



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

MECÁNICA ESTADÍSTICA GENERALIZADA  
EN ATRACTORES CRÍTICOS DE MAPEOS  
ACOPLADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

NICOLÁS PALMA ARAMBURU

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALBERTO ROBLEDO NIETO  
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. OCTAVIO MIRAMONTES VIDAL  
MIEMBRO DEL COMITÉ TUTORAL: DR. DENIS PIERRE BOYER





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## **Agradecimientos**

Quiero agradecer al Dr. Alberto Robledo por haber dirigido esta tesis, a los Drs. Denis Boyer y Octavio Miramontes por formar parte de mi comité tutorial. También extiendo mi gratitud hacia los miembros del jurado, que contribuyeron significativamente en la mejora de este texto: Dr. Octavio Miramontes, Dr. Christopher Rhodes Stephens, Dr. Gustavo Martínez Mekler, Dr. Hernán Larralde y Dr. Pedro Miramontes. Por último, agradezco a la UNAM, a mi familia y amigos.



## Resumen

Este trabajo tiene como objetivo, sentar las bases en el estudio de los atractores críticos de un par de mapas logísticos acoplados de manera lineal. Lo interesante de este sistema discreto, es que no sólo es capaz de reproducir la dinámica previamente observada en el mapa logístico sino que también posee nuevas propiedades como sincronización y la manifestación de la ruta de cuasi periodicidad. Teniendo en cuenta las experiencias y resultados obtenidos en el estudio de atractores críticos en el caso unidimensional, se buscó trasladar esas herramientas al caso bidimensional; para lograr esto, se dedicó un capítulo a la descripción de los resultados conocidos para cada una de las tres rutas al caos y otro a los atractores de un par de mapas logísticos acoplados. En ese sentido, el capítulo 4 representa la síntesis de estas dos ideas; y en particular, la verificación de los resultados obtenidos en el caso unidimensional.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Atractores críticos en una dimensión</b>	<b>6</b>
2.1. El mapa logístico . . . . .	6
2.2. Universalidad en mapas cuadráticos . . . . .	8
2.2.1. Duplicación de periodo . . . . .	9
2.2.2. Intermitencia . . . . .	12
2.3. Universalidad en mapas cúbicos . . . . .	14
2.3.1. Cuasi periodicidad . . . . .	14
2.4. Dinámica en los atractores críticos . . . . .	17
2.4.1. Intermitencia . . . . .	18
2.4.2. Bifurcación de trinche . . . . .	20
2.4.3. Dinámica en el borde del caos . . . . .	21
2.4.4. Cuasi periodicidad . . . . .	24
2.5. Transiciones de fase dinámicas de Mori . . . . .	25
2.6. Identidad de Pesin generalizada . . . . .	28
<b>3. Atractores de un par de mapas acoplados</b>	<b>30</b>
3.1. Dinámica en mapas acoplados . . . . .	30
3.2. Sincronización . . . . .	37
<b>4. Atractores críticos en dos dimensiones</b>	<b>40</b>
4.1. Exponentes de Liapunov en más de una dimensión . . . . .	40
4.2. Cálculo numérico de los exponentes de Liapunov en más de una dimensión . . . . .	43
4.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales en atractores críticos en dos dimensiones . . . . .	50
4.3.1. Duplicación de periodo . . . . .	50

4.3.2. Intermitencia . . . . .	51
4.3.3. Borde del caos . . . . .	52
<b>5. Conclusiones</b>	<b>54</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En las últimas décadas el estudio de las propiedades dinámicas de los sistemas no lineales ha recibido una merecida y constante atención [1, 2]. Las distintas ramas que constituyen este cuerpo de conocimientos, entre las que se encuentran las teorías ergódica, del caos y de la estabilidad, han crecido y encontrado sustento en un advenimiento de cada vez mejores técnicas computacionales. En particular, las tres rutas al caos (duplicación de periodo, intermitencia y cuasi periodicidad) han recibido suficiente atención, principalmente, debido a sus propiedades de universalidad [3]; sin embargo, la importancia que se le otorga a los atractores críticos y al borde del caos (donde las trayectorias no son periódicas ni caóticas) no ha sido tan sustancial como en otras áreas. Una de las razones principales que motivaron nuestro interés hacia estos atractores consiste en que son candidatos a poseer propiedades universales exclusivas de los fenómenos fuera de equilibrio. Entre los posibles casos de estudio se encuentran los vidrios [4] y otros sistemas más [5].

Un rasgo esencial de dos sistemas dinámicos arbitrarios, por muy diversos que sean, es que si evolucionan al caos por la misma ruta, poseen propiedades tanto cualitativa como cuantitativamente idénticas. Este hecho representa un elemento unificador en la búsqueda de una descripción universal de la naturaleza. Extender esa idea al estudio de atractores críticos parece ser prometedora bajo el contexto de la estadística deformada<sup>1</sup>.

Al evaluar el exponente de Liapunov para diferentes valores de los parámetros de control que definen un sistema dinámico en una dimensión, se puede conocer, en función de si su signo es negativo o positivo, si se trata de una trayectoria periódica o caótica, respectivamente. A pesar de ser una cantidad muy relevante, existe un caso de mucho interés donde el exponente de Liapunov no aporta ninguna información sobre la dinámica del sistema y corresponde al caso donde éste se anula. Existen dos

---

<sup>1</sup>Llamamos estadística deformada a aquella en las que las funciones exponencial y logarítmica ordinarias son substituidas, respectivamente, por  $\exp_q(y) \equiv (1 - (q-1)y)^{-1/(q-1)}$  y  $\ln_q(y) \equiv (y^{1-q} - 1)/(1 - q)$  que corresponden a las funciones exponencial y logarítmica deformadas mediante un parámetro  $q$  [5, 6].

enfoques para resolver esta problemática, aunque diametralmente opuestos, brindan resultados equivalentes. Ambos coinciden en cambiar la definición usual del exponente de Liapunov,  $\lambda$ , que en el caso unidimensional, se encuentra definido por

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \xi_t(x_i) \quad (1.1)$$

con  $\xi_t(x_i)$ , la sensibilidad a condiciones iniciales, dada por

$$\xi_t(x_i) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_i}. \quad (1.2)$$

El primer enfoque, que ha sido utilizado en la literatura [7, 8, 9], consiste en modificar la ec.(1.1) haciendo  $t \rightarrow \ln t$ , es decir

$$\lambda = \frac{1}{\ln t} \ln \xi_t. \quad (1.3)$$

El otro camino reside en hacer la sustitución  $\ln \rightarrow \ln_q$ , de manera que se tiene

$$\lambda_q^{(k)} = \frac{1}{t} \ln_q \xi_t. \quad (1.4)$$

Es importante enfatizar que estas dos perspectivas son alternativas para describir un mismo fenómeno. En el caso de que el atractor crítico sea un multifractal,  $k$  es un índice asociado con cada unas familias de las trayectorias que lo constituyen. Una de las consecuencias directas de escoger el segundo camino es que se trabaja con una generalización del exponente de Liapunov,  $\lambda_q$ , que en el caso en el que el índice entrópico,  $q$ , sea igual a uno, se recupera la ec.(1.1). Un rasgo muy interesante es que es posible vincular el exponente de Liapunov generalizado con una extensión de la producción de entropía, [10] y [11]. Estas ideas se encuentran agrupadas bajo el esquema de la estadística deformada.

Como ya se dijo antes, cuando dos sistemas dinámicos evolucionan al caos por la misma ruta, por muy diferentes que sean, comparten elementos universales entre sí. En ese sentido, la estadística deformada representa un esquema unificador entre el estudio de los atractores críticos con fenómenos físicos. Un elemento relevante es que el índice entrópico,  $q$ , no tiene un valor arbitrario, o libre, sino que a cada una de las rutas le corresponde unívocamente un número determinado.

Un par de mapas logísticos acoplados de manera lineal en dos dimensiones representa el siguiente paso lógico para generalizar y traducir las experiencias ganadas en el caso unidimensional. Las propiedades observadas corresponden a dos subconjuntos de condiciones iniciales. El primero de ellos reproduce todos los atractores observados en el mapa logístico y es posible corroborar los resultados previos de la estadística deformada. El segundo subconjunto posee un mundo de nuevos elementos por explorar, entre los que se encuentran la ruta de cuasi periodicidad [2], el fenómeno de sincronización [12], la transición caos-hipercaos [13] y muchos más

[14]. En sí, estudiar los atractores críticos para un par de mapas logísticos acoplados linealmente constituye una excelente oportunidad para verificar y probar nuevas ideas alrededor de la estadística deformada.

En sí lo que se busca lograr con esta tesis es un punto de avanzada en el estudio de atractores críticos más allá del caso unidimensional. El presente trabajo consta de tres capítulos centrales (2, 3 y 4): el primero de éstos, está dedicado a la descripción del mapa logístico en una dimensión y de sus atractores críticos; el segundo, trata sobre un par de mapas logísticos acoplados, sus diferentes propiedades y la forma en que manifiesta las tres rutas al caos; y el tercero, se refiere al cálculo de los exponentes de Liapunov y la sensibilidad a las condiciones iniciales. Por último, nuestros comentarios finales y perspectivas futuras se encuentran resumidas en las conclusiones.

# Capítulo 2

## Atractores críticos en una dimensión

La finalidad de este capítulo es la de describir las propiedades que caracterizan a los sistemas, que a través de cada una de las rutas conocidas, en sistemas de baja dimensionalidad, evolucionan hacia el caos. Después daremos, en base a la literatura existente, el análisis que se ha hecho en torno al estudio de la sensibilidad anómala a condiciones iniciales para atractores críticos [5]. Todo esto con el propósito de describir las herramientas que utilizamos en capítulos posteriores.

### 2.1. El mapa logístico

Uno de los principales intereses en describir la dinámica del mapa logístico, ec. (2.1), es que a pesar de ser una ecuación sencilla posee dos rutas al caos (para diferentes valores del parámetro de control  $\mu$ ) y sus propiedades de carácter universal pueden ser obtenidas mediante la técnica del grupo de renormalización.

$$x_{t+1} = 1 - \mu x_t^2, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

La virtud de la ec. (2.1) yace en que el mapeo experimenta diferentes dinámicas; es decir, el comportamiento de la sucesión de imágenes que corresponden a iterar el mapa logístico,  $\{x_1, x_2, \dots, x_t, \dots\}$ , puede ser diametralmente opuesto para valores diferentes del parámetro de control, donde éste último se encuentra acotado en el intervalo  $0 < \mu < 2$ . La ec. (2.1) manifiesta puntos fijos, movimientos periódicos y caos. Hay tres rutas posibles al caos para sistemas de baja dimensionalidad: una es vía duplicación de periodos, otra es intermitencia y la última es la de cuasi periodicidad. El mapa logístico posee las primeras dos.

La ruta de duplicación de periodos salta a la vista en la figura (2.1) y se observa que al incrementar gradualmente el parámetro  $\mu$  el sistema pasa de un punto fijo o de equilibrio a un movimiento de periodo dos. Así, sucesivamente se puede incrementar

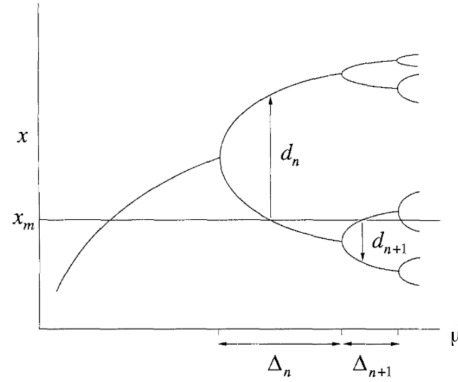


Figura 2.1: Duplicación de período en el mapa logístico

el parámetro  $\mu$  hasta obtener un periodo  $2^\infty$ , que se conoce como el borde del caos,  $\mu = \mu_\infty$ , en el cual se manifiesta la última trayectoria periódica o la primera caótica.

La cascada de bifurcaciones de la ruta de duplicación de periodos tiene propiedades tanto cualitativas como cuantitativas universales válidas para cualquier mapa que pertenezca a la misma clase de universalidad<sup>1</sup>, que pueden ser encontradas tanto analíticamente como numéricamente (y son conocidas como las constantes de Feigenbaum [2]). Si denotamos a  $\mu_n$  como el  $n$ -ésimo punto donde sucede una bifurcación de duplicación de periodo, tenemos que la primera constante está dada por

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = 4.669\dots, \quad \Delta_n = \mu_n - \mu_{n-1} \quad (2.2)$$

donde también se satisface que

$$\mu_n = \mu_\infty - \text{const} \delta^{-n} \quad (2.3)$$

Si siguiendo la notación de la figura (2.1) la otra constante de Feigenbaum está dada por el siguiente límite

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.5029\dots \quad (2.4)$$

En la figura (2.2) se muestra el intrincado comportamiento del mapeo, donde los intervalos caóticos van seguidos de ventanas de periodicidad caracterizadas por  $p$ -ciclos ( $p=3,5,6,\dots$ ) con sucesivas bifurcaciones  $p, p2^1, p2^2, \dots$ . A su vez, después aparecen periodos  $p3^n, p4^n, \dots$ . Una manera de estudiar la dinámica es mediante el exponente de Liapunov,  $\lambda$ , definido a través la distancia que separa dos condiciones iniciales cercanas,  $x_0$  y  $x_0 + \epsilon$ , en la  $t$ -ésima iteración,  $|\Delta| = |\epsilon| e^{t\lambda}$ . El exponente se puede reescribir de la siguiente forma usando  $\Delta = f^{(t)}(x_0 + \epsilon) - f^{(t)}(x_0)$

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Delta|}{|\epsilon|} = \frac{1}{t} \ln \left| (f^{(t)})'(x_0) \right| \quad (2.5)$$

<sup>1</sup>por ejemplo, todos los mapas cuadráticos, entre los que se encuentra el mapa logístico

Por último, podemos usar la regla de la cadena y reescribir  $(f^{(t)})'(x_0) = \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i)$  de forma que el exponente de Liapunov [1] queda dado por

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{i=0}^{t-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \left| \ln f'(x_i) \right| \quad (2.6)$$

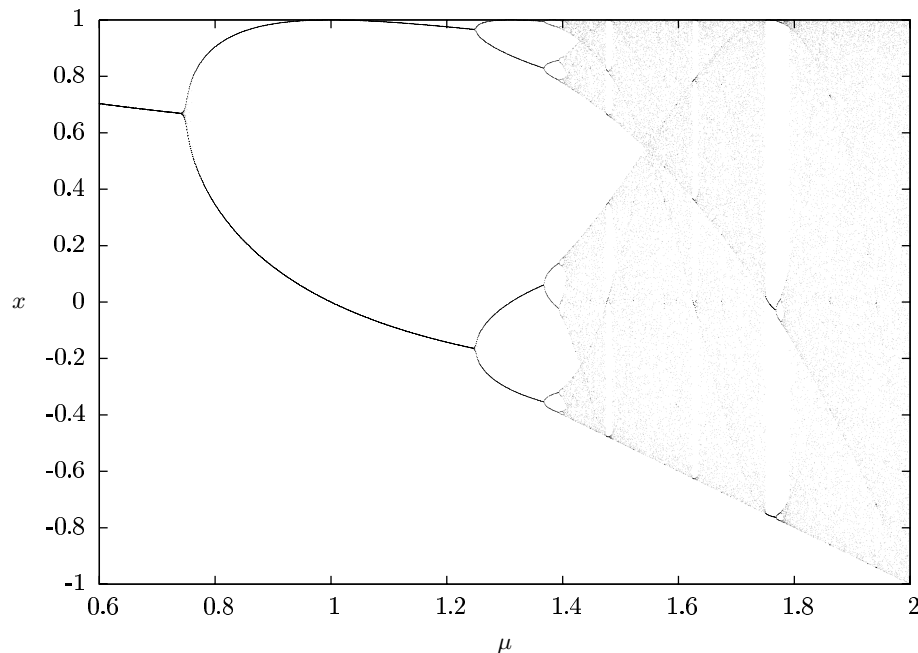


Figura 2.2: Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico.

En la figura (2.3) se muestra el exponente de Liapunov como función de  $\mu$ . Cuando el exponente es negativo el mapeo presenta trayectorias periódicas y cuando es positivo tiene órbitas caóticas. El caso  $\lambda = 0$  es de mucho interés para nuestra discusión y regresaremos a él más tarde.

El mapa logístico evoluciona al caos por dos vías: una de ellas es la ruta de duplicación de periodos, que es provocada por una bifurcación de trinche (“pitchfork”) y la otra es de intermitencia (inducida por una bifurcación tangente) [2].

## 2.2. Universalidad en mapas cuadráticos

Una de las propiedades más relevante de los mapeos cuadráticos, es el carácter universal de las constantes  $\alpha$  y  $\delta^2$ , que son reproducidas tanto cualitativa como

<sup>2</sup>En el caso de que se tome una generalización del mapa logístico,  $f_\mu = 1 - \mu|x|^\zeta$ , las constantes  $\alpha$  y  $\delta$  dependen de la elección de  $\zeta$  [15].

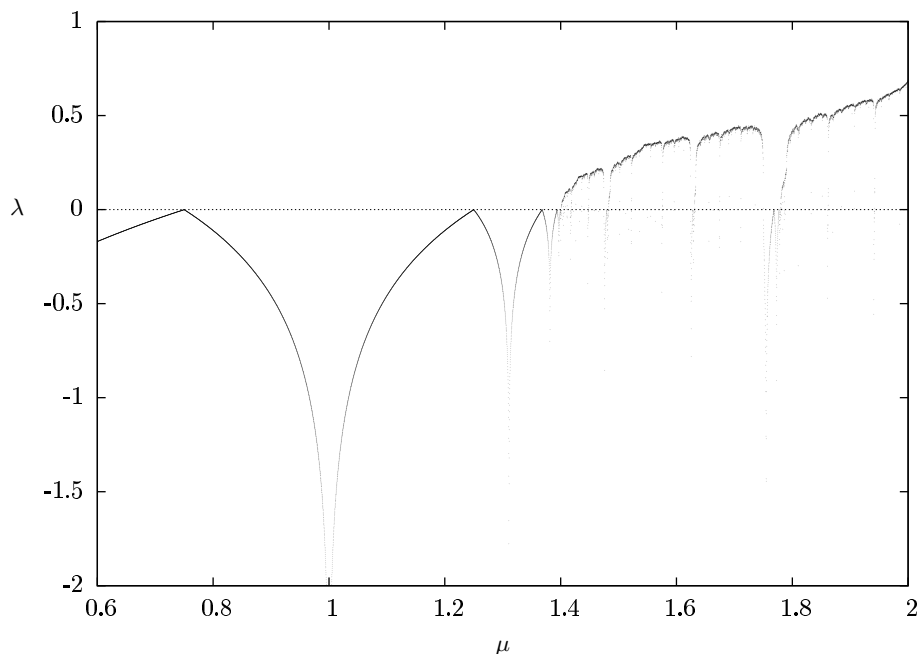


Figura 2.3: Exponente de Liapunov como función de  $\mu$ .

cuantitativa por cualquier mapa de este tipo, así como aquellos sistemas dinámicos que pertenecen a la misma clase de universalidad, es decir, aquellos que evolucionan al caos por la misma ruta [3].

En términos de los métodos de renormalización, brevemente descrito en la siguiente sección, existe un mapa, conocido como de punto fijo en la llamada cuenca de atracción, que posee la esencia de la dinámica y el carácter universal de cada una de las rutas al caos.

### 2.2.1. Duplicación de periodo

El objetivo principal del método del grupo de renormalización aplicado a un mapeo no lineal consiste en obtener el mapa de punto fijo,  $g(x)$ , para una función  $f(x)$  y un operador  $T$ . En el caso de la familia de mapas dados por  $f_\mu = 1 - \mu|x|^\zeta$  [15] se cumple

$$Tf(x) = -\alpha f(f(-x/\alpha)) \quad (2.7)$$

de manera que en el fondo la cuenca de atracción, se satisface

$$g(x) = -\alpha g(g(-x/\alpha)). \quad (2.8)$$

El operador  $T$  se encuentra motivado en las propiedades de la ruta por duplicación de periodo y en particular de la existencia de los superciclos.

Entre  $\mu_{n-1} < \mu < \mu_n$  existe un ciclo estable de periodo  $2^{n-1}$  con elementos  $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{2^{n-1}-1}^*$ , tales que  $f_\mu(x_i^*) = x_{i+1}^*$  y que satisfacen que

$$\left| \frac{df_\mu^{(2^{n-1})}(x_0^*)}{dx_0^*} \right| = \left| \prod_i f'_\mu(x_i^*) \right| < 1. \quad (2.9)$$

Los superciclos de periodo  $2^n$  para  $\mu = \mu_n$  son aquellos ciclos estables que contienen al punto  $x_0^* = 0$  de forma que  $f'_{\mu_n}(x_0^*) = 0$  y por lo tanto

$$\frac{df_{\mu_n}^{(2^n)}(x_0^*)}{dx_0^*} = \prod_i f'_{\mu_n}(x_i^*) = 0 \quad (2.10)$$

Acorde con la figura (2.1), podemos identificar a  $d_n$  como la distancia entre  $x^* = 0$  y  $f_{\mu_n}^{(2^{n-1})}(0)$ , es decir

$$d_n = f_{\mu_n}^{(2^{n-1})}(0) \quad (2.11)$$

y al utilizar la ec. (2.4), tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = d_1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\mu_{n+1}}^{(2^n)}(0) = d_1 \quad (2.12)$$

La discusión previa no sólo es válida para  $x = 0$  sino para cualquier  $x$  en el intervalo. Conforme  $n \rightarrow \infty$  se puede ver en la figura (2.4) el proceso de reescalamiento. Por ejemplo, en el recuadro e) se compara el efecto de amplificar y voltear el cuadrado punteado de c) con el original de a). Feigenbaum se dio cuenta de esto [15, 17] y propuso que de manera iterativa el reescalamiento nos lleva al siguiente límite

$$g_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\mu_{n+1}}^{(2^n)}(x/(-\alpha)^n). \quad (2.13)$$

La ec. (2.13) puede ser generalizada, al escribir la siguiente familia de funciones

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n f_{\mu_{n+i}}^{(2^n)}(x/(-\alpha)^n) \quad (2.14)$$

que satisface

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha)g_i(g_i(-x/\alpha)) \equiv Tg_i(x) \quad (2.15)$$

donde al tomar el límite  $i \rightarrow \infty$  tenemos que

$$g(x) \equiv \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) \quad (2.16)$$

donde  $g(x)$  es la solución del punto fijo para el operador de duplicación,  $T$ , que satisface la siguiente ecuación

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g(g(-x/\alpha)). \quad (2.17)$$



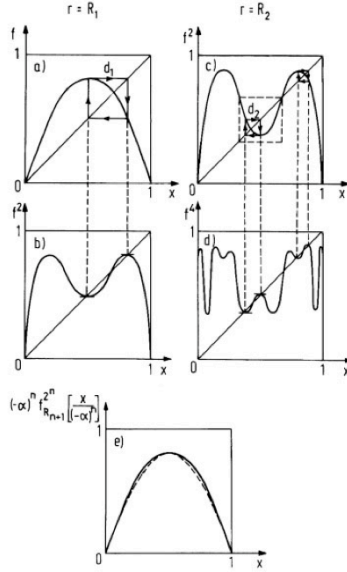


Figura 2.4: Reescalamiento y convergencia de las iteraciones al mapa de punto fijo, imagen tomada de [2].

Lo único que falta para resolver unívocamente la ec. (2.17) es fijar las condiciones de frontera, o una escala absoluta, al pedir

$$g(0) = 1 \quad (2.18)$$

Desafortunadamente, la ec. (2.17) no tiene solución analítica pero se puede resolver numéricamente al proponer  $g(x) \simeq 1 + bx^2$ , encontrándose que de manera iterativa la constante  $\alpha$  difiere sólo en cifras no significativas del valor dado por la ec. (2.4), enfatizándose así su carácter universal. Para una exposición con mayor detalle, ver [2],[16] y referencias citadas ahí.

La ruta al caos por duplicación de periodo, posee muchas más propiedades, pero en términos de la discusión en este trabajo es relevante únicamente resaltar una más. La ec. (2.4) puede ser generalizada para medir la distancia,  $d_n(m)$ , del elemento  $x_m$  de un superciclo de periodo  $2^n$  a su imagen  $f_{\mu_n}^{(2^{n-1})}(x_m)$ , es decir

$$d_n(m) \equiv x_m - f_{\mu_n}^{(2^{n-1})}(x_m) \quad (2.19)$$

y el cambio de  $d_n(m)$  al incrementar  $n$ ,

$$\sigma_n(m) = \frac{d_{n+1}(m)}{d_n(m)}. \quad (2.20)$$

El aspecto más relevante de la ec. (2.20) es que no sólo aporta información sobre la discontinuidad más grande,  $\alpha$ , sino sobre todas ellas, ver figura (2.5). Más adelante se verá la importancia de  $\sigma$ .

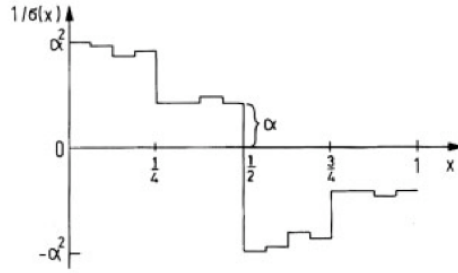


Figura 2.5: En la figura se muestra como las distancias entre puntos adyacentes cambian al pasar a un ciclo mayor, para  $n \gg 1$  y  $m = 2^n$ , se mantienen constantes, ver [17]. Imagen tomada de [2].

### 2.2.2. Intermitencia

La ruta de intermitencia en el caso de la generalización del mapa logístico,  $f_\mu(x) = 1 - \mu|x|^\zeta$ , puede ser observada con la elección  $\mu_c = 7/4$  y  $\zeta = 2$ . En la figura (2.6) se muestra el resultado de iterar el mapa tres veces y se puede observar los tres puntos de tangencia,  $x_c$ , para los cuales sucede la bifurcación.

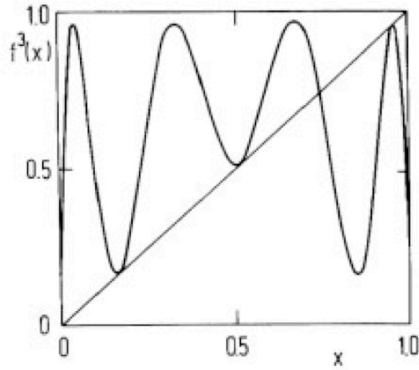


Figura 2.6: Los tres puntos de tangencia de  $f_\mu^3(x_c)$  para  $\mu = \mu_c$ , imagen tomada de [2].

A su vez, en cada uno de esos puntos se satisface

$$\frac{d}{dx} f_{\mu_c}^3(x_c) = 1 \quad \text{y} \quad f_{\mu_c}^3(x_c) = x_c \quad (2.21)$$

tal que es posible escribir una expansión alrededor de cada uno de ellos

$$f_{\mu_c}^3(x) = x_c + (x - x_c) + u(x - x_c)^2 \quad \text{con} \quad u = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f_{\mu_c}^3(x)}{dx^2} \right|_{x=x_c} \quad (2.22)$$

de manera que si ahora identificamos a  $x_{n+1}$  con  $f_\mu^3(x_n)$  y hacemos  $x = x - x_c$  se obtiene

$$x_{n+1} = x_n + ux_n^2 \quad (2.23)$$

En general, es posible escribir

$$f_u^{(n)}(x) = x + u|x|^z + O(|x|^z). \quad (2.24)$$

donde la expansión no sólo es válida para el caso de intermitencia con  $z = 2$  sino también para duplicación de periodos con  $z = 3$ .

El método de renormalización también puede ser empleado en la ruta al caos por intermitencia. Más sorprendente aun, tiene solución analítica. El mapa que yace en el mínimo de la cuenca de atracción, satisface

$$\alpha f^*(f^*(x)) = f^*(\alpha x). \quad (2.25)$$

Siguiendo el procedimiento de [18], definimos para la relación de recursión,  $x' = f(x)$ , el operador de traslación

$$G(x') = G(x) - a \quad (2.26)$$

donde

$$x'(x) = G^{-1}[G(x) - a] = f(x) \quad (2.27)$$

de la ecuación del punto fijo obtenemos que

$$\alpha f^*[f^*(x)] = f^*(\alpha x) \implies \alpha x''(x) = x'(\alpha x) \quad (2.28)$$

y al aplicar el operador  $G$ , tenemos

$$G(\alpha x''(x)) = G[x'(\alpha x)] = G(\alpha x) - a \quad (2.29)$$

de la misma forma,

$$G(x''(x)) = G[x'(x)] = G(x) - 2a \implies \frac{1}{2}G(x'') = \frac{1}{2}G(x) - a \quad (2.30)$$

despejando  $a$  de la ecuaciones (2.29) y (2.30) tenemos

$$\frac{1}{2}G(x) - \frac{1}{2}G(x'') = a = G(\alpha x) - G(\alpha x'') \quad (2.31)$$

y para el caso del mapa del punto fijo, tenemos análogamente

$$\frac{1}{2}G^*(x) - \frac{1}{2}G^*(x'') = a = G^*(\alpha x) - G^*(\alpha x'') \quad (2.32)$$

de manera que, al utilizar la condición de frontera  $f^*(0) = 0$ , las funciones quedan ancladas al mismo punto, obteniéndose así

$$\frac{1}{2}G^*(x) = G^*(\alpha x) \quad (2.33)$$

La ec. (2.33) es satisfecha con la elección de  $G^*(x) = |x|^{-(z-1)}$  y  $\alpha = 2^{\frac{1}{z-1}}$ , por lo que el mapa del punto fijo se encuentra dado por

$$f^* = G^{*-1}[G^*(x) - a] = [|x|^{-(z-1)} - (z-1)u]^{-\frac{1}{z-1}} \quad (2.34)$$

La ec. (2.34) tiene las propiedades universales del mapa logístico y de todos aquellos mapas que pertenezcan a la misma clase de universalidad, más adelante la utilizaremos para describir la evolución de las trayectorias.

## 2.3. Universalidad en mapas cúbicos

### 2.3.1. Cuasi periodicidad

A pesar de que el mapa logístico no presenta esta ruta, es de suma importancia incorporarla en la discusión ya que la dinámica de acoplar dos mapas sí manifiesta el fenómeno de cuasi periodicidad. El modelo típico para describir sus propiedades universales, tanto locales como globales, es el mapa del círculo dado por

$$\theta_{n+1} = f_{K\Omega}(\theta_n) = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) \pmod{1}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (2.35)$$

donde  $K$  y  $\Omega$  son parámetros de control. En el caso de que el mapa presente acoplamiento de frecuencia (“mode locking”), el índice de giro,  $\omega = p/q$ , corresponde a un ciclo  $q$  con elementos  $\theta_1^*, \dots, \theta_q^*$  tal que se cumple  $f_{\Omega, K}^q(\theta_i^*) = p + \theta_i^*$ ; en general, el índice de giro se encuentra dado por

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta_0) - \theta_0}{n} \quad (2.36)$$

que mide el corrimiento promedio del ángulo  $\theta$  por iteración; por ejemplo, el caso  $\omega = 1$  significa sincronización completa (esto es cierto, siempre y cuando no se considere el módulo de la ec. (2.35)).

La universalidad local asociada al mapa del círculo está relacionada con la transición al caos para un valor particular índice de giro y la global con las propiedades universales de un conjunto de valores de  $\Omega$ .

### Universalidad Local

El caos se manifiesta para valores particulares de los parámetros de control,  $K$  y  $\Omega$ . En miras de estudiar la ruta de cuasi periodicidad para el mapa del círculo, bajo el esquema del método de renormalización, es necesario, en analogía con las dos rutas anteriores, conocer las nuevas constantes universales  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\delta}$ . En el caso del mapa logístico, el borde del caos,  $\mu_\infty$ , corresponde al límite de la sucesión  $\{\mu_n\}$  asociados a los puntos donde suceden las bifurcaciones de trinche; sin embargo, en

el caso del mapa del círculo no es obvia la elección de  $K_n$  y  $\Omega_n$  tales que la sucesión converga a  $\Omega_\infty(K)$  (la elección no debe ser arbitraria, ya que el índice de giro se debe mantener constante).

En particular, en [19] escogieron que el índice de giro fuera la razón dorada; ya que utilizaron que este número tiene expansión en fracciones continuas, para lo cual usaron los números de Fibonacci,  $F_n$ , definidos por

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 0; \quad F_1 = 1 \quad \text{con} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

En principio, se fija  $K$  para seleccionar a  $\Omega_{p,q}(K)$  tal que pertenece a un ciclo  $q$  con corrimiento  $p$ , es decir

$$f_{K,\Omega}^q(0) = p \quad (2.38)$$

donde se fija un corrimiento  $p = F_n$  con un ciclo  $q = F_{n+1}$  de manera que se tiene

$$\omega_n = \frac{p}{q} = \frac{f^q(\theta_0) - \theta_0}{q} \quad (2.39)$$

y si ahora escogemos  $\theta_0 = 0$ , acorde con la ec. (2.38), se tiene que

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_n + F_{n-1}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\dots}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde recordamos que la razón dorada,  $\omega^*$ , está definida como

$$\omega^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n \implies \omega^* = \frac{1}{1 + \omega^*} \quad (2.41)$$

y tiene un valor de  $\omega^* = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Antes de continuar, es importante enfatizar que  $\omega^*$  es un irracional aproximado por fracciones contínuas; y en ese sentido, asociado al índice  $n$  se puede construir una trayectoria cuasi periódica con propiedades análogas a la ruta de duplicación de periodo. Es decir, en el caso del mapa logístico la serie de elementos  $\{\mu_n\}$  es semejante a la sucesión construida con los miembros de  $\{F_n\}$ , vinculados cada uno con  $\omega_n$ .

Dado que  $p$ ,  $q$  y  $K$  fijan unívocamente  $\Omega$ , los superciclos  $\Omega(K) = \Omega_n(K)$  de periodo  $F_{n+1}$  asociados con los índices de giro  $\omega_n$  satisfacen

$$\Omega_n(K) = \Omega_\infty(K) - \text{const.} \tilde{\delta}^{-n} \quad (2.42)$$

con

$$\tilde{\delta} = \begin{cases} -2.6180339 \dots = -\omega^{*-2} & \text{para } |K| < 1 \\ -2.83362 \dots & \text{para } |K| = 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

y que las distancias  $d_n$  desde  $\theta = 0$  al elemento más cercano que pertenece a  $\omega_n$ , es decir

$$d_n = f_{K,\Omega}^{F_n}(0) - F_{n-1} \quad (2.44)$$

sigue un escalamiento del tipo

$$\tilde{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} \quad (2.45)$$

con

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} -1.618 \dots = -\omega^{*-1} & \text{para } |K| < 1 \\ -1.28857 \dots & \text{para } |K| = 1 \end{cases} \quad (2.46)$$

La existencia de las constantes  $\tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\delta}$  sugieren la existencia de un mapa de punto fijo,  $f^*$ , que corresponde al límite

$$f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (2.47)$$

donde  $f_n(x)$  se encuentra definida por

$$f_n(x) = \tilde{\alpha}^n f^n(\tilde{\alpha}^{-n}x) \quad (2.48)$$

con

$$f^n(x) = f^{F_{n+1}}(x) - F_n. \quad (2.49)$$

El mapa de punto fijo satisface una relación de recurrencia de segundo orden, ya que involucra  $f^{n-1}$  y  $f^n$  para generar  $f^{n+1}$ , es decir

$$f^{n+1} = \tilde{\alpha} f_n[\tilde{\alpha} f_{n-1}(\tilde{\alpha}^{-2}x)]. \quad (2.50)$$

El mapa de punto fijo corresponde a tomar el límite  $n \rightarrow \infty$

$$f^*(x) = \tilde{\alpha} f_n[\tilde{\alpha} f_{n-1}(\tilde{\alpha}^{-2}x)]. \quad (2.51)$$

La obtención del mapa de punto fijo no es exacta para  $K = 1$  pero puede ser obtenido numéricamente, para más detalle ver [2].

## Universalidad Global

En vez de fijarnos en un único valor de  $\Omega = \Omega_\infty$  el análisis se hace ahora para un conjunto de valores de  $\Omega$  con índice de vuelta irracional. En la figura (2.7.a) se muestra como se construye el operador de duplicación para la ruta de duplicación utilizando un reescalamiento en  $\alpha$ ; de manera similar, para la sucesión de tiempos  $2^n$  de la figura (2.7.b) (análoga a los puntos donde suceden las bifurcaciones de trinche) existe  $\tilde{g}$ , solución del mapa de punto fijo para el operador  $\tilde{T}$  con reescalamiento  $\tilde{\alpha}$  para la ruta de cuasi periodicidad. No vamos a hablar de como se obtiene  $\tilde{g}$ ; sin embargo, para una discusión con mayor detalle ver [2, 20].

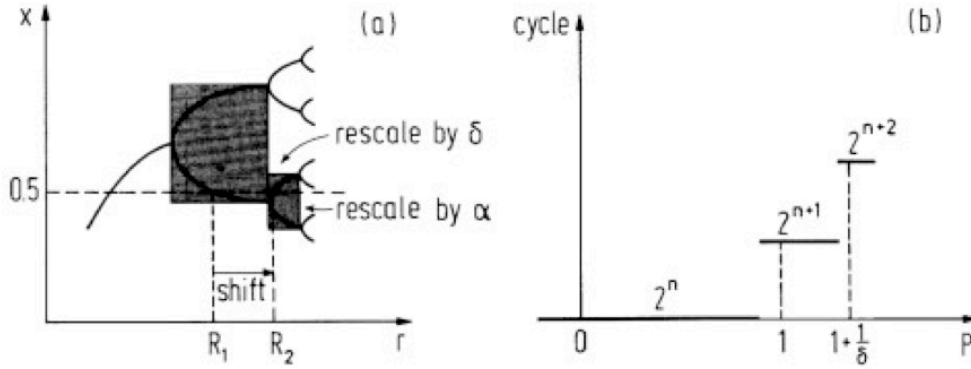


Figura 2.7: a) Reescalamiento en función de  $\alpha$  para la ruta de duplicación de periodo; b) En el caso de la ruta de cuasi periodicidad conforme  $w_n \rightarrow w$ , se observa que a los tiempos  $t = 2^n$ , el mapa del círculo se comporta de manera análoga a la cascada de bifurcaciones en  $\mu_\infty$  para el mapa logístico.

## 2.4. Dinámica en los atractores críticos

Ahora, cambiamos el enfoque y en vez de preocuparnos de los distintos atractores que aparecen al variar el parámetro de control, nos enfocamos sólo en aquellos donde el exponente de Liapunov es cero. En dichos casos, para estudiar la sensibilidad a condiciones iniciales,  $\xi_t$ , es necesario recurrir a otras herramientas, ver [5].

En el caso donde el exponente de Liapunov no se anule, éste queda ligado con la sensibilidad a condiciones iniciales a través de la forma  $\xi_t(x_0) = \exp(\lambda_1 t)$ . Ahora, para dos trayectorias separadas inicialmente  $\Delta x_0$  y que a un tiempo  $t$  se encuentran a una distancia  $\Delta x_t$  se define

$$\xi_t(x_0) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} \quad (2.52)$$

y, de manera similar, el exponente de Liapunov, para una condición inicial  $x_0$ , se encuentra definido por

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \xi_t(x_0) = \frac{1}{n} \ln \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df(x_t)}{dx_0} \right|. \quad (2.53)$$

El signo de  $\lambda$  es de suma importancia ya que nos indica el tipo de dinámica que presenta el sistema; caótica cuando es positivo y periódica cuando es negativa. Sin embargo, cuando éste se anula se pierde toda la información, ya que el numerador tiende a cero más rápido que el denominador y se puede optar por dos caminos para recuperar el comportamiento de la sensibilidad a condiciones iniciales. El primero

consiste en alterar el denominador al hacer la sustitución  $t \rightarrow \ln t$  en la ec. (2.53), definiendo así al exponente de Liapunov como

$$\lambda = \frac{1}{\ln t} \ln \left| \frac{df(x_t)}{dx_i} \right| \quad t \gg 1, \quad (2.54)$$

que ha sido utilizado en la literatura para estudiar la dinámica en el borde del caos, ver [7, 8, 9] y las referencias citadas ahí. El segundo enfoque consiste en modificar el numerador, al hacer la sustitución  $\ln \rightarrow \ln_q$  con  $\ln_q \equiv (y^{1-q} - 1)/(1 - q)$ , de forma que la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales, para atractores críticos, queda desenmascarada al utilizar una o varias expresiones de la forma

$$\xi_t(x_0) = \exp_q(\lambda_q t) \equiv [1 - (q - 1)\lambda_q t]^{-1/(q-1)}, \quad (2.55)$$

donde  $\lambda_q$  es el exponente generalizado de Liapunov y con algún o algunos valores específicos para el parámetro  $q$  (inherentes a la dinámica del problema, a este punto regresaremos más adelante).

Es importante enfatizar que ambos enfoques se encuentran basados en la suposición de que el comportamiento de la sensibilidad a las condiciones iniciales sigue una ley de potencia y no exponencial. Si la dinámica en el atractor crítico no fuera así (que puede ser posible para un sinnúmero de familias de funciones), es posible que tanto los enfoques dados por la ec. (2.54) como la ec. (2.55) serían incorrectos.

A continuación se muestran 3 casos, asociados cada uno con una ruta al caos, donde este esquema es aplicable.

### 2.4.1. Intermittencia

Las trayectorias en esta ruta, se encuentran dadas por la solución del mapa de punto fijo obtenida mediante el grupo de renormalización y corresponde a la ec. (2.34), de forma que  $x' = f^*(x)$  se encuentra dado por

$$x' = x[1 - (z - 1)u \operatorname{sgn}(x)|x|^{z-1}]^{-\frac{1}{z-1}} \quad (2.56)$$

donde  $u$  corresponde al primer término no lineal de la expansión de la  $s$ -ésima iteración

$$f^{(s)}(x) = x + u|x|^z + O(|x|^z) \quad (2.57)$$

y  $z$  toma el valor igual a dos para la ruta de intermitencia y tres para la vía de duplicación de periodos (acorde con la ec. (2.22), en la figura 2.8 se puede ver, de manera esquemática, porque  $z$  es igual a dos para la bifurcación tangente y tres para la de trinche). En realidad,  $x$  corresponde a un desplazamiento de coordenadas definido de manera que  $x \equiv x - x_c$ , donde  $x_c$  es el punto de tangencia (este mismo análisis se puede aplicar en el caso de la ruta de bifurcación de periodos con la diferencia que  $x_c$  es ahora una intersección).



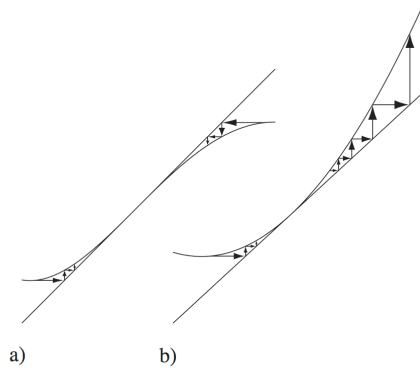


Figura 2.8: Forma esquemática de  $f^{(s)}$ ; a) en el caso de la bifurcación de trinche y b) en el caso tangente. Imagen tomada de [21]

La ec. (2.56) puede ser reescrita al definir  $a \equiv u/t$ , obteniéndose así

$$x_t \equiv [f^{(s)}]^m(x_0) = x_0[1 - (z-1)a \operatorname{sgn}(x_0)|x_0|^{z-1}t]^{-\frac{1}{z-1}}, \quad (2.58)$$

tal que si utilizamos que la ec. (2.58) satisface la propiedad  $dx_t/dx_0 = (x_t/x_0)^z$ , se tiene que la sensibilidad a las condiciones iniciales se puede escribir como

$$\xi_t(x_0) \equiv \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta x_0} = [1 - (z-1)a \operatorname{sgn}(x_0)|x_0|^{z-1}t]^{-\frac{z}{z-1}} \quad (2.59)$$

y al comparar con la ec. (2.55), tenemos que

$$q = 2 - \frac{1}{z} \quad \lambda_q(x_0) = za \operatorname{sgn}(x_0)|x_0|^{z-1}. \quad (2.60)$$

La principal diferencia que existe entre el exponente de Liapunov y  $\lambda_q(x_0)$  es la dependencia de esta última en las condiciones iniciales; sin embargo, resulta de interés calcular el promedio de  $\lambda_q(x_0)$ , definido por

$$\bar{\lambda}_q = \int dx \rho(x) \ln_q \left| \frac{df^{(s)}(x)}{dx} \right| \quad (2.61)$$

donde la distribución invariante de  $f^{(s)}$  es aproximadamente  $\rho(x) \sim |x|^{-(z-1)}$  [22] por lo que se puede identificar al promedio de  $\lambda_q$  [21] como

$$\bar{\lambda}_q = za \operatorname{sgn}(x_0) \quad (2.62)$$

Hasta este punto no hemos incluido en el análisis que estamos estudiando la bifurcación tangente, así que acorde con la figura (2.8), se tomaron las siguientes condiciones de frontera

$$f^{(s)}(x_c) = x_c \quad \text{y} \quad \left. \frac{df^{(s)}}{dx} \right|_{x=x_c} = 1, \quad (2.63)$$

A su vez, de la ec. (2.60)  $q = 3/2$  y al hacer  $z = 2$  y escoger el punto de bifurcación tangente  $\mu_c = 7/4$  y el punto crítico  $x_c = 0.031405$  se puede estudiar la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales.

En la figura (2.9) se muestra la sensibilidad a las condiciones iniciales para la bifurcación tangente. Hay que enfatizar que cuando  $x_0$  provenga del lado izquierdo de la tangencia se tendrá sensibilidad a las condiciones iniciales “débil” y cuando lo haga por la derecha será “super fuerte”.

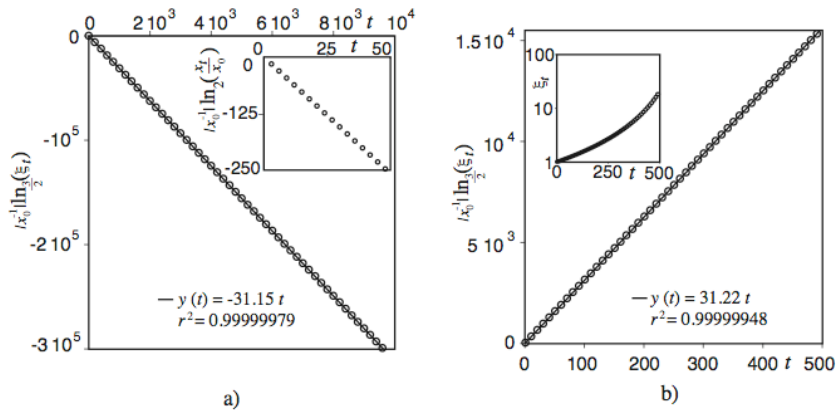


Figura 2.9: Logaritmo deformado de  $\xi_t$  vs  $t$  con  $q = 3/2$  y  $\zeta = 2$ ; a) corresponde a una sensibilidad a las condiciones “débil” al acercarnos por la izquierda y b) al aproximarnos por la derecha.

El índice  $q$  es independiente de  $\zeta$  (no depende de la no linealidad, ya que en [21] se generaliza el análisis al mapa  $f_\mu = 1 - |x|^\zeta$  y sólo importa si se trata de una bifurcación tangente o de trinche). El análisis es válido para todos los parámetros de control en los que el exponente de Liapunov se anula [21].

## 2.4.2. Bifurcación de trinche

Sorprendentemente, la solución exacta obtenida para la bifurcación tangente, a través del método del grupo de renormalización para el mapa fijo, también puede ser utilizado para cada paso en la ruta de duplicación de periodos [23]. En ese sentido, el análisis hecho en la sección anterior también es válido, salvo ciertos cambios.

Las modificaciones son inherentes a cada elemento en la cascada de bifurcaciones a lo largo de la ruta de duplicación de periodo por lo que es necesario, acorde con la figura(2.8), fijar las siguientes condiciones:

$$f^{(2^{n-1})}(x_c) = x_c \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.64)$$

$$\left. \frac{df^{(2^{n-1})}}{dx} \right|_{x=x_c} = -1 \quad \left. \frac{df^{(2^n)}}{dx} \right|_{x=x_c} = 1, \quad (2.65)$$

donde  $f^{(s)}$  es igualmente aproximada por la ec. (2.57) pero con  $z = 3$  y  $t = 2^n$ . En la figura(2.10) se muestra la sensibilidad débil a condiciones iniciales para la primera bifurcación de trinche para  $\zeta = 1.75$ . A diferencia del caso con intermitencia no hay sensibilidad “super fuerte”. Para cualquier valor de  $\zeta$  se observa el mismo valor de  $q = 5/3$ . En [21] se puede encontrar una mejor exposición de estos resultados.

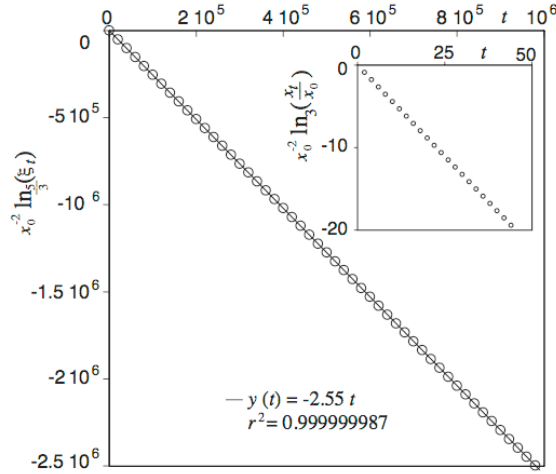


Figura 2.10: Logaritmo deformado de  $\xi_t$  vs  $t$  con  $q = 5/2$  y  $\zeta = 1.75$

### 2.4.3. Dinámica en el borde del caos

El borde del caos<sup>3</sup>, corresponde a tomar el parámetro de control  $\mu = \mu_\infty$  en la ec. (2.1) ( $\mu_\infty = 1.401155189\dots$ ), y es el punto de acumulación de los puntos críticos asociados con la duplicación de periodo, tales que  $\mu_n - \mu_\infty \sim \delta^{-n}$ , y también coincide con ser el punto de acumulación de la secuencia de fusiones de ventanas caóticas que ocurren para  $\mu > \mu_\infty$ , que obedecen  $\hat{\mu}_\infty - \mu_n \sim \delta^{-n}$ , con  $\delta = 4.6692\dots$ , la otra constante universal de Feigenbaum.

La trayectoria, en el borde del caos que tiene por condición inicial  $x = 0$ , tal como lo muestra la figura (2.11) está compuesta por una serie de familias de posiciones dadas, cada una, por una subsecuencia de tiempos de la forma  $\tau = 2^n + 2^{n-k}$  con  $k = 0, 1, \dots$ . Donde se muestra, para la condición inicial  $x_0 = 0$ , que al incrementar  $t$  acorde con  $t = \tau - 1$  se aproxima a cero, pero transita por segunda ocasión las posiciones visitadas en el ciclo previo entre  $2^{n-1}$  y  $2^n$  e introduce una nueva

<sup>3</sup>onset of chaos

posición entre esos dos ciclos. La serie de tiempo, por sí sola, tiene una estructura de duplicación de periodos.

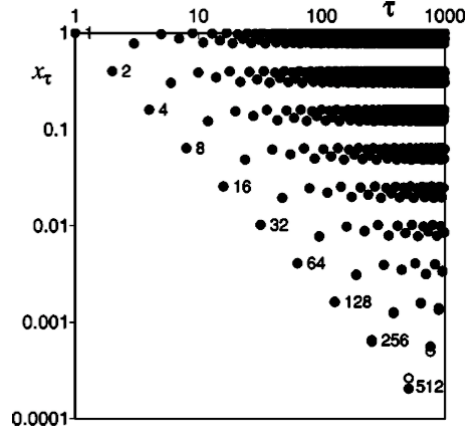


Figura 2.11: Valor absoluto de las primeras 1000 iteraciones, indicando los tiempos para la familia  $k = 0$ . Imagen tomada de [24].

Para estudiar la dinámica, tomemos la solución del punto fijo  $g(x)$  que satisface  $g(x) = \alpha^n g^{(2^n)}(x/\alpha^n)$ , y a manera de ejemplo, la trayectoria con  $k = 0$  para  $x_0 = 0$  de la serie de tiempo  $2^n$ . Las posiciones están dadas por los diámetros  $d_n(\mu_n)$  de los superciclos, de manera que  $x_\tau = d_n$  donde  $d_n^k \equiv f_{\mu_n}^{(2^n - k - 1)}(0)$ , con  $n \geq k$ . Este hecho se sigue de que  $g(0) = 1$  implica que  $g^{(2^n)}(0) = \alpha^{-n}$  y al utilizar que  $d_n/d_{n+1} = \alpha$  con  $d_0 = 1$  se obtiene  $d_n = \alpha^{-n} = g^{(2^n)}(0)$ .

Si ahora, utilizamos que la igualdad  $-n \ln \alpha = -n \ln \alpha \frac{\ln 2}{\ln 2}$  puede ser reescrita como  $-n \ln \alpha = -\frac{\ln \alpha}{\ln 2} \ln 2^n$  tal que es equivalente a  $\alpha^{-n} = (2^n)^{-\frac{\ln \alpha}{\ln 2}}$ , al recorrer el tiempo una unidad, tenemos  $t = 2^n - 1$ , es decir  $\alpha^{-n}$  es igual a  $(1+t)^{-\ln \alpha / \ln 2}$ ; es así que es posible describir las trayectorias  $x_\tau = d_n$  vinculadas con serie de tiempo  $\tau = 2^n$  como

$$x_t = \exp_Q(\Lambda_Q t) \quad (2.66)$$

con  $Q = 1 + \ln 2 / \ln \alpha$ ,  $\Lambda_Q = -\ln \alpha / \ln 2$  y  $\exp_Q(x)$  es una exponencial deformada<sup>4</sup>. Las demás trayectorias para otros tiempos también pueden ser puestos en términos de exponenciales deformadas con los mismos valores de  $Q$  y  $\Lambda_Q$ .

La sensibilidad a las condiciones iniciales puede ser obtenida por la propiedad dada en [24]

$$x_t(d_j) - x_t(d_i) = [x_0(d_j) - x_0(d_i)]\alpha^n \quad (2.67)$$

que nos permite escribir

$$\xi_t \equiv \lim_{|\Delta x_0| \rightarrow 0} |x_t(d_j) - x_t(d_i)| / |x_0(d_j) - x_0(d_i)| = \alpha^n \quad (2.68)$$

<sup>4</sup>La exponencial deformada se encuentra definida por  $\exp_q(x) = [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)}$

y al utilizar nuevamente  $\alpha^{-n}$  como  $(1+t)^{-\ln \alpha / \ln 2}$  tenemos

$$\xi_t = \exp_q(\lambda_q t), \quad (2.69)$$

con  $q = 1 - \ln 2 / \ln \alpha$ ,  $\lambda_q = \ln \alpha / \ln 2$  y la propiedad  $q = 2 - Q$  tal que  $\exp_q(y) = 1 / \exp_Q(-y)$ .

Las demás trayectorias, para el resto de los tiempos, pueden ser puestas en términos de exponenciales deformadas al identificar las subsecuencias con los tiempos  $\tau = (2k+1)2^n$  con  $n = 0, 1, \dots$  para un valor fijo de  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Las familias están dadas por

$$\alpha^n = \left(1 + \frac{t}{2k+1}\right)^{\ln \alpha / \ln 2} \quad (2.70)$$

con  $t = (2k+1)2^n - (2k-1)$ ,  $q = 1 - \ln 2 / \ln \alpha$  y  $\lambda_q^{(k)} = (2k+1)^{-1} \ln \alpha / \ln 2$  [6]. En la figura (2.12) se muestra las fluctuaciones del logaritmo deformado<sup>5</sup> de la sensibilidad a las condiciones iniciales y el ajuste para dos familias. La discrepancia entre el valor teórico de  $\lambda_q = \ln \alpha / \ln 2 = 1.3236$  con la pendiente obtenida aquí,  $\lambda_q = 1.40$ , se debe a que se utilizaron pocas cifras significativas para  $\mu_\infty$  [24].

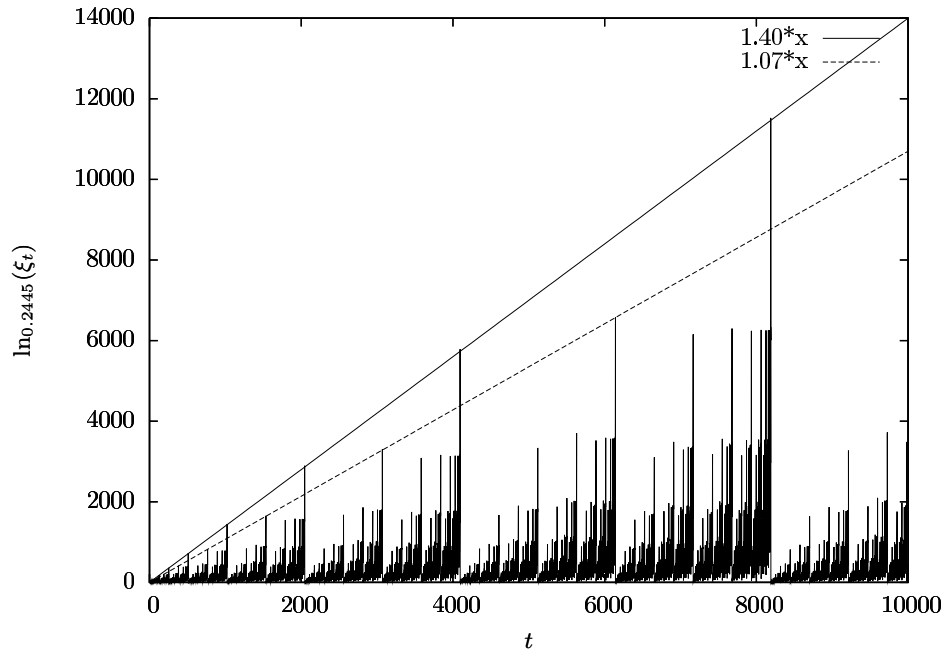


Figura 2.12: Logaritmo deformado de la sensibilidad para la trayectoria con condición inicial  $x_0 = 0$ . Cada una de las rectas une a puntos que pertenecen a una misma familia.

---

<sup>5</sup> $\ln_q x \equiv (y^{1-q} - 1) / (1 - q)$

Es posible hacer una analogía con la dinámica vítrea [4, 25] al definir un tiempo de espera  $t_w = 2k + 1$  y reescalar el tiempo en la forma  $t/t_w$  de manera que todas las familias se empalman en una sola, de forma que la sensibilidad a condiciones iniciales queda dada por

$$\xi_t(x_{in}) = \exp_q(\lambda_q^k \frac{t}{t_w}), \quad (2.71)$$

La dinámica en el borde del caos ha sido utilizada como modelo base para el estudio de sistemas que no son ergódicos y que tampoco mezclan [11].

#### 2.4.4. Cuasi periodicidad

El estudio de la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales para esta ruta es análoga a la de duplicación de periodos y su análisis utiliza las propiedades de universalidad local al fijar  $\Omega = \Omega_\infty$ , acorde con lo descrito en la sección 2.3.1.

Las trayectorias también quedan agrupadas en familias,  $k = 1, 2, \dots$  unidas por tiempos, de abajo para arriba, de la forma  $kF_n + 1$ ,  $(k - 1)F_n + F_{n-2} + 1$ ,  $(k - 2)F_n + 2F_{n-2} + 1, \dots, F_n + (k - 1)F_{n-2} + 1$  con  $n = 1, 2, \dots$  y una misma pendiente  $-3 \ln |\alpha_{gm}| / \ln \omega_{gm}$ , tal como se observa en la figura (2.13).

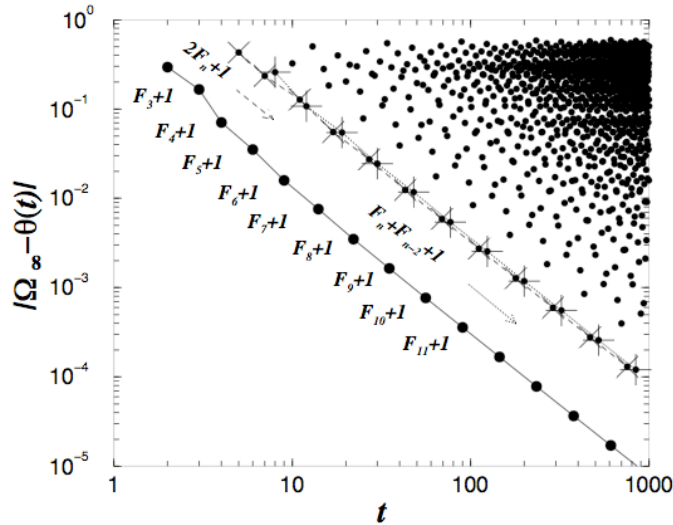


Figura 2.13: Posiciones  $|\Omega_\infty - \theta(t)|$  vs el tiempo en escala logarítmica para  $\theta(0) = \Omega_\infty$  y  $K = 1$ . La familia con los tiempos de la forma  $F_n + F_{n-2} + 1$  están denotadas por + y las que siguen  $2F_n + 1$  por  $\times$ . Imagen tomada de [26].

En ese sentido, para la trayectoria que comienza en  $\theta(0) = 0$ , el atractor puede ser descompuesto en subsecuencias de tiempos  $\tau = (k - l)F_n + lF_{n-2}$  con  $n = 1, 2, \dots$  para valores fijos de  $k = 1, 2, \dots$  y  $l = 0, 1, \dots, k - 1$  para un corrimiento del tiempo

$\tau = t + 1$ . Al generalizar el corrimiento a  $\tau = t + k$  las trayectorias para cada familia  $k$  están dadas por

$$\theta_\tau = \theta_k \exp_{Q_+}(\Lambda_{Q_+}^{(k)} t), \quad (2.72)$$

con  $Q_+ = 1 - \ln \omega_{gm} / \ln |\alpha_{gm}|$  y  $\Lambda_{Q_+}^{(k)} = \ln |\alpha_{gm}| / k \ln \omega_{gm}$ .

La sensibilidad a las condiciones iniciales se encuentra dada por

$$\xi_t(\theta_k) \equiv \lim_{|\theta_k - \phi_k| \rightarrow 0} \frac{|\theta_\tau - \phi_\tau|}{|\theta_k - \phi_k|} \quad (2.73)$$

con  $\theta_k$  y  $\phi_k$  dos trayectorias cercanas que satisfacen, bajo el esquema del grupo de normalización

$$\frac{|\theta_{kF_n} - \phi_{kF_n}|}{|\theta_k - \phi_k|} = |\alpha_{gm}|^{2n}, \quad n \gg 1 \quad (2.74)$$

donde  $\theta_{kF_n}$  y  $\phi_{kF_n}$  corresponden a las aproximaciones, respectivamente, de  $\theta_k$  y  $\phi_k$  para las posiciones a un tiempo  $\tau = kF_n$ . Bajo la igualdad

$$|\alpha_{gm}|^{2n} = \left(1 + \frac{t}{k}\right)^{\frac{2 \ln |\alpha_{gm}|}{\ln \omega_{gm}}} \quad (2.75)$$

se puede escribir la sensibilidad como una exponencial deformada

$$\xi_t(\theta_k) = \exp_q(\lambda_q^{(k)} t) \quad (2.76)$$

con

$$q = 1 + \frac{\ln \omega_{gm}}{2 \ln |\alpha_{gm}|} \simeq 0.051003 \quad \text{y} \quad \lambda_q^{(k)} = 2 \frac{\ln |\alpha_{gm}|}{k \ln \omega_{gm}} \quad (2.77)$$

Para una mejor discusión de la ruta de cuasiperiodicidad, ver [26]. Es importante hacer mención que en el caso de atractores críticos multifractales el enfoque del análisis cambia por el de estudiar las transiciones de fase dinámicas de Mori [27].

## 2.5. Transiciones de fase dinámicas de Mori

A diferencia de los casos la bifurcaciones tangente y de trinche donde un único parámetro  $q$  describe la sensibilidad a condiciones iniciales; existe otro caso de interés, como el de los atractores multifractales, que son descritos mediante una familia de parejas de índices  $q$ . Entre esos atractores donde es posible estudiar las transiciones de fase dinámicas de Mori se encuentran la dinámica del mapa del círculo cuando se escogen los parámetros de control  $K = 1$  y  $\Omega = \Omega_\infty$  [26] y  $\mu = \mu_\infty$  en el mapa logístico [28]. Cada par de índices  $q$  describe distintas regiones del multifractal y se encuentran vinculados por una transición de fase dinámica.

En la figura (2.14) se muestran dos trayectorias del mapa logístico con  $\mu = \mu_\infty$  y nos ilustran como se realiza la evolución dentro del atractor al mostrar los caminos de

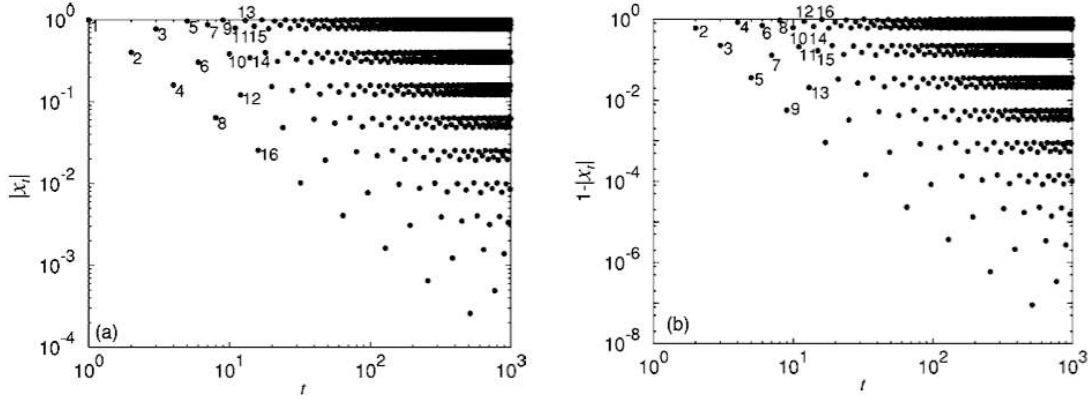


Figura 2.14: Dos visualizaciones de la familias que componen la trayectoria  $x = 0$ . Imagen tomada de [28]

los más denso a lo menos denso del multifractal y viceversa. Es decir, una trayectoria que comienza en  $x = 0$  oscila entre su posición inicial y  $x = 1$ , en su camino de la zona más compacta a la más rala; a su vez, una cuyo recorrido comience en  $x = 1$  oscilará hacia  $x = 0$  pasando de la parte menos densa a la más concentrada del multifractal. Es decir, fue posible vincular a la secuencia de puntos de la trayectoria a los tiempos  $t = 2^n - 1$  (aquéllas que empiezan en  $x = 0$ ) entre sí y asociarles un valor específico  $q$ ; lo interesante es que la trayectoria que comienza en  $x = 1$ , con los tiempos  $t' = 2^n + 1$  se encuentra vinculada con la que empieza en  $x = 0$  y tiene un índice  $Q = 2 - q$ . Ambas trayectorias pertenecen al mismo atractor; si  $x = 0$  es el comienzo, entonces  $x = 1$  corresponde al final y viceversa, ver figura (2.14).

En ese sentido, las transiciones dinámicas de Mori permiten conocer como se comporta la dinámica dentro del atractor, ver figura (2.15). El índice  $q$  de cada una de las trayectorias puede ser encontrado a través de la función de escalamiento  $\sigma$  y la sensibilidad a condiciones iniciales  $\xi_t$ . En el caso del borde del caos,  $\mu = \mu_\infty$ , la función de escalamiento se encuentra definida a partir de

$$\sigma_n(m) = \frac{d_{n+1,m}}{d_{n,m}} \quad \text{con} \quad d_{n,m} \equiv f_{\mu_n}^{(m+2^{n-1})}(0) - f_{\mu_n}^{(m)}(0) \quad (2.78)$$

y al tomar los límites  $n \rightarrow \infty$  y  $m \rightarrow \infty$ , denotamos al límite continuo de la función de escalamiento como  $\sigma(y)$ , ver figura (2.5). En el estudio de la sensibilidad a las condiciones iniciales, la función  $\sigma(y)$  tiene un rol relevante, ya que presenta discontinuidades que nos permiten estudiar al atractor; por ejemplo, la discontinuidad más grande tiene un valor  $\alpha$ , lo cual permite vincular a los tiempos de la forma  $t = 2^n - 1$  entre sí. De una manera análoga, en [26] encontraron que la sensibilidad a las condiciones iniciales, para las trayectorias que empiezan en  $x = 0$  y  $x = 1$ , se encuentran dadas por

$$\xi_t(m) = \left| \frac{\sigma_n(m-1)}{\sigma_n(m)} \right| \quad \text{con} \quad t = 2^n - 1 \quad \text{y} \quad \xi_{t'}(m) = \left| \frac{\sigma_n(m)}{\sigma_n(m-1)} \right| \quad \text{con} \quad t' = 2^n + 1 \quad (2.79)$$



de donde se puede llegar a las siguientes expresiones

$$\xi_t(m) = \left| \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}} \right|^n \quad \text{y} \quad \xi_{t'}(m) = \left| \frac{\alpha_l}{\alpha_{l+1}} \right|^{-n} \quad (2.80)$$

donde  $l = 0, 1, \dots, 2^M - 1$  y considerando sólo las  $2M$  primeras discontinuidades.

En particular, la región más densa del multifractal ( $x \simeq 1$ ) se encuentra vinculada con la menos densa ( $x \simeq 0$ ) por lo que la sensibilidad partiendo de la región menos poblada está dada por

$$\xi_t(m) = \exp_{q_0}[\lambda_{q_0}^{(k)} t] \quad (2.81)$$

donde

$$q_0 = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \alpha} \quad \text{y} \quad \lambda_{q_0}^{(k)} = \frac{\ln \alpha}{\ln 2} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.82)$$

y de manera similar, la sensibilidad en el orden inverso está dada por

$$\xi_{t'}(m) = \exp_{Q_0}[\lambda_{Q_0}^{(k)} t'] \quad (2.83)$$

con  $Q_0 = 2 - q_0$  y  $\lambda_{q_0}^{(k)} = \lambda_{Q_0}^{(k)}$ . La función de Liapunov se escribe

$$\lambda(q) = \begin{cases} \lambda_{q_0}^0, & -\infty < q \leq q_0 \\ 0, & q_0 < q \leq Q_0 \\ \lambda_{Q_0}^0, & Q_0 < q \leq \infty \end{cases} \quad (2.84)$$

En el formalismo de Mori [27], dado que el exponente de Liapunov se anula, se define la siguiente cantidad

$$\lambda(t, x_0) = \frac{1}{\ln t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| \frac{df_{\mu_\infty}(x_i)}{dx_i} \right|, \quad t \gg 1, \quad (2.85)$$

y la función de distribución de densidad para los valores de  $\lambda$  está dada por

$$P(\lambda, t) = \langle \delta(\lambda_t - \lambda) \rangle \quad (2.86)$$

tal que satisface

$$P(\lambda, t) = t^{-\psi(\lambda)} P(0, t) \quad (2.87)$$

donde  $\psi(\lambda)$  es una función cóncava del espectro de fluctuaciones de  $\lambda$  con mínimo  $\psi(\lambda) = 0$  y corresponde a la transformada de Legendre de la “energía libre” de la función  $\phi(q)$  definida por

$$\phi(q) \equiv - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln Z(t, q)}{\ln t} \quad (2.88)$$

donde  $Z(t, q)$  es la función de partición dinámica definida por

$$Z(t, q) \equiv \int d\lambda P(\lambda, t) t^{-(q-1)\lambda}. \quad (2.89)$$

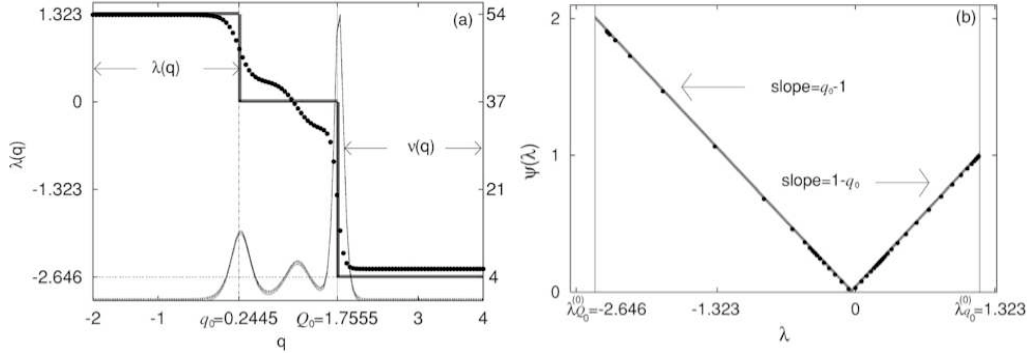


Figura 2.15: Los puntos donde suceden las transiciones de fase dinámicas de Mori corresponde a los puntos  $q_0 = 0.2445$  y  $Q_0 = 2 - q_0 = 1.7555$ . Imagen tomada de [28].

Por lo que la función generalizada de Liapunov y la varianza  $\nu(q)$  de  $P(\lambda, t)$  se encuentran dados por

$$\lambda(q) \equiv \frac{d\phi(q)}{dq} \quad y \quad \nu(q) \equiv \frac{d\lambda(q)}{dq} \quad (2.90)$$

Cada función de  $\lambda(q)$  puede ser integrada para obtener  $\phi(q)$  y de ahí mediante una transformada de Legendre, obtener  $\psi(\lambda) \equiv \phi - (1 - q)\lambda$  y acorde con [28] se tiene que

$$\phi(q) = \begin{cases} \lambda_{q_0}^{(0)}(q - q_0), & q \leq q_0 \\ 0, & q_0 < q \leq Q_0 \\ \lambda_{Q_0}^{(0)}(q - Q_0), & q \geq Q_0 \end{cases} \quad y \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} (1 - Q_0)\lambda, & \lambda_{Q_0}^{(0)} < \lambda < 0 \\ (1 - q_0)\lambda, & 0 < \lambda < \lambda_{q_0}^{(0)} \end{cases} \quad (2.91)$$

En la figura (2.15) se muestran  $\lambda(q)$  y  $\psi(q)$  asociadas a la trayectoria que vincula las regiones más densas con las menos densas (es decir, las que empiezan en  $x \simeq 1$  con las que terminan en  $x \simeq 0$ , y viceversa) correspondientes a la discontinuidad más grande de  $\sigma(y)$ . Las demás familias de pares aparecen de estudiar las sucesivas discontinuidades de  $\sigma(y)$ , describiéndose así toda la estructura del multifractal. En [28] se encuentran los detalles de la descripción en el borde del caos y para la ruta de cuasiperiodicidad, ver [26].

## 2.6. Identidad de Pesin generalizada

La entropía de Kolmogorov-Sinai,  $\mathcal{K}_1$ , se encuentra relacionada con los exponentes de Liapunov mediante la desigualdad

$$\mathcal{K}_1 \leq \sum \lambda_1^{(l)}, \quad \lambda_1^{(l)} > 0, \quad (2.92)$$

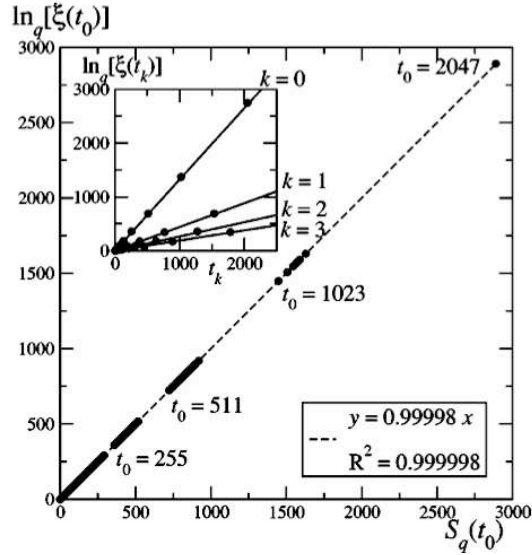


Figura 2.16: Prueba numérica de la identidad de Pesin. Imagen tomada de [11].

donde  $l$  es el número de dimensiones. Para ciertas clases de sistemas dinámicos se satisface la igualdad y se le conoce como identidad de Pesin; en el caso  $l = 1$  se satisface  $\mathcal{K}_1 = \lambda_1$ , con  $\lambda_1 > 0$ . Se ha verificado que para varios mapas caóticos [29] en un regimen intermedio de la evolución de  $S_1(t)$  (una vez pasado el transitorio y antes de llegar al equilibrio) se satisface la igualdad  $\mathcal{K}_1 = K_1$ .

La producción de entropía generalizada,  $K_q$ , se encuentra definida por

$$K_q t = S_q(t) - S_q(0), \quad \text{con } t \gg 1, \quad (2.93)$$

donde

$$S_q \equiv \sum_i p_i \ln_q \left( \frac{1}{p_i} \right) = \frac{1 - \sum_i^W p_i^q}{q - 1} \quad (2.94)$$

donde  $p_i(t)$  corresponde a la distribución de probabilidad de las frecuencias relativas de un ensamble de trayectorias dentro de las celdas  $i = 1, \dots, W$ . En el caso de que  $q \rightarrow 1$  se recupera la forma usual de la entropía.

En analogía con el caso  $q = 1$  se puede definir la entropía generalizada de Kolmogorov-Sinai,  $\mathcal{K}_q$  al utilizar la ec. (2.94), que en un regimen intermedio de tiempo satisface  $\mathcal{K}_q = K_q$ . En la figura(2.16) se muestra la corroboración numérica de la identidad de Pesin generalizada para el mapa logístico en el borde del caos, donde se aprecia que

$$K_q^{(k)} = \lambda_q^{(k)}, \quad (2.95)$$

para una descripción con mayor detalle, ver [11].

# Capítulo 3

## Atractores de un par de mapas acoplados

La dinámica que presentan dos mapeos logísticos acoplados es mucho más rica que el caso de un solo mapa logístico unidimensional, agregando nuevos e importantes elementos a sus atractores. Quizá, el rasgo más significativo que se exhibe al acoplar dos mapas es la manifestación de las tres rutas al caos en un único sistema, agregando la ruta de cuasi periodicidad a las que previamente se observaban en el caso de una dimensión (duplicación de periodo e intermitencia). Sin dejar a un lado el fenómeno de sincronización, este capítulo está dedicado a describir las propiedades generales de dos mapas logísticos acoplados y detectar los elementos necesarios para la descripción posterior de la sensibilidad anómala<sup>1</sup> a las condiciones iniciales en las tres rutas al caos [5].

### 3.1. Dinámica en mapas acoplados

El interés por los mapas acoplados es amplio, ya que permite estudiar un vasto rango de fenómenos que van desde la sincronización hasta el caos y han sido utilizados para modelar dispositivos electrónicos [30], estudiar la dinámica de poblaciones [31], en aplicaciones a las neurociencias [32], en la biología [33] y en muchas ramas más. El modelo que estudiaremos está dado por el sistema (3.1), que consiste en dos mapas logísticos acoplados de manera lineal.

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + \epsilon(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= 1 - \mu y_n^2 + \epsilon(x_n - y_n).\end{aligned}\tag{3.1}$$

A pesar de que el mapa (3.1) es de los más sencillos con jacobiano no constante;

---

<sup>1</sup>La sensibilidad anómala es aquella que satisface la ec. (2.55)

éste muestra: ciclos, toros<sup>2</sup>, acoplamiento de frecuencias, cuasi periodicidad, caos, hipercaos<sup>3</sup>, duplicación de periodo, intermitencia y nos permite estudiar la dinámica en el borde del caos con mayor complejidad que en el caso unidimensional. El enfoque que se utilizó en la descripción de los distintos atractores fue el de mantener fijos la condición inicial y el parámetro de acoplamiento,  $\epsilon$ , variando el parámetro  $\mu$ . Es importante fijar la condición inicial, ya que la ec. (3.1) presenta al menos dos subconjuntos de dinámicas: el primero de ellos corresponde a las condiciones iniciales que se encuentran sobre la diagonal ( $x_n = y_n$ ) y el segundo a aquéllas fuera de ella.

Para identificar los nuevos elementos que son observables en un par de mapas logísticos acoplados utilizaremos la notación usada previamente por Kaneko [34]. Por ejemplo, en la figura (3.1a) se muestra lo que ese autor identificó como 8-toro, que se encuentra en el contexto de la ruta de cuasiperiodicidad. La nomenclatura que le asignó a las otras estructuras en el espacio fase puede resultar un poco controversial, y a ese punto regresaremos más adelante; ya que en el caso de las figuras (3.1b) y (3.1c) las nombró 4-caos y 2-caos, respectivamente.

En cierto sentido, la polémica recae en que la notación podría sugerir que la dinámica se encuentra gobernada por dos exponentes de Liapunov, uno positivo y otro negativo; sin embargo, es de esperarse que sea el mayor exponente el domine la dinámica a tiempos largos cuando ya no exista ninguna reminiscencia de periodicidad. Esta última afirmación se encuentra sustentada en que el cálculo del exponente de Liapunov más grande,  $LG$ , (método del que se habla en el siguiente capítulo) es positivo para la dinámica de los casos ilustrados en las figuras (3.1b) y (3.1c); mostrando poca evidencia de que exista un segundo exponente con valor negativo, además el comportamiento observado en el espacio fase corrobora que sea positivo.

Kaneko [34] identificó la dinámica asociada al espacio fase de la figura (3.1d) como hipercaos [35]. La razón para hacerlo es que encontró que ambos exponentes son positivos; sin embargo, por razones que no veremos sino hasta el siguiente capítulo, esa afirmación es probablemente correcta, pero no el método que utilizó para calcularlos. En ese sentido, la nomenclatura de Kaneko, utilizada en este texto para describir las estructuras observadas para los distintos atractores, se encuentra inspirada en un cálculo incorrecto de los exponentes de Liapunov. Por ejemplo, Kaneko utiliza la notación “ $n$ -caos” para nombrar al caos separado en  $n$  regiones pero sus gráficas muestran un exponente positivo y uno negativo; sin embargo, el análisis aquí presentado, es a tiempos grandes y el uso del término “ $n$ -caos” no se encuentra vinculado con ninguna manifestación de periodicidad.

El término hipercaos se originó en sistemas continuos con una dimensión mayor o igual a cuatro [35]; sin embargo, en los sistemas discretos puede ser observada a partir

---

<sup>2</sup>Siguiendo la notación de Kaneko [34], corresponde al espacio geométrico de un toro en dos dimensiones;  $n$ -toro es un toro separado en  $n$  regiones.

<sup>3</sup>A lo largo de este texto, el término hipercaos se utiliza cuando los dos exponentes de Liapunov son positivos; en cambio, caos se utiliza cuando uno de los exponentes es positivo y el otro es negativo o cero.

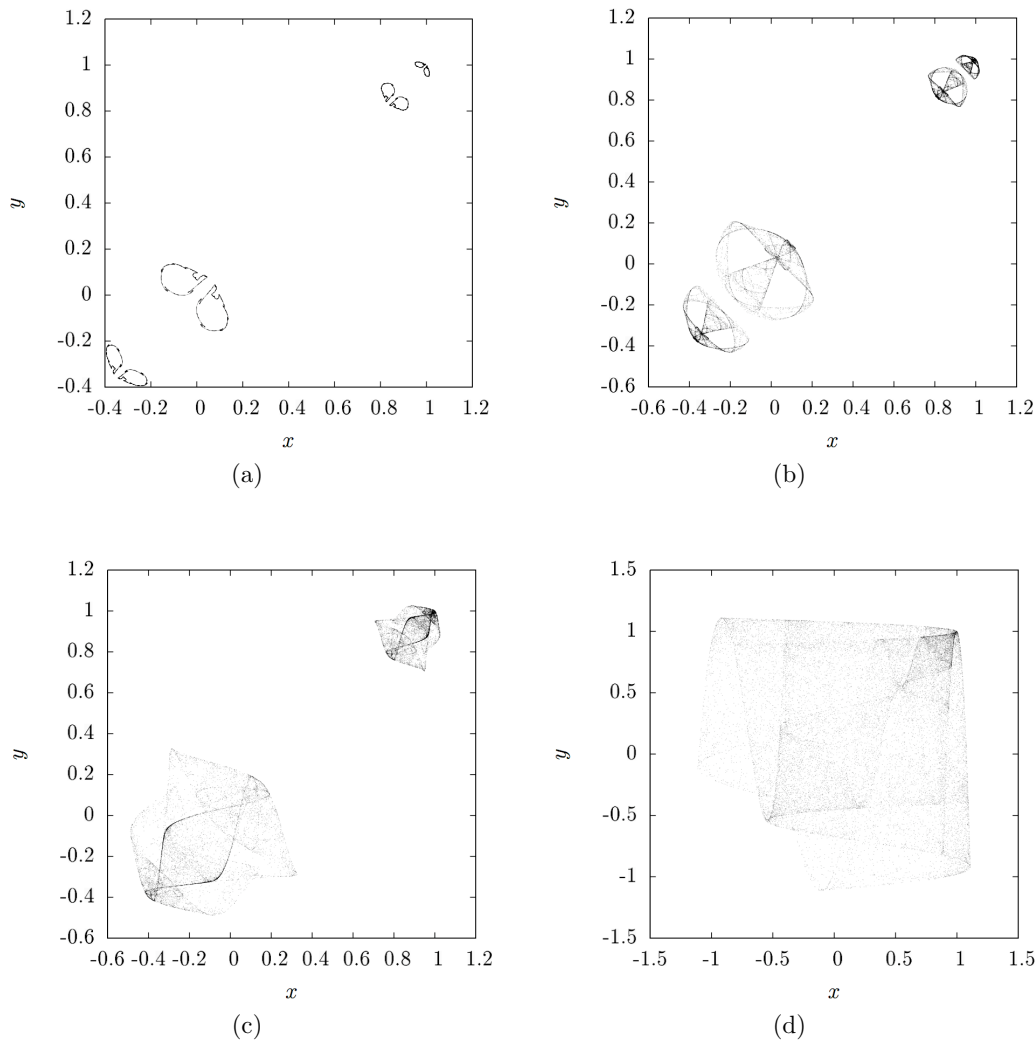


Figura 3.1: Diferentes comportamientos para  $\epsilon = 0.1$  con  $x_0=0.2$  y  $y_0=0.4$ : a)  $\mu = 1.3525$ , b)  $\mu = 1.372$ , c)  $\mu = 1.4$  y  $\mu = 1.55$ .

de dos dimensiones. No es sorpresa que los sistemas presenten cambios cualitativos cuando se incrementa la dimensión de estudio. Es decir, los sistemas continuos en una dimensión pueden presentar estados estacionarios; en dos dimensiones, oscilaciones; en tres, caos; y en cuatro, hipercaos. La ventaja de estudiar sistemas discretos es que el caos puede emerger en una dimensión y el hipercaos en dos dimensiones.

Sin embargo, la notación de Kaneko cobra mucho mayor sentido cuando el sistema presenta lo que él llamó *fusión del caos*, donde al fijar  $\epsilon = 0.1$  observó como las regiones caóticas disminuían al incrementar el parámetro  $\mu$ , pasando de 8-caos a 4-caos a 2-caos. Un fenómeno que parece ser análogo al punto de acumulación de bandas caóticas con la ruta de duplicación de periodo en el mapa logístico.

Es importante enfatizar que nuestro modelo no sólo agrega los viejos elementos

de un mapa logístico sino que incrementa el espectro de fenómenos que son posibles estudiar. En particular, el punto en el que se lleva a cabo la *fusión del caos* se encuentra relacionado con la transición caos-hipercaos [13] y parece ser un caso ideal para estudiar la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales (este caso es sumamente interesante, ya que en él uno de los exponentes de Liapunov es nulo y el otro es positivo).

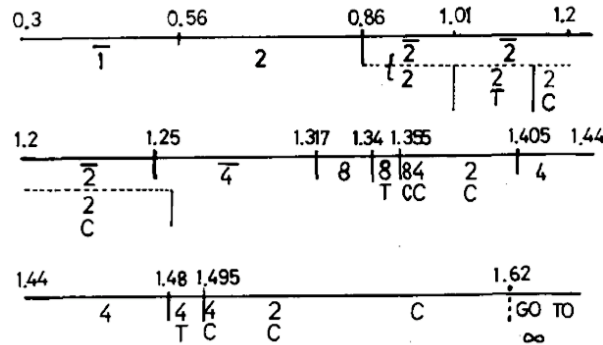


Figura 3.2: Comportamiento esquemático del espacio fase para  $\epsilon = 0.1$ , tomada de [34]. El eje representa el incremento del parámetro  $\mu$ , la línea punteada corresponde a un nuevo subconjunto de atractores, la letra T es para indicar la aparición de  $n$ -toros y C de  $n$ -caos.

En la figura (3.2) se ilustra el uso que se le puede dar a la notación de Kaneko para describir los cambios cualitativos en el espacio fase al fijar  $\epsilon = 0.1$  e incrementar  $\mu$ ; cada uno de los segmentos corresponde a un pedazo del eje  $\mu$ . Por ejemplo, en el intervalo  $\mu \in [0.3, 0.56]$  se observa un ciclo simétrico de periodo uno (es decir,  $x = y$  y denotado por  $\bar{1}$ ); a su vez, es posible ver que, al incrementar  $\mu$ , las trayectorias no sólo cambian entre toros, ciclos y órbitas caóticas sino que también pueden pasar de comportamientos simétricos ( $x = y$  y denotado por  $\bar{n}$ ) a asimétricos ( $x \neq y$  y denotado por  $n$ ). En el intervalo  $0.86 \leq \mu \leq 1.26$  el atractor se divide en dos cuencas de atracción y cada una tiene un comportamiento diferente (y corresponden a una línea extra punteada en la figura (3.2)).

Dependiendo de la condición inicial que se estudie se pueden apreciar diferentes comportamientos; sin embargo, existen dos grandes subconjuntos. La dinámica de las trayectorias con condiciones iniciales sobre la diagonal no representan ningún elemento novedoso ya que reproduce exactamente, para cualquier valor del parámetro de acoplamiento, la dinámica en una dimensión. Eso se debe a que el término de acoplamiento lineal se anula, de forma que el sistema evoluciona como mapas logísticos independientes en una sola dimensión. En ese sentido, se obtuvo que el borde del caos se manifiesta en el mismo valor,  $\mu_\infty$ , que en el caso de una dimensión y se espera que las constantes de Feigenbaum no cambien; de hecho, se pudo verificar que para un par de mapas acoplados con  $\epsilon = 0.1$  los puntos donde suceden las

bifurcaciones siguen

$$\mu_n - \mu_\infty = -\text{const.} \delta^{-n} \quad (3.2)$$

con  $\delta = 4.33 \pm 0.12$ . La discrepancia de  $\delta$  respecto al valor en el caso unidimensional se debe, probablemente, a errores numéricos [2].

Las condiciones iniciales fuera de la diagonal muestran un comportamiento completamente diferente y la razón principal es que ahora el sistema puede presentar bifurcaciones de Hopf. La condición inicial con la que se estudió a este subconjunto de trayectorias fue  $x_0 = 0.2$  y  $y_0 = 0.4$  y el procedimiento consistió en fijar una  $\epsilon$  y barrer el parámetro de control,  $\mu$ , en el intervalo  $[0, 2]$ . Repetir el procedimiento incrementando el valor del parámetro  $\epsilon$  nos permitió conocer el efecto del acoplamiento en la evolución de las trayectorias.

En  $\epsilon = 0$  el espacio fase se ve inalterado y corresponde al de dos mapas logísticos en una dimensión (completamente desacoplados, cada uno evoluciona como uno solo) y permanece estable conforme el valor del parámetro de acoplamiento se incrementa y es en  $\epsilon \sim 0.0001$  donde el sistema comienza a tener sus primeros cambios cualitativos; donde el acoplamiento comienza a tener efectos significativos. Esta metamorfosis está acompañada de variaciones respecto al comportamiento del exponente de Liapunov en una dimensión, que se intensifican conforme el parámetro de acoplamiento aumenta.

En la figura (3.3) se ilustran dos cambios cualitativos. El primero consiste en una aparente duplicación de los puntos de bifurcación (donde el exponente de Liapunov se anula, es decir los valores entre los que se encuentra la figura (3.3.a)) y el segundo cambio corresponde a la figura (3.3.e)) donde el exponente de Liapunov se anula en todo un intervalo.

En realidad, no hay una duplicación de los puntos correspondientes a la cascada de bifurcación y a manera de ejemplo se discute el caso  $\epsilon = 0.01$  de la figura (3.3). Si estuviéramos analizando el caso unidimensional, en  $\mu = 1.25$  esperaríamos un único punto de bifurcación; sin embargo, se observa que  $\mu_2 = 1.25$  sí es de bifurcación y el sistema pasa de un ciclo  $\bar{2}$  a  $\bar{4}$  pero el segundo punto en  $\mu = 1.265$  no toca el origen (y tampoco lo haría si variáramos el parámetro de acoplamiento) pero la trayectoria sí manifiesta un cambio cualitativo al pasar de un ciclo  $\bar{4}$  simétrico a uno 4 asimétrico<sup>4</sup>. Este fenómeno sólo se manifiesta en el primer y segundo punto de bifurcación, en el tercero se observa un intervalo donde el exponente se anula y el resto de los puntos de bifurcación asociados a la ruta de duplicación de periodo se preservan hasta que el sistema llega al borde del caos para  $\mu_\infty(\epsilon)$ .

El cambio de los parámetros de control se manifiesta en que las trayectorias pueden pasar de un comportamiento simétrico a uno asimétrico, y viceversa; esto ya había sido descrito antes en otro contexto para un par de mapas logísticos, pero

<sup>4</sup>El término diagonal y no diagonal se utiliza en referencia a la elección de las condiciones iniciales; cuando la dinámica corresponde a  $x = y$  se dice que es simétrica y asimétrica en cualquier otro caso.



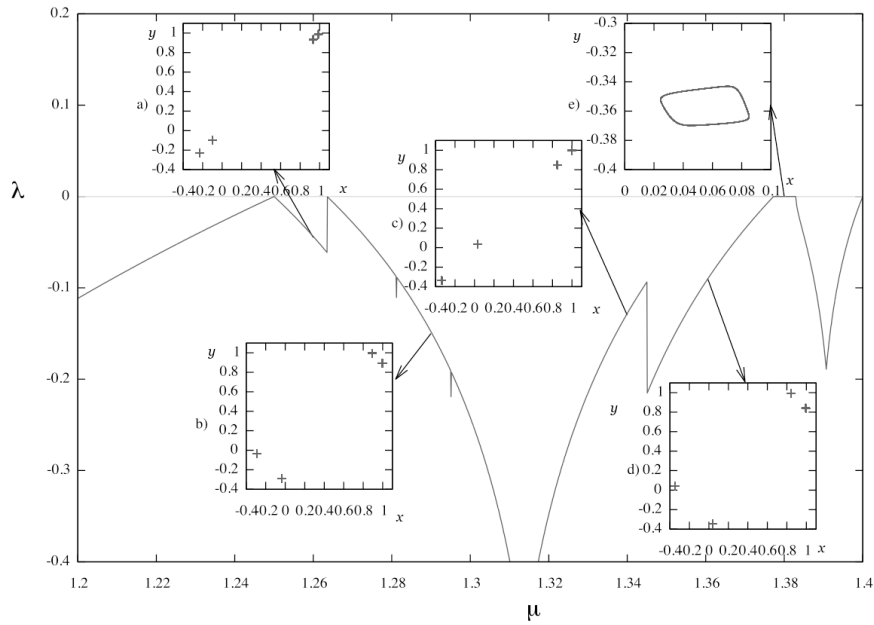


Figura 3.3: Exponente de Liapunov  $vs$   $\mu$  y el espacio fase correspondiente con  $\epsilon = 0.01$ .

acoplados linealmente de manera diferente a la presentada aquí [31]. El autor enfocó su atención en el comportamiento de varias condiciones iniciales tomadas al azar de una malla, para valores fijos de los parámetros de control y acoplamiento, asignando un color a las trayectorias en la simétricas, asimétricas y caóticas. El resultado varió desde figuras regulares hasta autosimilares. Es importante recalcar que [31] nos brinda una gran lección, pues muestra que para los parámetros de control y acoplamiento fijos el sistema presenta diferentes atractores acordes con las condiciones iniciales. Este método representa una herramienta extra que permite tener una buena idea de la evolución del sistema al incrementar el valor de los parámetros, ya que da una visión cualitativa de la dinámica.

Existen muchos métodos y el poder de descripción de cada uno de estos recae en utilizarlos conjuntamente, ya que cada uno aporta diferentes facetas de la dinámica. En ese sentido, Kaneko estudió la evolución de los diferentes atractores al cambiar los parámetros  $\mu$  y  $\epsilon$  para una condición inicial; en cambio, Lloyd [31] estudió el comportamiento para un conjunto representativo de condiciones iniciales (interesándose en sí se trataba de trayectorias simétricas o asimétricas y sin preocuparse en la descripción de los atractores). Es en ese sentido, es importante mencionar que existe un método muy recurrido por los matemáticos, basado en el análisis de las *curvas críticas* [36].

A pesar de que en este trabajo no se introdujo esta última herramienta, es notoria su capacidad de describir la dinámica. En [14] se puede encontrar el análisis hecho para un par de mapas logísticos donde se observa la *bifurcación de contacto*, que

es una bifurcación no clásica, ausente en el caso unidimensional. Otra herramienta muy recurrida es la de linealizar el sistema dado por (3.1) y estudiar su dinámica en el espacio de parámetros  $\mu - \epsilon$ , para una discusión en ese sentido, ver [37].

A pesar de que se estudió la dinámica usando sólo el primer método de los descritos previamente, éste aporta mucha información; sin embargo, puede ser que aspectos importantes queden relegados por no utilizar otras herramientas complementarias.

A manera de resumen, aumentar el parámetro de acoplamiento desde cero nos permite observar un número de cambios cualitativos notorios: para  $\epsilon \ll 1$  sólo está presente el atractor del mapa logístico en una dimensión; a partir de  $\epsilon \approx 0.0001$  se empieza a perder la estabilidad donde las bifurcaciones 1 y 2 manifiestan un comportamiento simétrico; la tercera bifurcación presenta un intervalo donde el exponente de Liapunov se anula, asociado con un 4-toro; este comportamiento se observa en las demás ventanas periódicas, con la salvedad de que los toros que presentan son de mayor orden y no siguen una secuencia de mayor a menor ni viceversa (en contraste con la ruta de duplicación de periodo; aumentar el parámetro de control, incrementa el periodo secuencialmente).

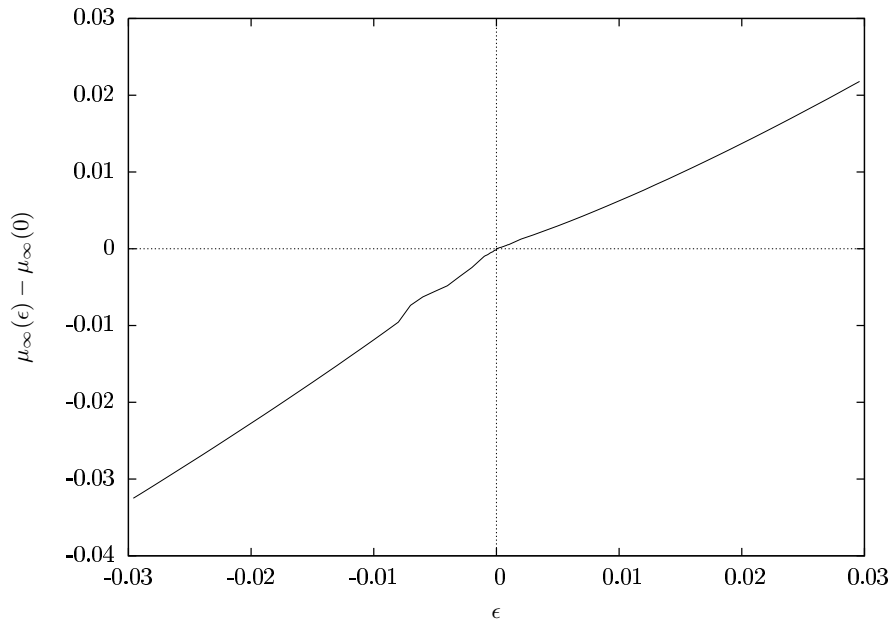


Figura 3.4: Comportamiento de  $\mu_\infty(\epsilon)$  respecto al valor  $\mu_\infty(0)$  sin acoplamiento.

El borde del caos,  $\mu_\infty(\epsilon)$ , depende de manera casi lineal del parámetro de acoplamiento; asumiendo que  $\epsilon \propto (\mu - \mu_\infty)^\beta$  se hizo distinción entre dos casos: cuando  $\epsilon$  es negativa se encontró  $\beta \sim 0.98$  y cuando es positiva se obtuvo  $\beta \sim 1.095$ . Ese comportamiento cesa cerca de  $|\epsilon_q| \approx |0.0296|$  donde el sistema manifiesta la ruta de cuasiperiodicidad y se observó un 8-toro, de forma que  $\mu(\epsilon)$  presenta una discon-

tinuidad. No se estudió el comportamiento para  $\epsilon > \epsilon_q$ , ya que para una discusión en esa dirección, donde se mencionan algunas propiedades del sistema para  $\epsilon = 0.1$ , pueden ser vista en la referencia [37].

La ruta de cuasi periodicidad merece una mención especial ya que es uno de los nuevos elementos en el sistema. En la figura (3.5) se muestra el exponente de Liapunov y la manifestación de los superciclos. También parece ser, salvo futuras corroboraciones, que agrega  $8 \cdot n$ -toros con  $n$  par a los ya existentes  $4 \cdot n$ -toros con  $n$  impar después de exceder  $\epsilon_q$ .

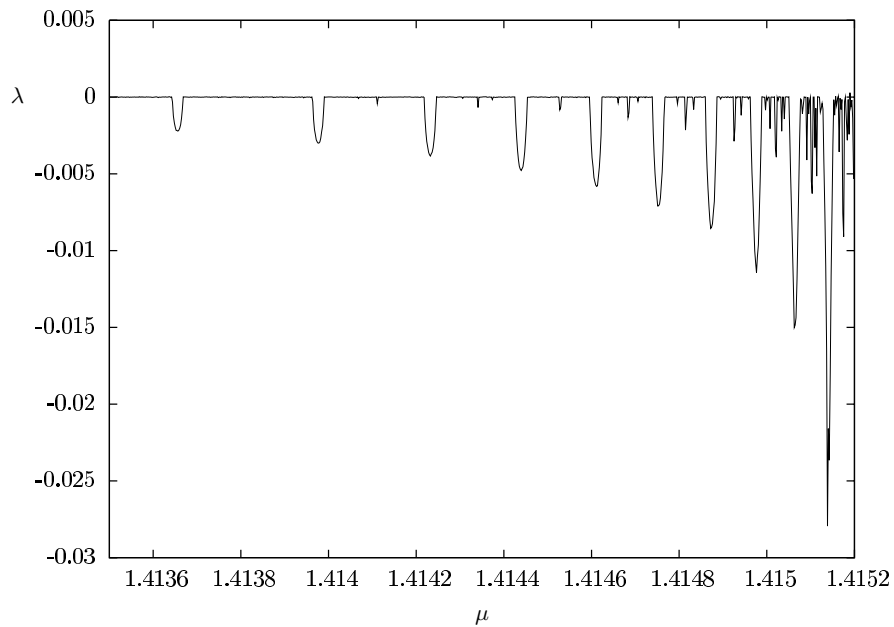


Figura 3.5: Exponente de Liapunov *vs*  $\mu$  para  $\epsilon = \epsilon_q$

En la siguiente sección nos enfocaremos en los efectos del acoplamiento en nuestro sistema y el fenómeno de sincronización.

## 3.2. Sincronización

La sincronización es un fenómeno sumamente frecuente tanto en la naturaleza como en sistemas artificiales y se hace presente en los más diversas ramas de la ciencia, entre los que se incluyen: luciérnagas que se iluminan al unísono, células cardíacas que se contraen simultáneamente, reacciones químicas (como la de Belousov-Zhabotinsky), láseres y un sinnúmero más. Las dos características fundamentales que comparten todos estos sistemas son que presentan oscilaciones y se encuentran, por muy débil que sea, acoplados. El estudio de sincronización es de

mucho interés, ya que permea un sinnúmero de fenómenos en la naturaleza, ver [2], [12] y referencias citadas ahí.

La manifestación más común corresponde a la sincronización generalizada, que consiste en la existencia de una relación funcional entre las variables tal que  $y_n = h(x_n)$ . El caso en el que se satisface  $h(x) = x$  se dice que se trata de sincronización completa. En general,  $h(x)$  puede ser extremadamente complicada, como llega a ser para los atractores extraños no caóticos [38].

La sincronización completa sucede cuando el acoplamiento es muy fuerte, por lo que los sistemas tienden a comportarse de manera idéntica tanto en frecuencias como en amplitudes, inclusive cuando evolucionan caóticamente. En cambio, los sistemas presentan una sincronización en fase cuando las señales de cada oscilador tienen frecuencias muy similares pero con amplitudes distintas y descorrelacionadas. Las fases  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se dice que se encuentran acopladas a una razón  $n : m$  si satisfacen la desigualdad  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{const}$ .

Acoplar sistemas idénticos, como lo hicimos en nuestro sistema, con un parámetro de acoplamiento simétrico tiene como consecuencia un fenómeno conocido como intermitencia *on-off* [39], inducida por una bifurcación *blow out* [40], que marca la transición entre la sincronización débil y fuerte.

Aun cuando nuestro sistema alcance un estado sincronizado, éste puede ser inestable para un número infinito de condiciones iniciales, éstas últimas forman un conjunto que puede tener formas intrincadas, como los llamados *riddled-basins* [41] donde no existe una vecindad abierta alrededor del punto tal que los puntos dentro de ella convergan al mismo atractor. En ese sentido, existe  $\epsilon_c$  conocido como el borde de la sincronización que separa los comportamientos estable e inestable, fuerte y débil, para el cual existe una vecindad abierta donde todas las trayectorias se sincronizan; sin embargo, durante el proceso intermedio existen tanto trayectorias estables como inestables, dando lugar a la intermitencia *on-off*. Es importante enfatizar que este tipo de bifurcación no corresponde a la ruta al caos discutida en el capítulo anterior.

Esta transición se caracteriza por periodos laminares para la cantidad  $\Delta_t = x_t - y_t$  tales que  $|\Delta_t| \ll 1$  seguidos de intervalos caóticos con  $|\Delta_t| \sim 1$ . En particular, se espera que la duración de los periodos laminares sigan una ley de potencias cerca del punto de bifurcación *blow out*, tal como se encontró para otros sistemas [42].

La manifestación de intermitencia *on-off* parece ser genérica de los sistemas idénticos acoplados simétricamente. En la figura (3.6) se muestra un ejemplo para el caso de un par de mapas logísticos donde se manifiestan los periodos laminares entre interrupciones caóticas.

Nuestro sistema a su vez también presenta sincronización generalizada, completa y acoplamiento de fases. No es sorpresa que estos sucedan tanto para movimientos periódicos como caóticos.

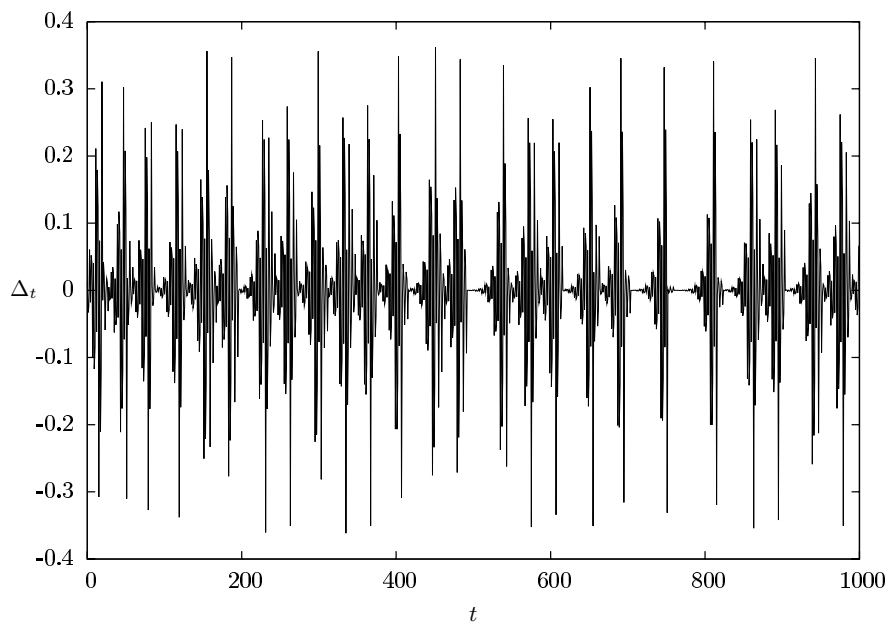


Figura 3.6:  $\Delta_t$  vs  $t$  para la condición inicial  $x = 0.2$  y  $y = 0.4$  con  $\mu = 1.367$  y  $\epsilon = 0.1$ .

# Capítulo 4

## Atractores críticos en dos dimensiones

Este capítulo se encuentra centrado en el estudio de la sensibilidad a las condiciones iniciales para un par de mapas logísticos acoplados linealmente. Inicialmente nuestra atención estuvo enfocada en el cálculo del exponente Liapunov en varias dimensiones, en su interpretación y las dificultades técnicas de su obtención. La relevancia de ésta última cantidad es que nos permite identificar los atractores críticos de nuestro modelo y que se encuentra íntimamente ligada a la sensibilidad a las condiciones iniciales, hecho que nos permitió constatar algunos resultados del modelo en una dimensión y explorar las nuevas propiedades asociadas a diferentes parámetros de nuestro mapa acoplado.

### 4.1. Exponentes de Liapunov en más de una dimensión

El exponente de Liapunov,  $\lambda$ , nos permite saber la razón exponencial con la que las trayectorias se separan o se unen conforme se itera el mapa. El sistema tiene acceso a un atractor por cada valor del parámetro de control,  $\mu$ , que se le asigne. De manera tal que el exponente de Liapunov y la sensibilidad a las condiciones iniciales quedan unívocamente determinadas por el tipo de atractor.

En sistemas unidimensionales hay tres posibles casos. Cuando el exponente de Liapunov es positivo el atractor es caótico y si es negativo el atractor es periódico. Cuando el exponente es cero se les conoce como atractores críticos y representan una excelente oportunidad para estudiar sistemas que no se satisfacen las propiedades de ergodicidad y mezclado, pilares de la física estadística. Es por eso que el estudio de los atractores críticos son vistos como escenarios donde podrían aplicarse posibles generalizaciones de la mecánica estadística de Boltzmann-Gibbs, ver [5].

Un mapa en  $\mathbb{R}^m$  tiene  $m$  exponentes de Liapunov que miden la razón con la que

dos condiciones iniciales se separan respecto a las  $m$  direcciones ortogonales. Para ilustrar esta idea, supongamos un mapa en  $\mathbb{R}^2$  lineal tal que  $f(x, y) = (ax, by)$  donde podemos escribir

$$f(x, y) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Al iterar el mapa  $t$  veces obtenemos que  $f^t(x, y) = A^t\mathbf{v}$ , donde  $A^t$  encierra toda la dinámica del mapa

$$f^t(x, y) = A^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a^t & 0 \\ 0 & b^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de manera tal que una esfera de radio unitario es mapeada en una elipse con un eje de magnitud  $|a^t|$  en la dirección  $x$  y  $|b^t|$  en la dirección de  $y$ , tal como lo ilustra la figura (4.1).

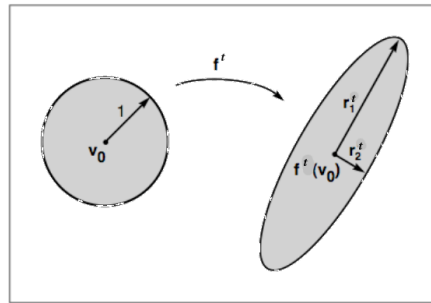


Figura 4.1: La  $t$ -ésima iteración del mapa sobre una esfera unitaria alrededor de  $\mathbf{v}_0$

Notemos que si  $|a|$  y  $|b|$  son menores que uno,  $v_0$  es un sumidero y será una fuente si son mayores que uno. Si uno es mayor y el otro es menor que uno se trata de un punto silla. De manera que son las magnitudes de los eigenvalores las que describen el comportamiento de los puntos fijos para  $A^t$ . Es importante hacer énfasis en que en muchos casos de interés  $A^t$  no es un producto de matrices constantes por lo que la evaluación puede ser extremadamente difícil. Los ejes de la elipse al cual es mapeada la esfera unitaria por el mapa están determinados por los eigenvectores y los eigenvalores de  $A^T A$ .

**Teorema 1** Sea  $A$  una matriz de  $m \times m$ . Donde  $s_1^2, \dots, s_m^2$  y  $u_1, \dots, u_m$  son los eigenvalores y eigenvectores, respectivamente, de la matriz de  $A^T A$ . Entonces los semiejes de la elipse al cual es mapeada la esfera unitaria están dados por  $s_i u_i$  para  $1 \leq i \leq m$ .

Lo anterior nos da pauta a dar una primera definición del exponente de Liapunov.

**Definición 1** Sea  $f$  un mapa diferenciable en  $\mathbb{R}^m$  con jacobiano  $A_t = Df^t(\mathbf{v}_0)$  y para cada  $k = 1, \dots, m$ , sea  $r_k^t$  la longitud del  $k$ -ésimo semieje del elipsoide centrado en  $\mathbf{v}_0$ , ver figura (4.1). De forma que el  $k$ -ésimo número de Liapunov queda definido por

$$L_k = \lim_{t \rightarrow \infty} (r_k^t)^{1/t},$$

en caso de que ese límite exista, el exponente de Liapunov para el  $k$ -ésimo semieje de la elipse centrada en  $\mathbf{v}_0$  está dado por  $\lambda_k = \ln L_k$ .

El teorema y la definición anteriores nos ayudan a entender una versión más fuerte del teorema 1, conocido como el teorema ergódico multiplicativo de Oseledec que garantiza la existencia de los exponentes de Liapunov. Para una exposición con mayor detalle respecto a la discusión anterior, ver [43].

**Teorema 2** (Teorema ergódico multiplicativo de Oseledec). Sea  $\mu$  una medida de probabilidad en un espacio  $M$ , y  $f : M \rightarrow M$  un mapa que preserva medida tal que  $\mu$  es ergódico<sup>1</sup>. Sea también  $T : M \rightarrow M$  matrices medibles de  $m \times m$  tales que

$$\int \mu(dx) \log^+ \|T(\mathbf{x})\| < \infty,$$

donde  $\log^+ u = \max(0, \log u)$  y  $T^t(\mathbf{x}) = T(f^{t-1}(\mathbf{x})) \dots T(f(\mathbf{x}))T(\mathbf{x})$ . Entonces, para casi cualquier  $\mathbf{x}$  en  $\mu$  el siguiente límite existe:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T^{t*}(x)T^t(x))^{1/2t} = \Lambda_{\mathbf{x}}. \quad (4.1)$$

(Donde  $T^{t*}(x)$  es la adjunta de  $T^t(x)$  y  $\Lambda_{\mathbf{x}}$  representa la  $2t$ -ésima raíz de la matriz positiva  $T^{t*}(x)T^t(x)$ ).

Los exponentes de Liapunov quedan definidos como los logaritmos de los eigenvalores de  $\Lambda_{\mathbf{x}}$  que son constantes para casi toda  $\mu$ , dado que  $\mu$  es ergódico. Sea  $\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \dots$ , con multiplicidad  $m^{(i)}$  para cada  $\lambda^{(i)}$ , y  $E_x^{(i)}$  el subespacio de  $\mathbb{R}^m$  asociado a los eigenvalores de  $\Lambda_{\mathbf{x}}$  menores o iguales a  $\exp \lambda^{(i)}$  tales que  $\mathbb{R}^m = E_x^{(1)} \supset E_x^{(2)} \supset \dots$  entonces, para  $\mathbf{u}$  un vector propio, el siguiente teorema se satisface.

**Teorema 3** Para casi toda  $\mathbf{x}$  en  $\mu$  se cumple

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|T^t(\mathbf{x})\mathbf{u}\| = \lambda^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

si  $\mathbf{u} \in E_x^{(i)} \setminus E_x^{(i+1)}$ . El límite  $\lambda^{(i)}$  es el exponente de Liapunov.

<sup>1</sup>El teorema ergódico establece que si  $\mu$  es ergódico entonces para cualquier función continua,  $\phi$ , se cumple  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi[f^t x(0)] dt = \int \mu(dx) \phi(x)$  [1].



Existen otras versiones del teorema 3, algunas más generales que otras, la primera versión se debe a Oseledec y apareció en 1968. Para una discusión más detallada, ver [44] y [1] y las referencias citadas ahí.

En resumen, es importante notar que las expresiones (4.1) y (4.2) nos aportan dos formas de calcular el exponente de Liapunov, que pueden ser usadas indistintamente acorde al sistema dinámico que se estudia. Los elementos del jacobiano,  $T^n(\mathbf{x})$ , de  $f$  se encuentran dados por

$$T_{ij}^n(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i^n(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \quad (4.3)$$

donde se satisface que  $T^t(\mathbf{x}_0) = T^{t-1}(f(\mathbf{x}_0))T(\mathbf{x}_0)$  y de forma tal que para sucesivas iteraciones del mapa,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ , podemos escribir

$$T^t(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{x}_{t-1}) \dots T(\mathbf{x}_1)T(\mathbf{x}_0). \quad (4.4)$$

De acuerdo con la ec. (4.2) el siguiente paso es realizar la multiplicación de  $T^n(\mathbf{x})\mathbf{u}$  a través de los productos dados por la ec. (4.4). Es importante notar que la ec. (4.4) es un producto de matrices no conmutativas y que el teorema 3 no dice de manera explícita como obtener  $\mathbf{u}$ . Una vez obtenido el producto el siguiente paso consiste en sacar la norma, que inicialmente puede ser la norma euclidiana, dado que la elección de ésta en  $\mathbb{R}^m$  no altera el valor de los exponentes de Liapunov ni el subespacio  $E_x^{(i)}$  asociado a cada uno de ellos.

Para el caso en que se estudian atractores ergódicos, el exponentes de Liapunov no depende de la condición inicial escogida. Sin embargo el estudio de los atractores críticos, y en general de sistemas no ergódicos, representa estar conscientes de que el exponente de Liapunov no sólo dependerá del parámetro de control y el coeficiente de acoplamiento entre los mapas sino también de las condiciones iniciales.

En el contexto de el estudio de la sensibilidad anómala en las condiciones iniciales para el estudio de los atractores críticos (donde el exponente de Liapunov se anula) es necesario recurrir a otra herramienta para poder desenmascarar la dinámica dentro del atractor que consiste en una generalización del exponente de Liapunov [5]. De manera tal que el análisis que se hace en este trabajo consiste en primero encontrar los parámetros de control y de acoplamiento tales que el atractor es crítico y después estudiar la dinámica dentro del atractor a través de la generalización del exponente de Liapunov.

## 4.2. Cálculo numérico de los exponentes de Liapunov en más de una dimensión

Desafortunadamente, en la práctica, el cálculo del exponente de Liapunov en varias dimensiones no es trivial y puede presentar un sinnúmero de problemas técnicos

que pueden variar de acuerdo a si se estudia un sistema discreto, continuo o una serie de tiempo experimental.

En el caso discreto, que es el que nos concierne, puede presentar un alto nivel de dificultad. Por ejemplo, si se escoge realizar la evaluación del exponente de Liapunov a través de la ec. (4.1) existen al menos tres causas de error: (i) al realizar los productos de  $T^t(\mathbf{x})$  con su adjunta los distintos elementos de la matriz pueden crecer muy rápido y otros tender a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ ; (ii) hay que obtener la raíz cuadrada de la matriz (que puede ser computacionalmente costoso); (iii) diagonalizar la matriz también puede requerir mucho tiempo en más de tres dimensiones. Sin embargo, utilizar la ec. (4.2) no está exenta de problemas, a pesar de no presentar las complicaciones (ii) y (iii), el error tipo (i) hace que la computadora desprecie cantidades muy cercanas a cero al manipular cantidades muy grandes.

En el caso dificultad tipo (i) es salvable en algunos sistemas dinámicos al utilizar código de alta precisión. Para las dificultades del tipo (ii) y (iii) también existen diferentes métodos como la descomposición matricial, que incluye los algoritmos como  $QR$  y  $SVD$  (singular value decomposition) [45]. Sin embargo, hay sistemas dinámicos para los cuales estos métodos no son apropiados ya que requieren ser renormalizados constantemente (para contrarrestar el efecto del crecimiento exponencial entre la trayectoria guía y las trayectorias cercanas) y ortogonalizados repetidamente también (para inhibir el colapso de las trayectorias en la dirección de máximo crecimiento), entre esos métodos se encuentran los descritos en [46] y [47].

Existen diferentes métodos para calcular los exponentes de Liapunov y dependen si se trata de sistemas discretos [45], continuos [48] o series de tiempo [49].

Para la obtención de los exponentes de Liapunov se utilizó inicialmente la ec. (4.2) pero falló rotundamente para  $t > 20$  (la razón de esto es que algunas componentes divergían y otras se anulaban muy rápido). También se utilizó una aproximación para  $\epsilon \ll 1$  y se encontró que al incrementar  $\epsilon$  el exponente dejaba de reproducir el comportamiento del espacio fase. Bajo esas circunstancias se optó por utilizar código de precisión arbitraria [50] con 62,000 cifras significativas. Sin embargo, no se obtuvo éxito en la reproducción del exponente de Liapunov. Hasta ahora, la sospecha más fuerte por la que creemos que se presentó ese error numérico es que a pesar de que la ec. (4.2) es la definición de los exponentes de Liapunov no representa una manera práctica de obtenerlos; más adelante se hablará de otros métodos para calcularlos.

Hasta este punto, la única forma de sobrepasar esta vicisitud es tomando una aproximación. En el caso de una dimensión, donde la derivada de un mapa a lo largo de una trayectoria se puede escribir como el producto de las derivadas de las sucesivas iteraciones  $x_0, \dots, x_t$  tal que  $(f^t)'(x_0) = f'(x_{t-1}) \dots f'(x_0)$ , nos permite escribir al exponente de Liapunov como

$$\frac{1}{t} \log(|(f^t)'(x_0)|) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \log(|f'(x_i)|). \quad (4.5)$$

De manera que el producto no depende del orden de la multiplicación, de forma que el promedio de las cantidades  $\log(|f'(x_i)|)$  no se altera por el orden en que se realiza la suma. En el caso de varias dimensiones se tiene un jacobiano, que es el producto no conmutativo de matrices, dado por la ec. (4.4), al cual se le puede obtener la norma, satisfaciéndose la siguiente desigualdad

$$\|T^t(\mathbf{x}_0)\| \leq \|T(\mathbf{x}_{t-1})\| \dots \|T(\mathbf{x}_1)\| \|T(\mathbf{x}_0)\|. \quad (4.6)$$

que se traduce en

$$\frac{1}{t} \log(\|T^t(\mathbf{x}_0)\|) \leq \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \log \|T(\mathbf{x}_i)\| \quad (4.7)$$

A pesar de que se trata de una desigualdad, la ec. (4.7), es relevante porque permite fijar una cota máxima al exponente de Liapunov. En la práctica, se encontró que la ec. (4.7) en general permite dar una idea cualitativa del comportamiento del exponente de Liapunov, en algunos casos se cumple la igualdad y en otros no, a este punto regresaremos más tarde.

Otro aspecto relevante es que el producto  $T^t(\mathbf{x})\mathbf{u}$  cambia la magnitud de  $\mathbf{u}$  de manera que es  $T^t(\mathbf{x})$  quien lleva la información de cuánto se contrae o expande la separación entre dos trayectorias cercanas. La norma se encuentra definida por

$$\begin{aligned} \|T^t(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\|^2 &= (T^t(\mathbf{x}_0)\mathbf{u})^\dagger T^t(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^\dagger [(T^t(\mathbf{x}_0))^\dagger T^t(\mathbf{x}_0)]\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde la matriz  $(T^t(\mathbf{x}_0))^\dagger T^t(\mathbf{x}_0)$  es simétrica y positiva definida, por lo que se puede obtener la raíz cuadrada y por lo tanto la magnitud de la imagen de  $\mathbf{u}$ . Por último, para la prueba de que para casi toda condición inicial,  $\mathbf{x}$ , el siguiente límite existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(T^t(\mathbf{x}_0))^\dagger T^t(\mathbf{x}_0)]^{1/2t} = \Lambda_x, \quad (4.9)$$

y que los eigenvalores de  $\Lambda_x$  son los exponentes de Liapunov ver [44] y [1].

Ninguno de los teoremas anteriores establece cómo se obtiene  $\mathbf{u}$ . Hay artículos, como [30] y [51], que proponen que  $\|A\| = \max_{\{\mathbf{v}\}} \{|A\mathbf{v}|/|\mathbf{v}|\}$ , donde  $\mathbf{v}$  es tomado de un ensamble de condiciones iniciales, olvidándose así de obtener  $\mathbf{u}$ . Para el cálculo del exponente de Liapunov consideramos que  $\mathbf{u}$  está en la dirección *propia*, y en caso de ser unitario se satisface que  $\|T^n(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}\| = \exp \lambda_{\pm}$ , con  $\lambda_+$  y  $\lambda_-$  los exponentes de Liapunov en el caso de bidimensional.

Bajo las consideraciones anteriores se obtuvo una aproximación a los exponentes de Liapunov dados por la ec. (4.7). Se encontró que cuando las condiciones iniciales se encuentran en la diagonal, la desigualdad se vuelve exacta. En cambio, cuando están fuera de la diagonal la ec. (4.7) no reproduce el comportamiento del espacio fase pero sí otorga una idea cualitativa de los puntos de interés (como aquéllos donde el exponente cambia de signo). A continuación en la figura (4.2) se muestra, respectivamente, los atractores y el exponente de Liapunov como función del parámetro de control para una condición inicial en la diagonal.

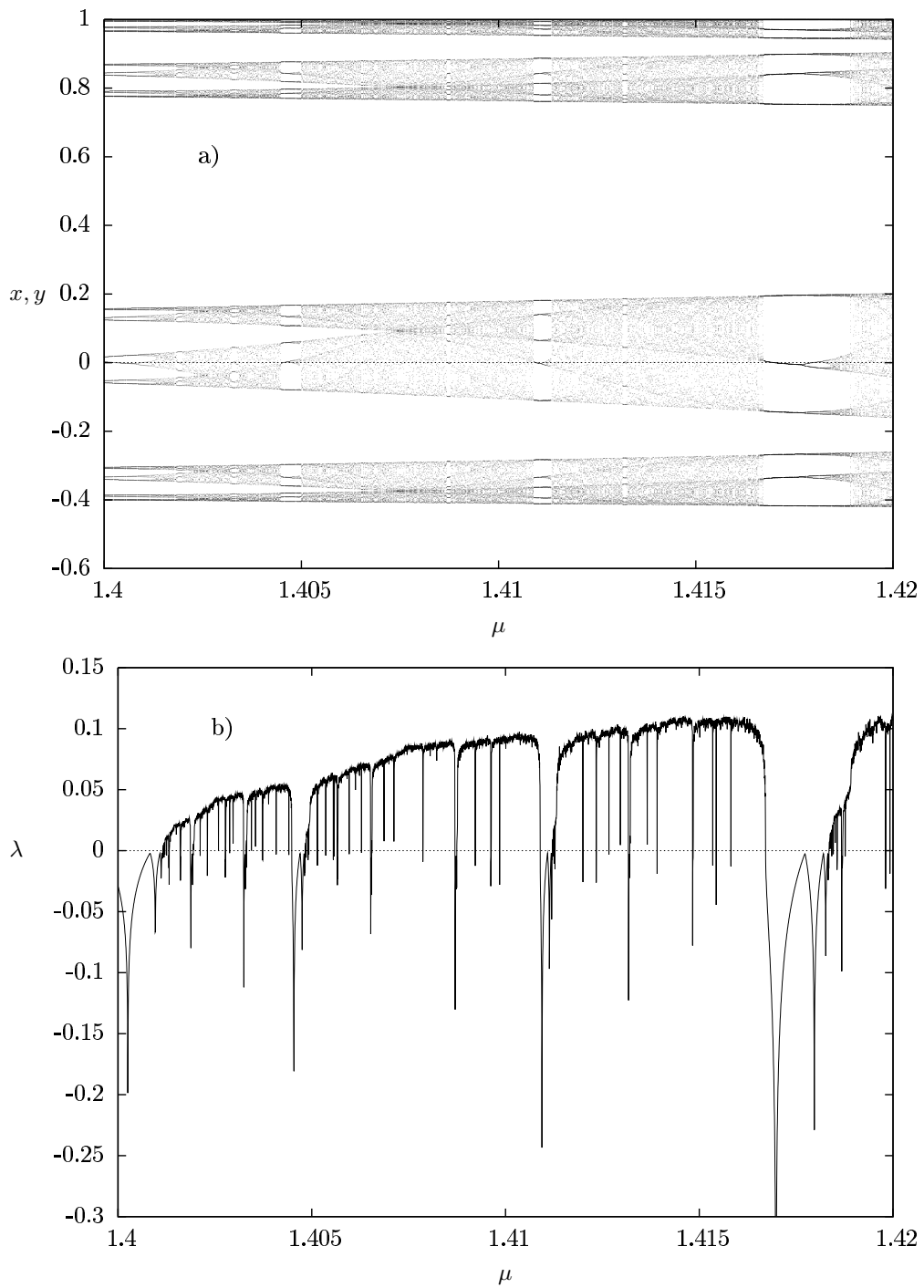


Figura 4.2: a) Atractores para  $x_0 = y_0 = 0.000000001$  con  $\epsilon = 0.2$ ; b) el exponente de Liapunov, toma el mismo valor para las dos componentes.

Al evaluar el exponente de Liapunov para condiciones iniciales fuera de la diagonal se encontró que la ec. (4.7) no se convierte en igualdad. A pesar de que sí nos permite observar el comportamiento cualitativo y los puntos donde el exponente de Liapunov cambia de signo, inicialmente se optó por utilizar un método que permite calcular el exponente más grande de Liapunov, LG; la idea esencial consiste en tomar una trayectoria como guía y una segunda condición inicial separada una distancia  $d_0$  respecto a  $x_0$ , para después obtener la distancia que esas quedan separadas después de una iteración del mapa,  $d_1$ . En la figura (4.3) se muestra como se realiza el proceso para sucesivas iteraciones y el valor numérico del exponente más grande queda definido como el promedio, sobre una trayectoria, de los logaritmos de los cocientes entre  $d_1$  y  $d_0$ , es decir

$$LG = \langle \log |d_1/d_0| \rangle. \quad (4.10)$$

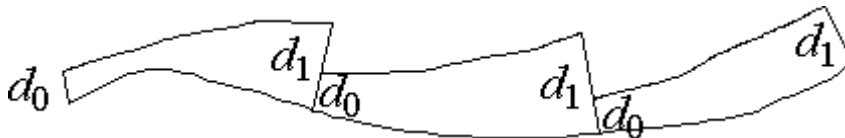


Figura 4.3: Desviación promedio de dos trayectorias cercanas

Este método tiene varias sutilezas numéricas, por ejemplo: al colocar dos condiciones iniciales a una distancia  $d_0$  al siguiente paso de la iteración se obtiene una separación  $d_1$ ; la elección del siguiente  $d_0$  se hace en la dirección de  $d_1$  anterior pero reescalado, tal como lo muestra la figura (4.3); también es importante notar que la distancia  $d_0$  no es arbitraria y que mientras más pequeña sea su elección, no hay garantía de mejores resultados (en nuestro caso, se utilizó  $d_0 = 10^{-12}$ ) [52].

Una desventaja de este método es que sólo aporta el comportamiento en la dirección de más rápido crecimiento. Existen otros algoritmos que permiten obtener los exponentes de Liapunov en otras direcciones; en particular, aquí seguimos el método presentado en [49]. Si ahora retomamos que para un sistema  $n$ -dimensional discreto una  $n$ -esfera de condiciones iniciales es mapeada en una  $n$ -elipse. El  $i$ -ésimo exponente de Liapunov se encuentra definido por<sup>2</sup>

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{p_i(t)}{p_i(0)}, \quad (4.11)$$

con  $p_i(t)$  el tamaño del  $i$ -ésimo semieje de la elipse. En cada iteración, la evolución que marca nuestro sistema linealizado para un conjunto ortonormal de vectores, dados por  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ , es la tendencia de estos últimos a alinearse en la dirección de máximo crecimiento; así que es necesario recurrir al proceso de reortormalización de Gram-Schmidt (GS) para conocer el nuevo conjunto ortonormal  $\{\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ ,

<sup>2</sup>La definición original en [49] utiliza el logaritmo base 2, aquí se hizo la sustitución  $\log_2 \rightarrow \ln$ .

dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}'_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \\
\mathbf{v}'_2 &= \frac{\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1}{\|\mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1\|}, \\
&\vdots \\
\mathbf{v}'_n &= \frac{\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_{n-1} \rangle \mathbf{v}'_{n-1} - \cdots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1}{\|\mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_{n-1} \rangle \mathbf{v}'_{n-1} - \cdots - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}'_1 \rangle \mathbf{v}'_1\|},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

de donde se puede conocer el valor de  $p_i(t)$ .

Hasta ahora, hemos hablado de tres métodos para realizar el cálculo del exponente de Liapunov; cada uno con ventajas y desventajas. Por ejemplo, al usar LG sólo se puede conocer la razón en que se separan dos trayectorias en la dirección de máximo crecimiento pero no aporta ninguna información para las demás direcciones; en ese sentido, el método GS parece ser la solución final y, tal como se puede ver en la figura (4.4), se obtienen resultados satisfactorios. Sin embargo, se encontró que este método realiza predicciones incorrectas para condiciones iniciales en la diagonal o cercanas a los puntos de bifurcación de periodo; esto último se pudo verificar utilizando LG. Es importante enfatizar, que con el método GS se verificó los valores reportados para los dos exponentes de Liapunov en el caso del mapa de Hénon [49] y [52].

El método GS ha sido utilizado con éxito en otros sistemas, como una malla de mapas acoplados [53]; sin embargo, con respecto al cálculo de los exponentes para un par de mapas acoplados se presentan discrepancias respecto al comportamiento esperado del espacio fase. Estas diferencias giran entorno a la obtención de un aparente comportamiento caótico para valores en los que se esperaría un comportamiento periódico (como aquellos donde la suma de ambos exponentes de Liapunov es menor que cero o cuando uno es cero y el otro es negativo). Hay dos posibles explicaciones: la primera es debida a un error numérico y la segunda es que se trata de un atractor extraño no caótico [38].

En principio, la ec. (4.2) debería ser suficiente para obtener los exponentes de Liapunov pero en la práctica existen dificultades numéricas. Es por lo mismo, que para condiciones iniciales sobre la diagonal se utilizó la ec. (4.7) y la ec. (4.11) fuera de ella.

El principal interés por identificar los valores del parámetro de control donde se anula el exponente de Liapunov, consiste en estudiar el comportamiento de los atractores críticos y la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales. Estos puntos son relevantes ya que dos trayectorias arbitrarias no se separan entre sí de manera exponencial; por lo que es necesario utilizar una generalización del exponente de Liapunov para conocer la dinámica.

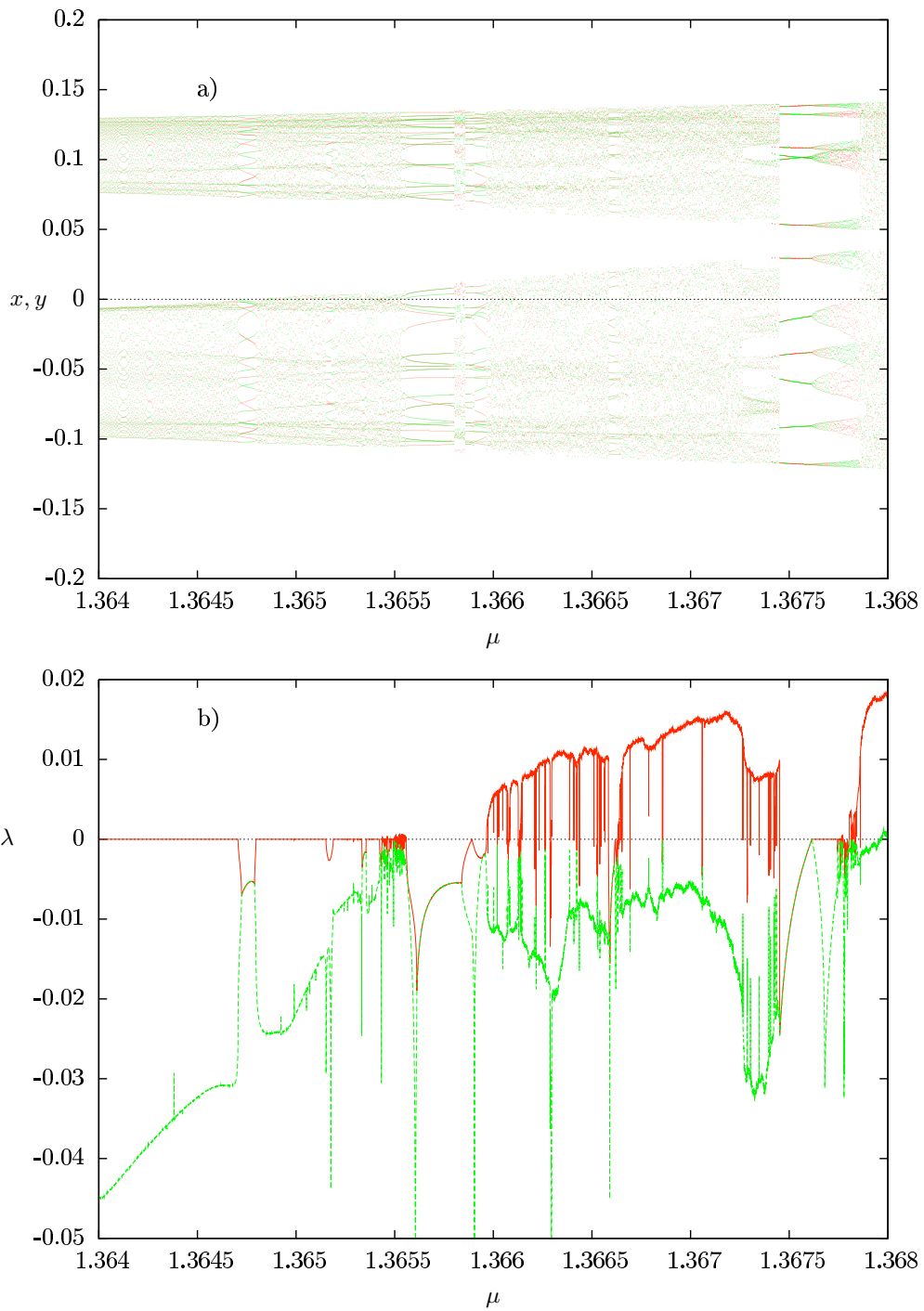


Figura 4.4: a) Atractores para  $x_0 = 0.2$  y  $y_0 = 0.4$  con  $\epsilon = 0.06$ , en rojo los atractores de  $x$  y en verde los de  $y$ ; b) Los dos exponentes de Liapunov.

## 4.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales en atractores críticos en dos dimensiones

### 4.3.1. Duplicación de periodo

Nuestro interés se centró en el análisis en los atractores críticos donde ocurre la bifurcación de trinche y que se encuentran unívocamente relacionados con la ruta de duplicación de periodos, que puede ser observada para un amplio espectro de condiciones iniciales y de parámetros ( $\mu$  y  $\epsilon$ ), asociados a un par de mapas logísticos acoplados linealmente. En esos puntos se observó que dos trayectorias cercanas no siguen el comportamiento esperado, ya que éstas no se separan ni se acercan de manera exponencial. Esta discrepancia se manifiesta cuando el exponente de Liapunov se anula; o en términos de la sensibilidad a las condiciones iniciales, significa que las dos trayectorias mantienen entre sí un crecimiento de ley de potencia.

En la sección anterior mencionamos las dificultades para calcular el exponente de Liapunov y de que la elección de método para calcularlo tenía que ser tomada en función de la condición inicial escogida, habiendo así dos casos: el primero corresponde a las condiciones iniciales sobre la diagonal, es decir,  $x_0 = y_0$ ; el segundo son todas aquellas fuera de la diagonal.

La sensibilidad a las condiciones iniciales se encuentra ligada al exponente de Liapunov a través de la ec. (2.55). Y por lo mismo, su evaluación también depende de la misma manera de la condición inicial. En el caso de que se realice el cálculo para atractores que no son críticos se espera que la sensibilidad se reduzca a la expresión estándar  $\xi_t(x_0) = \exp(\lambda_1 t)$ , que corresponde al caso  $q = 1$ ; en cambio, para los atractores críticos se pueden observar distintos comportamientos en función de si se encuentran en la diagonal o fuera de ella.

Estudiar la sensibilidad a condiciones iniciales para atractores críticos sobre la diagonal es un caso de interés, ya que se espera constatar los resultados con el caso de una dimensión [21]; esto se debe principalmente a que el término lineal de acoplamiento se anula y cada uno de los mapas evoluciona de manera independiente, como un mapa logístico. En la figura (4.5) se muestra el logaritmo deformado de la sensibilidad a las condiciones iniciales para la primera bifurcación de trinche, donde las órbitas pasan de tener periodo uno a dos. El comportamiento cualitativo es reproducido de manera apropiada con  $q = 5/3$ , el valor esperado para esta ruta al caos. La interpretación de los resultados se encuentra centrado en que para cada una de las componentes del mapa se puede hacer un análisis idéntico al caso de una dimensión.

Esa idea se encuentra sustentada en que la evaluación de condiciones iniciales sobre la diagonal tiene como consecuencia que el mapa se desacopla (o mejor dicho, evolucionan independientemente); por lo que sólo basta que asumamos que la sensibilidad a las condiciones iniciales por componentes toma la forma encontrada para



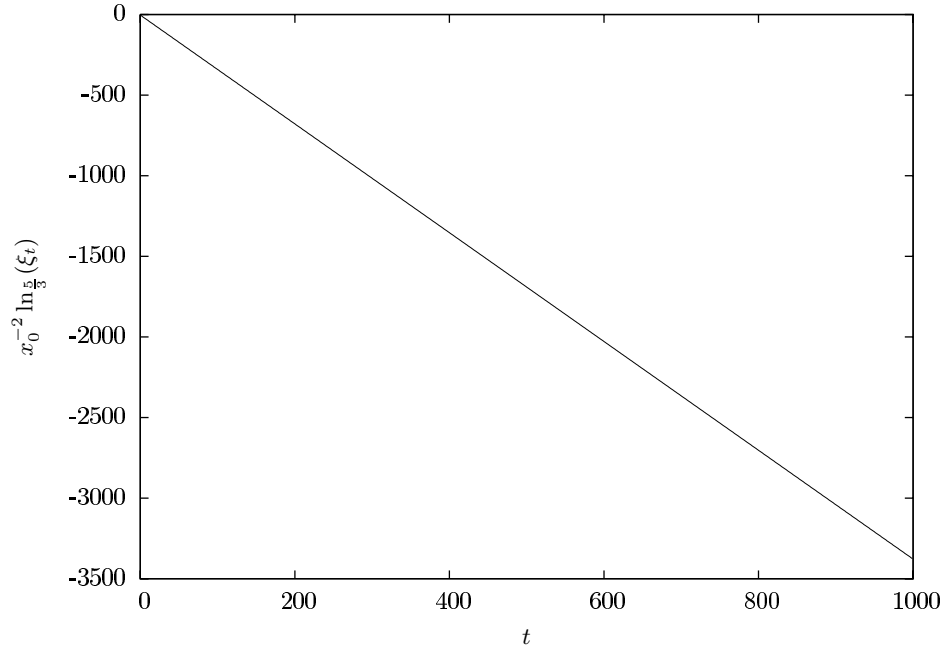


Figura 4.5: Logaritmo deformado de la sensibilidad a condiciones iniciales para la primera bifurcación de trinche con  $\mu = 0.75$ ,  $\epsilon = 0.0$  y  $x_0 = y_0 = 3.3 \times 10^{-6}$ . Sólo se graficó la componente  $x$ , los resultados para  $y$  son análogos.

una dimensión [21], es decir

$$\xi_t(x_0) = [1 - (z - 1)a \operatorname{sgn}(x_0) |x_0|^{z-1} t], \quad (4.13)$$

donde a la ruta de duplicación de periodo le corresponde el valor  $z = 3$ . De acuerdo con [21],  $z$  proviene de la expansión de la  $n$ -ésima iteración del mapa en una dimensión

$$f^{(n)}(x) = x + u |x|^z + o(|x|^z) \quad (4.14)$$

con  $x = x - x_c$  y  $x_c = y_c = 2/3$ . Acorde con la ec. (2.60) para  $\epsilon = 0.0$ ,  $x_0 = y_0 = 3.3 \times 10^{-6}$  se encontró  $\lambda_q = -3.374$ , que coincide con el valor esperado en una dimensión ( $\lambda_q = -3.375$ ).

### 4.3.2. Intermittencia

El análisis para esta ruta es muy similar al caso anterior, en el sentido de que también asumimos que se puede realizar una descripción por componentes cuando se estudia la evolución del mapa. La sensibilidad a condiciones iniciales se encuentra dada por ec. (4.13) pero a diferencia de la ruta de duplicación de periodo tenemos que  $z = 2$ ,  $x_c = y_c = 0.0314047$  y  $\epsilon = 0$ . Dado que nos encontramos en el caso con condiciones iniciales en la diagonal sólo existen dos direcciones de aproximación a los

puntos  $x_c$  y  $y_c$ . Si tomamos  $x_0 = 5 \times 10^{-6}$  se encontró  $q = 3/2$  y al igual que el caso unidimensional [21] la sensibilidad a condiciones iniciales tiene un comportamiento “super fuerte” cuando la aproximación a  $x_c$  es por la derecha y uno “débil” cuando es por la izquierda. En la figura (4.6) se muestra el logaritmo deformado de la sensibilidad a las condiciones iniciales para la componente  $x$ , los resultados para  $y$  son completamente análogos. Se encontró que  $\lambda_q = 33.41$  por la derecha y  $\lambda_q = -29.01$  para el caso por la izquierda; el valor esperado, respecto al caso unidimensional, es  $\lambda_q = \pm 31.21$  [21].

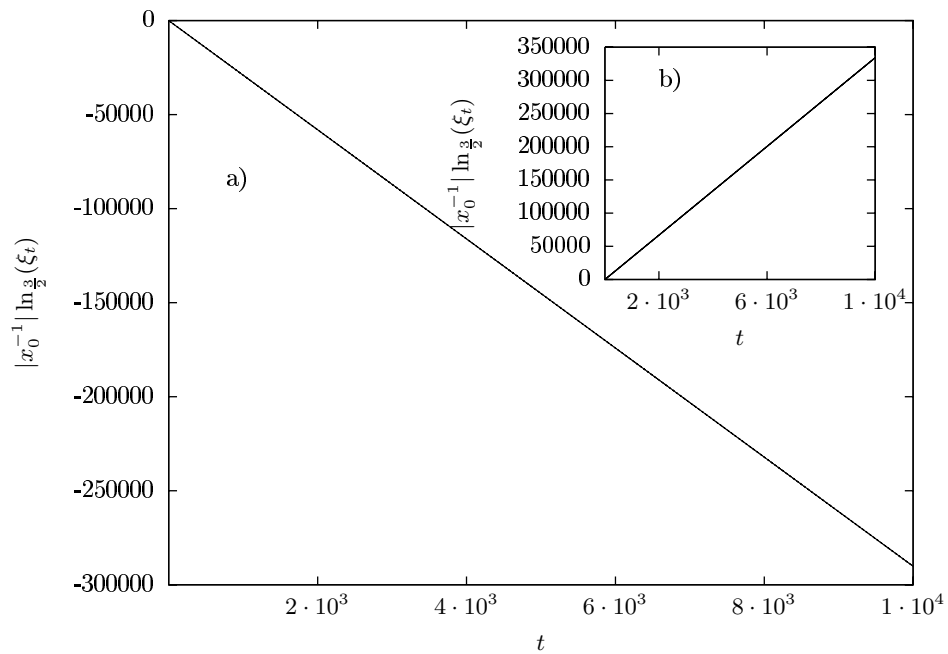


Figura 4.6: Comportamiento del logaritmo deformado respecto a las iteraciones para la componente  $x$ . El caso “débil” corresponde a a) y el “super fuerte” a b).

### 4.3.3. Borde del caos

Las condiciones iniciales sobre la diagonal son muy particulares, y al igual que en los casos anteriores, nos permite asumir que podemos estudiar la sensibilidad a condiciones iniciales por componentes. Con la elección de las condiciones iniciales  $x_0 = y_0 = 0$  y  $\epsilon = 0$  se espera reproducir los resultados obtenidos en el caso unidimensional [24] y que la sensibilidad a las condiciones iniciales satisfaga

$$\lambda_q^{(k)} = \frac{1}{t} \ln_q \xi_t = \frac{\ln \alpha}{(2k+1) \ln 2} \quad (4.15)$$

En la figura (4.7) se muestra el logaritmo deformado de la sensibilidad a condiciones iniciales contra el tiempo y el ajuste lineal para las familias de trayectorias con  $k = 0$  y  $k = 1$ .

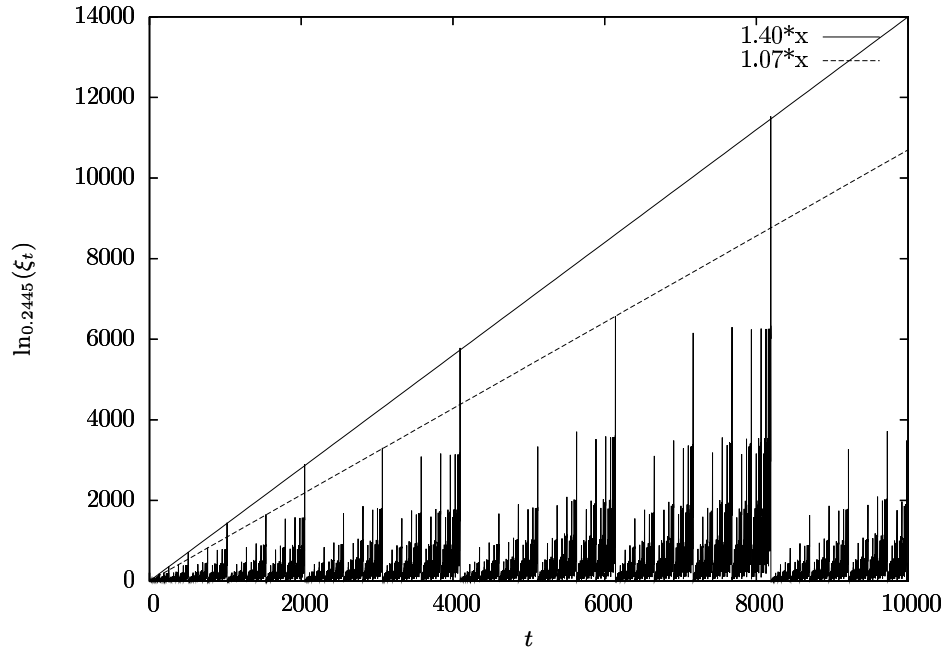


Figura 4.7: Logaritmo de la sensibilidad *vs* el logaritmo del tiempo para la condición inicial  $x_0 = y_0 = 0$  con  $\mu = \mu_\infty$  y  $\epsilon = 0$ .

En el caso de la familia de trayectorias con  $k = 0$ , que satisface  $t = (2k + 1)2^n$ , se reprodujo los valores esperados del caso unidimensional [24], obteniéndose  $q = 1 - \ln 2 / \ln \alpha$  y  $\lambda_q = \ln \alpha / \ln 2$  que al sustituir el valor numérico  $\lambda_q = 1.328$  nos permite obtener  $q = 0.2445$  (valor unívoco para el borde del caos).

# Capítulo 5

## Conclusiones

Uno de los objetivos de este trabajo fue el de poder estudiar un modelo que posee, para algunos parámetros, similitudes con los fenómenos físicos y biológicos fuera del equilibrio; el punto central es la búsqueda de condiciones para los cuales exista un paralelismo entre determinados fenómenos críticos con cada una de las rutas del caos. Es decir, se busca identificar la clase de universalidad a la que pertenece determinado sistema físico; por ejemplo, en el caso de una dimensión existe: una analogía entre la ruta de intermitencia con el estudio de cúmulos críticos, un paralelismo entre la vía de cuasi periodicidad con la localización y un vínculo entre la dinámica vítrea y el atractor de Feigenbaum con ruido. Ahora, en este trabajo se buscó sentar un punto de avanzada hacia el estudio de atractores críticos en más de una dimensión; sin embargo, ese camino no es fácil y se encuentra lleno de retos. Una de las metas de este trabajo era trasladar los conceptos y experiencias ganadas en el estudio de los atractores críticos en una dimensión, a través del mapa logístico, a un par de mapas logísticos acoplados linealmente en dos dimensiones. De ahí la relevancia del mapa logístico y que dedicáramos el segundo capítulo a describir y reproducir algunas de las propiedades del caso unidimensional.

El tercer capítulo contiene los cimientos de nuestro modelo de estudio y enmarca sus rasgos generales. Éstas pueden ser agrupadas en tres grandes clases: las referentes a las propiedades dinámicas, la notación utilizada para describir la sucesión de atractores al cambiar los parámetros y la identificación de dos subconjuntos de condiciones iniciales (uno capaz de reproducir todos los elementos observados en el caso de una dimensión y el otro con todas las nuevas características); el segundo bloque de propiedades las componen las relacionadas con el reconocimiento de los atractores críticos que se manifiestan en nuestro modelo, donde merecen una particular mención los puntos en los que suceden las transiciones cuasi periódica y caos-hipercaos, ausentes en el caso unidimensional; el último conjunto de propiedades son las que aluden al fenómenos de sincronización y la intermitencia *on-off*. Llevar a cabo un entendimiento cabal de todos los atributos que posee un par de mapas logísticos acoplados linealmente puede ser una labor ardua (una de las razones principales es

que en dos dimensiones existen infinitas formas de aproximarse al atractor); sin embargo, de la mano del estudio de los atractores y del comportamiento del exponentes de Liapunov para cada uno de ellos, fue posible identificar algunos de sus atributos esenciales para nuestro objetivo.

La sensibilidad a las condiciones iniciales, tanto para los atractores críticos en dos dimensiones como los unidimensionales, se encuentra vinculada con el exponente de Liapunov. Asociada a ésta última cantidad se encontraron diferentes problemas técnicos para su cálculo y se tuvo que trabajar bajo dos enfoques; el primero, consistía en una solución parcial que nos permitía conocer la razón de separación entre dos trayectorias cercanas en la dirección de máximo crecimiento y que mediante el método de Gram-Schmidt pudimos conocer, con algunas discrepancias, el valor del segundo exponente (estos resultados sólo fueron válidos para trayectorias con condiciones fuera de la diagonal  $x \neq y$ ); y el segundo, se encontraba basado en una aproximación de la definición del exponentes de Liapunov en varias dimensiones, que era capaz de reproducir de manera correcta las trayectorias con condiciones iniciales en la diagonal ( $x = y$ ). De estos dos enfoques, es el segundo método el que nos permite estudiar, y corroborar respecto a los resultados previos del caso unidimensional, el comportamiento de la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales; en cambio, el primer enfoque, que es el que incluye los casos de interés, reproduce correctamente el comportamiento de los atractores a través de los exponentes de Liapunov pero no se obtienen resultados satisfactorios al vincularlos con el estudio de la sensibilidad anómala (en particular, en referencia a los resultados obtenidos para la ruta de cuasi periodicidad; punto que quedará pendiente para trabajos futuros).

Un par de mapas logísticos acoplados de manera lineal representa un lugar idóneo para extender las ideas y resultados del caso unidimensional; principalmente por que el acoplamiento entre ellos introduce un mundo de fenómenos que se suman a los ya observados en el caso unidimensional. Éste sistema ha sido utilizado para modelar fenómenos biológicos como ecosistemas y dinámica de poblaciones. En ese sentido, una de las motivaciones que se tienen por estudiar los atractores críticos en dos dimensiones es que se incrementa la gama de fenómenos que pueden ser modelados. Superar las vicisitudes técnicas relacionadas con el cálculo de la sensibilidad anómala a las condiciones iniciales en trabajos futuros nos daría un mejor panorama de la ruta de cuasi periodicidad, la transición caos-hipercaos, el fenómeno de sincronización, la intermitencia *on-off*, etc.

Una de las posibles extensiones que podría tener este trabajo es abordar el estudio de los atractores críticos desde el enfoque de las transiciones de fase dinámicas de Mori. La gran motivación se encuentra en que este método proporcionaría un mecanismo para conocer, *a priori*, el valor del parámetro  $q$  (que aporta información sobre la clase de universalidad a la que el sistema pertenece), el cual sumado a la sensibilidad a las condiciones iniciales, nos permitiría conocer el valor del exponente de Liapunov generalizado. Utilizar el esquema de Mori en diferentes sistemas podría darnos pauta a estudiar problemas más complicados.

# Bibliografía

- [1] Eckmann J. P. y Ruelle D. *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Rev. Mod. Phys. Vol 57 617 (1985)
- [2] Schuster H. G y Just W. *Deterministic Chaos: An Introduction*. 4 ed. Wiley-VCH (2005).
- [3] Cvitanovic, P. ed. *Universality in Chaos*. 2 ed. Ed Adam Hilger (1989).
- [4] Baldovin, F. y Robledo, A. *Parallels between the dynamics at the noise-perturbed onset of chaos in logistic maps and the dynamics of glass formation*. Phys. Rev. E 72 335 (2005)
- [5] Robledo A. *Critical attractors and q-statistics*. Europhysics News 36, 214-218 (2005).
- [6] Robledo, A. *Incidence of nonextensive thermodynamics in temporal scaling at Feigenbaum points*. Physica A 370 449-460 (2006)
- [7] Anania, G. y Politi, A. *Dynamical Behaviour at the Onset of Chaos*. Europhys. Lett 7 (1988)
- [8] Grassberger, P. y Scheunert, M. *Some More Universal scaling Laws for Critical Mappings*. J. Stat. Phys. 26 (1986)
- [9] Schneider, T. , Politi, A. y Würtz, D. *Resistance and Eigensates in a Tight-Binding Model with Quasiperiodic Potential*. Z. Phys. B 66 (1987)
- [10] Tsallis, C., Plastino, A. R. y Zheng, W. M. *Power-law Sensitivity to Initial Conditions-New Entropic Representation* Chaos, Solitons and Fractals 8, 885 (1997).
- [11] Baldovin, F. y Robledo, A. *Nonextensive Pesin identity: Exact re-normalization group analytical results for the dynamics at the edge of chaos of the logistic map*. Phys. Rev. E 69 (2004)

- [12] Pikovsky, A., Rosenblum, M. y Kurths, J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Ed. Cambridge University Press (2003)
- [13] Kapitaniak T., Thylwe K. E., Cohen I. y Wjewoda J. *Chaos-hyperchaos transition*. Chaos, Solitons & Fractals 5 (10), 2003 (1995)
- [14] Gardini L., Abraham R., Record R. J. y Fournier-Prunaret D. *A double logistic map*. Int. J. Bifurcations and Chaos. Vol. 4, No. 1 (1994)
- [15] Feigenbaum, J. M. *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*. J. Stat. Phys. 19 No. 1 25-52 (1978).
- [16] Feigenbaum, M. J. *The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformation*. J. Stat. Phys 21 669-706 (1979)
- [17] Feigenbaum, M. J. *The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems*. Comm. Math. Phys. 77 65-86 (1980)
- [18] Hu, B. y Rudnick, J. *Exact Solutions to the Feigenbaum Renormalization-Group Equations for Intermittency*. Phys. Rev. Lett. 84 1645 (1982)
- [19] Feigenbaum, M. J., Kadanoff, L. P y Shenker, S. J. *Quasiperiodicity in dissipative system: a renormalization group analysis*. Physica D 5 370-386 (1982)
- [20] Cvitanovic, P., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P. y Procaccia, I. *Renormalization, Unstable Manifolds and the Fractal Structure of Mode Locking*. Phys. Rev. Lett. 55 343 (1985)
- [21] Baldovin, F. y Robledo, A. *Sensitivity to initial conditions at bifurcations in one-dimensional nonlinear maps: Rigorous nonextensive solutions*. Europhys. Lett 60 pp. 518-524 (2002)
- [22] Gaspard, P. y Wang, X.J. *Sporadicity: Between periodic and chaotic dynamical behaviors*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 85 4591-4595 (1988)
- [23] Robledo, A. *The renormalization group and optimization of non-extensive entropy: criticality in non-linear one-dimensional maps*. Physica A 314 437-441 (2002)
- [24] Baldovin, F. y Robledo, A. *Universal renormalization-group dynamics at the onset of chaos in logistic maps and nonextensive statistical mechanics*. Phys. Rev. E. 66 (2002).
- [25] Robledo, A. *Universal glassy dynamics at noise-perturbed onset of chaos: a route to ergodicity breakdown*. Phys. Lett. A 328 467 (2004)

- [26] Hernández-Saldaña, H. y Robledo, A. *Fluctuating dynamics at the quasiperiodic onset of chaos, Tsallis q-statistics and Mori's q-phase thermodynamics*. Physica A 370 286-300 (2006)
- [27] Mori, H., Hata, H., Horita, T. y Kobayashi, T. *Statistical Mechanics of Dynamical Systems*. Prog. Theor. Phys. Supp. No. 99 (1989)
- [28] Mayoral, E. y Robledo, A. *Tsallis'q index and Mori's q phase transitions at the edge of chaos*. Phys. Rev. E 72 026209 (2005)
- [29] Latora, V. y Baranger, M. *Kolmogorov-Sinai Entropy Rate versus Physical Entropy*. Phys. Rev. Lett. 82. 520 (1999)
- [30] Hogg T y Huberman B. A. *Generic behavior of coupled oscillators*. Phys. Rev. A 29, 275-281 (1984).
- [31] LLoyd A. L *The coupled logistic map: A simple model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics*. J. thero. Biol. 173, 217-230 (1995).
- [32] King R, Huberman B. A y Barchas J. in *Synergetics of the Brain*. ed Haken H (Springer, Berlin) (1983).
- [33] López-Ruiz R. y Fournier-Prunaret *Three logistic models for the ecological y economic interaction: symbiosis, predator-prey and competition* arXiv:nlin/0605029
- [34] Kaneko K. *Transition from torus to chaos accompanied by frequency lockings with symmetry breaking*. Prog. Theor. Phys 69 No. 5 (1983)
- [35] Rössler O. E. *An equation for hyperchaos*. Phys. Lett. A 71, 155-157 (1979)
- [36] Abraham R. H, Gardini L y Mira C. *Chaos in Discrete Dynamical System: A visual introduction in 2 dimensions*. Ed. Springer-Verlag (1997)
- [37] Sakaguchi H y Tomita K *Bifurcations of the coupled logistic map*. Prog. Theor. Phys 78 No. 2 (1987)
- [38] Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S. y Yorke, J. A. *Strange Atractors That are not Chaotic*. Physica D 13 261 (1984)
- [39] Fujisaka, H. y Yamada, T. *A New Intermittency in Coupled Dynamical System*. Prog. Theor. Phys. 74 918 (1985)
- [40] Ott, E y Sommerer, J.C. *Blowout Bifurcations: The Occurrence of Riddled Basins and On-Off Intermittency* Phys. Lett. A 188, 39 (1994)



- [41] Alexander, J. C., Yorke, J. A., You, Z. y Kan, I. *Riddled Basins*. Int. J. Bifurcations and Chaos. 795 (1992)
- [42] Heagy, J. F., Platt, N. y Hammel, S. M. *Characterization of on-off Intermittency*. Phys. Rev E 49, 1140 (1994)
- [43] Alligood K.T, Sauer T. D y Yorke J. A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. 3 ed. Ed. Springer (2000)
- [44] Robinson C. *Dynamical System: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. 2 ed. Ed CRC Press (1999)
- [45] Geist K. , Parlitz U. y Lauteborn W. *Comparison of Different Methods for Computing Lyapunov Exponents*. Prog. Theor. Phys 83 No. 5 (1990)
- [46] Rangarajan G., Habib S. y Ryne R. D. *Lyapunov Exponents without Rescaling and Reorthogonalization*. Phys. Rev. Lett. 80 No. 17 (1998)
- [47] Christiansen F. y Rugh H. H *Computing Lyapunov spectra with continuous Gram-Schmidt orthonormalization*. Nonlinearity 10, 1063 (1997)
- [48] Habib S. y Ryne R. D *Symplectic Calculation of Lyapunov Exponents*. Phys. Rev. Lett. 74 No. 1 (1995)
- [49] Wolf A., Swift J. B, Swinney H. L y Vastano A. *Determining Lyapunov Exponents From A Time Series* Physica 16D 285 (1985)
- [50] Se utilizó el código de precisión arbitraria MAPM para C++ (<http://www.tc.umn.edu/~ringx004/mapm-main.html>)
- [51] Feit S. D. *Characteristic Exponents and Strange Attractors*. Commun.math. Phys 61, 249-260 (1978)
- [52] <http://sprott.physics.wisc.edu/phys505/lect05.htm>. Página personal de Sprott J. C.
- [53] Livi, R. Martínez-Mekler, G. y Ruffo, S. *Periodic orbits and long transients in coupled map lattices*. Physica D 45 452-460