



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TESINA

Péndulo Paramétrico de Foucault

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO(A) EN CIENCIAS

P R E S E N T A

Efraín Ibarra Jiménez

DIRECTOR(A) DE LA TESINA: Doctor: Arturo Olvera Chávez

MÉXICO, D.F.

marzo de 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Tesina: para obtener el grado de maestro en ciencias matemáticas

Péndulo Paramétrico de Foucault

Efraín Ibarra Jiménez

11/29/09

Índice

1. Introducción:	4
1.1. Objetivos:	4
2. Sistemas de referencia inerciales y no-inerciales :	5
2.1. velocidad relativa y aceleración relativa	6
3. Ecuación del Péndulo de Foucault (Coordenadas Cartesianas)	9
3.1. Pequeñas Oscilaciones	10
3.2. Periodo del Péndulo de Foucault	13
4. Formulación lagrangiana en un sistema de referencia:	15
4.1. Lagrangiana en Coordenadas Cartesianas:	16
4.2. Lagrangiana en coordenadas cilíndricas:	16
4.2.1. Lagrangiana para oscilaciones pequeñas	17
4.2.2. Lagrangiana para oscilaciones no pequeñas	19
5. Resolución a las ecuaciones de movimiento del Péndulo de Foucault mediante el método de escalas múltiples	22
6. Aplicación del concepto de Resonancia Paramétrica a las ecuaciones de movimiento del Péndulo de Foucault con un amortiguamiento lineal	26
7. Aplicación del concepto de Resonancia Paramétrica a las ecuaciones de movimiento del Péndulo de Foucault con un amortiguamiento no lineal.	30
8. Conclusiones	36
Apéndice:	37
A. Ecuación del Péndulo de Foucault (Coordenadas Esféricas)	37
	39

Dedicatoria:

Esta tesina esta dedicada a todas aquellas personas que me han brindado su apoyo incondicional a lo largo de todos mis estudios, principalmente a quienes me dieron la vida, mis papas, quienes sin importar en que lugar me encuentre y las distancias que nos separen, siempre los llevo en mi mente, y en mi corazón.

Agradecimientos:

Agradezco el apoyo de mi familia quien han sido y seguirá siendo un impulso importante en la formación de mi educación. También quiero dar mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesina al doctor Arturo Olvera Chávez quien me ha ayudado en la elaboración de mi trabajo de tesina, brindándome de su tiempo y dedicación, así como de su conocimiento de la ciencia para la realización de la misma.

1. Introducción:

El péndulo de Foucault llamado así por el físico francés León Foucault el cual se dice que el invento fue producto de la casualidad. Cuando en 1848, Foucault trabajaba en su taller intentando acoplar una pesada barra metálica a un torno, mientras era sostenida mediante un cable de acero, Foucault observó una curiosa propiedad. El conjunto del cable más la barra formaba un péndulo, que oscilaba en un plano vertical el cual permanecía invariable (aparentemente invariable en intervalos de tiempo de unos minutos). Foucault observó que este plano se mantenía incluso rotando el sistema de sustentación del cable, lo que marcaba una diferencia entre el sistema tierra y el sistema que giraba con el sistema de sustentación: para el primero se conservaba el plano de oscilación del péndulo y para el segundo, no. En pocas palabras un péndulo de Foucault es la combinación de oscilaciones de un péndulo cónico y la de un péndulo simple considerándolo respecto a un sistema de referencia no inercial (“respecto a la tierra”). Tal movimiento del Péndulo de Foucault se atribuye principalmente a una fuerza llamada fuerza de Coriolis causada por la rotación de la tierra. En seguida se muestra en la siguiente figura un vistazo a las oscilaciones del péndulo de Foucault dibujadas en su proyección sobre el plano XY .

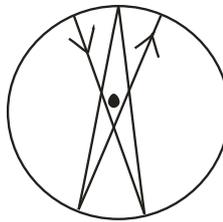


Figura 1:

1.1. Objetivos:

Sabiendo que el movimiento del **Péndulo de Foucault** es debido a la rotación de la tierra, y que además se considera que no existe algún tipo de pérdida de energía, es decir el movimiento en consideración es conservativo. Además teniendo en cuenta que en el mundo físico en donde vivimos existen muchas fuerzas (**Fuerzas de Fricción**) que se oponen al movimiento de los cuerpos, por lo que al final terminan en disipar toda la energía del objeto llevándolo así al reposo, por lo que el **Péndulo de Foucault** es algo así como un péndulo ideal que nunca se detendrá debido a que no existe fuerza que se oponga a su movimiento; pero como hemos mencionado anteriormente, en nuestro mundo físico existe la fricción, sobre todo un tipo de fricción natural la **resistencia del aire** que sería la causante de oponerse al movimiento del Péndulo de Foucault y también de llevar al reposo dicho péndulo. De tal manera que se han ideado formas de mantener un Péndulo de Foucault en movimiento. Por lo que en el siguiente trabajo de tesina, como una búsqueda de mantener el péndulo en constante movimiento supondremos un amortiguamiento lineal y no lineal que puede suponerse como la resistencia del aire y una excitación en el parámetro de la longitud del péndulo dada por $l = l_0 + \varepsilon \beta \sin(\Omega t)$ en donde la combinación de estos dos efectos propiciara una competencia entre el amortiguamiento y la excitación periódica en el parámetro de la longitud, por lo que para nuestros fines deseáramos que la energía disipada del Péndulo de Foucault por el amortiguamiento al pasar el tiempo sea igual a la energía ganada por la excitación paramétrica, quedándonos así con una ganancia de energía neta igual a cero, y de esta manera poder estabilizar el movimiento del Péndulo de Foucault en movimiento constante. Posteriormente poder encontrar una amplitud que dependa de la constante de amortiguamiento y del parámetro de excitación. Además para encontrar las ecuaciones de movimiento tanto para longitud constante como longitud variable con $l = l_0 + \varepsilon \beta \sin(\Omega t)$, se hará uso de formulación lagrangiana para sistemas de referencia no inerciales, después se usara el método asintótico de escalas múltiples para así encontrar su solución, ya que las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales no lineales.

2. Sistemas de referencia inerciales y no-inerciales :

En mecánica, un sistema de referencia inercial es un sistema de referencia en el que las leyes del movimiento cumplen la conservación del momento lineal. El término aparece principalmente en mecánica newtoniana donde los sistemas inerciales son precisamente aquellos en los que se cumplen las leyes de Newton.

Y por contraposición a la definición de sistema inercial, se tiene que un sistema es no inercial cuando las leyes de Newton no se cumplen.

Dado un sistema de referencia inercial, un segundo sistema de referencia será no inercial cuando describa un movimiento acelerado respecto al primero.

La aceleración del sistema no inercial puede deberse a:

- Un cambio en el módulo de su velocidad de traslación (aceleración lineal).
- Un cambio en la dirección de su velocidad de traslación (por ejemplo en un movimiento de giro alrededor de un sistema de referencia inercial).
- Un movimiento de rotación sobre sí mismo (véase figura 2).
- Una combinación de algunos de los anteriores.

Sistema de referencia en rotación (S') con respecto a otro sistema (S).

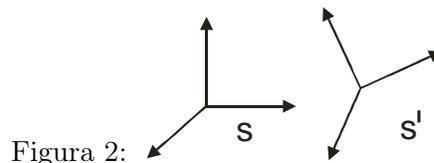


Figura 2:

Un ejemplo de sistema no inercial podría ser el correspondiente a un sistema de coordenadas "fijo en la Tierra", en el cual los movimientos de los cuerpos serían medidos respecto a puntos de la Tierra que estarían girando.

Un observador situado en un sistema de referencia no inercial, debe de recurrir a fuerzas llamadas ficticias (tales como la fuerza de Coriolis o la fuerza centrífuga) para poder explicar los movimientos con respecto a dicho sistema de referencia. Estas fuerzas no existen realmente, en el sentido de que no son causadas directamente por la interacción con otro objeto, pero deberán introducirse si se quiere explicar el fenómeno según las leyes de Newton.

Por tanto, puede detectarse que un sistema de referencia dado es no inercial por sus violaciones de las Leyes de Newton. Por ejemplo, la rotación de la Tierra se manifiesta por la rotación del vector de la gravedad que actúa sobre un Péndulo de Foucault, que hace que el plano de oscilación del péndulo varíe respecto a su entorno.

Siendo precisos se podría argumentar que los sistemas de referencia inerciales no existen, o al menos no en nuestro entorno, pues la Tierra gira sobre sí misma y también alrededor del Sol, y éste a su vez lo hace respecto al centro de la Vía Láctea. Sin embargo, con objeto de simplificar los problemas, normalmente se considerarán como inerciales sistemas que en realidad no lo son, siempre que el error que se cometa sea aceptable. Así, para muchos problemas resulta conveniente considerar la superficie de la Tierra como un sistema de referencia inercial.

2.1. velocidad relativa y aceleración relativa

A continuación para dos sistemas de referencia se deducirán las ecuaciones de velocidad relativa y de aceleración relativa para diferentes sistemas de referencia:

En la figura 3 se muestran dos sistemas de referencia en la que dos observadores O y O' poseen su propio sistema de referencia fijo, el observador O que tiene su sistema de referencia XYZ , observa que el sistema $X'Y'Z'$ fijo a O' esta rotando con una velocidad angular $\vec{\Omega}$. Para O la situación es justamente inversa; O' observa que el sistema XYZ gira con una velocidad $-\vec{\Omega}$. además por simplicidad se ha supuesto que los dos sistemas tienen el origen en común.

Sistemas de referencia en movimiento relativo de rotación uniforme.

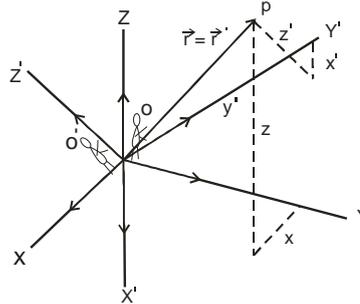


Figura 3:

En la figura 3 se observa un vector de posición de la partícula P respecto al sistema XYZ el cual esta representado por :

$$\vec{r} = xe_x + ye_y + ze_z \quad (2.1.1)$$

Y por tanto se tiene que la velocidad de la partícula p medida por O con respecto a su sistema de referencia XYZ es:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}e_x + \frac{dy}{dt}e_y + \frac{dz}{dt}e_z \quad (2.1.2)$$

Similarmente, el vector posición de P referente al sistema $X'Y'Z'$ es:

$$\vec{r} = x'e_{x'} + y'e_{y'} + z'e_{z'} \quad (2.1.3)$$

Pero como se ha supuesto que ambos sistemas tienen el origen en común esta es la razón por la que se escribió \vec{r} en vez de \vec{r}' . Entonces la velocidad de P medida por O' con respecto a su propio sistema de referencia $X'Y'Z'$ es:

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}e_{x'} + \frac{dy'}{dt}e_{y'} + \frac{dz'}{dt}e_{z'} \quad (2.1.4)$$

Al derivar la ecuación (2.1.1) y (2.1.3) con respecto al tiempo ambos observadores O y O' han supuesto que su propio sistema de referencia no está rotando, y por tanto se ha considerado que sus vectores unitarios no están cambiando en dirección con respecto al tiempo.

Sin embargo el observador O puede decir que, para él, el sistema $X'Y'Z'$ esta rotando con una velocidad angular Ω por lo que los vectores unitarios $e_{x'}$, $e_{y'}$ y $e_{z'}$ no tienen dirección constante de tal modo que al calcular la derivada de (2.1.3) con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}e_{x'} + \frac{dy'}{dt}e_{y'} + \frac{dz'}{dt}e_{z'} + \left(x' \frac{de_{x'}}{dt} + y' \frac{de_{y'}}{dt} + z' \frac{de_{z'}}{dt} \right) \quad (2.1.5)$$

Pero $\frac{de_{x'}}{dt}$, $\frac{de_{y'}}{dt}$ y $\frac{de_{z'}}{dt}$ de acuerdo a [4] son equivalentes a:

$$\begin{aligned} \frac{de_{x'}}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_{x'} \\ \frac{de_{y'}}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_{y'} \\ \frac{de_{z'}}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_{z'} \end{aligned}$$

De la ecuación (2.1.5) se tiene que la expresión que esta en el paréntesis se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x' \frac{de_{x'}}{dt} + y' \frac{de_{y'}}{dt} + z' \frac{de_{z'}}{dt} &= \vec{\Omega} \times e_{x'} x' + \vec{\Omega} \times e_{y'} y' + \vec{\Omega} \times e_{z'} z' = \vec{\Omega} \times (e_{x'} x' + e_{y'} y' + e_{z'} z') \\ &= \vec{\Omega} \times \vec{r} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Y de acuerdo a la ecuación (2.1.5) y usando (2.1.4) y (2.1.2), se obtiene que:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'} \quad (2.1.7)$$

La expresión anterior da la relación entre las velocidades \vec{V} y \vec{V}' de P , medidas por los observadores O y O' en movimiento relativo de rotación uniforme.

Para obtener una relación entre las aceleraciones de los dos sistemas de referencia: se procede de manera similar. la aceleración de P medida por O con respecto a XYZ es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}e_x + \frac{dV_y}{dt}e_y + \frac{dV_z}{dt}e_z. \quad (2.1.8)$$

La aceleración de P , medida por O' respecto a su sistema de referencia $X'Y'Z'$, cuando él ignora la rotación es:

$$\vec{a}' = \frac{dV'_{x'}}{dt}e_{x'} + \frac{dV'_{y'}}{dt}e_{y'} + \frac{dV'_{z'}}{dt}e_{z'} \quad (2.1.9)$$

Ahora al derivar la ecuación (2.1.7) respecto al tiempo y teniendo en cuenta que $\vec{\Omega}$ es constante, entonces se tiene que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt} + \vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (2.1.10)$$

Pero teniendo en cuenta que

$$\vec{V}' = \frac{dx'}{dt}e_{x'} + \frac{dy'}{dt}e_{y'} + \frac{dz'}{dt}e_{z'} = V'_{x'}e_{x'} + V'_{y'}e_{y'} + V'_{z'}e_{z'} \quad (2.1.11)$$

Y derivando (2.1.11) con respecto al tiempo se tiene :

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \left(\frac{dV'_{x'}}{dt} e_{x'} + \frac{dV'_{y'}}{dt} e_{y'} + \frac{dV'_{z'}}{dt} e_{z'} \right) + V'_{x'} \frac{de_{x'}}{dt} + V'_{y'} \frac{de_{y'}}{dt} + V'_{z'} \frac{de_{z'}}{dt} \quad (2.1.12)$$

Por lo que los primeros tres términos en (2.1.12) corresponden a \vec{a}' , dados en la ecuación (2.1.9), y los tres últimos términos se pueden ver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V'_{x'} \frac{de_{x'}}{dt} + V'_{y'} \frac{de_{y'}}{dt} + V'_{z'} \frac{de_{z'}}{dt} &= \vec{\Omega} \times V'_{x'} e_{x'} + \vec{\Omega} \times V'_{y'} e_{y'} + \vec{\Omega} \times V'_{z'} e_{z'} \\ &= \vec{\Omega} \times (V'_{x'} e_{x'} + V'_{y'} e_{y'} + V'_{z'} e_{z'}) = \vec{\Omega} \times \vec{V}' \end{aligned}$$

Por tanto la ecuación (2.1.12) se escribe como: $\frac{d\vec{V}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\Omega} \times \vec{V}'$, y recordando que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ y sustituyendo las ecuaciones anteriores en (2.1.10) se tiene que:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\Omega} \times \vec{V}' + \vec{\Omega} \times (\vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Y finalmente obtenemos:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{V}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})} \quad (2.1.13)$$

La ecuación anterior representa las aceleraciones \vec{a} y \vec{a}' de la partícula P , respecto a cada observador O y O' en un movimiento de rotación uniforme. en (2.1.13) el segundo termino $2\vec{\Omega} \times \vec{V}'$ representa la denominada **aceleración de Coriolis** y el tercer termino $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ corresponde a la llamada **aceleración centrípeta**. Ambas aceleraciones son el resultado del movimiento rotacional relativo entre dos observadores.

3. Ecuación del Péndulo de Foucault (Coordenadas Cartesianas)

Ahora me interesa conocer las ecuaciones de movimiento del Péndulo. En el sistema XYZ para un observador que rota junto con la tierra todo esto para coordenadas cartesianas. En la figura 4. La intención es representar un sistema XYZ anclado a la tierra, la cual le genera un movimiento de rotación a dicho sistema, en la que si imaginamos a un observador que sostiene alguna cuerda que a su vez tiene atada en su extremo alguna masa que sostiene en su otra mano, y posteriormente la deja oscilar al soltarla, entonces al querer deducir el movimiento producido por dicho péndulo, es necesario hacer uso de calculo vectorial para así entonces, comenzar a deducir las ecuaciones de movimiento.

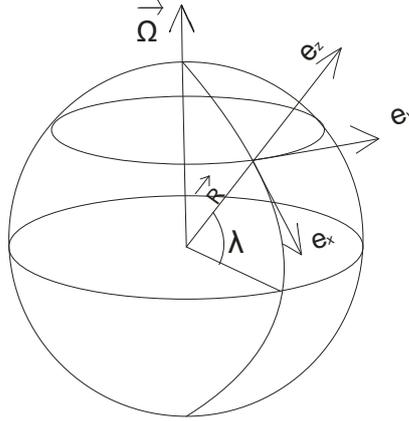


Figura 4:

Se tiene que en la figura 4, el vector $\vec{\Omega}$ representa la velocidad angular para lugares de la tierra con latitud λ , tal vector esta expresado como :

$$\vec{\Omega} = [-\Omega \cos(\lambda), 0, \Omega \sin(\lambda)] \quad (3.1)$$

Donde la cantidad Ω es la velocidad angular de la tierra que equivale a $7,292 \times 10^{-5} \text{rad s}^{-1}$, también tenemos que la posición de la masita para un observador que se encuentra anclado en el sistema XYZ esta dada por el vector:

$$\vec{r} = [l \sin(\theta), 0, 2l \sin^2(\theta/2)] \quad (3.2)$$

Observamos que este vector solo esta en el plano XZ debido a que no se ha considerado la rotación de la tierra por consiguiente es necesario tomar en cuenta la velocidad angular terrestre para obtener una posición mas acertada de la masa en el plano XYZ al considerar la rotación.

Antes de encontrar tal vector denotemos a las componentes de la velocidad angular $\vec{\Omega}$ como:

$$\Omega_x = -\Omega \cos(\lambda) \quad (3.3a)$$

$$\Omega_y = 0 \quad (3.3b)$$

$$\Omega_z = \Omega \sin(\lambda) \quad (3.3c)$$

Ya una vez hecho esto, fijémonos que la velocidad que afecta al movimiento del péndulo a moverse en el plano XY es Ω_z y como la velocidad angular es constante entonces su desplazamiento angular debe estar dado por $\Omega_z t$, por lo que al vector \vec{r} le podemos aplicar una matriz de giro sobre el plano XY . entonces denotemos a B como matriz de giro, por tanto:

$$B = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_z t) & \sin(\Omega_z t) & 0 \\ -\sin(\Omega_z t) & \cos(\Omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega_z t) & \sin(\Omega_z t) & 0 \\ -\sin(\Omega_z t) & \cos(\Omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ 0 \\ 2l \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\implies \begin{bmatrix} x = l \sin(\theta) \cos(\Omega_z t) \\ y = -l \sin(\theta) \sin(\Omega_z t) \\ z = 2l \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.1. Pequeñas Oscilaciones

Para obtener las componentes x e y correspondientes a la proyección sobre el plano XY en pequeñas oscilaciones, es suficiente hacer que θ sea muy pequeño, lo suficiente como para decir que la ecuación (3.6) se transforma en :

$$\begin{bmatrix} x = l \theta \cos(\Omega_z t) \\ y = -l \theta \sin(\Omega_z t) \\ z = l \theta^2 / 2 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

Entonces de (3.1.1) obtengamos \ddot{x} e \ddot{y} en donde \ddot{z} no nos interesa tanto ya que para oscilaciones lo suficientemente pequeñas podemos considerar $\ddot{z} \approx 0$.

Entonces de (3.1.1) se puede obtener \dot{x} , \ddot{x} ; \dot{y} , \ddot{y}

$$\dot{x} = l \dot{\theta} \cos(\Omega_z t) - \Omega_z l \theta \sin(\Omega_z t) \quad (3.1.2)$$

$$\ddot{x} = l \ddot{\theta} \cos(\Omega_z t) - 2 \Omega_z l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) - \Omega_z^2 l \theta \cos(\Omega_z t) \quad (3.1.3)$$

$$\dot{y} = -l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) - \Omega_z l \theta \cos(\Omega_z t) \quad (3.1.4)$$

$$\ddot{y} = -l \ddot{\theta} \sin(\Omega_z t) - 2 \Omega_z l \dot{\theta} \cos(\Omega_z t) + \Omega_z^2 l \theta \sin(\Omega_z t) \quad (3.1.5)$$

Ahora si de la ecuación (17) correspondientes a la ecuación de pequeñas oscilaciones en coordenadas esféricas (“ver apéndice sección A”) despejamos a $\ddot{\theta}$ y la sustituimos en (3.1.3) tenemos que:

$$\ddot{x} = l (\Omega_z^2 - \omega^2) \theta \cos(\Omega_z t) - 2 \Omega_z l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) - \Omega_z^2 l \theta \cos(\Omega_z t)$$

Simplificando mas :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 l \theta \cos(\Omega_z t) - 2 \Omega_z l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) \\ \implies \ddot{x} &= -\omega^2 x - 2 \Omega_z l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Y si escribimos a \ddot{x} como:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \left(-2 \Omega_z l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) - 2 \Omega_z^2 l \theta \cos(\Omega_z t) \right) + 2 \Omega_z^2 l \theta \cos(\Omega_z t) \quad (3.1.7)$$

Y además si observamos bien que:

$$2\Omega_z \dot{y} = -2\Omega_z l \dot{\theta} \sin(\Omega_z t) - 2\Omega_z^2 l \theta \cos(\Omega_z t) \quad (3.1.8)$$

por lo que sustituyendo (3.1.8) que es equivalente a lo que esta en paréntesis de (3.1.7) , \ddot{x} queda como:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x + 2\Omega_z \dot{y} + 2\Omega_z^2 l \theta \cos(\Omega_z t) \\ \implies \ddot{x} &= -\omega^2 x + 2\Omega_z \dot{y} + 2\Omega_z^2 x \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Ahora para \ddot{y} sustituyendole $\ddot{\theta}$ la cual se despeja de (17) y simplificando:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \omega^2 l \theta \sin(\Omega_z t) - 2\Omega_z l \dot{\theta} \cos(\Omega_z t) \\ \implies \ddot{y} &= -\omega^2 y - 2\Omega_z l \dot{\theta} \cos(\Omega_z t) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

escribimos a \ddot{y} como:

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + \left(-2\Omega_z l \dot{\theta} \cos(\Omega_z t) + 2\Omega_z^2 l \theta \sin(\Omega_z t)\right) - 2\Omega_z^2 l \theta \sin(\Omega_z t) \quad (3.1.11)$$

Observando bien que:

$$-2\Omega_z \dot{x} = -2\Omega_z l \dot{\theta} \cos(\Omega_z t) + 2\Omega_z^2 l \theta \sin(\Omega_z t) \quad (3.1.12)$$

Sustituyendo (3.1.12) en (3.1.11) \ddot{y} queda como:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\omega^2 y - 2\Omega_z \dot{x} - 2\Omega_z^2 l \theta \sin(\Omega_z t) \\ \implies \ddot{y} &= -\omega^2 y - 2\Omega_z \dot{x} + 2\Omega_z^2 y \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Juntando (3.1.9) y (3.1.13) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} = -\omega^2 x + 2\Omega_z \dot{y} + 2\Omega_z^2 x \\ \ddot{y} = -\omega^2 y - 2\Omega_z \dot{x} + 2\Omega_z^2 y \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

Entonces en la ecuación (3.1.14) se tienen los términos $2\Omega_z^2 x$ y $2\Omega_z^2 y$ que corresponden a los términos centrífugos. Y $2\Omega_z \dot{y}$, $-2\Omega_z \dot{x}$ debidos a la aceleración de Coriolis.

Y observando que (3.1.14) se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} = (-\omega^2 + 2\Omega_z^2) x + 2\Omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} = (-\omega^2 + 2\Omega_z^2) y - 2\Omega_z \dot{x} \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

En donde el termino Ω_z^2 se puede despreciar ya que son demasiado pequeños y obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega^2 x + 2\Omega_z \dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y - 2\Omega_z \dot{x} \end{aligned}} \quad (3.1.16)$$

Ahora si hacemos $w = x + iy$, entonces $\dot{w} = \dot{x} + i\dot{y}$ y $\ddot{w} = \ddot{x} + i\ddot{y}$ entonces el sistema anterior se reduce a una sola ecuación diferencial compleja:

$$\ddot{w} + 2i\Omega_z\dot{w} - a^2w = 0 \quad (3.1.17)$$

donde $a^2 = 2\Omega_z^2 - \omega^2$ y si obtenemos los vectores del siguiente sistema que se obtiene de proponer $\dot{w} = v$ y $\dot{v} = -2i\Omega_zv - a^2w$ entonces lo anterior se puede representar como:

$$\begin{bmatrix} \dot{w} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2i\Omega_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

y si encontramos sus valores propios se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda &= -i\Omega_z \pm \sqrt{a^2 - \Omega_z^2} \\ \implies \lambda &= -i\Omega_z \pm \sqrt{\Omega_z^2 - \omega^2} \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

pero como $\Omega_z^2 \ll \omega^2$ se tiene que $\sqrt{\Omega_z^2 - \omega^2}$ es complejo además si desaparecemos Ω_z^2 siendo muy próximo a cero entonces:

$$\lambda \approx -i\Omega_z \pm i\omega \quad (3.1.19)$$

Por tanto la solución de w esta dada por:

$$w = e^{-i\Omega_z t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \quad (3.1.20)$$

también sabemos que (3.1.20) se puede escribir como:

$$w = e^{-i\Omega_z t} \left(\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \right) \cos(\omega t + \beta)$$

Y sea $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

$$\implies w = A e^{-i\Omega_z t} \cos(\omega t + \beta) \quad (3.1.21)$$

Recordando que $w = x + iy$ y sabiendo que $e^{-i\Omega_z t} = \cos(\Omega_z t) - i \sin(\Omega_z t)$ y sustituyendo esto en (3.1.21) tenemos:

$$x + iy = A (\cos(\Omega_z t) - i \sin(\Omega_z t)) \cos(\omega t + \beta) \quad (3.1.22)$$

Simplificando (3.1.22) se tiene:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\Omega_z t) \cos(\omega t + \beta) \\ y &= -A \sin(\Omega_z t) \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

En donde tenemos que x e y son la parte real y compleja respectivamente de (3.1.22). Por tanto de la ecuación (3.3c) $\Omega_z = \Omega \sin(\lambda)$ por lo que si hacemos el caso particular en el que nos encontramos en el ecuador se tendrá $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \beta) \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Y en este caso particular el Péndulo de Foucault es equivalente al péndulo plano que oscila con una frecuencia de ω , y si nos encontramos en el polo norte $\Omega_z = \Omega$ por lo que (3.1.23) quedara dada por:

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\Omega t) \cos(\omega t + \beta) \\y &= -A \sin(\Omega t) \cos(\omega t + \beta)\end{aligned}$$

y el péndulo girara junto con la tierra lo cual para un observador que esta en el polo norte le parecerá que el péndulo oscila como un péndulo simple ya que el también esta girando junto con la tierra .

3.2. Periodo del Péndulo de Foucault

Ahora con todo lo anterior se sabe que el péndulo esta girando y a su vez esta oscilando lo que causa desplazamientos sobre su proyección como los mostrados en la figura 1. Pero no sabemos cuanto tiempo transcurre para volver a su punto de partida después de haber dado una revolución completa.

Entonces para encontrar el **periodo** para el **Péndulo de Foucault** se hará uso del sistema x, y de (3.1.23). y escribiéndola de nuevo:

$$\begin{aligned}x &= A \cos(\Omega_z t) \cos(\omega t + \beta) \\y &= -A \sin(\Omega_z t) \cos(\omega t + \beta)\end{aligned}$$

además supongamos que $x = r \cos(\phi)$, e $y = r \sin(\phi)$, donde ϕ es el desplazamiento angular cuando el péndulo va rotando, y r la variación del radio sobre su proyección, entonces hagamos \dot{x} e \dot{y} lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -A \omega \cos(\Omega_z t) \sin(\omega t + \beta) - A \Omega_z \sin(\Omega_z t) \cos(\omega t + \beta) \\ \dot{y} &= A \omega \sin(\Omega_z t) \sin(\omega t + \beta) - A \Omega_z \cos(\Omega t) \cos(\omega t + \beta).\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

También haciendo: $x^2 + y^2$ y $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$x^2 + y^2 = r^2 = A^2 \cos^2(\omega t + \beta)\tag{3.2.2}$$

$$\implies r = A \cos(\omega t + \beta)\tag{3.2.3}$$

Y

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \beta) + A^2 \Omega_z^2 \cos^2(\omega t + \beta)\tag{3.2.4}$$

Por otra parte : $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$

lo que nos conduce a que:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \beta) + A^2 \Omega_z^2 \cos^2(\omega t + \beta)\tag{3.2.5}$$

Ya casi por terminar, nos falta encontrar \dot{r}^2

$$\dot{r}^2 = A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \beta)\tag{3.2.6}$$

Y sustituyendo (3.2.6) y (3.2.2) en el lado izquierdo de (3.2.5) se tiene que:

$$A^2 \cos^2(\omega t + \beta) \dot{\phi}^2 + A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \beta) = A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \beta) + A^2 \Omega_z^2 \cos^2(\omega t + \beta)$$

Por la ecuación anterior eliminando términos semejantes y simplificando llegamos a:

$$\dot{\phi}^2 = \Omega_z^2 \quad (3.2.7)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \Omega_z \quad (3.2.8)$$

Por lo que el periodo T estará dado por:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Omega_z}$$

Por tanto el periodo es:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega_z}} \quad (3.2.9)$$

4. Formulación lagrangiana en un sistema de referencia:

Antes de empezar con la presente sección cabe mencionar que el artículo de *Alexander Khein y D.F Nelson* [6] y [7] en el que estudian el **Péndulo de Foucault con variables de ángulo y acción** mediante formulación lagrangiana y haciendo uso de oscilaciones pequeñas resuelven la ecuación de movimiento, y llegan a dar una representación de la amplitud para **oscilaciones pequeñas**, en donde el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido de las ecuaciones de **euler lagrange** es conservativo, en nuestro caso se usara formulación lagrangiana, pero al momento de introducir una perturbación al Péndulo de Foucault mediante un amortiguamiento lineal este dejara de ser conservativo, por lo que recurriremos a la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales mediante el análisis asintótico usando **escalas múltiples**. De esta manera encontraremos una representación de la amplitud que resuelva el problema y que no proviene de algún sistema conservativo.

Recordando que la relación entre las velocidades relativas para dos sistemas de referencia esta dada por la fórmula $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$. Y teniendo en cuenta que la Lagrangiana se compone de la energía cinética y de la energía potencial entonces la lagrangiana esta dada por:

$$L = T - U \quad (4.1)$$

Donde T es la cinética y U la potencial y entonces (4.1) es igual a:

$$L = \frac{m\nu^2}{2} - U(r). \quad (4.2)$$

Si representamos a

$$\nu^2 = \|\vec{V}\|^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \|\vec{V}\|^2 &= (\vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}') \\ \|\vec{V}\|^2 &= \|\vec{V}'\|^2 + 2\vec{V}' \cdot \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \|\vec{\Omega} \times \vec{r}'\|^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Entonces :

$$L = \frac{m}{2} \|\vec{V}'\|^2 + m\vec{V}' \cdot \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \frac{m}{2} \|\vec{\Omega} \times \vec{r}'\|^2 - U(r) \quad (4.4)$$

Y (4.4) corresponde a la Lagrangiana en un sistema de referencia XYZ .

4.1. Lagrangiana en Coordenadas Cartesianas:

Para esto hagamos :

$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{V}' = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Y

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \Omega_x & 0 & \Omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} = (-y \Omega_z, x \Omega_z - z \Omega_x, y \Omega_x)$$

y de acuerdo a la ecuación (2.1.7) referente a la velocidad relativa entre dos sistemas O y O' tenemos que

$$\vec{V} = (\dot{x} - y \Omega_z, \dot{y} + x \Omega_z - z \Omega_x, \dot{z} + y \Omega_x) \quad (4.1.1)$$

Entonces usando (4.1.1) para hacer $\|\vec{V}\|^2$ y posteriormente sustituir en (4.2) se tiene que la lagrangiana esta dada por:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m (-\dot{x} y \Omega_z + \dot{y} x \Omega_z - \dot{y} z \Omega_x + \dot{z} y \Omega_x) \quad (4.1.2)$$

$$+ \frac{m}{2} (x^2 \Omega_z^2 + y^2 \Omega_x^2 + z^2 \Omega_x^2 + y^2 \Omega_z^2 - 2 \Omega_x \Omega_z x z) - U(r).$$

Donde $U = mgz$

4.2. Lagrangiana en coordenadas cilíndricas:

De acuerdo a la ecuación (4.1.2) se cambiara la lagrangiana de cartesianas a coordenadas cilíndricas por lo que solo es necesario hacer las sustituciones correspondientes a cada variable, por lo que de acuerdo a la siguiente figura se tiene que :

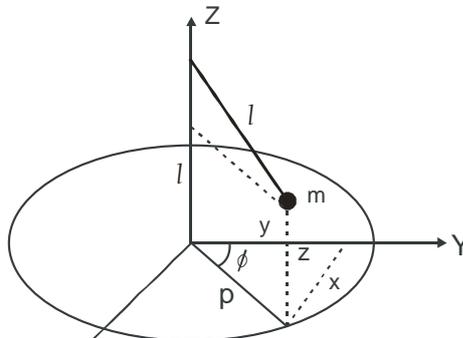


Figura 5:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi), & \dot{x} &= \dot{\rho} \cos(\phi) - \rho \dot{\phi} \sin(\phi) \\ y &= \rho \sin(\phi), & \dot{y} &= \dot{\rho} \sin(\phi) + \rho \dot{\phi} \cos(\phi) \\ z &= l - \sqrt{l^2 - \rho^2}, & \dot{z} &= \frac{\rho \dot{\rho}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Donde l es la longitud del péndulo y $\rho \in [0, l]$.

Antes de proceder a tales sustituciones, por simplicidad veremos primero lo que sucede en el caso de pequeñas oscilaciones .

4.2.1. Lagrangiana para oscilaciones pequeñas

Para el caso en el que tenemos **oscilaciones pequeñas**, se puede proponer que la elevación z es próxima a cero y por tanto se puede también proponer $\dot{z} \approx 0$, además teniendo en cuenta que los términos Ω_x^2 y Ω_z^2 junto con $\Omega_x \Omega_z$ son casi nulos por lo que son términos que podemos despreciar, por lo que la ecuación (4.1.2) se puede representar como:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m \Omega_z (x \dot{y} - \dot{x} y) - m g z \quad (4.2.1.1)$$

Y si expresamos a z en serie de Taylor:

$$z = \frac{\rho^2}{2l} + \frac{\rho^4}{8l^3} + \dots \quad (4.2.1.2)$$

Posteriormente en (4.2.1.2) corto la serie hasta orden dos debido a que se esta considerando oscilaciones pequeñas:

$$z \approx \frac{\rho^2}{2l} \quad (4.2.1.3)$$

Ahora sustituyendo (4.2.1.3) en (4.2.1.1) y teniendo en cuenta que $\rho^2 = x^2 + y^2$, entonces L para oscilaciones pequeñas es:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m \Omega_z (x \dot{y} - \dot{x} y) - \frac{m \omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (4.2.1.4)$$

Donde:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Y por consiguiente si sustituimos \dot{x} , \dot{y} , x , y en (4.2.1.4) tomadas de (4.2.1) y simplificando encontramos que L en cilíndricas es:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2) + m \Omega_z \rho^2 \dot{\phi} - \frac{m \omega^2}{2} \rho^2 \quad (4.2.1.5)$$

Por lo anterior encontremos las ecuaciones de movimiento haciendo uso de (4.2.1.5):

usando la ecuación de **Euler Lagrange** se tiene que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad (4.2.1.6a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (4.2.1.6b)$$

Donde cada una nos dará la ecuación de movimiento tanto para ρ como para ϕ , entonces de (4.2.1.6a) y (4.2.1.6b) obtenemos:

$$\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 - 2\Omega_z \rho \dot{\phi} + \omega^2 \rho = 0 \quad (4.2.1.7a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m\rho^2 \left(\dot{\phi} + \Omega_z \right) \right) = \dot{P}_\phi = 0, \implies P_\phi = cte. \quad (4.2.1.7b)$$

Por lo que en (4.2.1.7b) el momento angular P_ϕ se conserva y usando este hecho entonces (4.2.1.7a) se puede expresar como $\ddot{\rho} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \rho - \frac{P_\phi^2}{m^2 \rho^3}$. Por tal motivo tenemos que las ecuaciones de Lagrange para ρ y ϕ son:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \rho - \frac{P_\phi^2}{m^2 \rho^3} &= 0, \\ P_\phi &= m\rho^2 \left(\dot{\phi} + \Omega_z \right) = cte. \end{aligned} \quad (4.2.1.8)$$

Podemos realizar un diagrama fase para la situación de pequeñas oscilaciones, donde el sistema anterior puede ser escrito:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = v \\ \dot{v} = -(\omega^2 + \Omega_z^2) \rho + \frac{P_\phi^2}{m^2 \rho^3} \end{cases} \quad (4.2.1.9)$$

Tal diagrama fase esta representado en la siguiente figura.

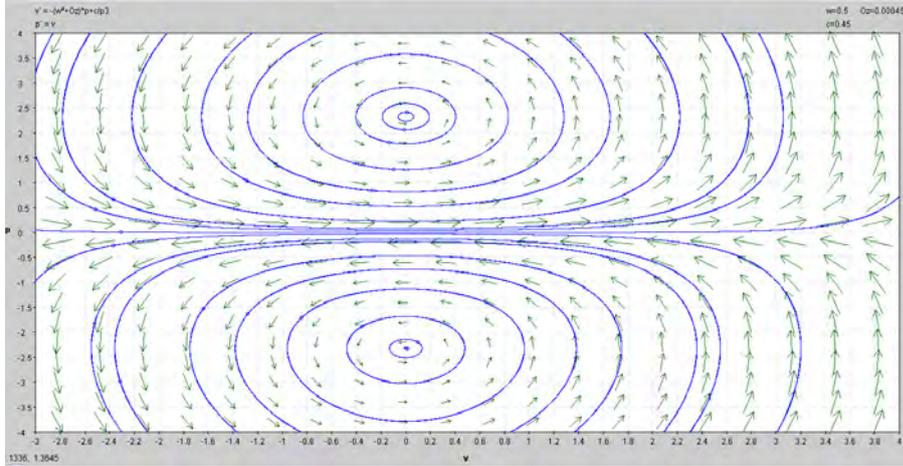


Figura 6:

En donde se muestra que el diagrama fase del sistema (4.2.1.9) posee dos puntos de equilibrio, tales puntos de equilibrio son estables, y están dados por $\rho = \left(\frac{P_\phi^2}{m^2 (\omega^2 + \Omega_z^2)} \right)^{\frac{1}{4}}$, se puede decir que la aparición de tales puntos de equilibrio diferentes al origen se debe a la rotación de la tierra ya que la aceleración centrípeta no apunta en la dirección de la gravedad, es decir no apunta en la dirección radial.

4.2.2. Lagrangiana para oscilaciones no pequeñas

Ahora para encontrar la ecuaciones de movimiento tanto para ρ como para ϕ sin hacer uso de oscilaciones pequeñas basta hacer uso de (4.2.1) y sustituir en (4.1.2) y así obtener la lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{m \rho^2 \dot{\rho}^2}{2(l^2 - \rho^2)} + \frac{m \dot{\rho}^2}{2} + m \sin(\phi) \Omega_x \sqrt{(l^2 - \rho^2)} \dot{\rho} + \frac{m \Omega_x \sin(\phi) \rho^2 \dot{\rho}}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} \\
 & + m \cos(\phi) \Omega_x \Omega_z \rho \sqrt{(l^2 - \rho^2)} + m \Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho \sqrt{(l^2 - \rho^2)} + m g \sqrt{(l^2 - \rho^2)} \\
 & + \frac{m \Omega_z^2 \rho^2}{2} + m \Omega_z \rho^2 \dot{\phi} + \frac{m \Omega_x^2 \rho^2 \sin^2(\phi)}{2} - \frac{m \Omega_x^2 \rho^2}{2} + \frac{m \rho^2 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m l^2 \Omega_x^2}{2}
 \end{aligned} \tag{4.2.2.1}$$

Y haciendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$$

Se ha encontrado con ayuda de Máxima que la ecuación de movimiento para ρ es:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2 - \rho^2} + \ddot{\rho} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2 - \rho^2} + \frac{\rho^3 \dot{\rho}^2}{(l^2 - \rho^2)^2} - \Omega_x \Omega_z \cos(\phi) \sqrt{(l^2 - \rho^2)} + \frac{\Omega_x \Omega_z \cos(\phi) \rho^2}{(l^2 - \rho^2)} \\
 & + \frac{2 \Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + \frac{\rho g}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} - \Omega_z^2 \rho - 2 \Omega_z \dot{\phi} \rho - \Omega_x^2 \sin^2(\phi) \rho + \Omega_x^2 \rho - \rho \dot{\phi}^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

Y si quito de (4.2.2.2) todos aquellos términos que tienen como coeficientes, términos despreciables, tales como $\Omega_x \Omega_z$, Ω_x^2 , Ω_z^2 . Entonces

$$\frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2 - \rho^2} + \ddot{\rho} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2 - \rho^2} + \frac{\rho^3 \dot{\rho}^2}{(l^2 - \rho^2)^2} + \frac{2 \Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} + \frac{\rho g}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} - 2 \Omega_z \dot{\phi} \rho - \dot{\phi}^2 \rho = 0. \tag{4.2.2.3}$$

Ahora haciendo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

Se encuentra que la ecuación de movimiento de ϕ es:

$$\ddot{\phi} \rho^2 - \frac{2 \cos(\phi) \Omega_x \rho^2 \dot{\rho}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + 2 \Omega_z \rho \dot{\rho} + 2 \rho \dot{\phi} + \Omega_x \Omega_z \rho \sin(\phi) \sqrt{(l^2 - \rho^2)} + -\Omega_x^2 \rho^2 \cos(\phi) \sin(\phi) = 0. \tag{4.2.2.4}$$

Y quitando los términos despreciables se obtiene:

$$\ddot{\phi} \rho^2 - \frac{2 \cos(\phi) \Omega_x \rho^2 \dot{\rho}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + 2 \Omega_z \rho \dot{\rho} + 2 \rho \dot{\phi} = 0. \tag{4.2.2.5}$$

Por tanto las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2 - \rho^2} + \ddot{\rho} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2 - \rho^2} + \frac{\rho^3 \dot{\rho}^2}{(l^2 - \rho^2)^2} + \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} + \frac{\rho g}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} - 2\Omega_z \dot{\phi} \rho - \dot{\phi}^2 \rho = 0 \quad (4.2.2.6)$$

$$\ddot{\phi} \rho^2 - \frac{2 \cos(\phi) \Omega_x \rho^2 \dot{\rho}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + 2\Omega_z \rho \dot{\rho} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} = 0. \quad (4.2.2.7)$$

Ahora en las ecuaciones anteriores de movimiento, realizamos expansión de Taylor hasta orden tres en las expresiones $\frac{1}{l^2 - \rho^2}$, $\frac{1}{(l^2 - \rho^2)^2}$, $\frac{1}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}}$. y luego las sustituimos en (4.2.2.6) y en (4.2.2.7), y obtenemos

$$\frac{\rho^4 \ddot{\rho}}{l^4} + \frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2} + \ddot{\rho} + \frac{2\rho^5 \dot{\rho}^2}{l^6} + \frac{2\rho^3 \dot{\rho}^2}{l^4} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2} + \frac{\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^4}{l^3} + \frac{g\rho^3}{2l^3} + \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{l} - 2\Omega_z \dot{\phi} \rho + \frac{g\rho}{l} - \dot{\phi}^2 \rho = 0 \quad (4.2.2.8)$$

$$\frac{\Omega_x \cos(\phi) \rho^4 \dot{\rho}}{l} - 2l\Omega_x \cos(\phi) \rho^2 \dot{\rho} + 2\Omega_z \rho \dot{\rho} + 2\dot{\phi} \rho \dot{\rho} + \ddot{\phi} \rho^2 = 0 \quad (4.2.2.9)$$

Si en las ecuaciones de movimiento hacemos $\rho = e r$ en donde $e \ll 1$. Entonces

$$\frac{e^5 r \ddot{r}}{l^4} + \frac{e^3 r^2 \ddot{r}}{l^2} + e \ddot{r} + \frac{2e^7 r^5 \dot{r}^2}{l^6} + \frac{2e^5 r^3 \dot{r}^2}{l^4} + \frac{e^3 r \dot{r}^2}{l^2} + \frac{\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) e^4 r^4}{l^3} + \frac{g e^3 r^3}{2l^3} + \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) e^2 r^2}{l} - 2\Omega_z \dot{\phi} e r + \frac{g e r}{l} - \dot{\phi}^2 e r = 0$$

$$\frac{\Omega_x \cos(\phi) e^5 r^4 \dot{r}}{l} - 2l\Omega_x \cos(\phi) e^3 r^2 \dot{r} + 2\Omega_z e^2 r \dot{r} + 2\dot{\phi} e^2 r \dot{r} + \ddot{\phi} e^2 r^2 = 0.$$

Y posteriormente obteniendo las ecuaciones de menor orden de épsilon, correspondientes a cada ecuación de movimiento, obtenemos

$$O(e) : \ddot{r} - 2\Omega_z \dot{\phi} r + \frac{g r}{l} - \dot{\phi}^2 r = 0, \quad (4.2.2.10a)$$

$$O(e^2) : 2\Omega_z r \dot{r} + 2\dot{\phi} r \dot{r} + \ddot{\phi} r^2 = 0. \quad (4.2.2.10b)$$

Por lo que (4.2.2.10a) se puede trabajar como:

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \left(\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \right) r &= 0 \\ \implies \ddot{r} + \left(\omega^2 + \Omega_z^2 - \Omega_z^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \right) r &= 0 \\ \implies \ddot{r} + \left(\omega^2 + \Omega_z^2 \right) r - \left(\Omega_z^2 + 2\Omega_z \dot{\phi} + \dot{\phi}^2 \right) r &= 0 \\ \implies \ddot{r} + \left(\omega^2 + \Omega_z^2 \right) r - \left(\Omega_z + \dot{\phi} \right)^2 r &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2.11)$$

además se puede expresar a (4.2.2.10b) como :

$$2\Omega_z r \dot{r} + 2\dot{\phi} r \dot{r} + \ddot{\phi} r^2 = \frac{d}{dt} \left[r^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) \right] = 0$$

Entonces se tiene que:

$$r^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) = C = cte \quad (4.2.2.12)$$

Y por consiguiente:

$$r (\dot{\phi} + \Omega_z)^2 = \frac{C^2}{r^3} \quad (4.2.2.13)$$

Sustituyendo (4.2.2.13) en (4.2.2.11) se tiene que:

$$\implies \ddot{r} + (\omega^2 + \Omega_z^2) r - \frac{C^2}{r^3} = 0 \quad (4.2.2.14)$$

Entonces juntando (4.2.2.12) y (4.2.2.14) se tiene:

$$\begin{aligned} \ddot{r} + (\omega^2 + \Omega_z^2) r - \frac{C^2}{r^3} &= 0 \\ r^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) &= C \end{aligned}$$

(4.2.2.15)

Por lo que (4.2.2.15) es equivalente a las ecuaciones de pequeñas oscilaciones del sistema (4.2.1.8).

Y los puntos de equilibrio estarán determinados cuando $\ddot{r} = 0$ y $\dot{r} = 0$. Por lo que se tiene que los puntos de equilibrio r_e obtenidos de (4.2.2.15) son

$$r_e = \left(\frac{C^2}{\omega^2 + \Omega_z^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.2.2.16)$$

5. Resolución a las ecuaciones de movimiento del Péndulo de Foucault mediante el método de escalas múltiples

En esta sección se utilizara el método de escalas múltiples para la resolución a las ecuaciones de movimiento del **Péndulo de Foucault**. tal método es explicado en el Apéndice en la sección C. Por tanto en esta sección solo nos ocuparemos en aplicar tal método

Recordando que las ecuaciones de movimiento tanto de ρ como de ϕ son respectivamente

$$\frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2 - \rho^2} + \ddot{\rho} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2 - \rho^2} + \frac{\rho^3 \dot{\rho}^2}{(l^2 - \rho^2)^2} + \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} + \frac{\rho g}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} - 2\Omega_z \dot{\phi} \rho - \dot{\phi}^2 \rho = 0, \quad (5.1a)$$

$$\ddot{\phi} \rho^2 - \frac{2 \cos(\phi) \Omega_x \rho^2 \dot{\rho}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + 2\Omega_z \rho \dot{\rho} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} = 0. \quad (5.1b)$$

En la ecuación (5.1a) y (5.1b) para poder aplicar escalas múltiples es necesario primero expandir en serie de Taylor $\frac{1}{l^2 - \rho^2}$, $\frac{1}{(l^2 - \rho^2)^2}$, $\frac{1}{\sqrt{l^2 - \rho^2}}$ y luego simplificar cada ecuación de tal manera, que al hacer estas expansiones no nos quedemos con términos que contengan a ρ en el denominador. Y ya una vez hecho esto se sustituirá $\rho = \varepsilon r$ en donde $r = \bar{r} - r_e$ con r_e de equilibrio, entonces $\rho = \varepsilon \bar{r} - \varepsilon r_e = \bar{\rho} - \varepsilon r_e$ con $\bar{\rho} = \varepsilon \bar{r}_0 + \varepsilon^2 \bar{r}_1 + \varepsilon^3 \bar{r}_2 + \dots +$.

Ya una vez hecho esto con ayuda del programa Máxima podemos aplicar este método asintótico.

Aplicando el método de escalas múltiples a las ecuaciones de movimiento de ρ y ϕ respectivamente, en el que se consideraran dos tiempos de escalamiento η, m donde $\eta = \varepsilon t$ y $m = \varepsilon^2 t$. Por lo que $\rho(t, \eta, m, \varepsilon) = \bar{\rho}(t, \eta, m, \varepsilon) - \varepsilon r_e = \varepsilon \bar{r}_0(t, \eta, m) + \varepsilon^2 \bar{r}_1(t, \eta, m) + \varepsilon^3 \bar{r}_2(t, \eta, m) - \varepsilon r_e + \dots +$. Entonces tenemos que el método nos arroja las siguientes ecuaciones de orden .

Ecuaciones de orden para $\bar{\rho}$

$$O(\varepsilon) : \bar{r}_0^{(t,t)} + (\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2) (\bar{r}_0 - r_e) = 0 \quad (5.2a)$$

$$O(\varepsilon) : \bar{\rho}_0^{(t,t)} + (\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2) \bar{\rho}_0 = 0$$

$$O(\varepsilon^2) : \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2) \bar{r}_1 = -2\bar{r}_0^{(t,\eta)} - \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l} + \frac{4\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \bar{r}_0 r_e}{l} \quad (5.2b)$$

$$O(\varepsilon^3) : \bar{r}_2^{(t,t)} + (\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2) \bar{r}_2 = -2\bar{r}_1^{(t,\eta)} - 2\bar{r}_0^{(t,m)} - \bar{r}_0^{(\eta,\eta)} - \frac{\bar{r}_0^{(t,t)} (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l^2} - \frac{(\bar{r}_0^{(t)})^2 (\bar{r}_0 - r_e)}{l} - \frac{4\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \bar{r}_1 (\bar{r}_0 - r_e)}{l} + \frac{2\bar{r}_0 \bar{r}_0^{(t,t)} r_e}{l^2} - \frac{\omega^2 (\bar{r}_0^3 - r_e^3)}{2l^2} + \frac{3\omega^2 r_e \bar{r}_0^2}{2l^2} - \frac{3\omega^2 r_e^2 \bar{r}_0}{2l^2} \quad (5.2c)$$

Ecuación de orden para ϕ

$$O(\varepsilon^2) : 2\Omega_z (\bar{r}_0 - r_e) \bar{r}_0^t + 2\dot{\phi} (\bar{r}_0 - r_e) \bar{r}_0^t + \ddot{\phi} (\bar{r}_0 - r_e)^2 = \frac{d}{dt} \left[(\bar{r}_0 - r_e)^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) \right] = 0 \quad (5.3)$$

la ecuación (5.3) implica que $(\bar{r}_0 - r_e)^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) = C = cte$ y por consiguiente obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{C}{(\bar{r}_0 - r_e)^2} - \Omega_z.$$

Y tenemos que si hacemos $C = 0$. Esto con el fin de facilitarnos las soluciones, entonces obtenemos

$$\dot{\phi} = -\Omega_z \quad (5.4)$$

y sustituyendo (5.4) en las ecuaciones de orden de $\bar{\rho}$. Obtenemos

$$O(\varepsilon) : \quad \bar{r}_0^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) (\bar{r}_0 - r_e) = 0 \quad (5.5a)$$

$$O(\varepsilon) : \quad \bar{\rho}_0^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{\rho}_0 = 0$$

$$O(\varepsilon^2) : \quad \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 = -2\bar{r}_0^{(t,\eta)} + \frac{2\Omega_x\Omega_z \cos(\Omega_z t) (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l} - \frac{4\Omega_x\Omega_z \cos(\Omega_z t) \bar{r}_0 r_e}{l} \quad (5.5b)$$

$$O(\varepsilon^3) : \quad \bar{r}_2^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_2 = -2\bar{r}_1^{(t,\eta)} - 2\bar{r}_0^{(t,m)} - \bar{r}_0^{(\eta,\eta)} - \frac{\bar{r}_0^{(t,t)} (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l^2} - \frac{(\bar{r}_0^{(t)})^2 (\bar{r}_0 - r_e)}{l} + \frac{4\Omega_x\Omega_z \cos(\Omega_z t) \bar{r}_1 (\bar{r}_0 - r_e)}{l} + \frac{2\bar{r}_0 \bar{r}_0^{(t,t)} r_e}{l^2} - \frac{\omega^2 (\bar{r}_0^3 - r_e^3)}{2l^2} + \frac{3\omega^2 r_e \bar{r}_0^2}{2l^2} - \frac{3\omega^2 r_e^2 \bar{r}_0}{2l^2}. \quad (5.5c)$$

Por lo que empezaremos a resolver (5.5a), entonces

$$\bar{\rho}_0 = a_0(\eta, m) \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + b_0(\eta, m) \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right).$$

Y debido a que $\bar{\rho}_0 = \varepsilon \bar{r}_0 - \varepsilon r_e$, tenemos que

$$\bar{r}_0 = \frac{a_0(\eta, m)}{\varepsilon} \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + \frac{b_0(\eta, m)}{\varepsilon} \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + r_e \quad (5.6)$$

Y utilizando (5.6) para sustituir en la ecuación de orden (5.5b), desarrollando y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 &= \frac{2a_0 b_0 \Omega_x \Omega_z \cos(\Omega_z t) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{\varepsilon^2 l} + \frac{\Omega_x \Omega_z}{\varepsilon^2 l} (a_0^2 - b_0^2) \cos(\Omega_z t) \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ &+ \frac{2 da_0}{\varepsilon d\eta} \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) - \frac{2 db_0}{\varepsilon d\eta} \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + \frac{\Omega_x \Omega_z}{\varepsilon^2 l} (a_0^2 + b_0^2) \cos(\Omega_z t). \end{aligned}$$

Y eliminando de la ecuación diferencial de \bar{r}_1 todos aquellos términos seculares tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 &= \frac{2a_0 b_0 \Omega_x \Omega_z \cos(\Omega_z t) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{\varepsilon^2 l} + \frac{\Omega_x \Omega_z}{\varepsilon^2 l} (a_0^2 - b_0^2) \cos(\Omega_z t) \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ &+ \frac{\Omega_x \Omega_z}{\varepsilon^2 l} (a_0^2 + b_0^2) \cos(\Omega_z t). \end{aligned}$$

y además encontramos que $\frac{da_0}{d\eta} = 0$ y $\frac{db_0}{d\eta} = 0$ por lo que a_0 y b_0 solo dependen de m , y entonces la ecuación (5.6) se convierte en

$$\bar{r}_0 = \frac{a_0(m)}{\varepsilon} \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + \frac{b_0(m)}{\varepsilon} \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + r_e \quad (5.7)$$

y al resolver la ecuación diferencial de \bar{r}_1 con la ayuda de Máxima y luego sustituir la solución en (5.5c) tenemos

$$\begin{aligned} & \bar{r}_2^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_2 = \\ & \left[\frac{2}{\varepsilon} \frac{da_0}{dm} \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + b_0^3 \left(\frac{3\omega^2}{8\varepsilon^3 l^2} + \frac{3\Omega_z^2}{4\varepsilon^3 l^2} - \frac{(\omega^2 + \Omega_z^2)}{4\varepsilon^3 l} \right) + a_0^2 b_0 \left(\frac{3\omega^2}{8\varepsilon^3 l^2} + \frac{3\Omega_z^2}{4\varepsilon^3 l^2} - \frac{(\omega^2 + \Omega_z^2)}{4\varepsilon^3 l} \right) \right] \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ & + \left[(b_0 C_2 + a_0^2 b_0 C_3) \cos(2\Omega_z t) - C_4 (a_0 b_0^2 + a_0^3) \sin(2\Omega_z t) \right] \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ & + \left[-\frac{2}{\varepsilon} \frac{db_0}{dm} \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + a_0^3 \left(\frac{3\omega^2}{8\varepsilon^3 l^2} + \frac{3\Omega_z^2}{4\varepsilon^3 l^2} - \frac{(\omega^2 + \Omega_z^2)}{4\varepsilon^3 l} \right) + a_0 b_0^2 \left(\frac{3\omega^2}{8\varepsilon^3 l^2} + \frac{3\Omega_z^2}{4\varepsilon^3 l^2} - \frac{(\omega^2 + \Omega_z^2)}{4\varepsilon^3 l} \right) \right] \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ & + \left[(a_0^3 C_2 + a_0 b_0^2 C_3) \cos(2\Omega_z t) + C_4 (a_0^2 b_0 + b_0^3) \sin(2\Omega_z t) \right] \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + \text{terminos no resonantes} \end{aligned}$$

Por lo que eliminando términos seculares llegamos a las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{da_0}{dm} = -C_1 (b_0^3 + a_0^2 b_0) - (C_2 b_0^3 + C_3 a_0^2 b_0) \cos(2\Omega_z t) + C_4 (a_0 b_0^2 + a_0^3) \sin(2\Omega_z t) \quad (5.8a)$$

$$\frac{db_0}{dm} = C_1 (a_0^3 + a_0 b_0^2) - (C_2 a_0^3 + C_3 a_0 b_0^2) \cos(2\Omega_z t) - C_4 (a_0^2 b_0 + b_0^3) \sin(2\Omega_z t) \quad (5.8b)$$

De las ecuaciones (5.8a) y (5.8b) como Ω_z es pequeño y además C_2 , C_3 , y C_4 son constantes pequeñas podemos suponer todos aquellos términos que van acompañados de $\cos(2\Omega_z t)$ y $\sin(2\Omega_z t)$ como constantes muy pequeñas por lo que el sistema anterior de ecuaciones diferenciales lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \acute{a}_0 &= -C_1 (b_0^3 + a_0^2 b_0) + k_1 \\ \acute{b}_0 &= C_1 (a_0^3 + a_0 b_0^2) + k_2 \end{aligned} \quad (5.9a)$$

Ahora representando (5.9a) en un diagrama fase, el cual esta mostrado en la figura 7.

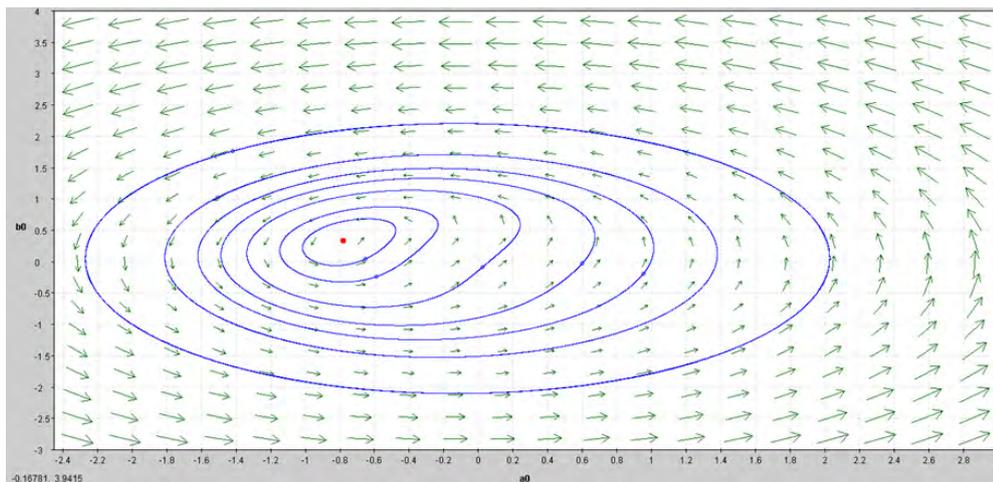


Figura 7:

En la figura 7 se muestra que el punto de equilibrio es diferente al origen como se esperaba, ya que la rotación de la tierra es la causa de que el punto de equilibrio no sea el origen, como se había mencionado en 4.2.1.

6. Aplicación del concepto de Resonancia Paramétrica a las ecuaciones de movimiento del Péndulo de Foucault con un amortiguamiento lineal

En esta sección se vera como afecta a la solución de las ecuaciones de movimiento, al aplicarle el concepto de **resonancia** [2] con un amortiguamiento lineal, por lo que veremos cual es la amplitud de oscilación al combinar estos dos efectos.

Lo que se pretende es dar una excitación a la cuerda que sostiene la masa de dicho péndulo, es decir se realizara un cambio en la longitud de la cuerda mediante una variación periódica. Tal variación de la cuerda estará dada por $l = l_0 + \varepsilon\beta \sin(\Omega t)$ donde l_0 es la longitud inicial de la cuerda, por lo que ahora se obtendrá una lagrangiana en la que se ha considerado a l como variable, y por consiguiente una ecuación de movimiento de ρ y de ϕ con longitud variable y posteriormente sumar un amortiguamiento lineal de $\varepsilon c\dot{\rho}$ a la ecuación de movimiento de ρ

Entonces se tiene que la nueva ecuación de movimiento de ρ con longitud l variable y con un amortiguamiento lineal $\varepsilon c\dot{\rho}$ esta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2 - \rho^2} + \ddot{\rho} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2 - \rho^2} + \frac{\rho^3 \dot{\rho}^2}{(l^2 - \rho^2)^2} + \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + \frac{\rho g}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} - 2\Omega_z \dot{\phi} \rho - \dot{\phi}^2 \rho \\ + \frac{l^2 \ddot{l} \rho}{(l^2 - \rho^2)^2} - \frac{l \ddot{l} \rho}{l^2 - \rho^2} - \frac{\dot{l}^2 \rho}{l^2 - \rho^2} + \frac{2l \dot{l} \sin(\phi) \Omega_x}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} - \frac{2l \dot{l} \rho^2 \dot{\rho}}{(l^2 - \rho^2)^2} + \varepsilon c \dot{\rho} = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Y la ecuación de movimiento de ϕ con longitud variable esta dada por

$$\ddot{\phi} \rho^2 - \frac{2 \cos(\phi) \Omega_x \rho^2 \dot{\rho}}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} + 2\Omega_z \rho \dot{\rho} + 2\rho \dot{\rho} \dot{\phi} + \frac{2l \dot{l} \Omega_x \rho \cos(\phi)}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} = 0. \quad (6.2)$$

Para poder aplicar el método de escalas múltiples a las ecuaciones (7.1) y (6.2) primero es necesario expresar de otra manera a $\frac{1}{l^2 - \rho^2}$, $\frac{1}{(l^2 - \rho^2)^2}$, $\frac{1}{\sqrt{l^2 - \rho^2}}$ ya que si se expanden en taylor en función de ρ y alrededor de cero, entonces l aparecerá en el denominador de dicha expansión, y esto no es conveniente ya que l ya no es constante como en el la sección (5).

Entonces se tendrá que

$$\frac{1}{l^2 - \rho^2} = \frac{1}{l_0^2 (1 + x)}, \quad (6.3a)$$

$$\frac{1}{(l^2 - \rho^2)^2} = \frac{1}{l_0^4 (1 + x)^2}, \quad (6.3b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} = \frac{1}{l_0 \sqrt{(1 + x)}}. \quad (6.3c)$$

En donde $x = \frac{2\varepsilon\beta}{l_0} \sin(\Omega t) + \frac{\varepsilon^2 \beta^2}{l_0^2} \sin^2(\Omega t) - \frac{\rho^2}{l_0^2}$. Y de esta manera ya no se tendrá el problema de tener a l en el denominador en cada una de las expansiones, pero ahora se desarrollara en función de x y alrededor de cero, posteriormente se sustituirá el valor de x en las expansiones (6.3a), (6.3b) y (6.3c).

También se tiene que $\dot{l} = \varepsilon\beta\Omega \cos(\Omega t)$ y $\ddot{l} = -\varepsilon\beta\Omega^2 \sin(\Omega t)$. Por lo que si desarrollamos tales expansiones y hacemos las sustituciones correspondientes en (7.1) y (6.2) se podrá entonces aplicar el método de **Escalas Múltiples**.

Además de todo lo anterior para aplicar el método de **Escalas Múltiples** se utilizara solo un tiempo lento η , con $\rho = \varepsilon r$, y recordando que en la sección 5 se propuso que $r = \bar{r} - r_e$ en donde r_e es punto de equilibrio. entonces tendremos que $\rho(t, \eta, \varepsilon) = \bar{\rho}(t, \eta, \varepsilon) - \varepsilon r_e = \varepsilon \bar{r}_0(t, \eta) + \varepsilon^2 \bar{r}_1(t, \eta) + \varepsilon^3 \bar{r}_2(t, \eta) - \varepsilon r_e + \dots +$.

por lo que habrá que sustituir $\rho = \bar{\rho} - \varepsilon r_e$ y luego con ayuda del programa Máxima, aplicar tal método a las ecuaciones de movimiento. Por lo que tal método nos arroja las siguientes ecuaciones de orden

Ecuaciones de orden para $\bar{\rho}$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) : \quad & \bar{r}_0^{(t,t)} + \left(\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \right) (\bar{r}_0 - r_e) = -2\beta \sin(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega_z t) \\ O(\varepsilon) : \quad & \bar{\rho}_0^{(t,t)} + \left(\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \right) \bar{\rho}_0 = -2\beta \varepsilon \sin(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \quad & \bar{r}_1^{(t,t)} + \left(\omega^2 - 2\Omega_z \dot{\phi} - \dot{\phi}^2 \right) \bar{r}_1 = -2\bar{r}_0^{(t,\eta)} - \frac{2\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l_0} - c \bar{r}_0^{(t)} \\ & + \frac{4\Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \bar{r}_0 r_e}{l_0} + \frac{\beta (\bar{r}_0 - r_e) (\omega^2 - \Omega^2) \sin(\Omega t)}{l_0} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ecuación de orden de ϕ

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \quad & 2\Omega_z (\bar{r}_0 - r_e) \bar{r}_0^t + 2\dot{\phi} (\bar{r}_0 - r_e) \bar{r}_0^t + \ddot{\phi} (\bar{r}_0 - r_e)^2 + 2\beta \cos(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega t) (\bar{r}_0 - r_e) = 0 \\ O(\varepsilon^2) : \quad & \frac{d}{dt} \left[(\bar{r}_0 - r_e)^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) \right] + 2\beta \cos(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega t) (\bar{r}_0 - r_e) = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

En donde el termino $2\beta \cos(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega t) (\bar{r}_0 - r_e)$ se puede considerar que cambia muy lentamente, de tal manera que ocasiona una aceleración y desaceleración periódica de ϕ , que en promedio la variación de la velocidad es demasiado pequeña, de tal manera que se puede considerar a $2\beta \cos(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega t) (\bar{r}_0 - r_e) \approx 0$. Por tanto nos podemos quedar con $\frac{d}{dt} \left[(\bar{r}_0 - r_e)^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) \right] = 0$, lo que implica que $(\bar{r}_0 - r_e)^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) = C = cte$. Por consiguiente

$$\dot{\phi} = \frac{C}{(\bar{r}_0 - r_e)^2} - \Omega_z$$

De la misma manera como se manejo en la sección 5 hacemos el caso particular con $C = 0$.

$$\implies \dot{\phi} = -\Omega_z$$

Tomemos la suposición de resonancia paramétrica con una frecuencia de $\Omega = 2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}$ y luego sustituimos $\dot{\phi}$ y Ω en (6.4) y (6.5) obtenemos

$$O(\varepsilon) : \quad \bar{r}_0^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) (\bar{r}_0 - r_e) = 4\beta \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \Omega_x \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \quad (6.7a)$$

$$O(\varepsilon) : \quad \bar{\rho}_0^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{\rho}_0 = 4\beta \varepsilon \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \Omega_x \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \quad & \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 = -2\bar{r}_0^{(t,\eta)} + \frac{2\Omega_x \Omega_z \cos(\Omega_z t) (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l_0} - c \bar{r}_0^{(t)} \\ & - \frac{4\Omega_x \Omega_z \cos(\Omega_z t) \bar{r}_0 r_e}{l_0} - \frac{\beta (\bar{r}_0 - r_e) (3\omega^2 + 4\Omega_z^2) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{l_0} \end{aligned} \quad (6.7b)$$

Ahora resolviendo (6.7b)

$$\bar{\rho}_0 = \frac{16\beta\varepsilon\Omega_z\Omega_x (\omega^2 + \Omega_z^2) \cos(\Omega_z t) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{(9\omega^4 + 8\Omega_z^2\omega^2)} + a_0(\eta) \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + b_0(\eta) \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ - \left(\frac{12\beta\varepsilon\omega^2\Omega_x \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t + 16\beta\varepsilon\Omega_z^2\Omega_x (\omega^2 + \Omega_z^2) \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}}{(9\omega^4 + 8\Omega_z^2\omega^2)} \right) \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)$$

y como $\bar{\rho}_0 = \varepsilon\bar{r}_0 - \varepsilon r_e$ entonces

$$\bar{r}_0 = \frac{16\beta\Omega_z\Omega_x (\omega^2 + \Omega_z^2) \cos(\Omega_z t) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{(9\omega^4 + 8\Omega_z^2\omega^2)} + a_0(\eta) \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + b_0(\eta) \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + r_e \\ - \left(\frac{12\beta\omega^2\Omega_x \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + 16\beta\Omega_z^2\Omega_x (\omega^2 + \Omega_z^2) \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}}{(9\omega^4 + 8\Omega_z^2\omega^2)} \right) \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)$$

En seguida sustituimos \bar{r}_0 en (6.7b) y después desarrollando y simplificando tenemos que

$$\bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 = \\ \left(2\acute{a}_0\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + a_0c\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} - \beta a_0 [q - s(1 + \Omega_z^2)] + 2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}\beta b_0 [k_1(1 + \Omega_z^2) + k_2] \right) \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ - \left(2\acute{b}_0\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + b_0c\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + \beta b_0 [q - s(1 + \Omega_z^2)] + 2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}\beta a_0 [k_1(1 + \Omega_z^2) + k_2] \right) \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \\ + \textit{terminos no seculares}$$

y de la ecuación anterior igualando a cero todos aquellos términos seculares se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{da_0}{d\eta} = -\frac{a_0c}{2} + \frac{\beta a_0 [q - s(1 + \Omega_z^2)]}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} - \beta b_0 [k_1(1 + \Omega_z^2) + k_2] \\ \frac{db_0}{d\eta} = -\frac{b_0c}{2} - \frac{\beta b_0 [q - s(1 + \Omega_z^2)]}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} - \beta a_0 [k_1(1 + \Omega_z^2) + k_2]. \quad (6.8)$$

En donde tenemos que :

$$q = \left(\frac{3\omega^2}{2l_0} + \frac{2\Omega_z^2}{l_0} \right), \quad s = \frac{32\Omega_x^2\Omega_z^2 \cos^2(\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)}, \quad k_1 = \frac{8\Omega_x^2\Omega_z^3 \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)}, \quad k_2 = \frac{6\Omega_x^2\Omega_z \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)}$$

Se tiene que s , k_1 , k_2 pueden ser considerados constantes muy pequeñas ya que al pasar el tiempo varían muy lentamente y además son periódicas, por lo que al pasar el tiempo no se disparan para convertirse en valores grandes

Además podemos simplificar aun mas (6.8) diciendo que:

$$Q_1 = q - s(1 + \Omega_z^2) \\ Q_2 = k_1(1 + \Omega_z^2) + k_2$$

Por lo que (6.8) se expresa como:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{a}_0 &= -\frac{a_0 c}{2} + \frac{\beta a_0}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} Q_1 - \beta Q_2 b_0 \\ \dot{b}_0 &= -\frac{b_0 c}{2} - \frac{\beta b_0}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} Q_1 - \beta Q_2 a_0 \end{aligned}} \quad (6.9)$$

Realizando al sistema anterior un cambio a coordenadas polares , diciendo que :

$$\begin{aligned} a_0 &= R \cos(\theta) & \dot{a}_0 &= \dot{R} \cos(\theta) - R \dot{\theta} \sin(\theta) \\ b_0 &= R \sin(\theta) & \dot{b}_0 &= \dot{R} \sin(\theta) + R \dot{\theta} \cos(\theta). \end{aligned}$$

Se llega a que el sistema (6.9) puede ser expresado en términos de \dot{R} y $\dot{\theta}$ como

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{R} &= R \left[-\frac{c}{2} + \frac{\beta \cos(2\theta)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} Q_1 - \beta \sin(2\theta) Q_2 \right] \\ \dot{\theta} &= -\frac{\beta Q_1 \sin(2\theta)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} - \beta Q_2 \cos(2\theta) \end{aligned}} \quad (6.10)$$

Los puntos fijos de (6.10) son $\frac{Q_1 \sin(2\theta)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} + Q_2 \cos(2\theta)$ y $R = 0$ es decir el origen . La estabilidad

del origen ($R = 0$) dependerá del signo de la expresión $-\frac{c}{2} + \beta \left[\frac{\cos(2\theta)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} Q_1 - \sin(2\theta) Q_2 \right]$. Si tal expresión resulta ser negativa implicara que el origen es un atractor, y si es positiva tenemos que es un repulsor .Esto es consistente con la formulación de la ecuación de Mathieu con amortiguamiento, donde las soluciones se amortiguan a cero por debajo de las lenguas de Arnold [3], o bien crecen exponencialmente por encima de dichas lenguas.

7. Aplicación del concepto de Resonancia Paramétrica a las ecuaciones de movimiento del Péndulo de Foucault con un amortiguamiento no lineal.

Ahora de la misma manera como procedimos en el caso del amortiguamiento lineal, procederemos ahora a encontrar la amplitud R pero haciendo uso del amortiguamiento no lineal $\varepsilon c \dot{\rho}^3$. Sin embargo cabe hacer mención que el termino de disipación debe estar dado por $\varepsilon c' \dot{\rho} |\dot{\rho}|$, pero este termino no puede ser trabajado bajo métodos perturbativos ('tales como escalas múltiples'). Y como estamos trabajando un termino de disipación no lineal de la forma $\varepsilon c \dot{\rho}^3$ entonces al finalizar el método de escalas múltiples, y con el fin de hacer una aproximación al amortiguamiento de $\varepsilon c' \dot{\rho} |\dot{\rho}|$, propondremos que $c = \frac{c'}{A}$ donde A es la amplitud de oscilación de la velocidad el cual esta dado por $A = R \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}$.

Entonces se tiene que la nueva ecuación de movimiento de ρ con longitud l variable y con un amortiguamiento no lineal $\varepsilon c \dot{\rho}^3$ esta dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2 \ddot{\rho}}{l^2 - \rho^2} + \ddot{\rho} + \frac{\rho \dot{\rho}^2}{l^2 - \rho^2} + \frac{\rho^3 \dot{\rho}^2}{(l^2 - \rho^2)^2} + \frac{2 \Omega_x \dot{\phi} \cos(\phi) \rho^2}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} + \frac{\rho g}{\sqrt{(l^2 - \rho^2)}} - 2 \Omega_z \dot{\phi} \rho - \dot{\phi}^2 \rho \\ + \frac{l^2 \ddot{l} \rho}{(l^2 - \rho^2)^2} - \frac{\ddot{l} \rho}{l^2 - \rho^2} - \frac{\dot{l}^2 \rho}{l^2 - \rho^2} + \frac{2 \dot{l} \sin(\phi) \Omega_x}{\sqrt{l^2 - \rho^2}} - \frac{2 \dot{l} \rho^2 \dot{\rho}}{(l^2 - \rho^2)^2} + \varepsilon c \dot{\rho}^3 = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Y recordando que en promedio $\dot{\phi} = \frac{C}{(\bar{r}_0 - r_e)^2} - \Omega_z$ y que por simplicidad se ha supuesto que $C = 0$, y debido a esto $\dot{\phi} = -\Omega_z$. Además tenemos que la frecuencia debida a la resonancia esta dada por $\Omega = 2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}$. Entonces al aplicar el método de escalas múltiples a (7.1) llegamos a que las ecuaciones de orden para $\bar{\rho}$ están dadas por

$$O(\varepsilon) : \quad \bar{r}_0^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) (\bar{r}_0 - r_e) = 4\beta \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \Omega_x \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \quad (7.2a)$$

$$O(\varepsilon) : \quad \bar{\rho}_0^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{\rho}_0 = 4\beta \varepsilon \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \Omega_x \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) : \quad \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 = -2\bar{r}_0^{(t,\eta)} + \frac{2\Omega_x \Omega_z \cos(\Omega_z t) (\bar{r}_0^2 + r_e^2)}{l_0} - c \left(\bar{r}_0^{(t)}\right)^3 \\ - \frac{4\beta (\bar{r}_0 - r_e) (\omega^2 + \Omega_z^2) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{l_0} \\ + \frac{\beta \omega^2 \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{l_0} + \frac{4\Omega_x \Omega_z \cos(\Omega_z t) \bar{r}_0 r_e}{l_0}. \end{aligned} \quad (7.2b)$$

Entonces resolviendo (7.2a) llegamos a que :

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 = \frac{16\beta \Omega_z \Omega_x (\omega^2 + \Omega_z^2) \cos(\Omega_z t) \sin\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right)}{(9\omega^4 + 8\Omega_z^2 \omega^2)} + a_0(\eta) \cos\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + b_0(\eta) \sin\left(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) + r_e \\ - \left(\frac{12\beta \omega^2 \Omega_x \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} + 16\beta \Omega_z^2 \Omega_x (\omega^2 + \Omega_z^2) \sin(\Omega_z t) \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}}{(9\omega^4 + 8\Omega_z^2 \omega^2)} \right) \cos\left(2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t\right) \end{aligned}$$

Notemos que los términos de frecuencia doble son pequeños porque están multiplicados por $\Omega_z \Omega_x$ Y sustituyendo \bar{r}_0 en (7.2b) desarrollando y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned}
& \bar{r}_1^{(t,t)} + (\omega^2 + \Omega_z^2) \bar{r}_1 = \\
& + \left(-2 \frac{db_0}{d\eta} \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} - b_0 \beta \left[\left(\frac{3\omega^2}{2l_0} + \frac{2\Omega_z^2}{l_0} \right) - \frac{32\Omega_x^2 \Omega_z^2 \cos^2(2\Omega_z t)}{l_0} - k_1 \beta c \right] \right) \cos(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t) \\
& + \left(-2 \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} a_0 \beta \left[\frac{8\Omega_x^2 \Omega_z^3 \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} + \frac{6\Omega_x^2 \Omega_z \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} \right] \right) \cos(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t) \\
& + \left(-2 \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \left[\frac{3cb_0^3}{8} (\omega^2 + \Omega_z^2) + \frac{3ca_0^2 b_0}{8} (\omega^2 + \Omega_z^2) \right] \right) \cos(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t) \\
& + \left(2 \frac{da_0}{d\eta} \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} - a_0 \beta \left[\left(\frac{3\omega^2}{2l_0} + \frac{2\Omega_z^2}{l_0} \right) - \frac{32\Omega_x^2 \Omega_z^2 \cos^2(2\Omega_z t)}{l_0} + k\beta c \right] \right) \sin(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t) \\
& + \left(2 \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} b_0 \beta \left[\frac{8\Omega_x^2 \Omega_z^3 \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} + \frac{6\Omega_x^2 \Omega_z \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} \right] \right) \sin(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t) \\
& + \left(2 \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} \left[\frac{3ca_0^3}{8} (\omega^2 + \Omega_z^2) + \frac{3ca_0 b_0^2}{8} (\omega^2 + \Omega_z^2) \right] \right) \sin(\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2} t) \\
& + \text{terminos no seculares}
\end{aligned}$$

Y después de igualar las ecuaciones seculares a cero y despejando \dot{a}_0 y \dot{b}_0 obtenemos

$$\boxed{
\begin{aligned}
\frac{da_0}{d\eta} &= \frac{a_0 \beta}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} (q + ck_1 \beta) - S\beta b_0 - \gamma c (a_0^3 + a_0 b_0^2) \\
\frac{db_0}{d\eta} &= -\frac{b_0 \beta}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} (q - ck_1 \beta) - S\beta a_0 - \gamma c (b_0^3 + a_0^2 b_0)
\end{aligned}
} \tag{7.3}$$

Donde

$$\begin{aligned}
c &= \text{constante de amortiguamiento.} & q &= \left(\frac{3\omega^2}{2l_0} + \frac{2\Omega_z^2}{l_0} - \frac{32\Omega_x^2 \Omega_z^2 \cos^2(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} \right) \\
\beta &= \text{termino paramétrico} & S &= \left(\frac{8\Omega_x^2 \Omega_z^3 \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} + \frac{6\Omega_x^2 \Omega_z \sin(2\Omega_z t)}{l_0(9\omega^2 + 8\Omega_z^2)} \right) \\
k_1 &= \text{valor pequeño} & \gamma &= \frac{3}{8} (\omega^2 + \Omega_z^2)
\end{aligned}$$

Obteniendo un diagrama fase para el sistema (7.3) tenemos que

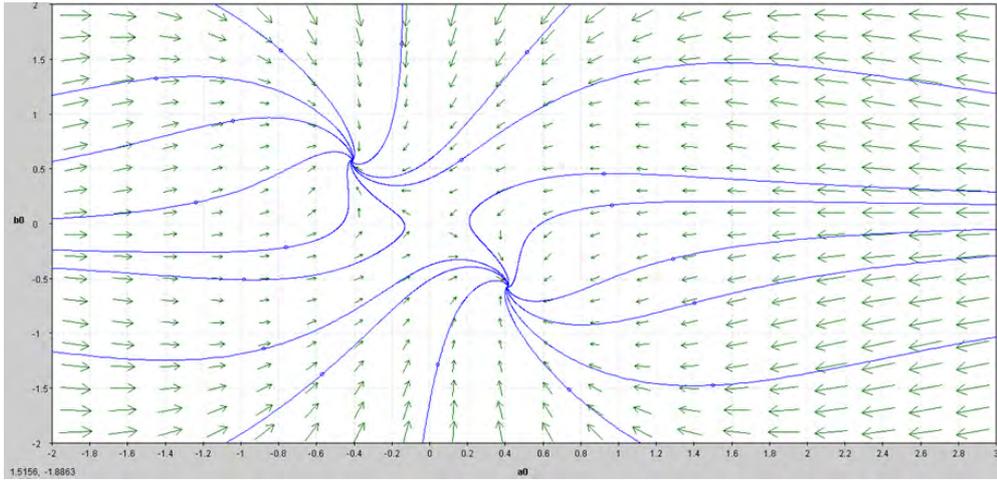


Figura 8:

Por lo que observamos que el diagrama fase posee dos puntos de equilibrio atractores y diferentes al origen. Por tanto el campo vectorial (a_0, b_0) se va aproximando cada vez mas a alguno de estos puntos y por tal razón a_0 y b_0 tienen un limite diferente a cero, y por consiguiente la amplitud R que esta dada por $R = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$ será distinta de cero.

A continuación haremos un cambio a coordenadas polares para poder representar \dot{R} y $\dot{\theta}$.

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\gamma c R^3 + \frac{\beta R}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} [q \cos(2\theta) + \beta c k_1 - S \sin(2\theta)] \\ \dot{\theta} &= -\beta S \cos(2\theta) - \frac{\beta q \sin(2\theta)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Y además acordándose que hemos supuesto que $c = \frac{c'}{A}$, donde $A = R \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}$. entonces el sistema (7.4) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\frac{\gamma c' R^2}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} + \frac{\beta R}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} \left[q \cos(2\theta) + \frac{\beta c' k_1}{R \sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} - S \sin(2\theta) \right] \\ \dot{\theta} &= -\beta S \cos(2\theta) - \frac{\beta q \sin(2\theta)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

En el sistema (6.4) si hacemos $\dot{\theta} = 0$, $\implies \theta = \theta_0 = \text{const.}$ entonces tendremos que

$$\beta \left(S \cos(2\theta_0) - \frac{q \sin(2\theta_0)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} \right) = 0 \quad (7.6)$$

una posibilidad de que $\dot{\theta}$ sea cero es que β sea cero. Entonces tendremos que

$$\dot{R} = -\frac{\gamma c' R^2}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}}$$

Por lo que el único punto de equilibrio estaría dado por $(\theta_0, 0)$ lo cual nos dice que la única amplitud limite a alcanzar sería cero. Esto es porque se ha eliminado la excitación del péndulo.

Regresando a (7.6) tenemos que otra manera de que $\dot{\theta}$ sea cero. es que

$$S \cos(2\theta_0) - \frac{q \sin(2\theta_0)}{2\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} = 0 \quad (7.7)$$

y usando la identidad trigonométrica $\cos(2\theta_0) = \sqrt{1 - \sin^2(2\theta_0)}$ y simplificando (7.7) llegamos a que:

$$\sin(2\theta_0) = \pm \frac{2S}{\sqrt{4S^2 + q^2}}$$

Y ahora usando la identidad $\sin(2\theta_0) = \sqrt{1 - \cos^2(2\theta_0)}$ tendremos que

$$\cos(2\theta_0) = \pm \frac{q}{\sqrt{4S^2 + q^2}}.$$

Y sustituyendo $\sin(2\theta_0)$ y $\cos(2\theta_0)$ en (7.5) y con $\dot{R} = 0$ tenemos que

$$R = \frac{\beta \psi}{4\gamma} + \beta \left[\frac{k_1}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} + \frac{\psi^2}{8\gamma (c')^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.8)$$

Donde por simplificación se ha supuesto que $\psi = \pm \frac{q^2 - 2S^2}{\sqrt{4S^2 + q^2}}$. Además de (7.8) tenemos que el punto

de equilibrio esta determinado por $\left(\theta_0, \frac{\beta \psi}{4\gamma} + \beta \left[\frac{k_1}{\sqrt{\omega^2 + \Omega_z^2}} + \frac{\psi^2}{8\gamma (c')^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right)$ lo cual nos dice que las

oscilaciones del péndulo paramétrico, con amortiguamiento no lineal, alcanzan un punto de oscilación estacionaria. y también se observa que en el caso de que el parámetro de excitación β sea cero las oscilaciones del péndulo paramétrico se amortiguaran hasta llegar al reposo.

Ya una vez hecho esto pasaremos a representar el diagrama fase del sistema (7.4) pero primeramente para valores de $\beta > c$.

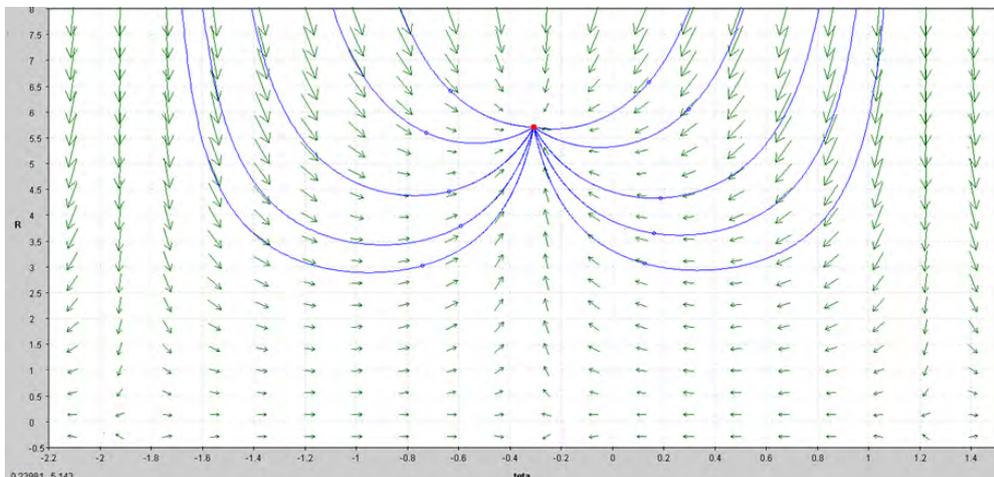


Figura 9:

en el diagrama fase de la figura 9, tenemos que para valores de $\beta > c$ la amplitud R llega a tomar un valor limite diferente de cero , y esto sucede cuando θ tiene como limite un valor constante al transcurrir del tiempo. Y vemos que para ciertas condiciones iniciales el campo vectorial $(\dot{\theta}, \dot{R})$ tiene como punto de equilibrio a $(\theta_e, R_e) = (-0.30735, 5.7098)$ el cual es el limite de θ y R respectivamente. Para dar una mejor interpretación a lo que esto significa a continuación mostramos la gráfica de R y θ . Y posteriormente pasaremos a su interpretación física.

Gráfica de R y θ con respecto al tiempo

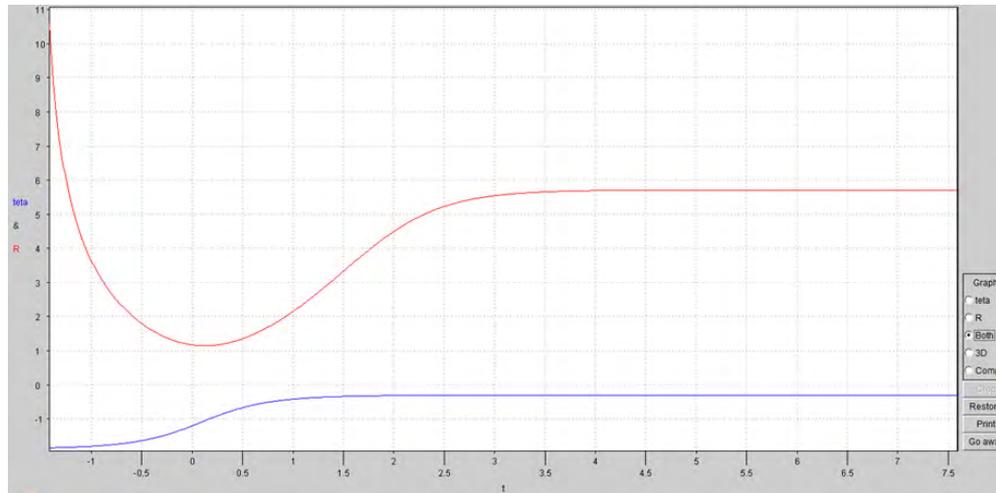


Figura 10:

En la gráfica de R y θ tenemos que la amplitud R por un tiempo corto empieza a decaer pero después se recupera empezando a crecer y a estabilizarse hasta llegar a una amplitud limite, todo esto ocurre en cuanto θ empieza a cambiar muy lentamente, que llega a convertirse en constante. la interpretación es que aunque el parámetro resonante β es mayor que el amortiguamiento c , la energía ganada por la resonancia en principio es menor que la energía perdida por el amortiguamiento pero de alguna manera la energía debida a la resonancia empieza a crecer y a competir con la energía disipada por el amortiguamiento no lineal, de tal manera que el cambio neto de la energía se va aproximando cada vez mas a cero, es decir $\frac{dE}{dt} \approx 0$, esto es conforme el tiempo va en aumento, y de esta manera tenemos que el Péndulo no se irá al reposo al suponer que $\beta > c$, es mas tendrá una amplitud diferente a cero. En seguida procederemos al análisis del caso $\beta < c$. Por lo que obteniendo el siguiente diagrama fase tenemos.

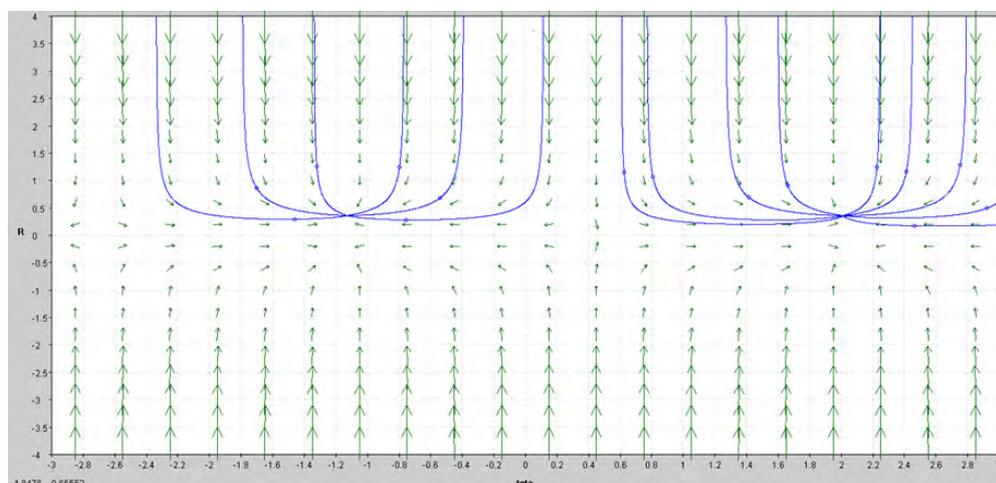


Figura 11:

En el diagrama fase anterior hemos supuesto que $\beta = 0.12$ y $c = 0.75$, pero en particular tenemos que cuando $\beta < c$ la amplitud se vuelve cada vez mas pequeña y su comportamiento es el mismo al caso cuando $\beta > c$. Pero con la diferencia de que el tiempo en que la amplitud alcanza a estabilizarse es mucho mayor que cuando $\beta > c$ esto lo podemos ver en la siguiente gráfica de R .

Gráfica de R para valores de $\beta < c$.

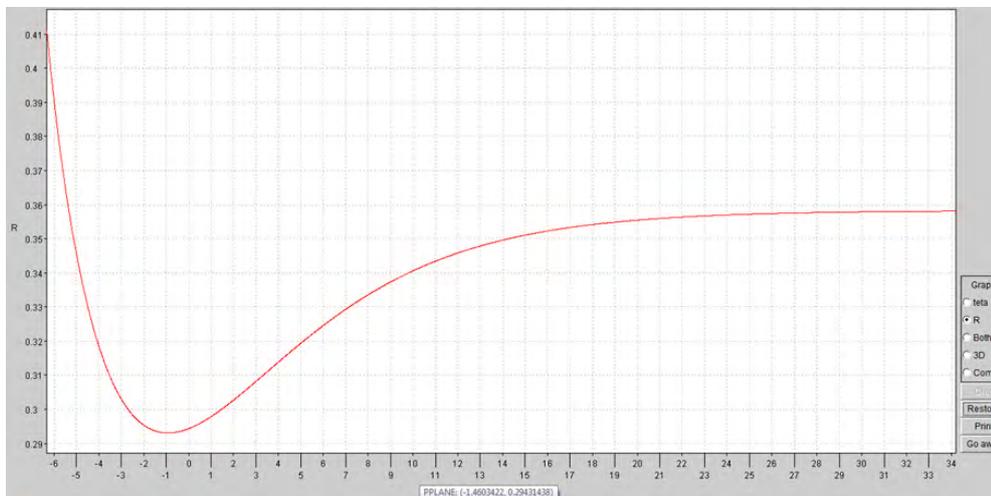


Figura 12:

Por lo que se puede concluir es que ya sea que $\beta > c$ ó $\beta < c$ tenemos que la amplitud nunca es cero. el único caso en el que el péndulo llegaría al reposo es cuando β sea cero. ya que solo existiría el amortiguamiento no lineal que se encargaría de disipar toda la energía.

El caso cuando β es cero esta representado en la siguiente gráfica que representa el decrecimiento de la amplitud R al paso del tiempo .

Gráfica de R para $\beta = 0$.

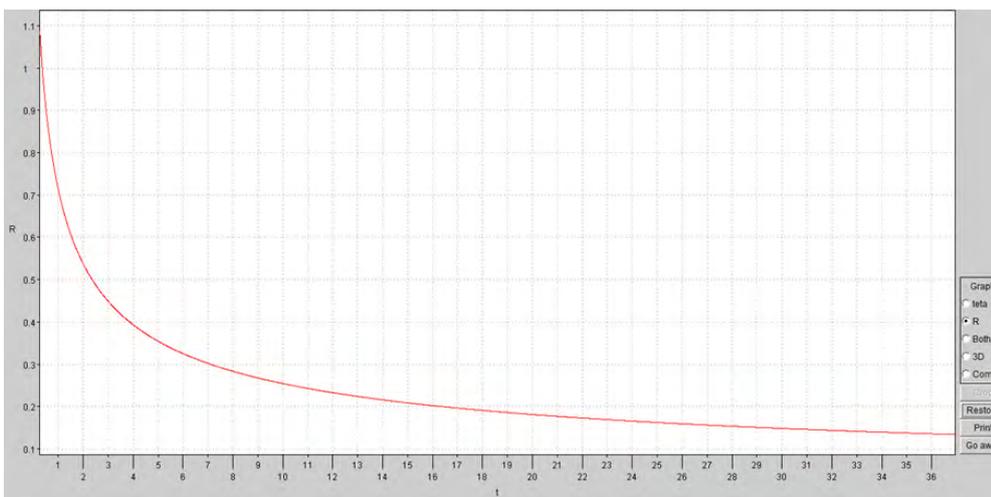


Figura 13:

8. Conclusiones

1. En este trabajo de tesina se ha examinado el movimiento dinámico del Péndulo de Foucault para el caso conservativo, además se ha mostrado la dinámica de sus oscilaciones para tiempos largos, en donde se encontró que posee dos puntos de equilibrio estables y diferentes al origen, esto debido al efecto de rotación terrestre sobre dicho péndulo.
2. También se estudio el efecto resultante de excitar paramétricamente al péndulo por una variación periódica de su longitud, que a su vez fue puesto en competencia con amortiguamientos disipativos de energía del tipo lineal y no lineal. Encontrando que para el caso del péndulo paramétrico con amortiguamiento lineal se obtuvo un comportamiento similar al de la ecuación de Mathieu con disipación lineal. En este caso se obtuvo que las lenguas de Arnold se despegan del eje vertical. Por lo que las soluciones que están por debajo de tales lenguas se amortiguan exponencialmente hasta alcanzar el reposo y las soluciones que están por encima de las lenguas crecen exponencialmente. Mostrando así que tales soluciones son inestables. Y para el caso del péndulo con excitación paramétrica y con un amortiguamiento no lineal de la forma $\dot{\rho} |\dot{\rho}|$, se tiene que la amplitud de oscilación alcanza un estado estacionario, es decir alcanza una amplitud límite, por lo que tenemos que sus soluciones son asintóticamente estables, además se encontró que la amplitud es directamente proporcional a su parámetro de excitación e inversamente proporcional a su amortiguamiento.
3. También se tiene que la evolución de $\dot{\phi}$ en el caso de Foucault se considera constante, pero para el caso de Foucault paramétrico y con amortiguamiento, tenemos que $\dot{\phi}$ tiene pequeñas variaciones en su velocidad, debido al término $2\beta \cos(\phi) \Omega \Omega_x \cos(\Omega t) (\bar{r}_0 - r_e)$ el cual es periódico y en consideración muy pequeño, pero en promedio la velocidad puede ser considerada como constante. Por lo que $\frac{d}{dt} \left[(\bar{r}_0 - r_e)^2 (\dot{\phi} + \Omega_z) \right] = 0$.
4. El péndulo paramétrico con amortiguamiento no lineal, nos arroja un resultado importante y de interés científico, el cual es el de poder diseñar un péndulo con la característica que aunque se tenga la resistencia del aire, podamos mantener el movimiento dinámico de dicho péndulo al introducir una variación periódica en la longitud de dicho péndulo. Tal diseño es novedoso, ya que como sabemos a diferencia de mantener un Péndulo de Foucault en oscilación constante al ponerlo sobre una bobina, cuyo único propósito es el de restaurar la energía perdida debida a la fricción del aire mediante la repulsión de cargas. Lo que hace diferente a este péndulo es que solo es mantenido en movimiento debido al efecto de la resonancia y del amortiguamiento no lineal.

Apéndice:

A. Ecuación del Péndulo de Foucault (Coordenadas Esféricas)

A continuación se hará uso de la formula de la velocidad $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}$, la cual nos relaciona las velocidades relativas entre dos sistemas de referencia O y O' . Tal propósito de usar esta formula es el de encontrar la ecuación de movimiento del **Péndulo de Foucault** en coordenadas esféricas, esto se debe a que podemos encontrar ecuaciones de movimiento haciendo uso de la lagrangiana en la que su obtención es basada en la geometría del problema a tratar, ya que con solo conocer la posición y velocidad de alguna partícula, es posible su obtención. En donde la lagrangiana se compone de la energía cinética y energía potencial, es decir $L = T - U = \frac{1}{2}m \|\vec{V}\|^2 - U(\|\vec{r}\|) = \text{cinetica} - \text{potencial}$.

Fijandonos en la figura 14.

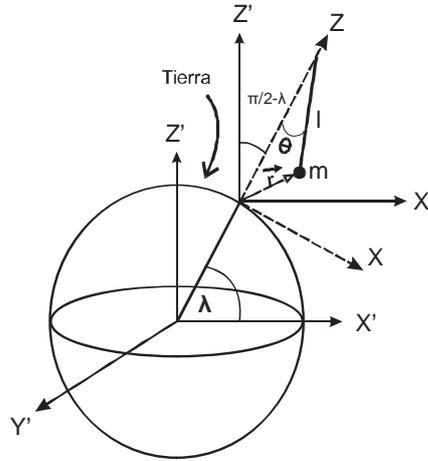


Figura 14:

tenemos que la posición \vec{r} de la masa del péndulo con respecto al sistema XYZ el cual esta anclado en la tierra es

$$\vec{r} = [l \sin(\theta), 0, l - l \cos(\theta)] = [l \sin(\theta), 0, 2l \sin^2(\theta/2)]. \quad (1)$$

Ahora para encontrar la posición \vec{r}' de la masita en el sistema $X'Y'Z'$ es necesario aplicar una matriz de giro al vector \vec{r} sobre el eje Y con un giro de $\frac{\pi}{2} - \lambda$ donde λ es la latitud de la tierra, esto es equivalente a realizar un cambio de base del sistema XYZ al sistema $X'Y'Z'$.

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ 0 \\ 2l \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\lambda) & 0 & \cos(\lambda) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\lambda) & 0 & \sin(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ 0 \\ 2l \sin^2(\theta/2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y entonces

$$\vec{r}' = [l \sin(\lambda) \sin(\theta) + 2l \cos(\lambda) \sin^2(\theta/2), 0, -l \cos(\lambda) \sin(\theta) + 2l \sin(\lambda) \sin^2(\theta/2)] \quad (2)$$

Ahora si se quiere encontrar \vec{V}' es suficiente hacer $\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, entonces

$$\vec{V}' = l\dot{\theta} [\sin(\lambda + \theta), 0, -\cos(\lambda + \theta)] \quad (3)$$

Tambi3n se tiene que el vector velocidad angular para un sitio en la tierra con latitud λ esta dado por

$$\vec{\Omega} = [-\Omega \cos(\lambda), 0, \Omega \sin(\lambda)]. \quad (4)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \times \vec{r}' &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ -\Omega \cos(\lambda) & 0 & \Omega \sin(\lambda) \\ l \sin(\theta) & 0 & l - l \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= [0, -l\Omega \cos(\lambda) + l\Omega \cos(\lambda) \cos(\theta) - l\Omega \sin(\lambda) \sin(\theta), 0] \end{aligned} \quad (5)$$

y simplificando (5) obtenemos que

$$\vec{\Omega} \times \vec{r}' = [0, -l\Omega \cos(\lambda) + l\Omega \cos(\lambda + \theta), 0]. \quad (6)$$

Por consiguiente ya una vez que se ha encontrado \vec{V}' y $\vec{\Omega} \times \vec{r}'$ y como tenemos que $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$, entonces \vec{V} es

$$\vec{V} = [l\dot{\theta} \sin(\lambda + \theta), l\Omega \cos(\lambda + \theta) - l\Omega \cos(\lambda), -l\dot{\theta} \cos(\lambda + \theta)] \quad (7)$$

y por tanto

$$\|\vec{V}\|^2 = l^2 \dot{\theta}^2 + [l\Omega \cos(\lambda + \theta) - l\Omega \cos(\lambda)]^2 \quad (8)$$

En donde la energ3a cin3tica T es:

$$T = \frac{1}{2} m \|\vec{V}\|^2 \quad (9)$$

$$T = \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \dot{\theta}^2 + [l\Omega \cos(\lambda + \theta) - l\Omega \cos(\lambda)]^2 \right\} \quad (10)$$

y la energ3a potencial U es:

$$U = m g [l - l \cos(\theta)]. \quad (11)$$

Por lo tanto el lagrangiano esta dado por

$$L = \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \dot{\theta}^2 + [l\Omega \cos(\lambda + \theta) - l\Omega \cos(\lambda)]^2 \right\} - m g [l - l \cos(\theta)]. \quad (12)$$

Entonces la ecuaci3n de movimiento estar3 dada por la ecuaci3n de **Euler Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (13)$$

y al realizar tales sustituciones en (13) y simplificando llegamos a que la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \Omega^2 \cos(\lambda + \theta) \sin(\lambda + \theta) - \Omega^2 \cos(\lambda) \sin(\lambda + \theta) = 0 \quad (14)$$

Y de acuerdo a la ecuación anterior la podemos también escribir como

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) + \frac{\Omega^2}{2} [\sin(2\lambda) \cos(2\theta) + \cos(2\lambda) \sin(2\theta)] \\ - \Omega^2 \cos(\lambda) [\sin(\lambda) \cos(\theta) + \cos(\lambda) \sin(\theta)] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Pequeñas Oscilaciones

ahora para encontrar la ecuación de movimiento en Pequeñas Oscilaciones, de (15) hagamos a θ muy pequeño, lo suficiente para poder decir que $\sin(\theta) \approx \theta$, $\cos(2\theta) \approx 1$ y $\sin(2\theta) \approx 2\theta$. y por tanto la ecuación (15) con θ pequeño es

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta + \frac{1}{2} \Omega^2 [\sin(2\lambda) + (2\theta) \cos(2\lambda)] - \Omega^2 \cos(\lambda) [\sin(\lambda) + \theta \cos(\lambda)] = 0. \quad (16)$$

Y simplificando (16) llegamos a

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta - \Omega^2 \sin^2(\lambda) \theta = \ddot{\theta} + [\omega^2 - \Omega^2 \sin^2(\lambda)] \theta$$

y definiendo a $\Omega_z^2 \sin^2(\lambda)$ como Ω_z^2 , tenemos que la ecuación de movimiento en **Pequeñas Oscilaciones** esta dada por

$$\ddot{\theta} + (\omega^2 - \Omega_z^2) \theta = 0 \quad (17)$$

Índice alfabético

- aceleración centrípeta, 18
- aceleración centrípeta*, 8
- aceleración de Coriolis, 11
- aceleración de Coriolis*, 8
- aceleración relativa, 6
- amortiguamiento lineal, 15, 26
- amortiguamiento no lineal, 34, 35
- amplitud, 4, 15, 34, 35

- coordenadas cartesianas, 9
- coordenadas cilíndricas, 16
- coordenadas esféricas, 10, 37
- coordenadas polares, 32

- diagrama fase, 18, 25, 32, 34, 35

- energía cinética, 15
- energía potencial, 15
- escalas múltiples, 22

- formulación lagrangiana, 4, 15
- fuerza de Coriolis, 4

- latitud, 9

- Péndulo de Foucault, 4, 5, 15
- pequeñas oscilaciones, 10, 17, 18, 21
- Periodo del Péndulo de Foucault, 13
- periodo T , 14
- perturbación, 15
- puntos de equilibrio, 18, 21

- resonancia**, 26

- sistema inercial, 5
- sistema no inercial, 5
- sistemas de referencia, 7
- sistemas inerciales, 5

- términos despreciables, 19
- términos seculares, 23, 24

- velocidad angular terrestre, 9
- velocidad relativa, 6, 16

Referencias

- [1] D.W. Jordan and P. Smith. 1999. *Nonlinear ordinary differential equations: An introduction to dynamical systems* Third Edition, Oxford.
- [2] Landau y Lifshitz. 1994. *Física Teórica* Volumen I Segunda edición , Reverté.
- [3] V.I. Arnold. 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Second Edition, Springer- Verlag
- [4] Marcelo Alonso y Edward J. Finn. 1976. *Física Volumen I: Mecánica* Edición revisada y aumentada, Fondo educativo interamericano, S. A.
- [5] Ferdinand Verhulst. *Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, Springer
- [6] A. Kheif y D. F. Nelson, "*Hannay angle study of the Foucault pendulum in action-angle variables*", Am. J. Phys. 61, 170-174 (1993)
- [7] A. Kheif y D. F. Nelson, "*A persistent error in action-angle treatments of Hamiltonian mechanics*". Am. J. Phys. 61 (2), 175-176 (1993)