UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El álgebra topológica $L(X)$ y espacios subnormados

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICO
PRESENTA
JORGE CASTILLEJOS LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. ÁNGEL MANUEL CARRILLO HOYO

México D.F 2010

Hoja de Datos del Jurado

1. Datos del Alumno
Castillejos
López
Jorge
5529507997
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemático
406009711

2. Datos del tutor
M en C
Ángel Manuel
Carrillo
Hoyo

3. Datos del sinodal 1
Dr
Hugo
Arizmendi
Peimbert

4. Datos del sinodal 2
Dr
Carlos
Hernández
Garciadiego

5. Datos del sinodal 3
Dr
Ricardo
Gómez
Aíza

6. Datos del sinodal 4
Dra
Carmen
Martínez-Adame
Isaís

7. Datos del trabajo escrito
El álgebra topológica *L(X)* y espacios subnormados
133 p
2010

Contenido

Prólogo

A cualquier espacio vectorial X sobre el campo $\mathbb{F}$ $(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ siempre es posible dotarlo de una topología que lo hace un espacio vectorial topológico localmente convexo. Basta considerar, por ejemplo, la topología generada por todas las seminormas continuas definidas en X. Está topología es llamada la topología localmente convexa más fina para X.

A diferencia de lo anterior, dada un álgebra A no siempre es posible darle una topología que la haga un álgebra localmente convexa; es decir, no siempre es posible dar una familia de seminormas en A tal que las operaciones de álgebra sean continuas con respecto a la topología que ellas generan . Aunque cabe señalar que la topología localmente convexa más fina para A, vista como espacio vectorial, hace de A un álgebra semitopológica, es decir es una topología vectorial respecto a la cual la operación producto es continua en cada una de las coordenadas.

El problema radica, en vista de lo dicho en el párrafo anterior, en lograr la continuidad del producto. Inclusive el producto de un álgebra A puede ser discontinuo para cualquier topología vectorial, sea ésta localmente convexa o no. En otras palabras, un álgebra puede no admitir una estructura de álgebra topológica. Ejemplos de tales álgebras se dan en los artículos [10] y [18] de y V. Müller y W. Żelazko, respectivamente.

Este trabajo se enfoca, en este contexto, en la importante álgebra $L(X)$ de endomorfismos continuos de un espacio localmente convexo X. La base para su realización la cosntituye el artículo de W. Żelazko, *When is* $L(X)$ *topologizable as a topological algebra?*, el cual tuvo como antecedentes directos dos artículos de J. Esterle: *Sur la non normabilité de certaines algèbres d'opérateurs* y *Sur la métrisabilité de certaines algèbres d'opérateurs,* mismos que también son desarrollados en esta tesis.

En eso tres artículos lo resultados más importantes están relacionados con que X sea un espacio subnormado, lo que significa que en X se puede definir una norma que genera una topología más fina que la X tiene originalmente.

Es obvio que cualquier espacio normado es subnormado y es sabido que cuando X es normado, entonces su norma induce otra en $L(X)$ que es submultiplicativa y que por consiguiente, hace de $L(X)$ un álgebra topológica. Un ejemplo de un espacio X que no es subnormado es cualquiera de Fréchet que no sea normalizable (Corolario 3.6.5).

Para una presentación lo más autocontenida posible fue necesario incluir muchos conceptos y resultados del Análisis funcional. Los más elementales se encuentran en el Capítulo 1 y los que son un poco más complicados y menos conocidos están en el Capítulo 2. Se buscó que la pruebas resultaran claras y sin omitir detalles. A lo largo del trabajo también se usan, sin haberse probado, resultados clásicos; por ejemplo, los teoremas de la Función abierta y Gráfica cerrada, entre otros. Los enunciados de todos ellos, en el contexto de F-espacios, se recuerdan en el Apéndice.

El Capítulo 3 es el principal de esta tesis. Ahí se expone lo hecho por Esterle y Żelazko. Se considera la subálgebra $K_0(X)$ de $L(X)$ formada por los endomorfismos continuos de X de rango finito y se prueba que $K_0(X)$ es normable, o sea admite una estructura de álgebra normada, si y sólo si X es subnormado. Se ve un resultado que extiende el anterior, en una dirección : si $K_0(X)$ admite una estructura de álgebra topológica de Hausdorff, entonces X es subnormado; lo que implica: si $L(X)$ admite tal tipo de estructura (es topologizable), entonces X es subnormado.

Se da un ejemplo de un espacio X en que el inverso de tal resultado es falso y, por otra parte, se prueba que es cierto cuando X es además completo por sucesiones. Bajo esta misma hipótesis se dan condiciones equivalentes a la topologización de $L(X)$.

Se hace ver que la completez por sucesiones de no es una condición necesaria sobre X para que $L(X)$ admita una estructura de álgebra topológica pues se introduce una clase particular de espacios subnormados, llamados espacios sub-Banach, que pueden no ser completos por sucesiones y para los cuales $L(X)$ es topologizable.

También se trata la topologización de $L(X)$, como espacio vectorial, con relación a la continuidad de la función bilineal $\Phi : L(X) \times X \to X$ definida como $\Phi(T, x) = T(x)$. Al respecto se prueba que $L(X)$ es topologizable, como espacio vectorial, de modo que Φ resulte continua si y sólo si X es normado. Cabe señalar que en cierto momento algunos investigadores creyeron que era posible lograr la continuidad de Φ bajo circunstancias más generales.

La topologización de $L(X)$ y la continuidad de Φ han dado pie a la introducción por parte Żelazko [15] de los conceptos de álgebra de operadores y operador topologizable. Una subálgebra unitaria A de $L(X)$ es llamada álgebra de operadores si la restricción de Φ a A es continua. En tanto que $T \in L(X)$ es llamado un operador topologizable si $T \in A$ para algún álgebra de operadores A.

Al final del Capítulo 3 se presenta la primera parte de ese artículo, en particular se dan caracterizaciones de las álgebras de operadores y los operadores topologizables. Con lo ahí hecho se indica por donde podría continuarse el estudio comenzado en este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espacios vectoriales

1.1.1 Conjuntos convexos, balanceados y absorbentes

Denotaremos por $\mathbb{F}$ al campo de los números reales $\mathbb{R}$ o complejos $\mathbb{C}$. Todos los espacios vectoriales considerados tendrán a $\mathbb{F}$ como campo de escalares.

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio vectorial y $S \subset X$. Definimos el espacio generado por S como el mínimo subespacio vectorial de X que contiene a S y lo denotamos por $\langle S \rangle$. Si $S = \emptyset$, entonces $\langle S \rangle = 0$ y en otro caso,*

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \geq 1, x_k \in S; \lambda_k \in \mathbb{F} \text{ para } 1 \leq k \leq n \right\}$$

Definición 1.1.2 *Sea X un espacio vectorial. Para $A, B \subset X$ y $F \subset \mathbb{F}$ definimos*

$A + B = \{a + b \in X : a \in A, b \in B\}$

$FA = \{ra \in X : r \in F, a \in A\}$

Si $A = \{x\}$, entonces escribiremos $x + B$; y si $F = \{r\}$ escribiremos rA.

Definición 1.1.3 *Sea X un espacio vectorial y $A \subset X$*

(a) A es convexo si para todo $x, y \in A$ se tiene que $rx + sy \in A$ si $r, s > 0$ y $r + s = 1$. La suma $rx + sy$ es llamada una combinación convexa de x y y.

(b) A es balanceado si para todo $x \in A$ se tiene que $rx \in A$ si $|r| \leq 1$.

(c) A es absorbente si para todo $x \in X$ existe $s > 0$ tal que $rx \in A$ si $|r| < s$ (equivalentemente, $x \in rA$ si $|r| > s$. Si A es balanceado, entonces se cumple esto último para $s > 0$ tal que $x \in sA$)

Proposición 1.1.4 *Sea X un espacio vectorial.*

(a) La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

(b) Si A es un conjunto convexo entonces $x + A$ es convexo para todo $x \in X$.

(c) La intersección de conjuntos balanceados es un conjunto balanceado.

(d) Si la intersección finita de conjuntos absorbentes es no vacía, entonces es un conjunto absorbente.

(e) Si $A \subset B \subset X$ con A absorbente, entonces B es absorbente.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos. El conjunto $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es convexo si es el vacío. En otro caso, si $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, entonces $x, y \in A_i$ para todo $i \in I$. Usando la convexidad de A_i tenemos que $rx + sy \in A_i$ para todo $i \in I$ si $r, s \in \mathbb{F}$ con $r, s > 0$ y $r + s = 1$, lo que nos lleva a que $rx + sy \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ si $r, s \in \mathbb{F}$ con $r, s > 0$ y $r + s = 1$. Por tanto, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es convexo.

(b) Sea $u, v \in x + A$, por lo cual $u = x + y$; $v = x + z$ con $y, z \in A$. Sean $r, s \in \mathbb{F}$ con $r, s \geq 0$ y $r + s = 1$, entonces

$$\begin{aligned} ru + sv &= r(x + y) + s(x + z) \\ &= (r + s)x + ry + sz \end{aligned}$$

Observando que $ry + sz \in A$, al ser A convexo y que $r + s = 1$, tenemos que $ru + sv \in x + A$. Por tanto, $x + A$ es convexo.

(c) Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos balanceados. El conjunto $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es convexo si es el vacío. En otro caso, sea $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, entonces $x \in A_i$ para todo $i \in I$. Como A_i es balanceado tenemos que $rx \in A_i$, para todo $i \in I$ si $|r| \leq 1$, entonces $rx \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ si $|r| \leq 1$. Por tanto, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ es balanceada.

(d) Sea $\{A_k\}_{k=1}^{k=n}$ una familia de conjuntos absorbentes. Sea $x \in X$, tomemos $\varepsilon = \min\left\{\varepsilon_x^k : 1 \leq k \leq n\right\}$ donde $rx \in A_k$ si $|r| \leq \varepsilon_x^k$. Entonces $rx \in \bigcap\limits_{k=1}^{k=n} A_k$ si $|r| \leq \varepsilon$. Por tanto, $\bigcap\limits_{k=1}^{k=n} A_k$ es absorbente.

(e) Sea $x \in X$, como A es absorbente implica que existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $rx \in A \subset B$ si $|r| < \varepsilon_x$, entonces $rx \in B$ si $|r| < \varepsilon_x$. Por tanto, B es absorbente. ■

Proposición 1.1.5 *Sean X y Y dos espacios vectoriales, $T : X \to Y$ una transformación lineal y $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces,* *(a) $T^{-1}(B)$ es convexo o balanceado si B tiene la propiedad correspondiente.*

(b) $T(A)$ es convexo o balanceado si A tiene la propiedad correspondiente.

(c) $T(A)$ es absorbente en el espacio vectorial $T(X)$ si A es absorbente.

Demostración. Sean $T(x), T(y) \in T(A)$ y $z, w \in T^{-1}(B)$

(a) Sean $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Si B es convexo, entonces $\alpha T(z) + \beta T(w) = T(\alpha z + \beta w)$ pertenece a B; o sea, $\alpha x + \beta y \in T^{-1}(B)$.

Sea $z \in T^{-1}(B)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, con $|\lambda| \leq 1$. Si B es balanceado, entonces $\lambda T(z) = T(\lambda z)$ pertenece a B; o sea, $\lambda z \in T^{-1}(B)$.

(b) Sean $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$. Si A es convexo, entonces $\alpha x + \beta y \in A$ y así, $\alpha T(x) + \beta T(y) = T(\alpha x + \beta y)$ pertenece a $T(A)$.

Sea $z \in T(A)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, con $|\lambda| \leq 1$. Si A es balanceado, entonces $\lambda x \in A$ y así, entonces $\lambda T(x) = T(\lambda x) \in T(A)$ pertenece a $T(A)$.

(c) Existe $s > 0$ tal que $x \in rA$ si $|r| > s$, por tanto $T(x) \in rT(A)$ si $|r| > s$. ∎

Corolario 1.1.6 *Sea X un espacio vectorial, $E \subset X$ y $t \in \mathbb{F}$.*

(a) Si E es balanceado, entonces tE es balanceado.

(b) Si E es convexo, entonces tE es convexo.

Demostración. La transformación $x \to tx$ definida en X es lineal. ∎

Proposición 1.1.7 *Sean X un espacio vectorial, $E \subset X$ convexo y $a, b \geq 0$. Entonces $aE + bE = (a + b)E$.*

Demostración. La contención $(a + b)E \subset aE + bE$ se tiene en general para escalares y conjuntos arbitrarios. Por otra parte, sea $x \in aE + bE$, es decir $x = ax_1 + bx_2$ con $x_1, x_2 \in E$. Observamos que

$$\frac{a}{a+b}; \frac{b}{a+b} > 0 \text{ y } \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

y que

$$\frac{1}{a+b}x = \frac{a}{a+b}x_1 + \frac{b}{a+b}x_2.$$

Por la convexidad de E tenemos que $\frac{1}{a+b}x \in E$; de donde se sigue que $x \in (a + b)E$. Por tanto, $aE + bE \subset (a + b)E$. ∎

1.1.2 Discos

Definición 1.1.8 *Sea X un espacio vectorial y $D \subset X$. Decimos que D es un disco o un conjunto absolutamente convexo si D es balanceado y convexo.*

Proposición 1.1.9 *Sea X un espacio vectorial. Si $D \subset X$ es un disco, entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in D$$

siempre que $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1$ y $x_k \in D$ para $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Sea $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, con $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1$ y $x_k \in E$ para $1 \leq k \leq n$. La afirmación es clara si $x = 0$. Supongamos que $x \neq 0$ y para cada $1 \leq k \leq n$ sea $\sigma_k \in \mathbb{F}$ tal que $|\sigma_k| = 1$ y $|\lambda_k| \sigma_k = \lambda_k$ y hagamos $m = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$. Entonces

$$\frac{x}{m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|\lambda_k|}{m} \sigma_k x_k$$

pertenece a D ya que$\frac{x}{m}$ es una combinación convexa de los elementos $\sigma_k x_k$ que están en D, por ser éste balanceado. Así, $x \in mD \subset D$. ∎

Es inmediato de la Proposición 1.1.5 el siguiente

Corolario 1.1.10 *Sean X y Y dos espacios vectoriales, $D \subset X$ y $E \subset Y$ discos y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces $T(D)$ y $T^{-1}(E)$ son discos.*

Definición 1.1.11 *Sea X un espacio vectorial y $E \subset X$. Definimos:*

(a) La envolvente balanceada de E como

$$E_b = \bigcap \{A \subset X : E \subset A \text{ y } A \text{ es balanceado}\}$$

(b) La envolvente convexa de E como

$$E_c = \bigcap \{A \subset X : E \subset A \text{ y } A \text{ es convexo}\}$$

(c) La envolvente absolutamente convexa de E como

$$E_{bc} = \bigcap \{A \subset X : E \subset A \text{ y } A \text{ es absolutamente convexo}\}$$

De la Proposición 1.1.4 se sigue que E_b es balanceado, E_c es convexo y E_{bc} es un disco. Además, estos conjuntos son el balanceado, el convexo y el disco, respectivamente, más pequeños que contienen a E.

Proposición 1.1.12 *Sea X un espacio vectorial sobre. Entonces*
(a) $E_c = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \geq 1, \lambda_k \geq 0, \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \text{ } y \text{ } x_k \in E \right\}$
(b) $E_b = \{\alpha x : x \in E \text{ } y \text{ } \alpha \in \mathbb{F} \text{ } con \text{ } |\alpha| \leq 1\}$
(c) $(\cdot)_c\,;\,(\cdot)_b : 2^X \to X$ *son operadores monótonos.*
(d) $E_{bc} = (E_b)_c$

Demostración. Hagamos

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \geq 1, \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \text{ y } x_k \in E \right\}$$

Sean $x, y \in C$, $\alpha, \beta \geq 0$, con $\alpha + \beta = 1$. Podemos escribir $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ y $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda'_k x_k$, haciendo que algunas λ_k o λ'_k sean cero, de ser necesario. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha \lambda_k + \beta \lambda'_k)\, x_k. \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (\alpha \lambda_k + \beta \lambda'_k) &= \alpha \sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \beta \sum_{k=1}^{n} \lambda'_k \\ &= \alpha + \beta = 1, \end{aligned}$$

por lo que $\alpha x + \beta y \in C$. Entonces C es convexo. Como $E_c$es el conjunto convexo más pequeño que contiene a E concluimos que $E_c \subset C$.

Inversamente, sea $x \in C$, entonces $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$con $\lambda_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$y $x_k \in E$. Como $E \subset E_c$, entonces $x_k \in E_c$ y como $E_c$es convexo se sigue que $x \in E_c$. Lo que nos lleva a que $C \subset E_c$.

(b) Hagamos

$$B = \{\alpha x : x \in E \text{ y } \alpha \in \mathbb{F}, \text{ tal que } |\alpha| \leq 1\}.$$

Sean $\alpha x \in B$, con $|\alpha| \leq 1$ y $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $|\beta| \leq 1$; entonces $|\beta\alpha| = |\beta|\,|\alpha| \leq 1$ y por consiguiente $\beta\,(\alpha x) \in C$. Así, B es balanceado. Como $E_b$es el conjunto balanceado más pequeño que contiene a E, tenemos $E_b \subset B$.

Inversamente, sea $y \in B$, de donde $y = \alpha x$, con $x \in E$ y $|\alpha| \leq 1$. Como $E \subset E_b, x \in E_b$. Entonces $x = \alpha x \in E_b$ya que $E_b$balanceado; así, $B \subset E_b$.

(c) Sean $A, B \subset X$ tales que $A \subset B$. Sea $x \in A_c$, por el inciso (a) $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$, con $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$y $a_k \in A$; como $A \subset B$ se sigue que $a_k \in B$. Por lo que $x \in B_c$.

Sea $x \in A_b$, por el inciso (b) $x = \alpha y$ con $y \in A$ y $|\alpha| \leq 1$; como $A \subset B$ se sigue que $y \in B$. Por lo que $x \in B_b$.

(d) Veamos que $(E_b)_c$es balanceado. Sea $x \in (E_b)_c$; entonces por el inciso (a) tenemos que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, con $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$y $x_k \in E_b$. Sea $|\alpha| \leq 1$, entonces

$$\alpha x = \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(\alpha x_k)$$

Como $E_b$es balanceado, entonces $\alpha x \in E_b$y otra vez por el inciso (a) $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,(\alpha x_k) \in (E_b)_c$. Así, $(E_b)_c$es balanceado, y como $(E_b)_c$ es también convexo, se concluye que $(E_b)_c$es un disco; por lo cual, $E_{bc} \subset (E_b)_c$.

Recíprocamente, por la definición de E_b tenemos que $E_b \subset E_{bc}$, y por el inciso (b), $(E_b)_c \subset (E_{bc})_c$; como E_{bc}es convexo, entonces $(E_{bc})_c = E_{bc}$. Lo que nos lleva a que $(E_b)_c \subset E_{bc}$. ∎

1.2 Seminormas y funcionales de Minkowski

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio vectorial. Una seminorma para X es una función $\rho : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes tres propiedades:*

(a) $\rho(x) \geq 0$; para todo $x \in X$ (Positividad)

(b) $\rho(rx) = |r|\,\rho(x)$; para todo $r \in \mathbb{F}$, para todo $x \in X$ (Homogeneidad)

(c) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$; para todo $x, y \in X$ (Desigualdad del Triángulo)

Se comprueba fácilmente que toda seminorma tiene las siguientes dos propiedades

(a) $\rho(0) = 0$.

(b) $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x-y)$ para todo $x, y \in X$.

Observación 1.2.2 *Cuando* $\rho(x) = 0$ *implica que* $x = 0$*; entonces* ρ *es llamada una norma para* X *y usualmente se denota por* $\|\cdot\|$.

Definición 1.2.3 *A la colección de todas las transformaciones lineales, también llamadas funcionales lineales, de un espacio vectorial* X *en* $\mathbb{F}$ *se le denota por* $X^{\#}$ *y este espacio vectorial es llamado el dual algebraico de* X.

Lema 1.2.4 *Sean* X *un espacio vectorial y* ρ_1, ρ_2 *dos seminormas en* X. *Si* $f \in X^{\#}$ *es tal que* $|f(x)| \leq \rho_1(x) + \rho_2(x)$ *para todo* $x \in X$, *entonces existen* $g, h \in X^{\#}$ *con* $|g(x)| \leq \rho_1(x)$ *y* $|h(x)| \leq \rho_2(x)$ *tales que* $f = g + h$.

Demostración. Consideremos $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x, y) = \rho_1(x) + \rho_2(y)$$

Claramente φ es una seminorma en $X \times X$. Definamos ahora la funcional lineal u en la diagonal de $X \times X$ como $u(x, x) = f(x)$. Por hipótesis tenemos que

$$|u(x, x)| \leq \varphi(x, x)$$

Es evidente que la diagonal de $X \times X$ es un subespacio de $X \times X$. Entonces por el Teorema de Hahn-Banach u puede extenderse a $X \times X$ de modo que

$$|u(x, y)| \leq \varphi(x, y)$$

Definamos $g(x) = u(x, 0)$ y $h(x) = u(0, x)$. Claramente $g, h \in X^{\#}$ y

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |u(x, 0)| \leq \varphi(x, 0) = \rho_1(x) \\ |h(x)| &= |u(0, x)| \leq \varphi(0, x) = \rho_2(x) \end{aligned}$$

Además $f = g + h$ ∎

Fácilmente puede extenderse el lema anterior para un número finito de seminormas.

Definición 1.2.5 *Sea* X *un espacio vectorial topológico y* $E \subset X$ *absorbente. Definimos el funcional de Minkowski* $\rho_E : X \to \mathbb{F}$ *de* E *como*

$$\rho_E(x) = \inf\{t > 0 : x \in tx\}$$

Proposición 1.2.6 *Sea* X *un espacio vectorial topológico y* $E \subset X$ *absorbente. Entonces* ρ_E *satisface*

$$\rho_E(\lambda x) = \lambda \rho_E(x)$$

para todo $\lambda \geq 0$.

Demostración. Para $\lambda = 0$ la afirmación es obvia. Sean $\lambda > 0$ y $t > 0$ tales que $x \in tE$. Entonces $\lambda t > 0$ y $\lambda x \in \lambda tE$; de donde

$$\rho_E(\lambda x) \leq \lambda t.$$

Por tanto,

$$\rho_E(\lambda x) \leq \lambda \rho_E(x).$$

Y de aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \rho_E(\frac{1}{\lambda}\lambda x) &\leq \frac{1}{\lambda}\rho_E(\lambda x); \\ \lambda \rho_E(x) &\leq \rho_E(\lambda x). \end{aligned}$$

Así, $\rho_E(\lambda x) = \lambda \rho_E(x)$. ∎

Teorema 1.2.7 *Sea X un espacio vectorial y $E \subset X$ un disco absorbente, entonces el funcional de Minkowski de E, definida como*

$$\rho_E(x) = \inf \{t > 0 : x \in tE\}$$

es una seminorma en X

Demostración. La función $\rho_E(x)$ es real ya que para cada $x \in X$ se cumple que $\{t > 0 : x \in tE\} \neq \emptyset$ por ser E absorbente. Más áun, $\rho_E(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

También por ser E se cumple que $0 \in E$. Así, $t0 = 0 \in E$ para toda $t > 0$, por lo que $\rho_E(0) = 0$.

Para probar la homogeneidad absoluta de ρ_E tomemos $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

i) Si $\lambda = 0$, entonces

$$\rho_E(0 \cdot x) = \rho_E(0) = 0 = 0 \cdot \rho_E(x).$$

ii) Sea $\lambda \neq 0$. E es balanceado, por lo que $\lambda x \in tE$ si y sólo si $x \in t|\lambda|^{-1} E$, y tenemos

$$\begin{aligned} \rho_E(\lambda x) &= \inf \{t > 0 : \lambda x \in tE\} = \inf \left\{t > 0 : x \in t|\lambda|^{-1} E\right\} \\ &= \inf \left\{|\lambda| \left(t|\lambda|^{-1}\right) > 0 : x \in t|\lambda|^{-1} E\right\} = |\lambda| \rho_E(x) \end{aligned}$$

Y así, $\rho_E(\lambda x) = \lambda \rho_E(x)$.

Para ver la subaditividad de ρ_E consideramos $x, y \in X$ y $s, t > 0$ tales que $x \in sE$ y $y \in tE$. Entonces, por la Proposición 1.1.7 tenemos que

$$x + y \in sE + tE = (s + t)\,E.$$

Por lo cual

$$\rho_E\,(x + y) \leq s + t$$

Al tomar el ínfimo de las sumas $s + t$ para s, t con las propiedades antes señaladas obtenemos

$$\rho_E\,(x + y) \leq \rho_E\,(x) + \rho_E\,(y)\,.$$

■

1.3 Espacios vectoriales topológicos. Pseudo-metrizables, metrizables y localmente convexos.

Definición 1.3.1 *Sea X un espacio vectorial y τ una topología para X. Decimos (X, τ) es un espacio vectorial topológico si las operaciones vectoriales:*

$$\begin{array}{cccc} + & X \times X & \to & X \\ & (x, y) & \to & x + y \end{array}$$

y

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \mathbb{F} \times X & \to & X \\ & (\lambda, x) & \to & \lambda \cdot x \end{array}$$

son continuas. En este caso, τ es llamada una topología vectorial para X.

Las funciones
(a) Traslación

$$\begin{array}{cccc} T: & X & \to & X \\ & y & \to & x + y \end{array}$$

(b) Homotecia

$$\begin{array}{rccl} H: & X & \to & X \\ & x & \to & \lambda \cdot x \end{array}$$

(c) Diferencia

$$\begin{array}{rccl} + & X \times X & \to & X \\ & (x, y) & \to & x - y \end{array}$$

para $y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ fijas son continuas, ya que son composiciones de las operaciones lineales con las siguientes

$$\begin{array}{ccc} X & \to & X \times X \\ x & \to & (x, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{X} \times X \\ x & \to & (\lambda, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \times X \\ (x, y) & \to & (x, -y) \end{array}$$

Más aún, como las traslaciones y las homotecias con $\lambda \neq 0$ son invertibles y sus inversas son del mismo tipo, se tiene que son homeomorfismos.

Proposición 1.3.2 *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$.*
(a) Si A es convexo, entonces $\overline{A}$ es convexo.
(b) Si A es balanceado, entonces $\overline{A}$ es balanceado.

Demostración. Sean $x, y \in \overline{A}$. . Existen dos redes $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ en A tales que $x_i \to x$ y $y_i \to y$.

(a) Sean $\alpha, \beta \geq 0$ y tales que $\alpha + \beta = 1$; como A es convexo, entonces $\alpha x_i + \beta y_i \in A$ para todo $i \in I$. Y ya que $\alpha x_i + \beta y_i \to \alpha x + \beta y$, entonces $\alpha x + \beta y \in \overline{A}$. . Por consiguiente, $\overline{A}$. es convexo.

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{F}$ con $|\alpha| \leq 1$, como A es balanceado $\alpha x_i \in A$ para todo $i \in I$. Como $\alpha x_i \to \alpha x$, entonces $\alpha x \in \overline{A}$. y $\overline{A}$. es balanceado.

Definición 1.3.3 *Sea X un espacio vectorial topológico. Se dice que $\mathcal{B}(x) \subset 2^X$ es una base de vecindades de $x \in X$ o que es una base local en x si cada elemento de $\mathcal{B}(x)$ es una vecindad de x y si para cada vecindad U de x, existe $V \in \mathcal{B}(x)$ tal que $V \subset U$.*

Debido a que las traslaciones son homeomorfismos se tiene que si $\mathcal{B}$ es una base de vecindades de 0, entonces $\mathcal{B}(x) = \{x + \mathcal{U} : V \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades de $x \in X$.

Proposición 1.3.4 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Cada vecindad de 0 contiene:*

(a) una vecindad de 0 cerrada

(b) una vecindad de 0 balanceada

(c) una vecindad de 0 cerrada y balanceada. Es decir existe una base de vecindades de 0 formada por conjuntos cerrados y balanceados.

Demostración. (a) Sea U una vecindad de 0. Debido a que la operación diferencia es continua se sigue que existe una vecindad V de 0 tal que $V - V \subset U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces $x - V$ es una vecindad de x y por tanto, $(x - V) \cap V \neq \emptyset$, por lo que $x \in V - V \subset U$. Por tanto $\overline{V}$ es una vecindad de 0 contenida en U.

(b) Sea U una vecindad de 0. Por la continuidad del producto por un escalar existen $r > 0$ y V vecindad de 0 tales que $\lambda x \in U$ si $|\lambda| < r$ y $x \in V$. Entonces $B_r(0) V = \bigcup_{|\lambda|<r} \lambda V$ es una vecindad balanceada de 0 contenida en U.

(c) Sea U una vecindad de 0. Por (b) existe una vecindad balanceada de 0 tal que $V \subset U$. Entonces $\overline{V}$ es una vecindad cerrada de 0. Por la Proposición 1.3.2, $\overline{V}$ es también balanceado. La colección de las cerraduras $\overline{V}$ así construidas es una base local de 0. ■

Definición 1.3.5 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Un conjunto $A \subset X$ es llamado acotado si toda vecindad del 0 lo absorbe. Es decir, dada V vecindad del 0 existe $s > 0$ tal que*

$$A \subset rV$$

si $|r| > s$.

Si V es balanceado se cumple lo anterior para cualquier $s > 0$ tal que $A \subset sV$.

La condición de la definición puede cambiarse por: dada V vecindad del 0 existe $\epsilon > 0$ tal que

$$tA \subset V$$

si $|t| < \epsilon$.

Todo subconjunto de un acotado es acotado y todo conjunto formado por sólo un punto es acotado.

Proposición 1.3.6 *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) A es acotado.
(b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{F}$ tal que $\lambda_n \to 0$ se cumple que $\lambda_n x_n \to 0$.
(c) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ se cumple que $\frac{1}{n}x_n \to 0$.

Demostración. (a)⇒(b) Consideremos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{F}$ tal que $\lambda_n \to 0$. Sea U una vecindad del 0 y $\varepsilon > 0$ tal que si $|t| < \varepsilon$ entonces $tA \subset U$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|\alpha_n| < \varepsilon$. Por lo que $\alpha_n A \subset U$ si $n \geq N$. En particular $\alpha_n x_n \in U$ si $n \geq N$.
(b)⇒(c) Es claro.
(c)⇒(a) Supongamos que A no es acotado. Entonces existe U vecindad balanceada del 0 tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $|t| < \varepsilon$ que cumple que $tA \nsubseteq U$. Como U es balanceado entonces $\varepsilon A \nsubseteq U$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\frac{1}{n}A \nsubseteq U$. Por lo que existe $x_n \in A$ tal que $\frac{1}{n}x_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde $\frac{1}{n}x_n \nrightarrow 0$. Lo que contradice a (c). ∎

Proposición 1.3.7 *Sea X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Si A es acotado, entonces $\overline{A}$ es acotado.*

Demostración. Sean $x, y \in \overline{A}$. . Existen dos redes $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ en A tales que $x_i \to x$ y $y_i \to y$.
Sea V vecindad del cero, entonces existe U vecindad cerrada y balanceada del cero tal que $U \subset V$. Como A es acotado existe $t > 0$ tal que $A \subset tU \subset tV$, por lo cual

$$\overline{A} \subset \overline{tU} = t\overline{U} = tU \subset tV.$$

Es decir, $\overline{A}$. es acotado. ∎

Definición 1.3.8 *Sea X un espacio vectorial topológico y $B \subset X$ acotado. Decimos que B es un acotado maximal si absorbe a cualquier otro conjunto acotado.*

Teorema 1.3.9 *Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos y $T : X \to Y$ una transformación lineal, también llamada operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es uniformemente continua en X. Es decir, para cada vecindad V de 0 en Y, existe una vecindad U de 0 en X tal que $T(x-y) \in V$ si $x - y \in U$.

(b) T es continua en X.

(c) T es continua en 0.

Cualquiera de estas condiciones implica

(d) T es acotada, es decir transforma acotados de X en acotados de Y.

Demostración. (c)$\Rightarrow$(a) Sea V una vecindad de 0 en Y. Existe U vecindad de 0 en X tal que

$$T(U) \subset V.$$

Si $x - y \in U$, entonces $T(x-y) \in V$.

(c)$\Rightarrow$(d) Sea $A \subset X$ acotado y supongamos que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en $T(A)$ y en $\mathbb{F}$, y que $\lambda_n \to 0$. Entonces se cumple que $\lambda_n x_n \to 0$ por ser A acotado y por tanto, $\lambda_n T(x_n) = T(\lambda_n x_n) \to 0$. Por la Proposición 1.3.6 se tiene que $T(A)$ es acotado.

Definición 1.3.10 *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y. Sea $x_0 \in X$, decimos que $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en x_0 si para toda vecindad V de 0 en Y existe U vecindad de 0 en X tal que si $x \in x_0 + U$ entonces $T(x) \in T(x_0) + V$ para toda $T \in \mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es equicontinua en X si es equicontinua para todo $x \in X$.*

Definición 1.3.11 *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos y $\mathcal{F}$ una familia de funciones de X en Y. Decimos que $\mathcal{F}$ es una familia uniformemente equicontinua si para toda vecindad V de 0 en Y existe U vecindad de 0 en X tal que si $x - y \in U$ entonces $T(x) - T(y) \in V$ para toda $T \in \mathcal{F}$.*

Proposición 1.3.12 *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos. Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones lineales de X en Y, entonces son equivalentes*

(a) $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua

(b) $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en x_0

(c) $\mathcal{F}$ es una familia uniformemente equicontinua

Demostración. (b)$\Rightarrow$ (c) Dada una vecindad V de 0 en Y, escojamos una vecindad U de 0 en X tal que

$$T(U) = T(x_0 + U) - T(x_0) \subset V.$$

para todo $T \in \mathcal{F}$. Si $x - y \in U$, entonces $T(x-y) \in V$ para todo $T \in \mathcal{F}$.

Definición 1.3.13 *Sea X un espacio vectorial topológico. El dual topológico de X es el espacio de las funcionales lineales continuas en X y lo denotaremos por X^* o bien $(X,\tau)^*$ o X_τ^* cuando queramos señalar que la topología considerada en X es τ.*

Proposición 1.3.14 *Sean X un espacio vectorial y $f : X \to \mathbb{F}$ una funcional lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f es uniformemente continua.

(b) f es continua.

(c) f es continua en 0.

(d) f es acotada en una vecindad de 0. Es decir, existen $M > 0$ y V vecindad de 0 tales que

$$|f(x)| \leq M$$

para todo $x \in V$.

Demostración. En vista del Teorema 1.3.9 sólo falta probar (c) $\Leftrightarrow$ (d)
(c) $\Rightarrow$ (d) Existe V vecindad de 0 tal que

$$|f(x)| < 1$$

para todo $x \in V$.
(d) $\Rightarrow$ (c) Sea $\epsilon > 0$, entonces $\frac{\varepsilon}{M}V$ es una vecindad de 0 y se cumple

$$|f(x)| < \varepsilon$$

para todo $x \in \frac{\varepsilon}{M}V$. De donde, f es continua en 0. ∎

Definición 1.3.15 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico y $(X,\tau)^*$ su dual topológico. Decimos que una topología τ' es admisible para el par dual (X, X^*) si $(X,\tau)^* = (X,\tau')^*$*

Definición 1.3.16 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico. Decimos que su dual topológico X^* separa puntos de X o bien que X está separado por X^* si dados $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

1.3.1 Generación de topologías vectoriales

Definición 1.3.17 *Se dice que una familia $\mathcal{F} \subset 2^X$ de subconjuntos de un conjunto X es una base de filtro en X si*

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y el vacío no pertenece a $\mathcal{F}$.

(b) Si $U, V \in \mathcal{F}$, entonces $W \subset U \cap V$ para algún $W \in \mathcal{F}$.

Teorema 1.3.18 *Sean X es un espacio vectorial y $\mathcal{B} \subset 2^X$ una base de filtro en X tal que:*

(a) Cada elemento de $\mathcal{B}$ es absorbente y balanceado.

(b) Dado $V \in \mathcal{B}$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$.

Entonces existe una única topología vectorial τ para X para la cual $\mathcal{B}$ es una base de vecindades de 0. Para cualquier $x \in X$ una base de vecindades de x es $x + \mathcal{B}$ y un conjunto $A \subset X$ es abierto en esta topología si para cada $x \in A$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x + U \subset A$.

Demostración. Definimos $A \subset X$ pertenece a τ si para cada $x \in A$ existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x + U \subset A$. Tenemos que τ es una topología en X; sólo comprobaremos que la intersección de dos abiertos según τ es también un abierto. Sean A y B abiertos y $x \in A \cap B$. Existen U y V en $\mathcal{B}$ tales que $x + U \subset A$ y $x + V \subset B$. Por ser $\mathcal{B}$ una base filtro, tenemos $W \subset U \cap V$ para algún $W \in \mathcal{B}$. Entonces $x + W \subset A \cap B$.

Cada conjunto $x + W$, con $W \in \mathcal{B}$, es una τ-vecindad de x. En efecto, definamos $W_0 = \{y \in X : y + V \subset x + W \text{ para algún } V \in \mathcal{B}\}$. Claramente $x \in W_0$ y $W_0 \subset x + W$. Sólo falta probar que W_0 es τ-abierto. Para $y \in W_0$ se cumple $y + V \subset x + W$ para algún $V \in \mathcal{B}$. Existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$; de donde $y + U + U \subset x + W$; es decir $y + U \subset W_0$.

Por otra parte, a partir de la definición de τ se tiene que cualquier vecindad de x contiene a un elemento de la forma $x + W$, con $W \in \mathcal{B}$. Así $\{x + W : W \in \mathcal{B}\}$ es una base de vecindades de x para la topología τ, En particular, $\mathcal{B}$ es una base de vecindades de 0.

Las operaciones lineales son τ-continuas. Si A es un abierto que contiene a $x + y$, entonces $x + y + V \subset A$ para algún $V \in \mathcal{B}$. Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que $U + U \subset V$, entonces $x + U$ y $y + U$ son vecindades de x y y, respectivamente, y se cumple que, $x + U + y + U \subset A$; por lo que la suma es continua.

Sean $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in X$ y $V \in \mathcal{B}$. Se puede construir por inducción una sucesión (V_n) en $\mathcal{B}$ tal que $V_1 = V$ y que satisface $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ para cada $n \geq 1$. Sea $n \geq |\lambda|$ un natural y $0 < \delta \leq 1$ un escalar tal que $\delta x \in V_{n+2}$. Sean μ y y tales que $|\mu - \lambda| < \delta$ y $y \in x + V_{n+2}$. Entonces por estas elecciones y al ser cada V_n balanceado se tiene

$$\begin{aligned}(\mu-\lambda)(y-x) &\in \delta V_{n+2} \subset V_{n+2} \\ \lambda(y-x) &\in nV_{n+2} \\ (\mu-\lambda)x &\in \frac{1}{\delta}(\mu-\lambda)V_{n+2} \subset V_{n+2}\end{aligned}$$

A partir de lo anterior obtenemos que

$$\mu y-\lambda x=(\mu-\lambda)x+\lambda(y-x)+(\mu-\lambda)(y-x)$$

pertenece a $V_{n+2}+nV_{n+2}+V_{n+2}\subset V_1=V$. Por tanto, el producto por un escalar es continuo.

Para ver finalmente la unicidad de τ, supongamos que existe otra topología vectorial τ' tal que $\mathcal{B}$ es base de vecindades de 0. Sea V una τ-vecindad de 0, como $\mathcal{B}$ es base de las τ-vecindades de 0 entonces existe $U\in\mathcal{B}$ tal que $U\subset V$. Pero, como $\mathcal{B}$ también es base de las τ'-vecindades de 0, entonces V es τ'-vecindad de 0. Como τ es topología vectorial entonces $\tau\subset\tau'$. Análogamente tenemos que $\tau'\subset\tau$. Por tanto, τ es única. ∎

Espacios lineales pseudométricos y métricos

Definición 1.3.19 *Un espacio pseudométrico lineal es un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ en el que está definida una pseudométrica d cuya topología es vectorial; o sea, las operaciones lineales son continuas para d. Si d es métrica, entonces se dice que X es un espacio métrico lineal.*

Definición 1.3.20 *Una F-seminorma en un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ es un función $F: X\to[0,\infty)$ que tiene las siguientes tres propiedades:*

(a) $F(\lambda x)\leq F(x)$ si $|\lambda|\leq 1$ y $x\in X$.

(b) $F(x+y)\leq F(x)+F(y)$ si $x,y\in X$.

(c) $F\left(\frac{1}{n}x\right)\to 0$ para cualquier $x\in X$.

Si además satisface

(d) $F(x)>0$ si $x\neq 0$, entonces F es llamada una F-norma.

Teorema 1.3.21 *Sea F una F-seminorma en el espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$. Para cada $\varepsilon>0$ definimos*

$$V_\varepsilon=\{x\in X: F(x)<\varepsilon\}$$

Entonces, $\mathcal{B}=\{V_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ es una base de filtro que satisface

(a) Cada uno de sus elementos es absorbente y balanceado

(b) Dado $\varepsilon > 0$ se cumple

$$V_{\frac{\varepsilon}{2}} + V_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_{\varepsilon} \tag{1.1}$$

Por tanto, por el Teorema 1.3.18 existe una única topología vectorial τ tal que $\mathcal{B}$ es una base de sus vecindades de 0. Más aún está topología está definida por la pseudométrica $d(x,y) = F(y-x)$ la cual es invariante bajo traslaciones; es decir,

(c) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ si $x,y,z \in X$,

y además se tiene que

(d) toda bola abiertas centrada en 0 es balanceada.

Si F es una F-norma entonces d es una métrica.

A τ se le llama la topología generada por la seminorma (norma) F o la pseudodistancia (distancia) d.

Demostración. (a). Sean $\varepsilon > 0$. Si $x \in V_{\varepsilon}$ y $|\lambda| \leq 1$, entonces por (a) de la Definición 1.3.20 se tiene que $\lambda x \in V_{\varepsilon}$ y entonces V_{ε} es balanceado. Por (c) de esa misma definición, existe $n \geq 1$ tal que $F\left(\frac{1}{n}x\right) < \epsilon$ y por tanto V_{ε} es absorbente.

(b) Por la desigualdad del triángulo para F se cumple (1.1).

Es claro que d es una pseudométrica, que es métrica cuando F es F-norma, y es invariante bajo traslaciones. Además la bola abierta $B_{\varepsilon}(0)$ coincide con V_{ε} y así τ es la topología determinada por d y $B_{\varepsilon}(0)$ es balanceado. ■

Definición 1.3.22 *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff y U una vecindad balanceada de 0. Una cadena de vecindades que comienza en U es una sucesión $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ de vecindades balanceadas de 0 tal que $U_0 = X$, $U_1 = U$ y que cumple*

$$U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n \tag{1.2}$$

para todo $n \geq 0$.

Lema 1.3.23 *Sea $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ una cadena que comienza en U, en el espacio vectorial topológico (X, τ). Para cada racional no negativo de la forma*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i(q) \frac{1}{2^i} \tag{1.3}$$

con $c_0(q)$ *entero no negativo,* $c_i(q) = 0$ *ó* 1 *y* $c_i(q) = 0$ *excepto para un número finito de* $i \geq 0$*, definimos*

$$V(q) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(q) U_i.$$

Entonces

(a)

$$V(q) + V(r) \subset V(q+r) \tag{1.4}$$

si q, r *son racionales no negativos del tipo antes mencionado.*

(b) Cada $V(q)$*, con* $q \neq 0$*, es una vecindad de* 0 *y por tanto, es absorbente.*

(c) Cada $V(q)$ *es balanceado.*

(d) Si n *es un natural, entonces* $nV(q) \subset V(nq)$*.*

(e) Sea $n \geq 1$*, entonces* $V(q) \subset U_n$ *si* $0 < q < \frac{1}{2^n}$*.*

Demostración. (a) Si $c_i(q) = c_i(r) = 0$ para todo $i > 0$ entonces (1.4) se cumple ya que $V(q) = X$ ó 0 según que $c_0(r) \neq 0$ o bien $c_0(r) = 0$ y lo mismo sucede con r. Supongamos que esa contención se cumple siempre que $c_i(q) = c_i(r) = 0$ para todo $i > N$ donde $N \geq 0$. Si que $c_i(q) = c_i(r) = 0$ para todo $i > N+1$, entonces definimos $q' = q - \frac{c_{N+1}(q)}{2^{N+1}}$ y $r' = r - \frac{c_{N+1}(r)}{2^{N+1}}$ y por la hipótesis de inducción se tiene

$$V(q') + V(r') \subset V(q' + r')$$

Tenemos que $V(q) = V(q') + c_{N+1}(q) U_n$ y $V(r) = V(r') + c_{N+1}(r) U_n$ por lo que

$$V(q) + V(r) \subset V(q' + r') + c_{N+1}(q) U_{N+1} + c_{N+1}(r) U_{N+1}$$

Si $c_{N+1}(q) = c_{N+1}(r) = 0$, entonces (1.4) se cumple. Supongamos que $c_{N+1}(q) = 0$ y $c_{N+1}(r) = 1$. En este caso

$$V(q) + V(r) \subset V(q + r') + U_{N+1}$$

y $q + r = q + r' + \frac{1}{2^{N+1}}$ por consiguiente, $V(q+r) = V(q+r') + U_{N+1}$ y se obtiene (1.4). Lo mismo sucede si $c_{N+1}(q) = 1$ y $c_{N+1}(r) = 0$.

Finalmente, supongamos que $c_{N+1}(q) = c_{N+1}(r) = 1$. Entonces,

$$V(q)+V(r)\subset V(q'+r')+U_{N+1}+U_{N+1}\subset V(q'+r')+U_N$$

y $q+r=q'+r'+\frac{1}{2^N}$, por la hipótesis de inducción

$$V(q'+r')+U_N=V(q'+r')+V\left(\frac{1}{2^N}U_n\right)\subset V\left(q'+r'+\frac{1}{2^N}U_n\right)=V(q+r).$$

De las dos últimos recuadros se obtiene (1.4).

(b) Si $q\neq 0$, entonces $U_n\subset V(q)$ para algún $n\geq 0$ y por consiguiente, $V(q)$ es una vecindad de 0, por serlo U_n.

(c) Si $|\lambda|\leq 1$, entonces $\lambda V(q)=c_0(q)\lambda U_0+\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i(q)\lambda U_i\subset V(q)$, ya que cada U_n es balanceada.

(d) Si n es un natural, entonces $nV(q)\subset V\left(\overbrace{q+...+q}^{n}\right)=V(nq)$.

(e) Sea $n\geq 1$. Si $0<q<\frac{1}{2^n}$, entonces $q=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}c_i(q)\frac{1}{2^i}$ y $V(q)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}c_i(q)U_i\subset U_{n+1}+U_{n+2}+...+U_m$ para algún $m\geq n+1$. Por la condición (1.2) concluimos que $V(q)\subset U_n$. ∎

Lema 1.3.24 *Sea $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ una cadena de vecindades que comienza en U, en el espacio vectorial topológico (X,τ). Existe una F-seminorma F para la que se cumple*

$$\bigcup_{0<q<\varepsilon}V(q)=\{x\in X:F(x)<\epsilon\}$$

donde q es del tipo (1.3) y por tanto, $\{x\in X:F(x)<\epsilon\}$ es una $\tau-$vecindad de 0.

Demostración. Usamos la notación del lema anterior. Si q es como en el lema anterior entonces nq también lo es para cualquier natural n. Sea $x\in X$, dado $q\neq 0$, existe un natural n tal que $x\in nVq\subset V(nq)$. Definimos

$$F(x)=\inf\{q>0:x\in V(q)\}.$$

i) $\|\lambda x\|\leq F(x)$ si $|\lambda|\leq 1$ ya que $x\in V(q)$ implica $\lambda x\in V(q)$ por ser $V(q)$ balanceado.

ii) Sea $x \in X$. Dado $q > 0$ se tiene que $\frac{1}{N}x \in V(q)$para algún natural N. Por tanto, $\frac{1}{n}x = \frac{N}{n}\frac{1}{N}x \in V(q)$ si $n \geq N$ y entonces, $\left\|\frac{1}{n}x\right\| \leq \left\|\frac{1}{N}x\right\| \leq q$ si $n \geq N$; de donde,

$\left\|\frac{1}{n}x\right\| \to 0$.

iii) Sean $x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$ existen q y r tales que $x \in V(q), y \in V(r)$, $q < F(x) + \varepsilon$ y $r < \|y\| + \varepsilon$. Entonces, $x + y \in V(q + r)$ y así $F(x) \leq q + r \leq F(x) + \|y\| + 2\varepsilon$.

De donde, $F(x) \leq q + r \leq F(x) + \|y\|$

Por tanto, $\|\cdot\|$ es una F-seminorma y si $x \in V(q)$ con $0 < q < \varepsilon$, entonces $F(x) < \epsilon$.

Si (X, τ) es un espacio vectorial topológico que tiene una base local del 0 numerable $(W_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces existe una cadena $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ de vecindades de 0 que comienza en W_1 que es también base local del 0 en X.

En efecto hagamos $V_n = W_1 \cap ... \cap W_n$ para cada $n \geq 1$. Entonces, $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente que es una base local del 0. Hacemos $n_0 = 0$ y $n_1 = 1$. Definamos $V_{n_0} = X$. Existe $n_2 > 1$ tal que $V_{n_2} + V_{n_2} \subset V_{n_1}$. Si suponemos definido, $n_k > n_{k-1}$ tal que $V_{n_k} + V_{n_k} \subset V_{n_{k-1}}$ escogemos $n_{k+1} > n_k$ tal que $V_{n_{k+1}} + V_{n_{k+1}} \subset V_{n_k}$. Entonces la sucesión $(U_k)_{k=0}^{\infty}$, con $U_k = V_{n_k}$ es una cadena de vecindades de 0 que comienza con W_1 y también es una base local del 0. ■

Teorema 1.3.25 *Si (X, τ) es un espacio vectorial topológico que tiene una base local del 0 numerable, entonces existe una F-seminorma F que genera a τ. Si (X, τ) es de Hausdorff, entonces F es una F-norma.*

Demostración. Sea $(U_n)_{n=0}^{\infty}$ una cadena de vecindades de 0 que comienza que es también base local del 0 en X. De acuerdo al Lema 1.3.24 existe una F-seminorma en X, determinada por la cadena $(U_n)_{n=0}^{\infty}$, para la que se cumple

$$\bigcup_{0<q<\varepsilon} V(q) = \{x \in X : F(x) < \epsilon\} \tag{1.5}$$

donde q es del tipo (1.3). La topología $\tau(F)$ determinada por F es entonces menos fina que τ, ya que cada $V(q)$, con $q > 0$, es τ-vecindad de 0.

Inversamente, dando $n \geq 1$ tenemos que

$$\left\{x \in X : F(x) < \frac{1}{2^n}\right\} = \bigcup_{0<q<\frac{1}{2^n}} V(q) \subset U_n \tag{1.6}$$

y entonces $\tau(F)$ es más fina que τ y así las topologías coinciden.

Si $d(x,y) = F(y-x)$, entonces (1.5) se escribe como

$$\bigcup_{0<q<\varepsilon} V(q) = \{x \in X : d(x,0) < \epsilon\}$$

Como cada $V(q)$ es balanceada, entonces la bola $B_\epsilon(0)$ también lo es.

Finalmente, si (X,τ) es de Hausdorff entonces dado $x \neq 0$ en X existe $n \geq 1$ tal que $x \notin U_n$ y por (1.6) $F(x) \geq \frac{1}{2^n}$; de donde F es una F-norma. ∎

Definición 1.3.26 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico. Decimos que X es pseudometrizable si existe una pseudométrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que induce en X la topología τ. Se dice que es metrizable si d es métrica. En este caso, de acuerdo al teorema anterior se puede escoger una F-norma que induce una distancia invariante bajo traslaciones y que es equivalente a d y por tanto, genera también la topología τ.*

Teorema 1.3.27 *Sea(X,τ) un espacio vectorial topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) (X,τ) es pseudometrizable

(b) (X,τ) tiene una base local del 0 numerable

(c) Hay una F-seminorma que induce la topología τ.

Teorema 1.3.28 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) (X,τ) es metrizable

(b) (X,τ) es de Hausdorff y tiene una base local del 0 numerable

(c) Hay una F-norma que induce la topología τ.

Las pruebas de estos dos teoremas son evidentes, de acuerdo a lo mostrado en esta sección.

Teorema 1.3.29 *Sea X un espacio vectorial topológico pseudometrizable. Si $V \subset X$ absorbe a cualquier sucesión que converge a 0, entonces V es vecindad del 0.*

Demostración. Por ser X pseudometrizable existe una base local numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ del 0, la cual podemos considerar tal que $U_{n+1} \subset U_n$. Supongamos que V no es vecindad del 0. Entonces para todo $n \in N$ existe $x_n \in \frac{1}{n}U_n - V$, pues en caso contrario entonces $\frac{1}{n}U_n \subset V$ para algún n y V sería vecindad del 0. Consideremos ahora la sucesión $(nx_n)_{n=1}^{\infty}$. Claramente $nx_n \in U_n$ y si $m > n$ entonces $mx_m \in U_m \subset U_n$. Por lo cual $nx_n \to 0$. Además $nx_n \notin nV$, por lo que V no absorbe a $(nx_n)_{n=1}^{\infty}$. Lo que es una contradicción. ∎

Espacios localmente convexos

Proposición 1.3.30 *Sea X un espacio vectorial, $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas en X y $\varepsilon > 0$. El conjunto*

$$V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n;\varepsilon} = \left\{x \in X : \rho_{\alpha_k}(x) < \varepsilon; 1 \le k \le n\right\}$$

es convexo, balanceado y absorbente.

Demostración. De manera análoga a la Proposición 1.3.21 tenemos que

Tenemos que $\rho_\alpha(\lambda x) = |\lambda|\,\rho_\alpha(x) < \varepsilon$ si $|\lambda| \le 1$ y $x \in V_{\alpha;\varepsilon}$; de donde $V_{\alpha;\varepsilon}$ es balanceado.

Si $\lambda = \frac{\varepsilon}{\rho_\alpha(x)+1}$, entonces $\rho_\alpha(\lambda x) < \varepsilon$ para cualquier $x \in X$; de donde $V_{\alpha;\varepsilon}$ es absorbente.

Sean $x, y \in V_{\alpha;\varepsilon}$ y $r, s \ge 0$ tales que $r + s = 1$.

$$\rho_\alpha(rx + sy) \le r\rho_\alpha(x) + s\rho_\alpha(y) < (r+s)\varepsilon = \varepsilon$$

entonces $rx + sy \in V_{\alpha;\varepsilon}$. Por tanto, $V_{\alpha;\varepsilon}$ es convexo.

Como $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n;\varepsilon} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} V_{\alpha_k;\varepsilon}$, tenemos que $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n;\varepsilon}$ es balanceado, convexo y absorbente al ser intersección finita de balanceados, convexos y absorbentes.■

Observación 1.3.31 *La proposición anterior es también verdadera al sustituir $\rho_{\alpha_k}(x) < \varepsilon$ por $\rho_{\alpha_k}(x) \le \varepsilon$.*

Proposición 1.3.32 *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas en X. Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los conjuntos de la forma*

$$V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n;\varepsilon} = \left\{x \in X : \rho_{\alpha_i}(x) < \varepsilon \text{ para } 1 \le i \le n\right\}$$

con $n \ge 1$; $\alpha_i \in \Lambda$; $1 \le i \le n$ y$\varepsilon > 0$.

(a) Cada miembro de $\mathcal{B}$ es convexo, balanceado y absorbente.

(b) Existe una única topología vectorial $\tau(\mathcal{P})$ que tiene a $\mathcal{B}$ como base de vecindades de 0.

(c) Para cada $x \in X$ la colección $\mathcal{B}(x) = x + \mathcal{B}$ es una base de vecindades de x. Todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ es convexo y evidentemente cualquiera de estos es la de la forma:

$$x + V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n;\varepsilon} = \left\{y \in X : \rho_{\alpha_i}(y - x) < \varepsilon; 1 \le i \le n\right\}.$$

(d) La seminorma ρ_α es continua en $(X, \tau(\mathcal{P}))$ para todo $\alpha \in \Lambda$.

Demostración.(a) Por la Proposición 1.3.30, se cumple (a).

Es claro que $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X y que por la subaditividad de las seminormas se cumple:

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\frac{\varepsilon}{2}} + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\varepsilon}$$

Por estos hechos, el inciso (a), y el Teorema 1.3.18 se siguen (b) y (c).

(d) Sea $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Tenemos:

$$|\rho_\alpha(y) - \rho_\alpha(x)| \leq \rho_\alpha(y - x) < \varepsilon \text{ si } y \in x + V_{\alpha;\varepsilon}.$$

Por tanto, ρ_α es continua. ∎

Definición 1.3.33 *Sea X un espacio vectorial y τ una topología generada por una familia de seminormas en X, entonces (X, τ) es llamado un espacio localmente convexo (e.l.c.).*

En particular, tenemos que un espacio localmente convexo tiene una base local del cero formada por conjuntos convexos, balanceados y absorbentes. Si la familia de seminormas consta de un solo elemento y éste es una norma, entonces decimos que el espacio es normado.

Como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, todo espacio localmente convexo está separado por su dual.

A continuación daremos cuatro ejemplos de espacios localmente convexos.

Ejemplos 1.3.34 *1) Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y X^* su dual topológico. Sea $f \in X^*$ y consideremos la siguiente seminorma en X*

$$\rho_f(x) = |f(x)|$$

La topología $\tau\left(\{\rho_f\}_{f \in X^*}\right)$ es llamada topología débil en X y se denota como w y de manera más precisa como $\sigma(X, X^*)$. Así, $(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio localmente convexo.

2) Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y X^* su dual topológico. Sea $x \in X$ y consideremos la siguiente seminorma en X^*

$$\rho_x(f) = |f(x)|$$

La topología $\tau\left(\{\rho_x\}_{x \in X}\right)$ es llamada topología débil estrella y se denota como w^* o de modo más preciso como $\sigma(X^*, X)$. Así, $(X, \sigma(X^*, X))$ es un espacio localmente convexo.

3) Sea X un espacio vectorial y $X^{\#}$ su dual algebraico. Sea $g \in X^{\#}$ y consideremos la siguiente seminorma en X

$$\rho_g(x) = |f(x)|$$

La topología $\tau\left(\{\rho_g\}_{g\in X^{\#}}\right)$ en X es llamada topología débil $\sigma\left(X, X^{\#}\right)$ Así, $\left(X, \sigma\left(X, X^{\#}\right)\right)$ es un espacio localmente convexo.

4) Sea X un espacio vectorial y $X^{\#}$ su dual algebraico. Sea $x \in X$ y consideremos la siguiente seminorma en $X^{\#}$

$$\rho_x(f) = |f(x)|$$

La topología $\tau\left(\{\rho_x\}_{x\in X}\right)$ en $X^{\#}$ es llamada topología débil $\sigma\left(X^{\#}, X\right)$. Así, $\left(X, \sigma\left(X^{\#}, X\right)\right)$ es un espacio localmente convexo.

Definición 1.3.35 *Sea X un espacio vectorial y $X^{\#}$ su dual algebraico. Para cada $x \in X$ se define la funcional en $\widehat{x} : X^{\#} \to \mathbb{F}$ como $\widehat{x}(f) = f(x)$ para cada $f \in X^{\#}$. La aplicación $\widehat{\cdot} : X \to \left(X^{\#}\right)^{\#}$ es llamada la inmersión canónica de X en $\left(X^{\#}\right)^{\#}$. A la imagen de X la denotamos como $\widehat{X}$.*

Observación 1.3.36 *Para un espacio vectorial topológico X, la topología débil $\sigma(X, X^*)$ es la más gruesa en X para la que el dual topológico es el mismo que el original. En tanto que la topología débil estrella $\sigma(X^*, X^*)$ es la topología mas gruesa en X^* que tiene la propiedad de que $(X^*, w^*)^* = \widehat{X}$. Así podemos hablar de la topología débil estrella $\sigma\left(\widehat{X}, X^*\right)$ en $\widehat{X}$.*

Es fácil ver que si X es un espacio vectorial topológico, entonces $\widehat{\cdot}$: $(X, w) \to \left(\widehat{X}, \sigma\left(\widehat{X}, X^*\right)\right)$

es un homeomorfismo lineal. Por tal motivo, muchas veces no se hace distinción entre esos

dos espacios.

Es también claro que $\sigma(X^*, X) = \sigma\left(X^*, \widehat{X}\right)$ es decir, la topología w^* en X^* coincide con la topología débil del par dual $\left(X^*, \widehat{X}\right)$.

Proposición 1.3.37 *Sean $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial X y $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \Lambda$. Entonces la funcional $\rho : X \to \mathbb{R}$ definida como $\rho(x) = \max\left\{\rho_{\alpha_i}(x) : 1 \leq i \leq n\right\}$ es una seminorma en X.*

Demostración. Sean $x \in X$, $1 \leq i \leq n$; como $\rho_{\alpha_i}(x) \geq 0$, entonces $\rho(x) = \max\left\{\rho_{\alpha_i}(x) : 1 \leq k \leq n\right\} \geq 0$. Sea $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$

$$\rho(\lambda x) = |\lambda| \max\left\{\rho_{\alpha_i}(x) : 1 \leq i \leq n\right\} = |\lambda|\, \rho(x).$$

Ahora, sean $x, y, z \in X$. Tenemos que $\rho_{\alpha_i}(x+y) \leq \rho_{\alpha_i}(x+z) + \rho_{\alpha_i}(z+y)$ y por tanto, $\rho_{\alpha_i}(x+y) \leq \rho(x+z) + \rho(z+y)$ para todo $1 \leq i \leq n$. De aquí se concluye

$$\rho(x+y) \leq \rho(x+z) + \rho(z+y)$$

Por tanto, $\rho : X \to \mathbb{R}$ es una seminorma en X. ∎

Definición 1.3.38 *Se dice que una familia $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas en X está saturada si para cualquier subconjunto finito y no vacío $\Lambda' \subset \Lambda$ se tiene que $\rho : X \to \mathbb{R}$ definido como $\rho(x) = \max\{\rho_k(x) : k \in \Lambda'\}$ pertenece a $\mathcal{P}$.*

Proposición 1.3.39 *Dada una familia $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas en X la familia*

$$\mathcal{P}' = \{\rho_{\Lambda'}(x) = \max\{\rho_k(x) : k \in \Lambda'\} : \emptyset \neq \Lambda' \subset \Lambda,\ \Lambda' \textit{ finito } \}$$

está saturada y $\tau(\mathcal{P}) = \tau(\mathcal{P}')$.

Demostración. Tenemos que si $\Lambda'_i \subset \Lambda$ es un subconjunto no vacío y finito para cada $1 \leq i \leq n$, entonces la seminorma

$$\rho(x) = \max\left\{\rho_k(x) : k \in \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda'_i = \Lambda'\right\}$$

coincide con $\rho_{\Lambda'}(x)$ que pertenece a $\mathcal{P}'$.

Es claro que dados $\alpha_k \in \Lambda, 1 \leq k \leq n$ y $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\begin{aligned} & \left\{x \in X : \rho_{\alpha_k}(x) < \varepsilon, \alpha_k \in \Lambda, 1 \leq k \leq n\right\} \\ = \ & \{x \in \max\{\rho_k(x) : \alpha_k \in \Lambda, 1 \leq k \leq n\} < \varepsilon\} \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\tau(\mathcal{P})$ y $\tau(\mathcal{P}')$ tiene una misma base y por tanto, coinciden. ∎

Por lo proposición anterior dada una familia $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas en X, podemos suponer que está saturada y entonces una base de $\tau(\mathcal{P})$ está dada por los conjuntos de la forma

$$x + V_{\alpha;\varepsilon} = \{y \in X : \rho_\alpha(y-x) < \varepsilon\}$$

con $\alpha \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$. ∎

Teorema 1.3.40 *Sea* $(X, \tau(\mathcal{P}))$ *un espacio localmente convexo, donde* $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es una familia saturada de seminormas. Entonces*

(a) X *es Hausdorff si y sólo si para cada* $x \neq 0$ *existe* $\alpha \in \Lambda$ *tal que* $\rho_\alpha(x) \neq 0$.

(b) Si X *es de Hausdorff y* Λ *es numerable entonces* X *es metrizable.*

(c) Si X *es metrizable entonces existe una subcolección numerable* $\{\rho_{\alpha_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *de* $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *que genera a la topología* τ.

Demostración. Supongamos que existe $x \neq 0$ y $\rho_\alpha(x) = 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Sea V una vecindad del 0, entonces existe una vecindad básica $V_{\alpha;\varepsilon} \subset U$. Como $\rho_\alpha(x) = 0$, tenemos que $x \in V_{\alpha;\varepsilon} \subset U$, por lo cual no existe una vecindad de 0 que no tenga a x como elemento, o sea, X no es un espacio de Hausdorff.

Inversamente supongamos que para todo $x \neq 0$ existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\rho_\alpha(x) \neq 0$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$; así, $x - y \neq 0$. Por hipótesis existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $\rho_\alpha(x-y) \neq 0$. Entonces las vecindades $x + V_{\alpha;\varepsilon}$ y $y + V_{\alpha;\varepsilon}$; tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho_\alpha(x-y)$; son ajenas. Por tanto, X es Hausdorff.

(b) Podemos suponer que $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ es una familia saturada de seminormas que genera la topología τ. Observamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \rho_n(x-y)\}}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Definimos la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \rho_n(x-y)\}}{2^n}$$

Veamos que d es una métrica en X.

i) Obviamente $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$. Ahora sean $x, y \in X$ tal que $d(x,y) = 0$. Si $x \neq y$ entonces, al ser X un espacio Hausdorff, existe $n \geq 1$ tal que $\rho_n(x-y) \neq 0$; por lo que $d(x,y) > 0$. Por tanto, $x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ya que $\rho_n(x-y) = \rho_n(y-x)$ para toda $n \geq 1$.

iii) Sean $x, y, z \in X$. Afirmamos:

$$\min\{1, \rho_n(x-y)\} \leq \min\{1, \rho_n(x-z)\} + \min\{1, \rho_n(z-y)\}$$

Si alguno de los mínimos de la derecha es 1 entonces está probada la desigualdad. Supongamos ahora que ninguno de los mínimos de la derecha es uno, entonces

$$\min\{1, \rho_n(x-y)\} \leq \rho_n(x-y) \leq \rho_n(x-z) + \rho_n(z-y)$$

Por tanto, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Así, d es una métrica en X.

Ahora probemos que la topología τ_d generada por la métrica coincide con τ. Supongamos que $(x_i)_{i \in I}$ es una red en X que converge a x con la topología τ_d. Fijemos $n \geq 1$ y $0 < \epsilon < 1$ y escojamos $m > n$. Existe $i_0 \in I$ tal que $d(x_i, x) < \frac{\varepsilon}{2^m}$ si $i \geq i_0$. Por la definición de d se sigue que si $i \geq i_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\min\{1, \rho_n(x_i - x)\}}{2^n} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \rho_k(x_i - x)\}}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2^m}; \\
\min\{1, \rho_n(x_i - x)\} &< \varepsilon; \\
\rho_n(x_i - x) &< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir, $\rho_n(x_i - x) \to 0$ para todo $n \geq 1$. Por la Proposición 1.3.41 tenemos que $x_i \to x$ en la topología τ. Por tanto, $\tau \subset \tau_d$.

Supongamos ahora que $\rho_n(x_i - x) \to 0$ para todo $n \geq 1$ y sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $m \geq 1$ tal que

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\min\{1, \rho_k(x_i - x)\}}{2^k} < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $i \in I$.

Ya que $\rho_n(x_i - x) \to 0$ para todo $n \geq 1$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\min\{1, \rho_k(x_i - x)\}}{2^k} \to 0$$

y entonces existe $i_0 \in I$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\min\{1, \rho_k(x_i - x)\}}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2^m}$ si $i \geq i_0$.

Finalmente,

$$\begin{aligned}
d(x_i, x) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\min\{1, \rho_k(x_i - x)\}}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\min\{1, \rho_k(x_i - x)\}}{2^k} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

si $i \geq i_0$. Así, $x_i \to x$ en la topología τ_d. Por tanto, $\tau_d \subset \tau$.

(c) Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distancia que genera la topología τ. Claramente la colección $\left\{B_{\frac{1}{n}}(0)\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local del 0; además para cada $n \geq 1$ existe $\alpha_n \in \Lambda$ y $\varepsilon_n > 0$ tales que $V_{\alpha_n;\varepsilon_n} \subset B_{\frac{1}{n}}(0)$. Veamos que la topología τ' generada por $\left\{\rho_{\alpha_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ coincide con τ.

Como $\{\rho_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ entonces $\tau' \subset \tau$. Inversamente, sea $U \in \tau$ y $x \in U$. Entonces, $-x+U$ es una $\tau-$vecindad de 0 . Como τ está generada por d, entonces existe $n \geq 1$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(0) \subset$ -x+U, entonces existe $\alpha_n \in \Lambda$ y $\varepsilon_n > 0$ tales que $V_{\alpha_n;\varepsilon_n} \subset B_{\frac{1}{n}}(0)$. Por lo que $x + V_{\alpha_n;\varepsilon_n} \subset x + B_{\frac{1}{n}}(0) \subset U$. Así, U es un abierto de τ'. Por tanto, $\tau' = \tau$. ∎

Proposición 1.3.41 *Sea $(X, \tau(\mathcal{P}))$ un espacio localmente convexo, con $P = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Sea $(x_i)_{i\in I}$ una red en X entonces, $x_i \to x$ en X si y sólo si $\rho_\alpha(x_i - x) \to 0$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración. Podemos suponer que la familia está saturada. Supongamos que la red $(x_i)_{i\in I}$ converge a x, sea $\alpha \in \Lambda$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in x + V_{\alpha;\varepsilon}$ si $i \geq i_0$. Es decir $\rho_\alpha(x_i - x) < \varepsilon$ si $i \geq i_{0.}$ Lo que implica que $\rho_\alpha(x_i - x) \to 0$.

Ahora supongamos que $\rho_\alpha(x_i - x) \to 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$. Sea $x + V_{\alpha;\varepsilon}$ un vecindad básica de x. Como $\rho_\alpha(x_i - x) \to 0$ entonces existe $i_\alpha \in I$ tal que $\rho_\alpha(x_i - x) < \varepsilon$ si $i \geq i_\alpha$, lo que implica que $x_i \in x + V;\varepsilon$ si $i \geq i_\alpha$. De esto se sigue que $x_i \to x$ en X. ∎

Proposición 1.3.42 *Sea $(X, \tau(\mathcal{P}))$ un espacio localmente convexo, con $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Un conjunto $A \subset X$ es acotado si y sólo si para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $t_\alpha > 0$ tal que $\rho_\alpha(x) < t_\alpha$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ acotado y $\alpha \in \Lambda$. Entonces existe $t_\alpha > 0$ tal que $A \subset sV_{\alpha;1}$ si $s \geq t_\alpha$; es decir, $x \in A$ implica $\rho_\alpha(x) < t_\alpha$.

Inversamente, sea U una vecindad del cero, entonces existe $V_{\alpha;\varepsilon}$ vecindad básica del cero tal que $V_{\alpha;\varepsilon} \subset U$. Por la hipótesis existe $t_\alpha > 0$ tal que $\rho_\alpha(x) < t_\alpha$ para todo $x \in X$. Para $t > \frac{t_\alpha}{\varepsilon}$ y $x \in A$ tenemos

$$\rho_\alpha(x) < t_\alpha = \left(\frac{t_\alpha}{\varepsilon}\right)\varepsilon < t\varepsilon$$

De donde se sigue que $x \in tV_{\alpha;\varepsilon}$. Por lo tanto $A \subset tV_{\alpha;\varepsilon}$ si $t > \frac{t_\alpha}{\varepsilon}$; por lo que A es acotado. ∎

En particular un conjunto A es w-acotado en un espacio vectorial topológico si y sólo si para cada $f \in X^*$ existe $M_f > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M_f$$

para todo $x \in A$.

Más adelante (Teorema 2.6.8) se probará el siguiente teorema.

Teorema 1.3.43 *Sea X espacio vectorial localmente convexo y X^* su dual topológico. Un conjunto $B \subset X$ es acotado en X si y sólo si B es w-acotado. Entonces los acotados en X son los mismos para todas las topologías localmente convexas en X admisibles con el par dual (X, X^*).*

Definición 1.3.44 *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo. Decimos que X es localmente acotado si existe una vecindad acotada del cero.*

Teorema 1.3.45 *Sean X, Y espacios localmente convexos cuyas topologías son generadas por las familias saturadas de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\mathcal{Q} = \left\{\rho_\beta\right\}_{\beta\in\Gamma}$ respectivamente. Una transformación lineal $T : X \to Y$ es continua si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$ existe $M_\beta > 0$ y $\alpha \in \Lambda$ tales que*

$$\rho_\beta\left(T(x)\right) \leq M_\beta \rho_\alpha(x) \tag{1.7}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que T es continua y sea $\beta \in \Gamma$. Existe una vecindad básica $V_{\alpha;\varepsilon}$ del cero en X tal que $T(V_{\alpha;\varepsilon}) \subset V_{\beta;1}$, es decir $\rho_\beta(T(x)) < 1$ si $\rho_\alpha(x) < \varepsilon$. Sea $x \in X$ tal que $\rho_\alpha(x) = 0$, lo que implica que $\rho_\alpha(rx) = r\rho_\alpha(x) = 0$ para todo $r > 0$. Entonces,

$$\rho_\beta\left(T(rx)\right) = \rho_\beta\left(rT(x)\right) = r\rho_\beta\left(T(x)\right) = 0$$

para todo $r > 0$ y por consiguiente, $\rho_\beta(T(x)) = 0$ y la condición (1.7) se satisface para cualquier $M_\beta > 0$.

Sea $x \in X$ tal que $\rho_\alpha(x) > 0$. Definamos

$$y = \frac{\varepsilon x}{2\rho_\alpha(x)}$$

claramente $\rho_\alpha(y) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por lo cual $\rho_\beta(T(y)) < 1$. Así,

$$\rho_\beta\left(T\left(\frac{\varepsilon x}{2\rho_\alpha(x)}\right)\right) < 1$$

usando que T es lineal obtenemos

$$\rho_\alpha\left(T(x)\right) < \frac{2}{\varepsilon}\rho_\alpha(x)$$

Por tanto, tomando $M_\beta = \frac{2}{\varepsilon}$ obtenemos el resultado buscado.

Inversamente, si se cumple (1.7) entonces T es continua en 0 y al ser lineal y X un espacio vectorial topológico entonces es continua en X. ∎

Observación 1.3.46 *Si la familia de seminormas $\mathcal{P}$ no está saturada, entonces T es continua si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$ existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$ y $M_\beta > 0$ tales que*

$$\rho_\beta (T(x)) \leq M_\beta \max_{1 \leq k \leq n} \rho_{\alpha_k}(x)$$

Corolario 1.3.47 *Sean $\tau(\mathcal{P})$ y $\tau(\mathcal{Q})$ dos topologías localmente convexas en un espacio vectorial X, donde $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $\mathcal{Q} = \left\{\rho_\beta\right\}_{\beta \in \Gamma}$ son familias saturadas de seminormas. Entonces $\tau(\mathcal{Q}) \subset \tau(\mathcal{P})$ si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$ existe $M_\beta > 0$ y $\alpha \in \Lambda$ tal que para todo $x \in X$ se tiene*

$$\rho_\beta (x) \leq M_\beta \rho_\alpha(x)$$

Demostración. Tenemos que $\tau(\mathcal{Q}) \subset \tau(\mathcal{P})$si y sólo si el operador identidad $I : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ es continuo y por el Teorema 1.3.45 esto sucede si y sólo si para cada $\beta \in \Gamma$ existe $M_\beta > 0$ y $\alpha \in \Lambda$ tal que para todo $x \in X$ se cumple

$$\rho_\beta (x) = \rho_\beta (I(x)) \leq M_\beta \rho_\alpha(x)$$

■

Corolario 1.3.48 *Sea $(X, \tau(\mathcal{P}))$ un espacio localmente convexo cuya topología está dada por la familia saturada de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Entonces una funcional lineal $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ es continua si y solo si existe $M > 0$ y $\alpha \in \Lambda$ tal que para todo $x \in X$ se tiene*

$$|f(x)| \leq M \rho_\alpha(x)$$

Demostración. En vista que $\mathbb{F}$ es un espacio localmente convexo cuya topología está generada por $\{|\cdot|\}$, entonces aplicando el Teorema 1.3.45 obtenemos el resultado. ■

Proposición 1.3.49 *Sean X, Y dos espacios localmente convexos tales que las familias de seminormas $P = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $Q = \{q_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ generan sus respectivas topologías. Si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones lineales de X en Y, entonces son equivalentes:*

(a) $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua

(b) $\mathcal{F}$ es una familia equicontinua en x_0

(c) $\mathcal{F}$es una familia uniformemente equicontinua

(d) Dado $\beta \in \Gamma$ existen $M > 0$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$q_\beta (f(x)) \leq M \max_{i \leq n} \rho_{\alpha_1}(x)$$

siempre que $x \in X$ y $f \in F$.

Demostración. La equivalencia de (a), (b) y (c) se siguen de la Proposición 1.3.12 y que (a)$\Leftrightarrow$(d) se prueba de manera similar al Teorema (1.3.45) ■

La convexificación de una topología

Definición 1.3.50 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Definimos la convexificación de τ, que se denotará por $\overline{\tau}$, como la topología localmente convexa más fina contenida en τ.*

Observación 1.3.51 *Es claro que $\overline{\tau}$ siempre existe, ya que $\sigma(X, X^*)$ es una topología localmente convexa contenida en τ.*

Proposición 1.3.52 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y $\mathcal{B}_0$ una base local del 0. Sea $\mathcal{P} = \{\rho_{U_c}\}$, donde ρ_{U_c} es el funcional de Minkowski asociada definida por la envolvente convexa U_c de U, con $U \in \mathcal{B}_0$. Entonces $\overline{\tau} = \tau(\mathcal{P})$. En particular, cualquier τ-vecindad convexa V de 0 es una $\overline{\tau}$-vecindad de 0.*

Demostración. Como $\overline{\tau}$ es la topología localmente convexa más fina contenida en τ entonces $\tau(\mathcal{P}) \subset \overline{\tau}$. Sea V una $\overline{\tau}$-vecindad convexa de 0 . Existe $U \in \mathcal{B}_0$ tal que $U \subset V$. De donde

$$\{x \in X : \rho_{U_c}(x) < 1\} \subset U_c \subset V,$$

por lo que $\overline{\tau} = \tau(\mathcal{P})$. Por tanto $\overline{\tau} = \tau(\mathcal{P})$.

Sea V una τ-vecindad convexa de 0. Entonces, $U_c \subset V$ para alguna τ-vecindad básica de 0; de donde V es una $\overline{\tau}$-vecindad de 0.

Teorema 1.3.53 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico separado por su dual topológico X^*_τ. Entonces $X^*_\tau = X^*_{\overline{\tau}}$ y $(X, \overline{\tau})$ es de Hausdorff.*

Demostración. Claramente $X^*_{\overline{\tau}} \subset X^*_\tau$. Sea $f \in X^*_\tau$. Dado $\varepsilon > 0$ existe U τ- vecindad básica de 0 tal que $U \subset f^{-1}(B_\varepsilon(0))$. Como $B_\varepsilon(0)$ es convexo, entonces $f^{-1}(B_\varepsilon(0))$ es convexo y entonces, $U_c \subset f^{-1}(B_\varepsilon(0))$. De donde, $\rho_{U_c}(x) < 1$ implica $|f(x)| < \varepsilon$, por tanto $f \in X^*_{\overline{\tau}}$. Así, $X^*_\tau = X^*_{\overline{\tau}}$.

Por lo anterior $X^*_{\overline{\tau}}$ separa puntos de X y entonces la topología débil $\sigma(X, X^*_{\overline{\tau}})$ es de Hausdorff y por tanto, $X(\overline{\tau})$ también lo es |height6pt width6pt

1.4 Teoremas de separación

Lema 1.4.1 *Sea X espacio vectorial topológico real de Hausdorff y C una vecindad abierta y convexa de 0 y $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(x) \leq 1$ para todo $x \in C$.*

Demostración. Consideremos la funcional de Minkowski ρ_C de C, claramente ésta es sublineal y $\rho_C(x_0) \geq 1$ y $\rho_C(x) \leq 1$ para todo $x \in C$. Definamos $g : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ como $g(\lambda x_0) = \lambda$.

Si $\lambda \geq 0$, entonces

$$g(\lambda x) = \lambda g(x_0) \leq |\lambda| \rho_C(x_0) = \rho_C(\lambda x_0)$$

y si $\lambda < 0$, entonces

$$g(\lambda x) = \lambda g(x_0) < 0 < |\lambda| \rho_C(x_0) = \rho_C(\lambda x_0),$$

por lo que

$$g(\lambda x_0) \leq \rho_C(\lambda x_0).$$

Por el Teorema de Hahn - Banach (ver Apéndice) existe $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq \rho_C(x)$ para todo $x \in X$ y $f|_{\langle x_0 \rangle} = g$.

Ahora observemos que

$$f(x) \leq \rho_C(x) \leq 1$$

si $x \in C$. Además si $x \in -C$ entonces $-x \in C$ y por lo tanto

$$-f(x) = f(-x) \leq \rho_C(x) \leq 1.$$

De donde, si $x \in C \cap (-C)$ entonces

$$|f(x)| \leq 1.$$

Por lo que f es continua. ∎

Teorema 1.4.2 *Sean X un espacio vectorial topológico real y de Hausdorff y A, B dos subconjuntos de X convexos, ajenos y no vacíos.*

(a) Si A es abierto, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$ tal que

$$f(a) < \alpha \leq f(b)$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

(b) Si X es localmente convexo, A compacto y B cerrado, entonces existen $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*$ tales que

$$f(a) < \alpha_1 < \inf_{b \in B} f(b).$$

para todo $a \in A$.

Demostración. *(a)* Sean $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$. Definimos

$$C = A - B - (b_0 - a_0) = \left(\bigcup_{b \in B} A - b \right) + (b_0 - a_0) .$$

De la segunda igualdad obtenemos que C es abierto, ya que las traslaciones de abiertos son abiertos.

$$0 = (a_0 - b_0) + (b_0 - a_0) .$$

De donde $0 \in C$. Hagamos $x_0 = b_0 - a_0$. Tenemos que $x_0 \notin C$. Por el lema anterior existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \leq 1 = f(x_0)$ para todo $x \in C$. Es decir,

$$\begin{aligned} f(a - b + x_0) &\leq f(x_0) \\ f(a) &\leq f(b) \end{aligned}$$

si $a \in A$ *y* $b \in B$.

Como cualquier funcional lineal real no nula es abierta y $f(A)$ es un intervalo, entonces

$$f(a) < \sup_{a \in A} f(a) .$$

Tomando $\alpha = \sup_{a \in A} f(a)$ obtenemos

$$f(a) < \sup_{a \in A} f(a) = \alpha \leq f(b)$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

(b) Como B es cerrado, para cada $a \in A$ existe V_a, vecindad del 0, tal que

$$(a + V_a) \cap B = \emptyset.$$

Además, para cada $a \in A$ existe una vecindad W_a de 0 que es convexa y tal que

$$W_a + W_a \subset V_a.$$

Consideremos la cubierta $\{a + W_a\}_{a \in A}$ de A. Por ser A compacto existe una subcubierta finita $\{a_k + W_{a_k}\}_{k=1}^{n}$. Definamos

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} W_{a_k}.$$

Claramente V es convexo y vecindad del 0. Además $(A+V)\cap B=\emptyset$; ya que para todo $x\in A+V$ se tiene $x=a+v$ con $a\in a_i+W_{a_i}$ para alguna $i\leq n$ y $v\in V$. De donde

$$a+v\in a_i+W_{a_i}+W_{a_i}\subset a_i+V_{a_1},$$

por lo que $x\notin B$.

Apliquemos *(a)* al abierto y convexo $A+V$ y al cerrado B. Entonces existe $f\in X^*$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que

$$f(x)<\alpha\leq f(b)$$

para todo $x\in A+V$ y $b\in B$. Como $A\subset A+V$ y A es compacto entonces

$$\max_{a\in A} f(a)<\alpha\leq f(b)$$

para todo $b\in B$.

Tomemos $\alpha_1\in\mathbb{R}$ tal que

$$\max_{a\in A} f(a)<\alpha_1<\alpha.$$

Por tanto,

$$f(a)<\alpha_1<\inf_{b\in B} f(b)$$

para todo $a\in A$. ∎

Corolario 1.4.3 *Sea X un espacio vectorial topológico complejo y A,B convexos ajenos no vacíos*

(a) Si A es abierto entonces existe $\alpha\in\mathbb{R}$ y $f\in X^*$ tal que

$$\operatorname{Re} f(a)<\alpha\leq\operatorname{Re} f(b)$$

para todo $a\in A$ y $b\in B$.

(b) Si X es localmente convexo, A compacto y B cerrado entonces existe $\alpha_1\in\mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(a)<\alpha_1<\operatorname{Re} f(b)$$

Demostración. Por el teorema anterior, para cada inciso existe un funcional r en el dual topológico de X, considerado como espacio vectorial real, que cumple lo pedido. Definamos $f:X\to\mathbb{C}$ como

$$f(x)=r(x)-ir(ix)$$

la cual claramente pertenece a X^*. ∎

Corolario 1.4.4 *Sean* (X, τ_1) *y* (X, τ_2) *tales que* $(X, \tau_1)^* = (X, \tau_2)^*$. *Si* $C \subset X$ *es convexo entonces*

$$\overline{C}^{\tau_1} = \overline{C}^{\tau_2}$$

En particular C *es* τ_1 *- cerrado si y sólo si es* τ_2 *- cerrado.*

Demostración. Podemos suponer $C \neq \emptyset$. Sea $x \in X - \overline{C}^{\tau_1}$, como $\{x\}$ es compacto entonces aplicando el Corolario 1.4.3 existe $f_x \in (X, \tau_2)^*$ tal que

$$\operatorname{Re} f_x(x) < \inf \left\{ \operatorname{Re} f_x(y) : y \in \overline{C}^{\tau_1} \right\}$$

y sea

$$A_x = \left\{ z \in X : \operatorname{Re} f_x(z) \geq \inf \left\{ \operatorname{Re} f_x(y) : y \in \overline{C}^{\tau_1} \right\} \right\}.$$

Cada A_x es τ_2 - cerrado, y observamos que

$$\overline{C}^{\tau_1} = \bigcap_{x \in X - \overline{C}^{\tau_1}} A_x.$$

De donde $\overline{C}^{\tau_1}$ es τ_2 - cerrado, por lo que

$$\overline{C}^{\tau_2} \subset \overline{C}^{\tau_1}.$$

Análogamente $\overline{C}^{\tau_2}$ es τ_1 - cerrado y

$$\overline{C}^{\tau_1} \subset \overline{C}^{\tau_2}.$$

Por tanto, $\overline{C}^{\tau_1} = \overline{C}^{\tau_2}$. ∎

Capítulo 2

Topologías vectoriales, conjuntos y espacios vectoriales topológicos especiales

2.1 Topología de Mackey

Teorema 2.1.1 *Sea Φ una colección de topologías sobre un conjunto X. Entonces existe una única topología, denotada $\bigvee \Phi$ tal que para toda red $(x_d)_{d\in\Gamma}$ en X se cumple que $x_d \to x$ en $(X, \bigvee \Phi)$ si y sólo si $x_d \to x$ en (X, τ) para todo $\tau \in \Phi$. Más aun, si Y es un espacio topológico, $f : Y \to (X, \bigvee \Phi)$ es continua si y sólo si $f : Y \to (X, \tau)$ es continua para toda $\tau \in \Phi$.*

Se tiene que $\tau \subset \bigvee \Phi$ para toda topología $\tau \in \Phi$ y cualquier otra topología que tenga esta propiedad es más fina que $\bigvee \Phi$; por tal motivo, la topología $\bigvee \Phi$ es llamada la topología supremo de la familia Φ.

Demostración. Definimos $\bigvee \Phi$ como la topología que tiene como sub-base a la colección $\left\{U \in 2^X : U \in \tau \text{ para alguna } \tau \in \Phi\right\}$. Sea $(x_d)_{d\in\Gamma}$ en X, por construcción $\tau \subset \bigvee \Phi$ para toda $\tau \in \Phi$, por lo que si $x_d \to x$ en $(X, \bigvee \Phi)$ entonces $x_d \to x$ en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$. Ahora supongamos que $x_d \to x$ en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$. Para ver que $x_d \to x$ en $(X, \bigvee \Phi)$, basta revisar que para cualquier sub-básico U existe $d_0 \in \Gamma$ tal que si $d \geq d_0$ entonces $x_d \in U$. Pero justamente los sub-básicos de $\bigvee \Phi$ son los abiertos de cualquier topología perteneciente a Φ, para los cuales sabemos que la condición mencionada antes se satisface por hipótesis. Por lo que $x_d \to x$ en $(X, \bigvee \Phi)$.

Así, $F \subset X$ es τ-cerrado si y sólo si F es $\bigvee \Phi$-cerrado y por tanto, se cumple $\tau \subset \bigvee \Phi$ para toda topología $\tau \in \Phi$ y si $\tau \subset T$ para una topología T en X y toda topología $\tau \in \Phi$ entonces $\bigvee \Phi \subset T$.

Sea $f : Y \to (X, \bigvee \Phi), y \in Y$ y $(y_d)_{d\in\Gamma}$ una red en Y tal que $y_d \to x$. Entonces f es continua en x si y sólo si $f(x_d) \to f(x)$ en $(X, \bigvee \Phi)$; lo cual sucede si y sólo si $f(x_d) \to f(x)$ en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$. Así, $f : Y \to (X, \bigvee \Phi)$ es continua si y sólo si $f : Y \to (X, \tau)$ es continua para toda $\tau \in \Phi$.

Finalmente, veamos la unicidad, sea Ψ una topología que satisface las condiciones dadas. Sea $(x_d)_{d\in\Gamma}$ una red en X, entonces $x_d \to x$ en (X, Ψ) si y sólo si $x_d \to x$ en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$, lo cual sucede si y sólo si $x_d \to x$ en $(X, \bigvee \Phi)$. Por lo cual $\Psi = \bigvee \Phi$. ∎

Teorema 2.1.2 *Sea Φ una colección de topologías vectoriales de X y $\mathcal{S} \subset X$. Entonces $\mathcal{S}$ es acotado en $(X, \bigvee \Phi)$ si y sólo si $\mathcal{S}$ es acotado en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$.*

Demostración. Claramente si $\mathcal{S}$ es acotado en $(X, \bigvee \Phi)$, entonces lo es en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$ ya que $\tau \subset \bigvee \Phi$ para toda $\tau \in \Phi$. Supongamos que $\mathcal{S}$ es acotado en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$. Entonces, por la Proposición 1.3.6 para cualquier sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{S}$ tenemos $\frac{1}{n}x_n \to 0$ en (X, τ) para toda $\tau \in \Phi$. Por lo cual $\frac{1}{n}x_n \to 0$ en $(X, \bigvee \Phi)$. Por tanto $\mathcal{S}$ es acotado en $(X, \bigvee \Phi)$. ∎

Lema 2.1.3 *Sea Φ una colección de topologías localmente convexas en X. Para cada $\tau' \in \Phi$ sea $\mathcal{Q}_{\tau'}$ el conjunto de todas las seminormas que son continuas en (X, τ'). Entonces $(X, \tau') = (X, \tau(\mathcal{Q}_{\tau'}))$, más aun $\bigcup_{\tau'\in\Phi} \mathcal{Q}_{\tau'}$ genera a $\bigvee \Phi$. En particular $\bigvee \Phi$ es una topología localmente convexa.*

Demostración. Sea $\tau' \in \Phi$, como ésta es localmente convexa, entonces existe una familia $\mathcal{P}_{\tau'} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas en X tales que $\tau' = \tau(\mathcal{P}_{\tau'})$. Por la Proposición 1.3.32 tenemos que ρ_α es continua en $(X, \tau(\mathcal{P}_{\tau'}))$para toda α. Por lo que $\mathcal{P}_{\tau'} \subset \mathcal{Q}_{\tau'}$ y entonces $\tau(\mathcal{P}_{\tau'}) \subset \tau(\mathcal{Q}_{\tau'})$. Ahora, sea $\rho \in \mathcal{Q}_{\tau'}$; como esta seminorma es continua en $(X, \tau(\mathcal{P}_{\tau'}))$. Entonces existen $M > 0$ y $\rho_{\alpha_1}, ..., \rho_{\alpha_n}$ tales que

$$\rho(x) \leq M \max_{1\leq k\leq n} \rho_{\alpha_k}(x).$$

Por el Corolario 1.3.47, tenemos: $\tau(\mathcal{Q}_{\tau'}) \subset \tau(\mathcal{P}_{\tau'})$. Así pues $(X, \tau(\mathcal{Q}_{\tau'})) = (X, \tau(\mathcal{P}_{\tau'})) = (X, \tau')$.

Sea $(x_d)_{d\in\Gamma}$ una red en X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) $x_d \to x$ en $\left(X, \tau\left(\bigcup\limits_{\tau'\in\Phi} \mathcal{Q}_{\tau'}\right)\right)$

ii) $x_d \to x$ $(X, \tau(\mathcal{Q}_{\tau'}))$para toda $\tau' \in \Phi$

iii) $x_d \to x$ (X, τ') para toda $\tau' \in \Phi$

iv) $x_d \to x$ en $(X, \bigvee \Phi)$.

Es decir, $\tau\left(\bigcup\limits_{\tau'\in\Phi} \mathcal{Q}_{\tau'}\right) = \bigvee \Phi.$ ∎

Observación 2.1.4 *Sean Φ, Ψ colecciones de topologías localmente convexas en X tales que $\Phi \subset \Psi$. Claramente $\bigcup\limits_{\tau\in\Phi} \mathcal{Q}_\tau \subset \bigcup\limits_{\tau\in\Psi} \mathcal{Q}_\tau$, por lo que $\bigvee \Phi \subset \bigvee \Psi$.*

Lema 2.1.5 *Sea Φ una colección de topologías localmente convexas en X. Entonces $f \in (X, \bigvee \Phi)^*$ si y sólo si existen $\tau_1, ..., \tau_n \in \Phi$ y $g_1, ..., g_n \in X^\#$ con $g_i \in (X, \tau_i)^*$ tales que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$.*

Demostración. Supongamos que existen $\tau_1, ..., \tau_n \in \Phi$ y $g_1, ..., g_n \in X^\#$ con $g_i \in (X, \tau_i)^*$; tales que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$. Como $\tau_i \subset \bigvee \Phi$, entonces $g_i \in (X, \bigvee \Phi)^*$. Por lo que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i \in (X, \bigvee \Phi)^*$.

Recíprocamente, sea $f \in (X, \bigvee \Phi)^*$. Por el Lema 2.1.3 existen $M > 0$ y $\rho_1, ..., \rho_n$ seminormas con $\rho_i \in \mathcal{Q}_{\tau_i}$ tales que

$$|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x)$$

Entonces por el Lema 1.2.4 existen $g_1, ..., g_n \in X^\#$ tales que

$$|g_i(x)| \leq M \rho_i(x)$$

y $f = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$. Además, por la desigualdad anterior tenemos que $g_i \in (X, \tau_i)^*$. ∎

Teorema 2.1.6 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico localmente convexo y X^* el dual topológico de (X, τ). Definimos*

$$\tau(X, X^*) = \bigvee \left\{ \begin{array}{l} \tau' : \tau' \textit{ es una topología loc. conv.} \\ \textit{admisible para el par dual } (X, X^*) \end{array} \right\}$$

Entonces $\tau(X, X^*)$ es una topología localmente convexa admisible para el par dual (X, X^*) y es la más grande con ésta propiedad.

Demostración. Por el Lema 2.1.3 es localmente convexa y por el Lema 2.1.5 $\tau(X, X^*)$ es admisible para el par dual (X, X^*). ∎

Definición 2.1.7 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Llamaremos a $\tau(X, X^*)$ la topología de Mackey de (X, τ).*

Definición 2.1.8 *Un espacio (X, τ) localmente convexo es llamado un espacio de Mackey si $\tau = \tau(X, X^*)$.*

2.2 Polares

La noción de polar se define en un contexto más amplio. Aquí nos limitaremos sólo a considerar la polar de conjuntos usando un espacio vectorial topológico y sus duales topológico y algebraico.

Definición 2.2.1 *Sea X un espacio vectorial topológico y X^* su dual topológico $A \subset X$. Definimos la polar A° de A como*

$$A^\circ = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}$$

Si $B \subset X^*$ definimos la polar B° de B como

$$B^\circ = \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } f \in B\}$$

Para $A \subset X$ definimos $A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$

Proposición 2.2.2 *Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Se tienen las siguientes propiedades (para $B \subset X^*$ se tienen las propiedades correspondientes):*
(a) $A_1 \subset A_2 \subset X$ implica $A_2^\circ \subset A_1^\circ$
(b) $A^\circ = (A_b)^\circ$.
(c) $A \subset A^{\circ\circ}$.
(d) A° es un disco $\sigma(X^*, X)$ - cerrado en X^*.
(e) Si $\lambda \in \mathbb{F}$ con $\lambda \neq 0$ entonces $(\lambda A)^\circ = \lambda^{-1} A^\circ$.
(f) A° es absorbente si y sólo si A es $\sigma(X, X^*)$ - acotado.
(g) $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$.
(h) $A \subset B$ implica $A^{\circ\circ} \subset B^{\circ\circ}$.

(i) Si $(A_i)_{i\in I}$ *es una colección de subconjuntos de* X*, entonces* $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$

(j) Si $(A_i)_{i\in I}$ *es una colección de subconjuntos de* X*, entonces* $\left(\bigcap_{i\in I} A_i^\circ\right)^\circ = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\circ\circ}\right)^{\circ\circ}$

Demostración. (a) Sea $f \in A_2^\circ$, entonces $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in A_2$. De donde $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in A_1$. Por lo que $f \in A_1^\circ$.

(b) Como $A \subset A_b$, entonces $(A_b)^\circ \subset A^\circ$. Sea $f \in A^\circ$, entonces $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in A$.

Recordamos que

$$A_b = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{F}, |\alpha| \leq 1, x \in A\}.$$

Entonces, $y \in A_b$ implica $y = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{F}, |\alpha| \leq 1$ y $x \in A$. Por lo que

$$|f(y)| = |f(\alpha x)| = |\alpha| \, |f(x)| \leq |f(x)| \leq 1.$$

De donde, $f \in (A_b)^\circ$. Por tanto $A^\circ = (A_b)^\circ$.

(c) Sea $x \in A$, entonces $|f(x)| \leq 1$ para todo $f \in A^\circ$. Por lo que $x \in A^{\circ\circ}$.

(d) Sea $f \in A^\circ$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ con $|\lambda| \leq 1$. Entonces para todo $x \in A$ tenemos

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \leq |f(x)| \leq 1;$$

de donde A° es balanceado.

Sean $f, g \in A^\circ$ y $\alpha, \beta \geq 0$, con $\alpha + \beta = 1$. Entonces para todo $x \in A$ tenemos

$$|(\alpha f + \beta g)(x)| \leq \alpha |f(x)| + \beta |g(x)| \leq \alpha + \beta = 1;$$

por consiguiente, $\alpha f + \beta g \in A^\circ$. Por tanto A°, es convexo y por lo anterior un disco.

Consideremos $f \notin A^\circ$, entonces existe $x \in A$ tal que $|f(x)| > 1$. Sea $\varepsilon = |f(x)| - 1$. Entonces $(f + V_{x;\varepsilon}) \cap A^\circ = \emptyset$ ya que si $g \in f + V_{x;\varepsilon}$, entonces $|g(x)| > |f(x)| - \varepsilon = 1$. Por lo cual A° es $\sigma(X^*, X)$ - cerrado.

(e) $f \in (\lambda A)^\circ$ si y sólo si $|\lambda f(x)| = |f(\lambda x)| \leq 1$ para todo $x \in A$. Lo que sucede si y solo si $\lambda f \in A^\circ$; lo que equivale a que $f \in \lambda^{-1} A^\circ$.

(f) Sea $f \in X^*$. Para $\lambda > 0$ se cumple: $\lambda f \in A^\circ$ si y sólo si $|f(x)| \leq \lambda^{-1}$ para todo $x \in A$.

(g) Por (a) y (c) tenemos $A^{\circ\circ\circ} \subset A^\circ$. Y de (c) aplicado a A° se tiene $A^\circ \subset A^{\circ\circ\circ}$.

(h) La contención se sigue de aplicar el inciso (a) dos veces.

(i) Sea $(A_i)_{i\in I}$ una colección de subconjuntos de X. Entonces $f \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$ si y sólo si

$$|f(x)| \leq 1$$

para todo $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Es decir $f \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$ si y sólo si $f \in \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.

(j) Al aplicar la fórmula (i) a la colección $(A_i^{\circ\circ})_{i\in I}$ obtenemos

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\circ\circ}\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ\circ\circ} = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$$

De donde, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^{\circ\circ}\right)^\circ = \left(\bigcap_{i\in I} A_i^\circ\right)^\circ$.

■

Observación 2.2.3 *Si reemplazamos X^* por $X^\#$, entonces para $A \subset X$ definimos la polar $A^\bullet$ de A como*

$$A^\bullet = \left\{f \in X^\# : |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\right\}$$

En tanto que para $B \subset X^\#$ usamos también B° para denotar el conjunto

$$B^\circ = \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \text{ para todo } f \in B\}$$

El contexto nos indicará cuando B pertenece a X^* o $X^\#$.

Los resultados (a)-(j) son válidos cuando trabajamos con $X^\#$ en lugar de X^* una vez que hacemos los cambios correspondientes, por ejemplo en (f) hay que cambiar $\sigma(X, X^*)$ por $\sigma\left(X, X^\#\right)$.

Teorema 2.2.4 *(Teorema de la bipolar) Sea (X, τ) espacio localmente convexo y $A \subset X$ no vacío. Entonces $A^{\circ\circ}$ es el mínimo disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado que contiene a A. Así,*

$$A^{\circ\circ} = A$$

siempre que A es un disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado; en particular si A es un disco τ-cerrado.

Demostración. Sabemos que $A^{\circ\circ}$ es un disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado y $A \subset A^{\circ\circ}$. Sean D un disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado tal que $A \subset D$ y $x_0 \notin D$. Por el Corolario 1.4.3 existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f' \in X^*$ tal que

$$\operatorname{Re} f'(x_0) < \alpha < \operatorname{Re} f'(x)$$

para todo $x \in D$. Como $0 \in D$, entonces $\alpha < 0$, por lo que podemos definir $f = \alpha^{-1} f'$ y se satisface

$$\operatorname{Re} f(x) < 1 < \operatorname{Re} f(x_0).$$

Como $|f(x)| = \operatorname{Re} f\left(e^{i\theta_x} x\right)$ para algún real θ_x y D es balanceado, tenemos que $|f(x)| < 1$ para todo $x \in D$; de donde $f \in D^\circ$. Como $A \subset D$ entonces $D^\circ \subset A^\circ$, por lo que $f \in A^\circ$. Pero

$$|f(x_0)| \geq \operatorname{Re} f(x_0) > 1$$

Entonces, $x_0 \notin A^{\circ\circ}$. Por tanto $A^{\circ\circ} \subset D$. Por consiguiente $A^{\circ\circ}$ es el mínimo disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado que contiene a A.

Teorema 2.2.5 *(Alaoglu-Bourbaki) Sea X un espacio vectorial topológico. Si $A \subset X$ contiene una vecindad de* 0*, entonces A^0 es w^*-compacto.*

Demostración. Supongamos que A es una vecindad de 0 en X. El espacio $[-1, 1]^A$ es compacto por el Teorema de Tychonoff. Definimos

$$T : \left(A^0, w^*\right) \to [-1, 1]^A$$

asociando a cada $f \in A^0$ el elemento $T(f) = (f(a))_{a \in A}$. Esta función es inyectiva, ya que si $(f(a))_{a\in A} = (g(a))_{a\in A}$ con $f, g \in A^0$, entonces f y g coinciden en la vecindad A y como A es absorbente entonces $f = g$.

Además, T es un homeomorfismo sobre su imagen: es continua, porque si $\pi_a : [-1, 1]^A \to [-1, 1]$ es la proyección en la a-componente, entonces $(\pi_a \circ T)(f) = f(a) = \widehat{a}(f)$ y por tanto, $(\pi_a \circ T)$ es w^*-continua.

Inversamente, si $(f_i(a))_{a\in A} \to (g(a))_{a\in A}$ en la topología producto, con $f, g \in A^0$ entonces $f_i(a) \to g(a)$ para cada $a \in A$, o lo que es lo mismo $\widehat{a}(f_i) \to \widehat{a}(g)$ para cada $a \in A$; por consiguiente, $T^{-1}\left((f_i(a))_{a\in A}\right) = f \to g = T^{-1}\left((g(a))_{a\in A}\right)$ y así, $T^{-1} : T(A^\circ) \to A^\circ$ es continua.

Se probará que A° es compacto, demostrando que $T(A^\circ)$ es cerrado en $[-1, 1]^A$. Supongamos que la red $\left((f_i(a))_{a\in A}\right)_i$ en $T(A^\circ)$ converge a $(g(a))_{a\in A}$; o sea, $f_i(a) \to g(a)$ para cada $a \in A$. Sea $x \in X$, afirmamos que $(f_i(x))_i$ converge en $[-1,1]$. Existe $\alpha > 0$ tal que $x \in \alpha A$ y por tanto, $\left(f_i\left(\frac{1}{\alpha}x\right)\right)_i = \left(\frac{1}{\alpha}f_i(x)\right)_i$ converge, de donde se sigue nuestra afirmación.

Definimos $\widetilde{g}(x) = \lim f_i(x)$ para cada $x \in X$; en particular, $|\widetilde{g}(a)| \leq 1$ para todo $a \in A$. Observamos que $\widetilde{g}|A = g$

Sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $f_i(x + \lambda y) \to \widetilde{g}(x + \lambda y)$ y como $f_i(x + \lambda y) = f_i(x) + \lambda f_i(y)$ para cada i, se sigue que $\widetilde{g}(x + \lambda y) = \widetilde{g}(x) + \lambda \widetilde{g}(y)$ y así, $\widetilde{g} \in X^{\#}$. Como $\widetilde{g}$ es acotada en la vecindad A del 0, entonces $\widetilde{g} \in X^*$. Por consiguiente, $(g(a))_{a \in A} \in T(A^\circ)$. Se sigue que $T(A^\circ)$ es cerrado en $[-1,1]^A$.

En el caso general, existe una vecindad V de 0 tal que $V \subset A$. Entonces $A^\circ \subset V^\circ$ y como A° es w^*-cerrado se concluye que A° es w^*-compacto. ∎

Los siguientes dos resultados caracterizan a los conjuntos equicontinuos y acotados del dual de un espacio topológico:

Proposición 2.2.6 *Sea X un espacio vectorial topológico. $M \subset X^*$ es equicontinuo si y sólo si $M \subset U^\circ$ para alguna vecindad $U \subset X$ de 0. Por tanto, si $M \subset X^*$ es equicontinuo, entonces es $\sigma(X^*, X)$-relativamente compacto.*

Demostración. Sea M equicontinuo, entonces existe U vecindad de 0 en X tal que si $x \in U$ entonces $|f(x)| < 1$ para toda $f \in M$; de donde $M \subset U^\circ$.

Supongamos ahora que existe U vecindad del 0 tal que $M \subset U^\circ$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces $|f(x)| < \varepsilon$ si $x \in \varepsilon U$. Como εU también es vecindad del 0, entonces M es equicontinuo en 0. Por la Proposición 1.3.49 M es equicontinuo.

La última afirmación se sigue del Teorema 2.2.5. ∎

Proposición 2.2.7 *Sea X un espacio vectorial topológico. $M \subset X^*$ es $\sigma(X^*, X)$ - acotado si y sólo $M \subset T^\circ$ para algún barril $T \subset X$. De manera similar, $M \subset X$ es $\sigma(X, X^*)$- acotado si y sólo $M \subset T^\circ$ para algún barril $T \subset X^*$.*

Demostración. Sea M un conjunto $\sigma(X^*, X)$ - acotado, entonces por la Proposición 2.2.2 M° es un disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado y absorbente. Entonces M° es un barril en X y $M \subset M^{\circ\circ}$. Supongamos ahora que existe $T \subset X$ barril tal que $M \subset T^\circ$. Por el Teorema de la Bipolar tenemos que $T = T^{\circ\circ}$. Notamos que T es absorbente, entonces por la Proposición 2.2.2 T° es $\sigma(X^*, X)$ - acotado y como $M \subset T^\circ$, resulta que M también es $\sigma(X^*, X)$ - acotado. ∎

2.3 Topologías polares

Definición 2.3.1 *Sean X espacio vectorial topológico, X^* su dual topológico y $\mathfrak{S}^*$ una colección de conjuntos $\sigma(X^*, X)$ - acotados en X^*. Para cada $A \in \mathfrak{S}^*$ definimos la seminorma $\rho_A : X \to \mathbb{R}$ como*

$$\rho_A(x) = \sup_{f \in A} |f(x)|$$

Si $\mathfrak{S}$ es una colección de conjuntos $\sigma(X, X^*)$ - acotados en X. Se define de manera análoga $\rho_A : X^* \to X$.

Definición 2.3.2 *Sea $\mathfrak{S}^*$ una colección de conjuntos $\sigma(X^*, X)$ - acotados en X^* y $\mathcal{P} = \{\rho_A\}_{A \in \mathfrak{S}}$. A la topología $\tau(\mathcal{P})$ la llamamos la topología polar generada por $\mathfrak{S}^*$, también $\tau(\mathcal{P})$ se le suele llamar la $\mathfrak{S}^*$ - topología o la topología de la convergencia uniforme sobre $\mathfrak{S}^*$.*

Se define análogamente la topología polar para X^* generada por una colección $\mathfrak{S}$ de conjuntos $\sigma(X, X^*)$ - acotados en X.

El término "polar" que aparece en la última definición se justifica a continuación.

Proposición 2.3.3 *Sea X un espacio vectorial topológico y $\mathfrak{S}$ una colección de conjuntos $\sigma(X^*, X)$ - acotados. Entonces la familia*

$$\left\{x + \lambda A^\circ : x \in X, A \in \mathfrak{S}, \lambda \in \mathbb{R}^+\right\}$$

es una sub-base de $\tau_{\mathfrak{S}}$.

Demostración. Claramente $A^\circ = \{x \in X : \rho_A(x) \leq 1\}$, de donde $\lambda A^\circ = \{x \in X : \rho_A(x) \leq \lambda\}$ para $\lambda > 0$. Y sabemos por la Proposición 1.3.32 que es una sub-base para la topología que generan las seminormas, es decir $\tau_{\mathfrak{S}}$. ■

De acuerdo a esta proposición A° es una vecindad de 0 en la topología polar $\mathfrak{S}^*$ - topología para cada $A \in \mathfrak{S}^*$.

Las topologías w y w^* en X y X^* pueden ser vistas como topologías polares, ya que si consideramos $\mathfrak{S}^* = \{\{f\}\}_{f \in X^*}$ y $\mathfrak{S} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ entonces w y w^* son las topologías polares generadas por $\mathfrak{S}^*$ y $\mathfrak{S}$.

Definición 2.3.4 *Sea X espacio vectorial topológico y $\mathfrak{S}^*$ la colección de todos los conjuntos $\sigma(X^*, X)$ - acotados en X^*. Definimos $\beta(X, X^*)$ como la topología polar generada por $\mathfrak{S}^*$. Análogamente definimos $\beta(X^*, X)$*

Observación 2.3.5 *Tenemos que* $\beta(X^*, X) = \beta\left(X^*, \widehat{X}\right)$*. Para verlo basta recordar que* $\widehat{X}$ *es el dual de* (X^*, w^*) *y que* $\widehat{\cdot} : (X, \sigma(X, X^*)) \to \left(\widehat{X}, \sigma\left(\widehat{X}, X^*\right)\right)$ *es un homeomorfismo lineal (Observación 1.3.36).*

Definición 2.3.6 *Sea* X *un espacio vectorial topológico y* $A \subset X$*. Decimos que* X *es precompacto o totalmente acotado si para todo vecindad* V *del* 0 *existe un subconjunto finito* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *de* X *tales que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$$

Definición 2.3.7 *Sea* X *un espacio vectorial topológico y* $\mathfrak{S}^*$ *la colección de todos los precompactos en* X^**. Definimos* $\lambda(X, X^*)$ *como la topología polar generada por* $\mathfrak{S}^*$*. Análogamente definimos* $\lambda(X^*, X)$*.*

Definición 2.3.8 *Sea* (X, τ) *un espacio vectorial topológico y* $\mathfrak{S}^*$ *la colección de todos los subconjuntos equicontinuos de* X^**. Definimos* $\epsilon(X, X^*)$ *como la topología polar generada por* $\mathfrak{S}^*$*.*

Si X es un espacio vectorial topológico, entonces

$$\sigma(X, X^*) \subset \epsilon(X, X^*) \subset \lambda(X, X^*) \subset \beta(X, X^*) \tag{2.1}$$

Teorema 2.3.9 *Sea* (X, τ) *un espacio localmente convexo. Entonces*

$$\tau = \epsilon(X, X^*)$$

Demostración. Existe una base local $\mathcal{B}_0$ de 0 en X formada por discos cerrados. Estos también son $\sigma(X, X^*)$ - cerrados por el Corolario 1.4.4, Por el Teorema de Bipolares, $V = V^{\circ\circ}$ para todo $V \in \mathcal{B}$. Por la Proposición 2.2.6 V° es equicontinuo, por lo que V es vecindad del 0 en $\epsilon(X, X^*)$. Así, $\tau \subset \epsilon(X, X^*)$.

Ahora sea M equicontinuo en X^*, entonces por la Proposición 2.2.6 existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $M \subset V^\circ$, entonces $V = V^{\circ\circ} \subset M^\circ$; de donde M° es vecindad de 0 en τ. Como $\{M^\circ : M \subset X^* \text{ es equicontinuo}\}$ es base de $\epsilon(X, X^*)$ concluimos que $\epsilon(X, X^*) \subset \tau$. ∎

2.4 Discos de Banach. Conjuntos bornívoros

Definición 2.4.1 *Sean X un espacio vectorial topológico y $A \subset X$. Decimos que A es completo por sucesiones si toda sucesión de Cauchy en A converge a un punto de A.*

El siguiente resultado es inmediato.

Proposición 2.4.2 *Si A es completo por sucesiones, entonces es cerrado por sucesiones.*

Proposición 2.4.3 *Sea X un espacio localmente convexo y $E \subset X$ acotado, entonces E_b y E_c son conjuntos acotados en X.*

Demostración. Como X es un espacio localmente convexo, entonces existe una base local $\mathcal{B} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ del 0 donde cada V_α es absolutamente convexo y absorbente.

Sea U una vecindad del 0, entonces existen $\alpha \in \Lambda$ y $t > 0$ tales que $V_\alpha \subset U$ y $E \subset tU \subset tV$. Como U es balanceado y convexo, entonces tUes balanceado y convexo. Por consiguiente, $E_c, E_b \subset tU \subset tV$. Es decir, E_by $E_c$son conjuntos acotados en X. ∎

Corolario 2.4.4 *Sea X un espacio localmente convexo y $E \subset X$ es acotado, entonces E_{bc} es acotado.*

Demostración. Por las Proposiciones 1.1.12 y 2.4.3 tenemos que $E_{bc} = (E_b)_c$ y que E_b es acotado ya que E lo es, por lo que $(E_b)_c$ es acotado. ∎

Definición 2.4.5 *Sea X un espacio vectorial topológico y $D \subset X$ un disco acotado. Denotamos como X_D al espacio $(\langle D\rangle, \rho_D)$ donde ρ_D es la funcional de Minkowski en $\langle D\rangle$ asociada a D.*

En la Proposición 1.2.7 se pidió que D fuera un disco absorbente en X para que ρ_D fuera una seminorma. En la definición anterior esto se cumple, ya que D es absorbente en $\langle D\rangle$ aunque quizás no lo es en X. En efecto, si $x \in \langle D\rangle$ y $x \neq 0$, entonces $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ con $x_k \in D$ y $|\lambda_k| > 0$ para $1 \leq k \leq n$. Sea $m = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, entonces $m > 0$ y

$$\frac{x}{m} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{m} x_k \in D$$

ya que $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\lambda_k}{m}\right| = 1$, cada $x_k \in D$ y D es un disco (Proposición 1.1.9). Por tanto, $x \in mD$

Definición 2.4.6 *Sea X un espacio vectorial topológico y $D \subset X$ un disco acotado. D es llamado un disco de Banach si X_D es un espacio de Banach.*

Teorema 2.4.7 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y $D \subset X$ un disco acotado. Entonces*

(a) La topología inducida en X_D por τ es más débil que la dada por ρ_D.

(b) Si X es de Hausdorff, entonces X_D también es de Hausdorff y la funcional ρ_D es una norma en X_D y

(c) Si X es de Hausdorff y (D, τ) es completo por sucesiones, entonces D es un disco de Banach, es decir X_D es un espacio de Banach.

Demostración. (a) Sea U una vecindad balanceada de 0 en X. Como D es acotado en X, existe $t > 0$ tal que $D \subset tU$, por lo que $sD \subset U$ si $s < \frac{1}{t}$; al intersectar ambos lados con X_D tenemos: $sD \subset U \cap X_D$ si $s < \frac{1}{t}$; es decir $\rho_D(x) < \frac{1}{t}$ implica $x \in U \cap X_D$ y por tanto, $\tau | X_D$ es más débil la topología inducida por ρ_D.

(b) Recordamos que ser de Hausdorff es una propiedad hereditaria, por lo cual $\left(\langle D \rangle, \tau|_{\langle D \rangle}\right)$ es de Hausdorff. Por el inciso (a), $X_D = (\langle D \rangle, \rho_D)$ es de Hausdorff. Entonces por el Teorema 1.3.40 si $x \neq 0$ se tiene $\rho_D(x) \neq 0$. Por lo tanto ρ_D es una norma.

(c) Sea (x_n) una sucesión ρ_D-Cauchy en X_D. Para $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, con $k \geq 1$, existe $n_k \geq 1$ tal que $n, m \geq n_k$ implica $\rho_D(x_n - x_m) < \frac{1}{2^k}$. Cada n_k se puede elegir de modo que $n_k < n_{k+1}$ para todo $k \geq 1$.Obtenemos así una subsucesión (x_{n_k})de (x_n) tal que $\rho_D\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) < \frac{1}{2^k}$; de la definición de ρ_D se sigue que $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \in \frac{1}{2^k}D$.

Por (a) la sucesión (x_n), y por tanto (x_{n_k}), es de Cauchy en $\left(X_D, \tau|_{\langle D \rangle}\right)$.

Como $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \in \frac{1}{2^k}D$ para todo $k \geq 1$ se tiene que si $k' > k$, entonces

$$
\begin{aligned}
x_{n_{k'}} - x_{n_k} &= \left(x_{n_{k'}} - x_{n_{k'-1}}\right) + \cdots + \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right) \in \frac{1}{2^{k'-1}}D + \cdots + \frac{1}{2^k}D \\
x_{n_{k'}} - x_{n_k} &\in \left(\frac{1}{2^{k'-1}} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) D \subset \frac{1}{2^{k-1}}D \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

En particular, para $k > 1$ tenemos:

$$x_{n_k} - x_{n_1} \in \frac{1}{2^{k-1}}D \subset D$$

Así, $(x_{n_k})_{k=2}^{\infty}$ es una sucesión en $x_{n_1}+D$ que es de Cauchy en (X,τ). Como (D,τ) es completo por sucesiones, entonces $x_{n_1}+D$ también es completo por sucesiones según τ, por lo que existe $x\in x_{n_1}+D\subset X_D$ tal que $x_{n_k}\to x$ según τ.

Por otra parte, por (2.2) tenemos que

$$x_{n_{k'}}-x_{n_k}\in\frac{1}{2^{k-1}}D$$

para todo $k'>k$. Al hacer tender k' a ∞ obtenemos

$$x-x_{n_k}\in\frac{1}{2^{k-1}}D$$

ya que D es τ-cerrado por sucesiones.

Es decir,

$$\rho_D\left(x-x_{n_k}\right)\leq\frac{1}{2^{k-1}}$$

para todo $k\geq 1$. Por lo cual $x_n\to x$ según ρ_D. Así, X_D es un espacio de Banach. | width6pt

Corolario 2.4.8 *Un espacio (X,τ) localmente convexo es de Hausdorff y localmente acotado si y sólo si X es normalizable, es decir existe una norma en X que induce la topología τ.*

Demostración. Sea U una τ-vecindad acotada del cero, entonces $B=U_{bc}$ es un disco acotado que por ser τ-vecindad del cero también es absorbente, es decir $\langle\mathcal{B}\rangle=X$. Entonces ρ_D es una norma en X por el teorema anterior, más aún la topología inducida por ρ_D es más fina que τ. Claramente $\left\{B_{\frac{1}{n}}\left(0\right)\right\}$ es una base local del cero en (X,ρ_D). Además $\frac{1}{n+1}\mathcal{B}\subset B_{\frac{1}{n}}\left(0\right)$, ya que $x\in\frac{1}{n+1}\mathcal{B}$ implica que $\rho_D\left(x\right)\leq\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$. Como $\frac{1}{n+1}\mathcal{B}$ es una τ-vecindad del cero, entonces las topologías coinciden.

Si X es normable, evidentemente es de Hausdorff y localmente acotado. ■

Proposición 2.4.9 *Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos y $T: X\to Y$ un operador lineal. Si A y B son balanceados en X y Y respectivamente, entonces B absorbe a $T\left(A\right)$ si y solo si $T^{-1}\left(B\right)$ absorbe a A.*

Demostración. Para $t>0$ se tiene $T\left(A\right)\subset tB$ si y sólo si $A\subset T^{-1}\left(tB\right)=tT^{-1}\left(B\right)$. ■

Definición 2.4.10 *Sean X un espacio vectorial topológico y $D \subset X$. Decimos que D es bornívoro si absorbe a todos los conjuntos acotados.*

Definición 2.4.11 *Un espacio bornológico es un espacio localmente convexo en el cual todo disco bornívoro es una vecindad del 0.*

Corolario 2.4.12 *Si X es un espacio vectorial topológico pseudometrizable, entonces todo bornívoro es vecindad de 0.*

Demostración. Sea $B \subset X$ bornívoro y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to 0$. Veamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotado. Sea U una vecindad balanceada del 0, como $x_n \to 0$ existe $N \in N$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n \in U$. Como U es absorbente al ser vecindad del 0, entonces existen $t_1, ..., t_{N-1}$ tales que $x_k \in t_k U$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset tU$ donde $t = \max\{1, t_1, ...t_{N-1}\}$. Por lo cual $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotado. Como B es bornívoro, entonces absorbe a los acotados, en particular a las sucesiones convergentes a 0, por el Teorema 1.3.29 B es vecindad del 0. ■

Corolario 2.4.13 *Un espacio localmente convexo y metrizable es bornológico.*

Teorema 2.4.14 *Todo espacio bornológico es de Mackey.*

Demostración. Consideremos un espacio bornológico (X, τ). Sea U una $\tau(X, X^*)$-vecindad absolutamente convexa del 0. Entonces, U absorbe a los $\tau(X, X^*)$ acotados. Por los Teoremas1.3.43 y 2.1.2 los acotados en $\tau(X, X^*)$ son justamente los acotados en la topología τ. Entonces U es bornívoro en (X, τ), y como U es un disco; entonces U es vecindad del 0. Por tanto $\tau(X, X^*) \subset \tau$. De donde $\tau(X, X^*) = \tau$. ■

Corolario 2.4.15 *Todo espacio localmente convexo metrizable es de Mackey.*

Demostración. Por el Corolario 2.4.13 un espacio localmente convexo metrizable es bornológico.. Entonces por el Teorema 2.4.14 es de Mackey. ■

Corolario 2.4.16 *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo cuya topología esta dada por la familia saturada de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Si existe $\alpha_0 \in \Lambda$ para el que se cumple que para cada $f \in (X, \tau)^*$ existe $M_f > 0$ tal que*

$$|f(x)| \leq M_f p_{\alpha_0}(x) \tag{2.3}$$

para todo $x \in X$, entonces p_{α_0} es una norma que determina la topología τ.

Demostración. El resultado es obvio si X se reduce al vector 0. Supongamos que no es el caso y sea $x \neq 0$ un elemento de X. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $f \in (X, \tau)^*$ que satisface $f(x) = 1$. Por tanto,

$$1 \leq M_f p_{\alpha_0}(x)$$

y $p_{\alpha_0}(x) \neq 0$. Esto prueba que p_{α_0} es una norma en X. Entonces, la topología $\tau_{p_{\alpha_0}}$ inducida por la norma p_{α_0} es más débil que τ. Por otra parte, por (2.3) se tiene que $(X, \tau)^* \subset \left(X, \tau_{p_{\alpha_0}}\right)^*$; como la otra contención se cumple obviamente concluimos que τ es una topología en X admisible para el par dual $\left(\left(X, \tau_{p_{\alpha_0}}\right), \left(X, \tau_{p_{\alpha_0}}\right)^*\right)$ de donde

$$\tau \subset \tau\left(\left(X, \tau_{p_{\alpha_0}}\right), \left(X, \tau_{p_{\alpha_0}}\right)^*\right):$$

Por el corolario anterior $\tau\left(\left(X, p_{\alpha_0}\right), \left(X, p_{\alpha_0}\right)^*\right) = \tau_{p_{\alpha_0}}$ y por consiguiente, p_{α_0} es una norma que determina la topología τ. ∎

Definición 2.4.17 *Sean X un espacio vectorial y $D \subset X$. Decimos que D es infrabornívoro si absorbe a todos los discos de Banach.*

Teorema 2.4.18 *Sean X, Y dos espacios localmente convexos y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
(a) T es acotado.
(b) La imagen bajo T de todo disco acotado es un disco acotado.
(c) T^{-1} lleva discos bornívoros a discos bornívoros.

Demostración. Por el Corolario 1.1.10 se tiene que si $D \subset X$ es un disco, entonces $T(D)$ es un disco en Y, y si $E \subset Y$ es un disco, entonces $T^{-1}(E)$ es un disco en X.

(a) $\Rightarrow$(b) Es inmediato.

(b) $\Rightarrow$(a) Supongamos que T transforma discos acotados en discos acotados. Sea $B \subset X$ acotado. Por la Proposición 2.4.3 B_{bc} es un disco acotado. Entonces $T(B_{bc})$ es un disco acotado en Y y como $T(B) \subset T(B_{bc})$, entonces que $T(B)$ es acotado.

(b) $\Rightarrow$(c) Sea $E \subset Y$ un disco bornívoro y $D \subset X$ un disco acotado. Entonces $T(D)$ es un disco acotado en Y, por lo que E absorbe a $T(D)$. Por la Proposición 2.4.9 $T^{-1}(E)$ absorbe a D. Por tanto $T^{-1}(E)$ es bornívoro.

(c) $\Rightarrow$(b) Sea $D \subset X$ un disco acotado. Como Y es localmente convexo existe una base local del 0 formada por discos. Sea E un disco, vecindad de 0. Como E es vecindad de 0, entonces E absorbe a todo acotado de Y y es entonces es un disco bornívoro en Y. Por la hipótesis $T^{-1}(E)$ es bornívoro en X, por lo cual $T^{-1}(E)$ absorbe a D. De acuerdo a la Proposición 2.4.9 E absorbe a $T(D)$, por lo que $T(D)$ es acotado en Y. ∎

Teorema 2.4.19 *Sean X, Y dos espacios localmente convexos y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T transforma discos de Banach en discos acotados si y solo si T^{-1} transforma discos bornívoros en discos infrabornívoros.*

Demostración. Supongamos que T transforma discos de Banach en discos acotados. Sea $E \subset Y$ un disco bornívoro y $B \subset X$ un disco de Banach. Por hipótesis $T(B)$ es un disco acotado en Y; como D es bornívoro, D absorbe a $T(B)$. Por la Proposición 2.4.9 $T^{-1}(D)$ absorbe a B. Lo que nos lleva a que $T^{-1}(D)$ es infrabornívoro.

Inversamente supongamos que T^{-1} transforma discos bornívoros en discos infrabornívoros. Sea $B \subset X$ un disco de Banach. Como Y es localmente convexo, entonces existe una base local del 0 formada por discos. Sea E un disco, vecindad de 0. Entonces, E es un disco bornívoro en Y. Por hipótesis $T^{-1}(V)$ es infrabornívoro, por lo cual absorbe a B. Por la Proposición 2.4.9 V absorbe a $T(B)$, lo que implica que $T(B)$ es un disco acotado.

2.5 Barriles y espacios barrilados

Definición 2.5.1 *Sea X un espacio vectorial topológico y $B \subset X$. Decimos que B es un barril si es un disco cerrado y absorbente.*

Definición 2.5.2 *Sea X un espacio vectorial topológico. Decimos que X es un espacio barrilado si todo barril en X es una vecindad del cero.*

Los siguientes dos resultados caracterizan a los espacios barrilados, el primero para espacios vectoriales topológicos en general y el segundo para espacios localmente convexos.

Proposición 2.5.3 *Un espacio vectorial topológico X es barrilado si y sólo si no existe un disco B denso en ninguna parte tal que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$$

El disco B puede ser escogido de modo tal que sea un barril.

Demostración. Si X no es barrilado, entonces existe un barril B en X que no es vecindad del 0. Supongamos que $intB \neq \emptyset$. Sea $x \in intB$, entonces existe V vecindad de 0 tal que $x + V \subset B$. Como B es balanceado

$-x \in B$. Sea $y \in V$, entonces $x + y \in B$, además por la convexidad de B tenemos

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(-x) \in B$$

Entonces $\frac{1}{2}V \subset B$, lo que contradice el hecho de que B no es vecindad del 0. Entonces B es denso en ninguna parte. Más aun, como B es absorbente en X, tenemos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$$

Inversamente, sean X barrilado y B un disco tal que $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nB$. Claramente $\overline{B}$ es un barril, por lo que; al ser X barrilado; $\overline{B}$ es vecindad del 0. Lo que implica que $int\overline{B} \neq \emptyset$; o sea B no es denso en ninguna parte. ∎

Teorema 2.5.4 *Un espacio localmente convexo (X, τ) es barrilado si y sólo si todo conjunto $\sigma(X^*, X)$-acotado es equicontinuo.*

Demostración. Sea X barrilado y $A \subset X^*$ un conjunto $\sigma(X^*, X)$ - acotado, entonces por la Proposición (2.2.7 existe T barril en X tal que $A \subset T^\circ$. Al ser X barrilado T es vecindad del 0 y por la Proposición (2.2.6 tenemos que A es equicontinuo. Supongamos ahora que todo conjunto $\sigma(X^*, X)$-acotado es equicontinuo y sea T un barril en X, por la Proposición 2.2.7 T° es $\sigma(X^*, X)$ - acotado. Por la hipótesis T° es equicontinuo, entonces por el Teorema 2.3.9, T° es vecindad del 0. Por tanto, X es barrilado. ∎

Definición 2.5.5 *Un espacio vectorial topológico X es llamado un espacio F-espacio si es metrizable y completo. Si además X es localmente convexo, entonces es llamado un espacio de Fréchet.*

Evidentemente de la definición tenemos los siguientes corolarios

Teorema 2.5.6 *Todo F-espacio es barrilado.*

Demostración. Claramente si X es un F-espacio, entonces es de la 2^{a} categoría de Baire. Por la Proposición 2.5.3 X es barrilado. ∎

Corolario 2.5.7 *Todo espacio de Banach es barrilado.*

Demostración. Todo espacio de Banach es en particular un espacio de Fréchet. ■

Proposición 2.5.8 *Sea X un espacio vectorial topológico. Si $B \subset X$ es un barril entonces B absorbe a todos los discos de Banach.*

Demostración. Sea $B \subset X$ un barril y $D \subset X$ un disco de Banach. Llamemos $U = B \cap \langle D \rangle$, éste es un disco al ser intersección de balanceados y convexos. Además U es cerrado en $\langle D \rangle$ con la topología de subespacio al ser B cerrado en X. Como la topología en X_D es más fina que la de subespacio, entonces U es cerrado en X_D. Así, U es un barril en X_D. Por el Corolario 2.5.7 X_D es barrilado, por lo cual U es vecindad del cero. Como D es acotado entonces existe $t > 0$ tal que $D \subset tU = t\,(B \cap \langle D \rangle) \subset tB$. Por lo tanto B absorbe a D. ■

Teorema 2.5.9 *Sea X un espacio localmente convexo, de Hausdorff y completo por sucesiones. Entonces todo barril absorbe a todo conjunto acotado.*

Demostración. Sea $A \subset X$ acotado y $B \subset X$ un barril. Por la Proposición 2.4.3 A_{bc} es un disco acotado y por la Proposición 1.3.7 $\overline{A_{bc}}$ es acotado. Como $\overline{A_{bc}}$ es cerrado y X completo por sucesiones, entonces $\overline{A_{bc}}$ es completo por sucesiones. Por el Teorema 2.4.7 tenemos que $\overline{A_{bc}}$ es un disco de Banach. Ahora, por la Proposición 2.5.8 B absorbe a $\overline{A_{bc}}$ y como $A \subset \overline{A_{bc}}$; entonces B absorbe a A.■t

2.6 Topología de Mackey por polares

Sean (X, τ) un espacio lineal topológico, X^* su dual topológico y $X^{\#}$ su dual algebraico. Para $A \subset X^{\#}$ usaremos A° para denotar a su polar en X y para $A \subset X$ usaremos A° y $A^{\bullet}$ para denotar sus polares en X^* y $X^{\#}$, respectivamente.

Proposición 2.6.1 *Sean (X, τ) un espacio lineal topológico y $\mathcal{G}$ una colección de subconjuntos de X^* formada por discos $\sigma(X^*, X)$ - cerrados y $\sigma(X^*, X)$ - acotados con las siguientes propiedades*

(i) Dada una familia finita $\{A_k\} \subset \mathcal{G}$, la bipolar de su unión $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^{\circ\circ}$ pertenece a $\mathcal{G}$.

(ii) Si $A \in \mathcal{G}$ entonces $\lambda A \in \mathcal{G}$ si $\lambda \neq 0$.

Sea $\tau_{\mathcal{G}}$ la topología polar en X determinada por $\mathcal{G}$, entonces $(X, \tau_{\mathcal{G}})^*$ es el subespacio lineal H del dual algebraico $X^{\#}$ generado por los conjuntos $A^{\circ\bullet}$ con $A \in \mathcal{G}$.

Demostración. Sabemos que una base de vecindades de 0 para la topología polar $\tau_{\mathcal{G}}$ determinada por $\mathcal{G}$ es la colección de conjuntos de la forma $\lambda \bigcap_{k=1}^{n} A_k^\circ = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \lambda^{-1} A_k\right)^\circ$ con $A_k \in \mathcal{G}$ y $\lambda > 0$. Debido a que $\mathcal{G}$ satisface (ii) una base de vecindades de 0 para $\tau_{\mathcal{G}}$ es la colección de los conjuntos de la forma $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^\circ$ con $A_k \in \mathcal{G}$. Sea $f : X \to \mathbb{F}$ una funcional lineal $\tau_{\mathcal{G}}$ - continua. Existen $(A_k)_{k=1}^{n} \subset \mathcal{G}$ tales que $|f(x)| \leq 1$ si $x \in \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^\circ$. O sea, $f \in \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^{\circ\bullet}$ y como por hipótesis $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^{\circ\circ} \in \mathcal{G}$ y además $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^{\circ\circ\circ\bullet} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^{\circ\bullet}$, concluimos que $f \in H$. Inversamente, sea $f \in H$ y supongamos que $f \in \lambda A^{\circ\bullet}$ para algún $A \in \mathcal{G}$ y $\lambda \neq 0$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que $|f(x)| \leq \lambda\varepsilon$ si $x \in \varepsilon A^\circ = (\varepsilon^{-1} A)^\circ$, como por la propiedad ii) $\varepsilon^{-1} A \in \mathcal{G}$, entonces f es $\tau_{\mathcal{G}}$- continua. Supongamos ahora que g pertenece al subespacio lineal de $X^{\#}$ generado por la familia $\{A^{\circ\bullet} : A \in \mathcal{G}\}$. Entonces, g es una combinación lineal de elementos f como los antes considerados y por tanto, es $\tau_{\mathcal{G}}$ - continua. ∎

Proposición 2.6.2 *Sea X un espacio localmente convexo de Hausdorff y $(A_k)_{k=1}^{n}$ una familia de convexos y compactos de X. Entonces las envolventes $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)_c$ y $\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)_{bc}$ son compactos en X.*

Demostración. En $\mathbb{F}^n$ consideremos el siguiente conjunto

$$L = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}.$$

Claramente L es compacto, y por el Teorema de Tychonoff $L \times \prod_{k=1}^{n} A_k$ también es compacto. Definamos $f : L \times \prod_{k=1}^{n} A_k \to X$ como

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_n, x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Es evidente que f es continua al ser X un espacio vectorial topológico y, entonces $f\left(L \times \prod_{k=1}^{n} A_k\right)$ es compacto por ser imagen continua de un compacto, pero $f\left(L\times\prod_{k=1}^{n}A_k\right)=\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)_c$ por la descripción de esta envolvente que fue vista en la Proposición 1.1.12. Análogamente, obtenemos que $\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)_{bc}$ es compacto si tomamos

$$L=\left\{(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{F}^n:\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\leq 1\right\}$$

■

Proposición 2.6.3 *Sean (X,τ) un espacio vectorial topológico, $\mathcal{G}_0$ una colección de subconjuntos $\sigma(X^*,X)$- acotados de X^* y $\tau_{\mathcal{G}_0}$ la topología polar en X que ésta determina, entonces $(X,\tau_{G_0})^*$ es el subespacio lineal H_0 de $X^\#$ generado por los conjuntos $A^{\circ\bullet}$, con $A\in\mathcal{G}_0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{G}$ la colección de todos los conjuntos de la forma $\left(\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k\right)^{\circ\circ}$ con $n\geq 1$, $A_k\in\mathcal{G}_0$ y $\lambda_k\neq 0$ para $1\leq k\leq n$. Claramente $\mathcal{G}$ cumple las propiedades de la Proposición 2.6.1 y se tiene que $\tau_{\mathcal{G}_0}=\tau_{\mathcal{G}}$.

De esa misma proposición se sigue que $(X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*$ es el subespacio lineal de $X^\#$ generado por los conjuntos $C^{\circ\bullet}$, con $C\in\mathcal{G}$. Como para todo $A\in\mathcal{G}_0$ se cumple que $A^{\circ\circ}\in\mathcal{G}$ y $A^{\circ\circ\circ\bullet}=A^{\circ\bullet}$, entonces $H_0\subset(X,\tau_{\mathcal{G}})^*$.

Inversamente, sea $C\in\mathcal{G}$, entonces $C=\left(\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k\right)^{\circ\circ}$ con $n\geq 1$, $A_k\in\mathcal{G}_0$ y $\lambda_k\neq 0$ para $1\leq k\leq n$. El conjunto $A_k^{\circ\bullet}$ es $\tau_{\mathcal{G}_0}-$equicontinuo por la Proposición 2.2.6, ya que $A_k^{\circ\bullet\circ}=A_k^{\circ}$ es una $\tau_{\mathcal{G}_0}$. - vecindad de 0 en X. Como $A_k^{\circ\bullet}$ es también $\sigma\left((X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*,X\right)-$cerrado, es por tanto $\sigma\left((X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*,X\right)$ -compacto de acuerdo al Teorema de Alaoglu-Bourbaki, y entonces $\sigma\left(X^\#,X\right)$ -compacto. De acuerdo a la proposición anterior $D=\left(\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k^{\circ\bullet}\right)_{bc}$ es $\sigma\left(X^\#,X\right)$ -compacto y por consiguiente $\sigma\left(X^\#,X\right)$ - cerrado, ya que está topología es de Hausdorff. De donde, $D=\left(\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k^{\circ\bullet}\right)^{\circ\bullet}$

Entonces $\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k\subset\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k^{\circ\bullet}$. De donde, $C^{\circ\bullet}=\left(\bigcup_{k=1}^{n}\lambda_kA_k\right)^{\circ\bullet}\subset D\subset H_0$. Por tanto, $(X^*,\tau_{\mathcal{G}})^*\subset H_0$. ■

Corolario 2.6.4 *Sean X un espacio vectorial topológico y $\mathcal{G}_0$ una colección de subconjuntos $\sigma(X^*,X)$ - acotados de X^*. Entonces* *(a)* $(X,\tau_{\mathcal{G}_0})^* \subset X^*$ *si y sólo si* $A^{\circ\circ}$ *es* $\sigma(X^*,X)$ *- compacto para todo* $A \in \mathcal{G}_0$.

(b) $X^* \subset (X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*$ *si y sólo si el subespacio* N *de* X^* *generado por* $A^{\circ\circ}$ *con* $A \in \mathcal{G}_0$ *es igual a* X^*.

Demostración. (a) Si $A^{\circ\circ}$ es $\sigma(X^*,X)$ - compacto para todo $A \in \mathcal{G}_0$, entonces $A^{\circ\circ}$ es $\sigma\left(X^{\#},X\right)$- compacta y por tanto, $\sigma\left(X^{\#},X\right)$- cerrada por ser ésta una topología de Hausdorff. Es decir, $A^{\circ\bullet} \subset A^{\circ\circ}$ y como la otra contención siempre es cierta, entonces $A^{\circ\bullet} = A^{\circ\circ}$. Por la proposición anterior $(X,\tau_{\mathcal{G}_0})^* \subset X^*$.

Inversamente, si $(X,\tau_{\mathcal{G}_0})^* \subset X^*$, entonces, por la proposición anterior $A^{\circ\bullet} \subset X^*$ para todo $A \in \mathcal{G}_0$. Es decir, para todo $A \in \mathcal{G}_0$ se cumple $A^{\circ\bullet} = A^{\circ\circ}$. El conjunto $A^{\circ\bullet}$ es $\tau_{\mathcal{G}_0}-$equicontinuo por la Proposición 2.2.6, ya que A° es una $\tau_{\mathcal{G}_0}$. - vecindad de 0 en X, entonces $A^{\circ\circ}$ es $\sigma\left((X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*,X\right)$ -compacto y por tanto, $\sigma(X^*,X)$ - compacto.

(b) Supongamos que $X^* \subset (X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*$. Es claro que $N \subset X^*$. Sea $f \in X^*$. Entonces existen $A_1,...,A_n \in \mathcal{G}_0$ tales que $|f(x)| \le 1$ si $x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\circ}$ ya que $f \in (X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*$ por hipótesis. Entonces, $f \in \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\circ}\right)^{\circ} = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^{\circ\circ}\right)^{\circ\circ}$ por (j) de la Proposición 2.2.2. O sea,

$$f \in \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i : m \ge 1, \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \le 1 \text{ y } g_i \in A_k^{\circ\circ} \text{ para } 1 \le i \le m\right\} \subset$$

Inversamente, supongamos que $N = X^*$. Notemos que $A^{\circ\circ} = A^{\circ\bullet} \cap X^*$ para todo $A \in \mathcal{G}_0$. Entonces, por la proposición anterior $f \in X^*$ implica

$$f \in \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i : m \ge 1, \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \le 1 \text{ y } g_i \in A_k^{\circ\circ} \text{ para } 1 \le i \le m\right\} \subset (X,\tau_{\mathcal{G}_0})^*$$

■

Teorema 2.6.5 *(Mackey - Arens) Sea* X *un espacio vectorial topológico separado por su dual topológico* X^**. Una topología localmente convexa* τ *en* X *es compatible con el par dual* (X,X^*) *si y sólo si* τ *es la topología polar generada por una colección de discos* $\sigma(X^*,X)$ *- compactos que cubren a* X^*.

Demostración. Sea τ una topología localmente convexa en X compatible con el par dual (X,X^*) y sea $\mathcal{B}_0$ una base local del 0 en X formada por conjuntos absolutamente convexos y τ - cerrados, que por el Corolario 1.4.4 dichos conjuntos son también $\sigma(X, X^*)$ – cerrados. Sea $\mathcal{G} = \{V^\circ : V \in \mathcal{B}_0\}$. Por el Teorema de Bipolares $V = V^{\circ\circ}$ y entonces V° es $\sigma(X^*, X)$-acotado y tenemos que $\tau = \tau_{\mathcal{G}}$. Como τ es compatible con (X, X^*), entonces por el inciso (a) del corolario anterior, los conjuntos $V^\circ = (V^\circ)^{\circ\circ}$, que son absolutamente convexos y $\sigma(X^*, X)$ - cerrados, resultan ser $\sigma(X^*, X)$-compactos. Sea $f \in X^*$, entonces existe $V \in \mathcal{B}_0$ tal que $|f(x)| \leq 1$ si $x \in V$, de donde se sigue que $f \in V^\circ$. Por lo que $\mathcal{G}$ cubre a X^*.

Inversamente, si τ es la topología polar generada por una colección $\mathcal{G}$ de discos A que son $\sigma(X^*, X)$ - compactos que cubren X^*, entonces es claro que $A = A^{\circ\circ}$ y por la parte (a) del corolario anterior $(X, \tau_{\mathcal{G}})^* \subset X^*$. Además, como $X^* \subset \bigcup\limits_{A \in \mathcal{G}} A$, entonces el subespacio generado por las bipolares $A^{\circ\circ}$ con $A \in \mathcal{G}$, coincide con X^*. Finalmente por la parte (b) del corolario anterior $X^* \subset (X^*, \tau_{\mathcal{G}})^*$. ∎

Definición 2.6.6 *Sea X espacio vectorial topológico separado por X^*. La topología de Mackey $\tau(X, X^*)$ es la topología polar determinada en X por la colección de todos los discos $\sigma(X^*, X)$ - compactos de X^*. Análogamente definimos $\tau(X^*, X)$.*

Con base en esta definición, reformularemos el Teorema de Mackey - Arens de la siguiente forma

Proposición 2.6.7 *Sea X un espacio vectorial topológico separado por X^*. Una topología localmente convexa en X es compatible con el par dual (X, X^*) si y sólo si es más fina que la topología débil $\sigma(X, X^*)$ y más gruesa que la topología de Mackey $\tau(X, X^*)$.*

Demostración. Si τ es una topología localmente convexa en X compatible con el par dual (X, X^*), entonces por el Teorema de Mackey - Arens es más gruesa que la de Mackey, además es más fina que la topología débil; ya que ésta es la mínima topología localmente convexa en X para la cual el dual topológico es X^*. Inversamente, si $\sigma(X, X^*) \subset \tau$ entonces $X^* \subset (X, \tau)^*$ y si $\tau \subset \tau(X, X^*)$ entonces $(X, \tau)^* \subset X^*$. Por tanto $(X, \tau)^* = X^*$. ∎

Ahora reenunciamos y damos la prueba del Teorema 1.3.43.

Teorema 2.6.8 *Sea X espacio vectorial localmente convexo y X^* su dual topológico. Un conjunto $B \subset X$ es acotado en X si y sólo si B es w-acotado. Entonces los acotados en X son los mismos para todas las topologías localmente convexas en X admisibles con el par dual (X, X^*).*

Demostración. Sea $B \subset X$ acotado para alguna topología localmente convexa en X compatible con el par dual (X, X^*), entonces B es $\sigma(X, X^*)$ - acotado. Para probar el teorema basta demostrar que cualquier conjunto $\sigma(X, X^*)$ - acotado es $\tau(X, X^*)$ - acotado. Sea B un conjunto $\sigma(X, X^*)$ - acotado, entonces por la Proposición 2.2.7 existe un barril $T \subset X^*$ tal que

$$B \subset T^\circ \tag{2.4}$$

Sea $\mathcal{G}$ la colección de todos los discos $\sigma(X^*, X)$ - compactos de X^*. Como cada $D \in \mathcal{G}$ es $\sigma(X^*, X)$-completo, en particular completo por sucesiones, entonces por el Teorema 2.4.7 A es un disco de Banach. Por la Proposición 2.5.8 T absorbe a todo $D \in \mathcal{G}$, es decir, para cada $D \in \mathcal{G}$ existe $\lambda > 0$ tal que $D \subset \lambda T$. Al obtener las polares y usar 2.4 tenemos $B \subset T^\circ \subset \lambda D^\circ$. Como $\{D^\circ : D \in \mathcal{G}\}$ es una base local del 0 en $\tau(X, X^*)$, A es $\tau(X, X^*)$ - acotado. ■

2.7 Espacios infrabarrilados, semirreflexivos y reflexivos

Definición 2.7.1 *Un espacio X localmente convexo es infrabarrilado si todo barril bornívoro es vecindad del* 0.

Observación 2.7.2 *Si X es barrilado, entonces X es infrabarrilado.*

Proposición 2.7.3 *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo. Un conjunto $M \subset X^*$ es $\beta(X^*, X)$ - acotado si y sólo si existe un barril $T \subset X$ bornívoro tal que $M \subset T^\circ$.*

Demostración. Sea $M \subset X^*$ un conjunto $\beta(X^*, X)$ - acotado. Sabemos que M° es un disco $\sigma(X^*, X)$-cerrado, por lo que también es τ-cerrado. Hagamos $T = M^\circ$ y sea A acotado en X, por lo que A° es una vecindad de 0 en $(X^*, \beta(X^*, X))$. Como M es $\beta(X^*, X)$ - acotado, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $M \subset \lambda A^\circ$, y como $A \subset A^{\circ\circ}$ tenemos

$$A \subset A^{\circ\circ} \subset \lambda M^\circ = \lambda T$$

De donde T es bornívoro. Por tanto, T es un barril bornívoro con $M \subset M^{\circ\circ} = T$.

Supongamos ahora que existe un barril bornívoro $T \subset X$ tal que $M \subset T^\circ$. Veamos que T° es $\beta(X^*, X)$ - acotado. Sea $U \in \beta(X^*, X)$ un básico, por lo que U lo podemos suponer de la forma A° con $A \subset X$ acotado. Como T es bornívoro existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda T$. De donde $T^{\circ} \subset \lambda A^{\circ}$, entonces A° es $\beta(X^*, X)$ - acotado. De donde se concluye que M es $\beta(X^*, X)$ - acotado. ■

Teorema 2.7.4 *Un espacio X localmente convexo es infrabarrilado si y sólo si todo conjunto $\beta(X^*, X)$ - acotado es equicontinuo.*

Demostración. Supongamos que X es infrabarrilado y sea M un conjunto $\beta(X^*, X)$ - acotado. Por la proposición anterior existe un barril $T \subset X$ bornívoro en X tal que $M \subset T^{\circ}$. Como T es vecindad de 0, entonces M es equicontinuo.

Ahora supongamos que todo conjunto $\beta(X^*, X)$ - acotado es equicontinuo. Sea T un barril bornívoro en X, por la proposición anterior T° es $\beta(X^*, X)$ - acotado y por nuestra suposición es equicontinuo. Por el Teorema de la bipolar $T = T^{\circ\circ}$ y además, $T^{\circ\circ}$ es τ-vecindad del 0 ya que $\epsilon(X, X^*) = \tau$. ■

Definición 2.7.5 *Sea X espacio localmente convexo de Hausdorff. Definimos el bidual X^{**} de X como*

$$X^{**} = (X^*, \beta(X^*, X))^* = \left(X^*, \beta\left(X^*, \widehat{X}\right)\right)^*$$

Es fácil ver que $\widehat{X} \subset X^{**}$.

Proposición 2.7.6 *Sea X un espacio localmente convexo de Hausdorff. Entonces $\beta(X^{**}, X^*) = \epsilon(X^{**}, X^*)$ si y sólo si X es infrabarrilado. Además si X es infrabarrilado, entonces la inmersión canónica $x \longmapsto \widehat{x}$ es continua si equipamos a X^{**} con la topología $\beta(X^{**}, X^*)$.*

Demostración. Supongamos que X es infrabarrilado, entonces por el Teorema 2.7.4 y por las contenciones (2.1) tenemos que $\beta(X^{**}, X^*) = \epsilon(X^{**}, X^*)$.

Inversamente, supongamos que $\beta(X^{**}, X^*) = \epsilon(X^{**}, X^*)$. Sea $A \subset X^*$ un subconjunto $\beta(X^*, X)$ - acotado, entonces existe $M \subset X^*$ equicontinuo tal que $M^{\circ} \subset A^{\circ} \subset X^{**}$. Además, por la Proposición 2.2.6 existe $U \subset X$ vecindad absolutamente convexa de 0 tal que $M \subset U^{\circ}$. Observamos que U° es un disco $\sigma(X^*, X)$-cerrado, entonces por el Teorema de la bipolar $U^{\circ} = (U^{\circ})^{\circ\circ}$. Por lo que

$$A \subset A^{\circ\circ} \subset M^{\circ\circ} \subset (U^{\circ})^{\circ\circ} = U^{\circ}.$$

Entonces por la Proposición 2.2.6 A es equicontinuo. Y por el Teorema 2.7.4 X es infrabarrilado.

Para ver la continuidad de la inmersión canónica basta observar que

$$\beta(X^{**},X^{*})|_{\widehat{X}}=\epsilon(X^{**},X^{*})|_{\widehat{X}}\approx\epsilon(X,X^{*})=\tau$$

donde la última igualdad se tiene por el Teorema 2.3.9). ∎

Definición 2.7.7 *Un espacio localmente convexo de Hausdorff X es semirreflexivo si la inmersión canónica de X en $X^{**}=(X^{*},\beta(X^{*},X))^{*}$ es suprayectiva.*

De la definición de semirreflexividad, claramente tenemos

Proposición 2.7.8 *Sea X un espacio localmente convexo. Entonces son equivalentes:*

(a) X es semirreflexivo..

(b) Todo $\varphi\in X^{**}$ es de la forma $\varphi(f)=f(x)=\widehat{x}(f)$ para alguna $x\in X$.

(c) Todo $\varphi\in X^{**}$ es $\sigma(X^{*},X)$ - continuo.

(d) $\beta(X^{*},X)$ es admisible para el par dual $\left((X^{*},w^{*}),\widehat{X}\right)$.

Proposición 2.7.9 *Sea X espacio localmente convexo. X es semirreflexivo si y sólo si todo subconjunto A de X que es acotado y $\sigma(X,X^{*})$ - cerrado es $\sigma(X,X^{*})$-compacto.*

Demostración. Si X es semirreflexivo, entonces $X^{**}=\widehat{X}$. Entonces por el Corolario 2.6.4, aplicado a $\left(X^{*},\beta\left(X^{*},\widehat{X}\right)\right)$ y su dual $X^{**}=\widehat{X}$, se tiene que las envolventes absolutamente convexas y $\sigma\left(\widehat{X},X^{*}\right)$-cerradas, $A^{\circ\circ}$, de los subconjuntos $A\subset\widehat{X}$ que son $\sigma\left(\widehat{X},X^{*}\right)$-acotados resultan ser $\sigma\left(\widehat{X},X^{*}\right)$ - compactas. Si $A\subset X$ es acotado y $\sigma(X,X^{*})$ -cerrado, entonces es $\sigma\left(\widehat{X},X^{*}\right)$-acotado, y por lo anterior $\sigma\left(\widehat{X},X^{*}\right)$-compacto por estar contenido en $\widehat{A}^{\circ\circ}$. O sea, A es $\sigma(X,X^{*})$-compacto.

Supongamos ahora que todo subconjunto de X que es acotado y $\sigma(X,X^{*})$-cerrado es $\sigma(X,X^{*})$ - compacto. Sea $\mathcal{G}_0$ la familia de todos los subconjuntos de X que son $\sigma(X,X^{*})$ - acotados. Sabemos que $\mathcal{F}=\{A^{\circ}:A\in\mathcal{G}_0\}$ es base de $\beta(X^{*},X)$. Por el Teorema de la bipolar $A^{\circ}=A^{\circ\circ\circ}$, entonces la topología polar que genera $\mathcal{G}=\{A^{\circ\circ}:A\in\mathcal{G}_0\}$ es también $\beta(X^{*},X)$. Observamos que los conjuntos de $\mathcal{G}$ son absolutamente convexos, $\sigma(X, X^*)$-cerrados y $\sigma(X, X^*)$-acotados, por tanto son $\sigma(X, X^*)$-compactos; además cubren a X, puesto que en $\mathcal{G}_0$ están todos los conjuntos formados por un solo punto de X.

En términos de $\widehat{X}$ tenemos que $(X^*, w^*)^* = \widehat{X}$ y $\beta(X^*, X) = \beta\left(X^*, \widehat{X}\right)$, por tanto $\beta\left(X^*, \widehat{X}\right)$ está generada por una colección de $\sigma\left(\widehat{X}, X^*\right)$-compactos que cubren a $\widehat{X}$. Por el Teorema de Mackey Arens (2.6.5) se cumple que $(X^*, \beta(X^*, X))^* = (X^*, w^*)^* = \widehat{X}$, de donde X es semirreflexivo.. ∎

Proposición 2.7.10 *Sea X un espacio semirreflexivo.. Entonces $(X^*, \beta(X^*, X))$ es barrilado.*

Demostración. Sea T un barril en $(X^*, \beta(X^*, X))$. Entonces por la Proposición (2.2.7) T° es $\sigma(X, X^*)$ - acotado y como T° es un disco $\sigma(X, X^*)$ - cerrado, se sigue del Teorema de la bipolar que $T^{\circ\circ} = T$, por lo que T es una $\beta(X^*, X)$ - vecindad del 0. ∎

Definición 2.7.11 *Un espacio localmente convexo (X, τ) es reflexivo si la inmersión canónica $x \longmapsto \widehat{x}$ es un isomorfismo de (X, τ) sobre $(X^{**}, \beta(X^{**}, X^*))$.*

Teorema 2.7.12 *Sea X un espacio localmente convexo de Hausdorff. Entonces X es reflexivo si y sólo si X es semirreflexivo e infrabarrilado.*

Demostración. Si X es reflexivo, entonces claramente X es semirreflexivo.. Además, se tiene que $\epsilon(X^{**}, X^*) \approx \tau \approx \beta(X^{**}, X^*)$. Entonces por el Teorema 2.7.6 X es infrabarrilado. Claramente por la definición de semirreflexivo y el Teorema 2.7.6 la inmersión canónica es isomorfismo, por lo que X es reflexivo. ∎

Corolario 2.7.13 *Sea X un espacio reflexivo, entonces X es barrilado.*

Demostración. El espacio X es infrabarrilado. Por la Proposición 2.7.8, $\beta(X^*, X)$ es compatible con el par dual $\left(X^*, \widehat{X}\right)$, Sea $A \subset X^*$ un subconjunto $\sigma(X^*, X)$ - acotado, por lo que A también es $\sigma\left(X^*, \widehat{X}\right)$ - acotado y entonces $\beta(X^*, X)$ - acotado. Por el Teorema 2.7.4 A es equicontinuo y se sigue del Teorema 2.5.4 que X es barrilado. ∎

Proposición 2.7.14 *Sea X un espacio reflexivo. Entonces $(X^*, \beta(X^*, X))$ es reflexivo.*

Demostración. Por las proposiciones 2.7.10 y 2.7.8, el espacio $(X^*, \beta(X^*, X))$ es barrilado y $\beta(X^*, X)$ es compatible con el par dual $\left((X^*, w^*), \widehat{X}\right)$. Sea $M \subset X^*$ un subconjunto $\beta(X^*, X)$ - acotado. Por tanto, M es $\sigma\left(X^*, \widehat{X}\right)$-acotado o lo que es lo mismo $\sigma(X^*, X)$-acotado. Del Teorema 2.5.4 resulta que M es equicontinuo y por tanto, por el Teorema de Alaoglu-Bourbaki M es $\sigma(X^*, X)$-relativamente compacto. Por lo que $(X^*, \beta(X^*, X))$ es semirreflexivo, por la Proposición 2.7.9. Por el Teorema 2.7.12 $(X^*, \beta(X^*, X))$ es reflexivo. ∎

Un espacio localmente convexo (X, τ) es barrilado si y sólo si todo conjunto $\sigma(X^*, X)$ - acotado es equicontinuo.

2.7.1 Espacios de semi-Montel y Montel

Definición 2.7.15 *Un espacio localmente convexo X se le llama un espacio de semi-Montel si todo conjunto acotado de X es relativamente compacto. A un espacio de semi-Montel infrabarrilado se le llama un espacio de Montel.*

Proposición 2.7.16 *Un subespacio cerrado de un espacio localmente convexo y metrizable de Montel es de semi-Montel.*

Demostración. Sea M un subespacio de un espacio de Montel X y A acotado en M y por consiguiente, en X, entonces $\overline{A}^X$ es compacto. Entonces $\overline{A}^M = M \cap \overline{A}^X \subset \overline{A}^X$, es compacto en M. Por lo que M es un espacio de semi-Montel. ∎

Proposición 2.7.17 *Todo espacio de semi-Montel es semirreflexivo*

Demostración. Sea $A \subset X$ acotado, entonces es relativamente compacto, por lo que A es relativamente compacto para la topología $\sigma(X, X^*)$. Entonces por la Proposición 2.7.9 X es semirreflexivo.. ∎

Corolario 2.7.18 *Todo espacio de Montel es reflexivo.*

Demostración. Un espacio de Montel es infrabarrilado y por la proposición anterior es semirreflexivo.. Por el Teorema 2.7.12 es reflexivo. ∎

Proposición 2.7.19 *Sea X un espacio localmente convexo. La topología inducida por $\lambda(X^*, X)$ sobre cada equicontinuo $M \subset X^*$ coincide con la topología inducida por $\sigma(X^*, X)$ en M.*

Demostración. Claramente $\lambda(X^*, X)|_M$ es más fina que $\sigma(X^*, X)|_M$. Sean $f_0 \in M$ y $A \subset X$ precompacto. Probaremos que existe un abierto de $\sigma(X^*, X)|_M$ contenido en $(f_0 + A^\circ) \cap M$.

El conjunto $M - f_0$ también es equicontinuo: al ser M equicontinuo existe U vecindad absolutamente convexa de 0 en X tal que $M \subset U^\circ$. Por lo que, $M - f_0 \subset U^\circ - U^\circ \subset 2U^\circ = (2^{-1}U)^\circ$, por consiguiente $M - f_0$ es equicontinuo.

Entonces existe en X una vecindad V absolutamente convexa de 0 tal que $M - f_0 \subset 2^{-1}V^\circ$, de donde

$$\sup_{f\in M, x\in V} |(f - f_0)(x)| \leq 2^{-1}$$

Como A es precompacto, existe $\mathcal{F} = \{x_k\}_{k=1}^n \subset A$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^n x_k + V$, por lo que si $x \in A$ entonces $x = x_k + y$ para alguna $1 \leq k \leq n$ y $y \in V$. Sea $f \in (f_0 + 2^{-1}\mathcal{F}^\circ) \cap M$, entonces

$$\sup_{1\leq k\leq n} |(f - f_0)(x_k)| \leq 2^{-1}$$

y

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in A} |(f - f_0)(x)| &= \sup_{1\leq k\leq n; y\in V} |(f - f_0)(x_k + y)| \\
&\leq \sup_{1\leq k\leq n} |(f - f_0)(x_k)| + \sup_{y\in V} |(f - f_0)(y)| \leq 1
\end{aligned}$$

de donde $f \in (f_0 + A^\circ) \cap M$. Entonces

$$\left(f_0 + 2^{-1}\mathcal{F}^\circ\right) \cap M \subset (f_0 + A^\circ) \cap M$$

Por tanto $\lambda(X^*, X)|_M = \sigma(X^*, X)|_M$ ya que $f_0 + 2^{-1}\mathcal{F}^\circ \in \sigma(X^*, X)$.
■

Teorema 2.7.20 *Sea X un espacio de Montel, entonces su dual fuerte $(X^*, \beta(X^*, X))$ también es un espacio de Montel.*

Demostración. Como X es reflexivo, se sigue de la Proposición 2.7.10 que $(X^*,\ \beta(X^*, X))$ es barrilado. Sea $M \subset X^*$ un conjunto $\beta(X^*, X)$-acotado. El conjunto $N = \overline{M_{bc}}$ es $\beta(X^*, X)$-acotado y por tanto, σ-$\left(X^*, \widehat{X}\right)$ acotado y $\sigma\left(X^*, \widehat{X}\right)$-cerrado (Proposición 2.7.8, Corolario 1.4.4 y Teorema y 1.3.43).

Como X es infrabarrilado, por el Teorema 2.7.4 N es equicontinuo. Por el Teorema de Alaoglu - Bourbaki N es $\sigma(X^*, X)$ - compacto.

Por la proposición anterior $\lambda(X^*, X)|_N = \sigma(X^*, X)|_N$, entonces N es $\lambda(X^*, X)$ - compacto. Como X es de Montel, los paracompactos coinciden con los acotados, por lo que $\lambda(X^*, X) = \beta(X^*, X)$. De donde N es $\beta(X^*, X)$ - compacto y por tanto M es relativamente compacto. En conclusión, $(X^*, \beta(X^*, X))$ es de Montel. ∎

Ahora veremos uno espacios particulares que usaremos mas adelante. Dos de ellos serán ejemplos de espacios de Montel

Definición 2.7.21 *Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial formado por todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. Esta topología está dada por las seminormas*

$$\rho_k(f) = \sup_{|t| \leq k} |f(t)|$$

donde k corre por los naturales.

Definición 2.7.22 *Sea $\varepsilon(\mathbb{R})$ el subespacio lineal de $C(\mathbb{R})$ formado por las funciones que son infinitamente derivables en $\mathbb{R}$. Denotaremos por $d^p f$ a la p - ésima derivada de $f \in \varepsilon(\mathbb{R})$. Definimos en $\varepsilon(\mathbb{R})$ la topología generada por las seminormas*

$$q_{p,k}(f) = \sup_{|t| \leq k} |d^p f(t)|$$

donde k corre por los naturales y p por los enteros no negativos. Obsérvese que

$$q_{p,k}(f) = \rho_k(d^p f).$$

Para K compacto en $\mathbb{R}$, definimos el subespacio $D(K)$ de $\varepsilon(\mathbb{R})$ formado por las funciones con soporte compacto contenido en K.

Observación 2.7.23 *La topología de $D(K)$ como subespacio de $\varepsilon(\mathbb{R})$ puede también generarse por las seminormas*

$$q_p(f) = \sup_{t \in K} |d^p f(t)|$$

donde p corre por los enteros no negativos.

En efecto Sea $k \in \mathbb{N}, p \geq 0$ y $f \in D(K)$. Claramente se tiene que

$$q_{p,k}(f) \leq q_p(f)$$

Por otra parte, si $K \subset [-k,k]$ entonces

$$q_p(f) \leq q_{p,k}(f)$$

Los espacios $C(\mathbb{R})$, $\varepsilon(\mathbb{R})$ y $D(K)$ son metrizables ya que sus topologías están generadas por una familia numerable de seminormas.

Proposición 2.7.24 *$C(\mathbb{R}), \varepsilon(\mathbb{R})$ y $D(K)$ son espacios de Fréchet.*

Demostración. Sólo resta probar que los tres son completos.

i) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C(\mathbb{R})$. En particular, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$\rho_k(f_n - f_m) = \sup_{|t| \leq k} |(f_n - f_m)(t)| < \varepsilon.$$

Entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ satisface una condición uniforme de Cauchy en cada intervalo $[-k,k]$ y por tanto, en cada uno de ellos converge uniformemente. De aquí se sigue que $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$existe para todo $t \in \mathbb{R}$ y que f es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, $C(\mathbb{R})$ es completo.

ii) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \varepsilon(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Deducimos como en i) que $(d^p f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{R}$ digamos $g^{(p)}$ y lo hace uniformemente sobre cada intervalo $[-k,k]$. Tomemos $f = g^{(0)}$, entonces $f_n \to f$ en $\varepsilon(\mathbb{R})$. Por lo tanto $\varepsilon(\mathbb{R})$ es completo.

iii) Basta ver que $D(K)$ es cerrado en $\varepsilon(\mathbb{R})$. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D(K)$ tal que $f_n \to f$, con $f \in \varepsilon(\mathbb{R})$. Consideremos $x \in \mathbb{R} \setminus K$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

al ser $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $f(x)$. Pero como $f_n \in D(K)$, entonces $f_n(x) = 0$. Por lo que $|f(x)| < \varepsilon$. Por tanto $f(x) = 0$. De donde $f \in D(K)$. ∎

Corolario 2.7.25 *$C(\mathbb{R})$, $\varepsilon(\mathbb{R})$ y $D(K)$ son barrilados.*

Demostración. Del Teorema 2.5.6 se sigue que al ser estos espacios de Fréchet son también barrilados. ∎

Teorema 2.7.26 *$\varepsilon(\mathbb{R})$ es un espacio de Montel.*

Demostración. Basta probar que $\varepsilon(\mathbb{R})$ es semi-Montel

Para todo $p \in \mathbb{N}$ definimos $C_p(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$. Asociamos a cada $f \in \varepsilon(\mathbb{R})$ con $(d^p f)_p \in \prod_p C_p(\mathbb{R})$; de esta forma logramos sumergir $\varepsilon(\mathbb{R})$ en $\prod_p C_p(\mathbb{R})$. Además la topología inducida por $\prod_p C_p(\mathbb{R})$ en $\varepsilon(\mathbb{R})$ coincide con la original de $\varepsilon(\mathbb{R})$, ya que los sub-básicos coinciden. Como $\varepsilon(\mathbb{R})$ es completo, éste es un espacio cerrado de $\prod_p C_p(\mathbb{R})$.

Sea $H \subset \varepsilon(\mathbb{R})$ acotado, entonces para todo p y todo natural k, existe $M_{k,p} > 0$ tal que

$$\sup_{|t|\leq k} |d^p f(t)| \leq M_{k,p}$$

Por consiguiente $d^p H = \{d^p f : f \in H\}$ es acotado en $C([-k,k], \|\cdot\|_\infty)$.

Sean $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in [-k,k]$ y $f \in H$. Entonces

$$|d^p f(x) - d^p f(y)| = \left| \int_y^x d^{p-1} f(t)\, dt \right| \leq M_{k,p-1} |x-y|$$

Por tanto, $d^p H$ es una familia de funciones equicontinuas en $[-k,k]$.

Como esto es válido para todo $k \geq 1$, entonces por el Teorema de Arzela-Ascoli, $d^p H$ es relativamente compacto en $C(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Tychonoff H es relativamente compacto. De donde $\varepsilon(\mathbb{R})$ es un espacio de semi-Montel. ■

Corolario 2.7.27 $D(K) \subset \varepsilon(\mathbb{R})$ *es un espacio de Montel.*

Demostración. En la Proposición 2.7.24 se mostró que $D(K)$ es un subespacio cerrado de $\varepsilon(\mathbb{R})$, entonces el resultado se sigue inmediatamente de la Proposición 2.7.16. ■

Capítulo 3

Topologización como álgebra de $L(X)$

3.1 Espacios subnormados

Definición 3.1.1 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Decimos que X es subnormado o subnormable si existe una norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que genera en X una topología más fina que τ. En tal caso se dice que $\|\cdot\|$ es una subnorma en X.*

Proposición 3.1.2 *Sea $(X, \mathcal{P}(\tau))$ un espacio localmente convexo, de Hausdorff y subnormado; donde $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Entonces para cada α la seminorma ρ_α es continua respecto a la norma $\|\cdot\|$ y existe una constante $M_\alpha > 0$ tal que*

$$M_\alpha \rho_\alpha(x) \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$. El sistema de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}$ es equivalente al sistema $\mathcal{P}' = \{\rho'_\alpha\}$, con $\rho'_\alpha(x) = M_\alpha \rho_\alpha(x)$ y

$$\|x\|' = \sup_{\alpha \in I} \{\rho'_\alpha(x)\}$$

es una subnorma para $(X, \mathcal{P}(\tau))$, por lo que para un subespacio localmente convexo, de Hausdorff y subnormado podemos siempre considerar que $\|x\| = \sup_{\alpha \in I} \{\rho_\alpha(x)\}$ define una subnorma en X.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$, $V_{\alpha;\varepsilon} = \{x \in X : \rho_\alpha(x) < \varepsilon\}$ es una vecindad abierta de 0 en $\mathcal{P}(\tau)$ y por tanto, es un abierto en $\tau_{\|\cdot\|}$, donde $\tau_{\|\cdot\|}$

es la topología generada por la subnorma, por lo que ρ_α es continua respecto a la subnorma.

Como $\tau \subset \tau_{\|\cdot\|}$ tenemos, por el Corolario 1.3.47, que existe $m_\alpha > 0$ tal que $\rho_\alpha(x) \leq m_\alpha \|x\|$. Hacemos $M_\alpha = \dfrac{1}{m_\alpha}$ y obtenemos la desigualdad buscada.

Por el por el Corolario 1.3.47 tenemos que $\tau(\mathcal{P}') = \tau(\mathcal{P}')$.

Como $\rho'_\alpha(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in I$, se tiene $\|x\|' \leq \|x\|$. Entonces $\|x\|' < \infty$ para todo $x \in X$. Veamos que es una norma.

i) Es claro que $\|x\|' \geq 0$. Sea $x \in X$ tal que $\|x\|' = 0$. Por lo cual $\rho_\alpha(x) = 0$ para toda $\alpha \in I$. Como X es de Hausdorff, entonces por el Teorema 1.3.40 $x = 0$.

ii) Sean $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$; entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|' &= \sup_{\alpha\in I}\{\rho'_\alpha(\lambda x)\} = \sup_{\alpha\in I}\{|\lambda|\,\rho'_\alpha(x)\} \\ &= |\lambda| \sup_{\alpha\in I}\{\rho'_\alpha(x)\} = |\lambda|\,\|x\|' \end{aligned}$$

iii) Sean $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x+y\|' &= \sup_{\alpha\in I}\{\rho'_\alpha(x+y)\} = \sup_{\alpha\in I}\{\rho'_\alpha(x) + \rho'_\alpha(y)\} \\ &= \sup_{\alpha\in I}\{\rho'_\alpha(x)\} + \sup_{\alpha\in I}\{\rho'_\alpha(y)\} \\ &= \|x\|' + \|y\|' \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\cdot\|'$ es una subnorma para (X, τ). ∎

Definición 3.1.3 *Sea $(X, \mathcal{P}(\tau))$ un espacio localmente convexo, Hausdorff y subnormado. Decimos que X es sub-Banach si $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach, donde consideramos la subnorma*

$$\|x\| = \sup_{\alpha\in I}\{\rho_\alpha(x)\}$$

y $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha(x)\}_{\alpha\in I}$.

Proposición 3.1.4 *Sea X un espacio localmente convexo, de Hausdorff, subnormado y completo por sucesiones. Entonces X es un espacio de sub-Banach.*

Demostración. Consideremos la subnorma

$$\|x\| = \sup_{\alpha\in I}\{\rho_\alpha(x)\}$$

Definamos

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \{x \in X : \rho_\alpha(x) \leq 1\} \\ B &= \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{aligned}$$

Ya que cada ρ_α es $\|\cdot\|$-continua, se sigue que $\mathcal{B}$ es $\|\cdot\|$- cerrado. Al ser X completo por sucesiones, B es completo por sucesiones. Como B es intersección de convexos y balanceados, B es un disco. Por el Teorema 2.4.7 B es un disco de Banach. Recordemos que la norma en X_B es

$$\rho_B(x) = \inf\{t > 0 : x \in tB\}$$

De la definición de B, para $t > 0$ tenemos que $x \in tB$ si y sólo si $\rho_\alpha(x) \leq t$ para todo $\alpha \in I$. Por lo que ρ_B se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \rho_B(x) &= \inf\{t > 0 : \rho_\alpha(x) \leq t \text{ para todo } \alpha \in I\} \\ &= \inf\{t > 0 : \|x\| \leq t\} \end{aligned}$$

Así, $\|x\| \leq \rho_B(x)$ y como

$$\rho_\alpha(x) \leq \|x\| \tag{3.1}$$

para todo $\alpha \in I$, entonces $\rho_B(x) \leq \|x\|$. Por lo que $\|x\| = \rho_B(x)$ para todo $x \in X_B$.

Evidentemente $\langle B\rangle \subset X$. Tomemos $x \in X \diagdown B$, entonces $\|x\| \neq 0$ y por (3.1) $\frac{1}{\|x\|}x \in B$. O sea, B es absorbente, lo que nos lleva a que $X = \langle B\rangle$. Como B es disco de Banach, entonces $X_B = (X, \|\cdot\|)$ es de Banach. Por lo tanto X es de sub-Banach. ■

3.2 Álgebras topológicas, topologizables, normadas y normables

Definición 3.2.1 *Un álgebra A sobre $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{F}$ en la que está definida una operación*

$$\cdot \ : A \times A \to A$$

llamada producto que satisface:

(a) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$
(b)$(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$
(c) $\lambda (x \cdot y) = \lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y$
para $x, y \in A$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$
Si además se cumple
(d) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
entonces se dice que A *es asociativa.*

En lo sucesivo sólo diremos un álgebra A *en lugar de un álgebra* A *sobre* $\mathbb{F}$. *Así*

Definición 3.2.2 *Un álgebra semi-topológica* (A, τ) *es un álgebra* A *dotada de una topología vectorial* τ *para la que el producto es una función separadamente continua.*

Definición 3.2.3 *Un álgebra topológica* (A, τ) *es un álgebra* A *dotada de una topología vectorial* τ *para la que el producto es una función continua. En este caso decimos que* τ *es una topología de álgebra para* A. *A veces escribiremos simplemente* A *en lugar de* (A, τ).

Definición 3.2.4 *Sea* A *un álgebra. Decimos que* A *es topologizable si existe una topología* τ *tal que* (A, τ) *es un álgebra topológica.*

Proposición 3.2.5 *Sea* A *un álgebra y* τ *una topología vectorial en* A. *El producto en* A *es continuo si y sólo si existe una base local del origen* $\mathcal{B}_0$ *tal que para cualquier vecindad* U *del cero existe* $V \in \mathcal{B}_0$ *que satisface* $V \cdot V \subset U$.

Demostración. Supongamos que el producto es τ -continuo en A y sea $\mathcal{B}$ cualquier base local del una vecindad del cero. Como el producto es conjuntamente continuo, existen V_1, V_2 vecindades del cero tales que $V_1 \cdot V_2 \subset U$. Tomando $V = V_1 \cap V_2$ tenemos que $V \cdot V \subset U$.

Inversamente, supongamos que existe una base local de vecindades del origen $\mathcal{B}_0$, la cual podemos suponer que está formada por vecindades balanceadas, que tiene la propiedad antes descrita. Sean $x, y \in A$ y $U \in \mathcal{B}_0$. Escojamos $V, W \in \mathcal{B}_0$ tales que $V + V + V \subset U$ y $W \cdot W \subset V$. Por la continuidad de la multiplicación por escalares existe $0 < \lambda \leq 1$, tal que λx, $\lambda y \in W$. Tomemos $V_0 \in \mathcal{B}_0$ que satisfaga $\lambda^{-1} V_0 \subset W$. Ahora consideremos el siguiente producto

$$\begin{aligned} (x + V_\alpha)(y + V_\alpha) &\subset xy + xV_0 + V_0 y + V_0 \cdot V_0 \\ &= xy + (\lambda x)\left(\lambda^{-1} V_0\right) + \left(\lambda^{-1} V_0\right)(\lambda y) + (\lambda V_0)\left(\lambda^{-1} V_0\right) \\ &\subset xy + U \end{aligned}$$

Por tanto, el producto es τ-continuo. ∎

Definición 3.2.6 *Sean A un álgebra y $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}$ una norma. Decimos que $\|\cdot\|$ es una norma submultiplicativa o norma de álgebra si para todo $x, y \in A$ se cumple*

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

En este caso se dice que $(A, \|\cdot\|)$ es álgebra normada y si es completa, entonces es llamada un álgebra de Banach..

Proposición 3.2.7 *Si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, entonces A es un álgebra topológica.*

Demostración. Sabemos que $(A, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial topológico y las bolas $B_{\frac{1}{n}}(0)$, con $n \geq 1$, constituyen una base local del 0 que satisface que para cada $n \geq 1$ se cumple

$$B_{\frac{1}{n}}(0) \cdot B_{\frac{1}{n}}(0) \subset B_{\frac{1}{n}}(0).$$

Por la proposición anterior, el producto es continuo y por tanto, A es un álgebra topológica.■

Definición 3.2.8 *Sea A un álgebra. Decimos que A es normable si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada para alguna norma $\|\cdot\|$.*

Definición 3.2.9 *Sea (A, τ) un álgebra topológica. Decimos que A es normalizable si existe una norma submultiplicativa en A que induce la topología τ.*

Lema 3.2.10 *Sea A un álgebra. Si existen $a \in A$ y $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A - \{0\}$ tales que $ab_n = nb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces A no es normable.*

Demostración. Supongamos que existe una norma submultiplicativa en A, entonces

$$n \|b_n\| = \|nb_n\| = \|ab_n\| \leq \|a\| \|b_n\|$$

Como $b_n \neq 0$ tenemos que $\|b_n\| > 0$ para todo $n \geq 1$. Por lo cual $n \leq \|a\|$ para todo $n \geq 1$, lo que es imposible. Por tanto, A no es normable. ■

3.2.1 Normas de álgebra para C(X)

Sea X un espacio topológico. Definimos $C(X)$ como el espacio de funciones continuas de X en $\mathbb{F}$. Con las operaciones usuales de funciones inducidas por las de $\mathbb{F}$ se tiene que $C(X)$ tiene estructura de álgebra. Ahora daremos una condición necesaria y suficiente parta que $C(X)$ sea normalizable.

Definición 3.2.11 *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es pseudocompacto si toda función continua de X en $\mathbb{R}$ es acotada.*

Todo compacto es pseudocompacto. Un ejemplo de espacio pseudocompacto que no es compacto es el espacio Ω de todos los ordinales numerables provisto con la topología usual generada por los segmentos abiertos (α, β) con $\alpha < \beta$.

Definición 3.2.12 *Para $f \in C(X)$ definimos el soporte de f como*

$$sopf = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

Teorema 3.2.13 *Sea X un espacio topológico no vacío. Entonces $C(X)$ es normable si y sólo si X es pseudocompacto.*

Demostración. Supongamos que X es pseudocompacto, entonces claramente

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

es una norma de álgebra para $C(X)$.

Ahora supongamos que X no es pseudocompacto, por lo que existe $f \in C(X)$ tal que f no es acotada. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(x) \in (0, \infty)$ (si f no tiene su imagen contenida en $(0, \infty)$ consideramos la función $g(x) = |f(x)| + 1$). Como f no es acotada podemos construir una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $f(x_{n+1}) > f(x_n) + 2$. Consideremos $I_n = [f(x_n) - 1, f(x_n) + 1]$. Notemos que los intervalos I_n no se intersectan debido a la elección de x_n. Por esto y por ser $\mathbb{R}$ completamente regular, existen $h \in C(\mathbb{R})$ tal que $h(t) = n$ si $t \in I_n$, y una sucesión de funciones $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset C(\mathbb{R})$ tal que $g_n(f(x_n)) = 1$ y el soporte de g_n esté contenido en I_n, para todo $n \geq 1$.

Definamos $a = h \circ f$ y $b_n = g_n \circ f$. Claramente $a \in C(X)$ y $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C(X) - \{0\}$ y tenemos que

$$ab_n(x) = h(f(x)) \cdot g_n(f(x)).$$

Notemos que si $f(x) \in I_n$, entonces $h(f(x)) = n$ y entonces,

$$ab_n(x) = nb_n(x)$$

y si $f(x) \notin I_n$ entonces $b_n(x) = g_n(f(x)) = 0$, por lo que

$$ab_n(x) = 0 = nb_n(x)$$

Por el lema anterior $C(X)$ no es normable. ■

Corolario 3.2.14 *$C(\mathbb{R})$ no es normable.*

Demostración. El espacio topológico $\mathbb{R}$ no es pseudocompacto pues la función identidad no es acotada. ■

3.3 Álgebras localmente convexas

Definición 3.3.1 *Un álgebra localmente convexa A es un álgebra topológica cuya topología está dada por una familia de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Lambda$ tal que*

$$\rho_\alpha(xy) \leq \rho_\beta(x)\,\rho_\beta(y) \tag{3.2}$$

para todo $x, y \in A$. Decimos que A es una B_0 - álgebra si es A completa y metrizable.

Definición 3.3.2 *Un álgebra localmente convexa A se dice que es multiplicativamente localmente convexa, o m - convexa, si existe una familia de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ que genera su A que satisface*

$$\rho_\alpha(xy) \leq \rho_\alpha(x)\,\rho_\alpha(y)$$

para todo $x, y \in A$ y $\alpha \in \Lambda$.

Observación 3.3.3 *Si A es un localmente convexa es metrizable, entonces su topología puede darse por una familia numerable de seminormas y saturando esa familia obtenemos que su topología puede darse por una sucesión de seminormas $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ que satisface*

$$\rho_n(xy) \leq \rho_{n+1}(x)\,\rho_{n+1}(y)$$

para todo $x, y \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si A es además es m - convexa, entonces se puede encontrar una sucesión de seminormas $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$ que genera su topología y satisface

$$\rho_n(xy) \leq \rho_n(x)\,\rho_n(y).$$

El siguiente resultado que aparece en [6] es el básico para probar el corolario que le sigue, en donde se da respuesta afirmativa a un problema propuesto por Żelazko sobre la renormalización en álgebras localmente convexas.

Teorema 3.3.4 *Sea A un álgebra localmente convexa y B una subálgebra. Sea $\mathcal{Q} = \{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ una familia saturada de seminormas en B que define la topología que hereda de A y que satisface (3.2). Entonces existe una familia saturada de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ en A que define su topología, satisface (3.2) y es tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Gamma$ que satisface*

$$\rho_\alpha|B = q_\beta$$

Demostración. Sea $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Psi}$ la familia de todas las seminormas continuas en A. Entonces $\{\rho_\alpha|_B\}$ define la misma topología en B que $\mathcal{Q}$. Por lo que para todo $\alpha \in \Psi$ existe $\beta \in \Gamma$ y $M > 0$ tales que

$$\rho_\alpha(b) \leq Mq_\beta(b)$$

para todo $b \in B$.

Asimismo, para todo $\beta \in \Gamma$ existe $\alpha \in \Psi$ tal que

$$q_\beta(b) \leq \rho_\alpha(b)$$

para todo $b \in B$.

Hagamos $\Lambda = \{(\alpha, \beta) \in \Psi \times \Gamma : q_\beta(b) \leq \rho_\alpha(b) \text{ para todo } b \in B\}$. Para cada $(\beta, \alpha) \in \Lambda$ definimos $\overline{q}_{\alpha\beta} : A \to \mathbb{R}^+$ como

$$\overline{q}_{\alpha\beta}(a) = \inf\{q_\beta(b) + \rho_\alpha(a - b) : b \in B\}.$$

Veamos que ésta es una seminorma. Sea $a \in A$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ no nulo, entonces

$$\begin{aligned}\overline{q}_{\alpha\beta}(\lambda a) &= \inf\{q_\beta(b) + \rho_\alpha(\lambda a - b) : a \in B\} \\ &= \inf\{q_\beta(\lambda b) + \rho_\alpha(\lambda a - \lambda b) : b \in B\} \\ &= |\lambda|\,\overline{q}_{\alpha\beta}(a),\end{aligned}$$

ya que multiplicar por $\lambda \neq 0$ establece un biyección en B. Para $\lambda = 0$ también es cierta la igualdad.

Sean $a_1, a_2 \in A$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{q}_{\alpha\beta}(a_1 + a_2) &= \inf\{q_\beta(b) + \rho_\alpha(a_1 + a_2 - b) : b \in B\} \\ &= \inf\{q_\beta(b_1 + b_2) + \rho_\alpha(a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)) : b_1, b_2 \in B\} \\ &\leq \inf\{q_\beta(b) + \rho_\alpha(a_1 - b) :\in B\} + \inf\{q_\beta(b) + \rho_\alpha(a_2 - b) : b \in B\} \\ &= \overline{q}_{\alpha\beta}(a_1) + \overline{q}_{\alpha\beta}(a_2).\end{aligned}$$

Sean $a \in B$, entonces

$$\overline{q}_{\alpha\beta}(a) \leq q_\beta(a),$$

ya que $a \in B$, y en vista de que $\rho_\alpha(b) \geq q_\beta(b)$ para todo $b \in B$ tenemos:

$$q_\beta(b) + \rho_\alpha(a-b) \geq q_\beta(b) + q_\beta(a-b) \geq q_\beta(a)$$

si $b \in B$.

Al tomar el ínfimo, obtenemos $\overline{q}_{\alpha\beta}(a) \geq q_\beta(a)$.

Al juntar las dos desigualdades anteriores tenemos: $\overline{q}_{\alpha\beta}(a) = q_\beta(a)$ para todo $a \in B$, es decir

$$\overline{q}_{\alpha\beta}|_B = q_\beta.$$

Además,

$$\overline{q}_{\alpha\beta}(a) \leq q_\beta(0) + \rho_\alpha(a-0) = \rho_\alpha(a)$$

para todo $a \in A$, lo que implica que $\overline{q}_{\alpha\beta}$ es continua en A.

Sea $\alpha \in \Psi$, entonces existen $\beta \in \Gamma$ y $k > 1$ tales que

$$\rho_\alpha(b) \leq k q_\beta(b)$$

para todo $b \in B$.

También existe $\gamma \in \Psi$ tal que

$$q_\beta(b) \leq \rho_\gamma(b)$$

para todo $b \in B$ y cumple que

$$\rho_\alpha(a) \leq \rho_\gamma(a)$$

para todo $a \in A$.

Entonces

$$\begin{aligned} q_\beta(b) + \rho_\gamma(a-b) &\geq k^{-1}\rho_\alpha(b) + \rho_\alpha(a-b) \\ &\geq k^{-1}\rho_\alpha(b) + k^{-1}\rho_\alpha(a-b) \geq k^{-1}\rho_\alpha(a) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$; de donde, $\overline{q}_{\gamma\beta}(a) \geq k^{-1}\rho_\alpha(a)$ y por consiguiente, ρ_α es continua con la topología que genera $\left\{\overline{q}_{\alpha\beta}\right\}_{(\beta,\alpha)\in\Lambda}$. Así, $\left\{\overline{q}_{\alpha\beta}\right\}_{(\beta,\alpha)\in\Lambda}$ genera la misma topología que $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Psi}$.

Ahora probemos que $\left\{\overline{q}_{\alpha\beta}\right\}_{(\alpha,\beta)\in\Gamma}$ cumple (3.2). Sean $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ y $(\alpha,\beta) \in \Lambda$. Las familias de seminormas son saturadas y satisfacen (3.2), entonces existen $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma, \alpha_1, \alpha_2 \in \Psi$ y $k \geq 1$ tales que se cumple:

$$\begin{aligned} q_\beta(b_1b_2) &\leq q_{\beta_1}(b_1)\, q_{\beta_1}(b_2) \\ \rho_\alpha(a_1a_2) &\leq \rho_{\alpha_1}(a_1)\, \rho_{\alpha_1}(a_2) \\ \rho_{\alpha_1}(b) &\leq kq_{\beta_2}(b) \\ q_{\beta_1}(b) &\leq q_{\beta_2}(b) \\ kp_{\alpha_1}(a) &\leq \rho_{\alpha_2}(a) \end{aligned}$$

si $a \in A$ y $b \in B$

Observamos que

$$a_1a_2 - b_1b_2 = b_1(a_2 - b_2) + (a_{1-}b_1)\, b_2 + (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{q}_{\alpha\beta}(a_1a_2) &\leq q_\beta(b_1b_2) + \rho_\alpha\left(b_1(a_2-b_2) + (a_{1-}b_1)\, b_2 + (a_1-b_1)(a_2-b_2)\right) \\ &\leq q_{\beta_1}(b_1)\, q_{\beta_1}(b_2) + \rho_{\alpha_1}(b_1)\, \rho_{\alpha_1}(a_2-b_2) + \rho_{\alpha_1}(a_{1-}b_1)\, \rho_{\alpha_1}(b_2) \\ &\quad +\rho_{\alpha_1}(b_1-a_1)\, \rho_{\alpha_1}(b_2-a_2) \\ &\leq q_{\beta_2}(b_1)\, q_{\beta_2}(b_2) + kq_{\beta_2}(b_1)\, \rho_{\alpha_1}(a_2-b_2) + kp_{\alpha_1}(a_{1-}b_1)\, q_{\beta_2}(b_2) \\ &\quad +\rho_{\alpha_1}(a_1-b_1)\, \rho_{\alpha_1}(a_2-b_2) \\ &\leq q_{\beta_2}(b_1)\, q_{\beta_2}(b_2) + q_{\beta_2}(b_1)\, \rho_{\alpha_2}(a_2-b_2) + \rho_{\alpha_2}(a_{1-}b_1)\, q_{\beta_2}(b_2) \\ &\quad +\rho_{\alpha_2}(a_1-b_1)\, \rho_{\alpha_2}(a_2-b_2) \\ &= \left[q_{\beta_2}(b_1) + \rho_{\alpha_2}(a_{1-}b_1)\right]\left[q_{\beta_2}(b_2) + \rho_{\alpha_2}(a_2-b_2)\right] \end{aligned}$$

tomando ínfimos sobre b, obtenemos

$$\overline{q}_{\alpha\beta}(a_1a_2) \leq \overline{q}_{\beta_2\alpha_2}(a_1)\, \overline{q}_{\beta_2\alpha_2}(a_2).$$

Por lo que $\left\{\overline{q}_{\alpha\beta}\right\}_{(\beta,\alpha)\in\Gamma}$ satisface (3.2).

Sean $((\alpha_k,\beta_k))_{k=1}^n \in \Lambda$. Las familias $\{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ y $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Psi}$ son saturadas, por lo que existen $\beta \in \Gamma$ y $\alpha \in \Psi$ tales que

$$\begin{aligned} \max\left(q_{\beta_k}\right) &= q_\beta \\ \max\left(\rho_{\alpha_k}\right) &= \rho_\alpha \end{aligned}$$

para todo $a \in A, b \in B$ y $k \leq n$. A partir de

$$q_{\beta_k}(b) \leq \rho_{\alpha_k}(b)$$

para $1 \leq k \leq n$ y $b \in B$ concluimos que $q_\beta \leq \rho_\alpha$ en B y así, $(\alpha, \beta) \in \Lambda$. Además,

$$q_{\beta_k}(b) + \rho_{\alpha_k}(a-b) \leq q_\beta(b) + \rho_\alpha(a-b)$$

para todo $a \in A, b \in B$ y $k \leq n$. De donde $\overline{q}_{\alpha_k\beta_k}(a) \leq \overline{q}_{\alpha\beta}(a)$ para todo $a \in A$. Por consiguiente, $\left\{\overline{q}_{\alpha\beta}\right\}_{(\beta,\alpha)\in\Gamma}$ está saturada. ■

Corolario 3.3.5 *Sea A un álgebra localmente convexa de Hausdorff con unidad e. Entonces existe una familia de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ que define la topología en A y se cumple*

$$\rho_\alpha(e) = 1$$

para todo $\alpha \in \Gamma$.

Demostración. Sea $B = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{F}\}$. Por ser un espacio de dimensión finita, su topología de subespacio está dada por una norma ρ tal que $\rho(e) = 1$; ya que podemos redefinir ρ como $(\rho(e))^{-1}\rho$. El resultado se sigue del teorema anterior. ■

3.4 El álgebra $L(X)$

Sean X y Y dos espacios vectoriales topológicos y $L(X,Y)$ el espacio de todas las transformaciones lineales de X en Y que son continuas en X.

Teorema 3.4.1 *Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) T es uniformemente continua en X.

(b) T es continua en X.

(c) T es continua en 0.

Cualquiera de estas condiciones implica las siguientes

(d) T es acotada, es decir transforma acotados de X en acotados de Y.

(e) T transforma a cualquier sucesión en X convergente a 0 en un conjunto acotado en Y.

(f) T es continuo en 0 por sucesiones.

Si X es un espacio métrico entonces las 6 afirmaciones son equivalentes.

Si X es normado y Y es metrizable todas las condiciones anteriores implican *(h) Existe $M > 0$ tal que*

$$G\left(T\left(x\right)\right) \leq M$$

si $\|x\| \leq 1$, donde $\|\cdot\|$ y G son una norma y una F-norma que determinan las topologías de X y Y, respectivamente.

Demostración. Ya se vio en el Teorema 1.3.9 (a),(b) y (c) son equivalentes y cualquiera implica (d). Es claro además que (c) $\Rightarrow$ (f).

(d)$\Rightarrow$(e) Sea (x_n) una sucesión en X que converge a 0. Sea U una vecindad balanceada de 0 en X existe $N > 0$ tal que $x_n \in U$ si $n > N$ y existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x_n \in U$ para $1 \leq n \leq N$; de donde, $\lambda' x_n \in U$ si $\lambda' = \max(\lambda, 1)$ y para todo $n \geq 1$. Es decir, $\{x_n : n \geq 1\}$ es acotado y por (d) $T\left(\{x_n : n \geq 1\}\right)$ es acotado.

Supongamos que X es un espacio métricos y que F es una F-norma que determinan las topología de X.

(f)$\Rightarrow$(c) Supongamos que T no es continua en 0. Existe una vecindad V de 0 tal que para todo natural n existe x_n en X tal que $F\left(x_n\right) < \frac{1}{n}$ y $T\left(x_n\right) \notin V$. Entonces $x_n \to 0$ en X y $T\left(x_n\right) \nrightarrow 0$ en Y.

Supongamos que X es un espacio normado, Y un espacio métrico y que $\|\cdot\|$ y G son una norma y una F-norma que determinan las topologías de X y Y, respectivamente.

(f)$\Rightarrow$(h) Supongamos que (h) es falso. Para cada $n \geq 1$ existe $x_n \in X$ tal que $\|x_n\| \leq 1$ y $G\left(T\left(x_n\right)\right) > n$; de donde $\frac{1}{n}x_n \to 0$ en X y $G\left(T\left(\frac{1}{n}x_n\right)\right) \geq \frac{1}{n}G\left(T\left(x_n\right)\right) > 1$; es decir $T\left(\frac{1}{n}x_n\right) \nrightarrow 0$ en Y y se contradice (f). ∎

Definición 3.4.2 *Sea X un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{F}$. Definimos $L(X)$ como el conjunto de endomorfismos continuos de X; es decir $L(X) = L(X, X)$.*

Con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar y la composición como producto, $L(X)$ es un álgebra.

Proposición 3.4.3 *Sea X un espacio vectorial topológico.*

(a) Si X es normado, entonces $L\left(X\right)$ es normable.

(b) Si X es un espacio de Banach, entonces $L\left(X\right)$ es un álgebra de Banach

Demostración. (a) Definamos $\|\cdot\| : L\left(X\right) \to \mathbb{R}$ como

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T\left(x\right)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}$$

Observemos de acuerdo a la proposición anterior $\|T\|$ está bien definida ya que la esfera $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es un conjunto acotado. Además se cumple:

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$$

para todo $x \in X$.

Veamos que efectivamente es una norma submultiplicativa.

i) Claramente $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geq 0$, por lo que $\|T\| \geq 0$. Sea $T \in L(X)$ con $T \equiv 0$. Entonces $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$ para todo $x \neq 0$, por lo que $\|T\| = 0$. Inversamente, si $\|T\| = 0$, entonces $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0$ para todo $x \neq 0$, por tanto $T(x) = 0$ para todo $x \in X$ y así, $T \equiv 0$.

ii) Sea $T \in L(X)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\lambda T\| &= \sup\left\{\frac{\|\lambda T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{|\lambda| \, \|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= |\lambda| \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = |\lambda| \cdot \|T\| \end{aligned}$$

iii) Sean $T_1, T_2 \in L(X)$, entonces

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup\left\{\frac{\|T_1(x) + T_2(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{\|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{\|T_1(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} + \sup\left\{\frac{\|T_2(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

Por tanto, $\|\cdot\|$ es una norma en $L(X)$. Más aún, veremos que es una norma submultiplicativa

Sean $T_1, T_2 \in L(X)$, entonces

$$\begin{aligned} \|T_1 \circ T_2(x)\| &= \|T_1(T_2(x))\| \leq \|T_1\| \, \|T_2(x)\| \\ &\leq \|T_1\| \, \|T_2\| \, \|x\| \end{aligned}$$

Por lo que $\|T_1 T_2\| \leq \|T_1\| \, \|T_2\|$. Así, $(L(X), \|\cdot\|)$ es una álgebra normada.

(b) Sea (T_n) una sucesión de Cauchy en $L(X)$. Para cada $x \in X$ tenemos

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \tag{3.3}$$

y

$$\|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$ para todo $x \in X$.

Por consiguiente, $(T_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en X. Por ser X de Banach, existe $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Definamos $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Sean $T_n \in L(X)$; $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$; entonces

$$T(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + \lambda y) = \lim_{n\to\infty} [T_n(x) + \lambda T_n(y)] = T(x) + \lambda T(y)$$

O sea, T es lineal y por el Teorema de Banach-Steinhaus T es continuo, de donde $T \in L(X)$.

Finalmente, de la desigualdad (3.3) y por ser (T_n) una sucesión de Cauchy tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \epsilon$$

si $n, m > N$ y $\|x\| = 1$.

Entonces, si $n > N$ obtenemos

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon$$

si $\|x\| = 1$; es decir, $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ si $n > N$ y tenemos que $T_n \to T$ en la norma $\|\cdot\|$ de $L(X)$. Por tanto, $L(X)$ es de Banach. ∎

3.5 Las subálgebras $K_0(X)$ y $K(X)$ de $L(X)$

Definición 3.5.1 *Sea X un espacio vectorial topológico. Denotaremos como $K_0(X)$ al álgebra de endomorfismos continuos de rango finito de X, es decir, de operadores $T : X \to X$ lineales y continuos tales que* $\dim T(X) < \infty$. *Si* $\dim T(X) = n$ *entonces se dice que T es de rango n.*

Sea X un espacio vectorial topológico y sean $x \in X$ y $f \in X^*$. Definimos $x \otimes f : X \to X$ como $(x \otimes f)(y) = f(y) \cdot x$. Este operador pertenece a $K_0(X)$ y si $f \neq 0$ y $x \neq 0$ entonces es de rango 1. Su continuidad se sigue de que es la composición de dos funciones continuas:

$$\begin{array}{ccccc} X & \to & \mathbb{F} \times X & \to & X \\ y & \to & (f(y), x) & \to & f(y)\, x \end{array}.$$

Observación 3.5.2 *Sea $T \in L(X)$, entonces $T \circ (x \otimes f) = T(x) \otimes f$.*

Definición 3.5.3 *Sean X, Y espacios vectoriales topológicos. Sea $T : X \to Y$ lineal y continuo. Decimos que T es compacto si $T(B)$ es relativamente compacto en Y para cualquier $B \subset X$ acotado.*

Sea X un espacio vectorial topológico. Denotaremos por $K(X)$ al álgebra de endomorfismos compactos de X, es decir, de operadores $T : X \to X$ compactos.

Proposición 3.5.4 *Sea X un espacio vectorial topológico. $K_0(X) \subset K(X)$*

Demostración. Sea $T \in K_0(X)$. Claramente $T(X) \approx \mathbb{F}^n$, donde $n = \dim T(X)$. Existe $\psi : T(X) \to \mathbb{F}^n$ homeomorfismo lineal. Sea B acotado en Y, entonces $\psi(T(B))$ es acotado en $\mathbb{F}^n$. Por el Teorema de Heine–Borel $\overline{\psi(T(B))}$ es compacto. Como la compacidad es una propiedad topológica y ψ es un homeomorfismo, $\overline{T(B)}$ es compacto en $T(X)$, ya que al ser ψ continua y cerrada entonces $\overline{\psi(T(B))} = \psi\left(\overline{T(B)}\right)$. Por lo que $T \in K(X)$.

Es fácil comprobar que $K_0(X)$ y $K(X)$ son subálgebras de $L(X)$.

Teorema 3.5.5 *Sean X un espacio vectorial topológico de Hausdorff y $T \in L(X)$ un operador distinto del operador 0. Entonces, $T \in K_0(X)$ si y sólo si $T = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes f_i)$ donde $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ es linealmente independiente y $f_i \in X^* \setminus \{0\}$.*

Demostración. Sea $T \in K_0(X)$, y $n = \dim T(X)$. Sea $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ una base de $T(X)$. Para cada $1 \leq i \leq n$ definamos la funcional lineal $g_i : T(X) \to \mathbb{F}$ como $g_i(x_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.. Si $T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes g_i\right)(x) &= \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ T(x))\, x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_i(x_j) \cdot x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = T(x)
\end{aligned}$$

Cada $g_i : T(X) \to \mathbb{F}$ es no nula y es continua ya que g_i es una funcional lineal y $T(X)$ es un e.v.t. de dimensión finita, de donde $f_i = g_i \circ T \in X^*$

Claramente si $T = \sum_{i=1}^{n} (x_i \otimes f_i)$ con $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ linealmente independiente y $f_i \in X^* \setminus \{0\}$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $T \in L(X)$ y $\dim T(X) \leq n$. Por lo que $T \in K_0(X)$. ∎

3.6 Normabilidad de $K_0(X)$

Definición 3.6.1 *Sea X un espacio vectorial, $M \subset L(X)$ una subálgebra y $\|\cdot\|$ una norma en X. Se dice que $\|\cdot\|$ es compatible con M si y sólo si todos los elementos de M son continuos respecto a $\|\cdot\|$.*

Lema 3.6.2 *Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff tal que $X^* \neq \{0\}$. Sea $M \subset L(X)$ una subálgebra tal que $K_0(X) \subset M$. Entonces M es normable si y sólo si existe una norma en X que es compatible con M.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|$ una norma en X compatible con M. Definimos la norma $\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}$ del modo usual:

$$\|T\| = \sup_{x \in X} \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\}$$

Inversamente supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma en M. Sea $f \in X^*$ con $f \neq 0$. Definamos $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ como

$$\|x\| = \|x \otimes f\|$$

Veamos que efectivamente es una norma

i) Claramente $\|x\| = \|x \otimes f\| \geq 0$ y $\|0\| = 0$. Sea $x \in X$ tal que $\|x\| = 0$. Por la definición, tenemos que $\|x \otimes f\| = 0$, y entonces $x \otimes f = 0$. Como $f \neq 0$ existe $y \in X$ tal que $f(y) \neq 0$, pero $(x \otimes f)(y) = f(y)x = 0$, por lo que $x = 0$.

ii) Sea $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces

$$(\lambda x \otimes f)(y) = f(y)(\lambda x) = \lambda (f(y) x) = \lambda (x \otimes f)(y).$$

Es decir, $\lambda x \otimes f = \lambda (x \otimes f)$. Así pues

$$\|\lambda x\| = \|\lambda x \otimes f\| = \|\lambda (x \otimes f)\| = |\lambda| \|x \otimes f\| = |\lambda| \|x\|.$$

iii) Sean $x, y \in X$. Análogamente a lo hecho en ii), tenemos que $(x+y)\otimes f = x \otimes f + y \otimes f$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \|(x+y)\otimes f\| = \|x\otimes f + y \otimes f\| \\ &\leq \|x\otimes f\| + \|y \otimes f\| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Por tanto, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una norma. Sea $T \in M$, por ser $(M, \|\cdot\|)$ un álgebra topológica, tenemos que

$$\|T(x)\| = \|T(x)\otimes f\| = \|T\circ(x\otimes f)\| \leq \|T\|\,\|x\otimes f\| = \|T\|\,\|x\|.$$

Así, T es continuo respecto a la norma $\|\cdot\|$ en X. En resumen, $\|\cdot\|$ es compatible con M. ∎

Proposición 3.6.3 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff. X es subnormado si y sólo si el álgebra $K_0(X)$ es normable.*

Demostración. Supongamos que X es subnormado para la norma $\|\cdot\|$ y sea $T \in K_0(X)$. Denotemos como $\tau_{\|\cdot\|}$ a la topología inducida por $\|\cdot\|$. Al ser $T(X)$ de dimensión finita se tiene que $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$ en $T(X)$. Por tanto, $f\circ T$ es τ-continuo para todo $f \in X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}$ y entonces $f\left(T\left(\overline{B_1(0)}\right)\right)$ es acotado para todo $f \in X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}$; o sea $T\left(\overline{B_1(0)}\right)$ es $\sigma\left(X_{\tau_{\|\cdot\|}}, X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}\right)$-acotado y entonces es $\|\cdot\|$ - acotado (Teorema 1.3.43); de donde, T es $\|\cdot\|$-continua. Así, $\|\cdot\|$ es compatible con $K_0(X)$ y por el Lema 3.6.2 existe una norma de álgebra definida en $K_0(X)$.

Supongamos ahora que existe una norma de álgebra definida en $K_0(X)$. Por el Lema 3.6.2 existe una norma $\|\cdot\|$ en X compatible con $K_0(X)$. Sean $\tau_{\|\cdot\|}$ la topología inducida en X por dicha norma y $f \in X^*$, como $x\otimes f \in K_0(X)$ entonces es continua en la norma y existe $M > 0$ tal que para todo $y \in X$ se cumple

$$\begin{aligned}\|x\otimes f(y)\| &\leq M\|y\| \\ |f(y)|\,\|x\| &\leq M\|x\| \\ |f(y)| &\leq M\|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

De donde, f es $\|\cdot\|$ - continua, por lo que $X^*_\tau \subset X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}$. Todo disco $\sigma(X^*_\tau, X)$-compacto de X^*_τ es un disco $\sigma\left(X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}, X\right)$-compacto de $X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}$ y por tanto, $\tau(X, X^*_\tau) \subset \tau\left(X, X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}\right)$. Como $\tau_{\|\cdot\|}$ es claramente metrizable, tenemos por el Corolario 2.4.15 que $\tau_{\|\cdot\|}$ coincide con la topología de Mackey, es decir $\tau_{\|\cdot\|} = \tau\left(X, X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}\right)$. Como $\tau \subset \tau(X, X^*_\tau) \subset \tau\left(X, X^*_{\tau_{\|\cdot\|}}\right) = \tau_{\|\cdot\|}$, concluimos que (X,τ) es subnormable. ∎

3.6.1 Algunas condiciones para la no normabilidad de $K_0(X)$ y $K(X)$

Lema 3.6.4 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff, barrilado no normalizable. Entonces X no es subnormable.*

Demostración. Supongamos que (X,τ) es subnormado. Sea $\mathcal{P}=\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas que definen a la topología τ y además definen la subnorma

$$\|x\| = \sup_{\alpha\in\Lambda} \rho_\alpha(x).$$

Consideremos $\mathcal{B}=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}\{x\in X:\rho_\alpha(x)\leq 1\},$ *el* cual sabemos que coincide con la bola unitaria cerrada respecto a $\|\cdot\|$, por lo que $\mathcal{B}$ es un barril acotado de (X,τ). Como X es barrilado, $\mathcal{B}$ es vecindad acotada del cero, y al ser X de Hausdorff y localmente acotado entonces, por el Corolario 2.4.8, X es normalizable, lo que es un contradicción. ∎

Corolario 3.6.5 *Sea (X,τ) un espacio de Fréchet y no normalizable. Entonces X no es subnormable.*

Teorema 3.6.6 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff. Si existe un subespacio Y de X tal que posee una topología localmente convexa de Hausdorff, barrilada, no normable y menos fina que la de topología de subespacio, entonces el álgebra $K_0(X)$ no es normable.*

Demostración. Sea τ_Y una topología para Y con las propiedades descritas. Si X es subnormable y τ_1 es la topología que induce esta subnorma, entonces $(Y,\tau|_Y)$ es subnormable con la subnorma restringida a Y, como $\tau_Y\subset\tau|_Y\subset\tau_1|_Y$ entonces τ_Y es subnormable, lo que contradice el Lema 3.6.4. Por lo que X no es subnormado. Entonces por la Proposición 3.6.3 el álgebra $K_0(X)$ no es normable. ∎

Corolario 3.6.7 *Sea X un espacio de Fréchet. Si X no es isomorfo a un espacio de Banach, entonces el álgebra $K_0(X)$ no es normable.*

Demostración. Por ser X de Fréchet, es un espacio localmente convexo, de Hausdorff y barrilado; ésto ultimo por el Teorema 2.5.6. Al no ser X isomorfo a uno de Banach, tampoco es normable, entonces por el teorema anterior el álgebra $K_0(X)$ no es normable. ∎

Corolario 3.6.8 *Sea X un espacio de Fréchet. Si X no es isomorfo a uno de Banach, entonces el álgebra $K(X)$ no es normable.*

Demostración. Supongamos que $K(X)$ es normable, entonces $K_0(X)$ también es normable al estar contenido en $K(X)$. Lo que contradice el corolario anterior. ■

Lema 3.6.9 *Sea X un localmente convexo y metrizable. Si X tiene una base algebraica numerable entonces X es subnormable.*

Demostración. Al ser X localmente convexo y metrizable existe una colección numerable de seminormas $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definiendo

$$\rho_k(x) = \max\{p_k(x) : 1 \leq k\}$$

obtenemos una nueva familia de seminormas $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ que generan la misma topología y además son una familia linealmente ordenada, es decir

$$\rho_1 \leq \rho_2 \leq ... \leq \rho_k \leq ...$$

Sea ahora $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base algebraica de X. Para $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$ en X definimos

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| (\rho_k(x_k) + 1)$$

Observemos que esta función está bien definida, ya que la suma del lado derecho es finita, debido a que excepto un número finito de escalares λ_k son iguales a cero. Además, no es dificil ver que esto define una norma en X. Veamos que es en realidad una subnorma para X. Definamos

$$M_i = \frac{\max\{\rho_i(x_k) : k \leq i\} + 1}{\min\{\rho_k(x_k) : k \leq i\} + 1}$$

Notemos que $M_1 = 1$. Supongamos que $i > 1$ y recordemos que $\rho_n \leq \rho_m$ si $n \leq m$, tomando $k < i$ tenemos

$$M_i = \frac{\max\{\rho_i(x_k) : k \leq i\} + 1}{\min\{\rho_k(x_k) : k \leq i\} + 1} \geq \frac{\rho_i(x_k) + 1}{\min\{\rho_k(x_k) : k \leq i\} + 1} \geq \frac{\rho_i(x_k) + 1}{\rho_k(x_k) + 1} \geq 1$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\rho_i(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \rho_i(x_k) \leq \sum_{k=1}^{i} |\lambda_k| \rho_i(x_k) + \sum_{k=i+1}^{\infty} |\lambda_k| \rho_k(x_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{i} |\lambda_k| (\rho_i(x_k) + 1) + M_i \sum_{k=i+1}^{\infty} |\lambda_k| \rho_k(x_k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{i} |\lambda_k| \frac{\max\{\rho_i(x_k) : k \leq i\} + 1}{\min\{\rho_k(x_k) : k \leq i\} + 1} (\min\{\rho_k(x_k) : k \leq i\} + 1) \\
&\quad + M_i \sum_{k=i+1}^{\infty} |\lambda_k| \rho_k(x_k) \\
&\leq M_i \sum_{k=1}^{i} |\lambda_k| (\rho_k(x_k) + 1) + M_i \sum_{k=i+1}^{\infty} |\lambda_k| \rho_k(x_k) \\
&\leq M_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| (\rho_k(x) + 1) \right) \\
&= M_i \|x\|
\end{aligned}$$

Por tanto, la norma genera una topología mas fina que la original, es decir, X es subnormable. ∎

Proposición 3.6.10 *Sea X un espacio localmente convexo metrizable. Si X tiene una base algebraica numerable, entonces $K_0(X)$ es normable como álgebra.*

Demostración. Por el lema anterior, X es subnormable, entonces por la Proposición 3.6.3 $K_0(X)$ es normable como álgebra. ∎

3.7 Estructura de álgebra topológica de $K_0(X)$

Lema 3.7.1 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff separado por su dual topológico X^*. Si existen topologías vectoriales δ y δ^* en X y X^*, respectivamente, para las que la transformación bilineal*

$$\begin{array}{rccc} S: & (X,\delta) \times (X^*, \delta^*) & \to & \mathbb{F} \\ & (x, f) & \to & f(x) \end{array}$$

es continua, entonces $(X, \overline{\tau})$, donde $\overline{\tau}$ es la convexificación de τ, es subnormable. Además, $X^* \subset X^*_\delta$

Demostración. Consideremos

$$\Delta = \{(x, f) \in X \times X^* : |f(x)| \leq 1\}.$$

Claramente Δ es una vecindad de $(0, 0)$ en $(X, \delta) \times (X^*, \delta^*)$. Por lo que existen $V \in \delta$ y $W \in \delta^*$ que son vecindades del 0 en los respectivos espacios y satisfacen que si $x \in V$ y $f \in W$ entonces $f(x) \in \Delta$.

Sea $f \in X$, como V es absorbente existe un escalar $\lambda_x > 0$ tal que $\lambda_x f \in V$. Si $f \in W$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_x |f(x)| &= |f(\lambda_x x)| \leq 1 \\ |f(x)| &\leq \lambda_x^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo que W es $\sigma(X^*, X)$-acotado en $X^* = X^*_{\overline{\tau}}$. Definimos,

$$\|x\| = \sup_{f \in W} |f(x)|$$

Es claro que $\|x\|$ es una seminorma y es de hecho una norma ya que si $\|x\| = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $f \in W$ y como W es absorbente, por ser vecindad de 0 en la topología vectorial δ^*, se sigue que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$ y por tanto, $x = 0$.

Así mismo, la polar W° es $\sigma(X, X^*)$-acotado ya que si $f \in X^*$, entonces $\lambda f \in W$ para algún $\lambda > 0$ y por tanto $|f(x)| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $x \in W^\circ$. Por el Teorema 1.3.43 se tiene que W° es $\overline{\tau}$-acotado.

Por tanto, dada una vecindad U de 0 en la topología $\overline{\tau}$ existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda W^\circ \subset U$. Es decir

$$\left\{ x \in X : \|x\| = \sup_{f \in W} |f(x)| \leq \lambda \right\} \subset U$$

Así, la topología de la norma $\|\cdot\|$ es más fina que $\overline{\tau}$ y entonces $(X, \overline{\tau})$ es subnormable.

Finalmente, $X^* \subset X^*_\delta$ ya que si $f \in X^*$, entonces f es la composición

$$\begin{array}{ccccc} (X, \delta) & \to & (X, \delta) \times (X^*, \delta^*) & \to & \mathbb{F} \\ x & \to & (x, f) & \to & f(x) \end{array}$$

la cual es continua. ∎

Proposición 3.7.2 *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico de Hausdorff separado por su dual topológico X^*. El espacio $K_0(X_\tau)$ admite una estructura de álgebra topológica de Hausdorff si y sólo si $(X, \overline{\tau})$ es subnormable. En tal caso $K_0(X_\tau)$ es un álgebra normada.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ y $f_0 \in X^*$ tales que $x_0 \neq 0$ y $f_0(x_0) = 1$. Entonces, para todo $x \in X$ y $f \in X^*$ tenemos

$$(x_0 \otimes f) \cdot (x \otimes f_0)(y) = (x_0 \otimes f)(f_0(y)\, x) = f(x)\, f_0(y)\, x_0 = f(x)(x_0 \otimes f_0)(y)$$

Es decir

$$(x_0 \otimes f) \cdot (x \otimes f_0) = f(x)(x_0 \otimes f_0) \tag{3.4}$$

Supongamos que $K_0(X_\tau)$ admite una estructura de álgebra topológica de Hausdorff para una topología ς.

Consideremos las transformaciones lineales

$$\begin{array}{rccc} S_X: & X & \to & K_0(X_\tau) \\ & x & \to & x \otimes f_0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} S_{X^*}: & X^* & \to & K_0(X_\tau) \\ & f & \to & x_0 \otimes f. \end{array}$$

Observamos que $x \otimes f_0 = 0$ si y sólo si $f_0(y)\, x = 0$ para todo $y \in X$. Como $f_0 \neq 0$ entonces $x = 0$. Por lo que la aplicación S_X es inyectiva. Análogamente, S_{X^*} es también inyectiva. Sean δ y δ^* las topologías iniciales inducidas por estas transformaciones en X y X^*, respectivamente; es decir aquellas topologías vectoriales que tienen por bases locales de vecindades de 0 a $\left\{S_X^{-1}(U') : U' \in \mathcal{B}_\varsigma\right\}$ y $\left\{S_{X^*}^{-1}(U') : U' \in \mathcal{B}_\varsigma\right\}$, respectivamente, donde $\mathcal{B}_\varsigma$ es una base local de vecindades de 0 para ς.

Afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\varsigma-$vecindad U del 0 tal que si $\lambda(x_0 \otimes f_0) \in U$ entonces $|\lambda| < \varepsilon$. Sea $0 < \varepsilon \leq 1$ y $\mathcal{B}_0$ una base local del 0 para ς formada por conjuntos balanceados. Como ς es de Hausdorff, entonces existe $U \in \mathcal{B}_0$ tal que $x_0 \otimes f_0 \notin U$, de donde $x_0 \otimes f_0 \in \varepsilon t U$ implica$|\varepsilon t| > 1$. Como εU es absorbente, por ser vecindad de 0, existe

$\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $\lambda(x_0 \otimes f_0) \in \varepsilon U$, por lo que $\left|\varepsilon\lambda^{-1}\right| > 1$. De donde $|\lambda| < \varepsilon$. Claramente si $\varepsilon > 1$, aplicamos lo anterior para 1 y entonces se cumple para ε. Por lo cual la afirmación está probada.

Veremos que

$$\begin{array}{rccc} S: & (X,\delta) \times (X^*,\delta^*) & \to & \mathbb{F} \\ & (x,f) & \to & f(x) \end{array}$$

es una aplicación bilineal y continua. Claramente es bilineal, así que basta que probemos que es continua en 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Afirmamos que existe una ς-vecindad U' del 0 tal que

$$\lambda(x_0 \otimes f_0) \in U' \text{ implica } |\lambda| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Como el producto en $K_0(X_\tau)$ es ς-continuo, por (3.4) existen V' y W' abiertos en $K_0(X_\tau)$ que contienen a $x \otimes f_0$ y $x_0 \otimes f$ respectivamente, tales que $f(x)(x_0 \otimes f_0) \in U'$ si $x \otimes f_0 \in V'$ y $x_0 \otimes f \in W'$. Entonces por (3.5)

$$|f(x)| < \varepsilon.$$

Como V' y W' inducen los abiertos $S_X^{-1}(V') = V$ y $S_{X^*}^{-1}(W') = W$ de la topologías δ y δ^*, respectivamente, tenemos que si $x \in V$ y $f \in W$, entonces $|f(x)| < \varepsilon$. Por tanto, S es continua en 0. Por el Lema 3.7.1 $(X,\overline{\tau})$ es subnormable.

Recíprocamente, supongamos que existe una norma $\|\cdot\|$ que subnorma a $(X,\overline{\tau})$. Sea $T \in K_0(X,\overline{\tau})$, entonces $f \circ T \in X^*_{\|\cdot\|}$ para todo $f \in X^*_{\|\cdot\|}$ ya que $\overline{\tau} = \tau_{\|\cdot\|}$ en el espacio de dimensión finita $T(X)$; o sea $T\left(\overline{B_1(0)}\right)$ es $\sigma\left(X_{\|\cdot\|}, X^*_{\|\cdot\|}\right)$-acotado y entonces es $\|\cdot\|$ - acotado (Teorema 1.3.43); de donde, T es $\|\cdot\|$-continua. Es decir,

$$K_0(X,\overline{\tau}) \subset K(X,\|\cdot\|) \subset L(X,\|\cdot\|).$$

Como $L(X,\|\cdot\|)$ tiene una estructura de álgebra normada, entonces éste induce una estructura de álgebra normada en $K_0(X,\overline{\tau})$. ∎

Entonces es inmediato el siguiente corolario, el cual generaliza la Proposición 3.6.3.

Corolario 3.7.3 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff. El espacio $K_0(X)$ admite una estructura de álgebra topológica de Hausdorff si y sólo si X es subnormable. En tal caso $K_0(X)$ es un álgebra normada.*

Corolario 3.7.4 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff y barrilado. Si X no es normalizable entonces $K_0(X)$ no admite una estructura de álgebra topológica de Hausdorff.*

Demostración. Como X es localmente convexo, entonces $\tau = \overline{\tau}$ y al ser X no normalizable se tiene por el Lema (3.6.4) que X no es subnormable. De la proposición anterior se sigue la conclusión del corolario. ∎

3.7.1 Metrizabilidad de $K_0(X)$

Definición 3.7.5 *Diremos que una topología vectorial τ para un espacio vectorial X es submetrizable si existe una métrica en X tal que la topología que ella induce es vectorial y es más fina que τ.*

Lema 3.7.6 *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico separado por su dual topológico. Si $K_0(X)$ tiene una estructura de álgebra semi-topológica metrizable, entonces las topologías de Mackey $\tau(X,X^*)$ y $\tau(X^*,X)$ son submetrizables.*

Demostración. Sea ς una topología de álgebra topológica metrizable sobre $K_0(X)$. Sean $x_0 \in X$ y $f_0 \in X^*$ con $x_0 \neq 0$ y $f_0 \neq 0$. Como vimos en la Proposición 3.7.2 las transformaciones lineales

$$\begin{array}{rccc} S_X: & X & \rightarrow & K_0(X_\tau) \\ & x & \rightarrow & x \otimes f_0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} S_{X^*}: & X^* & \rightarrow & K_0(X_\tau) \\ & f & \rightarrow & x_0 \otimes f \end{array}$$

son isomorfismos algebraicos sobre su imagen.

Definimos $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$d(x,y) = D(x \otimes f_0, y \otimes f_0)$$

donde D es una métrica en $K_0(X)$ que induce la topología ς. Claramente d es una métrica en X que induce una topología vectorial. Análogamente podemos definir una métrica d^* en X^* a través de D. Sean δ y δ^* las topologías vectoriales en X y X_τ^* inducidas por d y d^* respectivamente. De manera similar a como se hizo en la prueba de la Proposición (3.7.2) se puede probar que la transformación bilineal

$$\begin{array}{cccc} S: & (X,\delta)\times(X^*,\delta^*) & \to & \mathbb{F} \\ & (x,f) & \to & f(x) \end{array}$$

es separademente continua, observando que si fijamos $f \in X^*$ la composición

$$\begin{array}{ccccccc} (X,\delta) & \to & K_0(X)\times K_0(X) & \to & K_0(X) & \to & \mathbb{F} \\ x & \to & (x\otimes f_0, x_0\otimes f) & \to & f(x)(x_0\otimes f_0) & \to & f(x) \end{array}$$

es continua. De donde $X^* \subset X_\delta^* = X_{\overline{\delta}}^*$, donde $\overline{\delta}$ se convexificación de δ. Entonces $\sigma(X, X_\tau^*) \subset \sigma\left(X, X_{\overline{\delta}}^*\right)$ y así todo conjunto $\sigma(X, X_\tau^*)$-compacto es $\sigma(X, X_d^*)$-compacto y por consiguiente, $\tau(X, X_\tau^*) \subset \tau\left(X, X_{\overline{\delta}}^*\right)$.

Por el Teorema 1.3.40, la topología $\overline{\delta}$ es metrizable, ya que δ es primero numerable y Hausdorff . Por el Corolario (2.4.15) $\overline{\delta} = \tau\left(X, X_{\overline{\delta}}^*\right)$ y por tanto $\tau(X, X_\tau^*)$ es submetrizable.

De manera análoga se prueba que $\tau(X_\tau^*, X)$ es submetrizable. ∎

Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff, barrilado no normalizable. Entonces X no es subnormable.

Lema 3.7.7 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff y barrilado. Si τ y la topología de Mackey $\tau(X^*, X)$ son submetrizables entonces (X,τ) es normalizable.*

Demostración. Por el Lema (3.6.4) basta probar que (X,τ) es subnormable. Tenemos que τ coincide con su convexificación por lo que por el Lema 3.7.1 es suficiente ver que existen topologías vectoriales δ y δ^* en X y X^*, respectivamente, para las que la transformación bilineal

$$\begin{array}{cccc} S: & (X,\delta)\times(X^*,\delta^*) & \to & \mathbb{F} \\ & (x,f) & \to & f(x) \end{array}$$

es continua.

Sean δ y δ^* topologías vectoriales metrizables en X y X^* más finas que τ y $\tau(X^*, X)$ respectivamente. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ y $(f_n)_{n=1}^\infty$ son sucesiones en X y X^*, respectivamente, tales que $x_n \xrightarrow{\delta} 0$ y $f_n \xrightarrow{\delta^*} 0$.

Como $\sigma(X^*,X) \subset \tau(X^*,X) \subset \delta^*$ entonces $f_n \overset{\sigma(X^*,X)}{\rightarrow} 0$, por lo que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es $\sigma(X^*,X)$-acotado. Por el Teorema (2.5.4) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinuo. Entonces existe una seminorma ρ, continua según τ, tal que

$$|f_n(x)| \leq \rho(x)$$

para todo $x \in X$ y $n \geq 1$. En particular,

$$|f_n(x_n)| \leq \rho(x_n)$$

para todo $n \geq 1$.

Ya que ρ es también es δ-continua, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n) = 0,$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n)| = 0$$

Como δ y δ^* son metrizables, entonces la transformación bilineal

$$\begin{array}{rccc} S: & (X,\delta)\times(X^*,\delta^*) & \rightarrow & \mathbb{F} \\ & (x,f) & \rightarrow & f(x) \end{array}$$

es continua en 0. ∎

Teorema 3.7.8 *Sea (X,τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff y barrilado. Si (X,τ) no es normalizable entonces $K_0(X)$ no admite una estructura de álgebra semi-topológica metrizable.*

Demostración. Supongamos que $K_0(X)$ tiene una estructura de álgebra semi-topológica metrizable, por el Lema (3.7.6) $\tau(X,X^*)$ y $\tau(X^*,X)$ son submetrizables. Por lo que también τ es submetrizable, entonces de acuerdo al Lema (3.7.7) (X,τ) es normalizable. ∎

Observación 3.7.9 *Existe un espacio localmente convexo de Hausdorff, barrilado y no normalizable E para el cual la topología de Mackey $\tau(E^*,E)$, es submetrizable.*

Sea X un espacio de Montel metrizable y no normalizable, por ejemplo $\varepsilon(\mathbb{R})$. Tomemos E como su dual fuerte; es decir, $E = (X^*, \beta(X^*, X))$. Como un espacio de Montel es reflexivo (Corolario 2.7.18) se tiene que $E^* = X$, por lo que $\tau(E^*, E)$ es metrizable (Corolario 2.4.15) y E no es normalizable, ya que si lo fuera, entonces $E^* = X$ sería normalizable, y se contradiría la elección de X. Además, al ser E el dual fuerte de un espacio de Montel también es de Montel (Teorema 2.7.20), por lo que E es barrilado.

Observación 3.7.10 *Todo espacio localmente convexo de Hausdorff, barrilado y submetrizable es metrizable.*

Supongamos que (X, τ) es localmente convexo de Hausdorff, barrilado y submetrizable, y sea $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de seminormas que define a τ. Sea δ una topología metrizable más fina que τ. Entonces δ tiene una base local del 0 numerable, que como recordamos da origen a un sistema de seminormas $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que define la convexificación $\overline{\delta}$ de δ. Tenemos que $\tau \subset \overline{\delta}$ y como además $\overline{\delta}$ es de Hausdorff por serlo δ, se tiene que $\overline{\delta}$ es metrizable. Podemos suponer que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente. Sea la función idéntica en el conjunto X. Para $n \geq 1$ definimos

$$\Lambda_n = \{\alpha \in \Lambda : I : (X, q_n) \to (X, \rho_\alpha) \text{ es continua}\}.$$

Tenemos $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ y para cada $\alpha \in \Lambda_n$ existe $M_{n,\alpha}$ tal que para todo $x \in X$ se satisface

$$\rho_\alpha(x) \leq M_{n,\alpha} q_n(x).$$

Definamos

$$q_n'(x) = \sup_{\alpha\in\Lambda_n} \frac{\rho_\alpha(x)}{M_{n,\alpha}}.$$

Observemos que está bien definido, ya que para todo $\alpha \in \Lambda_n$

$$\frac{\rho_\alpha(x)}{M_{n,\alpha}} \leq q_n(x).$$

Sea $\mathcal{Q} = \{q_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $\alpha \in \Lambda$, entonces existe n tal que $\alpha \in \Lambda_n$, por lo que

$$\frac{\rho_\alpha(x)}{M_{n,\alpha}} \leq q_n'(x) \leq q_n(x),$$

de donde,

$$\rho_\alpha(x) \leq M_{n,\alpha} q'_n(x)$$

Entonces cada ρ_α es $\tau(\mathcal{Q})$-continua. Por lo que $\tau \subset \tau(\mathcal{Q})$.

Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$ el disco absorbente

$$B_n = \{x \in X : q'_n(x) \leq 1\}$$

es τ-cerrado , ya que si $x \notin B_n$, entonces $q'_n(x) > 1$. Por definición de $q'_n(x)$ existe $\alpha \in \Lambda_n$ tal que

$$1 < \frac{\rho_\alpha(x)}{M_{n,\alpha}} < q'_n(x).$$

Sea $\varepsilon = \rho_\alpha(x) - M_{n,\alpha}$, entonces $\{y \in X : |\rho_\alpha(y) - \rho_\alpha(x)| < \varepsilon\} \cap B_n = \emptyset$.

Por consiguiente, B_n es un τ-barril. Como (X,τ) es barrilado, entonces B_n es vecindad de 0, es decir existe una τ-vecindad V de 0 tal que $V \subset B_n$. Por lo que $I : (X,\tau) \to (X, q'_n)$ es continua y entonces $\tau(\mathcal{Q}) \subset \tau$. Por tanto, (X,τ) es metrizable.

3.8 Topología de álgebra para $L(X)$

Lema 3.8.1 *Sea (X,τ) espacio vectorial topológico metrizable, separado por su dual topológico X^*. Si (X,τ) es de la 2da. categoría de Baire, entonces $(X,\overline{\tau})$ es de Hausdorff y barrilado, donde $\overline{\tau}$ es la convexificación de τ.*

Demostración. Que $(X,\overline{\tau})$ es de Hausdorff se sigue del Teorema 1.3.53. Supongamos que $(X,\overline{\tau})$ no es barrilado, por la Proposición (2.5.3) existe un B barril en $(X,\overline{\tau})$ con $int_{(X,\overline{\tau})}B = \emptyset$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$. Como B es cerrado en $\overline{\tau}$, entonces es τ - cerrado. Al ser (X,τ)de la 2da. categoría se sigue que $int_{(X,\tau)}B \neq \emptyset$ para algún $n \geq 1$. Así, $int_{(X,\tau)}B \neq \emptyset$.

Existen $b \in B$ y una τ-vecindad V de 0 tales que $b + V \subset B$. De esto y de que B es convexo y balanceado, se sigue que $\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}(v+b) - \frac{1}{2}b \in B$ para todo $v \in V$; es decir $\frac{1}{2}V \subset B$. Por consiguiente, B es una τ-vecindad y contiene a un elemento U de una τ-base local $\mathcal{B}_0$ del 0. Tenemos

$$\left\{x \in X : \rho_{U_c}(x) < 1\right\} \subset U_c \subset B$$

donde ρ_{U_c} es la funcional de Minkowski de la envolvente convexa U_c de U. Por la Proposición 1.3.52, esta funcional es parte de una familia que genera la topología $\overline{\tau}$; por tanto, $0 \in int_{(X,\overline{\tau})}B$; lo que contradice la elección de B. Por tanto $(X,\overline{\tau})$ es barrilado. ∎

Lema 3.8.2 *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* (Y, d) *un* F*-espacio . Entonces* $L(X, Y)$ *es un* F*-espacio con la topología de la convergencia uniforme sobre la bola unitaria de* X*.*

Demostración. Sea G una F-seminorma que genera la topología de (Y, d). Si $T \in L(X, Y)$, entonces $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} G(T(x)) < \infty$. Llamamos también G a la función no negativa definida en $L(X, Y)$ como

$$G(T) = \sup_{\|x\| \leq 1} G(T(x)).$$

Veremos que se trata de una F-norma en $L(X, Y)$.
De la definición es claro que
i) $G(\lambda T) \leq G(T)$ si $|\lambda| \leq 1$ y $T \in L(X, Y)$. y
ii)

$$G(S + T) \leq G(S) + G(T).$$

si $S, T \in L(X, Y)$.
iii) Sean $T \in L(X, Y)$ y $\epsilon > 0$. Para cada $n \geq 1$ sea $\|x_n\| \leq 1$ tal que

$$G\left(\frac{1}{n}T\right) - \epsilon < G\left(\frac{1}{n}T(x_n)\right) = G\left(T\left(\frac{1}{n}x_n\right)\right).$$

Al tomar el límite cuando $n \to \infty$, tenemos que $\frac{1}{n}x_n \to 0$ en X y como T es continua, entonces $G\left(T\left(\frac{1}{n}x_n\right)\right) \to 0$. Por consiguiente,
$\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} G\left(\frac{1}{n}T\right) \leq \varepsilon$, lo que implica que $\lim\limits_{n \to \infty} G\left(\frac{1}{n}T\right) = 0$.
iv) Si $T \neq 0$, entonces $T(x) \neq 0$ para algún $x \in X$ de norma 1 y por tanto, $G(T) > 0$.

Entonces, G define una distancia en $L(X, Y)$ invariante bajo traslaciones. Sea (T_n) una sucesión de Cauchy respecto a la F-norma G. Para cada $x \in X$ se tiene que $(T_n(x))$ es de Cauchy en Y y entonces converge. Definimos $T(x) = \lim\limits_{n \to \infty} T_n(x)$. Tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$G(T_n(x) - T_m(x)) \leq G(T_n - T_m) < \epsilon$$

si $n, m \geq N$; de donde, $G(T_n(x) - T(x)) < \epsilon$ si $n \geq N$ y para todo $x \in X$. Como corolario del Teorema de Banach Steinhauss, tenemos que $T \in L(X, Y)$. Además, es claro que $T_n \to T$ en $L(X, Y)$.

■

Lema 3.8.3 *Si (X,τ) es un F-espacio separado por su dual topológico, entonces*

$$L(X,\tau) = L(X,\overline{\tau})$$

Demostración. Sea $T \in L(X,\tau)$ y V una $\overline{\tau}$ - vecindad convexa de 0. Como $\overline{\tau} \subset \tau$; V es una τ - vecindad de 0. Entonces $T^{-1}(V)$ es una τ - vecindad convexa de 0. Por la Proposición 1.3.52, $T^{-1}(V)$ es también una $\overline{\tau}$ - vecindad de 0.

Sea $T \in L(X,\overline{\tau})$; entonces la gráfica de T es cerrada en $(X,\overline{\tau}) \times (X,\overline{\tau})$. Por lo que la gráfica de T también es cerrada en $(X,\tau) \times (X,\tau)$. Por el Teorema de la Gráfica Cerrada T es τ-continua. De donde, $T \in L(X,\tau)$.

3.8.1 Normabilidad de $L(X)$

Teorema 3.8.4 *Sea (X,τ) un F-espacio separado por su dual topológico X^*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) $K_0(X)$ es topologizable como un álgebra semi-topológica metrizable.

(b) El álgebra $K_0(X)$ es topologizable.

(c) El álgebra $K_0(X)$ es normable.

(d) El álgebra $L(X)$ es normable.

(e) $L(X) \approx L(X_1)$, para un espacio X_1 normado y barrilado.

(f) Existe una subálgebra $A \subset L(X)$, con $K_0(X) \subset A$, que es una F-álgebra.

(g) Existe $I \subset L(X)$ ideal bilateral de $L(X)$ con $I \neq \{0\}$, que es una F-álgebra.

(h) El espacio $(X,\overline{\tau})$ es normalizable.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Por el Lema 3.8.1 $(X,\overline{\tau})$ es barrilado, entonces por el Teorema 3.7.8 $(X,\overline{\tau})$ es normado, de donde $K_0(X)$ es topologizable, de hecho es un álgebra normada.

(b) $\Rightarrow$ (c) Se sigue de la Proposición 3.7.2.

(c) $\Rightarrow$ (d) Por el Corolario 3.7.4, X es normalizable, y por tanto $L(X)$ es normable.

(d) $\Rightarrow$ (e) Al ser $L(X)$ normable, $K_0(X)$ es normable. Entonces por el Teorema 3.7.8 X es normalizable y por tanto, de Banach. De donde, por el Teorema 3.8.1, $X_1 = (X,\overline{\tau})$ es un espacio localmente convexo y barrilado . Usando el Teorema 3.8.3 $L(X,\tau) = L(X_1)$.

(e) $\Rightarrow$ (h) Al ser X_1 normado, $L(X_1)$ es normado. Por el Teorema 3.8.3 tenemos

$$L(X,\overline{\tau}) = L(X,\tau) \approx L(X_1)$$

De donde $L(X,\overline{\tau})$ es normable, en particular $K_0(X,\overline{\tau})$ es normable y, por el Teorema 3.8.1, $(X,\overline{\tau})$ es localmente convexo y barrilado. Entonces por el Teorema 3.7.8 $(X,\overline{\tau})$ es normalizable.

(h) $\Rightarrow$ (a) Al ser $(X,\overline{\tau})$ normalizable, $L(X,\overline{\tau})$ es normable. Usamos el Teorema 3.8.3 y obtenemos

$$K_0(X,\tau) \subset L(X,\tau) = L(X,\overline{\tau})$$

De donde $K_0(X)$ es un álgebra topológica metrizable.

(f) $\Rightarrow$ (a) Evidentemente.

(g) $\Rightarrow$ (f) Sea $T \in K_0(X)$ de rango 1. Por el Teorema 3.5.5 $T = x \otimes f$ para alguna $x \in X \diagdown \{0\}$ y $f \in X^* \diagdown \{0\}$. Consideremos $S' \in I$, $x_0 \in X$ tal que $S'(x_0) \neq 0$ y $g \in X^*$ tal que $g(S'(x_0)) \neq 0$. Definamos $S = (g(S'(x_0)))^{-1} S'$, entonces $S \in I$ y

$$\begin{aligned}((x \otimes g) \circ S \circ (x_0 \otimes f))(y) &= (x \otimes g)\Big((g(S'(x_0)))^{-1} f(y)\, S'(x_0)\Big) \\ &= (g(S'(x_0)))^{-1} g(S'(x_0)) f(y)\, x \\ &= f(y)\, x = (x \otimes f)(y) = T(y)\end{aligned}$$

Por lo que $T = (x \otimes g) \circ S \circ (x_0 \otimes f) \in I$. Entonces $K_0(X) \subset I$ ya que por el Teorema 3.7.7 cualquier elemento de $K_0(X)$ es suma de operadores continuos de rango 1.

(h) $\Rightarrow$ (g) Sea $\|\cdot\|$ una norma que define $\overline{\tau}$. Por el Lema 3.8.2 $I = L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau)$ es un F-espacio con la distancia D que induce la topología s de la convergencia uniforme sobre la bola unitaria de X. Como $\overline{\tau} \subset \tau$, entonces

$$L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau) \subset L(X,\tau) = L(X,\overline{\tau}). \tag{3.6}$$

Claramente

$$\begin{aligned}L(X,\tau) \circ L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau) &\subset L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau) \\ L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau) \circ L(X,\overline{\tau}) &\subset L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau)\end{aligned}$$

y como $L(X,\tau) = L(X,\overline{\tau})$, tenemos que $I = L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau)$ es un ideal bilateral de $L(X,\tau)$.

Sea d la métrica en X que define la topología τ. Como τ es más fina que $\overline{\tau}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x\| < \epsilon$ si $d(x,0) < \delta$. Por lo que si $D(T,0) < \delta$, entonces $d(T(x),0) < \delta$ si $\|x\| = 1$; de donde $\|T(x)\| < \varepsilon$ si $\|x\| = 1$, lo que implica $\|T\| \leq \varepsilon$. Por tanto s es más fina que la topología de subespacio $\tau_{\|\cdot\|}$ de $L(X_{\overline{\tau}}, X_\tau)$ inducida por la norma en $L(X,\overline{\tau})$, es decir $\tau_{\|\cdot\|} \subset s$.

Sea $x \in X$ con $x \neq 0$ y $f \in X_{\tau}^{*} \diagdown \{0\} = X_{\overline{\tau}}^{*} \diagdown \{0\}$, entonces $x \otimes f \in L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau})$. Por lo que $I = L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}) \neq \{0\}$.

Sea $S \in L(X_{\overline{\tau}}, X_{\overline{\tau}})$ y consideremos las aplicaciones $\phi, \psi : L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}) \rightarrow L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}) \subset L(X_{\overline{\tau}}, X_{\overline{\tau}})$ definidas como $\phi(T) = T \circ S$ y $\psi(T) = S \circ T$; observemos que estas funciones están bien definidas por (3.6) y además son $\|\cdot\|$-continuas. Por lo que sus gráficas son cerradas en $(L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}), \|\cdot\|) \times (L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}), \|\cdot\|)$. Como $\tau_{\|\cdot\|} \subset s$, entonces sus gráficas son cerradas en $(L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}), s) \times (L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau}), s)$. Por el Lema 3.8.2 $L(X_{\overline{\tau}}, X_{\tau})$ es un F - espacio, entonces podemos aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada, de donde ϕ y ψ son s - continuas. De donde el producto es separadamente continuo, entonces por el Teorema de los Transformaciones Bilineales (Ver Apéndice Teorema A.6) el producto es continuo y entonces I es una F-álgebra.

■

Corolario 3.8.5 *Sea (X, τ) un espacio de Fréchet. El álgebra $L(X)$ es topologizable si y sólo si X es normalizable.*

Proposición 3.8.6 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y barrilado. Toda topología de álgebra, metrizable, definida sobre una subálgebra A de $L(X)$ que contenga a $K_0(X)$ es más fina que la restricción de la norma de $L(X)$ a A.*

Demostración. Sea δ una topología metrizable definida sobre A y sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a 0 en (A, δ). Sean $x_0 \neq 0$ y $f_0 \in X^*$ tal que $f_0(x_0) = 1$. Entonces $x_0 \otimes f_0 \in A$. La aplicación $\phi : \mathbb{F} \rightarrow (A, \delta)$ definida como $\phi(\lambda) = \lambda(x_0 \otimes f_0)$ es un homeomorfismo sobre su imagen, por la continuidad del producto por un escalar.

Sean $x, y \in X$ y $f \in X^*$, entonces

$$f(T_n(x))(x_0 \otimes f_0)(y) = f(T_n(x)) f_0(y) x_0 = (x_0 \otimes f) \circ T_n \circ (x \otimes f_0)(y).$$

O sea,

$$f(T_n(x))(x_0 \otimes f_0) = (x_0 \otimes f) \circ T_n \circ (x \otimes f_0)$$

Como $(x_0 \otimes f), T_n, (x \otimes f_0) \in A$ y $T_n \rightarrow 0$ según δ, concluimos que lado derecho de la igualdad anterior tiende a 0 y por la continuidad del producto tenemos que $f(T_n(x))(x_0 \otimes f_0) \rightarrow 0$ según δ. Entonces $\phi^{-1}(f(T_n(x))(x_0 \otimes f_0)) = f(T_n(x)) \rightarrow 0$ en $\mathbb{F}$.

De donde $\{f(T_n(x))\}_{n\geq 1}$ es acotado para cada $f \in X^*$ y $x \in X$. Por tanto $\{f \circ T_n : n \geq 1\}$ es $\sigma(X^*, X)$ - acotado para cada $f \in X^*$.

Sea $f \in X^*$, como X es barrilado por el Teorema 2.5.4 $\{f \circ T_n : n \geq 1\}$ es equicontinuo. Por el Teorema 1.3.49 existe $M > 0$ tal que $\|f \circ T_n(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, de donde $\{f \circ T_n(B_1(0)) : n \geq 1\}$. Por tanto$\{T_n(B_1(0)) : n \geq 1\}$ es $\sigma(X, X^*)$ - acotado. Por el Teorema 2.6.8 tenemos que $\{T_n(B_1(0)) : n \geq 1\}$ es $\|\cdot\|$ - acotado. Es decir, existe C tal que $\|T_n(x)\| \leq C$ si $\|x\| \leq 1$. De donde $\|T_n\| \leq C$.

Por consiguiente la identidad $i : (A, \delta) \to (A, \|\cdot\|)$ transforma sucesiones convergentes a 0 en sucesiones acotadas. Por el Teorema 3.4.1, $i : (A, \delta) \to (A, \|\cdot\|)$ es continua y se obtiene el resultado. ∎

3.8.2 Topologización de $L(X)$

Definición 3.8.7 *Sea X un espacio vectorial topológico. Decimos que X es bornológicamente normable si existe una norma $\|\cdot\|$ en X tal que los conjuntos acotados en X coinciden con los conjuntos acotados respecto a la norma $\|\cdot\|$.*

Teorema 3.8.8 *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo, de Hausdorff y completo por sucesiones. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) El álgebra $L(X)$ es topologizable.
(b) El espacio (X, τ) es subnormable.
(c) El espacio (X, τ) tiene un conjunto maximal acotado.
(d) El álgebra $L(X)$ es normable.
(e) El espacio X es bornológicamente normable.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Se sigue del Teorema 3.8.4

.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como X es subnormable entonces existe un sistema de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que genera la topología τ y tales que definen la subnorma

$$\|x\| = \sup_{\alpha \in I} \{\rho_\alpha(x)\}$$

Hagamos $B_\alpha = \{x \in X : \rho_\alpha(x) \leq 1\}$, $B = \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha$ y $B_1[0]$ la bola unitaria cerrada, respecto a la norma anterior. Así, B es un disco, cerrado y acotado en (X, τ). Es claro que $\|x\| \leq 1$ si y sólo si $\rho_\alpha(x) \leq 1$ para todo $\alpha \in I$. Esto nos lleva a que $B = B_1[0]$ y por tanto, B es absorbente; entonces, B es un barril. Por el Teorema 2.5.9 B absorbe a todo conjunto τ-acotado. Por consiguiente, B es un conjunto acotado maximal.

(d) $\Rightarrow$ (a) Obviamente si $L(X)$ es normable, entonces es topologizable.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sea S un conjunto acotado maximal de (X,τ) y $\mathcal{P}=\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de seminormas que define la topología τ de X. Entonces para cada $\alpha\in I$ existe $t_\alpha>0$ tal que $\rho_\alpha(x)\leq t_\alpha$ para todo $x\in S$.

Definamos

$$\rho'_\alpha(x)=t_\alpha^{-1}\rho_\alpha(x)$$

para cada $\alpha\in I$ y todo $x\in X$.

Estas nuevas seminormas ρ'_α determinan también la topología τ de X. Entonces, $S\subset B=\{x\in X:\rho'_\alpha(x)\leq 1 \text{ para todo } \alpha\in I\}$. Claramente B es acotado y absorbe a todo acotado de X por hacerlo S, o sea B es un maximal acotado en (X,τ).

Definimos

$$\|x\|=\sup\rho'_\alpha(x) \tag{3.7}$$

para todo $x\in X$.

Si $x\in X$, entonces $\{x\}$ es un conjunto acotado, por lo que existe $t>0$ tal que $\{x\}\subset tB$. Entonces $\rho'_\alpha(x)\leq t$ para toda $\alpha\in I$, por lo cual $\|x\|\leq t$. De donde, $\|x\|<\infty$ para todo $x\in X$ y (3.7) define una norma en X y se cumple:

$$B=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}.$$

Sea $T\in L(X)$, entonces $T(B)$ es acotado. Como B es acotado maximal, entonces, existe $\lambda>0$ tal que $T(B)\subset\lambda B$. Por lo cual, $\|T(x)\|\leq\lambda$ si $x\in B$. Tomemos $x\neq 0$, entonces $\frac{x}{\|x\|}\in B$ y

$$\|T(x)\|\leq\lambda\|x\|.$$

Por tanto, T es continua respecto a $\|\cdot\|$. Así,

$$\|T\|=\sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}:x\neq 0\right\}$$

es una norma submultiplicativa en $L(X)$.

(c) $\Rightarrow$ (e) Consideramos el conjunto $B=\{x\in X:\rho'_\alpha(x)\leq 1\}$ y la norma $\|\cdot\|$ de la demostración inmediata anterior. Recordamos que B es un maximal acotado en (X,τ).

Sea $U\subset X$ acotado en X, entonces existe $t>0$ tal que $U\subset tB$; por lo que $\|x\|\leq t$ para todo $x\in U$. Por tanto, U es acotado respecto a la norma.

Inversamente, sea U acotado respecto a la norma y V una τ-vecindad del cero. Existen $r,\lambda>0$ tales que $\|x\|\leq r$ para todo $x\in U$ y $B\subset\lambda V$.

Entonces, $U \subset rB \subset r\lambda V$. Así U es τ-acotado en X . Se sigue que X es bornológicamente normable.

(e) $\Rightarrow$ (c) Sea $\|\cdot\|$ una norma que hace a (X, τ) un espacio bornológicamente normable. Tomemos la bola unitaria cerrada $B_1[0]$ respecto a la norma $\|\cdot\|$, el cual es τ-acotado en X por hipótesis, y U un τ-acotado en X. Como U es acotado respecto a la norma existe $r > 0$ tal que $\|x\| \leq r$ para todo $x \in U$. Es decir, $U \subset tB_1[0]$. Por tanto, $B_1[0]$ es un conjunto acotado maximal. ∎

Observación 3.8.9 *Como se ve en la demostración anterior, en la equivalencia de (c) y (e) no utilizamos la hipótesis de que (X, τ) es completo por sucesiones. Por lo cual esas dos propiedades son equivalentes en cualquier espacio localmente convexo de Hausdorff.*

A continuación se dan dos ejemplos de espacios localmente convexos completos, subnormados y no metrizables.

Ejemplo 3.8.10 *Sea X el espacio $C[0,1]$ equipado con la topología inducida por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{\rho_s\}$; donde s corre por el conjunto de todas las sucesiones (x_n^s) en $[0,1]$ que son convergentes en $[0,1]$ y*

$$\rho_s(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x_n^s)|$$

Si s es una de tales sucesiones escribiremos $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^s = x_s$.

- Veamos que X es completo. Sean $(f_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy en X y $x \in [0,1]$. Al tomar la sucesión constante $(a_n^s) = (x)$ obtenemos que $\{f_i(x)\}_{i \in I}$ es una red de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por consiguiente, esta red es convergente. Definamos $f(x) = \lim f_i(x)$ para cada $x \in [0,1]$.

  Afirmamos que f es continua. Sean $x_0 \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ y $s = (x_n^s)$ una sucesión en $[0,1]$ que converge a $x_s = x_0$. Existe $i_0 \in I$ tal que si $i, i' \geq i_0$, entonces

  $$|f_i(x_n^s) - f_{i'}(x_n^s)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

  para todo $n \geq 1$. Al fijar $i \geq i_0$, $n \geq 1$ y tomar el límite sobre i' obtenemos:

  $$|f_i(x_n^s) - f(x_n^s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

O sea,

$$|f_i(x_n^s) - f(x_n^s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $i \geq i_0$ y $n \geq 1$.

Sea $i_1 \geq i_0$ tal que

$$\left|f_{i_1}(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como f_{i_1} es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in [0,1]$ y$|x - x_0| < \delta$ implica:

$$|f_{i_1}(x_n^s) - f_{i_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Tomemos ahora $N \geq 1$ tal que

$$|x_n^s - x_0| < \delta$$

si $n \geq N$.

Entonces, $n \geq N$ implica:

$$|f(x_n^s) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Por tanto, $f \in C[0,1]$.

Con $s = (x_n^s)$ denotamos ahora a cualquier sucesión de las que definen las seminormas. Consideremos la seminorma ρ_s y sea $\varepsilon > 0$. Existe $i_0 \in I$ tal que si $i, i' \geq i_0$ entonces

$$\begin{aligned} \rho_s(f_i - f_{i'}) &< \varepsilon \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_i(x_n^s) - f_{i'}(x_n^s)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como antes, al fijar i y tomar el limite sobre i', obtenemos:

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_i(x_n^s) - f(x_n^s)| &\leq \varepsilon \\ \rho_s(f_i - f) &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Entonces, $\rho_s(f_i - f) \to 0$ para cualquier seminorma ρ_s, por lo cual $f_i \to f$. Así pues, X es completo.

- X es subnormado con la norma

$$\|f\| = \max_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}.$$

- Ahora veamos que X no es metrizable. Supongamos que X es metrizable, entonces por el Teorema 1.3.40 existe una subcolección numerable $\{\rho_{s_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\mathcal{P} = \{\rho_s\}$ que genera la topología $\tau(\mathcal{P})$. Sea

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{s_k} \cup \{x_{s_k}\}\right).$$

Como A es numerable, existe $x_0 \in [0,1] \diagdown A$. Consideremos sucesión constante $s_0 = (x_0)$ y la seminorma ρ_{s_0} a ella asociada. Entonces, por el Corolario 1.3.47 existen $s_1, ..., s_n$ y $M > 0$ tales que para todo $f \in X$ se cumple:

$$\rho_{s_0}(f) \leq M_{s_0} \max_{1\leq k\leq n} \rho_{s_k}(f).$$

Observamos que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{s_k} \cup \{x_{s_k}\}\right)$ es cerrado para cada $k \geq 1$ y así, $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(x_n^{s_k} \cup \{x_{s_k}\}\right)$ es cerrado. Como $[0,1]$ es normal, existe $g : [0,1] \to [0,1]$ continua tal que $g(x) = 0$ para todo $x \in A_n$ y $g(x_0) = 1$. Entonces, $\rho_{s_0}(g) = 1$ y $\rho_{s_k}(g) = 0$ para $1 \leq k \leq n$; lo cual es una contradicción. Por tanto, X no es metrizable.

Ejemplo 3.8.11 *Sea $X = C(\Omega)$, el espacio vectorial de todas las funciones escalares continuas con dominio en el conjunto Ω de todos los ordinales numerables con la topología usual, junto con las seminormas $\rho_\alpha(f) = \max_{0\leq t\leq\alpha} \{|f(t)|\}$.*

- Análogamente a como se hizo en el ejemplo anterior se prueba que X es completo y además es subnormado con la norma

$$\|f\| = \max_{t\in\Omega} \{|f(t)|\}$$

- Supongamos que X es metrizable, entonces por el Teorema 1.3.40 existe una familia $\{\rho_{\alpha_n}\}_{n=1}^{\infty}$ que genera la topología en X. Consideremos $\alpha = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$, el cual al ser unión de numerables es numerable.

Entonces existe $\beta \in \Omega$ tal que $\alpha < \beta$. Entonces, por el Corolario 1.3.47 existen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ y $M > 0$ tales que para todo $f \in X$ se cumple:

$$\rho_\beta(f) \leq M_\beta \max_{1\leq k\leq n} \rho_{\alpha_k}(f).$$

- La función $f : \Omega \to [0,1]$ definida como $f([0,\alpha]) = 0$ y $f([\alpha+1,\Omega)) = 1$ es continua ya que los conjuntos $[0,\alpha]$ y $[\alpha+1,\Omega)$ son cerrados y complementarios en Ω. Entonces $\rho_{\alpha_k}(f) = 0$ para todo $k \geq 1$ y $\rho_\beta(f) = 1$. Así, se contradice la desigualdad anterior; por lo que X no es metrizable.

Teorema 3.8.12 *Sea X un espacio localmente convexo, Hausdorff y sub-Banach. Entonces $L(X)$ es normable.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas que genera la topología en X y tal que la norma

$$\|x\| = \sup_{\alpha\in\Lambda} \{\rho_\alpha(x)\}.$$

convierte a X en espacio subnormado y $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach.

Supongamos que existe $T \in L(X)$ que T no es continua respecto a $\|\cdot\|$. Entonces hay una sucesión $(z'_k)_{k=1}^\infty$ tal que $\|z'_k\| = 1$ y $\|T(z'_k)\| \geq k^2$ para cada $k \geq 1$. Definamos $z_k = \frac{z'_k}{k}$ para cada $k \geq 1$. Entonces, $z_k \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$ y $\|T(z_k)\| \to \infty$ cuando $k \to \infty$. En particular, $z_k \to 0$ y $T(z_k) \to 0$ según $\tau(\mathcal{P})$.

Construyamos inductivamente una subsucesión $(x_i)_{i=1}^\infty \subset (z_k)_{k=1}^\infty$ y una sucesión de seminormas $\left\{\rho_{\alpha_i}\right\}_{i=1}^\infty$que cumpla las siguientes propiedades

(a) $\|x_i\| < 2^{-i}$ para $1 \leq i \leq n$.

(b) $\rho_{\alpha_m}(T(x_{m+i})) < 2^{-i}$ para $1 \leq m \leq n$ y $1 \leq i \leq n-m$.

(c) $\rho_{\alpha_m}\left(T\left(\sum\limits_{i=1}^m x_i\right)\right) > m$ para $1 \leq m \leq n$.

Como $(z_k)_{k=1}^\infty \to 0$ y $\|T(z_k)\| \to \infty$, entonces existe k_1 tal que $\|z_{k_1}\| < 2^{-1}$ y $\|T(z_{k_1})\| > 1$. Definamos $x_1 = z_{k_1}$. Además, por la definición de $\|\cdot\|$ existe α_1 tal que $\rho_{\alpha_1}(T(x_1)) > 1$. Así, (a) y (b) se satisfacen para x_1 y (b) se cumple por vacuidad.

Supongamos que hemos escogido $x_{1=}z_{k_1}, ..., x_{n-1} = z_{k_{n-1}}$, con $k_1 < \cdots < k_{n-1}$, y $\rho_{\alpha_1}, ..., \rho_{\alpha_{n-1}}$ de modo que se cumplen:

(a) $\|x_i\| < 2^{-i}$ para $1 \leq i \leq n-1$.

(b) $\rho_{\alpha_m}(T(x_{m+i})) < 2^{-i}$ para $1 \leq m \leq n-1$ y $1 \leq i \leq (n-1)-m$.

(c) $\rho_{\alpha_m}\left(T\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)\right) > m$ para $1 \leq m \leq n-1$

Existe K_1 con $K_1 > k_{n-1}$ tal que si $k \geq K_1$ entonces $\|z_k\| < 2^{-n}$.

A partir de que: $\|T(z_k)\| \to \infty$, $\left\|T\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right\|$ es una constante y

$$\|T(z_k)\| - \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right\| \leq \left\|T(z_k) + T\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right\|$$

tenemos que $\left\|T(z_k) + T\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right\| \to \infty$, por lo que existe K_2 con $K_2 > k_{n-1}$ tal que si $k \geq K_2$, entonces $\left\|T(z_k) + T\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right\| > n$.

De igual forma, por la definición de $\|\cdot\|$, existe α_n tal que si $k \geq K_2$, entonces

$$\rho_{\alpha_n}\left(T(z_k) + T\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)\right) > n \tag{3.8}$$

Además, sabemos que $\rho_\alpha(T(z_k)) \to 0$ para todo $\alpha \in \Gamma$ Entonces existe K_3 con $K_3 > k_{n-1}$ tal que si $k \geq K_3$, entonces

$$\rho_{\alpha_m}(T(z_k)) < 2^{m-n} \tag{3.9}$$

para $1 \leq m \leq n$.

Sea $k_n = \max\{K_1, K_2, K_3\}$ y definamos $x_n = z_k$. Evidentemente, $k_n > k_{n-1}$ y x_n se cumple la propiedad (a).

En el caso de la propiedad (b), sólo faltan verificar las siguientes desigualdades:

$\rho_{\alpha_m}(T(x_{m+i})) < 2^{-i}$ para $1 \leq m \leq n-1$ y $i = n-m$; o sea, $\rho_{\alpha_m}(T(x_n)) < 2^{n-m}$ para $1 \leq m \leq n-1$; pero esto se sigue de (3.9).

Para la propiedad (c), veamos que cuando $m < n$ se verifica por la hipótesis de inducción y cuando $m = n$ también es válida por (3.8.

Tenemos entonces una subsucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ de $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ y una sucesión de seminormas $\{\rho_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ que satisface (a), (b) y (c).

Por (a) $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$, y como $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach existe $x \in X$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overset{\|\cdot\|}{\to} x$; por lo que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \to x$ según $\tau(\mathcal{P})$ y entonces

$$\rho_\alpha(T(x)) = \lim_{n\to\infty} \rho_\alpha\left(T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right)$$

para todo $\alpha \in \Gamma$.

Consideremos m fija y $n > m$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha_m}\left(T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right) &= \rho_{\alpha_m}\left(T\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)+T\left(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right)\right) \\ &\geq \rho_{\alpha_m}\left(T\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\right)-\rho_{\alpha_m}\left(T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right) \\ &> m-\sum_{i=m+1}^{n} 2^{-i} > m-1\end{aligned}$$

Por lo cual $\rho_{\alpha_m}(T(x)) > m-1$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Lo cual no es posible, por tanto T es continuo respecto a $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|$ induce una norma en $L(X)$ de la manera usual. ∎

Ahora mostraremos un espacio X localmente convexo de Hausdorff que es sub-Banach; por tanto, $L(X)$ es normable, según el Teorema 3.8.12. Este espacio X no tiene un conjunto acotado maximal; por lo que no es bornológicamente normable, de acuerdo con la Observación 3.8.9 y además, no es completo por sucesiones.

Este espacio X es un ejemplo que muestra que sin la hipótesis de ser completo por sucesiones las equivalencias del Teorema 3.8.8 no son necesariamente ciertas, ya que satisface (a), (b) y (d), pero no (c) ni (e).

Ejemplo 3.8.13 *Sea $X = C_b(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas y acotadas sobre $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{F}$. Le damos la topología compacto abierta $\tau(\mathcal{P})$ definida por la familia numerable $\mathcal{P}$ de las seminormas:*

$$\rho(x) = \max_{|t|\leq n} |f(t)|$$

para $f \in C(\mathbb{R})$ y $n \geq 1$.

Este espacio X es localmente convexo de Hausdorff, no es completo por sucesiones, subnormado, sub-Banach y no tiene conjunto maximal acotado.

- Es evidente que X es un espacio localmente convexo de Hausdorff. Afirmamos que X es denso en $C(\mathbb{R})$. Sea $f \in C(\mathbb{R})$ y definamos f_n tal que

$$f_n(t) = \begin{cases} f(n) & t \geq n \\ f(x) & -n \leq t \leq n \\ f(-n) & t \leq -n \end{cases}$$

Claramente $\rho_n(f-f_k)=0$ si $k\geq n$. Por lo que $f_n\to f$ según $\tau(\mathcal{P})$ y queda probado que X es denso en $C(\mathbb{R})$.

- Se sigue de lo anterior que X no es completo por sucesiones.

- Por otra parte, X es subnormado por la norma

$$\|f\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|$$

y evidentemente

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|=\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho_n(f).$$

- Veamos que $(X,\|\cdot\|)$ es de Banach y por tanto X es sub-Banach. Sea (f_n) sucesión de Cauchy en la norma. De la desigualdad

$$|f_n(t)-f_m(t)|=\|f_n-f_m\|$$

para todo $t\in\mathbb{R}$ se sigue que $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Definamos $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. Afirmamos que f es continua en $\mathbb{R}$. Sean $\varepsilon>0$ y $t_0\in\mathbb{R}$. Existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq N$ entonces

$$|f_n(t)-f_m(t)|\leq\|f_n-f_m\|<\frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $t\in\mathbb{R}$. Fijando $n\geq N$ obtenemos

$$|f_n(t)-f(t)|\leq\frac{\varepsilon}{3} \tag{3.10}$$

para todo $t\in\mathbb{R}$.

Sea $n\geq N$, como f_n es continua entonces existe $\delta>0$ tal que si $|t-t_0|<\delta$, entonces

$$|f_n(t)-f_n(t_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo cual, $|t-t_0|<\delta$ y implica:

$$|f(t)-f(t_0)|\leq|f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-f_n(t_0)|+|f_n(t_0)-f(t_0)|<\varepsilon$$

Por tanto, f es continua. De esto y la desigualdad (3.10) se sigue $f_N-f\in C_b(\mathbb{R})$ y por consiguiente, $f\in C_b(\mathbb{R})$. De la misma desigualdad (3.10) concluimos entonces que $f_n\overset{\|\cdot\|}{\to}f$. Así, $(X,\|\cdot\|)$ es de Banach y $(X,\tau(\mathcal{P}))$ es sub-Banach.

- Finalmente veremos que X no tiene un conjunto maximal acotado. Supongamos que $A \subset X$ es un maximal acotado y definamos $M_k = \sup_{f \in A} \rho_k(f)$ para cada $k \geq 1$. Es claro que la sucesión de M_k es creciente.

  Construyamos una sucesión de reales positivos $(M'_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $M'_k \to \infty$ y $M'_k > M_k^2$. Para cada $n \geq 1$, definamos f_n de la siguiente forma:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2M'_n(x-n+1) & x \in \left[n-1, n-\frac{1}{2}\right] \\ -2M'_n(x-n) & x \in \left[n-\frac{1}{2}, n\right] \\ 0 & x \notin [n-1, n] \end{cases}$$

  Por construcción, $\rho_k(f_n) = 0$ si $k \leq n-1$ y $\rho_k(f_n) = M'_n$ si $k \geq n$. Hagamos $B = \{f_n : n \geq 1\}$. Entonces, B es acotado y por nuestra suposición sobre A existe $t > 0$ tal que $B \subset tA$. Por lo que $\rho_k(f_n) \leq tM_k$ si $n, k \geq 1$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 0 &< M'_k < tM_k \\ \frac{M'_k}{M_k} &< t \end{aligned}$$

  Sea $M = \sup_{k \in \mathbb{N}} M_k$. Si $M < \infty$, entonces

$$\frac{M'_k}{M} < \frac{M'_k}{M_k} < t$$

  lo que es una contradicción, ya que $\frac{M'_k}{M} \to \infty$.

  Si $M_k \to \infty$, entonces

$$2M_k = \frac{M_k^2}{M_k} < \frac{M'_k}{M_k} < t$$

  lo que es una contradicción. Por lo cual X no tiene maximal acotado.

Ejemplo 3.8.14 *Consideremos en $C(\mathbb{R})$ la topología $\tau(\mathcal{P})$ del ejemplo inmediato anterior y sea X el subespacio de $C(\mathbb{R})$ formado por las funciones con soporte compacto. Entonces X es un espacio subnormado por la norma*

$$\|f\| = \max_{n \in \mathbb{N}} \rho_n(f)$$

tal que $L(X)$ no es normable.

- Supongamos que $L(X)$ es normable por una norma $\|\cdot\|$. Sea $\varphi \in C(\mathbb{R})$ y definamos $T_\varphi : X \to X$ como

$$T_\varphi(f) = \varphi \cdot f$$

Notemos que T_φ está bien definida, ya que

$$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \cdot f(x) \neq 0\} \subset \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$$

por lo cual $\varphi \cdot f \in X$.

Hagamos $C = \{T_\varphi : \varphi \in C(\mathbb{R})\}$. Entonces C es claramente una subálgebra de $L(X)$; más aún, $C(\mathbb{R})$ es isomorfo a C a través de la trasformación $T : C(\mathbb{R}) \to C$ definida como $T(\varphi) = T_\varphi$. También es claro que T es lineal y sobre, además tenemos que

$$\begin{aligned} T(\varphi \cdot \psi)(f) &= T_{\varphi\cdot\psi}(f) = (\varphi \cdot \psi) \cdot f = \varphi \cdot (\psi \cdot f) \\ &= T_\varphi(\psi \cdot f) = T_\varphi \circ T_\psi(f) = T(\varphi) \cdot T(\psi)(f) \end{aligned}$$

para todo $f \in X$. Así, T es un homomorfismo suprayectivo de álgebras.

Para ver que T es inyectivo, tomemos $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R})$ tales que $\varphi \neq \psi$, por lo cual existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$. Definamos

$$f(x) = \begin{cases} x - x_0 + 1 & x \in [x_0 - 1, x_0] \\ -x + x_0 + 1 & x \in [x_0, x_0 + 1] \\ 0 & x \notin [x_0 - 1, x_0 + 1] \end{cases}$$

Observemos que $f(x_0) = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} (\varphi \cdot f)(x_0) &= \varphi(x_0) \cdot f(x_0) = \varphi(x_0) \\ (\psi \cdot f)(x_0) &= \psi(x_0) \cdot f(x_0) = \psi(x_0). \end{aligned}$$

Entonces, $T_\varphi \neq T_\psi$. Por tanto T es inyectiva y T es un isomorfismo de álgebras.

Definamos $\|\cdot\| : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ como $\|\varphi\| = \|T_\varphi\|$, la cual es claramente una norma en $C(\mathbb{R})$. Esto contradice el Corolario 3.2.14 y por tanto, $L(X)$ no es normable. ∎

Proposición 3.8.15 *Existe un espacio X localmente convexo de Hausdorff y subnormado para el cual el álgebra $L(X)$ no es topologizable.*

Demostración. El espacio $(X, \tau(P))$ del ejemplo inmediato anterior es localmente convexo de Hausdorff y subnormado. Probaremos que $L(X)$ no es topologizable. Supongamos lo contrario, entonces existe una topología Υ de Hausdorff para $L(X)$ que hace continuas a las operaciones de $L(X)$.

Sea $\varphi \in C(\mathbb{R})$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

y definamos como antes: $T_\varphi(f) = \varphi \cdot f$ para todo $f \in X$. Entonces, $T_\varphi \in L(X)$ y $T_\varphi \neq 0$. Existe $U \in \Upsilon$ vecindad balanceada del 0 en $L(X)$ tal que $T_\varphi \notin U$, por lo que $\lambda U \subset U$ si $|\lambda| \leq 1$.

Para $\psi \in C(R)$ y $n \geq 1$ definimos las funciones $\psi_{(n)}(t) = \psi(t-n)$ y $\psi_{(-n)}(t) = \psi(t+n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como el producto es continuo en $L(X)$, existe $V \in \Upsilon$ vecindad de 0 tal que $V \cdot V \cdot V \subset U$. Sea $S \in L(X)$ dada por

$$S(f) = f_{(1)}.$$

Claramente S es invertible y $S^{-1} : X \to X$ está dada por

$$S^{-1}(g) = g_{(-1)}.$$

Para cada $n \geq 1$ denotamos como S^n y S^{-n} a las potencias enésimas de S y S^{-1} respecto a la composición.

Por ser V absorbente, existen $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ para los que se cumple

$$c_n S^{-n} \in V \text{ y } d_n S^n T_\varphi \in V.$$

Definamos

$$r_n = \frac{n}{c_n d_n}$$

para cada $n \geq 1$.

La función $\zeta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$\zeta(t) = \begin{cases} r_n & \text{si } t \in \left[n + \frac{1}{3}, n + \frac{2}{3}\right], \text{ con } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } t = n, \text{ con } n \in \mathbb{R} \\ \text{lineal} & \text{en el resto} \end{cases}$$

pertenece a $C(\mathbb{R})$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon T_\zeta \in V$. Entonces,

$$c_n d_n \varepsilon S^{-n} T_\zeta S^n T_\varphi \in U.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} S^{-n} T_\zeta S^n T_\varphi (f)(t) &= S^{-n}\left(\zeta \cdot (\varphi f)_{(n)}\right)(t) \\ &= \left(\zeta_{(-n)} \cdot \varphi \cdot f\right)(t) \\ &= \zeta(t+n)\,\varphi(t)\, f(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como φ tiene soporte en $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, entonces $\varphi(t-n)$ tiene soporte en $\left[n+\frac{1}{3}, n+\frac{2}{3}\right]$. Recordamos que $\zeta = r_n$ en $\left[n+\frac{1}{3}, n+\frac{2}{3}\right]$. Así, $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ implica

$$\begin{aligned} S^{-n} T_\zeta S^n T_\varphi (f)(t) &= \zeta(t+n)\,\varphi(t)\, f(t) \\ &= r_n T_\varphi (f)(t) \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$.

En tanto que $t \notin \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ implica

$$\begin{aligned} S^{-n} T_\zeta S^n T_\varphi (f)(t) &= \zeta(t+n)\,\varphi(t)\, f(t) \\ &= 0 \\ &= (\varphi \cdot f)(t) \\ &= r_n T_\varphi (f)(t) \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$.

Por consiguiente, $S^{-n} T_\zeta S^n T_\varphi = r_n T_\varphi$ en $\mathbb{R}$ para todo $n \geq 1$. A partir de la definición de r_n, tenemos que

$$c_n d_n \varepsilon S^{-n} T_\zeta S^n T_\varphi = c_n d_n \varepsilon r_n T_\varphi = n \varepsilon T_\varphi \in U$$

para todo $n \geq 1$.

Sea n_0 tal $\frac{1}{\varepsilon n_0} < 1$. Entonces, como $n_0 \varepsilon T_\varphi \in U$, $\frac{1}{\varepsilon n_0} < 1$ y U es balanceado se tiene

$$\frac{1}{\varepsilon n_0}\left(n_0 \varepsilon T_\varphi\right) \in U.$$

De donde, obtenemos que $T_\varphi \in U$, lo que es una contradicción. Por tanto, $L(X)$ no es topologizable. ∎

Proposición 3.8.16 *Sea X un espacio localmente convexo subnormado y sea X^+ su compleción.. Entonces, existe un espacio subnormado X_1 con $X \subset X_1 \subset X^+$ tal que $L(X_1)$ es normable.*

Demostración. Como X es subnormado, entonces existe un sistema $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas en X tal que

$$\|x\| = \sup_{\alpha\in\Lambda} \rho_\alpha (x) \tag{3.11}$$

es una subnorma para X. Las seminormas extendidas continuamente a X^+ generan su topología. Sean $\mathcal{B}_\alpha = \{x \in X^+ : \rho_\alpha (x) \leq 1\}$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y $\mathcal{B} = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{B}_\alpha$. Obviamente $\mathcal{B}$ es un disco cerrado y acotado en X^+ . Como X^+ es completo, $\mathcal{B}$ también lo es. Entonces, por el inciso (c) del Teorema 2.4.7 , $\mathcal{B}$ es un disco de Banach; es decir $X^+_{\mathcal{B}}$ es de Banach; por lo que $L\left(X^+_{\mathcal{B}}\right)$ es normado.

De (3.11) se sigue que todo punto de la bola unitaria cerrada de $(X, \|\cdot\|)$ pertenece a $\mathcal{B}$ y por tanto, $X \subset X^+_{\mathcal{B}}$.

Observemos que la norma en $X^+_{\mathcal{B}}$, $\|x\|' = \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{B}\}$ es justamente la subnorma $\|\cdot\|$ restringida a $X^+_{\mathcal{B}}$, ya que

$$\begin{aligned} \|x\|' &= \inf\{t > 0 : x \in t\mathcal{B}\} = \inf\{t > 0 : \rho_\alpha (x) \leq t \text{ para todo } \alpha \in \Lambda\} \\ &= \sup_{\alpha\in\Lambda} \rho_\alpha (x) = \|x\| \end{aligned}$$

Tomando $X_1 = X^+_{\mathcal{B}}$, obtenemos el resultado buscado.∎

Aquí concluye prácticamente el presente trabajo, sin embargo como una indicación de lo que se puede seguir estudiando, incluimos, a manera de colofón, la siguiente sección.

3.9 Álgebras de operadores y operadores topologizables

Teorema 3.9.1 *Sea X un espacio localmente convexo de Hausdorff. $L(X)$ admite una topología vectorial tal que el operador bilineal $\Phi : L(X)\times X \to X$ dado por $\Phi (T, x) = T (x)$ es continuo si y sólo si X es normado.*

Demostración. Supongamos que X es normado, entonces $L(X)$ es normado. Consideremos una sucesión $((T_n, x_n))_{n=1}^\infty \subset L(X) \times X$ tal que $(T_n, x_n) \to (T, x)$. Así, $\|T_n - T\| \to 0$ y $\|x_n - x\| \to 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|T_n (x_n) - T (x)\| &\leq \|(T_n - T) (x_n)\| + \|T (x_n - x)\| \\ &\leq \|T_n - T\| \|x_n\| + \|T\| \|x_n - x\| . \end{aligned}$$

Por lo que $\|T_n(x_n) - T(x)\| \to 0$. Lo que implica que Φ es continua.

Inversamente supongamos que existe una topología vectorial en $L(X)$ tal que Φ es continua. Sea U una vecindad del 0 en X, entonces por la continuidad de Φ existen V, W vecindades de 0 en $L(X)$ y X respectivamente tales que $V \cdot W \subset U$. Podemos suponer que las vecindades U y W son cerradas y absolutamente convexas, y considerar las funcionales de Minkowski ρ_U y ρ_W asociados a ellas; éstas tienen como bolas unitarias cerradas a U y W, respectivamente.

Supongamos que el sistema saturado de seminormas $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ genera la topología en X. Si $f \in X^*$, entonces existe una seminorma ρ_α y una contante $M > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple:

$$|f(x)| \leq M\rho_\alpha(x) \tag{3.12}$$

Por el Corolario 2.4.16, si X no es normado, entonces no se puede escoger una seminorma continua en X tal que la desigualdad 3.12 se satisfaga para toda $f \in X^*$, por lo que para toda seminorma continua ρ en X existe $f \in X^*$ tal que

$$\sup_{\rho(x)<1} |f(x)| = \infty \tag{3.13}$$

Sea $x_0 \in X$ tal que $\rho_U(x_0) = 1$ y f tal que (3.13) se satisfaga para ρ_W. Consideremos $T = x_0 \otimes f : X \to X$ el cual claramente es continuo. Como V es absorbente existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda T \in V$, por lo que

$$\lambda TW \subset U. \tag{3.14}$$

Por la elección de f, existe $x \in X$ tal que $\rho_W(x) < 1$ y $|f(x)| > \lambda^{-1}$. Como $\lambda T \in V$ y $x \in W$; ya que $\rho_W(x) < 1$ se sigue de (3.14) que

$$\lambda T(x) \in U,$$

y como $\rho_U(x_0) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \rho_U(\lambda T(x)) &= \lambda\rho_U(T(x)) = \lambda\rho_U(f(x)\,x_0) \\ &= \lambda|f(x)|\,\rho_U(x_0) > \lambda\lambda^{-1}\rho_U(x_0) = 1 \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, ya que $\lambda T(x) \in U$ si y sólo si $\rho_U(\lambda T(x)) \leq 1$. Por lo cual X es normado. ■

Definición 3.9.2 *Sea X un espacio localmente convexo. Un álgebra de operadores es una subálgebra localmente convexa $A \subset L(X)$ que contiene a la unidad I_X y tal que la función*

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{m}: & A \times X & \to & X \\ & (T, x) & \to & T(x) \end{array}$$

es continua

Proposición 3.9.3 *Sea X un espacio localmente convexo y $A \subset L(X)$ un subálgebra localmente convexa que contiene a la unidad. Supongamos que $\{q_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es una familia saturadas de seminormas que genera la topología de A , con $q_\beta(I_X) = 1$ para todo β, y $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es la familia de todas las seminormas continuas definidas en X. La subálgebra A es un álgebra de operadores si y sólo si para toda $\alpha \in \Lambda$ existen $\alpha' \in \Lambda$ y $\beta \in \Gamma$ tales que*

$$\rho_\alpha(T(x)) \leq q_\beta(T)\, \rho_{\alpha'}(x) \tag{3.15}$$

para todo $T \in A$ y $x \in X$.

Demostración. Supongamos que para toda $\alpha \in \Lambda$ se satisface la desigualdad (3.15) . Sea $\alpha \in I$ y $(T_i)_{i \in I}$,$(x_i)_{i \in I}$ redes en A y X respectivamente, tales que $T_i \to T$ y $x_i \to x$. Entonces $q_\beta(T_i - T)$ y $\rho_{\alpha'}(x_i - x)$ tienden a 0, por lo que

$$\begin{aligned} \rho_\alpha(T_i(x_i) - T(x)) &\leq \rho_\alpha(T_i(x_i) - T(x_i)) + \rho_\alpha(T(x_i) - T(x)) \\ &\leq q_\beta(T_i - T)\, \rho_{\alpha'}(x_i) + q_\beta(T)\, \rho_{\alpha'}(x_i - x) \end{aligned}$$

De donde la función $\mathfrak{m}$ es continua y A es un álgebra de operadores.

Inversamente, supongamos que $\mathfrak{m}$ es continua en $A \times X$. Sea $\mathcal{B}_\alpha = \{x \in X : \rho_\alpha(x) \leq 1\}$. Existen $V = \{x \in X : \rho_{\alpha''}(x) \leq \delta\}$ y $U = \{T \in A : q_\beta(T) \leq \delta\}$ tales que $U \cdot V \subset \mathcal{B}_\alpha$. Es decir, $\rho_{\alpha''}(x) \leq \delta$ y $q_\beta(T) \leq \delta$ implica

$$\rho_\alpha(T(x)) \leq 1$$

Sea $T \in A$ y $x \in X$. Si $q_\beta(T) = 0$ ó $\rho_{\alpha''}(x) = 0$, entonces para todo $\lambda > 0$ se cumple $\lambda T \in U$ ó $\lambda x \in V$. De donde $\lambda \rho_\alpha(T(x)) \leq 1$ para todo $\lambda > 0$, por lo que

$$\rho_\alpha(T(x)) = 0 = q_\beta(T)\, \rho_{\alpha''}(x)$$

Sea $T \in A$ y $x \in X$ tal que $q_\beta(T) > 0$ y $\rho_{\alpha''}(x) > 0$. Entonces $\delta(\rho_{\alpha''}(x))^{-1} x \in V$ y $\delta(q_\beta(T))^{-1} T \in U$, por lo que

$$\delta^2 \rho_\alpha\left((q_\beta(T))^{-1} T\left((\rho_{\alpha''}(x))^{-1} x\right)\right) \leq 1.$$

De donde

$$\rho_\alpha(T(x)) \leq q_\beta(T)\, \rho_{\alpha'}(x)$$

con $\rho_{\alpha'} = \frac{1}{\delta^2}\rho_{\alpha''}$. ■

Teorema 3.9.4 *Sea A un álgebra con unidad y localmente convexa. Entonces A es isomorfa a un álgebra de operadores.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia saturada de seminormas que genera la topología de A y satisface (3.2). Consideremos $X = (A, \tau(\mathcal{P}))$. Sea $a \in A$ y definamos $T_a : X \to X$ como $T_a(x) = ax$. Consideremos $A' = \{T_a\}_{a\in A}$ en $L(X)$, la función $T(a) = T_a$ es un isomorfismo de álgebras entre A y A'.

Definimos $q_\alpha : A' \to \mathbb{R}$ como $q_\alpha(T_a) = \rho_\alpha(a)$. Por lo que al darle A' la topología generada por las seminormas q_α la función T es un homeomorfismo. Además, sabemos que para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \Lambda$ tal que

$$\rho_\alpha(xy) \leq \rho_\beta(x)\, \rho_\beta(y)$$

para todo $x, y \in X$. Entonces,

$$\rho_\alpha(T_a(x)) = \rho_\alpha(ax) \leq \rho_\beta(a)\, \rho_\beta(x) = q_\beta(T_a)\, \rho_\beta(x)$$

Entonces por la proposición anterior, la función T es continua en $A' \times X$. Por tanto, A' es un álgebra de operadores isomorfa al álgebra topológica A. ■

Observación 3.9.5 *Como toda álgebra se puede sumergir en un álgebra con unidad, un álgebra localmente convexa es homeomorfa a una subálgebra de un álgebra de operadores de un espacio localmente convexo.*

Definición 3.9.6 *Sean X un espacio localmente convexo y $T \in L(X)$. Decimos que T es un operador topologizable si existe un álgebra de operadores $A \subset L(X)$ tal que $T \in A$.*

Definición 3.9.7 *Sea* $(a_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ *un matriz infinita con coeficientes reales positivos tales que*

$$\begin{aligned} a_{i,0} &= 1 \\ a_{i,j+k} &\leq a_{i+1,j}a_{i+1,k} \end{aligned} \tag{3.16}$$

para $i, j, k \geq 0$.

Observamos que estas dos condiciones implican que

$$a_{i,j} \leq a_{i+1,j} \tag{3.17}$$

para $i, j, k \geq 0$.

Definimos el álgebra matricial $M\left((a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}\right)$ *de polinomios como el conjunto de polinomios*

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j t^j$$

con coeficientes en $\mathbb{F}$, *junto con la topología generada por las seminormas* $\rho_i : M\left((a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}\right) \to \mathbb{R}$ *definidas como*

$$\rho_i(p) = \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} |\lambda_j|$$

Esta familia esta saturada debido a (3.17)

Proposición 3.9.8 *El álgebra matricial* $M\left((a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}\right)$ *es un álgebra localmente convexa metrizable y la familia de seminormas es creciente.*

Demostración. $M\left((a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}\right)$ es un espacio localmente convexo metrizable debido a que su topología está generada por una familia numerable de seminormas. La familia de seminormas es creciente debido a que $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}a_{i+1,0} = a_{i+1,j}$, y esto nos lleva a que $a_{i,j} |\lambda_j| \leq a_{i+1,j} |\lambda_j|$. Por tanto

$$\rho_i(p) = \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} |\lambda_j| \leq \sum_{j=0}^{n} a_{i+1,j} |\lambda_j| = \rho_{i+1}(p)$$

Ahora veamos que es un álgebra topológica. Sean

$$s(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t_j \text{ y } p(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j t^j$$

Entonces tenemos

$$\rho_i\left(ps\right) = \sum_{j=0}^{2n} a_{i,j} \left|\sum_{k=0}^{j} \alpha_k \beta_{j-k}\right| \leq \left(\sum_{j=0}^{n} a_{i+1,j} \left|\alpha_j\right|\right) \left(\sum_{j=0}^{n} a_{i+1,j} \left|\beta_j\right|\right) = \rho_{i+1}\left(p\right) \rho_{i+1}\left(s\right)$$

■

Lema 3.9.9 *Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos con $a_0 = 1$. Entonces existe una sucesión $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ de reales positivos con $b_0 = 1$ tal que*

$$a_{n+m} \leq b_n b_m$$

para $n, m \geq 0$

Demostración. Construiremos $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ inductivamente. Definamos $b_0 = 1$ el cual satisface la desigualdad para $n = m = 0$. Supongamos que hemos construido b_{k-1} de manera que

$$a_{n+m} \leq b_n b_m$$

para $0 \leq n, m \leq k-1$.

Definamos

$$b_k = \max\left\{a_k, a_{k+1}b_1^{-1}, ..., a_{k+(k-1)}b_{k-1}^{-1}, \sqrt{a_{2k}}\right\}.$$

Si $n, m < k$ entonces por hipótesis inductiva $a_{n+m} \leq b_n b_m$. Si $m = k$ y $n = m$, entonces

$$a_{n+m} = a_{2k} = \sqrt{a_{2k}} \cdot \sqrt{a_{2k}} \leq b_k b_k = b_n b_m.$$

Si $m = k$ y $n < m$ entonces

$$a_{n+m} = a_{n+k} = b_n\left(a_{k+n}b_n^{-1}\right) \leq b_n b_k = b_n b_m.$$

■

Lema 3.9.10 *Sea $(M_j)_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de reales positivos con $M_0 = 1$. Entonces podemos construir una matriz $(a_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ que tenga a esa sucesión como primer renglón y que genere un álgebra matricial de polinomios.*

Demostración. Construyamos la matriz $(a_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ inductivamente. Definamos $a_{0,j} = M_j$ para todo $j \geq 0$. Supongamos que hemos construido hasta el $(n-1)$ renglón. Definamos $b_j = a_{n-1,j}$; por el lema anterior existe una sucesión $(c_j)_{j=0}^{\infty}$ tal que $c_0 = 1$ y $b_{j+k} \leq c_j c_k$. Al definir $a_{n,j} = c_j$ para $j \geq 0$ vemos que se satisface las dos condiciones de (3.16). ■

En lo que sigue consideraremos $T^0 = I_X$ para todo $T \in L\left(X\right)$.

Teorema 3.9.11 *Sea X un espacio localmente convexo y $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ la familia de todas las seminormas continuas definidas en X. Un operador $T \in L(X)$ es topologizable si y sólo si para cada $\alpha \in \Lambda$ existe una sucesión $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ de reales positivos con $M_0 = 1$ y $\alpha' \in \Lambda$ tal que*

$$\rho_\alpha (T^n (x)) \leq M_n \rho_{\alpha'} (x) \tag{3.18}$$

para todo $x \in X$ y $n \geq 0$.

Demostración. Supongamos que T es topologizable. Sea $A \subset L(X)$ un álgebra de operadores, en particular $T^n \in A$ para todo $n \geq 0$. Como la función $\mathfrak{m}$ es continua en $A \times X$, se tiene que si $\{q_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ una familia saturada de seminormas en A que genera su topología y tal que $q_\beta (I_X) = 1$ para todo β , entonces, por la Proposición 3.9.3, para cada $\alpha \in \Lambda$ existen $\alpha' \in \Lambda$ y $\beta \in \Gamma$ tales que

$$\rho_\alpha (S (x)) \leq q_\beta (S) \rho_{\alpha'} (x)$$

para todo $x \in X$ y $S \in A$. En particular,

$$\rho_\alpha (T^n (x)) \leq q_\beta (T^n) \rho_{\alpha'} (x) .$$

para todo $x \in X$ y $n \geq 0$.

Definimos $M_n = q_\beta (T^n)$ para $n \geq 0$ y obtenemos el resultado.

Inversamente, supongamos que T satisface (3.18). Para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos asociada una sucesión $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ de reales positivos con $M_0 = 1$. Por el Lema 3.9.10 existe una matriz $\mathcal{B} (\alpha) = (a_{i,j})_{i,j\geq 0}$ que tiene a esa sucesión como primer renglón y genera un álgebra A matricial de polinomios en la variable T. En ella están definidas seminormas $q_i^{(\alpha)}$, para $i \geq 0$, de acuerdo a la Definición 3.9.7.

La familia de seminormas $\left\{q_i^{(\alpha)}\right\}_{i\geq 0,\alpha\in\Lambda}$ en A está saturada y hace de ésta un álgebra localmente convexa. Además $q_i^{(\alpha)} (I_X) = a_{i,0} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Sea $s \in A$, con $s (T) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j T^j$, entonces utilizando (3.18) tenemos que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $\alpha' \in \Lambda$ tal que

$$\begin{aligned} \rho_\alpha (s (x)) &= \rho_\alpha \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_j T^j (x) \right) \leq \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j| \rho_\alpha \left(T^j (x)\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j| M_j \rho_{\alpha'} (x) = q_0^{(\alpha)} (s) \rho_{\alpha'} (x) \end{aligned}$$

De donde, por la Proposición 3.9.3, A es un álgebra de operadores y como $T \in A$, entonces T es topologizable. ∎

Corolario 3.9.12 *Sea A una subálgebra con unidad de $L(X)$ que posee una topología vectorial localmente convexa tal que la aplicación $(T,x) \mapsto T(x)$ es continua. Entonces todos lo elementos de A son topologizables.*

Demostración. Para cada seminorma ρ continua en X existen seminormas continuas ρ', q en X y A, respectivamente, con $q(I_X) = 1$ tales que

$$\rho(T(x)) \leq q(T)\rho'(x)$$

para todo $x \in X, T \in A$.

Podemos suponer $\rho(x) \leq \rho'(x)$ para todo $x \in X$. El operador $T^n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $T \in A$, entonces tomando $M_n = q(T^n)$ si $n \geq 0$ se satisface $M_0 = 1$ y

$$\rho(T^n(x)) \leq M_n\rho'(x)$$

para todo $x \in X$ y $n \geq 0$. Por el teorema anterior, T es topologizable. ∎

Ahora daremos algunos ejemplos de operadores topologizables.

Ejemplos 3.9.13 *(a) Sea X un espacio localmente convexo y consideremos $T : X \to X$ definido como $T(x) = \lambda x$ con $|\lambda| \leq 1$. Entonces T es topologizable ya que para toda seminorma ρ continua en X tenemos:*

$$\rho(T^n(x)) = \rho(\lambda^n x) \leq \rho_\alpha(x)$$

Por lo que considerando $M_n = 1$ para todo $n \geq 1$ se cumple el Teorema 3.9.11. En particular I_X es topologizable.

(b) Sea $X = C_{[0,\infty)}$ con la topología compacto abierta, es decir la generado por las seminormas.

$$\rho_n(f) = \max_{0\leq t\leq n} |f(t)|$$

para todo $n \geq 1$.

El operador $T : X \to X$ definido como $T(f)(t) = f(t-1)$ es topologizable ya que

$$\max_{0\leq t\leq n} (T(f)) \leq \max_{0\leq t\leq n+1} (f).$$

para todo $n \geq 1$ y de aquí se sigue que se cumple el Teorema 3.9.11

Proposición 3.9.14 *Sea X espacio localmente convexo y $T_1, T_2 \in L(X)$ topologizables y tales que $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. Entonces $T_1 \circ T_2$ y $T_1 + T_2$ son topologizables.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ la familia de todas las seminormas continuas definidas en X. Dada $\alpha \in \Lambda$, existe $\beta \in \Lambda$ y una sucesión de reales positivos $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ con $M_0 = 1$ tales que

$$\rho_\alpha\left(T_1^n(x)\right) \leq M_n \rho_\beta(x)$$

y

$$\rho_\beta\left(T_2^n(x)\right) \leq M_n \rho_{\beta'}(x)$$

para $x \in X$ y $n \geq 0$.

Con base en estas últimas desigualdades y en vista de que T_1 y T_2 conmutan, tenemos

$$\begin{aligned} \rho_\alpha\left((T_1 \circ T_2)^n(x)\right) &= \rho_\alpha\left(T_1^n\left(T_2^n(x)\right)\right) \\ &\leq M_n \rho_\beta\left(T_2^n(x)\right) \leq M_n^2 \rho_{\beta'}(x). \end{aligned}$$

Similarmente tenemos

$$\rho_\alpha\left((T_1 + T_2)^n(x)\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rho_\alpha\left(T_1^{n-k} T_2^k(x)\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_{n-k} N_k \rho_{\beta'}((x)).$$

Por el Teorema 3.9.11 $T_1 \circ T_2$ y $T_1 + T_2$ son topologizables. . ∎

Ahora daremos algunos ejemplos de operadores no topologizables. Sólo comprobaremos que tal es el caso en el primer ejemplo, ya que se procedería de manera similar en los otros tres.

Ejemplos 3.9.15 *(a) Sea $X = C[0, \infty)$ con la topología compacto abierta y definamos $T : X \to X$ como $T(f) = f(t + 1)$.*

Supongamos que T es topologizable, entonces existen $M > 0$ y $k \geq 1$ tales que

$$\rho_1\left(T^n(f)\right) \leq M \rho_k(f) \tag{3.19}$$

para todo $n \geq 1$ y $f \in X$.

Tenemos que $T^n(f)(t) = f(t + n)$ para cada $n \geq 1$ y $t \in [0, \infty)$. De (3.9.7) se sigue que

$$\max_{n \leq s \leq n+1} |f(s)| \leq M \max_{0 \leq t \leq k} |f(t)|$$

para todo $n \geq 1$ y $f \in X$.

Lo última desigualdad no se satisface para $n = k$ y $f \in X$ distinta de 0, no negativa y que se anula en $[0, k]$.

Ejemplos 3.9.16 *b) Sea* $X = C(-\infty, \infty)$ *con la topología compacto abierta y sea* $T : X \to X$ *definido como* $T(f) = f(t+1)$ *o* $T(f) = f(t-1)$

c) Sea X *el espacio de todas las series de potencias*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k$$

con la topología de la convergencia puntual de los coeficientes α_n*, dada por la seminormas*

$$\rho_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$$

Definamos $T : X \to X$ *como*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} t^k$$

d) Sea X *el espacio de funciones enteras*

$$\phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k$$

con la topología compacto abierta y $T : X \to X$ *definido como*

$$T(\phi) = \phi(\zeta + 1)$$

Apéndice A

Teoremas clásicos

En este apéndice enunciamos, sin demostrarlos, algunos teoremas clásicos del Análisis funcional que se usan a lo largo de la tesis.

Teorema A.1 *(Ascoli) Sea X un espacio localmente compacto y H un subconjunto del espacio $C(X)$ de funciones escalares continuas, con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de X. H es relativamente compacto si y sólo si H es equicontinuo y $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$ es acotado en cada compacto.*

Teorema A.2 *(Teorema de Hahn - Banach) Sean X un espacio vectorial topológico, M un subespacio, $\rho; X \to \mathbb{F}$ sublineal, es decir una función positivamente homogénea y subaditiva. Si $f : M \to \mathbb{F}$ es lineal y $|f(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe una extensión lineal $g : X \to \mathbb{F}$ tal que $|g(x)| \leq \rho(x)$ y $g|_M = f$.*

Teorema A.3 *(Teorema de Alaoglu - Bourbaki) Sea X un espacio vectorial topológico. Si $H \subset X^*$ es equicontinuo entonces H es relativamente compacto en $\sigma(X^*, X)$.*

Teorema A.4 *(Teorema de Banach - Steinhaus) Sean X y Y espacios vectoriales topológicos, $\Gamma \subset L(X, Y)$ y $B \subset X$ tal que para todo $x \in B$ se tiene que $\Gamma(x) = \{T(x) : T \in \Gamma\}$ es acotado en Y. Si B es de la segunda categoria en X entonces $B = X$ y Γ es equicontinuo.*

Teorema A.5 *Sean X espacio vectorial topológico, Y un F - espacio y $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subset L(X, Y)$ y $L \subset X$ el conjunto de todas las $x \in X$ para las cuales*

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

existe. Si L es de la segunda categoría en X entonces $L = X$ y T es continua.

Teorema A.6 *Sean X un F - espacio, Y y Z espacios vectoriales topológicos y $\mathcal{B} : X \times Y \to Z$ una transformación bilineal separadamente* *continua. Entonces*

$$\mathcal{B}(x_n, y_n) \to \mathcal{B}(x_0, y_0)$$

siempre que $x_n \to x_0$ *y* $y_n \to y_0$. *Si* Y *es metrizable, entonces* $\mathcal{B}$ *es continuo.*

Teorema A.7 *(Teorema de la Función Abierta) Sean* X *un* F *- espacio,* Y *un espacio vectorial topológico y* $T \to L(X, Y)$. *Si* $T(X)$ *es de la segunda categoría en* Y *entonces* $T(X) = Y$, T *es una función abierta y* Y *es un* F *- espacio.*

Teorema A.8 *(Teorema de la Gráfica Cerrada) Sean* X *y* Y *dos* F *- espacios,* $T : X \to Y$ *lineal. Si* $G = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in X\}$ *cerrado en* $X \times Y$. *Entonces* T *es continua.*

Bibliografía

[1] H. Arizmendi Peimbert y W. Żelazko, *A* B_0 *- algebra without generalized topological divisors of zero*, Studia Math **82** (1985), 191-198.

[2] P. Carrillo Rouse, Tesis de Licenciatura: *Sucesiones básicas en F-espacios y Teorema de Hahn Banach,* 2002.

[3] H.G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity,* London Math. Soc. Monographs **24**, Oxford Univ. Press, 2000.

[4] J. Esterle, *Sur la non normabilité de certaines algèbres d'opérateurs*, C.R. Acad. Sci. Paris **278** (1974), 1037-1040.

[5] —, *Sur la métrisabilité de certaines algèbres d'opérateurs,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **24** (1979), 1157-1164.

[6] A. Fernández y V. Müller, *Renormalizations of Banach and locally convex algebras*, Studia Math **96** (1990), 237-242.

[7] J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions Volume I,* Adisson Weasly Publishing Company, 1966.

[8] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis,* Cambridge University Press, 1970.

[9] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer-Verlag New York Inc., 1998.

[10] V. Müller, *On topologizable algebras*, Studia Math. **99** (2), (1991), 149-153.

[11] L. Narici y E. Beckenstein, *Topological vector spaces*, M. Dekker, 1985.

[12] P. Pérez y J. Bonet, *Barreled Locally Convex Spaces,* Elsevier Science Publishers B.V., 1987.

[13] M. de la Rosa Penilla, Tesis de Licenciatura: *Topologías estrictas*, 2004.

[14] W. Rudin, *Functional Analysis*, Mc-Graw Hill Book Company, 1991.

[15] W. Żelazko, *Operator algebras on locally convez spaces*, Contemporary Mathematics Volume **427** (2007), 431-442.

[16] —, *Selected Topics in Topological Algebras,* Aarhus Univ. Lectures Notes No. **31**, 1971.

[17] —, *When is $L(X)$ topologizable as a topological algebra?*, Studia Math. **150,** (2002), 295-303.

[18] —, *Example of an algebra which is nontopologizable as a locally convex topological algebra*, Proc. Math. Soc. **110,** (1990), 947-949.