



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Análisis de flujo con líneas de corriente libres
en fluidos ideales y su aplicación al estudio
aerodinámico de vehículos terrestres
comerciales.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
SANTIAGO ALAGÓN CARRILLO

DIRECTOR DE TESIS:
ANTONMARIA MINZONI ALESSIO



2010



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Alagón
Carrillo
Santiago
55-53396560
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
30380742-9

2. Datos del tutor

Dr
Minzoni
Alessio
Antonmaria

3. Datos del sinodal 1

Dr
Ize
Lamache
Jorge Andrés

4. Datos del sinodal 2

Dr
Málaga
Iguiñiz
Carlos

5. Datos del sinodal 3

Dr
Olvera
Chávez
Arturo

6. Datos del sinodal 4

DrP
Flores
Gallegos
Jorge Gilberto

7. Datos del trabajo escrito.

Análisis de flujo con líneas de corriente libres en fluidos ideales y su aplicación al estudio aerodinámico de vehículos terrestres comerciales
114 p
2010

Índice general

Introducción	1
1. Fundamentos de la Mecánica de Fluidos	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Derivada material	5
1.3. Fuerzas volumétricas y de superficie	6
1.4. Equilibrio de fuerzas	10
1.5. Deformaciones chicas	11
1.6. Conservación de masa	14
1.7. Conservación de momento lineal	16
1.8. Líneas de corriente, sendas y trazas	17
1.8.1. Líneas de corriente	17
1.8.2. Sendas	18
1.8.3. Trazas	18
1.9. Circulación y vorticidad	19
2. Flujo potencial	21
2.1. Flujo bidimensional	21
2.2. Fluidos ideales y flujos potenciales	22
2.2.1. Función de corriente	23
2.2.2. Potencial de velocidad	24

2.2.3. Flujo potencial, invícido y estacionario bidimensional	25
2.3. Ecuación de Bernoulli	27
3. Aplicación de la variable compleja	29
3.1. Mapeos y funciones analíticas	29
3.2. Funciones armónicas	30
3.3. Mapeo conforme	30
3.4. Paradoja de D'Alembert	32
4. Flujos con líneas de corriente libres en obstáculos poligonales	37
4.1. Placa ortogonal al flujo, método de Kirchoff	40
4.2. Placa ortogonal al flujo, método de Zhukovskii	46
4.3. Método de Zhukovskii para una cuña	51
5. Resultados experimentales	55
5.1. Metodología experimental	57
5.2. Resultados experimentales en el tunel de viento para la placa ortogonal y la cuña simétrica	58
5.3. Resultados experimentales para la cuña no simétrica	59
5.4. Resultados experimentales para la cuña no simétrica con lados de longitud muy diferente	60
5.5. Resultados experimentales de la industria	61
5.6. Primeras comparaciones entre experimentos y teoría	63
6. El problema del flujo para el frente de un camión de pasajeros	65
6.1. Velocidad en las esquinas	65
6.2. Problema del camión de pasajeros	72
6.3. Comparación de los resultados teóricos con los resultados experimentales	83

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
7. Posibles soluciones al problema de la velocidad infinita en los vértices	87
7.1. Suma de soluciones	87
7.2. Disminución no monótona de la velocidad	91
7.3. Mapeo directo entre el flujo en z y el potencial complejo F . .	92
8. Fórmula de Schwarz-Christoffel modificada para flujos sobre obstáculos curvos	99
9. Conclusión	105

Introducción

Jean le Rond d'Alembert fué uno de los grandes físicos-matemáticos del siglo XVIII. Junto con Euler y Bernoulli es considerado uno de los fundadores de la dinámica de fluidos moderna.

Uno de los resultados más conocidos en la teoría de flujos potenciales es la llamada *Paradoja de d'Alembert*. D'Alembert demostró matemáticamente en 1774 que bajo las hipótesis de cero viscosidad y cero compresibilidad el arrastre sobre un cuerpo bidimensional totalmente rodeado por fluido en movimiento es nulo.

Posteriormente, en 1868, Helmholtz notó, al igual que Kirchhoff en 1869, que el resultado obtenido por d'Alembert era válido solamente si el campo de velocidades es continuo. Esto llevó al concepto de estela detrás del obstáculo: una “zona muerta” que se extiende infinitamente detrás del obstáculo donde la presión es constante. A principios del siglo XX Levi-Civita y Villat desarrollaron las bases matemáticas de esta teoría.

En la práctica el campo de velocidades y las llamadas líneas de corriente libres que definen la estela sólo han podido ser calculadas para casos muy sencillos.

En este trabajo estudiaremos este tipo de flujos, flujos con líneas de corriente libres. Primero daremos un breve repaso de la mecánica de fluidos y de variable compleja, para después estudiar la teoría de las líneas de corriente libres junto con las técnicas de análisis complejo para obtener el potencial complejo de los flujos.

Nuestra atención se centrará en obstáculos con frontera poligonal y con estos haremos algunas aproximaciones para el cálculo del coeficiente de arrastre en vehículos terrestres comerciales.

Para concluir haremos un pequeño análisis relacionado con la aplicabilidad de estos conceptos en la aproximación poligonal de obstáculos con frontera curva.

Como podremos ver, esta teoría subestima de manera considerable el coeficiente de arrastre conforme los obstáculos poligonales se vuelven más complejos debido a las esquinas.

Capítulo 1

Fundamentos de la Mecánica de Fluidos

En este capítulo daremos un breve repaso de los conceptos básicos de la Mecánica de Fluidos que nos será útil tener a la mano para la realización de este trabajo.

1.1. Conceptos básicos

Un fluido es cualquier material que bajo la acción de una fuerza se puede deformar continuamente sin límite, a esta deformación se le conoce como flujo. La mecánica de fluidos es la rama de la física que estudia el movimiento de los fluidos y las fuerzas que se derivan de estos. La primera dificultad que se encuentra cuando se estudia un fluido es el hecho de que a pesar de que los fluidos están constituidos por moléculas, al igual que los cuerpos rígidos, las posiciones entre las moléculas no es fija. Es por eso que este estudio se lleva a cabo desde un punto de vista macroscópico. Lo que esto quiere decir es que cuando se estudia un fluido, no se hace estudiando las moléculas que lo constituyen ni se hace la deducción de las ecuaciones de movimiento a partir de conceptos microscópicos.

Teniendo lo anterior en cuenta es necesario estudiar a los fluidos como medios continuos, a esto se lo conoce como la hipótesis del continuo. Esto implica que las propiedades del fluido tales como densidad, presión,

temperatura, y velocidad se suponen bien definidas, o medibles, en puntos “infinitamente” pequeños que se conocen como elementos de fluido. De esta forma, las propiedades del fluido se considera que varían continuamente en el espacio. La hipótesis del continuo establece que el volumen de un elemento de fluido debe ser grande para que contenga un gran número de moléculas, pero a su vez pequeño comparado con las dimensiones macroscópicas del sistema, convencionalmente se establece que el volumen de un elemento de fluido ε debe cumplir

$$\frac{1}{n} \ll \varepsilon \ll L$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen y L es la escala de longitud más chica macroscópicamente significativa en el fluido.

Como en la mecánica de cuerpo rígido, para describir el movimiento y deducir las leyes de conservación de un fluido es necesario hacerlo desde un sistema de referencia. En la mecánica de fluidos existen dos marcos de referencia básicos, el que corresponde a la *descripción euleriana* y el que corresponde a la *descripción lagrangiana*.

En la descripción euleriana las variables independientes son las coordenadas espaciales x , y , z y la variable temporal t . Desde el punto de vista del laboratorio el sistema de referencia está fijo lo cual implica que las propiedades del fluido son estudiadas a partir de un volumen de control, o sea, un espacio determinado en el cual observamos las propiedades macroscópicas del fluido en diferentes tiempos t y $t + \Delta t$. Las partículas que se encontraban en el volumen de control al tiempo t no necesariamente son las mismas que se encontrarán al tiempo $t + \Delta t$.

En la descripción lagrangiana la atención se centra en un elemento de fluido particular ε_0 en un tiempo t_0 y se sigue a lo largo de su movimiento. Se consideran siempre las mismas partículas ya que el marco de referencia se mueve junto con el elemento de fluido. Dada esta descripción, las variables características del sistema ahora dependen del tiempo y de la posición inicial en la que se encontraba el elemento de fluido.

1.2. Derivada material

Dados los dos sistemas de referencia básicos para la descripción del movimiento de los fluidos, ya que ambas son válidas y que los resultados que se obtienen deben ser iguales sin importar cual sistema se elija, entonces debe haber una manera de relacionarlos. Si elegimos el sistema de referencia lagrangiano, es posible conocer el recorrido de una partícula $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y su velocidad $\mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, esto es

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$$

La aceleración entonces estará dada por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(x(t), y(t), z(t), t)$$

lo que es igual a

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

y dado que

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$$

obtenemos que

$$\mathbf{a}(t) = u\mathbf{u}_x + v\mathbf{u}_y + w\mathbf{u}_z + \mathbf{u}_t = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

Al operador

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \tag{1.1}$$

se le conoce como la derivada material. Este operador aplicado a una cantidad α , i.e. $\frac{D\alpha}{Dt}$, representa el cambio total de esta desde el punto de vista de un observador que sigue a un elemento de fluido particular mientras fluye, o

sea, en el sistema lagrangiano. Por su parte el lado derecho de (1.1) representa este cambio expresado en el sistema euleriano. Por lo tanto la ecuación (1.1) expresa la razón de cambio de una cantidad en el sistema lagrangiano en términos de las derivadas en el sistema euleriano.

1.3. Fuerzas volumétricas y de superficie

Existen dos tipos de fuerzas que actúan sobre los cuerpos. El primer tipo son las fuerzas que actúan sobre el cuerpo completo, que tienen la capacidad de penetrar en este y tener efecto sobre todas las partículas que lo conforman, en el caso de los fluidos tienen la capacidad de actuar sobre todos los elementos de fluido; ejemplos de dichas fuerzas son la gravedad, las fuerzas electromagnéticas y las fuerzas ficticias. A estas fuerzas se les conoce como fuerzas volumétricas o de cuerpo, y se les denota por \mathbf{f}_c . Dado que varían poco con la distancia, se les considera constantes sobre un cuerpo completo. Entonces si \mathbf{f} es el vector que representa la resultante de todas las fuerzas volumétricas que actúan sobre un cuerpo, la fuerza volumétrica total actuando sobre una masa de volumen V estará dada por

$$\int_V \rho \mathbf{f} dV$$

El factor ρ se introduce ya que los dos tipos mas comunes de fuerzas de cuerpo, la gravedad y las fuerzas ficticias, dependen directamente de la masa del cuerpo.

El segundo tipo de fuerzas son las de corto alcance o superficiales, y se les denota por \mathbf{f}_s . Estas están directamente relacionadas con la interacción entre las moléculas y decrecen rápidamente conforme aumenta la distancia al punto de origen de la fuerza, por ejemplo fuerzas de presión y tensión viscosa. Son la manifestación macroscópica de las interacciones y la dinámica a nivel molecular entre dos elementos de fluido que comparte una frontera. Dado un elemento de fluido sobre el cual actúa una fuerza de corto alcance, esta tendrá efecto sólo en una capa delgada cercana a la frontera del elemento de fluido, a este alcance se le conoce como profundidad de penetración. La fuerza superficial por unidad de área se denomina esfuerzo y se le denota por \mathbf{t} .

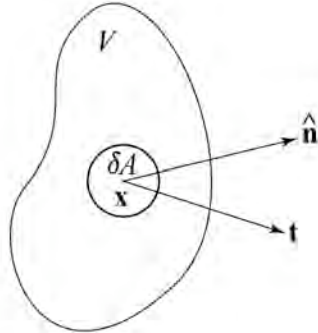


Figura 1.1: Tensor de esfuerzos

De esta manera podemos definir $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)\delta A$ como la fuerza ejercida a través del área δA por el medio en el lado al que $\hat{\mathbf{n}}$ apunta sobre el medio en el lado opuesto (dentro de V).

La superficie de un elemento de fluido en general tiene diversas orientaciones lo cual hace una tarea bastante complicada el definir el efecto total de las fuerzas de superficie ya que el vector \mathbf{t} , al cual llamaremos tensor de esfuerzos, depende del punto y el tiempo en que es evaluado así como también del área en cuestión, y de la orientación de esta área, o sea de $\hat{\mathbf{n}}$. Una manera de atacar este problema para obtener información sobre el tensor de deformación es considerar su acción instantánea sobre un elemento de fluido tetraédrico con volumen δV

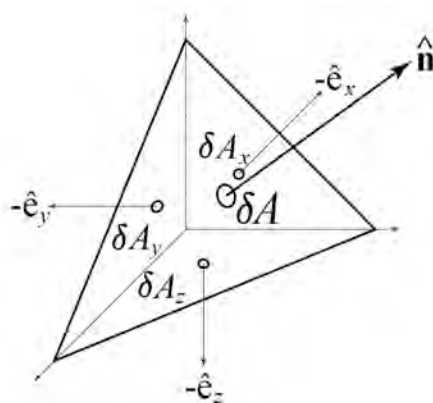


Figura 1.2: Fuerzas superficiales

donde a la cara δA_z le corresponde la normal $-\hat{\mathbf{e}}_z$, a la cara δA_x le corresponde la normal $-\hat{\mathbf{e}}_x$, a la cara δA_y le corresponde la normal $-\hat{\mathbf{e}}_y$ y a la cara δA le corresponde la normal $-\hat{\mathbf{n}}$.

Suponiendo que cada cara, las δA_i , $i = \{1, 2, 3\}$, son suficientemente pequeñas como para poder considerar \mathbf{t} constante en cada una de estas, entonces la fuerza superficial total sobre el elemento de fluido tetraédrico estará dada por la suma de las fuerzas ejercidas en cada cara evaluadas en algún punto de estas

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_{\delta A}, t)\delta A + \mathbf{t}(-\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{x}_{\delta A_x}, t)\delta A_x + \mathbf{t}(-\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{x}_{\delta A_y}, t)\delta A_y + \mathbf{t}(-\hat{\mathbf{e}}_z, \mathbf{x}_{\delta A_z}, t)\delta A_z$$

Dado que el esfuerzo \mathbf{t} depende de la normal a la superficie donde este se evalúa entonces se tiene que $\mathbf{t}(-\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) = -\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)$, i.e. \mathbf{t} es impar en $\hat{\mathbf{n}}$. Además ya que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y$ y $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ nos dan el ángulo entre la cara δA y las caras δA_x , δA_y y δA_z respectivamente, entonces tenemos que

$$\delta A_x = \delta A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\delta A_y = \delta A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\delta A_z = \delta A \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$$

Con lo cual se puede escribir \mathbf{f}_s de la siguiente manera

$$\mathbf{f}_s = \delta A [\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_{\delta A}, t) - \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{x}_{\delta A_x}, t)\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x - \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{x}_{\delta A_y}, t)\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y - \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_z, \mathbf{x}_{\delta A_z}, t)\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z]$$

$$\mathbf{f}_s = \delta A [\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_{\delta A}) - [\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{x}_{\delta A_x}, t)\hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{x}_{\delta A_y}, t)\hat{\mathbf{e}}_y + \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_z, \mathbf{x}_{\delta A_z}, t)\hat{\mathbf{e}}_z] \cdot \hat{\mathbf{n}}]$$

Ahora bien, la fuerza volumétrica total sobre el cuerpo dentro del tetraedro es proporcional a δV , i.e. $\mathbf{f}_c = \mathcal{O}(l^3)$; la masa dentro del tetraedro es

proporcional a δV , pero las fuerzas superficiales \mathbf{f}_s son proporcionales al área del tetraedro, i.e. $\mathbf{f}_s = \mathcal{O}(l^2)$; por lo tanto dada la segunda ley de Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_s$$

si las dimensiones lineales del tetraedro se aproximan a cero, sin que su forma cambie, los puntos \mathbf{x}_δ , $\mathbf{x}_{\delta A_y}$ y $\mathbf{x}_{\delta A_z}$ tienden todos a un mismo punto \mathbf{x} , y se tiene que

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_{\delta A}, t) = [\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_x, \mathbf{x}_{\delta A_x}, t)\hat{\mathbf{e}}_x + \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_y, \mathbf{x}_{\delta A_y}, t)\hat{\mathbf{e}}_y + \mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_z, \mathbf{x}_{\delta A_z}, t)\hat{\mathbf{e}}_z]\hat{\mathbf{n}} \quad (1.2)$$

Los vectores $\hat{\mathbf{n}}$ y \mathbf{t} no dependen de los ejes de referencia del sistema, y la i -ésima componente de \mathbf{t} , ver ecuación (1.2), evaluada en la j -ésima dirección, i.e. $\mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{e}}_j)$, se puede ver como la ij -ésima entrada de un tensor σ_{ij} al cual se le llama tensor de esfuerzos. De esta forma, dado el tensor σ , el esfuerzo en cualquier punto estará dado por

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{x}, t) = \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \begin{pmatrix} \sigma_{ii} & \sigma_{ij} & \sigma_{ik} \\ \sigma_{ji} & \sigma_{jj} & \sigma_{jk} \\ \sigma_{ki} & \sigma_{kj} & \sigma_{kk} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$$

Utilizando esto se tiene que la fuerza superficial \mathbf{f}_s esta dada por

$$\mathbf{f}_s = \int_{\delta A} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) dS = \int_{\delta A} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \sigma^\top dV \quad (1.3)$$

Ahora bien, si suponemos que σ es constante dentro de un elemento de fluido esférico Ω suficientemente pequeño y calculamos la suma de las magnitudes de los esfuerzos normales sobre la superficie de este elemento tenemos

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_i n_j dS = \sigma_{ij} \int_{\partial\Omega} n_i n_j dS$$

donde las dos últimas expresiones están escritas en notación de índices y la última igualdad se da porque se supone σ constante. Calculando las 9 integrales se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} n_i n_j dS = 0; \text{ para } i \neq j$$

y

$$\int_{\partial\Omega} n_i n_i dS = \frac{4}{3}\pi r^2$$

con lo cual se tiene

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \frac{4}{3}\pi r^2 = \text{tr}(\sigma) \frac{4}{3}\pi r^2$$

Se puede ver que este resultado es independiente de la forma del elemento de fluido con el que se trabaje, y dado que $4\pi r^2$ es el área del elemento esférico y que estamos calculando la suma de las magnitudes de los esfuerzos normales, entonces es natural definir

$$-\frac{1}{3}\text{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} = p$$

donde p es la presión mecánica

Dado lo anterior es posible descomponer el tensor σ de la siguiente manera

$$\sigma = \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma)\vec{\mathbf{I}} + \mathbf{D} \quad (1.4)$$

donde a \mathbf{D} , se le conoce como tensor deviatórico. El primer término del lado derecho de la igualdad solo contribuye a los esfuerzos normales causados por la presión mecánica mientras que el segundo término contribuye tanto a esfuerzos tangenciales como cortantes.

1.4. Equilibrio de fuerzas

Tener equilibrio de fuerzas significa que

$$\mathbf{f}_{\text{total}} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_s = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{\Omega} \mathbf{f} dV = 0$$

y usando el teorema de Gauss tenemos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i dV = 0$$

que dada la arbitrariedad de Ω , esto implica

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ji} + f_j = \nabla \cdot \sigma^T + \mathbf{f} = 0.$$

Haciendo el cálculo para el equilibrio de torcas y de balance angular se puede ver que el tensor σ es simétrico, por lo tanto $\sigma = \sigma^T$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma_{ji} + f_j = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = 0 \tag{1.5}$$

1.5. Deformaciones chicas

Para estudiar las deformaciones chicas en un cuerpo consideremos el siguiente diagrama

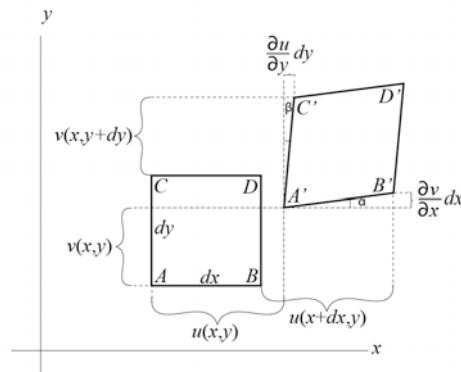


Figura 1.3: Fuerzas superficiales

Tomando en cuenta el punto $A = (x, y)$ como referencia los componentes de su desplazamiento son $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Usando la descripción lagrangiana tenemos que la posición del elemento material que al tiempo t estaba en \mathbf{x}_0 esta dada de la forma $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.

Para obtener el cambio de forma de un medio continuo hay que considerar los desplazamientos de los distintos puntos materiales dentro de este. El desplazamiento del elemento material cuya posición inicial era x_0 es $\vec{\mathbf{u}} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0$.

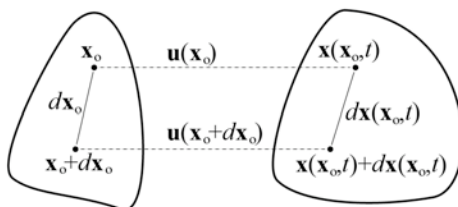


Figura 1.4: Desplazamiento

Conociendo el desplazamiento de un punto \mathbf{x}_0 es posible calcular el desplazamiento para cualquier otro punto vecino, $\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0$, de la siguiente manera

$$\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) + d\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - (\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0) = \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - d\mathbf{x}_0$$

$$d\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0) - \vec{\mathbf{u}} + d\mathbf{x}_0 = d\vec{\mathbf{u}} + d\mathbf{x}_0$$

$$\vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_0) = \vec{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) + \nabla \vec{\mathbf{u}}^T|_{\mathbf{x}_0} \cdot d\mathbf{x}_0 + \mathcal{O}(|d\mathbf{x}_0|^2)$$

lo anterior implica que

$$d\mathbf{x} \approx d\mathbf{x}_0 + \nabla \vec{\mathbf{u}}^T \cdot d\mathbf{x}_0.$$

Veamos entonces que pasa con los cambios en las distancias

$$|d\mathbf{x}| = \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}$$

$$|d\mathbf{x}|^2 = (d\vec{u} + d\mathbf{x}_0)(d\vec{u} + d\mathbf{x}_0)$$

de donde

$$|d\mathbf{x}|^2 = |d\mathbf{x}_0|^2 + \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial \mathbf{x}_j} \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial \mathbf{x}_i} \right) dx_{0j} dx_{0i}$$

Se define a $\vec{\mathbf{U}}$, el tensor de deformaciones como

$$\vec{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial \mathbf{x}_j} \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial \mathbf{x}_i} \right)$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{\mathbf{u}} + \nabla \vec{\mathbf{u}}^T + \nabla \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{u}}^T)$$

este tensor da las variaciones en la distancia entre cualesquiera dos puntos vecinos.

Si la deformación es pequeña entonces podemos aproximar a $\vec{\mathbf{U}}$ como

$$\vec{\mathbf{U}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \vec{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) = \vec{\mathbf{E}}$$

A $\vec{\mathbf{E}}$ se le conoce como el tensor de deformaciones infinitesimal de Cauchy.

Cuando se tienen deformaciones pequeñas se trabaja con el modelo de Hooke para analizarlas. Lo que nos dice este modelo es que las deformaciones son linealmente proporcionales a la fuerza ejercida, o sea que $\sigma \propto \vec{\mathbf{E}}$, lo cual se puede escribir como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

Donde C_{ijkl} es un tensor isotrópico de cuarto orden, ver [Sadd05], que contiene los coeficientes de elasticidad. Un tensor de esta forma se puede escribir como

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk}$$

Dado que $\sigma = \sigma^T$ entonces $C_{ijkl} = C_{jikl}$ y por lo tanto

$$\mu(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta_{il}) = \mu'(\delta_{jl} \delta_{ik} - \delta_{il} \delta_{jk}) \implies \mu = \mu'$$

con lo cual

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

de donde

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + \mu(E_{ij} + E_{ji}) = \lambda \delta_{ij} \text{tr}(\vec{\mathbf{E}}) + 2\mu E_{ij}$$

o lo que es lo mismo

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\vec{\mathbf{E}}) \vec{\mathbf{I}} + 2\mu \vec{\mathbf{E}} \quad (1.6)$$

1.6. Conservación de masa

Desde el punto de vista de la descripción euleriana es posible fijar una región V con frontera ∂V donde se van a medir las propiedades del fluido que pasen a través de ésta. Siendo ρ densidad y \mathbf{u} la velocidad del fluido dentro de V la razón de cambio de la masa en esta región esta dada por

$$\frac{d}{dt} m(V, t) = \frac{d}{dt} \int_V \rho(x, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dV$$

Suponiendo que ∂V es una superficie suave con elemento de área dA y tomando a $\hat{\mathbf{n}}$ como la normal unitaria a la frontera en cualquier punto entonces el flujo de volumen a través de ∂V por unidad de área es $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ y el flujo de masa es $\rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

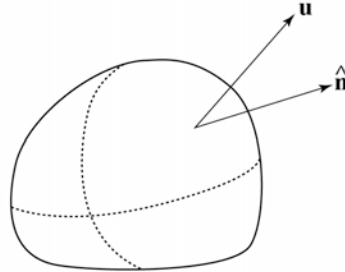


Figura 1.5: Flujo de volumen

El principio de conservación de masa se puede expresar entonces de la siguiente manera: la razón de cambio de la masa en V es igual a la razón a la cual el fluido está entrando dentro de V

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

usando teorema de la divergencia se puede escribir en su forma integral como

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Ya que este resultado es independiente de la región V , entonces es equivalente a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

A esta ecuación también se le conoce como *ecuación de continuidad*. Otra manera de escribir esta ecuación utilizando la derivada material es expandiendo la divergencia

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

en donde se puede reconocer con el primer y segundo término a la derivada material de ρ , con lo cual se tiene

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.7)$$

1.7. Conservación de momento lineal

En una región fija Ω llena de material con velocidad \mathbf{u} , el cambio en el momento lineal se deberá a dos factores:

1. Las fuerzas que actúan sobre la materia en Ω
2. El flujo de materia por la frontera, $\partial\Omega$, que acarrea su momento

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} dV}_1 = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}_2 + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot dV}_3 - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS}_4$$

el primer término representa el cambio del momento de la materia en Ω en un tiempo t , el segundo y tercero son las fuerzas superficiales y volumétricas respectivamente y el cuarto termino es el flujo de momento por la frontera de Ω .

Dado que Ω es fijo, usando el teorema de Gauss tenemos

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i dV = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i \right) dV - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) dV$$

que por la arbitrariedad de Ω implica

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)$$

expandiendo los términos y tomando en cuenta la ecuación de continuidad, ecuación (1.7), se tiene entonces que

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i$$

o lo que es lo mismo

$$\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} \quad (1.8)$$

1.8. Líneas de corriente, sendas y trazas

En muchas ocasiones es útil poder ver lo que sucede dentro de un flujo complicado, sobre todo cuando se trabaja con cuestiones de diseño y el objetivo es conseguir cierto tipo de flujo alrededor de un objeto, ya que, aunque la visualización del flujo no nos permita hacer predicciones cuantitativas, cualitativamente son una buena guía. En el laboratorio esto se logra de diversas maneras por ejemplo por medio de túneles de viento en el caso de gases.

1.8.1. Líneas de corriente

Las líneas de corriente son las líneas que cumplen que para un tiempo determinado t la tangente de la línea en cada punto \mathbf{x} es paralela al vector velocidad $\mathbf{u} = (u, v, w)$ en dicho punto. Esto quiere decir que dada una línea de corriente, su pendiente $\frac{dy}{dx}$ en el plano xy debe ser igual a $\frac{v}{u}$. Esto es, la ecuación de la línea de corriente en el plano xy es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}.$$

Análogamente, en los planos xz y yz las ecuaciones de las pendientes son

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{u}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{w}{v}$$

respectivamente.

Estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

de donde se tiene

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1.9)$$

1.8.2. Sendas

Una senda es el camino trazado en el flujo por una partícula específica a lo largo del tiempo. Dado que una partícula se mueve a la misma velocidad que el fluido en su vecindad, las sendas deben satisfacer la ecuación

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

1.8.3. Trazas

Si se inyecta continuamente desde un punto fijo un marcador, que no tenga efectos sobre el flujo, en el fluido y se observa el camino que traza el marcador entonces obtenemos las trazas.

La ecuación de las trazas es la misma que la ecuación de las sendas (1.10) sujeta a las condiciones iniciales $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ cuando $t = \tau$. Entonces conforme τ toma todos los posibles valores en $-\infty \leq \tau \leq \infty$, se obtienen todas las partículas en la traza. Dado el problema de valor inicial, entonces se tiene

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t, \tau) \quad (1.11)$$

Un hecho importante que se debe notar es la dependencia de las ecuaciones (1.9), (1.10), (1.11) en el tiempo. Esto implica que para el caso de flujos estacionarios, esto es, los flujos para los cuales las variables que lo caracterizan no dependen del tiempo, las líneas de corriente, las sendas y las trazas coinciden.

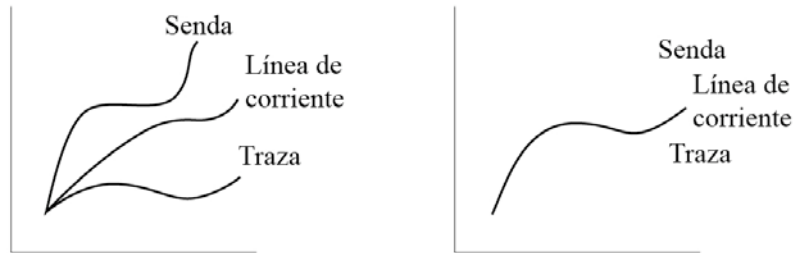


Figura 1.6: Esquema conceptual de las líneas de corriente, las sendas y las trazas para el caso no estacionario y el caso estacionario

1.9. Circulación y vorticidad

Dado el campo de velocidades de un fluido $\mathbf{u} = (u, v, w)$, a su rotacional

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u} = (\partial_y w - \partial_z v, \partial_z u - \partial_x w, \partial_x v - \partial_y u) \quad (1.12)$$

se le llama vorticidad de \mathbf{u}

Si se toma un contorno cerrado dentro de un flujo entonces la circulación sobre este se define como la integral alrededor del contorno de la componente tangencial a este del vector de velocidad. Por lo tanto, en términos de ecuaciones, la circulación Γ es

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.13)$$

La vorticidad y la circulación se pueden relacionar por medio de la aplicación del teorema de Stokes a (1.13). Haciendo eso tenemos

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \int_A \xi \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (1.14)$$

Con esta ecuación se puede ver que para contornos arbitrarios que encierren un área A , si $\xi = 0$ entonces $\Gamma = 0$ y viceversa. A los flujo para los cuales $\xi = 0$ se les llama irrotacionales, a los que no cumplen esto se les llama rotacionales.

Comentario Bibliográfico

Para el lector que quiera estudiar más a fondo los temas de esta sección se le recomienda ver: [And07], [Bat02], [Curr93], [Kar80] y [Lamb75]

Capítulo 2

Flujo potencial

En este capítulo veremos la definición de flujo potencial y deduciremos las ecuaciones que lo gobiernan.

2.1. Flujo bidimensional

El movimiento bidimensional se caracteriza por el hecho de que las líneas de corriente son todas paralelas a un plano fijo y que la velocidad en puntos correspondientes de todos los planos paralelos a dicho plano fijo tiene la misma magnitud y sentido; esto implica que el patrón del flujo y sus distintas propiedades son independientes de la distancia a lo largo del eje determinado por la normal al plano fijo.

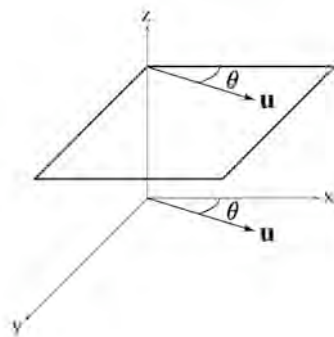


Figura 2.1: Movimiento bidimensional

Si a este eje lo denotamos por Z entonces tenemos

1. $\frac{\partial}{\partial z}(\text{cualquier cosa}) = 0$
2. $\mathbf{ds} = (dx, dy, dz)$
3. $\mathbf{u} = (u, v, 0)$
4. $u = u(x, y)$
5. $v = v(x, y)$

Y por lo tanto, considerando las ecuaciones de las líneas de corriente (1.9) tenemos que

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)} = \frac{dz}{0}$$

de donde inmediatamente tenemos que $dz = 0$ o lo que es lo mismo $z = \text{constante}$. Esto implica que el movimiento en todos los planos normales a Z será idéntico.

2.2. Fluidos ideales y flujos potenciales

Existen muchas clasificaciones diferentes para los fluidos que dependen de que estos cumplan o no ciertas características, una de estas clasificaciones depende de la compresibilidad. Cuando se supone que un fluido es incompresible, entonces se dice que es un fluido ideal.

El hecho de que un fluido no sea compresible implica, dada la ecuación (1.7), que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.1}$$

ya que su densidad es constante a lo largo del tiempo.

2.2.1. Función de corriente

Consideremos un flujo bidimensional estacionario incompresible, entonces la ecuación (2.1) implica que $\partial_x u = -\partial_y v$, y por lo tanto existe una función escalar $\bar{\psi}(x, y)$ única, salvo una constante, tal que

$$u = \partial_y \bar{\psi}, \quad v = -\partial_x \bar{\psi} \quad (2.2)$$

Por otro lado, por la ecuación (1.9), tenemos que la ecuación diferencial para las líneas de corriente está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (2.3)$$

y si u y v son funciones conocidas de x y y entonces esta ecuación se puede integrar para obtener la ecuación algebraica de la línea de corriente

$$\psi(x, y) = c$$

donde c es una constante que al variarla nos da las diferentes líneas de corriente. A ψ se le conoce como la función de corriente.

Veamos que las funciones $\bar{\psi}$ y ψ son la misma. La variación total de la función $\bar{\psi}$ esta dada por

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

que dadas las ecuaciones (2.2) es igual a

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt} = -v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt}$$

y entonces esta ecuación para $\bar{\psi} = \text{constante}$ es

$$0 = -v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt}$$

o lo que es lo mismo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\bar{\psi}} = \frac{v}{u}$$

donde el subíndice significa que esta expresión es válida para $\psi = \text{constante}$. Pero como ya vimos en §1.8.1 y en la ecuación (2.3) esta es precisamente la ecuación de las líneas de corriente en el plano xy .

2.2.2. Potencial de velocidad

Sabemos que la vorticidad de un flujo está dada por

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u}$$

si consideramos un fluido ideal que da lugar a un flujo irrotacional entonces dado que su vorticidad debe ser cero, el campo de velocidades debe cumplir

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \tag{2.4}$$

donde ϕ es una función escalar a la que se le conoce como *potencial de velocidad*. Dada la última igualdad, las componentes del campo de velocidad están dadas por

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

A los flujos irrotacionales de fluidos ideales se les conoce como flujo potencial, debido a la existencia del potencial de velocidades.

Comparando las expresiones que tenemos para las componentes u y v del campo de velocidades en términos de la función de corriente y del potencial de velocidades encontramos que

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.5}$$

de donde tenemos que las componentes del campo de velocidad satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

2.2.3. Flujo potencial, invícido y estacionario bidimensional

Dado que $\sigma = \lambda \text{tr}(\vec{\mathbf{E}})\vec{\mathbf{I}} + 2\mu\vec{\mathbf{E}}$, ver ecuación (1.6), tenemos que para un flujo invícido, el cual se define como aquel que no ejerce esfuerzos cortantes, σ es únicamente

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\vec{\mathbf{E}})\vec{\mathbf{I}}$$

ya que los términos en $2\mu\vec{\mathbf{E}}$ corresponden al tensor deviatorico, ver ecuación (1.4). Por lo tanto, tomando en cuenta la ecuación (1.3), la fuerza ejercida por el fluido sobre un cuerpo estará dada por

$$\mathbf{f}_s = P = \int_{\delta A} \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, t) dS = \int_{\delta A} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

y ya que en un flujo estacionario $\sigma = -p\vec{\mathbf{I}}$ entonces se tiene que la fuerza de superficie sobre un cuerpo ejercida por un fluido está dada por

$$\mathcal{F} = \int_{\delta A} -p\vec{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Como ya vimos la ecuación de continuidad para un flujo incompresible implica que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Además, al considerar un flujo irrotacional nos lleva a que el campo de velocidades tiene la forma

$$\mathbf{u} = \nabla\phi$$

Por lo tanto, para un flujo que cumple ser tanto incompresible como irrotacional, combinando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que debe cumplir

$$\nabla \cdot \nabla\phi = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.6)$$

O sea, ϕ debe satisfacer la ecuación de Laplace.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.2) tenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

entonces, como se puede ver ψ satisface también la ecuación de continuidad.

Dado que el flujo es irrotacional, sabemos que se debe satisfacer

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

donde de nuevo tomando en cuenta las ecuaciones (2.2) podemos sustituir y obtener

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

por lo tanto ψ también satisface la ecuación de Laplace.

Como podemos ver, ambas funciones ϕ y ψ , satisfacen la ecuación de Laplace; además por las ecuaciones (2.5) ambas funciones también satisfacen las condiciones de Cauchy-Rieman para funciones analíticas de variable compleja, es por eso que es natural pensar en buscar soluciones para los flujos potenciales en términos de funciones analíticas de variable compleja donde ϕ es la parte real y ψ es la parte imaginaria.

2.3. Ecuación de Bernoulli

Como ya vimos, en el caso de un flujo potencial, invícido y estacionario bidimensional en ausencia de fuerzas volumétricas tenemos que $\sigma = -p\vec{\mathbf{I}}$. Por lo tanto la ecuación (1.8) para la conservación de momento angular tiene la forma

$$\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = \nabla \cdot (-p\vec{\mathbf{I}})$$

Considerando la componente x de esta ecuación, tenemos que

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Pero ya que el flujo es estacionario entonces

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

multiplicando por dx y tomando en cuenta las ecuaciones (1.9) para las líneas de corriente, tenemos que

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

o lo que es lo mismo

$$u \, du = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\frac{1}{2} d(u^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

y análogamente tenemos que

$$\frac{1}{2} d(v^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}d(u^2 + v^2) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right)$$

y dado que $u^2 + v^2 = |\mathbf{u}|^2$

$$\frac{1}{2}d(|\mathbf{u}|^2) = -\frac{dp}{\rho}$$

Tomando en cuenta la incompresibilidad del fluido, esta última ecuación la podemos integrar entre dos puntos en la misma línea de corriente y obtenemos

$$p_2 - p_1 = -\rho \left(\frac{|\mathbf{u}|_2^2}{2} - \frac{|\mathbf{u}|_1^2}{2} \right)$$

lo que implica

$$p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 = \text{constante sobre una línea de corriente}$$

En general, para flujo rotacional, esta constante cambiará de una línea de corriente a otra. Sin embargo, si el flujo es irrotacional, dado que la ecuación de momento angular tiene la forma $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p$ en este caso y dado que $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(1/2|\mathbf{u}|^2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ con $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, entonces tenemos que $\nabla(p + 1/2\rho|\mathbf{u}|^2) = 0$ en todos lados. Por lo tanto la ecuación de Bernoulli se satisface entre cualesquiera dos puntos en el flujo, no necesariamente en la misma línea de corriente. Entonces para un flujo irrotacional

$$p + \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 = \text{constante a lo largo de todo el flujo} \quad (2.7)$$

Comentario Bibliográfico

Para el lector que quiera estudiar más a fondo los temas de esta sección se le recomienda ver: [And07], [Bat02], [Curr93], [Kar80], [Lamb75] y [Rob65]

Capítulo 3

Aplicación de la variable compleja

En este capítulo recordaremos un poco de variable compleja y de cómo ésta puede ser utilizada para resolver problemas de flujo potencial en dos dimensiones.

3.1. Mapeos y funciones analíticas

Sabemos que una función compleja $f(z) = u + iv$ puede ser vista como un mapeo del plano xy al plano uv . Además esta función se dice que es analítica en una región D si para todo punto z_0 dentro de esta región $f'(z_0)$ existe.

Para que la función $f(z) = u + iv$ sea diferenciable en un punto z_0 , ésta debe satisfacer que las primeras derivadas parciales de u y v existan, sean continuas en z_0 y además, estas derivadas deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Por consiguiente, para que una función $f(z)$ sea diferenciable en una región

D , esta debe ser tal que las primeras derivadas parciales de u y v existan, sean continuas y estas derivadas satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todos los puntos dentro de la región D .

3.2. Funciones armónicas

La ecuación bidimensional de Laplace

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

aparece en muchas aplicaciones de la física. Una de las aplicaciones más importantes de las funciones analíticas es su uso para obtener soluciones a esta ecuación, ya que si en una región D una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica entonces cada una de las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son armónicas en D , lo cual es consecuencia inmediata de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y de la continuidad de las derivadas parciales de orden más alto de las componentes u y v .

3.3. Mapeo conforme

Se dice que una función f analítica en una región D que contiene a z_0 y que cumple que $f'(z_0) \neq 0$ es un mapeo conforme en z_0 ; análogamente se dice que una función f es un mapeo conforme en una región D si cumple lo anterior para todos los puntos dentro de D .

Una de las propiedades más importantes de los mapeos generados por funciones analíticas es que la ecuación de Laplace persiste a través de estos. Esto significa que si $\phi(x, y)$ es armónica en cierta región D del plano xy y si $f(z) = w$ es el mapeo de una función analítica de la región D a la región D' en el plano uv , entonces ϕ es transformada en una función que también es armónica en D' .

Para demostrar esto, supongamos que $\phi(x, y)$ es armónica, y que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ inyectiva, analítica con derivada diferente de 0 para todos los puntos y que mapea el dominio D en el plano xy en el dominio D'

en el dominio uv .

Dado que el mapeo es inyectivo entonces tiene inverso $z = f^{-1}(w)$ y se tiene que

$$\frac{df^{-1}}{dw}(w) = \frac{1}{\frac{df}{dz}(z)}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}$$

Si $\phi(x, y)$ es una función definida en D , entonces el dominio D' “hereda” ϕ por medio del mapeo uno a uno; esto es, la función $\phi'(u, v)$ definida por

$$\phi'(u, v) := \phi(x(u, v), y(u, v))$$

o lo que es lo mismo

$$\phi'(w) := \phi(f^{-1}(w))$$

concuenda con $\phi(x, y)$ en los puntos correspondientes. Lo que queremos ver es que si ϕ es armónica en D , entonces ϕ' lo es en D' .

Consideremos un punto w_0 en D' , digamos $w_0 = f(z_0)$. Dado que D es abierto, existe un disco abierto \mathcal{N} centrado en z_0 completamente contenido en D . Dado que $f^{-1}(w)$ es analítica y por lo tanto continua, existe una vecindad \mathcal{N}' lo suficientemente chica como para que su imagen bajo f^{-1} este completamente dentro de \mathcal{N} . Dado que ϕ es armónica entonces la podemos tomar como la parte real de una función analítica $g(z)$ en \mathcal{N} . Esto implica que ϕ' es la parte real de la función $g(f^{-1}(w))$ en \mathcal{N}' , y dado que la composición de funciones analíticas es analítica, ϕ' debe ser armónica en la vecindad \mathcal{N}' de w_0 . Ya que w_0 es un punto arbitrario en D' , la función ϕ' debe ser analítica en todos lados en D' .

Como ya vimos, en el caso del flujo bidimensional potencial la ecuación de Laplace se satisface por ambas funciones ϕ y ψ , además de que ambas satisfacen también las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es por eso que, dado lo

que hemos recordado de las ecuaciones analíticas y las funciones armónicas, es natural asociarlas con un potencial complejo de la forma

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

A la derivada de $F(z)$ se le conoce como velocidad compleja

$$F'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = u - iv = |\mathbf{u}|e^{-i\theta}$$

El conjugado de esta derivada $\overline{F'(z)} = u + iv$ es el vector de velocidad en dos dimensiones.

Ahora bien, cuando queremos resolver un problema de flujo potencial bidimensional lo que tenemos es la forma del flujo en el plano físico z , y nuestro objetivo es encontrar las funciones ϕ y ψ para conocer el potencial complejo $F(z)$ a partir del cual vamos a conocer las propiedades del flujo. Los flujos en el plano z pueden tener fronteras complicadas, es por eso que el uso de la variable compleja y el mapeo conforme es útil, por medio de estos podemos transformar el problema del plano z en otro problema en un plano donde la frontera tenga una forma más sencilla y donde se va a preservar la ecuación de Laplace, y así podremos resolver el problema.

3.4. Paradoja de D'Alembert

En 1744 Jean le Rond D'Alembert publicó en un artículo titulado "Traité de l'équilibre et des mouvements des fluides pour servir de suite au traité de dynamique" un resultado teórico que contradecía toda evidencia experimental. En este artículo D'Alembert demostró que considerando el movimiento con velocidad constante de un cuerpo dentro de un flujo potencial invicido el arrastre sobre este cuerpo es nulo. Después de varios intentos, en 1768, D'Alembert publicó un artículo titulado "Opuscules Mathématiques" donde declaró sobre este problema: "Me parece que la teoría, aún desarrollada con todo el rigor posible, lleva al resultado de la resistencia igual a cero, una paradoja singular que dejó a futuras generaciones de geómetras para que resuelvan".

Consideremos un cuerpo \mathcal{C} con frontera Γ dentro de un flujo potencial invícido con velocidad constante respecto a la velocidad del fluido. Si $dz = dx + idy$ representa un desplazamiento infinitesimal sobre la frontera Γ , entonces, dada la ecuación (1.3) tenemos que

$$\mathcal{F} = \int_{\Gamma} -p\hat{\mathbf{n}}dS = - \int_{\Gamma} pdy + i \int_{\Gamma} pdx = i \int_{\Gamma} p(dx + idy)$$

y como ya sabemos, de la ecuación de Bernoulli (2.7),

$$p = \frac{-\rho(u^2 + v^2)}{2}$$

y por lo tanto

$$\mathcal{F} = \frac{-i\rho}{2} \int_{\Gamma} (u^2 + v^2)dz$$

Por otro lado, $F'^2 = (u - iv)^2 = u^2 - v^2 - 2iuv$, y dado que \mathbf{u} es paralelo a la frontera, tenemos que $udy = vdx$. De donde

$$F'^2 = (u^2 - v^2 - 2iuv)(dx + idy) = (u^2 + v^2)(dx - idy)$$

y dado que $(u^2 + v^2)$ es real, $\overline{F'^2} = (u^2 + v^2)dz$

A este resultado se le conoce como el teorema de Blasius. Ahora bien, dadas las hipótesis con las que estamos trabajando F' , la velocidad compleja, es una función analítica fuera del cuerpo \mathcal{C} , y por lo tanto tiene una expansión en series de Laurent de la siguiente forma

$$F' = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

fuera de cualquier disco que contenga a \mathcal{C} . Si $\mathcal{U} = U - iV$ es la velocidad en el infinito entonces $a_0 = U - iV$. Por el teorema de Cauchy se tiene que

$$\int_{\Gamma} F' dz = 2\pi a_1 i$$

pero tenemos que por otro lado, usando la definición de circulación de la ecuación (1.13) y el hecho de que \mathbf{u} es paralelo a Γ ,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F' dz &= \int_{\Gamma} (u - iv)(dx + idy) = \int_{\Gamma} udx + vdy + i(udy - vdx) \\ &= \int_{\Gamma} udx + vdy = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma_C\end{aligned}$$

por lo tanto

$$a_1 = \frac{\Gamma_C}{2\pi i}$$

Elevando al cuadrado la expansión de Laurent para F'

$$F'^2 = a_0^2 + \frac{2a_0a_1}{z} + \frac{2a_0a_2 + a_1^2}{z^2} + \dots \quad (3.1)$$

y utilizando los teoremas de Blasius y de Cauchy tenemos que

$$\mathcal{F} = -\frac{i\rho}{2} \int_{\Gamma} \overline{F'^2} dz = -\frac{i\rho}{2} (2\pi i \cdot 2a_0a_1) = \rho\Gamma_C(V - iU)$$

Con esto queda demostrado el siguiente teorema

Teorema 1. *Kutta-Joukowski*

Considerando un flujo potencial incompresible con velocidad $\mathcal{U} = (U, V)$ en infinito, exterior a un cuerpo \mathcal{C} . Entonces la fuerza ejercida por el flujo sobre el cuerpo está dada por

$$\mathcal{F} = -\rho\Gamma_C|\mathcal{U}|\bar{\mathbf{n}}$$

donde Γ_C es la circulación alrededor de \mathcal{C} y $\bar{\mathbf{n}}$ es el vector unitario ortogonal a \mathcal{U} .

Dado este teorema entonces podemos ver que la fuerza ejercida por el flujo sobre el cuerpo es normal a la dirección del flujo y es proporcional a la circulación en torno al cuerpo, por lo tanto no existe fuerza de arrastre sobre el cuerpo. Además, si la circulación es 0 la fuerza neta sobre el cuerpo es nula. Y así, tenemos la paradoja de D'Alembert.

Comentario Bibliográfico

Para el lector que quiera estudiar más a fondo los temas de esta sección se le recomienda ver: [CW03], [MC93], [MT62] y Sadd05

Capítulo 4

Flujos con líneas de corriente libres en obstáculos poligonales

Se creía que la paradoja de D'Alembert era producto de considerar nula la viscosidad del fluido, y eso llevo a formulaciones alternas del problema donde la viscosidad sí era considerada. Pero a mediados del siglo XIX el planteamiento del problema desde el punto de vista de los fluidos ideales fue retomado. Kirchoff y Rayleigh, ver [Gur65], se basaron en la teoría de líneas de corriente libres de Helmholtz para proponer un nuevo modelo donde el flujo alrededor de los obstáculos se separa completamente de estos en algún punto y eso genera una estela detrás del objeto donde el flujo se considera con presión constante. La estela en el fluido está entonces delimitada por lo que se conoce como líneas de corriente libres que son las líneas donde el fluido en movimiento hace contacto con el fluido con presión constante de las estelas. Si no consideramos los efectos de la gravedad, dado que la presión en la estela es constante y por lo tanto también lo es sobre las líneas de corriente libres, entonces, por la ecuación de Bernoulli (2.7), se tiene que la velocidad del flujo en las líneas de corriente libres debe ser igual a la velocidad del flujo en el infinito, la cual vamos a llamar v_0 y a su magnitud la vamos a denotar por v_0 . El problema es entonces encontrar un flujo que satisfaga

1. La velocidad en dirección normal del fluido sobre la frontera del obstáculo es cero.
2. La presión sobre las líneas de corriente deber ser constante, o lo que es lo

mismo, la magnitud de la velocidad del fluido sobre las líneas de corriente libres es igual a la magnitud de la velocidad del fluido en el infinito.

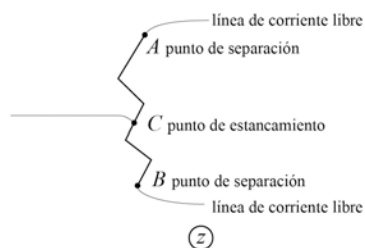


Figura 4.1: Esquema del plano físico

Lo que uno quiere buscar es la relación entre el plano físico z y el plano F del potencial complejo ya que conociendo $F(z) = \phi + i\psi$ uno puede calcular los parámetros físicos del flujo. Dado que las líneas de corriente cumplen que $\psi = cte$ sobre ellas, el potencial complejo está determinado salvo una constante $C = C_1 + iC_2$. A C_1 la podemos elegir de tal forma que $\phi = 0$ para algún punto de estancamiento sobre el obstáculo, y a C_2 la podemos elegir de tal forma que la línea de corriente que se bifurca en dicho punto de estancamiento corresponda a $\psi = 0$. Lo que se obtiene de esta forma en el plano F es un corte en el semieje real positivo que va desde el origen hasta el infinito donde el origen corresponde al punto de estancamiento y si nos movemos sobre el semieje real positivo con un ángulo 0 recorreremos la línea de corriente sobre una de sus bifurcaciones mientras que si recorremos el semieje real positivo con un ángulo de 2π recorreremos la línea de corriente sobre su otra bifurcación.

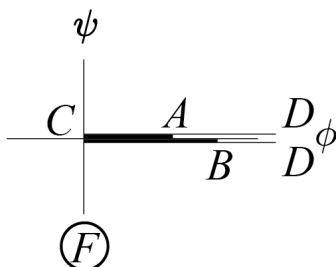


Figura 4.2: Esquema del potencial complejo

Definir la relación entre z y F unicamente a partir de esta información no es fácil, lo que se hace es mapear ambas regiones a un mismo plano t por medio del cuál los relacionamos. Generalmente la región de cambio en el plano t corresponde al eje real ya que a la región en F , con el corte en el semieje real positivo, la podemos abrir por medio de la transformación $t = F^{1/2}$. En el caso en que tenemos un solo punto de estancamiento, o por medio del mapeo de Schwarz-Christoffel, ver [SS03] y [DT02], si se tienen más de un punto de estancamiento.

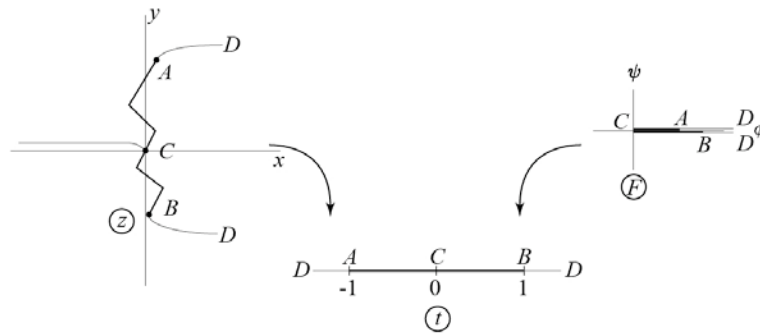
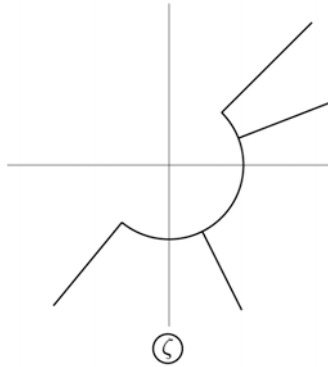


Figura 4.3: Uso del plano t como plano paramétrico

El método hodográfico propuesto por Kirchoff aprovecha el hecho de que se conocen la dirección de la velocidad del flujo sobre el obstáculo y su magnitud en las líneas de corriente libres para calcular el mapeo conforme del plano z al plano ζ definido por

$$\zeta = v_0 \frac{dz}{dF} = \frac{v_0}{v} e^{i\theta}$$

llamado mapeo hodográfico. En ζ lo que se obtiene es una región delimitada por arcos de círculo unitario correspondientes a las líneas de corriente libres ya que sobre ellas la magnitud de la velocidad es constante, y por rayos que pasan por el origen correspondientes a las paredes del obstáculo poligonal donde el argumento de velocidad es constante. La región en ζ es mapeada consecutivamente a otras regiones hasta llegar al eje real en el plano t y de esta manera se relacionan z y F

Figura 4.4: Esquema del plano ζ

NOTA: Para calcular las integrales que aparecen en los siguientes problemas lo hicimos de dos maneras distintas, con el método del trapecio programado en Matlab, y con un programa que lo hace con el método de Romberg de quinto orden.

4.1. Placa ortogonal al flujo, método de Kirchoff

El primer problema que vamos a resolver utilizando este método es el de un flujo infinito que pasa una placa ortogonal a la dirección del flujo. Para esto consideremos el siguiente diagrama

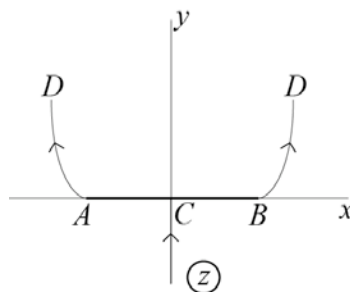


Figura 4.5: Placa ortogonal al flujo en el plano físico

Como ya vimos el potencial complejo F lo podemos determinar, debido a la constante $C = C_1 + iC_2$, de tal forma que $\phi = 0$ en el punto de estancamiento C que cumpla que las líneas de corriente CBD y CAD correspondan a $\psi = 0$

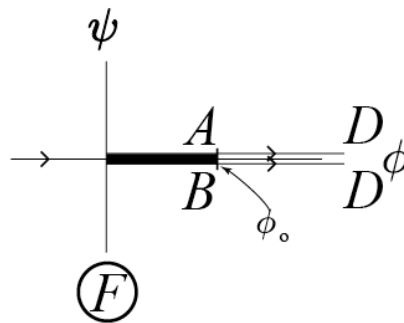


Figura 4.6: Región de cambio en el plano F

Los puntos A y B van a dar al mismo valor ϕ_0 debido a la simetría del flujo. Considerando entonces la función $\zeta = \frac{v_0 dz}{dF}$ tenemos que ésta la podemos escribir también como

$$\zeta = \frac{v_0 dz}{dF} = \frac{v_0 e^{i\theta}}{v} \quad (4.1)$$

donde θ es el ángulo de la velocidad del flujo y v es la magnitud. En C , el punto de estancamiento, $v = 0$; en los puntos A y B tenemos que $v = v_0$ y el ángulo de la velocidad en los segmentos CA , y CB es π y 0 respectivamente. Sobre las líneas de corriente libres AD y BD , la velocidad es v_0 y el ángulo varía de π a $\frac{\pi}{2}$ y de 0 a $\frac{\pi}{2}$ respectivamente, por lo tanto el flujo en el plano ζ tiene la forma

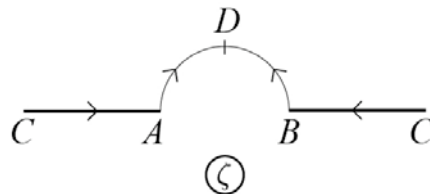


Figura 4.7: Región de cambio en el plano ζ

Entonces, para encontrar la solución del flujo, debemos encontrar un mapeo entre la región de cambio en ζ y la región en F . Lo primero que podemos hacer es mapear la región de cambio en ζ en el primer cuadrante del plano complejo por medio de la función

$$\tau = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

las partes del eje real en ζ que corresponden a la placa, AC y BC son mapeadas al eje real positivo en τ con $\tau(B) = 0$, $\tau(C) = 1$ y $\tau(A) = \infty$.

El círculo unitario en ζ , que corresponde a las líneas de corriente libres, satisface que $|\zeta| = 1$ y $\arg(\zeta) \in [\pi, 0]$, por lo tanto en el círculo unitario $\zeta = e^{i\theta}$, esto implica que sobre este

$$\tau = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{i \sin \theta}{1 + \cos \theta} = i \tan \frac{\theta}{2}$$

por lo tanto el semicírculo superior unitario en ζ mapea en el eje imaginario en τ , y tenemos que

$$\tau(D) = \frac{i - 1}{i + 1} = i$$

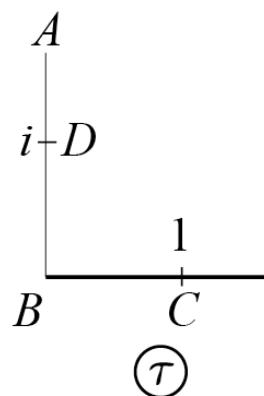


Figura 4.8: Región de cambio en el plano τ

Esta región de cambio es fácil de mandar al eje real por medio de la función

$$\tau_1 = \tau^2$$

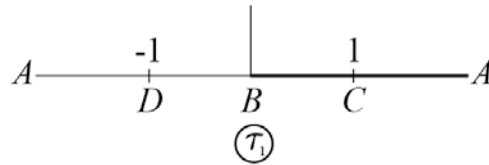


Figura 4.9: Región de cambio en el plano τ_1

Por otro lado tenemos que la región en F la podemos abrir con

$$t = \left(\frac{F}{\phi_0} \right)^{1/2} \quad (4.2)$$

donde la división por ϕ_0 es para que los puntos A y B en F correspondan con los puntos 1 y -1 en t . Por último debemos encontrar un mapeo entre τ_1 y t que relacione de la siguiente manera los puntos relevantes

$$D_t = \infty \longrightarrow D_{\tau_1} = -1$$

$$B_t = -1 \longrightarrow B_{\tau_1} = 0$$

$$C_t = 0 \longrightarrow C_{\tau_1} = 1$$

$$A_t = 1 \longrightarrow A_{\tau_1} = \infty$$

esto lo podemos lograr con

$$\tau_1 = \tau^2 = \frac{1+t}{1-t} \quad (4.3)$$

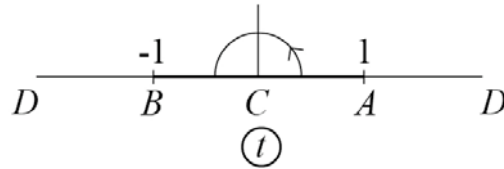


Figura 4.10: Región de cambio en el plano t

Dadas las ecuaciones (4.3) y (4.2), tenemos que

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = \frac{1 + \left(\frac{F}{\phi_0}\right)^{1/2}}{1 - \left(\frac{F}{\phi_0}\right)^{1/2}}$$

Resolviendo tenemos que

$$\begin{aligned} \zeta &= -\left(\frac{\phi_0}{F}\right)^{1/2} \pm \left(\frac{\phi_0}{F} - 1\right)^{1/2} \\ &= -\left|\frac{\phi_0}{F}\right|^{1/2} e^{(i/2)\arg(\phi_0/F)} \pm \left|\frac{\phi_0}{F} - 1\right|^{1/2} e^{(i/2)\arg((\phi_0 - F)/F)} \end{aligned}$$

Analicemos las ecuaciones que tenemos

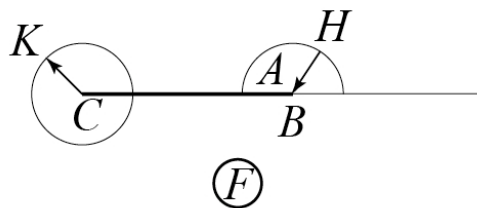


Figura 4.11: Saltos en el plano F

1.- En una vecindad de A , $(\phi_0 - F)$ lo podemos ver como un vector localizado en H y con punta en A . En AC , $(\phi_0 - F)$ es real y positivo. Conforme H pasa en sentido positivo en un círculo infinitesimal alrededor de A , el argumento de

$(\phi_0 - F)$ pasa de 0 a $-\pi$. Por otro lado, en AD, $|\phi_0 - F| = F - \phi_0$. Por lo tanto, considerando lo anterior y la relación que queremos entre los puntos en el plano F y los puntos en el plano ζ tenemos que

$$\zeta_{AC} = -\left(\frac{\phi_0}{F}\right)^{1/2} - \left|\frac{\phi_0}{F} - 1\right|^{1/2}$$

y

$$\zeta_{AD} = -\left(\frac{\phi_0}{F}\right)^{1/2} + i\left|\frac{\phi_0}{F} - 1\right|^{1/2}$$

2.- Sobre AC $\arg(F) = 0$; $|F| = F$; $\arg(\phi_0 - F) = 0$ y $|\phi_0 - F| = \phi_0 - F$, por lo tanto aquí

$$\zeta = -\left(\frac{\phi_0}{F}\right)^{1/2} - \left(\frac{\phi_0}{F} - 1\right)^{1/2}$$

3.- Sobre BC tenemos que

$$\zeta = \left(\frac{\phi_0}{F}\right)^{1/2} + \left(\frac{\phi_0}{F} - 1\right)^{1/2}$$

ya que al pasar por un círculo infinitesimal alrededor de C el ángulo del vector con origen en C y punta en K aumenta 2π

4.- Haciendo un análisis análogo al del punto 1, tenemos que en BD

$$\zeta = \left(\frac{\phi_0}{F}\right)^{1/2} + i\left|\frac{\phi_0}{F} - 1\right|^{1/2}$$

Dado que $t = (F/\phi_0)^{(1/2)}$ podemos ver que sobre AC y BC

$$|\zeta| = \frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)^{(1/2)} \quad (4.4)$$

con esto podríamos calcular los parámetros físicos del flujo, por que dada la ecuación (4.4) conocemos la velocidad del flujo en términos del parámetro t , pero antes de continuar con estos cálculos veamos una variación del método

de solución introducido por Zhukovskii que es de gran utilidad para analizar este tipo de flujos cuando el obstáculo esta formado por paredes rectas.

4.2. Placa ortogonal al flujo, método de Zhukovskii

El método de Zhukovskii, ver [Gur65] y [Lamb75], sirve para analizar flujos donde la región ocupada por el fluido es simplemente conexa y el objeto dentro del fluido tiene frontera formada por líneas rectas. Zhukovskii aprovechó el hecho de que el logaritmo mapea los arcos de círculo centrados en el origen en rectas verticales y las rectas que pasan por el origen en rectas horizontales, para mapear la región de flujo en el plano ζ en un polígono en la región $\omega = \log \zeta$ ya que si la frontera del obstáculo está formada por rectas, entonces sobre estas el argumento de la velocidad es constante y en el plano ζ dan lugar a rectas que pasan por el origen, y las líneas de corriente libres como ya vimos en este plano forman parte del círculo unitario. Una vez teniendo el polígono en el plano ω entonces es fácil mandarlo al eje real en el plano t por medio del mapeo de Schwarz-Christoffel.

Para este método de solución consideraremos la placa en el plano z de manera vertical sobre el eje imaginario, como podemos ver en la siguiente figura, en la cuál además se ilustran todos los mapeos que utilizaremos

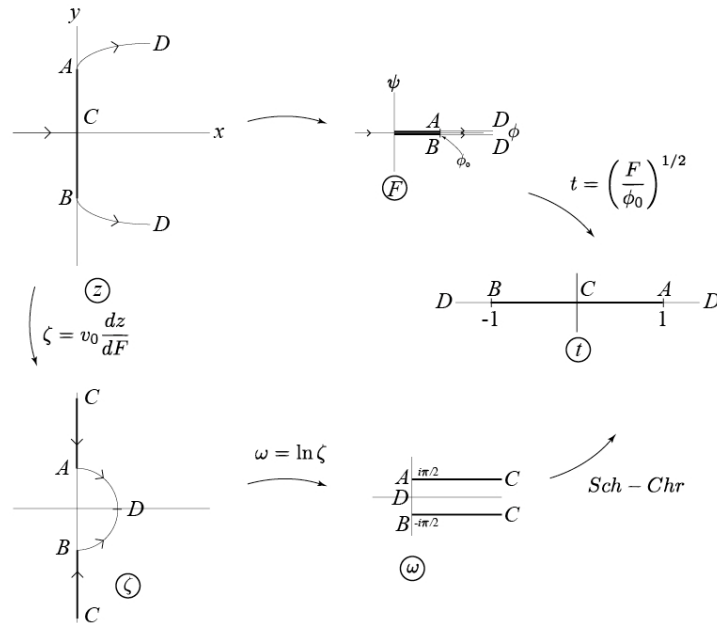


Figura 4.12: Planos de los mapeos para el problema de la placa ortogonal al flujo

anteriormente la consideramos paralela al eje real ya que eso facilitó el mapeo entre la región de cambio en el plano ζ y la región en el plano τ . Pero considerarla paralela al eje imaginario en esta ocasión nos llevará a algunas simplificaciones en los cálculos y sobre todo hará más fácil la comparación de los resultados con los resultados que obtendremos en los problemas que resolveremos posteriormente.

De esa forma, ya que el ángulo de la velocidad en CA y CB es $\pi/2$ y $-\pi/2$ respectivamente, la región de cambio en el plano ζ tiene forma ilustrada en la figura (4.12).

Introduciendo el mapeo debido a Zhukovskii

$$\omega = \log \zeta = \log \left| \frac{v_0}{v} \right| + i\theta$$

podríamos obtener F integrando

$$\zeta = e^{\omega(t)} \Rightarrow z = \frac{1}{v_0} \int \zeta dF = \frac{1}{v_0} \int e^{\omega(t)} \frac{dF}{dt} dt$$

48 4.2. PLACA ORTOGONAL AL FLUJO, MÉTODO DE ZHUKOVSKII

Pero esto no es necesario. Es suficiente con relacionar la región en el plano ω con la región en el plano F por medio del plano t , y de esta manera las características físicas del flujo las podemos calcular utilizando t como parámetro.

Veamos como queda la región de cambio en ω . En las líneas de corriente libres BD y AD, $v = v_0$, por lo tanto, $\log\left(\frac{v_0}{v}\right) = 0$ y θ varía de $-\pi/2$ a 0 sobre BD y de $\pi/2$ a 0 sobre AD. En CA y CB, $\theta = \pi/2$ y $\theta = -\pi/2$ respectivamente, mientras que en ambos $\log\left|\frac{v_0}{v}\right|$ varía de 0 a ∞ .

La región en el plano ω la podemos mandar al eje real en el plano t por medio del mapeo de Schwarz-Christoffel. Viendo a esta región como un triángulo con vértices A, B y C y ángulos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ y π respectivamente. Entonces el mapeo entre ω y t está determinado por

$$\frac{d\omega}{dt} = M \frac{1}{(t^2 - 1)^{(1/2)}t}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{1}{t}$

$$\omega(u) = -M \int \frac{1}{(1 - u^2)^{(1/2)}du}$$

tomando $u = \sin \theta$

$$\omega(\theta) = -M \int \frac{\cos \theta}{(1 - \sin \theta)^{(1/2)}d\theta}$$

de donde

$$\omega(t) = -M \sin^{-1} \frac{1}{t} + N$$

que, dadas las condiciones $\omega(1) = i\pi/2$ y $\omega(-1) = -i\pi/2$, nos da

$$\omega(t) = i \sin^{-1} \frac{1}{t}$$

Usando que $\sin^{-1}(z) = -i \log[iz + (1 - z^2)^{(1/2)}]$, lo anterior lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}\omega(t) &= i \left[-i \log \left(i \frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{1/2} \right) \right] \\ &= \log \left(\frac{(t^2 - 1)^{1/2} + i}{t} \right)\end{aligned}$$

La parte que es importante para nuestros cálculos en el plano t es el segmento de recta real $-1 \leq t \leq 1$, ya que es la parte que corresponde a la placa y son los valores de t que utilizaremos como parámetro para calcular las propiedades físicas del flujo. Ya que en este segmento $|t| \geq 1$ entonces $(t^2 - 1) \leq 0$ y por lo tanto podemos sacar un factor i de la raíz

$$\omega(t) = \log \left(\frac{i(1-t^2)^{1/2} + i}{t} \right) = \log \left(i \underbrace{\frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t}}_{**} \right)$$

Si $0 \leq t \leq 1$ entonces $** \geq 0$ por lo tanto tenemos el logaritmo de un número puramente imaginario positivo; por otro lado, si $-1 \leq t \leq 0$ entonces $** \leq 0$ y por lo tanto tenemos el logaritmo de un número puramente imaginario negativo. La definición del logaritmo para números complejos implica que

$$\omega(t) = \begin{cases} \log \left(\frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) + i\frac{\pi}{2} & ; \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ \log \left(\frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{-t} \right) - i\frac{\pi}{2} & ; \text{ si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Dado que $\omega = \log \zeta = \log(v_0 dz/dF)$, haciendo e^ω tenemos

$$v_0 \frac{dz}{dF} = \begin{cases} i \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} = i \frac{-t}{(1-t^2)^{1/2} - 1} & ; \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ i \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{-t} = i \frac{-t}{(1-t^2)^{1/2} - 1} & ; \text{ si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Tenemos que $v_0 \frac{dz}{dF}$ es igual para todo el segmento de recta $-1 \leq t \leq 1$, entonces

$$\zeta = v_0 \frac{dz}{dF} = i \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} = i \frac{t}{1 - (1-t^2)^{1/2}} \quad (4.5)$$

50 4.2. PLACA ORTOGONAL AL FLUJO, MÉTODO DE ZHUKOVSKII

Como vemos, esta función para ζ en términos de t coincide en valor absoluto con la que ya habíamos obtenido en (4.4) con el método de Kirchoff.

Calculemos entonces los parámetros del flujo. De la ecuación (4.5) tenemos que

$$z = \int \frac{dz}{dF} dF = \int \frac{\zeta}{v_0} dF = \frac{i}{v_0} \int \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \frac{dF}{dt} dt$$

de (4.2) sabemos que $\frac{dF}{dt} = 2\phi_0 t$, por lo tanto

$$z = \frac{i}{v_0} \int \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} 2\phi_0 t dt$$

Para encontrar el largo de la placa, l , habría que integrar de -1 a 1 en el plano t , pero debido a la simetría del flujo podemos integrar de 0 a 1 . De esta forma

$$\frac{l}{2} = \frac{2i\phi_0}{v_0} \int_0^1 (1-t^2)^{1/2} + 1 dt \quad (4.6)$$

haciendo el cambio de variable $t = \sin \theta$ tenemos que

$$l = 4i \frac{\phi_0}{v_0} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$$

Para calcular la presión sobre la placa tenemos que por Bernoulli, ecuación (2.7),

$$\begin{aligned} p - p_0 &= \frac{\rho}{2}(v_0^2 - v^2) = \frac{\rho}{2}v_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) \\ &= \frac{\rho}{2}v_0^2 \left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right) \end{aligned}$$

donde p es la presión en la estela y p_0 es la presión del flujo en movimiento. Por lo tanto

$$P = \int_{-1}^1 (p - p_0) \frac{dz}{dF} \frac{dF}{dt} dt = 2 \int_0^1 \frac{\rho}{2}v_0^2 \left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right) \frac{\zeta}{v_0} 2\phi_0 t dt \quad (4.7)$$

podemos combinar las dos expresiones que tenemos para ζ , (4.5), para obtener

$$|\zeta|^2 = i \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \cdot i \frac{t}{1 - (1-t^2)^{1/2}} = \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{1 - (1-t^2)^{1/2}}$$

con esto

$$\begin{aligned} P &= 2\rho\phi_0v_0 \int_0^1 \left(1 - \frac{1 - (1-t^2)^{(1/2)}}{(1-t^2)^{(1/2)} + 1} \right) i((1-t^2)^{(1/2)} + 1) dt \\ &= 2i\rho\phi_0v_0 \int_0^1 2(1-t^2) dt = 4i\rho\phi_0v_0 \int_0^1 (1-t^2) dt = i\pi\rho v_0\phi_0 \end{aligned}$$

despejando ϕ_0 de (4.6)

$$P = \frac{1}{2}\rho v_0^2 l \frac{2\pi}{4 + \pi}$$

La ecuación con la cual se obtiene la fuerza de arrastre es $\mathfrak{F}_D = (1/2)\rho v^2 C_D L$, es por eso que escribimos P de esta forma ya que así es claro que el coeficiente de arrastre C_D para la placa ortogonal al flujo derivado de esta formulación es $\frac{2\pi}{4+\pi} \approx .8798$.

4.3. Método de Zhukovskii para una cuña

Considerando la figura (4.13), en la cuál se muestran todos los mapeos que utilizaremos para este problema, tenemos que las dos placas que forman la cuña son simétricas respecto al eje real y forman con este un ángulo α . Llamemos a los puntos de separación A y B, al punto de estancamiento C y al punto en el infinito hacia donde se mueve el flujo D.

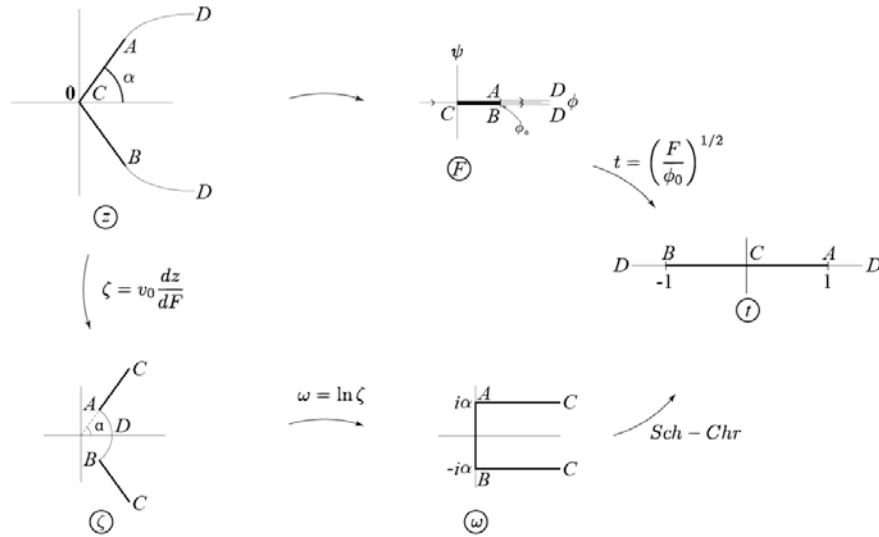


Figura 4.13: Planos de los mapeos para el problema de la cuña

El plano F es igual al del problema de la placa ortogónal. En el plano ζ ahora tendríamos que los segmentos de rayos correspondientes a la frontera del obstáculo forman un ángulo $\pm\alpha$ con el eje real. La región en ζ la mapeamos en el triángulo ABC en el plano ω , y este a su vez lo mapeamos en el eje real del plano t de la misma manera que en el caso de la placa ortogonal al flujo

En este caso las constantes M y N estarán determinadas por las condiciones $\omega(1) = i\alpha$ y $\omega(-1) = -i\alpha$

$$\Rightarrow \omega(t) = \frac{2\alpha}{\pi} \log \left(\frac{(t^2 - 1)^{1/2} + i}{t} \right)$$

Como en el caso anterior, en el plano t la parte correspondiente a la cuña, y que nos interesa para los cálculos, es tal que $|t| \leq 1$, por lo que

$$\omega(t) = \frac{2\alpha}{\pi} \log \left(i \underbrace{\frac{(1 - t^2)^{1/2} + 1}{t}}_{**} \right)$$

Tenemos el logaritmo de un número imaginario, que satisface que entre AC y BC , $** \geq 0$ y $** \leq 0$ respectivamente, por lo tanto

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\pi} \log \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t} \right) + i\alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \log \left(\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right) + i\alpha ; \text{ si } t \in \text{AC} \\ \frac{2\alpha}{\pi} \log \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{-t} \right) - i\alpha = \frac{2\alpha}{\pi} \log \left(\frac{-t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right) - i\alpha ; \text{ si } t \in \text{BC} \end{cases}$$

ya que $\omega = \log \zeta$, entonces

$$\zeta = \begin{cases} \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\alpha} = \left(\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\alpha} ; \text{ si } t \in \text{AC} \\ \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{-t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} = \left(\frac{-t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} ; \text{ si } t \in \text{BC} \end{cases} \quad (4.8)$$

Par calcular la longitud de la placa, usando (4.2) y (4.1), tenemos que

$$z = \int \frac{dz}{dF} dF = \int \frac{\zeta}{v_0} 2\phi_0 t dt = \begin{cases} \frac{e^{i\alpha}}{v_0} \int \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} 2\phi_0 t dt ; \text{ si } t \in \text{AC} \\ \frac{e^{-i\alpha}}{v_0} \int \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{-t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} 2\phi_0 t dt ; \text{ si } t \in \text{BC} \end{cases}$$

de donde

$$\frac{l}{2} = \begin{cases} \frac{2\phi_0 e^{i\alpha}}{v_0} \int_0^1 \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt ; \text{ si } t \in \text{AC} \\ \frac{2\phi_0 e^{-i\alpha}}{v_0} \int_{-1}^0 \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{-t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt ; \text{ si } t \in \text{BC} \end{cases}$$

despejando tenemos que

$$\phi_0 = \begin{cases} \frac{lv_0}{4e^{i\alpha}} \frac{1}{\int_0^1 \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt} ; \text{ si } t \in \text{AC} \\ \frac{lv_0}{4e^{-i\alpha}} \frac{1}{\int_{-1}^0 \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{-t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt} ; \text{ si } t \in \text{BC} \end{cases} \quad (4.9)$$

Para calcular la presión tenemos que

$$P = \int \frac{\rho}{2} v_0^2 \left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2} \right) \frac{\zeta}{v_0} 2\phi_0 t dt \quad (4.10)$$

y usando (4.8)

$$|\zeta|^2 = \begin{cases} \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \left(\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} ; \text{ si } t \in \text{AC} \\ \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{-t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \left(\frac{-t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} ; \text{ si } t \in \text{BC} \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} P &= 2\rho\phi_0v_0 \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{1-(1-t^2)^{1/2}}{(1-t^2)^{1/2}+1} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \right) \left(\frac{((1-t^2)^{1/2}+1)}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\alpha} t dt \\ &= 2\rho\phi_0v_0 e^{i\alpha} \int_0^1 \frac{((1-t^2)^{1/2}+1)^{\frac{2\alpha}{\pi}} - (1-(1-t^2)^{1/2})^{\frac{2\alpha}{\pi}}}{t^{\frac{2\alpha}{\pi}}} t dt \end{aligned}$$

despejando ϕ_0 tenemos

$$P = \frac{\rho lv_0^2}{2} \frac{\int_0^1 \frac{((1-t^2)^{1/2}+1)^{\frac{2\alpha}{\pi}} - (1-(1-t^2)^{1/2})^{\frac{2\alpha}{\pi}}}{t^{\frac{2\alpha}{\pi}}} t dt}{\int_0^1 \left(\frac{(1-t^2)^{1/2}+1}{t} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt}$$

Comentario Bibliográfico

Para el lector que quiera estudiar más a fondo los temas de esta sección se le recomienda ver: [Gur65], [Lamb75] y [MT62]

Capítulo 5

Resultados experimentales

Recordemos que parte del objetivo de este trabajo es ver si la formulación utilizando líneas de corriente libres en fluidos ideales del problema de la fuerza de arrastre debida a la presión nos puede dar aproximaciones buenas para el cálculo del arrastre en vehículos comerciales.

Con el problema de la placa ortogonal al flujo ya tenemos una primera aproximación que correspondería al flujo alrededor de un vehículo con frente plano ortogonal a la línea de suelo, cercano a un camión de pasajeros antiguo.

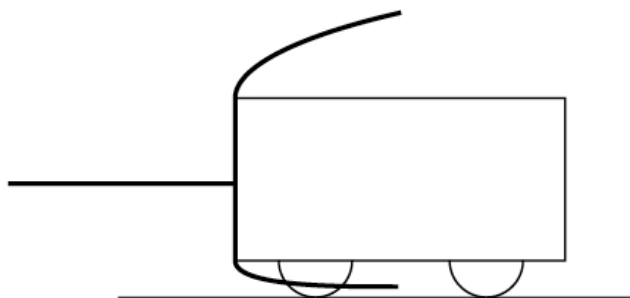


Figura 5.1: Camión con frente plano

Así mismo, el problema de la cuña simétrica respecto al flujo lo podemos considerar como una aproximación para vehículos con frente casi plano que forma un ángulo diferente de $\pi/2$ con el suelo.

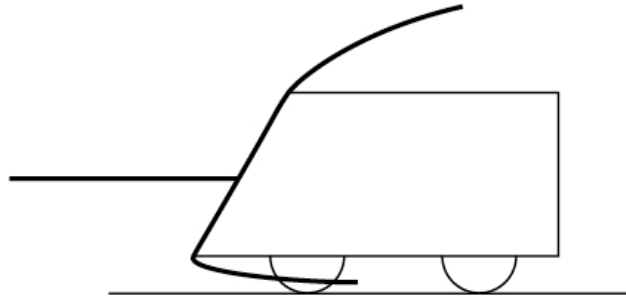


Figura 5.2: Camión con frente inclinado

El siguiente paso lógico para aproximar el frente de un vehículo sencillo, como el de un camión, sería el considerar un frente formado por dos placas pero en las cuales el punto de estancamiento no se encuentra en el vértice formado por estas

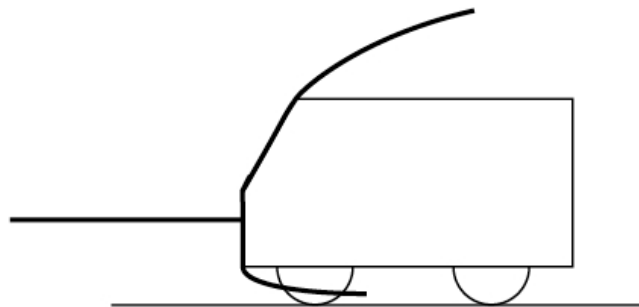


Figura 5.3: Camión con frente formado por 2 placas

Antes de continuar veamos los resultados experimentales de las visualizaciones del flujo en torno a este tipo de obstáculos y algunos resultados experimentales de la industria relacionados al cálculo del arrastre para los vehículos.

5.1. Metodología experimental

El objetivo del modelo experimental en este trabajo fue el de poder corroborar empíricamente la existencia de puntos de separación del flujo sobre el objeto y la generación de una estela detrás de este. Otro efecto importante que pudimos observar fué la generación de vórtices en el flujo en los vértices de los obstáculos poligonales.

Para la parte experimental se construyó un tunel de viento de 30 centímetros de ancho por 30 centímetros de alto y 150 centímetros de largo constituido por tres paredes de madera y una pared de acrílico a través de la cuál se realizaron las visualizaciones.

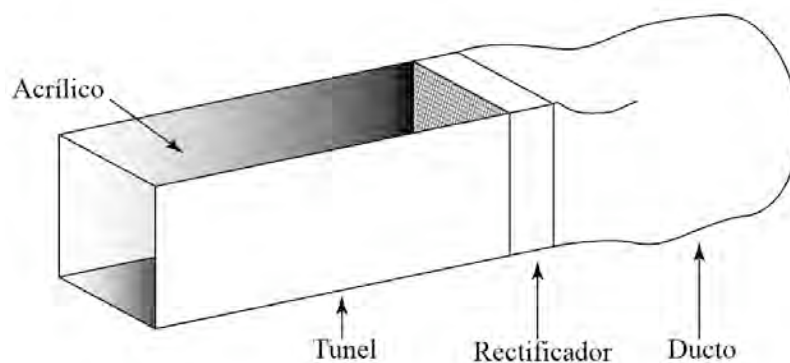


Figura 5.4: Túnel de viento

El aire fué inyectado al túnel por medio de un ventilador unido al túnel mediante un ducto flexible. La eliminación de la turbulencia en el flujo se obtuvo mediante un rectificador colocado en la unión del ducto flexible con el túnel de viento. El rectificador se armó con 4 paredes de madera de 15 centímetros de alto por 30 de largo las cuales envolvían una estructura de tipo panel formada por tubos plásticos paralelos entre sí.

5.2. Resultados experimentales en el tunel de viento para la placa ortogonal y la cuña simétrica

En estas dos fotos podemos apreciar la existencia de un punto de estancamiento sobre el obstáculo tanto para la placa ortogonal al flujo como para la cuña simétrica. Como se puede ver, en el caso de la placa ortogonal al flujo, el punto de estancamiento se encuentra en el centro de esta. En el caso de la cuña, dada la simetría de esta respecto a la dirección del flujo, el punto de estancamiento se encuentra en el vértice formado por las dos aristas.

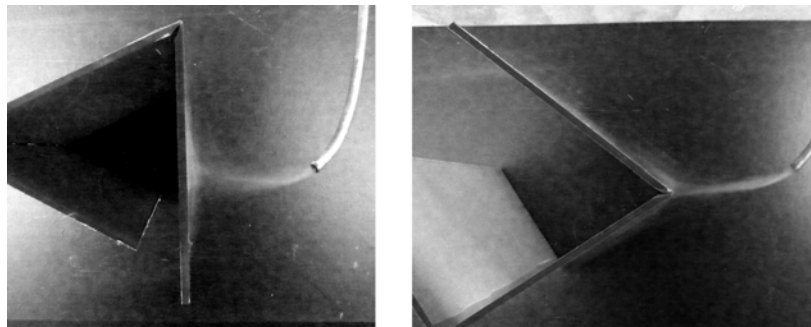


Figura 5.5: Flujo en torno a una placa ortogonal al flujo y una cuña simétrica respecto al flujo

En ambos casos se puede apreciar la formación de una estela corta detrás, delimitada por el flujo que se desprende en los puntos de separación en el obstáculo y por los vórtices generados por este flujo.

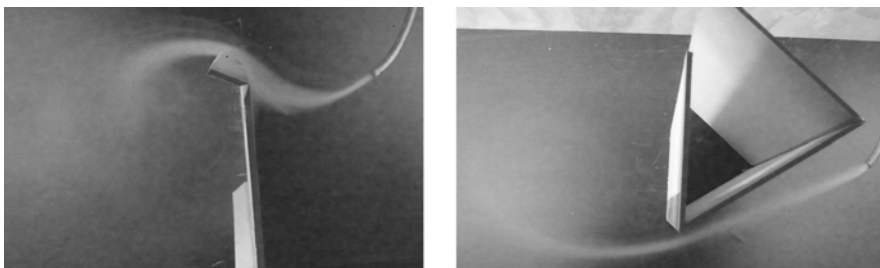


Figura 5.6: Formación de estela y vórtices

5.3. Resultados experimentales para la cuña no simétrica

Como ya comentamos, la visualización del flujo en torno a una cuña no simétrica la estudiaremos ya que posteriormente trataremos de aproximar teóricamente el flujo en el frente de un camión por medio del flujo en torno a dos placas formando un vértice no simétricas respecto a la dirección del flujo.

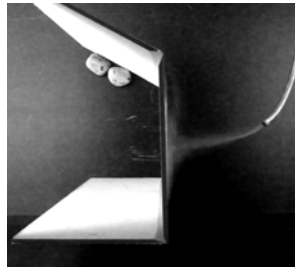


Figura 5.7: Punto de estancamiento para la cuña no simétrica

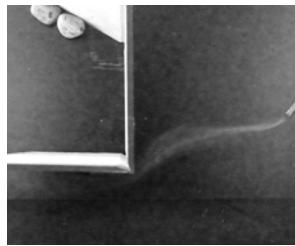


Figura 5.8: Flujo en la parte baja de la cuña

Como podemos ver, en el caso particular en el que uno de los lados de la cuña es ortogonal al flujo y ambos lados tienen prácticamente la misma longitud, el punto de estancamiento se encuentra sobre el lado ortogonal al flujo y está cercano al borde que no forma vértice con el otro lado.

Además es interesante notar la formación de un vórtice en el paso del flujo sobre el vértice. Al pasar el vértice, el flujo se desprende temporalmente de la cuña y luego vuelve a pegarse a esta en un punto más adelante. Dentro

de la región delimitada por el flujo separado y la cuña se puede apreciar la formación de vórtices.



Figura 5.9: Formación de vórtice en la esquina



Figura 5.10: Esquema del vórtice

5.4. Resultados experimentales para la cuña no simétrica con lados de longitud muy diferente

A partir de la visualización anterior nos damos cuenta que otro caso que resulta interesante estudiar es el de una cuña con lados de longitudes muy diferentes. El interés en este caso es debido al vórtice que se genera al pasar el flujo por una esquina y en tratar de entender que efecto tiene este vórtice en el arrastre si el lado sobre el que se forma (o sea, moviéndose con el flujo, el lado después de la esquina) es el lado corto de la cuña.

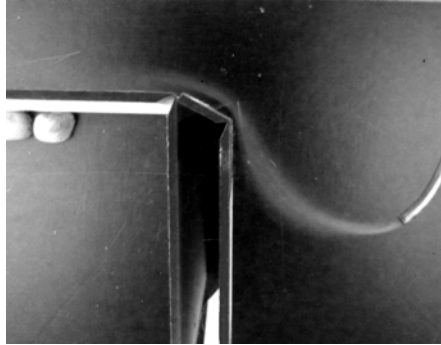


Figura 5.11: Cuña con lados de longitud muy diferente

Como podemos ver en estas dos fotos, también tenemos un vórtice al pasar el flujo por la esquina. En este caso esperamos que el efecto del vórtice en la presión del flujo sobre la cuña sea bastante importante ya que el vórtice abarca casi todo el largo del lado mas corto de la cuña.

5.5. Resultados experimentales de la industria

En esta sección vamos a ver algunos resultados experimentales obtenidos por la industria automotriz relacionados con el arrastre de los vehiculos y la geometría de estos. Estos resultados se ilustran en las siguientes gráficas

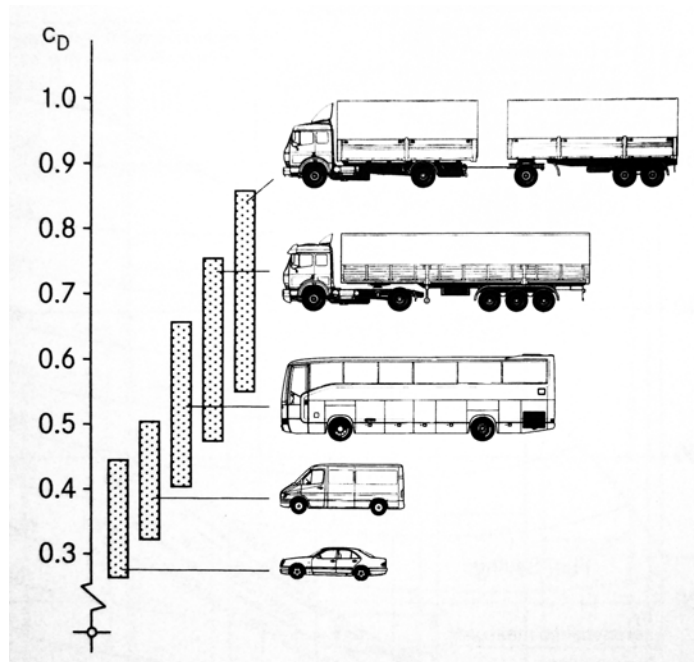


Figura 5.12: Coeficiente de arrastre para diferentes vehículos, [Huc98]

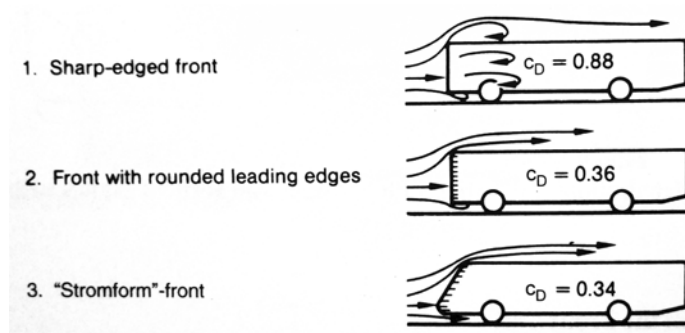


Figura 5.13: Coeficiente de arrastre para tres tipos de frente, [Huc98]

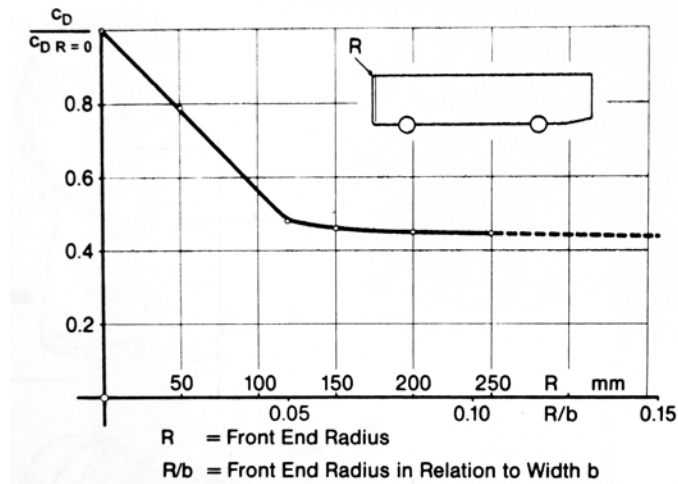


Figura 5.14: Influencia del radio de curvatura en los bordes sobre el arrastre, [Huc98]

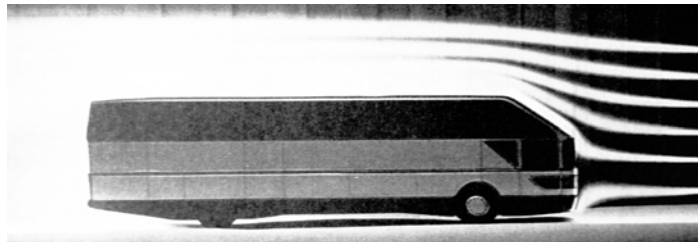


Figura 5.15: Camión con frente formado por 2 placas con $C_d = .6$, [Huc98]

5.6. Primeras comparaciones entre experimentos y teoría

La primera comparación que vamos a hacer es entre el arrastre teórico de la cuña simétrica (TC_d) y el arrastre experimental de las mini-van (EC_d). Hacemos la comparación con vehículos tipo mini-van, ya que el ángulo entre el suelo y la línea del cofre y el ángulo entre el suelo y la línea del parabrisas son casi iguales, pudiendo así aproximar el frente por una placa inclinada.

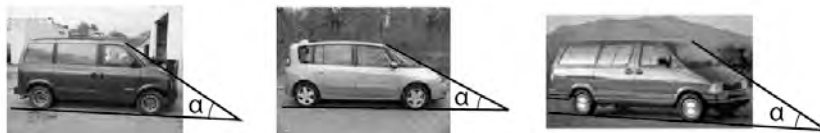


Figura 5.16: Frente de diferentes vehículos tipo mini-van con $C_d = .43$, $C_d = .32$ y $C_d = .37$ respectivamente, [RS85]

Aproximando el frente de las mini-van por la línea recta entre el borde superior del parabrisas y el borde superior de la parrilla tenemos que en promedio el ángulo entre esta línea y la línea de suelo es de treinta grados. Por lo tanto, de acuerdo al resultado del coeficiente de arrastre, TC_D , del problema de la cuña tenemos que $TC_D(30^\circ) = .489$ mientras que, de acuerdo a la figura (5.16), el valor de EC_d para este tipo de vehículos varía entre $EC_d \approx .27$ y $EC_d \approx .44$. Esta primera aproximación parece no ser tan mala, ya que a pesar de que el valor teórico está fuera del rango del valor experimental, este no está muy alejado del valor experimental más grande.

Por otro lado, a pesar de que las camionetas en la figura (5.16) tienen un ángulo general muy similar, el coeficiente de arrastre experimental varía mucho de unas a otras. Esto implica que el coeficiente de arrastre está también muy ligado a factores geométricos distintos a la geometría frontal de los obstáculos.

Por último es importante señalar que la formación de vórtices en el flujo sobre los obstáculos hace suponer que la solución del problema con flujo potencial en estos puntos dará aproximaciones pobres, implicando así la necesidad de usar teoría de flujos no invícidados en la vecindad de estos puntos.

Comentario Bibliográfico

Para el lector que quiera estudiar más a fondo los temas de esta sección se le recomienda ver: [Huc98]

Capítulo 6

El problema del flujo para el frente de un camión de pasajeros

6.1. Velocidad en las esquinas

El siguiente problema que vamos a abordar es el del flujo en torno a un perfil formado por dos placas juntas, en el cual el punto de estancamiento no se encuentra en el vértice de las placas, para tratar de aproximar así el flujo en el frente de un camión de pasajeros. Pero para poder hacer esto es necesario saber como se comporta la velocidad sobre el obstáculo en los puntos donde las placas forman un vértice de acuerdo al modelo matemático que estamos utilizando.

Para esto utilizaremos las siguientes convenciones ilustradas en la figura (6.1)

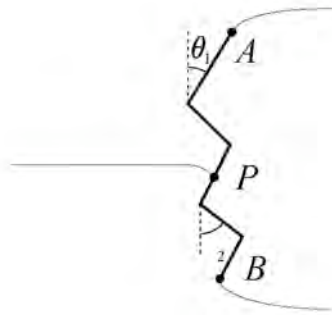


Figura 6.1: Convención para medir los ángulos

1. El ángulo de la velocidad en infinito es 0.
2. El ángulo de las paredes del obstáculo lo medimos a partir del ángulo $\pi/2$ para las paredes entre P y A, y a partir del ángulo $-\pi/2$ para las paredes entre P y B
3. Si una pared se inclina a partir de la vertical en contra del flujo entonces su ángulo será positivo, si se inclina a favor del flujo será negativo

Supongamos dos aristas \overline{ab} y \overline{bc} que forman un vértice y que ambas se encuentran entre P y A o entre P y B



Figura 6.2: Posición de \overline{ab} respecto a P

Veamos que pasa:

Sabemos que $\omega(\zeta) = \log|\zeta| + i\theta$. Supongamos que entre la región en el plano ω y la región en el plano t (el eje real) existe un mapeo con la fórmula de Schwarz-Christoffel, i.e. supongamos que la región en ω es un polígono. Además sabemos que en la región de cambio en ω solo tenemos líneas horizontales y líneas verticales, donde las horizontales corresponden a las paredes del obstáculo ya que ahí el argumento de la velocidad es constante, y las verticales corresponden a líneas de corriente libres ya que en estas la magnitud de la velocidad es constante. Dado que sólo hay dos puntos de separación del fluido sobre el obstáculo, entonces todas las líneas horizontales deben coincidir en el punto al infinito para poder formar un polígono, excepto dos que terminarán en los puntos correspondientes a **A** y **B** y que están unidos por una línea vertical.

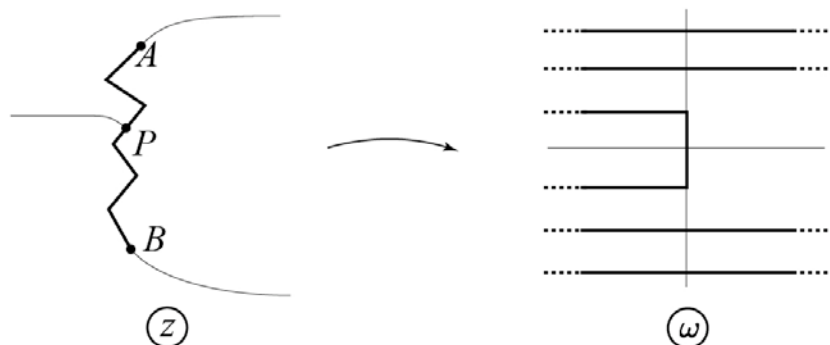


Figura 6.3: Esquema de la región de cambio ω

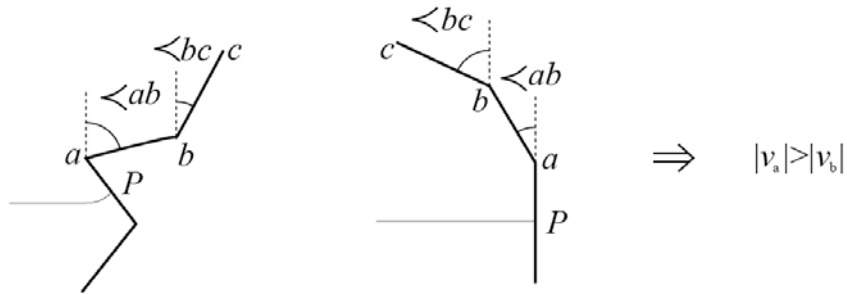
OBSERVACIÓN

De esto se deduce que en los vértices $|\omega| \equiv \log \left| \frac{v_0}{v} \right| = \pm\infty$ entonces en estos puntos $v = 0$ o $v = \infty$.

Lo que tenemos que hacer ahora es ver cómo depende que $v = 0$ o $v = \infty$ en un vértice de acuerdo al ángulo en este.

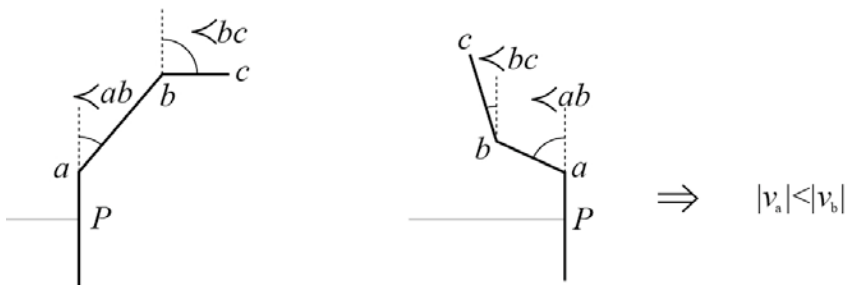
Midiendo los ángulos según lo acordado vamos a hacer la siguiente hipótesis

- 1.- Dadas las aristas \bar{ab} y \bar{bc} con velocidades v_a y v_b en a y b respectivamente, si el ángulo en \bar{ab} , denotado por \sphericalangle_{ab} , es menor que el ángulo en \bar{bc} , denotado por \sphericalangle_{bc} , entonces $|v_a| > |v_b|$



O sea que si $\Delta\theta = \sphericalangle_{bc} - \sphericalangle_{ab} > 0 \implies |v_a| > |v_b|$

2.- Dadas las aristas \bar{ab} y \bar{bc} con velocidades v_a y v_b en a y b respectivamente, si \sphericalangle_{ab} es mayor que \sphericalangle_{bc} , entonces $|v_a| < |v_b|$



O sea que si $\Delta\theta = \sphericalangle_{bc} - \sphericalangle_{ab} < 0 \implies |v_a| < |v_b|$

A primera vista estas hipótesis parecen poco lógicas, pero son consecuencia directa de la ecuación de Bernoulli, ya que cuando $\Delta\theta = \sphericalangle_{bc} - \sphericalangle_{ab} > 0$ podríamos decir que el espacio sobre el obstáculo por el cual debe pasar el fluido se reduce; en cambio, cuando $\Delta\theta = \sphericalangle_{bc} - \sphericalangle_{ab} < 0$ el espacio aumenta, lo cual en el primer caso produce una disminución en la magnitud de la velocidad, y en el segundo un aumento en la misma.

De lo anterior tenemos que:

1. Dada la observación y el punto 1 de la hipótesis anterior se tiene que si $v_a = 0$ y $\Delta\theta > 0 \implies v_b = 0$, por lo tanto $\omega(a) = \omega(b) = \infty$

2. Dada la observación y el punto 2 de la hipótesis anterior se tiene que si $v_a = \infty$ y $\Delta\theta < 0 \implies v_b = \infty$, por lo tanto $\omega(a) = \omega(b) = -\infty$

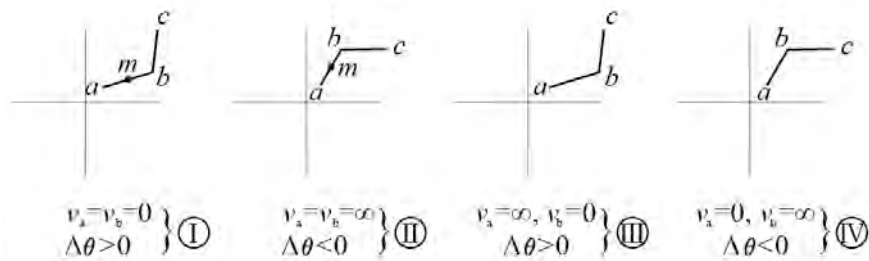
3. Dada la observación y el punto 1 de la hipótesis anterior se tiene que si $v_a = \infty$ y $\Delta\theta > 0 \implies v_b = 0$, por lo tanto $\omega(a) = -\infty$ y $\omega(b) = \infty$

4. Dada la observación y el punto 2 de la hipótesis anterior se tiene que si $v_a = 0$ y $\Delta\theta < 0 \implies v_b = \infty$, por lo tanto $\omega(a) = \infty$ y $\omega(b) = -\infty$

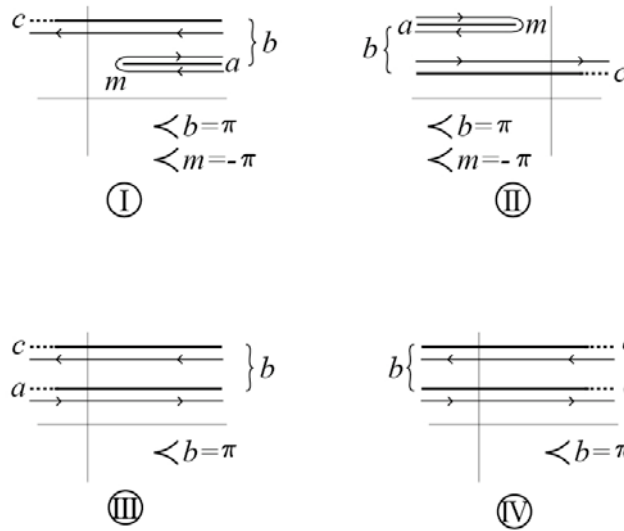
De esto podemos concluir que en un vértice donde $\Delta\theta < 0$ la velocidad es ∞ y en un vértice donde $\Delta\theta > 0$ la velocidad es 0.

Además suponiendo que sólo tenemos puntos de estancamiento aislados, entonces entre dos vértices donde la velocidad es 0 debe existir un punto M donde la velocidad alcanza un máximo. Análogamente, entre dos vértices donde la velocidad es ∞ debe existir un punto m donde la velocidad alcanza un mínimo.

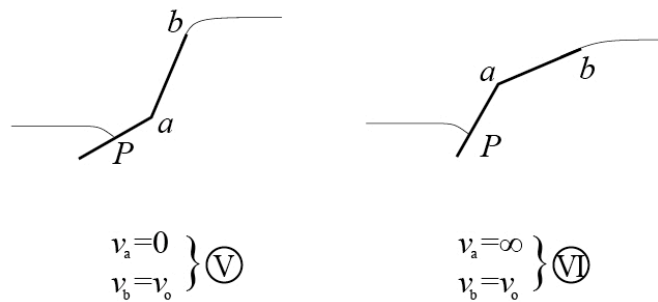
Veamos ahora que pasa con los ángulos en la región ω . Tenemos estos cuatro casos que acabamos de analizar:



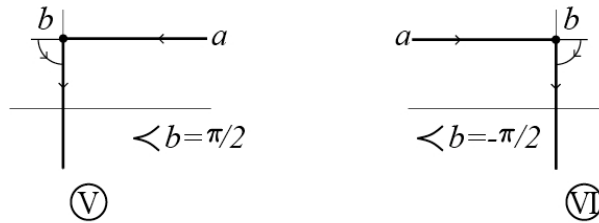
La región ω tiene la siguiente forma para cada caso



y para los puntos de separación tenemos los siguientes casos



por lo tanto la región ω , para estos últimos dos casos, tiene la siguiente forma.



Con todo lo anterior tenemos que:

1. En los vértices con $\Delta\theta < 0$ la velocidad es infinita
2. En los vértices con $\Delta\theta > 0$ la velocidad es cero
3. El ángulo en el polígono en ω correspondiente a los vértices en el obstáculo es π
4. El ángulo en el polígono en ω correspondiente a los puntos donde la velocidad alcanza un máximo o un mínimo es $-\pi$
5. El ángulo en el polígono en ω en los puntos correspondientes a los puntos de separación es $\pm\frac{\pi}{2}$
6. La transformación de la región poligonal en ω al eje real en t se logra mediante el mapeo de Schwarz-Christoffel de la forma

$$\frac{d\omega}{dt} = K \prod_{i=1}^l (t - a_i)^1 \prod_{j=1}^n (t - M_j)^{-1} \prod_{k=1}^2 (t - N_k)^{\pm\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

donde los puntos a_i corresponden a los vértices, los puntos M_j corresponden a los puntos donde la velocidad alcanza un máximo o mínimo local y los N_k corresponden a los puntos de separación.

6.2. Problema del camión de pasajeros

Ya que conocemos el comportamiento de la velocidad en los puntos importantes de la frontera del obstáculo, entonces podemos resolver el problema del obstáculo formado por dos placas donde el punto de estancamiento no se encuentra en el vértice, con el cuál trataremos de aproximar el flujo alrededor de un camión de pasajeros.

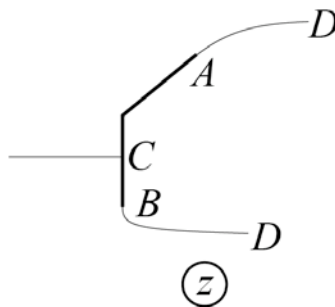


Figura 6.4: Cuña asimétrica

Analogamente a lo que hicimos en el caso de la placa inclinada, la cual aproximamos por una cuña, este problema lo podemos aproximar por el de un perfil formado por una placa ortogonal al flujo con dos placas formando vértice en cada uno de sus lados, fig (6.5). Para este problema vamos a considerar las siguientes transformaciones

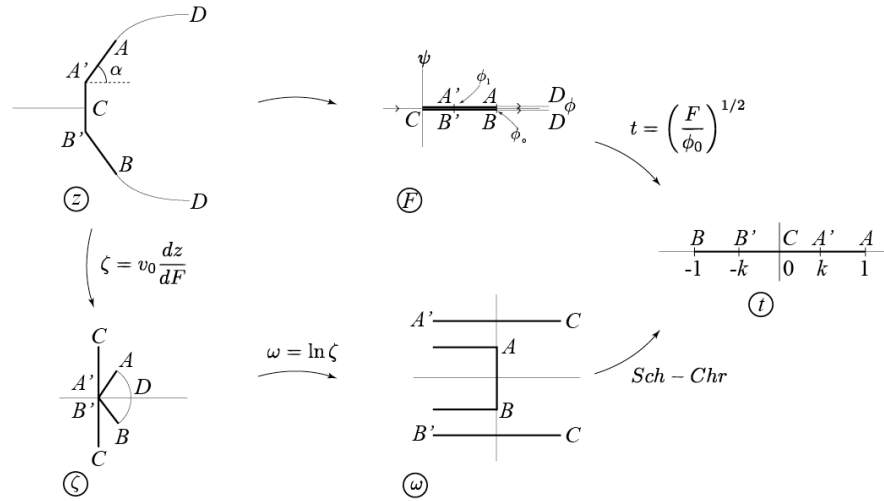


Figura 6.5: Planos de los mapeos para el problema de la cuña no simétrica

la ventaja que tiene esto es que podemos aprovechar la simetría del flujo para simplificar los cálculos. Basados en la experimentación en el tunnel de viento, fig(5.7), vemos que al tener dos placas juntas, donde una de ellas es ortogonal al flujo el punto de estancamiento se localiza sobre esta cerca del borde que no forma arista con la otra placa. Debido a esto, podriamos considerar muy chico el efecto del arrastre abajo del punto de estancamiento, y de esa manera la aproximación del arrastre por el del arrastre en la mitad de un perfil como el de la figura (6.5) no es tan mala.

Debido a lo que ya discutimos acerca de la velocidad en los vértices, sabemos que la región en el plano físico z cumple lo siguiente:

1. La velocidad en C es $v_C = 0$,
2. La velocidad en A' y B' es $v_{A'} = \infty$ y $v_{B'} = \infty$ respectivamente,
3. La velocidad en A y B es $v_A = v_0$ y $v_B = v_0$ respectivamente.

Esta región la queremos relacionar con la región en F en donde ϕ_0 corresponde a los puntos A y B de separación del flujo, y ϕ^* corresponde a los vertices A' y B'. Esto lo logramos, como en los casos anteriores, por medio del

mapeo hodógrafo $\zeta = \frac{v_0 dz}{dF} = \frac{v_0 e^{i\theta}}{v}$. Debido a la velocidad con magnitud infinita que tenemos en los vértices A' y B' , $\zeta_{A'} = \frac{v_0}{\infty} e^{i\pi/2} = 0$ y $\zeta_{B'} = \frac{v_0}{\infty} e^{-i\pi/2} = 0$; es por eso que la región de cambio en ζ tiene la forma que vemos en la fig(6.5).

Analizando lo que sabemos hasta el momento, se hace evidente una inconsistencia grave que tiene este planteamiento con la física: la presión en la estela detrás del obstáculo es la misma que la presión del flujo con velocidad v_0 debido a que debe ser igual a la presión de las líneas de corriente libres. El problema es que sobre el obstáculo el modelo matemático nos introdujo velocidad infinita en la esquina y suponemos que esta decae monótonamente sobre las aristas hasta llegar a tener magnitud v_0 en los puntos de separación; esto nos lleva a que sobre las dos aristas $A'A$ y $B'B$ la magnitud de la velocidad es en todos lados mayor a v_0 lo cual implica, por Bernoulli, que sobre estas aristas, la presión ejercida en el lado en contacto con el flujo en movimiento es menor a la presión ejercida en el lado de la estela, por lo tanto en lugar de sentir presión en dirección del flujo, el obstáculo en estas partes, siente succión.

Al mismo tiempo, esta inconsistencia nos da información importante de cómo debemos esperar que se comporte el arrastre en flujo potencial en la presencia de aristas, en presencia de aristas debemos esperar que el arrastre baje.

Podría ser que a pesar de esta inconsistencia, el resultado que se obtiene sea cercano a los resultados experimentales para algunos valores específicos de k y α , donde α es el ángulo de la placa no ortogonal al flujo y k es el parámetro en el plano t con el cuál ajustamos las longitudes de ambas placas, ver planos z y t en la figura (6.5). Por lo tanto continuaremos con el análisis de este modelo como método de solución para el problema y posteriormente analizaremos en que casos nos sirve.

En este caso tenemos que la región ω esta constituida por dos líneas horizontales con partes imaginarias $\pi/2$ y $-\pi/2$ y con parte real que va de $-\infty$ a ∞ , esto debido a que $\omega(C) = \log \zeta = \log \left| \frac{v_0}{0} \right| \pm i\theta = \infty \pm i\pi/2$, $\omega(A') = \log \left| \frac{v_0}{\infty} \right| + i\theta = -\infty + i\pi/2$ y $\omega(B') = \log \left| \frac{v_0}{\infty} \right| - i\theta = -\infty - i\pi/2$. Por su parte sobre los lados $A'A$ y $B'B$ la velocidad tiene argumento constante $i\alpha$ y $-i\alpha$ respectivamente, y su magnitud varia de ∞ en A' y B' a v_0 en A y B por lo tanto en ω les corresponden las líneas horizontales cuya parte real va de $-\infty$ a 0 y que tienen partes imaginarias constante $i\alpha$ y $-i\alpha$ respectivamente. Por último, análogo al problema de la placa ortogonal al flujo y al de la cuña,

las líneas de corriente libres son mapeadas en ω al segmento de recta vertical con parte real 0 que va de $i\alpha$ a $-i\alpha$.

La región en ω la podemos ver como un polígono con cinco vértices, tres de los cuales se encuentran en el punto al infinito.

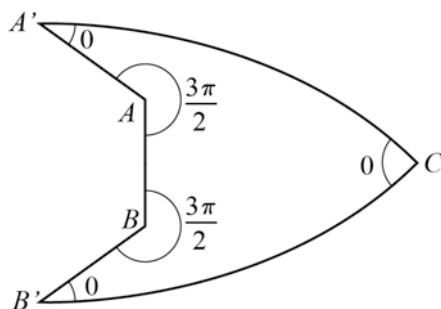


Figura 6.6: Polígono considerado para el mapeo de Schwarz-Christoffel

Usando la fórmula de Schwarz-Christoffel, tenemos el mapeo que lleva este polígono al eje real en el plano t está determinado por

$$\frac{d\omega}{dt} = M \frac{(t^2 - 1)^{1/2}}{t(t^2 - k^2)} \quad (6.2)$$

Haciendo fracciones parciales

$$\frac{d\omega}{dt} = M \frac{1}{k^2} \left(\frac{-(t^2 - 1)^{(1/2)}}{t} + \frac{(t^2 - 1)^{(1/2)}}{2(t - k)} + \frac{(t^2 - 1)^{(1/2)}}{2(t + k)} \right) \quad (6.3)$$

Las condiciones con las cuales determinaremos las constantes M y N , donde N es la constante de integración, son $\omega(1) = i\alpha$ y $\omega(-1) = -i\alpha$.

Para comenzar a analizar el comportamiento que debe tener la función $\omega(t)$ veamos que pasa para valores de t cercanos a 0. En ese caso sólo el primer término de $\frac{d\omega}{dt}$ es relevante

$$\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{-M}{k^2} \int \frac{(t^2 - 1)^{(1/2)}}{t} dt$$

$$\implies \omega(t) \approx -\frac{(\pm i)M}{k^2} \log t$$

queremos que en $t = 0$, ω sea ∞ . Dado que $\lim_{t \rightarrow 0} \log t = -\infty$ entonces

$$-\frac{\pm iM}{k^2} = -1$$

si escogemos $(-1)^{1/2} = +i$ entonces $M = -ik^2$; esto no nos da M de forma exacta, pero implica que en general M debe ser un número imaginario negativo.

Para integrar ω , ecuación (6.3), de hecho es más fácil hacerlo sumando los dos últimos términos de la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{d\omega}{dt} = M \frac{1}{k^2} \left(\frac{-(t^2 - 1)^{1/2}}{t} + \frac{t(t^2 - 1)^{1/2}}{(t^2 - k^2)} \right)$$

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{t(t^2 - 1)^{1/2}}{t^2 - k^2} dt &= \int \frac{t(t^2 - k^2 + k^2 - 1)^{1/2}}{t^2 - k^2} dt = \int \underbrace{\frac{(u + k^2 - 1)^{1/2}}{2u}}_{\text{tomando } u=t^2-k^2} du \\ &= \int \underbrace{((1 - k^2) \sec^2 \theta - (1 - k^2))^{1/2} \tan \theta d\theta}_{\text{tomando } u=(1-k^2) \sec^2 \theta} \\ &= (1 - k^2)^{1/2} \int \tan^2 \theta d\theta = (1 - k^2)^{1/2} (\tan \theta - \theta) \\ &= (1 - k^2)^{1/2} \left[\left(\frac{t^2 - 1}{1 - k^2} \right)^{1/2} - \tan^{-1} \left(\frac{t^2 - 1}{1 - k^2} \right)^{1/2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(t^2 - 1)^{1/2}}{t} dt &= \int \underbrace{(\sec^2 \theta - 1)^{1/2} \tan \theta d\theta}_{\text{tomando } t=\sec^2 \theta} = \int \tan^2 \theta d\theta = (\tan \theta - \theta) \\ &= (t^2 - 1)^{1/2} - \sec^{-1}(t) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\omega(t) = \frac{M}{k^2} \left[-(1 - k^2)^{1/2} \tan^{-1} \left(\frac{t^2 - 1}{1 - k^2} \right)^{1/2} + \sec^{-1}(t) \right] + N \quad (6.4)$$

Tomando en cuenta que

$$\tan^{-1}(z) = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{i+z}{i-z} \right) = \frac{i}{2} [\ln(i+z) - \ln(z-i) - i\pi]$$

$$\sec^{-1}(z) = -i \ln \left(\frac{i(z^2 - 1)^{1/2} + 1}{z} \right)$$

y escogiendo las ramas de los logaritmos y de la raíz $(t^2 - 1)^{1/2}$ de esta forma

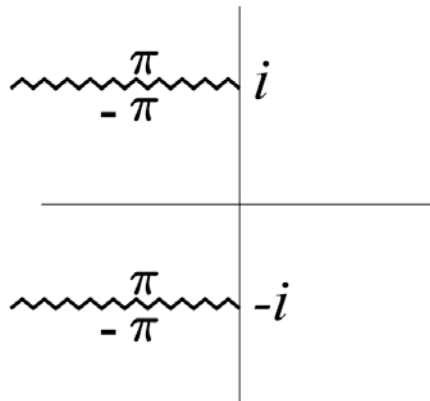


Figura 6.7: Ramas para el logaritmo

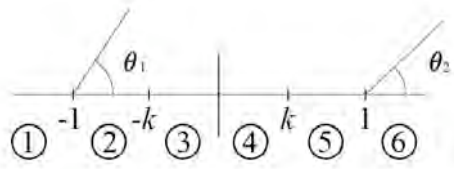


Figura 6.8: Ramas para la raíz

tenemos que

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{M}{k^2} \left[-(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(i + \left(\frac{t^2-1}{1-k^2} \right)^{1/2} \right) - \ln \left(\left(\frac{t^2-1}{1-k^2} \right)^{1/2} - i \right) - i\pi \right] \right] \\ &\quad + \frac{M}{k^2} \left[-i \ln \left(\frac{i(t^2-1)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + N \end{aligned}$$

Para determinar las constantes M y N , hasta ahora lo único que sabemos es que M debe ser un número puramente imaginario negativo, lo hacemos usando el hecho de que $\omega(-1) = -i\alpha$ y $\omega(1) = i\alpha$ pero debemos de tener en cuenta que 1 y -1 están en las regiones 2 y 5 del plano t donde $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, ver fig(6.8), por lo tanto $(t^2-1)^{1/2} = i(1-t^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \omega_{2,5}(t) &= \frac{M}{k^2} \left[-(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\underbrace{\ln \left(i + i \left(\frac{1-t^2}{1-k^2} \right)^{1/2} \right)}_{*1} - \underbrace{\ln \left(i \left(\frac{1-t^2}{1-k^2} \right)^{1/2} - i \right)}_{*2} - i\pi \right] \right] \\ &\quad + \frac{M}{k^2} \left[-i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + N \end{aligned} \tag{6.5}$$

Además en estas regiones $|t| \geq |k|$ por lo tanto $\left(\frac{1-t^2}{1-k^2} \right)^{1/2} \leq 1$, y dadas las ramas de los logaritmos, ver fig(6.7), tenemos que (*1) tiene argumento $\pi/2$, mientras que (*2) tiene argumento $-\pi/2$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \omega_{2,5}(t) &= \frac{M}{k^2} \left[-(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{1 + \left(\frac{1-t^2}{1-k^2} \right)^{1/2}}{1 - \left(\frac{1-t^2}{1-k^2} \right)^{1/2}} \right) \right] \right] \\ &\quad - \frac{M}{k^2} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + N \\ &= \frac{M}{k^2} \left[-(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{((1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2})^2}{t^2 - k^2} \right) \right] \right] \\ &\quad - \frac{M}{k^2} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + N \end{aligned}$$

De donde

$$\omega(1) = \frac{M}{k^2} \left[-(1 - k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \ln(1) - i \ln(1) \right] + N = \frac{M}{k^2} [0 + 0] + N = i\alpha \implies N = i\alpha$$

$$\begin{aligned} \omega(-1) &= \frac{M}{k^2} \left[-(1 - k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \ln(1) - i \ln(-1) \right] + N = \frac{M}{k^2} [0 + \pi] + i\alpha = -i\alpha \\ \implies M &= \frac{-2i\alpha k^2}{\pi} \end{aligned}$$

De la misma forma, para las regiones 3 y 4 en el plano t se tiene que $|t| \leq |k|$ y por lo tanto $\left(\frac{1-t^2}{1-k^2}\right)^{1/2} \geq 1$, y dadas las ramas de los logaritmos tenemos que (*1) y (*2) tienen argumento $\pi/2$,

$$\begin{aligned} \omega_{3,4}(t) &= \frac{M}{k^2} \left[-(1 - k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{1 + \left(\frac{1-t^2}{1-k^2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1-t^2}{1-k^2}\right)^{1/2} - 1} \right) - i\pi \right] \right] \\ &\quad - \frac{M}{k^2} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + N \\ &= \frac{M}{k^2} \left[-(1 - k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{((1 - k^2)^{1/2} + (1 - t^2)^{1/2})^2}{k^2 - t^2} \right) - i\pi \right] \right] \\ &\quad - \frac{M}{k^2} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + N \end{aligned}$$

juntando los cuatro casos tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= \frac{2i\alpha}{\pi} \left[(1 - k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{((1 - k^2)^{1/2} + (1 - t^2)^{1/2})^2}{t^2 - k^2} \right) \right] \right] \\ &\quad + \frac{2i\alpha}{\pi} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{-t} \right) - i\pi \right] + i\alpha \quad \text{para } t \text{ en la región 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_3(t) &= \frac{2i\alpha}{\pi} \left[(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{((1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2})^2}{k^2 - t^2} \right) - i\pi \right] \right] \\ &\quad + \frac{2i\alpha}{\pi} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{-t} \right) - i\pi \right] + i\alpha \text{ para } t \text{ en la región 3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_4(t) &= \frac{2i\alpha}{\pi} \left[(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{((1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2})^2}{k^2 - t^2} \right) - i\pi \right] \right] \\ &\quad + \frac{2i\alpha}{\pi} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + i\alpha \text{ para } t \text{ en la región 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_5(t) &= \frac{2i\alpha}{\pi} \left[(1-k^2)^{1/2} \frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{((1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2})^2}{t^2 - k^2} \right) \right] \right] \\ &\quad + \frac{2i\alpha}{\pi} \left[i \ln \left(\frac{-(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right) \right] + i\alpha \text{ para } t \text{ en la región 5}\end{aligned}$$

Dado que $\omega = \ln(\zeta) = \ln(v_0 dz/dw)$ entonces

$$\zeta = \begin{cases} \left[\frac{(1-k^2)^{1/2} - (1-t^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{\alpha(1-k^2)^{1/2}}{\pi}} \left[\frac{-t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\beta_2} & \text{para } t \in [-1, -k] \\ \left[\frac{(1-t^2)^{1/2} - (1-k^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{\alpha(1-k^2)^{1/2}}{\pi}} \left[\frac{-t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\beta_3} & \text{para } t \in [-k, 0] \\ \left[\frac{(1-t^2)^{1/2} - (1-k^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{\alpha(1-k^2)^{1/2}}{\pi}} \left[\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\beta_4} & \text{para } t \in [0, k] \\ \left[\frac{(1-k^2)^{1/2} - (1-t^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{\alpha(1-k^2)^{1/2}}{\pi}} \left[\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\beta_5} & \text{para } t \in [k, 1] \end{cases} \quad (6.6)$$

donde $\beta_2 = 3\alpha$, $\beta_3 = 3\alpha + \alpha(1-k^2)^{1/2}$, $\beta_4 = \alpha + \alpha(1-k^2)^{1/2}$ y $\beta_5 = \alpha$ son los saltos que dan los logaritmos, pero para efectos de nuestros cálculos no son necesarios ya que se cancelan como en el caso de la cuña al calcular las longitudes y la presión

Como ya vimos en los dos ejemplos anteriores

$$l = \frac{2\phi_0}{v_0} \int \zeta t dt$$

Dada la simetría del problema

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \frac{2\phi_0}{v_0} \left[\underbrace{\int_0^k \left[\frac{(1-t^2)^{1/2} - (1-k^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{\alpha(1-k^2)^{1/2}}{\pi}} \left[\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt}_{I_{0,k}(\alpha,k)} \right] \\ &+ \frac{2\phi_0}{v_0} \left[\underbrace{\int_k^1 \left[\frac{(1-k^2)^{1/2} - (1-t^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2} + (1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{\alpha(1-k^2)^{1/2}}{\pi}} \left[\frac{t}{1-(1-t^2)^{1/2}} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} t dt}_{I_{k,1}(\alpha,k)} \right] \end{aligned}$$

de donde

$$\phi_0 = \frac{lv_0}{4} \left[\frac{1}{I_{0,k}(\alpha,k) + I_{k,1}(\alpha,k)} \right]$$

$$\frac{l_1}{2} = \frac{2\phi_0}{v_0} I_{0,k}(\alpha,k)$$

$$\frac{l_2}{2} = \frac{2\phi_0}{v_0} I_{k,1}(\alpha,k)$$

Para calcular la presión tenemos que hacerlo por separado para cada placa y luego sumar los resultados

$$P = 2(P_{0,k} + P_{k,1}) = 2\phi_0 v_0 \rho \left[\int_0^k \left(1 - \frac{1}{|\zeta|} \right) \zeta t dt + \int_k^1 \left(1 - \frac{1}{|\zeta|} \right) \zeta t dt \right]$$

y dado que el arrastre esta definido por

$$F_d = \frac{\rho v_0^2 C_d L}{2} \tag{6.7}$$

donde $F_d = P = 2(P_{0,k} + P_{k,1} \sin \alpha)$, entonces

$$2(P_{0,k} + P_{k,1} \sin \alpha) = \frac{\rho v_0^2 C_d L}{2}$$

Despejando el coeficiente de arrastre, tomando $\rho = v_0 = A = 1$ tenemos que

$$C_d = 4(P_{0,k} + P_{k,1} \sin \alpha) \quad (6.8)$$

Es fácil ver que con $k = 1$ recuperamos el resultado para la cuña, en particular si $\alpha = \pi/2$ tenemos el caso de la placa ortogonal al flujo.

Sin embargo parece que nos encontramos con un problema de existencia en este problema. Los brincos que debe dar la función debido a los logaritmos en los puntos singulares $\pm k$ y 0 representados por las constantes β_n sólo permiten que cierre el polígono adecuadamente cuando $k = 1$ y $\alpha = \pi/2$, y debido a las hipótesis en nuestra solución, no contamos con más parámetros libres en la derivada que nos define el mapeo entre ω y t como para forzar con estos el cierre de manera correcta, y por lo tanto el polígono en lugar de tener la forma esperada, fig(6.5), excepto en el caso especial $k = 1$ y $\alpha = \pi/2$, esta deformado

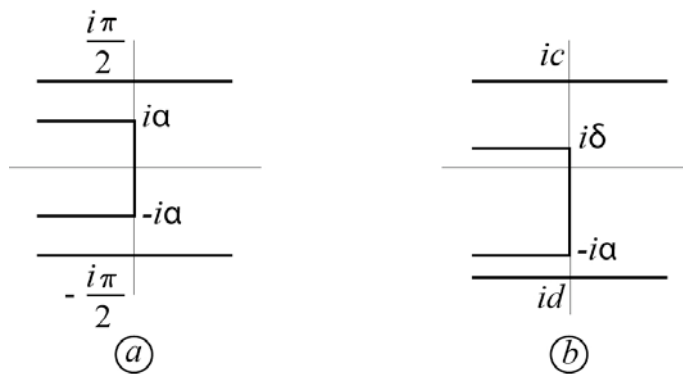


Figura 6.9: Deformación del polígono en ω

Debido a esto, la solución que obtenemos para este problema esperamos que sea cercana a los valores experimentales sólo para casos en los que k es cercano a 1 y α es cercano a $\pi/2$.

6.3. Comparación de los resultados teóricos con los resultados experimentales

Hagamos algunas comparaciones entre el valor teórico del arrastre, TC_d , para camiones calculados con el método que acabamos de describir, y el valor experimental, EC_d , que conocemos de las figuras (5.12), (5.13) y (5.14) de §5.5

En el caso de los camiones con bordes redondeados, tenemos que el radio de curvatura del borde juega un papel importante en la reducción del arrastre según las figuras (5.13) y (5.14). Para camiones con esta característica vamos a aproximar el frente de estos por dos placas planas como se muestra en la siguiente figura

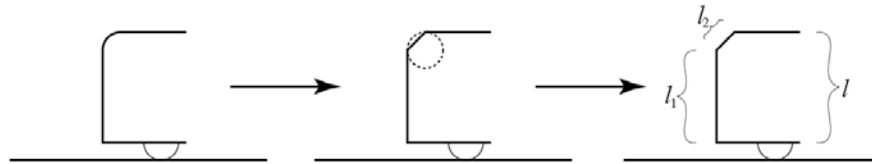


Figura 6.10: Aproximación de los bordes redondeados

una placa ortogonal al flujo y otra con un ángulo α igual a $\pi/4$ en relación a la línea de suelo con la cuál aproximaremos el borde redondeado. La altura promedio de estos camiones es de cuatro metros, y dado que conocemos el radio de curvatura del borde entonces sabemos la longitud l_1 de la parte ortogonal al flujo y la longitud l_2 de la placa con la cuál aproximaremos el borde curvo.

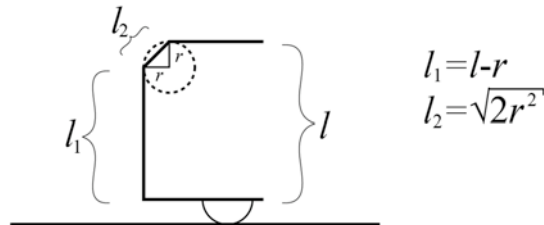


Figura 6.11: Cálculo de longitudes

84 6.3. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS TEÓRICOS CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para facilitar los cálculos normalizaremos estas longitudes tomando $l = 1$, y l_1 y l_2 de manera proporcional. Variando el parámetro k para obtener diferentes longitudes tenemos la siguiente tabla

alfa	k	l_1	l_2	C_d	Radio de curvatura
pi/4		1	0.5	0	0.62 0mm
pi/4		0.99	0.494	0.005	0.616 25 mm
pi/4		0.985	0.491	0.008	0.61 50 mm
pi/4		0.976	0.486	0.013	0.599 75 mm
pi/4		0.97	0.483	0.016	0.592 100 mm
pi/4		0.962	0.479	0.02	0.58 125 mm
pi/4		0.951	0.473	0.026	0.57 150 mm

Figura 6.12: Tabla de valores teóricos para el coeficiente de arrastre en camiones con bordes redondeados

0 mm	0.88
25 mm	0.79
50 mm	0.69
75 mm	0.59
100 mm	0.49
125 mm	0.42
150 mm	0.4

Figura 6.13: Tabla de valores experimentales para el coeficiente de arrastre en camiones con bordes redondeados

Como podemos ver, esta aproximación no es buena. Para un radio de curvatura chico del borde redondeado esta aproximación subestima el coeficiente de arrastre de manera significativa, mientras que para un radio de curvatura grande esta aproximación sobreestima el coeficiente de arrastre. Este resultado era de esperarse ya que, como ya comentamos, esperamos que nuestro modelo sea bueno para $k \approx 1$ y $\alpha \approx \pi/2$ y en este caso $\alpha = \pi/4$ que es considerablemente más chico que $\pi/2$

En el caso de un camión con frente formado por dos placas calculemos algunos valores teóricos para el arrastre tomando diferentes valores de α cercanos a $\pi/2$ que es el ángulo promedio que forma la placa no ortogonal al flujo en los camiones, y variemos k para obtener distintas longitudes

alfa	k	l_1	l_2	C_d	
	1.5	0.9	0.47	0.029	0.76
	1.5	0.8	0.42	0.071	0.66
	1.5	0.7	0.37	0.127	0.56
	1.4	0.9	0.46	0.032	0.74
	1.4	0.8	0.42	0.078	0.64
	1.4	0.7	0.36	0.137	0.52
	1.3	0.9	0.46	0.036	0.7
	1.3	0.8	0.41	0.85	0.6
	0.52	0.7	0.25	0.24	0.18

Figura 6.14: Tabla de Valores teóricos para el coeficiente de arrastre en camiones con frente formado por dos placas

Dado que α es cercano a $\pi/2$ entonces para $k = 1$ el valor de TC_d que obtenemos es cercano a el valor del coeficiente de arrastre para la placa ortogonal al flujo. Aún así, conforme k disminuye, y obtenemos longitudes l_1 y l_2 cercanas a las longitudes de las placas que forman el frente de un camión, el valor de TC_d que obtenemos es considerablemente menor al valor de EC_d . En particular, el último renglón de la tabla corresponde, dadas las longitudes l_1 y l_2 , al camión de la figura (5.15). Como se puede ver, el coeficiente de arrastre teórico para este caso es muy bajo comparado con el coeficiente de arrastre experimental de 0.6 calculado para este camión.

Lamentablemente no contamos con valores de EC_d para el caso de las dos placas con α cercano a $\pi/2$ y con $l_2 \lll l_1$, i.e. k aproximadamente uno, para los cuales creemos que el modelo teórico da buenas aproximaciones.

Comentario Bibliográfico

Para el lector que quiera estudiar más a fondo los temas de esta sección se le recomienda ver: [Gur65], [Lamb75] y [MT62]

Capítulo 7

Posibles soluciones al problema de la velocidad infinita en los vértices

En este capítulo vamos a examinar algunas ideas alternativas para método de solución con las cuales tratamos de evitar el tener que lidiar con una velocidad infinita en los vértices o con una distribución de velocidades que resulte en una baja de presión sobre todos los lados de un obstáculo poligonal que se encuentren entre dos vértices de velocidad infinita, o entre un vértice de velocidad infinita y un punto de separación del flujo sobre el obstáculo. En particular trabajaremos con el problema del frente del camión para el cuál dimos ya una primera aproximación en el capítulo anterior. Estos métodos los presentamos a nivel de propuesta ya que no haremos un análisis detallado de cada uno.

7.1. Suma de soluciones

Un modelo que podemos proponer para aproximar la solución de este problema es el de tomar los resultados para la placa ortogonal y el de la cuña y combinarlos.

Sabemos del resultado experimental para un camión cuyo frente está formado por dos placas de longitud casi idéntica y en el cual la placa superior

forma un ángulo de .52 radianes con la línea de suelo, fig(5.15), que para este caso el coeficiente de arrastre experimental es de .6. Veamos si con este método podemos reproducirlo.

Dado que el frente del camión está formado por dos placas de longitud casi idéntica y la placa de arriba forma un ángulo de .52 radianes con la horizontal, podríamos considerar la velocidad en el vértice igual a la velocidad en el punto medio entre el punto de estancamiento C y el punto de separación A, obtenida del resultado para la placa ortogonal, a la cuál vamos a llamar $v_{.25}$, y después buscar el punto sobre la cuña donde la velocidad es igual a $v_{.25}$, calcular la presión por separado para cada caso, sumarlas y luego obtener el coeficiente de arrastre tomando en cuenta la longitud total de las 2 placas.

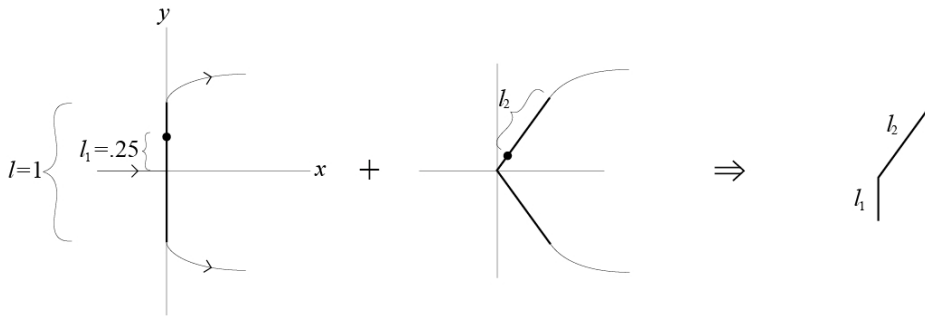


Figura 7.1: Método para sumar las soluciones

Sabemos que en general

$$\frac{l}{2} = \frac{2\phi_0}{v_0} \int_0^1 \zeta t dt \quad \phi_0 = \frac{lv_0}{4} \frac{1}{\int_0^1 \zeta t dt}$$

y

$$P = \phi_0 v_0 \rho \int \left(1 - \frac{1}{|\zeta|^2}\right) \zeta t dt$$

Para la placa ortogonal

$$\zeta = \frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} e^{i\pi/2} = \frac{t}{1 - (1-t^2)^{1/2}} e^{i\pi/2}$$

por lo tanto

$$\frac{l}{2} = \frac{2\phi_0}{v_0} e^{i\pi/2} \int_0^1 (1-t^2)^{1/2} + 1 dt$$

$$\implies \phi_0 = \frac{lv_0}{4 \int_0^1 (1-t^2)^{1/2} + 1 dt} = \frac{lv_0}{4 + \pi} \approx lv_0(.14002)$$

Veamos ahora para que $t = t^*$ se cumple que $l_1 = .25$. Dada la formula que tenemos para la longitud total,

$$\frac{.5}{2} = 2(.14002) \int_0^{t^*} (1-t^2)^{1/2} + 1 dt \implies .8927 = \int_0^{t^*} (1-t^2)^{1/2} + 1 dt$$

$$\implies t^* = .45445$$

Ahora calculemos la velocidad $v_{.25}$ sobre la placa ortogonal para t^* . Tenemos que $\zeta = \frac{v_0}{v} e^{i\theta}$, por lo tanto en este caso, tomando $v_0 = 1$

$$v_{.25} = \frac{v_0 e^{i\pi/2}}{\frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} e^{i\pi/2}} = \frac{t^*}{(1-t^{*2})^{1/2} + 1}$$

$$\implies v^* = .2403$$

Para la cuña tenemos que

$$\zeta = \left[\frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right]^{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{i\alpha}$$

tomando en cuenta que $\alpha = .52$, hay que encontrar para que \hat{t} se cumple que la velocidad es $v_{.25} = .2403$

$$|\zeta| = \frac{1}{v} = \left[\frac{(1-t^2)^{1/2} + 1}{t} \right]^{\frac{2(.52)}{\pi}} \implies .2403 = \frac{1}{\left[\frac{(1-\hat{t}^2)^{1/2} + 1}{\hat{t}} \right]^{\frac{2(.52)}{\pi}}}$$

resolviendo tenemos que $\hat{t} = .0269$.

Ahora bien, sabemos que en el caso de la cuña con longitud total 1 y ángulo interno igual a .52 radianes, $\hat{\phi}_0 = .3508$. Además, la longitud total de la cuña para t variando de .0269 a 1 es

$$\frac{l}{2} = 2(.3508) \int_{.0269}^1 \left[\frac{1 + (1 - t^2)^{1/2}}{t} \right]^{2* .52/\pi} t dt = .4986$$

de donde $l_{\text{cuña}} = .997$

La presión para el segmento de placa ortogonal es

$$P_o = 2\phi_0 \int_0^{.45445} \left[1 - \frac{1}{|\zeta|^2} \right] \zeta t dt = 2(.14002)(.8766) = .2454$$

y la presión para el segmento de cuña es

$$P_c = 2\hat{\phi}_0 \int_{.0269}^1 \left[1 - \frac{1}{|\zeta|^2} \right] \zeta t dt = 2(.3508)(.3447) = .2418$$

Por lo tanto la fuerza de arrastre debida a la presión es

$$F_d = P_o + \sin(.52)P_c = .3655$$

y dado que la longitud total es $L = l_o + l_c = .5 + .9972$ donde l_o y l_c son las longitudes de la placa ortogonal y de la cuña respectivamente, y que $C_d = (2F_d)/(\rho v_0 L)$, entonces

$$C_d = \frac{2(.3655)}{.5 + .9972} = .49$$

Este resultado es bajo comparado con el valor experimental del coeficiente de arrastre, pero es más cercano que el obtenido por medio del método del capítulo anterior. Uno de los problemas graves que tiene este método de solución es la arbitrariedad con la que se elige la velocidad que se quiere tener en el vértice, ya que nada nos asegura que esta velocidad sea la misma que la velocidad en la placa ortogonal en el punto medio entre C y A.

7.2. Disminución no monótona de la velocidad

Parte de lo que nos llevó a considerar una solución de la forma que vimos en el capítulo anterior para el problema del frente de un camión, fue la solución dada por A. E. H. Love, ver [Love1891], para el problema de un obstáculo poligonal en forma de U, formado por tres placas, con apertura en contra de la dirección del flujo

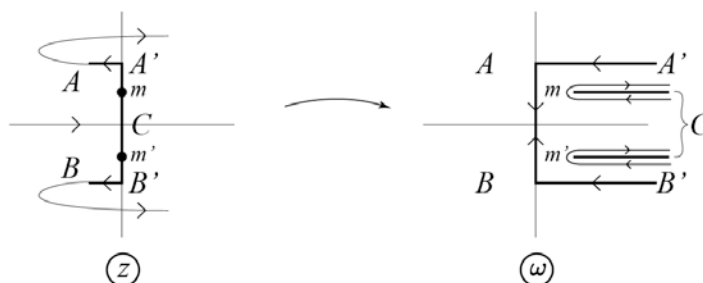


Figura 7.2: Aproximación de los bordes redondeados

En este caso debido a la existencia de tres puntos sobre el obstáculo donde la velocidad se anula, estos son A, B y C, entonces se tienen dos puntos M y M' donde la velocidad alcanza un máximo, ver §6.1, que en el plano hodógrafo ζ son mapeados a los puntos ζ_M y $\zeta_{M'}$ y que a su vez, cuando estos son mapeados al plano t con la fórmula de Schwarz-Christoffel nos quedan como parámetros libres con los cuales podemos ajustar para que cierre el polígono correctamente. Esto implica que la geometría de la solución es la que nos fija el valor de la velocidad en los puntos M y M'.

Teniendo esto en mente podríamos pensar en proponer una solución para el problema del frente de un camión de forma tal que la velocidad en las esquinas sea infinita, pero donde esta no decaiga monótonamente hasta la velocidad v_0 en los puntos de separación, sino que después de pasar la vecindad con velocidad cercana a ∞ , correspondiente al vórtice que se genera en la arista, ver fig(5.9), podríamos suponer que la velocidad decae hasta una velocidad v^* menor a v_0 en un punto m y que posteriormente se repone hasta llegar a v_0 en los puntos de separación. Esto generaría una región de cambio en el plano ζ con dos vértices m_ζ que al mapearlos al plano t nos servirían como parámetros para

cerrar correctamente el polígono. La magnitud de la velocidad que representan quedaría fija debido al valor que deben tener como parámetros para que cierre el polígono correctamente.

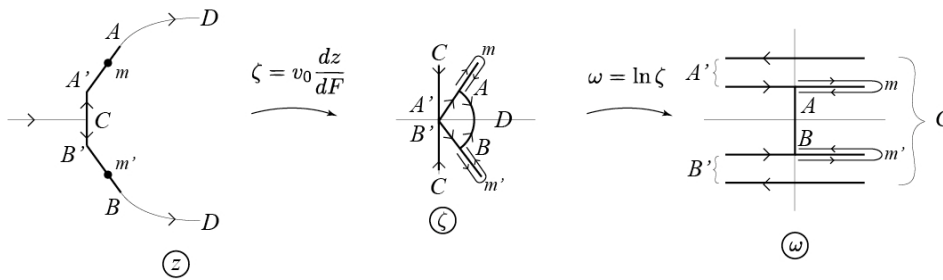


Figura 7.3: Mapeos para la velocidad con decaimiento no monótono

en este caso $\frac{d\omega}{dt}$ estaría definido por

$$\frac{d\omega}{dt} = M \frac{t^2 - m^2}{(t^2 - 1)^{1/2}(t^2 - k^2)t}$$

A partir de aquí, se sigue el mismo proceso descrito en los capítulos 4 y 6, para obtener los parámetros físicos del flujo.

7.3. Mapeo directo entre el flujo en z y el potencial complejo F

Los resultados que hemos visto hasta el momento los hemos obtenido por medio de los métodos clásicos de solución propuestos por Kirchoff y Helmholtz en la segunda mitad del siglo XIX, y que posteriormente fueron estudiados por A. E. H. Love y J. H. Michell para intentar hacer de estos un proceso más sistemático.

En esta sección vamos a discutir un segundo método de solución más reciente que ha sido estudiado por V. I. Monakhov, [Mon83], y por A. R. Elcrat y L. N. Trefethen, [DT02], en el cuál se propone resolver el flujo con líneas de corriente libres sobre un obstáculo poligonal por medio de un mapeo

de tipo Schwarz-Christoffel que manda el simiplano $Re\{F\} \geq 0$ directamente a la region de cambio en el plano físico z .

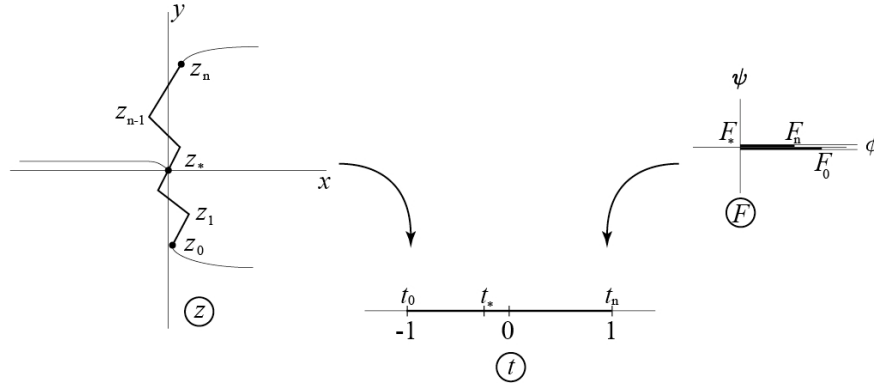


Figura 7.4: Mapeo directo del plano z al plano t

Lo que sabemos sobre el flujo en el plano físico es lo siguiente:

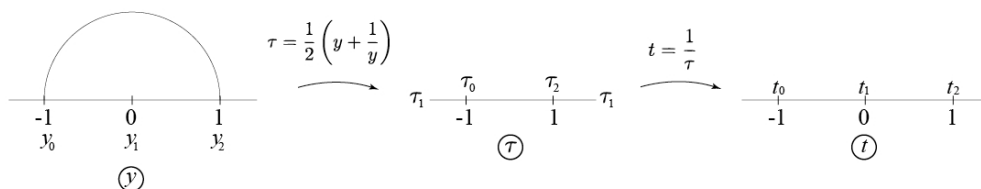
1. $arg \frac{dz}{dF}$ cambia para $t \in (-1, 1)$ sólo en los puntos t_1, t_2, \dots, t_{n-1} y t_* (obstáculo poligonal)
2. $|\frac{dz}{dF}| = 1$ para $t \notin [-1, 1]$ (por las líneas de corriente libres)
3. $arg(\frac{dz}{dF})$ se conoce para t_n (orientación del obstáculo)
4. $arg(\frac{dz}{dF}) = 0$ en $t = \infty$ (orientación del flujo lejano)

La primera condición es la condición estándar para el mapeo de Schwarz-Christoffel, dado que queremos encontrar un mapeo de este mismo tipo entonces nuestro objetivo es expresar $\frac{dz}{dF}$ como un producto donde cada término debe introducir un brinco en el argumento en los puntos t_i pero sin que este afecte a los demás puntos t_j ni a la condición 2. Por lo tanto buscamos un mapeo de la forma

$$\hat{\zeta} = \frac{dz}{dF} = \prod_1^{n-1} h_k$$

Dada la condición 2, sabemos que cada término h_k debe mapear los puntos $t \notin [-1, 1]$ en alguna sección del círculo unitario, y dada la condición 1, h_k debe mapear los puntos $t \in [-1, 1]$ en los rayos que unen el origen con la sección de círculo unitario obtenido del mapeo de los puntos $t \notin [-1, 1]$, además el punto t_k debe ser mapeado al 0, o sea, cada término h_k debe mapear el semiplano superior en t en una sección del semicírculo superior. El ángulo interior en la sección del semicírculo determina el salto que se introduce en el argumento en cada punto t_k . Para hacer esto primero debemos obtener el mapeo entre el semiplano superior y el semicírculo superior, \hat{h}_k , de esta forma este mapeo luego lo podemos elevar a la potencia que nos de el brinco en el argumento y así obtenemos la sección de círculo que necesitamos.

Suponiendo que $t_k = 0$ y tomando $y = \hat{h}_k$, sabemos que el mapeo de Joukowski $x = (1/2)(y + 1/y)$ mapea el semicírculo superior en el plano y al semiplano inferior en el plano x . Por lo tanto, para mapear el semicírculo superior en el semiplano superior, como queremos que haga cada término \hat{h}_k , debemos invertir las siguientes transformaciones



entonces tenemos que

$$t = \frac{1}{\tau} = \frac{2}{y + \frac{1}{y}}$$

de donde

$$y = \frac{1 - (1 - t^2)^{1/2}}{t}$$

escogemos el signo negativo de la raíz, ya que este es el que nos da los valores de la función inversa en el rango $[-1, 1]$ que es el que nos interesa. Esto también lo podemos escribir como

$$y = \frac{1 - (1 - t^2)^{1/2}}{x} \frac{1 + (1 - t^2)^{1/2}}{1 + (1 - t^2)^{1/2}} = \frac{t}{1 + (1 - t^2)^{1/2}}$$

y por lo tanto, para que de esl salto en el argumento

$$h_k(t) = \hat{h}_k^{-\beta_k}(t) = \left(\frac{t}{1 + (1 - t^2)^{1/2}} \right)^{-\beta_k}$$

Esta transformación manda el 0 del plano t en el 0 del plano \hat{y} , y dado que en general los t_k no corresponden al 0 entonces primero debemos aplicar la transformación $(t - t_k)/(1 - t_k t)$ para mapear los puntos -1 , t_k y 1 en los puntos -1 , 0 y 1 respectivamente.

Juntando todo lo anterior tenemos que cada término $h_k = \hat{y}$ está dado por

$$h_k(t) = \left(\frac{t - t_k}{1 - t_k t + ((1 - t^2)(1 - t_k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_k}$$

Si $\gamma\pi$ es el ángulo del lado n respecto al eje x en el plano z , entonces para poder satisfacer la condición tres de las condiciones para el mapeo de Schwarz-Christoffel modificado tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dF} &= e^{i\gamma n\pi} \left(\frac{t - t_*}{1 - t_* t + ((1 - t^2)(1 - t_*^2))^{1/2}} \right)^{-1} \\ &\times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t - t_k}{1 - t_k t + ((1 - t^2)(1 - t_k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_k} \end{aligned} \quad (7.1)$$

y para satisfacer la condición cuatro para el mapeo de Schwarz-Christoffel modificado t_* debe satisfacer lo siguiente:

Cuando $t \rightarrow \infty$

$$\arg(h_k(\infty)) = -\beta_k \cos^{-1}(-t_k)$$

de donde, tomando \prod_* y \sum_* como el producto y la suma sobre $k = 1, 2, \dots, n-1$ y $k = *$,

$$\arg(e^{i\pi\gamma_n} \prod_* h_k(\infty)) = \gamma_n\pi - \sum_* \beta_k \cos^{-1}(-t_k)$$

la condición cuatro entonces implica que

$$\gamma_n\pi - \sum_* \beta_k \cos^{-1}(-t_k) = 0 \tag{7.2}$$

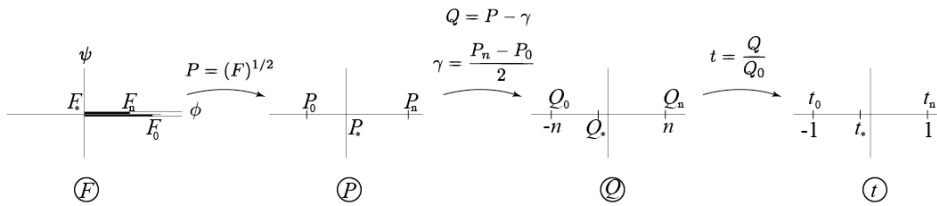
de donde

$$t_* = -\cos\left(\gamma_n\pi - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \cos^{-1}(-t_k)\right)$$

Finalmente obtenemos que el flujo se puede escribir como la integral de (7.1)

$$z(F) = C + e^{i\gamma_n\pi} \int^F \prod_* h_k(t') dF' \tag{7.3}$$

Y dado que la relación entre t y F esta definida por los siguientes mapeos



entonces

$$F = \frac{1}{2}W(t - t_*)^2$$

donde $W = 2(Q_n)^{1/2}$ con lo cual

$$\frac{dF}{dx} = W(t - t_*)$$

De esta manera, sustituyendo $dF = W(t - t_*)dx$ en la ecuación (7.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
 z(t) &= C + W e^{i\gamma n \pi} \int^{t'} (t' - t_*) \left(\frac{t' - t_*}{1 - t_* t' + ((1 - t'^2)(1 - t_*^2))^{1/2}} \right)^{-1} dt' \\
 &\times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t' - t_k}{1 - t_k t' + ((1 - t'^2)(1 - t_k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_k} dt' \\
 &= C + W e^{i\gamma n \pi} \int^{t'} \left(1 - t_* t' + ((1 - t'^2)(1 - t_*^2))^{1/2} \right) \\
 &\times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t' - t_k}{1 - t_k t' + ((1 - t'^2)(1 - t_k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_k} dt'
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Planteado de esta manera tendríamos que para el problema del frente del camión, debido a la simetría, $t_1 = k$, $t_2 = -k$ y $t_* = 0$, por lo tanto, para este problema

$$\begin{aligned}
 z(t) &= C + W e^{i\gamma n \pi} \int^{t'} (1 + (1 - t'^2)^{1/2}) \\
 &\times \left(\frac{t' - k}{1 - kt' + ((1 - t'^2)(1 - k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_k} \\
 &\times \left(\frac{t' + k}{1 + kt' + ((1 - t'^2)(1 - k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_{-k}} dt'
 \end{aligned}$$

donde β_k y β_{-k} son iguales debido a la simetría del obstáculo

Capítulo 8

Fórmula de Schwarz-Christoffel modificada para flujos sobre obstáculos curvos

Estudiemos ahora la posibilidad de aplicar el método de solución con la fórmula de Schwarz-Christoffel modificada que comentamos en §7.3 para problemas de flujos con líneas de corriente libres sobre obstáculos curvos.

Seguiremos una modificación del resultado de McKean, [Mc99], que estudia el problema en el caso cuando no hay líneas de corriente libres y con el cuál prueba de manera alternativa el teorema de Riemann para mapeos conformes.

Recordemos que el mapeo para obstáculos poligonales con líneas de corriente libres de §[7.3], en el caso de obstáculos simétricos respecto al punto de estancamiento y a la dirección del flujo está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= W e^{i\gamma_n} (1 + (1 - t^2)^{1/2}) \\ &\times \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{t - t_k}{1 - t_k t + ((1 - t^2)(1 - t_k^2))^{1/2}} \right)^{-\beta_k} \end{aligned} \quad (8.1)$$

donde $-1 < t_1 \dots t_{n-1} < 1$. El obstáculo curvo lo podemos aproximar por una familia de polígonos como la que se ve en la figura

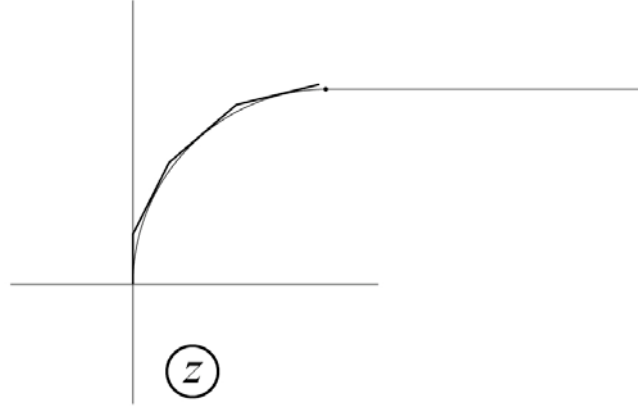


Figura 8.1: Aproximación poligonal

Los ángulos β_k están dados por $\theta_{k+1} - \theta_k$ donde lo θ_k es el ángulo de la tangente a la curva que define al obstáculo.

Tomando el logaritmo de (8.1) tenemos

$$\begin{aligned} \ln \frac{dz}{dt} &= \ln W + i\gamma_n + \ln(1 + (1 - t^2)^{1/2}) \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} (\theta_{k+1} - \theta_k) \ln \left(\frac{t - t_k}{1 - t_k t + ((1 - t^2)(1 - t_k^2))^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Tomando a s , $0 \leq s \leq 1$, como parámetro a lo largo de la curva $z = q(\eta)$ y dividiendo a esta en $N - 1$ intervalos podemos tomar $\theta_k = \theta(s_k)$ y $t_k = x(s_k)$ y pasar al límite con $k \rightarrow \infty$ de donde tenemos, despejando a γ_n de (7.2), que

$$\begin{aligned} \ln \frac{dz}{dt} &= \ln W + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \theta'(s) \cos^{-1}(t(s)) ds + \ln(1 + (1 - t^2)^{1/2}) \\ &- \int_0^1 \ln \left(\frac{t - t(s)}{1 - t(s)t + ((1 - t^2)(1 - t(s)^2))^{1/2}} \right) ds \end{aligned} \quad (8.3)$$

de donde

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^t W[1 + (1 - t(\eta)^2)^{1/2}] e^{\frac{i}{\pi} \int_0^1 \theta'(s) \cos^{-1}(t(s)) ds} e^{-\int_0^1 \ln\left(\frac{t(\eta)-t(s)}{1-t(s)t(\eta)+[(1-t(\eta)^2)(1-t(s)^2)]^{1/2}}\right) ds} d\eta \quad (8.4)$$

Si podemos encontrar una curva $x(\eta)$ suave en la que se cumpla $z(x(\eta)) = q(\eta)$ donde $q(\eta)$ es la curva que define al obstáculo PQ en A, entonces la ecuación (8.4) será la solución buscada ya que es analítica en A y por construcción satisface la condición de frontera. El problema es entonces el de determinar la función $t(s)$. La función $t(s)$ es el análogo a las $N - 1$ condiciones que se deben imponer en (7.4) para que las longitudes de los segmentos $\overline{z_{k+1}z_k}$ sean las fijadas por el problema. En el problema discreto estudiamos como la posibilidad de resolver estas ecuaciones está ligada a la comprensión del flujo que determina el mapeo hodográfico.

Ahora examinaremos más la ecuación para la curva $t(s)$ que es análoga a la propuesta por McKean y probaremos la existencia de soluciones para algunos casos. La ecuación para $t(\eta)$ se obtiene derivando (8.4)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} t'(\eta) &= t'(\eta) W[1 + (1 - t(\eta)^2)^{1/2}] e^{\frac{i}{\pi} \int_0^1 \theta'(s) \cos^{-1}(t(s)) ds} \\ &\quad e^{-\int_0^1 \ln\left(\frac{t(\eta)-t(s)}{1-t(s)t(\eta)+[(1-t(\eta)^2)(1-t(s)^2)]^{1/2}}\right) ds} \\ &= q'(\eta) \quad , \text{ para } 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned}$$

Tomando valor absoluto y recordando que $\frac{dt}{d\eta} > 0$ porque queremos recorrer el plano de izquierda a derecha tenemos que

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{|q'(\eta)|}{W[1 + (1 - t(\eta)^2)^{1/2}]} e^{\int_0^1 \ln \frac{(t(\eta)-t(s))\theta'(s)}{1-t(s)t(\eta)+[(1-t(\eta)^2)(1-t(s)^2)]^{1/2}} ds} \quad (8.5)$$

donde $|q'(\eta)|$ es una función conocida ya que es la longitud local del obstáculo.

Por lo tanto tenemos que encontrar una solución a (8.5) que no es un problema de valores iniciales si no un problema de tipo ecuación de Villat, [BZ57].

El tamaño del obstáculo es proporcional a $\widetilde{W} = \frac{\max |q'(\eta)|}{W}$. Si \widetilde{W} es cercano a cero, se tiene un obstáculo muy pequeño y (8.5) tiene la forma de una contracción en un espacio apropiado. Por otra parte, si \widetilde{W} es de orden uno entonces (8.5) ya no es una contracción y se tiene que usar otro resultado de punto fijo.

Comencemos por entender el caso cuando \widetilde{W} es cercano a cero. En este caso tenemos de la ecuación (8.5) que

$$t(\eta) = t_1 + \int_0^\eta \frac{|q'(\xi)|}{\widetilde{W}[1 + (1 - t(\xi)^2)^{1/2}]} e^{\int_0^1 \ln \frac{(t(\xi) - t(s))\theta'(s)}{1 - t(s)t(\xi) + [(1 - t^2(\xi))(1 - t^2(s))]^{1/2}} ds} d\xi \quad (8.6)$$

Ahora estudiemos obstáculos especiales de la forma

$$t(s) = t_1 + \beta s + h(s)$$

que son perturbaciones de obstáculos que son aproximadamente un arco de círculo ya que si $\theta'(s) = 1$ (curvatura constante) entonces $h = 0$ es una solución exacta del problema de mapeo conforme sin línea de corriente libre (se puede ver que (8.6) reproduce el mapeo de un círculo en el semiplano). Entonces para este tipo de obstáculos tenemos la ecuación para $h(s)$ de la forma

$$h(s) = -\beta(s) + \widetilde{W}G(h(s))$$

donde G es un operador definido por

$$G(h(s)) = \int_0^\eta \left| \widetilde{q}'(\eta) \right| e^{\int_0^1 \ln \frac{(\beta(\xi - s) + (h(\xi) - h(s)))\theta'(s)}{1 - (t_1 + \beta(s) + h(s))(t_1 + \beta(\xi) + h(\xi))[(1 - (t_1 + \beta(s) + h(s))^2)(1 - (t_1 + \beta(\xi) + h(\xi))^2)]^{1/2}} ds} d\xi \quad (8.7)$$

para funciones $h(s)$ que son Lipschitz continuas para $0 \leq s \leq 1$ y que satisfacen $h(0) = 0$ donde $\widetilde{q}' = \frac{q'}{\max q'}$

El espacio de funciones f con la norma

$$|f|_1 = \max_{0 \leq s \leq 1} |f| + \max_{t, s} \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right|$$

es completo en esta norma y entonces basta probar que el operador

$$Th(s) = -\beta s + \widetilde{W}G(h(s))$$

manda una bola $|h|_1 \leq \delta$ en ella misma, $|Th|_1 \leq \delta$, y que es una contracción, es decir

$$|Th_1 - Th_2|_1 \leq \alpha |h_1 - h_2| \quad , \quad \alpha < 1$$

Entonces tiene un único punto fijo $Th(s) = h(s)$ que es la solución buscada.

En el operador G todos los términos son diferenciables con respecto a sus argumentos excepto el término que involucra $\ln(\beta(\xi - s) + (h(\xi) - h(s)))$ que es el que determina, como siempre en estos problemas, [BZ57], el comportamiento del mapeo. Tenemos entonces

$$\int_0^1 \ln(\beta(\xi - s) + (h(\xi) - h(s))) ds = \int_0^1 \ln \beta + \ln \left(1 + \frac{h(\xi) - h(s)}{\beta(\xi - s)} \right) ds$$

que puede ser estimado en valor absoluto cuando $|h|_1 \leq \delta$, δ pequeño, como

$$\beta + \text{constante} \frac{1}{\beta} |h|_1$$

De aquí tenemos que

$$|Th|_1 \leq \text{constante} \left(\beta + \frac{\widetilde{W}}{\beta} |h|_1 \right)$$

Entonces tomando $\widetilde{W} = \mu\beta^2$ tenemos que $|Th|_1 \leq \text{constante}\beta(1 + \mu\beta)$ y tomando $\beta \leq \frac{\delta}{\text{constante}}$ tenemos que $|Th|_1 \leq \delta$ que prueba que para obstáculos pequeños T manda la bola en la bola. Falta probar que T es una contracción.

Para probar que T es una contracción consideremos la diferencia

$$\begin{aligned} & e^{\int_0^1 \ln[\beta(\xi-s)+(h(\xi)-h(s))]\theta'(s)ds} - e^{\int_0^1 \ln[\beta(\xi-s)+(h_1(\xi)-h_1(s))]\theta'(s)ds} \\ & \leq e^{\left| \int_0^1 \ln[\beta(\xi-s)+(h(\xi)-h(s))]\theta'(s)ds \right|} \left| \int_0^1 \mathbb{A} ds - \int_0^1 \mathbb{B} ds \right| \end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{A} = \ln[\beta(\xi - s) + (h(\xi) - h(s))]\theta'(s)$$

y

$$\mathbb{B} = \ln[\beta(\xi - s) + (h_1(\xi) - h_1(s))]\theta'(s)$$

la última diferencia en el valor absoluto la podemos estimar como

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \left[\ln \left(1 + \frac{h(\xi) - h(s)}{\beta(\xi - s)} \right) - \ln \left(1 + \frac{h_1(\xi) - h_1(s)}{\beta(\xi - s)} \right) \right] \theta'(s) ds \right| \\ & \leq \text{constante} \frac{1}{\beta} |h_1 - h|_1 \end{aligned}$$

mientras que para el término de la exponencial tenemos

$$e^{\int_0^1 (\beta(\xi-s) + h(\xi) - h(s))\theta'(s) ds} \leq \frac{\text{const}}{\beta} e^{\max|\theta'| |h|_1}$$

Entonces, dadas todas las estimaciones anteriores tenemos que

$$|Th_1 - Th| \leq \frac{\mu}{\beta} \text{const} |h_1 - h|$$

De aquí se sigue que si μ es chico tenemos una contracción. Con esto probamos la existencia para un obstáculo muy pequeño cercano a un arco de círculo.

Este resultado podríamos combinarlo con el cálculo para un polígono y estudiar así el efecto de una esquina redondeada.

Esta prueba muestra que la velocidad en una esquina redondeada es grande pero finita, ya que el operador G suaviza la singularidad.

El problema de un obstáculo de orden uno hasta donde sabemos, ver [BZ57] y [Mon83], es un problema abierto ya que los resultados disponibles usando ideas de tipo Riemann-Hilbert son también de carácter local.

Capítulo 9

Conclusión

Este método provee una buena idea de la forma física del flujo debido a las líneas de corriente libres que definen la estela y a los puntos de separación así como también del mecanismo cualitativo de por que se reduce el coeficiente de arrastre en objetos con esquinas.

Pero el aproximar con un flujo cuya velocidad decae monótonamente de las esquinas con velocidad infinita a la velocidad del flujo lejano en los puntos de separación no reproduce de manera correcta el efecto sobre el coeficiente de arrastre del vórtice que se genera en la realidad en los vértices del obstáculo, siendo demasiado brusca la baja de presiones lo cual causa una baja considerable en el coeficiente de arrastre.

Es por eso que esta teoría cayó en desuso, ver [], por que el coeficiente de arrastre C_d obtenido de estos flujos es muy bajo. Los únicos casos que aproxima de manera mas o menos correcta son los de obstáculos simétricos sin esquinas y los de placas inclinadas.

Hasta donde sabemos, el problema de flujos con líneas de corriente libres sobre obstáculos curvos no ha sido resuelto de manera general hasta hoy en dia, solamente algunos casos particulares de fronteras circulares y de arcos de elipse.

Bibliografía

- [And07] Anderson, J., “*Fundamentals of aerodynamics*”, 4th ed., McGRAW-HILL, 2007.
- [Bat02] Batchelor, G. K. “*Introduction to fluid dynamics*”, Cambridge University Press, Edinbrurgh, 2002.
- [BZ57] Birkhoff, G., Zarantonello, E. H., “*Jets, Wakes and Cavities*”, Accademic Press Inc., 2th ed., 1957.
- [Curr93] Currie, I. G. “*Fundamental mechanics of fluids*”, Marcell Dekker Inc, , 3th ed., Toronto, New Jersey, 1993.
- [CW03] Churchill, R. V., Ward, J., “*Complex variables and applications*”, McGRAW-HILL, 7th ed., 2003.
- [DT02] Driscoll, T. A., Trefethen, L. N. “*Schwarz-Christoffel mapping*”, Cambridge University Press, New York, 2002
- [Gur65] Gurevich, M. I., “*Theory of jets in ideal fluids*”, Accademic Press, New York, 1965.
- [HBL96] Hureau, J., Brunon, E., Legallais, Ph. “Ideal free streamline flow over a curved obstacle”, *J. Com. and App. Math.*, 72, 1996, 193-214
- [Huc98] Hucho, W-H, “*Aerodynamics of road vehicles*”, SAE International, 4th ed., 1998.
- [Kar80] Karamcheti, K., “*Principles of ideal fluid aerodynamics*”, Robert E. Krieger Publishing Company, New York, 1980.

-
- [Lamb75] Lamb, H., “*Hydrodynamics*”, Cambridge University Press, 6th ed., 1975.
- [Love1891] Love, A. H. “On the discontinuous fluid motions in two dimensions”, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1891
- [MC93] Marsden, J. E., Chorin, A. J., “*A mathematical introduction to fluid mechanics*”, 3th ed., TAM Springer, 1993.
- [Mc99] McKean, H. P., “A quick proof of Riemann’s mapping theorem”, *Com. on Pure and App. Math.* Vol. LII, 405-409
- [Mon83] Monakhov, V. N., “*Boundary-Value problems with free boundaries for elliptic systems of equations*”, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., New Jersey, 1983.
- [MT62] Milne-Thomson, L. M. “*Theoretical hydrodynamics*”, Macmillan and Co LT, 4th ed., London, 1962.
- [RS85] Stepler, R. “New-generation mini-vans”, *Popular Science*, Feb. 1985
- [Rob65] Robertson, J., “*Hydrodynamics in theory and application*”, Prentice-Hall, New Jersey, 1965.
- [Sadd05] Sadd M. H., “*Elasticity*”, USA, 2005.
- [SS03] Saff, E. B., Snider, A. D., “*Fundamentals of Complex Analysis*”, Pearson Education Inc., 3th ed., New Jersey, 2003.
- [Vel05] Velaso, R. M., “*Introducción a la hidrodinámica clásica*”, Fondo de Cultura Económica, 1a ed., México, 2005.