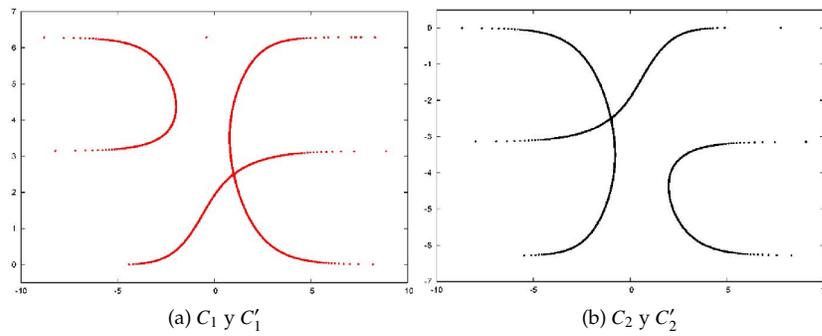
Contornos en Región 2; $\gamma = 1 + i/2$.



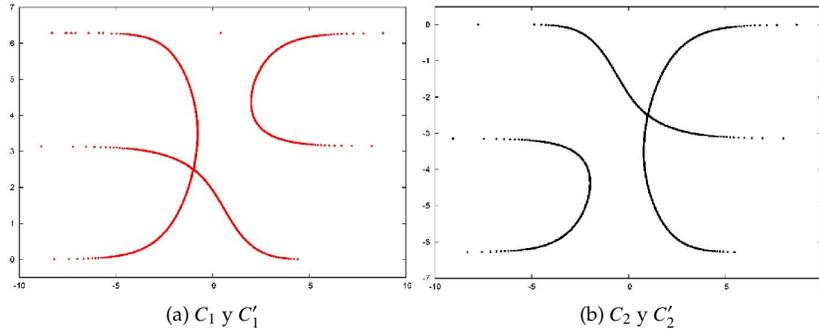
Contornos en Región 3; $\gamma = -1 + i/2$.



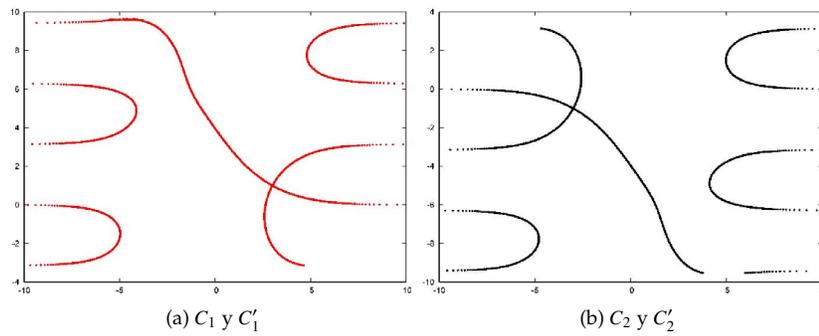
Contornos en Región 4; $\gamma = 1 + 2,5i$.



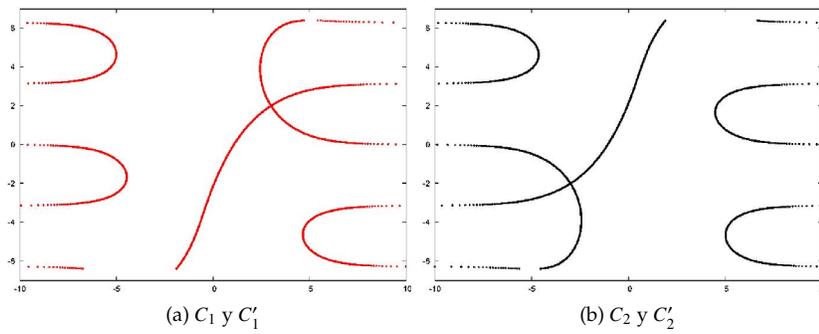
Contornos en Región 5; $\gamma = -1 + 2,5i$.



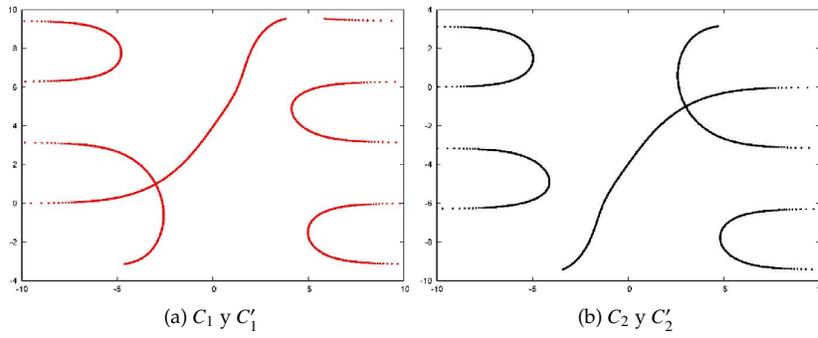
Contornos en Región 6A; $\gamma = 3 + i$.



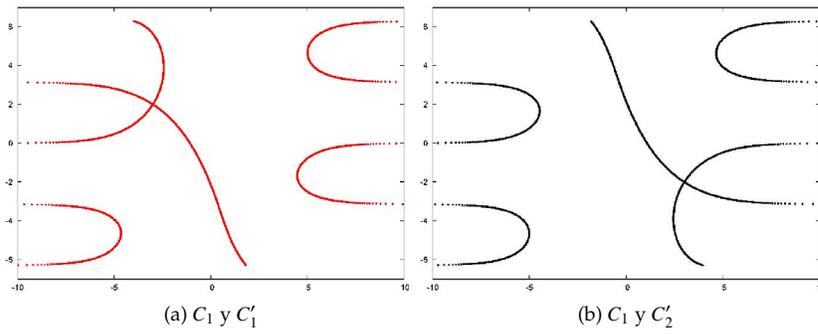
Contornos en Región 6B; $\gamma = 3 + 2i$.



Contornos en Región 7A; $\gamma = -3 + i$.



Contornos en Región 7B; $\gamma = -3 + 2i$.



Bibliografía

- [1] BATCHELOR, G. K. *An introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] BORN, M., AND WOLF, E. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7th ed. Cambridge University Press, 2005.
- [3] CHURCHILL, R. V. *Variable Compleja y Aplicaciones*, 7th ed. McGraw-Hill, 2004.
- [4] COPSON, E. *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press, 1965.
- [5] COURANT, R., AND HILBERT, D. *Methods of Mathematical Physics*, 1st english ed. Interscience Publisher Inc., 1966.
- [6] COURANT, R., AND JOHN, F. *Introducción al Calculo y al Análisis Matemático*. Limusa, 2005.
- [7] GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, 1999.
- [8] HABERMAN, R. *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Prentice Hall, 2003.
- [9] HIGGINS, M. S. L. Planetary waves on a rotating sphere. *The Royal Society* (1963).
- [10] HOCHSTADT, H. Some diffraction by convex bodies. *Polytechnic Institute of Brooklyn* (1959).
- [11] HOCHSTADT, H. *The Functions of Mathematical Physics*. Dover, 1987.
- [12] KELLER, J. B. Progress and prospects in the theory of linear wave propagation. *SIAM Review*, Vol. 21, No. 2 (Apr., 1979), pp. 229-245 (1979).

- [13] KRAUT, E. A. *Fundamentals of Mathematical Physics*. Dover, 2007.
- [14] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Dover, 1895.
- [15] MARSDEN, J. E. *Basic Complex Analysis*, 3th ed. W. H. Freeman, 1998.
- [16] MURRAY, J. D. *Asymptotic Analysis*. Springer Verlag, 1986.
- [17] NISBET, A. Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations. *The Royal Society* (1955).
- [18] OLVER, F. W. J. *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, 1974.
- [19] PEDLOSKY, J. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.
- [20] SATOH, M. *Atmospheric Circulation Dynamics and General Circulation Models*. Springer, 2004.
- [21] SOMMERFELD, A. *Partial Differential Equations in Physics*. Academic Press, 1949.
- [22] STRATTON, J. A. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1941.
- [23] WALLACE, P. R. *Mathematical Analysis of Physical Problems*. Dover, 1984.
- [24] WATSON, G.Ñ. The diffraction of electric waves by the earth. *The Royal Society* (1918).
- [25] WATSON, G.Ñ. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1922.
- [26] WHITTAKER, E. T., AND WATSON, G.Ñ. *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. Cambridge University Press, 1963.