Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

MEDIDA EN GRUPOS TOPOLÓGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:

SANDRA PALAU CALDERÓN

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

2010

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del alumno Palau Calderón Sandra 56790373 Universidad Nacional Autónoma de Mexico Facultad de Ciencias Matemáticas 406008862
2. Datos del tutor Dr. Guillermo Grabinsky Steider
3. Datos del sinodal 1 Dr. Sergey Antonyan
4. Datos del sinodal 2 M. en C. Ángel Manuel Carrillo Hoyo
5. Datos del sinodal 3 Dr. Francisco Marcos López García
6. Datos del sinodal 4 M. en C. Julio César Cedillo Sánchez
7. Datos del trabajo escrito. Medida en grupos topológicos. 119 p. 2010

Índice general

Introducción

Una de las propiedades más útiles de la medida de Lebesgue λ en $\mathbb{R}$ es que es invariable bajo traslaciones. Es decir, dado un conjunto medible E y $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda(E + x) = \lambda(E).$$

El hecho que esta propiedad caracterice a la medida de Lebesgue puede extenderse a un grupo topológico localmente compacto. En esta tesis se verá que todo grupo localmente compacto G poseé una medida que es invariante bajo traslaciones.

Los grupos topológicos fueron considerados por primera vez por Sophus Lie (1842-1899) en el caso particular de grupos con una estructura de n-variedad diferencial cuyas operaciones son funciones analíticas. A inicios del siglo XX, David Hilbert (1862-1943) y Luitzen Brouwer (1881-1966) empezaron a estudiar grupos topológicos más generales.
En el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 Hilbert propuso una lista de 23 problemas. El problema número cinco fue de gran importancia, y preguntaba que si todo grupo topológico localmente compacto era un grupo analítico. Este problema fue resuelto afirmativamente en 1952 por A. Gleason (1921-2008), Montgomery (1909-1992) y Zippin (1905-1995).
Entre 1900 y 1952, los matemáticos se esforzaron por crear herramientas necesarias para poder dar solución a esta problema. Una de las conjeturas formuladas durante ese periodo era la existencia de una medida invariante en un grupo.

En 1933 Alfred Haar (1885-1933) dio un paso fundamental al probar la existencia (pero no la unicidad) de una medida invariante bajo traslaciones izquierdas en cualquier grupo compacto y separable. Debido a esto, a las medidas invariantes bajo traslaciones se les llama medidas de Haar.
En el mismo año, John von Neumann (1903-1957) utilizó el resultado de Haar para resolver el quinto problema de Hilbert para grupos compactos localmente euclideanos y al año siguiente demostró la existencia y unicidad de una medida invariante en un grupo compacto.
El primero en demostrar la existencia y unicidad de la medida invariante en grupos localmente compactos fue André Weil (1906-1998), sin embargo la prueba de su existencia estaba basada en el Axioma de Elección en la forma del Teorema de Tychonoff por lo que fue criticada.
Henri Cartan (1904-2008) dio otra prueba de la existencia y unicidad de una medida invariante en un grupo localmente compacto. Esta prueba no fue criticada ya que no

usaba el axioma de elección. La medida se encontraba como un límite basado en el criterio de convergencia de Cauchy para redes, el cual garantiza simultáneamente la existencia y la unicidad de la medida. Sin embargo esta prueba es más larga y menos simple que la dada por Weil.

A lo largo de este trabajo estudiaremos a las medidas de Haar. Los primeros dos capítulos son de carácter introductorio y se dan todas las propiedades que se necesitarán a lo largo de la tesis. Se presentan algunos ejemplos de grupos topológicos, a los que más adelante se les calculará la medida de Haar.
El tercer capítulo es una parte importante de la tesis. Se dan cuatro demostraciones de la existencia y unicidad de una medida de Haar izquierda μ. Las tres primeras demostraciones son constructivas. La primera encuentra la medida explícita y sigue las ideas originales de Haar.
La segunda y tercera prueba tienen un inicio común, en ambas se encuentra la integral y por medio del Teorema de Representación de Riesz se encuentra la medida. La segunda es debida a A. Weil, y tanto en ésta como en la anterior se hace uso del axioma de elección en la forma del Teorema de Tychonoff. La tercera prueba es debida a H. Cartan.
La última, que no es constructiva, sigue las ideas de J. von Neumann y nuevamente hace uso del axioma de elección en la forma del Principio Maximal de Hausdorff. Para esta prueba se utiliza el Teorema de punto fijo de Kakutani.

En el cuarto capítulo se demuestran algunas propiedades de la medida de Haar. Se encuentran caracterizaciones entre las propiedades topológicas del grupo y las propiedades de la medida de Haar. Además se presenta la función modular y una relación entre la medida de Haar izquierda y la medida de Haar derecha por medio de tal función. Finalmente se dan ejemplos de conjuntos con medida izquierda finita y derecha infinita y una construcción de un conjunto no medible, la cual sigue las ideas de Vitali.
La primera sección del capítulo cinco generaliza un teorema de Lebesgue en $\mathbb{R}$ el cual afirma que un conjunto medible en $\mathbb{R}$ se comporta localmente como un intervalo. La segunda sección nos da una caracterización para que una medida de Borel ν sea absolutamente continua respecto a la medida de Haar μ. También se da una caracterización para que ν sea singular respecto a μ.

Finalmente, el último capítulo se divide en dos secciones. La primera de ellas trata sobre el espacio de las funciones integrables $\mathscr{L}^1(G)$, se define la convolución de funciones y se demuestra que $\mathscr{L}^1(G)$ es un álgebra de Banach con está operación. Se caracterizan propiedades del grupo G en términos de propiedades del álgebra $\mathscr{L}^1(G)$. Además se demuestra que esta álgebra no necesariamente admite unidad para la convolución pero se proporciona un buen sustituto.
La segunda sección trata sobre el espacio de las medidas con signo finitas y semiregulares $M(G)$. Se define la convolución de medidas y se demuestra que $M(G)$ es un álgebra de Banach. Asimismo se relacionan la convolución de medidas y la convolución de funciones. Por último se demuestra que el espacio de las medidas absolutamente continuas con respecto a la medida μ, $M_a(G)$, forma un ideal bilateral en $M(G)$ y que

existe un homomorfismo biyectivo e isométrico entre $\mathscr{L}^1(G)$ y $M_a(G)$.

El Apéndice B tiene por objetivo distinguir tres clases de subconjuntos que aparecen de manera natural en un espacio localmente compacto y Hausdorff. Estudiar las relaciones entre ellos, las medidas y sus propiedades de regularidad. Por considerarlas de interés, se incluyen todas las pruebas. Por último se demuestra que no necesariamente la medida producto de medidas regulares es regular, pero que siempre existe una única medida regular que la extiende.

Capítulo 1

Medida en espacios localmente compactos.

Este capítulo es de carácter introductorio y está dividido en dos partes. En la primera parte se proporcionan las definiciones y nociones topológicas básicas e indispensables para estudiar espacios localmente compactos que luego se aplicarán a grupos topológicos.

En la segunda parte se discuten brevemente las medidas de Borel semiregulares y se dan algunas condiciones suficientes para que una medida de Borel semiregular sea regular. El Ejemplo 1.21 resulta ser de especial interés cuando el espacio no es σ-compacto y será retomado más adelante en el Capítulo 4.

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico, para $x \in X$, definimos la familia de vecindades de x como*

$$\mathscr{N}_x = \{U \subset X \mid \text{existe un conjunto abierto } V \text{ tal que } x \in V \subset U\}$$

*A cada $U \in \mathscr{N}_x$ la llamamos **vecindad** de x.*

Notación. Dado $E \subset X$ denotamos al interior de E como E°.

Definición 1.2. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **localmente compacto** si cada punto tiene una vecindad abierta cuya cerradura es compacta.*

Proposición 1.3. *Sean X un espacio de Hausdorff y K y L dos conjuntos compactos ajenos. Entonces existen U, V conjuntos abiertos ajenos que los contienen.*

Demostración. Sea K y L dos compactos ajenos y $x \in K$.
Ya que X es un espacio de Hausdorff, para toda $y \in L$ existen vecindades abiertas y ajenas $U_{x,y}$ y $V_{x,y}$ tales que $x \in U_{x,y}$ y $y \in V_{x,y}$.
Como L es compacto y $\{V_{x,y} \mid y \in L\}$ es una cubierta abierta de L, existe una subcubierta finita $V_{x,1}, \cdots V_{x,n}$. Sean

$$U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,i} \quad \text{y} \quad V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,i}$$

Entonces U_x y V_x son ajenas, $L \subset V_x$ y $x \in U_x$ para cada $x \in K$.
Ya que $\{U_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta de K que es compacto, existe una subcubierta finita $U_{x_1}, \cdots U_{x_m}$. Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \quad \text{y} \quad V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}$$

Entonces U y V son dos conjuntos abiertos y ajenos tales que $K \subset U$ y $L \subset V$. $\square$

Proposición 1.4. *Sean X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $x \in X$ y U un conjunto abierto tal que $U \in \mathscr{N}_x$. Entonces existe $V \in \mathscr{N}_x$ un conjunto abierto, con la propiedad que $\overline{V} \subset U$ y $\overline{V}$ es compacto.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $U \in \mathscr{N}_x$ un conjunto abierto. Como X es localmente compacto, existe W un conjunto abierto, $W \in \mathscr{N}_x$ con $\overline{W}$ compacto.
Definimos $W_1 = W \cap U$ entonces $W_1 \subset U$ y $\overline{W_1}$ es compacta. Ya que $\{x\}$ y $\overline{W_1} \setminus W_1$ son conjuntos compactos ajenos, existen conjuntos abiertos ajenos $V_1,\ V_2$ con $x \in V_1$ y $\overline{W_1} \setminus W_1 \subset V_2$.
Sea $V = W_1 \cap V_1$ entonces $\overline{V}$ es compacto. Si existiera $y \in \overline{V} \setminus U$, $y \notin W_1$ por lo tanto $y \in \overline{W_1} \setminus W_1 \subset V_2$, lo que es una contradicción. Así pues, $\overline{V} \subset U$. $\square$

Proposición 1.5. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $K \subset X$ un conjunto compacto y U un conjunto abierto con $K \subset U$. Entonces existe V un conjunto abierto tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ con $\overline{V}$ compacto.*

Demostración. Por la proposición anterior, dada $x \in K$, existe V_x un conjunto abierto con cerradura compacta tal que $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$.
Como K es un conjunto compacto existen $V_1, \cdots, V_n$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, entonces $\overline{V}$ es compacta y $\overline{V} \subset U$. $\square$

Lema 1.6. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $K \subset X$ un conjunto compacto y U_1, U_2 dos conjuntos abiertos que cumplen que $K \subset U_1 \bigcup U_2$. Entonces existen $K_1,\ K_2$ conjuntos compactos tales que $K = K_1 \cup K_2$ y $K_i \subset U_i$ con $i = 1, 2$.*

Demostración. Los conjuntos $L_1 = K \setminus U_1$ y $L_2 = K \setminus U_2$ son compactos ajenos, por lo que existen conjuntos abiertos y ajenos V_1 y V_2 que los separan. Entonces los conjuntos $K_1 = K \setminus V_1$ y $K_2 = K \setminus V_2$ son compactos y además

$$K_i = K \setminus V_i \subset K \setminus L_i = K \setminus (K \setminus U_i) = U_i \cap K$$

$$K_1 \bigcup K_2 = K_1 \setminus V_1 \bigcup K \setminus V_2 = K \setminus (V_1 \bigcap V_2) = K.$$

$\square$

Haciendo uso del principio de inducción sobre el número de conjuntos abiertos, es claro el siguiente corolario.

Corolario 1.7. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $K \in X$ un conjunto compacto y $U_1, \cdots, U_n$ conjuntos abiertos tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Entonces existen $K_1, \cdots, K_n$ conjuntos compactos tales que $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ y $K_i \subset U_i$ con $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

Definición 1.8. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definimos **el soporte de** f, denotado por $sop(f)$, como $sop(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.*

Definición 1.9. *Sea X un espacio topológico, definimos*

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}(X) &= \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}. \\
\mathscr{K}(X) &= \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua y sop(f) es compacto}\}. \\
\mathscr{K}^+(X) &= \{f \in \mathscr{K}(X) \mid f \geq 0\}, \\
\mathscr{K}_*^+(X) &= \{f \in \mathscr{K}(X) \mid f \geq 0, f \not\equiv 0\}.
\end{aligned}$$

Definición 1.10. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **normal** si es de Hausdorff, y para E y F conjuntos cerrados y ajenos existen U y V conjuntos abiertos ajenos tales que $E \subset U$ y $F \subset V$.*

Para la demostración del siguiente teorema puede verse ([10],p. 207).

Teorema 1.11. ***(de Urysohn)*** *Si X es normal y E y F son cerrados y ajenos, entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(E) = 1$ y $f(F) = 0$.*

Proposición 1.12. *Sean X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $K \subset X$ un conjunto compacto y U un conjunto abierto que contiene a K. Entonces existe una función $f \in \mathscr{K}(X)$ con las siguientes propiedades $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ y $sop(f) \subset U$.*

Demostración. Por la Proposición 1.5 existe un conjunto abierto V que cumple que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ con $\overline{V}$ compacto. Por el teorema de Urysohn, existe una función continua $g : \overline{V} \to [0, 1]$ con $g(x) = 1$ si $x \in K$ y $g(x) = 0$ si $x \in \overline{V} \setminus V$.
Sea $f : X \to [0, 1]$ definida como $f(x) = g(x)$ si $x \in \overline{V}$ y $f(x) = 0$ si $x \notin \overline{V}$. Entonces f es continua y cumple que $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ y $sop(f) \subset U$. □

Definición 1.13. *Dadas dos funciones $f, g : X \to \mathbb{R}$ definimos*

$$f \wedge g : X \to \mathbb{R} \quad \text{como } (f \wedge g)(x) = min\{f(x), g(x)\}$$

$$f \vee g : X \to \mathbb{R} \quad \text{como } (f \wedge g)(x) = max\{f(x), g(x)\}$$

Proposición 1.14. *Sean X un espacio localmente compacto y Hausdorff, $f \in \mathscr{K}(X)$ y $U_1, \cdots, U_n$ abiertos tales que $sop(f) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Entonces existen funciones $f_i \in \mathscr{K}(X)$ tales que $sop(f_i) \subset U_i$ y $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$.*

Demostración. Si $n = 2$, por el Lema 1.6, existen compactos V_1 y V_2 que cumplen que $sop(f) = V_1 \bigcup V_2$ y $V_i \subset U_i$. Por la Proposición 1.12 podemos construir funciones $h_i : X \to [0,1]$, $h_i \in \mathscr{K}(X)$ tales que $\chi_{K_i} \leq h_i \leq \chi_{U_i}$, $i = 1, 2$.
Sean $g_1 = h_1$ y $g_2 = h_2 - (h_1 \wedge h_2)$ entonces $g_1, g_2 \geq 0$ y $sop(g_i) \subset U_i$.
Observamos que

$$g_1 + g_2 = h_1 + h_2 - (h_1 \wedge h_2) = h_1 \vee h_2 = 1 \qquad \text{si } x \in sop(f).$$

Sean $f_i = fg_i$, $i = 1, 2$ así pues $f_1 + f_2 = f$, $sop(f_i) \subset U_i$ y $f_i \in \mathscr{K}(X)$.
Terminamos la prueba usando el principio de inducción. $\square$

Definición 1.15. *Sea X un espacio topológico localmente compacto. Definimos la σ-álgebra de Borel como la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos. Y la denotamos por $\mathscr{B}(X)$.*

Definición 1.16. *Sea X un espacio de Hausdorff. Una función $\mu : \mathscr{B}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una* ***medida de Borel*** *si*
a) $\mu(E) \geq 0$ *para todo conjunto* $E \in \mathscr{B}(X)$.
b) $\mu(\emptyset) = 0$.
c) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, *si* $\{E_n\}$ *es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos.*

Definición 1.17. *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff y sea μ una medida de Borel. Decimos que μ es* ***semi-regular*** *si*

1. $\mu(K) < \infty$, *para todo* $K \subset X$ *conjunto compacto.*
2. $\mu(E) = inf\,\{\mu(U) |\, E \subset U,\, U \text{ es abierto}\}$ *para cada* $E \in \mathscr{B}(X)$.
3. $\mu(U) = sup\,\{\mu(K) |\, K \subset U,\, K \text{ es compacto}\}$ *para cada abierto* $U \subset X$.

Decimos que μ es ***regular*** *si $\mu(E) = sup\,\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ es compacto}\}$ para cada $E \in \mathscr{B}(X)$.*

Definición 1.18. *Sea f una función definida en X y U un subconjunto de X. Denotamos por $f \prec U$, si $0 \leq f \leq \chi_U$.*

Lema 1.19. *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, μ una medida de Borel semi-regular y U un conjunto abierto. Entonces*

$$\mu(U) = sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathscr{K}(X), f \prec U\right\}$$

Demostración. Si $f \leq \chi_U$ entonces $\int f d\mu \leq \int \chi_U d\mu = \mu(U)$, por lo tanto

$$\mu(U) \geq sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathscr{K}(X), f \prec U\right\}.$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \mu(U)$ como μ es semi-regular, existe un conjunto compacto $K \subset U$ tal que $\alpha < \mu(K)$. Por la Proposición 1.12 existe una función $f \in \mathscr{K}(X)$ tal que $\chi_K \leq f \leq \chi_U$, así pues, $\alpha < \int f d\mu$ de donde se sigue el resultado. $\square$

Proposición 1.20. *Sean X un espacio de Hausdorff, S una σ-álgebra que contiene a $\mathscr{B}(X)$ y μ una medida semi-regular sobre S. Entonces*

$$\mu(E) = sup\left\{\mu(K) : K \subset E \text{ y } K \text{ es compacto}\right\}. \tag{1.1}$$

para todo conjunto σ-finito $E \in S$.

Demostración. Supongamos que $\mu(E) < \infty$.
Por la semi-regularidad de μ, dado $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto V con $E \subset V$ tal que $\mu(V) < \mu(E) + \epsilon$. Como $\mu(V \setminus E) = \mu(V) - \mu(E) < \epsilon$ podemos escoger un conjunto abierto W tal que $\mu(W) < \epsilon$ y $V \setminus E \subset W$.
Ya que μ es semi-regular, existe un compacto L tal que $L \subset V$ y $\mu(L) > \mu(V) - \epsilon$.
Observamos que $L \setminus W$ es compacto, está contenido en E y además cumple que

$$\mu(L \setminus W) = \mu(L) - \mu(L \cap W) > \mu(V) - 2\epsilon \geq \mu(E) - 2\epsilon$$

Por lo tanto se cumple la ecuación 1.1.

Si $\mu(E) = \infty$.
Como E es σ-compacto existen $E_n \in S$, $n \geq 1$ con medida finita tales que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Sea $M > 0$, afirmamos que existe K compacto con $K \subset E$ y $\mu(K) > M$.
Debido a que $\mu(E) = \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) > M + 2$, usando el argumento anterior para $\bigcup_{n=1}^{N} E_n$ y $\epsilon = 1$, existe un conjunto compacto K contenido en la unión, tal que

$$\mu(K) > \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\Big) - 2 > M + 2 - 2 = M.$$

De donde se sigue el resultado. $\square$

En el siguiente ejemplo mostraremos que en la proposición anterior es necesario pedir que E sea σ-finito.

Ejemplo 1.21. *Sea $S = \mathbb{R}^2$ con la siguiente topología τ: U es abierto si y sólo si $U_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in U\}$ es abierto para toda $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que (S, τ) es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff.*
Primero caracterizamos los conjuntos compactos. Sea $K \subset S$ un compacto, como $\{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ es una cubierta abierta de K, la única forma de que exista una subcubierta finita es que $\{x : K_x \neq \emptyset\}$ sea finito, por lo tanto $K = \{x_1\} \times V_1 \bigcup \cdots \bigcup \{x_n\} \times V_n$. Además V_i tiene que ser compacto para toda $i = 1, \cdots, n$.

Sea $(x, y) \in S$ y V una vecindad de y con cerradura compacta en $\mathbb{R}$. Entonces $\{x\} \times V$ es una vecindad de (x, y) con cerradura compacta.
Para demostrar que es Hausdorff, sean $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in S$, si $x_1 \neq x_2$ entonces $U_1 = \{x_1\} \times \mathbb{R}$ y $U_2 = \{x_2\} \times \mathbb{R}$ son conjuntos abiertos y ajenos que los contienen. Si

$x_1 = x_2 = x$, sean V_1 y V_2 dos abiertos que separen a y_1 y a y_2, entonces $\{x\} \times V_1$ y $\{x\} \times V_2$ son los abiertos que buscamos.

Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \in \mathscr{K}(S)$, para que f sea continua se debe cumplir que para toda $x \in \mathbb{R}$, $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f_x(y) = f(x, y)$ es continua, además $sop(f)$ debe ser compacto por lo que existen $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ y $V_1, \cdots, V_n$ compactos en $\mathbb{R}$ tales que $sop(f) = \{x_1\} \times V_1 \bigcup \cdots \bigcup \{x_n\} \times V_n$.

Definimos $I : \mathscr{K}(S) \to \mathbb{R}$ como sigue $I(f) = \sum\limits_x \int f_x d\lambda$, veamos que I es una funcional lineal positiva. Como $sop(f_{x_i}) \subset V_i$ para toda i tenemos que $\int f_{x_i} d\lambda < \infty$, además la suma es finita por lo tanto $I(f) < \infty$. Por lo tanto está bien definida.
Sean $f,\ g \in \mathscr{K}(S)$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces se tiene que

$$I(af + g) = \sum_x \int (af + g)_x d\lambda = \sum_x \int af_x + g_x d\lambda = aI(f) + I(g)$$

Es claro que es positiva.

Sea μ la medida semi-regular asociada a I (ver Teorema de Riesz C.1). Dado un conjunto abierto U, se tiene que $f \prec U$ si y sólo si $f_x \prec U_x$ para toda x. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu(U) &= sup\left\{I(f) : f \in \mathscr{K}(S),\ f \prec U\right\} \\
&= sup\left\{\sum_x \int f_x d\lambda : f \in \mathscr{K}(s),\ f \prec U\right\} \\
&= \sum_x sup\left\{\int f_x d\lambda : f_x \subset \mathscr{K}(\mathbb{R}),\ f_x \prec U_x\right\} \\
&= \sum_x \lambda(U_x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto μ tiene la siguiente forma

$$\mu(E) = \begin{cases} \sum\limits_x \lambda(E_x) & \text{si } E_x \neq \emptyset \text{ a lo más en un número contable de } x, \\ \infty & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea $E = [0, 1] \times \{1\}$ entonces $\mu(E) = \infty$. Por otro lado si $K \subset E$ es compacto, K es de la forma $K = \{x_1, \cdots, x_n\} \times \{1\}$, por lo que $\mu(K) = \sum\limits_1^n \lambda(\{1\}) = 0$. Así pues

$$\mu(E) \neq sup\left\{\mu(K)) : K \subset E \text{ y } K \text{ es compacto}\right\}.$$

Capítulo 2

Grupos topológicos.

Aquí iniciamos propiamente el estudio de grupos topológicos localmente compactos. Se proporcionan algunos ejemplos sencillos a los cuales se les calculará sus medida de Haar al final del Capítulo 3. La estructura doble de un grupo topológico enriquece considerablemente la teoría y hace que un grupo topológico cumpla diversos "axiomas de separación" y facilite las demostraciones de algunas de sus propiedades, por ejemplo la continuidad de funciones con soporte compacto implica la continuidad uniforme.
Se prueba que todo grupo localmente compacto contiene un subgrupo abierto, cerrado y σ-compacto, este resultado de carácter técnico nos permitirá mostrar que toda función integrable tiene soporte σ-compacto.

Definición 2.1. *Un **grupo topológico** G es un grupo provisto de una topología tal que la operación multiplicación $\bullet : G \times G \to G,\ \bullet(g,h) = gh$, y la operación inversión $\iota : G \to G,\ \iota(g) = g^{-1}$ son continuas.*
Denotamos al elemento neutro por e.

Ejemplo 2.2. *Los siguientes son ejemplos de grupos topológicos localmente compactos.*

1. *Sea G un grupo. Definimos la topología discreta τ como la topología en la que cada punto es un conjunto abierto. Entonces (G, τ) es un grupo topológico localmente compacto.*

2. *$\mathbb{R}$ con la topología y la operación suma es un grupo topológico localmente compacto.*

3. *$\mathbb{R}^n$ con la topología y la operación suma es un grupo topológico localmente compacto.*

4. *$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ con la operación multiplicación y la topología relativa a $\mathbb{R}$ es un grupo topológico localmente compacto.*

5. *$\mathbb{S}^1$ el círculo unitario con la topología relativa a $\mathbb{C}$ y la multiplicación usual es un grupo topológico compacto.*

6. *$\mathscr{GL}(n)$, la colección de todas las matrices invertibles de $n \times n$, con la multiplicación usual de matrices, la identidad como elemento neutro y la topología relativa a $\mathbb{R}^{n\times n}$ es un grupo topológico localmente compacto.*

Observación. En un grupo topológico G, para cada $s \in G$ fijo, la traslación por la derecha $R_s(x) = xs$ y la traslación por la izquierda $L_s(x) = sx$ son mapeos biyectivos y continuos, de hecho $R_s^{-1} = R_{s^{-1}}$ y $L_s^{-1} = L_{s^{-1}}$ por lo que son homeomorfismos.
El mapeo inverso también es un homeomorfismo, además $V \in \mathscr{N}_e$ si y sólo si $V^{-1} \in \mathscr{N}_e$.

Ejemplo 2.3. *Sea* $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}$. *Afirmamos que con el producto usual de matrices, G es un grupo topológico localmente compacto.*

- *Sean* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ *con* $a, c > 0$ *entonces*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

- *Sea* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, *la matriz inversa es*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

- *Las operaciones son continuas.*

- *Es localmente compacto porque la función*

$$\varphi : G \to \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0 \right\}, \qquad \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, b)$$

  es un homeomorfismo.

Definición 2.4. *Sea G un grupo y V una vecindad. Decimos que V es una* ***vecindad simétrica*** *si $V = V^{-1}$.*

Proposición 2.5.

a) Las vecindades simétricas de e forman una base de vecindades.

b) Para toda $U \in \mathscr{N}_e$, existe $V \in \mathscr{N}_e$, tal que $VV \subset U$.

Demostración.

a) Sea $U \in \mathscr{N}_e$ y $V = U \cap U^{-1}$ entonces $V = V^{-1}$, $V \subset U$ y $V \in \mathscr{N}_e$.

b) Por la continuidad de las multiplicación existen W y $\widetilde{V} \in \mathscr{N}_e$ tal que $W\widetilde{V} \subset U$. Definimos $V = W \cap \widetilde{V}$ entonces $VV \subset U$.

□

Proposición 2.6. *Sean G un grupo topológico, $K \subset G$ un conjunto compacto y U un conjunto abierto tal que $K \subset U$. Entonces existen vecindades abiertas V_R y V_L de e, con la propiedad que $KV_R \subset U$ y $V_L K \subset U$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ existen $V_x, W_x \in \mathscr{N}_e$ conjuntos abiertos tales que $xW_x \subset U$ y $V_x V_x \subset W_x$. Como K es compacto y $\{xV_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, existen $x_1, \cdots, x_n$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}$.
Sea $V_R = \bigcap_{i=1}^{n} V_{xi}$. Para $x \in K$ existe x_i tal que $x \in x_i V_{x_i}$, entonces

$$xV_R \subset x_i V_{x_i} V_{x_i} \subset x_i W_{x_i} \subset U.$$

Así pues $KV_R \subset U$. De manera análoga se prueba la existencia de V_L. $\square$

Proposición 2.7. *Sean G un grupo localmente compacto y U una vecindad del neutro. Para cada compacto $F \subset G$ existe $V \in \mathscr{N}_e$ tal que $xVx^{-1} \subset U$ para toda $x \in F$.*

Demostración. Consideramos $W \in \mathscr{N}_e$ una vecindad simétrica tal que $W^3 \subset U$. Por ser F compacto, existen $x_1, \cdots, x_n \in F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} Wx_i$.
Ponemos $V = \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{-1} W x_i \in \mathscr{N}_e$.
Si $x \in F$, $x \in Wx_i$ para alguna $i \in \{1, \cdots, n\}$, por lo cual $x = wx_i$ con $w \in W$. Entonces

$$xVx^{-1} = wx_i V x_i^{-1} w^{-1} \subset wx_i x_i^{-1} W x_i x_i^{-1} w \subset W^3 \subset U.$$

$\square$

Lema 2.8. *Sean G un grupo localmente compacto y H un subgrupo abierto de G. Entonces H es un subgrupo cerrado.*

Demostración. Denotamos $x \sim y$ si $yx^{-1} \in H$. Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia e induce una partición de G, $G = \bigcup_{x \in G} xH$.
Entonces $G \setminus H = \bigcup_{x \in G \setminus H} xH$. xH es abierto para toda $x \in G$ por lo tanto $G \setminus H$ es abierto. Así pues, H es un conjunto cerrado. $\square$

Sin embargo el recíproco del lema no se cumple, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, el eje horizontal, $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, es un subgrupo cerrado bajo la suma usual, porque contiene a todos sus puntos de acumulación pero no es abierto en $\mathbb{R}^2$.

Corolario 2.9. *Si G un grupo localmente compacto que contiene un subgrupo propio abierto, G es disconexo.*

Lema 2.10. *Dado G un grupo localmente compacto existe un subgrupo H abierto, cerrado y σ-compacto.*

Demostración. Por las proposiciones anteriores, existe un conjunto abierto $V \in \mathscr{N}_e$ simétrico y con cerradura compacta.
Definimos $V^n = VV^{n-1}$ para $n \geq 2$. Observamos que V^n es abierto.
Claramente $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V^n$ es un subgrupo de G, además H es abierto por ser unión de conjuntos abiertos y por el lema anterior es cerrado. En consecuencia

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V^n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n} = \overline{H} = H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$$

Por lo tanto H es un conjunto σ-compacto. □

Definición 2.11. *Sea G un grupo topológico. Decimos que G es* ***compactamente generado*** *si existe un compacto K tal que $G = \{e\} \bigcup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (K \cup K^{-1})^n$.*

Lema 2.12. *Sea G un grupo localmente compacto y sea F un conjunto compacto. Entonces existe un subgrupo abierto y cerrado, compactamente generado que contiene a F.*

Demostración. Como $F \cup \{e\}$ es compacto existe un conjunto abierto U con cerradura compacta tal que $F \cup \{e\} \subset U$.
Sea $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U \cup U^{-1})^n$. Por ser unión de abiertos H es abierto y por el Lema 2.8, H es cerrado. Por lo tanto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{U} \cup \overline{U^{-1}})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{(U \cup U^{-1})^n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cup U^{-1})^n} = \overline{H} = H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cup U^{-1})^n$$

En consecuencia, H es compactamente generado. □

Definición 2.13. *Sea G un grupo topológico. Decimos que G es T_0 si dados $x \neq y \in G$ existe un conjunto abierto tal que contiene a uno de los puntos pero no al otro.*

Teorema 2.14. *Sea G un grupo topológico T_0. Entonces G es un espacio regular.*

Demostración. Sea U un conjunto abierto que contenga a e y V una vecindad abierta y simétrica de e tal que $V^2 \subset U$.
Vamos a demostrar que $\overline{V} \subset U$. En efecto toda $x \in \overline{V}$ cumple que $xV \cap V \neq \emptyset$ por lo tanto existen $v_1,\ v_2 \in V$ tales que $xv_1 = v_2$ así pues

$$x = v_2 v_1^{-1} \subset VV^{-1} = V^2 \subset U$$

Entonces G satisface el axioma de regularidad en e y como las traslaciones por la izquierda xe, son homeomorfismos, se tiene que G es regular. □

Corolario 2.15. *Sea G un grupo topológico T_0. Entonces G es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sea $x \neq y \in G$. Ya que G es T_0, sin perder generalidad, existe U un conjunto abierto tal que $x \in U$ y $y \notin U$.
Como G es regular, existe una vecindad cerrada V de x tal que $V \subset U$. Entonces los siguientes conjuntos son los abiertos ajenos que buscábamos

$$U_1 = (V)^\circ \quad \text{y} \quad U_2 = G \setminus V$$

□

Observación En la definición de grupo topológico **no** se pide algún axioma de separación. Sin embargo, de ahora en adelante al referirnos a un grupo topológico, debemos pensar en un grupo topólogico T_0 y por el corolario anterior, **será** un espacio de Hausdorff.

Definición 2.16. *Sea f una función. Decimos que*
*a) **f es continua en** x_0 si para toda $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto V que contiene a e (y depende de x_0) tal que si $x_0 x^{-1} \in V$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*
*b) **f es uniformemente continua** si para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad abierta y simétrica de e tal que si $x^{-1}y \in V$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Proposición 2.17. *Sea G un grupo topológico y $f : G \to \mathbb{R}$ una función. Si $f \in \mathscr{K}(X)$ entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Dada $\epsilon > 0$. Vamos a demostrar que existe un conjunto abierto $V \in \mathscr{N}_e$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $y \in xV$.
Sea $K = sop(f)$. Si $x, y \notin K$ entonces $f(x) = 0 = f(y)$ y la desigualdad se cumple.
Como f es una función continua, para toda $x \in K$, existe un conjunto abierto U_x con $U_x \in \mathscr{N}_e$ tal que si $y \in xU_x$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$.
Tomamos $V_x \in \mathscr{N}_e$, tal que $V_x V_x \subset U_x$.
Entonces existen $x_1, \cdots, x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i V_{x_i}$. Sea V una vecindad simétrica de e, con $V \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$.
Si $x \in K$ y $y \in xV$, existe alguna i tal que $x \in x_i V_{x_i}$, por lo cual

$$y \in xV \subset x_i V_{x_i} V_{x_i} \subset x_i U_{x_i}$$

Asi pues

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \epsilon$$

□

Proposición 2.18. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Borel y $f \in \mathscr{K}(G)$. Entonces las funciones*

$$x \mapsto \int f(yx) d\mu(y) \quad y \quad x \mapsto \int f(xy) d\mu(y)$$

son continuas.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y $x_0 \in G$. Vamos a demostrar que existe un conjunto abierto $U \in \mathscr{N}_{x_0}$ tal que

$$\left| \int f(yx)d\mu(y) - \int f(yx_0)d\mu(y) \right| < \epsilon \quad \text{ para todo } x \in U$$

Sea $K = sop(f)$ y $W \in \mathscr{N}_{x_0}$ un conjunto abierto con cerradura compacta. Dada $x \in W$ la función $y \mapsto f(yx)$ es continua e igual a cero si $y \notin K(\overline{W})^{-1}$.
Si $\mu(K(\overline{W})^{-1}) = 0$ es claro.
En caso contrario, como f es uniformemente continua, para $\widetilde{\epsilon} = \dfrac{\epsilon}{\mu(K(\overline{W})^{-1})}$ existe $V \in \mathscr{N}_e$ un conjunto abierto tal que $|f(s) - f(t)| < \widetilde{\epsilon}$ si $s \in tV$.
Definimos $U = W \cap x_0V$, dadas $x \in U$ y $y \in G$ tenemos que $yx \in yx_0V$, entonces

$$\left| \int f(yx)\mu(dy) - \int f(yx_0)\mu(dy) \right| \leq \int |f(yx) - f(yx_0)|\mu(dy) \leq \widetilde{\epsilon}\mu(K(\overline{W}^{-1})) = \epsilon.$$

$\square$

Capítulo 3

Existencia y unicidad de la medida de Haar.

En este capítulo se presentarán cuatro pruebas distintas de la existencia y unicidad de la medida de Haar. La primera de ellas sigue las ideas originales de Haar. En la segunda prueba se construye el concepto equivalente de una integral de Haar y es debido a A. Weil. En ambas pruebas el axioma de elección es usado en su forma del Teorema de Tychonoff.
La tercera prueba, es debida a H. Cartan, evita el uso del axioma de elección, pero la demostración se vuelve muy laboriosa. La cuarta prueba sigue las ideas de J. von Neumann pero hace uso de el Teorema de punto fijo de Kakutani que nuevamente requiere del axioma de elección en su forma del Principio Maximal de Hausdorff.
Por último se exhiben explícitamente las medidas de Haar de los ejemplos del capítulo anterior.

Definición 3.1. *Sea G un grupo localmente compacto. Decimos que una medida de Borel semi-regular positiva μ es*
a) Una ***medida de Haar izquierda****, si es invariante bajo traslaciones izquierdas, es decir, $\mu(xA) = \mu(A)$ para toda $A \in \mathscr{B}(G)$, $x \in G$.*
b) Una ***medida de Haar derecha****, si es invariante bajo traslaciones derechas, es decir, $\mu(Ax) = \mu(A)$ para toda $A \in \mathscr{B}(G)$, $x \in G$.*

Definición 3.2. *Sea G un grupo, x un elemento de G y $f : G \to \mathbb{R}$ una función. Definimos la* ***traslación izquierda*** *de f con x, denotada por ${}_xf$ como ${}_xf(t) = f(xt)$; la* ***traslación derecha****, denotada por f_x, como $f_x(t) = f(tx^{-1})$.*
Y la función $\widehat{f}$ definida como $\widehat{f}(x) = f(x^{-1})$.

Lema 3.3. *Sea $f : G \to \mathbb{R}$ una función, entonces para toda $s, t \in G$, se cumple ${}_s({}_tf) =_{st} f$.*

Demostración. Sean $f : G \to \mathbb{R}$ una función y x, s, $t \in G$. Observamos que

$$ {}_s({}_tf)(x) =_s f(tx) = f(stx) =_{st} f(x). $$

□

Teorema 3.4. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces existe una única medida de Haar izquierda, salvo por multiplicación por una constante positiva.*

Se darán distintas versiones de la demostración de este teorema. En todas las pruebas salvo la primera, no se encontrará explícitamente la medida sino que se construirá una integral de Haar, ya que utilizando el Teorema de Representación de Riesz obtendremos una única medida salvo por multiplicación por constantes positivas.
Las primeras tres se demostrarán en un grupo localmente compacto. En la primera y segunda prueba se utilizará el axioma de elección en la versión del Teorema de Tychonoff. Y en la tercera lo que se utilizará es el concepto de redes.
La última se realizará en un grupo compacto y se aplicará el axioma de elección en la versión del Teorema de maximalidad de Hausdorff.

3.1. Primera prueba.

Empezaremos la primera prueba del Teorema 3.4. En ésta encontraremos una medida explícita.

Demostración. Sea $K \in G$ un conjunto compacto y $V \in G$ un conjunto con interior no vacío, entonces $\{xV^\circ | x \in G\}$ es una cubierta abierta de K, por lo que existen $x_1, \cdots, x_n \in G$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i V^\circ$. Definimos

$$\sharp(\emptyset : V) = 0 \quad \text{y} \quad \sharp(K : V) = min\left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i V^\circ \text{ con } x_i \in G \right\}.$$

Sea $K_0 \subset G$ un conjunto compacto con interior no vacío, definimos

$$\mathscr{C} = \{K \subset G \mid K \text{ es compacto}\}$$

y para cada conjunto abierto $U \in \mathscr{N}_e$ definimos la función

$$h_U : \mathscr{C} \to \mathbb{R}, \quad \text{como} \quad h_U(K) = \frac{\sharp(K : U)}{\sharp(K_0 : U)}$$

Se cumplen las siguientes condiciones

1. $0 \leq h_U(K) \leq \sharp(K : K_0)$ para todo conjunto compacto K.

   Sean $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $\{y_j\}_{j=1}^{m} \in G$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i K_0$, $K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{m} y_j U$ entonces $K \subset \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m} x_i y_j U$ y así $\sharp(K : U) \leq \sharp(K : K_0)\sharp(K_0 : U)$.

2. $h_U(K_0) = 1$.

3. $h_U(xK) = h_U(K)$ para toda $x \in G$.

4. $h_U(K_1) \leq h_U(K_2)$ para todo $K_1 \subset K_2$.

5. $h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$.

   Sean $n = \sharp(K_1 : U)$, $m = \sharp(K_2 : U)$ y sean $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^m \in G$ tales que $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^n x_i U$ y $K_2 \subset \bigcup_{j=1}^m y_j U$ entonces

$$K_1 \cup K_2 \subset \left(\bigcup_{i=1}^n x_i U\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^m y_j U\right).$$

   Por lo que $\sharp(K_1 \cup K_2 : U) \leq n + m$.

6. $h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$ si $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$.

   Supongamos que $K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$. Sean $n = \sharp(K_1 \cup K_2 : U)$ y $\{x_i\}_{i=1}^n$ tales que $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup_{i=1}^n x_i U$.
   Observemos que para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, $x_i U \cap K_1 = \emptyset$ o $x_i U \cap K_2 = \emptyset$, ya que en caso contrario $x_i \in K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1} = \emptyset$.
   Podemos hacer una partición de $\{x_i\}_{i=1}^n$ en $\{y_j\}_{j=1}^m \bigcup \{z_i\}_{k=1}^p$ con $m+p = n$, tales que $K_1 \subset \bigcup_{i=1}^m y_i U$ y $K_2 \subset \bigcup_{i=1}^p z_i U$. Por lo tanto

$$\sharp(K_1 \cup K_2 : U) = n = m + p \geq \sharp(K_1 : U) + \sharp(K_2 : U)$$

Sea K un conjunto compacto. Definimos I_K como el intervalo compacto

$$I_K = [0, \sharp(K : K_0)] \subset \mathbb{R}.$$

y $X = \prod_{K \in \mathscr{C}} I_K$ con la topología producto. Por el teorema de Tychonoff, X es compacto.
Definimos $h_U := (h_U(K)) \subset X$ y para todo conjunto abierto $V \in \mathscr{N}_e$

$$S(V) = \overline{\{h_U |\ U \in \mathscr{N}_e, U \subset V\}}^X.$$

Notamos que $S(V)$ tiene la propiedad de intersección finita. Dadas $V_1, \cdots, V_n \in \mathscr{N}_e$, si $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ entonces $h_V \in S(V_i)$ para toda $i = 1, \cdots, n$ y por lo tanto $h_V \in \bigcap_{i=1}^n S(V_i)$.
Como X es un compacto se tiene que $\bigcap_{U \in \mathscr{N}_e} S(V) \neq \emptyset$.
Sean $h \in \bigcap_{U \in \mathscr{N}_e} S(V)$ y K, K_1 y K_2 conjuntos compactos entonces

1) $h(K) \geq 0$.

2) $h(\emptyset) = 0$.

3) $h(K_0) = 1$.

4) $h(xK) = h(K)$ para toda $x \in G$.

Sea $\epsilon > 0$ por definición de h, existe $U \in \mathscr{N}_e$ un conjunto abierto tal que

$$|h_U(K) - h(K)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |h_U(xK) - h(xK)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo cual

$$|h(xK) - h(K)| \leq |h_U(xK) - h(xK)| + |h_U(xK) - h_U(K)| + |h_U(K) - h(K)| < \epsilon.$$

5) $h(K_1) \leq h(K_2)$ si $K_1 \subset K_2$.

La desigualdad se sigue de que $h_U(K_1) \leq h_U(K_2)$ para toda $U \in \mathscr{N}_e$.

6) $h(K_1 \cup K_2) \leq h(K_1) + h(K_2)$.
Es claro ya que $h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$ para toda $U \in \mathscr{N}_e$.

7) $h(K_1 \cup K_2) = h(K_1) + h(K_2)$ si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

Como K_1 y K_2 son compactos y ajenos, existen conjuntos abiertos y ajenos U_1 y U_2 que los contienen. Además por la Proposición 2.6 existen conjuntos abiertos, $V_1,\ V_2 \in \mathscr{N}_e$ tales que $K_1V_1 \subset U_1,\ K_2V_2 \subset U_2$.
Ponemos $V = V_1 \cap V_2$ y sea $U \in \mathscr{N}_e$ tal que $U \subset V^{-1}$, entonces

$$K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} \subset K_1V \cap K_2V \subset K_1V_1 \cap K_2V_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

Por lo que

$$h_U(K_1 \cap K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2).$$

Como $h \in S(V^{-1})$ tenemos que $h(K_1 \cap K_2) = h(K_1) + h(K_2)$.

Definimos $\mu^* : \mathscr{P}(G) \to \mathbb{R}$ como sigue

$$\begin{aligned}
\mu^*(U) &= sup\,\{h(K) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\} \text{ para todo abierto } U.\\
\mu^*(E) &= inf\,\{\mu^*(U) : E \subset U,\ U \text{ abierto}\} \text{ para todo subconjunto } E.
\end{aligned}$$

Vamos a ver que μ está bien definida. Sean U y V conjuntos abiertos con $U \subset V$, entonces existe un conjunto compacto K tal que $U \subset K \subset V$.
Como h es monótona, $h(L) \leq h(K)$ para cada conjunto compacto $L \subset U$, así pues $\mu^*(U) \leq h(K) \leq \mu^*(V)$. De donde $\mu^*(U) = inf\,\{\mu^*(V) : U \subset V,\ V \text{ abierto}\}$ y por lo tanto μ^* esta bien definida.
Falta ver μ^* que es una medida exterior.
Como $h(K) \geq 0$ para todo K compacto, tenemos que para U un conjunto abierto

$$0 \leq sup\,\{h(K) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\} = \mu^*(U).$$

Por lo tanto, para todo $E \subset G$ se cumple que

$$0 \leq inf \{\mu^*(U) : E \subset U, U \text{ abierto}\} = \mu^*(E).$$

Además $\mu^*(\emptyset) = \{h(K) : K \subset \emptyset, K \text{ compacto}\} = h(\emptyset) = 0$.
Es claro que μ^* es monótona.
Sean $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(G)$ conjuntos abiertos y K un conjunto compacto tal que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, por el Lema 1.6 existen compactos $K_1, \cdots, K_n$ tales que $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$ y $K_i \subset U_i$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$. Entonces

$$h(K) \leq \sum_{i=1}^{n} h(K_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$$

Por lo cual $\mu^*\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i\Big) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i)$.
Sean $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(G)$. Vamos a demostrar que $\mu^*\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\Big) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$.
Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) = \infty$ ya acabamos. En caso contrario dada $\epsilon > 0$ existe U_i abierto tal que $E_i \subset U_i$ y además $\mu^*(U_i) \leq \mu^*(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \epsilon.$$

Así pues, μ^* es una medida exterior.

Falta ver que cualquier boreliano es μ^*-medible. Sea $E \subset G$ con $\mu^*(E) < \infty$. Dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto V tal que $E \subset V$ y $\mu^*(V) \leq \mu^*(E) + \epsilon$.
Por otro lado, existe un compacto K tal que

$$K \subset U \cap V \text{ y } h(K) > \mu^*(U \cap V) - \epsilon,$$

además para $V \cap K^c$ existe un compacto L que cumple

$$L \subset V \cap K_c \text{ y } h(L) > \mu^*(V \cap K^c) - \epsilon.$$

Observemos que K y L son ajenos y $V \cap U^c \subset V \cap K^c$, por lo cual

$$\mu^*(U \cap V) + \mu^*(U^c \cap V) - 2\epsilon < h(K) + h(L) = h(K + L) \leq \mu^*(V).$$

Por lo tanto $\mathscr{B}(G) \subset \mathscr{M}_{\mu^*}$ y entonces $\mu^*|_{\mathscr{B}(G)} = \mu$ es una medida.

Ahora demostraremos que μ es una medida semi-regular invariante bajo traslaciones izquierdas.

Dados K un conjunto compacto y U un conjunto abierto tal que $K \subset U$ tenemos que $h(K) \leq \mu(U)$. Entonces

$$h(K) \leq \mu(K) \leq sup\,\{\mu(K) : K \subset U,\, K \text{ compacto}\}\,.$$

De donde $\mu(U) \leq sup\,\{\mu(K) : K \subset U,\, K \text{ compacto}\}$ y por lo tanto se cumple la regularidad interior. La regularidad exterior es clara.
Dado K compacto, existe un conjunto abierto U tal que $K \subset U$ y $\overline{U}$ es compacto, entonces $h(K) \leq \mu(U) \leq h(\overline{U}) < \infty$.

Sea $g \in G$ y U un conjunto abierto, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(gU) &= sup\,\{h(K) : K \subset gU,\, K \text{ compacto}\} \\
&= sup\,\left\{h(K) : g^{-1}K \subset U,\, K \text{ compacto}\right\} \\
&= sup\,\{h(gL) : L \subset U,\, L \text{ compacto}\} \\
&= sup\,\{h(L) : L \subset U,\, K \text{ compacto}\} = \mu(U).
\end{aligned}$$

Sea $E \subset \mathscr{B}(G)$, se da la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\mu(gE) &= inf\,\{\mu(U) : gE \subset U,\, U \text{ abierto}\} \\
&= inf\,\left\{\mu(U) : E \subset g^{-1}U,\, U \text{ abierto}\right\} \\
&= inf\,\{\mu(gV) : E \subset V,\, V \text{ abierto}\} \\
&= inf\,\{\mu(V) : E \subset V,\; V \text{ abierto}\} = \mu(E).
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe μ una medida izquierda de Haar. Falta demostrar que μ es única salvo por multiplicación por constantes positivas, para lo cual necesitamos el siguente lema:

Lema 3.5. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Todo conjunto abierto $U \neq \emptyset$ cumple que $\mu(U) > 0$, además toda $f \in \mathscr{K}_*^+(G)$ cumple que $\int f d\mu > 0$.*

Demostración. Para K_0, tenemos que $1 = h(K_0) \leq \mu(K_0)$. Sea $U \neq \emptyset$, recordando que K_0 es compacto, existen $x_1, \cdots, x_n$ tales que $K_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i U$. Entonces

$$1 \leq \mu(K_0) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} x_i U\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U).$$

Sea $f \in K_*^+(G)$. Como f es continua, existe $\epsilon > 0$ y un conjunto abierto $U \neq \emptyset$ tal que $f \geq \epsilon\chi_U$. Entonces

$$\int f d\mu \geq \int \epsilon\chi_U d\mu = \epsilon\mu(U) > 0.$$

□

Continuemos con la demostración de la unicidad de la medida de Haar.
Sean $g \in \mathscr{K}_*^+(G)$ una función fija, $f \in \mathscr{K}(G)$, μ y ν medidas de Haar izquierdas.
Observamos que para $h \in \mathscr{K}(G \times G)$ se cumple la siguiente igualdad

$$\int \int h(x,y)\mu(dx)\nu(dy) = \int \int h(x,y)\nu(dy)\mu(dx)$$

aplicándola varias veces obtenemos:

$$\begin{aligned}\int \int h(x,y)\nu(dy)\mu(dx) &= \int \int h(x,y)\mu(dx)\nu(dy)\\ &= \int \int h(y^{-1}x,y)\mu(dx)\nu(dy)\\ &= \int \int h(y^{-1}x,y)\nu(dy)\mu(dx)\\ &= \int \int h(y^{-1},xy)\nu(dy)\mu(dx)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int \int h(x,y)\nu(dy)\mu(dx) = \int \int h(y^{-1},xy)\nu(dy)\mu(dx) \tag{3.1}$$

Sean $K = sop(f)$ y $L = sop(g)$, como $g \not\equiv 0$ entonces la función $x \mapsto \int g(tx)\nu(dt)$ es continua y además positiva para toda $x \in G$.
Definimos la función

$$h : G \times G \to \mathbb{R} \quad \text{como} \quad h(x,y) = \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx)\nu(dt)}$$

Sea $(x,y) \in sop(h)$, entonces $f(x)g(yx) \neq 0$ por lo que $x \in K,\ yx \in L$ en consecuencia $sop(h) \subset K \times LK^{-1}$, por lo tanto $h \in \mathscr{K}(G \times G)$.
Usando [3.1] y la siguiente igualdad

$$h(y^{-1},xy) = \frac{f(y^{-1})g(xyy^{-1})}{\int g(ty^{-1})\nu(dy)} = \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int g(ty^{-1})\nu(dy)},$$

obtenemos que

$$\int \int \frac{f(x)g(yx)}{\int g(tx)\nu(dt)}\nu(dy)\mu(dx) = \int \int \frac{f(y^{-1})g(x)}{\int g(ty^{-1})\nu(dt)}\nu(dy)\mu(dx),$$

por lo tanto

$$\int f(x)\mu(dx) = \int g(x)\mu(dx) \int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})\nu(dt)}\nu(dy).$$

Despejando obtenemos

$$\frac{\int f(x)\mu(dx)}{\int g(x)\mu(dx)} = \int \frac{f(y^{-1})}{\int g(ty^{-1})\nu(dt)}\nu(dy).$$

Pero el lado derecho no depende de μ, entonces siempre es la misma proporción, por lo que $\nu = c\mu$. $\square$

En las pruebas dos y tres del Teorema 3.4 se omitirá la demostración de la unicidad de la medida de Haar, porque es la misma que la anterior.

3.2. Segunda prueba.

Ya que la primera parte la segunda y tercera prueba es la misma, la desarrollaremos hasta llegar al punto donde las tengamos que separar.

Demostración. Sean $f \in \mathscr{K}(G)$ y $\varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$, consideramos todas las familias finitas $\{s_1, \cdots, s_m\}$, $\{c_1, \cdots, c_m\} \in \mathbb{R}^+$ tales que $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi(s_i x)$ para toda $x \in G$. Veamos que al menos existe una.

Como $f \in \mathscr{K}(G)$, alcanza su máximo y mínimo, entonces $\|f\|_\infty < \infty$, además $\varphi \neq 0$ y continua, entonces existe un abierto U y $a > 0$ tal que para toda $x \in U$, $\varphi(x) > a$.

Sea $c = a^{-1}\|f\|_\infty$, como $sop(f)$ es compacto, existen $s_1, \cdots, s_m$ tales que

$$sop(f) \subset \bigcup_{i=1}^{m} s_i^{-1} U.$$

Si $f(x)$ =0, es claro que $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi(s_i x)$.

Si $x \in sop(f)$, existe s_i tal que $s_i x \in U$ entonces $\varphi(s_i x) \geq a$ y en consecuencia

$$c\varphi(s_i x) \geq a\frac{\|f\|_\infty}{a} = \|f\|_\infty \geq f(x).$$

Por lo tanto $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c\varphi(s_i x)$ para toda $x \in G$. Definimos

$$(f : \varphi) = inf\left\{\sum_{i=1}^{m} c_i : c_i \geq 0,\ s_i \in G \text{ cumplen } f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i\varphi(s_i x) \text{ si } x \in G\right\}.$$

Se tienen las siguiente propiedades

1) $({}_s f : \varphi) = (f : \varphi)$ para cada $s \in G$.

2) $(af : \varphi) = (f : \varphi)$ si $a > 0$.

3) Si $f_1 \leq f_2$ tenemos que $(f_1 : \varphi) \leq (f_2 : \varphi)$.

4) Si $f_1, f_2 \in \mathscr{K}(G)$ entonces $(f_1 + f_2 : \varphi) \leq (f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi)$.

5) $(f : \varphi) \geq \dfrac{\|f\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty}$.

6) Para $\psi, \varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$, $f \in \mathscr{K}(G)$ se tiene que $(f : \varphi) \leq (f : \psi)(\psi : \varphi)$.

7) Si $f, f_0, \varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$, entonces $0 < \dfrac{1}{(f_0 : f)} \leq \dfrac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \leq (f : f_0)$.

Los cuatro primeros incisos son claros por construcción y por las propiedades básicas de ínfimo. Veamos la demostración de los demás:

5) Si $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi(s_i x)$ entonces $f(x) \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \left\|\varphi\right\|_\infty$ y por lo tanto $\left\|f\right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{m} c_i \left\|\varphi\right\|_\infty$.
Como $\varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$ se tiene que $\left\|\varphi\right\|_\infty \neq 0$, en consecuencia $(f : \varphi) \geq \dfrac{\left\|f\right\|_\infty}{\left\|\varphi\right\|_\infty}$.

6) Si

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \psi(s_i x) \quad \text{ y } \quad \phi(y) \leq \sum_{j=1}^{m} b_j \varphi(t_j y).$$

Entonces $f(x) \leq \sum_{i,j} a_i b_j \varphi(t_j s_i x)$ y por lo tanto

$$(f : \varphi) \leq \sum_{i,j} a_i b_j \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} b_j\Big).$$

Por lo cual $(f : \varphi) \leq (f : \psi)(\psi : \varphi)$.

7 Observemos que $(f : g) > 0$ si $f, g \in \mathscr{K}_*^+(G)$, además si aplicamos dos veces el inciso anterior obtenemos

$$(f_0 : \varphi) \leq (f_0 : f)(f : \varphi) \quad \text{ y } \quad (f : \varphi) \leq (f : f_0)(f_0 : \varphi)$$

En consecuencia

$$0 < \frac{1}{(f_0 : f)} \leq \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \leq (f : f_0).$$

Sean $f_0,\ \varphi \in \mathscr{K}^+(G)$. Definimos $I_\varphi : \mathscr{K}^+(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}.$$

Las siguientes propiedades de I_φ son las correspondientes a $1), \cdots, 7)$.

a) $I_\varphi(0) = 0$ ya que $(0 : \varphi) = 0$.

b) Si $f \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leq I_\varphi(f) \leq (f : f_0).$$

c) $I_\varphi(xf) = I_\varphi(f)$ para toda $x \in G$.

d) $I_\varphi(af) = I_\varphi(f)$ si $a > 0$.

e) Si $f_1 \leq f_2$, entonces $I_\varphi(f_1) \leq I_\varphi(f_2)$.

f) $I_\varphi(f_1 + f_2) \leq I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2)$.

En este momento, podemos concluir la prueba de dos maneras distintas,

I) Utilizar el axioma de elección en la versión del Teorema de Tychonoff.

II) Sin utilizar alguna equivalencia al axioma de elección.

Forma I.
Para la demostración necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.6. *Sean $f_1, f_2 \in \mathscr{K}^+(G)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $V \in \mathscr{N}_e$ tal que para toda $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ con $sop(\varphi) \subset V$ se tiene que*

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1 + f_2) + \epsilon.$$

Demostración. Como $sop(f_1)$ y $sop(f_2)$ son compactos, entonces por los Lemas 1.5 y 1.12, existe una función $g : G \longrightarrow [0,1]$ continua, con soporte compacto tal que $g(x) = 1$ si $f_1(x) + f_2(x) > 0$.
Sea $\delta > 0$, definimos

$$f : G \longrightarrow [0,1] \quad \text{ como } \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \delta g(x)$$

Para $i = 1, 2$ definimos las funciones $h_i : G \longrightarrow [0,1]$ como

$$h_i(x) = \frac{f_i(x)}{f(x)}.$$

Se entiende que si $f(x) = 0$ entonces $h_i(x) = 0$.
Veamos que $h_i \in \mathscr{K}^+(G)$, como $sop(h_i) \subset sop(f_i)$ entonces h_i tiene soporte compacto. h_i es continua en $\{x \in G \mid f(x) = 0\}$ pues es constante ahi, y es continua en $\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}$.
Sea $x_0 \in \overline{\{x \in G \mid f(x) = 0\}} \cap \overline{\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}}$. Ya que f es continua se tiene que $f(x_0) = 0$ por lo cual $f_i(x_0) = 0$ y $h_i(x_0) = 0$.
Ya que f_i es uniformemente continua, existe una vecindad abierta V de x_0, tal que $f_i(x) < \delta\epsilon$ si $x \in V$. Por lo tanto

$$h_i(x) = \frac{f_i(x)}{f_1(x) + f_2(x) + \delta g(x)} \leq \frac{f_i(x)}{\delta} < \epsilon.$$

Así pues h_i es continua.
Observemos que

$$f_i = h_i f \quad \text{ y } \quad h_1 + h_2 = \frac{f_1 + f_2}{f_1 + f_2 + \delta g} \leq 1.$$

Dado que h_i es uniformemente continua, para $\lambda > 0$ existe una vecindad abierta $V \in \mathscr{N}_e$ tal que para $x^{-1}y \in V$ se cumple $|h_i(x) - h_i(y)| < \lambda$.
Sean $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ con $sop(\varphi) \subset V$, $\{c_j\}_{j=1}^m$ números reales positivos y $\{s_j\}_{j=1}^m \subset G$ tales que $f(x) \leq \sum\limits_{j=1}^m c_j \varphi(s_j x)$ para toda $x \in G$.
Si $\varphi(s_j x) \neq 0$ tenemos que $s_j x \in V$ por lo que $|h_i(x) - h_i(s_i^{-1})| < \lambda$. En consecuencia

$$f_i(x) = f(x) h_i(x) \leq \sum_{j=1}^m c_j \varphi(s_j x) h_i(x) \leq \sum_{j=1}^m c_j \varphi(s_j x)[h_i(s_j^{-1}) + \lambda]$$

Por la definición de $(f_i : \varphi)$ obtenemos que

$$(f_i : \varphi) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j [h_i(s_j^{-1}) + \lambda].$$

Por lo cual

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq \sum_{j=1}^{m} c_j [h_1(s_j^{-1}) + h_2(s_j^{-1}) + 2\lambda] \leq \sum_{j=1}^{m} c_j [1 + 2\lambda].$$

Recordando que $(f : \varphi) \leq \sum\limits_{j=1}^{m} c_j$, se tiene

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leq (f : \varphi)(1 + 2\lambda).$$

Debido a esto se obtiene que

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f)(1 + 2\lambda) \leq (I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta I_\varphi(g))(1 + 2\lambda).$$

Por la propiedad $b)$ se puede elegir λ y δ tales que

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leq I_\varphi(f_1 + f_2) + \epsilon$$

□

Estamos listos para concluir la segunda prueba.

Demostración. Sea $f \in \mathscr{K}_*^+(G)$, definimos

$$X_f = \left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f_0 : f) \right] \quad \text{y} \quad X = \prod_f X_f$$

el espacio producto con la topología producto, como X_f es compacto se sigue del Teorema de Tychonoff que X es compacto.
Sea $V \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta. Definimos

$$C_V = \overline{\{I_\varphi : \varphi \in \mathscr{K}_+(G),\ sop(\varphi) \subset V\}}^X$$

Los conjuntos compactos C_V tienen la propiedad de la intersección finita debido a que

$$C_{V_1} \cap \cdots \cap C_{v_n} = C_{V_1 \cap \cdots \cap V_n}$$

Por lo tanto $\bigcap\limits_{V \in \mathscr{N}_e} C_V \neq \emptyset$ y podemos elegir $I \in \bigcap\limits_{V \in \mathscr{N}_e} C_V$.
Por definición de I, dada una vecindad abierta $V \in \mathscr{N}_e$ y algunas funciones continuas $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{K}_+(G)$ y $\epsilon > 0$, existe una función $\varphi \in \mathscr{K}_+(G)$, con $sop(\varphi) \subset V$ tal que para toda $i = 1, \cdots, n$ se cumple que

$$|I(f_i) - I_\varphi(f_i)| < \epsilon.$$

Además $I : \mathscr{K}_+(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades:

1. Para $f \in \mathscr{K}^+(G)$, $I(f) \geq 0$. Ya que $I_\varphi(f) \geq 0$ para $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$.

2. Sea $s \in G$ entonces $I({}_sf) = I(f)$.
   Pues dada $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ tal que

$$|I(f) - I_\varphi(f)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |I({}_sf) - I_\varphi({}_sf)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

   Por lo cual

$$|I(f) - I({}_sf)| < |I(f) - I_\varphi(f)| + |I_\varphi(f) - I_\varphi({}_sf)| + |I({}_sf) - I_\varphi({}_sf)| < \epsilon.$$

3. $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$.
   Sea $\epsilon > 0$ por el Lema 3.6, existe $V \in \mathscr{N}_e$ vecindad abierta tal que si $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ con $sop(\varphi) \subset V$ entonces $|I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) - I_\varphi(f_1 + f_2)| < \frac{\epsilon}{4}$, además para V, $f_1,\ f_2,\ f_1 + f_2$ existe $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ con $sop(\varphi) \subset V$ tal que para $i = 1, 2$ se cumple

$$|I(f_i) - I_\varphi(f_i)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{y} \quad |I(f_1 + f_2) - I_\varphi(f_1 + f_2)| < \frac{\epsilon}{4}$$

   Por lo tanto

$$|I(f_1) + I(f_2) - I(f_1 + f_2)| \leq |I(f_1) - I_\varphi(f_1)| + |I(f_2) - I_\varphi(f_2)| +$$
$$|I(f_1 + f_2) - I_\varphi(f_1 + f_2)| + |I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) - I_\varphi(f_1 + f_2)| < \epsilon.$$

4. Sea $a > 0$ entonces $I(af) = aI(f)$.
   Dada $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ tal que

$$|I(f) - I_\varphi(f)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |I(af) - I_\varphi(af)| < \frac{\epsilon}{2}$$

   En consecuencia, obtenemos que

$$|I(f) - I(af)| \leq |I(f) - I_\varphi(f)| + |I_\varphi(f) - I_\varphi(af)| + |I(af) - I_\varphi(af)| < \epsilon.$$

Podemos extender I a $\mathscr{K}(G)$ de la siguiente forma: Sea $f \in \mathscr{K}(G)$ entonces existen $f_1, f_2 \in \mathscr{K}^+(G)$ tales que $f = f_1 - f_2$, definimos $I(f) = I(f_1) - I(f_2)$. Entonces I es una integral no negativa, homogénea, aditiva e invariante por la izquierda, asi que es una integral de Haar. $\square$

3.3. Tercera prueba.

Los siguiente dos lemas se utilizarán en la tercera prueba del Teorema 3.4. Para una demostración del primer lema puede consultarse ([7], p. 187)

Lema 3.7. *Dadas $f_1, \cdots, f_n \in \mathscr{K}^+(G)$, $\epsilon > 0$ y $\lambda > 0$. Existe una vecindad abierta $U \in \mathscr{N}_e$ tal que para toda $\varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$ con $sop(\varphi) \subset V$ y para cualquier número finito de números reales $0 \leq \lambda_i \leq \lambda$,$i = 1, \cdots, n$, se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_\varphi(f_i) \leq I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i\right) + \epsilon.$$

Lema 3.8. *Sean $f \in \mathscr{K}^+(G)$, $\epsilon > 0$ y un conjunto abierto U con $U \in \mathscr{N}_e$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $x^{-1}y \in U$. Sean E compacto tal que sop$(f) \subset E$ y $g \in \mathscr{K}_*^+(G)$ tal que sop$(g) \subset U$. Entonces para toda $\alpha \geq \epsilon$ existen $\{t_1, \cdots, t_m\} \subset E^{-1}$ y números positivos $c_1, \cdots, c_m$, tales que*

$$|f(x) - \sum_{j=1}^{m} c_j g(t_j x)| < \alpha, \qquad \textit{para toda} \qquad x \in G.$$

Demostración. Sean $x, y \in G$ entonces

$$|f(x) - f(y)|g(y^{-1}x) < \epsilon g(y^{-1}x)$$

Ya que si $y^{-1}x \in U$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, y si $y^{-1}x \notin U$ se tiene que $g(y^{-1}x) = 0$. Sea $\eta > 0$ tal que $(f : \check{g})\eta < \alpha - \epsilon$. Como $g \in \mathscr{K}^+$ existe V un conjunto abierto con cerradura compacta que contiene a e tal que si $uv^{-1} \in V$ entonces $|g(u) - g(v)| < \eta$. Como E es compacto existen $s_1, \cdots s_m \in E$ tales que $E \subset \bigcup_{i=1}^{m} s_i V$.

Por la Proposición 1.14 existen $h_1, \cdots h_m \in \mathscr{K}^+(G)$ tales que $sop(h_i) \subset s_i V$ y $\sum_{i=1}^{m} h_i = g$, ya que $\chi_E \leq g \leq \chi_U$ se tiene que $\sum_{i=1}^{m} h_i(x) = 1$ si $x \in sop(f)$.

Por otro lado

$$h_j(y)f(y)|g(s_i^{-1}x) - g(y^{-1}x)| < \eta h_i(y)f(y),$$

pues si $s_i^{-1}y \in V$ entonces $|g(s_i^{-1}x) - g(y^{-1}x)| < \eta$ y si $s_i^{-1}y \notin V$ entonces $h_i(y) = 0$. En consecuencia

$$\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)|g(s_i^{-1}x) - g(y^{-1}x)| < \eta \sum_{i=1}^{n} h_i(y)f(y) = \eta f(y)$$

como

$$f(y)g(y^{-1}x) - \eta f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)g(s_i^{-1}x) \leq f(y)g(y^{-1}x) - \eta f(y)$$

y

$$|f(x) - f(y)|g(y^{-1}x) < \epsilon g(y^{-1}x),$$

se cumple que

$$(f(x) - \epsilon)g(y^{-1}x) - \eta f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)g(s_i^{-1}x) \leq (f(x) + \epsilon)g(y^{-1}x) - \eta f(y).$$

Sea $\varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$, para toda x se tiene que

$$(f(x) - \epsilon)I_\varphi({}_x\check{g}) - \eta I_\varphi(f) \leq I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)g(s_i^{-1}x)\right) \leq (f(x) + \epsilon)I_\varphi({}_x\check{g}) - \eta I_\varphi(f).$$

Si dividimos entre $I_\varphi(\check{g}) \neq 0$ y notamos que $I({}_x\check{g}) = I(\check{g})$ obtenemos:

$$f(x) - \epsilon - \eta\frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(\check{g})} \leq I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}\right) \leq f(x) + \epsilon - \eta\frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(\check{g})}$$

Como

$$\frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(\check{g})} \leq (f : \check{g}) < \frac{\alpha - \epsilon}{\eta},$$

existe $\beta < \alpha$ tal que $(f : \check{g}) = \frac{\beta - \epsilon}{\eta}$. Por lo tanto

$$f(x) - \beta \leq I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}\right) \leq f(x) + \beta. \tag{3.2}$$

Aplicando el lema anterior para

$$\epsilon = \alpha - \beta, \quad \lambda = (f_0 : \check{g})\,\|g\|\,, \quad \lambda_i = \frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})} \quad \text{y} \quad f_i = h_i f.$$

Obtenemos una vecindad abierta W del neutro tal que para toda $\varphi \in \mathscr{K}_*^+(G)$ con $sop(\varphi) \subset W$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}I_\varphi(h_j f) \leq I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}\right) + \alpha - \beta.$$

Por lo tanto para toda $x \in G$ se cumple

$$\left| I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}I_\varphi(h_j f)\right| \leq \alpha - \beta \tag{3.3}$$

Por la ecuaciones (3.2) y (3.3) obtenemos que

$$\left| I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_j(y)f(y)\frac{g(s_i^{-1}x)}{I_\varphi(\check{g})}\right) - f(x)\right| \leq \alpha. \tag{3.4}$$

Que es lo que se quería probar, con $t_i = s_i^{-1}$ y $c_i = I_\varphi(h_i f)/I_\varphi(\check{g})$ para toda i. $\square$

Ahora si estamos en posición de terminar la prueba del Teorema 3.4. Se observará que el axioma de elección nos facilita la demostración ya que ésta ha sido muy larga y se necesita del concepto de redes (ver [10], p.187).

Demostración. Sea $U \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta, escogemos una función $\varphi_U \in \mathscr{K}^+(G)$ tal que $sop(\varphi) \subset U$. Decimos que $\varphi_V \succ \varphi_U$ si $V \subset U$.
Entonces el conjunto $\mathscr{D} = \{\varphi_U : U \in \mathscr{N}_e \text{ vecindad abierta}\}$ esta dirigido por $\succ$.
Sea $f \in \mathscr{K}^+(G)$, afirmamos que existe el límite $\lim\limits_{U \to e} I_{\varphi_U}(f)$.
Como $I_\varphi(f) \in \mathbb{R}$, sólo falta ver que $(I_\varphi(f))_{\varphi \in \mathscr{D}}$ es una red de Cauchy, es decir, para

$\epsilon > 0$ existe φ_0 tal que si $\varphi_U, \varphi_V \succ \varphi_0$ entonces $|I_{\varphi_U}(f) - I_{\varphi_V}(f)| < \epsilon$.
Sea $U_0 \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta con cerradura compacta. Sea

$$F = \overline{sop(f) \cup sop(f_0)} \cdot \overline{U_0}$$

Y sea $h \in \mathscr{K}^+(G)$ tal que $h(F) = 1$.
Sea $\epsilon > 0$, por la continuidad de f y f_0 existe $U \in \mathscr{N}_e$ vecindad abierta con $U \subset U_0$ tal que si $xy^{-1} \in U$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{ y } \quad |f_0(x) - f_0(y)| < \epsilon.$$

Sea $g \in \mathscr{K}_*^+(G)$ tal que $sop(g) \subset U$, por el Lema 3.8 existen

$$t_1, \cdots, t_m \in (sop(f))^{-1}$$

y números positivos $c_1, \cdots, c_m$, tales que $\left| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i g(t_i x) \right| \leq \epsilon$ para toda $x \in G$.
Veamos que $\left| f(x) - \sum_{i=1}^m c_i g(t_i x) \right| \leq \epsilon h(x)$ para toda $x \in G$.
Si $x \in F$, $h(x) = 1$ y se cumple. Si $x \notin F$, $t_i x \notin (sop(f))^{-1} sop(f) U_0$, $i = 1, \cdots, n$, entonces $t_i x \notin U_0$ y $x \notin F$ por lo cual $f(x) = 0 = g(t_i x)$.
Sea $\varphi \in \mathscr{K}^+(G)$ como

$$-\epsilon h(x) \leq f(x) - \sum_{i=1}^m c_i g(t_i x) \leq \epsilon h(x)$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^m c_i g(t_i x) \leq \epsilon h(x) + f(x) \quad \text{ y } \quad f(x) \leq \sum_{i=1}^m c_i g(t_i x) + \epsilon h(x).$$

Además I_φ es creciente entonces

$$I_\varphi\Big(\sum_{i=1}^m c_{it_i} g\Big) \leq \epsilon I_\varphi(h) + I_\varphi(f) \quad \text{ y } \quad I_\varphi(f) \leq I_\varphi\Big(\sum_{i=1}^m c_{it_i} g\Big) + \epsilon I_\varphi(h),$$

por lo cual

$$\left| I_\varphi(f) - I_\varphi\Big(\sum_{i=1}^m c_{it_i} g\Big) \right| \leq \epsilon I_\varphi(h) \leq \epsilon (h : f_0). \tag{3.5}$$

Por la construcción del Lema 3.8, se tiene que $c_i = I_\varphi(h_i f)/I_\varphi(\check{g})$ donde $h_i \in \mathscr{K}^+(G)$ eran tales que $h_i((s_i V)^c) = 0$ y $\sum_{i=1}^m h_i(x) = 1$ si $f(x) \neq 0$, por lo tanto obtenemos que $h_i f(x) \leq f(x)$ para toda $x \in G$. En consecuencia

$$c_i \leq \frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(\check{g})} = \frac{\frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}}{\frac{(\check{g}:\varphi)}{(f_0:\varphi)}} = \frac{(f : \varphi)}{(\check{g} : \varphi)} \leq (f : \check{g})$$

por el Lema 3.7 existe $V_1 \in \mathscr{N}_e$ tal que

$$\left| I_\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} c_i t_i g\right) - \sum_{i=1}^{m} c_i I_\varphi(g) \right| \leq \epsilon \quad \text{si} \quad \varphi \in \mathscr{K}_*^+(V_1). \tag{3.6}$$

Combinando las ecuaciones (3.5) y (3.6) y escribiendo $0 < c = \sum_{i=1}^{m} c_i$ obtenemos:

$$|I_\varphi(f) - cI_\varphi(g)| < \epsilon(1 + (h : f_0)). \tag{3.7}$$

Aplicando el mismo procedimiento a f_0 obtenemos $d > 0$ y $V_2 \in \mathscr{N}_e$ tal que

$$|1 - dI_\varphi(g)| = |I_\varphi(f_0) - dI_\varphi(g)| < \epsilon(1 + (h : f_0)), \tag{3.8}$$

si $\varphi \in \mathscr{K}_*^+$ y $sop(\varphi) \subset V_2$. Sea $\varphi \in \mathscr{K}_*^+$ tal que $sop(\varphi) \subset V_1 \cap V_2$ entonces

$$|I_\varphi(f) - \frac{c}{d}| \leq |I_\varphi(f) - cI_\varphi(g)| + \left|\frac{c}{d} - cI_\varphi(g)\right| < \epsilon(1 + (h : f_0))\Big(1 + \frac{c}{d}\Big)$$

La desigualdad

$$\frac{c}{d} < I_\varphi(f) + \epsilon(1 + (h : f_0))\Big(1 + \frac{c}{d}\Big)$$

es equivalente a

$$\frac{c}{d}(1 - \epsilon(1 + (h : f_0))) < I_\varphi(f) + \epsilon(1 + (h : f_0)),$$

por lo tanto

$$\frac{c}{d} + 1 < \frac{I_\varphi(f) + \epsilon(1 + (h : f_0))}{1 - \epsilon(1 + (h : f_0))} + 1 = \frac{I_\varphi(f) - 1}{1 - \epsilon(1 + (h : f_0))} \leq \frac{(f : f_0) + 1}{1 - \epsilon(1 + (h : f_0))}.$$

En consecuencia

$$\left|I_\varphi(f) - \frac{c}{d}\right| \leq \frac{\epsilon(1 + (h : f_0))(1 + (f : f_0)}{1 - \epsilon(1 + (h : f_0))}.$$

Entonces si escogemos una ϵ adecuada, obtenemos que $|I_\varphi(f) - \frac{c}{d}| \leq \frac{\delta}{2}$ para cualquier $\delta > 0$.
Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{K}_*^+$ tales que $sop(\varphi_1),\ sop(\varphi_2) \subset V_1 \cap V_2$, se cumple

$$|I_{\varphi_1}(f) - I_{\varphi_2}(f)| \leq \left|I_{\varphi_1}(f) - \frac{c}{d}\right| + \left|I_{\varphi_2}(f) - \frac{c}{d}\right| < \delta$$

Por lo tanto la red $(I_\varphi(f))_{\varphi \in \mathscr{D}}$ es de Cauchy y existe el límite $\lim\limits_{U \to e} I_{\varphi_U}(f)$ para toda $f \in \mathscr{K}^+$. Definimos $I(f) = \lim\limits_{U \to e} I_{\varphi_U}(f)$ para $f \in \mathscr{K}^+$.

Algunas propiedades de I son las siguientes

a) Si $f \geq 0$ entonces $I(f) \geq 0$.

b) Sean $f,\ g \in \mathscr{K}^+(G)$ por la subaditivad de I_φ se cumple que:

$$I(f+g) = \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(f+g) \leq \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(f) + \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(g) = I(f) + I(g).$$

Por otro lado por el Lema 3.7 dado $\epsilon > 0$ existe $U \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta tal que

$$I_\varphi(f) + I_\varphi(g) \leq I_\varphi(f+g) + \epsilon$$

si $\varphi \in \mathscr{K}^+$, por lo tanto

$$\lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(f) + \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(g) \leq \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(f+g) + \epsilon.$$

En consecuencia $I(f+g) = I(f) + I(g)$.

c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I(\alpha f) = \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(\alpha f) = \alpha \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(f) = \alpha I(f)$.

d) Sea $x \in G$, entonces $I(xf) = \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(xf) = \lim_{U\to e} I_{\varphi_U}(f) = I(f)$.

Sea $f \in \mathscr{K}(G)$, entonces existen $f_1,\ f_2 \in \mathscr{K}^+$ tales que $f = f_1 - f_2$. Definimos $I(f) = I(f_1) - I(f_2)$. Así pues, μ la medida asociada a I por el Teorema de Riesz (**??**) es una medida de Haar izquierda. □

3.4. Cuarta Prueba.

A continuación veremos la última prueba del Teorema 3.4. Aquí supondremos que G es un grupo compacto. Para la demostración necesitamos los siguientes dos teoremas.

Definición 3.9. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $A \subset X$. Definimos el* ***casco convexo*** *de A como:*

$$Co(A) =: \left\{ x \in X \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i,\ \text{donde } x_i \in A, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} t_i\ ;\ n \text{ es arbitrario} \right\}.$$

Teorema 3.10 (Teorema del punto fijo, Kakutani)**.** *Sea X un espacio vectorial topológico, localmente convexo y de Hausdorff. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto y convexo. Sea $P \subset \{\Lambda : X \to X, \Lambda$ es biyectiva y lineal$\}$ una familia equicontinua (ver [17], p. 43) de funciones que forma un grupo, donde la operación de grupo es la composición de funciones, que cumple: $\Lambda(K) \subset K$ para toda $\Lambda \in P$. Entonces existe $k \in K$ tal que para toda $\Lambda \in P$ se cumple que $\Lambda(k) = k$.*

Demostración. Definimos

$$\Omega := \{H \subset K \mid H \neq, \emptyset \text{ compacto, convexo y } \Lambda(H) \subset H \text{ para todo } \Lambda \in P\}$$

Entonces $\Omega \neq \emptyset$ ya que K está en Ω, además le podemos dar un orden parcial definiendo $U \leq V$ si y sólo si $U \supset V$. Por el teorema de maximalidad de Hausdorff, Ω contiene

una subcolección maximal Ω_0 totalmente ordenado.
Sea $H_0 = \bigcap_{H \in \Omega_0} H$, demostraremos que H_0 sólo contiene un punto. Observamos que H_0 es distinta del vacio, porque Ω_0 cumple la propiedad de intersección finita (ver [10], p. 169) y está contenido en un compacto.
Primero demostraremos que existe una base de vecindades balanceadas y convexas, $\mathscr{U}$, de $\overline{0}$, que cumplen que $\Lambda(U) \subset U$ para toda $\Lambda \in P$. Sea V una vecindad convexa de $\overline{0}$ en X. Como P es equicontinua, existe un abierto $V_1 \in \mathscr{N}_0$ balanceado tal que si $\Lambda \in P$ entonces $\Lambda(V_1) \subset V$.
Sea $U = Co(\{\Lambda(V_1) : \Lambda \in P\})$, entonces U es convexo, balanceado y $U \subset V$. Además $\Lambda(U) \subset U$ para toda $\Lambda \in P$, ya que dada $u \in U$ existen $a_i \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $x_i \in V_1$ y $\Lambda_i \in P$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \Lambda_i(x_i)$. Entonces

$$\Lambda(u) = \Lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \Lambda_i(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Lambda(\Lambda_i(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} a_i (\Lambda\Lambda_i)(x_i) \in U$$

Basta demostrar que si $H \in \Omega$ y tiene dos o más elementos va a existir $H_1 \in \Omega$, que cumple que $H_1 \subsetneqq H$.
Sea $H \in \Omega$ con más de dos elementos, entonces $\{0\} \subsetneqq H - H$, donde

$$H - H = \{x - y \mid x,\ y \in H\}$$

Considerando que X es de Hausdorff, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que U no cubre a $H - H$. Pero $H - H$ es compacto por lo que existe $s > 0$, $H - H \subset sU$.
Sea $t = inf\,\{s > 0 : H - H \subset sU\}$ observemos que $t \geq 1$. Sea $W = tU$, entonces W es convexo, balanceado y además cumple que:

1) $\Lambda(W) \subset W$ por ser Λ lineal.

2) $H - H \subset (1 + r)\,W$ para toda $r > 0$.

3) Si $0 < r < 1$ entonces $H - H \not\subseteq (1 - r)\overline{W}$ pues

$$(1 - r)\overline{W} \subset (1 - r)W + \frac{r}{2}W = (1 - \frac{r}{2})W$$

   y por la selección de t, se tiene que $(1 - \frac{r}{2})W \not\supseteq H - H$.

Ya que H es compacto, existen $x_1, \cdots, x_n$ tal que $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i + \frac{1}{2}W\right)$.
Definimos $H_1 = H \cap \bigcap_{y \in H} (y + (1 - r)\overline{W}),\ 0 < r < 1$, entonces H_1 es compacto por ser intersección de cerrados dentro de un compacto, además es convexo por ser intersección de convexos.
Sean $x \in H_1$ y $y \in H$. Como Λ es biyectiva y P es un grupo tenemos que $\Lambda^{-1} \in P$ entonces $\Lambda^{-1}(H) \subset H$ por lo tanto $H = \Lambda\Lambda^{-1}(H) \subset \Lambda(H)$, entonces existe $y_1 \in H$ tal

que $y = \Lambda(y_1)$.
Como $x \in H_1$ tenemos que $x \in y_1 + (1-r)\overline{W}$ en consecuencia

$$\Lambda(x) \in \Lambda(y_1) + (1-r)\Lambda(\overline{W}) \subset y + (1-r)\overline{W}$$

Por lo tanto $\Lambda(H_1) \subset H_1$. Pero existen $z, y \in H$ tales que $z - y \in (1-r)\overline{W}$ por lo tanto $z \notin H_1$. Así pues $H_1 \subsetneqq H$.
Afirmamos que existe $r < 1$ tal que $H_1 \neq \emptyset$.
Sea $x_0 = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ como H es convexo, $x_0 \in H$. Sea $y \in H$. Entonces existe x_i tal que $y \in (x_i + \frac{1}{2}W)$, por otro lado tenemos que $H - H \subset (1+r)W$ por lo que $y - x_j \in (1+r)W$, si $j \neq i$ entonces $y \in x_j + (1+r)W$, por lo que

$$ny \in (x_1 + \cdots + x_n) + \frac{1}{2}W + (n-1)(1+r)W$$

de donde

$$y \in x_0 + \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{2} + (n-1)(1+r)\Big)W.$$

Queremos encontrar r tal que

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{2} + (n-1)(1+r)\Big) < 1 - r.$$

que es equivalente a encontrar r que cumpla

$$\frac{1}{2} + (n-1)(1+r) < n(1-r),$$

y esto pasa sólo si $r < \dfrac{1}{2(2n-1)}$.
Sea $r = \frac{1}{4n}$, entonces $y \in x_0 + (1-r)W$, como W es balanceado $x_0 \in y + (1-r)W$ si $y \in H$, por lo tanto $x_0 \in H_1$.
Entonces $H_0 = \{k\}$ cumple que $\Lambda(k) = k$ para toda $\Lambda \in P$. □

Teorema 3.11. *Sean G un grupo compacto y $f \in \mathscr{C}(G)$. Entonces*

a) f es uniformemente continua.

b) Si definimos

$$H_l(f) = Co(\text{ traslaciones izquierdas de } f\,)$$
$$H_r(f) = Co(\text{ traslaciones derechas de } f\,)$$

se tiene que $H_l(f)$ y $H_r(f)$ son uniformemente equicontinuas en $\mathscr{C}(G)$.

Demostración.

a) Para $p \in G$ y $\epsilon > 0$ existe W_p una vecindad abierta de e tal que $|f(x) - f(p)| < \frac{\epsilon}{2}$, si $x \in pW_p$.
Sea V_p una vecindad abierta de e simétrica que cumple $V_pV_p \subset W_p$. Ya que G es

compacto, existen $p_1, \cdots, p_n$ tales que $G = \bigcup_{i=1}^{n} p_i V_{p_i}$.

Definimos $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{p_i}$. Dadas $x,\ y \in G$ con $x^{-1}y \in V$, existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $y \in p_i V_{p_i}$.

Ya que V es simétrica, $xy^{-1} \in V$, por consiguiente

$$x \in yV \subset p_i V_{p_i} V_{p_i} \subset p_i W_{p_i}$$

así pues

$$|f(x) - f(p_i)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } |f(y) - f(p_i)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En consecuencia

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p_i)| + |f(x) - f(p_i)| < \epsilon.$$

b) Sea $s \in G$ y sean $x, y \in G$ tales que $x^{-1}y \in V$ entonces $(sx)^{-1}(sy) \in V$. Dada $g \in H_l(f)$, tiene la forma $g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{s_i} f(s_i x)$ donde $c_{s_i} > 0$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$ y $\sum_{i=1}^{n} c_{s_i} = 1$ por lo tanto

$$|g(x) - g(y)| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_{s_i} (f(s_i x) - f(s_i y)) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} c_{s_i} |f(s_i x) - f(s_i y)| < \epsilon$$

Análogamente $H_r(f)$ es uniformemente equicontinua.

□

Estamos listos para empezar la prueba del Teorema 3.4 cuando G es un grupo compacto.

Demostración. Definimos

$$P := \{L_s : \mathscr{C}(G) \to \mathscr{C}(G) \mid L_s(f) = {}_s f,\ s \in G\}$$

por el Lema 3.3, P es un grupo de operadores lineales en $\mathscr{C}(G)$, además como las traslaciones son isometrías P es equicontinuo.

Sea $f \in \mathscr{C}(G)$ definimos $K_f = \overline{H_l(f)}$. Por el teorema anterior K_f es uniformemente equicontinua además cerrada y acotada, por el Teorema de Arzela-Ascoli (ver [18], p. 245), es compacta, observemos que $L_s(K_f) = K_f$ para $s \in G$.

El Teorema de punto fijo nos garantiza que existe $\phi \in K_f$ tal que si $s \in G$ entonces $L_s \phi = \phi$, esto implica que $\phi(s) = \phi(e)$, por lo tanto ϕ es constante.

Por definición de K_f, ϕ se puede aproximar uniformemente por funciones de $H_l(f)$, por lo que para toda $f \in \mathscr{C}(G)$ existe una constante c que se puede aproximar uniformemente por combinaciones convexas de traslaciones izquierdas de f, y aplicando el mismo razonamiento, existe $\tilde{c}$ una constante que se puede aproximar uniformemente por combinaciones convexas de traslaciones derechas de f. Demostraremos que $c = \tilde{c}$.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $a_1, \cdots, a_n,\ b_1, \cdots, b_m \in G$ y números positivos $\alpha_1, \cdots, \alpha n$, $\beta_1, \cdots, \beta_m$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ \sum\limits_{j=1}^{m} \beta j = 1$ y para toda $x \in G$ se cumple:

$$\left| c - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x) \right| < \epsilon \quad \text{y} \quad \left| \tilde{c} - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f(b_i x) \right| < \epsilon$$

entonces

$$\left| c - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} \beta_j c - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{m} \left| c - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x) \right| < \epsilon$$

Análogamente $\left| \tilde{c} - \sum\limits_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j) \right| < \epsilon$ como el límite es único $c = \tilde{c}$.
Por lo tanto existe una única constante c que se puede aproximar por combinaciones convexas de traslaciones izquierdas de f. Sea $f \in \mathscr{C}(G)$ definimos $M(f) := c_f$. Entonces $M(f)$ cumple las siguientes condiciones:

1. Si $f \geq 0$ entonces $M(f) \geq 0$.
2. $M(1) = 1$.
3. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ $M(\alpha f) = \alpha M(f)$.
4. $M({}_s f) = M(f)$ para toda $s \in G$.
5. $M(f + g) = M(f) + M(g)$ para $f, g \in \mathscr{C}(G)$.

Los primeros cuatro incisos son claros por la construcción de $M(f)$, para el último, sea $\epsilon > 0$. Entonces existen $a_i \in G,\ \alpha_i > 0$ para toda $i \in \{1, \cdots, n\}$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ y $|M(f) - \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i x)| < \frac{\epsilon}{2}$.
Definimos $h(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i g(a_i x)$, $h \in K_g$ y como el límite es único $M(h) = M(g)$. Además existen $\beta_j > 0,\ b_j \in G$ para $j \in \{1, \cdots, m\}$ tales que $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j = 1$ y

$$\left| M(h) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j f(b_i x) \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

esto implica que

$$\left| M(g) - \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(a_i b_j x) \right| = \left| M(g) - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j g(a_i b_j x) \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado
$$\left|M(f)-\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j f(a_ib_jx)\right|\leq\sum_{j=1}^{m}\beta_i\left|M(f)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(a_ib_jx)\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$
Debido a esto
$$\left|M(f)+M(g)-\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j(f+g)(a_ib_jx)\right|<\epsilon.$$
Ya que $\sum\limits_{i,j}\alpha_i\beta_j=1$ tenemos que $M(f)+M(g)$ es una aproximación convexa de traslaciones izquierdas de $f+g$, como el límite es único tenemos que $M(f+g)=M(f)+M(g)$. El teorema de Representación de Riesz (ver Apéndice C, C.1) con 1, 2, 3 y 5 nos garantiza que existe una medida semi-regular de Borel μ que es única salvo por multiplicación por constantes positivas, tal que $M(f)=\int\limits_G f d\mu$ para toda $f\in\mathscr{C}(G)$ y por 4 es una medida de Haar. □

Veamos como se ven las medidas de Haar izquierdas en los ejemplos 2.2

Ejemplo 3.12.

1. *Definimos la medida de conteo sobre $\mathscr{P}(G)$ como $\mu(E)=card(E)$ si la cardinalidad de E es finita y $\mu(E)=\infty$ en caso contrario.*
   Entonces μ satisface que $\mu(E)=\mu(xE)$ para toda $x\in X$ y $E\subset X$. Además $\int f d\mu=\sum\limits_{x\in X}f(x)$. Por lo tanto $f\in\mathscr{L}^1(G)$ si $f(x)=0$ para toda $x\in X$ excepto para una cantidad numerable de x´s y la serie converge.

2. *La medida de Lebesgue λ, cumple que $\lambda(x+E)=\lambda(E)$ para toda $x\in\mathbb{R}$ y $E\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

3. *Sea $\lambda_n=\lambda\times\cdots\times\lambda$ la medida producto formada en $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Sean $y\in\mathbb{R}^n$ y $E\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Entonces por el Teorema de Fubini y el Teorema de Cambio de Variable, (ver [8], p. 372) se tiene que:*
$$\begin{aligned}\lambda_n(y+E) &= \int\cdots\int\chi_{y+E}(x)d\lambda_{x_1}\cdots d\lambda_{x_n}=\int\cdots\int\chi_E(x-y)d\lambda_{x_1}\cdots d\lambda_{x_n}\\ &= \int\cdots\int\chi_E(x)d\lambda_{x_1}\cdots d\lambda_{x_n}=\lambda_n(E)\end{aligned}$$
   Por lo tanto λ_n es una medida de Haar.

4. *Sea $\mu:\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)\to\mathbb{R}$ definida como $\mu(E)=\int\limits_E\frac{1}{t}d\lambda_t$ para todo $E\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Entonces μ es una medida invariante bajo multiplicaciones por la izquierda.*

   Demostración. Sea $y\in\mathbb{R}^+$ y $E\subset\mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$. Entonces
$$\mu(yE)=\int\limits_{yE}\frac{1}{x}\,d\lambda_x=\int\frac{\chi_{yE}(x)}{x}\,d\lambda_x=\int\frac{\chi_E(y^{-1}x)}{x}\,d\lambda_x$$

Por el teorema del cambio de variable, haciendo $u = y^{-1}x$ obtenemos

$$\mu(yE) = \int \frac{\chi_E(u)}{u}\, d\lambda_u = \mu(E).$$

$\square$

5. *Sea $x \in \mathbb{S}^1$ entonces $x = e^{it}$ donde $t \in [0, 2\pi)$. Por lo tanto si $y = e^{is} \in \mathbb{S}^1$ se tiene que $xy = e^{it}e^{is} = e^{i(t+s)}$.*
Sea $E \subset \mathbb{S}^1$ definimos $\tilde{E} = \{t \in [0, 2\pi) \mid e^{it} \in E\}$ y sea $\tilde{\lambda} = \lambda(mod\ 2\pi)$. Definimos $\mu : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ como:

$$\mu(E) = \int\limits_{\tilde{E}} e^{it} d\tilde{\lambda}$$

Vamos a demostrar que es una medida de Haar. Sea $y = e^{is} \in \mathbb{S}^1$ entonces:

$$\mu(yE) = \int\limits_{s+\tilde{E}} e^{it} d\tilde{\lambda} = \int\limits_{\tilde{E}} e^{it} d\tilde{\lambda} = \mu(E)$$

Ejemplo 3.13. *Por el Ejemplo 2.3, sabemos que*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un grupo localmente compacto, además la función $\varphi : G \to \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a > 0\}$ dada por $\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a, b)$ es un homeomorfismo.
Vamos a mostrar que $\mu(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \frac{1}{a^2} d\lambda_a d\lambda_b$, es una medida de Haar izquierda, donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
μ es una medida semi-regular, porque lo es en $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ y φ es un homeomorfismo, sólo falta ver que es invariante bajo traslaciones izquierdas.
Sea $x = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$. Entonces:

$$\mu(xE) = \iint\limits_{\varphi(xE)} \frac{1}{a^2} dadb = \int\int \frac{\chi_{\varphi(xE)}(a, b)}{a^2} dadb.$$

Notamos que $(a, b) \in \varphi(xE)$ si y sólo si $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in xE$ que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1/c & -d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/c & (b-d)/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$$

Por lo tanto

$$\mu(xE) = \int\int \frac{\chi_{\varphi(E)}(a/c, (b-d)/c)}{a^2} dadb.$$

Si hacemos el cambio de variable $u = a/c$ y $v = (b-d)/c$, entonces el Jacobiano es $J_{u,v} = \begin{pmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix}$ y por el Teorema de Cambio de Variable obtenemos

$$\mu(xE) = \int\int \frac{\chi_{\varphi(E)}(u,v)c^2}{a^2} dudv = \int\int \frac{\chi_{\varphi(E)}(u,v)}{u^2} dudv = \mu(E).$$

El ejemplo anterior y el grupo $\mathscr{GL}(n)$ son casos particulares del siguiente resultado.

Proposición 3.14. *Sea G un grupo localmente compacto supongamos que existe un homeomorfismo, $\varphi : G \to U$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Si para toda $x \in G$ la función $u \to \varphi(x\varphi^{-1}(u))$ es la restricción de U a un mapeo afín $L_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ entonces la fórmula siguiente define una medida de Haar izquierda sobre G.*

$$\mu(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \frac{1}{|det(L_{\varphi^{-1}(u)})|} d\lambda_u,$$

donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sean $x \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$. Observamos que $det(L_{\varphi^{-1}(u)}) \neq 0$ ya que φ es invertible y además $L_{ab} = L_a L_b$ y $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$. Por otro lado:

$$\mu(xE) = \int\limits_{\varphi(xE)} \frac{1}{|det(L_{\varphi^{-1}(u)})|} \, d\lambda_u = \int \frac{\chi_{\varphi(xE)}(u)}{|det(L_{\varphi^{-1}(u)})|} \, d\lambda_u.$$

Como φ es un homeomorfismo, entonces $u \in \varphi(xE)$ si y sólo si $x^{-1}\varphi^{-1}(u) \in E$, por lo tanto

$$\mu(xE) = \int \frac{\chi_{\varphi(E)}(\varphi(x^{-1}\varphi^{-1}(u)))}{|det(L_{\varphi^{-1}(u)})|} \, d\lambda_u = \int \frac{\chi_{\varphi(E)}(L_{x^{-1}}(u))}{|det(L_{\varphi^{-1}(u)})|} \, d\lambda_u.$$

Haciendo el cambio de variable $v = \varphi(x^{-1}\varphi^{-1}(u)) = L_{x^{-1}}(u)$ obtenemos

$$\mu(xE) = \int \frac{\chi_{\varphi(E)}(v)|detL_x|}{|det(L_{x\varphi^{-1}(v)})|} \, d\lambda_v = \int \frac{\chi_{\varphi(E)}(v)}{|det(L_{\varphi^{-1}(v)})|} \, d\lambda_v = \mu(E).$$

□

Ejemplo 3.15. *Continuando con el Ejemplo 3.12*

6. *La función $\varphi : \mathscr{GL}(n) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como:*

$$\varphi \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (a_{1,1}, \cdots, a_{1,n}, \cdots, a_{n,1}, \cdots, a_{n,n})$$

   es un homeomorfismo. Por lo tanto la función

$$\mu(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \frac{1}{|det(L_{\varphi^{-1}(u)})|} d\lambda_u, \quad E \in \mathscr{B}(\mathscr{GL}(n)),$$

   es una medida de Haar izquierda.

Capítulo 4

Propiedades de la medida de Haar.

Las propiedades de la medida de Haar y las propiedades topológicas del grupo se relacionan entre sí y aquí se prueba la equivalencia entre unas y otras. La función modular es presentada, se examinan algunas de sus propiedades y su relación con la medida de Haar derecha además se calcula explícitamente en cada uno de nuestros ejemplos.
Al igual que en la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, el axioma de elección es usado para exhibir subconjuntos que no son medibles en grupos no discretos. Por último en los grupos no unimodulares se construye un conjunto con medida de Haar izquierda finita pero de medida de Haar derecha infinita.

4.1. Relación entre las propiedades del grupo y las propiedades de la medida.

Los siguientes resultados relacionan características propias del grupo topológico G con propiedades de la medida de Haar.

Proposición 4.1. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces G es discreto si y sólo si $\mu(\{x\}) > 0$ para alguna $x \in G$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si G es discreto, $\{x\}$ es abierto para toda $x \in G$, por lo tanto $\mu(\{x\}) > 0$ para toda $x \in G$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mu(\{x\}) > 0$ para alguna $x \in G$, dado que μ es una medida de Haar izquierda tenemos que $\mu(\{y\}) = \mu(\{x\}) > 0$ para todo $y \in G$. Sin perder generalidad podemos suponer que $\mu(\{x\}) = 1$.
Como μ es semi-regular, $\mu(\{x\}) = inf\,\{\mu(U) \mid x \in U, U \text{ abierto}\}$. Por lo tanto podemos considerar sólo conjuntos abiertos U tales que $\mu(U) < \infty$.
Si $\{x\}$ no es un conjunto abierto, para todo conjunto abierto U que lo contenga, existe $y \in U$ tal que $y \neq x$, entonces

$$\mu(U) = \mu(U - \{y\}) + \mu(\{y\}) \geq \mu(\{x\}) + 1$$

que es una contradicción. En consecuencia G es discreto.

$\square$

Proposición 4.2. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces μ es una medida finita si y sólo si G es compacto.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea K un compacto con interior no vacio tal que $\mu(K) > 0$.
Sean $x_1, \cdots, x_n \in G$ tales que $x_i K$ son ajenos dos a dos, entonces

$$n\mu(K) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i K) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i K\right) \leq \mu(G)$$

Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_1 K, \cdots, x_n K\}$ son ajenos dos a dos, y si $x \neq x_i$ para toda $i = 1, \cdots, n$ se tiene que $(\bigcup_{i=1}^{n} x_i K) \cap xK \neq \emptyset$. Sea $x \in G$ entonces $x \in (\bigcup_{i=1}^{n} x_i K)K^{-1}$. Por lo cual, $G = (\bigcup_{i=1}^{n} x_i K)K^{-1}$ es compacto.

$\Leftarrow$) Como μ es semi-regular y G es compacto, se tiene que $\mu(G) < \infty$ por lo cual μ es finita.

$\square$

Nota. De ahora en adelante, dado G un grupo compacto y μ denotará la medida de Haar normalizada, es decir, $\mu(G) = 1$.

Proposición 4.3. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces μ es σ-finita sí y sólo si G es σ-compacto.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que μ es σ-finita. Sin perder generalidad, existen conjuntos abiertos U_n con $\mu(U_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.
Sean $V \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta tal que $\overline{V}$ es compacto, $n \in \mathbb{N}$ y

$$\Omega =: \left\{ A \subset G \;\middle|\; \begin{array}{ll} xV \cap U_n \neq \emptyset & \text{para todo } x \in A \\ xV \cap yV \cap U_n = \emptyset & \text{para todo } x, y \in A \end{array} \right\}$$

con el orden parcial, $A \leq B$ si y sólo si $A \subset B$.
Para una familia A_α con $\alpha \in \mathscr{A}$, $A = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha$ cumple que $A_\alpha \leq A$ para toda $\alpha \in \mathscr{A}$ y $A \in \Omega$.
Entonces podemos escoger un elemento maximal $A \in \Omega$. Vamos a demostrar que

A es a lo más numerable. Ya que $xV \cap U_n$ es abierto, tenemos que $\mu(xV \cap U_n) > 0$. Si $A_i = \{x \in A \mid \mu(xV \cap U_n) > 1/i\}$ entonces

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x \in A \mid \mu(xV \cap U_n) > 1/i\}\,.$$

Por el mismo desarrollo de la proposición anterior, cada A_i es finita, entonces A es a lo más numerable.
Además si $x \in U_n \setminus A$, por ser A maximal, se tiene que existe $y \in A$ tal que $xV \cap yV \cap U_n \neq \emptyset$, entonces $U_n \subset \bigcup_{x \in A} xVV^{-1}$.
Así pues,

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x \in A_n} x\overline{V}(\overline{V})^{-1}$$

es σ-compacto.

$\Leftarrow$) Como G es σ-compacto se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde K_n son conjuntos compactos. Además ya que μ es semi-regular se tiene que $\mu(K_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto G es σ-finito.

$\square$

Lo que sucede en el Ejemplo 1.21 es un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 4.4. *Sea G un grupo localmente compacto y sea μ una medida de Haar izquierda. Entonces μ es regular si y sólo si G es discreto o σ-compacto.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si G es σ-compacto, entonces μ es σ-finita, por la Proposición 1.20 se tiene que μ es regular.
Si G es discreto, μ es la medida de conteo que es regular.

$\Leftarrow$) Supongamos que G no es σ-compacto ó discreto. Sea V una vecindad de e tal que $\overline{V}$ es compacta y H el subgrupo generado por V, entonces $H = \bigcup_{n=1}^{\infty}(V \cup V^{-1})^n$ es un subgrupo abierto, cerrado y σ-compacto.
Como G no es σ-compacto, hay una infinidad de clases laterales izquierdas. Por el **axioma de elección** escogemos un punto de cada clase lateral izquierda y llamamos S a la unión de los puntos.
Sea K un conjunto compacto, existen $x_1, \cdots, x_n$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i H$. Por la elección de S y ya que las clases son ajenas, se tiene que $K \cap S$ es finito.
Dada $x \notin S$ y U una vecindad compacta de x, $U \cap S$ es finito y no contiene a x, por lo tanto podemos escoger una vecindad abierta V de x tal que $V \cap S = \emptyset$. Así pues, S es cerrado y por construcción, S no es compacto.

Si $K \subset S$ es un conjunto compacto, K es finito y ya que G no es discreto, $\mu(K) = 0$.
Si U es un conjunto abierto que contiene a S, $U \cap xH \neq \emptyset$ para toda $x \in G$ y es abierto. Por lo tanto $\mu(U \cap xH) > 0$ para toda $x \in G$. Y en consecuencia $\mu(U) = \infty$.
Pero μ es semi-regular, entonces $\mu(S) = inf\,\{\mu(U) \mid S \subset U,\ U \text{ es abierto}\}$ por lo tanto $\mu(S) = \infty$.
Entonces $\mu(S) \neq 0 = sup\,\{\mu(K) \mid K \subset S,\ K \text{ es compacto}\}$. Así pues, μ no es regular.

□

4.2. Medida de Haar derecha.

Dada una medida de Borel μ definiremos una nueva medida $\check{\mu}$. Demostraremos que μ es una medida de Haar izquierda si y sólo si $\check{\mu}$ es una medida de Haar derecha.

Definición 4.5. *Sean G un grupo localmente compacto y μ una medida de Borel sobre $\mathscr{B}(G)$. Definimos $\check{\mu} : \mathscr{B}(G) \to \mathbb{R}$ como $\check{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ para todo $E \in \mathscr{B}(G)$.*

Proposición 4.6. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces*

$$\check{\check{\mu}}(E) = \mu(E) \quad \text{para todo } E \in \mathscr{B}(G)$$

Demostración. Sea $E \in \mathscr{B}(G)$, se tiene que

$$\check{\check{\mu}}(E) = \check{\mu}(E^{-1}) = \mu((E^{-1})^{-1}) = \mu(E)$$

□

Proposición 4.7. *$\check{\mu}$ es una medida.*

Demostración.

1. Sea $E \in \mathscr{B}(G)$, entonces $\check{\mu}(E) = \mu(E^{-1}) \geq 0$.

2. $\check{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

3. Sean $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathscr{B}(G)$ ajenos dos a dos, entonces

$$\check{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^{-1}\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \check{\mu}(E_i).$$

□

Proposición 4.8. *Sea G un grupo localmente compacto y sea μ una medida de Borel regular. Entonces μ es una medida de Haar izquierda si y sólo si $\check{\mu}$ es una medida de Haar derecha.*

Demostración. Como $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ para todo $x, y \in G$, se sigue $(Ex)^{-1} = x^{-1}E^{-1}$ para todo $E \subset G$. Si μ es una medida de Haar izquierda, obtenemos

$$\check{\mu}(Ex) = \mu((Ex)^{-1}) = \mu(x^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \check{\mu}(E), \text{ para todo } E \subset \mathscr{B}(G).$$

Si $\check{\mu}$ es una medida de Haar derecha se tiene

$$\mu(xE) = \check{\mu}((xE)^{-1}) = \check{\mu}(E^{-1}x^{-1}) = \check{\mu}(E^{-1}) = \mu(E), \text{ para todo } E \subset \mathscr{B}(G).$$

□

Corolario 4.9. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces existe una medida de Haar derecha, que es única salvo por multiplicación por constantes.*

4.3. La función modular.

En esta sección presentaremos la función modular, la calcularemos explícitamente en nuestros ejemplos y veremos algunas propiedades. Además encontraremos una relación entre la medida de Haar izquierda y la medida de Haar derecha por medio de la función modular. Por último dado un grupo G no unimodular encontraremos un conjunto con medida de Haar izquierda finita y derecha infinita.

Lema 4.10. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda, entonces la función $\mu_x : \mathscr{B}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\mu_x(E) = \mu(Ex)$ es una medida de Haar izquierda.*

Demostración. Como la función $u \longmapsto ux$ es un homeomorfismo, μ_x es una medida semi-regular de G.
Sean $y \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$, entonces

$$\mu_x(yE) = \mu(yEx) = \mu(Ex) = \mu_x(E)$$

por lo que es una medida de Haar izquierda. □

Por lo tanto del lema anterior sabemos que $\mu_x = c_x\mu$, a continuación vamos a definir la función modular.

Definición 4.11. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Definimos la **función modular** $\Delta : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donde $\Delta(x)$ es el escalar tal que $\mu_x = \Delta(x)\mu$.*

Δ está bien definida ya que si ν otra medida izquierda, eixste $c \in \mathbb{R}$ tal que $\nu = c\mu$. Entonces $\nu_x(E) = \nu(Ex) = c\mu(Ex) = c\Delta(x)\mu(E) = \Delta(x)\nu(E)$.

Los ejemplos 2.2 tienen función modular $\Delta \equiv 1$. Veamos un ejemplo mas interesante

Ejemplo 4.12. *Para el grupo*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

y la medida dada en el Ejemplo 2.3, la función modular está dada por

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a}.$$

Sean $x = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ *y* $E \in \mathscr{B}(G)$*, entonces:*

$$\mu_x(E) = \mu(Ex) = \int\int_{\varphi(Ex)} \frac{1}{a^2} dadb = \int\int \frac{\chi_{\varphi(Ex)}(a,b)}{a^2} dadb.$$

Observamos que $(a,b) \in \varphi(Ex)$ *si y sólo si* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y esto es equivalente a que* $\begin{pmatrix} a/c & b - ad/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/c & -d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$*, por lo tanto*

$$\mu_x(E) = \int\int \frac{\chi_{\varphi(E)}(a/c, b - ad/c)}{a^2} dadb.$$

Haciendo el cambio de variable $u = a/c$ *y* $v = b - ad/c$ *obtenemos*

$$\mu_x(E) = \int\int \frac{c\chi_{\varphi(E)}(u,v)}{a^2} dudv = \frac{1}{c} \int\int \frac{\chi_{\varphi(E)}(u,v)}{u^2} dudv = \frac{1}{c}\mu(E).$$

Veamos algunos propiedades de la función modular.

Proposición 4.13. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda, y* $f \in \mathscr{L}(G)$*. Entonces* $\int f_x d\mu = \Delta(x) \int f d\mu$

Demostración. Sea $E \in \mathscr{B}(G)$. Claramente $(\chi_E)_x = \chi_{Ex}$ por lo tanto

$$\int (\chi_E)_x d\mu = \int \chi_{Ex} d\mu = \mu(Ex) = \Delta(x)\mu(E) = \Delta(x) \int \chi_E d\mu$$

Por la linealidad de la integral $\int f_x d\mu = \Delta(x) \int f d\mu$ para toda función simple f.
Sea $f \in \mathscr{L}^+(G)$ entonces existen funciones simples f_n con $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ tales que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$. Por el Teorema de la Convergencia Monótona tenemos

$$\int f_x d\mu = \int \lim_n (f_n)_x d\mu = \lim_n \int (f_n)_x d\mu = \lim_n \Delta(x) \int (f_n) d\mu = \Delta(x) \int f d\mu.$$

Sea $f \in \mathscr{L}(G)$ entonces existen $f^+, f^- \in \mathscr{L}^1(G)$ tales que $f = f^+ - f^-$, aplicando lo anterior a f^+ y a f^- obtenemos

$$\int f_x d\mu = \int f_x^+ d\mu - \int f_x^- d\mu = \Delta(x) \int f^+ d\mu - \Delta(x) \int f^- d\mu = \Delta(x) \int f d\mu.$$

□

Proposición 4.14. *Sea G un grupo localmente compacto y Δ su función modular, entonces*

1. *Δ es continua.*

2. *$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$ para cualquiera $x, y \in G$. ES decir, es un homomorfismo entre el grupo G y el grupo $\mathbb{R}^+$.*

Demostración.

1. Sea $f \in \mathscr{K}_*^+(G)$ entonces $\int f d\mu > 0$.
   Por la proposición anterior

$$\Delta(x) = \frac{\int f(yx)d\mu(y)}{\int f d\mu}$$

   y es continua por la Proposición 2.18.

2. Sean $x, y \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$, entonces

$$\Delta(xy)\mu(E) = \mu(Exy) = \Delta(y)\mu(Ex) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(E) = \Delta(x)\Delta(y)\mu(E).$$

□

Definición 4.15. *Sea G un grupo localmente compacto. Decimos que G es **unimodular** si $\Delta(x) = 1$ para toda $x \in G$.*

Lema 4.16. *Si G es un grupo abeliano, entonces G es unimodular.*

Demostración. Sea $x \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$ como G es abeliano se obtiene que

$$\mu_x(E) = \mu(Ex) = \mu(xE) = \mu(E),$$

por lo cual $\mu_x = \mu$. □

Lema 4.17. *Un grupo localmente compacto es unimodular si y sólo si cualquier medida de Haar izquierda es medida de Haar derecha.*

Demostración. Sean G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda, $x \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$.

$\Leftarrow$) Si G es unimodular tenemos que

$$\mu(Ex) = \Delta(x)\mu(E) = \mu(E)$$

Por lo cual μ es una medida de Haar derecha.

$\Rightarrow$) Si μ es una medida derecha, entonces

$$\mu_x(E) = \mu(Ex) = \mu(E)$$

Por la tanto $\Delta \equiv 1$.

$\square$

Proposición 4.18. *Sea G un grupo compacto. Entonces G es unimodular.*

Demostración. Como Δ continua, $\Delta(G) \subset \mathbb{R}$ es compacto y por lo tanto acotado. Por la Proposición 4.14, para $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\Delta(x^n) = (\Delta(x))^n$.
Si existiera $x \in G$ con $\Delta(x) > 1$ se tendría que $\Delta(x^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, lo que es una contradicción. Si existiera $x \in G$ con $\Delta(x) < 1$, como

$$1 = \Delta(e) = \Delta(xx^{-1}) = \Delta(x)\Delta(x^{-1})$$

Entonces $\Delta(x^{-1}) > 1$ lo que no es posible por el argumento anterior. Por lo tanto $\Delta \equiv 1$. $\square$

La siguiente proposicion nos relaciona una medida de Haar izquierda con una medida de Haar derecha por medio de la función modular.

Proposición 4.19. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda, y $E \in \mathscr{B}(G)$. Se cumple que*

$$\check{\mu}(E) = \int_E \Delta(x^{-1}) d\mu(x).$$

Demostración. Introducimos la medida de Borel $\nu : \mathscr{B}(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\nu(E) = \int_E \Delta(x^{-1}) d\mu(x), \text{ para todo } E \in \mathscr{B}(G).$$

Afirmamos que ν es una medida regular y de Haar derecha.
Definimos $G_n = \left\{x \in G : \frac{1}{n} < \Delta(x) < n\right\}$, $n \geq 1$.
Observemos que si $x \in G_n$ entonces $x^{-1} \in G_n$.
Sea U un conjunto abierto, mostraremos que

$$\nu(U \cap G_n) = sup\left\{\nu(K) : K \text{ es compacto y } K \subset U \cap G_n\right\}, n \geq 1$$

Caso 1) $\mu(U \cap G_n) = \infty$.
Como

$$\nu(U \cap G_n) = \int_{U\cap G_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) \geq \frac{1}{n}\mu(U \cap G_n) = \infty.$$

Entonces se tiene que

$$\nu(U \cap G_n) = \infty \geq sup\left\{\nu(K) : K \text{ es compacto y } K \subset U \cap G_n\right\}.$$

Ya que μ es semi-regular, existe un conjunto compacto K con $K \subset U \cap G_n$ tal que $\mu(K) > Mn$, por lo cual

$$\nu(K) = \int\limits_K \Delta(x^{-1}) d\mu(x) > \frac{1}{n}\mu(K) > \frac{1}{n}Mn = M$$

Por lo tanto $\nu(U \cap G_n) = sup\{\nu(K) : K \text{ es compacto y } K \subset U \cap G_n\}$.

Caso 2) $\mu(U \cap G_n) < \infty$.
Sea $\epsilon > 0$ encontraremos un compacto K con $K \subset U \cap G_n$ tal que $\nu(K) \geq \nu(U \cap G_n) - \epsilon$. Por la semi-regularidad de μ existe un conjunto compacto $K \subset U \cap G_n$ que cumple $\mu(K) \geq \mu(U \cap G_n) - \frac{\epsilon}{n}$ y como $\mu(U \cap G_n) < \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} \nu(K) &= \int\limits_K \Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \int\limits_{U \cap G_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) - \int\limits_{K^c \cap U \cap G_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) \\ &= \nu(U \cap G_n) - \int\limits_{K^c \cap U \cap G_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x). \end{aligned}$$

Pero

$$\int\limits_{K^c \cap U \cap G_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) \leq n\mu(K^c \cap U \cap G_n) = n(\mu(U \cap G_n) - \mu(K)) < n\frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\nu(K) = \nu(U \cap G_n) - \int\limits_{K^c \cap U \cap G_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) > \nu(U \cap G_n) - \epsilon.$$

En consecuencia $\nu(U \cap G_n) = sup\{\nu(K) : K \text{ es compacto y } K \subset U \cap G_n\}$.
Notamos que $U_n = U \cap G_n \nearrow U$, si $n \to \infty$, por lo que

$$\chi_{U_n}(x)\Delta(x^{-1}) \nearrow \chi_U(x)\Delta(x^{-1}) \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Por el teorema de la Convergencia Monótona tenemos que

$$\nu(U) = sup\{\nu(K) : K \text{ es compacto y } K \subset U\}.$$

Sea $E \in \mathscr{B}(G)$. Si $\nu(E) = \infty$ entonces

$$\nu(E) = inf\{\nu(U) : U \text{ es abierto y } E \subset U\}.$$

Si $\nu(E) < \infty$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$E_1 = E \cap G_1, \quad \text{y} \quad E_n = E \cap (G_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i), \quad \text{para toda} \quad n > 1.$$

Por la semi-regularidad de μ, dada $\epsilon > 0$, existe un conjunto abierto $U_n \subset G_n$ tal que

$$E_n \subset U_n \quad \text{ y } \quad \mu(E_n) + \frac{\epsilon}{n2^n} > \mu(U_n)$$

Como $\mu(E) < \infty$, entonces

$$\mu(U_n \setminus E_n) = \mu(U_n) - \mu(E_n) < \frac{\epsilon}{n2^n}$$

Así pues

$$\nu(U_n) = \nu(E_n) + \int\limits_{E_n^c \cap U_n} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) < \nu(E_n) + n\mu(E_n^c \cap U_n).$$

Por lo cual $\nu(U_n) < \nu(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$.
Sea $U = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Como los conjuntos E_n son ajenos dos a dos se tiene que

$$\nu(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(U_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\nu(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\Big) = \nu(E) + \epsilon.$$

Por lo tanto

$$\nu(E) = inf \left\{ \nu(U) : U \text{ es abierto y } E \subset U \right\}.$$

Sea K un conjunto compacto, como Δ es una función continua, alcanza su máximo en K^{-1}. Entonces

$$\nu(K) = \int\limits_K \Delta(x^{-1}) d\mu(x) \leq \int\limits_K \|\Delta\|_\infty d\mu(x) = \|\Delta\|_\infty \mu(K) < \infty$$

Por lo tanto ν es semi-regular y distinta de cero ya que Δ es una función positiva. Veamos que es de Haar derecha. Sea $y \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
\nu(Ey) &= \int \chi_{Ey}(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \int \chi_{Ey}(x)\Delta((xy^{-1})^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(x) \\
&= \Delta(y^{-1}) \int \chi_{Ey}(x)\Delta((xy^{-1})^{-1})d\mu(x) \\
&= \Delta(y^{-1}) \int (\chi_E(x)\Delta(x^{-1}))_y d\mu(x) = \Delta(y^{-1})\Delta(y) \int \chi_E(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x) \\
&= \nu(E)
\end{aligned}$$

Por lo tanto existe $c > 0$ tal que $\nu = c\check{\mu}$.
Por la continuidad de Δ, existe $U \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta, simétrica y con $\overline{U}$ compacto, tal que $|\Delta(x^{-1}) - 1| < \epsilon$ para toda $x \in U$ entonces

$$(1-\epsilon)\mu(U) \leq \int\limits_U \Delta(x^{-1})d\mu(x) = \nu(U) \leq (1+\epsilon)\mu(U).$$

Por lo cual
$$\frac{(1-\epsilon)\mu(U)}{\check{\mu}(U)} \leq c = \frac{\nu(U)}{\check{\mu}(U)} \leq \frac{(1+\epsilon)\mu(U)}{\check{\mu}(U)}.$$
Como U es simétrica, $1-\epsilon \leq c \leq 1+\epsilon$. En consecuencia
$$\check{\mu}(E) = \int_E \Delta(x^{-1}) d\mu(x).$$

□

Corolario 4.20. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda. Entonces G es unimodular si y sólo si $\mu = \check{\mu}$.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Si G es unimodular, $\Delta \equiv 1$.
$$\check{\mu}(E) = \int_E \Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \int_E d\mu(x) = \mu(E), \text{ para todo } E \in \mathscr{B}(G).$$

$\Rightarrow$) Supongamos que existe $x_0 \in G$ tal que $\Delta(x_0) \neq 1$. Dado que $\Delta(x^{-1}) = 1/\Delta(X)$ para toda $x \in G$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Delta(x_0) > 1$. Entonces
$$0 < \check{\mu}(U^{-1}) = \int_{U^{-1}} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) < \int_{U^{-1}} 1 d\mu(x) = \mu(U^{-1}) < \infty.$$
Lo cual es una contradicción.

□

Corolario 4.21. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda, ν una medida derecha y $E \in \mathscr{B}(G)$. Entonces $\mu(E) = 0$ si y sólo si $\nu(E) = 0$.*

Demostración. Sea $E \in \mathscr{B}(G)$, ya que $\check{\mu}$ es una medida derecha existe $c > 0$ tal que
$$\nu(E) = c\check{\mu}(E) = \int_E \Delta(x^{-1}) d\mu(x).$$
Además como $\Delta(x) > 0$ tenemos que $\nu(E) = 0$ si y sólo si $\mu(E) = 0$. □

Corolario 4.22. *Sea G un grupo localmente compacto, ν una medida de Haar derecha. Entonces $\nu(xE) = \Delta(x^{-1})\nu(E)$ para toda $x \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$.*

Demostración. Sean $x \in G$ y $E \in \mathscr{B}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\nu(xE) &= c\check{\mu}(xE) = c\int\limits_{xE} \Delta(y^{-1})d\mu(y) = c\int \chi_{xE}(y)\Delta(y^{-1})d\mu(y) \\
&= c\int \chi_E(x^{-1}y)\Delta(y^{-1})d\mu(y) = c\int \chi_E(x^{-1}y)\Delta(y^{-1})\Delta(x)\Delta(x^{-1})d\mu(y) \\
&= c\int \chi_E(x^{-1}y)\Delta((x^{-1}y)^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(y) = c\Delta(x^{-1})\int \chi_E(y)\Delta(y^{-1})d\mu(y) \\
&= c\Delta(x^{-1})\check{\mu}(E) = \Delta(x^{-1})\nu(E)
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.23. *Sean G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda y $f \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$. Entonces $\int f(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) = \int f(s)d\mu(s)$.*

Demostración. Si $f = \chi_E$, el teorema anterior garantiza que

$$\int \chi_E(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) = \int\limits_{E^{-1}} \Delta(s^{-1})d\mu(s) = \check{\mu}(E^{-1}) = \mu(E) = \int \chi_E(s)d\mu(s).$$

Por la linealidad de la integral el resultado es válido para funciones simples.
Sea $f \in \mathscr{L}^+(G)$ entonces existen funciones simples f_n con $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ tales que $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$. Por el Teorema de la Convergencia Monótona tenemos

$$\begin{aligned}
\int f(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) &= \int \lim_n f_n(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) = \lim_n \int (f_n)(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) \\
&= \lim_n \int (f_n)d\mu = \int f d\mu.
\end{aligned}$$

Sea $f \in \mathscr{L}(G)$ entonces existen $f^+, f^- \in \mathscr{K}^+(G)$ tales que $f = f^+ - f^-$, si aplicamos lo anterior a f^+ y a f^- obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int f(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) &= \int f^+(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) - \int f^-(s^{-1})\Delta(s^{-1})d\mu(s) \\
&= \int f^+(s)d\mu(s) - \int f^-(s)d\mu(s) = \int f(s)d\mu(s).
\end{aligned}$$

□

El Corolario 4.20 es una caracterización de cuando un grupo topológico G es unimodular. El siguiente resultado es otra caracterización.

Proposición 4.24. *Sea G grupo localmente compacto no unimodular. Entonces existe un conjunto abierto W tal que $\mu(W) < \infty$ pero $\mu(W^{-1}) = \infty$.*

Demostración. Como G no es unimodular, existe $a \in G$ tal que $\Delta(a) \leq 1/2$ y por lo tanto $\Delta(a^{-1}) \geq 2$. Por la continuidad de Δ existe $U \in \mathscr{N}_e$ abierto, simétrico y tal que $U^2 \subset \Delta^{-1}((1/2, 2))$.

Supongamos que para algunas $i < j \in \mathbb{N}$ se cumple que $a^i U \cap a^j U \neq \emptyset$, entonces existen $u, v \in U$ tales que $a^i u = a^j v$, es decir, $a^{j-i} = uv^{-1} \in U^2$, pero eso significa que $\Delta(a^{j-i}) \in (1/2, 2)$ lo es una contradicción. En consecuencia se cumple que

$$a^i U \cap a^j U = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \in \mathbb{N}$$

Como G no es discreto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $W_k \in \mathscr{N}_e$ abierto, simétrico tal que

$$\mu(W_k) < 2^{-k} \quad \text{y} \quad W_{k+1} \subset W_k \subset U$$

Ya que $\mu(W_k) > 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una sucesión de naturales no decreciente $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ tales que $2^{1-m_k} \leq \mu(W_k)$.
Sea $n_1 = m_1$ y para $k \in \mathbb{N}$ definimos $n_{k+1} = max\{m_{k+1}, n_k + 1\}$, entonces $(n_k)_{k=i}^{\infty}$ es una sucesión creciente, tal que $2^{1-n_k} \leq \mu(W_k) \leq 2^{-k}$.

Sea $W = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} a^{n_k} W_k$. Observemos que $a^{n_i} W_i \cap a^{n_j} W_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces

$$\mu(W) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} a^{n_k} W_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(a^{n_k} W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(W_k) \leq 1$$

Por otro lado si $x \in a^{n_k} W_k$, existe $w \in W_k$ tal que $x = a^{n_k} w$, por lo cual

$$\Delta(x^{-1}) = \Delta(w^{-1})\Delta(a^{-1})^{n_k} > 1/2(2^{n_k}) = 2^{n_k - 1} > 1/\mu(W_k)$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \mu(W^{-1}) &= \int_W \Delta(x^{-1}) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a^{n_k} W_k} \Delta(x^{-1}) d\mu(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a^{n_k} W_k} \frac{1}{\mu(W_k)} d\mu(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(a^{n_k} W_k)}{\mu(W_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty. \end{aligned}$$

□

4.4. Conjuntos no medibles.

Dado G es un grupo no discreto encontraremos un conjunto no medible con respecto a la medida de Haar izquierda. Es importante notar que la construcción es la misma que la de Vitali para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
Después veremos algunos ejemplos de dos conjuntos K y L con medida cero y tales que KL es igual al grupo.

Proposición 4.25. *Sea G un grupo localmente compacto no discreto. Entonces existe $E \subset G$ tal que no es medible con respecto a la medida de Haar izquierda.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de e tal que $\mu(U) < \infty$ y $V \in \mathscr{N}_e$ una vecindad abierta y simétrica tal que $V^3 \subset U$.
Sea $D \subset V$ un conjunto numerable y $H \leq G$ el subgrupo generado por D. Como H tiene la forma

$$H = \left\{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m} \mid x_i \in D,\ n_i \in \{1, -1\},\ m \in \mathbb{N}\right\},$$

H es numerable.

Sea $\{Hx_\alpha\}_{\alpha \in A}$ el conjunto de todas las clases laterales por la derecha de H. Definimos $A_0 = \{\alpha \in A \mid (Hx_\alpha) \cap V \neq \emptyset\}$, observemos que $A_0 \neq \emptyset$ ya que $He \cap V \neq \emptyset$.
Usando el axioma de elección para toda $\alpha \in A_0$, escogemos $y_\alpha \in Hx_\alpha \cap V$ y definimos $E = \{y_\alpha \mid \alpha \in A_0\}$.

Supongamos que E es medible. Observemos que $H \cap V^2$ es infinito numerable, ya que H es numerable y $D^2 = D^2 \cap V^2 \subset H \cap V^2$.
Además se cumple que $xE \cap yE = \emptyset$ si $x \neq y \in H \cap V^2$.
Entonces

$$(H \cap V^2)E = \bigcup_{x \in H \cap V^2} xE$$

es una unión ajena y numerable. Por lo que

$$\mu((H \cap V^2)E) = \mu\left(\bigcup_{x \in H \cap V^2} xE\right) = \sum_{x \in H \cap V^2} \mu(xE).$$

Por lo tanto

$$\mu((H \cap V^2)E) = 0 \quad \text{ó} \quad \mu((H \cap V^2)E) = \infty.$$

Sea $x \in V$, existe $\alpha \in A_0$ tal que $x \in Hy_\alpha$ por lo cual $x = hy_\alpha$ con $h \in H$ y $y_\alpha \in E$, pero $h = xy_\alpha^{-1} \in V^2$ por lo tanto $x \in (H \cap V^2)E$.
Además

$$(H \cap V^2)E \subset V^2 E \subset V^3 \subset U.$$

de donde se sigue que

$$V \subset (H \cap V^2)E \subset U$$

y

$$0 < \mu(V) \leq \mu((H \cap V^2)E) \leq \mu(U) < \infty.$$

En consecuencia E no es medible. □

Finamente damos un par de ejemplos de conjuntos K y L con medida cero con $G = KL$.

Ejemplo 4.26. *Sea $X = \mathbb{R}$ y C el conjunto clásico de Cantor. Definimos*

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty}(C + \{n\})) \cup (C + \{-n\})$$

Entonces D es σ-compacto y tiene medida cero. Además $D + D = \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.27. *Sea $H = \{0, 1\}$ con la métrica discreta y la operación suma módulo 2. Sea $G = H^{\mathbb{N}}$ con la operación componente a componente y la topología producto. Entonces:*

a) G es un grupo discreto.
En efecto, el punto $(0, 0, \cdots)$ es el elemento neutro y cada punto es su propio inverso. Es claro que las operaciones son continuas por que consideramos la topología producto de topologías discretas. Además es un grupo compacto por el teorema de Tychonoff.

b) Existen dos conjuntos compactos K y L tales que $\mu(K) = \mu(L) = 0$ y $G = K + L$.
Definimos

$$L = \left\{(a_j) \in G \mid a_{2n_j - 1} = 1 \qquad \text{para toda} \quad j \in \mathbb{N}\right\}$$

y

$$K = \left\{(a_j) \in G \mid a_{2n_j} = 0 \qquad \text{para toda} \quad j \in \mathbb{N}\right\},$$

Entonces por la definición de la medida producto.

$$\mu(L) \leq \mu(\left\{(a_j) \in G \mid a_{2n_j - 1} = 1 \qquad \text{para toda} \quad j = 1, \cdots, k\right\}) = \frac{1}{2^k}$$

y

$$\mu(K) \leq \mu(\left\{(a_j) \in G \mid a_{2n_j} = 0 \qquad \text{para toda} \quad j = 1, \cdots, k\right\}) = \frac{1}{2^k}$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\mu(K) = \mu(L) = 0$. Sea $(a_1, a_2, \cdots) \in G$. Entonces

$$\begin{array}{rllllll} (a_1, a_2, \cdots) & = (& 1 & , a_2, & 1 & , a_4, \cdots) & \in \quad L \\ & +(& a_1 - 1 & , 0, & a_3 - 1 & , 0, \cdots) & \in \quad K \end{array}$$

Por lo tanto $G = K + L$.

Observación. *Dada $f : G \to [0, 1]$ definida por $f((a_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$. Se probará que*

$$\lambda(B) = \mu(f^{-1}(B)) \qquad \text{para todo } B \in \mathscr{B}([0, 1])$$

Vamos a probar que f es suprayectiva y continua.
Sea $x \in [0, 1]$, entonces $x \overset{(2)}{=} 0.a_1 a_2 a_3 \cdots$ representa la expresión de x en base 2. Sea $(a_i) \in G$ entonces

$$f((a_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} = 0.a_1 a_2 \cdots \overset{(2)}{=} x.$$

Así pues, f es suprayectiva.
Sea $\epsilon > 0$ y $(a_i) \in G$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Definimos

$$U = \{(a_1, \cdots, a_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots) \mid b_j \in \{0,1\}, \ j \leq n+1\}$$

Entonces U es un conjunto abierto que contiene a (a_i). Dada $(c_j) \in U$ se tiene que

$$|f((c_i)) - f((a_i))| = \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} (a_j - c_j) 2^{-j} \Big| < \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Por lo tanto f es continua. Así pues la función $\mu(f^{-1}(B))$ es una medida en $[0,1]$. Vamos a ver que es una medida de Haar, para esto basta demostrarlo con los diádicos. Sea

$$B = \Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big) \qquad \text{con} \qquad n \in \mathbb{N} \qquad y \qquad k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$$

Podemos descomponer de manera única

$$\frac{k}{2^n} = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} \qquad \text{donde } b_i \in \{0,1\}, \ i = 1, \cdots, n.$$

Entonces

$$\mu(f^{-1}(B)) = \{(a_i) \mid a_i = b_i \text{ para toda } i = 1, \cdots, n\} = \frac{1}{2^n} = \lambda\Big(\Big[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\Big)\Big)$$

Por lo tanto μ_f es una medida de Haar y λ también lo es, por lo que tenemos que $\mu = c\lambda$, pero

$$1 = \mu(G) = \mu(f^{-1}([0,1]) = c\lambda([0,1]) = c1.$$

Entonces $c = 1$. Así pues

$$\lambda(B) = \mu(f^{-1}(B)) \qquad \text{para todo } B \in \mathscr{B}([0,1]).$$

Capítulo 5

Caracterización de medidas absolutamente continuas.

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera de ellas se presenta una demostración del Teorema de la densidad de Lebesgue en $\mathbb{R}$, el cual afirma que en cierto sentido cualquier conjunto medible en $\mathbb{R}$ se comporta localmente como un intervalo. Después este teorema se generaliza a borelianos acotados en grupos localmente compactos.
La segunda sección caracteriza a las medidas absolutamente continuas con respecto a una medida de Haar, μ. Se dará una condición suficiente y necesaria para que una medida con signo sea absolutamente continua con respecto a la medida μ. Veremos el Teorema clásico de Steinhaus que nos dice que dado un conjunto E con medida positiva, se cumple que el interior de EE^{-1} es no vacio, y se demostrará que una medida con signo es absolutamente regular si y sólo si cumple esta propiedad.
Por último se caracterizará a las medidas con signo singulares respecto a la medida de Haar, como aquellas que están concentradas en un conjunto B tal que BB^{-1} tiene interior vacío.

5.1. Teorema de la densidad de Lebesgue.

A continuación mostramos el Teorema de la densidad de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y después la generalización en un grupo localmente compacto.

Definición 5.1. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y λ la medida de Lebesgue. Decimos que E tiene **densidad** $d = d_E(x)$ en x si el siguiente límite existe y es igual a d.*

$$d = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

Observamos que si d existe, $d \leq 1$.
Además definimos

$$\phi(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid d_E(x) \text{ existe y } d_E(x) = 1\}$$

Teorema 5.2 (Densidad de Lebesgue). *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Entonces $\phi(E)$ es un conjunto medible y $\lambda(E\Delta\phi(E)) = 0$.*

Demostración. Si $E \setminus \phi(E)$ es nulo para todo conjunto medible E, $\phi(E) \setminus E$ también lo es, ya que

$$\phi(E) \setminus E \subset (\mathbb{R} \setminus E) \setminus \phi(\mathbb{R} \setminus E).$$

En efecto, si $x \in \phi(E) \setminus E$, entonces $d_E(x) = 1$ y $x \notin E$. Además

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda[x-h, x+h]}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus E) \cap [x-h, x+h])}{2h}.$$

Por lo tanto $d_{\mathbb{R}\setminus E}(x) = 0$ y $x \in (\mathbb{R} \setminus E) \setminus \phi(\mathbb{R} \setminus E)$.
Como la medida de Lebesgue es completa, basta demostrar que $E \setminus \phi(E)$ es un conjunto nulo.
Caso 1) E es un conjunto acotado.
Sea $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$A_n = \left\{ x \in E \;\middle|\; \liminf_{h\to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

entonces

$$E \setminus \phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$\subseteq$) Sea $x \in E \setminus \phi(E)$, si existe d tenemos que $d_E(x) < 1$ por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} = d_E(x) < 1 - \frac{1}{n}$$

Si d no existe, entonces

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1,$$

ya que si fuera 1, sería igual al límite superior y entonces existiría d. En ambos caso $x \in A_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

$\supseteq$) Si $x \in A_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\liminf_{h\to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1 - \frac{1}{n}.$$

Si existe $d_E(x)$ se tendría que

$$d = \liminf_{h\to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1$$

por lo tanto $x \in E \setminus \phi(E)$.

Así pues, es suficiente probar que A_n es un conjunto nulo para toda $n \in \mathbb{N}$.
Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^*(A_n) > 0$. Denotamos $A = A_n$, existe un conjunto abierto U con $A \subset U$ y

$$\lambda^*(U) < \frac{\lambda^*(A)}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Sea

$$\mathscr{I} = \Big\{ I \subset U \mid I \text{ es un intervalo cerrado y } \lambda(E \cap I) \leq \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\lambda(I) \Big\}.$$

$\mathscr{I}$ cumple las siguiente condiciones

a) $\mathscr{I}$ incluye intervalos arbitrariamente pequeños alrededor de cada punto $x \in A$.
Sean $x \in A$ por la definición de A existe $H > 0$ tal que para toda $h < H$ se cumple que

$$\frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} < 1 - \frac{1}{n}$$

por lo tanto $[x-h, x+h] \in \mathscr{I}$ para toda $h < H$.

b) Para cualquier sucesión de intervalos ajenos $\{I_n\} \subset \mathscr{I}$ se tiene que

$$\lambda^*\Big(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big) > 0$$

Ya que

$$\begin{aligned} \lambda^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big) &\leq \lambda\Big(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E \cap I_n) \leq \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \\ &\leq \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\lambda(U) < \lambda^*(A). \end{aligned}$$

$\mathscr{I}$ es una cubierta de Vitali en A. Ver ([13], p. 392)
Sea $I_1 \in \mathscr{I}$ un elemento arbitrario. Definimos:

$$\mathscr{I}_1 = \{I \in \mathscr{I} \mid I \cap I_1 = \emptyset\} \quad \text{y} \quad d_1 = \sup\{\lambda(I) \mid I \in \mathscr{I}_1\}$$

Debido a que $\lambda^*(A \setminus I_1) > 0$ y la condición a), se tiene que $\mathscr{I}_1 \neq \emptyset$. Escogemos $I_2 \in \mathscr{I}_1$ tal que $\lambda(I_2) > \frac{d_1}{2}$. Sea

$$\mathscr{I}_2 = \{I \in \mathscr{I}_1 \mid I \cap I_2 = \emptyset\}$$

las propiedades a) y b) nos garantizan que $\mathscr{I}_2 \neq \emptyset$. Definimos

$$d_2 = \sup\{\lambda(I) \mid I \in \mathscr{I}_2\}$$

Sea $I_3 \in \mathscr{I}_2$ tal que $\lambda(I_3) > \frac{d_2}{2}$.
Así las cosas, construimos una sucesión ajena de intervalos $I_1, I_2, \cdots$ tales que

$$\mathscr{I}_{n+1} = \{I \in \mathscr{I}_n \mid I \cap I_n = \emptyset\} \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \lambda(I_{n+1}) > \frac{d_n}{2} = \frac{\sup\{\lambda(I) \mid I \in \mathscr{I}_n\}}{2}$$

Sea $B = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, por b) se tiene que $\lambda^*(B) > 0$. Recordando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(I_n) < \lambda^*(A) < \infty$$

se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\lambda^*(B)}{3}$$

Definimos el conjunto J_n como el intervalo con el mismo centro que I_n y 3 veces más grande, es decir, $\lambda(J_n) = 3\lambda(I_n)$. Entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(J_n) = 3 \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda^*(B)$$

Por lo tanto $\{J_n \mid n \geq N+1\}$ no es una cubierta de B.
Sea $x \in B \setminus \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$. Por la propiedad a) y recordando que $B = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ existe $I \in \mathscr{I}_N$ tal que tiene a x como centro y $\lambda(I) > 0$. Supongamos que $I \in \mathscr{I}_n$ para toda $n > N$ entonces

$$0 < \lambda(I) \leq d_n < 2\lambda(I_{n+1})$$

para toda $n > N$. Por lo tanto

$$\infty = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\lambda^*(B)}{3} < \infty.$$

Como lo anterior no es posible, si

$$k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid I_n \cap I \neq \emptyset\}$$

entonces $I \in \mathscr{I}_{k-1}$ y por lo tanto $\lambda(I) \leq d_{k-1} < 2\lambda(I_k)$.
Sea $y \in I \cap I_k$, como x es el centro de I se tiene que

$$|x - y| \leq \frac{\lambda(I)}{2} < \lambda(I_k).$$

Por construcción de J_k se tiene que $x \in J_k$, que es una contradicción.
Así pues A es un nulo y debido a que la medida es completa, A es medible.

Caso 2) Si E no es un conjunto acotado.
Sea $E_n = E \cap [-n, n]$ entonces $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y

$$E \setminus \phi(E) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \setminus \phi(E_n)).$$

En efecto, si $x \in E \setminus \phi(E)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in (-n, n)$, entonces $x \in E_n$. Si además d existe, $d_E(x) = d_{E_n}(x)$. Por lo tanto $x \in E_n \setminus \phi(E_n)$.
Ya que está contenido en una unión numerable de nulos, tenemos que $E \setminus \phi(E)$ es un nulo. $\square$

Definición 5.3. *Sean E y F conjuntos medibles. Definimos la siguiente relación de equivalencia.*

$$E \sim F \Leftrightarrow \lambda(E \Delta F) = 0.$$

Teorema 5.4. *Dados E y F conjuntos medibles se tienen las siguientes propiedades*

1. $\phi(E) \sim E$.
2. $\phi(E) = \phi(F)$ *si* $E \sim F$.
3. $\phi(\emptyset) = \emptyset$ *y* $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
4. $\phi(E) \subset \phi(F)$ *si* $E \subset F$.
5. $\phi(E \cap F) = \phi(E) \cap (F)$.
6. $\phi(E) \cup \phi(F) \sim \phi(E \cup F)$. *Pero la igualdad no siempre se da.*

Demostración.

1. Es el teorema anterior.
2. Primero observemos que para toda $h > 0$ se cumple

   $$E \cap [x-h, x+h] \subset F \cap [x-h, x+h] \cup (E \Delta F)$$

   Sea $x \in E \cap [x-h, x+h]$. Si $x \in F$, $x \in F \cap [x-h, x+h]$. En caso contrario, $x \in E \Delta F$.
   Debido a esto

   $$\begin{aligned} 1 &= \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(F \cap [x-h, x+h]) + \lambda(E \Delta F)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(F \cap [x-h, x+h])}{2h} \leq 1. \end{aligned}$$

   Así pues $\phi(E) \subset \phi(F)$. Análogamente $\phi(E) \subset \phi(F)$.
3. Sea $x \in \mathbb{R}$ se sigue que

   $$\lim_{h \to 0} \frac{\lambda(\emptyset \cap [x-h, x+h])}{2h} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(\mathbb{R} \cap [x-h, x+h])}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h}{2h} = 1.$$

4. Dada $x \in \phi(E)$,

   $$1 = \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\lambda(F \cap [x-h, x+h])}{2h} \leq 1,$$

   por lo tanto $x \in \phi(F)$.

5. La primera contención es clara por la monotonía. Para la segunda observamos que

$$\lambda(A \setminus (E \cap F)) \leq \lambda(A \setminus E) + \lambda(A \setminus F), \text{ para todo } A \text{ medible y acotado}$$

de donde

$$\lambda(A) - \lambda(A \cap E \cap F) \leq 2\lambda(A) - \lambda(A \cap E) - \lambda(A \cap F).$$

En particular si $A = [x-h, x+h]$,

$$\lambda(E \cap [x-h, x+h]) + \lambda(F \cap [x-h, x+h]) - 2h \leq \lambda(E \cap F \cap [x-h, x+h]).$$

Así pues, si $x \in \phi(E) \cap \phi(F)$ es claro que $x \in \phi(E \cap F)$.

6. Sabemos que $E \sim \phi(E)$ y $F \sim \phi(F)$. Recordando que

$$(A \cup B)\Delta(C \cup D) \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta D)$$

tenemos que $(E \cup F) \sim \phi(E) \cup \phi(F)$ y por transitividad

$$\phi(E \cup F) \sim \phi(E) \cup \phi(F).$$

Pero la igualdad no se da, por ejemplo, si $E = [0,1]$ y $F = [1,2]$, tenemos que $\phi(E) = (0,1)$, $\phi(F) = (1,2)$ y $\phi(E \cup F) = (0,2)$.

□

El siguente resultado es una generalización del teorema de densidad de Lebesgue.

Teorema 5.5 (de densidad)**.** *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Sea E un boreliano acotado. Sea U una vecindad abierta y acotada de e. Definimos la función $f_U : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$f_U(x) = \frac{\mu(E \cap Ux)}{\mu(Ux)}.$$

Entonces f_U converge a χ_E en $\mathscr{L}^1(G)$ cuando $U \to e$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Observamos que

$$f_U(x) = \frac{\mu(E \cap Ux)}{\mu(Ux)} = \frac{\mu(Ex^{-1}x \cap Ux)}{\mu(Ux)} = \frac{\mu((Ex^{-1} \cap U)x)}{\mu(Ux)} = \frac{\mu(Ex^{-1} \cap U)\Delta(x)}{\mu(U)\Delta(x)}.$$

Por la Proposición 5.9, existe una vecindad abierta y simétrica V de e, tal que si $y \in V$ entonces $f(y) = \rho(yE\Delta E) < \epsilon/2$. Sea $U \subset V$ una vecindad abierta de e y F un boreliano en G. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_F (f_U(x)-\chi_E(x))d\mu(x)\right| &= \left|\int\limits_F \Big(\frac{\mu(Ex^{-1}\cap U)}{\mu(U)} - \int\limits_U \frac{\chi_E(x)}{\mu(U)}d\mu(y)\Big)d\mu(x)\right| \\
&= \left|\int\limits_F\int\limits_U \Big(\frac{\chi_{Ex^{-1}}(y)}{\mu(U)} - \frac{\chi_E(x)}{\mu(U)}\Big)d\mu(y)d\mu(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{\mu(U)}\int\limits_F\int\limits_U \Big|\chi_{Ex^{-1}}(y)-\chi_E(x)\Big|d\mu(y)d\mu(x) \\
&= \frac{1}{\mu(U)}\int\limits_U\int\limits_F \chi_{y^{-1}E\Delta E}(x)d\mu(x)d\mu(y) \\
&\leq \frac{1}{\mu(U)}\int\limits_U \mu(y^{-1}E\Delta E)d\mu(y) \leq \frac{1}{\mu(U)}\int\limits_U \frac{\epsilon}{2}d\mu(x) = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Sea $P=\{x\in G \mid f_U(x)-\chi_E(x)\geq 0\}$ y $N=\{x\in G \mid f_U(x)-\chi_E(x)<0\}$, de lo anterior se sigue

$$\begin{aligned}
\int\limits_G |f_U(x)-\chi_E(x)|d\mu(x) &= \int\limits_P |f_U(x)-\chi_E(x)|d\mu(x) + \int\limits_N |f_U(x)-\chi_E(x)|d\mu(x) \\
&= \left|\int\limits_P f_U(x)-\chi_E(x)d\mu(x)\right| + \left|\int\limits_N f_U(x)-\chi_E(x)d\mu(x)\right| < \epsilon.
\end{aligned}$$

□

5.2. Caracterización de las medidas absolutamente continuas respecto a la medida de Haar.

Esta sección se inicia con dos demostraciones del Teorema clásico de Steinhaus, una de ellas muy corta. A continuación se obtiene una generalización de este teorema, la cual llamamos la versión fuerte.

La parte principal de esta sección consiste en la prueba de una condición necesaria y suficiente para que una medida con signo ν definida sobre $\mathscr{B}(G)$ con G un grupo localmente compacto sea absolutamente continua con respecto a la medida de Haar μ. Esta condición es: Si $\nu(E)>0$ entonces EE^{-1} tiene interior no vacío.

También se prueba que si ν está concentrada en algún conjunto B tal que BB^{-1} tiene interior vacío, entonces ν es singular con respecto a μ.

Definición 5.6. *Sea X un espacio de Hausdorff y μ, ν dos medidas. Decimos que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ si para cualquier conjunto $E\in\mathscr{B}(X)$ que satisface que $\mu(E)=0$ entonces se cumple que $\nu(E)=0$. Y lo denotamos como $\nu << \mu$.*

Si μ, ν son dos medidas con signo (Apéndice A). Decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ si $|\nu|$ es absolutamente continua respecto a $|\mu|$.

Proposición 5.7. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto, μ una medida de Borel semi-regular en X y ν una medida con signo semi-regular de Borel finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

a) Existe una función $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, tal que $\nu(E) = \int\limits_E f d\mu$ para todo $E \in \mathscr{B}(X)$.

b) ν es absolutamente continua con respecto a μ.

c) Si K es un conjunto compacto que satisface $\mu(K) = 0$ entonces $\nu(K) = 0$.

Demostración. Es claro que a) implica b) y que b) implica c).

c) $\Rightarrow$ b) Sea $E \in \mathscr{B}(X)$ tal que $\mu(E) = 0$. Por la Proposición 1.20 para toda $\epsilon > 0$ existe $K \subset E$ un conjunto compacto tal que $|\nu(E) - \nu(K)| < \epsilon$.
Como $K \subset E$ se tiene que $\mu(K) = 0$ y por lo tanto $\nu(K) = 0$. Entonces ν es absolutamente continua con respecto a μ pues $|\nu(E)| < \epsilon$ para toda $\epsilon > 0$.

b) $\Rightarrow$ a) Por la semi-regularidad de ν existe una sucesión de compactos (K_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |\nu|(K_n) = |\nu|(X)$.
Definimos $\mu_0 : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{R}$ como $\mu_0(E) = \mu(E \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n)$, entonces μ_0 es una medida σ-finita.
Sea $E \subset \mathscr{B}(X)$ tal que $\mu_0(E) = 0$. Ya que ν es finita y $|\nu|(X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$ se cumple que

$$|\nu|(E) = |\nu|(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) + |\nu|(E \cap (X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)) = 0.$$

Por lo tanto $\nu << \mu_0$.
Por el Teorema de Radon-Nikodym existe una función $g \in \mathscr{L}^1(X,\mu_0)$ tal que $\nu(E) = \int\limits_E g d\mu_0$ para todo $E \in \mathscr{B}(X)$.
Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = g(x)\chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n}(x) \text{ para toda } x \in X.$$

Entonces $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ y $\nu(E) = \int\limits_E g d\mu_0 = \int\limits_E f d\mu$ para todo $E \in \mathscr{B}(X)$.

$\square$

Definición 5.8. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Definimos $\rho : \mathscr{B}(G) \times \mathscr{B}(G) \to \overline{\mathbb{R}}$ como $\rho(E,F) = \mu(E \Delta F)$.*

Proposición 5.9. *Sea $E \in \mathscr{B}(G)$ un conjunto de medida finita. Definimos $f : G \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \rho(xE, E)$. Entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por la regularidad de μ existe un conjunto compacto $C \subset E$ tal que $\mu(E \setminus C) < \epsilon/4$ y un conjunto abierto U con $C \subset U$ tal que $\mu(U \setminus C) < \epsilon/4$. Por la Proposición 2.6 existe una vecindad abierta y simétrica V de e tal que $VC \subset U$. Si $xy^{-1} \in V$

$$\begin{aligned} \rho(xC, yC) &= \mu((xC)\Delta(yC)) = \mu(xC \setminus yC) + \mu(yC \setminus xC) \\ &= \mu(y^{-1}xC \setminus C) + \mu(x^{-1}yC \setminus C) \leq \mu(VC \setminus C) + \mu(VC \setminus C) \\ &\leq 2\mu(U \setminus C) < \epsilon/2. \end{aligned}$$

Recordando que para cualesquiera conjuntos A, B y C se cumple que

$$A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\mu(xE\Delta E) - \mu(yE\Delta E)| \leq \mu(xE\Delta yE) \\ &\leq \mu((xE)\Delta(xC)) + \mu((xC)\Delta(yC)) + \mu((yC)\Delta(yE)) \\ &= \mu(E \setminus C) + \mu(xC\Delta yC) + \mu(E \setminus C) < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto f es uniformemente continua. □

Teorema 5.10 (Steinhaus, 1920)**.** *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Sea $E \in \mathscr{B}(G)$ con $0 < \mu(E) < \infty$. Entonces EE^{-1} contiene una vecindad de e.*

Se proporcionaran dos pruebas. La primera usa la proposición anterior y la segunda no, sin embargo es una prueba muy corta y se debe a K. Stromberg.

Demostración. #1 Sea $\epsilon = 2\mu(E)$. Por la proposición anterior, el conjunto definido como $U = \{x \in G \mid f(x) < \epsilon\}$ es abierto, además $f(e) = 0$ por lo tanto U es no vacío. Vamos a demostrar que $U \subset EE^{-1}$.
Si $x \in U$

$$\mu(xE \setminus E) + \mu(E \setminus xE) = \mu(xE\Delta E) < 2\mu(E).$$

Lo que implica que $\mu(xE \setminus E) < \mu(E)$ ó $\mu(E \setminus xE) < \mu(E)$ por lo tanto $xE \cap E \neq \emptyset$. □

Demostración. #2 Por la regularidad de μ en conjuntos con medida finita, podemos escoger un conjunto compacto $K \subset E$ tal que $\mu(E) - \frac{\mu(E)}{4} < \mu(K)$ y un conjunto abierto U tal que $E \subset U$ tal que $\mu(U) < \mu(E) + \frac{\mu(E)}{2}$. Por lo tanto

$$\mu(U) < \frac{3}{2}\mu(E) = 2\frac{3}{4}\mu(E) < 2\mu(K).$$

Por la Proposición 2.6 existe una vecindad abierta V de e tal que $VK \subset U$. Vamos a demostrar que $V \subset KK^{-1}(\subset EE^{-1})$.
Sea $v \in V$ y supongamos que $vK \cap K = \emptyset$ entonces

$$\mu(U) \geq \mu(vK \cup K) = \mu(K) + \mu(vK) = 2\mu(K),$$

lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $vK \cap K \neq \emptyset$ y $v \in KK^{-1}$. $\square$

El Teorema de Steinhaus tiene una versión más fuerte, para la cual necesitamos la siguiente proposición

Proposición 5.11. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar. Definimos las siguientes transformaciones:*

$$\begin{array}{lll} S : G \times G \to G \times G & \textit{definida como} & S(x,y) = (x, xy), \\ R : G \times G \to G \times G & \textit{definida como} & R(x,y) = (y, x), \\ Q : G \times G \to G \times G & \textit{definida como} & Q(x,y) = (xy, y^{-1}). \end{array}$$

Entonces S, R y Q son transformaciones biyectivas que preservan la medida producto $\mu \times \mu$. Además para toda $x \in G$ y $E,\ F \in \mathscr{B}(G)$ se tiene que

$$(Q(E \times F))_{x^{-1}} = xE \cap F^{-1}$$

Demostración. S y R son transformaciones biyectivas, de hecho $S^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y)$ y $R^{-1} = R$. Además

$$Q(x,y) = (xy, y^{-1}) = (xy, (xy)^{-1}x) = S^{-1}(xy, x) = S^{-1}R(x, xy) = S^{-1}RS(x,y).$$

Por lo que Q es también biyectiva y basta mostrar que S y R preservan la medida, ya que en tal caso S^{-1} también lo hace.
Sea $E \in \mathscr{B}(G)$ y $x \in G$, entonces $(S(E))_x = xE_x$ y $(R(E))_x = E^x$.
Aplicando el Teorema de Fubini obtenemos

$$(\mu \times \mu)(S(E)) = \int \mu((S(E))_x) d\mu = \int \mu(xE_x) d\mu = \int \mu(E_x) d\mu = \mu \times \mu(E)$$

y

$$(\mu \times \mu)(R(E)) = \int \mu((R(E))_x) d\mu = \int \mu(E^x) d\mu = (\mu \times \mu)(E).$$

Sea $F \in \mathscr{B}(G)$, las siguientes proposiciones son equivalentes

$$\begin{array}{ccc} y \in (Q(E \times F))_{x^{-1}}, & (x^{-1}, y) \in Q(E \times F), & (x^{-1}y, y^{-1}) \in E \times F, \\ x^{-1}y \in E,\ y^{-1} \in F, & y \in xE \cap F^{-1} & \end{array}$$

$\square$

Teorema 5.12 (Steinhaus, versión fuerte)**.** *Sea G un grupo localmente compacto μ una medida de Haar izquierda. Sean $E, F \in \mathscr{B}(G)$ tales que $0 < \mu(E),\ \mu(F) < \infty$. Entonces el interior de FE^{-1} es distinto del vacío.*

Demostración. Sean E y F borelianos con medida finita y positiva. Definimos la función $g : G \to \mathbb{R}$ como $g(x) = \mu((xE)\Delta F)$, vamos a demostrar que g es uniformemente continua.
Sea $\epsilon > 0$, por la Proposición 5.9 existe una vecindad abierta y simétrica V de e tal que $\mu((xE)\Delta(yE)) < \epsilon$ si $y^{-1}x \in V$. Por lo tanto

$$|g(x) - g(y)| = |\mu(xE\Delta F) - \mu(yE\Delta F)| \leq \mu(xE\Delta yE) < \epsilon.$$

Como g es continua, $U = \{x \in G \mid g(x) < \mu(E) + \mu(F)\}$ es abierto. Veamos que U no es vacío.
Por la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(E)\mu(F^{-1}) &= (\mu \times \mu)(E \times F^{-1}) = (\mu \times \mu)(Q(E \times F^{-1})) = \int \mu((Q(E \times F^{-1})_x) d\mu \\ &= \int \mu(x^{-1}E \cap F) d\mu. \end{aligned}$$

En consecuencia $\mu((xE) \cap F) > 0$ para alguna $x \in G$. Por lo tanto

$$g(x) = \mu(xE\Delta F) = \mu(xE \setminus F) + \mu(F \setminus xE) < \mu(E) + \mu(F).$$

Así pues, U es distinto del vacío. Si $x \in U$,

$$\mu((xE)\Delta F) = \mu(xE \setminus F) + \mu(F \setminus xE) < \mu(E) + \mu(F),$$

por lo cual $\mu(xE \setminus F) < \mu(E)$ ó $\mu(F \setminus xE) < \mu(F)$. Entonces $xE \cap F \neq \emptyset$ y por lo tanto $U \subset FE^{-1}$. □

El siguiente teorema caracteriza a las medidas con signo que son absolutamente continuas con respecto a la medida de Haar izquierda.

Teorema 5.13. *Sea G un grupo σ-compacto y μ una medida de Haar izquierda. Sea ν una medida con signo regular con variación total $|\nu|$. Entonces son equivalentes:*

a) *Todo conjunto E con $|\nu|(E) > 0$ cumple que $(EE^{-1})^\circ \neq \emptyset$.*

b) *Todo conjunto E con $|\nu|(E) > 0$ cumple que $EE^{-1} \in \mathscr{N}_e$.*

c) *Si A y B son conjuntos con $|\nu|(A) > 0$ y $|\nu|(B) > 0$ entonces $(AB^{-1})^\circ \neq \emptyset$.*

d) $\nu << \mu$.

Demostración. Si $\nu << \mu$ entonces $\mu(K) > 0$, $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) > 0$. Por lo tanto del Teorema de Steinhaus versión débil y fuerte se sigue que d) implica a b) y a c).
Cada uno de los incisos b) y c) implican a). Vamos a demostrar que a) implica d), para eso necesitamos las siguientes dos proposiciones.

Proposición 5.14. *Sea G un grupo localmente compacto y compactamente generado. Sea $\{U_n\}$ una sucesión de vecindades abiertas de e. Entonces existe un subgrupo N compacto y normal tal que $N \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, G/N es metrizable y admite una base numerable para la topología cociente.*

Demostración. Sean $\{F_n\}$ una sucesión creciente de compactos tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y V_0 una vecindad de e tal que $\overline{V_0}$ es compacto.
Por las Proposiciones 2.6 y 2.7, existe una sucesión de vecindades abiertas y simétricas de e, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $V_n^2 \subset V_{n-1} \cap U_n$, $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$ y para toda $x \in F_n$ se cumple que $xV_nx^{-1} \subset V_{n-1}$.

Definimos $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ entonces $N \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Es claro que N es un subgrupo
Dada $z \in N^c$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \notin V_n$. Supongamos que $zV_{n+1} \cap V_{n+1} \neq \emptyset$ entonces

$$z \in V_{n+1}V_{n+1}^{-1} = V_{n+1}^2 \subset V_n$$

lo cual es una contradicción. Así pues, $zV_{n+1} \cap V_{n+1} = \emptyset$ y por lo tanto $z \in zV_{n+1} \subset N^c$, es decir, N es cerrado. Debido a que $N \subset V_0$, N es compacto.

Vamos a demostrar que es un subgrupo normal. Sean $x \in N$, $g \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que $gxg^{-1} \in V_n$. Ya que G es σ-compacto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g \in F_n$.

1) Si $n < m$ se tiene que $gxg^{-1} \in gV_mg^{-1} \subset V_{m-1} \subset \cdots \subset V_n$.

2) Si $n \geq m$, como los F_n son crecientes, entonces $g \in F_{n+1}$, por lo tanto

$$gxg^{-1} \in gV_{n+1}g^{-1} \subset V_n.$$

En consecuencia N es normal.

Sea $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica. Vamos a demostrar que $\{\pi(V_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de vecindades para N (el neutro) en G/N. Sea $\{wN \mid w \in W\}$ una vecindad de N en G/N, con $W \subset G$ un abierto.
Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $V_n \not\subset WN$. Entonces la familia $\mathscr{F} = \left\{\overline{V_n} \cap (WN)^c\right\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, ya que $\overline{V_n} \subset V_{n-1}$. Por lo tanto

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{V_n} \cap (WN)^c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n} \cap (WN)^c = N \cap (WN)^c = \emptyset$$

que es una contradicción, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $V_n \subset WN$. En consecuencia G/N tiene una base numerable de abiertos de N y G/N es metrizable. ([7], pág. 70). Por lo tanto, G/N, tiene una base numerable para sus abiertos. □

Proposición 5.15. *Sean G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda y ν una medida finita y regular que es singular respecto a μ. Sea $R \subset G$ un conjunto tal que $\nu(R^c) = 0$ y $\mu(R) = 0$. Entonces para todo conjunto compacto $K \subset R$ existe un boreliano P con $P \subset K$ tal que $(PP^{-1})^\circ = \emptyset$ y $\nu(K \setminus P) = 0$.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que G es compactamente generado.
Ya que la medida de Haar es regular y $\mu(K) = 0$, podemos escoger una sucesión de conjuntos abiertos U_i con $K \subset U_i$ tales que $\mu(U_i) < \frac{1}{i}$. Sean $W_i \in \mathscr{N}_e$ tales que $KW_i \subset U_i$.
Por la proposición anterior existe un subgrupo N normal y compacto tal que $N \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$ y G/N es metrizable y separable.
Ya que $KN \subset KW_i \subset U_i$, tenemos que $\mu(KN) = 0$ y $\mu((KN)^{-1}) = 0$.
Definimos $Z = \{x \in G \mid \nu(xKN) = 0\}$. Vamos a demostrar que $\{xN \mid x \in Z\}$ es denso en G/N.
Usando el Teorema de Fubini para $V \subset G$ un conjunto abierto no vacío y $\{vN \mid v \in V\}$ el abierto en G/N, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{VN} \nu(xKN)d\mu(x) &= \int \chi_{VN}(x)\nu(xKN)d\mu(x) = \int\int \chi_{VN}(x)\chi_{xKN}(y)d\nu(y)d\mu(x) \\
&= \int\int \chi_{VN}(x)\chi_{(KN)^{-1}}(y^{-1}x)d\mu(x)d\nu(y) \\
&= \int\int \chi_{VN}(yx)\chi_{(KN)^{-1}}(x)d\mu(x)d\nu(y) \\
&= \int\limits_{(KN)^{-1}} \int \chi_{VN}(yx)d\nu(y)d\mu(x) = 0.
\end{aligned}$$

Así pues, $\nu(xKN) = 0$, μ-c.d con $x \in VN$, además $\mu(VN) > 0$ por ser abierto. Tomamos $x \in VN$ tal que $\nu(xKN) = 0$, entonces $x \in Z$ y $xN \in \{vN \mid v \in V\}$. En consecuencia $\{xN \mid x \in Z\}$ es denso en G/N.

Sea $Z_1 = \{x \in G \mid \nu(KN \cap xKN) = 0\}$. Como $\nu(KN \cap xKN) \leq \nu(xKN)$ se tiene que $Z \subset Z_1$, por lo tanto Z_1 es denso en G/N.
Usando la separabilidad de G/N, podemos escoger $D \subset Z_1$ un conjunto numerable tal que $\{dN \mid d \in D\}$ sea denso en G/N.
Definimos $S = \bigcup\{KN \cap dKN \mid d \in D\}$. Entonces $S \subset KN$ y

$$\nu(S) \leq \sum_{d \in D} \nu(KN \cap dKN) = 0.$$

Sea $B = KN \setminus S$. Si $(BB^{-1})^\circ \neq \emptyset$, existe un conjunto abierto $V \neq \emptyset$ tal que $V \subset BB^{-1}$. Por la elección de D existe $d \in D$ tal que $dN \in \{vN \mid v \in V\}$. Entonces

$$dN \subset VN \subset BB^{-1}N.$$

Por lo cual existen $n_0,\ n_3 \in N$ y $k_1n_1,\ k_2n_2 \in B$ tales que $dn_0 = k_1n_1(k_2n_2)^{-1}n_3$,

$$k_1n_1 = dn_0n_3^{-1}k_2n_2 \in dNN^{-1}KN = dNKN = dNK.$$

así pues $k_1n_1 \in KN \cap dKN \subset S$ que es una contradicción ya que $B = KN \setminus S$. Por lo tanto $(BB^{-1})^\circ = \emptyset$.
Sea $P = K \setminus S$. Entonces $P = K \setminus S \subset KN \setminus S = B$, tiene tiene interior vacío y

$$\nu(K \setminus P) = \nu(K \cap S) \leq \nu(S) = 0.$$

□

Continuamos con la demostración del Teorema 5.13. Usando el Teorema de Descomposición de Lebesgue (Vér Apéndice A.34) existen γ y η medidas con signo tales que

$$\nu = \gamma + \eta, \quad \gamma << \mu \quad \text{y} \quad \eta \perp \mu.$$

Como $\gamma << \mu$, γ satisface a). Por lo tanto $\eta = \nu - \gamma$ satisface a).
Supongamos que $\eta \neq 0$. Entonces $|\eta|$ no es una medida trivial y $\eta \perp \mu$.
Sea R el conjunto tal que $|\eta|(R^c) = 0$ y $\mu(R) = 0$. Por la regularidad de η escogemos un compacto $K \subset R$ tal que $|\eta|(K) > 0$.
Entonces existe un conjunto $P \subset K$ tal que $|\eta|(P) = |\eta|(K)$ y $(PP^{-1})^\circ = \emptyset$. Escogemos un compacto $L \subset P$ con $|\eta|(L) > 0$, pero $(LL^{-1})^\circ \subset (PP^{-1})^\circ = \emptyset$, es una contradicción ya que cumplía con a). En consecuencia $\nu = \gamma << \mu$. □

También se tiene una caracterización de las medidas singulares con respecto a una medida de Haar izquierda.

Teorema 5.16. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces ν una medida regular finita es singular con respecto a μ si y sólo si ν está concentrada en un σ-compacto B tal que $(BB^{-1})^\circ = \emptyset$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ν es no negativa y está concentrada en E con $\mu(E) = 0$.
Usando la regularidad de ν y que es finita, podemos escoger conjuntos compactos $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset E$ tales que $\lim\limits_{i\to\infty} \nu(E \setminus K_i) = 0$.
Por la Proposición 5.15 para todo K_i con $i \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $P_i \subset K_i$ tal que $(P_iP_i^{-1})^\circ = \emptyset$ y $\nu(K_i) = \nu(P_i)$.

Sea (P_i, N_i) la descomposición de K_i, (N_i es un ν-nulo) y $N = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i$ entonces $\nu(K_i) = \nu(K_i \setminus N)$. Además $K_1 \setminus N \subset K_2 \setminus N \subset \cdots \subset E$.
Sea $F_0 = \emptyset$. Por la regularidad de ν, para toda $i \in \mathbb{N}$, escogemos conjuntos compactos F_i tales que

$$F_{i-1} \subset F_i \subset K_i \setminus N \quad \text{y} \quad |\nu(K_i \setminus N) - \nu(F_i)| < \frac{1}{i}.$$

Se cumplen las siguientes afirmaciones

a) $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset E$, por construcción de F_i.

b) $(F_iF_i^{-1})^\circ \subset (P_iP_i^{-1})^\circ$ por lo tanto $(F_iF_i^{-1})^\circ = \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sea $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Entonces B es σ-compacto y $B \subset E$. Como $F_i \subset F_{i+1}$, se tiene que

$$\nu(B) = \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \lim_{i\to\infty} \nu(F_i) = \lim_{i\to\infty} (\nu(K_i) + \frac{1}{i}) = \nu(E).$$

Como ν es finita, se tiene que $\nu(B^c) = \nu(E^c) + \nu(E \setminus B) = 0$ así pues ν está concentrada en B.

Vamos a demostrar que $BB^{-1} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_iF_i^{-1}$. Sea $x \in BB^{-1}$, entonces existen $f_i \in F_i$ y $f_j \in F_j$, para algunas $i,\ j \in \mathbb{N}$ tales que $x = f_if_j^{-1}$.
Sea $k = max\{i, j\}$ como los compactos F_i son crecientes, $f_i \in F_k$ y $f_j \in F_k$, por lo tanto $x \in F_kF_k^{-1}$.
Supongamos por último que $(BB^{-1})^\circ \neq \emptyset$, por el Teorema de Categoría de Baire (ver [17], p. 42) existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $(F_iF_i^{-1})^\circ \neq \emptyset$, lo que es una contradicción, por lo tanto $(BB^{-1})^\circ = \emptyset$.

$\Leftarrow$) Sea $\nu = \gamma + \eta$ la descomposición de Lebesgue, con $\gamma << \mu$ y $\eta \perp \mu$.
Si $\gamma \neq 0$ se tiene que $|\gamma|(B) > 0$, por el Teorema 5.13, $(BB^{-1})^\circ \neq \emptyset$ lo que es una contradicción, por lo tanto $\gamma = 0$ y $\nu = \eta \perp \mu$.

$\square$

Capítulo 6

Álgebra $\mathscr{L}^1(G)$.

En la primera sección hablaremos del espacio de las funciones reales medibles con integral finita, $\mathscr{L}^1(G)$, y definiremos la convolución de funciones. Probaremos que está bien definida como una operación de clases de $\mathscr{L}^1(G)$ y que con esta operación $\mathscr{L}^1(G)$ es un álgebra de Banach. Además caracterizaremos propiedades del grupo G en términos de propiedades del álgebra $\mathscr{L}^1(G)$.
En la segunda sección estudiaremos el espacio de todas las medidas con signo semiregulares, $M(G)$, y definiremos la convolución de medidas. Veremos que con esta operación junto con la suma, $M(G)$ es un álgebra de Banach y se probará que la familia de medidas absolutamente continuas, $M_a(G)$ constituye un ideal bilateral. Finalmente analizaremos la relación entre convolución de funciones y de medidas.

6.1. $\mathscr{L}^1(G)$.

Es bien sabido que el espacio $\mathscr{L}^1$ es un espacio de Banach. A continuación definiremos una operación en este espacio llamada convolución de manera que sea un álgebra de Banach. Además demostraremos que si dos funciones son continuas y de soporte compacto, la convolución vuelve a serlo. También mostraremos que la convolución preserva la convergencia en $\mathscr{L}^1(G)$.
Finalmente veremos algunos resultados que nos relacionan ciertas propiedades del grupo con las del álgebra.

Definición 6.1. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda, y sean $f,\ g \in \mathscr{L}^1(G, \mathscr{B}(G), \mu)$. Definimos la* ***convolución*** *de f con g, denotada por $f * g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$f * g(t) = \begin{cases} \int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) & \text{si la función } \ s \mapsto f(s)g(s^{-1}t) \in \mathscr{L}^1(G, \mu) \\ \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Lema 6.2. *Sean $f, g \in \mathscr{L}^1(G)$ entonces en la definición de la convolución se puede reemplazar el término $f(s)g(s^{-1}t)$ por cualquiera de los siguientes*

1. $f(ts)g(s^{-1})$.

2. $f(s^{-1})g(st)\Delta(s^{-1})$.

3. $f(ts^{-1})g(s)\Delta(s^{-1})$.

Demostración. Como μ es una medida de Haar, si se reemplazan s por ts no se altera la integral por lo tanto

$$\int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s) = \int f(ts)g(s^{-1})d\mu(s).$$

Ahora por el Corolario 4.23 tenemos que

$$\int \int f(s^{-1})g(st)\Delta(s^{-1})d\mu(s) = \int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s)$$

y además

$$\int f(ts^{-1})g(s)\Delta(s^{-1})d\mu(s) = \int f(ts)g(s^{-1})d\mu(s).$$

□

Proposición 6.3. *Sean $f, g \in \mathscr{K}(G)$. Entonces $f * g \in \mathscr{K}(G)$.*

Demostración. Dadas f y $g \in \mathscr{K}(G)$, con $C = sop(f)$ y $D = sop(g)$, definimos la función h como $h(s,t) = f(t)g(t^{-1}s)$. Si $h(s,t) \neq 0$ implica que $t \in C$ y $t^{-1}s \in D$ por lo tanto $s \in DC$.
Si $s \notin DC$, la función $t \to h(s,t)$ es idénticamente cero, por lo que

$$f * g(s) = \int h(s,t)d\mu(t) = 0$$

Así pues, $f * g$ tiene soporte compacto.
Para ver que es continua, dada $\epsilon > 0$ escogemos $V \in \mathscr{N}_e$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si $xy^{-1} \in V$. Por el lema anterior se tiene que

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(y)| &= |\int f(xs)g(s^{-1})d\mu(s) - \int f(ys)g(s^{-1})d\mu(s)| \\ &\leq \int |f(xs) - f(ys)||g(s^{-1})|d\mu(s) < \epsilon \int |g(s^{-1})|d\mu(s) \end{aligned}$$

como $|\check{g}| \in \mathscr{K}(G)$, entonces $f * g \in \mathscr{K}(G)$. □

Proposición 6.4. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda y sea $f \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$, entonces existe una sucesión (K_n) de conjuntos compactos tal que $f(x) = 0$ si $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.*

Demostración. Sea

$$E_n = \left\{ x \in G : |f(x)| > \frac{1}{n} \right\} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\{x \in G : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Además

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) = \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu \leq \int_{E_n} |f| d\mu \leq \int_{E} |f| d\mu < \infty$$

por lo tanto $\mu(E_n) < \infty$.
Sean U_n conjuntos abiertos tales que tales que $\mu(U_n) < \infty$ y H un subgrupo abierto y σ-compacto (ver Lema **??**), es decir, $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ con cada K_m compacto.
Notemos que

$$\{g \in G \mid U_n \cap gH \neq \emptyset\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ g \in G \mid \mu(U_n \cap gH) > \frac{1}{k} \right\}$$

pues $U_n \cap gH$ es abierto y es a los más numerable porque $\mu(U_n) < \infty$. Por lo tanto

$$U_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} g_{n,i} H = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} g_{n,i} K_m.$$

$\{g_{n,i} K_m : i, n, m \in \mathbb{N}\}$ es lo que buscábamos ya que si

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} g_{n,i} K_m$$

entonces

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{y} \quad f(x) = 0.$$

□

Lema 6.5. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda y sea $F : G \times G \longrightarrow G \times G$ definida como $F(s,t) = (s, s^{-1}t)$ Entonces F es un homeomorfismo que preserva la medida, es decir,*

$$(\mu \times \mu)(A) = (\mu \times \mu)(F^{-1}(A)) \quad \textit{para toda} \quad A \in \mathscr{B}(G) \times \mathscr{B}(G)$$

Demostración. La inversa de F es $F^{-1}(s,t) = (s, st)$ y ambas son continuas, por lo tanto F es un homeomorfismo.
Sea $U \subset G \times G$ un conjunto abierto, ya que

$$F^{-1}(U) = \{(s, st) : (s,t) \in U\}$$

se tiene que

$$(F^{-1}(U))_s = \{st : (s,t) \in U\} = s\{t : (s,t) \in U\} = sU_s.$$

Entonces

$$(\mu \times \mu)(F^{-1}(U)) = \int \mu((F^{-1}(U))_x) d\mu = \int \mu(xU_x) d\mu = \int \mu(U_x) d\mu = (\mu \times \mu)(U).$$

Dados $E \in \mathscr{B}(G)$ y $\epsilon > 0$ existen conjuntos abiertos U y V con $E \subset U$ y $F^{-1}(E) \subset V$ tales que

$$|(\mu \times \mu)(U) - (\mu \times \mu)(E)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |(\mu \times \mu)(V) - (\mu \times \mu)(F^1(E))| < \frac{\epsilon}{2}$$

Como F es un homeomorfismo, $W = U \cap F(V)$ W es un conjunto abierto. Observemos que

$$E \subset W \subset U \quad \text{y} \quad F^{-1}(E) \subset F^{-1}(W) \subset V$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\mu \times \mu(E) - \mu \times \mu(F^{-1}(E))| &\leq |\mu \times \mu(E) - \mu \times \mu(W))| \\
&+ |\mu \times \mu(F^{-1}(W)) - \mu \times \mu(F^{-1}(E))| \\
&\leq |\mu \times \mu(V) - \mu \times \mu(F^{-1}(E))| + |\mu \times \mu(E) - \mu(U)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

A continuación probamos el Teorema de convolución de Young.

Proposición 6.6. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda y $f,\ g \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$. Entonces*

a) $s \mapsto f(s)g(s^{-1}t) \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$ μ-c.d., para toda $t \in G$.

b) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ (Desigualdad de Young). Y por lo tanto $f * g \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$.

Demostración.

a) Sean $s,t \in G$ entonces

$$(s,t) \longmapsto f(s)g(t) \in \mathscr{L}^1(G \times G).$$

Por el lema anterior

$$(s,t) \longmapsto f(s)g(s^{-1}t) \in \mathscr{L}^1(G \times G).$$

La función $(s,t) \mapsto f(s)g(s^{-1}t)$ tiene soporte σ-compacto, por la Proposición 6.4 y por el Teorema A.39,

$$s \mapsto f(s)g(s^{-1}t) \in \mathscr{L}^1(G,\mu) \ \ \mu\text{-c.d.}$$

b) Sean $f, g \in \mathscr{L}^1(G, \mu)$, entonces

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int \Big| \int f(s)g(s^{-1}t)d\mu(s)\Big| d\mu(t) \leq \int \int |f(s)g(s^{-1}t)|d\mu(s)\mu(t) \\ &= \int \int |f(s)g(t)|d\mu(t)\mu(s) = \|f\|_1 \|g\|_1 .\end{aligned}$$

Además se da la igualdad si $f, g \geq 0$.

$\square$

Proposición 6.7. *Sean G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda y $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2 \in \mathscr{L}^1(G)$ tales que $f_1 = f_2$ c.d. y $g_1 = g_2$ c.d. Entonces $f_1 * g_1 = f_2 * g_2$.*

Demostración. Sea $t \in G$ vamos a demostrar que $f_1 * g_1(t) = f_2 * g_2(t)$. Definimos

$$E = \{x \in G \mid f_1(x) \neq f_2(x)\} \quad \text{y} \quad F = \{x \in G \mid g_1(x) \neq g_2(x)\}$$

Entonces existen $N,\ M \in \mathscr{B}(G)$ con $\mu(N) = 0 = \mu(M)$ tales que $E \subset N$ y $F \subset M$. Además $\mu(tM^{-1}) = 0$ por ser μ una medida de Haar izquierda.
Toda $x \in G \setminus (N \cup tM^{-1})$ cumple que

$$f_1(x) = f_2(x), \quad x^{-1}t \notin M \quad \text{y} \quad g_1(x^{-1}t) = g_2(x^{-1}t),$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} f_1 * g_1(t) &= \int_G f_1(x)g_1(x^{-1}t)d\mu(x) = \int_{G\setminus(N\cup tM^{-1})} f_1(x)g_1(x^{-1}t)d\mu(x) \\ &= \int_{G\setminus(N\cup tM^{-1})} f_2(x)g_2(x^{-1}t)d\mu(x) = \int_G f_2(x)g_2(x^{-1}t)d\mu(x) = f_2 * g_2. \end{aligned}$$

$\square$

Así pues, por la proposición anterior, la convolución está bien definida como una función de clases de $\mathscr{L}^1(G)$.

Teorema 6.8. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar izquierda. Entonces $\mathscr{L}^1(G, \mu)$ es un álgebra de Banach con la convolución como multiplicación del álgebra.*

Demostración. Sabemos que $\mathscr{L}^1(G)$ es un espacio de Banach y para $a \in \mathbb{R}$, f, g y $h \in \mathscr{L}^1(G)$ se cumple que

a. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

b. $(f + g) * h = f * h + g * g$.

c. $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$.

d. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Sólo falta demostrar la asociatividad de la convolución. Sea $x \in G$

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int (f * g)(t)h(t^{-1}x)d\mu(t) = \int\int f(s)g(s^{-1}t)h(t^{-1}x)d\mu(s)d\mu(t) \\
&= \int\int f(s)g(s^{-1}t)h(t^{-1}x)d\mu(t)d\mu(s) \\
&= \int\int f(s)g(t)h(s^{-1}t^{-1}x)d\mu(s)d\mu(t).
\end{aligned}$$

Esto se obtiene después de hacer el cambio de variable st por t.
Además

$$f * (g * h)(x) = \int f(s)(g * h)(s^{-1}x)d\mu(s) = \int\int f(s)g(t)h(t^{-1}s^{-1}x)d\mu(t)d\mu(s)$$

Por lo tanto es un álgebra de Banach. □

Como corolario tenemos que la convolución preserva la convergencia en $\mathscr{L}^1(G)$.

Corolario 6.9. *Sean $f,\ g \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$ dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n * g_n - f * g\| = 0.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
\|f_n * g_n - f * g\|_1 &\leq \|f_n * g_n - f_n * g\|_1 + \|f_n * g - f * g\|_1 \\
&\leq \|f_n\|_1 \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Como $\mathop{lim}_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, $\{f_n\}$ están acotadas por $M > 0$, por lo tanto

$$0 \leq \|f_n * g_n - f * g\|_1 \leq M \|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1 \|g\|_1$$

En consecuencia $\lim_{n\to\infty} \|f_n * g_n - f * g\| = 0$. □

A continuación veremos resultados que nos relacionan del grupo con propiedades del álgebra $\mathscr{L}^1(G)$.

Proposición 6.10. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces G es abeliano si y sólo si $\mathscr{L}^1(G,\mu)$ es abeliano.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si G es abeliano, $\Delta(x) = 1$ para toda $x \in G$. Por lo tanto

$$(f * g)(x) = \int f(xs^{-1})g(s)\Delta(s^{-1})d\mu(s) = \int f(s^{-1}x)g(s)d\mu(s) = (g * f)(x)$$

$\Leftarrow$) Sean $f,\ g \in \mathscr{L}^1(G)$. Ya que $f * g = g * f$, para toda $t \in G$

$$0 = \int (f(s)g(s^{-1}t) - f(s^{-1}t)g(s))d\mu(s) = \int (f(ts^{-1})\Delta(s^{-1}) - f(s^{-1}t))g(s)d\mu(s)$$

La igualdad se da para toda $g \in \mathscr{L}^1(G)$, entonces

$$f(ts^{-1})\Delta(s^{-1}) - f(s^{-1}t) = 0, \text{ para todo} t \in G$$

en particular para $t = e$ por lo tanto

$$f(s^{-1})\Delta(s^{-1}) = f(s^{-1}).$$

y $\Delta(s) = 1$ para toda $s \in G$.
Así las cosas, $f(ts^{-1}) = f(s^{-1}t)$ para toda $f \in \mathscr{L}^1(G)$, pero $\mathscr{L}^1(G, \mu)$ separa puntos de G, por lo que $ts^{-1} = s^{-1}t$ y en consecuencia G es abeliano.

□

Proposición 6.11. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces G es discreto sí y sólo si $\mathscr{L}^1(G, \mu)$ tiene unidad.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si G es discreto, la medida de Haar es la de conteo y $\int f d\mu = \sum\limits_{x \in G} f(x)$. Sea $e(x) = \chi_e(x)$,

$$f * e(x) = \int f(y)e(y^{-1}x)d\mu_y = \sum_{y \in G} f(y)e(y^{-1}x) = f(x)$$

Por lo tanto $\mathscr{L}^1(G)$ contiene una unidad.

$\Leftarrow$) Sea $u(x)$ la unidad de $\mathscr{L}^1(G)$ y $E = \{e\}$. Entonces

$$1 = \chi_E(e) = \chi_E * u(e) = \int u(y)\chi_E(y^{-1}e)d\mu_y = \int u(y)\chi_{E^{-1}}(y)d\mu_y = u(e)\mu(\{e\})$$

Para que no sea una contradicción $\mu(\{e\}) > 0$ y por el Teorema 4.1, G es discreto.

□

Por la proposición anterior, en $\mathscr{L}^1(G)$ no necesariamente hay unidad. Pero un buen sustituto se obtiene en el siguiente teorema.

Teorema 6.12. *Sea $f \in \mathscr{L}^p(G)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe V una vecindad abierta del neutro tal que para toda $u \in \mathscr{L}^1(G)$, $u \geq 0$ con $sop(u) \subset V$ y $\int u d\mu = 1$ se cumple que*

$$\|f * u - f\|_p < \epsilon \quad y \quad \|u * f - f\|_p < \epsilon$$

Demostración. Sean $u \in \mathscr{L}^1(G)$ con $\int u d\mu = 1$ y $h \in \mathscr{L}^q(G)$.

$$\begin{aligned}
\left|\int (u * f - f)(x)h(x)d\mu(x)\right| &= \left|\int\int (u(y)f(y^{-1}x) - f(x))h(x)d\mu(y)d\mu(x)\right| \\
&= \left|\int\int ({}_{y^{-1}}f(x) - f(x))u(y)h(x)d\mu(y)d\mu(x)\right| \\
&\leq \int u(y)\left|\int ({}_{y^{-1}}f(x) - f(x))h(x)d\mu(x)\right|d\mu(y).
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\left|\int (u * f - f)(x)h(x)d\mu(x)\right| \leq \|h\|_q \int \|{}_{y^{-1}}f - f\|_p u(y)d\mu(y),$$

por lo tanto

$$\|u * f - f\|_p \leq \int \|{}_{y^{-1}}f - f\| u(y)d\mu(y).$$

Escogemos $U \in \mathscr{N}_e$, un conjunto abierto tal que $\|{}_{y^{-1}}f - f\| < \epsilon$ si $y \in U$ y la función u tal que $sop(u) \subset U$. Entonces

$$\|u * f - f\|_p \leq \int \|{}_{y^{-1}}f - f\| u(y)d\mu(y) < \epsilon \int u(y)d\mu(y) = \epsilon$$

Por otro lado, como $\int u d\mu = 1$ y $u(x) \geq 0$, $m = \int u(x^{-1})d\mu(x) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int (f * u - f)(x)h(x)d\mu(x)\right| &= \left|\int\int (f(xy)u(y^{-1}) - f(y))h(x)d\mu(y)d\mu(x)\right| \\
&= \left|\int\int \left(f(xy) - \frac{f(y)}{m}\right)u(y^{-1})h(x)d\mu(y)d\mu(x)\right| \\
&\leq \int u(y^{-1})\left|\int \left(f(xy) - \frac{f(y)}{m}\right)h(x)d\mu(x)\right|d\mu(y).
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\left|\int (f * u - f)(x)h(x)d\mu(x)\right| \leq \|h\|_q \int \frac{u(y^{-1})}{m}\|mf_{y^{-1}} - f\|_p d\mu(y),$$

por lo tanto

$$\|f * u - f\|_p \leq \int \frac{u(y^{-1})}{m}\|mf_{y^{-1}} - f\|_p \, d\mu(y).$$

Además como la función modular es continua, existe un conjunto abierto V_1 con $V_1 \in \mathscr{N}_e$ tal que $1-\epsilon \leq \Delta(y) \leq 1+\epsilon$ si $y \in V_1$. Sea u tal que $sop(u) \subset V_1$

$$\begin{aligned}(1-\epsilon) &= (1-\epsilon)\int u d\mu = (1-\epsilon)\int u(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(y) \\ &\leq \int u(y^{-1})\Delta(y^{-1})\Delta(y)d\mu(y) = m = \int u(y^{-1})\Delta(y^{-1})\Delta(y)d\mu(y) \\ &\leq (1+\epsilon)\int u(y^{-1})\Delta(y^{-1})d\mu(y) = (1+\epsilon)\int u d\mu = (1+\epsilon).\end{aligned}$$

Por lo tanto $1-\epsilon \leq m \leq 1+\epsilon$.
Por otro lado, se tiene que

$$\|mf_{y^{-1}} - f\|_p \leq m\|f_{y^{-1}} - f\|_p + |m-1|\|f\|_p \leq (1+\epsilon)\|f_{y^{-1}} - f\|_p + \epsilon\|f\|_p.$$

Además existe $V_2 \in \mathscr{N}_e$, conjunto abierto, tal que $\|f_{y^{-1}} - f\|_p < \dfrac{\epsilon}{1+\epsilon}$ si $y \in V_2$. Por lo que $\|mf_{y^{-1}} - f\|_p < \epsilon(1+\|f\|_p)$.
Sea $u \in \mathscr{L}^1(G)$ con $u(x) \geq 0$, $\int u d\mu = 1$ y $sop(u) \subset U \cap V_1 \cap V_2$ entonces

$$\int \frac{u(y^{-1})}{m}\|mf_{y^{-1}} - f\|_p \, d\mu(y) < \epsilon(1+\|f\|_p)\int \frac{u(y^{-1})}{m}d\mu(y) = \epsilon(1+\|f\|_p).$$

De donde se sigue el resultado. □

6.2. $M(G)$.

Ahora hablaremos de $M(G)$, que es el conjunto de todas las medidas con signo finitas y semi-regulares. Primero de una manera más general donde sólo necesitamos que sea un espacio localmente compacto y después en el momento de hablar de convolución de medidas utilizaremos un grupo localmente compacto.
Demostraremos que $M(G)$ es un álgebra de Banach con la operación convolución y que el conjunto de medidas absolutamente continuas respecto a la medida de Haar es un ideal bilateral en esta álgebra. Finalmente mostraremos que existe un homomorfismo biyectivo e isomorfo entre este conjunto y $\mathscr{L}^1(G)$.

Definición 6.13. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Definimos*

$$M(X) = \{\mu : \mu \text{ es una medida con signo finita semi-regular}\}.$$

Teorema 6.14. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Entonces $M(X)$ es un espacio de Banach, con la variación total como norma.*

Demostración. Sea (μ_n) una sucesión de Cauchy en $M(X)$ y $E \in \mathscr{B}(X)$, como

$$|\mu_m(E) - \mu_n(E)| \leq |\mu_m - \mu_n|(E) \leq |\mu_m - \mu_n|(X) = \|\mu_m - \mu_n\|$$

se tiene que $(\mu_n(E))$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, por lo que converge y además lo hace uniformemente.
Definimos $\mu : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{R}$ como $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E)$. Vamos a ver que μ es una medida con signo semi-regular y $\lim_{n\to\infty} \|\mu - \mu_n\| = 0$.

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Sea $(E_i)_{i=1}^k$ una sucesión de borelianos ajenos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\bigcup_{i=1}^k E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^k \mu_n(E_i) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i)$$

3. Sean $\epsilon > 0$ y $(E_k)_{k=1}^\infty$ una sucesión decreciente de borelianos tales que $\bigcap_{k=1}^\infty E_k = \emptyset$.
   Por la convergencia uniforme existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ y $E \in \mathscr{B}(X)$ se cumple $|\mu(E) - \mu_n(E)| < \frac{\epsilon}{2}$.
   Por el Teorema A.30 podemos escoger $K \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_N(E_k)| < \frac{\epsilon}{2}$ si $k \geq K$, por lo tanto

$$|\mu(E_k)| \leq |\mu(E_k) - \mu_N(E_k)| + |\mu_N(E_k)| < \epsilon$$

   En consecuencia $\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = 0$ y por el Teorema A.31, μ es una medida con signo.

4. Sea $(E_i)_{i=1}^k$ una partición finita de X y $\epsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mu_n - \mu_m\| < \epsilon$ si $n, m \geq N$. Por la Proposición A.29 se tiene que

$$\sum_{i=1}^k |\mu_m(E_i) - \mu_n(E_i)| \leq \|\mu_n - \mu_m\| < \epsilon.$$

   Haciendo tender m a infinito obtenemos que $\sum_{i=1}^k |\mu(E_i) - \mu_n(E_i)| \leq \epsilon$. Por lo tanto $\|\mu - \mu_n\| \leq \epsilon$ si $n \geq N$.

5. Dados $E \in \mathscr{B}(X)$ y $\epsilon > 0$ escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mu - \mu_n\| < \epsilon/3$ para toda $n \geq N$. Ya que μ_N es semi-regular, existe U un conjunto abierto con $E \subset U$ y $|\mu_N|(U) - |\mu_N|(E) < \epsilon/3$. Entonces

$$\begin{aligned} |\mu|(U) - |\mu|(E) &\leq |\mu|(U) - |\mu_N|(U) + |\mu_N|(U) - |\mu_N|(E) + |\mu|(E) - |\mu_N|(E) \\ &\leq 2\|\mu - \mu_n\| + |\mu_N|(U) - |\mu_N|(E) < \epsilon. \end{aligned}$$

   Por lo tanto μ es regular exterior. La prueba de la regularidad interior es análoga.

6. μ es una medida finita ya que $|\mu|(E) < \infty$ para toda $E \in \mathscr{B}(X)$.

$\square$

Proposición 6.15. *Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff, μ una medida de Borel semi-regular y f una función tal que $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$. Entonces la función $\nu_f : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{R}$ definida como $\nu_f(E) = \int\limits_E f d\mu$ es una medida con signo finita y semi-regular.*

Demostración. ν_f es una medida con signo por propiedades de la integral y como $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, ν_f es finita. Falta ver que es semi-regular.
Si $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ es una función simple, $\nu_f(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mu(F \cap E)$ y por lo tanto ν_f es semi-regular.
Si $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ y $f \geq 0$, existen una sucesión creciente de funciones simples f_n, $0 \leq f_n \leq f$ tales que $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Para $\epsilon > 0$, escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int (f - f_N) d\mu < \frac{\epsilon}{3}$. Sea U un conjunto abierto, como ν_{f_N} es semi-regular existe un compacto $K \subset U$ tal que $\nu_{f_N}(U) - \nu_{f_N}(K) < \frac{\epsilon}{3}$. Dado que $\nu_f(E) - \nu_{f_N}(E) \leq \int (f - f_N) d\mu$ tenemos que

$$\nu_f(U) - \nu_f(K) \leq \nu_f(U) - \nu_{f_N}(U) + \nu_{f_N}(U) - \nu_{f_N}(K) + \nu_f(K) - \nu_{f_N}(K) < \epsilon$$

Por lo tanto ν_f es semi-regular interior. Para demostrar la semi-regularidad exterior el procedimiento es análogo.
Dada $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ existen $f^+, f^- \in \mathscr{L}^1$ con $f^+,\ f^- \geq 0$ tales que $f = f^+ - f^-$. Consideremos $\epsilon > 0$ y U un conjunto abierto, por el caso anterior, existen $K_1,\ K_2 \subset U$ conjuntos compactos tales que

$$|\nu_{f^+}(U) - \nu_{f^+}(K_1)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |\nu_{f^-}(U) - \nu_{f^-}(K_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Claramente, $K = K_1 \cup K_2$ es un conjunto compacto contenido en U y cumple que

$$|\nu_f(U) - \nu_f(K)| \leq |\nu_{f^+}(U) - \nu_{f^+}(K_1)| + |\nu_{f^-}(U) - \nu_{f^-}(K_2)| < \epsilon$$

Elijamos $E \in \mathscr{B}(X)$, por el caso anterior existen $U_1,\ U_2$ conjuntos abiertos que contienen a E tales que

$$|\nu_{f^+}(U_1) - \nu_{f^+}(E)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |\nu_{f^-}(U_2) - \nu_{f^-}(E)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $U = U_1 \cap U_2$ es un conjunto abierto que contiene a E y además

$$|\nu_f(U) - \nu_f(E)| \leq |\nu_{f^+}(U_1) - \nu_{f^+}(E)| + |\nu_{f^-}(U_2) - \nu_{f^-}(E)| < \epsilon$$

□

Proposición 6.16. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y μ una medida de Borel semi-regular. Entonces la función $f \mapsto \nu_f$ definida en la Proposición 6.15, induce una isometría lineal de $\mathscr{L}^1(X,\mu)$ sobre el subespacio*

$$M_\mu(X) = \{\nu \in M(X) \mid \nu \text{ es finita y absolutamente continua con respecto a } \mu\}.$$

Demostración.

1) La función es lineal por propiedades de la integral.

2) Sea $\nu \in M_\mu(X)$, entonces ν es finita y $\nu << \mu$. Por la Proposición 5.7 existe una función $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo conjunto $E \in \mathscr{B}(X)$. Entonces la función $f \mapsto \nu_f$ es suprayectiva en $M_\mu(X)$.

3) Sea $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, entonces

$$\|f\| = \int_X |f| d\mu = \int_{\{f(x)\geq 0\}} f d\mu - \int_{\{f(x)\leq 0\}} f d\mu = \nu_f^+(X) + \nu_f^-(X) = |\nu_f|(X).$$

Por lo tanto $\|f\| = \|\nu_f\|$.

Por lo tanto el mapeo es una isometría lineal. □

De ahora en adelante, nuestro espacio será un grupo localmente compacto.

Proposición 6.17. *Sea G un grupo localmente compacto, μ y ν medidas semi-regulares positivas y finitas. Sea $\mu \times \nu$ el producto semi-regular de Borel de μ y ν. Definimos $(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(\{(x,y) \in G \times G : xy \in E\})$. Entonces $\mu * \nu$ es una medida de Borel semi-regular y para todo $E \in \mathscr{B}(G)$ cumple*

$$(\mu * \nu)(E) = \int \nu(x^{-1}E) d\mu(x) = \int \mu(Ey^{-1}) d\nu(y)$$

Demostración. Definimos $F : G \times G \to G$ como $F(x,y) = xy$, entonces F es continua por lo que

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu) F^{-1}(E)$$

es una medida. Falta ver que es semi-regular. Sea $E \in \mathscr{B}(G \times G)$ y $\epsilon > 0$. Como las medidas son finitas, se cumplen las hipótesis de la Proposición 1.20 por lo que existe un conjunto compacto $K_0 \subset F^{-1}(E)$ tal que

$$(\mu \times \nu)(K_0) > (\mu \times \nu)(F^{-1}(E)) - \epsilon = \mu * \nu(E) - \epsilon.$$

$K = F(K_0)$ es compacto y $K \subset E$. Además

$$\mu * \nu(K) = (\mu \times \nu)(F^{-1}(K)) \geq (\mu \times \nu)(K_0) \geq \mu * \nu(E) - \epsilon$$

Por lo tanto

$$\mu * \nu(E) = \sup \{\mu * \nu(K) : K \subset E \text{ y } K \text{ es compacto}\}$$

en particular si E es un conjunto abierto se tiene la regularidad interior.
Por la estimación anterior existe $K \subset E^c$ un conjunto compacto tal que

$$\mu * \nu(K) \geq \mu * \nu(E^c) - \epsilon$$

como las medidas son finitas $\mu * \nu(E^c \setminus K) < \epsilon$.
Sea $U = K^c$ entonces U es un conjunto abierto, $E \subset U$ y

$$\begin{aligned}\mu * \nu(U) - \mu * \nu(E) &= \mu * \nu(U \setminus E) = \mu * \nu(U \cap E^c) = \mu * \nu(K^c \cap E^c) \\ &= \mu * \nu(E^c \setminus K) < \epsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto la medida es regular exterior.
Observemos que

$$\mu * \nu(E) = \mu \times \nu(F^{-1}(E)) = \int \nu(F^{-1}(E)_x) d\mu(x) = \int \nu(x^{-1}E) d\mu(x)$$

ya que

$$F^{-1}(E)_x = \{(x, y) \in G \times G : xy \in E\}_x = \{y \in G : xy \in E\} = x^{-1}E.$$

Por otro lado, como

$$F^{-1}(E)_y = \{(x, y) \in G \times G : xy \in E\}_y = \{x \in G : xy \in E\} = Ey^{-1}$$

se tiene que

$$\mu * \nu(E) = \mu \times \nu(F^{-1}(E)) = \int \mu(F^{-1}(E)_y) d\nu(y) = \int \mu(Ey^{-1}) d\nu(y)$$

□

Definición 6.18. *Sea G un grupo localmente compacto, y sean $\mu,\ \nu \in M(G)$ Definimos la **convolución** de μ con ν, denotada por $\mu * \nu$, como sigue:*

$$(\mu * \nu)(E) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in G \times G : xy \in E\}).$$

Por la proposición anterior y el teorema de descomposición de Jordan tenemos que si $\nu, \mu \in M(G)$ entonces $\mu * \nu \in M(G)$.

Proposición 6.19. *Sea G un grupo localmente compacto, μ y ν medidas semi-regulares finitas. Entonces*

$$\int f d(\mu * \nu) = \int \int f(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(xy) d\nu(y) d\mu(x)$$

para toda función integrable f.

Demostración. Si $f = \chi_E$, con $E \in \mathscr{B}(G)$ entonces

$$\begin{aligned}\int f d(\mu * \nu) &= \mu * \nu(E) = \int \nu(x^{-1}E) d\mu(x) = \int \int \chi_{x^{-1}E}(y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int \int \chi_E(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(xy) d\mu(x) \mu(y).\end{aligned}$$

Si f es simple el resultado se sigue de la linealidad de la integral, si f es integrable y positiva del Teorema de la Convergencia Monótona. Finalmente la validez de la proposición para una función f integrable proviene de separarla en su parte positiva y negativa. □

Teorema 6.20. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces $M(G)$ con la convolución como multiplicación es un álgebra de Banach.*

Demostración. Por el Teorema 6.14, $M(G)$ es un espacio de Banach. Sólo falta ver que se cumple que la convolución es asociativa y la norma submultiplicativa. Sean $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in M(G)$ y $E \in \mathscr{B}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\nu_1 * (\nu_2 * \nu_3))(E) &= \int (\nu_2 * \nu_3)(x^{-1}E)d\nu_1(x) = \int\int \nu_3(y^{-1}x^{-1}E)d\nu_2(y)d\nu_1(x) \\ &= \int\int \nu((xy)^{-1}E)d\nu_1(x)d\nu_2(y) = \int \nu_2(u^{-1}E)d(\nu_1 * \nu_2)(u) \\ &= ((\nu_1 * \nu_2) * \nu_3)(E).\end{aligned}$$

Sea $\{E_i\}_{i=1}^n$ una partición finita de G. Por la Proposición A.28 tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |(\mu * \nu)(E_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\int \nu(x^{-1}E_i)d\mu(x)| \leq \int \sum_{i=1}^{n} |\nu(x^{-1}E_i)|d|\mu| \leq \int \|\nu\|\, d|\mu|$$

Entonces $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\|\,\|\nu\|$. $\square$

Definición 6.21. *Sea A un álgebra, decimos que I es un* ***ideal*** *si es un subespacio vectorial de A y para toda $u \in I$ y $v \in A$ se tiene que $u \cdot v$ y $v \cdot u$ están en I.*

Definición 6.22. *Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Definimos*

$$M_a(G) = \{\nu \in M(G) \mid \nu \text{ es absolutamente continua con respecto a } \mu\}$$

Observemos que por el Corolario 4.21, ν es absolutamente continua con respecto a μ si y sólo si lo es respecto a $\check{\mu}$.
El siguiente teorema nos muestra que $M_a(G)$ es un ideal bilateral en $M(G)$ y que existe un homomorfismo biyectivo e isomorfo entre $\mathscr{L}^1(G)$ y $M_a(G)$.

Teorema 6.23. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces*

a) $M_a(G)$ es un ideal en el álgebra $M(G)$.

b) Si μ es una medida de Haar izquierda, entonces el mapeo $f \mapsto \nu_f$ es un homomorfismo que preserva normas de $\mathscr{L}^1(G,\mu)$ a $M(G)$. Donde ν_f está definido como $\nu_f(E) = \int_E f d\mu$ para toda $E \in \mathscr{B}(G)$.

c) La imagen de $\mathscr{L}^1(G,\mu)$ bajo este homomorfismo es $M_a(G)$.

Demostración.

a) M_a es un espacio lineal por la linealidad de la integral. Sea μ una medida de Haar izquierda, $\nu_1 \in M(G)$ y $\nu_2 \in M_a(G)$ se demostrará que $\nu_1 * \nu_2$ y $\nu_1 * \nu_2$ pertenecen a $M_a(G)$.
Sea $E \in \mathscr{B}(G)$ tal que $\mu(E) = 0$, por el Corolario 4.21, $\check{\mu}(E) = 0$ por lo tanto

$$\mu(x^{-1}E) = 0 = \mu(Ex^{-1}) \text{ para todo } x \in G.$$

Ya que $\nu_2 << \mu$

$$\nu_2(x^{-1}E) = 0 = \nu_2(Ex^{-1}) \quad \text{para toda} \quad x \in G$$

Por lo tanto

I) $\nu_1 * \nu_2(E) = \int \nu_2(Ey^{-1})d\nu_1 = \int 0 d\nu_1 = 0.$
II) $\nu_2 * \nu_1(E) = \int \nu_2(x^{-1}E)d\nu_1 = \int 0 d\nu_1 = 0.$

b) Por la Proposición 6.16 el mapeo induce una isometría lineal, sólo falta ver que preserva la convolución. Sean $f,\ g \in \mathscr{L}^1(G, \mu)$ y $E \in \mathscr{B}(G)$ entonces

$$\nu_{f*g}(E) = \int \chi_E(t) f * g(t) d\mu(t) = \int \chi_E(t) \int f(s) g(s^{-1}t) d\mu(s) d\mu(t)$$

Como la medida de Haar izquierda es invariante bajo traslaciones izquierdas, haciendo el cambio $t = st$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu_{f*g}(E) &= \int\int \chi_E(st) f(s) g(t) d\mu(s) d\mu(t) = \int f(s) \int \chi_E(st) g(t) d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \int f(s) \int \chi_E(st) d\mu(s) d\nu_g(t) = \int\int \chi_E(st) d\nu_f(s) d\nu_g(t) = \nu_f * \nu_g(E)
\end{aligned}$$

c) Por la Proposición 6.16, la imagen del homomorfismo es M_a.

$\square$

Conclusiones y epílogo

El objetivo de este trabajo fue el de estudiar la medida de Haar en grupos localmente compactos. Se demostraron cuatro distintas pruebas de la existencia y unicidad de esta medida que extiende a un contexto más abstracto la propiedad fundamental de invarianza de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Se estudiaron las propiedades de la medida de Haar y la función modular que permite relacionar la medida de Haar izquierda y la medida de Haar derecha. Resulta interesante la existencia de un conjunto medible con medida izquierda finita y medida derecha infinita si el grupo no es unimodular.

De interés independiente es la generalización del Teorema de Steinhaus, el Teorema de densidad de Lebesgue y la existencia de subconjuntos no medibles "al estilo" de Vitali.
Justamente el Teorema de Steinhaus es el que nos permitió dar una caracterización de las medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Haar y se demostró que el espacio, M_a, de estas medidas forma un ideal bilateral en el espacio de todas las medidas con signo finitas.

Finalmente se demostró que el espacio de las funciones integrables $\mathscr{L}^1(G)$ es un álgebra de Banach bajo convolución y que hay un homomorfismo biyectivo entre éste y el espacio $M_a(G)$. Además se encontraron relaciones entre las propiedades del grupo topológico y las del álgebra $\mathscr{L}^1(G)$. En el caso que el álgebra no tenga unidad, se dio un buen sustituto de ésta.

El apéndice B, no es necesario para la realización de este trabajo pero es un resultado interesante, ya que distingue tres clases de subconjuntos que aparecen de manera natural en un espacio localmente compacto y Hausdorff, las medidas sobre ellos y que relación tienen los subconjuntos con la regularidad de la medida. Se demostró que dadas dos medidas regulares de Borel, siempre existe una única medida regular que extiende a la medida producto.

El lector interesado puede estudiar más propiedades topológicas y algebraicas de los subgrupos normales, el grupo conciente y la relación entre la medida de Haar y la medida cociente (ver [5]).

Otro camino a seguir es la generalización del Análisis de Fourier a grupos abelianos localmente compactos (ver [16]). La dualidad de Pontryagin explica las propiedades generales de la transformada de Fourier, que es una convolución de funciones, y generaliza algunas observaciones vistas sobre funciones en la recta real o en el círculo unitario.
Se estudia con mayor profundidad la convolución tanto de funciones como de medidas.

Apéndice A

Espacios medibles.

Las siguientes definiciones y resultados se darán por conocidos a lo largo de toda la tesis. Las demostraciones de los teoremas de este apéndice pueden consultarse en [1], [3], [4], [7] y [14].
En toda esta parte X denota un conjunto no vacío fijo y $\mathscr{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$.

Definición A.1. *Una clase no vacia $S \subset \mathscr{P}(X)$ se llama **σ-anillo** de subconjuntos de X si*

1) Si $E,\ F \in S$ entonces $E \setminus F \in S$.

2) Si $E_n \in S$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in S$.

*Si además $X \in S$ entonces S se llama un **σ-álgebra** de subconjuntos de X. Al par (X, S) se le llama espacio medible.*

Definición A.2. *Sea X un conjunto y E una familia de subconjuntos de X. Definimos la σ-álgebra generada por E, $S(E)$ como la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos de E.*
Si $X = \mathbb{R}$ y E es el conjunto de todos los abiertos de $\mathbb{R}$, $S(E) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ la familia de los borelianos.

Definición A.3.

a) Una clase no vacía $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ se llama un π-sistema si es cerrado bajo intersecciones finitas.

b) Una clase $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(X)$ se llama un λ-sistema si

1) $X \in \mathscr{L}$.

2) Si $E \subset F$ y $E,\ F \in \mathscr{L}$ entonces $E \setminus F \in \mathscr{L}$.

3) Si (E_n) es una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{L}$, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{L}$.

Teorema A.4 (de las Clases Monótonas). *Sea $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ un π-sistema y $\mathscr{L}_0$ un λ-sistema tal que $\mathscr{C} \subset \mathscr{L}_0$. Entonces $S(\mathscr{C}) \subset \mathscr{L}_0$.*

Definición A.5. *Sean (X, S) un espacio medible. Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es medible si todo conjunto $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ cumple $f^{-1}(B) \in S$.*
Denotamos al conjunto de funciones medibles de X como $\mathbb{M}(X, S)$.
Además decimos que f es simple si sólo toma un número finito de valores.

Definición A.6. *Sea (X, S) un espacio medible y f una función medible. Definimos las siguientes funciones*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & si\ f(x) \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & si\ f(x) \leq 0 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Definición A.7. *Sea (X, S) un espacio medible. Decimos que la función $\mu : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es una **medida** si*
a) $\mu(E) \geq 0$ para todo conjunto $E \in S$.
b) $\mu(\emptyset) = 0$.
c) $\mu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, si (E_n) es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos.
Además a la tercia (X, S, μ) la llamamos espacio de medida.

Definición A.8. *Dado (X, S, μ) un espacio de medida, decimos que cierta propiedad $P(x)$ es cierta casi dondequiera relativa a μ (c.d. rel. μ) si existe $E \in S$ tal que $\mu(E) = 0$ y $P(x)$ es cierta si $x \notin E$.*

Definición A.9. *Sea $f = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \chi_{E_i}$ una función simple no negativa. Definimos la integral de f con respecto a μ denotada por $\int f d\mu$ como*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} s_i \mu(E_i).$$

Si f es una función medible no negativa, definimos la integral como

$$\int f d\mu = sup \left\{ \int s d\mu \;\middle|\; s \text{ es simple} \right\}.$$

Teorema A.10 (Convergencia monótona (1906)). *Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (f_n) una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas tal que converge a f, entonces*

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \uparrow \infty} \int_E f_n d\mu \text{ para todo } E \in S.$$

Corolario A.11 (Lema de Fatou). *Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles no negativas entonces*

$$\int_E \liminf_{n \to \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu \text{ para todo } E \in S.$$

Definición A.12. *Sea (X, S, μ) un espacio de medida. Denotaremos por $\mathscr{L}^1(X, S, \mu)$ a la clase de funciones medibles tales que*

$$\int f^+ d\mu < \infty \quad y \quad \int f^- d\mu < \infty.$$

A dichas funciones las llamaremos integrables con respecto a μ. Para $f \in \mathscr{L}^1(X, S, \mu)$ y $E \in S$ dados ponemos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Cuando no se preste a confusión escribiremos $\mathscr{L}^1(\mu)$ en vez de $\mathscr{L}^1(X, S, \mu)$.

Teorema A.13 (Convergencia Dominada de Lebesgue 1910)**.** *Sea (X, S, μ) un espacio de medida y (f_n) una sucesión de funciones en $\mathscr{L}^1(\mu)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ (c.d.rel. μ) para alguna función medible. Supongamos que existe $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ (c.d.rel. μ) para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces*

a) $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

b) $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$ *para todo* $E \in S$.

Definición A.14. *Sea (X, S, μ) un espacio de medida y $p \in (0, \infty)$ fijo. Definamos*

$$\mathscr{L}^p(\mu) = \left\{ f \in M(X, S) : |f|^p \in \mathscr{L}^1(\mu) \right\}.$$

Teorema A.15 (Desigualdad de Hölder (1889))**.** *Sean (X, S, μ) un espacio de medida, $p \in (1, \infty)$ y $q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ y $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ son distintas de cero (c.d) entonces*

a) $fg \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

b) $\int |fg| d\mu \leq (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}$.

Teorema A.16 (Desigualdad de Minkowski (1896))**.** *Sean $p \in [1, \infty)$ y $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ entonces*

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema A.17. *Sea $p \in [1, \infty)$ fija y $\| \ \|_p : \mathscr{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

entonces $\| \ \|_p$ es una seminorma en $\mathscr{L}^p(\mu)$.

Definición A.18. *Sea $p \in [1,\infty)$ fija. Definimos una relación $\sim$ en $\mathscr{L}^p(X)$ como sigue*

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f-g\|_p = 0.$$

En el espacio cociente $\| \; \|_p$ es una norma.

Definición A.19. *Sea X un conjunto. Una medida exterior sobre X es una función $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ tal que*

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

b) Si $A \subset B \subset X$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

c) Si (A_n) una sucesión de subconjuntos de X entonces $\mu^*\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Definición A.20. *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior sobre X. Decimos que un conjunto $B \subset X$ es μ^*-medible si para todo conjunto $A \subset X$ se cumple que*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$$

Proposición A.21. *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior. Entonces un conjunto $B \subset X$ es μ^*-medible si y sólo si*

$$\mu^*(U) \leq \mu^*(U \cap B) + \mu^*(U \cap B^c)$$

para todo conjunto abierto U.

Teorema A.22. *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior sobre X. Definimos*

$$\mathscr{M}_{\mu^*} = \{B \subset X \mid B \text{ es un conjunto } \mu^*\text{-medible}\}$$

Entonces

a) $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una σ-álgebra.

b) La restricción de μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida.

Definición A.23. *Sea (X,S) un espacio medible. Decimos que $\mu : S \longrightarrow [-\infty,\infty]$ es una **medida con signo** si:*
a) Sólo toma un valor extendido.
b) $\mu(\emptyset) = 0$.
c) $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, *si $(E_n) \subset S$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos.*
*Además decimos que es **finita** si $-\infty < \mu(E) < \infty$ para todo $E \in S$.*

Definición A.24. *Sean (X,s) un espacio medible y $\mu : S \to [-\infty,\infty]$ una medida con signo. Decimos A es*

- *Un **conjunto positivo** si $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \subset A$, con $E \in S$.*

- *Un* ***conjunto negativo*** *si $\mu(E) \leq 0$ para todo $E \subset A$, con $E \in S$.*
- *Un* ***conjunto nulo*** *si $\mu(E) = 0$ para todo $E \subset A$, con $E \in S$.*

Teorema A.25 (Descomposición de Hahn)**.** *Sean (X, s) un espacio medible y μ una medida con signo. Entonces existen P y N subconjuntos ajenos de X tales que P es un conjunto positivo, N es un conjunto negativo y $X = P \cup N$. Al par (P, N) lo llamamos la descomposición de Hahn.*

Teorema A.26 (Descomposición de Jordan)**.** *Sea (X, S) un espacio medible y μ una medida con signo. Entonces existen dos medidas μ^+, μ^- llamadas la* ***variación positiva*** *de μ y la* ***variación negativa*** *de μ, alguna de ellas finita tales que $\mu = \mu^+ - \mu^-$.*

Definición A.27. *Sea μ una medida con signo. Definimos* ***la variación*** *de μ denotada por $|\mu|$, como $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Observamos que la variación es una medida. Además definimos la* ***variación total*** *de μ como $\|\mu\| = |\mu|(X)$.*

Proposición A.28. *Sean (X, S) un espacio medible, μ una medida con signo finita y f una función medible, entonces $|\int f d\mu| \leq \int |f| d|\mu|$.*

Proposición A.29. *Sea μ una medida con signo y $E \in S$ entonces*
$$|\mu|(E) = sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)| : \{E_i\}_{i=1}^{n} \subset S \text{ es una partición finita de } E\right\}$$

Teorema A.30. *Sea X un espacio de Hausdorff y μ una medida con signo. Sea (E_i) una sucesión de borelianos.*

1. *Si (E_i) es una sucesión creciente, entonces $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$.*
2. *Si (E_i) es una sucesión decreciente y si existe i tal que $\mu(E_i) < \infty$, entonces $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(E_i)$.*

Teorema A.31. *Sea X un espacio de Hausdorff y $\mu : \mathscr{B}(X) \to [-\infty, \infty]$ una función aditiva, que sólo toma un valor extendido y tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Si para toda sucesión decreciente de borelianos $\{E_i\}$ tales que $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \emptyset$ se cumple que $\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = 0$, entonces μ es una medida con signo.*

Definición A.32. *Sea (X, S) un espacio medible y μ, μ dos medidas. Decimos que ν es* ***absolutamente continua*** *con respecto a μ, denotada como $\nu << \mu$, si para cualquier conjunto $E \in S$ que satisface que $\mu(E) = 0$ también satisface $\nu(E) = 0$.*
Diremos que μ es ***singular*** *con respecto a ν, denotada por $\mu \perp \nu$, si existe un conjunto $E \in S$ tal que $\mu(E) = 0$ y $\nu(E^c) = 0$.*

Podemos extender las definiciones anteriores a medidas con signo. Si μ, ν son dos medidas con signo. Decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ si $|\nu|$ es absolutamente continua respecto a $|\mu|$ y diremos que μ es singular con respecto a ν si $|\mu|$ lo es respecto a $|\nu|$.

Teorema A.33 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sea (X, S) un espacio medible, μ una medida σ-finita y ν una medida con signo σ-finita tan que $\nu << \mu$. Entonces existe una función medible f que satisface*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \text{ para todo } E \in S.$$

Además la función f es única c.d.rel. μ.

Teorema A.34 (Descomposición de Lebesgue (1904))**.** *Sean X un espacio de Hausdorff localmente compacto, μ una medida y ν una medida con signo. Entonces existen unas únicas medidas con signo ν_a, ν_s tales que*

$$\nu_a << \mu, \quad \nu_s \perp \mu \quad y \quad \nu = \nu_a + \nu_s.$$

Definición A.35. *Sean (X, S) y (Y, t) dos espacios medibles. Definimos el espacio medible producto denotado por $(X \times Y, S \otimes T)$ en donde $S \otimes T = S(S \times T)$.*

Definición A.36. *Sea $F \in X \times Y$ un subconjunto. Para $x \in X$ fijo definimos la x-sección de F denotada por F_x como el subconjunto de Y*

$$F_x = \{y \in Y \mid (X, y) \in F\}.$$

Análogamente para $y \in Y$ definimos la y-sección de F denotada por F^y como

$$F_y = \{x \in X \mid (x, y) \in F\}.$$

Definición A.37. *Sea $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función dada. Definimos la x-sección de f, $x \in X$, como la función $f_x : Y \to \mathbb{R}$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. De manera análoga, para $y \in Y$ se define la y-sección de f como la función $f^y : X \times \mathbb{R}$ dada por $f^y(x) = f(x, y)$.*

Teorema A.38 (de la medida producto)**.** *Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finita. La función $\phi : S \otimes T \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\phi(F) = \int \nu(F_x) d\mu = \int \mu(F^y) d\nu$$

es una medida σ-finita y es la única medida sobre $S \otimes T$ con la propiedad

$$\phi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{para todo} \quad A \times B \in S \times T.$$

Teorema A.39 (Fubini)**.** *Sean X y Y espacios localmente compactos de de Hausdorff, μ y ν medidas de Borel semi-regulares en X y Y respectivamente y $\mu \times \nu$ la medida producto de Borel semi-regular. Si $h \in \mathscr{L}^1(X \times Y, \mathscr{B}(X \times Y))$ es tal que $h(x) = 0$ si $x \notin A \times B$ para $A \in X$ y $B \in Y$ σ-finitos. Entonces*

1. *$h_x \in \mathscr{L}^1(\nu)$ c.d. y $h^y \in \mathscr{L}^1(\mu)$ c.d.*
2. *Las funciones $f(x) = \int_Y h_x d\nu$ c.d y $g(y) = \int_X h^y d\mu$ c.d. son tales que $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ y $g \in \mathscr{L}^1(\nu)$.*
3. *$\int_{A \times B} h d(\mu \otimes \nu) = \int_X f d\mu = \int_Y g d\nu$.*

Apéndice B

Conjuntos de Borel y Conjuntos de Baire.

El siguiente apéndice tiene por objeto distinguir tres clases de subconjuntos que aparecen de manera natural en un espacio localmente compacto y de Hausdorff, las medidas sobre ellos y sus propiedades de regularidad. Por considerarlo de interés se incluyen las pruebas de los teoremas.
El teorema principal de este apéndice afirma que dadas dos medidas de Borel regulares, existe una única medida regular que extiende a la medida producto.

Definición B.1. *Sea X un espacio de Hausdorff. Decimos que un conjunto $E \subset X$ es de tipo G_δ si existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tales que $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.*

Definición B.2. *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Definimos las siguientes clases.*

- *La clase de los* ***conjuntos de Borel****, $\mathscr{B}(X)$, es el σ-anillo generado por los conjuntos abiertos. (Es la misma que la que generan los conjuntos cerrados y en realidad es una σ-álgebra).*
- *La clase de los* ***conjuntos de Borel fuerte****, $\mathscr{B}_s(X)$, es el σ-anillo generado por los conjuntos compactos.*
- *La clase de los* ***conjuntos de Baire****, $\mathscr{B}_0(X)$, es el σ-anillo generado por los conjuntos compactos G_δ.*

Proposición B.3. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces los siguientes conjuntos son cerrados G_δ.*

$$\{x \in X \mid f(x) \leq c\} \quad \{x \in X \mid f(x) \geq c\} \quad \{x \in X \mid f(x) = c\}.$$

Además si C es un conjunto compacto G_δ existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $C = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

Demostración. Como

$$\{x \in X \mid f(x) \geq c\} = \{x \in X \mid -f(x) \leq -c\}$$

y

$$\{x \in X \mid f(x) = c\} = \{x \in X \mid f(x) \geq c\} \bigcap \{x \in X \mid f(x) \leq c\},$$

basta demostarlo para $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$.
El conjunto es cerrado ya que su complemento, $\{x \in X \mid f(x) > c\}$, es abierto por ser f continua. Además

$$\{x \in X \mid f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}.$$

Por lo tanto es un cerrado G_δ.
Ya que C es un conjunto compacto G_δ, existe una sucesión de abiertos (U_n) tales que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Por la Proposición 1.12 existen funciones $f_n : X \to [0, 1]$ tales que $f_n(C) = 0$ y $f_n(X - U_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}$. Entonces f es continua, $f(X) \subset [0, 1]$ y $f(C) = 0$. □

Proposición B.4. *Sea C un conjunto compacto y U un conjunto abierto con $C \subset U$. Entonces existen C_0 un conjunto compacto G_δ y U_0 un conjunto abierto σ-compacto tales que:*

$$C \subset C_0 \subset U_0 \subset U$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\overline{U}$ es compacto, si no haciendo uso de la Proposición 1.5, encontramos un conjunto abierto V con cerradura compacta tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
Entonces existe una función $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 1$ para toda $x \in X \setminus U$ y $f(x) = 0$ para toda $x \in C$. Sean

$$C_0 = \left\{x \in X \mid f(x) \leq \frac{1}{2}\right\} \quad \text{y} \quad U_0 = \left\{x \in X \mid f(x) < \frac{1}{2}\right\}.$$

Entonces C_0 es un conjunto cerrado G_δ y por estar contenido en U es compacto.
Por otro lado tenemos que $U_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X \mid f(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right\}$, por lo tanto es σ-compacto. □

Proposición B.5. *Sea X un espacio localmente compacto, de Hausdorff y separable. Entonces cualquier conjunto compacto es G_δ.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus C$ entonces existen conjuntos abiertos y ajenos U_x y V_x tales que $C \subset U_x$ y $x \in V_x$. Como X es separable y $\{V_x \mid x \notin C\}$ es una cubierta abierta de

$X \setminus C$, existen $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tales que $X \setminus C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n}$.
Por lo tanto se tiene que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{x_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus V_{x_n}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{x_n} \subset C \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{x_n}.$$

En consecuencia C es G_δ. □

Teorema B.6. *Todo conjunto compacto de Baire es un compacto G_δ.*

Demostración. Sea C un conjunto compacto de Baire. Entonces existe una sucesión de conjuntos compactos G_δ, $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, tales que C pertenece al σ-anillo generado por $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y existen funciones continuas $\{f_n : X \to [0,1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ tales que

$$C_n = \{x \in X \mid f_n(x) = 0\} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}$$

Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$$

Entonces d es una seudométrica ya que

$$d(x,y) = d(y,x), \quad d(x,x) = 0 \quad \text{y} \quad 0 \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

por propiedades del valor absoluto.
Definimos una relación en X como sigue: $x \sim y$ sí y sólo si $d(x,y) = 0$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Sea $X' = X/\sim$ y $T : X \to X'$ la proyección natural. Recordemos que es continua y abierta. Definimos $[x] = T(x)$ la clase de equivalencia de x.
Vamos a demostrar que

$$\begin{aligned} \rho : \quad & X' \times X' \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \rho([x],[y]) = d(x,y) \end{aligned}$$

es una métrica. Ya que d es una seudométrica, se tiene que ρ es una seudométrica. Si $\rho([x],[y]) = 0$ entonces $d(x,y) = 0$ por lo tanto $[x] = [y]$.
Observemos que un conjunto $E \subset X$ es la imagen inversa de algún conjunto $F \subset X'$ bajo T, si y sólo si dado $x \in E$ entonces E contiene a todos los puntos equivalentes a x.
Sea $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_n$ y $y \in X$ tal que $d(x,y) = 0$. Entonces

$$|f_n(y)| = |f_n(x) - f_n(y)| = 0$$

por lo tanto $y \in C_n$. Así pues C_n es la imagen inversa de algún conjunto en X' para toda $n \in \mathbb{N}$.
Como $\{T^{-1}(F) \mid F \in X'\}$ es una σ-álgebra y contiene a los conjuntos C_n, contiene a C, por lo que existe un conjunto $F \in X'$ tal que $C = T^{-1}(F)$.

Ya que C es compacto y T continua, se tiene que $F = T(C)$ es compacto.
Afirmamos que F es un G_δ. En efecto, definimos

$$U_n = \{x \in X' : |x - y| < 1/n \text{ para alguna } y \in F\} \qquad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $x \in U_n$, entonces existe $y \in F$ tal que $|x - y| = a < 1/n$.
Sea $r = \frac{1}{n} - a > 0$, si $z \in B(x, r)$ se tiene que

$$|y - z| \leq |x - y| + |z - x| < a + \frac{1}{n} - a = \frac{1}{n},$$

por lo tanto $B(x, r) \in U_n$. Así pues U_n es abierto y es claro que

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

porque F es cerrado.
Definimos $V_n = T^{-1}(U_n)$, como T es continua se tiene que V_n es un conjunto abierto. Además

$$C = T^{-1}(F) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-1}(U_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

Así pues C es un conjunto compacto G_δ. □

Proposición B.7. *Sea β una sub-base de conjuntos abiertos de X. Sea S un σ-anillo que contiene a β. Entonces $\mathscr{B}_0(X) \subset S$.*

Demostración. Primero veamos que dado un conjunto compacto C y un conjunto abierto U con $C \subset U$ existe una cubierta finita de conjuntos en la base generada por β tal que contiene a C y está contenida en U. En efecto, Sea $x \in U$. Como β es sub-base existe E_x intersección finita de elementos de β tal que $x \in E_x \subset U$. Entonces $\{E_x \mid x \in U\}$ es una cubierta abierta de C que es compacto, existen $x_1, \cdots, x_n$ tales que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_x$.
Ahora si estamos en posición de probar la proposición. Sea C un conjunto compacto G_δ. Entonces existen conjuntos abiertos U_n con $n \in \mathbb{N}$ tales que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.
Por la observación anterior existen $E_n \in S$ tales que $C \subset E_n \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in S.$$

Así pues $\mathscr{B}_0(X) \subset S$. □

Definición B.8. *Sea $(X, \mathscr{F})$ y $(Y, \mathscr{G})$ dos espacios medibles. Definimos el **espacio medible producto** denotado por $(X \times Y, \mathscr{F} \times \mathscr{G})$, en donde $\mathscr{F} \times \mathscr{G}$ es el σ-anillo generado por $\{E \times F \mid E \in \mathscr{F},\ F \in \mathscr{G}\}$.*

Teorema B.9. *Sean X y Y dos espacios localmente compactos de Hausdorff. Entonces*

$$\mathscr{B}_0(X \times Y) = \mathscr{B}_0(X) \times \mathscr{B}_0(Y).$$

Demostración.

$\subseteq$) Sea $U \times V$ un subconjunto abierto de Baire de $X \times Y$, entonces

$$U \times V \subset \mathscr{B}_0(X) \times \mathscr{B}_0(Y)$$

por la proposición anterior y dado que los conjuntos abiertos de Baire constituyen una base se cumple

$$\mathscr{B}_0(X \times Y) \subseteq \mathscr{B}_0(X) \times \mathscr{B}_0(Y)$$

$\supseteq$) Sean A y B conjuntos compactos de Baire en X y Y respectivamente. Entonces A y B son conjuntos compactos G_δ por lo tanto $A \times B$ es un subconjunto compacto G_δ de $X \times Y$. Por definición de $\mathscr{B}_0(X) \times \mathscr{B}_0(Y)$ se tiene que

$$\mathscr{B}_0(X) \times \mathscr{B}_0(Y) \subseteq \mathscr{B}_0(X \times Y).$$

□

Proposición B.10. *Sean X y Y dos espacios localmente compactos de Hausdorff. Entonces*

$$\mathscr{B}_s(X) \times \mathscr{B}_s(Y) \subset \mathscr{B}_s(X \times Y) \quad y \quad \mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y).$$

Demostración. Sea $C \subset X$ y $D \subset Y$ conjuntos compactos entonces

$$C \times D \subset X \times Y$$

es un conjunto compacto, por lo que

$$C \times D \in \mathscr{B}_s(X \times Y),$$

y como se cumple con los generadores del σ-anillo tenemos que

$$\mathscr{B}_s(X) \times \mathscr{B}_s(Y) \subset \mathscr{B}_s(X \times Y).$$

La otra demostración es análoga si se hace uso de los conjuntos compactos. □

El siguiente ejemplo muestra que la contención puede ser propia en la proposición anterior.

Ejemplo B.11. *Sea G un grupo compacto con cardinalidad mayor que la del continuo. Sea*

$$D = \{(x, y) \mid x = y\} \subset G \times G$$

la diagonal. Primero veamos que D es un conjunto cerrado.
Sea $(x, y) \notin D$ entonces $x \neq y$. Como G es de Hausdorff, existen U y V conjuntos abiertos y ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Por lo que

$$(x, y) \in U \times V \subset G \times G \setminus D$$

Como $G \times G$ es compacto, se tiene que D es compacto, entonces $D \in \mathscr{B}_s(G \times G)$. Si que $D \in \mathscr{B}_s(G) \times \mathscr{B}_s(G)$ existen dos sucesiones de conjuntos

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots \in \mathscr{B}_s(G)$$

tales que

$$D \in \sigma(\{A_n \times B_n \mid n \in \mathbb{N}\}),$$

donde $\sigma(\mathscr{E})$ es el σ-anillo generado por $\mathscr{E}$.
Entonces

$$D \in \sigma(\{A_n, B_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \times \sigma(\{A_n, B_n \mid n \in \mathbb{N}\}),$$

por lo que la x-sucesión,

$$D_x = \{x\} \in \sigma(\{A_n, B_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \quad \text{para toda } x \in G$$

por lo que G tiene la cardinalidad menor que la del continuo, lo cual es una contradicción. Así pues

$$\mathscr{B}_s(X \times Y) \subsetneq \mathscr{B}_s(X) \times \mathscr{B}_s(Y)$$

Definición B.12. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Decimos que una medida μ es:*

- ***de Borel*** *si es una medida definida en $\mathscr{B}(X)$.*
- ***de Borel fuerte*** *si es una medida definida en $\mathscr{B}_s(X)$ y para todo conjunto compacto C, $\mu(C) < \infty$.*
- ***de Baire*** *si es una medida definida en $\mathscr{B}_0(X)$ y para todo conjunto compacto de Baire C, $\mu(C) < \infty$.*

Definición B.13. *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio localmente compacto de Hausdorff y sea μ una medida. Sea $E \in \mathscr{A}$. Decimos que:*

*a) E es **regular exterior** si $\mu(E) = sup\,\{\mu(U) | \, E \subset U, \, U$ es abierto$\}$.*

*b) E es **regular interior** si $\mu(E) = inf\,\{\mu(K) \mid K \subset E, \; K$ es compacto$\}$.*

*c) E es **regular** si es regular interior y regular exterior.*

*Decimos que μ es **regular** si E es regular para todo conjunto $E \in \mathscr{A}$.*

Veamos algunas propiedades que tienen los conjuntos que son regular interior o regular exterior.

Teorema B.14. *La unión finita de conjuntos ajenos de medida finita y regulares interiores es regular interior.*

Demostración. Sean $E_1, \cdots, E_n$ conjuntos ajenos, finitos y regulares interiores y $\epsilon > 0$. Entonces existen $C_1, \cdots, C_n$ conjuntos compactos tales que

$$C_i \subset E_i \quad \text{y} \quad \mu(E_i) \leq \mu(C_i) + \frac{\epsilon}{n} \quad \text{para toda} \quad i = 1, \cdots, n.$$

Sea $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Entonces $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ y además

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) + \epsilon = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) + \epsilon = \mu(C) + \epsilon.$$

□

Teorema B.15.

a) La unión numerable de conjuntos regulares exteriores es regular exterior.

b) La unión creciente de conjuntos regulares interiores es regular interior.

Demostración. Sea $\{E_i\}$ una sucesión de conjuntos, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\epsilon > 0$.

a) Cada uno de los E_i es regular exterior. Si algún conjunto no es finito, es claro. En caso contrario, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto U_n tal que

$$E_i \subset U_i \quad \text{y} \quad \mu(U_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Sea $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.
Si $\mu(E) = \infty$, la unión es regular exterior. Si $\mu(E) < \infty$ tenemos que

$$\mu(U) - \mu(E) = \mu(U \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus E_n) < \epsilon.$$

b) Si $\{E_i\}$ es una sucesión creciente de conjuntos, cada uno de los cuales es regular interior. Entonces

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu(E) - \mu(E_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Para E_n existe un conjunto compacto C tal que

$$C \subset E_n \quad \text{y} \quad \mu(E_n) - \mu(C) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces $\mu(E) - \mu(C) < \epsilon$.

□

Teorema B.16.

a) La intersección numerable de conjuntos regulares interiores es regular interior.

b) La intersección decreciente de conjuntos regulares exteriores de medida finita es regular exterior.

Demostración. Sean $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\epsilon > 0$.

a) Sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos donde cada uno es regular interior con medida finita. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto compacto C_n tal que

$$C_n \subset E_n \quad \text{y} \quad \mu(E_n) < \mu(C_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Sea $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Entonces $C \subset E$ y

$$\mu(E \setminus C) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \setminus C_n)) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty}\mu(E_n \setminus C_n) < \epsilon.$$

b) Sea $\{E_i\}$ una sucesión decreciente de conjuntos de regularidad exterior con medida finita. Entonces $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$. Entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu(E) - \mu(E_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. Como E_i es regular exterior, existe un conjunto abierto U, con $E_i \subset U$ tal que $|\mu(U) - \mu(E_i)| < \frac{\epsilon}{2}$. En consecuencia

$$|\mu(U) - \mu(E)| \leq |\mu(U) - \mu(E_i)| + |\mu(E) - \mu(E_i)| < \epsilon.$$

□

Teorema B.17. *Sea X un espacio localmente compacto y $\mu : \mathscr{B}_s(C) \to \overline{R}$ una medida de Borel fuerte. Entonces para cualquier conjunto compacto C existe un conjunto compacto de Baire tal que*

$$C \subset D \quad y \quad \mu(D \setminus C) = 0.$$

Demostración. Por la regularidad de μ podemos escoger una sucesión de conjuntos abiertos $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$C \subset U_n \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \mu(C) = \inf\{\mu(U_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Por el Teorema B.4 para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un compacto G_δ, D_n tal que $C \subset D_n \subset U_n$. Sea $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ entonces D es un compacto de Baire, además

$$C \subset D \quad \text{y} \quad \mu(C) \leq \mu(D) \leq \mu(D_n) \leq \mu(U_n) \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Así pues, $\mu(D \setminus C) = 0$. □

En los siguientes teoremas estamos pensando que se tiene una medida definida en los conjuntos de Borel fuerte o en los conjuntos de Baire. Vamos a hablar simplemente de conjuntos compactos y conjuntos abiertos, pero siempre pensando que son pertenecen a cualquiera de estos dos σ-anillos.
Recordemos que un **conjunto acotado** en un espacio localmente compacto, es un conjunto tal que está contenido en algún conjunto compacto.

Teorema B.18.

a) Si E y F son dos conjuntos compactos regulares exteriores con $F \subset E$, se cumple que $E \setminus F$ es regular exterior.

b) Si todo conjunto abierto y acotado es regular interior, entonces $F \setminus E$ es regular interior para cualesquiera conjuntos compactos E y F, con $F \subset E$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y E y F conjuntos compactos con $F \subset E$.

a) Como E es regular exterior existe U un conjunto abierto tal que

$$E \subset U \quad \text{y} \quad \mu(U) \leq \mu(E) + \epsilon.$$

Ya que $U \setminus F$ es un conjunto abierto y contiene a $E \setminus F$ tenemos que

$$\mu(U \setminus F) - \mu(E \setminus F) = \mu(U \setminus E) = \mu(U) - \mu(E) < \epsilon.$$

b) Sea U un conjunto abierto y acotado tal que $E \subset U$. Como $U \setminus F$ es un conjunto abierto y acotado, existe un conjunto compacto K tal que

$$K \subset U \setminus F \quad \text{y} \quad \mu(U \setminus F) \leq \mu(K) + \epsilon.$$

Entonces $E \cap K$ es compacto y $E \cap K \subset E \cap (U \setminus F) = E \setminus F$. Por lo tanto,

$$\mu(E \setminus F) - \mu(E \cap K) = \mu(E \setminus (F \cup K)) = \mu(E \setminus F) - \mu(K) \leq \mu(U \setminus F) - \mu(K) < \epsilon.$$

□

Teorema B.19. *Todo conjunto compacto es regular exterior si y sólo si todo conjunto abierto y acotado es regular interior.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$

$\Rightarrow$) Dado U un conjunto abierto y acotado existe un conjunto compacto C tal que $U \subset C$. Como $C \setminus U$ es compacto, existe V un conjunto abierto tal que

$$C \setminus U \subset V \quad \text{y} \quad \mu(V) \leq \mu(E \setminus U) + \epsilon.$$

Observemos que $C \setminus V \subset U$ es un conjunto compacto, además

$$\mu(U) - \mu(C \setminus V) = \mu(U \setminus (C \setminus V)) = \mu(U \cap V) \leq \mu(V \setminus (C \setminus U)) = \mu(V) - \mu(C \setminus U) < \epsilon.$$

$\Leftarrow$) Sean C un conjunto compacto y U un conjunto abierto y acotado tal que $C \subset U$. Ya que $U \setminus C$ es un conjunto abierto y acotado, existe un conjunto compacto K tal que

$$K \subset U \setminus C \quad \text{y} \quad \mu(U \setminus C) \leq \mu(K) + \epsilon.$$

Entonces $U \setminus K$ es un conjunto abierto, $C \subset U \setminus (U \setminus C) \subset U \setminus K$ y

$$\mu(U \setminus K) - \mu(C) = \mu((U \setminus K) \setminus C) = \mu((U \setminus C) \setminus K) = \mu(U \setminus C) - \mu(K) < \epsilon.$$

□

Teorema B.20. *Para que μ sea una medida es regular es necesario y suficiente que sea regular exterior sobre los conjuntos compactos o regular interior sobre los conjuntos abiertos y acotados.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Es claro.

$\Leftarrow$) Por los Teoremas B.15, B.16, B.18 y B.19, la clase de subconjuntos regulares exteriores es monótona y contiene a los conjuntos compactos, entonces contiene al σ-anillo generado por los conjuntos compactos, es decir μ es regular exterior. Análogamente μ es regular interior. Así pues μ es regular.

□

Ahora si estamos en condición de probar el siguiente teorema

Teorema B.21. *Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Entonces toda medida de Baire ν es regular.*

Demostración. Dado C un compacto de Baire existe una sucesión decreciente de conjuntos abiertos finitos de Baire $\{U_n\}$ tales que $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Entonces

$$\nu(C) = \lim_{n \to \infty} \nu(U_n) = inf\,\{\nu(U) \mid C \subset U,\ U \text{ abierto de Baire}\}$$

Por el teorema anterior, ν es regular. □

De hecho, podemos decir algo más.

Proposición B.22. *Sea $(X, \mathscr{B}_0(X), \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}_0(Y), \nu)$ dos espacios de medida de Baire. Entonces $\mu \times \nu$ es regular.*

Demostración. Por el Teorema B.9 se da la siguiente igualdad

$$\mathscr{B}_0(X \times Y) = \mathscr{B}_0(X) \times \mathscr{B}_0(Y),$$

entonces $\mu \times \nu$ es de Baire y por lo tanto es regular. $\square$

Sin embargo la proposición anterior no es cierta si la medida es de Borel o Borel fuerte. Aún si X es un espacio compacto como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo B.23. *Sea X el grupo del Ejemplo B.11, recordemos que*

$$\mathscr{B}_s(X \times X) \subsetneq \mathscr{B}_s(X) \times \mathscr{B}_s(X)$$

Sea μ cualquier medida regular de Borel fuerte en X. Entonces la medida producto $\mu \times \mu$ no puede ser una medida de Borel fuerte porque está definida en un dominio más chico.

Lo que si tenemos es el siguiente teorema.

Teorema B.24. *Sean $\mu_1 : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ y $\mu_2 : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ dos medidas regulares de Borel fuerte definidas en espacios localmente compactos. Entonces existe una única medida regular de Borel fuerte en $X_1 \times X_2$ tal que extiende a $\mu_1 \times \mu_2$.*

La demostración es clara si se demuestra el siguiente teorema

Teorema B.25. *Sean X_1 y X_2 dos espacios localmente compactos. Supongamos que $\tau : \mathscr{B}_s(X_1) \times \mathscr{B}_s(X_2) \to \mathbb{R}$ es una medida tal que cumple:*

1) Para todo conjunto compacto $C_1 \subset X_1$ la función

$$E_2 \mapsto \tau(C_1 \times E_2) \quad (E_2 \in \mathscr{B}_s(X_2))$$

es una medida regular de Borel fuerte en $\mathscr{B}(X_2)$.

2) Para todo conjunto compacto $C_2 \subset X_2$ la función

$$E_1 \mapsto \tau(E_1 \times C_2) \quad (E_1 \in \mathscr{B}_s(X_1))$$

es una medida regular de Borel fuerte en $\mathscr{B}(X_1)$.

Entonces τ se puede extender a una única medida regular de Borel fuerte en $X_1 \times X_2$.

Para la demostración del teorema anterior, necesitamos considerar algunos preliminares.

Teorema B.26. *Sea μ una medida de Borel fuerte y ν la restricción de Baire. Cualesquiera de las dos condiciones siguientes es necesaria y suficiente para que μ sea una medida regular.*

1. *Para todo conjunto compacto C se tiene que:*

$$\mu(C) = \inf \{\nu(U_0) \mid C \subset U_0 \text{ y } U_0 \text{ es un conjunto abierto de Baire}\}$$

2. Para todo conjunto abierto y acotado U se tiene que:

$$\mu(U) = \sup\{\nu(C_0) \mid C_0 \subset U \text{ y } C_0 \text{ es un conjunto compacto de Baire}\}$$

Además si dos medidas de Borel fuerte son regulares e iguales en todo conjunto de Baire, entonces las medidas son iguales.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea C un conjunto compacto, entonces

$$\begin{aligned}
\mu(C) &\leq \inf\{\mu(U_0) \mid C \subset U_0 \text{ y } U_0 \text{ es un conjunto abierto fuerte}\}\\
&\leq \inf\{\mu(U_0) \mid C \subset U_0 \text{ y } U_0 \text{ es un conjunto abierto de Baire}\}\\
&= \inf\{\nu(U_0) \mid C \subset U_0 \text{ y } U_0 \text{ es un conjunto abierto de Baire}\}\\
&= \mu(C)
\end{aligned}$$

Por lo tanto C es regular exterior. Análogamente se puede probar que cualquier conjunto abierto es regular interior. Por el Teorema B.20 μ es regular.

$\Leftarrow$) Sean $\epsilon > 0$ y C un conjunto compacto. Como μ es regular existe un conjunto abierto U tal que

$$C \subset U \quad \text{y} \quad \mu(U) - \mu(C) < \epsilon.$$

Por la Proposición B.4, existen C_0 un compacto de Baire y U_0 un abierto de Baire tales que

$$C \subset U_0 \subset C_0 \subset U_0 \subset U,$$

entonces

$$\nu(U_0) = \mu(U_0) \leq \mu(U) \leq \mu(C) - \epsilon$$

y

$$\nu(C_0) = \mu(C_0) \geq \mu(C) \geq \mu(U) - \epsilon.$$

Por lo tanto μ cumple las condiciones 1. y 2.

La igualdad y la regularidad de la medida es clara por las condiciones 1. y 2. □

Definición B.27. *Sean X un espacio localmente compacto y $c : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ una función definida sobre los conjuntos compactos. Decimos que c es un **contenido** si es una función no negativa, finita, monótona, subaditiva y aditiva (si $C \cap D = \emptyset$ entonces $c(C \cup D) = c(C) + c(D)$).*

Observación 1. $c(\emptyset) = 0$. En efecto, $c(\emptyset \cup \emptyset) = c(\emptyset) + c(\emptyset)$.

Definición B.28. *Sea c un contenido. Definimos $c_* : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ como:*

$$c_*(U) = \sup\{c(C) \mid C \subset U,\ C \text{ es un conjunto compacto}\}$$

para U un conjunto abierto de Borel fuerte.

Proposición B.29. *Sea c un contenido. Entonces c_* satisface*

a) $c_*(\emptyset) = 0$.

b) Monótona.

c) Contablemente subdaditiva.

d) Contablemente aditiva.

Demostración.

a) Es claro por la observación.

b) Sean U y V conjuntos abiertos con $U \subset V$ y C un conjunto compacto con $C \subset U$. Entonces $C \subset V$ y por lo tanto $c(C) \leq c_*(V)$. Por definición de supremo tenemos que $c_*(U) \leq c_*(V)$.

c) Sean U y V conjuntos abiertos y C un conjunto compacto tal que $C \subset U \cup V$. Por el Lema 1.6 existen D y E conjuntos compactos tales que

$$D \subset U, \quad E \subset V \quad \text{y} \quad C = D \cup E.$$

Entonces

$$\begin{aligned} c_*(U \cup V) &= \sup\{c(C) \mid C \subset U \cup V,\ C \text{ es compacto}\} \\ &\leq \sup\{c(D) + c(E) \mid C = D \cup E \subset U \cup V,\ C \text{ es compacto}\} \\ &\leq \sup\{c(D) \mid D \subset U,\ D \text{ es compacto}\} + \\ &\quad\ \sup\{c(E) \mid E \subset V,\ E \text{ es compacto}\} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$c_*(U \cup V) \leq c_*(U) + c_*(V).$$

Sea (U_n) una sucesión de conjuntos abiertos y C un conjunto compacto tal que $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $C \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_n$. Entonces

$$c(C) \leq c_*\Big(\bigcup_{n=1}^{N} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{N} c_*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_*(U_n).$$

Así pues

$$c_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_*(U_n).$$

d) Sean U y V conjuntos abiertos y ajenos. Si C y D son conjuntos compactos tales que $C \subset U$ y $D \subset V$ se tiene que

$$c(C) + c(D) = c(C \cup D) \leq c_*(U \cup V).$$

Entonces
$$c_*(U) + c_*(V) \leq c_*(U \cup V).$$
Sea (U_n) una sucesión de conjuntos abiertos y ajenos. Entonces para toda $N \in \mathcal{N}$ se tiene que
$$\sum_{n=1}^{N} c_*(U_n) = c_*\Big(\bigcup_{n=1}^{N} U_n\Big) \leq c_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big)$$
Por lo tanto
$$c_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_*(U_n).$$

e) Es claro, por la observación B.

□

Definición B.30. *Sea X un espacio localmente compacto y $E \subset X$ un subconjunto de X. Definimos*

$$\mu^*(E) = \operatorname{ínf}\{c_*(U) \mid E \subset U,\ U \textit{ conjunto abierto de Borel fuerte}\}$$

Proposición B.31. *μ^* es una medida exterior.*

Demostración.

1. Es claro que $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2. Sea $E \subset F \subset X$. Si $F \subset U$ con U abierto, se tiene que $\mu^*(E) \leq c_*(U)$ por lo tanto $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

3. Sean $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos acotados y $\epsilon > 0$. Por definición para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto abierto U_n tal que
$$E_n \subset U_n \quad \text{y} \quad c_*(U_n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$
Entonces
$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)\Big) \leq c^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_*(E_n) + \epsilon.$$

□

Proposición B.32. *Sea C un conjunto compacto. Entonces*

$$\mu^*(C^\circ) \leq c(C) \leq \mu^*(C).$$

Demostración. Sea C un conjunto compacto y U un conjunto abierto tal que $C \subset U$ entonces $c(C) \leq c_*(U)$, por lo tanto

$$c(C) \leq \text{ínf}\{c_*(U) \mid C \subset U,\ U \text{ es abierto}\} \leq c_*(C).$$

Sean C y D dos conjuntos compactos tales que $D \subset C^\circ$, entonces

$$\mu^*(C^\circ) = c_*(C^\circ) = \sup\{c(D) \mid D \subset C^\circ,\ D \text{ es compacto}\} \leq c(C).$$

□

Teorema B.33. *Sea μ^* la medida exterior generada por un contenido c. Entonces la función*

$$\begin{aligned} \mu :\ & \mathscr{B}_s(X) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \mu(E) = \mu^*(E) \end{aligned}$$

es una medida de Borel fuerte regular.

Demostración. Sea C un conjunto compacto. Basta demostrar que para un conjunto abierto U se cumple

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C^c)$$

Sean U un conjunto abierto y $D \subset U \cap C^c$ y $E \subset U \cap D^c$ dos conjuntos compactos. Como $D \cap E = \emptyset$ y $D \cup E \subset U$ se tiene que

$$\mu^*(U) = c_*(U) \geq c(D \cup E) = c(D) + c(E).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu^*(U) &\geq c(D) + sup\{c(E) \mid E \subset U \cap D^c,\ E \text{ es compacto}\} \\ &= c(D) + c_*(U \cap D^c) = c(D) + \mu^*(U \cap D^c) \geq c(D) + \mu^*(U \cap C) \\ &\geq \sup\{c(D) \mid D \subset U \cap C^c,\ D \text{ es compacto}\} + \mu^*(U \cap C) \\ &= c_*(U \cap C^c) + \mu^*(U \cap C) = \mu^*(U \cap C) + \mu^*(U \cap C^c). \end{aligned}$$

Por lo tanto todos los conjuntos en $\mathscr{B}_s(X)$ son medibles.
Sea C un conjunto compacto y D un compacto con $C \subset D^\circ$. Entonces

$$\mu(C) \leq \mu^*(D^\circ) \leq c(D) < \infty.$$

Así pues μ es una medida de Borel fuerte. Veamos la regularidad.

$$\begin{aligned} \mu(C) &= \mu^*(C) = \text{ínf}\{c_*(U) \mid C \subset U,\ U \text{ es abierto}\} \\ &= \text{ínf}\{\mu^*(U) \mid C \subset U,\ U \text{ es abierto}\} \\ &= \text{ínf}\{\mu(U) \mid C \subset U,\ U \text{ es abierto}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto μ es una medida de Borel fuerte regular. □

Definición B.34. *Sea c un contenido. Decimos que c es* ***regular*** *si para todo conjunto compacto C se cumple:*

$$c(C) = \text{ínf}\{c(D) \mid C \subset D^\circ,\ D \text{ es compacto}\}.$$

Teorema B.35. *Si μ es una medida de Borel fuerte inducida por un contenido c regular, entonces para todo conjunto compacto c se tiene que*

$$\mu(C) = c(C).$$

Demostración. Sean C un conjunto compacto y $\epsilon > 0$. Como c es regular, existe un conjunto compacto D tal que

$$C \subset D^\circ \quad \text{y} \quad c(D) \leq c(C) + \epsilon.$$

Entonces

$$c(C) \leq \mu(C) \leq \mu(D^\circ) = c_*(D^\circ) \leq c(D) \leq c(C) + \epsilon.$$

Así pues $c(C) = \mu(C)$. □

Teorema B.36. *Sean ν una medida de Baire y C un conjunto compacto. Definimos*

$$c(C) = \text{ínf}\{\nu(U) \mid C \subset U, U \text{ es un abierto de Baire}\}.$$

Entonces c es un contenido regular.

Demostración. Veamos que c es un contenido. Sean C y D dos conjuntos compactos.

1. $c(C) \geq 0$.

2. Si $C \subset D$ entonces

$$\{U \text{ abierto de Baire} \mid C \subset U\} \subset \{U \text{ abierto de Baire} \mid D \subset U\}$$

   por definición de ínfimo $c(C) \subset c(D)$.

3. Sean U y V conjuntos abiertos de Baire tales que $C \subset U$ y $D \subset V$. Entonces $C \cup D \subset U \cup V$ por lo tanto

$$c(C \cup D) \leq \nu(U \cup V) \leq \nu(U) + \nu(V).$$

   Por la definición de ínfimo tenemos que

$$c(C \cup D) \leq c(C) + c(D).$$

4. Si $C \cap D = \emptyset$ entonces existen U y V conjuntos abiertos de Baire y ajenos tales que $C \subset U$ y $D \subset V$. Sea W un conjunto abierto de Baire tal que $C \cup D \subset W$. Por lo cual

$$c(C) + c(D) \leq \nu(U \cap W) + \nu(V \cap W) \leq \nu(W).$$

   Entonces $c(C) + c(D) \leq c(C \cup D)$.

Nos falta ver que es regular. Sean C un conjunto compacto y $\epsilon > 0$. Existe U un conjunto abierto de Baire tal que

$$C \subset U \quad \text{y} \quad \nu(U) \leq c(C) + \epsilon.$$

Sea D un conjunto compacto tal que

$$C \subset D^{\circ} \subset D \subset U,$$

se sigue que $c(D) \leq \nu(U) \leq c(C) + \epsilon$. □

Teorema B.37. *Si ν es una medida de Baire. Entonces existe una única medida de Borel fuerte regular, μ, tal que $\mu(E) = \nu(E)$ para todo conjunto de Baire E.*

Demostración. Definimos $c : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$c(C) = \text{ínf}\, \{\nu(U) \mid C \subset U, U \text{ es un abierto de Baire}\}$$

Por el Teorema B.33 existe μ una medida de Borel regular. Además por los dos teoremas anteriores tenemos que c es regular y por lo tanto para todo conjunto compacto C se tiene que $\mu(C) = c(C)$. En particular para todo compacto G_δ. Entonces $\mu(E) = \nu(E)$ para todo conjunto de Baire. La unicidad se sigue del Teorema B.26 □

Ahora si estamos en posición de probar el Teorema B.25

Demostración. La unicidad se sigue del Teorema B.26 ya que el dominio de definición de τ incluye a los conjuntos de Baire. Sea $\nu = \tau|_{\mathscr{B}_0(X)}$ la medida restringida a los conjuntos de Baire.
Ya que $\tau(C_1 \times C_2) < \infty$, para cualesquiera conjuntos compactos $C_1 \subset X_1$ y $C_2 \subset X_2$ se tiene que ν es una medida de Baire. Sea μ la única medida de Borel fuerte regular tal que

$$\mu(E) = \tau(E) \quad \text{para todo conjunto} \quad E \in \mathscr{B}_0(X_1 \times X_2).$$

Falta demostrar que

$$\mu(E) = \tau(E) \quad \text{para todo conjunto} \quad E \in \mathscr{B}_s(X_1) \times \mathscr{B}_s(X_2).$$

Es suficiente demostrarlo para $E = C_1 \times C_2$ con C_1 y C_2 conjuntos compactos.
Por la regularidad de 1) y el Teorema B.17 existe un compacto G_δ, $D_2 \subset X_2$ tal que

$$C_2 \subset D_2 \quad \text{y} \quad \tau(C_1 \times C_2) = \tau(C_1 \times D_2).$$

Aplicando el mismo argumento a la regularidad de 2), existe un conjunto compacto G_δ, $D_1 \subset X_1$ tal que

$$C_1 \subset D_1 \quad \text{y} \quad \tau(C_1 \times D_2) = \tau(D_1 \times D_2).$$

Entonces

$$C_1 \times C_2 \subset D_1 \times D_2 \quad \text{y } \tau(C_1 \times C_2) = \tau(D_1 \times D_2).$$

Además por la regularidad de μ existe un conjunto compacto G_δ, $D \subset X_1 \times X_2$ tal que

$$C_1 \times C_2 \subset D \quad \text{y} \quad \mu(C_1 \times C_2) = \mu(D).$$

Sea $D^* = D \cap (D_1 \times D_2)$, D^* es un compacto G_δ y $C_1 \times C_2 \subset D^*$. Como τ y μ coinciden en los conjuntos de Baire tenemos que

$$\mu(C_1 \times C_2) \leq \mu(D^*) = \tau(D^*) \leq \tau(D_1 \times D_2) = \tau(C_1 \times C_2),$$

y

$$\tau(C_1 \times C_2) \leq \tau(D^*) = \mu(D^*) \leq \mu(D) = \mu(C_1 \times C_2).$$

Así las cosas $\mu(C_1 \times C_2) = \tau(C_1 \times C_2)$. $\square$

Apéndice C

Teorema de Representación de Riesz.

Teorema C.1 (Representación de Riesz)**.** *Sean X un espacio localmente compacto de Hausdorff e I una funcional lineal positiva de $\mathscr{K}(X)$. Entonces existe una única medida de Borel semi-regular μ tal que $I(f) = \int f d\mu$ para toda función $f \in \mathscr{K}(X)$.*

Demostración. Primero mostraremos la unicidad. Sean μ, ν dos medidas regulares de Borel que cumplen $\int f d\mu = I(f) = \int f d\nu$ para toda $f \in \mathscr{K}(X)$. Sea U un conjunto abierto, por el Lema 1.19 se cumple la siguiente igualdad

$$\mu(U) = \sup\left\{\int f d\mu : f \in \mathscr{K}(X),\ f \prec U\right\} = \nu(U)$$

Por la semi-regularidad de μ y ν se tiene que $\mu(E) = \nu(E)$ para $E \in \mathscr{B}(X)$. Por lo tanto $\mu = \nu$.

Existencia de la medida μ. Definimos $\mu^* : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{R}$ como
$\mu^*(U) = sup\{I(f) : f \in \mathscr{K}(X),\ f \prec U\}$ si U es abierto.
$\mu^*(E) = inf\{\mu^*(U) : U$ es abierto y $E \subset U\}$ si $E \in \mathscr{B}(X)$.
Primero veamos que μ está bien definida. Sean U y V conjuntos abiertos, con $U \subset V$. Si $f \prec U$ también $f \prec V$ por lo tanto $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$ y en consecuencia

$$\mu^*(U) = inf\{\mu^*(V) : V \text{ es abierto y } U \subset V\}.$$

Por lo tanto μ^* está bien definida. Veamos que μ^* es una medida exterior.

1. Sea $E \in \mathscr{B}(X)$, por definición de $f \prec U$ se tiene que $I(f) \geq 0$, por lo que $\mu^*(U) \geq 0$ para todo U abierto. En consecuencia $\mu^*(E) \geq 0$.

2. Si $f \prec \emptyset$ entonces $f \equiv 0$ por lo que $I(f) = 0$ y $\mu^*(\emptyset) = 0$.

3. Sean E y F conjuntos tales que $E \subset F$. Es claro que $\mu(E) \leq \mu(F)$.

4. Sean $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos abiertos en X y $f \in \mathscr{K}(X)$ tal que $f \prec \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, esto implica que $sop(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Ya que $sop(f)$ es compacto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $sop(F) \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_n$.

   Por la Proposición 1.14 existen funciones $f_1, \cdots, f_N \in \mathscr{K}(X)$ tales que $f = \sum_{n=1}^{N} f_n$ y $sop(f_i) \subset U_i$.
   Debido a la linealidad de I, tenemos que

$$I(f) = I\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) = \sum_{n=1}^{N} I(f_n).$$

   Por definición de μ^*, $I(f_n) \leq \mu^*(U_n)$ para toda $n = 1, \cdots, N$. Entonces

$$I(f) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n).$$

   Así pues, $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n)$.
   Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Vamos a mostrar que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

   Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \infty$, no hay nada que hacer.
   Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) < \infty$, sea $\epsilon > 0$ por definición de μ^* para toda $n \in \mathbb{N}$ existe U_n un conjunto abierto tal que

$$E_n \subset U_n \quad \text{y} \quad \mu^*(U_n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

   Esto implica que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \epsilon.$$

Por lo tanto μ^* es una medida exterior.

Sea $\mathscr{M}^* = \{E \subset X : E \text{ es } \mu^* \text{ medible}\}$, es bien sabido que es una σ-álgebra. Vamos a ver que contiene a los borelianos, para esto basta demostrar que contiene a los abiertos.
Sea U un conjunto abierto y $E \subset X$, por la subaditividad de μ^* se sigue la siguiente desigualdad

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U^c).$$

Caso 1.) $\mu^*(E) = \infty$, se cumple la igualdad.
Caso 2.) $\mu^*(E) < \infty$. Sea $\epsilon > 0$ entonces existe V un conjunto abierto con

$$E \subset V \quad \text{y} \quad \mu^*(V) \leq \mu^*(E) + \epsilon,$$

además por definición de μ^* existe $f_1 \in \mathscr{K}(X)$ tal que

$$f_1 \prec U \cap V \quad \text{y} \quad I(f_1) \geq \mu^*(U \cap V) - \epsilon.$$

Sea $K = sop(f_1)$, entonces $V \cap K^c$ es un conjunto abierto y contiene a $V \cap U^c$. Por definición de μ^*, existe $f_2 \in \mathscr{K}(X)$ tal que

$$f_2 \prec V \cap K^c \quad \text{y} \quad I(f_2) \geq \mu^*(V \cap K^c) - \epsilon.$$

Por monotonía se tiene que

$$I(f_2) \geq \mu^*(V \cap U^c) - \epsilon.$$

Como

$$f_1 + f_2 \leq \chi_{U\cap V} + \chi_{V\cap K^c} \leq \chi_{U\cap V} + \chi_{V\cap U^c} \leq \chi_V,$$

se tiene que $I(f_1 + f_2) \leq \mu^*(V)$. Por lo tanto

$$\mu^*(V) \geq I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U_c) - 2\epsilon,$$

en consecuencia

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \mu^*(V) \geq \mu^*(E \cap U) + \mu^*(E \cap U_c) - 2\epsilon.$$

Así pues, $\mathscr{M}^*$ es una σ-álgebra que contiene a los borelianos. Además es bien sabido que μ^* restringida a $\mathscr{M}^*$ es una medida.

Lema C.2. *Sea $E \subset X$ y $f \in \mathscr{K}(X)$ tal que $\chi_E \leq f$. Entonces $\mu^*(E) \leq I(f)$. Si además f cumple que $0 \leq f \leq \chi_E$, entonces $I(f) \leq \mu^*(E)$.*

Demostración.

1. Sea $\epsilon \in (0,1)$, claramente $U_\epsilon = \{x \in X : f(x) > 1 - \epsilon\}$ es un conjunto abierto. Sea $g \in \mathscr{K}(X)$ tal que $g \leq \chi_{U_\epsilon}$, entonces se tiene que

$$g(x) \leq 1 \leq \frac{f(x)}{1-\epsilon},$$

   Por lo que $I(g) \leq \dfrac{I(f)}{1-\epsilon}$, en consecuencia $\mu^*(U_\epsilon) \leq \dfrac{I(f)}{1-\epsilon}$.
   Si $x \in E$, $f(x) \geq 1$, entonces $x \in U_\epsilon$ y

$$\mu^*(E) \leq \frac{I(f)}{1-\epsilon} \quad \text{para toda} \quad \epsilon \in (0,1)$$

2. $I(f) \leq \mu^*(U)$ para todo abierto U tal que $E \subset U$, entonces $I(f) \leq \mu^*(E)$.

$\square$

$\mu = \mu_*$ restringida a $\mathscr{B}(X)$ es una medida, vamos a ver que es semi-regular.

a) La regularidad exterior es clara.

b) Sea U un abierto y $f \in \mathscr{K}(X)$ tal que $f \prec U$. Como $f \leq \chi(sop(f))$ se tiene que $I(f) \leq \mu(sop(f))$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu(U) &\leq sup\{\mu(sop(f)) : f \in \mathscr{K}(X),\ f \prec U\} \\ &\leq sup\{\mu(K) : K \subset U,\ K \text{ compacto}\} \leq \mu(U). \end{aligned}$$

c) SPor la Proposición 1.12, para todo conjunto compacto K existe $f \in \mathscr{K}(X)$ tal que $\chi_K \leq f$, entonces $\mu(K) \leq I(f) < \infty$.

Por lo tanto μ es semi-regular.

Falta ver que para toda $f \in \mathscr{K}(X)$ se tiene que $\int f d\mu = I(f)$.
Sean $f \in \mathscr{K}^+(X)$, $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ fijas. Definimos

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \leq (n-1)\epsilon, \\ f(x) - (n-1)\epsilon, & (n-1)\epsilon < f(x) \leq n\epsilon, \\ \epsilon, & n\epsilon < f(x). \end{cases}$$

Es claro que f_n es continua y que $sop(f_n) \subset sop(f)$.
Como $f \in \mathscr{K}(X)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \leq \epsilon(N-1)$ para toda $x \in X$. En consecuencia $f_n = 0$ si $n \geq N$. Observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & f(x) = 0, \\ f(x), & 0 \leq f(x) \leq \epsilon, \\ \epsilon + f(x) - (2-1)\epsilon, & \epsilon \leq f(x) \leq 2\epsilon, \\ \vdots & \vdots \\ (N-2)\epsilon + f(x) - (N-2)\epsilon, & (N-2)\epsilon \leq f(x) \leq (N-1)\epsilon. \end{cases}$$

Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$.
Sean $K_0 = sop(f)$ y $K_n = \{x \in X : f(x) \geq n\epsilon\}$, $n \geq 1$.
Por definición de f_n, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\epsilon\chi_{K_n} \leq f_n \leq \epsilon\chi_{K_{n-1}}$$

y debido al Lema C.2 se cumple que

$$\epsilon\mu(K_n) \leq I(f_n) \leq \epsilon\mu(K_{n-1}),$$

por lo tanto

$$\epsilon\sum_{n=1}^{N}\mu(K_n) \leq \sum_{n=1}^{N}I(f_n) = I(f) \leq \epsilon\sum_{n=1}^{N}\mu(K_{n-1}).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\epsilon\mu(K_n) \leq \int f_n d\mu \leq \epsilon\mu(K_{n-1})$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\epsilon\sum_{n=1}^{N}\mu(K_n) \leq \int f d\mu \leq \epsilon\sum_{n=1}^{N}\mu(K_{n-1}).$$

Así pues,

$$\int f d\mu \text{ y } I(f) \in \left[\epsilon\sum_{n=1}^{N}\mu(K_n), \epsilon\sum_{n=1}^{N}\mu(K_{n-1})\right]$$

por lo cual se tiene que

$$|I(f) - \int f d\mu| \leq \epsilon(\mu(K_0) - \mu(K_N)) = \epsilon\mu(sop(f)).$$

En consecuencia, se cumple que $I(f) = \int f d\mu$.
Sea $f \in \mathscr{K}(X)$, existen $f_1,\ f_2 \in \mathscr{K}^+(X)$ tales que $f = f_1 - f_2$, aplicando lo anterior,

$$I(f) = I(f_1) - I(f_2) = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu = \int f d\mu.$$

$\square$

Bibliografía

[1] "The elements of integration and Lebesgue measure". R.G. Bartle. Wiley Classics (1995).

[2] "Counterexamples in Haar measure". S.K. Berberian. Amer. Math. Monthly 73 (1966), 135-144.

[3] "Measure and integration". S.K. Berberian. Chelsea (1970).

[4] "Measure Theory". D.L. Cohn. Birkhäuser, Boston (1980).

[5] "Introducción a los grupos topológicos de transformaciones". S. de Neymet. Aportaciones matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, serie:textos 23 (2005).

[6] "Measure Theory". P.R. Halmos. G.T.M. Springer (1974).

[7] "Abstract Harmonic Analysis I". E. Hewitt y K.A. Ross. Springer (1979).

[8] "Vector Calculus". J.E. Marshden y A.J. Tromba. W.H. Freeman and Company (1988).

[9] "An introduction to abstract harmonic analysis". L.H. Loomis. Princeton (1953).

[10] "Topología". J.R. Munkres. Prentice Hall, 2ª edición (2002).

[11] "The Haar integral". L. Nachbin. Princeton (1965).

[12] "Measure and Category". J.C. Oxtoby. Springer GTM # 2 (1980).

[13] "Real Mathematical Analysis". C.C. Pugh. Springer-Verlaf New York (2002).

[14] "Real Analysis". H.L. Royden. Macmillan (1998).

[15] "On the existence and uniqueness of invariant measures on locally compact groups". Simon Rubinstein-Salzedo. (2004). (http://www.artofproblemsolving.com/LaTeX/Examples/HaarMeasure.pdf)

[16] "Fourier analysis on groups". W. Rudin.Interscience Tracts in Pure and Applied Math (1962).

[17] "Functional Analysis". W. Rudin. Mc Graw-Hill Book Company (1991).

[18] "Real and complex analysis". W: Rudin.Mc Graw-Hill Book Company (1987).

[19] "A converse Steinhaus Theorem for locally compact groups". S.M. Simmons. American Mathematical Society. Vol 49, number 2, June (1975), 382-286.

Índice alfabético