UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOS Y AXIOMÁTICA DE ZERMELO-FRAENKEL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

ERNESTO CEDILLO ARIAS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISO MARMOLEJO RIVAS

2010

Topos
y
Axiomática de Zermelo-Fraenkel

Autor: Ernesto Cedillo Arias
Asesor: Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México
2010

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
Cedillo
Arias
Ernesto
55 44 83 53
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
095609175

2. Datos del tutor
Dr
Francisco
Marmolejo
Rivas

3. Datos del sinodal 1
M en C
Rafael
Rojas
Barbachano

4. Datos del sinodal 2
Dr
David
Meza
Alcántara

5. Datos del sinodal 3
Dr
Manuel
Cruz
López

6. Datos del sinodal 4
Dr
Hugo Alberto
Rincón
Mejía

7. Datos del trabajo escrito
Topos y Axiomática de Zermelo-Fraenkel
192 p
2010

Índice general

Introducción

En este texto se describen dos construcciones. La primera consiste en elaborar una teoría de conjuntos en un topos arbitrario, estableciendo así una correspondencia del topos a la teoría de conjuntos, mientras la segunda genera una categoría a partir de un modelo para una forma débil de la axiomática de Zermelo-Fraenkel, estableciendo una correspondencia en el otro sentido. Como punto de partida tomé las reflexiones en la obra de Goldblatt [Gol79] en torno a la construcción de una teoría de conjuntos para un topos. Este libro me sirvió de introducción a la teoría formal que el matemático alemán Gerhard Osius presenta en [Osi74].

En el primer capítulo se presentan las propiedades necesarias para llevar a cabo los desarrollos posteriores. Se describen propiedades de la estructura así como algunos aspectos lógicos. La mayoría de estos resultados constituyen nociones generales para el lector familiarizado con la teoría de topos. También se demuestran algunas afirmaciones que se utilizan en el desarrollo posterior. El texto de Goldblatt constituye la referencia principal, mientras que el pequeño libro de Kock & Wraith [KW71] y el muy extenso libro de Moerdijk & MacLane [MM92] me aportaron una visión complementaria.

En el capítulo siguiente se procede a generalizar algunas propiedades del topos de los conjuntos Con. Se procede expresando estas propiedades en lenguaje de categorías. Desde un punto de vista teórico esta abstracción aporta una visión de los axiomas de Zermelo-Fraenkel en términos de morfismos en el contexto de un topos arbitrario. Este segundo capítulo reúne las ideas de diferentes secciones del libro de Goldblatt y recupera el teorema de Diaconescu en base a la demostración que se encuentra en el complejo libro de Johnstone [Joh79].

La construcción de una teoría de conjuntos en un topos se centra en la definición de la relación de pertenencia. Se procede al estudio de algunas propiedades fundamentales de esta relación en el topos de conjuntos con su subsecuente generalización. La noción de conjunto transitivo resulta fundamental. El teorema del colapso de Mostowski permite la caracterización de un objeto conjunto transitivo y la definición de objeto conjunto en un topos arbitrario. La construcción de los objetos conjunto respeta la noción intuitiva de jerarquía acumulativa; existen un objeto conjunto inicial, una operación de unión y un endofuntor que determina el objeto conjunto potencia. Por último se establece la definición de la relación de pertenencia para objetos conjunto en un topos arbitrario. La discusión en torno a las propiedades de la pertenencia en el topos de los conjuntos se inspira de Goldblatt. Elegí utilizar la definición de objeto conjunto de Goldblatt en vez de la de Osius o la de Johnstone. Las propiedades de los objetos conjunto se detallan siguiendo el artículo de Osius.

En el último capítulo se presentan de manera explícita las construcciones que ligan teoría de conjuntos y teoría de topos. Posteriormente se comparan los modelos y las categorías obtenidos y se establecen equivalencias. Goldblatt esboza estos resultados de manera informal mientras que Osius y Johnstone desarrollan propiamente la teoría.

La notación se introduce principalmente en el primer capítulo. El desarrollo subsecuente del texto marca la necesidad de nuevas nociones. Con un propósito de claridad se aíslan las demostraciones de tres teoremas importantes en un apéndice al final del texto. Mi intención es la de detallar el razonamiento que se encuentra detrás de las nociones y las pruebas, por lo tanto los diagramas abundan a lo largo del texto. Con excepción de los resultados generales del primer capítulo y el resultado de Ig Sung Kim [Kim04] relativo al buen orden en un topos y que menciono en la observación (4.4.6), todas las afirmaciones se acompañan de una prueba.

Este texto fue elaborado en una computadora bajo el sistema operativo Linux y el entorno gráfico Kile para LaTeX. Para los diagramas utilizo la biblioteca *diagrams* de Paul Taylor.

Dedico este trabajo a Flora, Ernesto, Denise, Floolfa y a la memoria de Adrián.

Ernesto Cedillo Arias
Junio 2010

Capítulo 1

Topos

En este capítulo se introducen algunas propiedades de un topos elemental necesarias para los desarrollos posteriores.

1.1. Propiedades generales

Definición 1.1.1 (Clasificador de subobjetos)**.** Dada una categoría $\mathcal{C}$ con objeto terminal 1, un *clasificador de subobjetos* para $\mathcal{C}$ es una pareja $(\Omega, \top)$, compuesta por un objeto Ω y un morfismo $\top : 1 \to \Omega$, tales que para cada monomorfismo $s : S \rightarrowtail X$ existe un único morfismo $\chi_s : X \to \Omega$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "s"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\chi_s"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Se dice que χ_s es el *morfismo característico* o *carácter* del monomorfismo s.

Definición 1.1.2 (Exponenciales)**.** Una categoría con productos binarios tiene *objetos exponenciales* si para cada par de objetos a, b existe un objeto a^b y un morfismo $ev : a^b \times b \to a$ tales que para cualquier objeto c y morfismo

$g : c \times b \to a$ existe un único morfismo $\lambda_g : c \to a^b$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\lambda_g"'] & c \times b \arrow[d, "\lambda_g \times id_b"'] \arrow[dr, "g"] & \\
a^b & a^b \times b \arrow[r, "ev"'] & a
\end{tikzcd}
$$

En este caso el funtor $(-)^b$ es adjunto derecho del funtor $(-) \times b$.

Definición 1.1.3 (Topos)**.** Un *topos elemental* es una categoría $\mathcal{E}$ que satisface las siguientes propiedades.

1. $\mathcal{E}$ tiene límites finitos,
2. $\mathcal{E}$ tiene exponenciales,
3. $\mathcal{E}$ tiene clasificador de subobjetos.

Un interesante resultado de C.J. Mikkelsen y demostrado elegantemente por R. Paré en [Par74] establece que la existencia de colímites finitos es una consecuencia de los axiomas anteriores. Por lo tanto un topos es una categoría cartesiana cerrada con clasificador de subobjetos.

- La categoría Con tiene por objetos a los conjuntos y sus morfismos son funciones. Esta categoría es un topos y de hecho su estudio constituye uno de los elementos que inspiran la teoría de topos iniciada en 1969 por F.W. Lawvere y M. Tierney.
- Un topos $\mathcal{E}$ tiene *factorización epi-mono*:

  Dado un morfismo $f : a \to b$ en $\mathcal{E}$ existe un epimorfismo $f^* : a \to f(a)$ y un monomorfismo $im f : f(a) \to b$ (*imagen* de f) tales que $f = im f \cdot f^*$. Esta factorización es única salvo isomorfismos e $im f$ es el subobjeto de b más pequeño a través del cual se factoriza el morfismo f. Consulte la sección 4.1 del libro de Van Oosten [van02] y la sección 5.2 en Goldblatt [Gol79].

- Sea $\mathcal{E}$ un topos, el *objeto inicial* se denota 0 y el *objeto terminal* se denota 1. Para un objeto a en $\mathcal{E}$ el único morfismo $a \to 1$ se denota $!_a$ y el único morfismo $0 \to a$ se denota 0_a.

- Sea c un objeto en un topos $\mathcal{E}$; la composición $\top \cdot !_c : c \to 1 \to \Omega$ se denota $\top_c$.

Lema 1.1.4. *En un topos un morfismo f con dominio 1 es un monomorfismo.*

Demostración. Observe que para cualesquiera $g, h : Y \to 1$ con $fg = fh$, como 1 es objeto terminal se tiene forzosamente $g = h$ y por lo tanto f es mono. $\square$

1.2. Conectivos

Definición 1.2.1 (Morfismo $\perp$)**.** Considere en un topos $\mathcal{E}$ el morfismo $0 \to 1$ y el producto fibrado que determina su carácter.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\perp"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

El carácter del morfismo $0 \to 1$ se denota $\perp$.

Definición 1.2.2 (Morfismo Δ)**.** Para cualquier objeto a en un topos $\mathcal{E}$, $\Delta_a : a \rightarrowtail a \times a$ es el morfismo $\langle id_a, id_a \rangle$ inducido por el producto. Al carácter de Δ_a se le denota δ_a.

Definición 1.2.3 (Morfismo $\in_a$)**.** Al subobjeto de $\Omega^a \times a$ cuyo carácter es $ev_a : \Omega^a \times a \to \Omega$ se le denota $\in_a$.

$$\begin{tikzcd}
\in \arrow[r, "\in_a"] \arrow[d] & \Omega^a \times a \arrow[d, "ev_a"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Definición 1.2.4 (Nombre de un morfismo)**.** En una categoría $\mathcal{C}$ con objetos exponenciales, sea $f : a \to b$ un morfismo y considere $f \cdot pr_a : 1 \times a \to a \to b$ la composición con la proyección pr_a. El morfismo *"nombre de f"* se define como el adjunto exponencial de $f \cdot pr_a$. Éste es el único morfismo $\ulcorner f \urcorner : 1 \to b^a$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \times a \arrow[d, "\ulcorner f \urcorner \times id_a"'] \arrow[dr, "f \cdot pr_a"] & \\
b^a \times a \arrow[r, "ev"'] & b
\end{tikzcd}$$

Definición 1.2.5 (Conectivos de Heyting)**.** En un topos $\mathcal{E}$ con clasificador de subobjetos Ω se definen los siguientes morfismos.

1. $\neg : \Omega \to \Omega$ se define como el carácter del morfismo $\perp$.

2. $\frown : \Omega \times \Omega \to \Omega$

   Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\top"'] \arrow[d, dashed, "\langle \top, \top \rangle"] \arrow[dr, "\top"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

   El conectivo $\frown$ se define como el carácter del morfismo $\langle \top, \top \rangle$ inducido por el producto $\Omega \times \Omega$.

3. $\smile : \Omega \times \Omega \to \Omega$

   Para la composición $\top_\Omega : \Omega \to \Omega$ y la identidad id_Ω el producto $\Omega \times \Omega$ induce los morfismos $\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle$ y $\langle id_\Omega, \top_\Omega \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[dl, "\top_\Omega"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "id_\Omega"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[dl, "id_\Omega"'] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\top_\Omega"] & \\
\Omega & \Omega \times \Omega \arrow[l] \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

   Construya el siguiente coproducto.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r] \arrow[dr, "\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle"'] & \Omega + \Omega \arrow[d, dashed, "f"] & \Omega \arrow[l] \arrow[dl, "\langle id_\Omega, \top_\Omega \rangle"] \\
& \Omega \times \Omega &
\end{tikzcd}$$

   El morfismo $f = [\langle \top_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle id_\Omega, \top_\Omega \rangle]$ es inducido por la propiedad universal del coproducto. Considere ahora la imagen de f en su factorización epi-mono.

$$\begin{tikzcd}
\Omega + \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^*"'] & \Omega \times \Omega \\
f(\Omega + \Omega) \arrow[ur, "im\ f"'] &
\end{tikzcd}$$

   El conectivo $\smile$ se define como el carácter del morfismo $im\ f$.

4. $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$

   Sea $e : \leqslant \longrightarrow \Omega \times \Omega$ el igualador del conectivo $\frown : \Omega \times \Omega \to \Omega$ y de la primera proyección del producto, $pr_1 : \Omega \times \Omega \to \Omega$.

$$\begin{tikzcd} \leqslant \arrow[r, "e"] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\frown"] \arrow[r, shift right, "pr_1"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

El conectivo $\Rightarrow$ se define como el carácter del morfismo e.

5. $\forall_a : \Omega^a \rightarrowtail \Omega$ es el único morfismo tal que

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\ulcorner \top_a \urcorner"] \arrow[d] & \Omega^a \arrow[d, "\forall_a"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

   es un producto fibrado. El morfismo $\ulcorner \top_a \urcorner$ es el nombre de $\top_a$ y por definición es el adjunto exponencial de la composición de morfismos $\top_a \cdot pr_a : 1 \times a \to a \to \Omega$.

6. $\exists_a : \Omega^a \to \Omega$ es el carácter de la imagen de la composición de morfismos $p_{\Omega^a} \cdot \in_a : \in \rightarrowtail \Omega^a \times a \to \Omega^a$, con p_{Ω^a} la primera proyección, como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \in \arrow[r, "\in_a"] \arrow[d] & \Omega^a \times a \arrow[d, "p_{\Omega^a}"] \\ p_{\Omega^a} \cdot \in_a (\in) \arrow[r, "im\,(p_{\Omega^a} \cdot \in_a)"'] \arrow[d] & \Omega^a \arrow[d, "\exists_a"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

1.3. Álgebras de subobjetos

Definición 1.3.1 (Orden para monomorfismos)**.** En un topos $\mathcal{E}$ considere un objeto d. Sean f y g monomorfismos con codominio d, se define la relación $f \leqslant g$ si y sólo si existe un morfismo h tal que $g \cdot h = f$.

A partir del preorden $\leqslant$ es posible definir una relación de equivalencia para los monomorfismos con codominio d.

Definición 1.3.2 (Equivalencia de monomorfismos)**.** Dados monomorfismos f y g con codominio d, se define la relación $f \simeq g$ si y sólo si $f \leqslant g$ y $g \leqslant f$ si y sólo si existe h un isomorfismo tal que $g \cdot h = f$.

Definición 1.3.3 (Subobjeto)**.** Una clase de equivalencia de monomorfismos con codominio d bajo la relación $\simeq$ es un *subobjeto* de d

Definición 1.3.4 ($Sub(d)$)**.** En un topos $\mathcal{E}$, la colección de subobjetos de d se denota $Sub(d)$.

Definición 1.3.5 (Operadores de Heyting)**.** Para cada objeto d en un topos $\mathcal{E}$, se definen en $(Sub(d), \leqslant)$ las siguientes operaciones.

1. *Negación*

   Sea $f : a \rightarrowtail d$, su negación es el subobjeto $-f : -a \rightarrowtail d$ cuyo carácter es $\neg \cdot \chi_f$. Por lo tanto $-f$ está determinado por el siguiente producto fibrado y se cumple $\chi_{-f} = \neg \cdot \chi_f$ por unicidad del carácter.

$$\begin{tikzcd} -a \arrow[r, dashed, "-f"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\neg \cdot \chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

2. *Intersección*

   La intersección de los subobjetos $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \to d$ es el subobjeto $f \sqcap g : a \sqcap b \rightarrowtail d$ que se obtiene como el producto fibrado de $\top$ a lo largo de $\chi_f \sqcap \chi_g = \frown \cdot \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. La unicidad del carácter de un subobjeto implica $\chi_{f \sqcap g} = \chi_f \sqcap \chi_g$.

$$
\begin{tikzcd}
a \sqcap b \arrow[r, dashed, "f \sqcap g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f \sqcap \chi_g"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

3. *Unión*

De manera similar la unión de $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \to d$ es el subobjeto $f \sqcup g : a \sqcup b \rightarrowtail d$ que se obtiene como el producto fibrado de $\top$ a lo largo de $\chi_f \sqcup \chi_g = \smile \cdot \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. La unicidad del carácter de un subobjeto implica $\chi_{f \sqcup g} = \chi_f \sqcup \chi_g$.

$$
\begin{tikzcd}
a \sqcup b \arrow[r, dashed, "f \sqcup g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f \sqcup \chi_g"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

4. *Implicación*

Si $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \to d$ son dos subobjetos de d, entonces el subobjeto $f \to g : (a \to b) \rightarrowtail d$ se obtiene como el producto fibrado de $\top$ a lo largo de $\chi_f \to \chi_g = \Rightarrow \cdot \langle \chi_f, \chi_g \rangle$. La unicidad del carácter de un subobjeto implica $\chi_{f \to g} = \chi_f \to \chi_g$.

$$
\begin{tikzcd}
a \to b \arrow[r, dashed, "f \to g"] \arrow[d] & d \arrow[d, "\chi_f \to \chi_g"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Con las operaciones definidas anteriormente se obtienen los siguientes resultados.

Afirmación 1.3.6. *Para f y g subobjetos de d, $f \sqcap g$ es el ínfimo y $f \sqcup g$ el supremo de los subobjetos f y g. Por lo tanto $(Sub(d), \leqslant)$ es una retícula. (Teorema 1, sección 7.2 en Goldblatt [Gol79]).*

Observación 1.3.7. Observe que las operaciones $\sqcap$ y $\sqcup$ se pueden generalizar de manera inductiva para cualquier colección finita de subobjetos de d. Por lo tanto $Sub(d)$ es una retícula finitamente completa.

Afirmación 1.3.8. *$(Sub(d), \leqslant)$ es una retícula acotada con cero $0_d : 0 \to d$ y unidad $id_d : d \to d$. (Teorema 2, sección 7.2 en Goldblatt [Gol79]).*

Afirmación 1.3.9. *Un subobjeto $f : a \rightarrowtail d$ de d satisface $f \sqcap -f \simeq 0_d$. (Teorema 3, sección 7.2 en Goldblatt [Gol79]).*

Afirmación 1.3.10. *En $(Sub(d), \leqslant)$, $\to$ es una operación de pseudocomplemento relativo. Es decir que se cumple $h \leqslant (f \to g)$ si y sólo si $h \sqcap f \leqslant g$. (Inciso 1, Teorema 1, sección 7.5 en Goldblatt [Gol79]).*

Afirmación 1.3.11. *En $(Sub(d), \leqslant)$, $-f$ es el pseudocomplemento de f. (Ejemplo 5, sección 8.3 en Goldblatt [Gol79]).*

Afirmación 1.3.12. *$(Sub(d), \leqslant)$ es una retícula distributiva.*

Demostración. Si $k = (f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h)$ entonces $(f \sqcap g) \leqslant k$ y $(f \sqcap h) \leqslant k$. La definición del pseudocomplemento relativo (1.3.10) implica $g \leqslant (f \to k)$ y $h \leqslant (f \to k)$. Por lo tanto $(g \sqcup h) \leqslant (f \to k)$ y utilizando nuevamente la definición del pseudocomplemento se obtiene

$$f \sqcap (g \sqcup h) \leqslant k$$
$$f \sqcap (g \sqcup h) \leqslant (f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h).$$

Por otra parte se cumple $(f \sqcap g) \leqslant f \sqcap (g \sqcup h)$ y $(f \sqcap h) \leqslant f \sqcap (g \sqcup h)$ y por lo tanto se obtiene $(f \sqcap g) \sqcup (f \sqcap h) \leqslant f \sqcap (g \sqcup h)$. $\square$

La afirmación anterior muestra que toda retícula relativamente pseudocomplementada es una retícula distributiva, este interesante resultado se encuentra en la obra de Rasiowa & Sikorski [RS63]. Las afirmaciones anteriores permiten establecer el siguiente resultado.

Definición 1.3.13 (Álgebra de Heyting)**.** Un *álgebra de Heyting* es una retícula acotada y relativamente pseudocomplementada.

Teorema 1.3.14. *En un topos $\mathcal{E}$, para cada objeto d el cociente $(Sub(d), \leqslant)$ es un álgebra de Heyting.*

1.4. Aspectos lógicos

Observación 1.4.1. Para cada objeto d en un topos $\mathcal{E}$, el álgebra de Heyting $Sub(d)$, con las operaciones $\neg, \sqcap, \sqcup, \rightarrow$ definidas en (1.3.5), es un modelo para el cálculo proposicional intuicionista. Si $Sub(d)$ es un álgebra de Boole entonces es un modelo para el cálculo proposicional clásico (con tercio excluido). (Consulte las secciones I.7 y I.8 del libro de Moerdijk & MacLane [MM92] y 6.3, 6.5, 8.3 del libro de Goldblatt [Gol79])

En los siguientes enunciados "$\Rightarrow$" denota la implicación, "$\wedge$" la conjunción, "$\vee$" la disyunción, "$\sim$" la negación y "$\approx$" la identidad.

Definición 1.4.2 (Lógica predicativa)**.** El *lenguaje formal de primer orden para la lógica predicativa con identidad* o lenguaje formal para la lógica predicativa está compuesto por:

1. Un alfabeto de símbolos del lenguaje para variables, conectivos, cuantificadores y predicados.

2. Términos del lenguaje y fórmulas atómicas.

3. Reglas para formar fórmulas a partir de las fórmulas atómicas y los conectivos.

4. Axiomas proposicionales.

   I. $\alpha \Rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$
   II. $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow (\beta \wedge \alpha)$
   III. $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \gamma))$
   IV. $((\alpha \wedge \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$
   V. $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$
   VI. $(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow \beta$
   VII. $\alpha \Rightarrow (\alpha \vee \beta)$
   VIII. $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow (\beta \vee \alpha)$
   IX. $((\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma)$
   X. $\sim \alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$
   XI. $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \sim \beta)) \Rightarrow \sim \alpha$
   XII. $\alpha \vee \sim \alpha$

5. Axiomas para cuantificadores

   Para cada fórmula $\varphi(v)$ y término t para el cual v es libre en φ, los siguientes son axiomas.

   IU: $\forall v \varphi \Rightarrow \varphi(v/t)$. (Instanciación Universal)

   GE: $\varphi(v/t) \Rightarrow \exists v \varphi$. (Generalización Existencial)

6. Axiomas para la identidad

   I1: Para cualquier término t, $t \approx t$, es un axioma.

   I2: Para cualquier fórmula $\varphi(v)$ y términos t y u para los cuales v es libre en φ, $(t \approx u) \wedge \varphi(v/t) \Rightarrow \varphi(v/u)$, es un axioma.

7. Reglas de inferencia para fórmulas:

   Modus Ponens: De φ y $(\varphi \Rightarrow \psi)$ se infiere ψ.

8. Reglas de inferencia para cuantificadores:

   ($\forall$): De $\varphi \Rightarrow \psi$ se infiere $\varphi \Rightarrow (\forall v)\psi$ siempre y cuando v no ocurra libre en φ.

   ($\exists$): De $\varphi \Rightarrow \psi$ se infiere $(\exists v)\varphi \Rightarrow \psi$ siempre y cuando v no ocurra libre en ψ.

Observación 1.4.3. El axioma proposicional XII es válido en el caso clásico, cuando el principio del tercio excluido es válido en el modelo. En el caso general intuicionista sólo son válidos los axiomas proposicionales I-XI.

El lenguaje de Mitchell-Bénabou, definido en la sección VI.4 del libro de Moerdijk & MacLane [MM92], permite la interpretación del lenguaje formal para la lógica predicativa en un topos. En el caso general el topos es un modelo intuicionista y si el topos es booleano constituye un modelo clásico.

En la sección 11.4 de Goldblatt [Gol79] se encuentra en detalle la construcción de una interpretación para la lógica predicativa de primer orden en un topos a partir de los morfismos definidos en (1.2.5). Esta interpretación es la que se considera en este texto. Goldblatt construye esta semántica a partir de los *morfismos* en el topos mientras que en Moerdijk & MacLane [MM92] el lenguaje de Mitchell-Bénabou hace uso de la estructura interna de álgebra de Heyting del objeto Ω y por lo tanto se basa en los *objetos* del topos. Para la definición de una interpretación a partir de los objetos también se pueden consultar los capítulos 2 y 3 del libro de Makkai & Reyes [MR77].

En resumen un topos puede constituir un modelo para la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel dado que los axiomas de esta teoría se expresan como una instancia de un lenguaje de primer orden con identidad que tiene por único predicado la relación binaria de pertenencia.

1.5. Elementos y morfismos parciales

Definición 1.5.1 (Elemento)**.** En una categoría un morfismo $x : 1 \to a$ es un *elemento de a* o *a-elemento*. Sean x un a-elemento y $f : b \rightarrowtail a$ un subobjeto en una categoría, se dice que x *pertenece* a f si y sólo si x se factoriza a través de f. Se escribe $x \in f$ para indicar que se cumple la situación anterior. Observe que ésta implica la existencia de un b-elemento $k : 1 \to b$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, hook, "f"] & a \\
& 1 \arrow[ul, "k"] \arrow[u, "x"']
\end{tikzcd}$$

Definición 1.5.2 (Soporte)**.** En una categoría $\mathcal{C}$ con factorización epi-mono el *soporte* de un objeto a se define como el dominio de la imagen en la factorización epi-mono del morfismo único $!_a : a \to 1$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!_a"] \arrow[d, "!_a^*"'] & 1 \\
sop(a) \arrow[ur, "im\ !_a"']
\end{tikzcd}$$

Definición 1.5.3 (Morfismo parcial)**.** Un *morfismo parcial* $(f, g) : a \to b$ en una categoría $\mathcal{C}$ es un morfismo que tiene por dominio un subobjeto g de a y por codominio al objeto b. Por lo tanto es un diagrama,

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \\
b
\end{tikzcd}$$

con g mono.

Definición 1.5.4 (Representable)**.** En una categoría $\mathcal{C}$ un morfismo parcial $(f, g) : a \to b$ es *representable* si y sólo si existen un objeto $\bar{b}$ y un monomorfismo $\eta_b : b \rightarrowtail \bar{b}$ tales que existe un único morfismo $\bar{f} : a \to \bar{b}$ que hace del siguiente diagrama un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[d, "\bar{f}"] \\
b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

La pareja $(\bar{b}, \eta_b)$ clasifica los morfismos parciales con codominio b.

En el caso de un topos se dispone del siguiente resultado de F.W. Lawvere y M. Tierney.

Teorema 1.5.5. *En un topos $\mathcal{E}$ todo morfismo parcial es representable.*

Este teorema es el tema de la sección 1.3 del libro de Kock & Wraith [KW71].

1.6. Funtores y Adjunciones

Definición 1.6.1 (Funtor $\exists$)**.** Sea $f : a \to b$ un morfismo en un topos $\mathcal{E}$. El funtor covariante $\exists : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ asigna a cada subobjeto $s : x \rightarrowtail a$ su imagen bajo f en b.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "s"] & a \arrow[d, "f"] \arrow[r, dashed, dash, "\chi_s"] & {} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\exists_f"] & \Omega \\
fs^*(x) \arrow[r, "im\ fs"'] & b \arrow[r, dashed, dash, "\chi_{imfs}"'] & {} \arrow[r, dashed] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto cada f determina un morfismo $\exists_f : \Omega^a \to \Omega^b$.

Definición 1.6.2 (Funtor $\exists_k$)**.** Sea $k : a \to b$ un morfismo en un topos $\mathcal{E}$. La versión externa del funtor $\exists$ es el funtor $\exists_k : Sub(a) \to Sub(b)$ que asigna a cada subobjeto s de a su imagen en b bajo k.

Definición 1.6.3 (Funtor Ω)**.** Sea $f : a \to b$ un morfismo en un topos $\mathcal{E}$. El funtor contravariante $\Omega : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ asigna a cada subobjeto $s : x \rightarrowtail b$ el subobjeto $t : y \rightarrowtail a$ que resulta del producto fibrado de s a lo largo de f.

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & x \arrow[d, "s"] \\
a \arrow[r, "f"'] \arrow[dd, dashed, "\chi_t"'] & b \arrow[dd, dashed, "\chi_s"] \\
{} & {} \arrow[l, dashed, "\Omega^f"] \\
\Omega & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto cada f determina un morfismo $\Omega^f : \Omega^b \to \Omega^a$.

Definición 1.6.4 (Funtor k^{-1})**.** Sea $k : a \to b$ un morfismo en un topos $\mathcal{E}$. La versión externa del funtor Ω es el funtor $k^{-1} : Sub(b) \to Sub(a)$ que asigna a cada subobjeto s de b el subobjeto t de a que resulta del producto fibrado de s a lo largo de k.

La demostración del siguiente teorema se encuentra en el libro de Moerdijk & MacLane [MM92]. (Proposición IV.9.2).

Teorema 1.6.5 (Condición de Beck-Chevalley)**.** *Sean $f : a \to b$ y $g : c \to b$ morfismos en un topos $\mathcal{E}$. Considere el producto fibrado de g a lo largo de f.*

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & c \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
$$

Entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^d & \Omega^c \arrow[l, "\Omega^p"'] \arrow[d, "\exists_g"] \\
\Omega^a & \Omega^b \arrow[l, "\Omega^f"]
\arrow[from=1-1, to=2-1, "\exists_q"']
\end{tikzcd}$$

Afirmación 1.6.6. *Si $f : a \rightarrowtail b$ es un monomorfismo entonces $\exists_f : \Omega^a \to \Omega^b$ es un monomorfismo.*

Demostración. Si $f : a \rightarrowtail b$ es un monomorfismo entonces el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "id_a"] \arrow[d, "id_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

Por la condición de Beck-Chevalley (1.6.5) el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^a \arrow[r, "\Omega^{id_a}"] \arrow[d, "\exists_f"'] & \Omega^a \arrow[d, "\exists_{id_a}"] \\
\Omega^b \arrow[r, "\Omega^f"'] & \Omega^a
\end{tikzcd}$$

Se cumple $\exists_{id_a} \cdot \Omega^{id_a} = id_{\Omega^a} = \Omega^f \cdot \exists_f$ y por lo tanto $\exists_f$ es un monomorfismo. □

Definición 1.6.7 (Categoría $\mathcal{C} \downarrow a$)**.** Dado un objeto a en una categoría $\mathcal{C}$, se construye la categoría $\mathcal{C} \downarrow a$ de los objetos sobre a de la siguiente forma.

- Los objetos de $\mathcal{C} \downarrow a$ son morfismos en $\mathcal{C}$ con codominio a.

- Un morfismo $k : g \to h$ entre objetos $g : b \to a$ y $h : c \to a$ en $\mathcal{C} \downarrow a$, es un morfismo $b \to c$ en $\mathcal{C}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[dl, "h"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

Definición 1.6.8 (Funtor f^*)**.** Un morfismo $f : a \to b$ en un topos $\mathcal{E}$ induce un funtor $f^* : \mathcal{E} \downarrow b \to \mathcal{E} \downarrow a$.

- Dado un objeto $g : d \to b$ en $\mathcal{E} \downarrow b$, su imagen $f^*(g) : c \to a$ en $\mathcal{E} \downarrow a$ es el producto fibrado de g a lo largo de f.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] \arrow[d, "f^*(g)"'] & d \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

- Dado un morfismo $k : g \to h$ en $\mathcal{E} \downarrow b$, su imagen $f^*(k)$ en $\mathcal{E} \downarrow a$ es el único morfismo inducido por la propiedad universal del producto fibrado de h a lo largo de f.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "f^*(k)"] \arrow[dd, "f^*(g)"'] & & d \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "g"] & \\
 & m \arrow[rr, crossing over] \arrow[dl, "f^*(h)"] & & n \arrow[dl, "h"] \\
a \arrow[rr, "f"'] & & b &
\end{tikzcd}
$$

Definición 1.6.9 (Funtor Σ_f)**.** Un morfismo $f : a \to b$ en un topos $\mathcal{E}$ induce un funtor $\Sigma_f : \mathcal{E} \downarrow a \to \mathcal{E} \downarrow b$.

- Dado un objeto $g : c \to a$ en $\mathcal{E} \downarrow a$, su imagen $\Sigma_f(g)$ en $\mathcal{E} \downarrow b$ es el morfismo $f \cdot g : c \to b$.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "g"] & a \arrow[r, dashed, "\Sigma_f"] & c \arrow[r, "f \cdot g"] & b
\end{tikzcd}
$$

- Dado un morfismo $k : g \to h$ en $\mathcal{E} \downarrow a$, su imagen $f^*(k)$ en $\mathcal{E} \downarrow b$ es el morfismo k considerado en $\mathcal{E} \downarrow b$.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"'] & d \arrow[dl, "h"] \arrow[r, dashed, "\Sigma_f"] & c \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f \cdot g"'] & d \arrow[dl, "f \cdot h"] \\
a & & b &
\end{tikzcd}
$$

Definición 1.6.10 (Funtor Π_f)**.** Un morfismo $f : a \to b$ en un topos $\mathcal{E}$ induce un funtor $\Pi_f : \mathcal{E} \downarrow a \to \mathcal{E} \downarrow b$.

- Sea $g : c \to a$ un objeto en $\mathcal{E} \downarrow a$. Considere el producto fibrado de la representación (1.5.5) del morfismo parcial $(id_a, \langle f, id_a\rangle)$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\langle f, id_a\rangle"] \arrow[d, "id_a"'] & b \times a \arrow[d, dashed, "\overline{id_a}"] \\ a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a} \end{tikzcd}$$

Por definición $\overline{id_a}$ es único. Sea $h : b \to \bar{a}^a$ el adjunto exponencial de $\overline{id_a}$. Ahora considere el producto fibrado de la representación del morfismo parcial (g, η_c).

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "g"'] & \bar{c} \arrow[d, dashed, "\bar{g}"] \\ a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a} \end{tikzcd}$$

De manera similar el morfismo $\bar{g}$ es único. Sea $\bar{g}^a : \bar{c}^a \to \bar{a}^a$ la imagen de $\bar{g}$ bajo el funtor $(-)^a$. Entonces $\Pi_f(g)$ se define como el producto fibrado de $\bar{g}^a$ a lo largo de h.

$$\begin{tikzcd} P_g \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\Pi_f(g)"'] & \bar{c}^a \arrow[d, "\bar{g}^a"] \\ b \arrow[r, "h"'] & \bar{a}^a \end{tikzcd}$$

- Sea $k : g_1 \to g_2$ un morfismo en $\mathcal{E} \downarrow a$. Por definición k es un morfismo $c \to d$ en $\mathcal{E}$. En el siguiente diagrama del producto fibrado de la representación (1.5.5) del morfismo parcial (k, η_c) el morfismo $\bar{k}$ es único.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "k"'] & \bar{c} \arrow[d, dashed, "\bar{k}"] \\
d \arrow[r, "\eta_d"'] & \bar{d}
\end{tikzcd}$$

  Sea $\bar{k}^a : \bar{c}^a \to \bar{d}^a$ la imagen de $\bar{k}$ bajo el funtor $(-)^a$ en el siguiente diagrama conmutativo. Entonces la imagen $\Pi_f(k)$ en $\mathcal{E} \downarrow b$ es el único morfismo inducido por la propiedad universal del producto fibrado de $\overline{g_2}^a$ a lo largo de h.

$$\begin{tikzcd}
P_{g_1} \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\Pi_f(k)"] \arrow[dd, "\Pi_f(g_1)"'] & & \bar{c}^a \arrow[dr, "\bar{k}^a"] \arrow[dd, "\overline{g_1}^a" near end] & \\
& P_{g_2} \arrow[rr] \arrow[dl, "\Pi_f(g_2)"] & & \bar{d}^a \arrow[dl, "\overline{g_2}^a"] \\
b \arrow[rr, "h"'] & & \bar{a}^a &
\end{tikzcd}$$

El siguiente resultado es el tema del teorema IV.9.3 del libro de Moerdijk & MacLane [MM92].

Afirmación 1.6.11. *Si $k : a \to b$ es un morfismo en un topos $\mathcal{E}$ entonces el funtor $k^{-1} : Sub(b) \to Sub(a)$ (1.6.4) tiene un adjunto derecho $\forall_k$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
Sub(a) \arrow[r, "\forall_k"] \arrow[d, "i_a"'] & Sub(b) \arrow[d, "i_b"] \\
\mathcal{E} \downarrow a \arrow[r, "\Pi_k"'] & \mathcal{E} \downarrow b
\end{tikzcd}$$

Con las nociones definidas anteriormente, un topos satisface el siguiente resultado de P. Freyd.

Teorema 1.6.12 (Teorema fundamental del topos)**.** *Para cada objeto b en un topos $\mathcal{E}$, la categoría $\mathcal{E} \downarrow b$ es un topos. Además para cada morfismo $f : a \to b$ en $\mathcal{E}$ se satisfacen las adjunciones $\Sigma_f \dashv f^* \dashv \Pi_f$ y en el caso externo $\exists_f \dashv f^{-1} \dashv \forall_f$.*

Para los detalles de este teorema consulte le sección IV.7 del libro de Moerdijk & MacLane [MM92] o la sección 1.4 del libro de Kock & Wraith [KW71].

1.7. Extensividad

Afirmación 1.7.1 (Lema del coproducto fibrado)**.** *En un topos $\mathcal{E}$ considere el coproducto fibrado de un monomorfismo f a lo largo de cualquier morfismo h.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d] \\
d \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

Se cumple que g es mono y el diagrama también es un producto fibrado.

Demostración. Sea f un monomorfismo y h un morfismo cualquiera. Por el teorema (1.5.5) el morfismo parcial (h, f) es representable. Por lo tanto el exterior del siguiente diagrama constituye un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & b \arrow[d] \arrow[ddr, "\bar{h}"] & \\
d \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, "\eta_d"'] & c \arrow[dr, dashed] & \\
& & \bar{d}
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente el cuadrado interior es un producto fibrado. Además el monomorfismo η_d se factoriza a través de g de donde g es un monomorfismo. $\square$

Afirmación 1.7.2. *En un topos $\mathcal{E}$ se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *Para todo objeto a, $0 \cong 0 \times a$,*

2. *Si para un objeto a existe un morfismo $a \to 0$ entonces $a \cong 0$,*

3. *Si $0 \cong 1$ entonces $\mathcal{E}$ es un topos degenerado, esto significa que para todo objeto a se tiene $a \cong 0$,*

4. *Para todo objeto a el morfismo $0_a : 0 \to a$ es mono.*

Demostración.

1. Sea b un objeto en el topos $\mathcal{E}$, dado que 0 es un objeto inicial existe un único morfismo $0 \to b^a$. Se cumple $\mathcal{E}(0, b^a) \cong \mathcal{E}(0 \times a, b)$ por definición del exponencial y por consiguiente existe un único morfismo $0 \times a \to b$. Por lo tanto $0 \times a$ es un objeto inicial y $0 \times a \cong 0$.

2. Suponga que existe un morfismo $f : a \to 0$ y considere el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, id_a \rangle"] \arrow[dr, "id_a"] & \\
0 & 0 \times a \arrow[l, "pr_0"] \arrow[r, "pr_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto se tiene $pr_a \cdot \langle f, id_a \rangle = id_a$. Por otra parte $\langle f, id_a \rangle \cdot pr_a$ es un morfismo con dominio y codominio $0 \times a$. Dado que $0 \times a$ es un objeto inicial en $\mathcal{E}$ se obtiene $\langle f, id_a \rangle \cdot pr_a = id_{0 \times a}$. Esto es $a \cong 0 \times a$ y por el inciso 1 se obtiene $a \cong 0$.

3. Suponga que $0 \cong 1$, para cada objeto a existe un morfismo $a \to 1$ y en este caso $a \to 0$. Por lo tanto por el inciso 2 se obtiene $a \cong 0$.

4. Sean $f : 0 \to a$ y $g, h : b \rightrightarrows 0$ morfismos tales que $f \cdot g = f \cdot h$.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & 0 \arrow[r, "f"] & a
\end{tikzcd}$$

Por el inciso 2 $b \cong 0$ y por consiguiente existe un único morfismo $b \to 0$. Lo anterior implica $g = h$ y por lo tanto f es cancelable por la izquierda.

□

Definición 1.7.3 (Morfismos disjuntos)**.** Sean $f : a \to b$ y $g : c \to b$ morfismos en $\mathcal{E}$, se dice que f y g son *disjuntos* si el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0_c"] \arrow[d, "0_a"'] & c \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

Definición 1.7.4 (Coproducto disjunto)**.** Un coproducto $a+b$ es *disjunto* si las inclusiones i_a e i_b son monomorfismos disjuntos.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_b"] \arrow[d, "0_a"'] & b \arrow[d, "i_b"] \\ a \arrow[r, "i_a"'] & a+b \end{tikzcd}$$

Definición 1.7.5 (Coproducto universal)**.** Un coproducto $a+b$ es *universal* si el producto fibrado de cualquier morfismo f con codominio $a+b$ a lo largo de las inclusiones del coproducto produce un diagrama de coproducto.

$$\begin{tikzcd} p_1 \arrow[r, "x_1"] \arrow[d, "h_1"'] & x \arrow[d, "f"] & p_2 \arrow[l, "x_2"'] \arrow[d, "h_2"] \\ a \arrow[r, "i_a"'] & a+b & b \arrow[l, "i_b"] \end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior si p_1 es el producto fibrado de f a lo largo de i_a y p_2 es el producto fibrado de f a lo largo de i_b entonces $x = p_1 + p_2$ y x_1, x_2 son las inclusiones.

Afirmación 1.7.6. *En un topos $\mathcal{E}$ los coproductos son disjuntos.*

Demostración. Por la propiedad universal del coproducto el siguiente diagrama es un coproducto fibrado.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_b"] \arrow[d, "0_a"'] & b \arrow[d, "i_b"] \\ a \arrow[r, "i_a"'] & a+b \end{tikzcd}$$

Por el inciso 4 de la afirmación (1.7.2), 0_a y 0_b son monomorfismos. Por el lema del coproducto fibrado (1.7.1), i_a e i_b son monomorfismos y el diagrama anterior es un producto fibrado. Por lo tanto el coproducto es disjunto. □

Afirmación 1.7.7. *En un topos $\mathcal{E}$ los coproductos son universales.*

Demostración. Por el teorema fundamental del topos (1.6.12) el funtor f^* tiene adjunto derecho y por lo tanto preserva colímites. Por consiguiente el producto fibrado preserva coproductos. □

Lema 1.7.8. *Si $f : a \to b$ y $g : c \to b$ son monomorfismos disjuntos en $\mathcal{E}$, entonces $[f, g] : a + c \to b$ es un monomorfismo.*

Demostración. Si g es un monomorfismo, entonces el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "id_c"] \arrow[d, "id_c"'] & c \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

Combinando este diagrama con el diagrama de la definición de morfismos disjuntos y la afirmación (1.7.7), se obtiene el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} 0 + c \arrow[r, "{[0_c, id_c]}"] \arrow[d, "0_a + id_c"'] & c \arrow[d, "g"] \\ a + c \arrow[r, "{[f, g]}"'] & b \end{tikzcd}$$

Dado que $c \cong 0 + c$, el producto fibrado anterior implica el siguiente.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "id_c"] \arrow[d, "i_c"'] & c \arrow[d, "g"] \\
a + c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b
\end{tikzcd}$$

Siguiendo el mismo razonamiento al considerar el monomorfismo f se obtiene el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "id_a"] \arrow[d, "i_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\
a + c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b
\end{tikzcd}$$

Al reflejar los diagramas anteriores se obtienen los siguientes productos fibrados.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "id_a"'] & a + c \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "i_c"] \arrow[d, "id_c"'] & a + c \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
c \arrow[r, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

Utilizando nuevamente la afirmación (1.7.7) se obtiene el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
a+c \arrow[r, "{[i_a, i_c]}"] \arrow[d, "id_a + id_c"'] & a+c \arrow[d, "{[f,g]}"] \\
a+c \arrow[r, "{[f,g]}"'] & b
\end{tikzcd}$$

Se cumple $[i_c, i_a] = id_{a+c} = id_a + id_c$ por lo tanto al sustituir en el diagrama anterior se concluye que $[f, g]$ es un monomorfismo. $\square$

Afirmación 1.7.9. *Si h y k son monomorfismos en el siguiente producto fibrado,*

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & d \arrow[d, "h"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

entonces el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^c \arrow[r, "\exists_g"] \arrow[d, "\exists_k"'] & \Omega^d \arrow[d, "\exists_h"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^b
\end{tikzcd}$$

Demostración. Considere el siguiente diagrama con $l : u \to \Omega^d$ y $m : u \to \Omega^a$ morfismos arbitrarios tales que $\exists_h \cdot l = \exists_f \cdot m$.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[drr, "l"] \arrow[ddr, "m"'] & & \\ & \Omega^c \arrow[r, "\exists_g"] \arrow[d, "\exists_k"'] & \Omega^d \arrow[d, "\exists_h"] \\ & \Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^b \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

El diagrama anterior es equivalente a que el siguiente diagrama externo conmute.

$$\begin{tikzcd} Sub(u \times c) \arrow[r, "\exists_g"] \arrow[d, "\exists_k"'] & Sub(u \times d) \arrow[d, "\exists_h"] \\ Sub(u \times a) \arrow[r, "\exists_f"'] & Sub(u \times b) \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Sean $i : x \rightarrowtail u \times d$ el subobjeto de $u \times d$ adjunto del morfismo l y $j : y \rightarrowtail u \times a$ el subobjeto de $u \times a$ adjunto del morfismo m. Sea $y \to fj^*(y) \rightarrowtail u \times b$ la factorización epi-mono de la composición $f \cdot j$.

$$
\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[d, dashed, "i"] \\
 & u \times c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & u \times d \arrow[d, "h"] \\
y \arrow[r, dashed, "j"'] \arrow[dr, dashed, "fj^*"'] & u \times a \arrow[r, "f"'] & u \times b \\
 & fj^*(y) \arrow[ur, dashed, "im\, fj"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por la definición del funtor $\exists$ (1.6.1) se cumple $\exists_f \cdot j = im\, fj$ y como h es un monomorfismo se cumple $\exists_h \cdot i = h \cdot i$. La conmutatividad del diagrama (1.2) implica que se satisface la equivalencia $\exists_h \cdot i \simeq fj^*(y)$. Por lo tanto existe un isomorfismo $s : fj^*(y) \to x$. Por la propiedad universal del producto se obtiene $i = \langle f_x, g_x \rangle$, $j = \langle f_y, g_y \rangle$ para monomorfismos f_x, f_y, g_x, g_y tales como se muestran en los siguientes diagramas.

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "f_x"'] \arrow[d, dashed, "i"] \arrow[dr, "g_x"] & \\
u & u \times d \arrow[l, "\pi_u"] \arrow[r, "\pi_d"'] & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dl, "f_y"'] \arrow[d, dashed, "j"] \arrow[dr, "g_y"] & \\
u & u \times a \arrow[l, "\pi_u"] \arrow[r, "\pi_a"'] & a
\end{tikzcd}
$$

Se cumple

$$
\begin{aligned}
h \cdot i \cdot s &= im\, fj \\
h \cdot i \cdot s fj^* &= im\, fj \cdot fj^* \\
h \cdot g_x \cdot s \cdot fj^* &= f \cdot g_y.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el exterior del siguiente producto fibrado conmuta.

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[drr, "g_x \cdot s \cdot fj^*"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[ddr, "g_y"'] & & \\
& c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & d \arrow[d, "h"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

De la propiedad universal del producto fibrado se induce un único morfismo $\alpha : y \to c$ tal que $g_y = k \cdot \alpha$. Por consiguiente α es un monomorfismo y por lo tanto un subobjeto de c.

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[dl, "f_y"'] \arrow[d, dashed, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
u & u \times c \arrow[l, "\pi_u"] \arrow[r, "\pi_c"'] & c
\end{tikzcd}$$

Los monomorfismos α y f_y determinan un único subobjeto $\beta : y \rightarrowtail u \times c$ y por lo tanto un único morfismo $n : u \to \Omega^c$ adjunto del morfismo β. Se concluye así que el diagrama (1.1) es un producto fibrado. $\square$

1.8. Heyting o Boole

Afirmación 1.8.1. *En un topos $\mathcal{E}$ con clasificador de subobjetos $(\Omega, \top)$ se cumple $\bot \simeq -\top$. (Teorema 4, sección 7.2 en Goldblatt [Gol79]).*

Afirmación 1.8.2. *En un topos $\mathcal{E}$ con clasificador de subobjetos $(\Omega, \top)$ si $\top$ tiene complemento en $Sub(\Omega)$ éste es el subobjeto $\bot$. (Teorema 5, sección 7.2 en Goldblatt [Gol79]).*

Definición 1.8.3 (Topos booleano)**.** Un topos $\mathcal{E}$ es *booleano* si y sólo si para cada objeto d la colección $(Sub(d), \leqslant)$ es un álgebra de Boole.

Definición 1.8.4 (Topos clásico)**.** Un topos $\mathcal{E}$ es *clásico* si y sólo si el morfismo $[\top, \bot] : 1 + 1 \to \Omega$ es iso.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr, "\top"'] & 1+1 \arrow[d, dashed] & 1 \arrow[l] \arrow[dl, "\bot"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

Lema 1.8.5. *En un topos $\mathcal{E}$, $[\top, \bot] : 1 + 1 \to \Omega$ es un monomorfismo.*

Demostración. La definición del morfismo $\bot$ (1.2.1) establece que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\bot"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto los morfismos $\top$, $\bot$ son disjuntos y por el lema (1.7.8) se obtiene que $[\top, \bot] : 1 + 1 \to \Omega$ es un monomorfismo. $\square$

Afirmación 1.8.6. *Para un topos $\mathcal{E}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{E}$ es booleano*
2. *$(Sub(\Omega), \leqslant)$ es un álgebra de Boole*
3. *$\top : 1 \to \Omega$ tiene complemento en $(Sub(\Omega), \leqslant)$*
4. *$\bot : 1 \to \Omega$ es el complemento de $\top$ en $(Sub(\Omega), \leqslant)$*
5. *$\top \sqcup \bot = 1_\Omega$ en $(Sub(\Omega), \leqslant)$*

6. $\mathcal{E}$ *es clásico.*

(Teorema 1, sección 7.3 en Goldblatt [Gol79]).

Lema 1.8.7. *Para f y g subobjetos en $(Sub(d), \leqslant)$ se cumple $f \leqslant g$ si y sólo si $(f \to g) \simeq id_d$. (Inciso 2, Teorema 1, sección 7.5 en Goldblatt [Gol79]).*

Afirmación 1.8.8. *Para un topos $\mathcal{E}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{E}$ *es booleano*

2. *En cada $(Sub(d), \leqslant)$ se cumple $f \to g \simeq -f \sqcup g$*

3. *En $(Sub(\Omega), \leqslant)$ se cumple $f \to g \simeq -f \sqcup g$*

4. $\top \to \top = \top \sqcup \perp$.

(Teorema 2, sección 7.5 en Goldblatt [Gol79]).

En el siguiente capítulo se procede al estudio de algunas propiedades postuladas por la axiomática de Zermelo-Fraenkel y se introduce el método de su generalización al contexto de un topos arbitrario.

Capítulo 2

Conceptos Conjuntistas

Con el propósito de ilustrar la relación que existe entre los axiomas de Zermelo-Fraenkel y propiedades de los morfismos en una categoría, se consideran algunos conceptos de la teoría de conjuntos y se procede a su generalización y estudio en un topos arbitrario.

2.1. Separación

Dados un conjunto A y una propiedad φ, el *esquema axiomático de separación* de Zermelo-Fraenkel permite construir el subconjunto de los elementos de A que satisfacen φ, este es el conjunto $\{x \in A \mid \varphi(x)\} \subseteq A$.

- En el topos *Con* una propiedad φ se puede representar como una función $\varphi : A \to 2$ definida por la siguiente regla,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ tiene la propiedad } \varphi \\ 0 \text{ si } x \text{ no tiene la propiedad } \varphi. \end{cases}$$

  El subconjunto de los elementos de A que satisfacen la propiedad φ se puede expresar por lo tanto como el subconjunto $A_\varphi = \{x \mid \varphi(x) = 1\}$ en el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
A_\varphi \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & 2
\end{tikzcd}$$

> Se cumple $y \in A_\varphi$ si y sólo si $\varphi(y) = 1$. La propiedad φ determina el subconjunto A_φ del cual es función característica.

Generalizando, sea $\varphi : a \to \Omega$ un morfismo en un topos $\mathcal{E}$ y considere el subobjeto $\{x \mid \varphi\} : b \to a$ que se obtiene como el producto fibrado de $\top$ a lo largo de φ.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, hook, "\{x \mid \varphi\}"] \arrow[d, "!_b"'] & a \arrow[d, "\varphi"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

La unicidad del carácter de un morfismo implica $\varphi = \chi_{\{x|\varphi\}}$. Considere un a-elemento y como en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed, "k"'] \arrow[dr, "y"] & \\
b \arrow[r, hook, "\{x \mid \varphi\}"] \arrow[d, "!_b"'] & a \arrow[d, "\varphi"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por definición de la pertenencia (1.5.1) $y \in \{x \mid \varphi\}$ si y sólo si existe un b-elemento k tal que $\{x \mid \varphi\} \cdot k = y$. Ahora dado que el cuadrado inferior es un producto fibrado lo anterior sucede si y sólo si el exterior del diagrama conmuta, esto es si y sólo si $\varphi \cdot y = \top_b \cdot k = \top$. Esto completa la analogía con la situación en el topos Con.

Por consiguiente la definición de clasificador de subobjetos (1.1.1) constituye una forma del axioma de separación de Zermelo-Fraenkel. El carácter de un subobjeto $b \rightarrowtail a$ representa una propiedad de los a-elementos y la unicidad del carácter de un morfismo establece que a cada subobjeto le corresponde una única propiedad.

2.2. Vacío y extensionalidad

El *axioma del conjunto vacío* de Zermelo-Fraenkel postula la existencia de un conjunto $\emptyset$ que tiene la particularidad de no tener elementos. Se captura esta propiedad en la siguiente generalización para objetos en una categoría.

Definición 2.2.1 (Objeto no vacío)**.** Un objeto a en un categoría es *no vacío* si y sólo si existe algún morfismo $1 \to a$.

El conjunto vacío también se caracteriza con la propiedad de ser un objeto inicial en la categoría Con y dado que dos objetos iniciales son isomorfos se generaliza esta propiedad para objetos en una categoría con objeto inicial 0.

Definición 2.2.2 (Objeto nulo)**.** Un objeto a en una categoría es *objeto nulo* si y sólo si $a \cong 0$.

- Observe que el inciso 2 de la afirmación (1.7.2) implica que en un topos un objeto nulo es vacío o de lo contrario la categoría es degenerada.

- En la categoría Con coinciden las nociones de objeto nulo y objeto vacío. La coincidencia de estas nociones es una consecuencia del principio de extensionalidad que en lenguaje de categorías se expresa de la siguiente manera.

Definición 2.2.3 (Principio de extensionalidad para morfismos)**.** Si en una categoría $f, g : a \rightrightarrows b$ son morfismos distintos, entonces existe un a-elemento x tal que $f \cdot x \neq g \cdot x$.

- En Con, desde donde se generaliza, el principio de extensionalidad para morfismos tiene la forma usual. Si $f, g : A \rightrightarrows B$ son funciones distintas entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Tenga presenta el siguiente enunciado equivalente: dadas dos funciones $f, g : A \rightrightarrows B$, si para todo x se cumple $f(x) = g(x)$ entonces $f = g$.

Definición 2.2.4 (Topos bien punteado)**.** Un topos no degenerado $\mathcal{E}$ es *bien punteado* si y sólo si satisface el principio de extensionalidad para morfismos.

Definición 2.2.5 (Topos bivalente)**.** Un topos es *bivalente* si tiene exactamente dos valores de verdad. Es decir que un topos es bivalente si sus Ω-elementos son $\top$ y $\bot$.

Afirmación 2.2.6. *En un topos bien punteado si a no es objeto nulo entonces es objeto no vacío.*

Demostración. Sea a un objeto tal que $a \ncong 0$. Los subobjetos $0_a : 0 \rightarrowtail a$ y $id_a : a \rightarrowtail a$ no son isomorfos y por lo tanto son distintos. La unicidad del carácter implica que $\chi_{0_a} : a \to \Omega$ es distinto de $\chi_{id_a} : a \to \Omega$. Por el principio de extensionalidad existe un a-elemento x tal que $\chi_{0_a} \cdot x \neq \chi_{id_a} \cdot x$. Por lo tanto a es no vacío. $\square$

La afirmación anterior prueba el resultado general de lo que acontece en Con. En un topos bien punteado las nociones de objeto vacío y objeto nulo coinciden como consecuencia del principio de extensionalidad. Este principio igualmente influye sobre la naturaleza lógica del topos.

Afirmación 2.2.7. *Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado entonces $\mathcal{E}$ es bivalente.*

Demostración. Sea f un Ω-elemento y considere el producto fibrado de f y $\top$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "f"] \\
1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

- Si $a \cong 0$ entonces es un objeto inicial y $g = !_0$. Por lo tanto en este caso se cumple $f = \chi_g = \bot$ (1.2.1).

- Si $a \ncong 0$ entonces dado que $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado a es no vacío como consecuencia de la afirmación (2.2.6). Sea x un a-elemento, observe que $g \cdot x$ es un morfismo con dominio y codominio 1. Dado que éste es un objeto terminal se tiene $g \cdot x = id_1$. Por lo tanto se satisface $f = f \cdot id_1 = f \cdot g \cdot x = \top_a \cdot x = \top \cdot !_a \cdot x = \top \cdot id_1 = \top$.

Se concluye que $\top$ y $\bot$ son los únicos Ω-elementos y por lo tanto el topos $\mathcal{E}$ es bivalente. $\square$

Afirmación 2.2.8. *Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado entonces $[\top, \bot]$ es un epimorfismo.*

Demostración. Sean $f, g : \Omega \rightrightarrows a$ morfismos en un topos bien punteado $\mathcal{E}$ tales que $f \cdot [\top, \bot] = g \cdot [\top, \bot]$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\top"'] & 1+1 \arrow[d, "{[\top,\bot]}"] & 1 \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "\bot"] \\
& \Omega \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
& a &
\end{tikzcd}$$

Se cumple $f \cdot \top = f \cdot [\top, \bot] \cdot i = g \cdot [\top, \bot] \cdot i = g \cdot \top$ y de manera análoga $f \cdot \bot = f \cdot [\top, \bot] \cdot j = g \cdot [\top, \bot] \cdot j = g \cdot \bot$. Por lo tanto $\bot$ y $\top$ no distinguen los morfismos f y g. Como consecuencia de la afirmación (2.2.7) el topos $\mathcal{E}$ es bivalente y por lo tanto los únicos Ω-elementos son $\top$ y $\bot$. Dado que ninguno distingue los morfismos, por el principio de extensionalidad se tiene que $f = g$ y por consiguiente $[\top, \bot]$ es un epimorfismo. $\square$

Corolario 2.2.9. *Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado entonces $\mathcal{E}$ es clásico.*

Demostración. Por la afirmación (1.8.5) $[\top, \bot] : 1 + 1 \to \Omega$ es un monomorfismo y por la afirmación (2.2.8) es un epimorfismo. Por lo tanto es un isomorfismo y por consiguiente el topos $\mathcal{E}$ es clásico (1.8.4). $\square$

La siguiente afirmación reúne los resultados anteriores.

Afirmación 2.2.10. *Un topos no degenerado $\mathcal{E}$ es bien punteado si y sólo si $\mathcal{E}$ es clásico y cada objeto no nulo es objeto no vacío.*

Demostración.

- Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado entonces por el corolario (2.2.9) es un topos clásico y por la afirmación (2.2.6) un objeto no nulo es un objeto no vacío en $\mathcal{E}$.

- Si $\mathcal{E}$ un topos clásico entonces $\mathcal{E}$ es un topos booleano por la afirmación (1.8.6). Sean $f, g : a \rightrightarrows b$ morfismos distintos en el topos $\mathcal{E}$. Denote al igualador de estos morfismos por $h : c \rightarrowtail a$. Dado que $\mathcal{E}$ es un topos booleano existe el morfismo $-h : -c \rightarrowtail a$, complemento de h en el álgebra $Sub(a)$.

  Si $-c \cong 0$ entonces $-h \simeq 0_a$ y por lo tanto $h \simeq h \sqcup 0_a \simeq h \sqcup -h \simeq id_a$. El isomorfismo h iguala a f y g implicando $f = g$. Por lo tanto $-c$ no es objeto nulo y por consiguiente existe algún $y : 1 \to -c$.

  Suponga que se cumple $f \cdot (-h \cdot y) = g \cdot (-h \cdot y)$. Dado que h iguala a f y g existe un morfismo $z : 1 \to c$ tal que $h \cdot z = -h \cdot y$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "z"'] & -c \arrow[r, "-h"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
& c \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

  Este morfismo z hace conmutativo el exterior del siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, "y"] \arrow[ddr, "z"'] \arrow[dr, dashed] & & \\
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & -c \arrow[d, "-h"] \\
& c \arrow[r, "h"'] & a
\end{tikzcd}$$

Dado que el diagrama interior es el producto fibrado que determina el ínfimo $h \sqcap -h$ existe un morfismo $1 \to 0$. Como consecuencia de los incisos 2 y 3 de la afirmación (1.7.2), $\mathcal{E}$ es una categoría degenerada y esto contradice $c \ncong 0$.

Se cumple $f \cdot (-h \cdot y) \neq g \cdot (-h \cdot y)$. El a-elemento $-h \cdot y$ distingue los morfismos f y g. Por lo tanto el topos $\mathcal{E}$ satisface el principio de extensionalidad para morfismos.

$\square$

En lo anterior se consideró un principio de extensionalidad para morfismos en una categoría. Sin embargo el *axioma de extensionalidad* de Zermelo-Fraenkel establece que dos *conjuntos* son idénticos si y sólo si tienen los mismos *elementos*.

- En Con, $A = B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Esta condición para los subobjetos se puede generalizar para cualquier categoría por medio de la noción general de pertenencia de la definición (1.5.1). En una categoría se consideran de manera prioritaria las propiedades de sus morfismos dejando de lado las propiedades de los objetos. Considere ahora la siguiente noción para subobjetos y sus elementos en una categoría.

Definición 2.2.11 (Principio de extensionalidad para subobjetos)**.** Para f y g subobjetos de d se cumple $f \leqslant g$ si y sólo si para todo $x : 1 \to d$, $x \in f$ implica $x \in g$.

- Considere la relación $\leqslant$ en $Sub(d)$ (1.3.1) y sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ tales que $f \leqslant g$. Por definición existe $k : a \to b$ tal que $f = gk$.

  Sea x un d-elemento tal que $x \in f$, por lo tanto existe $h : 1 \to a$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "g"] & d \\ a \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "f"'] & 1 \arrow[l, dashed, "h"] \arrow[u, "x"'] \end{tikzcd}$$

  Se cumple $x = f \cdot h = g \cdot k \cdot h$ y por consiguiente $x \in g$.

Definición 2.2.12 (Topos extensional)**.** Un topos $\mathcal{E}$ es *extensional* si y sólo si para cada objeto d el principio de extensionalidad para subobjetos se cumple en $Sub(d)$.

La siguiente afirmación muestra que existe congruencia entre las definiciones generales y el contexto conjuntista para el caso de la intersección.

Afirmación 2.2.13. *Sea d un objeto en un topos $\mathcal{E}$ y sean $f : a \rightarrowtail d$ y $g : b \rightarrowtail d$ subobjetos de d. Se cumple $x \in f \sqcap g$ si y sólo si $x \in f$ y $x \in g$.*

Demostración.

- Si $x \in f \sqcap g$ entonces x se factoriza a través de $f \sqcap g$ y dado que $f \sqcap g$ se factoriza a través de f como a través de g se obtiene que x también. Por consiguiente $x \in f$ y $x \in g$.

- Suponga ahora que $x \in f$ y $x \in g$, por lo tanto existen morfismos $k : 1 \to a$ y $h : 1 \to b$ tales que $x = f \cdot k$ y $x = g \cdot h$. Esto implica que el exterior del diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\
& a \sqcap b \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "f \sqcap g"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & d
\end{tikzcd}$$

Dado que el diagrama interior es el producto fibrado de la intersección (1.3.5) de los subobjetos, existe un único morfismo $t : 1 \to a \sqcap b$ tal que $f \sqcap g \cdot t = f \cdot k = x$. Por lo tanto x se factoriza a través de $f \sqcap g$ y se tiene $x \in f \sqcap g$.

$\square$

Para concluir esta sección se prueba que el principio de extensionalidad para morfismos y el principio de extensionalidad para subobjetos son equivalentes.

Lema 2.2.14. *Si un morfismo se factoriza a través de un morfismo verdadero entonces es verdadero. Es decir que si el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & c \arrow[dl, "\top_c"] \\
\Omega &
\end{tikzcd}$$

entonces $h = \top_b$.

Demostración. Por hipótesis se tiene que $h = \top_c \cdot g = \top \cdot !_c \cdot g = \top \cdot !_b = \top_b$. $\square$

Lema 2.2.15. *Dado un objeto d en un topos, en $Sub(d)$ se cumple $f \leqslant g$ si y sólo si $(\chi_f \Rightarrow \chi_g) = \top_d$.*

Demostración. Por el lema (1.8.7) $f \leqslant g$ si y sólo si $(f \Rightarrow g) \simeq id_d$. La definición del conectivo $\Rightarrow$ establece que $\chi_{f \Rightarrow g} = (\chi_f \Rightarrow \chi_g)$ y de la definición del carácter de un morfismo se obtiene $\chi_{id_d} = \top_d$. Por lo tanto se concluye $f \leqslant g$ si y sólo si $(\chi_f \Rightarrow \chi_g) = \top_d$. □

Afirmación 2.2.16. *Un topos no degenerado $\mathcal{E}$ es extensional si y sólo si $\mathcal{E}$ es bien punteado.*

Demostración.

- Sea $\mathcal{E}$ extensional y considere un par de morfismos $f, g : a \rightrightarrows b$ tales que para todo a-elemento x se cumple $f \cdot x = g \cdot x$. Observe que para cada x, $x = x \cdot id_a$ y por consiguiente $x \in id_a$.

  Sea $h : c \rightarrowtail a$ el igualador de f y g.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ & 1 \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[u, "x"'] & \end{tikzcd}$$

  Por hipótesis se cumple $f \cdot x = g \cdot x$. Por la propiedad universal del igualador existe un único morfismo $k : 1 \to c$ tal que $x = h \cdot k$. Por lo tanto $x \in h$ y por extensionalidad se concluye que $id_a \leqslant h$. Por consiguiente existe $j : a \to c$ tal que $id_a = h \cdot j$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "h"] & a \\ & a \arrow[ul, "j"] \arrow[u, "id_a"'] \end{tikzcd}$$

Dado que h es el igualador de f y g se cumple

$$\begin{aligned} f \cdot h &= g \cdot h \\ f \cdot h \cdot j &= g \cdot h \cdot j. \\ f &= g \end{aligned}$$

Por consiguiente $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado.

- Sean $\mathcal{E}$ un topos bien punteado y $f : a \rightarrowtail d$, $g : b \rightarrowtail d$ dos subobjetos tales que $f \leqslant g$. Por lo tanto para todo x elemento de d, $x \in f$ implica $x \in g$.

  Ahora sean f y g tales que $x \in f$ implica $x \in g$ para todo d-elemento x. En general en una retícula se cumple $f \sqcap g \leqslant f$. Por el lema anterior se obtiene $\Rightarrow \cdot \langle \chi_{f \sqcap g}, \chi_f \rangle = \top_d$. Dado un d-elemento $x : 1 \longrightarrow d$ cualquiera se cumple $\Rightarrow \cdot \langle \chi_{f \sqcap g}, \chi_f \rangle \cdot x = \top_d \cdot x$. Como $\top_d \cdot x$ contiene un factor verdadero, el lema (2.2.14) implica $\Rightarrow \cdot \langle \chi_{f \sqcap g}, \chi_f \rangle \cdot x = \top$.

  $\chi_{f \sqcap g} \cdot x$ y $\chi_f \cdot x$ son valores de verdad al ser morfismos $1 \to \Omega$. Como $\mathcal{E}$ es bien punteado es un topos bivalente como consecuencia de la afirmación (2.2.7).

  Sea $\chi_f \cdot x = \top$. Por la definición de pertenencia se cumple $x \in f$ y por hipótesis $x \in g$. Lo anterior y la afirmación (2.2.13) implican que $x \in f \sqcap g$ y por consiguiente $\chi_{f \sqcap g} \cdot x = \top$. Se concluye que los morfismos χ_f y $\chi_{f \sqcap g}$ son ambos $\top$ o ambos $\bot$.

  Por lo tanto los morfismos $\chi_{f \sqcap g}, \chi_f : d \to \Omega$ no pueden ser distinguidos por un d-elemento. Dado que el topos $\mathcal{E}$ es bien punteado se concluye que $\chi_{f \sqcap g} = \chi_f$. Por lo tanto $f \sqcap g = f$ y con esto se demuestra $f \leqslant g$.

$\square$

La satisfacción del principio de extensionalidad implica que el topos sea bivalente. Por otra parte la extensionalidad es equivalente a que el topos sea clásico y que las nociones de objeto vacío y objeto nulo coincidan. En el siguiente diagrama **NV** denota el hecho que coincidan las nociones de objeto no vacío y objeto no nulo. Este diagrama presenta una recapitulación de las implicaciones establecidas en las afirmaciones de esta sección.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{NV}\ y\ \mathit{Clásico} \arrow[r, shift left, "(2.2.10)"] & \mathit{Bien\ Punteado} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& \mathit{Extensional} \arrow[u, shift right, "(2.2.16)"'] \arrow[dl, "(2.2.9)"'] \arrow[d, "(2.2.6)"] \arrow[dr, "(2.2.7)"] & \\
\mathit{Clásico} \arrow[d, shift right, "(1.8.6)"'] & \mathbf{NV} & \mathit{Bivalente} \\
\mathit{Booleano} \arrow[u, shift right] & &
\end{tikzcd}
$$

2.3. Elección

En 1904 el matemático alemán E. Zermelo concibe la posibilidad de realizar una cantidad de elecciones arbitrarias como un principio fundamental del razonamiento matemático y procede a aislarlo en su principio de elección. Posteriormente K. Gödel en 1940 y P. Cohen en 1966 prueban respectivamente la consistencia y la independencia del principio respecto a la axiomática de Zermelo-Fraenkel. Es así como el principio de Zermelo adquiere formalmente el estatuto de axioma. A lo largo del siglo XX se demuestra que una multitud de proposiciones en diversos ámbitos de las matemáticas son equivalentes del axioma de elección. Algunas de estas propiedades parecen evidentes y necesarias, como la existencia de una base para cualquier espacio vectorial sobre un campo, mientras otras suscitan cierta controversia, este es el caso del teorema del buen orden de Zermelo que postula la existencia de un buen orden para cualquier conjunto. Para un mayor conocimiento de los equivalentes del axioma de elección consulte el libro de Rubin & Rubin [Rub63] y la versión más reciente [Rub85].

- Sea $f : A \to B$ una función suprayectiva en el topos Con. Para toda $b \in B$ se cumple $f^{-1}(b) \neq \emptyset$. Por lo tanto si se elige un elemento a_b

en $f^{-1}(b)$ es posible construir una función $s : B \to A$ por medio de la correspondencia $s(b) = a_b$. Esta función se nombra una *sección* y satisface $f \cdot s = id_B$.

Generalizando el argumento anterior al contexto de una categoría se obtiene el siguiente principio equivalente del axioma de elección.

Definición 2.3.1 (Axioma **EE**)**.** Para todo epimorfismo $f : a \to b$ existe una sección $s : b \to a$ tal que $f \cdot s = id_b$. Se dice que *el epimorfismo se escinde.*

Es posible profundizar el estudio del axioma anterior considerando principios más generales.

- Dada una función $f : A \to B$ no suprayectiva en el topos Con, es posible restringir el codominio de la función a la imagen $f(A)$ de manera a obtener una *sección parcial* $s : f(A) \to A$.

Una sección parcial es por consiguiente un morfismo cuyo dominio es un subobjeto del dominio de la sección. Este es un caso particular de un morfismo parcial (1.5.3). También se define un *elemento parcial* $x : 1 \rightsquigarrow a$ como un morfismo que tiene por dominio un subobjeto de 1.

Definición 2.3.2 (Elemento parcial)**.** Dado un objeto a en una categoría, el morfismo $x : 1 \rightsquigarrow a$ es un *elemento parcial* de a si y sólo si $cod\, x = a$ y existe un monomorfismo $dom\, x \rightarrowtail 1$.

El siguiente axioma es una forma débil del axioma **EE**. El axioma **SE** postula la existencia de una sección parcial que escinde el soporte (1.5.2) de un objeto en un topos.

Definición 2.3.3 (Axioma **SE**)**.** Para todo objeto a el morfismo $a \to sop(a)$ tiene una sección $s : sop(a) \to a$. En este caso se dice que *el soporte se escinde.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!_a"] \arrow[d, shift right] & 1 \\
sop(a) \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Observación 2.3.4. La existencia de la sección s implica la existencia de un elemento parcial $s : 1 \rightsquigarrow a$.

$$\begin{tikzcd} sop(a) \arrow[r, "s"] \arrow[d] & a \\ 1 \arrow[ur, dashed, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Por consiguiente el principio que postula el axioma **SE** está estrechamente relacionado con la noción de objeto no vacío (2.2.1). Es por esta razón que se postula el siguiente axioma cuyo principio se estudió en la sección anterior.

Definición 2.3.5 (Axioma **NV**)**.** Todo objeto no inicial es no vacío.

Lema 2.3.6. *Dados un topos elemental $\mathcal{E}$ y un subobjeto $g : a \rightarrowtail 1$, existe un a-elemento $x : 1 \to a$ si y sólo si g es iso si y sólo si $g \simeq id_1$.*

Demostración.

- Sea $x : 1 \to a$ un elemento de a, x es una sección para g dado que 1 es objeto terminal en el topos y por consiguiente $g \cdot x = id_1$. Se cumple $g \cdot x \cdot g = id_1 \cdot g = g$ y como g es mono se puede cancelar por la izquierda obteniendo $x \cdot g = id_a$. Por lo tanto g es iso, $a \cong 1$ y $g \simeq id_1$.

- Si $g \simeq id_1$ entonces $a \cong 1$ y por consiguiente g es un isomorfismo. El inverso $x : 1 \to a$ de g es un a-elemento.

$\square$

Con el propósito de relacionar los conceptos anteriores, considere de aquí en adelante que el topos $\mathcal{E}$ es no degenerado. Se escribe $\mathcal{E} \vDash$ **NV** para expresar que en el topos $\mathcal{E}$ se satisface el axioma **NV** y se extiende la notación a los demás axiomas.

Afirmación 2.3.7. *Dado un topos $\mathcal{E}$, se cumple $\mathcal{E} \vDash$ **NV** si y sólo si $\mathcal{E}$ es bivalente y $\mathcal{E} \vDash$ **SE**.*

Demostración.

- Suponga que se cumple $\mathcal{E} \vDash \mathbf{NV}$ y sea $t : 1 \to \Omega$ un valor de verdad. Forme el producto fibrado de t y $\top$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "g"] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "t"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

  Se obtiene un monomorfismo $g : a \to 1$ tal que $\chi_g = t$. Si $t \neq \perp$ entonces $a \ncong 0$ y por el axioma **NV** existe un a-elemento $x : 1 \to a$. Por el lema anterior $g \simeq id_1$ y por consiguiente $\chi_g = \chi_{id_1}$ lo cual implica que $t = \top$. Por lo tanto el topos $\mathcal{E}$ es bivalente.

  Sea a un objeto en $\mathcal{E}$ y considere el diagrama de la definición de su soporte (1.5.2).

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "!_a"] \arrow[d, "!_a^*"'] & 1 \\ sop(a) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

  Por el inciso 2 de la afirmación (1.7.2) si $sop(a) \cong 0$ entonces $a \cong 0$. En este caso el único morfismo $sop(a) \to a$ escinde el único morfismo $a \to sop(a)$.

  Si $sop(a) \ncong 0$ entonces por **NV** existe un elemento $1 \to sop(a)$ y por el lema anterior $sop(a) \cong 1$ de donde $!_a$ es epi. Si $a \cong 0$ entonces $!_a$ es mono, por lo tanto es iso y se tiene $0 \cong a \cong 1$, lo cual contradice que $\mathcal{E}$ es no degenerado.

  Por lo tanto $a \ncong 0$ y por el axioma **NV** existe un a-elemento $x : 1 \to a$. Pero $sop(a) \cong 1$ implica que x es un morfismo $x : sop(a) \to a$ y este morfismo escinde el único morfismo $!_a : a \to sop(a)$. Por consiguiente $\mathcal{E} \vDash \mathbf{SE}$.

- De manera recíproca sea $\mathcal{E}$ un topos bivalente. El morfismo $sop(a) \rightarrowtail 1$ es un monomorfismo y por consiguiente debe ser uno de los subobjetos 0_1 o id_1. Dado que $sop(a) \ncong 0$, por el argumento anterior que toma en cuenta que el topos es no degenerado, se obtiene que $a \ncong 0$. Se concluye que $sop(a) \to a \simeq id_1$ y por lo tanto $sop(a) \cong 1$. Utilizando el axioma **SE** existe un morfismo $sop(a) \to a$ y por lo tanto un elemento $1 \to a$. Por consiguiente $\mathcal{E} \vDash$ **NV**.

$\square$

Corolario 2.3.8. *Un topos $\mathcal{E}$ es bien punteado si y sólo si $\mathcal{E}$ es booleano, bivalente y $\mathcal{E} \vDash$ **SE**.*

Demostración. La afirmación (2.2.10) establece que un topos $\mathcal{E}$ es bien punteado si y sólo si es clásico y se cumple $\mathcal{E} \vDash$ **NV**. Ahora por la afirmación anterior esto sucede si y sólo si $\mathcal{E}$ es clásico, bivalente y se cumple $\mathcal{E} \vDash$ **SE**. $\square$

En lo anterior se considera la existencia de elementos y secciones parciales mientras que el axioma **SE** postula un principio de escisión parcial. De manera similar la siguiente definición establece una versión débil del principio de extensionalidad.

Definición 2.3.9 (Topos parcialmente extensional)**.** Un topos $\mathcal{E}$ es *parcialmente extensional* (PE) si y sólo si para cada par de morfismos distintos $f, g : a \rightrightarrows b$ existe un elemento parcial (2.3.2) $x : 1 \rightsquigarrow a$ que los distingue, esto es $g \cdot x \neq f \cdot x$.

Afirmación 2.3.10. *Si un topos $\mathcal{E}$ es booleano y $\mathcal{E} \vDash$ **SE** entonces $\mathcal{E}$ es parcialmente extensional.*

Demostración. Considere en $\mathcal{E}$ un par de morfismos distintos $f, g : a \rightrightarrows b$. Sea $h : c \rightarrowtail a$ el igualador de f y g y $-h : -c \rightarrowtail a$ el complemento de h en $Sub(a)$.

- Si $-c \cong 0$ entonces $-h \simeq 0_a$ y $h \simeq h \sqcup 0_a \simeq h \sqcup -h \simeq id_a$. Siendo h un isomorfismo que iguala a f y g esto implica $f = g$. Por lo tanto $f \neq g$ implica $-c \ncong 0$.

Por el axioma **SE** existe $y : sop(-c) \to -c$, una sección para el epimorfismo $-c \to sop(-c)$.

$$
\begin{tikzcd}
-c \arrow[r, "-h"] \arrow[d, shift left] & a \\
sop(-c) \arrow[u, dashed, shift left, "y"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Sea $x = -h \cdot y$. Dado que $sop(-c) \to 1$ tiene codominio 1 es mono. Por lo tanto $x : 1 \rightsquigarrow a$ es un elemento parcial de a.

$$
\begin{tikzcd}
sop(-c) \arrow[r, "-h \cdot y"] \arrow[d] & a \\
1 \arrow[ur, "x"'] &
\end{tikzcd}
$$

Suponga que se cumple $f \cdot (-h \cdot y) = g \cdot (-h \cdot y)$. Como h iguala a f y g existe un morfismo $z : 1 \to c$ tal que $h \cdot z = -h \cdot y$ que hace conmutativo el exterior del siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
sop(-c) \arrow[drr, "y"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, "z"'] & & \\
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & -c \arrow[d, "-h"] \\
& c \arrow[r, "h"'] & a
\end{tikzcd}
$$

Dado que el diagrama interior es el producto fibrado que determina $h \sqcap -h$ existe un único morfismo $sop(-c) \to 0$. Por lo tanto $sop(-c) \cong 0$, de donde $-c \cong 0$, lo cual constituye una contradicción. Por consiguiente x distingue a f de g y $\mathcal{E}$ es parcialmente extensional. $\square$

La afirmación anterior establece las condiciones para la satisfacción del axioma **SE** en el caso de un topos no bivalente. El siguiente axioma es la versión de S. MacLane del axioma de elección en lenguaje de categorías.

Definición 2.3.11 (Axioma **AE**)**.** Si un elemento a en una categoría satisface $a \ncong 0$ entonces para todo morfismo $f : a \to b$ existe un morfismo $g : b \to a$ tal que $f \cdot g \cdot f = f$.

Afirmación 2.3.12. *Si en un topos $\mathcal{E}$ se satisface $\mathcal{E} \vDash$ **AE** entonces el topos es bivalente y se satisfacen $\mathcal{E} \vDash$ **NV** y $\mathcal{E} \vDash$ **EE**.*

Demostración.

- Sea $a \ncong 0$, por el axioma **AE** aplicado a $!_a : a \to 1$ existe un morfismo $g : 1 \to a$ y por lo tanto se obtiene $\mathcal{E} \vDash$ **NV**.
- Sea $f : a \twoheadrightarrow b$ un epimorfismo, si $a \cong 0$ entonces por el inciso (4) de la afirmación (1.7.2) f es mono. Por lo tanto f es iso y su inverso lo escinde. Si $a \ncong 0$ entonces por el axioma **AE** existe $g : b \to a$ tal que $f \cdot g \cdot f = f$ y dado que f es cancelable por la derecha se obtiene $f \cdot g = id_b$. Por consiguiente g es una sección para f y $\mathcal{E} \vDash$ **EE**.
- Por último dado que en $\mathcal{E}$ se satisface el axioma **NV**, la afirmación (2.3.7) implica que $\mathcal{E}$ es bivalente.

$\square$

En general no se puede inferir el axioma de elección a partir de la existencia de secciones para epimorfismos, por ejemplo en el caso de un topos no bivalente. Sin embargo sí se tiene la siguiente implicación.

Afirmación 2.3.13. *Si un topos $\mathcal{E}$ es bien punteado y satisface $\mathcal{E} \vDash$ **EE** entonces $\mathcal{E} \vDash$ **AE**.*

Demostración. Sea $f : a \to b$ un morfismo en $\mathcal{E}$ con $a \ncong 0$. Considere su factorización epi-mono.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f^*"'] & b \\ f(a) \arrow[ur, "im\ f"'] & \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{E}$ es bien punteado es booleano (2.2.10), por lo tanto $im\, f$ tiene complemento $-im\ f : -f(a) \to b$ en $Sub(b)$ y se cumple $-im\ f \sqcup im\ f \simeq id_b$. La afirmación (1.3.9) muestra que $-im\ f \sqcap im\ f \simeq 0$ y por consiguiente son monomorfismos disjuntos. Por la afirmación (1.7.8) se concluye que el morfismo $[im\ f, -im\ f] : f(a) + -f(a) \to b$ es mono.

Por lo tanto $[im\ f, -im\ f] \simeq -im\ f \sqcup im\ f \simeq id_b$ y $f(a) + -f(a) \cong b$. Sea $g = [im\ f, -im\ f]$ en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
f(a) \arrow[r, "i_{f(a)}"] \arrow[dr, "im\ f"'] & f(a) + -f(a) \arrow[d, "g"] & -f(a) \arrow[l, "i_{-f(a)}"'] \arrow[dl, "-im\ f"] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

Dado que el topos es bien punteado se satisface $\mathcal{E} \vDash \mathbf{NV}$ (2.2.10) y por consiguiente $a \not\cong 0$ implica que existe $x : 1 \to a$ un a-elemento. Sea el morfismo $h : -f(a) \to a$ la composición $x \cdot !_{-f(a)} : -f(a) \to 1 \to a$. Por otra parte, como $\mathcal{E}$ satisface el axioma **EE** existe una sección $s : f(a) \to a$ para el morfismo f^* de la factorización epi-mono de f tal que $f^* \cdot s = id_{f(a)}$.

Considere ahora el siguiente diagrama en el cual los morfismos $im\, f$ y $-im\, f$ juegan el papel de inclusiones dado que b es isomorfo al coproducto $f(a) + -f(a)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[d, "f"] & \\
f(a) \arrow[r, "im\ f"'] \arrow[dr, "s"'] & b \arrow[d, "{[s,h]}"] & -f(a) \arrow[l, "-im\ f"] \arrow[dl, "h"] \\
 & a \arrow[d, "f"] & \\
 & b &
\end{tikzcd}
$$

Se obtienen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
f \cdot [s,h] \cdot f &= f \cdot [s,h] \cdot (im\ f \cdot f^*) \\
&= (im\ f \cdot f^*) \cdot ([s,h] \cdot im\ f) \cdot f^* \\
&= (im\ f \cdot f^*) \cdot s \cdot f^* \\
&= im\ f \cdot (f^* \cdot s) \cdot f^* \\
&= im\ f \cdot f^* \\
&= f.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente f y $[s,h]$ satisfacen el principio del axioma **AE** y por lo tanto $\mathcal{E} \vDash$ **AE**. □

R. Diaconescu muestra en 1975 que el axioma **EE** es suficiente para que un topos sea booleano y como consecuencia de la afirmación (1.8.6) el topos también será clásico.

Teorema 2.3.14. *Si un topos $\mathcal{E}$ satisface $\mathcal{E} \vDash$ **EE** entonces es booleano.*

La demostración de este teorema se encuentra en el Apéndice (A.1).

Afirmación 2.3.15. *En un topos $\mathcal{E}$ se cumple $\mathcal{E} \vDash$ **AE** si y sólo si $\mathcal{E} \vDash$ **NV** y $\mathcal{E} \vDash$ **EE**.*

Demostración.

- Suponga que se cumple $\mathcal{E} \vDash \mathbf{NV}$ y $\mathcal{E} \vDash \mathbf{EE}$. Por la afirmación (2.3.7) en $\mathcal{E}$ se satisface el axioma **SE** y $\mathcal{E}$ es bivalente. Por la afirmación (2.3.14) se tiene que el topos es booleano. Por consiguiente $\mathcal{E}$ es bivalente, booleano y en él se satisface el axioma **SE**. La afirmación (2.3.8) implica por lo tanto que el topos $\mathcal{E}$ es bien punteado. Por último la afirmación (2.3.13) muestra que en $\mathcal{E}$ se satisface el axioma **AE**.

- Ahora suponga que se cumple $\mathcal{E} \vDash \mathbf{AE}$. La afirmación (2.3.12) establece que en el topos se satisfacen los axiomas **NV** y **EE**.

$\square$

El siguiente diagrama presenta una recapitulación de las implicaciones establecidas en las afirmaciones de esta sección. *BP* indica que el topos es bien punteado y *PE* que es parcialmente extensional.

$$
\begin{tikzcd}
PE & & BP \arrow[ll, dashed, "Definición"'] \arrow[d, shift right] & BP + \mathbf{EE} \arrow[dr, "(2.3.13)"'] & \mathbf{NV} + \mathbf{EE} + Biv \\
& & Bool + \mathbf{SE} + Biv \arrow[u, shift right, "(2.3.8)"'] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, dashed] & & \mathbf{AE} \arrow[u, "(2.3.13)"'] \arrow[dl, dashed, "(2.3.13)"'] \arrow[d, shift right] \\
Bool + \mathbf{SE} \arrow[uu, "(2.3.10)"'] & Bool & \mathbf{SE} & \mathbf{SE} + Biv \arrow[d, shift right, "(2.3.7)"'] & \mathbf{NV} + \mathbf{EE} \arrow[u, shift right, "(2.3.15)"'] \\
\mathbf{AE} \arrow[r, "Def."] & \mathbf{EE} \arrow[u, "(2.3.14)"] \arrow[ur, dashed, "Def."'] & & \mathbf{NV} \arrow[u, shift right] &
\end{tikzcd}
$$

2.4. Infinitud

El matemático alemán A. Fraenkel define un conjunto inductivo como un conjunto que satisface,

1. $\emptyset \in X$,
2. $x \in X$ implica $x \cup \{x\} \in X$.

En la axiomática de Zermelo-Fraenkel el *axioma de infinitud* postula la existencia de un conjunto inductivo. Por lo tanto la intersección de los conjuntos inductivos existe y es no vacía. Esta intersección satisface los axiomas de Peano y por consiguiente se le identifica como el *conjunto* de los números naturales. El conjunto ω de los ordinales finitos también se identifica con el conjunto de los números naturales. En el caso de un topos las propiedades de un conjunto inductivo se pueden expresar en términos de morfismos. La siguiente definición de F.W. Lawvere establece la noción.

Definición 2.4.1 (Objeto números naturales)**.** Un *objeto números naturales* es una terna (N, O, s) constituida por un objeto N y morfismos $1 \xrightarrow{O} N \xrightarrow{s} N$ tales que para todo objeto a y morfismos $1 \xrightarrow{x} a \xrightarrow{f} a$ existe único morfismo $h : N \to a$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "O"] \arrow[dr, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"'] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & a \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto se cumple $h \cdot O = x$ y $h \cdot s = f \cdot h$.

Dados dos morfismos x y f como en la definición, es posible generar una sucesión en A empezando con el objeto $x(0)$ y componiendo iterativamente con f para obtener $x(0), f(x(0)), f(f(x(0))), \ldots$. Sea $s : \omega \to \omega$ la función *sucesor* de los números naturales. Para cada $n \in \omega$, $s(n) = n + 1 = n \cup \{n\}$. La sucesión anterior se describe por lo tanto como una función $h : \omega \to A$ definida *recursivamente* por,

1. $h(0) = x(0)$,
2. Para $n \in \omega$, $\quad h(n+1) = f(h(n))$.

Observación 2.4.2. Observe que la segunda propiedad se puede expresar como $h \cdot s(n) = f \cdot h(n)$. Ambas propiedades implican la conmutatividad del diagrama de la definición (2.4.1) y de manera recíproca, la conmutatividad del diagrama implica que h debe satisfacer las dos condiciones anteriores.

Una característica esencial de un conjunto inductivo, en particular del conjunto de los números naturales, es su infinitud. La existencia de un conjunto inductivo implica que existe un conjunto no finito en un modelo para Zermelo-Fraenkel. Por consiguiente en un topos el siguiente axioma postula la existencia de un objeto infinito.

Definición 2.4.3 (Axioma **ONN**)**.** Existe un objeto números naturales.

La siguiente afirmación muestra que un objeto números naturales es único salvo isomorfismos.

Afirmación 2.4.4. *Si* $1 \xrightarrow{O} N \xrightarrow{s} N$ *y* $1 \xrightarrow{O'} N \xrightarrow{s'} N$ *son ambos objetos números naturales, entonces el único morfismo* h *en el diagrama de la definición* (2.4.1) *es iso.*

Demostración. Dado que (N, O, s) es un objeto números naturales existe una única $h : N \to N'$ tal que $h \cdot O = O'$ y $h \cdot s = s' \cdot h$. Análogamente dado que (N', O', s') es un objeto números naturales existe una única $h' : N' \to N$ tal que $h' \cdot O' = O$ y $s \cdot h' = h' \cdot s'$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "O"] \arrow[dr, "O'"] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & N' \arrow[r, "s'"'] \arrow[d, dashed, "h'"] & N' \arrow[d, dashed, "h'"] \\
1 \arrow[r, "O"'] \arrow[ur, "O'"] & N \arrow[r, "s"'] & N
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto la unicidad de $h' \cdot h : N \to N$ implica $h' \cdot h = id_N$ y de manera similar la unicidad de $h \cdot h' : N' \to N'$ implica $h \cdot h' = id_{N'}$. Por consiguiente h es iso. $\square$

En este capítulo se consideraron algunos axiomas de Zermelo-Fraenkel y sus equivalentes en lenguaje de categorías. En el siguiente capítulo la discusión se centra en la definición de la relación de pertenencia para los subobjetos de un topos elemental.

Capítulo 3

Relación de Pertenencia

Una teoría de conjuntos está determinada por las propiedades de la relación de pertenencia. Con el propósito de obtener una generalización para el contexto de un topos arbitrario, se estudian algunas propiedades de esta relación en el topos de conjuntos Con. El análisis de estas propiedades y la reformulación de algunas nociones permite la construcción de una teoría de conjuntos en un topos.

3.1. Teoría local y global en Con

Sea A un conjunto.

Observación 3.1.1. Las relaciones $R \subseteq A \times A$ están en correspondencia biyectiva con las funciones $r_R : A \to \mathcal{P}(A)$, con codominio el conjunto *potencia* de A.

- Dada una relación R, la función r_R asigna a cada $y \in A$ el subconjunto $r_R(y) = \{x \mid x \in A \text{ y } xRy\} = R_y \subseteq A$. Si $R, R' \subseteq A \times A$ son relaciones distintas entonces para alguna $y \in A$ se cumple $r_R(y) \neq r_{R'}(y)$, de donde $r_R \neq r_{R'}$.

- Por otra parte dada una función $r_S : A \to \mathcal{P}(A)$, ésta determina la relación $S = \bigcup \{\langle x, y\rangle \mid y \in r_S(x)\}$ para cada $x \in A$.

Observación 3.1.2. Considere $\in_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in A \text{ y } x \in y\}$ la relación de pertenencia en el conjunto A, la función $r_\in$ asigna a cada $y \in A$ el subconjunto $r_\in(y) = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in y\}$.

Definición 3.1.3 (Conjunto transitivo)**.** Un conjunto A es *transitivo* si y sólo si $x \in A$ implica $x \subseteq A$ si y sólo si $x \in A$ implica $x \in \mathcal{P}(A)$.

En el caso en que A es un conjunto transitivo la correspondencia biyectiva (3.1.2) toma la siguiente forma.

Observación 3.1.4. Sea $\in_A = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A, y \in A \text{ y } x \in y\}$ la relación de pertenencia en el conjunto transitivo A, la función $r_\in$ asigna a cada $y \in A$ el subconjunto

$$r_\in(y) = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in y\} = \{x \mid x \in y\} = y.$$

Por lo tanto para un conjunto transitivo la relación de pertenencia se identifica con la inclusión $A \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$. El conjunto A es en este caso un subobjeto de $\mathcal{P}(A)$.

Observación 3.1.5.

- En general a cada subconjunto $g : C \hookrightarrow A$ corresponde un elemento $g' : 1 \to \mathcal{P}(A)$ de $\mathcal{P}(A)$ tal que $g'(0) = C$.

- Al identificar al conjunto $\mathcal{P}(A)$ con el conjunto 2^A la función g' se identifica con la función $\ulcorner \chi_g \urcorner$, el *nombre* de la función característica de g (1.2.4).

- Para A transitivo, $r_\in$ es la inclusión $A \hookrightarrow \mathcal{P}(A)$ y por consiguiente se cumple $C \in A$ si y sólo si $\ulcorner \chi_g \urcorner$ se factoriza a través de $r_\in$. Esta pertenencia se puede expresar por medio del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_g \urcorner"] & \\
A \arrow[r, "r_\in"'] & \mathcal{P}(A)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto se cumple $C \in A$ si y sólo si $\alpha : 1 \to A$ existe.

Así la noción de pertenencia para los elementos de un conjunto transitivo A se puede trasladar al contexto del conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$. Este criterio de pertenencia permite determinar la *teoría de conjuntos local* para los subconjuntos de un conjunto transitivo A.

Afirmación 3.1.6 (Teoría local en Con)**.** *Sean $f : B \hookrightarrow A$ y $g : C \hookrightarrow A$ subconjuntos de A transitivo, se cumple $C \in B$ si y sólo si $g \in f$ si y sólo si $\ulcorner \chi_g \urcorner$ se factoriza a través de $r_\in \cdot f$ si y sólo si existe un B-elemento que hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_g \urcorner"] & \\
B \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "r_\in"'] & \mathcal{P}(A)
\end{tikzcd}$$

La caracterización de la teoría de conjuntos local podría ser suficiente si se trabaja con una estructura en un conjunto fijo. Sin embargo el objetivo de este capítulo es construir una teoría de conjuntos para un topos. Un primer acercamiento se da por medio de la elaboración de una definición global de la pertenencia para el topos *Con*. Para este fin es necesario considerar las siguientes dificultades.

1. Sea A un objeto en *Con*, los A-elementos $1 \to A$ y los subconjuntos $A \to 2$ forman dos colecciones de morfismos ajenas mientras que en una teoría de conjuntos los elementos de un conjunto también son conjuntos.

2. Para objetos distintos A y A' los morfismos $A \to 2$ y $A' \to 2$ forman dos colecciones ajenas mientras que en una teoría de conjuntos A y A' pueden tener elementos en común.

Para resolver la primera dificultad es suficiente con excluir de la teoría los conjuntos no transitivos, así los A-elementos $1 \to A$ también son $\mathcal{P}(A)$-elementos y por lo tanto conjuntos (3.1.4). Para resolver la segunda dificultad es necesario poder determinar condiciones bajo las cuales dos morfismos representan un mismo subobjeto.

Observación 3.1.7. Cuando los morfismos $f : b \rightarrowtail a$ y $g : c \rightarrowtail a$ tienen el mismo codominio, representan el mismo subobjeto si y sólo si $f \simeq g$ en $Sub(a)$. Sin embargo en Con dos subconjuntos con distinto codominio $f : B \hookrightarrow A$ y $g : C \hookrightarrow D$ pueden representar el mismo conjunto si sus codominios A y D se intersectan. Si se cumple $f(B) = g(C) \subseteq A \cap D$ entonces se debe poder concluir $f \simeq g$. Considere la unión $A \cup D$ con las inclusiones $i_A : A \hookrightarrow A \cup D$ e $i_D : D \hookrightarrow A \cup D$, se cumple $f(B) = g(C)$ si y sólo si $i_A(f(B)) = i_D(g(C))$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & A \arrow[r, "i_A"] & A \cup D & D \arrow[l, "i_D"'] & C \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

Por consiguiente $f \simeq g$ si y sólo si en $Sub(A \cup D)$ se cumple $i_A \cdot f \simeq i_D \cdot g$.

El problema de la equivalencia de los subobjetos se resuelve si se considera la teoría local para un objeto que contenga los codominios de los morfismos que se desean comparar. Por consiguiente en el topos Con la definición general de la pertenencia para subconjuntos $f : B \hookrightarrow A$ y $g : C \hookrightarrow D$ es la siguiente.

Definición 3.1.8 (Teoría global en Con)**.** Sean $f : B \hookrightarrow A$ y $g : C \hookrightarrow D$ subconjuntos, se define $g \in f$ si y sólo si para algún conjunto transitivo T tal que $h : A \hookrightarrow T$ y $k : D \hookrightarrow T$ se cumple $k \cdot g \in h \cdot f$ en $Sub(T) = \mathcal{P}(T)$. Lo anterior se cumple si y sólo existe un B-elemento $\alpha : 1 \to B$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{k \cdot g} \urcorner"] & \\ B \arrow[r, "h \cdot f"'] & T \arrow[r, "r_\in"'] & \mathcal{P}(T) \end{tikzcd}$$

Para la elección de un conjunto transitivo que cumpla con las condiciones necesarias considere el siguiente conjunto para la teoría global en Con.

Definición 3.1.9 (Cerradura transitiva)**.** Dado un conjunto A, considere la asignación $f : \mathbb{N} \to im(f)$ definida por $f(0) = A$ y $f(n+1) = \bigcup(f(n))$. Por el axioma de reemplazo de Zermelo-Fraenkel la imagen de esta función es un conjunto, por lo tanto se define la *cerradura transitiva* de A como el conjunto $ct(A) = \bigcup im(f)$.

Observación 3.1.10. $A = f(0) \subseteq ct(a)$. Si $y \in ct(A)$ entonces $y \in f(k)$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto si $x \in y$ entonces $x \in \bigcup(f(k)) = f(k+1)$ de donde $y \subseteq ct(a)$. Por lo tanto la cerradura transitiva de un conjunto A es un conjunto transitivo que contiene a A.

En resumen se observa que la relación de pertenencia $\in$ en un conjunto transitivo A se identifica con una función inyectiva $r_\in : A \rightarrowtail \mathcal{P}(A)$. Esta propiedad permite definir la relación de pertenencia para los conjuntos transitivos del topos Con. Sin embargo no es posible generalizar esta definición para un topos elemental dado que persiste el problema de determinar bajo cuales condiciones un morfismo $r : A \to \mathcal{P}(A)$ representa la relación de pertenencia en un conjunto transitivo.

3.2. Extensionalidad y buena fundación

En los siguientes enunciados utilizo el símbolo "$\Rightarrow$" para la implicación, "$\Leftrightarrow$" para la doble implicación y "$\sim$" para la negación.

Definición 3.2.1 (Relación extensional)**.** Una relación R en un conjunto A es *extensional* si y sólo si $\forall x\, \forall y \in A(\forall z \in A(zRx \Leftrightarrow zRy) \Rightarrow x = y)$.

Afirmación 3.2.2. *Una relación R en un conjunto A es extensional si y sólo si la función $r_R : A \to \mathcal{P}(A)$ es inyectiva.*

Demostración.

- Sea $R \subseteq A \times A$ una relación extensional y sean $x, y \in A$ dos elementos distintos. Por lo tanto $\exists z \in A$ tal que $\sim (\langle z, x\rangle \in R)$ o $\sim (\langle z, y\rangle \in R)$, de donde $r_R(x) \neq r_R(y)$ y por consiguiente la función r_R es inyectiva.

- Sea $r_R : A \to \mathcal{P}(A)$ inyectiva y sean $x, y \in A$ tales que $\forall z(zRx \Leftrightarrow zRy)$. Esta última condición implica $r_R(x) = r_R(y)$ y dado que la función es inyectiva esto se cumple únicamente si $x = y$. Por consiguiente R es una relación extensional.

□

Definición 3.2.3 (Relación bien fundada)**.** Una relación R en un conjunto A es *bien fundada* si y sólo si $\forall B \subseteq A(B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in B\, (\forall y \in A(yRx_0 \Rightarrow \sim (y \in B))))$.

Observe que la extensionalidad y la buena fundación se postulan como axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. El *lema del colapso* del matemático polaco A. Mostowski, cuya demostración se encuentra en el apéndice A.2, relaciona estas propiedades y los conjuntos transitivos en la axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Lema 3.2.4 (Lema del colapso)**.** *Si $R \subseteq A \times A$ es una relación extensional y bien fundada entonces existe un único conjunto transitivo B tal que*

$$\langle A, R\rangle \cong \langle B, \in\rangle.$$

Observación 3.2.5. Un conjunto transitivo en un modelo para la axiomática de Zermelo-Fraenkel es isomorfo a una relación extensional y bien fundada.

La caracterización de los conjuntos transitivos como relaciones extensionales y bien fundadas permitirá la generalización de la noción de conjunto transitivo en el contexto de un topos arbitrario. Para esto es necesaria la siguiente afirmación en Con cuya prueba se encuentra en el apéndice A.3.

Afirmación 3.2.6. *R es una relación bien fundada en A si y sólo si para cualquier conjunto B y cualquier función $g : \mathcal{P}(B) \to B$ existe una única función $f : A \to B$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_R"'] & B \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\exists_f"'] & \mathcal{P}(B) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

La afirmación anterior caracteriza la noción de relación bien fundada por medio de morfismos.

3.3. Objeto conjunto transitivo

Generalizando las nociones de relación extensional (3.2.2) y la propiedad equivalente a relación bien fundada (3.2.6) se establecen las siguientes definiciones en el contexto de un topos arbitrario $\mathcal{E}$.

Definición 3.3.1 (Relacional extensional)**.** En un topos $\mathcal{E}$ una *relacional* r sobre un objeto a es un morfismo $r : a \to \Omega^a$. Una *relacional extensional* r sobre un objeto a es un monomorfismo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$.

Definición 3.3.2 (Relacional recursiva)**.** Una relacional $r : a \to \Omega^a$ sobre un objeto a es *recursiva* si y sólo si para cualquier morfismo $g : \Omega^b \to b$ existe un único morfismo $f : a \to b$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & b \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^b \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

$\exists_f$ es la imagen de f bajo el funtor $\exists$ (1.6.1). En este caso se dice que el morfismo f está definido *recursivamente* a partir de g sobre r y se denota $f = rec_r(g)$.

Con estas propiedades se transporta la noción de conjunto transitivo al contexto de un topos arbitrario.

Definición 3.3.3 (Objeto conjunto transitivo)**.** En un topos $\mathcal{E}$ un *objeto conjunto transitivo* es una relacional $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ extensional y recursiva.

Observación 3.3.4.

Considere el morfismo $0_{\Omega^0} : 0 \to \Omega^0$ y sea $g : \Omega^b \to b$ un morfismo cualquiera en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_b"] \arrow[d, "0_{\Omega^0}"'] & b \\ \Omega^0 \arrow[r, "\exists_{0_b}"'] & \Omega^b \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

0_{Ω^0} es un monomorfismo por el inciso 4 de la afirmación (1.7.2). Como 0 es un objeto inicial existe un único morfismo $0_b : 0 \to b$ y por consiguiente el morfismo $0 \to \Omega^0$ es un objeto conjunto transitivo.

Afirmación 3.3.5. *La imagen* $\exists_r$ *de un objeto conjunto transitivo* $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ *bajo el funtor* $\exists$ *es un objeto conjunto transitivo.*

Demostración.

- La afirmación (1.6.6) establece que el funtor $\exists$ respeta monomorfismos, por lo tanto $\exists_r$ es una relacional extensional (3.3.1).

- Sea $g : \Omega^b \to b$ un morfismo cualquiera. La recursividad del objeto conjunto transitivo r implica que el siguiente diagrama conmuta para un único morfismo f.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & b \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^b \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

  Dado que $\exists$ es un funtor la conmutatividad del diagrama anterior implica la conmutatividad del siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \Omega^a \arrow[r, "\exists_f"] \arrow[d, "\exists_r"'] & \Omega^b \arrow[r, "g"] & b \\ \Omega^{\Omega^a} \arrow[r, "\exists_{\exists_f}"'] & \Omega^{\Omega^b} \arrow[r, "\exists_g"'] \arrow[u, "\exists_g"'] & \Omega^b \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

  Suponga que existe un morfismo $h : \Omega^a \to b$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\exists_r"'] & b \\
\Omega^{\Omega^a} \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Considere el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r"'] & \Omega^a \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\exists_r"] & b \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_r"'] & \Omega^{\Omega^a} \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

El objeto conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ es recursivo y por lo tanto $f = h \cdot r$.

$$\begin{aligned}
\exists_f &= \exists_h \cdot \exists_r \\
g \cdot \exists_f &= g \cdot \exists_h \cdot \exists_r \\
g \cdot \exists_f &= h
\end{aligned}$$

Por lo tanto el morfismo $g \cdot \exists_f$ es único y por consiguiente $\exists_r$ es una relacional recursiva.

Por lo tanto $\exists_r$ es un objeto conjunto transitivo. $\square$

Con las herramientas disponibles se puede enunciar la definición de la teoría local para $Sub(a)$ relativa a un objeto conjunto transitivo r en un topos $\mathcal{E}$.

Definición 3.3.6 (Teoría local en $\mathcal{E}$)**.** Sean $f : b \rightarrowtail a$ y $g : c \rightarrowtail a$ subobjetos de a, se define $g \in_r f$ si y sólo si $\ulcorner \chi_g \urcorner$ se factoriza a través de $r \cdot f$ si y sólo si existe un b-elemento que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_g \urcorner"] & \\
b \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a
\end{tikzcd}
$$

3.4. Retícula de objetos conjunto transitivo

En este sección se muestra que la colección de objetos conjunto transitivo en un topos arbitrario constituye una retícula acotada inferiormente. Primero considere la siguiente propiedad de los conjuntos transitivos.

Afirmación 3.4.1. *Si A y B son conjuntos transitivos entonces el siguiente diagrama conmuta si y sólo si $A \subseteq B$ y f es la inclusión $A \hookrightarrow B$.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "r_\in"'] & B \arrow[d, hook] \\
\mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}f"'] & \mathcal{P}(B)
\end{tikzcd}
$$

Demostración.

- Sea f la inclusión, para $x \in A$ se obtiene por transitividad $x \in \mathcal{P}(A)$. Ahora $\mathcal{P}f[x] = \{y \mid y \in x\} = x$ y por lo tanto el diagrama conmuta.

- Suponga que el diagrama conmuta, entonces $f(x) = f[x]$ para cada $x \in A$. Sea $C = \{x \mid x \in A \text{ y } f(x) \neq x\} \subseteq A$. Suponga que C es no vacío. Como A es un conjunto transitivo $\in$ es bien fundada en A y por lo tanto existe x_0 un elemento $\in$-mínimo en C. Como $x_0 \in C$ se cumple $x_0 \neq f(x_0)$ y dada la minimalidad de x_0 para toda $y \in x_0$ se cumple $f(y) = y$.

Se obtiene $f(x_0) = f[x_0] = \{f(y) \mid y \in x_0\} = \{y \mid y \in x_0\} = x_0$, contradiciendo $x_0 \in C$. Por lo tanto $C = \emptyset$ y $f(x) = x$ para cada $x \in A$. Esto demuestra que f es la inclusión.

$\square$

La propiedad anterior se transporta al contexto de un topos y determina la siguiente noción.

Definición 3.4.2 (Inclusión)**.** Sean $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ y $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ objetos conjunto transitivo, una *inclusión* $h : r \hookrightarrow s$ de r en s es un morfismo h que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[d, "s"] \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \end{tikzcd}$$

Definición 3.4.3 (Relacional $\subseteq$)**.** En la colección de objetos conjunto transitivo en un topos $\mathcal{E}$ considere la siguiente relacional. Dados dos objetos conjunto transitivo r y s, se define $r \subseteq s$ si y sólo si existe una inclusión $h : r \hookrightarrow s$.

Afirmación 3.4.4. *La relacional $\subseteq$ es reflexiva y transitiva.*

Demostración.

- Observe que para todo objeto conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ se cumple $r \subseteq r$ tomando id_a como inclusión. Por consiguiente $\subseteq$ es una relacional reflexiva.

- Sean $r : a \rightarrowtail \Omega^a$, $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ y $t : c \rightarrowtail \Omega^c$ objetos conjunto transitivo tales que $r \subseteq s \subseteq t$ con $f : r \hookrightarrow s$ y $g : s \hookrightarrow t$ las inclusiones en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"'] & c \arrow[d, "t"'] \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_g"'] & \Omega^c \end{tikzcd}$$

Ambos cuadrados conmutan por la definición de inclusión. Como $\exists$ es un funtor $\exists_{g \cdot f} = \exists_g \cdot \exists_f$. Por consiguiente $g \cdot f : a \to c$ es una inclusión y se obtiene $r \subseteq t$. Por consiguiente $\subseteq$ es una relacional transitiva.

□

Para continuar estableciendo las propiedades de relacional $\subseteq$ es necesario recordar las nociones de morfismo parcial (1.5.3) y el teorema (1.5.5) que establece que para los morfismos parciales con codominio b en un topos existe un clasificador dado por un objeto $\bar{b}$ y un monomorfismo $\eta_b : b \to \bar{b}$.

Definición 3.4.5 (Morfismo $\widehat{s}$)**.** Sea $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ un objeto conjunto transitivo y considere $\exists_{\eta_b} : \Omega^b \rightarrowtail \Omega^{\bar{b}}$, la imagen del monomorfismo η_b bajo el funtor $\exists$. Dado que el morfismo parcial $(id_b, \exists_{\eta_b} \cdot s)$ es representable en el topos, existe un único morfismo $\hat{s} : \Omega^{\bar{b}} \to \bar{b}$ tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\exists_{\eta_b} \cdot s"] \arrow[d, "id_b"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[d, dashed, "\hat{s}"] \\ b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b} \end{tikzcd}$$

En un topos arbitrario, la construcción anterior asigna a cada objeto conjunto transitivo $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ un morfismo $\hat{s} : \Omega^{\bar{b}} \to \bar{b}$.

Lema 3.4.6. *Si $r : a \rightarrowtail \Omega^r$ y $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ son objetos conjunto transitivo, entonces $h : a \to b$ es una inclusión si y sólo si el exterior del siguiente diagrama conmuta.*

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "\eta_b"] \arrow[d, dashed, "s"'] & \bar{b} \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_{\eta_b}"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

Demostración.

- Considere el diagrama del enunciado.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "\eta_b"] \arrow[d, "s"] & \bar{b} \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_{\eta_b}"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}
$$

  El cuadrado de la derecha conmuta por definición del morfismo $\hat{s}$ (3.4.5). Si h es una inclusión el cuadrado de la izquierda conmuta y por lo tanto el exterior del diagrama conmuta.

- De manera recíproca si el exterior del diagrama anterior conmuta entonces el diagrama exterior del siguiente producto fibrado conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[drr, "\exists_{\eta_b} \cdot \exists_h \cdot r"] \arrow[dr, dashed, "k"'] \arrow[ddr, "h"'] & & \\
& b \arrow[r, "\exists_{\eta_b} \cdot s"'] \arrow[d, "id_b"] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[d, "\hat{s}"] \\
& b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}
$$

Por consiguiente existe un único $k : a \to b$ tal que $k = h$ y se obtiene del triángulo conmutativo superior

$$\exists_{\eta_b} \cdot s \cdot h = \exists_{\eta_b} \cdot \exists_h \cdot r.$$

Ahora dado que $\exists_{\eta_b}$ es mono se concluye $s \cdot h = \exists_h \cdot r$. Es decir que el cuadrado izquierdo del diagrama (3.1) conmuta y por lo tanto h es una inclusión.

□

Afirmación 3.4.7. *Si existe una inclusión $h : r \hookrightarrow s$ entonces es única.*

Demostración. Sean $h_1 : r \hookrightarrow s$ y $h_2 : r \hookrightarrow s$ inclusiones. Por el lema anterior se obtienen los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "\eta_b"] \arrow[d, "s"] & \bar{b} \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{h_1}"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_{\eta_b}"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "\eta_b"] \arrow[d, "s"] & \bar{b} \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{h_2}"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_{\eta_b}"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

El objeto conjunto transitivo r es en particular una relacional recursiva, por la definición (3.3.2) se cumple $\eta_b \cdot h_1 = \eta_b \cdot h_2 = rec_r(\hat{s})$. Por consiguiente η_b mono implica $h_1 = h_2$. □

La afirmación (3.4.6) expresada de otra forma, establece que $r \subseteq s$ si y sólo si $\eta_b \cdot h = rec_r(\hat{s})$.

Afirmación 3.4.8. *Si $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ y $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ son objetos conjunto transitivo tales que $r \subseteq s$, entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *La inclusión es un monomorfismo.*

2. *Si además se satisface $s \subseteq r$ entonces $a \cong b$ y $\Omega^a \cong \Omega^b$.*

Demostración.

- Suponga $r \subseteq s$ con h la inclusión. Construya el morfismo $\hat{r}$ (3.4.5) a partir de r.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\exists_{\eta_a} \cdot r"] \arrow[d, "id_a"'] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[d, "\hat{r}"] \\ a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a} \end{tikzcd}$$

Se cumple $\hat{r} \cdot \exists_{\eta_a} \cdot r = \eta_a$ y por consiguiente el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "r"'] & \bar{a} \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_{\eta_a}"'] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[u, "\hat{r}"'] \end{tikzcd}$$

Como r es una relacional recursiva, por la definición (3.3.2) se cumple $\eta_a = rec_r(\hat{r})$. En el siguiente diagrama el cuadrado izquierdo conmuta dado que h es una inclusión.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "s"] & \bar{a} \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_g"'] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[u, "\hat{r}"'] \end{tikzcd}$$

Ahora dado que s es una relacional recursiva, en el cuadrado de la derecha $g = rec_s(\hat{r})$. El rectángulo exterior del diagrama conmuta y se obtiene $g \cdot h = rec_r(\hat{r}) = \eta_a$ porque r es recursiva. Por lo tanto $g \cdot h$ es un monomorfismo lo cual implica que h es un monomorfismo.

- Sean $r \subseteq s \subseteq r$ con $g : a \to b$ y $h : b \to a$ las inclusiones.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & a \arrow[d, "r"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_g"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] & a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[d, "s"] \\
\Omega^b \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^a \arrow[r, "\exists_g"'] & \Omega^b
\end{tikzcd}
$$

En el diagrama de la izquierda $h \cdot g$ es una inclusión $r \hookrightarrow r$, pero también lo es la identidad id_a. Dada la unicidad de la inclusión (3.4.7) se tiene $h \cdot g = id_a$. De manera similar en el diagrama de la derecha $g \cdot h$ es una inclusión $s \hookrightarrow s$ y por lo tanto $g \cdot h = id_b$. Por consiguiente a y b son isomorfos y como $\exists$ es un funtor Ω^a y Ω^b son isomorfos.

$\square$

Definición 3.4.9 (Equivalencia de oct)**.** Dados objetos conjunto transitivo r y s, se define $r \simeq s$ si y sólo si $r \subseteq s$ y $s \subseteq r$. Observe que la unicidad de la inclusión implica que la relacional $\subseteq$ está bien definida para las $\simeq$-clases de equivalencia

Si se tiene en mente que se trata de $\simeq$-clases de equivalencia, el abuso de lenguaje al referirse a una clase por medio de un representante no introduce mayor ambigüedad.

Afirmación 3.4.10. *La relacional $\subseteq$ es un orden parcial en la colección de los objetos conjunto transitivo en un topos.*

Demostración. Por la afirmación (3.4.4) la relacional $\subseteq$ es reflexiva y transitiva y por consiguiente también es antisimétrica. $\square$

Definición 3.4.11 (Relacional bien fundada)**.** Una relacional $r : a \to \Omega^a$ es *bien fundada* si y sólo si, para cualquier subobjeto $m : z \rightarrowtail a$, si se satisface $r^{-1}(\exists_m) \leqslant m$ entonces m es un isomorfismo.

Afirmación 3.4.12. *Si $r : a \to \Omega^a$ es una relación bien fundada, entonces para cualquier morfismo $g : \Omega^c \to c$ existe a lo más un morfismo $f : a \to c$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & c \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Suponga que el siguiente diagrama conmuta con los morfismos $f_1, f_2 : a \to c$ y sea $m : e \rightarrowtail a$ su igualador.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "m"] & a \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_2"'] \arrow[d, "r"'] & c \\
 & \Omega^a \arrow[r, shift left, "\exists_{f_1}"] \arrow[r, shift right, "\exists_{f_2}"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Se cumple $f_1 = g \cdot \exists_{f_1} \cdot r$ y $f_2 = g \cdot \exists_{f_2} \cdot r$. En el siguiente diagrama conmutativo el cuadrado superior es el producto fibrado que determina el morfismo $r^{-1}(\exists_m)$.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r] \arrow[d, "r^{-1}(\exists_m)"'] & \Omega^e \arrow[d, "\exists_m"] \\
a \arrow[r, "r"'] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "f_2"] & \Omega^a \arrow[d, shift right, "\exists_{f_1}"'] \arrow[d, shift left, "\exists_{f_2}"] \\
c & \Omega^c \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

Se cumple

$$\begin{gathered} g \cdot \exists_{f_1} \cdot r \cdot r^{-1}(\exists_m) = g \cdot \exists_{f_2} \cdot r \cdot r^{-1}(\exists_m) \\ f_1 \cdot r^{-1}(\exists_m) = f_2 \cdot r^{-1}(\exists_m). \end{gathered}$$

Por lo tanto $r^{-1}(\exists_m)$ iguala los morfismos f_1 y f_2. Por la propiedad universal del igualador se obtiene $r^{-1}(\exists_m) \leqslant m$. Ahora dado que r es una relacional bien fundada m es un isomorfismo y por lo tanto $f_1 = f_2$. $\square$

En el apéndice (A.3) se muestra que en el topos de los conjuntos las nociones de relación bien fundada y relación recursiva son equivalentes. En el caso de un topos arbitrario la afirmación anterior muestra que una relacional bien fundada es una relacional recursiva. El recíproco de este resultado se encuentra en el Teorema 9.23 del libro de Johnstone [Joh79].

Afirmación 3.4.13. *Un objeto conjunto transitivo es una relacional bien fundada.*

Demostración. Sea $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto transitivo. Considere el morfismo parcial $(i_a, \exists_{\eta_a} \cdot r) : \Omega^{\bar{a}} \to a$. Por la afirmación (1.5.5) es representable y por lo tanto en el siguiente producto fibrado el morfismo $\hat{r}$ es único.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "r"] \arrow[d, "id_a"'] & \Omega^a \arrow[r, "\exists_{\eta_a}"] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[d, "\hat{r}"] \\ a \arrow[rr, "\eta_a"'] & & \bar{a} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "r"'] & \bar{a} \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_{\eta_a}"'] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[u, "\hat{r}"'] \end{tikzcd}$$

Observe que como r es recursiva el monomorfismo η_a satisface $\eta_a = rec_r(\hat{r})$. Sea $m : d \rightarrowtail a$ un subobjeto tal que $r^{-1}(\exists_m) \leqslant m$ y considere el producto fibrado que determina el morfismo $r^{-1}(\exists_m)$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r^{-1}(\exists_m)"'] & \Omega^d \arrow[d, "\exists_m"] \\ a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \end{tikzcd}$$

Como r es una relacional extensional s es un monomorfismo. Considere el morfismo parcial $(h, \exists_{\eta_a} \cdot s) : \Omega^{\bar{d}} \to d$. Al ser representable, en el siguiente producto fibrado el morfismo g es único.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & \Omega^d \arrow[r, "\exists_{\eta_d}"] & \Omega^{\bar{d}} \arrow[d, "g"] \\ d \arrow[rr, "\eta_d"'] & & \bar{d} \end{tikzcd}$$

Considere el morfismo parcial $(m, \eta_d) : \bar{d} \to a$, de nuevo al ser representable el morfismo $\bar{m}$ en el producto fibrado de la izquierda es único. Sea f el morfismo determinado recursivamente por g a partir de r como se muestra en el diagrama conmutativo de la derecha.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "\eta_d"] \arrow[d, "m"'] & \bar{d} \arrow[d, "\bar{m}"] \\ a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \bar{d} \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^{\bar{d}} \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\eta_a^{-1}(\bar{m}) = m$. Considere el siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "s"] \arrow[dd, "r^{-1}(\exists_m)"'] & \Omega^d \arrow[r, "\exists_{\eta_d}"] & \Omega^{\bar{d}} \arrow[d, "\exists_{\bar{m}}"] \arrow[dr, "g"] & \\
 & & \Omega^{\bar{a}} \arrow[d, "\hat{r}"] & \bar{d} \arrow[dl, "\bar{m}"] \\
a \arrow[rr, "\eta_a"'] & & \bar{a} &
\end{tikzcd}
$$

El morfismo parcial $(r^{-1}(\exists_m), \exists_{\eta_d} \cdot s) : \Omega^{\bar{d}} \to a$ es clasificado por los morfismos $\bar{m} \cdot g$ y $\hat{r} \cdot \exists_{\bar{m}}$ y por lo tanto $\bar{m} \cdot g = \hat{r} \cdot \exists_{\bar{m}}$. Los siguientes diagramas conmutativos son equivalentes.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"'] & \bar{d} \arrow[r, "\bar{m}"] & \bar{a} \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^{\bar{d}} \arrow[r, "\exists_{\bar{m}}"'] & \Omega^{\bar{d}} \arrow[u, "\hat{r}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\eta_a"] \arrow[d, "r"'] & & \bar{a} \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^{\bar{d}} \arrow[r, "g"'] & \bar{d} \arrow[u, "\bar{m}"']
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto $\bar{m} \cdot f$ está recursivamente determinado por $\bar{r}$ a partir de r y como r es una relacional recursiva se cumple $\eta_a = \bar{m} \cdot f$. Además como m es un monomorfismo el siguiente diagrama es un producto fibrado.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "id_a"] \arrow[d, "id_a"'] & a \arrow[d, "\eta_a"] \\
a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a}
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto $\eta_a^{-1}(\eta_a) = id_a$ y se obtiene,

$$\begin{aligned}
\eta_a &= \bar{m} \cdot f \\
\eta_a^{-1}(\eta_a) &= \eta_a^{-1}(\bar{m} \cdot f) \\
\eta_a^{-1}(\eta_a) &= \eta_a^{-1}(\bar{m}) \cdot \eta_a^{-1}(f) \\
id_a &= m \cdot \eta_a^{-1}(f).
\end{aligned}$$

Por lo tanto id_a epi implica que m es un epimorfismo y por consiguiente un isomorfismo. Se concluye que r es una relacional bien fundada. $\square$

Afirmación 3.4.14. *Considere el siguiente diagrama conmutativo con h un monomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b
\end{tikzcd}$$

Si $s : b \to \Omega^b$ es una relación bien fundada entonces $r : a \to \Omega^a$ es una relación bien fundada.

Demostración. Sea $m : d \rightarrowtail a$ un subobjeto y sea $n = \forall_h m$ la imagen de m bajo el funtor $\forall_h$. El morfismo $h^{-1}(\forall_h m) = h^{-1}(n)$ está determinado por el siguiente producto fibrado y satisface $h^{-1}(n) \leqslant m$.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, dashed, "m"'] & u \arrow[l, dashed] \arrow[r] \arrow[d, "h^{-1}(n)"] & v \arrow[d, "n"] \\
 & a \arrow[r, "h"'] & b
\end{tikzcd}$$

Como m, n, y $h^{-1}(n)$ son monomorfismos, por la afirmación (1.7.9) el siguiente diagrama de la derecha es un producto fibrado. El diagrama de la izquierda es el producto fibrado que determina el morfismo $\exists_h^{-1}(\exists_n)$.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d, "\exists_h^{-1}(\exists_n)"'] & \Omega^v \arrow[d, "\exists_n"] \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega^u \arrow[r] \arrow[d, "\exists_{h^{-1}(n)}"'] & \Omega^v \arrow[d, "\exists_n"] \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \end{tikzcd}$$

Por lo tanto se obtiene $\exists_h^{-1}(\exists_n) = \exists_{h^{-1}(n)}$. Considere el producto fibrado que determina el morfismo $s^{-1}(\exists_n)$.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r] \arrow[d, "s^{-1}(\exists_n)"'] & \Omega^v \arrow[d, "\exists_n"] \\ b \arrow[r, "s"'] & \Omega^b \end{tikzcd}$$

Considere los siguientes diagramas conmutativos. El de la derecha es el producto fibrado que determina el morfismo $r^{-1}(\exists_h^{-1}(\exists_n))$ y el de la izquierda es el producto fibrado que determina el morfismo $h^{-1}(s^{-1}(\exists_n))$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, "h^{-1}(s^{-1}(\exists_n))"'] & w \arrow[d, "s^{-1}(\exists_n)"] \\ a \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} z \arrow[r] \arrow[d, "r^{-1}(\exists_h^{-1}(\exists_n))"'] & \Omega^u \arrow[d, "\exists_h^{-1}(\exists_n)"] \\ a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \end{tikzcd}$$

Se obtiene $h^{-1}(s^{-1}(\exists_n)) = r^{-1}(\exists_{h^{-1}}(\exists_n)) = r^{-1}(\exists_{h^{-1}}(n)) \leqslant r^{-1}(m) \leqslant m$. Por consiguiente la adjunción $h^{-1} \dashv \forall_h$ (1.6.12) implica $s^{-1}(\exists_n) \leqslant \forall_h(m) = n$. La relacional s es bien fundada y por consiguiente n es un isomorfismo. Por lo tanto $h^{-1}(n)$ es iso y dado que este último se factoriza a través de m se obtiene que m es iso. Se concluye que r es una relacional bien fundada.

$\square$

Afirmación 3.4.15. *Considere el siguiente diagrama conmutativo con h un monomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[d, "s"] \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \end{tikzcd}$$

Si $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ es un objeto conjunto transitivo entonces $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ es un objeto conjunto transitivo.

Demostración.

- Por la definición de objeto conjunto transitivo, s es una relacional extensional y por lo tanto un monomorfismo, de donde la composición $s \cdot h$ es un monomorfismo. Como el diagrama conmuta se cumple $s \cdot h = \exists_h \cdot r$ y por consiguiente r es una relacional extensional.

- Por la definición de objeto conjunto transitivo, s es una relacional recursiva y por lo tanto existe un único morfismo $f : b \to c$ que hace conmutativo el cuadrado derecho en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & b \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & c \\ \Omega^a \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^b \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

  Por la afirmación (3.4.13) s es una relacional bien fundada. Por lo tanto la afirmación (3.4.14) implica que r es una relacional bien fundada. La afirmación (3.4.12) establece la unicidad del morfismo $f \cdot h : a \to c$ y por consiguiente r es una relacional recursiva.

Por lo tanto r es un objeto conjunto transitivo. $\square$

A continuación se introducen las operaciones binarias de *intersección* y *unión* para objetos conjunto transitivo.

Definición 3.4.16 (Intersección de oct)**.** Para los objetos conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ y $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ se define $r \cap s : a \cap b \rightarrowtail \Omega^{a \cap b}$, el objeto conjunto transitivo *intersección*, por medio del siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & a \cap b \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[dd, "r \cap s"] & & b \arrow[dl, "\eta_b"] \arrow[dd, "s"] \\
a \arrow[rr, "f"'] \arrow[dd, "r"'] & & \bar{b} & \\
 & \Omega^{a \cap b} \arrow[rr] \arrow[dl, "\exists_{h_1}"'] & & \Omega^b \arrow[dl, "\exists_{\eta_b}"] \\
\Omega^a \arrow[rr, "\exists_f"'] & & \Omega^{\bar{b}} \arrow[uu, "\hat{s}"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

- El morfismo f de la cara anterior existe y es único porque r es una relacional recursiva. Este morfismo satisface $\hat{s} \cdot \exists_f \cdot r = f$. La cara derecha es el producto fibrado de la definición del morfismo $\hat{s}$ y se cumple $\hat{s} \cdot \exists_{\eta_b} \cdot s = \eta_b$. La cara superior es el producto fibrado de η_b a lo largo de f y por consiguiente $\eta_b \cdot h_2 = f \cdot h_1$. Observe que por definición η_b es un monomorfismo y por lo tanto h_1 es un monomorfismo.

- De la conmutatividad de las caras del cubo se deduce,

$$
\begin{aligned}
\hat{s} \cdot \exists_f \cdot r &= f \\
\hat{s} \cdot \exists_f \cdot r \cdot h_1 &= f \cdot h_1 \\
\hat{s} \cdot \exists_f \cdot r \cdot h_1 &= \eta_b \cdot h_2
\end{aligned}
$$

En el siguiente diagrama el cuadrado interior es el producto fibrado de la definición del morfismo $\hat{s}$ (3.4.5) y por lo anterior el exterior conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[dr, "h_2"] \arrow[drr, "\exists_f \cdot r \cdot h_1"] \arrow[ddr, "h_2"'] & & \\
& b \arrow[r, "\exists_{\eta_b} \cdot s"] \arrow[d, "id_b"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[d, "\hat{s}"] \\
& b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto el morfismo $h_2 : a \cap b \to b$ es único y satisface

$$\exists_{\eta_b} \cdot s \cdot h_2 = \exists_f \cdot r \cdot h_1.$$

Como h_1 es un monomorfismo la afirmación (1.7.9) implica que la cara inferior del cubo (3.2) es un producto fibrado y por consiguiente induce un único morfismo $r \cap s : a \cap b \to \Omega^{a \cap b}$.

- Como h_1 es un monomorfismo, por la afirmación (3.4.15) se concluye que $r \cap s$ es un objeto conjunto transitivo.

- Por último considere los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "r \cap s"'] & a \arrow[d, "r"] \\
\Omega^{a \cap b} \arrow[r, "\exists_{h_1}"'] & \Omega^{a}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "r \cap s"'] & b \arrow[d, "s"] \\
\Omega^{a \cap b} \arrow[r, "\exists_{h_2}"'] & \Omega^{b}
\end{tikzcd}$$

Los morfismos h_1 y h_2 satisfacen la definición (3.4.2) y por lo tanto son inclusiones.

Observación 3.4.17. Sean $r : a \rightarrowtail \Omega^a$, $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ y $t : c \rightarrowtail \Omega^c$ objetos conjunto transitivo tales que $t \subseteq r$ y $t \subseteq s$ con inclusiones $h : t \hookrightarrow r$ y $k : t \hookrightarrow s$. En el siguiente diagrama el cuadrado interior es la cara superior del diagrama (3.2) de la definición (3.4.16). El exterior del diagrama conmuta como consecuencia de la propiedad del morfismo parcial $(k, j) : a \to b$ de ser representable (1.5.4) en un topos.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, "k"] \arrow[ddr, "j"'] & & \\
& a \cap b \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"] & b \arrow[d, "\eta_b"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente la propiedad universal del producto fibrado induce un único $i : c \to a \cap b$ tal que $j = h_1 \cdot i$ y $k = h_2 \cdot i$. El siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "i"] \arrow[d, "t"'] & a \cap b \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "r \cap s"'] & a \arrow[d, "r"] \\
\Omega^c \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^{a \cap b} \arrow[r, "\exists_{h_1}"'] & \Omega^a
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto el morfismo i satisface la definición (3.4.2) y es una inclusión. Se obtiene $t \subseteq r \cap s$ y se concluye que $r \cap s$ es el ínfimo de los objetos conjunto transitivo r y s.

Definición 3.4.18 (Unión de oct)**.** Para $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ y $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ objetos conjunto transitivo se define $r \cup s : a \cup b \rightarrowtail \Omega^{a \cup b}$, el objeto conjunto transitivo *unión*, por medio del siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
& a \cap b \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[dd, "r \cap s"] & & b \arrow[dl, "k_2"'] \arrow[dd, "s"] \\
a \arrow[rr, "k_1"'] \arrow[dd, "r"'] & & a \cup b \arrow[dd, "r \cup s"] & \\
& \Omega^{a \cap b} \arrow[rr] \arrow[dl, "\exists_{h_1}"'] & & \Omega^b \arrow[dl, "\exists_{k_2}"] \\
\Omega^a \arrow[rr, "\exists_{k_1}"'] & & \Omega^{a \cup b} &
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

1. La cara superior del cubo (3.3) es el coproducto fibrado de las inclusiones h_1 y h_2 del objeto conjunto transitivo $r \cap s$. Por lo tanto $r \cup s : a \cup b \to \Omega^{a \cup b}$ es el único morfismo inducido por la propiedad

universal del coproducto fibrado al considerar el siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[d, dashed, "r \cup b"] & b \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{k_1}"'] & \Omega^{a\cup b} & \Omega^b \arrow[l, "\exists_{k_2}"]
\end{tikzcd}
$$

2. Sea c un objeto y $g : \Omega^c \to c$ un morfismo cualquiera. Como r y s son relacionales recursivas existen morfismos únicos f_1 y f_2 que hacen conmutativos los siguientes diagramas.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "r"'] & c \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{f_1}"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "s"'] & c \\
\Omega^b \arrow[r, "\exists_{f_2}"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Considere los siguientes diagramas conmutativos.

$$
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "f_1 \cdot h_1"] \arrow[d, "r"'] & c \\
\Omega^{a\cap b} \arrow[r, "\exists_{f_1 \cdot h_1}"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "f_2 \cdot h_2"] \arrow[d, "s"'] & c \\
\Omega^{a\cap b} \arrow[r, "\exists_{f_2 \cdot h_2}"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Se mostró previamente que $r \cap s : a \cap b \rightarrowtail \Omega^{a\cap b}$ es una relacional recursiva y por lo tanto se satisface $f_1 \cdot h_1 = f_2 \cdot h_2$. Así el exterior del siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & b \arrow[d, "k_2"] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
a \arrow[r, "k_1"] \arrow[drr, "f_1"'] & a \cup b \arrow[dr, dashed, "e"] & \\
& & c
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto la propiedad universal del coproducto fibrado induce un único morfismo $e : a \cup b \to c$ tal que $f_1 = e \cdot k_1$ y $f_2 = e \cdot k_2$. Por lo tanto los siguientes diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[r, "e"] \arrow[d, "r \cup s"'] & c \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{k_1}"'] & \Omega^{a \cup b} \arrow[r, "\exists_e"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, "s"'] & a \cup b \arrow[r, "e"] \arrow[d, "r \cup s"'] & c \\
\Omega^b \arrow[r, "\exists_{k_2}"'] & \Omega^{a \cup b} \arrow[r, "\exists_e"'] & \Omega^c \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

Sea $e' : a \cup b \to c$ un morfismo que hace conmutativos los diagramas anteriores. En este caso se obtiene $e' \cdot k_1 = e \cdot k_1$ y $e' \cdot k_2 = e \cdot k_2$. Los morfismos k_1 y k_2 son conjuntamente epi (ver inciso 10) y por lo tanto se concluye $e = e'$. Por consiguiente $r \cup s : a \cup b \to \Omega^{a \cup b}$ es una relacional recursiva.

3. Por el inciso 1 de la afirmación (3.4.8) las inclusiones son monomorfismos. Por la afirmación (1.7.1) la cara superior del diagrama (3.3), coproducto fibrado de las inclusiones h_1 y h_2 para el objeto conjunto $r \cap s$, también es el producto fibrado de los monomorfismos k_1 y k_2.

4. Considere el morfismo parcial (id_b, k_2), por el teorema (1.5.5) es representable y por lo tanto en el siguiente producto fibrado w es único.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, "id_b"'] & a \cup b \arrow[d, dashed, "w"] \\
b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

5. De manera análoga considere el morfismo parcial (id_a, k_1), por el teorema (1.5.5) es representable y por lo tanto en el siguiente producto fibrado z es único.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "id_a"'] & a \cup b \arrow[d, dashed, "z"] \\
a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a}
\end{tikzcd}$$

6. Considere los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "h_2"'] & a \arrow[d, "k_1"] \\
b \arrow[r, "k_2"'] \arrow[d, "id_b"'] & a \cup b \arrow[d, "w"] \\
b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_1"] \arrow[dd, "h_2"'] & a \arrow[dd, "f"] \\
& \\
b \arrow[r, "\eta_b"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

En el diagrama de la izquierda ambos cuadrados son productos fibrados y por lo tanto el exterior del diagrama es un producto fibrado. El diagrama de la derecha es el producto fibrado de f a lo largo de η_b y constituye la cara superior del diagrama (3.2) en la definición del objeto conjunto transitivo intersección (3.4.16).

Por consiguiente f y $w \cdot k_1$ clasifican el mismo morfismo parcial (h_2, h_1) y por lo tanto $f = w \cdot k_1$. Además en el producto fibrado inferior del diagrama de la izquierda se satisface $\eta_b = w \cdot k_2$.

Como $f = w \cdot k_1$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "k_1"] \arrow[drr, "f"] & & \\
\Omega^a \arrow[dr, "\exists k_1"'] \arrow[drr, dashed] & a \cup b \arrow[r, "w"] \arrow[d, "r\cup s"'] & \bar{b} \\
& \Omega^{a\cup b} \arrow[r, "\exists_w"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

Y como $\eta_b = w \cdot k_2$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "k_2"] \arrow[drr, "\eta_b"] & & \\
\Omega^b \arrow[dr, "\exists k_2"'] \arrow[drr, dashed] & a \cup b \arrow[r, "w"] \arrow[d, "r\cup s"'] & \bar{b} \\
& \Omega^{a\cup b} \arrow[r, "\exists_w"'] & \Omega^{\bar{b}} \arrow[u, "\hat{s}"']
\end{tikzcd}$$

Dado que el cuadrado interior conmuta con ambas inclusiones se concluye $w = rec_{r\cup s}(\hat{s})$ y por consiguiente $w = \hat{s} \cdot \exists_w \cdot r \cup s$.

7. Considere el morfismo parcial $(h_1, h_2) : b \to a$, por el teorema (1.5.5) es representable y por lo tanto el siguiente diagrama de la derecha es un producto fibrado y g es único.

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & b \arrow[d, "k_2"] \\
a \arrow[r, "k_1"'] \arrow[d, "id_a"'] & a \cup b \arrow[d, "z"] \\
a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_2"] \arrow[dd, "h_1"'] & b \arrow[dd, "g"] \\
 & \\
a \arrow[r, "\eta_a"'] & \bar{a}
\end{tikzcd}$$

En el diagrama de la izquierda ambos cuadrados son productos fibrados y por lo tanto el exterior del diagrama es un producto fibrado. Por consiguiente g y $z \cdot k_2$ clasifican el mismo morfismo parcial (h_1, h_2) y por lo tanto $g = z \cdot k_2$. Además en el producto fibrado inferior del diagrama de la izquierda se satisface $\eta_a = z \cdot k_1$.

Como $g = z \cdot k_2$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "k_2"] \arrow[drr, "g"] & & \\
\Omega^b \arrow[dr, "\exists k_2"'] \arrow[drr, dashed] & a \cup b \arrow[r, "z"] \arrow[d, "r\cup s"] & \bar{a} \\
 & \Omega^{a\cup b} \arrow[r, "\exists_z"'] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[u, "\hat{r}"']
\end{tikzcd}$$

Y como $\eta_a = z \cdot k_1$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "k_1"] \arrow[drr, "\eta_a"] & & \\
\Omega^a \arrow[dr, "\exists k_1"'] \arrow[drr, dashed] & a \cup b \arrow[r, "z"] \arrow[d, "r \cup s"'] & \bar{a} \\
 & \Omega^{a \cup b} \arrow[r, "\exists_z"'] & \Omega^{\bar{a}} \arrow[u, "\hat{r}"']
\end{tikzcd}$$

Dado que el cuadrado interior conmuta con ambas inclusiones se concluye $z = rec_{r \cup s}(\hat{r})$ y por consiguiente $z = \hat{r} \cdot \exists_z \cdot r \cup s$.

8. Sean $x_1, x_2 : u \to a \cup b$ morfismos tales que $r \cup s \cdot x_1 = r \cup s \cdot x_2$. Por lo tanto también se cumple $w \cdot x_1 = w \cdot x_2$. Considere el producto fibrado de η_b a lo largo de $w \cdot x_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & b \arrow[d, "\eta_b"] \\
u \arrow[r, "w \cdot x_i"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

Sean $\alpha : y \to u$ y $\beta : y \to b$ morfismos cualesquiera en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[dr, dashed, "\delta"] \arrow[drr, "\beta"] \arrow[ddr, "\alpha"'] & & & \\
& p \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & b \arrow[d, "k_2"] \arrow[dr, dashed, "\eta_b"] & \\
& u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b \arrow[r, "w"'] & \bar{b}
\end{tikzcd}$$

Como $w \cdot k_2 = \eta_b$, la propiedad universal del producto fibrado de η_b a lo largo de $w \cdot x_i$ induce un único morfismo $\delta : y \to p$. Por consiguiente el siguiente diagrama es un producto fibrado para $i \in \{1, 2\}$.

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & b \arrow[d, "k_2"] \\
u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto se obtiene $x_1 \cdot v = x_2 \cdot v$.

9. Para los morfismos $x_1, x_2 : u \to a \cup b$ del punto anterior también se cumple $z \cdot x_1 = z \cdot x_2$. Considere el producto fibrado de η_a a lo largo de $z \cdot x_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$\begin{tikzcd}
q \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & a \arrow[d, "\eta_a"] \\
u \arrow[r, "z \cdot x_i"'] & \bar{a}
\end{tikzcd}$$

Sean $\alpha' : y' \to q$ y $\beta' : y' \to a$ morfismos cualesquiera en el siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[drr, "\beta'"] \arrow[dr, dashed, "\delta'"] \arrow[ddr, "\alpha'"'] & & & \\
& q \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & a \arrow[d, "k_1"] \arrow[dr, dashed, "\eta_a"] & \\
& u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b \arrow[r, "z"'] & \bar{a}
\end{tikzcd}
$$

Como $z \cdot k_1 = \eta_a$ la propiedad universal del producto fibrado de η_a a lo largo de $z \cdot x_i$ induce un único morfismo $\delta' : y' \to q$. Por consiguiente el siguiente diagrama es un producto fibrado para $i \in \{1, 2\}$.

$$
\begin{tikzcd}
q \arrow[r] \arrow[d, "v'"'] & a \arrow[d, "k_1"] \\
u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto se obtiene $x_1 \cdot v' = x_2 \cdot v'$.

10. Considere los productos fibrados de los puntos 8 y 9.

$$
\begin{tikzcd}
p \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "v"'] & a \arrow[d, "k_2"] \\
u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
q \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "v'"'] & a \arrow[d, "k_1"] \\
u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b
\end{tikzcd}
$$

Sean $z_1, z_2 : u \to x$ morfismos tales que $z_1 \cdot v = z_2 \cdot v$ y $z_1 \cdot v' = z_2 \cdot v'$.

En el siguiente diagrama conmutativo, el morfismo $\alpha : q \to p$ es único por la propiedad universal del producto fibrado y satisface $v \cdot \alpha = v'$.

$$
\begin{tikzcd}
q \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "w_1"] \arrow[ddr, bend right, "v'"'] & & \\
& p \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "v"'] & a \arrow[d, "k_2"] \\
& u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b
\end{tikzcd}
$$

De manera análoga en el siguiente diagrama conmutativo, el morfismo $\beta : u \to q$ es único por la propiedad universal del producto fibrado.

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "id_u"'] & & \\
& q \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "v'"'] & a \arrow[d, "k_1"] \\
& u \arrow[r, "x_i"'] & a \cup b
\end{tikzcd}
$$

El morfismo β satisface $v' \cdot \beta = id_u$. Por último considere el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & & q \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[d, "z_1 \cdot v' = z_2 \cdot v'"] \\
p \arrow[r, "v"'] & u \arrow[r, shift left, "z_1"] \arrow[r, shift right, "z_2"'] & x
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot v \cdot \alpha &= z_2 \cdot v' \\
z_1 \cdot v' &= z_2 \cdot v' \\
z_1 \cdot v' \cdot \beta &= z_2 \cdot v' \cdot \beta \\
z_1 &= z_2.
\end{aligned}$$

Los morfismos v y v' son conjuntamente epi.

11. Los puntos 8 y 9 establecen respectivamente las igualdades $x_1 \cdot v = x_2 \cdot v$ y $x_1 \cdot v' = x_2 \cdot v'$. Dado que v y v' son conjuntamente epi se concluye $x_1 = x_2$. Por consiguiente $r \cup s$ es un monomorfismo y $r \cup s$ es un objeto conjunto transitivo.

12. Por último considere los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{k_1}"'] & \Omega^{a \cup b}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k_2"] \arrow[d, "s"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"] \\
\Omega^b \arrow[r, "\exists_{k_2}"'] & \Omega^{a \cup b}
\end{tikzcd}$$

Los morfismos k_1 y k_2 satisfacen la definición (3.4.2) y por lo tanto son inclusiones.

Observación 3.4.19. Sean $r : a \rightarrowtail \Omega^a$, $s : b \rightarrowtail \Omega^b$ y $t : c \rightarrowtail \Omega^c$ objetos conjunto transitivo tales que $r \subseteq t$ y $s \subseteq t$ con inclusiones $h : r \hookrightarrow t$ y $k : s \hookrightarrow t$. En el siguiente diagrama conmutativo el cuadrado interior es la cara superior del diagrama (3.3) de la definición (3.4.18).

$$\begin{tikzcd}
a \cap b \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & b \arrow[d, "k_2"] \arrow[ddr, "k"] & \\
a \arrow[r, "k_1"'] \arrow[drr, "h"'] & a \cup b \arrow[dr, dashed, "j"] & \\
 & & c
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente la propiedad universal del coproducto fibrado induce un único $j : a \cup b \to c$ tal que $h = j \cdot k_1$ y $k = j \cdot k_2$. El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "r \cup s"'] & c \arrow[d, "t"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{k_1}"'] & \Omega^{a \cup b} \arrow[r, "\exists_j"'] & \Omega^c
\end{tikzcd}$$

El morfismo j satisface la definición (3.4.2) y por lo tanto es una inclusión. Se cumple $r \cup s \subseteq t$ y se concluye que $r \cup s$ es el supremo de los objetos conjunto transitivo r y s.

Afirmación 3.4.20. *La colección de objetos conjunto transitivo en un topos constituye una retícula finitamente completa y acotada inferiormente.*

Demostración.

- La afirmación (3.4.10) establece que la relacional $\subseteq$ es un orden parcial.

- Las operaciones de intersección y unión se pueden generalizar de manera inductiva para colecciones finitas de objetos conjunto transitivo. Así, toda colección finita de objetos conjunto transitivo tiene ínfimo (3.4.17) y supremo (3.4.19). Por lo tanto la colección de objetos conjunto transitivo es una retícula finitamente completa.

- En la observación (3.3.4) se mostró que $0 \rightarrowtail \Omega^0$ es un objeto conjunto transitivo. Sea $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto transitivo, el único monomorfismo $0 \rightarrowtail a$ es una inclusión, de donde $0 \subseteq r$ y por lo tanto el objeto conjunto transitivo $0 \rightarrowtail \Omega^0$ es una cota inferior.

$\square$

3.5. Objeto conjunto

A partir de la noción de objeto conjunto transitivo se construye la noción de objeto conjunto en un topos elemental y se describen algunas propiedades. Es necesario definir una noción preliminar.

Definición 3.5.1 (Imagen de g bajo f)**.** Dado un morfismo $f : a \to b$ en un topos $\mathcal{E}$, para cada subobjeto $g : c \rightarrowtail a$ se define la *imagen de g bajo f*, $f[g] : f(g(c)) \rightarrowtail b$, como la parte mono de la factorización epi-mono de la composición $f \cdot g$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f \cdot g"] \arrow[d] & b \\ f \cdot g(c) \arrow[ur, "f[g]"'] & \end{tikzcd} \qquad f[g] = im\,(f \cdot g)$$

Observación 3.5.2. Si $f : a \rightarrowtail b$ es un monomorfismo entonces para todo subobjeto $g : c \rightarrowtail a$, la composición fg es mono y por lo tanto en la factorización epi-mono

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "fg^*"'] & b \\
fg(c) \arrow[ur, "f[g]"'] &
\end{tikzcd}$$

el epimorfismo fg^* también es un monomorfismo. Por lo tanto fg^* es un isomorfismo y se obtiene $f[g] \simeq fg$.

Definición 3.5.3 (Objeto conjunto)**.** Un *objeto conjunto* en un topos $\mathcal{E}$ es una pareja $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ con $f : c \rightarrowtail a$ un monomorfismo y $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto transitivo.

Observación 3.5.4. La imagen $(\exists_f, \exists_r)$ de un objeto conjunto (f, r) bajo el funtor $\exists$ es un objeto conjunto. $\exists_f$ es mono dado que el funtor $\exists$ respeta monomorfismos (1.6.6) y $\exists_r$ es un objeto conjunto transitivo por la afirmación (3.3.5).

Observación 3.5.5. Para cualquier objeto conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ se cumple que $(id_a, r) : a \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ es un objeto conjunto.

A continuación se define la noción de equivalencia $\simeq_{\mathcal{E}}$ para los objetos conjunto en un topos $\mathcal{E}$.

Definición 3.5.6 (Equivalencia de objetos conjunto)**.** Dados objetos conjunto $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ en un topos $\mathcal{E}$, se define $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, s)$ si y sólo si para algún objeto conjunto transitivo $t : e \rightarrowtail \Omega^e$ tal que $r \subseteq t$ y $s \subseteq t$ con inclusiones $i : r \hookrightarrow t$ y $j : s \hookrightarrow t$ se cumple $i[f] \simeq j[g]$ en $Sub(e)$.

Observación 3.5.7. i y j son monomorfismos, por lo tanto la condición para la igualdad de los objetos conjunto $i[f] \simeq j[g]$ se simplifica y se expresa como $i \cdot f \simeq j \cdot g$ (3.5.2).

Afirmación 3.5.8. *Para cualesquiera objetos conjunto $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. *Para algún objeto conjunto transitivo $t : e \rightarrowtail \Omega^e$ tal que $i : r \hookrightarrow t$ y $j : s \hookrightarrow t$ son inclusiones, se cumple $i \cdot f \simeq j \cdot g$ en $Sub(e)$.*

2. *Para* $r \cup s : a \cup b \rightarrowtail \Omega^{a \cup b}$ *y las inclusiones* $k_1 : r \hookrightarrow r \cup s$ *y* $k_2 : s \hookrightarrow r \cup s$ *se cumple* $k_1 \cdot f \simeq k_2 \cdot g$ *en* $Sub(a \cup b)$.

3. *Para todo objeto conjunto transitivo* $t : x \rightarrowtail \Omega^x$ *tal que* $i_x : r \hookrightarrow t$ *y* $j_x : s \hookrightarrow t$ *son inclusiones, se cumple* $i_x \cdot f \simeq j_x \cdot g$ *en* $Sub(x)$.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$. Sea $t : e \to \Omega^e$ tal que $r \subseteq t$ y $s \subseteq t$. El supremo $r \cup s$ satisface $r \subseteq r \cup s$, $s \subseteq r \cup s$ y $r \cup s \subseteq t$. Sea $h : r \cup s \hookrightarrow t$ la inclusión, por unicidad (3.4.7) se cumple $h \cdot k_1 = i$ y $h \cdot k_2 = j$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Omega^{a \cup b} & \\
c \arrow[d, "f"'] & a \cup b \arrow[u, "r \cup s"'] \arrow[d, dashed, "h"] & d \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[ur, "k_1"] \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "r"'] & e \arrow[d, "t"] & b \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[l, "j"] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^e & \Omega^b \arrow[l, "\exists_j"]
\end{tikzcd}
$$

  Por hipótesis $i \cdot f \simeq j \cdot g$ y se cumple $h \cdot k_1 \cdot f \simeq h \cdot k_2 \cdot g$ en $Sub(e)$. Por el inciso 1 de la afirmación (3.4.8) h es mono, por consiguiente $k_1 \cdot f \simeq k_2 \cdot g$ en $Sub(a \cup b)$.

- $(2 \Rightarrow 3)$. Sea $t : x \to \Omega^x$ tal que $i_x : r \hookrightarrow t$ y $j_x : s \hookrightarrow t$ son inclusiones. Por la definición de supremo se cumple $r \cup s \subseteq t$. Sea h la inclusión $r \cup s \hookrightarrow t$, por unicidad satisface $h \cdot k_1 = i_x$ y $h \cdot k_2 = j_x$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \Omega^{a\cup b} & \\
c \arrow[d, "f"'] & a\cup b \arrow[u, "r\cup s"'] \arrow[d, dashed, "h"] & d \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[ur, "k_1"] \arrow[r, "i_x"'] \arrow[d, "r"'] & x \arrow[d, "t"] & b \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[l, "j_x"] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{i_e}"'] & \Omega^x & \Omega^b \arrow[l, "\exists_{j_e}"]
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis $k_1 \cdot f \simeq k_2 \cdot g$ en $Sub(a \cup b)$, de donde $h \cdot k_1 \cdot f \simeq h \cdot k_2 \cdot g$ y por lo tanto $i_x \cdot f \simeq j_x \cdot g$ en $Sub(x)$.

- $(3 \Rightarrow 1)$. Esta implicación es inmediata dado que se cumple $i_x \cdot f \simeq j_x \cdot g$ en $Sub(x)$ para cada $t : x \rightarrowtail \Omega^x$.

$\square$

La afirmación anterior muestra que la definición de la equivalencia $\simeq_{\mathcal{E}}$ para objetos conjunto es independiente del objeto conjunto transitivo t que se elija. La siguiente afirmación muestra que la definición de la relacional $\simeq_{\mathcal{E}}$ es compatible con la equivalencia de subobjetos $\simeq$ (1.3.2) en cada $Sub(a)$.

Afirmación 3.5.9. *Sean $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, r) : d \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ objetos conjunto, se cumple $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, r)$ si y sólo si $f \simeq g$ en $Sub(a)$.*

Demostración.

- Por el inciso 2 de la afirmación (3.4.8) $r \subseteq r$, tomando como inclusión a la identidad id_a. $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, r)$ implica $id_a \cdot f \simeq id_a \cdot g$ en $Sub(a)$ y por lo tanto $f \simeq g$ en $Sub(a)$.

- De manera recíproca si $f \simeq g$ en $Sub(a)$ entonces $f = s \cdot g$ con s iso y por lo tanto $id_a \cdot f = id_a \cdot s \cdot g$. Si se toma a id_a como la inclusión $r \subseteq r$, entonces se concluye $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, r)$.

$\square$

Afirmación 3.5.10. *Los objetos conjunto (f, r) y $(r \cdot f, \exists_r)$ son equivalentes.*

Demostración. Sean $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(r \cdot f, \exists_r) : c \rightarrowtail \Omega^a \rightarrowtail \Omega^{\Omega^a}$. Considere el siguiente diagrama conmutativo en $Sub(\Omega^a)$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "id_c"'] & a \arrow[r, "r"] & \Omega^a \\
c \arrow[r, "r \cdot f"'] & \Omega^a \arrow[ur, "id_{\Omega^a}"'] &
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente se obtiene $r \cdot f \simeq id_{\Omega^a} \cdot r \cdot f$ como subobjetos de Ω^a. Considere el siguiente diagrama para los objetos conjunto (f, r) y $(r \cdot f, \exists_r)$ y las inclusiones r e id_{Ω^a}.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] & & c \arrow[d, "r \cdot f"] \\
a \arrow[r, "r"] \arrow[d, "r"'] & \Omega^a \arrow[d, "\exists_r"'] & \Omega^a \arrow[l, "id_{\Omega^a}"'] \arrow[d, "\exists_r"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_r"'] & \Omega^{\Omega^a} & \Omega^{\Omega^a} \arrow[l, "\exists_{id_{\Omega^a}}"]
\end{tikzcd}$$

Se concluye $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (r \cdot f, \exists_r)$. $\square$

Por lo tanto sólo falta definir formalmente la relación de pertenencia para objetos conjunto para así obtener una teoría de conjuntos global en el contexto de un topos arbitrario $\mathcal{E}$.

3.6. Pertenencia en un topos elemental

Definición 3.6.1 (Teoría global en $\mathcal{E}$)**.** Sean (f, r) y (g, s) dos objetos conjunto, se define $(g, s) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ si y sólo si para algún $t : e \to \Omega^e$ objeto conjunto transitivo tal que $r \subseteq t$ y $s \subseteq t$ con inclusiones $i : r \hookrightarrow t$ y $j : s \hookrightarrow t$ se cumple $j \cdot g \in_t i \cdot f$.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[drr, "\ulcorner \chi_{j\cdot g} \urcorner"] & & \\
b \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "i"'] & e \arrow[r, "t"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

Es decir que $\ulcorner \chi_{j\cdot g} \urcorner$ se factoriza a través de la composición $t \cdot i \cdot f$.

Observación 3.6.2. En un topos $\mathcal{E}$ considere un monomorfismo $k : x \to y$. Se tiene la siguiente situación.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(1, \Omega^x) \arrow[d, "\mathcal{E}(1, \exists_k)"'] & \cong & Sub(x) \arrow[d, "\exists_k"] \\
\mathcal{E}(1, \Omega^y) & \cong & Sub(y)
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto para cualquier otro monomorfismo $m : z \rightarrowtail x$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\ulcorner \chi_m \urcorner"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{k\cdot m} \urcorner"] & \\
\Omega^x \arrow[r, "\exists_k"'] & \Omega^y
\end{tikzcd}$$

En particular el diagrama conmuta cuando m es una inclusión.

Afirmación 3.6.3. *Para cualesquiera objetos conjunto* $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ *y* $(g, s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ *las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. $(g, s) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$.
2. *Para un objeto conjunto* $(g', r) : d' \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ *tal que* $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}} (g', r)$ *se cumple* $g' \in_r f$.
3. *Para objetos conjunto* $(g', t) : d' \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ *y* $(f', t) : c' \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ *tales que* $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}} (g', t)$ *y* $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (f', t)$ *se cumple* $g' \in_t f'$.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$. Sea $t : e \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto transitivo con inclusiones $i : r \hookrightarrow t$ y $j : s \hookrightarrow t$. Considere el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] & d' \arrow[dl, "g'"] & d \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "r"'] & e \arrow[d, "t"] & b \arrow[l, "j"] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^e & \Omega^b \arrow[l, "\exists_j"]
\end{tikzcd}$$

  Sea $(g', r) : d' \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto tal que $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}} (g', r)$. Por lo tanto $j \cdot g \simeq i \cdot g'$ en $Sub(e)$. La hipótesis $(g, s) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ implica $j \cdot g \in_t i \cdot f$. Por lo tanto $i \cdot g' \in_t i \cdot f$ y existe el morfismo $\alpha : 1 \to c$ en el siguiente diagrama conmutativo de la izquierda.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{i\cdot g'} \urcorner"] & \\
c \arrow[r, "i \cdot f"'] & e \arrow[r, "t"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{g'} \urcorner"'] \arrow[drr, "\ulcorner \chi_{i\cdot g'} \urcorner"] & & \\
c \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

Ahora tomando en cuenta que $t \cdot i = \exists_i \cdot r$ se obtiene el diagrama de la derecha. Este diagrama conmuta por la observación (3.6.2) y por consiguiente se concluye $g' \in_r f$.

- $(2 \Rightarrow 3)$. Sean $(g', t) : d' \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ y $(f', t) : c' \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ objetos conjunto tales que $(g', t) \simeq_{\mathcal{E}} (g, s)$ y $(f, t) \simeq_{\mathcal{E}} (f, r)$. Sean $i : r \hookrightarrow t$ y $j : s \hookrightarrow t$ inclusiones, por lo tanto existen isomorfismos $\alpha : c' \to c$ y $\beta : d' \to d$ que hacen conmutativos los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd}
c' \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & c \arrow[d, "f"] \\
e \arrow[d, "t"'] & a \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "r"] \\
\Omega^e & \Omega^a \arrow[l, "\Omega^i"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d' \arrow[r, dashed, "\beta"] \arrow[d, "g'"'] & d \arrow[d, "g"] \\
e \arrow[d, "t"'] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^e & \Omega^b \arrow[l, "\Omega^j"]
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis se satisface $g' \in_r f$. Por lo tanto existe una inclusión $k : t \hookrightarrow r$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] & d' \arrow[d, "g'"] \\
a \arrow[d, "r"'] & e \arrow[l, "k"'] \arrow[d, "t"] \\
\Omega^a & \Omega^e \arrow[l, "\Omega^k"]
\end{tikzcd}$$

Se obtiene $r \hookrightarrow t$ y $t \hookrightarrow r$. Por el inciso 2 de la afirmación (3.4.8) esto implica $c \cong d'$ y $\Omega^c \cong \Omega^{d'}$ y por lo tanto $k : e \to a$ y $\Omega^k : \Omega^e \rightharpoonup \Omega^a$ son isomorfismos. Además la hipótesis $g' \in_r f$ implica la existencia de un morfismo $\delta : 1 \to c$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[dll, "\delta"'] \arrow[drr, "\ulcorner \chi_{k \cdot g'} \urcorner"] & & \\
c \arrow[rr, "f"'] & & a \arrow[rr, "r"'] & & \Omega^a
\end{tikzcd}$$

Pero $f' \simeq_{\mathcal{E}} k^{-1} \cdot f$ y por lo tanto $k \cdot f' \simeq_{\mathcal{E}} f$. Ahora dado que $a \cong e$ y $\Omega^a \cong \Omega^e$ el diagrama anterior es equivalente al siguiente.

$$\begin{tikzcd}
& & 1 \arrow[dll, "\delta"'] \arrow[drr, "\ulcorner \chi_{k \cdot g'} \urcorner"] & & \\
c \arrow[rr, "k \cdot f'"'] & & e \arrow[rr, "t"'] & & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente se concluye $g' \in_t f'$.

- $(3 \Rightarrow 1)$. Sea $t : e \to \Omega^e$ un objeto conjunto transitivo tal que $r \subseteq t$, $s \subseteq t$ con inclusiones $i : r \hookrightarrow t$ y $j : s \hookrightarrow t$. Considere los objetos conjunto $(g', t) : d' \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ y $(f', t) : c' \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ tales que $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}} (g', t)$, $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (f', t)$ y $g' \in_t f'$.

$$
\begin{tikzcd}
& c' \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[dr, "f'"] & & d' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
c \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "r"'] & e \arrow[d, "t"] & b \arrow[l, "j"] \arrow[d, "s"] & d \arrow[l, "g"] \\
& \Omega^a \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^e \arrow[r, "\exists_j"'] & \Omega^b &
\end{tikzcd}
$$

Por hipótesis se cumple $j \cdot g \simeq g'$ e $i \cdot f \simeq f'$ en $Sub(e)$. Por consiguiente existen isomorfismos $u : d' \to d$, $v : c' \to c$ tales que $g' = j \cdot g \cdot u$ y $f' = i \cdot f \cdot v$.

Como $g' \in_t f'$ existe $\alpha : 1 \to c'$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{g'} \urcorner"] & \\
c' \arrow[r, "f'"'] & e \arrow[r, "t"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}
$$

Tomando en cuenta que g' y $j \cdot g$ son subobjetos isomorfos se obtiene $\chi_{j \cdot g} = \chi_{g'}$ y dado que el nombre de un morfismo (1.2.4) se define como un adjunto exponencial, se obtiene $\ulcorner \chi_{j \cdot g} \urcorner = \ulcorner \chi_{g'} \urcorner$. Por último al substituir el valor de f' en el diagrama anterior se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "v \cdot \alpha"'] \arrow[drr, "\ulcorner \chi_{j \cdot g} \urcorner"] & & \\
c \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "i"'] & e \arrow[r, "t"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $j \cdot g \in_t i \cdot f$.

$\square$

Afirmación 3.6.4. *Para cualesquiera objetos conjunto* $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ *y* $(g, s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ *las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. *Para algún objeto conjunto transitivo* $t : e \rightarrowtail \Omega^e$ *tal que* $r \subseteq t$ *y* $s \subseteq t$ *con inclusiones* $i : r \hookrightarrow t$ *y* $j : s \hookrightarrow t$ *se cumple* $j \cdot g \in_t i \cdot f$.
2. *Para* $r \cup s : a \cup b \rightarrowtail \Omega^{a \cup b}$ *y las inclusiones* $k_1 : r \hookrightarrow r \cup s$ *y* $k_2 : s \hookrightarrow r \cup s$ *se cumple* $k_2 \cdot g \in_{r \cup s} k_1 \cdot f$.
3. *Para cualquier objeto conjunto transitivo* $t : x \rightarrowtail \Omega^x$ *tal que* $i_x : r \hookrightarrow t$ *y* $j_x : s \hookrightarrow t$ *son inclusiones, se cumple* $j_x \cdot g \in_t i_x \cdot f$.

Demostración.

- $(1 \Rightarrow 2)$. Por hipótesis existe un morfismo $\alpha : 1 \to c$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[drr, "\ulcorner \chi_{j \cdot g} \urcorner"] & & \\
c \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "i"'] & e \arrow[r, "t"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

Como $r \cup s$ es el supremo de los objetos conjunto transitivo r y s, existe una inclusión $h : t \hookrightarrow r \cup s$. Considere los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^e & \\
c \arrow[d, "f"'] & e \arrow[u, dashed, "t"'] \arrow[d, "h"] & d \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "k_1"] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"] & b \arrow[ul, "j"'] \arrow[l, "k_2"'] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{k_1}"'] & \Omega^{a\cup b} & \Omega^b \arrow[l, "\exists_{k_2}"]
\end{tikzcd}$$

Por unicidad de las inclusiones se cumple $h \cdot j = k_2$ y $h \cdot i = k_1$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & e \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^e \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^{a\cup b}
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\exists_h \cdot t \cdot i = r \cup s \cdot k_1$. Por la observación (3.6.2) se cumple $\exists_h \cdot \ulcorner \chi_{j\cdot g} \urcorner = \ulcorner \chi_{h\cdot j\cdot g} \urcorner$ y se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{h\cdot j\cdot g} \urcorner = \ulcorner \chi_{k_2\cdot g} \urcorner"] & \\
c \arrow[r, "k_1 \cdot f"'] & a \cup b \arrow[r, "r \cup s"'] & \Omega^{a\cup b}
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente se concluye $k_2 \cdot g \in_{r \cup s} k_1 \cdot f$.

- $(2 \Rightarrow 3)$. Por hipótesis existe un morfismo $\alpha : 1 \to c$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{k_2 \cdot g} \urcorner"] & \\
c \arrow[r, "k_1 \cdot f"'] & a \cup b \arrow[r, "r \cup s"'] & \Omega^{a \cup b}
\end{tikzcd}$$

Como $r \cup s$ es el supremo de los objetos conjunto transitivo r y s, existe una inclusión $h : t \hookrightarrow r \cup s$. Considere los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^{a \cup b} & \\
c \arrow[d, "f"'] & a \cup b \arrow[u, dashed, "r \cup s"] & d \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[ur, "k_1"] \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "r"'] & x \arrow[u, "h"] \arrow[d, "t"] & b \arrow[ul, "k_2"'] \arrow[l, "j_x"'] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{i_x}"'] & \Omega^x & \Omega^b \arrow[l, "\exists_{j_x}"]
\end{tikzcd}$$

Por unicidad de las inclusiones se cumple $h \cdot j_x = k_2$ y $h \cdot i_x = k_1$. De donde $h \cdot i_x \cdot f = k_1 \cdot f$ y $k_2 \cdot g = h \cdot j_x \cdot g$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "r"'] & x \arrow[r, "h"] \arrow[d, "t"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_{i_x}"'] & \Omega^x \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^{a \cup b}
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto se cumple $r \cup s \cdot h = \exists_h \cdot t$. Por la observación (3.6.2) se cumple $\exists_h \cdot \ulcorner \chi_{j_x \cdot g} \urcorner = \ulcorner \chi_{k_2 \cdot g} \urcorner$.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\ulcorner \chi_{j_x \cdot g} \urcorner"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{k_2 \cdot g} \urcorner"] & \\
\Omega^x \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^{a \cup b}
\end{tikzcd}$$

Se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{j_x \cdot g} \urcorner"'] \arrow[drr, dashed, "\ulcorner \chi_{k_2 \cdot g} \urcorner"] & & \\
c \arrow[r, "i_x \cdot f"'] & x \arrow[r, "t"'] & \Omega^x \arrow[r, "\exists_h"'] & \Omega^{a \cup b}
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente se concluye $j_x \cdot g \in_t i_x \cdot f$.

- $(3 \Rightarrow 1)$. Por hipótesis se cumple $j_x \cdot g \in_t i_x \cdot f$ para cualquier objeto conjunto transitivo t tal que $i_x : r \hookrightarrow t$ y $j_x : s \hookrightarrow t$ son inclusiones. Por lo tanto es inmediato que se cumple $j \cdot g \in_t i \cdot f$.

$\square$

La afirmación anterior prueba que la definición de pertenencia para objetos conjunto (3.6.1) en un topos es independiente del objeto conjunto transitivo t que se elija, siempre y cuando sea cota superior de r y s. La siguiente afirmación muestra que la definición de pertenencia para objetos conjunto es equivalente a la definición de pertenencia en la teoría local para cada $Sub(a)$.

Afirmación 3.6.5. *Sean $(f,r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g,r) : d \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ objetos conjunto, se cumple $(g,r) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y solo si $g \in_r f$.*

Demostración. Para cada objeto conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ se cumple $r \subseteq r$ con la inclusión $id_a : r \hookrightarrow r$. Por lo tanto por la definición de la pertenencia para objetos conjunto (3.6.1) al considerar $t = r$, se cumple $(g,r) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si existe $\alpha : 1 \to c$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_g \urcorner"] & \\
c \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(g,r) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si $g \in_r f$ en la teoría local (3.3.6). $\square$

A continuación se introduce la noción de subconjunto para los objetos conjunto en un topos y se le relaciona con el orden del álgebra de subobjetos de la definición (1.3.1).

Definición 3.6.6 (Subconjunto de oct)**.** Considere en un topos los objetos conjunto $(f,r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g,s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$, se define $(g,s) \subseteq_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si para cada objeto conjunto (h,t), la propiedad $(h,t) \in_{\mathcal{E}} (g,s)$ implica $(h,t) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$.

Afirmación 3.6.7. *Sean $(g,r) : d \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(f,r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ objetos conjunto, se cumple $(g,r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si $g \leqslant f$ (1.3.1) en $Sub(a)$.*

Demostración. Si $r = t$ en la definición de pertenencia, entonces se tiene $r \hookrightarrow r$ tomando a la identidad como inclusión.

- Si $(g,r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f,r)$ entonces $(h,r) \in_{\mathcal{E}} (g,r)$ implica $(h,r) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ para cada objeto conjunto (h,r). Por lo tanto en el siguiente diagrama conmutativo la existencia de un monomorfismo $\beta : 1 \to d$ implica la existencia de un morfismo $\alpha : 1 \to c$ y por consiguiente la existencia de un morfismo $m : d \to c$ tal que $\alpha = m \cdot \beta$.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_h \urcorner"] & \\
d \arrow[r, "g"'] \arrow[d, dashed, "m"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \\
c \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

  Por consiguiente $g \leqslant f$ en $Sub(a)$.

- De manera recíproca suponga $g \leqslant f$ en $Sub(a)$ y sea m el morfismo tal que $f \cdot m = g$. Sea (h,r) un objeto conjunto tal que $(h,r) \in_{\mathcal{E}} (g,r)$. Por lo tanto existe un d-elemento α que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_h \urcorner"] & \\
d \arrow[r, "g"'] \arrow[d, dashed, "m"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \\
c \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

  Por consiguiente $(h,r) \in_{\mathcal{E}} (g,r)$ implica $(h,r) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ y por lo tanto de la definición (3.6.6) se concluye $(g,r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f,r)$.

$\square$

Observación 3.6.8. La afirmación (1.3.8) establece que id_a es el $\leqslant$-máximo en $Sub(a)$. Por la afirmación anterior un objeto conjunto $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ satisface $(f, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$.

Por último se introduce la noción de intersección para objetos conjunto que son subconjuntos de un mismo objeto conjunto.

Definición 3.6.9 (Intersección)**.** Para objetos conjunto $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, r) : d \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$, se define la *intersección* $(f, r) \cap_{\mathcal{E}} (g, r)$ como el objeto conjunto $(f \sqcap g, r)$. El monomorfismo $f \sqcap g$ es la intersección (1.3.5) de los subobjetos en $Sub(a)$.

Observación 3.6.10. Sean $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, r) : d \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ objetos conjunto.

1. Por la afirmación (3.6.8) se cumple $(f, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$ y $(g, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$.

2. Sea $(h, s) : e \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ un objeto conjunto con $(h, s) \in_{\mathcal{E}} (f, r) \cap_{\mathcal{E}} (g, r)$. Sea $j : s \hookrightarrow r$ una inclusión en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & c \sqcap d \arrow[dl, "i_c"'] \arrow[dr, "i_d"] & & \\
c \arrow[dr, "f"'] & & d \arrow[dl, "g"] & {} \arrow[dl, "h"] \\
 & a \arrow[d, "r"'] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "s"] & \\
 & \Omega^a & \Omega^b \arrow[l, "\Omega^j"] &
\end{tikzcd}$$

Por la definición de pertenencia para objetos conjunto existen morfismos $\alpha : 1 \to c \sqcap d$ y $\beta : 1 \to c \sqcap d$ que hacen conmutativos los siguientes diagramas.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{j\cdot h} \urcorner"] & \\
c \sqcap d \arrow[r] \arrow[d, "i_c"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \\
c \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{j\cdot h} \urcorner"] & \\
c \sqcap d \arrow[r] \arrow[d, "i_d"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \\
d \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(h, s) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ y $(h, s) \in_{\mathcal{E}} (g, r)$.

3. Suponga $f \sqcap g = 0_a$, como 0 es objeto inicial la siguiente composición satisface $r \cdot 0_a = 0_{\Omega^a}$.

$$0 \xrightarrow{0_a} a \xrightarrow{r} \Omega^a \qquad\qquad 0 \xrightarrow{0_{\Omega^a}} \Omega^a$$

3.7. El topos $\mathcal{E}_p$

Se concluye este capítulo introduciendo una noción equivalente a la de objeto conjunto que recupero del libro de Johnstone [Joh79]. La noción de objeto parcialmente transitivo permite demostrar de manera más directa que la colección de objetos conjunto forma un subtopos.

Definición 3.7.1 (Objeto parcialmente transitivo)**.** Un objeto b en un topos $\mathcal{E}$ es *parcialmente transitivo* si y sólo si existe un objeto conjunto transitivo $r_b : a \rightarrowtail \Omega^a$ y un monomorfismo $m_b : b \rightarrowtail a$.

Observación 3.7.2.

1. Dado un objeto conjunto $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$, el objeto c es parcialmente transitivo.

2. Sea b un objeto parcialmente transitivo con objeto conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ y monomorfismo $m_b : b \rightarrowtail a$. El objeto b determina por lo tanto un objeto conjunto (m_b, r) y por la afirmación (3.6.7) se cumple $(m_b, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$.

En un topos arbitrario $\mathcal{E}$ la colección de objetos parcialmente transitivos se denota $\mathcal{E}_p$.

Teorema 3.7.3. *$\mathcal{E}_p$ es un topos.*

Demostración.

1. Sean c y d objetos parcialmente transitivos, por definición determinan objetos conjunto $(m_c, r_c) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(m_d, r_d) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$. Un morfismo de objetos parcialmente transitivos es un morfismo $\alpha : c \to d$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "m_c"'] & d \arrow[d, "m_d"] \\
a \arrow[d, "r_c"'] & b \arrow[d, "r_d"] \\
\Omega^a & \Omega^b
\end{tikzcd}$$

   Las identidad para un objeto parcialmente transitivo es la identidad para el objeto en el topos $\mathcal{E}$ y la composición de morfismos de objetos parcialmente transitivos hereda la asociatividad de los morfismos del topos. Por consiguiente los objetos parcialmente transitivos forman una categoría.

2. Considere el objeto conjunto $(id_0, 0_{\Omega^0}) : 0 \rightarrowtail 0 \rightarrowtail \Omega^0$. Como el funtor $\exists$ preserva monomorfismos (1.6.6) y objetos conjunto transitivo (3.3.5), se obtiene que $(\exists_{id_0}, \exists_{0_{\Omega^0}}) : \Omega^0 \rightarrowtail \Omega^0 \rightarrowtail \Omega^{\Omega^0}$ es un objeto conjunto. Este objeto es isomorfo a $(id_1, \exists_{0_{\Omega^0}}) : 1 \rightarrowtail 1 \rightarrowtail \Omega^1$ y por lo tanto el objeto terminal 1 es un objeto parcialmente transitivo.

3. Sean a y b dos objetos parcialmente transitivos, por lo tanto existen monomorfismos $m_a : a \rightarrowtail c$, $m_b : b \rightarrowtail d$ y objetos conjunto transitivo $r : c \rightarrowtail \Omega^c$, $s : d \rightarrowtail \Omega^d$. Las inclusiones $i : r \hookrightarrow r \cup s$, $j : s \hookrightarrow r \cup s$ (3.4.18) son monomorfismos por la afirmación (3.4.8).

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "m_a"'] & & b \arrow[d, "m_b"] \\
c \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & c \cup d \arrow[d, "r \cup s"] & d \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^c \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^{c \cup d} & \Omega^d \arrow[l, "\exists_j"]
\end{tikzcd}$$

Las composiciones $i \cdot m_a$ y $j \cdot m_b$ son subobjetos de $c \cup d$. Considere el producto fibrado de $i \cdot m_a$ a lo largo de $j \cdot m_b$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & a \arrow[d, "i \cdot m_a"] & \\
b \arrow[r, "j \cdot m_b"'] & c \cup d \arrow[r, dashed, "r \cup s"'] & \Omega^{c \cup d}
\end{tikzcd}$$

Los morfismos p y q también son monomorfismos. Por consiguiente con el monomorfismo $m_P = j \cdot m_b \cdot p = i \cdot m_a \cdot q : P \rightarrowtail c \cup d$ y el objeto conjunto transitivo $r \cup s : c \cup d \rightarrowtail \Omega^{c \cup d}$ el objeto P es parcialmente transitivo. Por lo tanto la categoría $\mathcal{E}_p$ tiene productos fibrados.

4. Sean a y b dos objetos parcialmente transitivos que determinan los objetos conjunto $(m_a, r) : a \rightarrowtail c \rightarrowtail \Omega^c$ y $(m_b, s) : b \rightarrowtail d \rightarrowtail \Omega^d$. Considere las inclusiones $i : r \hookrightarrow r \cup s$ y $j : s \hookrightarrow r \cup s$ y los siguientes diagramas en el topos $\mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "m_a"] & c \arrow[r, "i"] & e \arrow[r, "r \cup s"] & \Omega^e \\
b \arrow[r, "m_b"'] & d \arrow[r, "j"'] & e \arrow[r, "r \cup s"] & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "i \cdot m_a"'] & a \times b \arrow[l, "\pi_a"'] \arrow[r, "\pi_b"] \arrow[d, dashed, "f"] & b \arrow[d, "j \cdot m_b"] \\
e \arrow[d, "r \cup s"'] & e \times e \arrow[l, "\pi_e"] \arrow[r, "\pi_e"'] \arrow[d, dashed, "g"] & e \arrow[d, "r \cup s"] \\
\Omega^e & \Omega^e \times \Omega^e \arrow[l, "\pi_{\Omega^e}"] \arrow[r, "\pi_{\Omega^e}"'] & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

El morfismo inducido $f = \langle i \cdot m_a \cdot \pi_a, j \cdot m_b \cdot \pi_b \rangle$ es mono dado que $i \cdot m_a$, $j \cdot m_b$, π_a y π_b lo son. De manera similar $g = \langle r \cup s \cdot \pi_e, r \cup s \cdot \pi_e \rangle$ es un monomorfismo dado que $r \cup s$ y π_e lo son. Por lo tanto $a \leqslant e$ y $b \leqslant e$ como subobjetos de Ω^e implican $a \times b \leqslant e \times e$ como subobjetos de $\Omega^e \times \Omega^e$.

En el siguiente diagrama $h = [i_e \cdot i \cdot m_a, i_e \cdot j \cdot m_b]$ es mono dado que $i \cdot m_a$, $j \cdot m_b$ e i_e son monomorfismos.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "i \cdot m_a"'] & a + b \arrow[d, dashed, "h"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[d, "j \cdot m_b"] \\
e \arrow[r, "i_e"'] \arrow[dr, "\exists_{r\cup s} \cdot r \cup s"'] & e + e \arrow[d, dashed, "k"] & e \arrow[l, "i_e"] \arrow[dl, "\exists_{r\cup s} \cdot r \cup s"] \\
 & \Omega^{\Omega^e} \arrow[d, "\exists_{\exists_{r\cup s}}"] & \\
 & \Omega^{\Omega^{\Omega^e}} &
\end{tikzcd}
$$

Por la afirmación (3.3.5) $\exists_{r\cup s} : \Omega^e \rightarrowtail \Omega^{\Omega^e}$ y $\exists_{\exists_{r\cup s}} : \Omega^{\Omega^e} \rightarrowtail \Omega^{\Omega^{\Omega^e}}$ son objetos conjunto transitivo. Por lo tanto la composición $\exists_{r\cup s} \cdot r \cup s$ es mono y k es un monomorfismo. Por consiguiente con la composición $k \cdot h$ y el objeto conjunto transitivo $\exists_{\exists_{r\cup s}} : \Omega^{\Omega^e} \rightarrowtail \Omega^{\Omega^{\Omega^e}}$ el objeto $a + b$ es parcialmente transitivo.

Retomando el producto se tiene $a \times b \leqslant e \times e \leqslant \Omega^e \times \Omega^e$. Se cumple $\Omega^e \times \Omega^e \cong \Omega^{e\times e} \cong \Omega^{e+e}$, sea $s : \Omega^e \times \Omega^e \to \Omega^{e+e}$ tal isomorfismo. Sea $t = \Omega^{\Omega^e}$, como $k : e + e \rightarrowtail t$ es mono $\exists_k : \Omega^{e+e} \rightarrowtail \Omega^t$ es mono y por lo tanto la composición $m = \exists_k \cdot s \cdot g \cdot f$ es un monomorfismo.

$$
a \times b \xrightarrow{f} e \times e \xrightarrow{g} \Omega^e \times \Omega^e \xrightarrow{s} \Omega^{e+e} \xrightarrow{\exists_k} \Omega^t
$$

Sea $w = \Omega^{\Omega^{r\cup s}}$, con esta notación $w : t \rightarrowtail \Omega^t$ es un objeto conjunto transitivo lo cual implica que $\exists_w : \Omega^t \rightarrowtail \Omega^{\Omega^t}$ es un objeto conjunto transitivo.

$$
a \times b \xrightarrow{m} \Omega^t \xrightarrow{\exists_w} \Omega^{\Omega^t}
$$

Por consiguiente el objeto $a \times b$ es un objeto parcialmente transitivo. Sean b^a el objeto exponencial y $eval : b^a \times a \to b$ el morfismo correspondiente a los objetos a y b en el topos $\mathcal{E}$. Considere el siguiente diagrama con δ_b el carácter de la diagonal $\Delta_b : b \to b \times b$.

$$b^a \times a \times b \xrightarrow{eval \times id_b} b \times b \xrightarrow{\delta_b} \Omega$$

Los monomorfismos $eval$ y id_b implican que $eval \times id_b$ es mono. El morfismo δ_b es mono como consecuencia de la unicidad del morfismo Δ_b. La composición $l = \delta_b \cdot eval \times id_b$ es por lo tanto un monomorfismo. Este resultado implica que el adjunto exponencial $\hat{l} : b^a \rightarrowtail \Omega^{a \times b}$ es un monomorfismo.

$$b^a \xrightarrow{\hat{l}} \Omega^{a \times b} \xrightarrow{\exists_m} \Omega^{\Omega^t} \xrightarrow{\exists_{\exists_w}} \Omega^{\Omega^{\Omega^t}}$$

En el diagrama anterior $\exists_m$ es mono porque m es mono y $\exists_{\exists_w}$ es un objeto conjunto transitivo porque $\exists_w$ es un objeto conjunto transitivo. Por lo tanto $\exists_m \cdot \hat{l}$ es mono y b^a es un objeto parcialmente transitivo. Se concluye que la categoría $\mathcal{E}_p$ tiene objetos exponenciales.

5. En el primer inciso se muestra que $1 \rightarrowtail 1 \rightarrowtail \Omega^1$ es un objeto conjunto. De manera similar dado que el funtor $\exists$ preserva monomorfismos (1.6.6) y objetos conjunto transitivo (3.3.5) $\Omega^1 \rightarrowtail \Omega^1 \rightarrowtail \Omega^{\Omega^1}$ es un objeto conjunto. Este objeto es isomorfo a $\Omega \rightarrowtail \Omega \rightarrowtail \Omega^{\Omega}$ y por consiguiente por el inciso 2 de la observación (3.7.2) el objeto Ω es parcialmente transitivo. Por lo tanto la categoría $\mathcal{E}_p$ tiene clasificador de subobjetos.

La categoría $\mathcal{E}_p$ tiene límites finitos, objetos exponenciales y clasificador de subobjetos y por lo tanto satisface la definición de topos (1.1.3). □

La relación de pertenencia para los objetos conjunto en un topos elemental $\mathcal{E}$ queda definida formalmente. Con esta herramienta es posible construir un modelo para la axiomática de Zermelo-Fraenkel a partir de un topos arbitrario. Este resultado y la construcción recíproca de una categoría a partir de una versión débil de la axiomática de Zermelo-Fraenkel son los temas del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Zermelo-Fraenkel

En este capítulo se define un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_{ZF}$ para los axiomas de Zermelo-Fraenkel así como un modelo $\mathcal{U}$ para su interpretación. Se muestra que una forma débil de la axiomática de Zermelo-Fraenkel es suficiente para construir una categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Posteriormente a partir de un topos elemental $\mathcal{E}$ se define un modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ para la teoría de conjuntos por medio de las nociones definidas en el capítulo anterior. En este capítulo "$\Rightarrow$" denota la implicación, "$\Leftrightarrow$" la equivalencia, "$\wedge$" la conjunción, "$\vee$" la disyunción, "$\sim$" la negación y "$\approx$" la identidad.

4.1. Lenguaje de primer orden para ZF

Definición 4.1.1 (Lenguaje para ZF)**.** El *lenguaje de primer orden* $\mathcal{L}_{ZF}$ es una instancia del lenguaje formal para la lógica predicativa de primer orden con tercio excluido (1.4.2) tal que,

1. $\mathcal{L}_{ZF}$ está determinado por un único predicado binario cuyo símbolo es $\boldsymbol{\epsilon}$,

2. El lenguaje no tiene constantes individuales ni símbolos funcionales. Los términos del lenguaje son por lo tanto sus variables, que representan conjuntos, y las fórmulas atómicas son las expresiones que tienen la forma $t \boldsymbol{\epsilon} u$ o la forma $u \approx v$ para los términos t, u, v.

Considere los siguientes enunciados del lenguaje $\mathcal{L}_{ZF}$.

A1 *Axioma de extensionalidad*

$\forall t \forall u \forall v((t \in u \Leftrightarrow t \in v) \Rightarrow u \approx v)$.

A2 *Axioma del conjunto vacío*

$\exists t \forall u(\sim (u \in t))$.

A3 *Axioma del par*

$\forall u \forall v \exists t(\forall w(w \in t \Leftrightarrow (w \approx u \vee w \approx v)))$.

A4 *Axioma del conjunto potencia*

$\forall u \exists t(\forall v(v \in t \Leftrightarrow (\forall w(w \in v \Rightarrow w \in u))))$. Si se toma la expresión "$v \subseteq u$" para abreviar "$\forall w(w \in v \Rightarrow w \in u)$" entonces el enunciado se escribe

$\forall u \exists t(\forall v(v \in t \Leftrightarrow (v \subseteq u)))$.

A5 *Axioma de la unión*

$\forall u \exists t(\forall v(v \in t \Leftrightarrow (\exists w(w \in u \wedge v \in w))))$.

A6 *Esquema axiomático de separación acotada*

Una fórmula $\varphi(v)$ es *acotada* si y sólo si cada instancia del cuantificador $\forall$ se encuentra al frente de una subfórmula que tiene la forma $\forall v(v \in t \Rightarrow \psi)$ y cada instancia del cuantificador $\exists$ se encuentra al frente de una subfórmula que tiene la forma $\exists v(v \in t \wedge \psi)$ para un término t del lenguaje. El esquema axiomático de separación produce para cada fórmula acotada $\varphi(v)$ un enunciado $Sep_\varphi \rightleftharpoons \forall u \exists t(\forall v(v \in t \Leftrightarrow (v \in u \wedge \varphi(v))))$.

Definición 4.1.2 (Sistema $\mathbf{Z_0}$)**.** El *sistema axiomático* $\mathbf{Z_0}$ para la teoría de conjuntos se forma a partir del lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_{ZF}$ al añadir los enunciados **A1**-**A6** como axiomas. Este sistema axiomático también recibe el nombre de *teoría de conjuntos de MacLane*.

Observación 4.1.3. Considere una fórmula acotada φ y el enunciado Sep_φ postulado por el axioma **A6**, por extensionalidad se deriva el enunciado

$$\forall u \exists! t(\forall v(v \in t \Leftrightarrow (v \in u \wedge \varphi(v)))).$$

Este enunciado establece la existencia de un único conjunto cuyos miembros son precisamente aquellos elementos de otro conjunto que satisfacen la fórmula acotada φ. Por lo tanto en $\mathbf{Z_0}$ cada uno de los objetos cuya existencia se postula en cada uno de los axiomas **A1**-**A5** es único.

La unicidad de los conjuntos postulados por los axiomas permite el uso de la siguiente notación. Dada una fórmula φ con u libre se escribe $\{u : \varphi\}$ para denotar la colección de conjuntos u que satisfacen φ.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &\risingdotseq \{u : \sim (u \approx u)\} \\
\{u, v\} &\risingdotseq \{t : t \approx u \vee t \approx v\} \\
\{u\} &\risingdotseq \{u, u\} \\
u \cap v &\risingdotseq \{t : t \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge t \boldsymbol{\epsilon}\, v\} \\
u \cup v &\risingdotseq \{t : t \boldsymbol{\epsilon}\, u \vee t \boldsymbol{\epsilon}\, v\} \\
\cap u &\risingdotseq \{z : \forall t (t \boldsymbol{\epsilon}\, u \Rightarrow z \boldsymbol{\epsilon}\, t)\} \\
\mathbf{1} &\risingdotseq \{\mathbf{0}\} \\
\mathcal{P}(u) &\risingdotseq \{z : z \subseteq u\} \\
u + \mathbf{1} &\risingdotseq u \cup \{u\} \\
\langle u, v\rangle &\risingdotseq \{\{u\}, \{u, v\}\}
\end{aligned}
$$

La última definición, obra del matemático polaco K. Kuratowski, captura la propiedad esencial de las parejas ordenadas que se puede expresar como, $\langle u, v\rangle \approx \langle t, w\rangle \Leftrightarrow (u \approx t \wedge v \approx w)$.

Afirmación 4.1.4. *Para $\langle u, v\rangle$ y $\langle t, w\rangle$ la fórmula anterior es derivable en* $\mathbf{Z_0}$.

Demostración. Esta demostración depende fuertemente del axioma de extensionalidad **A1** y del axioma del par **A3**.

- Sea $\langle u, v\rangle \approx \langle t, w\rangle$.

  Si $u \approx v$ entonces $\langle u, v\rangle \approx \{\{u\}, \{u, v\}\} \approx \{\{u\}, \{u, u\}\} \approx \{\{u\}\} \approx \{\{t\}, \{t, w\}\}$. Por lo tanto $\{t\} \approx \{t, w\} \approx \{u\}$ y $u \approx t \approx v \approx w$.

  Sea $\sim (u \approx v)$ y suponga $\{t, w\} = \{u\}$, se obtiene $u \approx t \approx w$ y por consiguiente $\{\{t\}, \{t, w\}\} = \{\{u\}, \{u, u\}\} \approx \{\{u\}\}$. En este caso $\langle u, v\rangle \approx \langle t, w\rangle$ implica $\{\{u\}, \{u, v\}\} \approx \{\{u\}\}$ y por consiguiente $u \approx v$, lo que contradice la hipótesis. Si $\sim (u \approx v)$ y $\{t\} = \{u, v\}$, entonces se obtiene $u \approx t \approx v$, una contradicción. Por consiguiente $\{t\} = \{u\}$ y $\{t, w\} = \{u, v\}$ y por lo tanto $u \approx t$ y $v \approx w$.

- Para establecer la implicación recíproca observe que si $u \approx t$ y $v \approx w$ entonces $\{u\} \approx \{t\}$, $\{u, v\} \approx \{t, w\}$ y $\{\{u\}, \{u, v\}\} \approx \{\{t\}, \{t, w\}\}$. Esto último es equivalente a $\langle u, v\rangle \approx \langle t, w\rangle$.

$\square$

La definición de pareja ordenada permite formalizar las nociones de relación y función, así como su notación respectiva.

$$\begin{aligned}
t \times w &\rightleftharpoons \{\langle u, v\rangle : u \boldsymbol{\epsilon}\, t \wedge v \boldsymbol{\epsilon}\, w\} \\
\mathbf{Op}(u) &\rightleftharpoons \exists t \exists v (u \approx \langle t, v\rangle) \\
\mathbf{Rel}(u) &\rightleftharpoons \forall v (v \boldsymbol{\epsilon}\, u \Rightarrow \mathbf{Op}(v)) \\
\mathbf{Fun}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{Rel}(u) \wedge \forall v \forall t \forall w ((\langle v, t\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge \langle v, w\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u) \Rightarrow t \approx w) \\
\mathbf{Dom}(u) &\rightleftharpoons \{t : \exists v (\langle t, v\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u)\} \\
\mathbf{Im}(u) &\rightleftharpoons \{t : \exists v (\langle v, t\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u)\} \\
\Delta(u) &\rightleftharpoons \{\langle v, v\rangle : v \boldsymbol{\epsilon}\, u\} \\
\mathbf{inf}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{0} \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge (\forall v (v \boldsymbol{\epsilon}\, u \Rightarrow v + \mathbf{1} \boldsymbol{\epsilon}\, u)) \\
v \circ u &\rightleftharpoons \{\langle t, w\rangle : \mathbf{Rel}(u) \wedge \mathbf{Rel}(v) \wedge \exists s (\langle t, s\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge \langle s, w\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, v)\}
\end{aligned}$$

Con la notación anterior considere los siguientes enunciados del lenguaje $\mathcal{L}_{ZF}$.

A7 *Axioma de infinitud*

$\exists u(\mathbf{inf}(u))$.

A8 *Axioma de elección*

$$\begin{aligned}
&\forall u \forall v ((\mathbf{Fun}(u) \wedge \sim (\mathbf{Dom}(u) \approx \mathbf{0}) \wedge \mathbf{Im}(u) \subseteq v) \Rightarrow \\
&\qquad \exists t (\mathbf{Fun}(t) \wedge \mathbf{Dom}(t) \approx v \wedge \mathbf{Im}(v) \subseteq \mathbf{Dom}(u) \wedge u \circ t \circ u \approx u)).
\end{aligned}$$

El enunciado anterior formaliza el axioma **AE** (2.3.11).

Definición 4.1.5 (Modelo para $\mathcal{L}_{ZF}$)**.** Un *modelo* $\mathcal{U} = \langle A, E, \simeq\rangle$ para el lenguaje $\mathcal{L}_{ZF}$ es una estructura con relacionales binarias E y $\simeq$ sobre A, en la que se satisfacen los axiomas para la identidad **I1** e **I2** del lenguaje formal para la lógica predicativa (1.4.2) al interpretar a $\boldsymbol{\epsilon}$ como E y a $\approx$ como $\simeq$.

Esta definición permite que el predicado identidad no se interprete imperativamente como la relacional $\Delta(A) = \{\langle x, y\rangle \subseteq A \times A : x = y\}$. Como en el modelo $\mathcal{U}$ se satisface el axioma **I1**, para cada término t se cumple $t \simeq t$. Sea $\varphi(v) \rightleftharpoons v \approx w$, por el axioma **I2**, $u \simeq t \,\wedge\, t \simeq w$ implica $u \simeq w$. Por lo tanto la relacional $\simeq$ es una equivalencia. Considerando las $\simeq$-clases de equivalencia en A se obtiene un modelo *normalizado,* en el cual $\approx$ se interpreta como la relacional $\Delta(A)$. Este modelo es semánticamente indistinguible del modelo $\mathcal{U}$. Tenga presente que la colección A de los individuos del modelo se describe haciendo uso del metalenguaje. Cualquier referencia a los individuos del modelo por medio de la expresión "$a \in A$" pertenece al metalenguaje. Una colección $\{x \in A : \varphi(x)\}$ es un *metaconjunto* dado que A no es un individuo del modelo. Los individuos del modelo $\mathcal{U}$ se denominan $\mathcal{U}$-conjuntos. Si y es un $\mathcal{U}$-conjunto tal que "$x \in y$" entonces esta expresión tendrá sentido en el modelo $\mathcal{U}$ si y sólo si x también es un $\mathcal{U}$-conjunto.

4.2. La categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$

Definición 4.2.1 (Categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$)**.** Dado un modelo $\mathcal{U} = \langle A, E, \simeq\rangle$ para $\mathbf{Z_0}$ (4.1.2) se construye una *categoría* $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ procediendo de la siguiente forma.

- Los *objetos* de la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ son los $\mathcal{U}$-conjuntos, los miembros de la colección A.

- Los *morfismos* de la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ se definen como tercias $f = \langle a, k, b\rangle$ de objetos de la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ tales que $\mathcal{U} \vDash \varphi[a, k, b]$ para la fórmula $\varphi(t, u, v) \rightleftharpoons \mathbf{Fn}(u) \wedge (\mathbf{Dom}(u) \approx t) \wedge (\mathbf{Im}(u) \subseteq v)$.

  Considere un morfismo $f = \langle a, k, b\rangle$. El objeto a es el *dominio* de f y se denota *dom* f y el objeto b es el *codominio* de f y se denota *cod* f. Dada una pareja ordenada $\langle a, b\rangle Ek$ se denota $f(a)$ al elemento b del codominio y también se denota $f[a]$ a la imagen del morfismo.

- La *composición* de dos morfismos $f = \langle a, k, b\rangle$ y $g = \langle b, l, c\rangle$ que satisfacen *cod* f = *dom* g es el morfismo $g \cdot f = \langle a, h, c\rangle$ donde h es un $\mathcal{U}$-conjunto tal que $\mathcal{U} \vDash \psi[h, k, l]$ para la fórmula $\psi(t, u, v) \rightleftharpoons t \approx v \circ u$.

- Dado un objeto a en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ la *identidad* para a es el morfismo $id_a = (a, k, a)$ tal que $\mathcal{U} \vDash \varphi[k, a]$ para la fórmula $\varphi(t, u) \rightleftharpoons t \approx \Delta(u)$.

Se introducen las siguientes propiedades para morfismos en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Definición 4.2.2 (Morfismos distinguidos)**.**

1. Un morfismo $f = \langle a, R_f, b\rangle$ es un *monomorfismo* si y sólo si para cualesquiera dos morfismos $g = \langle c, R_g, a\rangle$ y $h = \langle c, R_h, a\rangle$ la equivalencia $f \cdot g \simeq f \cdot h$ implica $g \simeq h$.

2. Un morfismo $f = \langle a, R_f, b\rangle$ es un *epimorfismo* si y sólo si para cualesquiera dos morfismos $g = \langle b, R_g, c\rangle$ y $h = \langle b, R_h, c\rangle$ la equivalencia $g \cdot f \simeq h \cdot f$ implica $g \simeq h$.

3. Un morfismo $f = \langle a, R_f, b\rangle$ es un *isomorfismo* si y sólo si existe un morfismo $g = \langle b, R_g, a\rangle$ tal que $f \cdot g \simeq id_b$ y $g \cdot f \simeq id_a$.

La interpretación en $\mathcal{U}$ de la relación de identidad como $\simeq$-clases de equivalencia permite definir la equivalencia de objetos en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Definición 4.2.3 (Objetos isomorfos)**.** Dos objetos a y b son *isomorfos* si y sólo si existe un isomorfismo $f = \langle a, R_f, b\rangle$ si y sólo si como $\mathcal{U}$-conjuntos $a \simeq b$.

Dado que la noción de objeto isomorfo en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ coincide con la noción de equivalencia en el modelo $\mathcal{U}$ la expresión $a \simeq b$ también denota que dos objetos a y b son isomorfos en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Teorema 4.2.4. *La categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es un topos bien punteado.*

Demostración.

1. Objeto terminal:

   Por el axioma del par $\mathbf{1} = \{\mathbf{0}\}$ es un $\mathcal{U}$-conjunto y por consiguiente un objeto de $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Sea a un $\mathcal{U}$-conjunto y considere $R_a = \{\langle a, \mathbf{0}\rangle\}$. Como $\langle a, \mathbf{0}\rangle$ es un $\mathcal{U}$-conjunto R_a es un $\mathcal{U}$-conjunto por el axioma del par. Si $\langle a, x\rangle \simeq \langle a, \mathbf{0}\rangle$, entonces por la afirmación (4.1.4) $x \simeq \mathbf{0}$, por lo tanto R_a es una función. Con esta función se construye el morfismo $!_a = \langle a, R_a, \mathbf{0}\rangle$. Este morfismo es único y está determinado por el objeto a, por lo tanto $\mathbf{1}$ es objeto terminal en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

2. Producto fibrado:

   Sean $f = \langle a, R_f, c\rangle$ y $g = \langle b, R_g, c\rangle$ dos morfismos en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ con mismo codominio. Por el axioma **A6**, $p = \{\langle x, y\rangle : xEa \wedge yEb \wedge f(x) \simeq g(y)\}$ es un $\mathcal{U}$-conjunto. De manera similar, por separación y la afirmación (4.1.4), $R_a = \{\langle\langle x, y\rangle, x\rangle : \langle x, y\rangle Ep\}$ y $R_b = \{\langle\langle x, y\rangle, y\rangle : \langle x, y\rangle Ep\}$ son funciones.

   Considere los morfismos $\pi_a = \langle p, R_a, a\rangle$ y $\pi_b = \langle p, R_b, b\rangle$ en el siguiente diagrama en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[drr, "h"] \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\
& p \arrow[r, "\pi_a"] \arrow[d, "\pi_b"'] & a \arrow[d, "f"] \\
& b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

   Si $\langle x, y\rangle Ep$ entonces $\pi_a(\langle x, y\rangle) \simeq x$, $\pi_b(\langle x, y\rangle) \simeq y$, $\langle x, f(x)\rangle\ E\ R_f$ y $\langle x, g(x)\rangle\ E\ R_g$ con $f(x) \simeq g(x)$. Por lo tanto el diagrama interior conmuta.

   Sean $h = \langle e, R_h, a\rangle$ $k = \langle e, R_k, b\rangle$ morfismos tales que $f \cdot h \simeq g \cdot k$. Para zEe se cumple $\langle z, f \cdot h(z)\rangle \simeq \langle z, g \cdot k(z)\rangle$, por lo tanto $f \cdot h(z) = g \cdot k(z)$ con $h(z)Ea$ y $k(z)Eb$. Por consiguiente $\langle h(z), k(z)\rangle Ep$.

   Por el axioma **A6** y la afirmación (4.1.4), $R_e = \{\langle z, \langle h(z), k(z)\rangle\rangle : zEe\}$ es una función que determina el morfismo $i = \langle e, R_e, p\rangle$. Para cada zEe, $\pi_a \cdot i(z) = \pi_a(\langle h(z), k(z)\rangle) = h(z)$ y $\pi_b \cdot i(z) = \pi_b(\langle h(z), k(z)\rangle) = k(z)$. Por consiguiente $\pi_a \cdot i \simeq h$ y $\pi_b \cdot i \simeq k$.

   Por lo tanto el objeto p y los morfismos π_a y π_b satisfacen las propiedades del producto fibrado de f y g en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

3. Objeto exponencial:

Sean a y b dos objetos en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ y considere la siguiente fórmula, $\varphi(u) \rightleftharpoons \mathbf{Fn}(u) \wedge (\mathbf{Dom}(u) \approx a) \wedge (\mathbf{Im}(u) \subseteq b)$. Por el esquema axiomático de separación la colección $b^a = \{xE(a \times b) : \varphi(x)\}$ es un $\mathcal{U}$-conjunto. Un elemento xEb^a es una función con dominio a y codominio b. Por lo tanto cada elemento xEb^a determina un morfismo $f = \langle a, x, b\rangle$ en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

El metaconjunto $R_{eval} = \{\langle\langle f, x\rangle, y\rangle : \langle f, x\rangle E(b^a \times a), yEb\}$ es una función por el axioma **A6** y la afirmación (4.1.4). Por lo tanto en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$, $eval = \langle (b^a \times a), R_{eval}, b\rangle$ es un morfismo definido para cada $\langle f, x\rangle E(b^a \times a)$ como $eval(\langle f, x\rangle) = f(x)$.

Sean c un objeto y $g = \langle (c \times a), R_g, b\rangle$ un morfismo en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. El metaconjunto $R_{\lambda_g} = \{\langle z, f\rangle : zEc, fEb^a\}$ es una función por el axioma de separación **A6** y la afirmación (4.1.4). Por consiguiente $\lambda_g = \langle c, R_{\lambda_g}, b^a\rangle$ es un morfismo y está definido para cada zEc como el morfismo $\lambda_g(z)Eb^a$ tal que $\lambda_g(z)(x) = g(\langle z, x\rangle)$ para xEa.

El metaconjunto $R = \{\langle\langle z, x\rangle, \langle f, x\rangle\rangle : \langle z, x\rangle E(c \times a), \langle f, x\rangle E(b^a \times a)\}$ es una función por el axioma **A6** y la afirmación (4.1.4). Por consiguiente se obtiene un morfismo $\lambda_g \times id_a = \langle (c \times a), R, (b^a \times a)\rangle$ definido como $\lambda_g \times id_a(\langle z, x\rangle) = \langle \lambda_g(z), x\rangle$ para $\langle z, x\rangle E(c \times a)$. Considere el siguiente diagrama en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\lambda_g"'] & c \times a \arrow[d, "\lambda_g \times id_a"'] \arrow[dr, "g"] & \\
b^a & b^a \times a \arrow[r, "eval"'] & b
\end{tikzcd}$$

Si $\langle z, x\rangle E(c \times a)$ entonces $\lambda_g \times id_a(\langle z, x\rangle) = \langle \lambda_g(z), x\rangle$. Además se cumple $eval(\langle \lambda_g(z), x\rangle) = \lambda_g(z)(x) = g(\langle z, x\rangle)$. Por consiguiente el diagrama anterior conmuta. Sea $h = \langle c, R_h, b^a\rangle$ un morfismo tal que $h \times id_a$ hace conmutativo al diagrama anterior. Para $\langle z, x\rangle E(c \times a)$ se debe cumplir $h(z) \simeq f$ donde f es un morfismo con dominio a, codominio b y tal que para xEa se tiene $eval(\langle f, x\rangle) = f(x) = g(\langle z, x\rangle)$. Por consiguiente $f \simeq \lambda_g(z)$ para cada zEc y por lo tanto $h \simeq \lambda_g$. El objeto b^a junto con el morfismo *eval* satisfacen las propiedades de un objeto exponencial para los objetos a y b en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

4. Clasificador de subobjetos:

   Sea a un objeto en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ y considere la colección de los monomorfismos que tienen por codominio al objeto a. De hecho, al ser una unión de $\mathcal{U}$-subconjuntos de $a \times a$ y por el axioma de separación **A6**, tal colección es un $\mathcal{U}$-conjunto. La relación $\simeq$ es una equivalencia en esta colección de monomorfismos y un subobjeto de a se define como una $\simeq$-clase de equivalencia.

   Por el axioma de la unión $\mathbf{2} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ es un $\mathcal{U}$-conjunto. Las funciones $R_\top = \{\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle\}$ y $R_\perp = \{\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle\}$ son las únicas con dominio $\mathbf{1}$ y codominio $\mathbf{2}$. Estas funciones determinan los morfismos $\top = \langle \mathbf{1}, R_\top, \mathbf{2} \rangle$ y $\perp = \langle \mathbf{1}, R_\perp, \mathbf{2} \rangle$ de manera respectiva.

   Sea $f = \langle c, R_f, a \rangle$ un representante de un subobjeto de a. El meta-conjunto $R_{\chi_f} = \{\langle x, y \rangle : xEa, yE\mathbf{2}\}$ es una función por el axioma de separación **A6** y la afirmación (4.1.4). Sea $\chi_f = \langle a, R_{\chi_f}, \mathbf{2} \rangle$ el morfismo en la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ definido para cada xEa de la siguiente manera.

$$\chi_f(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ si } xEf[c] \\ \mathbf{0} \text{ si } \sim (xEf[c]) \end{cases}$$

   El morfismo χ_f es la función característica del subobjeto f. Considere el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "!_e"'] & & \\
& c \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_c"'] & a \arrow[d, "\chi_f"] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "\top"'] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

Para xEc, $f(x)Ef[c]$ y por lo tanto $\chi_f \cdot f(x) = \mathbf{1} = \top(\mathbf{0}) = \top_c(x)$. Por lo tanto χ_f hace conmutativo el cuadrado interior del diagrama anterior. Sean $h = \langle e, R_h, a\rangle$ y $!_e = \langle e, \{\langle x, 0\rangle : xEe\}, 1\rangle$ los morfismos tales que $\chi_f \cdot h = \top_e$. Por consiguiente para xEe se cumple $\chi_f \cdot h(x) = \top_e(x) = \mathbf{1}$. Por definición de la función característica la igualdad anterior implica $h(x)Ef[c]$, de donde existe y_xEc tal que $f(y_x) = h(x)$.

Esto determina una función $R_i = \{\langle x, y_x\rangle : xEe, y_xEc, f(y_x) = h(x)\}$ y por la afirmación (4.1.4) un único morfismo $i = \langle e, R_i, c\rangle$ que satisface para cada xEe, $f \cdot i(x) = f(y_x) = h(x)$ y $!_c \cdot i(x) = \mathbf{0} =!_e(x)$. Por lo tanto el cuadrado interior en el diagrama anterior es un producto fibrado.

La función característica es, por construcción, única para cada subobjeto. Por consiguiente la pareja $(\mathbf{2}, \top)$ constituye un clasificador de subobjetos para la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Las propiedades 1 y 2 implican que la categoría tiene límites finitos y con las propiedades 3 y 4 la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ satisface la definición de topos elemental (1.1.3).

5. Bien punteado:

   La categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es un topos, para d un $\mathcal{U}$-conjunto arbitrario considere el $\mathcal{U}$-conjunto $Sub(d)$ de los subobjetos de d. Sean f y g dos subobjetos de d tales que $f \leqslant g$. Por definición f y g son monomorfismos $f = \langle a, R_f, d\rangle$, $g = \langle b, R_f, d\rangle$ y existe un morfismo $m = \langle a, R_m, b\rangle$ tal que $g \cdot m = f$.

   En la categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ un morfismo $\mathbf{1} \to d$ determina una pareja ordenada $\langle 0, x\rangle$ con xEd y por lo tanto un d-elemento x bajo la relación E.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] & d \\
a \arrow[u, "m"] \arrow[ur, "f"] & 1 \arrow[u, "x"'] \arrow[l, dashed, "y"]
\end{tikzcd}$$

La expresión del metalenguaje "$x \in f$" equivale a la existencia de un morfismo $y : 1 \to a$ tal que $x = f \cdot y$ y por lo tanto se interpreta en $\mathcal{U}$ como un a-elemento yEa con $f(y) = x$. Dado que el diagrama anterior conmuta se cumple $x = f(y) = g(m(y))$ para el b-elemento determinado por la composición $m \cdot y$ y por consiguiente "$x \in g$". Por lo tanto el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es extensional (2.2.12) y por la afirmación (2.2.16) se concluye que $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es un topos bien punteado.

□

Las siguientes afirmaciones establecen dos propiedades adicionales para el topos bien punteado $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Afirmación 4.2.5. *Si además $\mathcal{U} \vDash$ **A7** entonces $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash$ **ONN**.*

Demostración. Suponga que el axioma de infinitud **A7** es válido en $\mathcal{U}$, existe un objeto N en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ tal que $\mathbf{0}EN$ y para todo $\mathcal{U}$-conjunto v, vEN implica $(v + \mathbf{1})EN$. Considere las funciones $R_0 = \{\langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle\}$, $R_s = \{\langle a, a + \mathbf{1} \rangle : aEN\}$ y los morfismos $O = \langle \mathbf{1}, R_0, N \rangle$ y $s = \langle N, R_s, N \rangle$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Sean a un $\mathcal{U}$-conjunto, $\mathbf{1} \xrightarrow{x} a$ un a-elemento arbitrario y $f = \langle a, R_f, a \rangle$ un morfismo cualquiera en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Se define de manera recursiva el morfismo $h = \langle N, R_h, a \rangle$ como $h(O) = x$ y para vEN, $h(v + \mathbf{1}) = f \cdot h(v)$. Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "O"] \arrow[dr, "x"'] & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"'] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & a \arrow[r, "f"'] & a
\end{tikzcd}$$

Por definición el morfismo h es único y por consiguiente (N, O, s) es un objeto números naturales (2.4.1) en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. □

Afirmación 4.2.6. *Si además $\mathcal{U} \vDash$ **A8** entonces $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash$ **AE**.*

Demostración. Suponga que el axioma de elección **A8** es válido en $\mathcal{U}$ y sea $f = \langle a, R_f, b\rangle$ un morfismo con $\sim (a \approx \mathbf{0})$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$, por definición R_f es una función tal que $\sim (\mathbf{Dom}(R_f) \approx \mathbf{0})$ e $(\mathbf{Im}(R_f) \subseteq b)$. Por el axioma de elección existe una función R_g tal que $\mathbf{Dom}(R_g) \approx b$, $\mathbf{Im}(R_g) \subseteq \mathbf{Dom}(R_f)$ y $R_f \circ R_g \circ R_f \approx R_f$. Esta función determina un morfismo $g = \langle b, R_g, a\rangle$ tal que $f \cdot g \cdot f = f$. Por consiguiente el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ satisface el axioma **AE** (2.3.11). $\square$

Al formalizar los conceptos de la categoría Con, un modelo para la teoría $\mathbf{Z_0}$ constituye un topos bien punteado, esta reducción del sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel es suficiente para llevar a cabo la construcción. En la siguiente sección se describe el procedimiento inverso que consiste en construir un modelo para la teoría de conjuntos a partir de un topos elemental.

4.3. El modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$

Considere la expresión $\mathbf{Tr}(u) \rightleftharpoons \forall v(v \epsilon u \Rightarrow v \subseteq u)$ y los siguientes enunciados del lenguaje $\mathcal{L}_{ZF}$.

A9 *Axioma de regularidad*

$\forall u(\sim (u \approx \mathbf{0}) \Rightarrow \exists v(v \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge v \cap u \approx \mathbf{0}))$.

A10 *Axioma de transitividad*

$\forall t(\exists u(t \subseteq u \wedge \mathbf{Tr}(u)))$.

Observación 4.3.1. En un modelo para $\mathbf{Z_0}$ + **A10** para cada conjunto t se infiere la existencia de la intersección de los conjuntos transitivos que contienen a t, $\forall t(\exists u(u \approx \bigcap\{v : t \subseteq v \wedge \mathbf{Tr}(v)\}))$. Por extensionalidad existe la cerradura transitiva $ct(t)$ de un conjunto t

$$\forall t(\exists! u(t \subseteq u \wedge \mathbf{Tr}(u) \wedge \forall v((t \subseteq v \wedge \mathbf{Tr}(v)) \Rightarrow u \subseteq v))).$$

Definición 4.3.2 (Modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$)**.** Para $\mathcal{E}$ un topos elemental se determina una estructura $\mathcal{U}(\mathcal{E}) = \langle A_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}, \simeq_{\mathcal{E}}\rangle$ con los siguientes componentes.

- $A_{\mathcal{E}}$ es la colección de *objetos conjunto* en el topos (3.5.3).
- $\in_{\mathcal{E}}$ es la *relacional de pertenencia para objetos conjunto* en el topos (3.6.1).

- $\simeq_{\mathcal{E}}$ es la *relación de equivalencia para los objetos conjunto* en el topos (3.5.6).

La construcción anterior se puede aplicar a cualquier topos elemental. Para un topos bien punteado se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 4.3.3. *Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado y no degenerado entonces $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ es un modelo para $\mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10**.*

Demostración.

- Todo objeto conjunto $(f,r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ satisface $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (f,r)$ al tomar la identidad como inclusión. Si $\varphi(v)$ es una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}_{ZF}$ tal que $\varphi[v/(f,r)]$ con $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$, entonces la fórmula expresa una propiedad del objeto conjunto (f,r) que contiene el predicado $\in$ y elementos lógicos de primer orden. Por la afirmación (3.5.9) $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$ implica que f y g son subobjetos isomorfos y la afirmación (3.6.5) establece que la relacional de pertenencia $\in_{\mathcal{E}}$ coincide con la relacional de pertenencia en la teoría local para $Sub(a \cup b)$, por lo tanto se concluye $\varphi[v/(g,s)]$. Por consiguiente en $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisfacen los axiomas para la igualdad **I1** e **I2**.

- Sean (f,r) y (g,s) objetos conjunto tales que para cualquier objeto conjunto (h,t) se cumple $(h,t) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si $(h,t) \in_{\mathcal{E}} (g,s)$. Considere un objeto conjunto transitivo $v : l \rightarrowtail \Omega^l$ tal que $m : r \hookrightarrow v$, $n : s \hookrightarrow v$ y $o : t \hookrightarrow v$ son inclusiones.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & & c \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "m"] \arrow[d, "r"'] & l \arrow[d, "v"'] & d \arrow[l, "n"'] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^a \arrow[r, "\exists_m"'] & \Omega^l & \Omega^d \arrow[l, "\exists_n"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "h"'] & \\
e \arrow[r, "o"] \arrow[d, "t"'] & l \arrow[d, "v"] \\
\Omega^e \arrow[r, "\exists_o"'] & \Omega^l
\end{tikzcd}$$

Por la definición de la pertenencia en un topos, $(h,t) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ implica que $\ulcorner \chi_{o \cdot h} \urcorner$ se factoriza a través de $v \cdot m \cdot f$ y $(h,t) \in_{\mathcal{E}} (g,s)$ implica que $\ulcorner \chi_{o \cdot h} \urcorner$ se factoriza a través de $v \cdot n \cdot g$. Por lo tanto existen monomorfismos α y β que hacen conmutativos los siguientes diagramas.

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{o \cdot h} \urcorner"] & \\
a \arrow[r, "m \cdot f"'] & l \arrow[r, "v"'] & \Omega^l
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{o \cdot h} \urcorner"] & \\
c \arrow[r, "n \cdot g"'] & l \arrow[r, "v"'] & \Omega^l
\end{tikzcd}
$$

Dado que una pertenencia implica la otra sea $\delta : a \to c$ tal que $\delta \cdot \alpha = \beta$ y sea $\gamma : c \to a$ tal que $\gamma \cdot \beta = \alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & a \arrow[r, "m \cdot f"] \arrow[d, shift right, "\delta"'] & l \\
 & c \arrow[u, shift right, "\gamma"'] \arrow[ur, "n \cdot g"'] &
\end{tikzcd}
$$

El morfismo δ implica $m \cdot f \leqslant n \cdot g$ y de manera similar el morfismo γ implica $n \cdot g \leqslant m \cdot f$. Por lo tanto $m \cdot f \simeq n \cdot g$ como subobjetos de l. Por la definición de la equivalencia para objetos conjunto se concluye $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$. Por consiguiente en $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisface el axioma de extensionalidad **A1**.

- Considere el objeto inicial 0 en el topos $\mathcal{E}$, en la observación (3.3.4) se muestra que $0_{\Omega^0} : 0 \to \Omega^0$ es un objeto conjunto transitivo. La identidad id_0 es un isomorfismo y por lo tanto monomorfismo. Por consiguiente $(id_0, 0_{\Omega^0})$ es un objeto conjunto en $\mathcal{E}$.

  Sea (f,r) un objeto conjunto y suponga $(f,r) \in_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0})$. Por lo tanto $\ulcorner \chi_f \urcorner$ se factoriza a través de $0_{\Omega^0} \cdot id_0 = 0_{\Omega^0}$.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\ulcorner \chi_f \urcorner"] \\ 0 \arrow[r, "0_{\Omega^0}"'] & \Omega^0 \end{tikzcd}$$

Ahora el morfismo $1 \to 0$ implica por la afirmación (1.7.2) que $\mathcal{E}$ es una categoría degenerada contradiciendo la hipótesis. Por consiguiente para cada (f, r) se cumple $\sim ((f, r) \in_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0}))$ y por lo tanto en el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisface el axioma del conjunto vacío **A2**.

- Sean $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ objetos conjunto en el topos $\mathcal{E}$. Por la afirmación (3.5.10) los objetos conjunto $(r \cdot f, \exists_r)$ y $(s \cdot g, \exists_s)$ satisfacen $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (r \cdot f, \exists_r)$ y $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}} (s \cdot g, \exists_s)$.

  Considere la unión $r \cup s$ (3.4.18) de los objetos conjunto transitivo r, s y el subobjeto $f \sqcup g$ de $a \cup b$ (1.3.5).

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "i_c"] \arrow[d, "f"'] & c \sqcup d \arrow[d, "f \sqcup g"'] & d \arrow[l, "i_d"'] \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"'] & b \arrow[l] \arrow[d, "s"] \\ \Omega^a \arrow[r] & \Omega^a \cup \Omega^b & \Omega^b \arrow[l] \end{tikzcd}$$

  Denote p a la composición $r \cup s \cdot f \sqcup g : c \sqcup d \rightarrowtail \Omega^a \cup \Omega^b$ y considere su factorización epi-mono.

$$\begin{tikzcd}
c \sqcup d \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p^*"'] & \Omega^a \cup \Omega^b \\
p(c \sqcup d) \arrow[ur, "im\, p"'] &
\end{tikzcd}$$

Como p es un subobjeto de $\Omega^a \cup \Omega^b$, la observación (3.5.2) establece que p^* es un isomorfismo. Considere el objeto conjunto $(im\, p, t)$. En el siguiente diagrama i y j son inclusiones y $t = \exists_r \cup \exists_s$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p^* \cdot i_c"] \arrow[d, "r \cdot f"'] & p(c \sqcup d) \arrow[d, "im\, p"] & d \arrow[l, "p^* \cdot i_d"'] \arrow[d, "s \cdot g"] \\
\Omega^a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\exists_r"'] & \Omega^a \cup \Omega^b \arrow[d, "t"] & \Omega^b \arrow[l, "j"'] \arrow[d, "\exists_s"] \\
\Omega^{\Omega^a} \arrow[r, "\exists_i"'] & \Omega^{\Omega^a \cup \Omega^b} & \Omega^{\Omega^b} \arrow[l, "\exists_j"]
\end{tikzcd}$$

Si (h, u) es un objeto conjunto tal que $(h, u) \in_{\mathcal{E}} (im\ p, t)$ entonces existe un objeto conjunto $(h', t) \simeq_{\mathcal{E}} (h, u)$ y tal que $(h', t) \in_{\mathcal{E}} (im\ p, t)$. Es decir que existe un $p(c \sqcup d)$-elemento α tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{h'} \urcorner"] & \\
p(c \sqcup d) \arrow[r, "im\, p"'] & \Omega^a \cup \Omega^b \arrow[r, "t"'] & \Omega^{\Omega^a \cup \Omega^b}
\end{tikzcd}$$

La construcción del objeto $p(c \sqcup d)$ implica que se cumple $\alpha = p^*(c)$ o $\alpha = p^*(d)$. Considere los siguientes diagramas en los cuales i_c^* representa la inclusión del objeto $p^*(c)$ en $p(c \cup d)$ e i_d^* representa la inclusión del objeto $p^*(d)$ en $p(c \cup d)$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, shift left, "p^*"] \arrow[dd, "r \cdot f"'] & p^*(c) \arrow[l, shift left] \arrow[d, "i_c^*"'] & p^*(d) \arrow[r, shift right] \arrow[d, "i_d^*"] & d \arrow[l, shift right, "p^*"'] \arrow[dd, "s \cdot g"] \\
 & p(c \sqcup d) \arrow[d, "im\, p"'] & p(c \sqcup d) \arrow[d, "im\, p"] & \\
\Omega^a \arrow[r, "i"'] & \Omega^a \cup \Omega^b & \Omega^a \cup \Omega^b & \Omega^b \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, o se cumple $imp \cdot i_c^* \simeq i \cdot r \cdot f$ como subobjetos de $\Omega^a \cup \Omega^b$, lo cual implica $(h', t) \simeq_{\mathcal{E}} (i \cdot r \cdot f, t) \simeq_{\mathcal{E}} (f, r)$, o se cumple $im\, p \cdot i_d^* \simeq j \cdot s \cdot g$ como subobjetos de $\Omega^a \cup \Omega^b$ lo cual implica $(h', t) \simeq_{\mathcal{E}} (j \cdot s \cdot g, t) \simeq_{\mathcal{E}} (g, s)$. Por consiguiente el objeto conjunto $(im\, p, t)$ satisface el axioma del par **A3**.

- Sea $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto y considere el objeto conjunto $(\exists_f, \exists_r) : \Omega^c \rightarrowtail \Omega^a \rightarrowtail \Omega^{\Omega^a}$ de la observación (3.5.4).

  Un objeto conjunto satisface $(g, s) \in_{\mathcal{E}} (\exists_f, \exists_r)$ si y sólo si existe un objeto conjunto $(g', \exists_r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, s)$ y tal que $(g', \exists_r) \in_{\mathcal{E}} (\exists_f, \exists_r)$ si y sólo si existe un elemento $\alpha : 1 \to \Omega^c$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{g'} \urcorner"] & \\
\Omega^c \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^a \arrow[r, "\exists_r"'] & \Omega^{\Omega^a}
\end{tikzcd}$$

Lo anterior se cumple si y sólo si existe un Ω^a-elemento $\beta = \exists_f \cdot \alpha$ tal que $\beta \in \exists_f$ como subobjetos de Ω^a.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{g'} \urcorner"] & \\
\Omega^c \arrow[r, "\exists_f"'] & \Omega^a \arrow[r, "\exists_r"'] & \Omega^{\Omega^a}
\end{tikzcd}$$

Ahora $\beta \in \exists_f$ si y sólo si existe un subobjeto $h : d \rightarrowtail a$ tal que $h \leqslant f$ en $Sub(a)$ y $(g', \exists_r) \simeq_{\mathcal{E}} (r \cdot h, \exists_r)$.

Por la observación (3.6.7) $h \leqslant f$ implica $(h, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f, r)$ y por la afirmación (3.5.10) se cumple $(r \cdot h, \exists_r) \simeq_{\mathcal{E}} (h, r)$. De los resultados anteriores se concluye $(g', \exists_r) \simeq_{\mathcal{E}} (h, r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, s)$ y por lo tanto $(g, s) \in_{\mathcal{E}} (\exists_f, \exists_r)$ si y sólo si $(g, s) \subseteq_{\mathcal{E}} (f, r)$. Por consiguiente el objeto conjunto $(\exists_f, \exists_r)$ satisface el axioma del conjunto potencia **A4**.

- Sean $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(h, r) : e \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ objetos conjunto tales que $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$. El topos $\mathcal{E}$ es bien punteado y por lo tanto bivalente (2.2.7). El principio del tercio excluido es válido en $\mathcal{E}$ y por consiguiente un objeto conjunto satisface una única de las dos condiciones siguientes.

  1. Se cumple $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ y no existe objeto conjunto alguno tal que $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (g, r)$.

     $$\begin{tikzcd}
      & 1 \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_h \urcorner"] & \\
     c \arrow[r, "f"'] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a
     \end{tikzcd}$$

     En este caso se dice que el objeto conjunto (h, r) es de *tipo 1*.

  2. Se cumple $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (g_1, r) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ para al menos un objeto conjunto (g_1, r). Por lo tanto, considerando la transitividad de

los objetos conjunto (3.6.8), $(g_1, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f, r)$ y por la afirmación (3.6.7) esto implica $g_1 \leqslant f$ en $Sub(a)$.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_h \urcorner"] & \\
d_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, dashed] & a \arrow[r, "r"'] & \Omega^a \\
d_2 \arrow[ur, "g_2"'] & \cdots\cdots\cdots\ \ c \arrow[u, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

En este caso se dice que el objeto conjunto (h, r) es de *tipo 2*. De manera similar el objeto conjunto (g_1, r) puede ser de tipo 1 o de tipo 2. Si es de tipo 2 entonces existe un objeto conjunto (g_2, r) tal que $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (g_1, r) \in_{\mathcal{E}} (g_2, r) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ y por lo tanto se obtiene $(g_1, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (g_2, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f, r)$ lo cual implica $g_1 \leqslant g_2 \leqslant f$ como subobjetos de a. Este proceso *finito* continúa hasta encontrar un objeto conjunto (g, r) de tipo 1 tal que $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (g, r)$.

Sea $\mathcal{F} = \{h_i\}_{i \in I}$ la colección de los subobjetos de a que corresponden a los objetos conjunto de tipo 2 y considere su supremo $\bigsqcup \mathcal{F}$ en $Sub(a)$. Por la observación (1.3.7) $\bigsqcup \mathcal{F}$ es un subobjeto de a y por lo tanto $(\bigsqcup \mathcal{F}, r)$ es un objeto conjunto.

Sea $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (\bigsqcup \mathcal{F}, r)$ por lo tanto (h, r) es de tipo 2 y existe un objeto conjunto (g, r) tal que $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (g, r) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$. Por consiguiente el objeto conjunto $(\bigsqcup \mathcal{F}, r)$ satisface el axioma de la unión **A5**.

- Una fórmula φ acotada por un objeto conjunto $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ determina un subobjeto $g : d \rightarrowtail c$ del subobjeto f del objeto conjunto como se comenta en la sección §2.1.

Por lo tanto se obtiene un subobjeto $f \cdot g$ como en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] & a \\ d \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f \cdot g"'] & \end{tikzcd}$$

Por la afirmación (3.6.7) $f \cdot g \leqslant f$ implica $(f \cdot g, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (f, r)$. Dado que la relación de pertenencia de la teoría local para $Sub(a)$ es compatible con la definición general de pertenencia $\in_{\mathcal{E}}$ para el topos $\mathcal{E}$, $(f \cdot g, r)$ es un objeto conjunto tal que para un objeto conjunto $(h, r) \in_{\mathcal{E}} (f \cdot g, r)$ se satisface $\varphi((h, r))$. Por lo tanto en el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisface el esquema axiomático de separación **A6**.

- Sea (f, r) un objeto conjunto tal que $\sim ((f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0}))$. Por la observación (3.6.8) $r[(f, r)] \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$ y $\sim (r[(f, r)] \simeq_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0}))$. Un objeto conjunto transitivo es una relacional bien fundada (3.4.13), por lo tanto existe un objeto conjunto $(g, r) \in_{\mathcal{E}} r[(f, r)]$ tal que la intersección (3.6.9) de los objetos conjunto satisface $(g, r) \cap_{\mathcal{E}} r[(f, r)] \simeq_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0})$.

  Así $r^{-1}[(g, r)] \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ y si satisface $\sim (r^{-1}[(g, r)] \cap_{\mathcal{E}} (f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0}))$ entonces $\sim ((g, r) \cap_{\mathcal{E}} r[(f, r)] \simeq_{\mathcal{E}} (id_0, 0_{\Omega^0}))$, contradiciendo la buena fundación de la relacional r. Por lo tanto en el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisface el axioma de regularidad **A9**.

- Sea $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto, por la observación (3.6.8) se cumple $(f, r) \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$. Por consiguiente en el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisface el axioma de transitividad **A10**.

$\square$

Afirmación 4.3.4. *Si además* $\mathcal{E} \vDash$ ***ONN*** *entonces* $\mathcal{U}(\mathcal{E}) \vDash$ ***A7***.

Demostración. Sea (N, O, s) objeto números naturales en el topos $\mathcal{E}$ y considere el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d, "h"] \\
1 \arrow[ur, "O"] \arrow[r, "0"'] & N \arrow[r, "s"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Por definición de objeto números naturales el morfismo $h : N \to N$ que hace conmutativo el diagrama anterior es único. Este morfismo está definido recursivamente por las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
h(0) &= 0 \\
h(n+1) &= s(h(n)).
\end{aligned}
$$

El morfismo h genera la sucesión $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), s(s(s(s(0))))...$, y como colección $h = \{\langle 0,0\rangle, \langle s(0), s(0)\rangle, \langle s(s(0)), s(s(0))\rangle ...\}$. Por lo tanto h es una relación extensional en N caracterizada por $r : N \rightarrowtail \Omega^N$, el adjunto exponencial del carácter del morfismo h. Por lo tanto r es una relación extensional y recursiva, satisfaciendo así la definición de objeto conjunto transitivo en $\mathcal{E}$. Un objeto conjunto $a \rightarrowtail N \rightarrowtail \Omega^N$ determina por lo tanto una subsucesión de la sucesión generada por h. Considere el objeto conjunto $(id_N, r) : N \rightarrowtail N \rightarrowtail \Omega^N$. Por construcción $0 \in_{\mathcal{E}} (id_N, r)$ y para cada $n \in_{\mathcal{E}} (id_N, r)$ se cumple $s(n) \in_{\mathcal{E}} (id_N, r)$. Lo anterior muestra que el objeto conjunto (id_N, r) en $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ satisface el axioma **A7**. $\square$

Por lo tanto se tiene un primer procedimiento que permite construir una categoría $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ (4.2.1) a partir de un modelo $\mathcal{U}$ para $\mathbf{Z_0}$ y un segundo procedimiento que determina un modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ para $\mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10** a partir de un topos $\mathcal{E}$. La siguiente sección extiende y relaciona ambas construcciones.

4.4. Representante y parcialidad transitivas

Se postula el teorema de Mostowski (3.2.4) como axioma, dado que la metateoría no incluye el axioma de reemplazo de Zermelo-Fraenkel del cual depende. Considere las siguiente expresiones para relación inyectiva, relación suprayectiva, función biyectiva, relación extensional y relación bien fundada.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Iny}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{Rel}(u) \wedge \forall v \forall w \forall t \forall z\, ((\sim (v \approx w) \wedge \langle v,t\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge \langle w,z\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u) \Rightarrow \\
&\quad \sim (t \approx z)). \\
\mathbf{Sup}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{Rel}(u) \wedge \forall t\, (t \,\boldsymbol{\epsilon}\, \mathbf{Cod}(u) \Rightarrow \exists v\, (\langle v,t\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u)). \\
\mathbf{Biy}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{Fun}(u) \wedge \mathbf{Iny}(u) \wedge \mathbf{Sup}(u). \\
\mathbf{Ext}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{Rel}(u) \wedge \mathbf{Iny}(u). \\
\mathbf{Bf}(u) &\rightleftharpoons \mathbf{Rel}(u) \wedge \exists v \exists t \forall w\, (\langle v,t\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u \wedge \sim (\langle w,v\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u)).
\end{aligned}
$$

A11 *Axioma de Mostowski*

$$
\mathbf{Rel}(u) \wedge \mathbf{Ext}(u) \wedge \mathbf{Bf}(u) \Rightarrow \exists v \exists w (\mathbf{Fun}(v) \wedge \mathbf{Biy}(v) \wedge \mathbf{Dom}(v) \approx u \wedge \mathbf{Cod}(v) \approx w \wedge \mathbf{Tr}(w) \wedge \forall y \forall z (\langle y,z\rangle \boldsymbol{\epsilon}\, u \Leftrightarrow y \,\boldsymbol{\epsilon}\, z \,\boldsymbol{\epsilon}\, w)).
$$

El axioma de Mostowski postula para cada relación extensional y bien fundada la existencia de una biyección en un conjunto transitivo. El conjunto transitivo y la biyección están unívocamente determinados por extensionalidad. Tomando en cuenta el axioma **A11** el siguiente resultado completa la afirmación (4.3.3).

Afirmación 4.4.1. *Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado y no degenerado entonces $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ es un modelo para $\mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10** + **A11**.*

Demostración. Por el teorema (4.3.3) $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ es un modelo para $\mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10**. Sean $(f,r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ un objeto conjunto en $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ y s una relación extensional y bien fundada en (f,r). Por consiguiente s es un subconjunto de la relación bien fundada r (3.4.13). Por lo tanto existe un subobjeto h de c tal que si g denota la composición $f \cdot h$ entonces $s : g(d) \rightarrowtail \Omega^{g(d)}$ con $s = r \restriction_{g(d)}$ y $\Omega^{g(d)} \leqslant \Omega^a$.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] & a \arrow[r, "id_a"] & a \arrow[r, "r"] & \Omega^a \\
d \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & g(d) \arrow[u, "id_{g(d)}"] \arrow[r, "id_{g(d)}"'] & g(d) \arrow[r, "s"'] & \Omega^{g(d)} \arrow[u, "id_{\Omega^{g(d)}}"']
\end{tikzcd}
$$

La identidad $id_{g(d)}$ constituye la inclusión $s \hookrightarrow r$. Dado que $g(d)$ es un subobjeto de a, por la afirmación (3.6.7) se obtiene $(id_{g(d)}, s) \subseteq_{\mathcal{E}} (id_a, r)$. Por consiguiente el objeto conjunto transitivo s con la identidad $id_{g(d)}$ satisface el axioma **A11**. $\square$

El siguiente axioma establece que es posible elegir un representante canónico para cada clase de equivalencia de objetos conjunto transitivo.

Definición 4.4.2 (Axioma **RT**)**.** Existe una operación $\rho : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definida para los objetos conjunto transitivo en un topos $\mathcal{E}$ que satisface $r \simeq \rho(r)$ y la equivalencia, $r \simeq s$ si y sólo si $\rho(r) \simeq \rho(s)$.

En el capítulo anterior se introduce el concepto de objeto *parcialmente transitivo* en el contexto de un topos (3.7.1), este concepto es equivalente a la noción de objeto conjunto. En un topos $\mathcal{E}$ no todos los objetos son parcialmente transitivos, por lo tanto tiene sentido postular el siguiente axioma.

Definición 4.4.3 (Axioma **PT**)**.** Todos los objetos del topos $\mathcal{E}$ son parcialmente transitivos. Para cada objeto b existe un objeto conjunto transitivo $r_b : a \rightarrowtail \Omega^a$ y un monomorfismo $m_b : b \rightarrowtail a$.

La colección de objetos parcialmente transitivos se denota $\mathcal{E}_p$ y tiene las siguientes propiedades.

Teorema 4.4.4. *$\mathcal{E}_p$ es un topos y $\mathcal{E}_p \vDash$ **PT**.*

Demostración. En la afirmación (**??**) se muestra que $\mathcal{E}_p$ es un topos y por definición los objetos del topos $\mathcal{E}_p$ son parcialmente transitivos, por lo tanto se satisface $\mathcal{E}_p \vDash$ **PT**. $\square$

El topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ del teorema (4.2.4) se origina de un modelo $\mathcal{U}$ para el sistema axiomático $\mathbf{Z_0}$, el siguiente resultado completa ese teorema al incorporar los axiomas **A9**, **A10** y **A11**.

Teorema 4.4.5. *$\mathcal{U} \vDash \mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10** + **A11** implica $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ bien punteado, $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash$ **PT** y $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash$ **RT**.*

Demostración. $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es un topos bien punteado por el teorema (4.2.4). Sea a un $\mathcal{U}$-conjunto transitivo, la relación E en a es extensional por el axioma **A1** y bien fundada por el axioma **A9**. El axioma de transitividad **A10** implica que cada $\mathcal{U}$-conjunto a tiene cerradura transitiva $ct(a)$ (4.3.1) y por lo tanto

$\mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash \mathbf{PT}$. Se define en $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ la operación ρ para cada objeto transitivo r como $\rho(r) = y_r$ donde y_r es el único conjunto transitivo cuya existencia postula el axioma **A11**. Por lo tanto la operación ρ satisface $r \simeq \rho(r)$ y $r \simeq s$ si y sólo si $\rho(r) \simeq \rho(s)$. Se concluye $\mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash \mathbf{RT}$. $\square$

El resultado recíproco de la afirmación (4.2.6) se cumple de manera trivial considerando que el axioma de elección **AE** (2.3.11) implica el axioma **PT**.

Observación 4.4.6. La propiedad $\mathcal{E} \vDash \mathbf{AE}$ es equivalente a que cada objeto en el topos esté bien ordenado bajo la relación de pertenencia (Teoremas 3.1 y 3.2 en [Kim04]), por consiguiente cada objeto en el topos es parcialmente transitivo y por lo tanto el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ es isomorfo al topos $\mathcal{E}$. En esta situación en el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ se satisface el axioma de elección **A8** y además el axioma **AE** implica $\mathcal{E}_p \cong \mathcal{E} \cong \mathcal{U}(\mathcal{E})$ de donde $\mathcal{U}(\mathcal{E}) \vDash \mathbf{PT}$.

A continuación se resumen los resultados de este capítulo relativos a las construcciones $\mathcal{U} \to \mathcal{E}(\mathcal{U})$ y $\mathcal{E} \to \mathcal{U}(\mathcal{E})$. **BP** denota que el topos es bien punteado.

$$
\begin{array}{lclr}
\mathcal{U} \vDash \mathbf{Z_0} & \textit{implica} & \mathcal{E}(\mathcal{U}) \vDash \mathbf{BP} & (4.2.4) \\
\quad + \mathbf{A7} & & \quad + \mathbf{ONN} & (4.2.5) \\
\quad + \mathbf{A8} & & \quad + \mathbf{AE} & (4.2.6) \\
\quad + \mathbf{A9} + \mathbf{A10} + \mathbf{A11} & & \quad + \mathbf{PT} + \mathbf{RT} & (4.4.5)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lclr}
\mathcal{E} \vDash \mathbf{BP} & \textit{implica} & \mathcal{U}(\mathcal{E}) \vDash \mathbf{Z_0} + \mathbf{A9} + \mathbf{A10} & (4.3.3) \\
 & & \quad + \mathbf{A11} & (4.4.1) \\
\quad + \mathbf{ONN} & & \quad + \mathbf{A7} & (4.3.4) \\
\quad + \mathbf{AE} & & \quad + \mathbf{A8} + \mathbf{PT} & (4.4.6)
\end{array}
$$

Por último se establecen las condiciones para la equivalencia de las construcciones anteriores.

4.5. Equivalencia y equiconsistencia

Teorema 4.5.1. *Si un topos no degenerado $\mathcal{E}$ satisface $\mathcal{E} \models$ **BP** + **RT** entonces $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ es equivalente al subtopos $\mathcal{E}_p$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}(\mathcal{E}) = \langle A_{\mathcal{E}}, \in_{\mathcal{E}}, \simeq_{\mathcal{E}} \rangle$ el modelo de la definición (4.3.2). Por otra parte $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ es el topos bien punteado formado por los objetos conjunto y las funciones entre objetos conjunto.

- Para un objeto conjunto transitivo $r : a \rightarrowtail \Omega^a$ en $\mathcal{E}$ $\rho r : \rho a \rightarrowtail \Omega^{\rho a}$ denota al representante transitivo postulado en el axioma **RT** (4.4.2).

  Sean $(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a$ y $(g, s) : d \rightarrowtail b \rightarrowtail \Omega^b$ objetos conjunto.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & & d \arrow[d, "g"'] & \\ a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r"'] & \rho a \arrow[d, "\rho r"] & b \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s"'] & \rho b \arrow[d, "\rho s"] \\ \Omega^a \arrow[r] & \Omega^{\rho a} & \Omega^b \arrow[r] & \Omega^{\rho b} \end{tikzcd}$$

  Sean i y j isomorfismos tales que $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (i \cdot f, \rho r)$ y $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}} (j \cdot g, \rho s)$. El axioma **RT** postula la existencia de estos isomorfismos.

  Sea $\Phi : \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E})) \to \mathcal{E}_p$ la asignación que asocia a cada objeto conjunto (f, r) el objeto $\Phi(f, r) = dom(f)$. Observe que $\Phi(f, r)$ también se puede definir como el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} \Phi(f, r) \arrow[r, "i \cdot f"] \arrow[d] & \rho a \arrow[d, "\chi_{i \cdot f}"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\Phi(f,r)$ es un objeto parcialmente transitivo. Observe que se cumple $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$ si y sólo si el objeto conjunto transitivo $r \cup s : a \cup b \rightarrowtail \Omega^{a \cup b}$ y las inclusiones $i_r : r \hookrightarrow r \cup s$ y $i_s : s \hookrightarrow r \cup s$ satisfacen $i_r \cdot f \simeq i_s \cdot g$ como subobjetos de $a \cup b$.

Lo anterior se cumple si y sólo si existe un isomorfismo $k : c \to d$ como en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "id_c"] \arrow[d, "i \cdot f"'] & c \arrow[rr, dashed, "k"] \arrow[d, "f"'] & & d \arrow[r, "id_d"] \arrow[d, "g"] & d \arrow[d, "j \cdot g"] \\
\rho a \arrow[r, "i^{-1}"] \arrow[d, "\rho r"'] & a \arrow[r, "i_r"] \arrow[d, "r"'] & a \cup b \arrow[d, "r \cup s"'] & b \arrow[l, "i_s"'] \arrow[d, "s"] & \rho b \arrow[l, "j^{-1}"'] \arrow[d, "\rho s"] \\
\Omega^{\rho a} \arrow[r] & \Omega^{a} \arrow[r] & \Omega^{a \cup b} & \Omega^{b} \arrow[l] & \Omega^{\rho b} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

En el diagrama se cumple $i_r \cdot i^{-1} \cdot i \cdot f \simeq i_s \cdot j^{-1} \cdot j \cdot g$ como subobjetos de $a \cup b$. Por consiguiente $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$ si y sólo si $(i \cdot f, \rho r) \simeq_{\mathcal{E}} (j \cdot g, \rho s)$ y $\Phi(f,r) \cong \Phi(g,s)$. Por consiguiente la asignación Φ está bien definida.

Sean $\alpha : (f,r) \to (g,s)$ una función en $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ y $u : v \rightarrowtail \Omega^v$ el supremo (3.4.19) de los objetos conjunto transitivo ρr y ρs. Por lo tanto existen inclusiones $i_r : \rho r \hookrightarrow u$ y $i_s : \rho s \hookrightarrow u$ como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, dashed, "\alpha_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "i \cdot f"'] & & d \arrow[d, "j \cdot g"] \\
\rho a \arrow[r, "i_r"] \arrow[d, "\rho r"'] & v \arrow[d, "u"'] & \rho b \arrow[l, "i_s"'] \arrow[d, "\rho s"] \\
\Omega^{\rho a} \arrow[r] & \Omega^{v} & \Omega^{\rho b} \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

La función $\alpha : (f, r) \to (g, s)$ en $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ determina por lo tanto un morfismo $\alpha_{\mathcal{E}} : c \to d$ en $\mathcal{E}$ para los objetos conjunto $(i_r \cdot i \cdot f, u)$ y $(i_s \cdot j \cdot g, u)$.

Considere el producto fibrado que determina al objeto $\Phi(g, s)$.

$$
\begin{tikzcd}
\Phi(f,r) \arrow[dr, dashed, "\Phi\alpha"] \arrow[drr, "i_r \cdot i \cdot f"] \arrow[ddr] & & \\
& \Phi(g,s) \arrow[r, "i_s \cdot j \cdot g"'] \arrow[d] & v \arrow[d, "\chi_{i_s \cdot j \cdot g}"] \\
& 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

En el diagrama (4.1) se cumple $i_r \cdot i \cdot f = i_s \cdot j \cdot g \cdot \alpha_{\mathcal{E}}$ y por lo tanto el morfismo único $\Phi(f, r) \xrightarrow{\Phi\alpha} \Phi(g, s)$ es el morfismo $\alpha_{\mathcal{E}} : c \to d$. Generalizando este resultado se obtiene que cada función $\beta : (f, r) \to (g, s)$ en $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ satisface $\Phi\beta = \beta_{\mathcal{E}} : dom(f) \to dom(g)$. Por consiguiente para un objeto conjunto (f, r) en $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ la identidad $id_{(f,r)}$ satisface $\Phi id_{(f,r)} = id_{domf} = id_{\Phi(f,r)}$. La composición $\beta \cdot \alpha$ de dos funciones

$\alpha : (f, r) \to (g, s)$ y $\beta : (g, s) \to (h, t)$ en $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ determina un morfismo $(\beta \cdot \alpha)_{\mathcal{E}}$ en $\mathcal{E}_p$ para los objetos conjunto $(i_r \cdot i \cdot f, u)$ y $(i_t \cdot k \cdot h, u)$.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, dashed, "(\beta \cdot \alpha)_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "i \cdot f"'] & & f \arrow[d, "k \cdot h"] \\
\rho a \arrow[r, "i_r"] \arrow[d, "\rho r"'] & v \arrow[d, "u"'] & \rho e \arrow[l, "i_t"'] \arrow[d, "\rho t"] \\
\Omega^{\rho a} \arrow[r] & \Omega^{v} & \Omega^{\rho e} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior u es el supremo de los objetos conjunto transitivo ρr, ρs, ρt y el morfismo $i_t : \rho t \hookrightarrow u$ la inclusión correspondiente. Por lo tanto se cumple $\Phi(\beta \cdot \alpha) = (\beta \cdot \alpha)_{\mathcal{E}} = \beta_{\mathcal{E}} \cdot \alpha_{\mathcal{E}} = \Phi\beta \cdot \Phi\alpha$. Se concluye que $\Phi : \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E})) \to \mathcal{E}_p$ es un funtor.

- Considere la asignación $\Psi : \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ que asocia a cada objeto parcialmente transitivo x el objeto conjunto $\Psi x = (m_x, r_x)$ donde m_x y r_x son respectivamente el monomorfismo y el objeto conjunto transitivo de la definición de objeto parcialmente transitivo (3.7.1). Sean x y y objetos y $\alpha : x \to y$ un morfismo en el topos $\mathcal{E}_p$. A estos objetos corresponden los objetos conjunto $\Psi x = (m_x, r_x)$ y $\Psi_y = (m_y, r_y)$ en $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$. Sea u el supremo (3.4.19) de los objetos conjunto transitivo r_x, r_y y $i_x : r_x \hookrightarrow u$, $i_y : r_y \hookrightarrow u$, las correspondientes inclusiones en el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, dashed, "\alpha_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))}"] \arrow[d, "m_x"'] & & y \arrow[d, "m_y"] \\
a \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "r_x"'] & v \arrow[d, "u"'] & b \arrow[l, "i_y"'] \arrow[d, "r_y"] \\
\Omega^a \arrow[r] & \Omega^v & \Omega^b \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{4.2}
$$

Se cumple $(i_x \cdot m_x, u) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} (m_x, r_x)$ y $(i_y \cdot m_y, u) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} (m_y, r_y)$. El morfismo α en $\mathcal{E}_p$ determina una función $\alpha_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} \subseteq r_x \times r_y \subseteq u \times u$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$. Considere el producto fibrado que determina el carácter del subobjeto $i_y \cdot m_y$ de v.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "\Psi\alpha"] \arrow[drr, "i_x \cdot m_x"] \arrow[ddr] & & & \\
& y \arrow[r, "i_y \cdot m_y"'] \arrow[d] & v \arrow[r, dashed, "u"] \arrow[d, "\chi_{i_y \cdot m_y}"] & \Omega^v \\
& 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega &
\end{tikzcd}
$$

En el diagrama (4.2) se cumple $i_x \cdot m_x = i_y \cdot m_y \cdot \alpha_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))}$ y por lo tanto la función única $\Psi x \xrightarrow{\Psi\alpha} \Psi y$ es la función $\alpha_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} : x \to y$. Generalizando este resultado se obtiene que cada morfismo $\beta : y \to z$ en $\mathcal{E}_p$ satisface $\Psi\beta = \beta_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} : (m_y, u) \to (m_z, u)$, siendo u el supremo de los objetos conjunto transitivo r_y y r_z. Por consiguiente para un objeto x en $\mathcal{E}_p$ la identidad id_x satisface $\Psi id_x = id_{(m_x, r_x)} = id_{\Psi x}$.

La composición $\beta \cdot \alpha$ de dos morfismos $\alpha : x \to y$ y $\beta : y \to z$ en $\mathcal{E}_p$ determina una función $(\beta \cdot \alpha)_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} \subseteq r_x \times r_z \subseteq u \times u$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, dashed, "(\beta \cdot \alpha)_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))}"] \arrow[d, "m_x"'] & & z \arrow[d, "m_z"] \\
a \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "r_x"'] & v \arrow[d, "u"'] & c \arrow[l, "i_z"'] \arrow[d, "r_z"] \\
\Omega^a \arrow[r] & \Omega^v & \Omega^c \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

En el diagrama anterior u es el supremo de los objetos conjunto transitivo r_x, r_y r_z y el morfismo $i_z : r_z \hookrightarrow u$ la inclusión correspondiente. Por lo tanto se cumple $\Psi(\beta \cdot \alpha) = (\beta \cdot \alpha)_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} = \beta_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} \cdot \alpha_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E})} = \Psi\beta \cdot \Psi\alpha$. Se concluye que $\Psi : \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ es un funtor.

- Considerando los resultados de los puntos anteriores se obtienen las siguientes composiciones.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E})) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{E}_p \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E})) \\
(f, r) : c \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a \arrow[r, mapsto] & dom(f) = c \arrow[r, mapsto] & (f, r)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_p \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E})) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{E}_p \\
x \arrow[r, mapsto] & (m_x, r_x) : x \rightarrowtail a \rightarrowtail \Omega^a \arrow[r, mapsto] & dom(mx) = x
\end{tikzcd}
$$

En el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ considere la función $\alpha : (f, r) \to (g, s)$. Sean ρr, ρs los representantes transitivos para los objetos conjunto transitivo r, s con los isomorfismos $i : r \hookrightarrow \rho r$, $j : s \hookrightarrow \rho s$ y u el supremo de los objetos conjunto transitivo ρr, ρs con las inclusiones $i_r : r \hookrightarrow u$, $i_s : s \hookrightarrow u$.

Se cumple $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} (i \cdot f, \rho r) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} (i_r \cdot i \cdot f, u)$ y de manera análoga $(g, s) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} (j \cdot g, \rho s) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} (i_s \cdot j \cdot g, u)$ y por lo tanto el siguiente diagrama conmuta para $\lambda_{(f,r)} = id_{(i_r \cdot i \cdot f, u)}$ y $\lambda_{(g,s)} = id_{(i_s \cdot j \cdot g, u)}$.

$$id_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} \Longrightarrow \Psi\Phi$$

$$\begin{tikzcd}
(f,r) \arrow[d, "\alpha"'] & (i_r \cdot i \cdot f, u) \arrow[r, "\lambda_{(f,r)}"] \arrow[d, "\alpha"'] & (i_r \cdot i \cdot f, u) \arrow[d, "\alpha"] \\
(g,s) & (i_s \cdot j \cdot g, u) \arrow[r, "\lambda_{(g,s)}"'] & (i_s \cdot j \cdot g, u)
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente $\lambda : id_{\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))} \Rightarrow \Psi\Phi$ es una transformación natural. Ahora considere un morfismo $\alpha : x \to y$ en el topos $\mathcal{E}_p$. En este caso el siguiente diagrama conmuta sin necesidad de condiciones adicionales para $\mu_x = id_x$ y $\mu_y = id_y$.

$$id_{\mathcal{E}_p} \Longrightarrow \Phi\Psi$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "\alpha"'] & x \arrow[r, "\mu_x"] \arrow[d, "\alpha"'] & x \arrow[d, "\alpha"] \\
y & y \arrow[r, "\mu_y"'] & x
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente $\mu : id_{\mathcal{E}_p} \Rightarrow \Phi\Psi$ es una transformación natural.

Por lo tanto a partir de los resultados expuestos en los puntos anteriores se concluye que las categorías $\mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}))$ y $\mathcal{E}_p$ son equivalentes.

$\square$

Teorema 4.5.2. *Si* $\mathcal{U} \vDash \mathbf{Z_0} + \boldsymbol{A9} + \boldsymbol{A10} + \boldsymbol{A11}$ *entonces el modelo* $\mathcal{U}(\mathcal{E}(\mathcal{U}))$ *es equivalente al modelo* $\mathcal{U}$.

Demostración. Dado $\mathcal{U}$ un modelo para $\mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10** + **A11** considere las siguientes asignaciones.

1. Como el modelo $\mathcal{U}$ satisface el axioma **A10**, cada $\mathcal{U}$-conjunto a tiene cerradura transitiva $ct(a)$. Por lo tanto se define $Obc : \mathcal{U} \to \mathcal{E}(\mathcal{U})$ como la correspondencia que asigna a un $\mathcal{U}$-conjunto a el objeto conjunto $(i_a, \in_a) : a \rightarrowtail ct(a) \rightarrowtail \Omega^{ct(a)}$ en el topos bien punteado $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

2. Si $\mathcal{E}$ es un topos bien punteado entonces el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ satisface el axioma **A11** por la afirmación (4.4.1). Por consiguiente en $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ un conjunto a con una relacional extensional y bien fundada r es isomorfo a un *único* conjunto transitivo $tr(a)$.

   Se define la correspondencia $Str : \mathcal{E} \to \mathcal{U}(\mathcal{E})$ que asigna a cada objeto conjunto $(f, r) : x \rightarrowtail d \rightarrowtail \Omega^d$ la imagen $s_d[f]$ (3.5.1), tomando en cuenta que el axioma **A11** postula la existencia de un isomorfismo $s_d : d \to tr(d)$. Por lo tanto $s_d \cdot f$ es un subobjeto del objeto conjunto transitivo $(id_{tr(d)}, \in_{tr(d)})$, éste se denotará simplemente $tr(d)$.

$$x \xrightarrow{f} d \xrightarrow{s_d} tr(d) \xrightarrow{id} tr(d) \xrightarrow{\in_{tr(d)}} \Omega^{tr(d)}$$

Considere los objetos conjunto $(f, r) : x \rightarrowtail d \rightarrowtail \Omega^d$, $(g, s) : y \rightarrowtail e \rightarrowtail \Omega^e$ y los $\mathcal{U}$-conjuntos a, b.

- $Str \cdot Obc : \mathcal{U} \to \mathcal{E}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}(\mathcal{E}(\mathcal{U}))$

  Se cumple $Obc(a) = (i_a, \in_a)$. Como $ct(a)$ es un conjunto transitivo, la unicidad de $tr(a)$ implica $tr(a) \approx ct(a)$. Por consiguiente al evaluar la composición se obtiene $Str \cdot Obc(a) = Str((i_a, \in_a)) = id_{tr(a)} \cdot i_a(a) \approx a$.

$$a \xrightarrow{i_a} ct(a) \xrightarrow{id} tr(a)$$

- $Obc \cdot Str : \mathcal{E}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}(\mathcal{E}(\mathcal{U})) \to \mathcal{E}(\mathcal{U}(\mathcal{E}(\mathcal{U})))$

  Por definición $Str((f, r)) = s_d \cdot f$, sea $z = s_d \cdot f$.

$$x \xrightarrow{f} d \xrightarrow{s_d} tr(d)$$

Por lo tanto $Obc(z) = (i_z, \in_z) : z \rightarrowtail ct(z) \rightarrowtail \Omega^{ct(z)}$. Además se cumple $ct(z) \subseteq tr(d)$ dado que $ct(z)$ es el conjunto transitivo más pequeño que contiene a z.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "i_z"'] & & x \arrow[d, "f"] \\
ct(z) \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "\in_z"'] & tr(d) & d \arrow[l, "s_d"] \arrow[d, "r"] \\
\Omega^{ct(z)} & & \Omega^d
\end{tikzcd}$$

Se cumple $s_d \cdot f = i \cdot i_z$ y por lo tanto $s_d \cdot f \simeq i \cdot i_z$ como subobjetos de $tr(d)$. Por consiguiente $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}(\mathcal{U})} (i_z, ct_z) = Obc \cdot Str((f, r))$

- Si en un topos $\mathcal{E}$ se cumple $(f, r) \simeq_{\mathcal{E}} (g, s)$, entonces existen una inclusión (3.4.2) $j : s \hookrightarrow r$ y un isomorfismo $h : y \to x$ tales que $j \cdot g = f \cdot h$ como en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & y \arrow[l, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
d \arrow[d, "s_d"'] & e \arrow[l, "j"] \arrow[d, "s_e"] \\
tr(d) & tr(e) \arrow[l, "i"]
\end{tikzcd}$$

Se cumple $Str((f,r)) = s_d \cdot f$ y $Str((g,s)) = s_e \cdot g$. La inclusión j y el morfismo h implican que los $\mathcal{U}$-conjuntos satisfacen $e \subseteq d$ y por lo tanto $tr(e) \subseteq tr(d)$. Por consiguiente en el diagrama anterior i es una inclusión de $\mathcal{U}$-conjuntos y se cumple $s_d \cdot f \approx s_d \cdot j \cdot g \approx i \cdot s_e \cdot g \approx s_e \cdot g$.

De manera recíproca si $Str((f,r)) \approx Str((g,s))$ entonces $s_d \cdot f \approx s_e \cdot g$. Al tomar como inclusiones los morfismos s_d y s_e se obtiene el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & & y \arrow[d, "g"] \\
d \arrow[r, "s_d"'] \arrow[d, "r"'] & tr(d) & e \arrow[l, "s_e"] \arrow[d, "s"] \\
\Omega^d & & \Omega^e
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente como subobjetos de $tr(d)$ la relación $s_d \cdot f \approx s_e \cdot g$ implica $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$. Por consiguiente se concluye $(f,r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$ si y sólo si $Str((f,r)) \approx Str((g,s))$ en $\mathcal{U}(\mathcal{E})$.

- En un topos $\mathcal{E}$ se cumple $(g,s) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si existe un objeto conjunto que satisface $(g',r) \simeq_{\mathcal{E}} (g,s)$ y $(g',r) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ tal como se muestra en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
tr(d) \arrow[d, "id_{tr(d)}"'] & x \arrow[d, "f"'] & y' \arrow[dl, "g'"] \\
tr(d) \arrow[d, "\in_{tr(d)}"'] & d \arrow[l, "s_d"] \arrow[d, "r"'] & \\
\Omega^{tr(d)} & \Omega^d \arrow[l, "\exists_{s_d}"] &
\end{tikzcd}$$

Se cumple $(g', r) \in_{\mathcal{E}} (f, r)$ si y sólo si existe $\alpha : 1 \to x$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{g'} \urcorner"] & \\
x \arrow[r, "f"'] & d \arrow[r, "r"'] \arrow[d, "s_d"'] & \Omega^d \arrow[d, "\exists_{s_d}"] \\
 & tr(d) \arrow[r, "\in_{tr(d)}"'] & \Omega^{tr(d)}
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior conmuta si y sólo si el diagrama siguiente conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{s_d \cdot g'} \urcorner"] & \\
x \arrow[r, "s_d \cdot f"'] & tr(d) \arrow[r, "\in_{tr(d)}"'] & \Omega^{tr(d)}
\end{tikzcd}$$

Y se cumple si y sólo si $s_d \cdot g' = Str((g',r)) \in_{\mathcal{U}(\mathcal{E})} Str((f,r)) = s_d \cdot f$. Ahora por la propiedad del inciso anterior $(g,s) \simeq_{\mathcal{E}} (g',r)$ si y sólo si $Str((g,s)) \approx Str((g',r))$ y por lo tanto se concluye $(g,s) \in_{\mathcal{E}} (f,r)$ si y sólo si $Str((g,s)) \in_{\mathcal{U}(\mathcal{E})} Str((f,r))$ en el modelo $\mathcal{U}(\mathcal{E})$.

- Suponga $a \approx b$ en el modelo $\mathcal{U}$, por lo tanto existe un isomorfismo $s : b \to a$ como en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] & ct(a) \arrow[r, "\in_a"] & \Omega^{ct(a)} \\
b \arrow[u, "s"] \arrow[r, "i_b"'] & ct(b) \arrow[u, dashed, "t"] \arrow[r, "\in_b"'] & \Omega^{ct(b)} \arrow[u, dashed, "\exists_t"']
\end{tikzcd}$$

La composición $i_a \cdot s$ es un subobjeto de $ct(a)$, por lo tanto la definición de cerradura transitiva implica $ct(b) \subseteq ct(a)$. De manera recíproca si s^{-1} es el inverso de s, entonces $i_b \cdot s^{-1}$ es un subobjeto de $ct(b)$ y por consiguiente implica $ct(a) \subseteq ct(b)$. Por extensionalidad $ct(a) \approx ct(b)$ en el modelo $\mathcal{U}$. Por consiguiente $(i_a, \in_a) = Obc(a) \simeq Obc(b) = (i_b, \in_b)$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. De manera recíproca sea $Obc(a) \simeq Obc(b)$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ y considere la inclusión $t : ct(b) \to ct(a)$ en el diagrama anterior. Como subobjetos de $ct(a)$ se cumple $i_a \simeq t \cdot i_b$, lo cual implica que existe un isomorfismo $s : b \to a$ y por lo tanto $a \approx b$ en el modelo $\mathcal{U}$. Se concluye $a \approx b$ si y sólo si $Obc(a) \simeq Obc(b)$.

- Suponga que los $\mathcal{U}$-conjuntos satisfacen bEa en el modelo $\mathcal{U}$. Esto se cumple si y sólo si la inclusión $t : \in_b \hookrightarrow \in_a$ hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & ct(a) \arrow[r, "\in_a"] & \Omega^{ct(a)} \\
1 \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "b"'] & ct(b) \arrow[u, "t"] \arrow[r, "\in_b"'] & \Omega^{ct(b)} \arrow[u, dashed, "\exists_t"']
\end{tikzcd}$$

Lo anterior es equivalente a la existencia de un morfismo $\alpha : 1 \to a$ tal que $i_a \cdot \alpha = a$ en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "\ulcorner \chi_{t \cdot i_b} \urcorner"] & \\
a \arrow[r, "i_a"'] & ct(a) \arrow[r, "\in_a"'] & \Omega^{ct(a)}
\end{tikzcd}$$

El diagrama es equivalente a $(i_b, \in_b) = Obc(b) \in_{\mathcal{E}(\mathcal{U})} Obc(a) = (i_a, \in_a)$. Por lo tanto se concluye bEa si y sólo si $Obc(b) \in_{\mathcal{E}(\mathcal{U})} Obc(a)$ en el topos $\mathcal{E}(\mathcal{U})$.

Las propiedades anteriores establecen la equivalencia de los modelos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}(\mathcal{E}(\mathcal{U}))$. $\square$

Las teorías ($\mathbf{Z_0}$ + **A9** + **A10** + **A11**) y (**BP** + **PT** + **RT**) son lógicamente equivalentes en el sentido que a partir de un modelo de cualquiera de las dos teorías es posible construir un modelo de la otra a partir del cual el modelo original puede ser reconstruido. Además las teorías $\mathbf{Z_0}$, (**BP** + **PT**) y **BP** son relativamente equiconsistentes dado que la existencia de un modelo no degenerado para alguna de ellas implica la existencia de un modelo para cada una de las otras.

Al generalizar algunas de las propiedades del topos de los conjuntos se obtiene una visión sobre las consecuencias de la axiomática respecto a las propiedades lógicas y las propiedades de los morfismos en un topos arbitrario.

La caracterización de la relación de pertenencia en un conjunto transitivo como una relación extensional y recursiva, y su reformulación en términos de morfismos en un topos arbitrario, constituye la base que sustenta la construcción de los objetos conjunto y el desarrollo teórico subsecuente.

Apéndice A

Tres Teoremas

A.1. Teorema de Diaconescu

Esta demostración del teorema de Diaconescu se inspira de la prueba del Teorema 5.2.3 del libro de P.T Johnstone [Joh79]. En el texto principal este teorema aparece como la afirmación (2.3.14).

Afirmación A.1.1. *Si un topos $\mathcal{E}$ satisface $\mathcal{E} \vDash \boldsymbol{EE}$ entonces es booleano.*

Demostración. Sea $f : a \rightarrowtail d$ un subobjeto de d, al formar el coproducto fibrado de f con f se obtienen los morfismos p_1 y p_2.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & d \arrow[d, "p_2"] \\ d \arrow[r, "p_1"'] & c \end{tikzcd}$$

Por el lema del coproducto (1.7.1) p_1 y p_2 son monomorfismos y el diagrama también es un producto fibrado. Considere el coproducto $d + d$ y las inyecciones $i_1, i_2 : d \rightrightarrows d + d$.

- En el topos Con lo anterior equivale a tomar dos copias disjuntas de d, esto es la unión $d_1 \cup d_2 = d + d$. Cada d_i contiene una copia $a_1 \subseteq d_1$ y $a_2 \subseteq d_2$ del subconjunto a.

En el siguiente diagrama $[p_1, p_2] \cdot i_1 \cdot f = [p_1, p_2] \cdot i_2 \cdot f$.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
d \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & d+d \arrow[d, dashed, "{[p_1,p_2]}"] & d \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

Sea $g : d + d \to k$ un morfismo tal que $g \cdot i_1 \cdot f = g \cdot i_2 \cdot f$.

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
d \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, dashed, "g_1"'] & d+d \arrow[d, "g"] & d \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, dashed, "g_2"] \\
 & k &
\end{tikzcd}$$

Existen morfismos $g_1 : d \to k$ y $g_2 : d \to k$ tales que $g \cdot i_1 = g_1$ y $g \cdot i_2 = g_2$. Por lo tanto $g_1 \cdot f = g_2 \cdot f$ lo cual implica que el diagrama exterior del coproducto fibrado conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & d \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, "g_2"] & \\
d \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, "g_1"'] & c \arrow[dr, dashed] & \\
 & & k
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto en el siguiente diagrama $\alpha : c \to k$ es único.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "i_1 \cdot f"] \arrow[r, shift right, "i_2 \cdot f"'] & d + d \arrow[r, "{[p_1, p_2]}"] \arrow[d, "g"] & c \arrow[dl, dashed, "\alpha"] \\
 & k &
\end{tikzcd}
$$

Por consiguiente $[p_1, p_2]$ es coigualador de $i_1 \cdot f$ y $i_2 \cdot f$ y por lo tanto un epimorfismo.

- En Con el coigualador amalgama las copias a_1 y a_2 en un solo subconjunto $a' \cong a$ y deja intactos los respectivos complementos $-a_1$ y $-a_2$. El conjunto c se puede describir como $c = \{-a_1, a', -a_2\}$.

Por el axioma **EE** existe $s : c \to d + d$ una sección para $[p_1, p_2]$.

- En Con la sección s *escinde* el subconjunto a' en dos partes $a'_1 \subseteq d_1$ y $a'_2 \subseteq d_2$ tales que $a'_1 + a'_2 \cong a'$. Así $\{a'_1, -a_1\} + \{a'_2, -a_2\} \subseteq d + d$.

Considere el producto fibrado de s con i_1 y el producto fibrado de s con i_2.

$$
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "z_1"'] & d \arrow[d, "i_1"] \\
c \arrow[r, "s"'] & d+d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "z_2"'] & d \arrow[d, "i_2"] \\
c \arrow[r, "s"'] & d+d
\end{tikzcd}
$$

- En Con el producto fibrado de i_1 y s genera el subconjunto $P_1 \subseteq d_1$ que se obtiene al quitar de d_1 la parte que es isomorfa a a'_2. De manera análoga en Con el producto fibrado de i_2 con s genera el subconjunto $P_2 \subseteq d_2$ que se obtiene al quitar de d_2 la parte que es isomorfa a a'_1.

Dado que el producto fibrado respeta coproductos (1.7.7), al combinar los diagramas anteriores se obtiene el siguiente producto fibrado de la izquierda y además se tiene el diagrama de coproducto de la derecha.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, "s"] \arrow[ddr, "id_c"'] & & \\
& P_1 + P_2 \arrow[r, "{[w_1, w_2]}"'] \arrow[d, "{[z_1, z_2]}"] & d+d \arrow[d, "id_{d+d}"] \\
& c \arrow[r, "s"'] & d+d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r] \arrow[dr, "z_1"'] & P_1 + P_2 \arrow[d, dashed, "{[z_1,z_2]}"] & P_2 \arrow[l] \arrow[dl, "z_2"] \\
& c &
\end{tikzcd}
$$

El diagrama exterior del producto fibrado conmuta y por lo tanto existe un único $g : c \to P_1 + P_2$ tal que $[z_1, z_2] \cdot g = id_c$. Ahora considere la composición $g \cdot [z_1, z_2] : P_1 + P_2 \to P_1 + P_2$. Por la propiedad universal del coproducto se concluye que $g \cdot [z_1, z_2] = id_{P_1+P_2}$. Por consiguiente $[z_1, z_2]$ es un isomorfismo y se cumple $c \cong P_1 + P_2$.

- En Con $P_1 \cong -a_1 \cup a'_1$ y $P_2 \cong -a_2 \cup a'_2$. Ambos son subconjuntos de c y la unión ajena $P_1 + P_2$ es isomorfa a c.

Considere el producto fibrado de p_1 con z_1 y el producto fibrado de p_2 con z_1.

$$\begin{tikzcd} T_{11} \arrow[r, "t_{11}"] \arrow[d, "r_{11}"'] & P_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "z_1"'] & d \arrow[d, "i_1"] \\ d \arrow[r, "p_1"'] & c \arrow[r, "s"'] & d+d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_{12} \arrow[r, "t_{12}"] \arrow[d, "r_{12}"'] & P_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "z_1"'] & d \arrow[d, "i_1"] \\ d \arrow[r, "p_2"'] & c \arrow[r, "s"'] & d+d \end{tikzcd}$$

- En Con los subconjuntos $T_{11} \subseteq P_1$ y $T_{12} \subseteq P_1$ se describen como:

$$T_{11} = d_1 \cap P_1 = (-a_1 + a_1) \cap (-a_1 + a_1') = -a_1 + a_1'$$
$$T_{12} = d_2 \cap P_1 = (-a_2 + a_2) \cap (-a_1 + a_1') = a_1'$$

De manera similar considere el producto fibrado de p_1 con z_2 y el producto fibrado de p_2 con z_2.

$$\begin{tikzcd} T_{21} \arrow[r, "t_{21}"] \arrow[d, "r_{21}"'] & P_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "z_2"'] & d \arrow[d, "i_2"] \\ d \arrow[r, "p_1"'] & c \arrow[r, "s"'] & d+d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_{22} \arrow[r, "t_{22}"] \arrow[d, "r_{22}"'] & P_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "z_2"'] & d \arrow[d, "i_2"] \\ d \arrow[r, "p_2"'] & c \arrow[r, "s"'] & d+d \end{tikzcd}$$

- En Con los subconjuntos $T_{21} \subseteq P_2$ y $T_{22} \subseteq P_2$ se describen como:

$$T_{21} = d_1 \cap P_2 = (-a_1 + a_1) \cap (-a_2 + a_2') = a_2'$$
$$T_{22} = d_2 \cap P_2 = (-a_2 + a_2) \cap (-a_2 + a_2') = -a_2 + a_2'$$

Observe que en los diagramas anteriores p_1, p_2, i_1, i_2 y s son monomorfismos, por consiguiente como resultado de la preservación de monomorfismos bajo productos fibrados, t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, w_1, w_2, z_1 y z_2 también son monomorfismos.
De manera similar, dado que el producto fibrado respeta coproductos, al combinar los diagramas que determinan los subobjetos T_{11} y T_{21} se obtiene el siguiente producto fibrado de la izquierda y además se tiene el diagrama de coproducto de la derecha.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "g\cdot p_1"] \arrow[ddr, "id_d"'] & & \\
& T_{11}+T_{21} \arrow[r, "{[t_{11},t_{21}]}"'] \arrow[d, "{[r_{11},r_{21}]}"] & P_1+P_2 \arrow[d, "{[z_1,z_2]}"] \\
& d \arrow[r, "p_1"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_{11} \arrow[r] \arrow[dr, "r_{11}"'] & T_{11}+T_{21} \arrow[d, dashed, "{[r_{11},r_{21}]}"] & T_{21} \arrow[l] \arrow[dl, "r_{21}"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

El morfismo g es el inverso de $[z_1, z_2]$ y por lo tanto $[z_1, z_2] \cdot g \cdot p_1 = p_1$. El diagrama exterior del producto fibrado conmuta y se induce un único morfismo $h : d \to T_{11} + T_{21}$ tal que $[r_{11}, r_{21}] \cdot h = id_d$. Ahora considere la composición $h \cdot [r_{11}, r_{21}] : T_{11} + T_{21} \to T_{11} + T_{21}$. Por la propiedad universal del coproducto se concluye que $h \cdot [r_{11}, r_{21}] = id_{T_{11}+T_{21}}$. Por consiguiente $[r_{11}, r_{21}]$ es un isomorfismo y se cumple $d \cong T_{11} + T_{21}$.

- En Con lo anterior se expresa como,

$$T_{11} + T_{21} = -a_1 + a'_1 + a'_2 \cong -a_1 + a' \cong d_1.$$

De manera similar dado que el producto fibrado respeta coproductos, al combinar los diagramas que determinan los subobjetos T_{12} y T_{22} se obtiene el siguiente producto fibrado de la izquierda y además se tiene el diagrama de coproducto de la derecha.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[drr, "g \cdot p_2"] \arrow[ddr, "id_d"'] & & \\
& T_{12}+T_{22} \arrow[r, "{[t_{12},t_{22}]}"'] \arrow[d, "{[r_{12},r_{22}]}"] & P_1+P_2 \arrow[d, "{[z_1,z_2]}"] \\
& d \arrow[r, "p_2"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T_{12} \arrow[r] \arrow[dr, "r_{12}"'] & T_{12}+T_{22} \arrow[d, dashed, "{[r_{12},r_{22}]}"] & T_{22} \arrow[l] \arrow[dl, "r_{22}"] \\
& d &
\end{tikzcd}$$

El morfismo g es el inverso de $[z_1, z_2]$ y por lo tanto $[z_1, z_2] \cdot g \cdot p_2 = p_2$. El diagrama exterior del producto fibrado conmuta y se induce un único morfismo $j : d \to T_{12} + T_{22}$ tal que $[r_{12}, r_{22}] \cdot j = id_d$. Ahora considere la composición $j \cdot [r_{12}, r_{22}] : T_{12} + T_{22} \to T_{12} + T_{22}$. Por la propiedad universal del coproducto se concluye que $j \cdot [r_{12}, r_{22}] = id_{T_{12}+T_{22}}$. Por consiguiente $[r_{12}, r_{22}]$ es un isomorfismo y se cumple $d \cong T_{12} + T_{22}$.

- En Con lo anterior se expresa como,

$$T_{12} + T_{22} = a'_1 + -a_2 + a'_2 \cong -a_2 + a' \cong d_2.$$

Considere los siguientes productos fibrados.

$$\begin{tikzcd}
U_{11} \arrow[r] \arrow[d, "s_{11}"'] & T_{11} \arrow[d, "r_{11}"] \\
T_{12} \arrow[r, "r_{12}"'] & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{12} \arrow[r] \arrow[d, "s_{12}"'] & T_{11} \arrow[d, "r_{11}"] \\
T_{22} \arrow[r, "r_{22}"'] & d
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U_{21} \arrow[r] \arrow[d, "s_{21}"'] & T_{21} \arrow[d, "r_{21}"] \\
T_{12} \arrow[r, "r_{12}"'] & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{22} \arrow[r] \arrow[d, "s_{22}"'] & T_{21} \arrow[d, "r_{21}"] \\
T_{22} \arrow[r, "r_{22}"'] & d
\end{tikzcd}$$

Combinando los diagramas que determinan los subobjetos U_{11} y U_{21} por una parte y $U_{12} + U_{22}$ por otra, se obtienen los siguientes productos fibrados.

$$
\begin{tikzcd}
U_{11}+U_{21} \arrow[r] \arrow[d, "{[s_{11},s_{21}]}"'] & T_{11}+T_{21} \arrow[d, "{[r_{11},r_{21}]}"] \\
T_{12} \arrow[r, "r_{12}"'] & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{12}+U_{22} \arrow[r] \arrow[d, "{[s_{12},s_{22}]}"'] & T_{11}+T_{21} \arrow[d, "{[r_{11},r_{21}]}"] \\
T_{22} \arrow[r, "r_{22}"'] & d
\end{tikzcd}
$$

Sean $l_1 = [s_{11}, s_{21}]$, $l_2 = [s_{12}, s_{22}]$, $U = U_{11} + U_{12} + U_{21} + U_{22}$ y combine estos dos últimos diagramas para obtener el siguiente producto fibrado.

$$
\begin{tikzcd}
T_{12}+T_{22} \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, "u"] \arrow[ddr, "id"'] & & \\
& U \arrow[r] \arrow[d, "{[l_1,l_2]}"] & T_{11}+T_{21} \arrow[d, "{[r_{11},r_{21}]}"] \\
& T_{12}+T_{22} \arrow[r, "{[r_{12},r_{22}]}"'] & d
\end{tikzcd}
$$

Dado que $T_{12} + T_{22} \cong d$ y $T_{11} + T_{21} \cong$ se tiene $T_{12} + T_{22} \cong T_{11} + T_{21}$. Por lo tanto en el diagrama anterior u es iso y el exterior del diagrama conmuta. Por consiguiente existe un único α tal que $[l_1, l_2] \cdot \alpha : T_{12} + T_{22} \to T_{12} + T_{22}$ es la identidad. Construya los siguientes coproductos.

$$
\begin{tikzcd}
U_{11} \arrow[r] \arrow[dr, "s_{11}"'] & U_{11}+U_{21} \arrow[d, "l_1"] & U_{21} \arrow[l] \arrow[dl, "s_{21}"] \\
& T_{12} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{12} \arrow[r] \arrow[dr, "s_{12}"'] & U_{12}+U_{22} \arrow[d, "l_2"] & U_{22} \arrow[l] \arrow[dl, "s_{22}"] \\
& T_{22} &
\end{tikzcd}
$$

Se obtiene el siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
U_{11}+U_{21} \arrow[r] \arrow[dr, "l_1"'] & U \arrow[d, dashed, "{[l_1,l_2]}"] & U_{12}+U_{22} \arrow[l] \arrow[dl, "l_2"] \\
& T_{12}+T_{22} &
\end{tikzcd}
$$

Ahora considere la composición $\alpha\cdot[l_1, l_2] : U \to U$. Por la propiedad universal del coproducto se concluye que $\alpha \cdot [l_1, l_2] = id_U$. Por lo tanto $[l_1, l_2]$ es un isomorfismo y se cumple $U \cong T_{12} + T_{22}$, lo cual es equivalente a

$$d \cong U_{11} + U_{12} + U_{21} + U_{22}.$$

- En Con los diagramas anteriores determinan las siguientes intersecciones.

$$
\begin{aligned}
U_{11} &= T_{11} \cap T_{12} = (-a_1 + a_1') \cap a_1' = a_1' \\
U_{12} &= T_{11} \cap T_{22} = (-a_1 + a_1') \cap (-a_2 + a_2') \cong -a_1 \cong -a_2 \\
U_{21} &= T_{12} \cap T_{21} = a_1' \cap a_2' = \emptyset \\
U_{22} &= T_{22} \cap T_{21} = (-a_2 + a_2') \cap a_2' = a_2'
\end{aligned}
$$

De donde $a \cong (U_{11} + U_{22})$ y $(U_{12} + U_{21})$ es el complemento de a en $Sub(d)$.

Para el caso general considere el morfismo $\bigtriangledown : d + d \to d$ determinado por el coproducto.

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "id_d"'] & d+d \arrow[d, dashed, "\bigtriangledown"] & d \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "id_d"] \\
& d &
\end{tikzcd}
$$

Se obtiene $\bigtriangledown \cdot i_1 = id_d$ y $\bigtriangledown \cdot i_2 = id_d$. Considere el coproducto fibrado de f con f.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & d \arrow[d, "p_2"] \arrow[ddr, "i_2"] & \\
d \arrow[r, "p_1"'] \arrow[drr, "i_1"'] & c \arrow[dr, dashed, "s"] & \\
 & & d+d
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto s es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama anterior en su totalidad. Se cumple

$$i_1 = s \cdot p_1$$

$$i_2 = s \cdot p_2.$$

Por lo tanto se obtiene

$$\bigtriangledown \cdot s \cdot p_1 = id_d$$

$$\bigtriangledown \cdot s \cdot p_2 = id_d.$$

De los rectángulos conmutativos que determinan los subobjetos T_{11} y T_{12} se obtiene

$$i_1 \cdot w_1 \cdot t_{11} = s \cdot p_1 \cdot r_{11}$$

$$i_1 \cdot w_1 \cdot t_{12} = s \cdot p_1 \cdot r_{12}.$$

Al componer con el morfismo $\bigtriangledown$ en ambos lados de cada igualdad se obtiene

$$w_1 \cdot t_{11} = r_{11}$$

$$w_1 \cdot t_{12} = r_{12}.$$

Por lo tanto el exterior del siguiente diagrama conmuta. De hecho el diagrama exterior es el diagrama que determina el subobjeto U_{11}. Por consiguiente el interior del diagrama conmuta y es el producto fibrado de la intersección $T_{12} \sqcap T_{11}$ como subobjetos de P_1.

$$\begin{tikzcd}
U_{11} \arrow[r] \arrow[d] & T_{11} \arrow[d, "t_{11}"] \arrow[ddr, "r_{11}"] & \\
T_{12} \arrow[r, "t_{12}"'] \arrow[drr, "r_{12}"'] & P_1 \arrow[dr, "w_1"] & \\
& & d
\end{tikzcd}$$

De manera análoga de los rectángulos conmutativos que determinan los subobjetos T_{21} y T_{22} se obtiene

$$i_2 \cdot w_2 \cdot t_{21} = s \cdot p_2 \cdot r_{21}$$

$$i_2 \cdot w_2 \cdot t_{22} = s \cdot p_2 \cdot r_{22}.$$

Al componer con el morfismo $\bigtriangledown$ en ambos lados de cada igualdad se obtiene

$$w_2 \cdot t_{21} = r_{21}$$

$$w_2 \cdot t_{22} = r_{22}.$$

Por lo tanto el exterior del siguiente diagrama conmuta. De hecho el diagrama exterior es el diagrama que determina el subobjeto U_{22}. Por consiguiente el interior del diagrama conmuta y es el producto fibrado de la intersección $T_{22} \sqcap T_{21}$ como subobjetos de P_2.

$$\begin{tikzcd}
U_{22} \arrow[r] \arrow[d] & T_{21} \arrow[d, "t_{21}"] \arrow[ddr, "r_{21}"] & \\
T_{22} \arrow[r, "t_{22}"'] \arrow[drr, "r_{22}"'] & P_2 \arrow[dr, "w_2"] & \\
 & & d
\end{tikzcd}$$

Combinando los diagramas anteriores se obtiene el siguiente diagrama de la izquierda y el de la derecha se obtiene recordando que se cumple:

$$T_{11} + T_{21} \cong d$$

$$T_{12} + T_{22} \cong d$$

$$P_1 + P_2 \cong c.$$

$$\begin{tikzcd}
U_{11} + U_{22} \arrow[r] \arrow[d] & T_{11} + T_{21} \arrow[d, "{[t_{11}, t_{21}]}"] \\
T_{12} + T_{22} \arrow[r, "{[t_{12}, t_{22}]}"'] & P_1 + P_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{11} + U_{22} \arrow[r] \arrow[d] & d \arrow[d] \\
d \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$

El diagrama de la derecha es el coproducto fibrado de f con f. Se observó que también es el producto fibrado de la intersección $p_1 \sqcap p_2$. Por la unicidad del producto fibrado de dos morfismos se concluye $a \cong U_{11} + U_{22}$.

Dado que se cumple $d \cong (U_{11} + U_{22} + U_{12} + U_{21})$, el subobjeto $U_{12} + U_{21} \rightarrowtail d$ es el complemento de a en $Sub(d)$. Por consiguiente se concluye que $\mathcal{E}$ es un topos booleano. $\square$

A.2. Teorema de Mostowski

En esta sección se demuestra el teorema del colapso de A. Mostowski. Este teorema caracteriza las relaciones bien fundadas y extensionales para modelos de Zermelo-Fraenkel. En el texto principal este resultado aparece como la afirmación (3.2.4) y sustenta la definición de objeto conjunto transitivo en un topos. En las siguientes expresiones "$\Rightarrow$" denota la implicación, "$\Leftrightarrow$" la equivalencia, "$\wedge$" la conjunción, "$\vee$" la disyunción y "$\sim$" la negación. Es necesario recordar las siguientes nociones.

Definición A.2.1.

1. Una relación R es *bien fundada* en un conjunto A si y sólo si todo subconjunto no vacío $X \subseteq A$ tiene un elemento R-mínimo.

2. Una relación R es *extensional* en un conjunto A si y sólo si

   $\forall x \in A\, \forall y \in A\, \forall z \in A\, ((zRx \Leftrightarrow zRy) \Rightarrow x = y)$.

Teorema A.2.2. *Si $R \subseteq A \times A$ es una relación bien fundada y extensional entonces existe un único conjunto transitivo M tal que $\langle A, R\rangle \cong \langle M, \in\rangle$.*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ la clase de los conjuntos y considere $G : A \to \mathcal{V}$ la funcional definida para cada $x \in A$ por $G(x) = \{G(y) \mid yRx\}$. Como R es una relación bien fundada G está bien definida. Por el axioma de reemplazo de Zermelo-Fraenkel $M = G[A]$ es un conjunto y tiene la siguiente propiedad.

1. Si $x \in M$ entonces existe $a \in A$ tal que $G(a) = x$. Sea $y \in x$, por definición $x = G(a) = \{G(z) \mid zRa\}$, por lo tanto existe $z \in A$ tal que $y = G(z)$ y zRa. z es un elemento de la imagen de G y por consiguiente $y \in M$, $x \subseteq M$ y se concluye que M es un conjunto transitivo.

Observe que la funcional G no necesariamente es inyectiva, considere por ejemplo la relación vacía en el conjunto A. Sin embargo la condición de extensionalidad de la relación R implica el siguiente resultado.

2. Sea R una relación extensional, suponga que G es no inyectiva y considere el conjunto $B = \{x \in A \mid \exists y \in A\, (y \neq x \,\wedge\, G(x) = G(y))\}$. Como G es no inyectiva el conjunto B es no vacío. Sea $x \in B$ un elemento R-mínimo, por lo tanto existe $y \neq x$ tal que $G(x) = G(y)$. Además,

los elementos $x, y \in A$ satisfacen la contrapositiva de la definición de extensionalidad de la relación R :

$$(x \neq y) \Rightarrow (\exists z \in A \ \sim (zRx \Leftrightarrow zRy))$$
$$(x \neq y) \Rightarrow (\exists z \in A \, ((zRx \wedge \sim (zRy)) \vee (\sim (zRx) \wedge zRy)))$$

- Sea $z \in A$ tal que zRx y $\sim (zRy)$. La hipótesis zRx implica $G(z) \in \ G(x) = G(y)$. Como $G(y) = \{G(w) \mid wRy\}$ existe un elemento $w \in A$ tal que $G(w) = G(z)$ y wRy. Ahora $\sim (zRy)$ implica $w \neq z$ y esto último junto con $G(w) = G(z)$ implican $z \in B$. Por consiguiente zRx contradice la R-minimalidad de x en B.
- Sea $z \in A$ tal que zRy y $\sim (zRx)$. La hipótesis zRy implica que se cumple $G(z) \in \ G(y) = G(x)$. Como $G(x) = \{G(w) \mid wRx\}$ existe $w \in A$ tal que $G(w) = G(z)$ y wRx. Por otra parte $\sim (zRx)$ implica $w \neq z$ y esto último junto con $G(w) = G(z)$ implican $w \in B$. Por consiguiente wRx contradice la R-minimalidad de x en B.

Por lo tanto se concluye que B es el conjunto vacío y así G es una funcional inyectiva.

3. Suponga G inyectiva y sean $x, y \in A$ tales que $\forall z \in A \, (zRx \Leftrightarrow zRy)$. Se cumple $G(x) = G(y)$ y dado que G es inyectiva se obtiene $x = y$. Por consiguiente R es extensional.

Los puntos anteriores establecen que la relacional R es extensional si y sólo si la funcional G es inyectiva. Por consiguiente la extensionalidad de R garantiza la inyectividad de G, de donde $\forall x \in A \, \forall y \in A((xRy) \Leftrightarrow (G(x) \in G(y)))$. Por lo tanto G es un isomorfismo y queda demostrado $\langle A, R\rangle \cong \langle M, \in\rangle$. En lo particular $\langle M, \in\rangle$ es un conjunto bien fundado. Falta probar la unicidad de este conjunto.

4. Sea M' un conjunto transitivo tal que $\langle A, R\rangle \cong \langle M', \in\rangle$ bajo un isomorfismo $\varphi : A \to M'$. Considere el conjunto $B = \{x \in A \mid G(x) \neq \varphi(x)\}$ y suponga que B es no vacío. Por lo tanto existe $y \in A$ un elemento R-mínimo que satisface $G(y) \neq \varphi(y)$.

- Sea $u \in A$ tal que $u \in G(y)$ y $u \notin \varphi(y)$. Por definición de $G(y)$ existe $z \in A$ tal que $G(z) = u$ y zRy. Por otra parte $u \notin \varphi(y)$ implica $G(z) \neq \varphi(z)$. Por lo tanto se cumple $z \in B$ con zRy, contradiciendo la minimalidad de y.
- De manera similar sea $u \in A$ tal que $u \in \varphi(y)$ y $u \notin G(y)$. Observe que el isomorfismo φ implica $\forall y \in A\,(\varphi(y) = \{\varphi(x) \mid xRy\})$. Por consiguiente existe $z \in A$ tal que $\varphi(z) = u$ y zRy. Por otra parte $u \notin G(y)$ implica $G(z) \neq \varphi(z)$. Por lo tanto se cumple $z \in B$ con zRy, contradiciendo nuevamente la minimalidad de y.

Se concluye que B es vacío y por lo tanto se cumple $\forall x \in A\,(G(x) = \varphi(x))$. El axioma de extensionalidad de Zermelo-Fraenkel implica

$$G[A] = M = M' = \varphi[A].$$

$\square$

Finalmente tenga presente que este teorema depende fuertemente del axioma de reemplazo de Zermelo-Fraenkel.

A.3. Teorema de Osius

En esta sección se demuestra un resultado de G. Osius que permite transportar la noción de relación bien fundada al contexto de un topos elemental. Este resultado figura como la afirmación (3.2.6) en el texto principal. En los siguientes enunciados "$\Rightarrow$" denota la implicación, "$\Leftrightarrow$" la equivalencia, "$\wedge$" la conjunción y "$\sim$" la negación.

Definición A.3.1.

- Una relación $R \subseteq A \times A$ determina una función $r_R : A \to \mathcal{P}(A)$ por medio de la equivalencia xRy si y sólo si $x \in r_R(y)$.
- Dada una relación R en un conjunto A, la *imagen inversa* de un subconjunto $N \subseteq A$ es el conjunto $r_R^{-1}(N) = \{x \in A : r_R(x) \in N\}$.

La demostración de la equivalencia siguiente se inspira de la sección §1.3 del libro de J.A. Amor Montaño [Amo97].

Lema A.3.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes para una relación R en un conjunto A.*

1. *Cada subconjunto de A no vacío tiene un elemento R-mínimo:*

$$\forall B \subseteq A(B \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x_0 \in B(\forall y \in A\,(yRx_0 \Rightarrow y \notin B)))).$$

2. *El siguiente principio de inducción es válido para la relación R :*

$$\forall x \in A((\forall y \in A(yRx \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall x \in A\,(\varphi(x)).$$

3. *Para cualquier conjunto $N \subseteq A$ se cumple:*

$$(r_R^{-1}[\mathcal{P}(N)] \subseteq N) \Rightarrow N = A.$$

Demostración.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Si se cumple $\forall x \in A\,(\forall y \in A(yRx \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x))$ y $\sim (\forall x \in A\,(\varphi(x)))$, entonces el subconjunto $B = \{x \in A : \sim (\varphi(x))\}$ es no vacío y existe un elemento R-mínimo $x_0 \in B$. Este elemento satisface $\forall y \in A(yRx_0 \Rightarrow \varphi(y))$. Por lo tanto se concluye $\varphi(x)$ lo cual contradice la segunda hipótesis. Por consiguiente el conjunto B debe ser vacío y $\forall x \in A\,(\varphi(x))$.

- (2) $\Rightarrow$ (1). Sea $B \subseteq A$ un subconjunto sin elemento R-mínimo y considere la fórmula $\varphi(y) \Leftrightarrow (y \notin B)$. Si $\forall x \in A(\forall y \in A(yRx \Rightarrow y \notin B))$, entonces como B no tiene elemento R-mínimo se cumple $x \notin B$. Por inducción se concluye $\forall x \in A\,(x \notin B)$ y por consiguiente B es vacío. Por lo tanto si $B \neq \emptyset$ tiene un elemento R-mínimo.

- (2) $\Rightarrow$ (3). Sea $N \subseteq A$ tal que $r_R^{-1}[\mathcal{P}(N)] \subseteq N$ y considere la fórmula $\varphi(y) \Leftrightarrow (y \in N)$. Por definición $r_R^{-1}[\mathcal{P}(N)] = \{x \in A : r_R(x) \in \mathcal{P}(N)\}$. Suponga $\forall x \in A(\forall y \in A(yRx \Rightarrow y \in N))$. Para $y \in A$, yRx es equivalente a $y \in r_R(x)$, por lo tanto de $y \in N$ se obtiene $r_R(x) \in \mathcal{P}(N)$ de donde $x \in N$. Por inducción se concluye $\forall x \in A\,(x \in N)$ y por consiguiente $A = N$.

- (3) $\Rightarrow$ (2). Suponga $\forall x \in A(\forall y \in A(yRx \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x))$. Considere el conjunto $N = \{x \in A : \varphi(x)\}$, con esto la hipótesis anterior se expresa como $\forall x \in A(\forall y \in A(yRx \Rightarrow y \in N) \Rightarrow x \in N)$. Para $y \in A$, yRx es equivalente a $y \in r_R(x)$. Por lo tanto yRx implica $r_R(x) \subseteq N$ y $x \in N$. Se obtiene $r_R^{-1}[\mathcal{P}(N)] = \{x \in A : r_R(x) \subseteq N\} \subseteq N$ y por consiguiente se concluye $N = A$ de donde $\forall x \in A\,(\varphi(x))$.

□

Definición A.3.3 (Segmento inicial)**.** Dada una relación R en un conjunto A un *segmento inicial* de R es un subconjunto $C \subseteq A$ tal que

$$\forall x \in A\,(\forall y \in A((xRy \wedge y \in C) \Rightarrow x \in C))$$

Lema A.3.4. *Si R es una relación en un conjunto A entonces la unión y la intersección de segmentos iniciales es un segmento inicial.*

Demostración. Sea $\bigcup_{i\in I} C_i$ una unión de segmentos iniciales. Sean $x, y \in A$ tales que xRy, $y \in \bigcup_{i\in I} C_i$. Por hipótesis C_i es un segmento inicial para cada $i \in I$. Por lo tanto $y \in C_j$ implica $x \in C_j$ para alguna $j \in I$ y se cumple $x \in \bigcup_{i\in I} C_i$. De manera similar sea $\bigcap_{i\in I} C_i$ una intersección de segmentos iniciales. Sean $x, y \in A$ tales que xRy, $y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Dado que C_i es un segmento inicial, $y \in C_i$ implica $x \in C_i$ para cada $i \in I$ y por lo tanto $x \in \bigcap_{i\in I} C_i$. □

Definición A.3.5 (Intento)**.** Considere una relación R bien fundada en un conjunto A y una función $g : A \times \mathcal{P}(B) \to B$, una función $\varphi : C \to B$ es un *intento* si y sólo si C es un segmento inicial de A y $\varphi(x) = g(x, \{\varphi(z) : zRx\})$ para cada $x \in C$.

Lema A.3.6. *Si $\varphi_0 : C_0 \to B$ y $\varphi_1 : C_1 \to B$ son dos intentos, entonces para cada $x \in C_0 \cap C_1$ se cumple $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$.*

Demostración. Suponga que se cumple $\sim (\forall x \in C_0 \cap C_1\,(\varphi_0(x) = \varphi_1(x)))$, entonces el subconjunto $B = \{x \in C_0 \cap C_1 : \varphi_0(x) \neq \varphi_1(x)\}$ es no vacío y dado que R es bien fundada existe x_0 R-mínimo en B. Por lo tanto para cada xRx_0 se cumple $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$ de donde $\varphi_0(x_0) = g(x_0, \{\varphi_0(x) : xRx_0\}) = g(x_0, \{\varphi_1(x) : xRx_0\}) = \varphi_1(x_0)$ lo cual contradice $x_0 \in B$. Se concluye que B es el conjunto vacío. □

Con las nociones definidas anteriormente se obtiene la siguiente caracterización de una relación bien fundada. Este resultado se encuentra en el segundo capítulo de las notas de C. Morgan [Mor06].

Teorema A.3.7. *Dados dos conjuntos A y B, una relación R bien fundada en A y una función $g : A \times \mathcal{P}(B) \to B$, existe una única función $f : A \to B$ tal que $f(x) = g(x, \{f(z) : zRx\})$ para cada $x \in A$.*

Demostración.

- Sea $f = \bigcup\{\varphi : \varphi \text{ es un intento}\}$, f está bien definida dado que dos intentos coinciden en la intersección de sus dominios y $f(x) = \varphi(x)$ para un intento φ con $x \in dom(\varphi)$. El dominio de la función f se puede expresar como $dom(f) = \bigcup\{dom(\varphi) : \varphi \text{ es un intento}\}$ y es un segmento inicial al ser unión de segmentos iniciales (A.3.4). Se cumple $f(x) = g(x, \{f(z) : zRx\})$ para cada $x \in dom(f)$ y por lo tanto f es un intento.

- Si $dom(f) \neq A$ entonces el conjunto $C = \{x \in A : x \notin dom(f)\}$ es no vacío y por lo tanto existe un elemento R-mínimo $x_0 \in C$. Para $x \in C$ se define la función $\bar{f} : dom(f) \cup \{x_0\} \to B$ por medio de $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \in dom(f)$ y $\bar{f}(x_0) = g(x_0, \{f(x) : xRx_0\})$.

- Sea $y \in A$, si yRx_0 entonces se cumple $y \notin C$ de donde $y \in dom(f)$ y por lo tanto $y \in dom(\bar{f})$. Por definición para toda $x \in dom(\bar{f})$ se cumple $\bar{f}(x) = g(x, \{\bar{f}(z) : zRx\})$. Por lo anterior $\bar{f}$ es un intento pero $x_0 \notin dom(f)$ y por lo tanto $\bar{f} \nsubseteq f$ lo cual contradice la definición de f. Por consiguiente $dom(f) = A$ y f es una función $f : A \to B$.

Observe que si $f' : A \to B$ satisface $f'(x) = g(x, \{f'(z) : zRx\})$ entonces es un intento y por lo tanto el lema (A.3.6) implica que se cumple $f(x) = f'(x)$ para cada $x \in A$. □

Teorema A.3.8. *Una relación R es bien fundada en un conjunto A si y sólo si para cualquier conjunto B y cualquier función $g : \mathcal{P}(B) \to B$ existe una única función $f : A \to B$ que hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_R"'] & B \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}f"'] & \mathcal{P}(B) \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

Demostración.

- Sean R una relación bien fundada en un conjunto A, B un conjunto y $g : \mathcal{P}(B) \to B$ una función. Esta función g determina por lo tanto una función $h : A \times \mathcal{P}(B) \to B$ dada por $h = g \cdot \pi_{\mathcal{P}(B)}$.

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
\mathcal{P}(B) \arrow[ur, "g"] & A \times \mathcal{P}(B) \arrow[l, "\pi_{\mathcal{P}(B)}"] \arrow[u, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

  Por el teorema (A.3.7) existe una única función $f : A \to B$ tal que para cada $x \in A$ se cumple $f(x) = h(x, \{f(z) : zRx\})$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= h(x, \{f(z) : zRx\}) \\
&= g \cdot \pi_{\mathcal{P}(B)}(x, \{f(z) : zRx\}) \\
&= g[\{f(z) : zRx\}] \\
&= g \cdot Pf[\{z : zRx\}] \\
&= g \cdot Pf[r_R(x)].
\end{aligned}$$

  Por lo tanto el diagrama conmuta.

- Sea $g = \chi_C : \mathcal{P}(2) \to 2$ la función característica de $C = \{0, \{1\}\}$ como subconjunto de $\mathcal{P}(2)$ y $f : A \to 2$ la única función que hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_R"'] & \{0,1\} \\
\mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}f"'] & \{0,\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(2) \arrow[u, "\chi_C"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \chi_C \cdot \mathcal{P}f \cdot r_R(x) \\ &= \chi_C \cdot \mathcal{P}f[\{z : zRx\}] \\ &= \chi_C[\{f(z) : zRx\}] \end{aligned}$$

Considere las siguientes propiedades.

1. Se cumple $f(x) = 1$ si y sólo si $\mathcal{P}f[r_R(x)] = 0 = \{f(z) : zRx\}$ y en este caso $r_R(x) = \emptyset$. O bien $\mathcal{P}f[r_R(x)] = \{1\} = \{f(z) : zRx\}$ y en este caso $r_R(x) \neq \emptyset$ y $\forall y(yRx \Rightarrow f(y) = 1)$.

   Se cumple $f(x) = 0$ si y sólo si $\mathcal{P}f[r_R(x)] = 1 = \{f(z) : zRx\}$ y en este caso $\forall y(yRx \Rightarrow f(y) = 0)$.

2. Si $M = \{x \in A : f(x) = 1\}$ entonces $f = \chi_M$, la función característica del subconjunto $M \subseteq A$. Este conjunto satisface:

   - Si $x \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(M)]$ entonces $r_R(x) \subseteq M$ y por lo tanto se cumple $\forall z \in A(zRx \Rightarrow f(z) = 1)$. Por otra parte se tiene $f(x) = \chi_C[\{f(z) : zRx\}] = \chi_C[\{1\}] = 1$. Por lo tanto $x \in M$ y ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(M)] \subseteq M$.
   - Si $x \in M$ entonces $f(x) = \chi_C[\{f(z) : zRx\}] = 1$. Existen dos posibilidades, si $\{f(z) : zRx\} = 0$ entonces se cumple $r_R(x) = \emptyset$ y $r_R(x) \subseteq M$ y si $\{f(z) : zRx\} = \{1\}$ entonces se cumple $\forall z \in A(zRx \Rightarrow f(z) = 1)$. Por lo tanto $r_R(x) \subseteq M$, $x \in r_R^{-1}[\mathcal{P}(M)]$ y $M \subseteq {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(M)]$.

   Se concluye ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(M)] = M$.

3. Sea $M' \subseteq A$ un conjunto tal que $\chi_{M'} : A \to \{0, 1\}$ hace conmutativo el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\chi_{M'}"] \arrow[d, "r_R"'] & \{0,1\} \\ \mathcal{P}(A) \arrow[r, "\mathcal{P}\chi_{M'}"'] & \{0,\{1\}\} \arrow[u, "\chi_C"'] \end{tikzcd}$$

Se cumple $\chi_{M'}(x) = 1$ si y sólo si $\mathcal{P}\chi_{M'}[r_R(x)] = 0$ y en este caso $r_R(x) = \emptyset$. O bien $\mathcal{P}\chi_{M'}[r_R(x)] = \{1\}$ y en este caso $r_R(x) \neq \emptyset$ y $\forall y(yRx \Rightarrow \chi_{M'}(y) = 1)$.

Se cumple $\mathcal{P}\chi_{M'}[r_R(x)] = 1 = \{\chi_{M'}(z) : zRx\}$ si y sólo si se satisface $\chi_{M'}(x) = 0$ y en este caso $\forall y(yRx \Rightarrow \chi_{M'}(y) = 0)$.

Por lo tanto $\chi_{M'} = f = \chi_M$, de donde $M = M'$ y queda establecida la unicidad del conjunto M.

4. Observe que para cada $x \in A$ se cumple $r_R(x) \subseteq A$ y por lo tanto $x \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(A)]$. Además para cada $x \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(A)]$ se cumple $x \in A$. Por lo tanto ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(A)] = A$ y por la unicidad de M se concluye $A = M$.

Sea $N \subseteq A$ tal que ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(N)] \subseteq N$ y considere una relación S transitiva y tal que $R \subseteq S$. El conjunto $L = {r_S}^{-1}[\mathcal{P}(N)]$ tiene las siguientes propiedades:

5. Si $x \in L$ entonces $r_S(x) \subseteq N$. Como la relación S satisface $R \subseteq S$ se cumple $r_R(x) \subseteq r_S(x) \subseteq N$. Por lo tanto $x \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(N)]$ de donde $L \subseteq {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(N)] \subseteq N$.
6. Observe que $L = {r_S}^{-1}[\mathcal{P}(N)] = \{z \in A : r_S(z) \subseteq N\}$. De manera similar considere el conjunto ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)]$ y observe que

$$\begin{aligned}
{r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)] &= \{z \in A : r_R(z) \subseteq L\} \\
&= \{z \in A : r_R(z) \subseteq {r_S}^{-1}[\mathcal{P}(N)]\} \\
&= \{z \in A : \forall y \in A(yRz \Rightarrow r_S(y) \subseteq N)\}.
\end{aligned}$$

- Si $x \in L$ entonces $r_S(x) \subseteq N$. Como la relación S es transitiva se cumple $\forall z \in A\ \forall y \in A(yRz \Rightarrow r_S(y) \subseteq r_S(z))$. Por consiguiente $\forall y \in A(yRx \Rightarrow r_S(y) \subseteq N)$ de donde $x \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)]$ y por lo tanto $L \subseteq {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)]$.
- Si $x \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)]$ entonces $\forall y \in A(yRx \Rightarrow r_S(y) \subseteq N)$. Observe que si $z \in r_S(x)$ entonces para alguna yRx se cumple $z \in r_S(y)$ o $z = y$.
  Sea $z \in r_S(x)$ tal que para alguna yRx se tiene $z \in r_S(y)$. Observe que $r_S(y) \subseteq N$ implica $z \in N$ y por lo tanto se

obtiene $r_S(x) \in N$. Ahora $z = y$ implica $r_R(z) \subseteq r_S(z) \subseteq N$ y por lo tanto $z \in {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(N)]$.
Por consiguiente ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(N)] \subseteq N$ implica $z \in N$.
Por lo tanto $r_S(x) \subseteq N$, $x \in L$ y ${r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)] \subseteq L$.

De lo anterior se concluye $L = {r_R}^{-1}[\mathcal{P}(L)]$.

Por la unicidad del conjunto M (propiedad 3) se concluye $L = M = A$ y como $L \subseteq N$ (propiedad 5) se obtiene $N = A$. Por lo tanto el inciso 3 de la afirmación (A.3.2) implica que la relación R es bien fundada.

$\square$

Bibliografía

[Amo97] J.A. Amor Montaño. *Teoría de conjuntos. Para estudiantes de ciencias.* Las Prensas de Ciencias, 1997.

[Gol79] R. Goldblatt. *Topoi, the categorial analysis of logic*. North-Holland, 1979.

[Joh79] P.T. Johnstone. *Topos Theory*. Academic Press, 1979.

[Kim04] Ig Sung Kim. A study on equivalent forms of the axiom of choice in a well-pointed topos. *Commun. Korean Math. Soc.*, 19(1):29–34, 2004.

[KW71] A. Kock and G.C. Wraith. *Elementary toposes*. Aarhus universitet, Matematisk institut, 1971.

[MM92] I. Moerdijk and S. MacLane. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.

[Mor06] C. Morgan. *Axiomatic Set Theory*. Course Notes. University of Bristol, March 2006.

[MR77] M. Makkai and G.E. Reyes. *First order categorical logic*. Springer-Verlag New York, 1977.

[Osi74] G. Osius. Categorial set theory: a characterization of the category of sets. *J. Pure and Applied Algebra*, 4:79–119, 1974.

[Par74] R. Paré. Colimits in topoi. *American Matematical Society*, 80(3), 1974.

[RS63] H. Rasiowa and R. Sikorski. *The Mathematics of Metamathematics*. Państwowe Wydawn. Naukowe, 1963.

[Rub63] H. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice.* North-Holland, 1963.

[Rub85] H. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice II.* North-Holland, 1985.

[van02] J. van Oosten. *Basic category theory.* BRICS, Computer Science Department, University of Aarhus, 2002.