UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ACCIONES PROPIAS Y DIMENSIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

HUGO JUÁREZ ANGUIANO

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGEY ANTONYAN APETNAKOVICH

MÉXICO, D.F. AGOSTO 2010.

A mis papás María Concepción Anguiano Vázquez y Felipe Juárez Moreno.

A mis hermanos Jovanni, Nancy y Felipe.

A mi novia Marilyn Soto Rojas.

A todos mis maestros.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a las siguientes personas e instituciones: a mi director de tesis el Dr. Sergey Antonyan quien me ha apoyado bastante con su paciencia y su consejo. A los doctores Ángel Tamariz Mascarúa y Francisco Marmolejo Rivas quienes participaron como mis tutores y han sido de gran influencia en mis estudios de posgrado y de gran apoyo en mi estancia en la facultad. También a mis sinodales los doctores Adalberto García-Maynez y Cervantes, Alexander Bykov, Salvador García Ferreira y Vladimir Tkachuk por leer cuidadosamente mi tesis, sus observaciones fueron de gran ayuda para mi. A todos mis profesores de la FCFM-BUAP, del IMATE-CU y de la FC-UNAM. A mis compañeros y amigos Daniel Varela, Leonardo Rodríguez, Natalia Jonard y Saúl Juárez por todo su apoyo y amistad. A mis papás María Concepción y Felipe por todo el amor y apoyo que siempre me han brindado. Al amor de mi vida, mi novia Marilyn por todo su amor, apoyo y comprensión. A CONACyT por darme una beca mientras estudié el doctorado. Al Programa de Fomento a la Gracuación de la UNAM por darme una beca para escribir mi tesis.

Índice general

Introducción

"¿Quién de nosotros no se alegraría de levantar el velo tras el que se oculta el futuro; de echar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo durante los siguientes siglos? ¿Cuáles serán los objetivos concretos por los que se esforzarán las mejores mentes matemáticas de las generaciones venideras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos descubrirán las nuevas centurias en el amplio y rico campo del pensamiento matemático? ".

Así comenzó su conferencia el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) en el Segundo Congreso Internacional de Los Matemáticos celebrado en París en 1900. Hilbert proponía, entre otros problemas matemáticos importantes, el famoso quinto problema: desarrollar la teoría de grupos continuos de transformaciones (la ahora llamada teoría de grupos de Lie) sin la hipótesis de diferenciabilidad sobre las operaciones que definen al grupo.

El concepto de simetría del siglo XIX fue desarrollado por el matemático noruego Sophus Lie (1842-1899) de una manera detallada en la década de 1874 a 1884, donde publicó tres volúmenes que describía su teoría. Aquí es donde se ponen las bases para lo que en el principio del siglo XX sería los grupos continuos y después los grupos topológicos de transformaciones. Hilbert fue el primero de darle un punto de vista topológico a la teoría de grupos continuos, de hecho, el quinto problema fue el único de los 23 problemas propuestos que se refería a la naciente topología.

Con el paso del tiempo el quinto problema llegó hacer mejor entendido, sobre todo cuando aparece la noción de grupo topológico a finales de los 20's del siglo pasado. Esto permite que el quinto problema pueda ser formulado en lenguaje moderno: demostrar que *todo grupo topológico localmente euclidiano es un grupo de Lie*. El desarrollo del álgebra topológica en el los 30's del mismo siglo llevó, junto al proceso de dar una forma más concreta al quinto problema de Hilbert, el problema más general de *determinar la estructura de* *los grupos localmente compactos arbitrarios.*

Los dos problemas estaban estrechamente relacionados, y la solución de uno para alguna clase de grupos podría ser aplicada a la solución del otro. Cuando von Neumann obtuvo una solución del quinto problema de Hilbert para grupos compactos, Pontryagin lo utilizó en su investigación sobre la estructura de grupos compactos que son segundo numerables. Después una solución del quinto problema para grupos conmutativos fue encontrada por Pontryagin como una concecuencia de su investigación sobre la estructura de grupos conmutativos localmente compactos. En 1946 Chevalley publicó una solución al quinto problema para grupos solubles y Mal'cev en 1946 usa este resultado en el estudio de la estructura local de grupos solubles conexos localmente compactos.

Finalmente, en 1952 Gleason, Montgomery y Zippin resuelven el quinto problema de Hilbert en el caso general: *Todo grupo localmente compacto localmente conexo de dimensión finita es un grupo de Lie.* En 1953 Yamabe generaliza el método de Gleason y prueba que *Todo grupo localmente compacto contiene un subgrupo cerrado que es el límite inverso de grupos de Lie.*

Una versión más general del quinto problema, llamada *La Conjetura de Hilbert-Smith*, asegura que *si un grupo localmente compacto actúa efectivamente en una variedad, entonces el grupo tiene que ser de Lie.* Hasta el día de hoy no se ha podido probar, sin embargo se tienen algunos resultados parciales (ver [36] y [49]). Con todo este proceso quedaba una próspera teoría de grupos localmente compactos de transformaciones por ser desarrollada.

La teoría de grupos de transformaciones o de G-espacios, viene a ser una generalización de haces fibrados y en la década posterior a la solución del quinto problema ya había muchos resultados en la teoría de grupos compactos de Lie de transfromaciones. El ingrediente principal era el concepto de rebanada (un concepto que fue creado y desarrollado por Gleason, Montgomery, Mostow, Palais y Zippin y el cual generaliza el de sección local en la teoría de haces fibrados) que era el núcleo en las demostraciones de muchos reultados. *En un G-espacio X, donde G es un grupo compacto de Lie, por cada punto pasa una rebanada*[1]. Ya se había demostrado que la noción de rebanada no podía existir en grupos más generales que grupos compactos de Lie, y llegó a ser claro que si uno quería ir más allá, algunas restricciones tenían que ser hechas en la forma en que el grupo actúa.

En 1961 Richard Palais (basandose en resultados previos de Henri Cartan

[1]En el capítulo de preliminares serán dadas todas las nociones básicas

en haces fibrados) define la noción de acción propia de un grupo localmente compacto y prueba, entre otras cosas, que si el grupo que actúa es un grupo de Lie (ya sin la hipótesis de compacidad) y la acción es propia, entonces también se cumple que en cada G-espacio propio X, existe una rebanada en cada punto. Recientemente, en 1994 Sergey Antonyan en su artículo [4] demuestra que para grupos compactos de transformaciones, donde el grupo que actúa no necesariamente es de Lie, existe una noción de rebanada "aproximativa", la cual es suficiente para extender muchos resultados del caso en que el grupo es de Lie. Seguiendo la misma línea de inevstigación, además de utilizar algunas ideas de H. Abels expuestas en su artículo [2], Antonyan en su artículo [8] demuestra el resultado más general de la existencia de rebanadas aproximativas en grupos localmente compactos de transformaciones: *Si G es un grupo localmente compacto que actúa propiamente en un espacio de Tychonoff, entonces existe una rebanada aproximativa en cada punto.*

De igual manera, otro concepto matemático se estaba gestando a principios del siglo XX. Con la aparición de la Topología llegó a ser claro que era necesario una definición topológica de *dimensión* por las siguientes razones (entre muchas otras): Cantor (1845-1918) había demostrado que existía una biyección entre el intervalo $I = [0, 1]$ y su cuadrado $I \times I$, también Peano (1858-1932) había demostrado que existía una función continua de I sobre $I \times I$. Estos resultados parecían destruir el sentido geométrico de la Topología, se necesitaba un valor numérico en cada espaico topológico que fuera invariante bajo homeomorfismos de tal suerte que ese valor numérico fuera el que nuestra intuición precibía para los objetos geométricos bien conocidos (n para $\mathbb{R}^n$, por ejemplo).

Los primeros en dar una teoría satisfactoria de la dimensión fueron Pavel Urysohn (1898-1924) y Karl Menger (1902-1985). Su dimensión es la que ahora se conoce como *la dimensión inductiva pequeña.* Otras dos teorías fueron dadas por Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) y Eduard Čech (1893-1960), conocida como *la dimensión inductiva grande* y la desarrollada por Eduard Čech y Henri Lebesgue (1875-1941) conocida como *la dimensión cubriente.* Hoy en día es claro que la dimensión inductiva pequeña es satisfactoria sólo para espacios métricos separables, donde las tres dimensiones coinciden. En espacios métricos generales la dimensión inductiva grande coincide con la dimensión cubriente. La que mejor se comporta en espacios todavía más generales (de Tychonoff o normales) es la dimensión cubriente.

Dentro de la teoría de los grupos de transformaciones se tiene, por ejemplo, que en grupos localmente compactos y en sus cocientes las tres dimensiones coinciden, lo cual fue demostrado por B. Pasynkov en 1962. Cuando el grupo que actúa es compacto, se tiene un estudio más sistemático de la dimensión cubriente de los G-espacios. De los primeros resultados que se obtuvieron es el que relaciona la dimensión de un G-espacio X y la de su espacio de órbitas X/G. En 1961, Palais en su artículo [46] demuestra lo siguiente:

Teorema 0.0.1. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio metrizable separable. Entonces*

$$\dim X/G \leq \dim X.$$

En 1982 Deo y Triphati (ver [18]) lo generalizan para G-espacios paracompactos y en 1989 Megrelishvili (ver [37]) para G-espacios de Tychonoff. En el mismo artículo de Deo y Tripathi, usando el Teorema anterior demuestran lo siguiente:

Teorema 0.0.2. *Sean G un grupo compacto de Lie y X un espacio finitístico. Entonces X/G también es finitístico.*

Los espacios finitísticos fueron inventados por Swan en 1960 (ver [54]) y son una generalización común de espacios paracompactos de dimensión finita y de espacios compactos arbitrarios. Estos espacios muestran mucha utilidad al estudiar cohomología equivariante y por mucho tiempo no se supo si la propiedad de ser finitístico se preservaba bajo la proyección orbital cuando el grupo actuante es compacto de Lie.

Cuando el grupo no es de Lie, la desigualdad $\dim X \leq \dim X/G$ no se preserva incluso si el grupo es de dimensión cero. Smirnov en su artículo [52], basandose en una construcción de Kolmogorov expuesta en [33], mostró un G-espacio X cuya dimensión es cero y su espacio de órbitas es de dimensión 1. Sin embargo V.V. Filippov en 1979 en su artículo [24] mostró una desigualdad similar para grupos compactos arbitrarios.

Teorema 0.0.3. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio de Tychonoff. Entonces*

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim p,$$

donde $p : X \to X/G$ es la función orbital y $\dim p = \sup\{\dim G(x) \mid x \in X\}$.

Otro resultado que se abordó en el contexto de grupos compactos de transformaciones es el bien conocido teorema de Katětov-Morita (Teorema 1.6.12), el cual nos dice que la dimensión cubriente y la dimensión inductiva grande coniciden en la clase de los espacios metrizables. Pasynkov, en su artículo [48] lo generalizó de la siguiente manera:

Teorema 0.0.4. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio. Si X/G es un espacio metrizable entonces* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Con este resultado se consigue una clase más amplia donde las dos dimensiones coinciden.

En esta tesis nosotros vamos a generalizar los resultados antes mencionados al caso de grupos de Lie y grupos localmente compactos que actúan propiamente en espacios paracompactos.

La tesis se compone de tres capítulos, en el Capítulo I revisaremos todos los preliminares que necesitamos, los conceptos y teoremas básicos que son necesarios para un mejor desarrollo de este trabajo. En esta parte vamos a desarrollar la noción de grupo topológico de transformaciones, también conocida como teoría de G-espacios. Veremos las propiedades básicas de estos objetos, muy en especial cuando el grupo que actúa es compacto. Al pasar a los grupos localmente compactos de transformaciones, notamos que ciertas restricciones se tienen que hacer en la forma en que el grupo actúa. Entonces revisamos las aciones propias de grupos localmente compactos, muy en particular el Teorema de la rebanada exacta de Palais y el Teorema de la rebanada aproximativa de Abels-Antonyan (Teoremas 1.3.16 y 1.3.20). Estos Teoremas juegan un papel central en nuestro trabajo, ya que nos dicen que todos los G-espacios propios son semejantes localmente a espacios donde el grupo actuante es compacto. También revisaremos los G-espacios X que tienen una acción propia y espacio de órbitas X/G paracompacto, se verá que en este caso X tiene que ser paracompacto (Teorema 1.4.5). En la última sección de este Capítulo revisaremos las nociones básicas de la teoría de la dimensión.

En el capítulo II abordaremos las acciones propias de grupos de Lie, en la sección 1 se estudiará la estructura de los G-espacios propios que tienen una métrica invariante y revisaremos las formas de calcular la dimensión de X y la de su espacio de órbitas X/G a partir de subespacios con tipo orbital más simple. El primer resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 0.0.5. *Sean G un grupo de Lie y X un G-espacio propio que admite una métrica G-invariante. Entonces*

$$\dim X = \sup\{\dim \widetilde{X}_{(H)} + \dim G/H \mid H \text{ es subgrupo compacto de } G\}.$$

y

$$\dim X/G = \sup\{\dim X_{(H)} - \dim G/H \mid H \text{ es subgrupo compacto de } G\}.$$

En esta misma sección se estudian la relación que hay entre el espacio fase y el espacio de órbitas obteniendo el siguiente resultado:

Teorema 0.0.6. *Sea G un grupo de Lie y X un G-espacio propio con espacio de órbitas X/G paracompacto. Entonces* $\dim X/G \leq \dim X$.

Este resultado extiende el Teorema 0.0.1. En la sección 2 abordaremos los G-espacios finitísticos, presentaremos el resultado de Deo y Tripathi que caracteriza los espacios que no son finitísticos y junto con los resultados de la seccipón previa obtendremos lo siguiente:

Teorema 0.0.7. *Sea G un grupo de Lie y X es un G-espacio propio finitístico tal que X/G es paracompacto. Entonces X/G también es finitístico.*

Este resultado extiende el Teorema 0.0.2.

En el capítulo III pondremos atención a las acciones propias de grupos localmente compactos arbitrarios. En la sección 1 extenderemos la desigualdad del Teorema 0.0.3 al caso en que G es localmente compacto arbitrario, la acción es propia y el espacio fase tiene espacio de órbitas paracompacto. Es decir, obtendremos el siguiente resultado:

Teorema 0.0.8. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio tal que X/G es paracompacto. Entonces*

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim p.$$

Donde $p : X \to X/G$ es la función orbital y $\dim p = \sup\{\dim G(x) \mid x \in X\}$.

Utilizando un resultado de [10], nuestra desigualdad tiene una aplicación a grupos topológicos:

Corolario 0.0.9. *Sean X un grupo topológico paracompacto y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces:*

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim G.$$

En la sección 2 demostraremos una condición de metrizabilidad para los G-espacios propios la cual ya había sido demostrada por V.V. Filippov (ver [25]) para G-espacios donde el grupo que actúa es compacto. Aquí enunciamos nuestro resultado de esta sección:

Teorema 0.0.10. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio tal que todas las órbitas en X, tambén como el espacio de órbitas, son metrizables. Entonces X también es metrizable. Más aún, existe una métrica invariante y compatible sobre X.*

En la sección 3 utilizaremos el resultado antes mencionado para extender el Teorema 0.0.4 de la siguiente manera:

Teorema 0.0.11. *Sean G un grupo localmente compacto pro-Lie o σ-compacto y X un G-espacio propio tal que su espacio de órbitas X/G es metrizable. Entonces* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Como un corolario obtendremos que las dos dimensiones coinciden en grupos arbitrarios que tiene cociente metrizable por un subgrupo localmente compacto:

Corolario 0.0.12. *Sean G un grupo topológico (no necesariamente localmente compacto) y H un subgrupo localmente compacto de G tal que G/H es un espacio metrizable. Entonces* $\dim G = \operatorname{Ind} G$.

Al final de cada Capítulo se mencionan algunos problemas abiertos que se concideran de interés para futuras investgaciones.

Las nociones y resultados de topología que usamos en este trabajo pueden ser consultados en [22], las ideas básicas sobre G-espacios o grupos topológicos de transformaciones pueden ser consultadas en [16] y [45]. Muy en especial se recomienda el libro de la Dra. Sylvia de Neymet Urbina [17] quien aún después de su fallecimiento sigue, como siempre, apoyando a las nuevas generaciones. Las referencias para acciones propias son [46], [34] y [2]. Para la teoría de la dimensión se pueden consultar [21] y [44].

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de la tesis consideraremos solamente espacios topológicos de Tychonoff, i.e., completamente regulares y de Hausdorff, que en adelante llamaremos simplemente *espacios*.

1.1. Grupos de transformaciones

Una de las interacciones más exitosas dentro de las matemáticas se observa en la noción de grupo topológico, la cual será fundamental en esta tesis.

Definición 1.1.1. *Sea G un espacio con estructura de grupo, diremos que G es un* ***grupo topológico*** *si la* división $\delta : G \times G \to G$,

$$\delta(h, g) = gh^{-1} \tag{1.1}$$

es una función continua.

Ejemplos conocidos de grupos topológicos son:

1. Cualquier grupo visto como un espacio discreto.

2. Cualquier *espacio euclidiano* $\mathbb{R}^n$ o el grupo aditivo de cualquier espacio vectorial normado.

3. Los grupos multiplicativos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ como subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. En general, los grupos de matrices no singulares $GL(n, \mathbb{R})$ y $GL(n, \mathbb{C})$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^{n^2}$ y $\mathbb{C}^{n^2}$ respectivamente.

4. Cualquier subgrupo de un grupo topológico es claramente un (sub)grupo topológico.

Los grupos de transformaciones sirven para estudiar las simetrías de ciertos objetos, cuando hay una relación de cercanía tanto en el grupo como en el objeto, se convierten en grupos topológicos de transformaciones.

Definición 1.1.2. *Sea G un grupo topológico. Un **grupo topológico de transformaciones** sobre X es un par (X, θ) donde X es un espacio y $\theta : G \times X \to X$ es una **acción continua**, esto es, que satisface:*

i) $\theta(e, x) = x$

ii) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$

*para toda $x \in X$ y cualesquiera $g, h \in G$, y $e \in G$ es el elemento neutro del grupo. En este caso diremos que X es un G-**espacio**.*

Para simplificar la notación, la imagen $\theta(g, x)$ se denota usualmente por $g \cdot x$ o simplemente gx. De este manera, las condiciones de una acción son $ex = x$ y $g(hx) = (gh)x$ respectivamente. Al fijar un elemento $g \in G$, éste induce una *traslación* continua $\theta_g : X \to X,\ x \mapsto gx$. Es fácil ver entonces que θ_g es invertible y ${\theta_g}^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. Si denotamos por $\mathrm{Homeo}(X)$ al grupo de homeomorfismos de X en si mismo, la acción θ es equivalente a un homomorfismo de grupos $\Theta : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ donde

$$\Theta(g)(x) = \theta_g(x) = gx \tag{1.2}$$

De hecho, Θ es continua si equipamos a $\mathrm{Homeo}(X)$ con la *topología compacto-abierta*, i.e. aquella que tiene como subbase los conjuntos de la forma

$$M(K, U) = \{f \in \mathrm{Homeo}(X) \mid f(K) \subset U\} \tag{1.3}$$

donde $K \subset X$ es compacto y $U \subset X$ es abierto.

Como ejemplos de grupos topológicos de transformaciones podemos mencionar los siguientes:

1. Un grupo topológico G actúa en sí mismo mediante multiplicación: $(h, g) \mapsto hg$ o con la división δ de (1.1): $(h, g) \mapsto gh^{-1}$.

2. Cualquier subgrupo H de un grupo topológico G convierte a cada G-espacio en un H-espacio restringiendo la acción a $H \times X$.

3. Cualquier grupo topológico G convierte a todo espacio X en un G-espacio bajo la **acción trivial** , i.e. $gx = x$ para toda $g \in G,\ x \in X$.

4. Dados un espacio X y un homeomorfismo $f : X \to X$, el grupo discreto $\mathbb{Z}$ actúa en X mediante la acción $n \cdot x = f^n(x)$.

5. Las rotaciones del plano forman un grupo de transformaciones continuas. Sean $X = \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{S}^1 \leq \mathbb{C}$ y gx la multiplicación en $\mathbb{C}$ de $g \in G$ y $x \in X$, entonces X es un $\mathbb{S}^1$-espacio.

Para un G-espacio X, un subgrupo H de G y un subconjunto A de X, consideraremos los siguientes conjuntos:

1. $H(A) = HA = \{ha \in X \mid h \in H,\ a \in A\}$ es la **H-saturación** de A. Si $A = \{x\}$, $H(x) = H(\{x\})$ es la **H-órbita** de x en X. Si $H = \{h\}$, cambiamos $H(A)$ por hA.

2. $(H) = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ denota a todos los subgrupos que son conjugados a H en G, esto es, (H) es la **clase conjugada** de H.

3. $G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$ es el **estabilizador** de A. Si $A = \{x\}$, $G_x = G_{\{x\}}$ también se llama **grupo de isotropía**.

4. $X_{(H)} = \{x \in X \mid G_x \in (H)\}$ es el **tipo orbital** de H en X, esto es, es el subconjunto de elementos de X cuyo estabilizador es conjugado a H.

Decimos entonces que:

1. A es **H-invariante** si coincide con su H-saturación o equivalentemente, si $ha \in A$ siempre que $a \in A$ y $h \in H$.

2. Un punto $x \in X$ se llama **H-fijo** si $H = H_x$, es decir, si $hx = x$ para cada $h \in H$.

3. El conjunto de puntos H-fijos de X se denota $X^H = \{x \mid H \subset H_x\}$.

Cuando $H = G$, omitimos el prefijo G- de estos conceptos hablando sólo de saturación, órbita, etc. Cada estabilizador G_A es subgrupo de G. Tanto los estabilizadores como los conjuntos de puntos fijos son cerrados en G y X respectivamente.

G-$\mathcal{TOP}$

Consideramos ahora las funciones que preservan o conmutan con las acciones de G en dos espacios.

Definición 1.1.3. *Sea G un grupo topológico. Una función continua $f : X \to Y$ entre G-espacios X y Y es* ***equivariante*** *si*

$$f(gx) = gf(x)$$

para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Si Y tiene la acción trivial de G, llamaremos a f ***invariante****.*

Observemos que para un G-espacio X:

- Si $A \subset X$ es invariante, A es un G-espacio con la misma acción que X. En este caso podemos considerar a A como un G-*subespacio* de X puesto que la inclusión $A \hookrightarrow X$ es equivariante.

- Dada una familia de G-espacios $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, se define la **acción diagonal** de G en el producto $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ de manera que las proyecciones $p_{\lambda'} : \prod X_\lambda \to X_{\lambda'}$ resulten equivariantes. Esto es, definiendo

$$g \cdot (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = (gx_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}.$$

- Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo equivariante, su inversa $f^{-1} : Y \to X$ también es equivariante. En este caso decimos que X e Y son G-*equivalentes* o G-*homeomorfos*.

Denotemos por $\mathcal{TOP}$ a la categoría de los espacios topológicos y las funciones continuas. Entonces, para un grupo topológico G, la clase de los G-espacios y las funciones equivariantes forman una categoría G-$\mathcal{TOP}$. En un sentido, el estudio los grupos de transfomaciones generaliza aquel de los espacios topológicos, pues en el caso particular de $G = \{e\}$, obviamente G-$\mathcal{TOP}$ coincide con $\mathcal{TOP}$. El "paralelismo" entre estas dos categorías y en general entre categorías de grupos topológicos de transformaciones (variando el grupo G) se discute en el libro de De Vries [56].

Métricas invariantes

Sea G un grupo topológico. Dado un G-espacio X, diremos que X *admite* una **métrica invariante** si existe una métrica d compatible con su topología y tal que cada g-traslación inducida θ_g, es en realidad una d-isometría de X, es decir, si

$$d(gx, gy) = d(x, y)$$

para toda $g \in G$ y cualesquiera $x, y \in X$. Esto significa que el homomorfismo inducido Θ de 1.2 toma valores en $Iso_d(X)$, el grupo de d-isometrías (suprayectivas) de X.

El problema de metrizabilidad de una acción es aún hoy, un problema abierto incluso para el caso de $G = \mathbb{R}$. No todos los G-espacios metrizables admiten métricas invariantes. En efecto, de Vries muestra el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 1.1.4. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ el espacio discreto de k puntos y $X = S^{\mathbb{Z}}$. Entonces X es un espacio metrizable y compacto. De hecho, X es homeomorfo al conjuto de Cantor. Sea $\varphi : X \to X$, la función dada por*

$$\varphi\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$$

i.e. el desplazamiento *a la derecha de cada entrada. Este es en realidad un homeomorfismo y genera entonces la acción de $\mathbb{Z}$ en X: $m \cdot x = \varphi^m(x)$. Bajo esta acción X no admite ninguna métrica inavariante (ver [58, III, 2.3]).*

Los G-espacios que admiten métricas invariantes forman una clase destacada de G-$\mathcal{TOP}$ que denotaremos por G-$\mathcal{M}$. Bajo ciertas circunstancias más generales que la compacidad del grupo (compacidad local por ejemplo), algunos G-espacios (llamados *propios*, Sección 1.3) si admiten dichas métricas. A lo largo del trabajo, mencionaremos y usaremos resultados relacionados con este problema. Una discusión más detallada sobre el tema se encuentra en el trabajo de Antonyan y S. de Neymet [12].

Espacios de órbitas

Dado un G-espacio X, definimos en él la relación

$$x \sim y \quad \text{si} \quad y = gx \quad \text{para alguna } g \in G.$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia y que la clase $\widetilde{x}$ de un punto $x \in X$ es precisamente la órbita $G(x)$. Denotaremos por X/G al conjunto de estas clases y lo dotaremos de la *topología cociente* respecto a la proyección natural $p : X \to X/G$,

$$p(x) = \widetilde{x} = G(x)$$

i.e. $\widetilde{U} \subset X/G$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(\widetilde{U}) \subset X$ es abierto. Este espacio se llama **espacio de órbitas** y la *identificación* p **proyección orbital**.

Como ejemplos importantes de espacios de órbitas podemos mencionar los espacios de clases laterales derechas e izquierdas de un subgrupo cerrado H de G:

1. En efecto, si el subgrupo cerrado H actúa en G mediante la multiplicación $h \cdot g = hg$, la clase lateral derecha Hg es la H-órbita de $g \in G$. El total de estas clases, $G\backslash H = \{Hg \mid g \in G\}$ es entones un H-espacio de órbitas.

2. Si H actúa en G mediante la división δ de (1.1), $h \cdot g = gh^{-1}$, la H-órbita de $g \in G$ es la clase lateral izquierda gH. De este modo, $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ con la topología cociente es un H-espacio de órbitas.

La condición de tener a H como un subgrupo cerrado de G resulta necesaria para que G/H sea un espacio de Hausdorff (en principio es T_1 pero también es homogéneo y regular).

Dado $A \subset X$, entonces $p^{-1}(p(A)) = G(A)$ es la saturación de A en X. Cuando A es abierto, su saturación también lo es. Esto se sigue de la igualdad

$$G(A) = \bigcup_{g \in G} gA$$

y el hecho de que cada gA es la imagen de A bajo la traslación θ_g. De este modo, p resulta una identificación abierta. Tenemos entonces que

- si X es (localmente) compacto o (localmente) conexo, X/G también lo es.

- si X es primero numerable o segundo numerable, X/G también lo es.

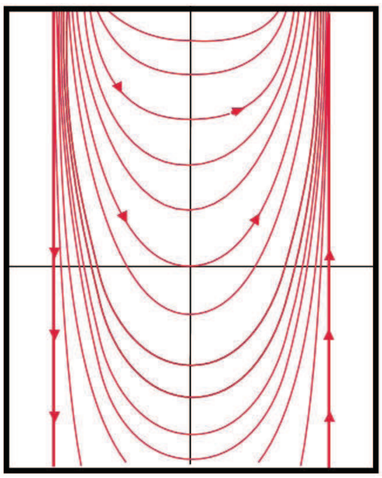
Aunque asumimos que X es un espacio de Tychonoff, el espacio de órbitas X/G puede NO ser de Hausdorff o ni siquiera T_1. Observamos que de acuerdo a la topología cociente de X/G, el axioma de T_1 equivale a que cada órbita $G(x) \subset X$ sea cerrada. El axioma T_2 o de Hausdorff equivale a la existencia de vecindades ajenas e invariantes para dos órbitas distintas. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación para $G = \mathbb{R}$ y X un subespacio del plano euclidiano.

Ejemplo 1.1.5. *Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$. Definimos la acción de $\mathbb{R}$ en X mediante las posibles situaciones:*

a) Si $x = 1$, $t \cdot (x, y) = (1, y + t)$,

b) Si $x = -1$, $t \cdot (x, y) = (-1, y - t)$,

c) Si $|x| < 1$, consideramos $\Gamma_{(x,y)}$, la traslación vertical de la gráfica de la función $f(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$ que pasa por (x, y). Definimos $t \cdot (x, y)$ como el punto en $\Gamma_{(x,y)}$ cuya longitud sobre el arco de $\Gamma(x, y)$ entre (x, y) y $t(x, y)$ es $|t|$ y x es mayor (menor) que x si t es positivo (negativo), es decir, (x_0, y_0) desplazado con velocidad unitaria t.



Es fácil ver que las órbitas $\mathbb{R}((1, 0))$ y $\mathbb{R}((-1, 0))$ no pueden separarse por conjuntos invariantes, por lo que $X/\mathbb{R}$ no es de Hausdorff.

Cuando el grupo G es compacto la situación se mejora drásticamente, pues a partir del siguiente lema muchas propiedades que posea el G-espacio X también las tendrá su espacio de óbitas.

Lema 1.1.6. *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es una* función perfecta*, i.e. cerrada y con* fibras $p^{-1}(\widetilde{x})$ *compactas.*

Demostración. Esto se debe a que en general, para $K \subset G$ compacto y $C \subset X$ cerrado, $K(C) \subset X$ es cerrado. En efecto, dado $x \in \overline{K(C)}$, existen redes $\{g_\alpha\}$ en K y $\{x_\alpha\}$ en C tales que $g_\alpha x_\alpha \rightsquigarrow x$. Como K es compacto, $\{g_\alpha\}$ tiene una subred $\{g_{\alpha_\beta}\}$ convergente, digamos a $g \in K$. Entonces $g_{\alpha_\beta}^{-1} \rightsquigarrow g^{-1}$ por lo que

$$x_{\alpha_\beta} = g_{\alpha_\beta}^{-1}(g_{\alpha_\beta} x_{\alpha_\beta}) \rightsquigarrow g^{-1}x$$

Como C es cerrado, $g^{-1}x \in C$ o bien, $x \in gC \subset K(C)$. $\square$

De las propiedades de funciones perfectas se sigue que si X es compacto, localmente compacto, paracompacto, metrizable o normal, entonces X/G también será compacto, localmente compacto, paracompacto, metrizable o normal, respectivamente. Es un hecho conocido que X/G también es un espacio de Tychonoff cuando el *espacio fase* X lo es. En el caso general (G no compacto) si X admite una métrica invariante y el espacio de órbitas satisface al menos el axioma de separabilidad T_1, una métrica "natural" puede ser introducida en X/G como se muestra a continuación.

Lema 1.1.7. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Si X admite una métrica invariante y X/G es un espacio T_1, entonces X/G es metrizable.*

Demostración. Sea d una métrica invariante para X. Mostraremos que la métrica

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \inf\{d(x', y') \mid x' \in \widetilde{x},\ y' \in \widetilde{y}\}$$

es compatible con la topología cociente de X/G.

Dados $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in X/G$ distintos, es claro que $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \geq 0$ y que $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{d}(\widetilde{y}, \widetilde{x})$. Además, al fijar $x' \in \widetilde{x}$ y $y' \in \widetilde{y}$,

$$d(gx', hy') = d(x', g^{-1}hy')$$

por lo que

$$\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \inf_{k \in G} d(x', ky') = d(x', G(y'))$$

y como x' no está en la órbita cerrada $G(y')$, se tiene $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > 0$. Escojamos ahora un tercer elemento $\widetilde{z} \in X/G$. Entonces para $z' \in \widetilde{z}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \inf_{k \in G} d(x', ky') \leq \inf\{d(x', gz') + d(gz', hy') \mid g, k \in G\} \\ &= \leq \inf_{g \in G} d(x', gz') + \inf_{h \in G} d(z', hy') = \widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{z}) + \widetilde{d}(\widetilde{z}, \widetilde{y}). \end{aligned}$$

Esto demustra que $\widetilde{d}$ es en efecto una métrica para X/G.

Para verificar la compatibilidad de $\widetilde{d}$ con la topología cociente de X/G escojamos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Mostraremos que para las ε-bolas alrededor de x y $\widetilde{x} = p(x)$ se cumple

$$p(B_d(x,\varepsilon)) = B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$$

lo que a su vez implica que $p : (X,d) \to (X/G,\widetilde{d})$ es una función continua, suprayectiva y abierta, en particular una identificación abierta, por lo que $\widetilde{d}$ es admisible.

Sea $y \in B_d(x,\varepsilon)$. Entonces $\widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{y}) \leq d(x,y) < \varepsilon$, por lo que $p(y) = \widetilde{y} \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$ y $p(B_d(x,\varepsilon)) \subseteq B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$. Por otro lado, dados $\widetilde{z} \in B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon)$,

$$d(x,G(z)) = \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{z}) < \varepsilon$$

por lo que $d(x,z') < \varepsilon$ para alguna $z' \in G(z)$. Así que $\widetilde{z} = p(z') \in p(B_d(x,\varepsilon))$ y $B_{\widetilde{d}}(\widetilde{x},\varepsilon) \subseteq p(B_d(x,\varepsilon))$. Esto termina la demostración. $\square$

Para el caso de G no compacto, como $\mathbb{R}$ por ejemplo, ciertas restricciones sobre la acción han de ser añadidas a fín de preservar propiedades importantes como la separación de puntos en X/G. En la Sección 1.3 se introduce una condición más general y suficiente en la acción para garantizar estas propiedades.

Supongamos ahora que Y es un G-espacio trivial y $f : X \to Y$ una función invariante, i.e. $f(gx) = f(x)$ para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Esto significa que f es constante en las órbitas de X, por lo que f se factoriza a través de la proyección orbital como $f = \widetilde{f}p$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X/G \arrow[ur, dashed, "\widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que $\widetilde{f}$ es continua. De hecho, en una situación más general tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.1.8. *Sean G un grupo topológico y $f : X \to Y$ una función equivariante entre G-espacios X e Y. Entonces f induce una función continua*

$\widetilde{f} : X/G \to Y/G$ *que completa el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/G \arrow[r, dashed, "\widetilde{f}"] & Y/G \end{tikzcd}$$

Demostración. Dado $\widetilde{x} \in X/G$, la única forma de hacer conmutar las proyecciones p y q es definiendo

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{f(x)}.$$

Esta asignación está bien definida pues

$$\widetilde{f}(\widetilde{gx}) = \widetilde{f(gx)} = \widetilde{gf(x)} = \widetilde{f(x)}$$

para cada $g \in G$. Como $\widetilde{f}p = qf$ es continua y p una identificaión, $\widetilde{f}$ también es continua. $\square$

Productos torcidos

Los productos torcidos son objetos importantes en el estudio de los G-espacios, pues bajo ciertas restricciones en la acción, todos los G-espacios son localmente productos torcidos.

Sean G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Si X es un H-espacio y consideramos la acción (1.1) de H en G, i.e. $h \cdot g = gh^{-1}$, entonces la acción diagonal de H en el producto $G \times X$ es

$$h(g, x) = (gh^{-1}, hx).$$

El **producto torcido** de G con X se define entonces como el espacio de óbitas

$$G \times_H X = \frac{G \times X}{H}$$

La H-órbita del punto $(g, x) \in G \times X$ es denotada por $[g, x]$. Es fácil ver que $G \times_H X$ es un G-espacio bajo la acción

$$g'[g, x] = [g'g, x].$$

Lema 1.1.9. *Sean G un grupo topológico, $H \subset G$ un subgrupo compacto y X un H-espacio. Entonces, $i : X \hookrightarrow G \times_H X$, $i(x) = [e, x]$ es un encaje cerrado. Más aún, restringiendo la acción de G a H en $G \times_H X$, el encaje i es H-equivariante. Además, X/H es homeomorfo a $(G \times_H X)/G$.*

Demostración. La función i es inyectiva pues

$$[e,x]=[e,y] \Longleftrightarrow (e,y)=(eh^{-1},hx) \quad \text{para alguna } h\in H$$

y en este caso $h=e$, por lo que $y=x$. Observemos también que i es la composición $X \xrightarrow{j} G\times X \xrightarrow{p} G\times_H X$, donde j es el encaje cerrado $j(x)=(e,x)$ y p la proyección canónica, por lo tanto, i es continua. Como H es compacto, p es además cerrada, de modo que i también lo es.

Si $x\in X$ y $k\in H$ entonces

$$i(kx)=[e,kx]=[k,x]=k[e,x]=ki(x)$$

por lo que i es H-invariante. Sea $q: X\to X/H$ la proyección orbital. Definamos el homeomorfismo

$$f: X/H \to (G\times_H X)/G, \quad f(Hx)=G([e,x])$$

que está bien definido pues $H(x)=H(y)$ si y sólo si $y=hx$ para alguna $h\in H$, y en este caso

$$f(Hy)=G([e,y])=G([h,y])=G([e,hy])=G([e,x])=f(Hx).$$

Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q"'] & G\times_H X \arrow[d, "p"] \\ X/H \arrow[r, "f"] & (G\times_H X)/G \end{tikzcd}$$

conmuta, fq es continua, por lo que f es continua. Además, i y p son cerradas, por lo que f también es cerrada.

Ya que $G([g,x])=G(g[e,x])=G([e,x])$ para cada par (g,x), tenemos que f es suprayectiva. Finalmente observemos que

$$\begin{aligned} G([e,x])=G([e,y]) &\Leftrightarrow [e,y]=[g,x] \quad \text{para alguna } g\in G \\ &\Leftrightarrow (e,y)=(gh^{-1},hx) \quad \text{para algunas } h\in H,\ g\in G \\ &\Rightarrow g=h \quad \text{y} \quad y=hx \\ &\Rightarrow H(y)=H(hx)=H(x) \end{aligned}$$

así que f es inyectiva y por tanto un homeomorfismo. $\square$

El encaje cerrado i en el lema anterior junto con el producto torcido cumplen la siguiente propiedad universal.

Proposición 1.1.10. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y X un H-espacio. Entonces para cada G-espaico Y y para cada H-función $f : X \to Y$, existe una única G-función $F : G \times_H X \to Y$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \\ G \times_H X \arrow[ur, dashed, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. En efecto, basta definir a F como $F([g,x]) = gf(x)$. □

como una consecuencia inmediata de esta propiedad universal tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.1.11. *Con las hipótesis de la Proposición anterior, existe una biyección entre los siguientes conjuntos:*

$$\{f : X \to Y \mid f \textit{ es } H\textit{-función}\} \textit{ y } \{F : G \times_H X \to Y \mid F \textit{ es } G\textit{-función}\}.$$

Como los espacios de clases laterales, los productos torcidos constituyen una clase de objetos destacados en G-$\mathcal{TOP}$. Si G es un grupo compacto de Lie, un resultado clásico de Mostow establece que, localmente, X es G-equivalente al producto torcido de G con subespacios G_x-invariantes [42]. En la Sección 1.3 formalizamos esta afirmación al tiempo de establecer la versión más general y esencial de este resultado (Teorema 1.3.20).

1.2. Grupos casi conexos

En adelante, consideraremos sólo grupos topológicos locamente compactos, a los que llamaremos simplemente *grupos locamente compactos*.

En esta sección consideraremos una subclase importante de grupos localmente compactos, los grupos localmente compactos casi conexos. Esta clase, al igual que grupos compactos, se puede aproximar por grupos de Lie.

Definición 1.2.1. *Un grupo topológico G se llama casi conexo, si es localmente compacto y su espacio de componentes conexas G/G_0 es compacto. Aquí G_0 denota la componetne conexa de la identidad en G.*

Un resultado clásico de los grupos de Lie casi conexos, cuya demostración se encuentra en [30], es el siguiente:

Teorema 1.2.2. *Sea G un grupo de Lie tal que G/G_0 es finito. Entonces G contiene un subgrupo compacto maximal K y un subconjunto E de G con $E \cong G/K$ tales que satisfacen lo siguiente:*

a) $E = gE'g^{-1}$ *para cada* $g \in K$*;*

b) *Para cada subgrupo compacto H de G, existe $g \in G$ tal que $H \subseteq gKg^{-1}$;*

c) *La multiplicación $E \times K \to G$ es un homemorfismo.*

Con la ayuda del siguiente resultado debido a Glushkov ([27]), el Teorema anterior se puede generalizar a grupos (no necesariamente de Lie) casi conexos.

Teorema 1.2.3 (Glushkov)**.** *Sea G un grupo casi conexo. Entonces cada vecindad de la unidad U contiene un subgrupo compacto y normal N de G tal que G/N es un grupo de Lie.*

La importancia del siguiente Teorema radica en el hecho de que el estudio del grupo casi conexo G se puede reducir al estudio de uno de sus subgrupos compactos maximales. La demostración se puede consultar en los teoremas A.5 y A.6 de [1] o en [53].

Teorema 1.2.4. *Sea G un grupo localmente compacto casi conexo. Entonces G contiene un subgrupo compacto maximal K y un subconjunto E de G tales que satisfacen lo siguiente:*

a) $E = gE'g^{-1}$ *para cada* $g \in K$*;*

b) *Para cada subgrupo compacto H de G, existe $g \in G$ tal que $H \subseteq gKg^{-1}$;*

c) *La multiplicación $E \times K \to G$ es un homemorfismo.*

d) *$E \cong_K G/K$ donde K actúa por automorfismos internos sobre E y por traslaciones izquierdas sobre G/K.*

e) *G/K es K-homeomorfo a un K-espacio ortogonal $\mathbb{R}^n$.*

1.3. Acciones propias y rebanadas

Con el fín de extender una parte importante de los resultados de la teoría de los grupos topológicos de transformaciones hasta entonces obtenidos para grupos compactos de Lie, en 1961 Palais, en su artículo [46], sistematizó la noción ahora clásica de *acción propia* de un grupo localmente compacto. Esta nueva condición sobre la acción, mejora de manera significativa propiedades importantes en los conjuntos asociados al espacio fase como los que se enuncian en el Lema 1.3.7.

Supongamos entonces que G es un grupo localmente compacto. Dado un G-espacio X, decimos que $U \subset X$ es **relativamente delgado respecto a** $V \subset X$, si el conjunto de traslaciones de U a V

$$\langle U, V\rangle = \{g \in G|\ gU \cap V \neq \emptyset\}$$

tiene cerradura compacta en G.

En efecto,

$$\langle V, U\rangle = \{g \in G|\ gV \cap U \neq \emptyset\} = \{g \in G|\ g(V \cap g^{-1}U) \neq \emptyset\} = \langle U, V\rangle^{-1}$$

entonces U es relativamente delgado respecto a V si y sólo si V es relativamente delgado respecto a U. Por lo que hablamos simplemente de conjuntos *relativamente delgados*. Esto nos lleva a la definición principal de esta subsección.

Definición 1.3.1. *Sean X un G-espacio y $U \subset X$. Decimos que U es* ***pequeño*** *si cada punto de X tiene una vecindad relativamente delgada respecto a U.*

Esta noción nos ayuda a reconocer las acciones de grupos localmente compactos que tienen propiedades semejantes a las de grupos compactos.

Definición 1.3.2. *Sea G un grupo localmente compacto. Una acción continua de G en un espacio X es* ***propia*** *(en el sentido de Palais) si cada punto de X tiene una vecindad pequeña. En este caso se dice que X es un* ***G-espacio propio****.*

Cuando G es compacto, cada par de conjuntos $U, V \subset X$ son relativamente delgados y todo $U \subset X$ es pequeño por definición, así que todo G-espacio es propio. Por otro lado, es fácil ver que la unión finita de conjuntos pequeños es pequeña. Se sigue entonces que si X es un G-espacio propio y compacto, G debe ser compacto también. Por ello, nos enfocaremos solamente en los casos de grupos localmente compactos y NO compactos y en espacios fase NO compactos.

Antes de mencionar algunos ejemplos, necesitamos dos proposiciones las cuales nos garantizan que ciertas acciones son propias.

Proposición 1.3.3. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces se cumple lo siguiente:*

i) Si H es un subgrupo compacto de G, la acción natural de G en G/H es propia;

ii) Si X es un grupo arbitrario que contiene a G, la acción

$$G \times X \to X, \ (g, h) \mapsto hg^{-1}$$

de G en X es propia.

Demostración. i) Sea $p : G \to G/H$ la proyección natural $p(g) = gH$, la acción de G en G/H está dada por $g' \cdot gH = g'gH$. Tomemos $gH \in G/H$, si $U \subset G$ es una vecindad de g con cerradura compacta, $p(U)$ es una vecindad pequeña para gH: si $kH \in G/H$ es otro punto y $V \subset G$ una vecindad de k con cerradura compacta, entonces

$$\langle p(U), p(V)\rangle = \{g \mid gUH \cap VH \neq \emptyset\} = (VH)(UH)^{-1}$$

tiene cerradura compacta.

ii) Sea U una vecindad de la identidad en X tal que $U = U^{-1}$ y $U^3 \cap G$ tiene cerradura compacta en G. Afirmamos que para cada $x \in X$ la vecindad xU es pequeña. Tomemos $y \in X$, dos casos son posibles:
Caso 1. Supongamos que $y \in xU^2G$. Entonces $y = xu_1u_2h$ con $u_1, u_2 \in U$ y $h \in G$. Afirmamos que xU^2h es una vecindad de y delgada relativa a xU. De hecho, si $g \in \langle xU, xU^2h\rangle$, entonces $g^{-1}h^{-1} \in U^3 \cap G$. Debido a que $U^3 \cap G$ tiene cerradura compacta, también el conjunto $(U^3 \cap G)h$ al cual pertenece g^{-1}. Esto nos dice que $\langle xU, xU^2h\rangle$ está contenida en $h^{-1}(U^3 \cap G)^{-1}$, el cual también tiene cerradura compacta. Por lo tanto, $\langle xU, xU^2h\rangle$ tiene cerradura compacta, como era requerido.
Caso 2. Ahora supongamos que $y \notin xU^2h$. En este caso también se cumple que $y \notin \overline{xU^2h}$. De hecho, si $y \in \overline{xU^2h}$ entonces la vecindad

$xUx^{-1}y$ de y debe intersectar al conjunto xUG. Entonces $xux^{-1}y = xvh$ para algunos elementos $u, v \in U$ y $h \in G$. Entonces $y = xu^{-1}vh \in xU^2G$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto el conjunto abierto $V \setminus \overline{xUG}$ es una vecindad G-invariante de y, y V delgada relativa a xU puesto que $\langle xU, V\rangle = \emptyset$. Lo cual completa la demostración.

$\square$

El siguiente resultado da una forma de detectar acciones propias.

Proposición 1.3.4. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio. Supongamos que el espacio de órbitas X/G es regular y que se satisface lo siguiente:*

($*$) *Para cada $x, y \in X$ existen vecindades U_x y U_y en X que contienen a x y y respectivamente tales que $\langle U_x, U_y\rangle$ tiene cerradura compacta en G.*

Entonces X es un G-espacio propio.

Demostración. Mostremos que cada punto en X tiene una vecindad pequeña. Sea $x \in X$, entonces por la condición ($*$) existe una vecindad U de x en X tal que $\langle U, U\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Así obtenemos que $G(U)$ es una vecindad invariante de $G(x)$ y como X/G es regular, existe una vecindad cerrada invariante W de $G(x)$ en X. Definamos $O = U \cap W$, entonces se tiene que $x \in O$. Mostremos que O es una vecindad pequeña. Sea $y \in X$, si $y \in G(U)$, existe $g \in G$ tal que $y \in gU$, entonces gU es una vecindad relativamente delgada respecto a U, y como $O \subset U$, también es relativamente delgada respecto a O. Si $y \notin G(U)$, entonces $X \setminus W$ es una vecindad de y y como W es invariante se tiene que

$$\langle X \setminus W, O\rangle = \emptyset,$$

Por lo tanto $X \setminus W$ es relativamente delgada respecto a O. Con esto terminamos la demostración. $\square$

Observación 1.3.5. *La Proposición anterior nos da una caracterización de acciones propias, para la implicación contraria hay que usar la Proposición 1.3.10.*

Entre los ejemplos más importantes de G-espacios propios mencionamos a los siguientes:

1. De la Proposición anterior se sigue para cada grupo localmente compacto G, los *espacios homogéneos* G/H de clases laterales izquierdas, donde H es un subgrupo compacto de G son G-espacios propios.

2. Los grupos de isometrías de espacios conexos. A saber, si (X, d) es un espacio métrico conexo, $G = \mathrm{Iso}_d(X)$ es un grupo localmente compacto y la acción natural de G en X, es propia. Este ejemplo clásico que puede consultarse en el libro [17] y se le atribuye a D. van Dantzig y a B.L. van der Waerden.

3. Si X es un grupo topológico arbitario y G es un subgrupo localmente compacto de X, entonces X es un G-espacio propio con la acción descrita en la Proposición 1.3.3, parte ii).

4. Sea $G = \mathbb{R}$, entonces un G-espacio será un sistema dinámico. Una clase importante de sistemas dinámicos la forman los llamados *sistemas dinámicos dispersivos*, son los que cumplen con la condición $(*)$ de la Proposición 1.3.4. De acuerdo a la Observación 1.3.5, un G-espacio propio X es precisamente un sistema dinámico dispersivo con espacio de órbitas regular. Para el estudio de estos sistemas dinámicos consultar [15].

5. Consideremos $G = GL(n)$ el grupo general lineal y $X = \mathcal{N}(n)$ el espacio de todas las normas $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ equipado con la topología compacto-abierta. Entonces X es un G-espacio propio y el espacio de ótbitas X/G es un modelo para el compacto de Banach-Mazur $BM(n)$, es decir, el espacio de clases de isometrías de espacios de Banach de dimensión n con la topología generada por la métrica

   $$d(E, F) = \ln \inf\{\| T \| \cdot \| T^{-1} \| : T : E \to F \text{ es un isomorfismo lineal}\}.$$

   El estudio de este G-espacio propio se puede consultar en [6].

Algunas de las propiedades de conjuntos relativamente delgados y de las acciones propias que permiten la extensión de resultados para el caso no compacto son las siguientes.

Lema 1.3.6. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G-espacio y $U, V \subset X$ relativamente delgados entonces:*

1. *Cualesquiera dos traslaciones g_1U y g_2V donde $g_1, g_2 \in G$ son relativamente delgados.*

2. *Si $H_1, H_2 \subset G$ son compactos, $H_1(U)$ y $H_2(V)$ también son relativamente delgados.*

3. *Si $U' \subset U$ y $V' \subset V$ entonces U', V' son relativamente delgados.*

Demostración. La demostración se sigue al observar que

$$\begin{aligned} \langle H_1(U), H_2(V)\rangle &= \{g \mid gH_1(U) \cap H_2(V) \neq \emptyset\} \\ &= \{g \mid H_2^{-1}gH_1(U) \cap V \neq \emptyset\} = H_2\langle U, V\rangle H_1^{-1}. \end{aligned}$$

□

Lema 1.3.7. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G-espacio propio y $x \in X$. Entonces:*

1. *La órbita $G(x)$ es un subconjunto cerrado en X.*

2. *El estabilizador G_x es un subgrupo compacto de G.*

3. *El movimiento inducido, $\theta^x : G \to X$, $g \mapsto gx$ es una función perfecta.*

4. *$G(x)$ es G-homeomorfo a G/G_x.*

Demostración. La demostración sigue la misma secuencia que el enunciado.

1. Si $y \in \overline{G(x)}$ y $\{g_\alpha\}$ es una red en G tal que $g_\alpha x \to y$, entonces para una vecindad pequeña U de x y una vecindad V de y delgada respecto a U tenemos $g_\alpha \in \langle U, V\rangle$ eventualmente. Como este conjunto es relativamente compacto, podemos extraer una subred $\{g_{\alpha_\beta}\}$ convergente, digamos a g. Entonces $g_{\alpha_\beta}x \to gx$ pero siendo X de Hausdorff, $y = gx$.

2. Basta observar que $G_x = \langle x, x\rangle$ y este uĺtimo tiene cerradura compacta en G.

3. Si $g_0x \in \theta^x(G)$, la fibra de este punto es

$$\{g \in G \mid gx = g_0x\} = \{g \mid g_0^{-1}gx = x\} = \{g \mid g_0^{-1}g \in G_x\} = g_0G_x$$

   Para ver que θ^x es cerrada tomemos $C \subset G$ cerrado y $y \in \overline{C(x)}$. Existe entonces una red $\{g_\alpha\}$ en C tal que $g_\alpha x \to y$. Si U, V son vecindades relativamente delgadas de x e y respectivamente, entonces eventualmente

$g_\alpha \in \langle U, V\rangle$. Sea $\{g_{\alpha_\beta}\}$ una subred convergente a $g \in G$. Como $C \subset G$ es cerrado, $g \in C$ y por la continuidad de θ^x, $g_{\alpha_\beta}x \to gx$. Tenemos entonces $y = gx \in C(x)$.

4. Sea $f_x : G/G_x \to G(x)$ la función dada por $f_x(gG_x) = gx$, que está bien definida pues

$$gG_x = hG_x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow h^{-1}gx = x \Leftrightarrow gx = hx$$

lo que también muestra que es inyectiva. Claramente es suprayectiva y es continua pues $f_x\pi = \theta^x$ es continua, donde θ^x es el movimiento inducido y π la proyección natural:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta^x"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ G/G_x \arrow[r, "f_x"] & G(x) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Si $C \subset G/G_x$ es cerrado, $\theta^x(\pi^{-1}(C)) = f_x\pi(\pi^{-1}(C)) = f_x(C)$ es también cerrado.

□

Proposición 1.3.8. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio de G-$\mathcal{M}$, entonces X/G es metrizable.*

Demostración. El inciso 1 del Lema 1.3.7 equivale al hecho de que X/G es un espacio T_1. El resultado se sigue del Lema 1.1.7. □

Antes de enunciar el siguiente resultado necesitamos el sigunete lema.

Lema 1.3.9. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y $H \subset G$ es compacto, entonces la función*

$$\varphi(z) = \sup_{g\in H} f(gz)$$

es continua.

Demostración. Sean $z \in X$ y $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de la acción y de f, existen para cada $g \in G$, vecindades $W_g \subset G$ de g y $V_g \subset X$ de z tales que

$$|f(hy) - f(gz)| < \varepsilon$$

para cualesquiera $h \in W_g$, $y \in V_g$. Ahora, por la compacidad de H, existen $g_1, \ldots, g_n \in G$ tales que $H \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{g_i}$. Sea entonces $V_0 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i}$ la vecindad de z correspondiente. Entonces para cada $y \in V_0$ y cada $g \in H$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g \in W_{g_i}$. Como $y \in V_{g_i}$,

$$|f(gy) - f(gz)| < \varepsilon$$

de donde se deduce que

$$|\sup_{g \in H} f(gy) - \sup_{g \in H} f(gz)| \leq \varepsilon$$

o bien, φ es continua en z. □

Una de las propiedades más importantes de las acciones propias es que la propiedad de Tychonoff es transferida del espacio fase al espacio de órbitas, esto lo demostró Palais en [46] usando la medida de Haar. Nosotros damos una demostración más simple.

Proposición 1.3.10. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio. Entonces X/G también es un espacio de Tychonoff.*

Demostración. Sean $\widetilde{x} \in X/G$ y $\widetilde{F} \subset X/G$ un cerrado donde $\widetilde{x} \notin \widetilde{F}$. Sea $p : X \to X/G$ la función orbital y supongamos que $\widetilde{x} = p(x)$ para algún $x \in X$. Si $F = p^{-1}(\widetilde{F})$ entonces $F \subset X$ es cerrado, invariante y ajeno a la órbita $G(x)$. Mostraremos que hay una función continua e invariante $\varphi : X \to [0, 1]$ tal que $\varphi(G(x)) = 1$ y $\varphi(F) = 0$.

Sea $U \subset X$ una vecindad pequeña de x. Como X es de Tychonoff, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus U) = 0$. Para cada $z \in X$ definimos φ como

$$\varphi(z) = \sup_{g \in G} f(gz)$$

la cual es invariante. En efecto, para cada $h \in G$, $z \in X$, tenemos

$$\varphi(hz) = \sup_{g \in G} f(g(hz)) = \sup_{g \in G} f((gh)z)) = \sup_{t \in G} f(tz) = \varphi(z)$$

pues $g \mapsto gh$ es una permutación de G. Es inmediato que $\varphi(G(x)) = 1$ y $\varphi(F) = 0$; mostraremos entonces la continuidad de φ.

Sea $z \in X$. Entonces existe una vecindad $V \subset X$ de z para la cual $K = \overline{\langle U, V \rangle}$ es compacto. Si $y \in V$, observamos que tiene lugar la igualdad

$$\varphi(y) = \sup_{g \in K^{-1}} f(gy).$$

En efecto, si $g \notin K^{-1}$ entonces $g^{-1} \notin \langle U, V \rangle$, i.e. $g^{-1}U \cap V = \emptyset$ de modo que $y \notin g^{-1}U$ o bien, $gy \notin U$. Así que $f(gy) = 0$.

El Lema anterior nos garantiza ahora la continuidad de φ en V. Resta notar que una función invariante como φ se factoriza a través de la proyección orbital p y una función continua $\widetilde{\varphi}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & {[0,1]} \\ X/G \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Así que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{x}) = 1$ mientras que $\widetilde{\varphi}(\widetilde{F}) = 0$. $\square$

Otro resultado importante nos dice que el ser propio se conserva si restringimos la acción a subgrupos cerrados o a cocientes por subgrupos cerrados normales.

Proposición 1.3.11. *Sean G un grupo localmente compacto, X un G-espacio propio y H un subgrupo cerrado de G. Entonces:*

1. *X es un H-espacio propio con la acción restringida de G;*

2. *Si además H es normal en G, entonces X/H es un G/H-espacio propio.*

Demostración. 1. Se sigue del hecho que si A es subconjunto compacto de G entonces $A \cap H$ es un subconjunto compacto de H.

2. De la Proposición anterior y de la primera parte de esta demostración se sigue que X/H es de Tychonoff. De la demostración del Lema 1.3.6 se sigue $\langle H(U), H(V) \rangle = H\langle U, V \rangle H^{-1}$ y como H es normal en G se tiene que $H\langle U, V \rangle H^{-1} = \langle U, V \rangle H$. Por lo tanto el resultado se sigue de le hecho que una función continua manda compactos en compactos.

$\square$

Lema 1.3.12. *Sea G un grupo localmente compacto. Si $f : X \to Y$ es una función equivariante entre los G-espacios X e Y y $B \subset Y$ es pequeño, entonces $f^{-1}(B) \subset X$ es también pequeño. En particular, si Y es propio, X también lo es.*

Demostración. Se sigue del hecho directamente verificable que

$$\langle f^{-1}(U), f^{-1}(V)\rangle \subset \langle U, V\rangle$$

□

Rebanadas

Tradicionalmente, una de las principales heramientas en el estudio de los G-espacios ha sido, y es, el uso de H-rebanadas. Estas permiten reducir propiedades de la acción de G a una de un subgrupo compacto H donde la situación es por lo general más simple.

Definición 1.3.13. *Sean G un grupo localmente compacto y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Si X es un G-espacio, un subconjunto H-invariante $S \subset X$ se llama **H-rebanada** si*

i) su saturación $G(S) \subset X$ es abierta;

ii) hay una función equivariante $f : G(S) \to G/H$ tal que $S = f^{-1}(eH)$.

*Si $G(S) = X$, decimos que S es una **H-rebanada global**.*

En este caso, H se llama **grupo rebanador** y f la **función rebanadora**. La saturación $G(S)$ se llama **conjunto tubular**.

El ejemplo más notable de rebanada está en los productos torcidos. Dados un subgrupo compacto H de G y un H-espacio X, podemos ver a X como un subespacio H-invariante en el producto torcido $G \times_H X$. Esto es, mediante el encaje cerrado $i(x) = [e, x]$ del Lema 1.1.9. De hecho, si $x \in X$ y $h \in H$,

$$h[e, x] = [h, x] = [e, hx]$$

Ahora bien, por la definición de la acción, $G(i(X)) = G \times_H X$ claramente. La función rebanadora es entonces $\varphi : G \times_H X \to G/H$, $\varphi([g, x]) = gH$.

El ejemplo anterior caracteriza de hecho las H-rebanadas cuando H es compacto:

Lema 1.3.14. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio. Si $H \subset G$ es un subgrupo compacto y $S \subset X$ es una H-rebanada, entonces*

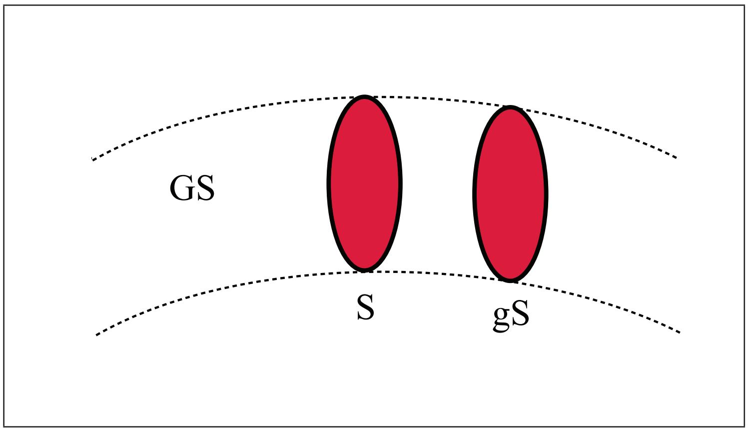
$$\eta : G \times_H S \to G(S), \quad [g, s] \mapsto gs$$

define un G-homeomorfismo y completa el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times_H S \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G(S) \arrow[d, "f"] \\ & G/H \end{tikzcd}$$

donde $\varphi([g, s]) = gH$.

Existe otra caraterización útil de las rebanadas que recuerda la noción geométrica de sección transversal o sección cruzada. El esquema representa esta situación.



Proposición 1.3.15. *Sean G un grupo topológico y $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Si X es un G-espacio y $S \subset X$ un conjunto H-invariante, entonces S es una H-rebanada si y sólo si*

i) $G(S) \subset X$ *es abierto;*

ii) $S \subset G(S)$ *es cerrado;*

iii) *si* $g \in G$ *es tal que* $gS \cap S \neq \emptyset$*, entonces* $g \in H$.

Demostración. Supongamos primero que S es una H-rebanada con función rebanadora $G(S) \to G/H$ donde $S = f^{-1}(eH)$. Entonces como G/H es de Hausdorff, $S = f^{-1}(eH) \subset G(S)$ es cerrado. Ahora, si $gS \cap S \neq \emptyset$, existen $s, s_1 \in S$ tales que $gs = s_1$. Aplicando f se tiene $eH = f(s_1) = f(gs) = gf(s) = gH$, de donde $g \in H$.

Por otro lado, si S satisface i), ii) y iii), podemos definir $f : G(S) \to G/H$ como $f(gs) = gH$ para cada $g \in G$ y cada $s \in S$. Esta función está bien definida pues si $g_1 \in G$ y $s_1 \in S$ entonces,

$$g_1 s_1 = gs \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1} g_1 s_1 = s \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1} g_1 S \cap S \neq \emptyset$$

por lo que $g^{-1} g_1 \in H$, i.e. $g_1 \in gH$ o bien $g_1 H = gH$. Evidentemente $S = f^{-1}(eH)$. Para verificar la continuidad, observemos que f completa el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\theta"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G(S) \arrow[r, "f"] & G/H \end{tikzcd}$$

donde p_1 es la proyección en la primera coordenada y θ la acción. Como $G(S) \subset X$ es abierto, θ es una identificación abierta, al igual que la composición πp_1. La continuidad de f se sigue de esta observación. □

Junto con la introducción del concepto de acción propia, Palais demostró la existencia de rebadanas *para* cada punto $x \in X$ cuando G es un grupo de Lie [46, 2.3.1]:

Teorema 1.3.16 (de la rebanada exacta)**.** *Sea G un grupo de Lie. Si X es un G-espacio propio, entonces para cada $x \in X$ hay una G_x-rebanada S tal que $x \in S$.*

Corolario 1.3.17. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.3.16, la órbita $G(x)$ es un retracto equivariante de vecindad de X.*

Demostración. En efecto, dada una G_x-rebanda S tal que $x \in S$, el *conjunto tubular* $G(S)$ es una vecindad de $G(x)$ en X y definimos en él la retracción equivariante

$$r : G(S) \to G(x), \quad gs \mapsto gx$$

la cual está bien definida pues, justo como en la demostración de la Proposición 1.3.15, $g_1s_1 = gs$ implica $g^{-1}g_1 \in G_x$, i.e. $g^{-1}g_1x = x$ o bien, $g_1x = gx$. De hecho, r es la composición del diagrama

$$\begin{tikzcd} G(S) \arrow[r, "\eta^{-1}"] \arrow[d, "r"'] & G \times_{G_x} S \arrow[d, "\varphi"] \\ G(x) & G/G_x \arrow[l, "f_x"'] \end{tikzcd}$$

donde η y φ son como en el Lema 1.3.14 y f_x es como en el Lema 1.3.7. □

Es importante mencionar que este tipo de rebanadas (G_x-rebanada que continen a x) NO necesariamente existen para acciones de grupos que no son de Lie. Para ampliar su uso en contexto como el de los grupos (localmente) compactos, Antonyan consideró los llamados *subgrupos grandes* de G [8].

Definición 1.3.18. *Sea G un grupo localmente compacto. Un subgrupo compacto $H \subset G$ es un* ***subgrupo grande*** *si y sólo si G/H es una variedad.*

Alternativamente, en [8] se establece la siguiente caracterización de subgrupos grandes.

Proposición 1.3.19. *Sea G un grupo localmente compacto. Para el subgrupo compacto $H \subset G$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *H es un subgrupo grande de G;*
2. *G/H es un G-ANE metrizable;*
3. *G/H es G-homeomorfo a una G-variedad suave en donde G actúa mediante difeomorfismos;*
4. *G/H es localmente contraible.*

La versión final, y que generaliza el teorema de existencia de la rebanada de Palais, es el llamado teorema de *la rebanada aproximativa* demostrado por Antonyan en [8].

Teorema 1.3.20 (de la rebanada aproximativa)**.** *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio. Entonces para cada $x \in X$ y cada vecindad O de x, existe un subgrupo compacto grande $K \subset G$ para el cual $G_x \subset K$ y una K-rebanada S tal que $x \in S \subset O$.*

Dividiremos la demostración en tres casos, i) cuando G es totalmente disconexo, ii) si G es conexo y iii) el caso general. Usaremos entonces los siguientes resultados, los cuales pueden ser consultados en [46, 1.1.6] y [2, Lema 3.2]

Lema 1.3.21. *Sea G un grupo localmente compacto. Si X es un G-espacio propio y $x \in X$, entonces dada una vecindad $U \subset G$ de G_x, existe una vecindad $V \subset X$ de x tal que*

$$\langle V, V \rangle \subset U.$$

Proposición 1.3.22. *Sea G un grupo totalmente disconexo. Entonces cada subgrupo compacto de G tiene una base de vecindades de subgrupos compactos y abiertos.*

Demosrtración del Teorema 1.3.20. El conjunto $V = \{g \in G \mid gx \in U\}$ es una vecindad abierta del subgrupo compacto G_x de G.

Caso I. Supongamos que G es totalmente disconexo. Por la Proposición 1.3.22, existe un subgrupo compacto y abierto K de G tal que $G_x \subset K \subset V$. En este caso G/K es discreto por lo que es una variedad, por lo tanto K es subgrupo grande de G. Como $K \subset V$, $K(x) \subset U$ y por la compacidad de K, hay una vecindad $Q \subset X$ de x tal que $K(Q) \subset U$. Por el Lema 1.3.21, existe una vecindad $W \subset X$ de x tal que $\langle W, W \rangle \subset K$. Definimos ahora la vecindad de x

$$S = K(Q \cap W)$$

que es K-invariante, está contenida en U y

$$\langle S, S \rangle = \langle K(Q \cap W), K(Q \cap W) \rangle = K^{-1} \langle Q \cap W, Q \cap W \rangle K = K$$

por lo que S es una K-rebanada que contiene a x.

Caso II. Supongamos que G es casi conexo. Por la compacidad de G_x, hay una vecindad $V' \subset G$ de e tal que $V'G_x \subset V$. Por el Teorema 1.2.3, existe un subgrupo compacto y normal $L \subset V'$ tal que G/L es un grupo de Lie. Sea $K = LG_x$ que es entonces un subgrupo grande de G (pues $G/K \cong (G/L)/(K/L)$) y tal que $G_x \subset K \subset V$. De nuevo hay una vecindad $Q \subset X$ de x tal que $K(Q) \subset U$.

Consideremos la proyección orbital $p : X \to X/L$. Por el Teorema 1.3.16 de Palais, en el G/L-espacio propio X/L existe una $\left(\frac{G}{L}\right)_{\widetilde{x}}$-rebanada $\widetilde{S}$ para

$\widetilde{x} = p(x)$. Pero en este caso el estabilizador de $\widetilde{x}$ es precisamente

$$\left(\frac{G}{L}\right)_{\widetilde{x}} = \frac{K}{L}.$$

debido a que la preimagen $p^{-1}(\widetilde{S})$ nos regresa una K-rebanada por x. Si definimos $S = p^{-1}(\widetilde{S} \cap K(Q))$, entonces $S \subset U$ es la K-rebanada buscada.

Caso III. Sea G_0 la componente conexa de G que contiene al neutro e. Denotemos por $\widetilde{X}$ al G/G_0-espacio orbital X/G_0 y por $p : X \to \widetilde{X}$ la proyección orbital. Sabemos que $\widetilde{X}$ es un G/G_0-espacio propio y se vefifica directamente que el estabilizador de $\widetilde{x}$ es

$$\left(\frac{G}{G_0}\right)_{\widetilde{x}} = \frac{G_0G_x}{G_0}.$$

Podemos entonces aplicar *Caso I* al grupo totalmente disconexo $\widetilde{G} = G/G_0$. Hay entonces un subgrupo compacto y abierto $\widetilde{H} \subset \widetilde{G}$ y una $\widetilde{H}$-rebanada $\widetilde{S}$ tal que $\widetilde{x} \in \widetilde{S} \subset \widetilde{U}$ donde $\widetilde{U} = p(U)$ y $\widetilde{G}_{\widetilde{x}} \subset \widetilde{H}$.

Llamemos $\pi : G \to \widetilde{G}$ a la proyección canónica y $H = \pi^{-1}(\widetilde{H})$. Entonces H es un subgrupo abierto y casi conexo de G. De modo que $\widetilde{S}$ es abierto en $\widetilde{X}$ y por tanto $W = p^{-1}(\widetilde{S})$ es abierto, H-invariante en X y $x \in W$. Ahora aplicamos el *Caso II* a el H-espacio propio W, al punto $x \in X$ y a su vecindad $U \cap W$. Existe entonces un subgrupo grande K de H, una K-rebanada S en W tal que $x \in S$, $S \subset U \cap W$ y $H_x \subseteq K$. Como H/K es una variedad y este a su vez es abierto en el espacio homogéneo G/K, concluimos que G/K es una variedad y por lo tanto K es un subgrupo grande en G. Además, $G_x \subset H$ implica $G_x = H_x \subset K$. Como $W \subset X$ es abierto y $H(S) \subset W$ también es abierto,

$$G(S) = \bigcup_{gH \in G/H} gH(S)$$

es abierto en X. Concluimos que S es la K-rebanada en X buscada. $\square$

1.4. La categoría G-$\mathcal{P}$

En esta sección revisaremos los G-espacios propios que tienen espacio de órbitas paracompacto. Veremos que esta clase consta de G-espacios paracompactos y junto con las funciones equivariantes entre ellos forman la categoría

G-$\mathcal{P}$. Los resultados de esta sección (excepto la proposición 1.4.8) son debidos a H. Abels publicados en su artículo [2].

Proposición 1.4.1. *Sea X un G-espacio propio y A un subconjunto de X. Entonces son equivalentes:*

a) A es un subconjunto pequeño de X;

b) La restricción de la proyección orbital $p : \overline{A} \to X/G$ es una función perfecta;

c) La restricción de la acción $\alpha : G \times \overline{A} \to X$ es una función perfecta.

d) Para cada $x \in X$ y cada vecindad W de x en X, existe una vecindad $V \subseteq W$ de x en X y un subconjunto compacto K de G tales que $A \cap GV \subseteq KV$.

Demostración. [$a) \Rightarrow d)$] Se sigue de la definición de conjunto pequeño.
[$d) \Rightarrow a)$] Para cada $x \in X$ sea V una vecindad pequeña de x con la propiedad de que existe un subconjunto compacto K de G tal que $A \cap GV \subseteq KV$. Sea $U \subseteq V$ una vecindad de x tal que $\langle U, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G. Entonces

$$\langle U, A\rangle = \langle U, A \cap GV\rangle \subseteq \langle U, KV\rangle = K \cdot \langle U, V\rangle.$$

Por lo tanto como $K \cdot \langle U, V\rangle$ tiene cerradura compacta en G, se sigue que A es un connunto pequeño.
[$a) \Rightarrow c)$] Mostraremos que la restricción $\alpha : G \times A \to X$ es cerrada con fibras compactas. De la definición de conjunto pequeño se sigue que tiene fibras comopactas. Probemos que es cerrada, para esto consideremos un subconjunto cerrado B de $G \times A$. Sea $\{(g_i, a_i)\}$ una red en B que converge a un punto $x \in X$. Hay que probar que $x \in \alpha(B)$. Como A es pequeño existe una vecindad U de x en X tal que $\langle U, A\rangle$ tiene cerradura compacta. Podemos suponer cada $g_i \in \langle U, A\rangle$ (sino es el caso, podemos tomar una subred que esté contenida en $g_i \in \langle U, A\rangle$ ya que $x \in U$). Entonces ${g_i}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a un $g \in G$. De aquí obtenemos que la red $a_i = g_i^{-1} g_i a_i$ converge a $g^{-1}x = a$. De esta manera tenemos que $(g, a) \in B$ y $x = ga = \alpha(g, a) \in \alpha(B)$.
[$c) \Rightarrow b)$] Otra vez vamos a mostrar que $p : A \to X/G$ es cerrada con fibras compactas. Sea B un subconjunto cerrado de A. Entonces $\alpha(G \times B) = GB$ es cerrado en X, esto debido a $c)$, así que $p(B)$ es cerrado en X/B. Para cada $p(x) \in X/G$, $p^{-1}(p(x)) \cap A = G(x) \cap A = \langle x, A\rangle x$. Pero $\langle x, A\rangle x$ es compacto

debido a que $\langle x, A\rangle x = \alpha^{-1}(x)$.
[$b) \Rightarrow a)$] Sea $x \in X$. Vamos a mostrar que x tiene una vecindad V tal que $\langle V, A\rangle$ tiene cerradura compacta. Por hipótesis la restricción de la función orbital a A es perfecta, así que $p^{-1}(p(x)) = G(x) \cap A$ es compacto. Como X es un G-espacio propio tenemos que $G(x) \cong G/G_x$, debido a que G_x es compacto $\varphi_x : G \to G(x)$ es perfecta también. De esto concluimos que $\langle x, A\rangle = \varphi_x^{-1}(G(x) \cap A)$ es compacto. Definamos $K = \langle x, A\rangle$, ahora sea U una vecidad abierta de x en X. Entonces $B = A \setminus KU$ es un subconjunto cerrado en A y así $p(B)$ es cerrado en X/G y no contiene a $p(x)$. Hay una vecindad V de x tal que $p(V) \cap p(B)$, es decir, $\langle V, B\rangle = \emptyset$. Por lo tanto

$$\langle V, A\rangle = \langle V, B\rangle \cup \langle V, KU\rangle = K \cdot \langle V, U\rangle.$$

Si suponemos que U es pequeña y $\langle V, U\rangle$ tiene cerradura compacta en G, entonces $\langle V, A\rangle$ tiene cerradura compacta en G. □

Definición 1.4.2. *Sea X un G-espacio. Un subconjunto F de X se llama **fundamental** si F es pequeño y $GF = X$.*

Proposición 1.4.3. *Sea X un G-espacio propio tal que X/G es paracompacto. Entonces X tiene un conjunto fundamental.*

Demostración. Para cada $x \in X$ existe una vecindad pequeña U_x en X. Como X/G es paracompacto, la cubierta abierta $\{p(U_x)\}_{x\in X}$ de X/G tiene un refinamiento localmente finito $\{V_i\}_{i\in I}$. En particular, para cada $i \in I$ existe $x_i \in X$ tal que $V_i \subseteq p(U_{x_i})$. Definamos, para cada $i \in I$, $W_i = p^{-1}(V_i)$. Entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta localmente finita de X que consta de subconjuntos pequeños. Por lo tanto si tomamos

$$F = \bigcup_{i\in I} W_i$$

se cumple que: F es pequeño (esto debido a que la cubierta es localmente finita) y que $p(F) = X/G$, o lo que es equivalente, que $GF = X$ como se requería. □

Lema 1.4.4. *Sea X un G-espacio propio con X/G paracompacto. Entonces todo subconjunto cerrado pequeño A de X es paracompacto.*

Demostración. Por la Proposición 1.4.1 b) sabemos que $p : A \to X/G$ es perfecta, así que $p(A)$ es cerrado en X/G y por lo tanto paracompacto. Entonces usando una vez más que la restricción de p a A es perfecta se tiene que A es paracompacto. □

Teorema 1.4.5. *Sea X un G-espacio propio con X/G paracompacto. Entonces X es paracompacto.*

Demostración. Por la Proposición 1.4.3 X tiene un subconjunto cerrado fundamental F. Por la proposición anterior, F es paracompacto. Como G es un grupo topológico localmente compacto, también es paracompacto. Por lo tanto, $G \times F$ es paracompacto (ver por ejemplo [44], Lema 26-1). Ahora como la restricción de la acción $\alpha : G \times F \to X$ es perfecta y sobreyectiva, se sigue que X es paracompacto. $\square$

Observación 1.4.6. *De la Proposición 1.3.8 tenemos que cada G-espacio propio en G-$\mathcal{M}$ tiene espacio de órbitas metrizable, como es bien sabido del Teorema de Stone (teorema 4.4.1 en [22]) se sigue que G-$\mathcal{M} \subseteq G$-$\mathcal{P}$. El determinar la paracompacidad del espacio de órbitas a partir del espacio fase es un problema muy antiguo y que todavía sigue abierto, se puede consultar el artículo [12] para conocer el status de dicho problema.*

Problema 1.4.7. *¿La paracompacidad del espacio de órbitas se sigue de la paracompacidad del espacio fase si la acción es propia?*

La siguiente Proposición será fundamental en la demostración de los resultados principales en los siguientes Capítulos, ya que nos dice que todo G-espacio con espacio de órbitas paracompacto, tiene una cubierta abierta invariante localmente finita de subconjuntos tubulares.

Proposición 1.4.8. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio con espacio de órbitas X/G paracompacto. Entonces existen subgrupos compactos grandes $H_i \subset G$, $i \in \mathcal{I}$, y una cubierta localmente finita de subconjuntos abiertos G-invariantes $\overline{\Phi}_i$ de X tal que la cerradura de cada subconjunto es un conjunto G-tubular donde los subgrupos rebanadores H_i son grandes.*

Demostración. Se sigue del Teorema de la rebanada aproximativa que X puede ser cubierto por una familia de conjuntos tubulares $G(S_i)$, $i \in \mathcal{I}$, donde cada S_i es una H_i-rebanada correspondiente al subgrupo compacto rebanador $H_i \subset G$.

Sea $p : X \to X/G$ la proyección orboital. Como X/G es paracompacto y $\{p(G(S_i))\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una cubierta abierta de X/G, existe una cubierta abierta localmente finita $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ of X/G tal que la cerradura de $\overline{O}_i$ está contenida en $p(G(S_i))$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

Para cada $i \in \mathcal{I}$, pongamos $\Phi_i = p^{-1}(O_i)$. Entonces claramente $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ es un refinamiento abierto localmente finito y G-invariante de $\{G(S_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$; además $\overline{\Phi}_i \subset G(S_i)$ para cada $i \in \mathcal{I}$.

Por lo tanto, como cada $\overline{\Phi}_i$ pertenece a un subconjunto G-invariante de $G(S_i)$, él mismo es un conjunto G-tubular con subgrupo rebanador H_i, como era requerido. Esto completa la demostración. □

1.5. Existencia de rebanadas globales

Como ya hemos visto, el teorema de la rebanada aproximativa nos dice que cada G-espacio propio está compuesto localmente por productos torcidos, si el grupo actuante G es casi conexo y el G-espacio X tiene espacio de órbitas paracompacto podemos decir más, que X mismo es un producto torcido. Los resultados de esta sección son debidos a H. Abels en [1].

Lema 1.5.1. *Sean G un grupo casi conexo, X un G-espacio y K un subgrupo compacto maximal de G. Además consideremos dos subconjuntos abierto invariantes U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \cap U_2$ es cerrado en $U_1 \cup U_2$ y G-funciones $f_i : U_i \to G/K$, $i = 1, 2$. Si $S_2 = f_2^{-1}(K)$ es un espacio normal, entonces existe una G-función $f : U_1 \cup U_2 \to G/K$ tal que $f\,|_{U_1} = f_1$.*

Demostración. Como $U_1 \cap U_2$ es cerrado en $U_1 \cup U_2$, tenemos que $S_2 \cap U_1$ es cerrado en S_2. Además tenemos que G/K es K-homeomorfo a un K-espacio euclidiano de dimensión finita (Teorema 1.2.4, parte (e)), por el Teorema de Tietze-Gleason[1] existe una K-función $F : S_2 \to G/K$ tal que $F\,|_{U_1\cap S_2} = f_1\,|_{U_1\cap S_2}$. Puesto que $U_2 \cong GS_2$ (Proposición 1.3.15, (ii)), existe una única G-función $f' : U_2 \to G/K$ tal que $f'\,|_{S_2} = F$. También tenemos que $f'\,|_{U_1\cap U_2} = f_1\,|_{U_1\cap U_2}$. Por lo tanto, la G-función $f : U_1 \cup U_2 \to G/K$ definida por $f\,|_{U_2} = f'$ y $f\,|_{U_1} = f_1$ es la buscada.

□

Teorema 1.5.2. *Sean G un grupo casi-conexo y X un G-espacio tal que X/G es paracompacto. Entonces existe una K-rebanada global S, donde K es un subgrupo compacto maximal.*

Demostración. Sea $p : X \to X/G$ la proyección orbital. Por el Teorema de la rebanada aproximativa, la maximalidad de K y puesto que X/G es regular,

[1] Es la versión equivariante del Teorema de Tietze-Urysohn y se puede consultar en [16]

existe una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tal que cada $U \in \mathcal{U}$ es G-invariante y hay una G y hay una G-función $\overline{U} \to G/K$. Como X/G es paracompacto, para $P(\mathcal{U}) = \{p(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ existe un refinamiento abierto σ-discreto $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \bigcup_{A\in\mathcal{U}_n} \overline{A}$$

es cerrado en X/G. Para cada $A \in \mathcal{U}_n$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subseteq p(U)$, entonces existe una G-función $f_A : p^{-1}(\overline{A}) \to G/K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, las G-funciones f_A, $A \in \mathcal{U}_n$, se componen para formar la G-función $f_n : X_n \to G/K$, donde $X_n = p^{-1}(Y_n)$,esto es posible debido a que cada $\mathcal{U}_n$ es una familia discreta.

Afirmamos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de G-funciones

$$F_j : X_1 \cup \cdots \cup X_j \to G/K,$$

tal que $F_j \mid_{X_1\cup\cdots\cup X_{j-1}} = F_{j-1}$ para $j > 1$.

En efecto, sea $F_1 = f_1$ y definamos inductivamente usando el Lema 1.5.1, X_n, $X_1 \cup \cdots \cup X_{n-1}$, f_n y F_{n-1} juegan el papel de U_2, U_1, f_2 y f_1 respectivamente. Resta probar que $S = f_n^{-1}(K)$ es un espaico normal. Puesto que $p : S \to Y_n$ es perfecta, y como paracompacidad es preservada por la imagen inversa de funciones perfectas y subespacios cerrados, se sigue que S es paracompacto y por lo tanto normal. Entonces por el Lema 1.5.1 existe una G-función $F_n : X_1 \cup \cdots \cup X_n \to G/K$ tal que $F_n \mid_{X_1\cup\cdots\cup X_{n-1}} = F_{n-1}$.

La G-función $f : X \to G/K$ tal que $f \mid_{X_n} = F_n$ es la G-función deseada. f es continua en cada $x \in X$ puesto que $p(x)$ es punto interior de algún $A \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ y así x es punto interior de algún X_n. □

La existencia de rebanadas globales para grupos casi conexos nos dan una estructura más simple para los G-espacios propios que pertenecen a G-$\mathcal{P}$. El siguiente resultado se debe a H. Abels [1].

Teorema 1.5.3. *Sean G un grupo casi conexo, $X \in G$-$\mathcal{P}$ y K un subgrupo compacto maximal de G. Entonces X es K-homeomorfo a $G/K \times S$, donde S es una K-rebanada global de X.*

Demostración. Por el Teorema anterior y el Lema 1.3.14, $X \cong_G G \times_K S$. De acuerdo al Teorema 1.2.4, existe $E \subset G$ tal que $E \cong_K G/K$ y la multiplicación $E \times K \to G$ es un homemorfismo, denotemos por $(e, k) : G \to E \times K$

a su función inversa. La función $e : G \to E$ es una K-función debido a que K actúa por automorfismos internos en E. Por lo tanto la función

$$G \times_K S \to E \times S, \text{ definida por } [g, s] \mapsto (e(g), k(g)s),$$

Es el K-homemorfismo deseado. □

1.6. La dimensión de espacios normales

En esta sección revisaremos las propiedades principales de la dimensión cubriente en espacios normales. Los resultados serán mencionados sin demostración debido a que son muy conocidos, sin embargo daremos una referencia específica de la demostración de cada uno de éstos.

Lo primero que revisaremos son las definiciones fundamentales para tener la noción de dimensión cubriente.

Definición 1.6.1. *Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de subconjuntos en un espacio X. Diremos que el **orden** de $\mathcal{U}$ es menor o igual a un número natural n, lo cual denotaremos como $ord(\mathcal{U}) \leq n$, si cada $x \in X$ está en a lo más n elementos de $\mathcal{U}$.*

Otro concepto que necesitaremos es un tipo especial de refinamiento.

Definición 1.6.2. *Sea $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ una cubierta de un espacio normal X. Un **encogimiento** de $\mathcal{U}$, es una cubierta $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de X tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ uno tiene que $V_\lambda \subseteq U_\lambda$.*

Estas nociones son los elementos básicos para definir la dimensión cubriente.

Definición 1.6.3. *Sea X un espacio normal. La **dimensión cubriente** de X (también llamada la **dimensión de Čech-Lebesgue**), denotada como $\dim X$, es un número entero n mayor o igual que -1 tal que satisface lo siguiente:*

a) $\dim X \leq n$ *si para cada cubierta abierta finita $\{U_i\}_{i=1}^k$ de X existe un encogimiento abierto y finito $\{V_i\}_{i=1}^m$ tal que $ord(\{V_i\}_{i=1}^m) \leq n+1$;*

b) $\dim X = n$ *si* $\dim X \leq n$ *y* $\dim X > n - 1$*;*

c) $\dim X = \infty$ *si* $\dim X > n$ *para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Una de las caracterizaciones importantes la dio H. Dowker, la cual nos dice que podemos cambiar la frase "cubierta abierta finita" por la de "cubierta abierta localmente finita", y que los encogimientos se pueden remplazar por refinamientos localmente finitos. La demostración de este resultado se encuentra en el Teorema 3.2.1 de [21].

Teorema 1.6.4. *Sea X un espacio normal. Entonces son equivalentes:*

a) $\dim X \leq n$*;*

b) Toda cubierta abierta localmente finita de X tiene un refinamiento abierto de orden menor o igual que $n+1$;

c) Toda cubierta abierta localmente finita de X tiene un encogimiento abierto de orden menor o igual que $n+1$.

Otro resultado importante nos dice que la dimensión cubriente es monótona respecto a subconjuntos cerrados, la demostración puede ser consultada en el Teorema 3.1.4 de [21].

Teorema 1.6.5. *Sean X un espacio normal y $M \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Entonces* $\dim M \leq dimX$*.*

También tenemos que la dimensión se preserva bajo uniones numerables. La demostarción está en el Teorema 3.1.8 de [21].

Teorema 1.6.6. *Sean X un espacio normal y $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una cubierta cerrada de X tal que* $\dim F_i \leq n$ *para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces* $\dim X \leq n$*.*

Un resultado más general sobre la dimensión preservada por uniones, nos dice que la dimensión se preserva bajo uniones localmente finitas. La demostarción puede ser consultada en el Teorema 3.1.8 de [21].

Teorema 1.6.7. *Sean X un espacio normal y $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta cerrada localmente finita de X tal que* $\dim F_\lambda \leq n$ *para cada $\lambda \in \lambda$. Entonces* $\dim X \leq n$

En particular, si el espacio es paracompacto, el Teorema anterior nos da el Teorema de Dowker-Nagami.

Teorema 1.6.8. *Sea X un espacio paracompacto. Entonces* $\dim X \leq n$ *si y sólo si para cada $x \in X$ existe una vecindad cerrada U de x en X tal que* $\dim U \leq n$*.*

También la dimensión cubriente se preserva bajo productos, aunque aquí se necesitan más hipótesis sobre los espacios factores. La demostración puede ser consultada en [39].

Teorema 1.6.9. *Sean X un espacio paracompacto y Z un espacio paracompacto localmente compacto. Entonces*

$$\dim X \times Z \leq \dim X + \dim Z.$$

Si además Z es un poliedro localmente finito entonces

$$\dim X \times Z = \dim X + \dim Z.$$

En los grupos topológicos también tenemos resultados importantes. Uno de ellos, en su caso general, es debido a Pasynkov, aunque varios matemáticos hicieron casos particulares previamente. La demostración puede ser consultada en [50].

Teorema 1.6.10. *Sean G un grupo localmente compacto, H y K dos subgrupos cerrados de G con $H \subseteq K$. Entonces*

$$\dim G/H = \dim G/K + \dim K/H.$$

Antes de enunciar el siguiente teorema, tenemos que definir la dimensión inductiva grande.

Definición 1.6.11. *Sea X un espaico normal. La **dimensión inductiva grande** (también conocida como la **dimensión de Brouwer-Čhech**) de X, denotada como $\operatorname{Ind} X$, es el número entero mayor o igual que -1 tal que satisface lo siguiente:*

a) $\operatorname{Ind} X = -1$ *si y sólo si* $X = \emptyset$*;*

b) $\operatorname{Ind} X \leq n$*, donde* $n \geq 0$*, si para cada subconjunto cerrado* $A \subseteq X$ *y cada subconjunto abierto* V *de* X *tal que* $A \subseteq V$*, existe un subconjunto abierto* U *de* X *tal que*

$$A \subseteq U \subseteq V \text{ y } \operatorname{Ind} FrU \leq n-1;$$

c) $\operatorname{Ind} X = n$ *si* $\operatorname{Ind} X \leq n$ *y* $\operatorname{Ind} X > n-1$*;*

d) $\operatorname{Ind} X = \infty$ *si* $\operatorname{Ind} X > n$ *para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

Uno de los primeros problemas que se planteó en la teoría de la dimensión es saber cuándo las diferentes dimensiones coinciden. El Teorema de Katětov-Morita nos dice que en la clase de los espacios metrizables, las dos dimensiones aquí mencionadas coinciden. Su demostración puede consultarse en el Teorema 4.1.3 de [21].

Teorema 1.6.12. *Sea X un espacio metrizable. Entonces* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Capítulo 2

Dimensión y acciones propias I

En este capítulo nos enfocaremos en las acciones propias de grupos de Lie y generalizaremos los teoremas que están establecidos para acciones de grupos compactos de Lie. Revisaremos la estructura dimensional de los G-espacios propios metrizables y estableceremos la desigualdad del Teorema 0.0.1 cuando el espacio fase tiene espacio de órbitas paracompacto. Como una aplicación extenderemos el Teorema 0.0.2 al caso en que la acción es propia y el grupo que actúa es de Lie. Las demostraciones de los resultados principales de este capítulo se basan escencialmente en el Teorema de la rebanada exacta (Teorema 1.3.16).

2.1. La dimensión del espacio de órbitas I

En esta sección calcularemos la dimensión de los G-espacios propios que tienen una métrica G-invariante a partir de subespacios con estructura orbital más simple y generalizaremos la desigualdad del Teorema 0.0.1. Comenzaremos enunciando un lema importante sobre la cantidad de tipos de órbitas que tienen las acciones propias de grupos de Lie. Este resultado se debe a Antonyan (ver [7, Proposition 3.6]).

Lema 2.1.1. *Sea G un grupo de Lie. Entonces hay a lo más una cantidad numerable de diferentes tipos de órbitas compactas.*

Demostración. Caso 1. Primero supongamos que G tiene un número finito de componentes conexas, entonces G tiene un subgrupo compacto maximal K (Teorema 1.2.2). Es un hecho conocido que los grupos compactos de Lie

tienen a lo más una cantidad numerable de diferentes tipos de órbitas (ver [45, Corolario 1.7.27]). Como la acción es propia, todos los tipos de órbitas caen dentro de K, por lo tanto, se sigue el resultado deseado.
Caso 2. Sea G un grupo de Lie arbitrario. Supongamos lo contrario, que hay una cantidad no numerable de diferentes tipos de órbitas compactas $\{(H_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ en G. Sea G_0 la componente conexa de la indentidad G y $\pi : G \to G/G_0$ el homomorfismo canónico. Puesto que G/G_0 es un grupo discreto numerable, se sigue que para cada $\alpha \in \Lambda$, $\pi(H_\alpha)$ es un subgrupo finito de G/G_0. Como G/G_0 tiene a lo más una cantidad numerable de subgrupos finitos, existe $\alpha_0 \in \Lambda$ y un subconjunto no numerable $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tal que $\pi(H_{\alpha_0}) = \pi(H_\alpha)$, para cada $\alpha \in \Lambda_0$. Sea $F = H_{\alpha_0} \cdot G_0$. Entonces F es un grupo de Lie con $F/G_0 = \pi(H_{\alpha_0})$, así que F tiene un número finito de componentes conexas de la identidad. Por otro lado, $H_\alpha \subseteq F$ para cada $\alpha \in \Lambda_0$. Esto es, F es un grupo de Lie con un número finito de componentes conexas que contiene una cantidad no numerable de diferentes tipos de órbitas compactas. Esto contradice el primer caso.

□

Otro resultado importante nos dice que para cada punto, podemos encontrar una vecindad invariante donde todos sus elementos tengan el mismo tipo de órbita.

Lema 2.1.2. *Sean G un grupo de Lie, X un G-espacio propio y $x \in X$. Entonces existe una vecindad invariante V de x tal que para cada $y \in V$, el estabilizador G_y es conjugado a G_x.*

Demostración. Es inmediato del Teorema de la rebanada exacta, ya que si $x \in X$ existe una G_x-rebanada S. Definamos $V = GS$, entonces V es una vecindad invariante de x la cual cumple que si $y \in V$, entonces $y = gx$ y $G_y = G_{gx} = g^{-1}G_x g$. □

Lema 2.1.3. *Sean G un grupo de Lie, $X \in G$-$\mathcal{M}$ y H un subgrupo compacto de G. Entonces el conjunto $\bigcup\{X_{(K)} \mid (K) \leq (H)\}$ es un subconjunto abierto e invariante de X.*

Demostración. Es inmediato del Lema anterior. ya que si tomamos un x en $\bigcup\{X_{(K)} \mid (K) \leq (H)\}$, entonces existe una vecindad V abierta e invariante tal que

$$x \in V \subset X_{(G_x)} \subset \bigcup\{X_{(K)} \mid (K) \leq (H)\}.$$

□

De este resultado podemos obtener que la unión de todos los elementos con el tipo de órbita subconjugado a un subgrupo fijo, es un subconjunto abierto.

Lema 2.1.4. *Sean G un grupo de Lie, $X \in G$-$\mathcal{M}$ y H un subgrupo compacto de G. Entonces el conjunto $\bigcup\{X_{(K)} \mid (K) < (H)\}$ es un subconjunto abierto e invariante de X.*

Demostración. Se sigue del Lema 2.1.3 puesto que

$$\bigcup\{X_{(K)} \mid (K) < (H)\} = \bigcup_{(K')<(H)} \{X_{(K)} \mid (K) \leq (K')\}.$$

$\square$

El siguiente resultado nos dice que los G-espacios propios metrizables (cuando G es un grupo de Lie) está compuesto por subespacios de tipo F_σ donde cada uno tiene un solo tipo orbital.

Lema 2.1.5. *Sean G un grupo de Lie y $X \in G$-$\mathcal{M}$. Para cada subgrupo compacto H de G, denotemos por $\widetilde{X}_{(H)}$ la imagen $p(X_{(H)})$ bajo la función orbital $p : X \to X/G$. Entonces:*

1. *$X_{(H)}$ es la intersección de un subconjunto abierto e invariante de X y un subconjunto cerrado e invariante de X,*
2. *$\widetilde{X}_{(H)}$ es la intersección de un subconjutno abierto de X/G y un subconjunto cerrado de X/G,*
3. *$\widetilde{X}_{(H)}$ es un subconjunto F_σ en X/G,*
4. *$X_{(H)}$ es la unión numerable de subconjuntos cerrados e invariantes de X.*

Demostración. Observemos que $X_{(H)}$ es la intersección de $\bigcup\{X_{(K)} \mid (K) \leq (H)\}$ y el complemento de $\bigcup\{X_{(K)} \mid (K) < (H)\}$. Entonces para probar (1) notemos que el primer conjunto es abierto e invariante gracias al Lema 2.1.3 y el segundo es un subconjunto cerrado e invariante debido al Lema 2.1.4.

(2) se sigue inmediantamente de (1).

(3) se sigue de (2) si observamos que X/G es metrizable y todo subconjunto abierto de un espacio metrizable es un subconjunto F_σ.

(4) se sigue de (3). $\square$

Usando el lema anterior y algunos métodos expuestos en el artículo de Palais [45] para el caso en que G es compacto de Lie obtenemos los siguientes resultados.

Teorema 2.1.6. *Sean G un grupo de Lie y X un G-espacio propio que admite una métrica G-invariante. Entonces*

$$\dim X = \sup\{\dim X_{(H)} \mid H \textit{ es subgrupo compacto de } G\}$$

y

$$\dim X/G = \sup\{\dim \widetilde{X}_{(H)} \mid H \textit{ es subgrupo compacto de } G\},$$

Demostración. Puesto que X es un G-espacio propio, sólo ocurren tipos de órbitas compactas en él. Entonces X es la unión de todos sus subconjuntos $X_{(H)}$, donde H es un subgrupo compacto de G. Debido al Lema 2.1.1, hay a lo más una cantidad numerable de tipos de órbitas compactas en X. Por lo tanto X es la unión numerable de sus sunconjuntos de la forma $X_{(H)}$, así obtenemos que X/G es la unión numerable de sus subconjuntos de la forma $\tilde{X}_{(H)}$. Debido al Lema 2.1.5, $X_{(H)}$ y $\tilde{X}_{(H)}$ son subconjuntos F_σ. Ahora las desigualdades deseadas se siguen del Teorema de la suma numerable (Teorema 1.6.6). □

Para G-espacios propios con un solo tipo de órbitas se tiene un mejor resultado, el cual, para el caso en que el grupo actuante es compacto de Lie fue establecido por N. Antonyan en su artículo [3].

Teorema 2.1.7. *Sean G un grupo de Lie y $X \in G$-$\mathcal{P}$ con un solo tipo de órbitas, digamos (H). Entonces*

$$\dim\ X = \dim\ X/G + \dim\ G/H.$$

Demostración. Por la Proposición 1.4.8, X es cubierto por una familia localmente finita de conjuntos cerrados tubulares $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Esto nos dice que el espacio de órbitas X/G es cubierto por una familia localmente finita de conjuntos cerrados $\{\Phi_i/G\}_{i\in\mathcal{I}}$.

De modo que, por el Teorema de la suma localmente finita (Teorema 1.6.7), uno tiene:

$$\dim\ X = \sup_{i\in\mathcal{I}} \dim\ \Phi_i \quad \text{y} \quad \dim\ X/G = \sup_{i\in\mathcal{I}} \dim\ \Phi_i/G.$$

Así que será suficiente probar que

$$\dim \Phi = \dim \Phi/G + \dim\ G/H,$$

para cada miembro Φ de la cubierta $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$.

Sea $\varphi : \Phi \to G/H$ la función rebanadora del correspondiente conjunto tubular $\Phi \in \{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. En este caso Φ es G-homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$, donde $S = \varphi^{-1}(eH)$ (Lema 1.3.14).

Notar que si $s \in S$ entonces $G_s \subseteq H$ y como G_s es conjugado a H se sigue que $G_s = H$. Esto nos dice que H actúa trivialmente sobre S y así S/H es homeomorfo a S. Por lo tanto, el producto torcido $\Phi = G \times_H S$ es G-homeomorfo al producto cartesiano $G/H \times S$. En particular, el espacio de órbitas Φ/G es homeomorfo a S.

Ahora, como G/H es una variedad, y por tanto un poliedro, por el Teorema de Morita (Teorema 1.6.9) tenemos que

$$\dim \Phi = \dim G/H \times S = \dim G/H + \dim S,$$

y como $S \cong \Phi/G$ finalmente tenemos que

$$\dim \Phi = \dim G/H + \dim \Phi/G,$$

como era requerido.

$\square$

Como una consecuencia obtenemos una manera de calcular la dimensión en el espacio fase y de su espacio de órbitas a partir de G-espacios con tipo orbital más simple.

Corolario 2.1.8. *Sean G un grupo de Lie y X un G-espacio propio que admite una métrica G-invariante. Entonces*

$$\dim X = \sup\{\dim \widetilde{X}_{(H)} + \dim G/H \mid H \textit{ es subgrupo compacto de } G\}.$$

y

$$\dim X/G = \sup\{\dim X_{(H)} - \dim G/H \mid H \textit{ es subgrupo compacto de } G\}.$$

Se sigue del Corolario anterior que $\dim X/G \leq \dim X$ para cada $X \in G$-$\mathcal{M}$ cuando G es un grupo de Lie. Sin embargo, esta desigualdad también es válida para espacios más generales:

Teorema 2.1.9. *Sea G un grupo de Lie y X un G-espacio propio con espacio de órbitas X/G paracompacto. Entonces* $\dim X/G \leq \dim X$.

Demostración. Por la Proposicion 1.4.8, X es cubierto por una familia localmente finita de conjuntos cerrados tubulares $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Entonces $\{\Phi_i/G\}_{i\in\mathcal{I}}$ es una cubierta cerrada localmente finita de X/G. Ahora, por el Teorema de la suma localmente finita, será suficiente probar que $\dim \Phi/G \leq \dim X$ para cada elemento Φ de la cubierta $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Sea $\varphi : \Phi \to G/H$ la correspondiente G-función rebanadora del conjunto tubular $\Phi \in \{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, donde H es un subgrupo compacto de G. En este caso Φ es G-homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$, donde $S = f^{-1}(eH)$ y $\Phi/G \cong S/H$. Como H es un grupo compacto de Lie, podemos usar la desigualdad $\dim S/H \leq \dim S$. Puesto que S es un subespacio cerrado del espacio normal X, tenemos que $\dim S \leq \dim X$. Es decir, $\dim \Phi/G \leq \dim S/H \leq \dim S \leq \dim X$, como se requería. $\square$

En el caso en que el grupo actuante es compacto de Lie, la desigualdad se satisface sin ningúna restricción sobre el espacio de órbitas, así que de manera natural tenemos la siguiente cuestión.

Problema 2.1.10. *¿La desigualdad del teorema anterior se satisface sin la hipótesis de paracompacidad en el espacio de órbitas?.*

2.2. Espacios finitísticos y acciones propias

Es esta sección usaremos la desigualdad del Corolario 2.1.9 para extender a las acciones propias un resultado importante para G-espacios finitísticos.

Definición 2.2.1. *Un espacio paracompacto X se llama **finitístico**, si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto de orden finito.*

En lo que sigue, enunciaremos una serie de resultados que nos ayudarán a demostrar el Teorema principal de esta sección. Los siguientes resultados son debidos a Deo y Tripathi en su artículo [18].

Lema 2.2.2. *Sean X un espacio paracompacto y F un subconjunto cerrado de X. Supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X que cubre a F y $ord(\{U_\alpha \cap F\}_{\alpha\in\Lambda}) \leq m$. Entonces existe un refinamiento abierto $\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $ord(\{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}) \leq m$ y $\{O_\alpha \cap F\}_{\alpha\in\Lambda}$ cubre a F.*

Demostración. Consideremos la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{X \setminus F\}$ de X. Entonces como X es paracompacto, existe un encogimiento cerrado localmente finito

$\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{W_{X\setminus F}\}$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$, $\overline{W}_\alpha \subseteq U_\alpha$ y $\overline{W}_{X\setminus F} \subseteq X \setminus F$. Para cada $\alpha \in \Lambda$ definamos

$$\Lambda_\alpha = \{\beta \in \Lambda \mid \overline{W}_\alpha \cap \overline{W}_\beta \cap F = \emptyset\}.$$

Ahora consideremos

$$A_\alpha = \overline{W}_\alpha \setminus \bigcup\{\overline{W}_\beta \mid \beta \in \Lambda_\alpha\} = \overline{W}_\alpha \cap (X \setminus E),$$

donde

$$E = \bigcup\{\overline{W}_\beta \mid \beta \in \Lambda_\alpha\}.$$

E es un subconjunto cerrado de X pues es la unión de una familia localmente finita de subconjuntos cerrados. De la construcción se sigue que $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tiene orden menor o igual a m, puesto que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ si y sólo si $A_\alpha \cap A_\beta \cap F = \emptyset$. También $W_\alpha \cap F \subseteq \overline{W}_\alpha \cap F \subseteq X \setminus \overline{W}_\beta$ para cada $\beta \in \Lambda$.

Por lo tanto

$$W_\beta \cap F \subseteq \bigcap_{\beta\in\Lambda_\alpha} (X \setminus \overline{W}_\beta) = X \setminus \bigcup_{\beta\in\Lambda_\alpha} \overline{W}_\beta = X \setminus E.$$

Es decir, para cada $\alpha \in \Lambda$

$$W_\alpha \cap F \subseteq W_\alpha \cap (X \setminus E) \subseteq \overline{W}_\alpha \cap (X \setminus E) = A_\alpha.$$

Por lo tanto, para cada $\alpha \in \Lambda$, $W_\alpha \cap F \subseteq Int(A_\alpha)$ [1]. Tomando $O_\alpha = Int(A_\alpha)$ tenemos el refinamiento deseado. $\square$

La siguiente proposición nos dará una condición suficiente para que un espacio sea finitístico.

Proposición 2.2.3. *Sean X un espacio paracompacto y F un subespacio finitístico de X. Supongamos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in X \setminus F$ existe una vecindad cerrada N_x de x en X tal que* $\dim N_x \leq n$. *Entonces X es finitístico.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta de X. Entonces, como X es finitístico, podemos encontrar un refinamiento de abierto $\{V_\beta \cap F\}_{\beta\in\Gamma}$ de $\{U_\alpha \cap F\}_{\alpha\in\Lambda}$ de orden finito, donde cada V_β es abierto en X. Por el Lema

[1] Int denota el interior de un conjunto

anterior podemos encontrar un encogimiento abierto de orden finito $\{O_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ de $\{V_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ tal que $F = \bigcup_{\beta\in\Gamma} O_\beta$. Consideremos

$$Z = X \setminus \bigcup_{\beta\in\Gamma} O_\beta \subseteq X \setminus F,$$

si Z es vacío entonces ya acabamos puesto que $\{O_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ es un refinamiento abierto de orden finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Supongamos que Z es no vacío, entonces cada $y \in Z$ tiene una vecindad cerrada $M_y = Z \cap N_y$ en Z tal que $\dim M_y \leq n$. Por el Teorema 1.6.8, $\dim Z \leq n$. Ahora podemos obtener, igual que para F, un refinamiento abierto de orden finito $\{W_\mu\}_{\mu\in\Omega}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $Z \subseteq \bigcup W_\mu$. Por lo tanto $\{O_\beta\}_{\beta\in\Gamma} \cup \{W_\mu\}_{\mu\in\Omega}$ es un refinamiento abierto de orden finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

$\square$

Ahora enunciaremos un lema técnico que nos ayudará con uno de los resultados importantes de esta sección.

Lema 2.2.4. *Sean $\mathcal{U}$ una cubierta de un espacio normal X y para cada $k \in \mathbb{N}$ $F_k(\mathcal{U}) = \{x \in X \mid x$ pertenece a lo más k elementos de $\mathcal{U}\}$. Entonces:*

i) Si $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X, entonces $F_k(\mathcal{U})$ es cerrado en X;

ii) Si $\mathcal{U}$ es una cubierta cerrada localmente finita de X, entonces $F_k(\mathcal{U})$ es abierto en X.

Demostración. Definamos

$$\mathcal{U}^n = \{U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \mid U_i \in \mathcal{U}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

y

$$\mathcal{U}^{(n)} = \{U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \mid U_i \in \mathcal{U}, i = 1, 2, \ldots, n \text{ y } U_i \neq U_j \text{ para } i \neq j\}.$$

Entonces $\mathcal{U}^{(n)} \subseteq \mathcal{U}^n$, donde por supuesto $\mathcal{U}^n$ es una cubierta pero $\mathcal{U}^{(n)}$ no necesariamente lo es.

i) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Entonces $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{U}^{(k+1)}\}$ es un conjunto abierto cuyo complemento es $F_k(\mathcal{U})$.

ii) Sea $\mathcal{U}$ una cubierta cerrada localmente finita de X. Entonces $\mathcal{U}^{k+1}$ es una cubierta cerrada localmente finita de X y $\mathcal{U}^{(k+1)}$, siendo subfamilia de $\mathcal{U}^{k+1}$, también es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados. Ahora $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{U}^{(k+1)}\}$ es un conjunto cerrado cuyo complemento es $F_k(\mathcal{U})$.

□

La siguiente proposición nos da una condición necesaria para que un espacio sea finitístico.

Proposición 2.2.5. *Sean X un espacio paracompacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta localmente finita de X que no tiene orden finito. Entonces existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjutos cerrados de X tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$, $F_n \subset F_{n+1}$ y la familia $\{F_{n+1} \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente finita. Por lo tanto, para cada $x \in X$ existe una vecindad cerrada N_x de x en X tal que $N_x \subseteq F_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Si además $\mathcal{U}$ no tiene un refinamiento abierto de orden finito, entonces también se satisface que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim F_n > n$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n = F_n(\mathcal{U})$ como se definió en el Lema anterior. Entonces claramente $F_n \subseteq F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También, puesto que $\mathcal{U}$ no tiene orden finito, $F_n \neq X$ y debido a que $\mathcal{U}$ es localmente finita $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Esto significa que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia infinita. Ahora, cambiando los índices si es necesario, podemos suponer que F_n está contenido propiamente en F_{n+1} para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que como consecuencia del cambio de índices

$$F_n = \{x \in X \mid x \text{ pertenece lo más a } r_n \text{ elementos de } \mathcal{U}, n \leq r_n\}.$$

Consideremos la sucesión $\{F_{n+1} \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, claramente

$$F_{n+1} \setminus F_n = \{x \in X \mid x \text{ pertenece a exactamente } r_{n+1} \text{ elementos de } \mathcal{U}\}.$$

Por lo tanto, si alguna vecindad N_x de x en X intersecta una cantidad infinita de elementos de $\{F_{n+1} \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, también intersecta una cantidad infinita de elementos de $\mathcal{U}$, y así $\{F_{n+1} \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene que ser localmente finita. Por lo tanto para cada $x \in X$ existe una vecindad cerrada N_x de x en X y un $m \in \mathbb{N}$ tales que $N_x \subseteq F_m$.

Si además $\mathcal{U}$ no tuviera un refinamiento abierto localmente finito, por el Teorema de la suma localmente finita (Teorema 1.6.7) y del hecho que $\dim F_n \leq \dim F_{n+1}$ podemos acomodar los índices de tal manera que para cada $n \in \mathbb{N}$ $\dim F_n > n$ como se requería. □

Observación 2.2.6. *Es obvio que si consideramos una subsucesión* $\{F_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ *de* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en la proposición anterior, entonces* $\{F_{n_{k+1}} \setminus F_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ *también es localmente finita.*

Ahora, enunciaremos la caracterización de Deo y Tripathi para los espacios que no son finitísticos. Este teorema junto con la desigualdad del Teorema 2.1.9 son la clave del Teorema principal de esta sección.

Teorema 2.2.7. *Un espacio paracompacto de Hausdorff* X *no es finitístico si y sólo si existe un subespacio cerrado* E *en* X *que puede ser represnetado como una unión disjunta de subespacios* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que* $\dim E_n > n$ *y* E_n *es abierto y cerrado en* E *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Si tenemos que existe el conjunto E, entonces E no es finitístico y por lo tanto X tampoco lo es. Así que en realidad sólo hay que demostrar la otra implicación. Supongamos que X no es finitístico. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cubierta abierta localmente finita de X que no tiene ningún refinamiento abierto de orden finito. Entonces por la Proposición anterior tenemos una sucesión $\{F_n(\mathcal{U})\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados en X tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n(\mathcal{U}) = X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n(\mathcal{U})$ está contenido propiamente en $F_{n+1}(\mathcal{U})$, $\dim F_n(\mathcal{U}) > n$ y $\{F_{n+1}(\mathcal{U}) \setminus F_n(\mathcal{U})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia localmente finita. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un encogimiento abierto de $\mathcal{U}$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.

Sea $\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{V}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $F_n(\mathcal{U}) \subseteq F_n(\overline{\mathcal{V}}) \subseteq F_n(\mathcal{V})$ donde, debido al Lema 2.2.4 $F_n(\overline{\mathcal{V}})$ es cerrado en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$O_n = \{x \in X \mid \text{ tiene una vecindad cerrada } N_x \text{ en } X \text{ tal que } \dim N_x \leq n\}.$$

Entonces O_n es abierto en X y O_n está contenido propiamente en O_{n+1}.

Afirmamos que $F_n(\mathcal{U}) \cup O_m \neq X$, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Para esto será suficiente demostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ uno tiene que $F_{k+1}(\mathcal{U}) \cup O_k \neq X$. Supongamos lo contrario, esto es, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_{m+1}(\mathcal{U}) \cup O_m = X$. Entonces

$$X \setminus F_{m+1}(\overline{\mathcal{V}}) \subseteq X \setminus F_{m+1}(\mathcal{U}) \subseteq O_m,$$

de esto obtenemos que $\dim(X \setminus F_{m+1}(\overline{\mathcal{V}})) \leq m$. Ahora por el Lema 2.2.2 existe un refinamiento abierto $\{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ de $\mathcal{V}$ tal que $ord(\{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}) \leq m+1$ y

$$X \setminus F_{m+1}(\overline{\mathcal{V}}) \subseteq \bigcup_{\beta\in\Gamma} W_\beta.$$

De la construcción de $F_{m+1}(\overline{\mathcal{V}})$ (ver Lema 2.2.4 y la Proposición 2.2.5) se sigue que $\dim V_\alpha \cap F_{m+1}(\overline{\mathcal{V}}) \leq r_{m+1}$ para algún natural $r_{m+1} \geq m+1$. Por lo tanto se concluye que $\{V_\alpha \cap F_{m+1}(\overline{\mathcal{V}})\}_{\alpha\in\Lambda} \cup \{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ es refinamiento abierto de orden finito para $\mathcal{V}$ y por lo tanto para $\mathcal{U}$, lo cual es una contradicción.

Ahora sea m_1 el mínimo número natural tal que

$$F_{m_1}(\mathcal{U}) \setminus (F_{t_0}(\mathcal{U}) \cup O_1) \neq \emptyset,$$

donde $t_0 = 1$. Este número natural existe debido a la afirmación anterior. Tomemos $y_1 \in F_{m_1}(\mathcal{U}) \setminus (F_{t_0}(\mathcal{U}) \cup O_1)$. Entonces existe una vecindad cerrada E_1 de y_1 en X y el mínimo número natural $t_1 > t_0$ tales que $E_1 \cap F_{t_0}(\mathcal{U}) = \emptyset$, $E_1 \subseteq F_{t_1}(\mathcal{U})$ (esto debido a la Proposición 2.2.5) y $\dim E_1 > 1$. Ahora supongamos que m_2 es el mínimo número natural tal que

$$F_{m_2}(\mathcal{U}) \setminus (F_{t_1}(\mathcal{U}) \cup O_2) \neq \emptyset.$$

Para $y_2 \in F_{m_2}(\mathcal{U}) \setminus (F_{t_1}(\mathcal{U}) \cup O_2)$ podemos encontrar una vecindad cerrada E_2 de y_2 en X y el mínimo número natural $t_2 > t_1$ tales que $E_2 \cap F_{t_1}(\mathcal{U}) = \emptyset$, $E_2 \subseteq F_{t_2}(\mathcal{U})$ y $\dim E_2 > 2$. Por inducción podemos obtener, para cada $n \in \mathbb{N}$ una vecindad cerrada E_n de $y_n \in F_{t_n}(\mathcal{U}) \setminus (F_{t_{n-1}}(\mathcal{U}) \cup O_n)$ y $t_n > t_{n-1}$ tales que $E_n \cap F_{t_{n-1}}(\mathcal{U}) = \emptyset$, $E_n \subseteq F_{t_n}(\mathcal{U})$ y $\dim E_n > n$. De esta manera, la familia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siendo un encogimiento de una familia localmente finita $\{F_{t_n}(\mathcal{U}) \setminus F_{t_{n-1}}(\mathcal{U})\}_{n\in\mathbb{N}}$ (ver la Observación 2.2.6), es una familia localmente finita de subconjuntos cerrados de X ajenos dos a dos y por lo tanto $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ es el subconjunto cerrado requerido.

□

Ahora, como una concecuencia del trabajo previo, obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.2.8. *Sea G un grupo de Lie y X es un G-espacio propio finitístico tal que X/G es paracompacto. Entonces X/G también es finitístico.*

Demostración. Supongamos que X/G no es finitístico. Entonces por el Teorema 2.2.7 existe un conjunto cerrado E de X/G que puede ser representado como una unión ajena de subconjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\dim E_n > n$ y E_n es cerrado y abierto en E. Ahora si $p : X \to X/G$ es la función orbital. Por el Teorema 2.1.9 $\dim E_n \leq \dim p^{-1}(E_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $p^{-1}(E)$ es un subconjunto cerrado de X que puede ser representado como una unión ajena de subconjuntos $\{p^{-1}(E_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cada $p^{-1}(E_n)$ es cerrado y abierto en $p^{-1}(E)$. Por lo tanto, una vez más por el Teorema 2.2.7, X no puede ser finitístico. □

Capítulo 3

Dimensión y acciones propias II

En este capítulo nos enfocaremos en las acciones propias de grupos localmente compactos arbitrarios. En la primera sección generalizaremos la desigualdad de Filippov (Teorema 0.0.3) a G-espacios propios con espacio de órbitas paracompacto. En la segunda sección enunciaremos un Teorema de metrizabilidad para los G-espacios propios el cual es una generalización de un Teorema de Filippov para el caso en que G es compacto. En la tercera sección usaremos los resultados de la sección previa para generalizar el Teorema de Pasynkov (Teorema 0.0.4) a las acciones propias. Las demostraciones de los resultados principales de este capítulo se basan escencialmente en el Teorema de la rebanada aproximativa.

3.1. La dimensión del espacio de órbitas II

En esta sección probaremos que la desigualdad de Filippov también se cumple para acciones propias con la hipótesis adicional de que el espacio de órbitas es paracompacto.

Teorema 3.1.1. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio tal que X/G es paracompacto. Entonces*

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim p.$$

Donde $p : X \to X/G$ es la función orbital y $\dim p = \sup\{\dim G(x) \mid x \in X\}$.

Demostración. Caso 1. Supongamos que G es casi conexo. En este caso G tiene un subgrupo compacto maximal, digamos K (Teorema 1.2.4). Por la

Proposicion 1.4.8, X es cubierto por una familia localmente finita de conjuntos cerrados tubulares $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Así que, por el teorema de la suma localmente finita (Teorema 1.6.7), es suficiente probar que $\dim\Phi \leq \dim X/G + \dim p$, para cada elemento Φ de la cubierta $\{\Phi_i\}_{i\in I}$.

Sea $\psi : \Phi \to G/H$ la correspondiente G-función rebanadora que induce al conjunto tubular $\Phi \in \{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Debido a la maximalidad de K, existe $\xi : G/H \to G/K$ y la composición $\varphi = \psi \circ \xi$ es un G-función $\varphi : \Phi \to G/K$. En este caso Φ es G-homeomorfo al producto torcido $G \times_K S$, donde $S = \varphi^{-1}(eK)$ (Lema 1.3.14). Además, por el Teorema 1.5.3, Φ es homeomorfo (en efecto, K-homeomorfo) al producto cartesiano $G/K \times S$.

Como $\Phi \cong G/K \times S$ es cerrado en X, éste es un espacio normal. Debido a que G es localmente compacto y paracompacto (ver [13, Teorema 3.1.1]), así también el espacio cociente G/K. Entonces, de acuerdo al Teorema 1.6.9, obtenemos:

$$\dim\Phi = \dim(G/K \times S) \leq \dim G/K + \dim S. \tag{3.1}$$

Como K es compacto, del Teorema 0.0.3 tenemos la siguiente desigualdad:

$$\dim S \leq \dim S/K + \dim q \tag{3.2}$$

donde $q : S \to S/K$ es la proyección K-orbital y $\dim q = \sup\{\dim q^{-1}(a) \mid a \in S/K\}$.

Debido a que K es compacto cada K-órbita $q^{-1}(a)$ es homeomorfa al cociente K/K_x, donde K_x es el K-estabilizador de un punto $x \in q^{-1}(a)$.

Por lo tanto, combinando (3.1) y (3.2), uno obtiene:

$$\dim\Phi = \dim(G/K \times S) \leq \dim G/K + \sup\{\dim K/K_x \mid x \in S\} + \dim S/K. \tag{3.3}$$

Ahora observemos que $\Phi/G \cong (G \times_K S)/G \cong S/K$ (Lema 1.1.9) y $\dim G/K + \dim K/K_x = \dim G/K_x$ (ver el Teorema 1.6.10). Como $x \in S$ y S es una K-rebanada, tenemos que $K_x = G_x$. Entonces $G/K_x = G/G_x$ el cual es homoeomorfo a la G-órbita $G(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\dim\, G/K + \sup\{\dim K/K_x \mid x \in S\} = \sup\{\dim G/G_x \mid x \in S\}\\ &= \sup\{\dim G(x) \mid x \in S\} \leq \dim\, p.\end{aligned}$$

Esto junto con (3.3) implica que

$$\dim\Phi \leq \dim\Phi/G + \dim p.$$

Además, puesto que X/G es paracompacto, y por lo tanto normal, y Φ/G es un subconjunto cerrado de X/G, y por la monotocidad de la dimensión bajo subconjuntos cerrados (Teorema 1.6.5), uno tiene $\dim \Phi/G \leq \dim X/G$. Y así, obtenemos que

$$\dim \Phi \leq \dim X/G + \dim p,$$

como se requería.

Caso 2. Supongamos que G es totalmente disconexo. Entonces G es cero-dimensional ([21, Teorema 1.4.5]). Se sigue del Teorema 1.6.10 que $\dim G/H = 0$ para cada subgrupo cerrado H de G. Entonces

$$\dim p = \sup\{\dim G(x) \mid x \in X\} = \sup\{\dim G/G_x \mid x \in X\} = 0.$$

Por lo tanto uno tiene que probar

$$\dim X \leq \dim X/G.$$

Por el Teorema 1.4.8, X es cubierto por una familia localmente finita de conjuntos tubulares cerrados $\{\Phi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$. Así que, por el Teorema de la suma localmente finita (Teorema 1.6.7), es suficiente probar que $\dim \Phi \leq \dim X/G$, para cada elemento Φ de la cubierta $\{\Phi_i\}_{i\in I}$.

Sea $\varphi : \Phi \to G/K$ la correspondiente G-función rebanadora asociada al conjunto tubular $\Phi \in \{\Phi_i\}_{i\in I}$, donde K es un subgrupo compacto grande de G. Como K es subgrupo grande, el cociente G/K es localmente conexo (Proposición 1.3.19). Por otro lado, G/K es totalmente disconexo, y así G/K debe ser discreto. Esto implica que si $S = f^{-1}(eK)$, entonces cada gS es cerrado y abierto en Φ, y Φ es la unión ajena de los conjutos gS donde $g \in G \setminus K$. En otras palabras, Φ es homeomorfo al producto $G/K \times S$, como en el caso previo. Así que procediendo como en el caso 1, obtenemos la desigualdad deseada $\dim \Phi \leq \dim X/G$.

Caso 3. Sea G un grupo localmente compacto arbitrario. Por el caso 1 tenemos:

$$\dim X \leq \dim X/G_0 + \dim p_0, \tag{3.4}$$

donde G_0 es la componente de la identidad de G y $p_0 : X \to X/G_0$ es la función G_0-orbital.

Como G/G_0 es un grupo localmente compacto totalmente disconexo y la acción inducida de G/G_0 sobre el espacio de G_0-órbitas X/G_0 es propia

(Lema 1.3.11), podemos aplicar el caso 2 y así obtener:

$$\dim X/G_0 \leq \dim \frac{X/G_0}{G/G_0}. \tag{3.5}$$

Ahora como $\frac{X/G_0}{G/G_0} \cong X/G$ y $\dim p_0 \leq \dim p$, se sigue de (3.4) y (3.5) que

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim p.$$

Esto completa la demostración. □

Recientemente, el Profesor Antonyan ha demostrado que si G es un grupo paracompacto y H un subgrupo localmente compacto de G, entonces G/H es paracompacto (ver [10]). De este modo nuestra desigualdad tiene una aplicación a grupos topológicos:

Corolario 3.1.2. *Sean X un grupo topológico paracompacto y G un subgrupo localmente compacto de X. Entonces:*

$$\dim X \leq \dim X/G + \dim G.$$

En el caso en que el grupo que actúa es compacto, la desigualdad se satisface sin ninguna restricción sobre el espacio de órbitas. Así que la siguiente cuestión surge naturalmente.

Problema 3.1.3. *¿La desigualdad del Teorema anterior se satisface sin la hipótesis de paracompacidad sobre el espacio de órbitas?.*

3.2. Metrizabilidad de G-espacios propios

V.V. Filippov en su artículo [25] demuestra el siguiente resultado acerca de la metrizabilidad del espacio fase.

Teorema 3.2.1. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio tal que todas las órbitas en X, tambén como el espacio de órbitas, son metrizables. Entonces X también es metrizable.*

Sin embargo Pasynkov ya lo había demostrado en 1976 en su artículo [47] para el caso en que G es un grupo compacto metrizable. Usando el Teorema de la rebanada aproximativa nosotros lo generalizaremos de la siguiente manera.

Teorema 3.2.2. *Sean G un grupo localmente compacto y X un G-espacio propio tal que todas las órbitas en X, tambén como el espacio de órbitas, son metrizables. Entonces X también es metrizable. Más aún, existe una métrica invariante y compatible sobre X.*

La demostración está basada en una sucesión de Lemas. El primero de ellos nos dice que ser primero numerable se preserva bajo ciertos cocientes y su demostración está en [9].

Lema 3.2.3. *Sean G un grupo topológico, H y N subgrupos de G tales que $N \subset H$. Supongamos que G/H y H/N son primero numerables, entonces G/N también es primero numerable.*

Demostración. Por homogeneidad es suficiente probar que G/N tiene una base abierta numerable en $eN \in G/N$. Para $A \subset G$, denotemos por $\tilde{A}$ la imagen de A bajo la proyección natural $G \to G/N$. Como la proyección es una G-función, uno tiene que $\widetilde{gA} = g\tilde{A}$ para cada $g \in G$. Esto implica que $\widetilde{BA} = B\tilde{A}$ para cada $B \subset G$.

Sea $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de vecindades simétricas de e en G tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ $W_{n+1}^2 \subseteq W_n$ y $\{\tilde{W}_n \cap \tilde{H}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base abierta de eN para el espacio $\tilde{H}$.

Sea φ la proyección natural $G \to G/H$. Supongamos que $\{\varphi(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base abierta de eH en G/H, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n es una vecindad de e en G. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$P_n = \big(\tilde{G} \setminus \overline{W_{n+1}(\tilde{H} \setminus \tilde{W}_n)}\big) \cap \big(U_n\tilde{H}\big).$$

Veamos que cada P_n es una vecindad de eN in $\tilde{G}$. En efecto, es suficiente probar que $eN \notin \overline{W_{n+1}(\tilde{H}\setminus\tilde{W}_n)}$. Para esto, mostremos que la vecindad $\tilde{W}_{n+1}$ de eN no intersecta $W_{n+1}(\tilde{H}\setminus\tilde{W}_n)$. Supongamos lo contrario, entonces $xN = whN$ con $x \in W_{n+1}$, $w \in W_{n+1}$, $h \in H$ y $hN \notin \tilde{W}_n$. Esto nos dice que $x = whm$ para algún $m \in N$, y así tenemos que $w^{-1}x = hm$. Pero $w^{-1}x \in W_{n+1}W_{n+1} \subset W_n$, implicando que $w^{-1}xN \in \tilde{W}_n$.

Por lo tanto, $hN = hmN = w^{-1}xN \in \tilde{W}_n$, lo cual es una contradicción.

Ahora definamos definamos

$$Q_n = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n.$$

Es fácil ver que para cada $n \in \mathbb{N}$, Q_n es una vecindad de eN en $\tilde{G}$. Más aún, $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades para eN en $\tilde{G}$. Para probar esto, sea Y una vecindad de e en G. Tenemos que encontrar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $Q_k \subset \tilde{Y}$.

Elijamos una vecindad V de e en G tal que $V^2 \subset Y$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{W}_m \cap \tilde{H} \subset \tilde{V} \cap \tilde{H}$, y un $k > m$ tal que $\varphi(U_k) \subseteq \varphi(V \cap W_{m+1})$. Esto implica que $U_k H \subset (V \cap W_{n+1})H$, lo cual nos da que $U_k \tilde{H} \subset (V \cap W_{m+1})\tilde{H}$.

Entonces tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} Q_k &\subset P_k \cap P_m \subset (U_k \tilde{H}) \cap \big(\tilde{G} \setminus \overline{W_{m+1}(\tilde{H} \setminus \tilde{W}_m)}\big) \\ &\subset (V \cap W_{m+1})\tilde{H} \cap \big(\tilde{G} \setminus \big((V \cap W_{m+1})(\tilde{H} \setminus \tilde{W}_m)\big)\big). \end{aligned}$$

Puesto que

$$\tilde{G} \setminus ((V \cap W_{m+1})(\tilde{H} \setminus \tilde{W}_m)) = (V \cap W_{m+1})(\tilde{G} \setminus \tilde{H}) \cup (V \cap W_{m+1})\tilde{W}_m,$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} Q_k &\subset (V \cap W_{m+1})\tilde{H} \cap \big((V \cap W_{m+1})(\tilde{G} \setminus \tilde{H}) \cup (V \cap W_{m+1})\tilde{W}_m\big) \\ &= (V \cap W_{m+1})\tilde{H} \cap (V \cap W_{m+1})\tilde{W}_m = (V \cap W_{m+1})(\tilde{H} \cap \tilde{W}_m) \\ &\subset (V \cap W_{m+1})(\tilde{V} \cap \tilde{H}) \subset \tilde{V}^2 \subset \tilde{Y}, \end{aligned}$$

como era requerido. □

El siguiente Lema nos dice que ser primero numerable es equivalente a ser metrizable en espacios de clases laterales G/N cuando el subgrupo N es compacto. Este resultado se debe a Kristensen y está publicado en su artículo [35].

Lema 3.2.4. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y N un subgrupo compacto de H. Supongamos que G/H y H/N son metrizables. Entonces G/N también es metrizable.*

Demostración. Del hecho que G/H y H/N son metrizables, se sigue que tienen una base abierta numerable en cada punto, del Lema anterior se tiene que G/N también tiene una base abierta numerable. Sean $\{V_n\}_{n\mathbb{N}}$ una base local para eN en G/N y $\varphi : G \to G/N$ la proyección natural. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una vecindad simétrica W_n de e en G tal que $(NW_nN)^2 \subseteq \varphi^{-1}(V_n)$. Definimos $U'_n = \varphi(NW_nN)$, entonces tenemos que $\varphi^{-1}(U'_n)U'_n \subseteq V_n$ y $hU'_n = U'_n$ para cada $h \in N$. Esto quiere decir que $\{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es un sistema de vecindades de eN en G/N.

Para cada número racional diádico r, con $0 < r \leq 1$ vamos a definir un sistema de vecindades como sigue:

1. $V_{1/2^n} = U'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
   e inductivamente (de forma alternada) para cada $k \in \mathbb{N}$,

2. $V_{2k/2^{n+1}} = V_{k/2^n}$;

3. $V_{(2k+1)/2^{n+1}} = V_{1/2^{n+1}} V_{k/2^n}$.

Este sistema de vecindades cumple las siguientes propiedades:

a) $\varphi^{-1}(V_{1/2^n})V_{(m+1)/2^n} \subseteq V_{(m+1)/2^n}$;

b) $hU_r = U_r$ para cada $h \in N$;

c) $\varphi^{-1}(U_1)$ genera a todo G.

A esta familia le adjuntamos los siguientes conjuntos: $U_0 = \emptyset$ y para cada racional diádico positivo $U_r = \varphi(\varphi^{-1}(U_{r-[r]})\varphi^{-1}(U_1)^{[r]})$. Entonces

$$\bigcap_{r>0} U_r = N \text{ y } \bigcup_r U_r = G/N.$$

Cada $gN \in G/N$ tiene un sistema de vecindades de la forma $\{gV_r\}$. Para cada $x, \in G/N$ definimos $f_x : G/N \to \mathbb{R}$ como

$$f_x(y) = f(x, y) = \sup\{r \mid y \notin V_r\}.$$

f_x está bien definida y $f(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Debido a *b*), tenemos que $f(gx, gy) = f(g, h)$ para cada $g \in G$. Ahora para cada $x, y \in G/N$ definimos:

$$d(x, y) = \sup_{z \in G/N} \mid f(x, z) - f(y, z) \mid .$$

De la desigualdad

$$0 \leq f(x, y) \leq d(x, y) \leq f(x, y) + 2,$$

se sigue que d toma valores finitos. Claramente $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Además $d(x, y) = d(y, x)$, y

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \sup_{u \in G/N} \mid f(x, u) - f(z, u) \mid \\ &\leq \sup_{u \in G/N} \mid f(x, u) - f(y, u) \mid + \sup_{u \in G/N} \mid f(y, u) - f(z, u) \mid \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

prueban la desigualdad del triángulo. Por lo tanto d es una métrica, además invariante pues

$$\begin{aligned} d(gx, gy) &= \sup_{u \in G/N} \mid f(gx, u) - f(gy, u) \mid \\ &\leq \sup_{u \in G/N} \mid f(x, g^{-1}u) - f(y, g^{-1}u) \mid \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Ahora probemos que d genera una topología equivalente a la topología cociente sobre G/N. Si $B(x, r)$ la bola abierta con centro en $x \in G/N$ y radio r (r un racional diádico), entonces $B(x, r) \subseteq xV_r$, puesto que si $d(x, y) < r$ entonces $f(x, y) < r$, y debido a la definición de f se tiene que $y \in xV_r$. Inversamente, si $y \in xV_{1/2^{n+1}}$, tenemos que para cada $u \in G/N$

$$\mid f(x, u) - f(y, u) \mid \leq 1/2^n$$

lo que prueba que $xV_{1/2^{n+1}} \subseteq B(x, 1/2^n$, y esto completa la demostración. $\square$

El siguiente Lema usa el Teorema de Filippov, es decir, el caso en que el grupo actuante es compacto.

Lema 3.2.5. *Sean G un grupo localmente compacto y H un subgrupo compacto tal que G/H es un espacio métrico. Entonces para cada H-espacio metrizable S, el producto torcido $G \times_H S$ es metrizable.*

Demostración. En $G \times_H S$ consideremos la H-acción restringida de la G-acción. Afirmamos que el espacio de H-órbitas $\frac{G \times_H S}{H}$ es homeomorfo al espacio de H-órbitas $\frac{G/H \times S}{H}$. En efecto, para cada $[g, s] \in G \times_H S$ denotamos por $[g, s]_H$ a su H-órbita. Análogamente para cada $(gH, s) \in G/H \times S$ denotamos por $(gH, s)_H$ su H-órbita. Entonces es fácil ver que la función

$$\varphi : \frac{G \times_H S}{H} \to \frac{G/H \times S}{H}$$

definida por

$$\varphi\big([g, s]_H\big) = (g^{-1}H, s)_H$$

es el homeomorfismo deseado.

Como H es compacto y S es metrizable el espacio de H-órbitas $\frac{G/H \times S}{H}$, también es metrizable. Así también $\frac{G \times_H S}{H}$ es homeomorfo a $\frac{G/H \times S}{H}$, y por lo tanto también es metrizable. De acuerdo al Teorema 3.2.1, sólo resta probar que cada H-órbita en $G \times_H S$ es metrizable. Probaremos que, de hecho, cada G-órbita en $G \times_H S$ es metrizable. En efecto, debido a que el producto torcido $G \times_H S$ es un G-espacio pripio, para cada $x \in G \times_H S$ la órbita $G(x)$ es homeomorfo al espacio cociente G/G_x (ver Lema 1.3.7).

De esta manera sólo resta probar que $G(x)$=G/G_x es metrizabe para cada $x = [g, s] \in G \times_H S$. Observar que $G(x)$=$G(y)$, donde $y = [e, s]$. Es claro que $G_y = H_y$, y por lo tanto tenemos que probar la metrizabilidad de G/H_y. Para esto observemos que H/H_y es métrico porque es homeomorfo a la H-órbita $H(y)$ del H-espacio metrizable S. Sólo nos resta aplicar el Lema 3.2.4 con $N = H_y$. □

Ahora tenemos todos los elementos para demostrar el teorema principal de esta sección.

Demostración del Teorema 3.2.2. Puesto que el espacio de óbitas X/G es paracompacto, se sigue del Teorema 1.4.5 que X es paracompacto también. Para demostrar que X es metrizable, es suficiente probar que X es localmente metrizable (ver por ejemplo, [14, Ch. II, Teorema 4.1]). Por el Teorema de la rebanada aproximativa, cada punto de X tiene una vecindad tubular $G(S)$, donde S es una H-rebanada para algún subgrupo grande $H \subset G$. Por el Lema 1.1.9, $G(S)$ es homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$. Como H es un subgrupo grande, el espacio cociente G/H es metrizable (ver la Proposición 1.3.19). Por lo tanto podemos aplicar el Lema 3.2.5 el cual nos dice que $G \times_H S$ es metrizable. Es decir $G(S)$, y por lo tanto X, es metrizable. Esto demuestra la primera parte del teorema.

La segunda parte se sigue de [12, Teorema B], donde se prueba que un G-space propio metrizable con espacio de órbitas paracompacto admite una métrica G-invariante. Esto completa la demostración del Teorema 3.2.2.

3.3. La coincidencia de las dimensiones Ind y dim

En esta sección usaremos el resultado principal de la sección anterior para generalizar el Teorema de B. Pasynkov (Teorema 0.0.4) sobre la coincidencia de las dimensiones Ind y dim. Comenzaremos con la Proposición que será central para demostrar los demás resultados de esta parte.

Proposición 3.3.1. *Sean G un grupo localmente compacto y H un subgrupo cerrado normal tal que G/H es metrizable. Entonces para cada G-espacio propio X con espacio de órbitas metrizable X/G, el espacio de H-órbitas X/H también es metrizable.*

Demostración. Apliquemos el Teorema 3.2.2 al G/H-espacio propio X/H. Para esto, hay que probar que satisface las hipótesis. En efecto, como el grupo actuante G/H es metrizable concluimos que todas las G/H-órbitas en X/H también lo son. Además el espacio de G/H-órbitas de X/H es homeomorfo a X/G, y por lo tanto metrizable. Por el Teorema 3.2.2, X/H es metrizable. Más aún, existe una métrica G/H-invariante compatible sobre X/H. □

La siguiente Proposición nos dice cuando un grupo localmente compacto tiene subgrupos normales compactos que hacen cocientes metrizables. Recordemos que un grupo localmente compacto es *pro-Lie* si es el límite inverso de grupos de Lie. Por ejemplo, grupos casi conexos y grupos abelianos localmente compactos son pro-Lie (ver [31, página 2 y Ejemplo 3.4]).

Proposición 3.3.2. *Un grupo localmente compacto G tiene un subgrupo normal compacto $H \subset G$ tal que el grupo cociente G/H es metrizable en cada uno de los siguientes casos:*

1. *G es un grupo pro-Lie,*

2. *G es un grupo σ-compacto.*

Demostración. (1) De las diferentes caracterizaciones de grupos de Lie (ver la definición [31, página 2, Definición 1]) se sigue que un grupo pro-Lie G tiene subgrupos normales arbitrariamente pequeños H tales que G/H es de Lie, y por tanto, metrizable. Por la compacidad local de G, H puede elegirse compacto.

(2) Se sigue del clásico Teorema de Kakutai-Kodaira (ver [29, Teorema 8.7]).

□

Por una combinación de los dos resultados anteriores obtenemos lo siguiente:

Corolario 3.3.3. *Sean G un grupo localmente compacto pro-Lie o σ-compacto y X un G-espacio propio tal que el espacio de órbitas X/G es metrizable. Entonces existe un subgrupo compacto normal $H \subset G$ tal que G/H es un grupo* *metrizable y el espacio de H-órbitas X/H es metrizable por una métrica G-invariante.*

Otro caso importante se muestra en el siguiente Corolario, el cual nos dará un resultado importante en los grupos topológicos.

Corolario 3.3.4. *Sean G un grupo localmente compacto tal que el grupo cociente G/G_0 de G módulo la componente conexa G_0 de la identidad es metrizable. Si X es un G-espacio propio tal que su espacio de órbitas X/G es metrizable, entonces existe un subgrupo compacto $H \subset G$ tal que el espacio de H-órbitas X/H es metrizable.*

Demostración. Apliquemos la Proposición 3.3.1 dos veces. Primero lo aplicamos a G and G_0 y obtenemos que el espacio de G_0-órbitas X/G_0 es metrizable.

Ahora, observemos que X es un G_0-espacio propio con respecto a la G_0-acción inducida. De acuerdo a un resultado de Yamabe [60], toda vecindad de la identidad de G_0 contiene un subgrupo compacto normal $H \subset G_0$ tal que el cociente G_0/H es un grupo de Lie; en particular G_0/H es metrizable. Puesto que el espacio de G_0-órbitas X/G_0 es metrizable, podemos aplicar la Proposición 3.3.1 una vez más y así obtener metrizabilidad del espacio de H-órbitas X/H, como se requería.

$\square$

En el Corolario 3.3.3, si X es un grupo topológico, entonces ninguna restricción adicional sobre G es necesaria.

Corolario 3.3.5. *Sean X un grupo topológico y G un subgrupo localmente compacto de X. Si el espacio cociente X/G es metrizable, entonces existe un subgrupo compacto $H \subset G$ tal que el cociente X/H es metrizable.*

Demostración. Se sabe que todo grupo localmente compacto tiene un subgrupo abierto casi conexo, digamos U (ver [38, Ch. II, §2.3]). Por el teorema de Yamabe [60], U tiene un subgrupo compacto normal H tal que U/H es un grupo de Lie, y por lo tanto, metrizable. Puesto que el espacio cociente G/U es también metrizable (es discreto), por el Lema 3.2.4 sigue que G/H is metrizable.

Ahora, como X/G es metrizable, aplicando la Proposición 3.3.1 obtenemos metrizabilidad de X/H, como se requería. $\square$

El siguiente ejemplo, el cual se debe a Willis [59], muestra que no todos los grupos localmente compactos tienen un subgrupo compacto normal que hacen un grupo cociente metrizable.

Ejemplo 3.3.6. *Consideremos X un conjunto no numerable y sea S_X su grupo de permutaciones, es decir, $S_X = \{f : X \to X \mid f \text{ es biyectiva } \}$. Sea $\mathcal{P}$ una partición de X donde cada clase de equivalencia consiste de dos elementos, entonces definimos*

$$H = \{f \in S_X \mid f(P) = P, \text{ para cada } P \in \mathcal{P}\}$$

y N el subgrupo de G que consiste de todas las permutaciones finitas de X. Se tiene que H es isomorfo (como conjunto) a una potencia no numerable de $\{-1, 1\}$ y N es subgrupo normal de S_X. Equipemos a H con la topología producto y definamos $G = HN$. Para darle una topología a G, consideremos como un sistema de vecindades de la identidad de G el sistema de vecindades de la identidad en H. El grupo topológico G tiene las siguientes propiedades:

i) G es localmente compacto y totalmente disconexo ya que su topología la obtiene de H;

ii) G no es metrizable ya que H no lo es, pues X es no numerable;

iii) N es un subgrupo normal de G ya que N es normal en S_X;

iv) N es denso en G, pues toda vecindad básica de G tiene una permutación finita;

v) Si K es un subgrupo normal de G, entonces $N \subset K$, pues si K es no trivial, contiene una transposición, entonces $K \cap N$ es no trivial, esto implica que $K \cap N$ contiene todas las permutaciones finitas impares, ya que todo subgrupo normal no trivial de N contiene las permutaciones impares. Pero también contiene las permutaciones finitas pares, pues si componemos una permuatión finita par con una transposición tendremos una permutación impar. Por lo tanto $K \cap N = N$ y así obtenemos que $N \subset K$.

Por lo tanto en G no existen subgrupos normales propios que sean compactos.

Ahora enunciemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.7. *Sean G un grupo localmente compacto pro-Lie o σ-compacto y X un G-espacio propio tal que su espacio de órbitas X/G es metrizable. Entonces* $\dim X = \operatorname{Ind} X$.

Demostración. Se sigue del Corolario 3.3.3 que en X actúa un subgrupo compacto H de G tal que el espacio de H-órbitas X/H es metrizable. Entonces la igualdad se sigue del Teorema de Pasynkov. □

Como un Corolario a este resultado obtenemos una aplicación importante en grupos topológios.

Corolario 3.3.8. *Sean G un grupo topológico (no necesariamente localmente compacto) y H un subgrupo localmente compacto de G tal que G/H es un espacio metrizable. Entonces* $\dim G = \operatorname{Ind} G$.

Demostración. Se sigue del Teorema anterior y el Corolario 3.3.5 □

Problema 3.3.9. *¿El Teorema 3.3.7 será válido sin las hipótesis de σ-compacidad y pro-Lie sobre el grupo?*

Bibliografía

[1] H. Abels, *Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups*, Math. Ann. **212**, (1974) 1–19.

[2] H. Abels, *A universal proper G-space*, Math. Z. **159**, (1978) 143–158.

[3] N. Antonyan, *Equivariant embeddings and compactifications of free G-spaces*, Inter. Jour. Math. and Math. Sci. **1** (2003), 1-14.

[4] S. A. Antonyan, *Existence of a slice for arbitrary compact transformation groups*, Matematicheskie Zametki **56:5** (1994) 3-9: English transl. in: Math. Notes **56 (5-6)** (1994) 101-1104.

[5] S. A. Antonyan, *Extensorial properties of orbit spaces of proper group actions*, Topology Appl. **98**, (1999) 25–46.

[6] S. A. Antonyan, *The topology of the Banach-Mazur compactum*, Fund. Math. 166 (2000), 209-232.

[7] S. A. Antonyan, *Universal proper G-spaces*, Topol. Appl. **117**, (2002) 23–43.

[8] S. A. Antonyan, *Orbit spaces and unions of equivariant absolute neighborhood extensors*, Topol. Appl. **146-147**, (2005) 289–305.

[9] S. A. Antonyan, *Proper actions of locally compact groups on equivariant absolute extensors*, Fund. Math. 205 (2009), 117-145.

[10] S. A. Antonyan, *Proper actions on topological groups: Applications to quotient spaces*, aceptado para su publicación en Proceedings of American Mathematical Society.

[11] S. A. Antonyan y H. Juárez-Anguiano, *The dimension of proper G-spaces*, aceptado para su publicación en Topology and its Applications.

[12] S. A. Antonyan y S. de Neymet, *Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces*, Acta Math. Hung. **98 (1-2)**, (2003) 41-51.

[13] A. Arhangel'skii y M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008.

[14] C. Bessaga y A. Pelczyński, *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN-Polish Sci. Publ., Warsawa, 1975.

[15] N.P. Bhatia y G.P. Szegö, *Dynamical systems: stability theory and applications*, Lectures Notes in Mathematics, 35, 1967.

[16] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.

[17] S. De Neymet Urbina, *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*, con la colaboración de R. Jiménez, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos No. 23, Nivel Avanzado, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[18] S. Deo y S. Tripathi, *Compact Lie group actions on finitistic spaces*, Topology, vol. 21, No. 4, (1982) 393-399.

[19] A.N. Dranishnikov y J.E. West, *Compact group actions that raise dimension to infinity*, Topology Appl. 80 (1997) 101-114.

[20] A.N. Dranishnikov y J.E, West, *Correction to "Compact group actions that raise dimension to infinit"*, Topology and its Applications 135 (2004) 249-252.

[21] R. Engelking, *Dimension Theory*, North-Holland Mathematical Library, vol. 19, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1978.

[22] R. Engelking, *General Topology*, Monografie Matematyczne, vol. 60, Polish Scientific Publishers, Warzawa, 1989.

[23] V. V. Filippov, *On the dimension of normal spaces*, Soviet. Math. Dokl. **19** (1973) 547-550.

[24] V. V. Filippov, *Dimensionality of spaces with the action of a bicompact group*, Math. Notes **25 (3)**, (1979) 171–174.

[25] V. V. Filippov, *On weight characteristics of spaces with a bicompact group actions*, Math. Notes **25 (6)**, (1979) 939–947.

[26] V. V. Filippov, *The dimension of products of topological spaces*, Fund. Math. 106 (1980), 181-212.

[27] V.M. Glushkov, *The structure of locally compact groups and Hilbert's fifth problem*, Amer. Math. Soc. Transl. **15 (2)**, (1960) 59–93.

[28] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **37 (4)**, (2000), 407-436.

[29] E. Hewitt y K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, V. I, Springer-Verlag, 1963.

[30] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.

[31] K.H. Hofmann and S.A. Morris, *The Lie theory of connected Pro-Lie groups*, European Mathematical Society, 2007.

[32] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton, 1941.

[33] A. Kolmogoroff, *Über offene Abbildungen*, Ann. of Math., 38 (1937), 36-38.

[34] J. L. Koszul, *Lectures on groups of transformations*, Tata institute of fundamental research, Bombay, 1965.

[35] L. Kristensen, *Invariant metrics in coset spaces*, Math. Scand. V. 6 (1958), 33-36.

[36] G.J. Martin, *The Hilbert-Smith conjecture for quasiconformal actions*, Electronic Research Announcements of The Amer. Math. Soc., 5 (1999), 66-70.

[37] M. G. Megrelishvili, *Compactification and factorization in the category of G-spaces*, Categorical Topology and its Relation to Analysis, Algebra and Combinatorics (J. Adámek, S. Mac Lane, eds.), World Scientific, Singapore, 1989, 220–237.

[38] D. Montgomery y L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publ. Inc., New York, 1955.

[39] K. Morita, *On the dimension of product spaces*, Amer. J. Math. **75**, (1953) 205–223.

[40] K. Morita, *On the dimension of the product of Tychonoff paces*, General Topol. Appl. 3 (1973), 125-133.

[41] P. S. Mostert, *Sections in principal fibre spaces*, Duke Math. **23 (1)**, (1956) 57–71.

[42] G. D. Mostow, *Equivariant embeddings in euclidean spaces*, Ann. of Math., 65 (1957), 432-446.

[43] K. Nagami, *Dimension-theoretical structure of locally compact groups*, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 379-396.

[44] K. Nagami, *Dimension theory*, New York, 1970.

[45] R. S. Palais, *The clasifications of G-spaces*, no.36, Mem. Amer. Math. Soc., 1960.

[46] R. S. Palais, *On the existence of slices for non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **II ser. 73**, (1961) 295–323.

[47] B. A. Pasynkov, *On spaces with a compact group of transformations*, Soviet Math. Dokl. **17, no. 6** (1976), 1522-1526.

[48] B. A. Pasynkov, *On the dimension of spaces with a compact group of transformations*, Russian Math. Surveys **31 (5)**, (1976) 112–120.

[49] D. Repovš y E. Šĕpin, *A proof of the Hilbert-Smith conjecture for actions by Lipschitz maps*, Math. Ann., 308 (1997), 361-364.

[50] E. G. Skliarenko, *On the topological structure of locally bicompact groups and their quotients*, American Mathematical Society Translations **Series 2 Vol. 39**, (1964) 57–82.

[51] Yu. M. Smirnov, *Some topological aspects of the theory of topological transformation groups*, General Topology and its Relations to Modern Analysis an Algebra IV, Proc. 4th. Prague Top. Symp., (1976) 196–204.

[52] Yu. M. Smirnov, *Compactifications, dimension and absolutes of topological transformation groups*, Topology and Measure III, Proc. Conf., Vitte/Hiddense (GDR), Part 2 (1982), 259-266.

[53] M. Stroppel, *Locally compact groups*, European mathematical society, 2006.

[54] R.G. Swan, *A new method in fixed point theory*, Comm. Math. Helv., 34, (1960) 1-16.

[55] J. Szente, *On the topological characterization of transitive Lie group actions*, Acta Sci. Math. Szeged. 36 (3-4) (1974) 323-344.

[56] J. de Vries, *Topological transformation groups I*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.

[57] J. de Vries, *Topics in the theory of topological transformations groups*, Topological structures II, Mathematical centre tracts 116 (1979), 291-304.

[58] J. de Vries, *Elements of topological dynamics*, Kluwer academic, 1993.

[59] G. A. Willis, *Compact open subgroups in simple totally disconnected groups*, Journal of Algebra, 312 (2007), 405-417.

[60] H. Yamabe, *A generalization of a theorem of Gleason*, Ann. Math., **58, no. 2** (1953) 351-365.

[61] T. Yamanoshita, *On the dimension of homogeneous spaces*, J. Math. Soc. Japan, 6 (1954), 151-159.

[62] I. M. Yaglom, *Felix Klein and Sophus Lie: Evolutions of the idea of simmetry in the nineteenth century*, Birkhäuser, Boston-Basel, 1988.