UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Reserva matemática del seguro de vida bajo modelos de tasas de interés estocásticas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

P R E S E N T A:

JOSÉ DE JESÚS ARIAS GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
ACTUARIO JORGE OTILIO AVENDAÑO ESTRADA
2010

Prefacio

En la teoría clásica del cálculo actuarial se considera en el desarrollo de primas y reservas de los seguros de vida, el tiempo de vida del asegurado como el único evento fortuito, generalmente considerando a la tasa de interés como un valor constante. En fechas recientes, se han empezado a desarrollar modelos suponiendo un segundo evento aleatorio; la tasa de interés. Sin embargo, esta extensión de la teoría se ha hecho exclusivamente para el cálculo de primas, por lo cual uno de los objetivos de la presente tesis es extender también estos resultados a la reserva matemática.

Por la naturaleza del tema es recomendable que el lector tenga nociones de cálculo actuarial, así como conceptos básicos de probabilidad y una breve noción de procesos estocásticos; principalmente estar familiarizado con los conceptos de esperanza, varianza, covarianza y funciones generadoras de momentos. Es importante mencionar que por la naturaleza de los cálculos se asume que las esperanzas calculadas en esta tesis existen, mientras por notación se maneja el caso discreto y el caso continuo sobre el tiempo de vida del asegurado y no sobre los modelos de las tasas de interés.

En el primer capítulo se desarrolla los resultados clásicos de la reserva**,** definiendo una función de pérdida desde el punto de vista de la compañía aseguradora y así, obtener como resultado que la reserva matemática bajo la definición prospectiva que comúnmente es la que se maneja corresponde a la esperanza de dicha función de pérdida, posteriormente se desarrolla la versión retrospectiva, también utilizada en la práctica y se demuestra su equivalencia, así como el desarrollo de la fórmula de Fackler y la ecuación diferencial de Thiele.

Posteriormente, en el segundo capítulo, se analizan las modificaciones que sufre la definición de esta función de pérdida suponiendo tasas de interés aleatorias y se generalizan las expresiones antes dadas, obteniendo resultados generales acerca de las expresiones de la reserva cuando sea posible, examinando qué resultados del modelo con tasa determinista resultan aplicables y cuáles no.

Después, en el tercer y cuarto capítulos se realiza un desarrollo de modelos particulares sobre las tasas de interés, como las simplificaciones que se pueden obtener bajo tasas con distribuciones independientes idénticamente distribuidas o modelos con series de tiempo lineales, desarrollando tanto resultados teóricos como ejemplos numéricos para poder observar las diferencias que pueden encontrarse entre los modelos presentados y el modelo con tasa de interés constante.

Para concluir, se extienden los resultados obtenidos a seguros de vidas múltiples, utilizando los status más comunes como son el de primer fallecimiento y último sobreviviente, entre otros; la extensión de la valuación de la reserva a nivel cartera; un análisis más profundo sobre la función de pérdida y la simulación computacional de ésta.

Finalmente quisiera agradecer a todas las personas que hicieron posible esta tesis, particularmente mi familia por el apoyo incondicional que me ha brindado durante todos mis estudios y al Actuario Jorge Otilio Avendaño Estrada por haberme inculcado el interés en la materia y por todo el material brindado, que, sin el no me hubiese sido posible realizar este trabajo.

Índice

Capítulo I: Construcción de la definición clásica de reserva matemática. **1**

1.1. Introducción. 1

1.2. Definición Prospectiva. 2

1.3. Definición Retrospectiva. 7

1.4. Desarrollo de la Formula de Fackler y la ecuación diferencial de Thiele. 9

1.5. Extensión a seguros dotales. 12

1.6. Ejemplos. 14

Referencias del primer capítulo. 22

Capítulo II: Resultados generales de la reserva matemática con tasas aleatorias estocásticas. **23**

2.1. Introducción a la teoría de tasas con distribuciones aleatorias . 23

2.2. Desarrollo para el tiempo de vida entero. 25

2.3. Desarrollo para el tiempo de vida continuo. 29

Referencias del segundo capítulo. 33

Capítulo III: Modelos particulares de reserva matemática. **34**

3.1 Introducción 34

3.2. Tasas aleatorias con distribuciones idénticas e independientes. 34

3.2.1. Desarrollo prospectivo. 34
3.2.2. Análisis de una posible definición retrospectiva. 36
3.2.3. Extensión de la fórmula de Fackler. 40
3.2.4. Ejemplos. 41

3.3. Reserva matemática con tasas de interés bajo modelos lineales de series de tiempo. 61

3.3.1 Conceptos básicos de series de tiempo. 61
3.3.2. Modelos AR. 64
3.3.3. Modelos MA. 71
3.3.4. Ejemplos. 80

3.4. Algunos modelos continuos con tasas modeladas por movimientos Brownianos. 84

3.4.1. Dos enfoques. 84
3.4.2. Modelos sobre la fuerza de acumulación. 84
3.4.3. Modelos sobre la tasa instantánea de interés. 87

Referencias del tercer capítulo. 93

Capítulo IV: Modelos condicionales sobre la tasa de interés 94

4.1. El motivo de los modelos condicionales. 94

4.2. Modelo AR(1) Condicionado. 95

4.3. Algunos modelos condicionales de tasas con distribuciones modeladas bajo movimientos Brownianos. 102

4.3.1 Modelos sobre la fuerza de acumulación. 102
4.3.2 Modelos sobre la tasa instantánea de interés 103

4.4. Ejemplo. 105

Referencias del cuarto capítulo. 110

Capítulo V: Extensión de los resultados 111

5.1. Extensión a vidas múltiples. 111

5.1.1 Primer fallecimiento 111
5.1.2. Ultimo sobreviviente 114
5.1.3. K-ésimo fallecimiento 121

5.2. Extensión a nivel cartera. 124

5.3. Análisis de la función de pérdida y simulación. 127

Referencias del quinto capítulo. 131

Conclusiones 132

Anexos **134**

Anexo 1: Resultados de probabilidad. 134

Anexo 2: Tablas de resultados. 137

Anexo 3: Resultados de la simulación de una póliza bajo un modelo AR (1). 144

Anexo 4: Resultados de la simulación de una cartera bajo un modelo AR (1). 146

Anexo 5: Tabla de mortalidad experiencia mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual). 149

Bibliografía **150**

1. Datos del alumno. Autor. Apellido paterno: Apellido materno : Nombre(s) Teléfono: Universidad: Facultad o escuela: Carrera: No. de cuenta:	1. Datos del alumno. Arias García José De Jesús 56734748 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Actuaría 303864127
2. Datos del tutor. Grado Apellido paterno: Apellido materno : Nombre(s)	2. Datos del tutor. Act. Avendaño Estrada Jorge Otilio
3. Datos del sinodal 1. Grado Apellido paterno: Apellido materno : Nombre(s)	3. Datos del sinodal 1. Dr. Rincón Solis Luis Antonio
4. Datos del sinodal 2. Grado Apellido paterno: Apellido materno : Nombre(s)	4. Datos del sinodal 2. M. en A.O. Aranda Martínez Oscar
5. Datos del sinodal 3. Grado Apellido paterno: Apellido materno : Nombre(s)	5. Datos del sinodal 3. Dr. Eslava Gomez Guillermina
6. Datos del sinodal 4. Grado Apellido paterno: Apellido materno : Nombre(s)	6. Datos del sinodal 4. Act. Aguilar Beltran Pedro
7. Datos del trabajo escrito. Título: No. de páginas: Año:	7. Datos del trabajo escrito. Reserva matemática del seguro de vida bajo modelos de tasas de interés estocásticas. 150p 2010

Capítulo I: Construcción de la definición clásica de Reserva Matemática

1.1 Introducción

¿Qué ideas son las que se relacionan con la palabra reserva? Guardar, aprovisionar, conservar. Se puede definir una reserva como “guardar una cosa con el fin de tenerla disponible para una ocasión determinada”, si bien esta definición es muy general, es la que ayuda a comprender el propósito de las reservas en los seguros.

La función de la prima de riesgo es cubrir el costo de siniestralidad, pero evidentemente los siniestros no ocurren en un mismo momento, sino que pueden ocurrir a lo largo de la cobertura de la póliza, por lo cual se debe constituir un monto suficiente para hacer frente a las obligaciones futuras de distintos tipos, y ésta precisamente es la naturaleza de la reserva en los seguros. Su utilidad es evitar que se ponga en riesgo la solvencia y estabilidad económica o financiera de la aseguradora al efectuar el pago de las obligaciones contraídas con sus asegurados.

Si bien existen varios tipos de reservas en los seguros como lo son la reserva de riesgos catastróficos, de siniestros pendientes de valuación, de siniestros ocurridos no reportados, reserva de riesgos en curso, reserva matemática entre otras, no todas sirven para cubrir el mismo tipo de siniestros.

En esta tesis se trabajará sobre la reserva matemática, cuya función es, precisamente, hacer frente a las obligaciones futuras de la aseguradora, teniendo en cuenta las obligaciones futuras del asegurado; sin embargo, una de las características de esta reserva, es que el valor del dinero en el tiempo tiene un efecto importante sobre ella.

En el caso de los seguros de vida de largo plazo, el costo de siniestralidad está dado por el valor presente de la probabilidad de muerte (o de supervivencia). Sin embargo, el costo de siniestralidad, comúnmente crece de manera muy rápida conforme el asegurado va envejeciendo, pues la probabilidad de fallecer se incrementa rápidamente después de un período.

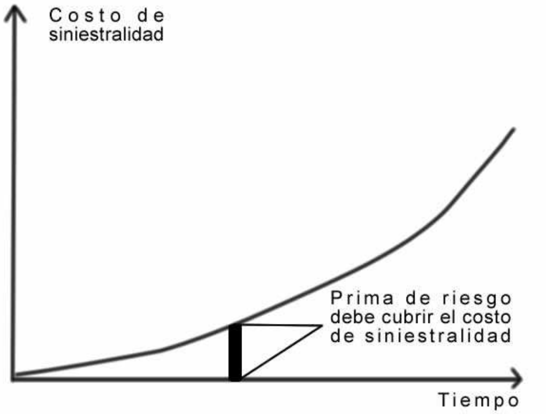


Figura 1.1 Esquema mas común de los costos de siniestralidad

Es común que bajo este esquema se trabaje con primas que cubran el principio de equivalencia (siendo el esquema de primas niveladas el más común), cuyo propósito es financiar el costo de siniestralidad de los años futuros durante los primeros años de cobertura, mediante la creación de una especie de “fondo”, bajo esta idea de financiar los costos de siniestralidad de estos últimos años, las primas en los primeros años de cobertura están compuestas por la prima de riesgo (para hacer frente al costo de siniestralidad de estos primeros años) y una prima de ahorro, la cual tiene el objetivo de financiar los costos de siniestralidad futura.

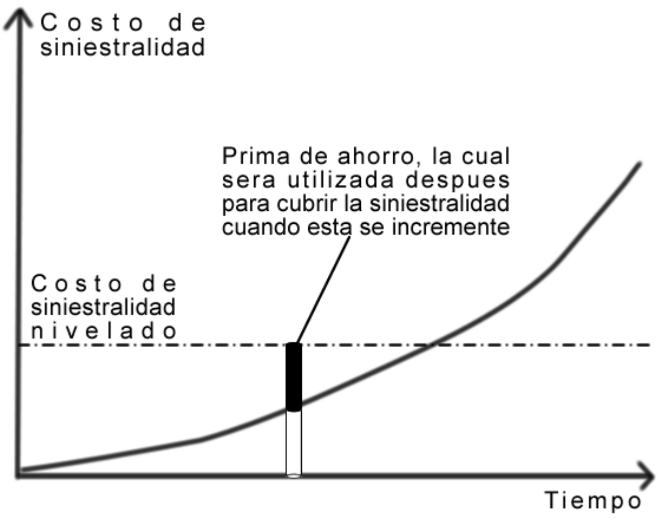


Figura 1.2 Función de la prima de ahorro

Este fondo creado es precisamente lo que se conoce como reserva matemática que con la constitución de esta, la compañía debe hacer frente a los futuros siniestros.

El objetivo del presente capítulo es desarrollar los resultados más utilizados en la práctica desde un enfoque probabilístico.

1.2 Definición Prospectiva

Consideremos un seguro discreto con las siguientes características:

- Se denotará por SA_{t-1} el beneficio pagado, en caso de fallecimiento, al final del año t, para $t=1,2,3...$
- La prima que paga al asegurado al inicio del año t será denotada por π_{t-1} para $t=1,2,3...$

Definición: La pérdida[1] ${}_hL$ para $h\in\{0,1,2..\}$ esta definida como el valor presente de los beneficios menos el valor presente de las primas al tiempo h, es decir:

$$ {}_{h}L=\begin{cases} 0 & h>K(x) \\ SA_{K(x)}v^{K(x)+1-h}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j v^{j-h} & h\leq K(x) \end{cases} \quad (1.1) $$

Donde $K(x)$ es la variable aleatoria que modela el tiempo de vida entero restante para una persona de edad (x) con función de densidad dada por:

$$ P\left[K(x)=k\right]={}_{k}p_x q_{x+k} $$

Recordando que ${}_{k}p_x$ denota la probabilidad que una persona de edad (x) llegue con vida a edad $(x+k)$,es decir $P\left[K(x)\geq k\right]={}_{k}p_x$, y q_x representa que la persona de edad (x) no llegue con vida a edad $(x+1)$, es decir $P\left[K(x)=0\right]=q_x$.

Ahora $v=(1+i)^{-1}$ representa el factor de descuento, siendo i la tasa de interés efectiva anual.

Esta definición es una modificación de la expresión dada en (8.2.1) por Bowers, modificando la notación en cuanto los beneficios; la correspondencia está dada por:

$$ b_{K(x)+1}=SA_{K(x)} $$

La razón de definir esta función así es la siguiente: si el tiempo de evaluación de la pérdida (dado por h) es después de la muerte del asegurado ($K(x)$), entonces la compañía ya cumplió las obligaciones con el asegurado, ahora si la valuación se realiza antes de la muerte del asegurado, se tiene que se pierde el valor presente de la suma asegurada al momento de la muerte, recuperando el valor presente de las primas que se cobren antes de la muerte del asegurado; incluso esta definición funciona bien para el caso de los seguros temporales, donde se considera una temporalidad n pues para estos casos se tiene que:

$$ SA_k=0 \quad \pi_k=0 \quad k\geq n $$

Es decir tanto el beneficio como las primas son cero después de que termina la cobertura del seguro; una modificación similar se puede hacer para el caso de seguros diferidos.

Definición: Dado un seguro con las características anteriores, la reserva matemática [2] al tiempo h, denotada por ${}_{h}V$, se define como la esperanza condicional de ${}_{h}L$, dado que $K(x)\geq h$, es decir:

$$ {}_{h}V=E\left[{}_{h}L|K(x)\geq h\right] \quad (1.2) $$

Proposición: La reserva matemática, bajo la hipótesis de que la distribución condicional de $K(x)-h$ dado que $K(x)\geq h$ es la misma distribución de $K(x+h)$, se puede escribir como la diferencia entre el valor presente actuarial de las obligaciones de la compañía aseguradora, y el valor presente actuarial de las obligaciones del asegurado [3].

Dem.

$$_hV=E[\,_hL|K(x)\geq h]=E\left[SA_{K(x)}v^{K(x)+1-h}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j v^{j-h}|K(x)\geq h\right]$$

$$=E\left[SA_{K(x)-h+h}v^{K(x)-h+1}-\sum_{j=0}^{K(x)-h}\pi_{j+h}v^j|K(x)\geq h\right]$$

Aplicando la hipótesis sobre la distribución de $K(x)–h$ dado $K(x)\geq h$ se obtiene:

$$E\left[SA_{K(x+h)}v^{K(x+h)+1}-\sum_{j=0}^{K(x+h)}\pi_{h+j}v^j\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left[SA_{h+j}v^{j+1}-\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}v^k\right]{}_jp_{x+h}q_{x+h+j}$$

Cambiando el orden de las sumas en el segundo sumando tenemos:

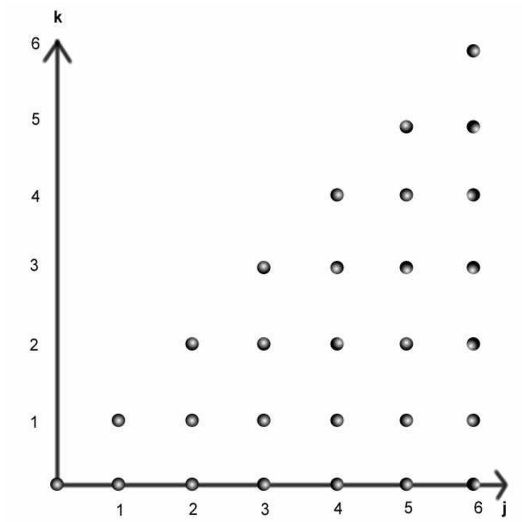


Figura 1.3 Esquema de puntos para el cambio de orden de la suma

Haciendo notar que para k fijo j toma valores en $\{k, k+1, k+2, ...\}$, mientras que k tiene soporte en $\{0,1,2,...\}$ por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \pi_{h+k} v^{k} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{h+k} v^{k} \sum_{j=k}^{\infty} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j}$$

Ahora observando lo siguiente para k fija se tiene que:

$$\sum_{j=k}^{\infty} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} = {}_k p_{x+h} q_{x+h+k} + {}_{k+1} p_{x+h} q_{x+h+k+1} + {}_{k+2} p_{x+h} q_{x+h+k+2} + ...$$

$$= P\left[K(x+h)=k\right] + P\left[K(x+h)=k+1\right] + P\left[K(x+h)=k+2\right] + ...$$

$$= P\left[K(x+h) \geq k\right] = {}_k p_{x+h}$$

Por lo tanto regresando al desarrollo de la expresión de la esperanza se obtiene:

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{h+k} v^{k} {}_k p_{x+h}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} v^{j+1} {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{h+k} v^{k} {}_k p_{x+h} \qquad (1.3)$$

Q.E.D.

Para el caso continuo consideramos un seguro con las siguientes características:

- Un beneficio, que se paga al momento de la muerte, denotado por SA_t para $t \geq 0$.
- Una prima que paga el asegurado, denotada por π_t para $t \geq 0$.

Definición: La pérdida [4] ${}_t L$ para $t \geq 0$ está definida como el valor presente de los beneficios menos el valor presente de las primas al tiempo t, es decir:

$$
{}_tL=\begin{cases} 0 & T(x)\le t \\ SA_{(T(x))}\exp\{-(T(x)-t)\delta\}-\int_t^{T(x)}\pi_s\exp\{-(s-t)\delta\}\,ds & T(x)>t \end{cases} \tag{1.4}
$$

Donde $T(x)$ es la variable aleatoria que modela el tiempo de vida continuo restante para una persona de edad (x) con función de densidad dada por:

$$
f_{T(x)}(t)={}_tp_x\mu_x(t)
$$

Siendo $S_{T(x)}(t)=P\left[T(x)>t\right]={}_tp_x$ y $\mu_x(t)$ es la tasa instantánea de mortalidad definida como $\mu_x(t)=-\frac{d}{dt}\ln\left({}_tp_x\right)$; mientras que δ representa la tasa de interés continúa.

Definición: Dado un seguro con las características anteriores, la reserva matemática[5] al tiempo $t\ge 0$, denotada por ${}_tV$, se define como la esperanza condicional de ${}_tL$, dado que $T(x)\ge t$, es decir:

$$
{}_tV=E\left[{}_tL|T(x)\ge t\right] \tag{1.5}
$$

Proposición: La reserva matemática, bajo la hipótesis de que la distribución condicional de $T(x)-t$ dado que $T(x)\ge t$ es la misma distribución de $T(x+t)$, puede ser escrita como la diferencia entre el valor presente actuarial de las obligaciones de la compañía aseguradora, y el valor presente actuarial de las obligaciones del asegurado[6].

Dem.

$$
{}_tV=E\left[{}_tL|T(x)>t\right]=E\left[SA_{(T(x))}\exp\left\{-\left(T(x)-t\right)\delta\right\}-\int_t^{T(x)}\pi_s\exp\left\{-\left(s-t\right)\delta\right\}ds|T(x)>t\right]
$$

$$
=E\left[SA_{(T(x)}-t+t)\exp\left\{-\left(T(x)-t\right)\delta\right\}-\int_0^{T(x)-t}\pi_{u+t}\exp\left\{-u\delta\right\}du|T(x)>t\right]
$$

$$
=E\left[SA_{(T(x+t)+t)}\exp\left\{-T(x+t)\delta\right\}-\int_0^{T(x+t)}\pi_{u+t}\exp\left\{-u\delta\right\}du\right]
$$

$$
=\int_0^{\infty}\left(SA_{r+t}\exp\left\{-r\delta\right\}-\left[\int_0^r\pi_{u+t}\exp\left\{-u\delta\right\}du\right]\right){}_rp_{x+t}\mu_{x+t}(r)dr
$$

Cambiando el orden de las integrales para el segundo sumando se tiene:

$$\int_0^\infty SA_{r+t}\exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)dr-\int_0^\infty\int_u^\infty \pi_{u+t}\exp\{-u\delta\}\, {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)drdu$$

$$=\int_0^\infty SA_{r+t}\exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)dr-\int_0^\infty \pi_{u+t}\exp\{-u\delta\}\int_u^\infty {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)drdu$$

Ahora para u fija se obtiene:

$$\int_u^\infty {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)dr=\int_u^\infty f_{T(x+t)}(r)\,dr$$

$$=P[T(x+t)\geq u]={}_u p_{x+t}$$

$$\int_0^\infty SA_{r+t}\exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)dr-\int_0^\infty \pi_{u+t}\exp\{-u\delta\}\, {}_u p_{x+t}du$$

$$=\int_0^\infty SA_{r+t}e^{-r\delta}\, {}_r p_{x+t}\mu_{x+t}(r)dr-\int_0^\infty \pi_{r+t}e^{-r\delta}\, {}_r p_{x+t}dr \qquad (1.6)$$

Q.E.D.

1.3 Definición Retrospectiva

A través de la definición retrospectiva, se establece la reserva como el valor futuro actuarial al tiempo h de la diferencia entre las primas que ya han sido pagadas por el asegurado y el riesgo ya cubierto por la aseguradora.

La fórmula para la reserva al tiempo h según esta definición [7] es la siguiente:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\left(\frac{\pi_j-vq_{x+j}SA_j}{{}_{h-j}p_{x+j}}\right)(1+i)^{h-j} \qquad (1.7)$$

Proposición: Bajo el principio de equivalencia, el cual establece que al momento de la emisión de la póliza la esperanza de las obligaciones futuras de la compañía debe ser igual a la esperanza de las obligaciones futuras del asegurado, la definición prospectiva y definición retrospectiva son equivalentes.

Dem.

Por el principio de equivalencia se tiene la siguiente igualdad:

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_j v^{j+1}\, {}_j p_x q_{x+j}=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j v^j\, {}_j p_x$$

Reagrupando los primeros h términos se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j v^j\ {}_jp_x-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j v^{j+1}\ {}_jp_x q_{x+j}=\sum_{j=h}^{\infty}SA_j v^{j+1}\ {}_jp_x q_{x+j}-\sum_{j=h}^{\infty}\pi_j v^j\ {}_jp_x$$

Multiplicando esta última expresión por $\left(v^h\ {}_hp_x\right)^{-1}$ se obtiene:

$$\sum_{j=0}^{h-1}SA_j v^{j-h}\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}-\sum_{j=0}^{h-1}SA_{j+1}v^{j+1-h}\frac{{}_jp_x q_{x+j}}{{}_hp_x}=\sum_{j=h}^{\infty}SA_j v^{j+1-h}\frac{{}_jp_x q_{x+j}}{{}_hp_x}-\sum_{j=h}^{\infty}\pi_j v^{j-h}\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x} \qquad (1.8)$$

Ahora el cociente dado por $\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}$, suponiendo $j>h$, es igual a ${}_{j-h}p_{x+h}$, pues:

$$\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}=\frac{P\left[K(x)\geq j\right]}{P\left[K(x)\geq h\right]}=P\left[K(x)\geq j|K(x)\geq h\right]=P\left[K(x+h)\geq j-h\right]{}_{j-h}p_{x+h}$$

El caso $h\geq j$ es análogo, por lo tanto la expresión (1.8) se reduce a:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j v^{j-h}\frac{1}{{}_{h-j}p_{x+j}}-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j v^{j+1-h}\frac{q_{x+j}}{{}_{h-j}p_{x+j}}=\sum_{j=h}^{\infty}SA_j v^{j-h+1}\ {}_{j-h}p_{x+h}q_{x+j}-\sum_{j=h}^{\infty}\pi_j v^{j-h}\ {}_{j-h}p_{x+h}$$

Recorriendo los índices en la segunda parte de la igualdad se obtiene:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\frac{\pi_j-vSA_jq_{x+j}}{{}_{h-j}p_{x+j}}(1+i)^{h-j}=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{j+h}v^{j+1}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{j+h}v^j\ {}_jp_{x+h}$$

Observando que de el lado izquierdo se tiene la expresión (1.7) y del lado derecho la expresión (1.3) se concluye el resultado.

Q.E.D.

Para el caso continuo la fórmula retrospectiva [8] esta dada por:

$$\int_0^t\left(\frac{\pi_s-\mu_x(s)SA_s}{{}_{t-s}p_{x+s}}\right)e^{(t-s)\delta}ds \qquad (1.9)$$

Para el caso del tiempo de vida con distribución continua, si al momento de emisión de la póliza se cumple el principio de equivalencia, las fórmulas prospectiva y retrospectiva son equivalentes.

Dem.

Por el principio de equivalencia se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty SA_s \exp\{-s\delta\}\, {}_j p_x \mu_x(s) ds = \int_0^\infty \pi_s \exp\{-s\delta\}\, {}_j p_x ds$$

Separando las integrales y reagrupando:

$$\int_0^t \pi_s \exp\{-s\delta\}\, {}_s p_x ds - \int_0^t SA_s \exp\{-s\delta\}\, {}_s p_x \mu_x(s+t) ds = \int_t^\infty SA_s \exp\{-s\delta\}\, {}_s p_x \mu_x(s+t) ds - \int_t^\infty \pi_s \exp\{-s\delta\}\, {}_s p_x ds$$

Multiplicando esta última expresión por $\left(\exp\{-\delta t\}\, {}_t p_x\right)^{-1}$ se obtiene:

$$\int_0^t \pi_s \exp\{-(s-t)\delta\} \frac{{}_s p_x}{{}_t p_x} ds - \int_0^t SA_s \exp\{-(s-t)\delta\} \frac{{}_s p_x \mu_x(s)}{{}_t p_x} ds =$$
$$\int_t^\infty SA_s \exp\{-(s-t)\delta\} \frac{{}_s p_x \mu_x(s)}{{}_t p_x} ds - \int_t^\infty \pi_s \exp\{-(s-t)\delta\} \frac{{}_s p_x}{{}_t p_x} ds$$

$$\int_0^t \pi_s \exp\{-(s-t)\delta\} \frac{ds}{{}_{t-s} p_{x+s}} \int_0^t SA_s \exp\{-(s-t)\delta\} \frac{\mu_x(s) ds}{{}_{t-s} p_{x+s}} =$$
$$\int_t^\infty SA_s \exp\{-(s-t)\delta\}\, {}_{s-t} p_{x+t} \mu_x(s) ds - \int_t^\infty \pi_s \exp\{-(s-t)\delta\}\, {}_{s-t} p_{x+t} ds$$

Realizando el cambio de variable $r = s - t$ en la segunda parte de la igualdad:

$$\int_0^t \frac{\pi_s - SA_s \mu_x(s)}{{}_{t-s} p_{x+s}} \exp\{(t-s)\delta\} ds = \int_0^\infty SA_{t+r} \exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+r} \mu_x(t+r) dr - \int_0^\infty \pi_{t+r} \exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+t} dr$$

Observando que de el lado izquierdo se tiene la expresión (1.9) y del lado derecho la expresión (1.6) se concluye el resultado.

Q.E.D.

1.4 Desarrollo de la Fórmula de Fackler y la ecuación diferencial de Thiele

Otra manera de definir a la reserva es a través de la pérdida de dinero que puede presentar la compañía por la muerte del asegurado, para esto se define a C_h [9] como la variable aleatoria que representa la pérdida de la compañía durante el período $[h, h+1)$, es claro que el valor que toma esta variable aleatoria depende del año de muerte del asegurado del siguiente modo:

$$C_h=\begin{cases} 0 & h<K(x) \\ vSA_h-\pi_h & h=K(x) \\ -\pi_h & h>K(x) \end{cases} \quad (1.10)$$

Pues si la muerte ya ocurrió no se paga ni se recibe prima por parte del asegurado, si la muerte no ocurre en el año h se recibe la prima y si la muerte ocurre en el año h la compañía pierde el valor presente del beneficio al tiempo $h+1$ pero recibe la prima del año h.

Proposición: ${}_hL$ es el valor presente de las futuras pérdidas C_j, es decir [10]:

$${}_hL=\sum_{j=h}^{\infty} C_j v^{j-h}$$

Dem.

Si $h>K(x)$ se tiene que ${}_hL=0$ y por lo tanto si $k\geq h$ entonces $C_k=0$ de donde se obtiene la igualdad.

Si $h\leq K(x)$ entonces:

$$\sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h}C_j=\sum_{j=h}^{K(x)-1} v^{j-h}C_j+v^{K(x)-h}C_{K(x)}+\sum_{j=K(x)+1}^{\infty} v^{j-h}C_j$$

$$=v^{K(x)-h}\left[vSA_{K(x)}-\pi_{(K(x))}\right]+\sum_{j=h}^{K(x)-1} v^{j-h}\pi_j$$

$$=v^{K(x)-h+1}SA_{K(x)}-\sum_{j=h}^{K(x)} v^{j-h}\pi_j={}_hL$$

Q.E.D.

Ahora por esta última proposición es claro que:

$${}_hV=E\left[{}_hL|K(x)\geq h\right]=E\left[\sum_{j=h}^{\infty} v^{j-h}C_j|K(x)\geq h\right]$$

$$=E\left[C_h|K(x)\geq h\right]+E\left[\sum_{j=h+1}^{\infty} v^{j-h}C_j|K(x)\geq h\right]$$

Desarrollando el primer sumando se tiene:

$$E\left[C_h|K(x)\geq h\right]=\left(vSA_h-\pi_h\right)q_{x+h}+\left(-\pi_h\right)p_{x+h}$$

$$=vSA_h q_{x+h} - \pi_h \qquad (1.11)$$

Ahora desarrollando el segundo sumando, y tomando en cuenta que ${}_{h+1}L$ es cero si $K(x)=h$ se tiene que:

$$E\left[\sum_{j=h+1}^{\infty} v^{j-h} C_j | K(x) \geq h\right] = E\left[v \sum_{j=h+1}^{\infty} v^{j-(h+1)} C_j | K(x) \geq h\right]$$

$$= E\left[v\, {}_{h+1}L | K(x) \geq h\right] = vE\left[{}_{h+1}L | K(x) \geq h+1\right] p_{x+h} = v\, {}_{h+1}V \qquad (1.12)$$

De (1.11) y (1.12) se obtiene:

$${}_hV = vSA_h q_{x+h} - \pi_h + v\, {}_{h+1}V p_{x+h}$$

Despejando ${}_{h+1}V$ de esta última expresión se obtiene:

$${}_{h+1}V = \frac{\left({}_hV + \pi_h\right)(1+i) - SA_h q_{x+h}}{p_{x+h}} \qquad (1.13)$$

Esta última expresión es conocida como la fórmula recursiva de Fackler [11].

Ahora bien la extensión de la fórmula de Fackler para el caso continuo es una ecuación diferencial, partiendo de la fórmula prospectiva:

$${}_t\bar{V} = \int_0^{\infty} SA_{t+r} \exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+t} \mu_{x+t}(r) dr - \int_0^{\infty} \pi_{t+r} \exp\{-r\delta\}\, {}_r p_{x+t} dr$$

Realizando el cambio de variable $s=t+r$ se tiene que:

$${}_t\bar{V} = \int_t^{\infty} SA_s \exp\{-(s-t)\delta\}\, {}_{s-t} p_{x+t} \mu_x(s) ds - \int_t^{\infty} \pi_s \operatorname{xp}\{-(s-t)\delta\}\, {}_{s-t} p_{x+t} ds$$

Multiplicando y dividendo esta expresión por ${}_t p_x \exp\{-\delta t\}$ t, se obtiene:

$${}_t\bar{V} = \frac{\int_t^{\infty} SA_s \exp\{-(s-t)\delta\}\, {}_s p_x \mu_x(s) ds - \int_t^{\infty} \pi_s \exp\{-(s-t)\delta\}\, {}_s p_x ds}{{}_t p_x \exp\{-\delta t\}}$$

Finalmente recordando que: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ y calculando la derivada de la reserva se obtiene:

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt}=\frac{1}{{}_t p_x \exp\{-\delta t\}}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\infty} SA_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x\mu_x(s)ds-\int_t^{\infty}\pi_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x ds\right)$$
$$-\frac{1}{\left({}_t p_x \exp\{-\delta t\}\right)^2}\left[\int_t^{\infty} SA_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x\mu_x(s)ds-\int_t^{\infty}\pi_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x ds\right]\frac{d}{dt}\left({}_t p_x \exp\{-\delta t\}\right)$$

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt}=\frac{-1}{{}_t p_x \exp\{-\delta t\}}\left(SA_t \exp\{-\delta t\}\,{}_t p_x\mu_x(t)-\pi_t \exp\{-\delta t\}_t\, p_x\right)$$
$$+\frac{\left({}_t p_x\mu_x(t)\exp\{-\delta t\}+{}_t p_x \exp\{-\delta t\}\delta\right)}{\left({}_t p_x \exp\{-\delta t\}\right)^2}\left[\int_t^{\infty} SA_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x\mu_x(s)ds-\int_t^{\infty}\pi_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x ds\right]$$

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt}=\left(-SA_t\mu_x(t)+\pi_t\right)+\frac{\left(\mu_x(t)+\delta\right)}{\left({}_t p_x \exp\{-\delta t\}\right)}\left[\int_t^{\infty} SA_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x\mu_x(s)ds-\int_t^{\infty}\pi_s \exp\{-\delta s\}_s\, p_x ds\right]$$

Para el segundo sumando se tiene la expresión de ${}_tV$ por lo tanto tenemos que se cumple que:

$$\frac{d_t\bar{V}}{dt}=\left(\pi_t-SA_t\mu_x(t)\right)+\left(\mu_x(t)+\delta\right){}_t\bar{V} \qquad (1.14)$$

Esta última expresión es conocida como la ecuación diferencial de Thiele [12].

1.5 Extensión a seguros dotales

Ahora, para el caso de seguros dotales se considerarán las mismas características ya antes trabajadas con respecto a las sumas aseguradas y primas para ambos: casos el tiempo de vida discreto y el tiempo de vida continuo; más las características propias de los seguros dotales relacionadas con el beneficio de sobrevivencia, los cuales tendrán la siguiente notación :

- Se denotará por n al tiempo en el cual se pagará el beneficio se sobrevivencia.
- El monto del beneficio de sobrevivencia se denotará por B.

Para el caso discreto la función de pérdida esta dada por:

$${}_hL=\begin{cases} 0 & h>K(x)\cup h>n \\ SA_{K(x)}v^{K(x)+1-h}-\sum_{j=h}^{\min\{K(x),n-1\}}\pi_j v^{j-h}+Bv^{n-h}I_{[K(x)\geq n]} & h\leq K(x)\leq n \end{cases} \qquad (1.15)$$

Y para el caso continuo:

$$
{}_tL=\begin{cases} 0 & t>K(x)\bigcup t>n \\ SA_{T(x)}\exp\left\{-\delta\left(T(x)-t\right)\right\}-\int_t^{\min\{T(x),n\}}\pi_s\exp\left\{-\delta\left(s-t\right)\right\}ds+ & t\le K(x)\le n \\ B\exp\left\{-\delta\left(n-t\right)\right\}I_{[T(x)\ge n]} & \end{cases} \qquad (1.16)
$$

En donde I denota la función indicadora en caso de que el asegurado este con vida en el momento especificado.

De hecho esta función indicadora es la única adición a la función de pérdida dada en las expresiones (1.2) y (1.4) respectivamente; la función indicadora tiene por objetivo traer el beneficio de sobrevivencia a valor presente, cabe mencionar que en estos casos se tiene que:

$$
SA_j=0 \quad \forall j\ge n
$$

Esto es para garantizar que el asegurado no reciba una suma asegurada por muerte si ya se le pago el beneficio de supervivencia.

De hecho la demostración de que la reserva puede ser escrita como la diferencia entre el valor presente de las obligaciones de la compañía aseguradora, menos el valor presente de la compañía, pues al ser la esperanza un operador lineal, se obtiene la expresión (1.3):

$$
E\left[SA_{K(x)}v^{K(x)+1-h}-\sum_{j=h}^{\min\{K(x),n-1\}}\pi_jv^{j-h}|K(x)>h\right]
$$

$$
=\sum_{j=0}^{n-h-1}SA_{j+h}v^{j+1}\,{}_jp_{x+h}q_{x+h+j}-\sum_{j=0}^{n-h-1}\pi_{j+h}v^j\,{}_jp_{x+h}
$$

Ahora por otro lado:

$$
E\left[Bv^{n-h}I_{[K(z)\ge n]}|K(x)\ge h\right]
$$

$$
=E\left[Bv^{n-h}I_{[K(z)\ge n-h+h]}|K(x)\ge h\right]
$$

$$
=E\left[Bv^{n-h}I_{[K(z)-h\ge n-h]}|K(x)\ge h\right]
$$

Aplicando la hipótesis sobre la $K(x)-h$ dado $K(x)\ge h$, se obtiene:

$$
E\left[Bv^{n-h}I_{[K(x+h)\ge n-h]}\right]
$$

$$
=Bv^{n-h}E\left[I_{[K(x+h)\ge n-h]}\right]
$$

$$=Bv^{n-h}\ {}_{n-h}p_{x+h} \qquad (1.17)$$

Juntando ambos resultados se tiene que:

$$E\left[{}_hL|K(x)\geq h\right]=\sum_{j=0}^{n-h-1}SA_{j+h}v^{j+1}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}-\sum_{j=0}^{n-h-1}\pi_{j+h}v^{j}\ {}_jp_{x+h}+Bv^{n-h}\ {}_{n-h}p_{x+h}$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{n-h-1}SA_{j+h}v^{j+1}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}+Bv^{n-h}\ {}_{n-h}p_{x+h}\right)-\sum_{j=0}^{n-h-1}\pi_{j+h}v^{j}\ {}_jp_{x+h}+Bv^{n-h}\ {}_{n-h}p_{x+h} \qquad (1.18)$$

Q.E.D.

La demostración para el caso continuo es análoga.

Observando que en este caso, se tiene el valor presente actuarial de las obligaciones por parte de la compañía aseguradora en los seguros dotales están dadas por la suma del beneficio por muerte más el beneficio por sobrevivencia, se tiene la extensión a la proposición en este caso demostrada.

Finalmente para la extensión a la fórmula retrospectiva y la fórmula de Fackler, ambas, bajo la suposición del principio de equivalencia, no se ven modificadas pues estas se fijan en los pagos pasados, y la única modificación que hay en el seguro dotal es el pago que se realiza al final del período.

1.6 Ejemplos

Ejemplo 1

Suponiendo que se contrata un seguro temporal 5 para una persona de 30 años de edad, con una suma asegurada de $1,000,000 y una tasa de interés técnico del 5% bajo un esquema de pago nivelado de primas, utilizando la tabla de mortalidad Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual). Se calculará de manera prospectiva y retrospectiva la reserva al final del tercer año, y por medio de la fórmula de Fackler se calculará las reservas para los 5 años.

	q_x	p_x
30	0.001508	0.998492
31	0.001624	0.998376
32	0.001749	0.998251
33	0.001884	0.998116
34	0.002029	0.997971
35	0.002186	0.997814

Por lo tanto se tiene los siguientes valores:

t	${}_t p_x$	q_{x+t}	${}_{t/}q_x$	v^t	${}_{t/}q_x v^{t+1}$	${}_t p_x v^t$
0	1.000000	0.001508	0.001508	1.000000	0.001436	1.000000
1	0.998492	0.001624	0.001622	0.952381	0.001471	0.950945
2	0.996870	0.001749	0.001744	0.907029	0.001506	0.904191
3	0.995127	0.001884	0.001875	0.863838	0.001542	0.859628
4	0.993252	0.002029	0.002015	0.822702	0.001579	0.817151

De donde se puede ver que:

$$SA{*}A_{30:\overline{5}|}=SA{*}\sum_{j=0}^{4} v^{t+1}\,{}_t p_{30} q_{30+t}=7,534.57$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{5}|}=\sum_{j=0}^{4} v^t\,{}_t p_{30}=4.53$$

$$\pi=SA{*}\frac{A_{30:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{5}|}}=1,662.56$$

<u>Cálculo Prospectivo</u>

Ajustando la fórmula prospectiva, antes obtenida, para este caso se tiene:

$$\sum_{j=0}^{1} SA\,{}_j p_{30+3} q_{30+3+j}-\sum_{j=0}^{1}\pi v^j\,{}_j p_{30+3}$$

t	${}_t p_{33}$	q_{33+t}	${}_{t/}q_{33}$	v^t	${}_{t/}q_{33} v^{t+1}$	${}_t p_{33} v^t$
0	1.000000	0.001884	0.001884	1.000000	0.001794	1.000000
1	0.998116	0.002029	0.002025	0.952381	0.001837	0.950587

De donde:

$$\sum_{j=0}^{1} SA\,{}_j v^{j+1} p_{30+3} q_{30+3+j}=3,631.18$$

$$\sum_{j=0}^{1}\pi v^j\,{}_j p_{30+3}=3,242.96$$

Y por lo tanto la reserva al final del tercer año es:

$${}_3V_{30}=388.22$$

<u>Cálculo Retrospectivo</u>

En este caso se tiene que la fórmula esta dada por:

$$\sum_{j=0}^{2}\left(\frac{\pi - v q_{30+j} SA}{{}_{3-j}p_{30+j}}\right)(1.05)^{3-j}$$

Realizando los cálculos respectivos:

j	$(1+i)^{3-j}$	q_{30+j}	${}_{3-j}p_{30+j}$	$\left(\frac{\pi - v q_{30+j} SA}{{}_{3-j}p_{30+j}}\right)(1.05)^{3-j}$
0	1.157625	0.001508	0.995127	263.332719
1	1.102500	0.001624	0.996630	128.202996
2	1.050000	0.001749	0.998251	-3.319204
			${}_3V_{30} =$	388.21

Fórmula de Fackler

La expresión (1.10) en este caso es:

$${}_{h+1}V = \frac{\left({}_hV + \pi\right)(1+i) - SA q_{30+h}}{p_{30+h}}$$

h	${}_hV_{30}$	q_{30+h}	p_{30+h}	$({}_hV_{30}+\pi)(1+i)$	$SA{*}q_{30+h}$
0	0	0.0015	0.9985	1,745.68	1,508
1	238.04	0.0016	0.9984	1,995.63	1,624
2	372.24	0.0017	0.9983	2,136.53	1,749
3	388.22	0.0019	0.9981	2,153.31	1,884
4	269.82	0.0020	0.9980	2,029	2,029
5	0				

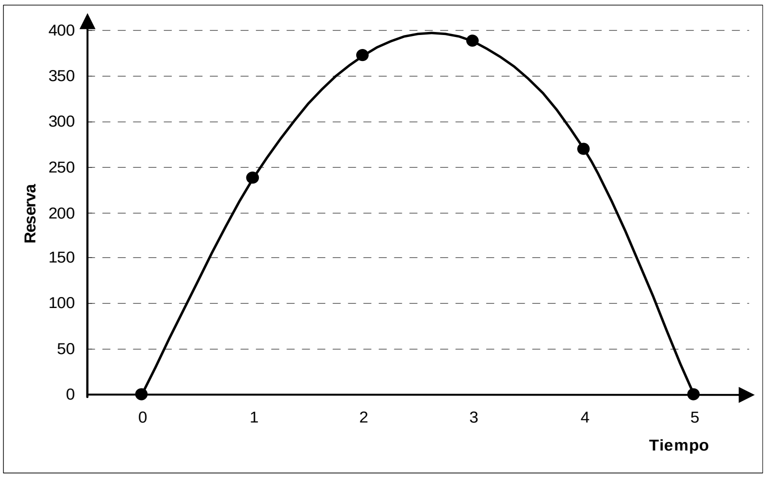


Figura 1.4 Reservas en función del tiempo para el ejemplo 1

Ejemplo 2

Para este ejemplo se calculará la reserva para un tiempo s, cuando el tiempo de vida tiene una distribución exponencial, suponiendo una tasa de interés continuo δ y pago nivelado de primas.

En el caso de la distribución exponencial se tiene que ${}_t p_x = e^{-\lambda t}$ y $\mu_x(t)=\lambda$

$$\int_0^\infty SAe^{-\delta t}\lambda e^{-\lambda t}dt = SA\lambda\int_0^\infty \frac{\lambda+\delta}{\lambda+\delta}e^{-(\delta+\lambda)t}dt = SA\frac{\lambda}{\lambda+\delta}$$

$$\int_0^\infty \pi e^{-\delta t}e^{-\lambda t}dt = \pi\int_0^\infty \frac{\lambda+\delta}{\lambda+\delta}e^{-(\delta+\lambda)t}dt = \frac{\pi}{\lambda+\delta}$$

Por lo tanto, por el principio de equivalencia se tiene que $\pi = \lambda * SA$

<u>*Cálculo Prospectivo*</u>

Para $t>0$ por la suposición que se había hecho de que la distribución de $T(x)-t$ dado $T(x)\geq t$ es la misma distribución de $T(x+t)$ se tiene que:

$${}_r p_{x+t} = P(T(x+t)>r) = P(T(x)-t>r|T(x)>t) = P(T(x)>r)$$

Esto es por la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial.

$${}_tV_x = \int_0^\infty SAe^{-r\delta}\,{}_r p_{x+t}\mu_x(t+r)dr - \int_0^\infty \pi e^{-r\delta}\,{}_r p_{x+t}dr$$

$$\int_0^\infty SAe^{-r\delta}e^{-\lambda r}\lambda dr - \int_0^\infty \pi e^{-r\delta}e^{-\lambda r}dr = 0$$

<u>*Cálculo Retrospectivo*</u>

Para ver la equivalencia hay que ver que $\int_0^t \left(\frac{\pi_s - \mu_x(s)SA_s}{{}_{t-s}p_{x+s}}\right)e^{(t-s)\delta}ds$ es igual a cero

Sustituyendo se tiene que:

$$\int_0^t \left(\frac{\pi_s - \mu_x(s)SA_s}{{}_{t-s}p_{x+s}}\right)e^{(t-s)\delta}ds$$

$$=\int_0^t \left(\frac{\pi - \lambda SA}{e^{-\lambda(t-s)}}\right) e^{(t-s)\delta} ds$$

$$=\int_0^t \left(\frac{\lambda SA - \lambda SA}{e^{-\lambda(t-s)}}\right) e^{(t-s)\delta} ds$$

$$=0$$

Ecuación diferencial de Thiele

Finalmente se comprobará que la reserva cumple la ecuación diferencial de Thiele.

Partiendo de la ecuación de Thiele dada en (1.14) y sustituyendo los valores correspondientes a este caso se obtiene:

$$0=\frac{d_t\overline{V}}{dt}=(\pi - SA\lambda)+(\lambda+\delta)*0=0$$

Ahora bien si se modifica la cobertura del seguro, es decir en lugar de ser vitalicio será temporal con cobertura de un período de longitud n. En este caso:

$$\int_0^n SAe^{-\delta t}\lambda e^{-\lambda t}dt = SA\lambda\int_0^n \frac{\lambda+\delta}{\lambda+\delta}e^{-(\delta+\lambda)t}dt = SA\frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[1-e^{-(\delta+\lambda)n}\right]$$

$$\int_0^n \pi e^{-\delta t}e^{-\lambda t}dt = \pi\int_0^n \frac{\lambda+\delta}{\lambda+\delta}e^{-(\delta+\lambda)t}dt = \frac{\pi}{\lambda+\delta}\left[1-e^{-(\delta+\lambda)n}\right]$$

Cabe resaltar que de nuevo por el principio de equivalencia se obtiene que $\pi = \lambda * SA$. Ahora si se vuelve a calcular la reserva bajo el método prospectivo se obtiene para $t\in[0,n]$

$$_tV_x = \int_0^{n-t} SAe^{-r\delta}\ _r p_{x+t}\mu_x(t+r)dr - \int_0^{n-t} \pi e^{-r\delta}\ _r p_{x+t}dr$$

$$\int_0^{n-t} SAe^{-r\delta}e^{-\lambda r}\lambda dr - \int_0^{n-t} \pi e^{-r\delta}e^{-\lambda r}dr = 0$$

Es decir incluso en el caso temporal se obtiene que la reserva en cualquier momento del tiempo es cero.

Ejemplo 3

Supongamos que se contrata un dotal 10 para una persona de 40 años de edad, con un beneficio de $1,000,000 en caso de muerte y un beneficio de $50,000 en caso de sobrevivencia y una tasa de interés técnico del 5% suponiendo pago nivelado de primas. Se calculará de manera prospectiva y retrospectiva la reserva al final del quinto año, y por medio de la fórmula de Fackler se calculará las reservas para los 10 años. El objetivo de este ejemplo es visualizar comó se extiende la teoría antes desarrollada para este tipo de seguros.

En este caso se tiene que:

t	q_{40+t}	p_{40+t}	${}_t p_{40}$	v^t	v^{t+1}
0	0.003166	0.996834	1.000000	1.000000	0.956938
1	0.003410	0.996590	0.996834	0.956938	0.915730
2	0.003672	0.996328	0.993435	0.915730	0.876297
3	0.003954	0.996046	0.989787	0.876297	0.838561
4	0.004258	0.995742	0.985873	0.838561	0.802451
5	0.004585	0.995415	0.981675	0.802451	0.767896
6	0.004938	0.995062	0.977174	0.767896	0.734828
7	0.005317	0.994683	0.972349	0.734828	0.703185
8	0.005725	0.994275	0.967179	0.703185	0.672904
9	0.006164	0.993836	0.961642	0.672904	0.643928
10	0.006637	0.993363	0.955715	0.643928	0.616199

La prima única esta dada por:

$$1,000,000*\sum_{0}^{9} v^{t+1}\, {}_{t/}q_{40} + 50,000 v^{10}\, {}_{10}p_{40} = 64,940.34$$

Además $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 8.1375$ de donde se tiene que la prima nivelada esta dada por:

$$\pi = 7,980.37$$

<u>Cálculo Prospectivo</u>

Para este caso se tiene que:

t	q_{45+t}	p_{45+t}	${}_t p_{45}$	v^t	v^{t+1}
0	0.004585	0.995415	1	1	0.9569378
1	0.004938	0.995062	0.995415	0.9569378	0.91572995
2	0.005317	0.994683	0.99049964	0.91572995	0.8762966
3	0.005725	0.994275	0.98523315	0.8762966	0.83856134
4	0.006164	0.993836	0.97959269	0.83856134	0.80245105
5	0.006637	0.993363	0.97355448	0.80245105	0.76789574

Por lo tanto:

$$SA^*\sum_{j=0}^{4} {}_{j}v^{j+1}p_{45}q_{45+j} + B^*v^5\ {}_5p_{45} = 23{,}078.94 + 39{,}061.49 = 62{,}140.45$$

$$\pi\sum_{j=0}^{4} v^j\ {}_jp_{45} = 36{,}265.87$$

Por lo tanto la reserva es la diferencia de estas dos cantidades de donde:

$${}_5V = 25{,}874.57$$

<u>Cálculo Retrospectivo</u>

En este caso se tiene que la fórmula está dada por:

$$\sum_{j=0}^{4}\left(\frac{\pi - vq_{40+j}SA}{{}_{5-j}p_{40+j}}\right)(1.05)^{5-j}$$

Realizando los cálculos respectivos se tiene:

j	$(1+i)^{5-j}$	q_{40+j}	${}_{5-j}p_{40+j}$	$\left(\frac{\pi - vq_{40+j}SA}{{}_{5-j}p_{40+j}}\right)$
0	1.246182	0.003166	0.981675	6,284.63
1	1.192519	0.003410	0.984793	5,712.22
2	1.141166	0.003672	0.988163	5,158.06
3	1.092025	0.003954	0.991805	4,620.69
4	1.045000	0.004258	0.995742	4,098.93
			$\sum =$	25,874.57

<u>Fórmula de Fackler</u>

La reserva utilizando la fórmula de Fackler toma los siguientes valores:

t	${}_tV$
0	0
1	5,189.92
2	10,388.37
3	15,580.54
4	20,749.20
5	25,874.57

t	${}_tV$
6	30,935.25
7	35,906.12
8	40,761.11
9	45,470.16
10	50,000

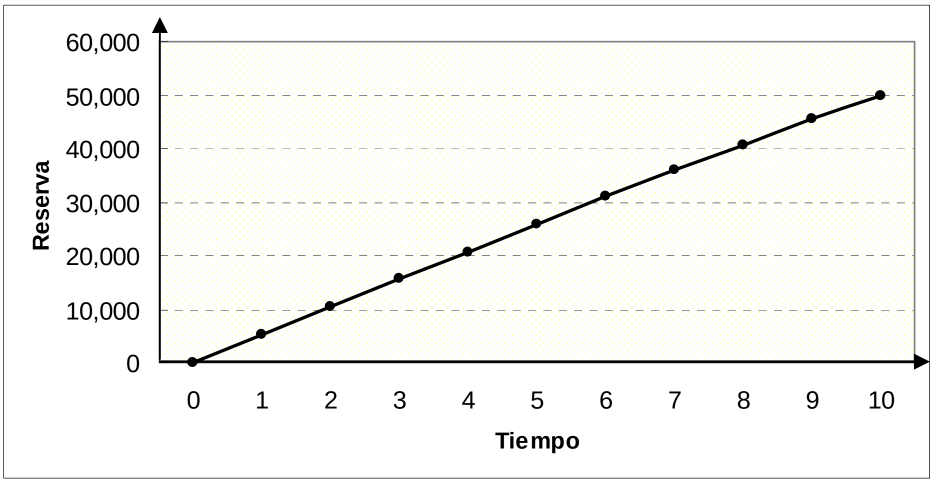


Figura 1.4 Reservas en función del tiempo para el ejemplo 3

Como se puede observar en los tres ejemplos anteriores, la reserva depende tanto de la hipótesis que se tenga sobre la variable aleatoria que modela el tiempo de vida, así como el tipo de seguro con el cual se este tratando. Así en el caso del ejemplo 2, cuando el tiempo de vida seguía una distribución exponencial, se tiene que la fuerza de prima en cada instante cubre el riesgo de muerte en el mismo momento, por lo tanto la reserva es cero mientras el período de pago de primas sea igual al período de cobertura.

En general se obtiene que la reserva para el caso de los seguros vitalicios y los seguros dotales, la reserva converge a la suma asegurada conforme el tiempo pasa (pues el pago se va haciendo mas certero, dado que la persona esta con vida al tiempo t). Mientras que en el caso de los seguros temporales tiene un comportamiento parabólico (como el observado en el ejemplo 1), esto se debe a que bajo el esquema de prima nivelada se cobra una “prima de ahorro” los primeros años del seguro la cual nivela el creciente costo de siniestralidad de los últimos años de la cobertura.

Referencias y notas del primer capítulo

1. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 página 230 expresión (8.2.1).
2. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 página 230 expresión (8.2.2).
3. La demostración aquí dada es una versión mas detallada de la presentada en Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997 páginas 230, 231.
4. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 página 233 expresión (8.2.7).
5. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 página 233 expresión (8.2.8).
6. La demostración aquí dada es una versión mas detallada de la presentada en Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997 página 233.
7. Desarrollo de la fórmula dada en Slud Erick V., Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics, Mathematics Department University of Maryland, College Park; E.U.A, 2001 página 157 expresión (6.16).
8. Analogía de la expresión dada en (1.7) para el caso de vida continúo.
9. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics,; Society of Actuaries, E.U.A, 1997 página 234 expresión (8.3.1).
10. La demostración aquí dada es una versión mas detallada de la presentada en Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997 páginas 234, 235.
11. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics,; Society of Actuaries, E.U.A, 1997 página 251 ejercicio 8.7.
12. Moller Thomas y Steffensen Mogens, Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance, Cambridge University Press, E.U.A. , 2007 página 13, expresión 2.2.

Capítulo II: Resultados generales de la reserva matemática con tasas aleatorias estocásticas

2.1 Introducción a la teoría de tasas con distribuciones aleatorias

En la teoría clásica del cálculo actuarial se considera en el desarrollo de primas y reservas de los seguros de vida, el tiempo de vida del asegurado como el único evento aleatorio, generalmente considerando a la tasa de interés como un valor constante o variable, pero no fortuito. Recientemente, se han empezado a desarrollar modelos suponiendo un segundo evento aleatorio: la tasa de interés. Sin embargo, esta extensión de la teoría se ha hecho casi exclusivamente al cálculo de primas.

El presente capítulo tiene como propósito hacer la extensión de esta teoría para la reserva matemática; sin embargo es necesario desarrollar un poco la teoría de las tasas de interés aleatorias.

Bajo el esquema de tasas de interés se tiene que el factor de acumulación al tiempo n, denotado por $S(n)$, esta dado por:

$$S(n)=\prod_{i=1}^{n}(1+I_i)=\exp\left(\int_0^n \delta(s)\right) \tag{2.1}$$

Mientras que el factor de descuento, $v(n)$, esta dado por:

$$v(n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+I_i)}=\exp\left(-\int_0^n \delta(s)\right) \tag{2.2}$$

En ambos casos $\delta(s)$ denota la tasa de interés instantánea al tiempo s, mientras que I_i denota la tasa de interés efectiva anual durante el año i.

Definición: Un bono cupón cero [1] es un contrato que al final del tiempo T (conocido como tiempo de maduración) le paga al poseedor de esté, una unidad monetaria.

Dado que el bono es emitido al tiempo 0 entonces para cualquier $t\in[0,T]$, se denota el precio del bono cupón cero como: $P(t,T)$, cabe hacer notar que: $P(T,T)=1$ y $P(t,T)\leq 1 \quad t<T$, esta última observación hace que se pueda pensar el precio del bono como un factor de descuento.

Si se considera al bono de cupón cero como un proceso estocástico, hay que hacer notar que este depende de dos variables, pues para t fija es función del tiempo de maduración, trabajando sobre este análisis da origen a lo que se llama la estructura de las tasas de interés al momento t, mientras que para T fija es función del tiempo de valuación.

Definición: Respecto a la estructura de tasas de interés para $t \in [0,T)$ fija se define la tasa *spot* [2] como:

$$Y(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t} \tag{2.3}$$

De aquí se concluye que:

$$P(t,T) = \exp\{-Y(t,T)(T-t)\} \tag{2.4}$$

De esta manera es más claro visualizar lo que se había mencionado antes, con respecto a que se puede interpretar al valor del bono de cupón cero como un factor de descuento.

La interpretación de la tasa *spot* es aquella que está efectiva para los instrumentos financieros que se emiten al tiempo t, con una duración de $T-t$.

Finalmente se desarrollará la tasa *forward*, la cual suponiendo que actualmente es el tiempo t y se quiere invertir en un momento futuro T_1 para obtener un rendimiento al tiempo T_2 $t<T_1<T_2$, entonces pactando el contrato en este momento se obtiene la tasa *forward* para el período comprendido entre T_1 y T_2.

Definición: La tasa *forward* [3] para el período $[T_1, T_2]$ se define como:

$$f(t,T_1,T_2) = -\frac{\ln(P(t,T_2)) - \ln(P(t,T_1))}{T_2 - T_1} \tag{2.5}$$

Se hace notar que cuando $t=T_1$ se tiene que la tasa *forward* es la misma que la tasa *spot*.

Es necesario que exista congruencia entre los valores de las tasas spot y las tasas forward, pues de lo contrario existirían oportunidades donde se pueden obtener ganancias sin riesgo, a lo cual se le conoce como arbitraje.

Ahora bien, regresando a la valuación de reservas considerando el caso discreto, al inicio de cada año se recibe una prima y se considera que en caso de muerte se paga la suma asegurada al final del año. En este caso, la prima se capitaliza un año, pero no se puede asegurar que se capitalice el siguiente, pues esto depende de si el asegurado vive o no, por lo cual no se puede pactar contratos *forward*, pues es contingente la disponibilidad del dinero en ese tiempo, de donde lo único que se puede decir es que se va invertir un año si el asegurado está con vida al inicio de éste; por lo tanto, para cada año, se estará trabajando con las tasas *spot* con duración a un año.

2.2 Desarrollo para el tiempo de vida entero

Para el caso discreto de este seguro se volverán a considerar las siguientes características.

- Un beneficio que se paga al final del año, cuyo monto en el año t esta dado por $SA_{t-1} \quad t=1,2,3...$
- El asegurado paga una prima π_{t-1} al inicio del año $t=1,2,3...$

La principal diferencia con el modelo propuesto en el capítulo anterior es que se supondrá que la tasa de interés anual durante cada período es una variable aleatoria, $\{I_1, I_2, ...\} \quad I_0=0$ las cuales modelan la tasa de interés efectiva anual durante cada año, como se mencionó anteriormente estas tasas de interés forman un proceso estocástico.

Por lo tanto la función de descuento para el año h, es una modificación de la ecuación (2.2) dada por:

$$\prod_{j=1}^{h} \frac{1}{1+I_j}$$

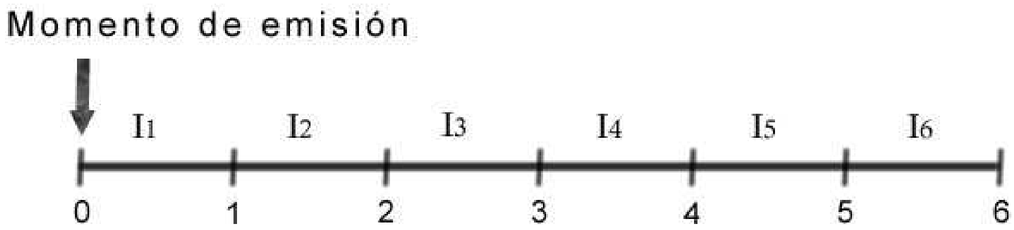


Figura 2.1 Línea del tiempo para las tasas de interés

Ahora se define la pérdida al tiempo h como:

$$_{h}L = \begin{cases} 0 & h > K(x) \\ SA_{K(x)} \displaystyle\prod_{j=h+1}^{K(x)+1} \frac{1}{1+I_j} - \sum_{j=h}^{K(x)} \pi_j \prod_{i=h+1}^{j} \frac{1}{1+I_i} & h \le K(x) \end{cases} \qquad (2.6)$$

Esta expresión consiste en la generalización de la definición dada en (1.1); cabe mencionar que cuando el producto es vacío este se define como 1.

La idea es muy similar al caso determinista: si el tiempo de evaluación de la pérdida (dado por h) es después de la muerte del asegurado ($K(x)$), entonces la compañía ya cumplió las obligaciones con el asegurado, ahora si la valuación se realiza antes de la muerte del asegurado, se tiene que esta pierde el valor presente de la suma asegurada al momento de la muerte, recuperando el valor presente de las primas que se cobren antes de la muerte del asegurado, sin embargo como ya se mencionó el valor presente ahora depende de variables aleatorias.

Quizá puede parecer un poco difícil visualizar como se corren los índices en el producto de los factores de descuento; observando un esquema de como están las tasas de interés al momento h se tiene que:

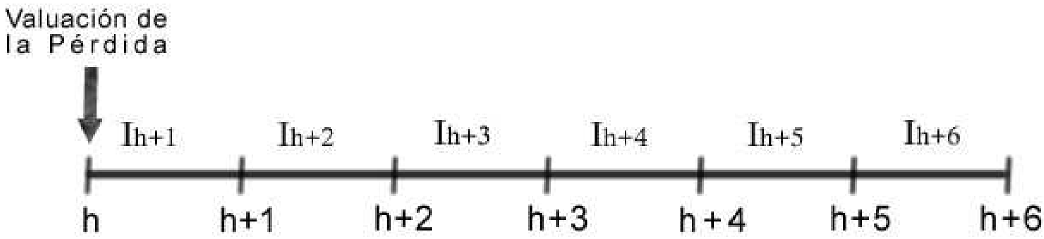


Figura 2.2 Línea de tiempo para las tasas de interés centrada en la valuación

Ahora para el factor de descuento de la suma asegurada se tiene que si $K(x)=h$ entonces el producto va de $h+1$ a $h+1$ es decir que solo se trae a valor presente con la tasa I_{h+1}, si $K(x)=h+1$ entonces el producto corre de $h+1$ a $h+2$, por lo cual se trae a valor presente con las tasas I_{h+1} y I_{h+2} etc.

Ahora analizando el factor de descuento para la primas se tiene que para el primer pago efectuado al tiempo h el producto es vacío pues corre de $h+1$ a h y por lo tanto este es uno (conforme a lo que se necesita debido a que la prima se paga al inicio del año) para la prima que se paga al inicio del año $h+1$ (suponiendo $K(x)\geq h+1$) se tiene que el producto va de $h+1$ a $h+1$ es decir se trae a valor presente con la tasa I_{h+1}, etc.

Definición: Dado un seguro con las características anteriores, se define la reserva matemática al tiempo h, ${}_hV$ como la esperanza de ${}_hL$, dado que $K(x)\geq h$

$$ {}_hV=E\left[{}_hL|K(x)\geq h\right] \qquad (2.7)$$

Finalmente bajo la hipótesis de que la distribución condicional de $K(x)-h$ dado que $K(x)\geq h$ es la misma distribución de $K(x+h)$ y que el proceso de las tasas de interés es independiente al tiempo de vida, es el valor presente actuarial de las obligaciones de la compañía aseguradora, se tiene que la reserva matemática es menos el valor presente actuarial de las obligaciones del asegurado.

Dem.

$$E\left[\left({}_hL|K(x)\geq h\right)\right]=E\left[\left(SA_{K(x)}\prod_{j=h+1}^{K(x)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}\right)|K(x)\geq h\right]$$

Recorriendo los índices en h unidades a la izquierda se obtiene:

$$E\left[\left(SA_{K(x)-h+h}\prod_{j=1}^{K(x)-h+1}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(x)-h}\pi_{j+h}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\middle|K(x)\geq h\right)\right]$$

Aplicando la hipótesis sobre la distribución de $K(x)-h$ dado $K(x)\geq h$:

$$E\left[SA_{K(x+h)+h}\prod_{j=1}^{K(x+h)+1}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(x+h)}\pi_{h+j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

Finalmente utilizando el resultado de esperanzas iteradas a través de esperanza condicional así como la independencia entre el tiempo de vida y las tasas de interés:

$$=\sum_{j=0}^{\infty}E\left[SA_{h+j}\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}-\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\middle|K\left(x+h\right)=j\right]{}_{j}p_{x+h}q_{x+h+j}$$

K(x+h)=0	I_{h+1}					
K(x+h)=1	I_{h+1}	I_{h+2}				
K(x+h)=2	I_{h+1}	I_{h+2}	I_{h+3}			
K(x+h)=3	I_{h+1}	I_{h+2}	I_{h+3}	I_{h+4}		
K(x+h)=4	I_{h+1}	I_{h+2}	I_{h+3}	I_{h+4}	I_{h+5}	
K(x+h)=5	I_{h+1}	I_{h+2}	I_{h+3}	I_{h+4}	I_{h+5}	I_{h+6}

Figura 2.3: Tasas de interés que se toman en cuenta en el cálculo según el valor de K(x+h)

Observando que en esta ultima expresión, en el término de la esperanza, el único evento aleatorio es el producto de los factores de descuento por lo que se obtiene:

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(SA_{h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]-\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]\right){}_{j}p_{x+h}q_{x+h+j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\;{}_{j}p_{x+h}q_{x+h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\pi_{h+k}\;{}_{j}p_{x+h}q_{x+h+j}E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j\ j}\, p_{x+h} q_{x+h+j} E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right] - \sum_{k=0}^{\infty}\pi_{h+k}\sum_{j=k}^{\infty}{}_{j}\, p_{x+h} q_{x+h+j} E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j\ j}\, p_{x+h} q_{x+h+j} E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right] - \sum_{k=0}^{\infty}\pi_{h+k\ k}\, p_{x+h} E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j\ j}\, p_{x+h} q_{x+h+j} E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right] - \sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j\ j}\, p_{x+h} E\left[\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right] \qquad (2.8)$$

Q.E.D.

Ahora bien si se quisiera hacer una extensión a los seguros dotales se tendría que la función de pérdida está dada por:

$$ {}_{h}L=\begin{cases} 0 & h>K(x) \\ SA_{K(x)}\displaystyle\prod_{j=h+1}^{K(x)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{\min\{K(x),n-1\}}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i} & \\ +BI_{(K(x)\geq n)}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-h}\frac{1}{1+I_{h+i}} & h\leq K(x) \end{cases} \qquad (2.9)$$

Observese que esta es una extensión de la expresiónd dada en (1.12); al igual que en el caso de interés determinista se tiene que:

$$SA_j=0 \quad \forall j\geq n$$

De nuevo esto último es para garantizar que el asegurado no reciba una suma asegurada por muerte si ya se le pagó el beneficio de supervivencia.Análogo a la demostración ya antes dada, se puede ver que la expresión de la reserva esta dada por:

$$\left(\sum_{j=0}^{n-h-1} SA_{h+j\ j}\, p_{x+h} q_{x+h+j} E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right] + B\ {}_{n-h}p_{x+h} E\left[\prod_{j=1}^{n-h}\frac{1}{1+I_{j+h}}\right]\right)$$
$$-\sum_{k=0}^{n-h-1}\pi_{h+k\ k}\, p_{x+h} E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right] \qquad (2.10)$$

Ahora cabe mencionar una variación que se le puede dar a este modelo la cual consiste en modelar las tasas de interés continuas equivalentes en cada período en lugar de las tasas de interés efectivas anuales; es decir se modela sobre el proceso estocástico dado por: $\{\delta_1,\delta_2,...\}$ que representan a las tasa de interés continuas para cada año, con $\delta_0=0$.

En este caso se tiene que el factor de descuento esta dado para el año h por:

$$\prod_{j=1}^{h}\exp\left\{-\delta_j\right\}=\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\delta_j\right\} \tag{2.11}$$

Por lo tanto la función de pérdida se ve afectada de la siguiente manera:

$$_hL=\begin{cases} 0 & h>K(x) \\ SA_{K(x)}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{K(x)+1}\delta_{j+h}\right\}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j\exp\left\{-\sum_{k=h+1}^{j}\delta_k\right\} & h\le K(x)\end{cases} \tag{2.12}$$

La reserva $_hV$ esta dada por:

$$\begin{aligned} {}_hV=&\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}E\left[e^{-\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}}\right]{}_jp_{x+h}q_{x+h+j} \\ &-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\;{}_jp_{x+h}E\left[e^{-\sum_{k=1}^{j}\delta_{k+h}}\right]\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ahora observando que en la esperanza se tiene la definición de generadora de momentos, denotada por M_δ, evaluada en el vector compuesto por -1 en todas sus coordenadas es decir:

$$E\left[\exp\left\{-\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}\right\}\right]=M_{\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}}\left(\overline{-1}\right) \tag{2.14}$$

Por lo tanto se puede escribir la última expresión de la reserva como:

$$\begin{aligned} {}_hV=&\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}M_{\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}}\left(\overline{-1}\right){}_jp_{x+h}q_{x+h+j} \\ &-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\;{}_jp_{x+h}M_{\sum_{k=1}^{j}\delta_{k+h}}\left(\overline{-1}\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Cabe mencionar que esta última manera de trabajar con las tasas resulta útil cuando estas se modelan estas a través de procesos Gaussianos (esto es cualquier combinación finita de puntos tiene una distribución normal multivariada) como se desarrolla en capítulos posteriores.

2.3 Desarrollo para el tiempo de vida continuo

Para el caso continuo se toman las siguientes hipótesis:

- Un beneficio que al momento $t\ge 0$ esta dado por SA_t

- El asegurado paga una prima π_t al momento $t\geq 0$

Y en este caso se considera un proceso de variables aleatorias independientes dado por $\left\{\delta(t)|t\geq 0\right\}$ el cual tiene la siguiente interpretación: $\delta(t)$ es la fuerza de interés al momento s; de nuevo se supone este proceso independiente al tiempo de vida.

En este caso la pérdida, que es una modificiación de la definición dada en (1.4), al momento t esta dada por:

$$ {}_tL=\begin{cases} 0 & T(x)\leq t \\ SA_{T(x)}\exp\left\{-\int_t^{T(x)}\delta(s)\,ds\right\}-\int_t^{T(x)}\pi_r\exp\left\{-\int_t^r\delta(s)\,ds\right\}dr & T(x)>t \end{cases} \tag{2.16} $$

Como puede observarse en este caso el modelo se complica de manera significativa pues el valor factor de descuento esta dado por las integrales en la ecuación (2.2);en las cuales el factor $\delta(t)$ es un proceso estocástico, es decir lo que se tiene es que el factor de descuento depende de una integral de Riemann de un proceso estocástico.

Definición: Dado un seguro con las características anteriores, se define la reserva matemática al tiempo t, ${}_tV$ como la esperanza de ${}_tL$, dado que $T(x)>t$

$$ {}_tV = E\left[{}_tL \mid T(x) > t\right] \tag{2.17} $$

De nuevo, es posible escribir esta esperanza como la diferencia entre el valor presente de obligaciones por parte de la compañía, menos el valor presente de las obligaciones por parte del asegurado.

Calculando $E\left[{}_tL \mid T(x) > t\right]$:

$$ E\left[SA_{T(x)}\exp\left\{-\int_t^{T(x)}\delta(s)\,ds\right\}-\int_t^{T(x)}\pi_r\exp\left\{-\int_t^r\delta(s)\,ds\right\}dr|T(x)>t\right] $$

$$ =E\left[SA_{T(x)-t+t}\exp\left\{-\int_0^{T(x)-t}\delta(t+s)\,ds\right\}-\int_0^{T(x)-t}\pi_{r+t}\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\ dr|T(x)>t\right] $$

$$ =E\left[SA_{T(x+t)+t}\exp\left\{-\int_0^{T(x+t)}\delta(t+s)\,ds\right\}-\int_0^{T(x+t)}\pi_{r+t}\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}dr\right] $$

$$=\int_0^\infty E\left[SA_{T(x+t)+t}\exp\left\{-\int_0^{T(x+t)}\delta(t+s)\,ds\right\}-\int_0^{T(x+t)}\pi_{r+t}\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}dr|T(x+t)=z\right]f_{T(x+t)}(z)dz$$

$$=\int_0^\infty E\left[SA_{z+t}\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}-\int_0^z\pi_{r+t}\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}dr\right]f_{T(x+t)}(z)dz$$

Observando que el único término aleatorio es el factor de descuento se tiene que:

$$\int_0^\infty\left(SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]-\int_0^z\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]dr\right){}_z p_{x+t}\mu_{x+t}(z)dz$$

$$=\int_0^\infty SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz-\int_0^\infty\int_0^z\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{x+t}\mu_{x+t}(z)drdz$$

Cambiando el orden de las integrales en el segundo sumando se obtiene:

$$\int_0^\infty SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz-\int_0^\infty\int_r^\infty\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{x+t}\mu_{x+t}(z)dzdr$$

$$=\int_0^\infty SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz-\int_0^\infty\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]\int_r^\infty{}_z p_{x+t}\mu_{x+t}(z)dzdr$$

$$=\int_0^\infty SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz-\int_0^\infty\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]\int_r^\infty{}_z p_{x+t}\mu_{x+t}(z)dzdr$$

$$\begin{aligned}&=\int_0^\infty SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz\\&-\int_0^\infty\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_r p_{x+t}dr\end{aligned}\qquad(2.18)$$

Q.E.D.

Como se mencionó antes está expresión no es sencillo manejarla, implica resolver integrales que depende de procesos estocásticos y posteriormente calcular la esperanza de estos.

En el caso de seguros dotales se tiene que la función de pérdida esta dada por:

$$
{}_tL=\begin{cases} 0 & T(x)\le t \\ SA_{T(x)}\exp\left\{-\int_t^{T(x)}\delta(s)\,ds\right\}-\int_t^{T(x)}\pi_r\exp\left\{-\int_t^{r}\delta(s)\,ds\right\}dr+ & \\ BI_{(T(x)\ge n)}\exp\left\{-\int_t^{n}\delta(s)\,ds\right\} & T(x)>t \end{cases} \tag{2.19}
$$

En este caso la reserva ${}_tV=E\left[{}_tL\,|\,T(x)>t\right]$ esta dada por:

$$
\begin{aligned}
{}_tV=&\int_0^n SA_{z+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^z\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_zp_{z+t}\mu_x(t+z)dz+ \\
&B\,{}_{n-h}p_{x+h}E\left[\exp\left\{-\int_t^n\delta(s)\,ds\right\}\right]-\int_0^n\pi_{r+t}E\left[\exp\left\{-\int_0^r\delta(t+s)\,ds\right\}\right]{}_rp_{x+t}dr
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Puede observarse que el termino dado por $-\int_0^z\delta(t+s)ds$ es lo que esta funcionando como factor de descuento. El modelo de la reserva esta determinado por dos aspectos: el modelo para el tiempo de vida y el modelo para la tasa de interés.

En el siguientes capítulos se desarrollarán modelos más específicos para las tasas de interés para posteriormente darle una aplicación a los modelos presentados en este capítulo de reservas.

Referencias y notas del segundo capítulo

1. Moller Thomas y Steffensen Mogens, Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance, Cambridge University Press, E.U.A. , 2007 página 59.
2. Moller Thomas y Steffensen Mogens, Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance, Cambridge University Press, E.U.A. , 2007 página 59.
3. Moller Thomas y Steffensen Mogens, Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance, Cambridge University Press, E.U.A. , 2007 páginas 59,60.

Capítulo III: Modelos de reserva matemática particulares

3.1 Introducción

En el capítulo pasado se desarrolló el modelo general para la reserva matématica independientemente del modelo que se tenga para el tiempo de vida del asegurado y para las tasas de interés.

Evidentemente esta expresión no resulta útil si no se pueden obtener expresiones simplificadas para las tasas de interés, que en general no es sencillo al existir dependencia entre estas. El objetivo del presente capítulo es desarrollar simplificaciones que se pueden obtener en las expresiones a través de modelos específicos para las tasas de interés.

Primero se desarrollará el caso cuando las tasas de interés tienen distribuciones idénticas e independientes, si bien este supuesto puede ser alejado de la realidad, tiene como objetivo ejemplificar los cálculos, asi como mostrar que algunos resultados que se tenían en el caso de tasas no aleatorias, no son válidos en el caso aleatorio.

Posteriormente se desarrollará el cuando las tasas siguen un modelo de series de tiempo lineal; como son los procesos $AR(1), MA(q)$ entre otros.

Finalmente se desarrollán tasas cuya distribuciones pueden ser modeladas a través de movimientos Brownianos o variaciones de este.

Es importante mencionar que se asume que el modelo empleado aplicado a las tasas de interés es adecuado, es decir, previamente se realizo un análisis exploratorio, junto con pruebas estadísticas que justifiquen el modelo.

3.2 Tasas aleatorias con distribuciones idénticas e independientes

3.2.1 Desarrollo prospectivo

En este caso se volverán a considerar las características ya mencionadas anteriormente.

La principal diferencia con el modelo propuesto en el capítulo anterior es que se supondrá que las tasas de interés anual durante cada período son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

Partiendo de la definición de pérdida dada en (2.6), al aplicar la hipótesis de las tasas está no se ve afectada:

$$
{}_hL=\begin{cases} 0 & h>K(x) \\ SA_{K(x)}\prod_{j=h+1}^{K(x)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i} & h\leq K(x)\end{cases}
$$

En este caso se puede obtener mayores simplificaciones para la expresión de la reserva, pues recordando la expresión que se tenía para la reserva en el modelo general dado en (2.8):

$$
\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}E\left[\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]
$$

Por la hipótesis de independencia entre las tasas de interés en cada año se tiene que:

$$
\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}\prod_{k=1}^{j+1}E\left[\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}\prod_{k=1}^{j}E\left[\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]
$$

Finalmente, observando que para el producto de los factores de descuento en la suma asegurada se tiene un total de $j+1$ productos mientras que para la prima el producto vacío en los factores de descuento es uno mientras que para $k\geq 1$ se tiene el producto de exactamente k factores y al ser las variables idénticamente distribuidas se tiene que:

$$
{}_hV=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}E^{j}\left[\frac{1}{1+I}\right] \tag{3.1}
$$

Para el caso de los seguros dotales la cual tenía como función de pérdida la expresión (2.9) y expresión de la reserva (2.10), se puede dar una demostración análoga para obtener las siguientes simplificaciones:

$$
\begin{aligned}
{}_hV=&\left(\sum_{j=0}^{n-h-1}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]+B\ {}_{h-n}p_{x+h}E^{n-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]\right)\\
&-\sum_{j=0}^{n-h-1}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}E^{j}\left[\frac{1}{1+I}\right]
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Ahora bien si se quisiera trabajar con el modelo dado por las tasas de interés continuas dado en la ecuación (2.15) , dado que en este caso las tasas son independientes se tiene que la generadora de momentos de la suma es el producto de las generadoras de momentos por lo tanto:

$$
{}_hV=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\prod_{k=1}^{j+1}M_{\delta_{k+h}}(-1)\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\ {}_jp_{x+h}\prod_{k=1}^{j}M_{\delta_{k+h}}(-1)
$$

Y dado que las tasas son idénticamente distribuidas se tiene que:

$$ {}_hV=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j}\left[M_\delta(-1)\right]^j {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\, {}_jp_{x+h}\left[M_\delta(-1)\right]^j \qquad (3.3) $$

3.2.2 Análisis de una posible definición retrospectiva

A través de la definición retrospectiva, se establece la reserva como el valor presente actuarial al tiempo h de la diferencia entre las primas que ya han sido pagadas por el asegurado y el riesgo ya cubierto por el asegurador.

No se desarrolló el caso retrospectivo en el caso general para tasas aleatorias, aunque se demostró que en el caso cuando la tasa de interés no era fortuita, que ambos métodos eran equivalentes, la equivalencia dependía de dos aspectos: el primero era el principio de equivalencia y las simplificaciones algebraicas que se pueden tener al ser valores constantes.

Sin embargo si se quisiera establecer una definición retrospectiva de nueva cuenta se tendría que la capitalización esperada estaría dada por:

$$ \sum_{j=0}^{h-1}\frac{\pi_j\left(1+E^{h-j}[I]\right)-q_{x+j}SA_j\left(1+E^{h-j-1}[I]\right)}{{}_{h-j}p_{x+j}} \qquad (3.4) $$

Esta expresión se puede escribir como:

$$ \sum_{j=0}^{h-1}\frac{\pi_j\left(1+E^{h-j}[I]\right)}{{}_{h-j}p_{x+j}}-\sum_{j=0}^{h-1}\frac{SA_{j+1}q_{x+j}\left(1+E^{h-j-1}[I]\right)}{{}_{h-j}p_{x+j}} $$

Sin embargo bajo tasas de interés aleatorio con este modelo se tiene que el valor presente de las sumas aseguradas esta dado por:

$$ \sum_{j=0}^{\infty} SA_j\, {}_jp_x q_{x+j} E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right] \qquad (3.5) $$

Esto es inmediato pues recordando que el seguro [1] está definido como la esperanza del valor presente de las sumas aseguradas se tiene que:

$$ E\left[SA_{K(x)}\prod_{k=1}^{K(x)+1}\frac{1}{1+I_j}\right] $$

$$ =E\left[E\left[SA_{K(x)}\prod_{k=1}^{K(x)+1}\frac{1}{1+I_k}|K(x)=j\right]\right] $$

$$=E\left[E\left[SA_j\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_k}|K(x)=j\right]\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}E\left[SA_j\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_k}|K(x)=j\right]{}_j\,p_x q_{x+j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}SA_j\;{}_j\,p_x q_{x+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Por otro lado el valor presente de las primas está dado por:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\,{}_j\,p_x E^j\left[\frac{1}{1+I}\right] \tag{3.6}$$

Pues el pago de primas [2] está definido como:

$$E\left[\sum_{j=0}^{K(x)}\pi_j\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_k}\right]$$

$$=E\left[E\left[\sum_{j=0}^{K(x)}\pi_j\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_k}|K(x)=j\right]\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(E\left[\sum_{i=0}^{j}\pi_i\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{1+I_k}|K(x)=j\right]\right){}_j\,p_x q_{x+j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\pi_i E\left[\prod_{k=1}^{i}\frac{1}{1+I_k}\right]\right){}_j\,p_x q_{x+j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\pi_i E^i\left[\frac{1}{1+I}\right]\right){}_j\,p_x q_{x+j}$$

Cambiando el orden de las sumas se obtiene:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\,{}_j\,p_x E^j\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Ahora partiendo del principio de equivalencia el cual establece que la esperanza de obligaciones por parte del asegurador debe ser igual a la esperanza de las obligaciones del asegurado se tiene:

$$\sum_{j=0}^{\infty}SA_j\;{}_j\,p_x q_{x+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\;{}_j\,p_x E^j\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Separando los primeros h términos y tomando en consideración que ambas esperanzas existen y por lo tanto las series involucradas son absolutamente convergentes:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j\,{}_jp_x E^j\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j\,{}_jp_x q_{x+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$
$$=\sum_{j=h}^{\infty}SA_j\,{}_jp_x q_{x+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=h}^{\infty}\pi_j\,{}_jp_x E^j\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Multiplicando esta última expresión por $\left(E^h\left[\frac{1}{1+I}\right]{}_hp_x\right)^{-1}$ se obtiene:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}E^{j-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}q_{x+j}E^{j+1-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$
$$=\sum_{j=h}^{\infty}SA_j\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}q_{x+j}E^{j+1-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=h}^{\infty}\pi_j\frac{{}_jp_x}{{}_hp_x}E^{j-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Realizando las simplificaciones correspondientes:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j\frac{1}{{}_{j-h}p_{x+h}}E^{j-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j\frac{1}{{}_{j-h}p_{x+h}}q_{x+j}E^{j+1-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$
$$=\sum_{j=h}^{\infty}SA_j\,{}_{j-h}p_{x+h}q_{x+j}E^{j+1-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=h}^{\infty}\pi_j\,{}_{j-h}p_{x+h}E^{j-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Recorriendo los índices:

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j\frac{1}{{}_{j-h}p_{x+h}}E^{j-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j\frac{1}{{}_{j-h}p_{x+h}}q_{x+j}E^{j+1-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}SA_j\,{}_jp_{x+h}q_{x+h+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\,{}_jp_{x+h}E^j\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

$$\sum_{j=0}^{h-1}\pi_j\frac{1}{{}_{j-h}p_{x+h}}E^{j-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{h-1}SA_j\frac{1}{{}_{j-h}p_{x+h}}q_{x+j}E^{j+1-h}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}SA_j\,{}_jp_{x+h}q_{x+h+j}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\,{}_jp_{x+h}E^j\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Como se puede ver en el primer lado de la igualdad, este es multiplicado por el factor:

$$E^{-1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Mientras que en la definición retrospectiva antes dada se tiene el factor:

$$1+E[I]$$

Estos no necesariamente son iguales, lo cual puede comprobarse a través de la desigualdad de Jensen [3], pues esta establece que si $f(x)$ es una función convexa y si la esperanza de una variable aleatoria X y la esperanza de $f(X)$ existe, entonces se tiene:

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

En este caso se considera la función dada por:

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Esta función es convexa pues calculando la segunda derivada se obtiene:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}$$

De donde es claro que $f''(x)>0 \quad x>0$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Jensen, se tiene que:

$$E\left[\frac{1}{1+I}\right]\geq\frac{1}{1+E[I]}$$

De donde:

$$E^{-1}\left[\frac{1}{1+I}\right]\leq 1+E[I]$$

La interpretación de estas dos desigualdades es sencilla: el factor de descuento bajo el modelo aleatorio es mayor que tomando el modelo determinista tomando como tasa de interés fija la esperanza de estás.

Cabe mencionar que estas desigualdades no permiten establecer una relación clara sobre cuál de las dos reservas es mayor, pues si bien por lo antes mencionado con las relaciones entre los factores de descuento se puede establecer que tanto el valor de la prima única y de la anualidad son mayores bajo el modelo aleatorio; sin embargo al ser la reserva bajo el modelo aleatorio una diferencia de estas dos no se puede concluir nada.

Con ésta surge una pregunta: ¿cuál de las dos definiciones de reserva es la adecuada? Desde nuestro punto de vista, la versión adecuada es la fórmula prospectiva, pues la reserva matemática debe cubrir el valor esperado de las pérdidas futuras, lo cual se da a partir de la definición de la pérdida, mientras que la idea del cálculo retrospectivo está basado en la acumulación que no necesariamente hace frente a las obligaciones, es decir, no se tiene la garantía de que sea suficiente.

Finalmente, bajo esta versión retrospectiva, genera el siguiente problema que para ejemplificarlo es conveniente ver la reserva al tiempo cero:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j \left(1+E^{h-j}[I]\right) - q_{x+j} SA_j \left(1+E^{h-j-1}[I]\right)}{{}_{h-j}p_{x+j}}$$

Por lo antes mencionado con respecto a la esperanza del valor presente se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j \left(1+E^{h-j}[I]\right) - q_{x+j} SA_j \left(1+E^{h-j-1}[I]\right)}{{}_{h-j}p_{x+j}} \neq \sum_{j=0}^{\infty} SA_j \, {}_j p_x q_{x+j} E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right] - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, {}_j p_x E^j \left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Puesto que del lado derecho se tiene la resta entre obligaciones futuras de la compañía menos obligaciones futuras del asegurado al momento de la emisión de la póliza, al estar calculado por el principio de equivalencia esto es cero por lo cual:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j \left(1+E^{h-j}[I]\right) - q_{x+j} SA_j \left(1+E^{h-j-1}[I]\right)}{{}_{h-j}p_{x+j}} \neq 0$$

Es decir se tiene que bajo este modelo de reserva al inicio de vigencia las obligaciones del asegurado no son iguales a las obligaciones del asegurador, lo cual no es lógico ya que se tendría una constitución de la reserva previa al inicio de las operaciones.

3.2.3 Extensión de la fórmula de Fackler

Para esta suposición de las tasas de interés, es posible hacer extensión de la fórmula de Fackler para este modelo.

En este caso se tiene que:

$${}_hV = \sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} \, {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right] - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j} \, {}_j p_{x+h} E^j \left[\frac{1}{1+I}\right]$$

$${}_hV = SA_h q_{x+h} E\left[\frac{1}{1+I}\right] - \pi_h + \left(\sum_{j=1}^{\infty} SA_{h+j} \, {}_j p_{x+h} q_{x+h+j} E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right] - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{h+j} \, {}_j p_{x+h} E^j \left[\frac{1}{1+I}\right]\right)$$

Factorizando una vez el factor de descuento $E\left[\frac{1}{1+I}\right]$ en la suma y recorriendo los índices:

$$ {}_hV = SA_h q_{x+h} E\left[\frac{1}{1+I}\right] - \pi_h + E\left[\frac{1}{1+I}\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j+1\ \ j+1}p_{x+h} q_{x+h+j+1} E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right] - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j+1\ \ j+1}p_{x+h} E^{j}\left[\frac{1}{1+I}\right]\right) $$

Ahora bien recordando que ${}_{j+1}p_{x+h} = p_{x+h}\left({}_jp_{x+h+1}\right)$

$$ {}_hV = SA_h q_{x+h} E\left[\frac{1}{1+I}\right] - \pi_h + p_{x+h} E\left[\frac{1}{1+I}\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty} SA_{(h+1)+j\ \ j}p_{x+(h+1)} q_{x+(h+1)+j} E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right] - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{(h+1)+j\ \ j}p_{x+(h+1)} E^{j}\left[\frac{1}{1+I}\right]\right) $$

Observando que se tiene la expresión de la reserva para el tiempo $h+1$

$$ {}_hV = SA_h q_{x+h} E\left[\frac{1}{1+I}\right] - \pi_h + p_{x+h} E\left[\frac{1}{1+I}\right] {}_{h+1}V $$

De donde se concluye que:

$$ {}_{h+1}V = \frac{\left({}_hV + \pi_h\right) E^{-1}\left[\frac{1}{1+I}\right] - SA_h q_{x+h}}{p_{x+h}} \qquad (3.7) $$

Q.E.D.

3.2.4 Ejemplos

A continación se presentan ejemplos de varios planes de seguros utilizando dos modelos distintos sobre la distribución de las tasas de interés; es importante recordar que el propósito de esta sección del capítulo es mostrar como se ven afectados los cálculos bajo los modelos de reserva con tasas de interés aleatorias.

Ejemplo 1

Se calcularán las reservas terminales de un seguro temporal 10 para una persona de 30 años de edad con suma asegurada de $1,000,000 utilizando la tabla Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual), y suponiendo que la tasa de interés anual sigue una distribución $U \sim (.025,.055)$,compararemos los 2 tipos de reservas: la versión prospectiva con tasas aleatorias, y la versión clásica bajo interés determinístico con $i = E[I]$ (y la prima que corresponde bajo el esquema determinístico)

Como el interés tiene una distribución $U(.025,.055)$ entonces se tiene que:

$$E[I]=\frac{.055+.025}{2}=.04$$

Ahora para la esperanza del valor presente se tiene que:

$$\int_{.025}^{.055}\frac{dx}{(.055-.025)(1+x)}=\int_{.025}^{.055}\frac{dx}{.03(1+x)}=\frac{1}{.03}\ln(1+x)\Big|_{.025}^{.055}=\frac{\ln(1.055)-\ln(1.025)}{.03}$$

Bajo el esquema de tasas no fortuitas, calculando los valores de la prima única y de la prima nivelada se obtienen los siguientes resultados:

$$SA\left(A_{30:\overline{10}|}\right)=SA\sum_{t=0}^{9}v^{t+1}\,{}_tp_{30}q_{30+t}=16{,}905.12$$

$$\ddot{a}_{30:\overline{10}|}=\sum_{t=0}^{9}v^{t}\,{}_tp_{30}=8.37$$

$$\pi_D=2{,}019.61$$

Ahora bajo el esquema de tasa de interés independientes, se tiene que encontrar la prima tal que:

$$1{,}000{,}000\sum_{j=0}^{9}{}_{t/}q_xE^{t+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]=\pi\sum_{j=0}^{9}{}_tp_xE^{t}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Es decir que la prima esta dada por:

$$\pi=\frac{1{,}000{,}000\sum_{j=0}^{9}{}_{t/}q_xE^{t+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]}{\sum_{j=0}^{9}{}_tp_xE^{t}\left[\frac{1}{1+I}\right]}$$

t	q_{30+t}	p_{30+t}	${}_tp_{30}$	$E^t\left[\frac{1}{1+I}\right]$	$E^{t+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$	${}_{t/}q_xE^{t+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$	${}_tp_xE^{t+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$
0	0.001508	0.998492	1.000000	1.000000	0.961605	0.001450	1.000000
1	0.001624	0.998376	0.998492	0.961605	0.924684	0.001499	0.960155
2	0.001749	0.998251	0.996870	0.924684	0.889181	0.001550	0.921791
3	0.001884	0.998116	0.995127	0.889181	0.855041	0.001603	0.884848
4	0.002029	0.997971	0.993252	0.855041	0.822212	0.001657	0.849272
5	0.002186	0.997814	0.991237	0.822212	0.790643	0.001713	0.815007
6	0.002354	0.997646	0.989070	0.790643	0.760287	0.001770	0.782002
7	0.002535	0.997465	0.986742	0.760287	0.731096	0.001829	0.750207
8	0.002730	0.997270	0.984240	0.731096	0.703025	0.001889	0.719574
9	0.002940	0.997060	0.981553	0.703025	0.676033	0.001951	0.690057

De donde se tiene que:

$$1,000,000\sum_{j=0}^{9} {}_{t/}q_x E^{t+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]=16,911.89$$

$$\sum_{j=0}^{9} {}_t p_x E^t\left[\frac{1}{1+I}\right]=8.37$$

$$\pi_A=2,019.83$$

Observándose que $\pi_A-\pi_D=0.22$

Obteniendo la reserva bajo el modelo de tasas constantes, el modelo de tasas aleatorias:

t	${}_tV^{det}$	${}_tV^{al}$
0	0.00	0.00
1	593.29	593.38
2	1,095.19	1,095.33
3	1,493.00	1,493.16
4	1,772.45	1,772.60
5	1,918.64	1,918.75
6	1,913.96	1,914.02
7	1,741.01	1,741.03
8	1,379.54	1,379.52
9	807.31	807.29
10	0.00	0.00

A continuación se mostrarán las diferencias entre los modelos:

t	${}_tV^{al}-{}_tV^{det}$	Diferencias Relativas
0	0.0000	0
1	0.0890	0.0150%
2	0.1389	0.0127%
3	0.1547	0.0104%
4	0.1424	0.0080%
5	0.1093	0.0057%
6	0.0644	0.0034%
7	0.0179	0.0010%
8	-0.0181	-0.0013%
9	-0.0295	-0.0037%
10	0.0000	0

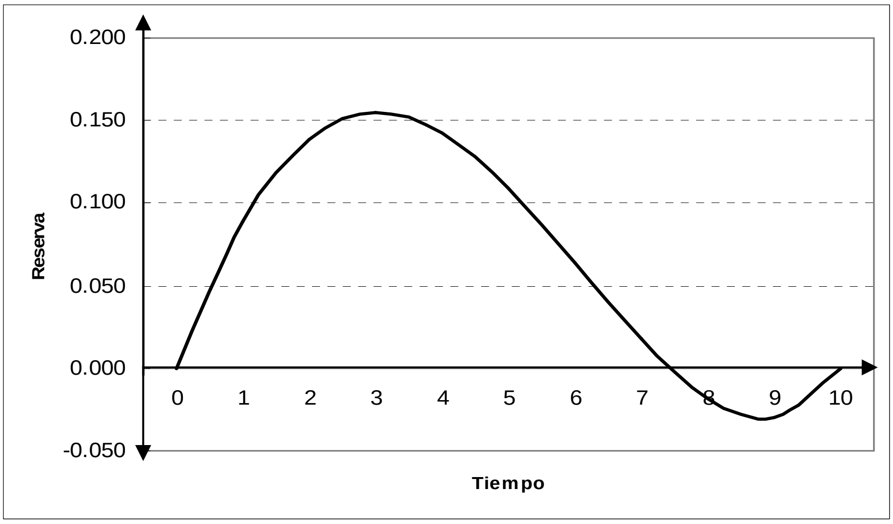


Figura 3.1 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 1 con pago de primas durante el período de cobertura, para un seguro temporal 10.

Observando las diferencias entre la reserva bajo el modelo clásico y la versión aleatoria bajo tasas independientes e identicamente distribuidas se puede observar que la reserva en el modelo prospectivo es mayor hasta el octavo año que la reserva bajo el modelo de tasas constantes, y a partir del octavo año es menor; esta diferencia es en orden de décimas que podría llegar a ser significativo a nivel cartera; también cabe mencionar que las diferencias, en valor absoluto, en el período donde la reserva bajo el modelo de tasas no fortuitas es mayor a la reserva bajo el modelo de tasas aleatorias son más grandes que cuando ocurre lo inverso.

Por ejemplo utilizando las mismas hipótesis demográficas, de suma asegurada y del interés, pero suponiendo un período de pago de primas de 5 años se obtiene la siguiente curva de diferencias entre la reserva bajo el modelo clásico y el modelo de tasas variables (para este caso se tiene que $\pi_D = 3{,}662.72 \quad \pi_A = 3{,}663.70$).

t	${}_tV^{det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{det}$	Diferencias Relativas
0	0.00	0.00	0.0000	0
1	2,304.71	2,305.46	0.7548	0.0328%
2	4,589.58	4,590.96	1.3747	0.0300%
3	6,845.37	6,847.23	1.8556	0.0271%
4	9,061.49	9,063.68	2.1938	0.0242%
5	11,226.96	11,229.35	2.3864	0.0213%
6	9,510.83	9,512.50	1.6757	0.0176%
7	7,555.05	7,556.11	1.0592	0.0140%
8	5,335.77	5,336.33	0.5580	0.0105%
9	2,826.92	2,827.12	0.1960	0.0069%
10	0.00	0.00	0.0000	0

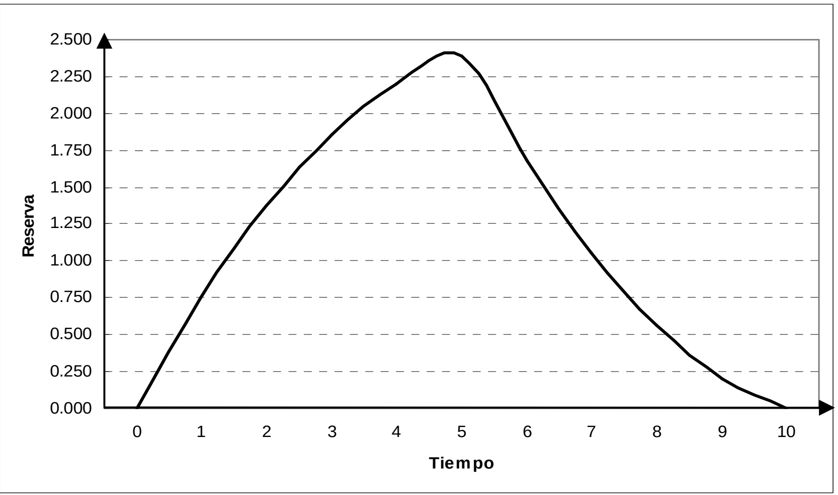


Figura 3.2 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 1 con pago de primas durante 5 años para un seguro temporal 10.

En este caso se puede observar que cuando el plazo de cobertura es mayor al período de pago de primas, la reserva bajo el modelo aleatorio es mayor que la reserva bajo el modelo clásico y de hecho las diferencias se incrementan del orden de décimas al orden de unidades.

Haciendo un análisis análogo con las mismas hipótesis pero ahora para un seguro vitalicio tomando en cuenta período de pago de primas vitalicias y período de 20 años se obtiene que:

Pagos vitalicios: $\pi_D = 9{,}218.96 \quad \pi_A = 9{,}231.85$

t	${}_tV^{det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{det}$	Diferencias Relativas
0	0.00	0.00	0.0000	0
1	8,104.68	8,091.92	12.7552	0.1576%
2	16,431.42	16,405.96	25.4582	0.1552%
3	24,982.64	24,944.54	38.0941	0.1527%
4	33,760.20	33,709.55	50.6475	0.1502%
5	42,766.40	42,703.30	63.1027	0.1478%
6	52,002.10	51,926.66	75.4434	0.1453%
7	61,469.59	61,381.93	87.6530	0.1428%
8	71,169.81	71,070.09	99.7148	0.1403%
9	81,103.33	80,991.72	111.6113	0.1378%
10	91,270.41	91,147.08	123.3252	0.1353%
11	101,670.98	101,536.15	134.8387	0.1328%
12	112,303.90	112,157.77	146.1340	0.1303%
13	123,168.69	123,011.49	157.1933	0.1278%
14	134,263.89	134,095.89	167.9984	0.1253%
15	145,587.12	145,408.59	178.5315	0.1228%
16	157,136.03	156,947.25	188.7746	0.1203%
17	168,906.65	168,707.94	198.7102	0.1178%
18	180,896.02	180,687.69	208.3207	0.1153%
19	193,099.76	192,882.17	217.5891	0.1128%
20	205,513.06	205,286.56	226.4986	0.1103%

t	${}_tV^{det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{det}$	Diferencias Relativas
21	218,129.94	217,894.91	235.0329	0.1079%
22	230,944.97	230,701.79	243.1763	0.1054%
23	243,950.27	243,699.36	250.9140	0.1030%
24	257,138.77	256,880.54	258.2316	0.1005%
25	270,502.76	270,237.64	265.1157	0.0981%
26	284,032.68	283,761.12	271.5539	0.0957%
27	297,719.39	297,441.86	277.5347	0.0933%
28	311,552.30	311,269.25	283.0479	0.0909%
29	325,520.89	325,232.80	288.0843	0.0886%
30	339,613.58	339,320.95	292.6361	0.0862%
31	353,818.01	353,521.31	296.6970	0.0839%
32	368,121.83	367,821.57	300.2619	0.0816%
33	382,511.15	382,207.82	303.3274	0.0794%
34	396,973.21	396,667.31	305.8912	0.0771%
35	411,493.03	411,185.08	307.9533	0.0749%
36	426,056.13	425,746.61	309.5148	0.0727%
37	440,647.62	440,337.04	310.5788	0.0705%
38	455,252.54	454,941.39	311.1497	0.0684%
39	469,855.65	469,544.41	311.2336	0.0663%
40	484,440.70	484,129.86	310.8388	0.0642%
41	498,992.91	498,682.94	309.9744	0.0622%
42	513,496.79	513,188.14	308.6516	0.0601%
43	527,937.04	527,630.16	306.8830	0.0582%
44	542,299.42	541,994.73	304.6820	0.0562%
45	556,569.34	556,267.28	302.0640	0.0543%
46	570,734.15	570,435.11	299.0445	0.0524%
47	584,780.92	584,485.28	295.6409	0.0506%
48	598,699.15	598,407.28	291.8701	0.0488%
49	612,478.78	612,191.03	287.7502	0.0470%
50	626,112.88	625,829.58	283.2980	0.0453%
51	639,595.89	639,317.36	278.5307	0.0436%
52	652,926.01	652,652.54	273.4634	0.0419%
53	666,007.86	665,739.67	268.1873	0.0403%
54	679,029.75	678,767.18	262.5739	0.0387%
55	691,916.14	691,659.45	256.6935	0.0371%
56	704,686.35	704,435.80	250.5461	0.0356%
57	717,368.43	717,124.31	244.1237	0.0340%
58	730,002.63	729,765.23	237.4065	0.0325%
59	742,645.54	742,415.18	230.3579	0.0310%
60	755,375.04	755,152.12	222.9188	0.0295%
61	768,297.45	768,082.45	214.9980	0.0280%
62	781,558.16	781,351.70	206.4590	0.0264%
63	795,357.26	795,160.16	197.0996	0.0248%
64	809,970.45	809,783.83	186.6238	0.0230%
65	825,781.49	825,606.90	174.5967	0.0211%
66	843,329.82	843,169.44	160.3776	0.0190%
67	863,381.62	863,238.61	143.0169	0.0166%
68	887,039.36	886,918.27	121.0923	0.0137%
69	915,910.56	915,818.11	92.4518	0.0101%
70	952,373.30	952,319.50	53.7967	0.0056%

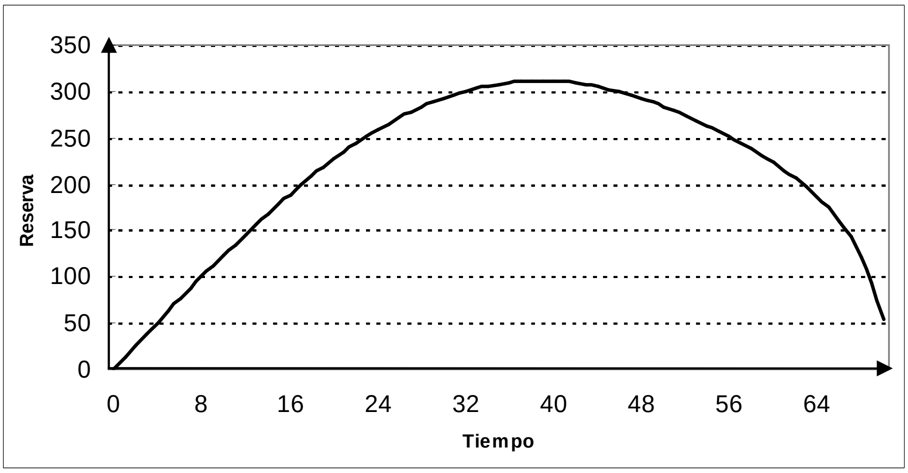


Figura 3.3 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 1 con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro vitalicio.

Pagos durante 20 años: $\pi_D = 13{,}952.06 \quad \pi_A = 13{,}979.47$

t	${}_tV^{det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{det}$	Diferencias Relativas
0	0.00	0.00	0.0000	0
1	13,021.78	13,049.32	27.5452	0.2115%
2	26,471.77	26,527.07	55.2994	0.2089%
3	40,362.38	40,445.62	83.2475	0.2063%
4	54,706.08	54,817.45	111.3739	0.2036%
5	69,516.51	69,656.17	139.6625	0.2009%
6	84,806.69	84,974.79	168.0966	0.1982%
7	100,591.89	100,788.55	196.6587	0.1955%
8	116,887.02	117,112.35	225.3311	0.1928%
9	133,707.66	133,961.75	254.0957	0.1900%
10	151,070.25	151,353.18	282.9337	0.1873%
11	168,992.22	169,304.05	311.8265	0.1845%
12	187,491.40	187,832.15	340.7551	0.1817%
13	206,587.78	206,957.48	369.7001	0.1790%
14	226,302.23	226,700.87	398.6424	0.1762%
15	246,656.72	247,084.28	427.5628	0.1733%
16	267,675.42	268,131.86	456.4422	0.1705%
17	289,383.55	289,868.81	485.2622	0.1677%
18	311,809.93	312,323.93	514.0042	0.1648%
19	334,985.25	335,527.90	542.6501	0.1620%
20	358,943.33	359,514.51	571.1824	0.1591%
21	369,113.87	369,685.77	571.8974	0.1549%
22	379,444.55	380,016.75	572.2002	0.1508%
23	389,929.06	390,501.14	572.0827	0.1467%
24	400,561.67	401,133.21	571.5367	0.1427%
25	411,336.20	411,906.76	570.5552	0.1387%
26	422,244.94	422,814.07	569.1329	0.1348%
27	433,280.52	433,847.79	567.2650	0.1309%
28	444,434.41	444,999.36	564.9484	0.1271%
29	455,698.12	456,260.31	562.1809	0.1234%
30	467,062.35	467,621.31	558.9618	0.1197%

t	${}_tV^{det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{det}$	Diferencias Relativas
31	478,517.09	479,072.38	555.2921	0.1160%
32	490,052.41	490,603.58	551.1735	0.1125%
33	501,657.10	502,203.71	546.6105	0.1090%
34	513,320.87	513,862.48	541.6071	0.1055%
35	525,031.64	525,567.81	536.1708	0.1021%
36	536,777.73	537,308.04	530.3096	0.0988%
37	548,547.11	549,071.15	524.0331	0.0955%
38	560,327.73	560,845.08	517.3523	0.0923%
39	572,107.28	572,617.56	510.2795	0.0892%
40	583,872.65	584,375.48	502.8295	0.0861%
41	595,611.91	596,106.93	495.0167	0.0831%
42	607,312.55	607,799.41	486.8577	0.0802%
43	618,962.22	619,440.59	478.3703	0.0773%
44	630,549.43	631,019.00	469.5721	0.0745%
45	642,062.40	642,522.88	460.4828	0.0717%
46	653,490.89	653,942.02	451.1211	0.0690%
47	664,824.49	665,265.99	441.5071	0.0664%
48	676,054.68	676,486.34	431.6599	0.0638%
49	687,173.37	687,594.97	421.5987	0.0614%
50	698,174.92	698,586.26	411.3408	0.0589%
51	709,054.86	709,455.76	400.9025	0.0565%
52	719,811.70	720,202.00	390.2970	0.0542%
53	730,368.45	730,748.09	379.6444	0.0520%
54	740,877.11	741,245.86	368.7491	0.0498%
55	751,276.67	751,634.38	357.7047	0.0476%
56	761,582.74	761,929.24	346.5017	0.0455%
57	771,817.94	772,153.06	335.1199	0.0434%
58	782,014.75	782,338.28	323.5238	0.0414%
59	792,218.86	792,530.51	311.6561	0.0393%
60	802,493.13	802,792.56	299.4310	0.0373%
61	812,923.39	813,210.12	286.7231	0.0353%
62	823,627.05	823,900.40	273.3510	0.0332%
63	834,765.66	835,024.72	259.0540	0.0310%
64	846,561.87	846,805.32	243.4583	0.0288%
65	859,325.57	859,551.59	226.0255	0.0263%
66	873,492.42	873,698.39	205.9752	0.0236%
67	889,681.24	889,863.40	182.1665	0.0205%
68	908,782.47	908,935.38	152.9132	0.0168%
69	932,094.56	932,210.26	115.6933	0.0124%
70	961,538.46	961,605.14	66.6831	0.0069%

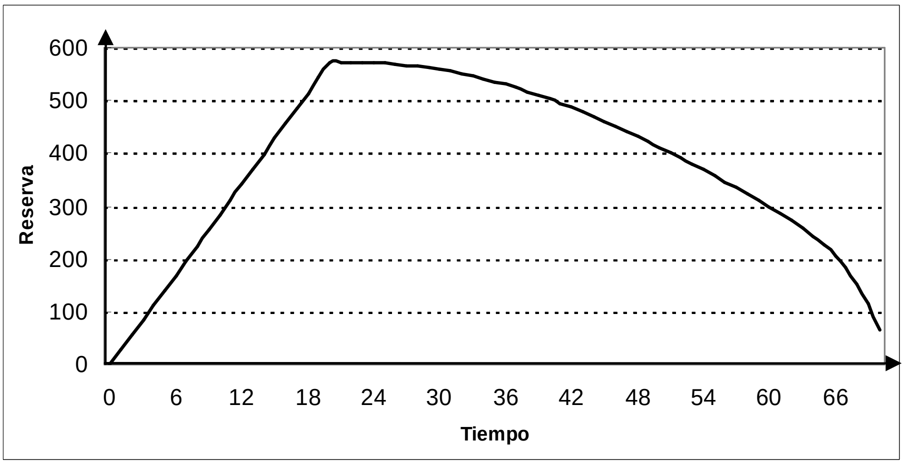


Figura 3.4 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 1 con pago de primas durante 20 años para un seguro vitalicio.

En este caso se vuelve a observar que en todos los años la reserva bajo el modelo aleatorio es mayor que la reserva bajo el modelo clásico, en este caso las diferencias pasan al orden de centenas.

Finalmente si consideramos un seguro dotal 5 y un dotal 15 para la misma edad e hipótesis demográficas y sobre la tasa de interés, con período de pago de primas igual al período de cobertura, con suma asegurada de $1,000,000 y beneficio de sobrevivencia de $50,000

Para el caso del dotal 5 se tiene que $\pi_D = 10{,}506.98 \quad \pi_A = 10{,}509.00$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{pros} - {}_tV^{Det}$	Diferencias Relativas
0	0	0	0	0
1	9,433.49	9,434.83	1.35	0.0143%
2	19,145.18	19,147.24	2.07	0.0108%
3	29,140.21	29,142.33	2.11	0.0073%
4	39,423.36	39,424.80	1.44	0.0037%
5	50,000	50,000	0	0

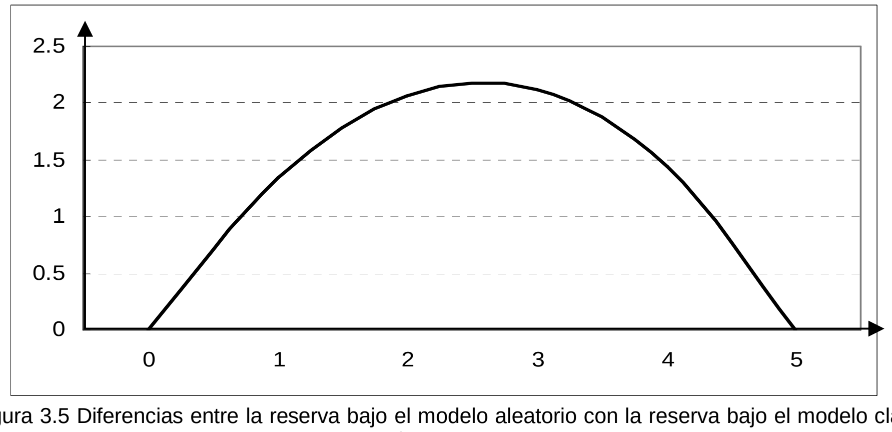


Figura 3.5 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 1 con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro dotal 5.

Para el caso del dotal 15 se tiene que: $\pi_D = 4{,}758.85 \quad \pi_A = 4{,}760.67$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{pros} - {}_tV^{Det}$	Diferencias Relativas
0	0.00	0.00	0	0
1	3,446.40	3,447.95	1.55	0.0451%
2	6,920.69	6,923.62	2.92	0.0422%
3	10,415.94	10,420.04	4.10	0.0393%
4	13,924.01	13,929.08	5.07	0.0364%
5	17,436.55	17,442.38	5.83	0.0334%
6	20,943.00	20,949.37	6.37	0.0304%
7	24,433.43	24,440.11	6.68	0.0273%
8	27,895.69	27,902.44	6.75	0.0242%
9	31,316.21	31,322.79	6.58	0.0210%
10	34,680.02	34,686.17	6.15	0.0177%
11	37,970.63	37,976.10	5.47	0.0144%
12	41,169.05	41,173.56	4.51	0.0110%
13	44,255.51	44,258.80	3.29	0.0074%
14	47,207.60	47,209.38	1.78	0.0038%
15	50,000	50,000	0	0

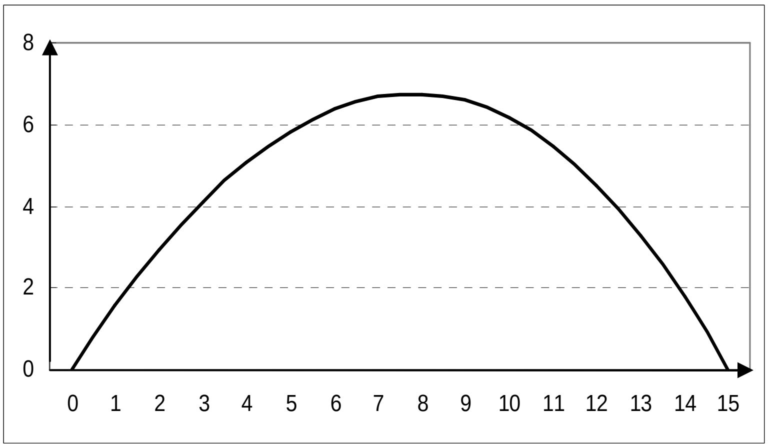


Figura 3.6 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 1 con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro dotal 5.

Ejemplo 2

Otro posible modelo, propuesto por Bowers [4], para la tasa de interés es suponer que:

$$\ln(1+I_k)=\mu+\varepsilon_k$$

Donde μ es una constante y ε_k son variables aleatorias independientes con distribución normal $(0,\sigma^2)$.

Es claro que $\ln(1+I_k)$ tiene una distribución Normal (μ,σ^2)

Además como $\ln\frac{1}{(1+I_k)}=-\ln(1+I_k)$ se tiene que $\ln\frac{1}{(1+I_k)}$ tiene una distribución Normal$(-\mu,\sigma^2)$. Por lo tanto se tiene que $\frac{1}{(1+I_k)}$ tiene una distribución log-normal con parámetros $(-\mu,\sigma^2)$, Cabe mencionar que $(1+I_k)$ tiene una distribución log-normal de parámetros (μ,σ^2)

Entonces:

$$E[1+I_k]=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\rightarrow E[I_k]=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1$$

$$E\left[\frac{1}{1+I_k}\right]=e^{-\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

Cabe mencionar que este modelo puede ser interpretado de la siguiente forma: la tasa de interés continua en cada año esta alrededor de una media μ pero esta sujeta a eventualidades aleatorias las cuales en cada año están dadas por ε_k.

Con este modelo sobre la tasa de interés se calculará para una persona de edad 50 utilizando los parámetros $\mu=.05$, $\sigma^2=.002$ utilizando la tabla Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual), para un seguro temporal 20 con pago de primas durante el período de cobertura y pago de primas durante 15 años, utilizando el modelo de tasas mencionado anteriormente,

En este caso:

$$E[1+I]=e^{.05+.001}\approx 1.05232$$

$$E\left[\frac{1}{1+I}\right]=e^{-.05+.001}\approx .95218$$

Para el caso con período de pago de primas durante el período de cobertura se tiene que:

$$\pi_A=11{,}945.52 \quad \pi_D=11{,}865.68$$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{Det}$	Diferencias relativas
0	0	0	0	0
1	5,888.61	5,947.91	59.30	1.0070%
2	11,621.27	11,730.86	109.58	0.9430%
3	17,154.83	17,305.55	150.72	0.8786%
4	22,442.81	22,625.45	182.64	0.8138%
5	27,433.18	27,638.54	205.36	0.7486%
6	32,065.82	32,284.82	219.00	0.6830%
7	36,274.84	36,498.64	223.79	0.6169%
8	39,984.96	40,205.08	220.12	0.5505%
9	43,112.54	43,321.05	208.50	0.4836%
10	45,562.64	45,752.32	189.67	0.4163%
11	47,227.71	47,392.30	164.59	0.3485%
12	47,987.01	48,121.47	134.47	0.2802%
13	47,701.87	47,802.72	100.85	0.2114%
14	46,217.23	46,282.89	65.66	0.1421%
15	43,353.22	43,384.49	31.27	0.0721%
16	38,905.44	38,906.04	0.60	0.0015%
17	32,639.02	32,616.27	-22.75	-0.0697%
18	24,283.53	24,249.12	-34.41	-0.1417%
19	13,525.77	13,496.76	-29.01	-0.2145%
20	0	0	0	0

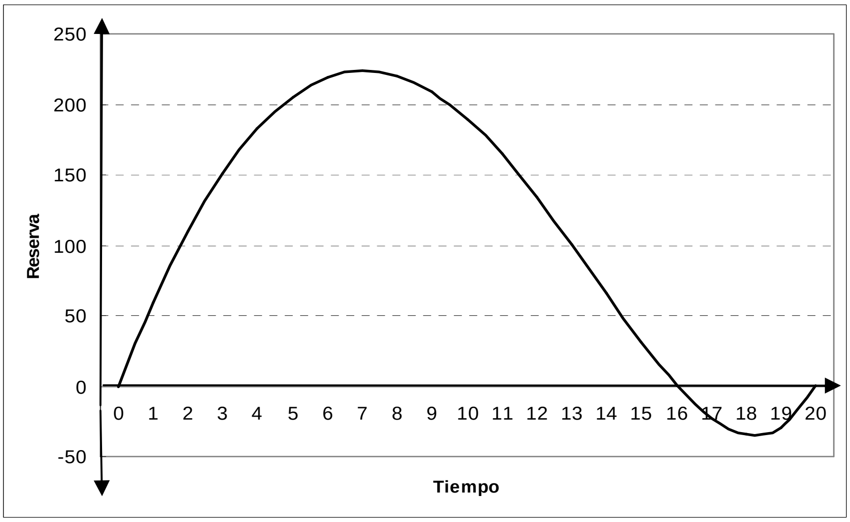


Figura 3.7 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 2 con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro temporal 20.

Para el caso de primas pagaderas durante 15 años se tiene que:

$$\pi_A = 13{,}979.55 \quad \pi_D = 13{,}842.25$$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{Det}$	Diferencias relativas
0	0	0	0	0
1	7,982.50	8,098.36	115.86	1.4514%
2	15,935.55	16,157.12	221.57	1.3904%
3	23,826.16	24,142.88	316.72	1.3293%
4	31,619.20	32,020.14	400.94	1.2680%
5	39,275.27	39,749.18	473.91	1.2066%
6	46,748.44	47,283.79	535.36	1.1452%
7	53,988.67	54,573.76	585.09	1.0837%
8	60,938.61	61,561.59	622.97	1.0223%
9	67,534.81	68,183.80	648.99	0.9610%
10	73,705.20	74,368.42	663.22	0.8998%
11	79,368.23	80,034.11	665.88	0.8390%
12	84,432.76	85,090.10	657.34	0.7785%
13	88,794.01	89,432.17	638.16	0.7187%
14	92,335.67	92,944.79	609.12	0.6597%
15	94,922.55	95,493.82	571.27	0.6018%
16	81,538.31	81,946.85	408.55	0.5010%
17	65,727.10	65,990.39	263.28	0.4006%
18	47,144.70	47,286.28	141.58	0.3003%
19	25,391.45	25,442.28	50.83	0.2002%
20	0	0	0	0

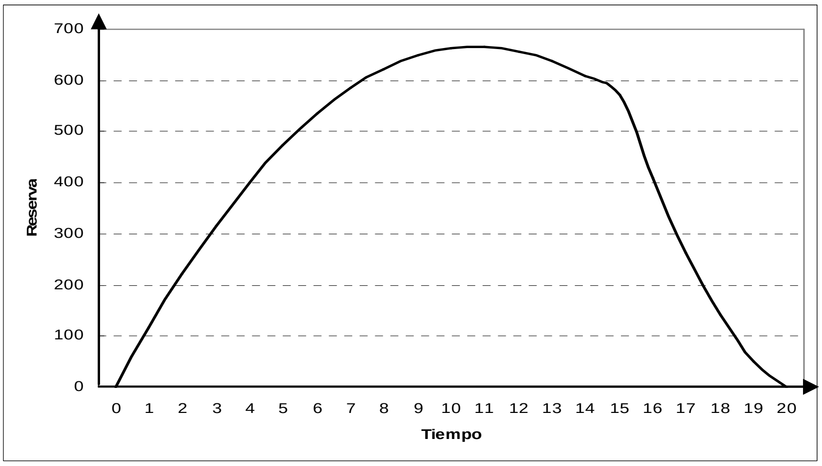


Figura 3.8 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 2 con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro temporal 20.

Se puede observar que en ambos casos la tendencia que se tenia cuando la tasa se modeló bajo una distribución uniforme, para el caso de un temporal con pagos durante el período de pago de cobertura, en general es mayor la reserva bajo el modelo de tasas aleatorias, sin embargo hacia el final la tendencia se revierte siendo mayor la reserva bajo el modelo clásico; y para el caso de período de pago de primas menores al período de cobertura se tiene que la reserva bajo el modelo de tasa fortuitas siempre es mayor aunque las diferencias se disminuyen cuando termina el pago de primas.

Ahora realizando el cálculo para el caso de un seguro vitalicio con pago de primas vitalicias:

$$\pi_A = 19{,}442.85 \quad \pi_D = 19{,}054.94$$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{Det}$	Diferencias relativas
0	0.00	0.00	0.0000	0
1	13,504.58	13,874.36	369.78	2.7382%
2	27,313.29	28,045.81	732.52	2.6819%
3	41,420.00	42,507.57	1,087.57	2.6257%
4	55,819.46	57,253.77	1,434.31	2.5695%
5	70,505.61	72,277.71	1,772.10	2.5134%
6	85,469.88	87,570.22	2,100.34	2.4574%
7	100,704.14	103,122.56	2,418.42	2.4015%
8	116,198.23	118,924.01	2,725.78	2.3458%
9	131,941.96	134,963.81	3,021.84	2.2903%
10	147,923.61	151,229.71	3,306.10	2.2350%
11	164,130.20	167,708.23	3,578.03	2.1800%
12	180,548.62	184,385.81	3,837.18	2.1253%
13	197,163.48	201,246.62	4,083.13	2.0709%
14	213,960.63	218,276.11	4,315.48	2.0169%
15	230,922.79	235,456.66	4,533.88	1.9634%
16	248,032.99	252,771.03	4,738.04	1.9102%
17	265,273.47	270,201.18	4,927.71	1.8576%
18	282,626.07	287,728.76	5,102.69	1.8055%
19	300,071.93	305,334.75	5,262.82	1.7539%
20	317,590.53	322,998.57	5,408.04	1.7028%
21	335,162.96	340,701.26	5,538.29	1.6524%
22	352,769.00	358,422.62	5,653.61	1.6026%
23	370,388.34	376,142.41	5,754.07	1.5535%
24	388,001.73	393,841.54	5,839.81	1.5051%
25	405,589.12	411,500.14	5,911.01	1.4574%
26	423,132.66	429,100.58	5,967.92	1.4104%
27	440,613.81	446,624.64	6,010.83	1.3642%
28	458,016.95	464,057.01	6,040.06	1.3187%
29	475,326.76	481,382.74	6,055.98	1.2741%
30	492,531.78	498,590.76	6,058.98	1.2302%
31	509,622.21	515,671.68	6,049.47	1.1870%
32	526,593.01	532,620.87	6,027.85	1.1447%
33	543,311.05	549,307.31	5,996.26	1.1037%
34	560,029.11	565,981.18	5,952.06	1.0628%
35	576,642.19	582,539.05	5,896.86	1.0226%
36	593,173.59	599,004.40	5,830.81	0.9830%
37	609,658.74	615,412.60	5,753.86	0.9438%
38	626,150.14	631,815.85	5,665.71	0.9048%
39	642,723.37	648,288.99	5,565.62	0.8659%
40	659,484.41	664,936.66	5,452.25	0.8267%
41	676,580.12	681,903.54	5,323.42	0.7868%
42	694,214.01	699,389.68	5,175.66	0.7455%
43	712,669.37	717,673.01	5,003.65	0.7021%
44	732,340.67	737,139.95	4,799.28	0.6553%

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{Det}$	Diferencias relativas
45	753,782.35	758,332.66	4,550.32	0.6037%
46	777,780.87	782,019.12	4,238.25	0.5449%
47	805,463.14	809,298.06	3,834.93	0.4761%
48	838,464.45	841,761.69	3,297.24	0.3932%
49	879,189.20	881,747.74	2,558.54	0.2910%
50	931,223.73	932,738.28	1,514.55	0.1626%

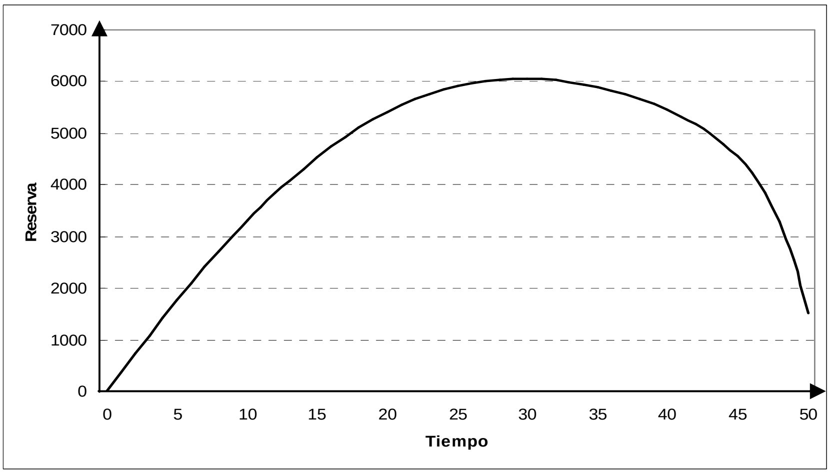


Figura 3.9 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 2 con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro vitalicio.

Ahora suponiendo pago de primas durante 20 años para el seguro vitalicio se tiene que:

$$\pi_A = 23{,}985.27 \quad \pi_D = 23{,}334.82$$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{Det}$	Diferencias relativas
0	0.00	0.00	0.0000	0
1	18,038.49	18,676.79	638.30	3.5385%
2	36,654.98	37,930.58	1,275.61	3.4800%
3	55,865.41	57,776.77	1,911.37	3.4214%
4	75,689.07	78,234.11	2,545.04	3.3625%
5	96,147.26	99,323.35	3,176.09	3.3034%
6	117,262.09	121,066.10	3,804.01	3.2440%
7	139,059.84	143,488.14	4,428.31	3.1845%
8	161,569.10	166,617.62	5,048.51	3.1247%
9	184,823.41	190,487.61	5,664.19	3.0647%
10	208,860.59	215,135.52	6,274.93	3.0044%
11	233,723.96	240,604.30	6,880.35	2.9438%
12	259,464.49	266,944.58	7,480.09	2.8829%
13	286,140.17	294,214.00	8,073.83	2.8216%
14	313,820.73	322,482.01	8,661.28	2.7599%
15	342,585.69	351,827.85	9,242.16	2.6978%
16	372,529.67	382,345.87	9,816.20	2.6350%
17	403,764.16	414,147.26	10,383.10	2.5716%

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{al} - {}_tV^{Det}$	Diferencias relativas
18	436,421.16	447,363.73	10,942.57	2.5073%
19	470,657.04	482,151.27	11,494.23	2.4422%
20	506,656.82	518,694.42	12,037.60	2.3759%
21	519,360.68	531,279.92	11,919.23	2.2950%
22	532,088.85	543,878.69	11,789.84	2.2158%
23	544,826.62	556,476.35	11,649.73	2.1382%
24	557,560.10	569,059.33	11,499.22	2.0624%
25	570,274.79	581,613.48	11,338.70	1.9883%
26	582,957.76	594,126.29	11,168.53	1.9158%
27	595,595.64	606,584.80	10,989.16	1.8451%
28	608,177.12	618,978.12	10,801.00	1.7760%
29	620,691.13	631,295.63	10,604.50	1.7085%
30	633,129.37	643,529.45	10,400.08	1.6426%
31	645,484.78	655,672.92	10,188.14	1.5784%
32	657,753.71	667,722.73	9,969.02	1.5156%
33	669,839.90	679,585.74	9,745.85	1.4550%
34	681,926.10	691,439.82	9,513.71	1.3951%
35	693,936.41	703,211.43	9,275.02	1.3366%
36	705,887.67	714,917.26	9,029.59	1.2792%
37	717,805.49	726,582.46	8,776.97	1.2228%
38	729,727.84	738,244.14	8,516.30	1.1671%
39	741,709.34	749,955.51	8,246.17	1.1118%
40	753,826.62	761,790.96	7,964.35	1.0565%
41	766,185.85	773,853.36	7,667.51	1.0007%
42	778,934.14	786,284.90	7,350.76	0.9437%
43	792,276.31	799,283.21	7,006.89	0.8844%
44	806,497.55	813,122.98	6,625.43	0.8215%
45	821,998.66	828,189.67	6,191.01	0.7532%
46	839,348.22	845,029.25	5,681.03	0.6768%
47	859,360.93	864,422.88	5,061.95	0.5890%
48	883,219.00	887,502.48	4,283.49	0.4850%
49	912,660.67	915,930.06	3,269.39	0.3582%
50	950,278.67	952,181.13	1,902.46	0.2002%

En este caso las diferencias siguen la siguiente tendencia:

Figura 3.10 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 2 con pago de primas durante 20 años para un seguro vitalicio.

Se puede observar que la tendencia se repite, siendo en ambos casos la reserva bajo el modelo de tasas aleatorias mayor a la reserva bajo el modelo clásico, observando que las diferencias decrecen de manera más rápida al terminar el plazo de cobertura.

Ahora calculando un dotal 15 bajo los mismos supuestos demográficos, de interés con la misma suma asegurada y un beneficio que paga $20,000 en caso de que el asegurado sobreviva durante los 15 años se tiene que:

$$\pi_A = 19{,}109.10 \quad \pi_D = 18{,}883.52$$

t	${}_tV^{Det}$	${}_tV^{al}$	${}_tV^{pros} - {}_tV^{al}$	Diferencias Relativas
0	0	0	0	0
1	13,322.99	13,521.52	198.53	1.4901%
2	26,939.13	27,319.54	380.41	1.4121%
3	40,841.42	41,385.69	544.27	1.3326%
4	55,023.63	55,712.28	688.65	1.2515%
5	69,478.59	70,290.58	811.99	1.1687%
6	84,196.51	85,109.17	912.65	1.0840%
7	99,167.89	100,156.77	988.88	0.9972%
8	94,286.00	95,125.38	839.37	0.8902%
9	88,309.12	89,000.68	691.56	0.7831%
10	81,095.13	81,642.80	547.67	0.6753%
11	72,482.87	72,893.23	410.36	0.5661%
12	62,290.39	62,573.17	282.79	0.4540%
13	50,308.96	50,477.68	168.73	0.3354%
14	36,303.04	36,375.72	72.68	0.2002%
15	20000	20000	0	0

Figura 3.11 Diferencias entre la reserva bajo el modelo aleatorio con la reserva bajo el modelo clásico para el ejemplo 2 con pago de primas durante 7 años para un seguro dotal 15.

Al igual que en el caso de los seguros temporales y vitalicios, las diferencias en el seguro dotal se incrementan si se reduce el período de pago de primas.

Como conclusión se puede ver que en la mayor parte de los casos bajo el modelo de tasas aleatorias se constituye una reserva mayor que cuando se utiliza el modelo clásico sobre la tasa de interés, teniendo diferencias que pueden llegar a ser significativas a nivel cartera, y estas diferencias tienden a crecer mientras menor sea el plazo de pago de primas y mayor sea el período de cobertura, aunque se puede dar el caso inverso como se observó en los seguros temporales con período de pago de primas igual al período de cobertura.

Con esto se ejemplifica que al tomar la siguiente aproximación:

$$E\left[\frac{1}{1+I}\right] \approx \frac{1}{1+E[I]}$$

No es adecuado pues conforme se incrementa el plazo de cobertura y el pago de primas sea menor, las diferencias pueden ser significativas.

Ejemplo 3

Ahora bien para observar el comportamiento de la función de pérdida se supondrá que para una persona de edad 40 esta cubierta por un seguro temporal 10, con suma asegurada de $1,200,000. Se ejemplificara como esta dada la pérdida en este caso al final del séptimo año de cobertura utilizando la tabla de mortalidad Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual), y se tiene el siguiente esquema de tasas de interés uniforme:

t	Soporte de I_{t+1}		t	Soporte de I_{t+1}	
0	3.5702%	4.9504%	5	3.7543%	6.4425%
1	3.7632%	4.7846%	6	2.8918%	5.6708%
2	2.0803%	5.8705%	7	3.6156%	5.3774%
3	3.8525%	5.9658%	8	2.5664%	6.4598%
4	2.8714%	5.1216%	9	3.6972%	6.0918%

Esto es, en cada año tiene probabilidad de $1/2$ de tomar cada valor.

Bajo este esquema se puede calcular con las fórmulas ya presentadas la prima la cual está dada por:

$$\pi = 5{,}042.80$$

Se puede calcular que la reserva está dada al final del año por:

$${}_7V = 4{,}343.39$$

En este caso se tiene que:

$K(40+7)$	$P[K(40+7)]$
0	0.005317
1	0.005695

$K(40+7)$	$P[K(40+7)]$
2	0.006096
>2	0.982892

Ahora suponiendo que $K(40+7)=0$ la única posibilidad para la tasa de interés en ese año puede ser 3.6156% o 5.3774%, y esta tasa únicamente afecta a la suma asegurada que se paga al fin del año, por lo tanto:

$VP(SA)$	1,158,126.38	1,138,763.89
π_7	5,042.80	5,042.80
Pérdida	1,153,083.58	1,133,721.09
Probabilidad	0.002659	0.002659

La probabilidad es el resultado de dividir $P[K(40+7)]/2$ que son los posibles valores de la trayectoria de la tasa de interés (esto es inmediato por la independencia de las tasas de interés y utilizando probabilidad condicional). Ahora para el caso cuando $K(40+7)=1$

Trayectoria Interés		$VP(SA)$	$VP(\pi_8)$	π_7	*Pérdida*	*Probabilidad*
3.6156%	2.5664%	1,129,147.64	4,866.83	5,042.80	1,119,238.01	0.001424
3.6156%	6.4598%	1,087,853.67	4,866.83	5,042.80	1,077,944.04	0.001424
5.3774%	2.5664%	1,110,269.64	4,785.46	5,042.80	1,100,441.38	0.001424
5.3774%	6.4598%	1,069,666.05	4,785.46	5,042.80	1,059,837.79	0.001424

Cuando $K(40+7)=2$

Trayectoria Interés			$VP(SA)$	$VP(\pi_9)$	$VP(\pi_8)$	π_7	*Pérdida*	*Probabilidad*
3.6156%	2.5664%	3.6972%	1,088,889.01	4,745.05	4,866.83	5,042.80	1,074,234.33	0.000762
3.6156%	2.5664%	6.0918%	1,064,311.75	4,745.05	4,866.83	5,042.80	1,049,657.07	0.000762
3.6156%	6.4598%	3.6972%	1,049,067.34	4,571.52	4,866.83	5,042.80	1,034,586.19	0.000762
3.6156%	6.4598%	6.0918%	1,025,388.89	4,571.52	4,866.83	5,042.80	1,010,907.74	0.000762
5.3774%	2.5664%	3.6972%	1,070,684.09	4,665.72	4,785.46	5,042.80	1,056,190.10	0.000762
5.3774%	2.5664%	6.0918%	1,046,517.73	4,665.72	4,785.46	5,042.80	1,032,023.75	0.000762
5.3774%	6.4598%	3.6972%	1,031,528.18	4,495.09	4,785.46	5,042.80	1,017,204.83	0.000762
5.3774%	6.4598%	6.0918%	1,008,245.61	4,495.09	4,785.46	5,042.80	993,922.26	0.000762

Y el caso cuando $K(40+7)>2$

Trayectoria Interés			$VP(\pi_9)$	$VP(\pi_8)$	π_7	*Pérdida*	*Probabilidad*
3.6156%	2.5664%	3.6972%	4,745.05	4,866.83	5,042.80	-14,654.68	0.122862
3.6156%	2.5664%	6.0918%	4,745.05	4,866.83	5,042.80	-14,654.68	0.122862
3.6156%	6.4598%	3.6972%	4,571.52	4,866.83	5,042.80	-14,481.15	0.122862
3.6156%	6.4598%	6.0918%	4,571.52	4,866.83	5,042.80	-14,481.15	0.122862
5.3774%	2.5664%	3.6972%	4,665.72	4,785.46	5,042.80	-14,493.98	0.122862
5.3774%	2.5664%	6.0918%	4,665.72	4,785.46	5,042.80	-14,493.98	0.122862
5.3774%	6.4598%	3.6972%	4,495.09	4,785.46	5,042.80	-14,323.35	0.122862
5.3774%	6.4598%	6.0918%	4,495.09	4,785.46	5,042.80	-14,323.35	0.122862

En resumen se puede observar que la tabla de probabilidades conjuntas entre las tasas de interés y el tiempo de vida esta dada por:

Trayectoria tasas interés/ Tiempo de vida	*0*	*1*	*2*	*>2*
3.6156%	0.002659	0	0	0
5.3774%	0.002659	0	0	0
3.6156% , 2.5664%	0	0.001424	0	0
3.6156% , 6.4598%	0	0.001424	0	0
5.3774% , 2.5664%	0	0.001424	0	0
5.3774% , 6.4598%	0	0.001424	0	0
3.6156% , 2.5664% , 3.6972%	0	0	0.000762	0.122862
3.6156% , 2.5664% , 6.0918%	0	0	0.000762	0.122862
3.6156% , 6.4598% , 3.6972%	0	0	0.000762	0.122862
3.6156% , 6.4598% , 6.0918%	0	0	0.000762	0.122862
5.3774% , 2.5664% , 3.6972%	0	0	0.000762	0.122862
5.3774% , 2.5664% , 6.0918 %	0	0	0.000762	0.122862
5.3774% , 6.4598% , 3.6972 %	0	0	0.000762	0.122862
5.3774% , 6.4598% , 6.0918%	0	0	0.000762	0.122862

Finalmente resumiendo los posibles valores que puede tomar el valor de la pérdida con sus respectivas probabilidades se tiene que:

Pérdida	*Probabilidad*	*Pérdida*	*Probabilidad*
-14,654.68	0.122862	1,032,023.75	0.000762
-14,654.68	0.122862	1,034,586.19	0.000762
-14,493.98	0.122862	1,049,657.07	0.000762
-14,493.98	0.122862	1,056,190.10	0.000762
-14,481.15	0.122862	1,059,837.79	0.001424
-14,481.15	0.122862	1,074,234.33	0.000762
-14,323.35	0.122862	1,077,944.04	0.001424
-14,323.35	0.122862	1,100,441.38	0.001424
993,922.26	0.000762	1,119,238.01	0.001424
1,010,907.74	0.000762	1,133,721.09	0.002659
1,017,204.83	0.000762	1,153,083.58	0.002659

Utilizando esta tabla es fácil comprobar que la esperanza esta dada por $4{,}343.39$, resultado que se había obtenido anteriormente.

Como se puede observar, calcular la reserva a través de la definición de esperanza puede ser un trabajo laborioso, por lo cual si se desea información adicional a la esperanza puede resultar ser un trabajo complicado, por lo cual puede ser recomendable simular el proceso; en el capítulo 5 se abordara con mayor detalle este problema.

3.3 Reserva matemática con tasas de interés bajo modelos lineales de series de tiempo

3.3.1 Conceptos Básicos de Series de Tiempo

Una serie de tiempo consiste en observaciones de datos en determinados momentos del tiempo generalmente equiespaciados y asumiendo que los valores que toman los datos están en un dominio continuo (aunque estos dos supuestos se pueden omitir y generalizar los resultados no es el objetivo de este trabajo, además de ser supuestos que se utilizan en la teoría clásica de series de tiempo).
Esto evidentemente genera un proceso estocástico $\{\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ el cual puede ser utilizado para hacer predicciones futuras con la información que se tenga de las observaciones pasadas.

Debido a los modelos que se van a tratar (modelos lineales de series de tiempo) se necesita que se cumpla el supuesto de estacionariedad [5] débil el cual esta dado por:

$$E[X_t]=\mu \quad \forall t$$

$$Cov[X_t, X_{t+s}]=\gamma(s) \quad \forall t, s$$

Esto se interpreta de la siguiente manera: la esperanza de cualquier variable aleatoria del proceso debe ser la misma, mientras que la covarianza entre dos variables aleatorias del proceso solo debe depender de la distancia que existe entre los datos, mas no del tiempo. (Note que esta condición trae como consecuencia que la varianza de cualquier variable aleatoria del proceso debe ser la misma).

Cabe mencionar que a $\gamma(s)$ se le conoce como función de autocovarianza mientras que a

$$\rho(s)=Corr[X_t, X_{t+s}]=\frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

Se le conoce como función de auto correlación [6] (a.c.f.).

Este supuesto de estacionariedad débil puede no esta alejado de la realidad, para intervalos de tiempo no muy grandes, puesto que en general las tasas de interés se encuentran alrededor de una media, mientras que la correlación que existe entre estas depende del tiempo que las separa, más no del momento de evaluación (en su mayoría), sin embargo cabe resaltar que puede suceder que las series de tasas de interés no cumplan con otras condiciones de los modelos lineales que se mencionan posteriormente.

Ahora bien dentro de los modelos lineales más comunes de series de tiempo se encuentran los modelos AR, MA y $ARMA$ para estos tres procesos se considera un ruido blanco, es decir una sucesión dada por $\{\varepsilon_t | t \in \mathbb{Z}\}$ donde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ y son independientes entre si.

En el caso del modelo $AR(1)$ [7] esta definido como:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Es importante mencionar que esta definición implica que la media del proceso es cero, sin embargo el proceso dado por:

$$(X_t - \mu) = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

Tiene media μ. De manera más general se tiene al proceso $AR(p)$, con media μ, dado por:

$$(X_t - \mu) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (X_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t$$

Los modelos $AR(p)$ pueden ser interpretados de la siguiente forma: la media del valor que puede tomar es μ, sin embargo el modelo está sujeto a fluctuaciones aleatorias dadas por ε_t y por los últimos p valores, con magnitud dada por los coeficientes α_j, que tomo el proceso.

Ahora el caso del modelo $MA(q)$ esta dado por:

$$(X_t - \mu) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Los modelos $MA(q)$ pueden ser interpretados de la siguiente forma: la media del valor que puede tomar es μ sin embargo el modelo está sujeto a fluctuaciones aleatorias dadas por ε_t y por rezagos de las q fluctuaciones pasadas con magnitud dada por los coeficientes β_j.

De manera más general se tiene los modelos $ARMA(p,q)$ dados por:

$$(X_t - \mu) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (X_{t-j} - \mu) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

Es claro que los modelos $ARMA(p,q)$ son la combinación de los modelos $AR(p)$ y $MA(q)$.

Finalmente cabe mencionar que se deben imponer condiciones sobre los coeficientes α_j y β_j para garantizar condiciones de estacionariedad y unicidad pues por ejemplo en el caso de un $AR(1)$ de media cero se tiene que:

$$X_t=\alpha_1 X_{t-1}+\varepsilon_t=\alpha_1^2 X_{t-2}+\alpha_1\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}$$

Si bien de esta manera es fácil ver que $E[X_t]=0$ y para la varianza:

$$Var(X_t)=Var\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}Var\left(\alpha_1^j\varepsilon_{t-j}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^{2j}\sigma^2 \tag{3.8}$$

Esta serie converge si y solo si $|\alpha_1|<1$ (y de hecho si esta condición no se cumple se tiene que el proceso no es estacionario)

Ahora por ejemplo si se considera un $MA(1)$ con media cero se tiene que:

$$X_t=\beta_1\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$$

En este caso se tienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}&E[X_t]=0\\&Var[X_t]=\left(\beta_1^2+1\right)\sigma^2\\&\gamma_1=\beta_1\sigma^2\\&\gamma_k=0\quad\forall k\geq 2\end{aligned}$$

De donde:

$$\rho_1=\frac{\beta_1}{\beta_1^2+1}$$

$$\rho_k=0\quad k\geq 2$$

Sin embargo el a.c.f. no es única de este modelo, pues ahora considerando el parámetro dado por $1/\beta_1$ se obtiene la misma a.c.f.

También se pueden dar ejemplos de modelos $ARMA(p,q)$ que pueden ser expresados bajo un menor orden (por ejemplo un $ARMA(p-3,q-2)$) si ciertas condiciones no se cumplen.

Por lo tanto para los modelos $AR(p)$ y $ARMA(p,q)$ se define el polinomio:

$$\vartheta_{\alpha}(z)=1-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2-....-\alpha_p z^p$$

Y para los modelos $MA(q)$ y $ARMA(p,q)$ se define el polinomio:

$$\vartheta_{\beta}(z)=1+\beta_1 z+\beta_2 z^2+....+\beta_q z^q$$

Entonces para los modelos $AR(p)$ y $ARMA(p,q)$ se requiere que las raíces de $\vartheta_{\alpha}(z)$ estén fuera del círculo unitario (en el plano complejo) para garantizar estacionariedad, en los modelos $MA(q)$ y $ARMA(p,q)$ se requiere que las raíces de $\vartheta_{\beta}(z)$ estén fuera del circulo unitario (en el plano complejo) para garantizar unicidad, y en caso de los modelos $ARMA(p,q)$ se requiere que $\vartheta_{\alpha}(z)$ y $\vartheta_{\beta}(z)$ no tengan raíces en común para garantizar otra condición de unicidad [8].

Cabe mencionar que existe literatura de series de tiempo donde los polinomios son definidos de la siguiente manera: $\vartheta_{\alpha}(z)=z^p-\alpha_1 z^{p-1}-\alpha_2 z^{p-2}-....-\alpha_p$ $\vartheta_{\beta}(z)=z^q+\beta_1 z^{q-1}+\beta_2 z^{q-2}+....+\beta_p$ y pidiendo que las raíces se encuentren dentro del círculo unitario del plano complejo, pero se puede demostrar que ambas definiciones son equivalentes con respecto a las condiciones de las raíces.

De aquí en adelante se supondrá que se satisfacen las condiciones de estacionariedad y unicidad ya antes señaladas, asi como la realización de un análisis exploratorio que apoye el modelo de series de tiempo lineal sobre las tasas de interés continuo; cabe mencionar que se utilizará el modelo sobre las tasas de interés continuo dado en (2.15), el cual es:

$$_hV=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} M_{\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}} \left(\overline{-1}\right)\, _j p_{x+h} q_{x+h+j}-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j} M_{\sum_{k=1}^{j}\delta_{k+h}} \left(\overline{-1}\right)\, _j p_{x+h}$$

3.3.2 Modelos AR

En este caso se supondrá que las tasas de interés instantáneas están dadas por un modelo $AR(p)$ con media μ es decir se tiene que:

$$\delta_t=\mu+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\left(\delta_{t-j}-\mu\right)+\varepsilon_t \tag{3.9}$$

Para encontrar la media y la varianza de $\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{h+k}$ es necesario hacer notar que las δ_k involucradas constituyen una normal multivariada, sin embargo este supuesto es válido bajo los modelos lineales de series de tiempo clásicos, por lo cual para $j+1$ fijo se tiene que el vector de esperanzas es:

$$\bar{\mu} = \left(E[\delta_{h+1}], E[\delta_{h+2}], \ldots, E[\delta_{h+j+1}]\right)^T$$

Y matriz de covarianzas dada por:

$$\begin{bmatrix} Var(\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+j+1}) \\ Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+1}) & Var(\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+j+1}) \\ Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+2}) & Var(\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+j+1}) \\ . & . & . & ..... & . & . \\ Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+3}) & ..... & Var(\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+j+1}) \\ Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+j}) & Var(\delta_{h+j+1}) \end{bmatrix}$$

Que por el supuesto de estacionariedad se reduce a:

$$\bar{\mu} = (\mu, \mu, \ldots, \mu)^T$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & ..... & \gamma(j-1) & \gamma(j) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & ..... & \gamma(j-2) & \gamma(j-1) \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) & ..... & \gamma(j-3) & \gamma(j-2) \\ . & . & . & ..... & . & . \\ \gamma(j-1) & \gamma(j-2) & \gamma(j-3) & ..... & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(j) & \gamma(j-1) & \gamma(j-2) & ..... & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

Que en términos de las entradas $a_{x,u}$ de la matriz, y haciendo la observación que $\gamma(k) = \gamma(-k)$ esta puede ser escrita como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \gamma(1-1) & \gamma(1-2) & \gamma(1-3) & ..... & \gamma(1-j) & \gamma(1-(j+1)) \\ \gamma(2-1) & \gamma(2-2) & \gamma(2-3) & ..... & \gamma(2-j) & \gamma(2-(j+1)) \\ \gamma(3-1) & \gamma(3-2) & \gamma(3-3) & ..... & \gamma(3-j) & \gamma(3-(j+1)) \\ . & . & . & ..... & . & . \\ \gamma(j-1) & \gamma(j-2) & \gamma(j-3) & ..... & \gamma(j-j) & \gamma(j-(j+1)) \\ \gamma(j+1-1) & \gamma(j+1-2) & \gamma(j+1-3) & ..... & \gamma(j+1-j) & \gamma(j+1-(j+1)) \end{bmatrix}$$

Es decir se tiene que la entrada $\Sigma_{x,y} = \gamma(|x-y|)$.

Finalmente la generadora de momentos para la normal multivariada [9] está dada por:

$$M_{\sum_{K=1}^{j+1}\delta_{h+k}}(r)=exp\left\{\overline{\mu}^{T}r+\frac{1}{2}r^{T}\Sigma r\right\} \tag{3.10}$$

Ahora bien dado que se quiere valuar en $t=[-1,-1,-1,...,-1]^{T}$ se tiene que:

$$\overline{\mu}^{T}t=[\mu,\mu,...\mu][-1,-1,...,-1]^{T}=(j+1)\mu \tag{3.11}$$

Y para el caso de la varianza se tiene que:

$$[-1,-1,-1,...,-1]\begin{bmatrix}\gamma(1-1) & \gamma(1-2) & \gamma(1-3) & ..... & \gamma(1-j) & \gamma(1-(j+1))\\ \gamma(2-1) & \gamma(2-2) & \gamma(2-3) & ..... & \gamma(2-j) & \gamma(2-(j+1))\\ \gamma(3-1) & \gamma(3-2) & \gamma(3-3) & ..... & \gamma(3-j) & \gamma(3-(j+1))\\ . & . & . & ..... & . & .\\ \gamma(j-1) & \gamma(j-2) & \gamma(j-3) & ..... & \gamma(j-j) & \gamma(j-(j+1))\\ \gamma(j+1-1) & \gamma(j+1-2) & \gamma(j+1-3) & ..... & \gamma(j+1-j) & \gamma(j+1-(j+1))\end{bmatrix}[-1,-1,-1,...,-1]^{T}$$

$$=[-1.-1.-1,...,-1]\left[-\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(1-y),-\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(2-y),-\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(3-y),...,-\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(j+1-y)\right]$$

$$=\left[\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(1-y)+\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(2-y)+\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(3-y)+...+\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(j+1-y)\right]$$

$$=\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1}\gamma(x-y)$$

$$=\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1}\gamma|x-y|$$

Por lo tanto se tiene la expresión general:

$$M_{\sum_{K=1}^{j+1}\delta_{h+k}}(-1)=exp\left\{-\mu(j+1)+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1}\gamma|x-y|\right\} \tag{3.12}$$

Es posible obtener una expresión simplificada para $\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1}\gamma|x-y|$ pues:

$$\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1}\gamma|x-y|=(j+1)\gamma(0)+\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y\neq x}\gamma|x-y|$$

$$=(j+1)\gamma(0)+2\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y>x}\gamma|x-y|$$

$$=(j+1)\gamma(0)+2\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{y=x+1}^{j+1}\gamma(y-x)$$

Tomando el cambio de variable $z=y-x$:

$$=(j+1)\gamma(0)+2\sum_{x=1}^{j+1}\sum_{z=1}^{j+1-x}\gamma(z)$$

Cambiando el orden de las sumas:

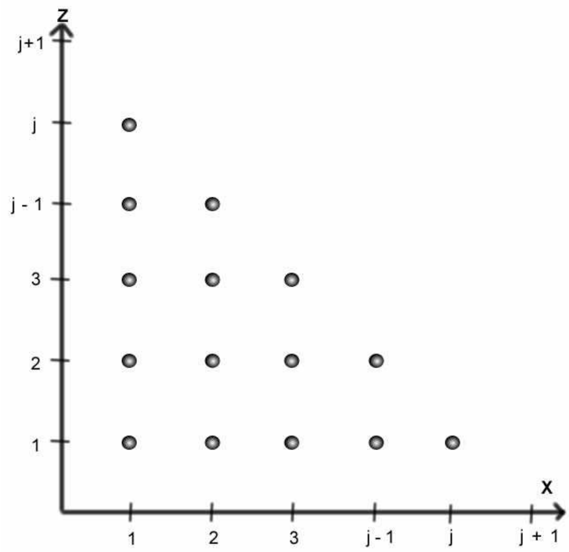


Figura 3.12 Esquema del soporte conjunto para el cambio de orden de la suma

Para z fijo se tiene que x toma valores en $\{1,2,...j+1-x\}$ mientras que z toma valores en $\{1,2,...j+1\}$ de donde se deduce:

$$=(j+1)\gamma(0)+2\sum_{z=1}^{j+1}\sum_{x=1}^{j+1-z}\gamma(z)$$

$$=(j+1)\gamma(0)+2\sum_{z=1}^{j+1}(j+1-z)\gamma(z)$$

Observando que el último término de la suma es cero se tiene que:

$$=(j+1)\gamma(0)+2\sum_{z=1}^{j}(j+1-z)\gamma(z)$$

Por lo tanto la generadora de momentos [10] evaluada en el vector $\overline{-1}$:

$$M_{\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{h+k}}(-1)=\exp\left\{-(j+1)\mu+\frac{(j+1)}{2}\gamma(0)+\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\gamma(k)\right\} \qquad (3.13)$$

Esta última expresión simplifica bastante los cálculos pues por ejemplo, tomando el modelo $AR(1)$.

$$\delta_t=\mu+\alpha(\delta_{t-1}-\mu)+\varepsilon_t$$

Se había obtenido la varianza de este proceso en (3.8), ahora para obtener la función de covarianzas:

$$\delta_{h+k}-\mu=\varepsilon_{h+k}+\alpha(\delta_{h+k-1}-\mu)$$

$$\delta_{h+k}-\mu=\varepsilon_{h+k}+\alpha^2(\delta_{h+k-2}-\mu)$$

$$\vdots$$

$$\delta_{h+k}-\mu=\varepsilon_{h+k}+\alpha^k(\delta_h-\mu)$$

Multiplicando la ecuación por $\delta_h-\mu$:

$$(\delta_{h+k}-\mu)(\delta_h-\mu)=\varepsilon_{h+k}(\delta_h-\mu)+\alpha^k(\delta_h-\mu)(\delta_h-\mu)$$

Finalmente tomando esperanzas:

$$E\left[(\delta_{h+k}-\mu)(\delta_h-\mu)\right]=E\left[\varepsilon_{h+k}(\delta_h-\mu)\right]+E\left[\alpha^k(\delta_h-\mu)(\delta_h-\mu)\right]$$

Dado que δ_k es independiente de ε_{h+k} (pues es un momento en el futuro y los ruidos son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas) y $E[\varepsilon_{h+k}]=0$ se concluye que:

$$\begin{aligned}\gamma(k)&=\alpha^k Var(\delta_k)\\ &=\alpha^k\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\end{aligned} \qquad (3.14)$$

Por lo tanto desarrollando la suma de la expresión (3.13):

$$\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\gamma(k)=\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\alpha^k\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

$$=\left[\left(j+1\right)\sum_{k=1}^{j}\alpha^{k}-\sum_{k=1}^{j}k\alpha^{k}\right]\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}$$

Recordando que:

$$\sum_{x=1}^{n}a^{x}=\frac{a-a^{x+1}}{1-a}$$

$$\sum_{x=1}^{n}xa^{x}=\frac{a-a^{x+1}}{\left(1-a\right)^{2}}-\frac{-na^{n+1}}{1-a}$$

Por lo tanto:

$$\left[\left(j+1\right)\sum_{k=1}^{j}\alpha^{k}-\sum_{k=1}^{j}k\alpha^{k}\right]\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}$$

$$=\left[\left(j+1\right)\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{1-\alpha}-\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{\left(1-\alpha\right)^{2}}+\frac{j\alpha^{j+1}}{1-\alpha}\right]\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}$$

Por lo tanto la expresión general dada por:

$$\frac{\left(j+1\right)}{2}\gamma\left(0\right)+\sum_{k=1}^{j}\left(j+1-k\right)\gamma\left(k\right)$$

Se reduce a:

$$\frac{1}{2}\left(j+1\right)\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}+\left[\left(j+1\right)\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{1-\alpha}-\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{\left(1-\alpha\right)^{2}}+\frac{j\alpha^{j+1}}{1-\alpha}\right]\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}$$

Observando que $\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}$ es factor común:

$$\frac{\left(j+1\right)}{2}+\left(j+1\right)\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{1-\alpha}-\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{\left(1-\alpha\right)^{2}}+\frac{j\alpha^{j+1}}{1-\alpha}$$

$$=\frac{\left(j+1\right)}{2}+\left(j+1\right)\frac{\alpha}{1-\alpha}-\frac{\alpha-\alpha^{j+1}}{\left(1-\alpha\right)^{2}}-\frac{\alpha^{j+1}}{1-\alpha}$$

Factorizando $\left(j+1\right)$ en los primeros dos términos y calculando la suma en los otros dos, se obtiene:

$$=\frac{(j+1)}{2}\left[1+\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]-\left[\frac{\alpha-\alpha^{j+1}+\alpha^{j+1}(1-\alpha)}{(1-\alpha)^2}\right]$$

$$=\frac{(j+1)}{2}\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]-\left[\frac{\alpha-\alpha^{j+2}}{(1-\alpha)^2}\right]$$

$$=\frac{(j+1)}{2}\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]-\alpha\left[\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right] \tag{3.15}$$

Sustituyendo (3.13) y (3.15) en (2.15) se obtiene que la reserva dada para un modelo $AR(1)$:

$$\begin{aligned}{}_hV=&\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}\exp\left\{-(j+1)\mu+\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left(\frac{(j+1)}{2}\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]-\alpha\left[\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right]\right)\right\}\\ &-\pi_h-\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}\exp\left\{-j\mu+\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left(\frac{j}{2}\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]-\alpha\left[\frac{1-\alpha^{j}}{(1-\alpha)^2}\right]\right)\right\}\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ya en un contexto más general para un modelo $AR(p)$, si bien se vuelve más complejo obtener una expresión general para $\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\gamma(k)$, se pueden calcular tanto σ^2 y $\gamma(k)$ a través de las ecuaciones de Yule-Walker [11], las cuales se deducen a continuación.

Se tiene el siguiente sistema:

$$(X_t-\mu)=\varepsilon_t+\alpha_1(X_{t-1}-\mu)+\alpha_2(X_{t-2}-\mu)+\ldots+\alpha_p(X_{t-p}-\mu)$$

Multiplicando esta ecuación por $(X_{t-k}-\mu)$ se obtiene:

$$(X_t-\mu)(X_{t-k}-\mu)=\varepsilon_t(X_{t-k}-\mu)+\alpha_1(X_{t-1}-\mu)(X_{t-k}-\mu)+\alpha_2(X_{t-2}-\mu)(X_{t-k}-\mu)+\ldots+\alpha_p(X_{t-p}-\mu)(X_{t-k}-\mu)$$

Tomando esperanzas se obtiene:

$$\gamma(k)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\gamma(k-i)$$

O bien en términos de las correlaciones:

$$\rho(k)=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\rho(k-i)$$

Esto quiere decir que las correlaciones quedan en términos de las anteriores, de hecho fijándose en las primeras p ecuaciones se tiene:

$$\begin{gathered}\rho(1)=\alpha_1\rho(0)+\alpha_2\rho(1)+...+\alpha_p\rho(p-1)\\ \rho(2)=\alpha_1\rho(1)+\alpha_2\rho(0)+...+\alpha_p\rho(p-2)\\ .\\ .\\ \rho(p)=\alpha_1\rho(p-1)+\alpha_2\rho(p-2)+...+\alpha_p\rho(0)\end{gathered}$$

Dado que $\rho(0)=1$ esto genera un sistema de ecuaciones lineales de orden pxp el cual puede ser resuelto con facilidad.

3.3.3 Modelos MA

En este caso supondremos que la tasa de interés continua de cada año sigue un modelo $MA(q)$ es decir se tiene que:

$$\delta_t=\mu+\varepsilon_t+\sum_{j=1}^{q}\beta_j\varepsilon_{t-j}$$

Se hace notar que al ser el proceso $\{\varepsilon_t\}$ un ruido blanco de distribución $N(0,\sigma^2)$ y por la independencia entre las variables de estos procesos se concluye:

$$\delta_t\sim N\left(\mu,\sigma^2\left(1+\sum_{j=1}^{q}\beta_j^2\right)\right)$$

En este caso la función de autocovarianza está dada por:

$$\begin{aligned}E\left[(\delta_{h+k}-\mu)(\delta_h-\mu)\right]&=E\left[\sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{q}\beta_i\beta_j\varepsilon_{h+k-j}\varepsilon_{h-i}\right]\\ &=\sum_{j=0}^{q}\sum_{i=0}^{q}\beta_i\beta_jE\left[\varepsilon_{h+k-j}\varepsilon_{h-i}\right]\end{aligned}$$

Donde $\beta_0=1$, ahora por la independencia de las variables aleatorias del ruido blanco se tiene que $E\left[\varepsilon_{h+k-j}\varepsilon_{h-i}\right]=0$, si $k-j=-i$ se tiene que $E\left[\varepsilon_{h+k-j}\varepsilon_{h-i}\right]=\sigma^2$ por lo tanto la función de autocovarianza [12] es:

$$\gamma(k)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{i=0}^{q-|k|}\beta_i\beta_{i+|k|} & |k|\leq q \\ 0 & |k|>q\end{cases} \tag{3.17}$$

Ahora para desarrollar la expresión que adquiere la reserva matemática de este modelo primero consideremos un $MA(1)$:

$$\delta_t=\mu+\varepsilon_t+\beta_1\varepsilon_{t-1}$$

Se necesita encontrar una expresión para $\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h} \quad j=0,1,...$ la estrategia ha utilizar consiste en desglosar esta serie en términos de $\{\varepsilon_t\}$.

Dado que δ_{h+1} depende de ε_h y de ε_{h+1}, δ_{h+2} depende de ε_{h+1} y de ε_{h+2}, etc. podemos escribir, en función del tiempo, la serie δ_t en términos de $\{\varepsilon_t\}$.

$$\begin{array}{lcccccc}
\delta_{h+1}\rightarrow & \beta_1\varepsilon_h & \varepsilon_{h+1} & 0 & ..... & 0 & 0 \\
\delta_{h+2}\rightarrow & 0 & \beta_1\varepsilon_{h+1} & \varepsilon_{h+2} & ...... & 0 & 0 \\
. & . & . & . & & . & . \\
. & . & . & . & & . & . \\
\delta_{h+j+1}\rightarrow & 0 & 0 & 0 & ...... & \beta_1\varepsilon_{h+j} & \varepsilon_{h+j+1}
\end{array}$$

En este caso es fácil ver que:

$$\sum_{k=1}^{1}\delta_{k+h}=\mu+\varepsilon_{h+1}+\beta_1\varepsilon_h$$

$$\sum_{k=1}^{2}\delta_{k+h}=2\mu+\varepsilon_{h+2}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+1}+\beta_1\varepsilon_h$$

La fórmula para el caso general esta dada por:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\beta_1\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{j}(1+\beta_1)\varepsilon_{h+k}+\varepsilon_{h+j+1} \tag{3.18}$$

Dem.

La demostración se realiza por inducción:

Base inductiva:

$$\sum_{k=1}^{0+1}\delta_{k+h}=(0+1)\mu+\beta_1\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{0}(1+\beta_1)\varepsilon_{h+k}+\varepsilon_{h+0+1}$$

Dado que la suma es vacía se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{1}\delta_{k+h}=\mu+\beta_1\varepsilon_h+\varepsilon_{h+1}$$

Hipótesis de inducción:

Se supone que es cierto hasta un cierto natural n.

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\beta_1\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{j}(1+\beta_1)\varepsilon_{h+k}+\varepsilon_{h+j+1}\qquad j=0,1,...n$$

Paso inductivo:

P.D. para $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+2}\delta_{k+h}=\sum_{k=1}^{n+1}\delta_{k+h}+\delta_{h+n+2}$$

Por la hipótesis de inducciones y desglosando δ_{h+n+2}:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+2}\delta_{k+h}&=(n+1)\mu+\beta_1\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{n}(1+\beta_1)\varepsilon_{h+k}+\varepsilon_{h+n+1}+\mu+\beta_1\varepsilon_{h+n+1}+\varepsilon_{h+n+2}\\&=(n+2)\mu+\beta_1\varepsilon_h\sum_{k=1}^{n}(1+\beta_1)\varepsilon_{h+k}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+n+1}+\varepsilon_{h+n+2}\\&=(n+2)\mu+\beta_1\varepsilon_h\sum_{k=1}^{n+1}(1+\beta_1)\varepsilon_{h+k}+\varepsilon_{h+n+2}\end{aligned}$$

Q.E.D.

Se ha escrito $\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}$ como combinación lineal del proceso de ruido blanco $\{\varepsilon_t\}$ por lo tanto se puede concluir que:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}\sim N\left([j+1]\mu,\left[1+\beta_1^2+j(1+\beta_1)^2\right]\sigma^2\right)$$

Recordando la generadora de momentos de la Normal de parámetros (μ,σ^2):

$$M_X(t)=\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$$

Se tiene que entonces que la generadora de momentos para $\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}$ esta dada por:

$$M_{\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}}(t)=\exp\left((j+1)\mu t+\frac{\left[1+\beta_1^2+j\left(1+\beta_1\right)^2\right]\sigma^2t^2}{2}\right)$$

Por lo cual la expresión de la reserva matemática para el modelo $MA(1)$ esta dada por:

$$\begin{aligned}{}_hV=&\left[\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}\exp\left(-(j+1)\mu+\frac{\left[1+\beta_1^2+j\left(1+\beta_1\right)^2\right]\sigma^2}{2}\right)\right]\\&-\left[\pi_h+\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}\exp\left(-j\mu+\frac{\left[1+\beta_1^2+\left(j-1\right)\left(1+\beta_1\right)^2\right]\sigma^2}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

O bien reincorporando el pago de la prima al término de la suma se puede escribir como:

$$\begin{aligned}{}_hV=&\left[\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}\exp\left(-(j+1)\mu+\frac{\left[1+\beta_1^2+j\left(1+\beta_1\right)^2\right]\sigma^2}{2}\right)\right]\\&-\left[\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}\exp\left(-j\mu+\frac{\left[1+\beta_1^2+\max\left\{j-1,0\right\}\left(1+\beta_1\right)^2\right]\sigma^2}{2}\right)\right]\end{aligned}\qquad(3.19)$$

De hecho también se puede obtener esta expresión por medio de la fórmula dad en (3.13) pues:

$$\begin{aligned}\gamma(0)&=Var\left[\delta_t\right]\\&=Var\left[\mu+\varepsilon_t+\beta_1\varepsilon_{t-1}\right]\\&=\sigma^2\left(1+\beta_1^2\right)\\\gamma(1)&=\sigma^2\beta_1\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{(j+1)}{2}\gamma(0)+\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\gamma(k)$$

Si $j=0$ esto es:

$$\frac{(j+1)\sigma^2\left(1+\beta_1^2\right)}{2}$$

Y para $j \geq 1$:

$$\frac{(j+1)}{2}\gamma(0)+\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\gamma(k)=\frac{(j+1)}{2}\gamma(0)+(j)\gamma(1)$$

Pues $\gamma(k)=0$ para $k\geq 2$ por lo tanto la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{(j+1)}{2}\sigma^2\left(1+\beta_1^2\right)+j\sigma^2\beta_1=\sigma^2\,\frac{(j+1)\left(1+\beta_1^2\right)+2j\beta_1}{2}$$

$$=\sigma^2\,\frac{\left(1+\beta_1^2\right)+j+2j\beta_1+j\beta_1^2}{2}$$

$$=\sigma^2\,\frac{\left(1+\beta_1^2\right)+j\left(1+\beta_1\right)^2}{2}$$

Que corresponden a las expresiones obtenidas anteriormente.

Para el caso del modelo $MA(2)$ se tiene que:

$$\delta_t=\mu+\varepsilon_t+\beta_1\varepsilon_{t-1}+\beta_2\varepsilon_{t-2}$$

En este caso δ_{h+1} es función de $\varepsilon_{h-1},\varepsilon_h,\varepsilon_{h+1}$, δ_{h+2} depende de $\varepsilon_h,\varepsilon_{h+1}$ y de ε_{h+2}, etc. Realizando una descripción matricial como en el caso anterior:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\delta_{h+1}\rightarrow & \beta_2\varepsilon_{h-1} & \beta_1\varepsilon_h & \varepsilon_{h+1} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
\delta_{h+2}\rightarrow & 0 & \beta_2\varepsilon_h & \beta_1\varepsilon_{h+1} & \varepsilon_{h+2} & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\delta_{h+j}\rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \beta_1\varepsilon_{h+j-1} & \varepsilon_{h+j} & 0 \\
\delta_{h+j+1}\rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \beta_2\varepsilon_{h+j-1} & \beta_1\varepsilon_{h+j} & \varepsilon_{h+j+1}
\end{array}$$

De manera análoga se puede ver que:

$$\sum_{k=1}^{1}\delta_{k+h}=\mu+\varepsilon_{h+1}+\beta_1\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\delta_{k+h}=2\mu+\varepsilon_{h+1}+\beta_1\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}+\varepsilon_{h+2}+\beta_1\varepsilon_{h+1}+\beta_2\varepsilon_h$$

$$=2\mu+\varepsilon_{h+2}+\left(1+\beta_1\right)\varepsilon_{h+1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\delta_{k+h}=3\mu+\varepsilon_{h+2}+\left(1+\beta_1\right)\varepsilon_{h+1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}+\varepsilon_{h+3}+\beta_1\varepsilon_{h+2}+\beta_2\varepsilon_{h+1}$$
$$=3\mu+\varepsilon_{h+3}+\left(1+\beta_1\right)+\varepsilon_{h+2}\left(1+\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_{h+1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}$$

$$\sum_{k=1}^{4}\delta_{k+h}=4\mu+\varepsilon_{h+3}+\left(1+\beta_1\right)+\varepsilon_{h+2}\left(1+\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_{h+1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}+\varepsilon_{h+4}+\beta_1\varepsilon_{h+3}+\beta_2\varepsilon_{h+2}$$
$$=4\mu+\varepsilon_{h+4}+\left(1+\beta_1\right)\varepsilon_{h+3}+\left(1+\beta_1+\beta_2\right)+\varepsilon_{h+2}\left(1+\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_{h+1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}$$

En general se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=\begin{cases}\left(j+1\right)\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{j-1}\left(1+\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_{h+k} & \\ +\left(1+\beta_1\right)\varepsilon_{h+j}+\varepsilon_{h+j+1} & j=1,2,... \\ \mu+\varepsilon_{h+1}+\beta_1\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1} & j=0\end{cases} \qquad (3.20)$$

Dem.

La demostración vuelve a utilizar el método de inducción:

Base inductiva:

Para $j=0$:

$$\sum_{k=1}^{1}\delta_{k+h}=\mu+\varepsilon_{h+1}+\beta_1\varepsilon_h+\beta_2\varepsilon_{h-1}$$

Y para $j=1$:

$$\sum_{k=1}^{2}\delta_{k+h}=\left(1+1\right)\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{0}\left(1+\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_{h+k}+\left(1+\beta_1\right)\varepsilon_{h+1}+\varepsilon_{h+1+1}$$

Observando que la suma es vacía se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{2}\delta_{k+h}=2\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+\left(\beta_1+\beta_2\right)\varepsilon_h+\left(1+\beta_1\right)\varepsilon_{h+1}+\varepsilon_{h+2}$$

Que es la expresión que se había obtenido antes.

Hipótesis de inducción:

Se supone que es cierto hasta un cierto natural $n\geq1$:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{j-1}(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+k}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+j}+\varepsilon_{h+j+1}$$

<u>Paso inductivo:</u>

P.D. para $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+2}\delta_{k+h}=\sum_{k=1}^{n+1}\delta_{k+h}+\delta_{h+n+2}$$

$$=(n+1)\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{n-1}(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+k}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+n}+\varepsilon_{h+n+1}+\mu+\varepsilon_{h+n+2}+\beta_1\varepsilon_{h+n+1}+\beta_2\varepsilon_{h+n}$$

$$=(n+2)\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{n-1}(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+k}+(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+n}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+n+1}+\varepsilon_{h+n+2}$$

$$=(n+2)\mu+\beta_2\varepsilon_{h-1}+(\beta_1+\beta_2)\varepsilon_h+\sum_{k=1}^{n}(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+k}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+n+1}+\varepsilon_{h+n+2}$$

Q.E.D.

De nuevo se ha escrito a $\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}$ como combinación lineal del ruido blanco, de donde se concluye de manera análoga al caso del modelo $MA(1)$ que:

$$M_{\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}}(t)=\begin{cases}\exp\left(\mu t+\frac{\left[1+\beta_1^2+\beta_2^2\right]\sigma^2t^2}{2}\right) & j=0\\ \exp\left((j+1)\mu t+\frac{\left[\beta_2^2+(\beta_1+\beta_2)^2+(j-1)(1+\beta_1+\beta_2)^2+(1+\beta_1)^2+1\right]\sigma^2t^2}{2}\right) & j=1,2,...\end{cases}$$

(3.21)

$$\begin{aligned}{}_hV=&\left[SA_hq_{x+h}\exp\left(-\mu+\frac{\left[1+\beta_1^2+\beta_2^2\right]\sigma^2}{2}\right)\right.\\&\left.+\sum_{j=1}^{\infty}SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h}q_{x+h+j}\exp\left(-(j+1)\mu+\frac{\left[\beta_2^2+(\beta_1+\beta_2)^2+(j-1)(1+\beta_1+\beta_2)^2+(1+\beta_1)^2+1\right]\sigma^2}{2}\right)\right]\\&-\left[\pi_h+\pi_{h+1}p_{x+h}\exp\left(-\mu+\frac{\left[1+\beta_1^2+\beta_2^2\right]\sigma^2}{2}\right)\right.\\&\left.+\sum_{j=2}^{\infty}\pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h}\exp\left(-j\mu+\frac{\left[\beta_2^2+(\beta_1+\beta_2)^2+(j-2)(1+\beta_1+\beta_2)^2+(1+\beta_1)^2+1\right]\sigma^2}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

(3.22)

De nuevo se puede obtener esta expresión por medio de la fórmula (3.13):

$$\begin{aligned}\gamma(0)&=Var[\delta_t]\\&=Var[\mu+\varepsilon_t+\beta_1\varepsilon_{t-1}+\beta_2\varepsilon_{t-2}]\\&=\sigma^2\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2\right)\\\gamma(1)&=\sigma^2\beta_1(1+\beta_2)\\\gamma(2)&=\sigma^2\beta_2\\\gamma(k)&=0\qquad k\geq 3\end{aligned}$$

Si $j=0$ se obtiene a $\frac{(j+1)\sigma^2\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2\right)}{2}$

Para $j=1$:

$$\begin{aligned}&\frac{(j+1)\sigma^2\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2\right)}{2}+j\sigma^2\beta_1(1+\beta_2)\\&=\sigma^2\frac{2\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2\right)+2\beta_1(1+\beta_2)}{2}\\&=\sigma^2\frac{(\beta_1+\beta_2)^2+1+2\beta_1+\beta_1^2+1+\beta_2^2}{2}\\&=\sigma^2\frac{(\beta_1+\beta_2)^2+(1+\beta_1)^2+\beta_2^2+1}{2}\end{aligned}$$

Y para $j\geq 2$

$$\begin{aligned}&\frac{(j+1)}{2}\gamma(0)+\sum_{k=1}^{j}(j+1-k)\gamma(k)\\&=\frac{(j+1)\sigma^2\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2\right)+2j\sigma^2\beta_1(1+\beta_2)+2(j-1)\sigma^2\beta_2}{2}\\&=\frac{\sigma^2\left[(j+1)\left(1+\beta_1^2+\beta_2^2\right)+2j\beta_1(1+\beta_2)+2(j-1)\beta_2\right]}{2}\end{aligned}$$

Realizando las operaciones y separando $j=(j-1)+1$ en los factores que los contienen:

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[1+2\beta_1+\beta_1^2+\beta_2^2+2\beta_1\beta_2+\beta_1^2+1+\beta_2^2+(j-1)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+1+2\beta_1\beta_2+2\beta_1+\beta_2\right)\right]$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\left[(1+\beta_1)^2+(\beta_1+\beta_2)^2+1+\beta_2^2+(j-1)(\beta_1+\beta_2+1)^2\right]$$

Que corresponde a las expresiones ya antes obtenidas en (3.21).

Finalmente generalizando para un $MA(q)$:

$$\delta_t=\mu+\varepsilon_t+\sum_{j=1}^{q}\left(\beta_j\varepsilon_{t-j}\right)$$

Volviendo a auxiliarse del arreglo matricial:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\delta_{h+1}\rightarrow & \beta_q\varepsilon_{h-q+1} & \beta_{q-1}\varepsilon_{h-q+2} & \beta_{q-2}\varepsilon_{h-q+3} & 0 & \ldots\ldots & \beta_1\varepsilon_h & \varepsilon_{h+1} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0\\
\delta_{h+2}\rightarrow & 0 & \beta_q\varepsilon_{h-q+2} & \beta_{q-1}\varepsilon_{h-q+3} & \varepsilon_{h+2} & \ldots\ldots & \beta_2\varepsilon_h & \beta_1\varepsilon_{h+1} & \varepsilon_{h+2} & \ldots\ldots & 0 & 0\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .\\
\delta_{h+j}\rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \varepsilon_{h+j} & 0\\
\delta_{h+j+1}\rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \beta_1\varepsilon_{h+j} & \varepsilon_{h+j+1}
\end{array}$$

En general para cualquier $1\le j\le q-1$, $q\ge 3$:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\varepsilon_{h+j+1}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+j}+(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+j-1}+\ldots.$$
$$+(\beta_{q-2}+\beta_{q-1}+\beta_q)\varepsilon_{h-q+3}+(\beta_{q-1}+\beta_q)\varepsilon_{h-q+2}+\beta_q\varepsilon_{h-q+1}$$

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\sum_{k=0}^{j}\left(\sum_{i=0}^{k}\beta_{q-i}\right)\varepsilon_{h+k+1-q}+\sum_{k=j+1}^{q-1}\left(\sum_{i=q-k}^{q-k+j}\beta_i\right)\varepsilon_{h+k+1-q}+\sum_{k=1}^{j+1}\left(1+\sum_{i=1}^{j+1-k}\beta_i\right)\varepsilon_{h+k}$$

Y para $j\ge q$:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\varepsilon_{h+j+1}+(1+\beta_1)\varepsilon_{h+j}+(1+\beta_1+\beta_2)\varepsilon_{h+j-1}+\ldots..$$
$$+\left(1+\sum_{i=1}^{q-1}\beta_i\right)\varepsilon_{h+j+2-q}+\sum_{k=1}^{j-q+1}\left(1+\sum_{i=1}^{q}\beta_i\right)\varepsilon_{h+k}+\left(\sum_{i=1}^{q}\beta_i\right)\varepsilon_h+\ldots..$$
$$+(\beta_{q-2}+\beta_{q-1}+\beta_q)\varepsilon_{h-q+3}+(\beta_{q-1}+\beta_q)\varepsilon_{h-q+2}+\beta_q\varepsilon_{h-q+1}$$

Que puede ser escrito como:

$$\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}=(j+1)\mu+\sum_{k=j+2-q}^{j+1}\left(1+\sum_{i=1}^{j+1-k}\beta_i\right)\varepsilon_{h+k}+\sum_{k=1}^{j-q+1}\left(1+\sum_{i=1}^{q}\beta_i\right)\varepsilon_{h+k}+\sum_{k=0}^{q-1}\left(\sum_{i=0}^{k}\beta_{q-i}\right)\varepsilon_{h+k-q+1}$$

Sin embargo en este caso puede resultar más sencillo calcular el valor de la función generadora de momentos a través de la fórmula (3.13):

$$\gamma(k)=\begin{cases}\sigma^2\sum_{i=0}^{q-|k|}\beta_i\beta_{i+|k|} & |k|\leq q\\ 0 & |k|>q\end{cases}$$

Por lo tanto si $j \leq q-1$ se tiene la expresión:

$$\begin{aligned}&\frac{(j+1)\gamma(0)}{2}+\sum_{i=1}^{j}(j+1-i)\gamma(i)\\&=\sigma^2\left[\frac{(j+1)\sum_{i=0}^{q}\beta_i^2}{2}+\sum_{i=1}^{j}(j+1-i)\sum_{z=0}^{q-i}\beta_z\beta_{z+i}\right]\end{aligned} \tag{3.23}$$

Mientras que para el caso $j \geq q$

$$\begin{aligned}&\frac{(j+1)\gamma(0)}{2}+\sum_{i=1}^{q}(j+1-i)\gamma(i)\\&=\sigma^2\left[\frac{(j+1)\sum_{i=0}^{q}\beta_i^2}{2}+\sum_{i=1}^{q}(j+1-i)\sum_{z=0}^{q-i}\beta_z\beta_{z+i}\right]\end{aligned} \tag{3.24}$$

Pudiendo observarse que a diferencia del caso de los modelos AR, en este caso se obtuvo una expresión general para cualquier grado del modelo MA.

3.3.4 Ejemplo

Supongamos que bajo un modelo $AR(1)$ sobre la tasa de interés se calcularán las reservas de un seguro que se emitió para una persona de edad 30 con los parámetros[13] $\mu = .0344$, $\sigma^2 = .4.3957\text{E-}05$, $\alpha = 0.918$ utilizando la tabla Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual), con temporalidad 20 con pago de primas durante el período de cobertura y pago de primas durante 10 años.

Se puede calcular bajo este modelo la prima nivelada por el principio de equivalencia, tomando en cuenta los factores de descuento como variables aleatorias (los resultados anteriores no se ven modificados), en este caso se tiene que la prima para el caso de período de pago durante el período de cobertura esta dado por:

$$\pi = 4{,}442.49$$

Esto puede ser fácilmente calculado a través de la siguiente tabla:

j	$j\mu$	$\frac{j}{2}\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}$	$\alpha\frac{1-\alpha^{j}}{(1-\alpha)^{2}}$	$-j\mu+\frac{1}{2}(\overline{-1})\Sigma(\overline{-1})^{T}$	*Factor de descuento*
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.000000
1	0.034400	11.695122	11.195122	-0.034260	0.966320
2	0.068800	23.390244	21.472244	-0.068264	0.934014
3	0.103200	35.085366	30.906642	-0.102032	0.903001
4	0.137600	46.780488	39.567419	-0.135584	0.873206
5	0.172000	58.475610	47.518013	-0.168937	0.844562
6	0.206400	70.170732	54.816658	-0.202109	0.817006
7	0.240800	81.865854	61.516814	-0.235113	0.790482
8	0.275200	93.560976	67.667557	-0.267963	0.764936
9	0.309600	105.256098	73.313939	-0.300673	0.740320
10	0.344000	116.951220	78.497318	-0.333253	0.716589
11	0.378400	128.646341	83.255660	-0.365714	0.693701
12	0.412800	140.341463	87.623818	-0.398066	0.671618
13	0.447200	152.036585	91.633787	-0.430318	0.650302
14	0.481600	163.731707	95.314938	-0.462478	0.629721
15	0.516000	175.426829	98.694235	-0.494554	0.609843
16	0.550400	187.121951	101.796430	-0.526552	0.590638
17	0.584800	198.817073	104.644245	-0.558480	0.572078
18	0.619200	210.512195	107.258538	-0.590342	0.554138
19	0.653600	222.207317	109.658460	-0.622144	0.536792
20	0.688000	233.902439	111.861588	-0.653891	0.520018

Con esta tabla es posible calcular de manera más sencilla la reserva, pues al ser las series de tiempo procesos estacionarios, estos únicamente van a depender de la distancia al punto de origen y no de este último.

Por lo cual con esta información es más fácil calcular las reservas en cada momento del tiempo, al ya únicamente depender del factor de descuento y de las probabilidades de muerte y supervivencia.

Al hacer un comparativo con la reserva que se obtendría bajo un modelo determinista tomando en cuenta como tase de interés el dado por la media del modelo aleatorio (también modificando la prima acorde esto) se obtienen los siguientes resultados:

h	${}_hV^{Det}$	${}_hV^{AR(1)}$	${}_hV^{AR(1)} - {}_hV^{Det}$	Diferencias Relativas
0	0	0	0	0
1	2,311.79	2,309.03	-2.76	-0.1195%
2	4,534.37	4,526.60	-7.77	-0.1713%
3	6,651.50	6,636.82	-14.68	-0.2208%
4	8,644.88	8,621.74	-23.14	-0.2677%
5	10,495.54	10,462.80	-32.75	-0.3120%
6	12,180.80	12,137.74	-43.06	-0.3535%
7	13,678.62	13,624.98	-53.64	-0.3921%
8	14,963.08	14,899.10	-63.99	-0.4276%
9	16,005.77	15,932.16	-73.61	-0.4599%
10	16,775.57	16,693.58	-81.99	-0.4888%
11	17,238.57	17,149.96	-88.61	-0.5140%
12	17,356.39	17,263.43	-92.96	-0.5356%
13	17,088.89	16,994.36	-94.53	-0.5532%
14	16,391.09	16,298.21	-92.88	-0.5666%
15	15,212.83	15,125.25	-87.58	-0.5757%
16	13,499.96	13,421.63	-78.33	-0.5802%
17	11,191.01	11,126.10	-64.91	-0.5800%
18	8,221.19	8,173.94	-47.25	-0.5747%
19	4,517.59	4,492.10	-25.48	-0.5641%
20	0	0	0	0

En este caso se puede observar que la reserva obtenida bajo el modelo $AR(1)$, la reserva que se constituye es ligeramente menor a la obtenida por el modelo determinista.

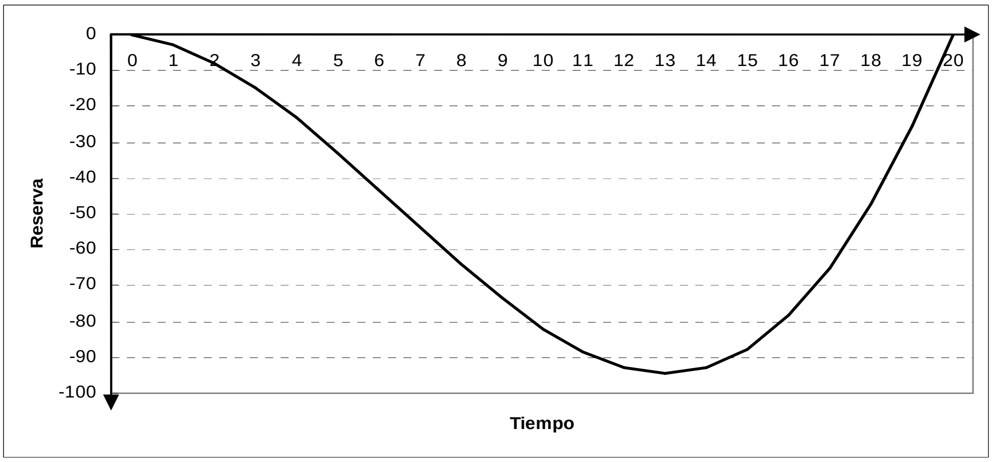


Figura 3.13 Diferencias entre la reserva bajo el modelo AR(1) con la reserva bajo el modelo clásico con pago de primas durante el período de cobertura para un seguro temporal 20.

Ahora bien para el caso donde el período de pago de primas es por 10 años, se obtiene de manera similar:

$$\pi = 7{,}550.54$$

Es importante hacer notar que el hecho de que se reduzca el período de pago de primas no afecta el cálculo de los factores de descuento. En este caso, de igual manera se comparó contra el resultado que se hubiera obtenido tomando el caso determinista con valor de la tasa de interés la media del modelo y modificando la prima, acorde a esto se obtiene:

h	${}_hV^{Det}$	${}_hV^{AR(1)}$	${}_hV^{AR(1)} - {}_hV^{Det}$	Diferencias Relativas
0	0	0	0	0
1	5,460.46	5,492.37	31.90	0.5843%
2	10,947.58	11,007.00	59.42	0.5428%
3	16,450.23	16,533.59	83.36	0.5067%
4	21,955.56	22,060.26	104.69	0.4768%
5	27,450.40	27,574.97	124.56	0.4538%
6	32,918.32	33,062.62	144.31	0.4384%
7	38,343.90	38,509.38	165.48	0.4316%
8	43,708.41	43,898.31	189.90	0.4345%
9	48,991.12	49,210.77	219.65	0.4484%
10	54,169.22	54,426.37	257.15	0.4747%
11	51,479.05	51,682.22	203.17	0.3947%
12	48,330.55	48,485.85	155.31	0.3213%
13	44,678.10	44,792.00	113.90	0.2549%
14	40,470.79	40,549.96	79.17	0.1956%
15	35,652.02	35,703.23	51.22	0.1437%
16	30,160.57	30,190.50	29.93	0.0992%
17	23,927.30	23,942.29	14.99	0.0627%
18	16,878.96	16,884.73	5.76	0.0341%
19	8,933.35	8,934.59	1.25	0.0140%
20	0	0	0	0

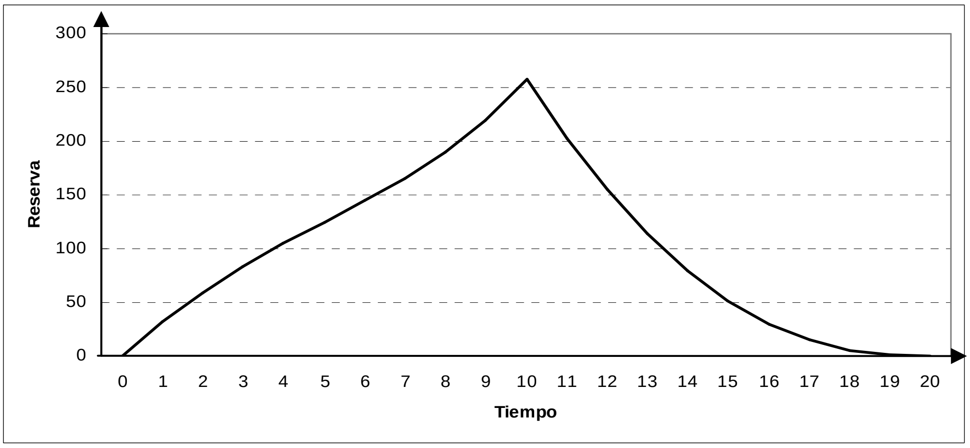


Figura 3.14 Diferencias entre la reserva bajo el modelo AR(1) con la reserva bajo el modelo clásico con pago de primas durante 10 años para un seguro temporal 20.

En este caso se puede observar que se invirtió la tendencia antes encontrada, siendo la reserva bajo el modelo $AR(1)$ mayor que la del modelo clásico, pero igual al caso anterior las diferencias son poco significativas en relación con la reserva, por lo cual no es visualizar como se ve afectada la reserva en general.

Como conclusión puede establecerse que, al suponer que la tasa de interés instantánea esta modelada por series de tiempo lineales, se puede calcular para cada año el factor de descuento correspondiente a través de la expresión general antes obtenida, con importante énfasis en que esta se ve modificada de acuerdo al modelo que se proponga, en muchos casos se complica el cálculo en el modelo teórico, (por ejemplo en los casos de los modelos $ARMA(p,q)$) sin embargo es posible obtener los valores de las covarianzas y de la varianza del modelo a través de estimaciones, siempre recordando que el supuesto de estacionariedad débil debe cumplirse. Es importante señalar que en el caso de que este supuesto no se cumpla, se deben recurrir a transformaciones, teniendo especial cuidado enrevertir las transformaciones, por ejemplo si se utilizara un modelo $ARIMA(p,d,q)$ (esto es que las diferencias dadas por $\delta_{t+d}-\delta_t$ siguen un modelo $ARMA(p,q)$) se debe analizar a δ_t y no $\delta_{t+d}-\delta_t$.

3.4 Algunos modelos continuos de tasas con distribuciones modeladas por movimientos Brownianos

3.4.1 Dos enfoques

En el capítulo anterior se había obtenido que para el caso continuo el factor de descuento estaba dado por $-\int_0^z \delta(t+s)ds$; es posible dar distintos enfoques al modelo, por ejemplo, se puede modelar sobre la tasa de interés instantánea (es decir sobre $\delta(t)$), o bien sobre el factor de acumulación, es decir por $\int \delta(t)dt$;ahora bien para cualquiera de los dos casos si el proceso resultante es un Gaussiano [14], entonces el término dado por:

$$E\left[\exp\{-\int_0^z \delta(t+s)ds\}\right]$$

Vuelve a ser la generadora de momentos evaluada en -1 del respectivo proceso, por lo cual basta calcular la esperanza y la varianza de este proceso[15].

3.4.2 Modelos sobre la fuerza de acumulación

En este caso continuo es conveniente denotar por $X(r,z,t)$ a $\int_r^z \delta(t+s)ds$ obsérvese que bajo esta notación r y z son los límites de integración, mientras que t es el momento de evaluación.

Eel caso que nos interesa es el dado por $X(0,z,t)=\int_0^z \delta(t+s)ds$ y la generadora de momentos estaría dada de la forma:

$$\exp\left\{-E\left[X(0,z,t)\right]+\frac{1}{2}Var\left[X(0,z,t)\right]\right\}$$

Es importante hacer notar que:

$$X(0,z,t)=\int_0^z \delta(t+s)ds=\int_t^{z+t} \delta(s)ds=\int_0^{z+t} \delta(s)ds-\int_0^t \delta(s)ds=X(0,z+t,0)-X(0,t,0)$$

En el caso particular que $X(s,t,0)$ es un movimiento Browniano, es decir, es de la forma:

$$X(s,t,0)=\mu(t-s)+\sigma W_{t-s} \qquad t\geq s \qquad (3.25)$$

Donde μ,σ son constantes y $\{W_z\}$, representa un movimiento browniano [16] estándar.
Por lo tanto se tiene que:

$$X(0,z+t,0)-X(0,t,0)=\mu\left(z+t\right)+\sigma W_{z+t}-\mu\left(t\right)+\sigma W_t$$

$$=\mu z+\sigma\left(W_{z+t}-W_t\right)$$

Es decir $X(0,z,t)=\mu z+\sigma(W_{z+t}-W_t)$.

Finalmente recordando las propiedades de los movimientos brownianos se concluye que:

$$E[X(0,z,t)]=E[\mu z+\sigma(W_{z+t}-W_t)]=\mu z \qquad (3.26)$$

$$Var[X(0,z,t)]=Var[\mu z+\sigma(W_{z+t}-W_t)]=\sigma^2 z \qquad (3.27)$$

Por lo tanto se tiene que la reserva en este caso estaría dada por:

$${}_tV=\int_0^\infty SA_{z+t}\exp\left\{-\delta z+\frac{z\sigma^2}{2}\right\}{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz-\int_0^\infty \pi_{z+t}\exp\left\{-\delta z+\frac{z\sigma^2}{2}\right\}{}_z p_{x+t}dz \qquad (3.28)$$

Otro posible modelo para la tasa de interés es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck [17], que se define como:

$$X(0,t,0)=\mu t+Y\left(t\right)$$

Donde $Y(t)$ satisface la ecuación:

$$dY_t = -\alpha Y_t d_t + \sigma dW_t$$
$$Y_0 = 0$$

Utilizando la fórmula de Itô se obtiene la solución dada por:

$$Y(t) = \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \qquad (3.29)$$

Por lo tanto:

$$X(0,t,0) = \mu t + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

Esto puede interpretarse como el factor de descuento, que está dado por una manera proporcional a una media μ y por un evento aleatorio dado por la integral estocástica, el cual conforme va pasando el tiempo se hace despreciable. Es importante que la condición inicial $Y_0 = 0$ para garantizar que al tiempo cero, el valor del dinero en el tiempo siga siendo el mismo.

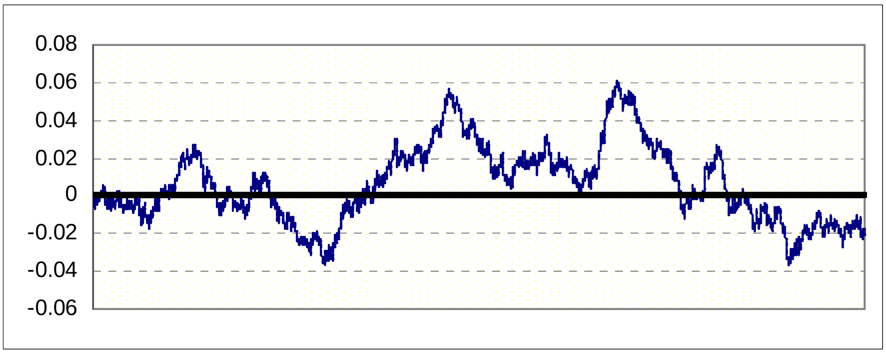


Figura 3.15 Simulación de un proceso de O.U. que inicia en cero, con α =.17 y σ =.082 [18]

Ahora, recordando las propiedades del proceso de Ornstein-Uhlenbeck (estas se desarrollan con mayor detalle en el primer anexo), se tiene que:

$$E(Y_t) = y_0 e^{-\alpha t} = 0$$

$$Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)$$

$$Cov(Y_t, Y_s) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}\right) \quad t \geq s$$

Por lo cual:

$$X(0,z,t) = X(0,z+t,0) - X(0,t,0)$$

$$=\mu(z+t)+Y(z+t)-\mu(t)-Y(t)$$

$$=\mu z+Y(z+t)-Y(t) \tag{3.30}$$

Es importante mencionar que $Y(z+t)-Y(t)$, no es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Finalmente el cálculo de la esperanza y la varianza de $X(0,z,t)$:

$$E\left[X(0,z,t)\right]=E\left[\mu z+Y(z+t)-Y(t)\right]=\mu z \tag{3.31}$$

$$Var(Y_t)=Var\left(\mu z+Y(z+t)-Y(t)\right)$$

$$=Var\left(Y(z+t)\right)+Var\left(Y(t)\right)-2Cov\left(Y(z+t),Y(t)\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[1-e^{-2\alpha(t+z)}+1-e^{-2\alpha t}-2e^{-\alpha z}+2e^{-\alpha(2t+z)}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[2+2e^{-\alpha(2t+z)}-e^{-2\alpha(t+z)}-e^{-2\alpha t}-2e^{-\alpha z}\right] \tag{3.32}$$

Por lo tanto el modelo de la reserva esta dado por:

$$\begin{aligned} {}_tV=&\int_0^\infty SA_{z+t}\exp\left\{-\mu z+\frac{\sigma^2}{4\alpha}\left[2+2e^{-\alpha(2t+z)}-e^{-2\alpha(t+z)}-e^{-2\alpha t}-2e^{-\alpha z}\right]\right\}{}_zp_{z+t}\mu_x(t+z)dz \\ &-\int_0^\infty \pi_{z+t}\exp\left\{-\mu z+\frac{\sigma^2}{4\alpha}\left[2+2e^{-\alpha(2t+z)}-e^{-2\alpha(t+z)}-e^{-2\alpha t}-2e^{-\alpha z}\right]\right\}{}_zp_{x+t}dr \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.4.3 Modelos sobre la tasa instantánea de interés

En este caso los modelos son sobre la tasa de interés instantánea $\delta(t)$, una forma inicial de ver esto es suponer que este proceso está modelado por un movimiento browniano, es decir:

$$\delta(t)=\mu+\sigma W_t \tag{3.34}$$

Calculando la esperanza se obtiene:

$$E\left[\int_0^z \delta(s+t)\,ds\right]=E\left[\int_0^{z+t}\delta(s)\,ds\right]-E\left[\int_0^t \delta(s)\,ds\right]$$

$$=E\left[\int_0^{z+t}(\mu+\sigma W_s)\,ds\right]-E\left[\int_0^t(\mu+\sigma W_s)\,ds\right]$$

$$=\mu z+E\left[\int_0^{z+t}\sigma W_s ds\right]-E\left[\int_0^t \sigma W_s ds\right] \qquad (3.35)$$

Ahora dado que la integral estocástica es una martingala, todas las variables aleatorias del proceso tienen la misma esperanza, en particular cuando el límite superior de la integral es cero, concluyendo que la esperanza del proceso es cero por lo tanto:

$$E\left[\int_0^z \delta(s+t)ds\right]=\mu z \qquad (3.36)$$

Ahora bien para $t>s$ se tiene que $\operatorname{cov}(\delta(t),\delta(s))=\sigma^2 s$ al ser un movimiento Browniano.

Dado que el proceso para s,t fijas, el proceso es cuadrado integrable se tiene que:

$$\operatorname{cov}\left(\int_0^s \delta(y)dy,\int_0^t \delta(x)dx\right)=\int_0^s\int_0^t \operatorname{cov}(\delta(y),\delta(x))dxdy \qquad (3.37)$$

Sin pérdida de generalidad suponiendo que $t>s$ se obtiene:

$$\int_0^s\int_0^t \sigma^2 \min\{x,y\}dxdy$$

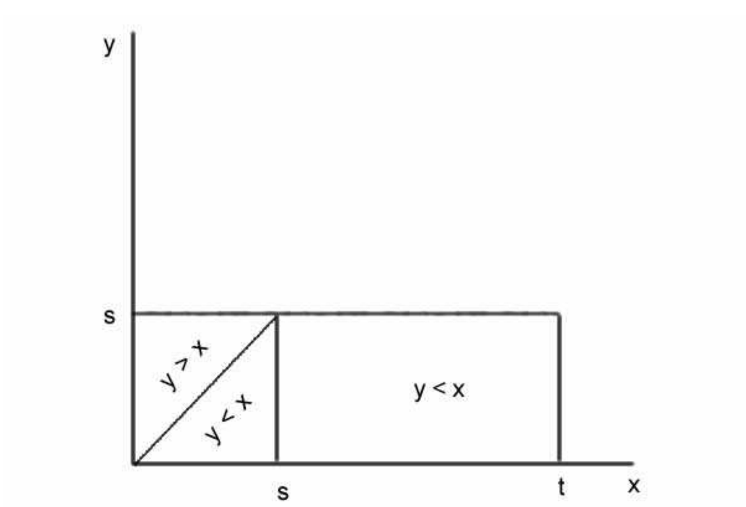


Figura 3.16 Región de integración

$$\int_0^s\int_0^t \sigma^2 \min\{x,y\}dxdy=\int_0^s\int_0^y xdxdy+\int_0^s\int_y^t \sigma^2 ydxdy$$

$$=\sigma^2\int_0^s \frac{y^2}{2}dy+\sigma^2\int_0^s ty-y^2dy$$

$$=\sigma^2\left(\frac{s^3}{6}+\frac{ts^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right)$$

$$=\sigma^2\left(\frac{ts^2}{2}-\frac{s^3}{6}\right) \tag{3.38}$$

Por lo tanto se concluye:

$$Var\left[\int_0^z \delta(s+t)ds\right]=Var\left[\int_0^{z+t}\delta(s)ds-\int_0^t\delta(s)ds\right]$$

$$=Var\left[\int_0^{z+t}\delta(s)ds\right]+Var\left[\int_0^t\delta(s)ds\right]-2\operatorname{cov}\left[\int_0^{z+t}\delta(s)ds,\int_0^t\delta(u)du\right]$$

$$=\sigma^2\left(\frac{(z+t)^3}{2}-\frac{(z+t)^3}{6}+\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{6}-2\left(\frac{t^2(z+t)}{2}-\frac{t^3}{6}\right)\right)$$

$$=\sigma^2\left(\frac{(z+t)^3}{3}+\frac{t^3}{3}-2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2z}{2}\right)\right)$$

$$=\sigma^2\left(\frac{z^3+3z^2t+3zt^2+t^3}{3}-\frac{t^3}{3}-t^2z\right)$$

$$=\sigma^2\left(\frac{z^3}{3}+z^2t\right) \tag{3.39}$$

Para finalmente obtener el modelo de reserva bajo este esquema de tasas de interés:

$$\begin{aligned} {}_tV=&\int_0^\infty SA_{z+t}\exp\left\{-\mu z+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{z^3}{3}+z^2t\right)\right\}{}_zp_{z+t}\mu_x(t+z)dz \\ &-\int_0^\infty \pi_{z+t}\exp\left\{-\mu z+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{z^3}{3}+z^2t\right)\right\}{}_zp_{x+t}dz \end{aligned} \tag{3.40}$$

También es posible modelar la tasa instantánea bajo un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, con una ligera modificación, la ecuación estocástica que satisface el proceso está dada por:

$$
\begin{aligned}
&dY_t = -\alpha\left(Y_t - \mu\right)d_t + \sigma dW_t \\
&Y_0 = \mu
\end{aligned}
$$

Cuya solución utilizando la fórmula de Itô es:

$$Y(t) = \mu + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s \tag{3.41}$$

En este caso se cumple que:

$$
\begin{aligned}
&E(Y_t) = \mu \\
&Var(Y_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) \\
&Cov(Y_t, Y_s) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}\right) \quad t \geq s
\end{aligned}
$$

Por lo cual en este caso se tienen los siguientes resultados:

$$E\left[\int_0^z \delta(s+t)\,ds\right] = E\left[\int_0^{z+t}\delta(s)\,ds\right] - E\left[\int_0^t \delta(s)\,ds\right]$$

$$= E\left[\int_0^{t+z}\left(\mu + \sigma\int_0^u e^{-\alpha(u-s)}dW_u\right)ds\right] - E\left[\int_0^t\left(\mu + \sigma\int_0^u e^{-\alpha(u-s)}dW_u\right)ds\right]$$

$$= \mu z + E\left[\int_0^{t+z}\sigma\int_0^u e^{-\alpha(u-s)}dW_u\right] - E\left[\int_0^t\sigma\int_0^u e^{-\alpha(u-s)}dW_u\right]$$

$$= \mu z \tag{3.42}$$

Además como $\operatorname{cov}\left(\int_0^s \delta(y)dy, \int_0^t \delta(x)dx\right) = \int_0^s\int_0^t \operatorname{cov}(\delta(y), \delta(x))dxdy$ y observando que para $s \leq t$ se tiene que la región de integración es la misma que en el caso del movimiento Browniano.

$$\int_0^s\int_0^t \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-\alpha|x-y|} - e^{-\alpha(x+y)}\right)dxdy = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(\int_0^s\int_0^y\left(e^{-\alpha(y-x)} - e^{-\alpha(x+y)}\right)dxdy + \int_0^s\int_y^t\left(e^{-\alpha(x-y)} - e^{-\alpha(x+y)}\right)dxdy\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(\int_0^s\int_0^y e^{-\alpha y}e^{\alpha x}dxdy-\int_0^s\int_0^t e^{-\alpha y}e^{-\alpha x}dxdy+\int_0^s\int_y^t e^{-\alpha x}e^{\alpha y}dxdy\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(\int_0^s e^{-\alpha y}\left[\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha}\right]dy-\int_0^s e^{-\alpha y}\left[\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]dy+\int_0^s e^{\alpha y}\left[\frac{e^{-\alpha y}-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]dy\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(\int_0^s\left(1-e^{-\alpha y}\right)dy\int_0^s\left(-e^{-\alpha y}+e^{-\alpha y}e^{-\alpha t}\right)dy+\int_0^s\left(1-e^{\alpha y}e^{-\alpha t}\right)dy\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(\int_0^s\left(2-2e^{-\alpha y}+e^{-\alpha y}e^{-\alpha t}-e^{\alpha y}e^{-\alpha t}\right)dy\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left(2s-2\left[\frac{1-e^{-\alpha s}}{\alpha}\right]+e^{-\alpha t}\left[\frac{1-e^{-\alpha s}}{\alpha}\right]-e^{-\alpha t}\left[\frac{e^{\alpha s}-1}{\alpha}\right]\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}s+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-2+2e^{-\alpha s}+2e^{-\alpha t}-e^{-\alpha(t+s)}-e^{-\alpha(t-s)}\right) \tag{3.43}$$

Los casos particulares que interesan son:

$$Var\left[\int_0^{z+t}\delta(s)ds\right]=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}(z+t)+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-3+4e^{-\alpha(z+t)}-e^{-2\alpha(z+t)}\right) \tag{3.44}$$

$$Var\left[\int_0^{t}\delta(s)ds\right]=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}t+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-3+4e^{-\alpha t}-e^{-2\alpha t}\right) \tag{3.45}$$

$$\operatorname{cov}\left(\int_0^{z+t}\delta(y)dy,\int_0^{z}\delta(x)dx\right)=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}t+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-2+2e^{-\alpha t}+2e^{-\alpha(z+t)}-e^{-\alpha(2t+z)}-e^{-\alpha z}\right) \tag{3.46}$$

Para finalmente concluir que:

$$Var\left[\int_0^{z}\delta(s+t)\,ds\right]=Var\left[\int_0^{z+t}\delta(s)\,ds-\int_0^{t}\delta(s)\,ds\right]$$

$$=Var\left[\int_0^{z+t}\delta(s)\,ds\right]+Var\left[\int_0^{t}\delta(s)\,ds\right]-2\operatorname{cov}\left[\int_0^{z+t}\delta(s)\,ds,\int_0^{t}\delta(u)\,du\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}(z+t)+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-3+4e^{-\alpha(z+t)}-e^{-2\alpha(z+t)}\right)+\frac{\sigma^2}{\alpha^2}t+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-3+4e^{-\alpha t}-e^{-2\alpha t}\right)$$
$$-\frac{2\sigma^2}{\alpha^2}t-\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-4+4e^{-\alpha t}+4e^{-\alpha(z+t)}-2e^{-\alpha(2t+z)}-2e^{-\alpha z}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\alpha^2}z+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-2-e^{-2\alpha(z+t)}-e^{-2\alpha t}+2e^{-\alpha(2t+z)}+2e^{-\alpha z}\right) \qquad (3.47)$$

Con lo cual la forma de la reserva en este caso esta dada por:

$$ {}_tV=\int_0^\infty SA_{z+t}\exp\left\{-\mu z+\frac{\sigma^2}{\alpha^2}z+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-2-e^{-2\alpha(z+t)}-e^{-2\alpha t}+2e^{-\alpha(2t+z)}+2e^{-\alpha z}\right)\right\}{}_zp_{z+t}\mu_x(t+z)dz$$
$$-\int_0^\infty \pi_{z+t}\exp\left\{-\mu z+\frac{\sigma^2}{\alpha^2}z+\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(-2-e^{-2\alpha(z+t)}-e^{-2\alpha t}+2e^{-\alpha(2t+z)}+2e^{-\alpha z}\right)\right\}{}_zp_{x+t}dz$$
$$(3.48)$$

Cabe mencionar que una vez establecidas estas expresiones lo único que resta es evaluar las integrales dado que se conoce los valores de las primas y los parámetros tanto para la distribución de las tasas de interés como para el tiempo de vida restante. Es importante mencionar que por la complejidad del factor de descuento para las reservas obtenido en las expresiones (3.28), (3.33),(3.40) y (3.48) pueda ser necesario recurrir a metodos numéricos para realizar la valuación de las integrales.

Finalmente, es importante subrayar que los modelos presentados en este capítulo se asume que no se conoce los valores que las tasas de interés han tomado desde el momento de la emisión de la póliza, sin embargo la valuación de las reservas se realiza cada año por lo cuál es posible que incorporar dicha información al modelo, el siguiente capítulo tratará este tema.

Referencias y notas del tercer capítulo

1. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997 capítulo 4, una breve extensión a los seguros con tasas aleatorias también puede ser encontrado en el capítulo 21.
2. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997 capítulo 5, una breve extensión a las anualidades contingentes con tasas aleatorias también puede ser encontrado en el capítulo 21.
3. Ross Sheldon, A First Course in Probability, Prentice Hall, E.U.A, 2002, página 423.
4. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997 página 643.
5. Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004 páginas 34-36.
6. Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004 página 35.
7. Todas los procesos definidos en esta sección se encuentran en Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004 páginas 41-49.
8. Véase Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004 páginas 43-48 para mas detalles de los polinomios y las condiciones de unicidad.
9. Ross Sheldon, A First Course in Probability, Prentice Hall, E.U.A, 2002 páginas 373,374.
10. Este resultado se encuentra en Panjer Harry y Bellhouse David, Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 48, No. 4,1981
11. Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004 páginas 44-46.
12. Véase Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004 página 49.
13. Parámetros extraídos de Panjer Harry & Bellhouse David; Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies; The Journal of Risk and Insurance, Vol. 48, No. 4;1981; correspondientes a tasas spot a un año emitidas por Durand durante el período 1900-1967.
14. Brzezniak Zdzislaw y Zastawniak Tomasz , Basic Stochastic Process, Springer, Gran Bretaña, 2002 páginas 152-154
15. Los resultados aquí obtenidos se encuentran resumidos en Parker Gary , Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions, Astin Voulletin Vol.24, 1994.
16. Resultados elementales sobre este proceso pueden ser encontrados en Brzezniak Zdzislaw y Zastawniak Tomasz , Basic Stochastic Process, Springer, Gran Bretaña, 2002 capítulo 6, sección 3.
17. Véase Karatzas Ioannis y Shreve Steven, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, Gran Bretaña, 1999 página 238.
18. Parámetros extraídos de Parker Gary; Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions; Astin Voulletin Vol.24; 1994 correspondiente a las tasas de retorno de los Treasury Bills.

Capítulo IV: Modelos condicionales

4.1 El motivo de los modelos condicionales

En el capítulo pasado se desarrollaron modelos de reservas, dado que se suponía que el asegurado estaría con vida en el momento de la valuación únicamente teniendo en consideración el modelo teórico sobre la tasa de interés propuesto , sin embargo ¿Qué pasa si ya se está en el momento de evaluación y por ende se conocen los valores que ha tomado el proceso a lo largo del tiempo?

Por ejemplo si se esta evaluando la reserva ya al tiempo h, ¿No se tendría disponible la información de las tasas de interés, desde el momento de celebración del contrato hasta el año de la evaluación? (es decir son conocidos los valores que tomarón $\{I_1, I_2, ..., I_h\}$)

Para ver como esta información afecta la estimación de las tasas de interés, es importante mencionar que la definición dada en el capítulo dos de reserva se vería modificada de la siguiente manera:

$$ {}_hV = E\left[{}_hL | K(x) \geq h, I_1 = i_1, I_2 = i_2, ..., I_h = i_h \right] \tag{4.1}$$

Es decir la única modificación es la incorporación de la información de las tasas de interés anteriores al tomar la esperanza condicional sobre estas, ahora bien también es importante hacer énfasis en que la demostración de la fórmula prospectiva dada en el segundo capítulo, no depende del modelo de tasas de interés que se esté considerando, por lo tanto se puede ver que para esta alternativa la expresión en el caso de vida entero estaría dada por:

$$\begin{aligned} {}_hV = & \sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j}\ {}_jp_{x+h} q_{x+h+j} E\left[\prod_{k=1}^{j+1} \frac{1}{1+I_{h+k}} | I_1 = i_1, I_2 = i_2, ..., I_h = i_h \right] \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h} E\left[\prod_{k=1}^{j} \frac{1}{1+I_{h+k}} | I_1 = i_1, I_2 = i_2, ..., I_h = i_h \right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ahora bien si se trabajara sobre tasas contínuas:

$$\begin{aligned} {}_hV = & \sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} E\left[\exp\left\{ -\sum_{k=1}^{j+1} \delta_{k+h} \right\} | \delta_1 = \phi_1, \delta_2 = \phi_2, ..., \delta_h = \phi_h \right] {}_jp_{x+h} q_{x+h+j} \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j}\ {}_jp_{x+h} E\left[\exp\left\{ -\sum_{k=1}^{j} \delta_{k+h} \right\} | \delta_1 = \phi_1, \delta_2 = \phi_2, ..., \delta_h = \phi_h \right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Donde ϕ_j es el valor observado de δ_j .

Sin embargo una pregunta muy natural sería ¿Cómo se debería trabajar el caso continuo? Recordando que en este caso se tenía que $-\int_0^z \delta(t+s)ds$ funcionaba como factor de descuento y que:

$$\int_0^z \delta(t+s)ds = \int_t^{z+t} \delta(s)ds = \int_0^{z+t} \delta(s)ds - \int_0^t \delta(s)ds$$

Lo natural sería condicionar sobre el valor del factor de acumulación al tiempo t dado por $\int_0^t \delta(s)ds$, y el último valor observado, es decir por δ_t. Por lo tanto en este caso la expresión de reserva y la fórmula prospectiva estaría dada por:

$$_tV=E\left[{}_tL|T(x)>t|\int_0^t \delta(s)ds=\varphi, \delta_t=\varepsilon \right] \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} _tV=&\int_0^\infty SA_{z+t} E\left[e^{-\int_0^z \delta(t+s)ds} |\int_0^t \delta(s)ds=\varphi, \delta_t=\varepsilon \right] {}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz \\ &-\int_0^\infty \pi_{z+t} E\left[e^{-\int_0^z \delta(t+s)ds} |\int_0^t \delta(s)ds=\varphi, \delta_t=\varepsilon \right] {}_z p_{x+t}dz \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.2 Modelo AR(1) condicionado

Recordando que el modelo estaba basado en las tasas de interés contínuas se tenía que:

$$\delta_t=\mu+\alpha(\delta_{t-1}-\mu)+\varepsilon_t$$

Sin embargo se tiene que $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_h$ son valores numéricos y no variables aleatorias. Por lo tanto para $t > h$ es necesario determinar como se ve modificada tanto la media, como la función de autocorrelación para poder encontrar de nuevo la expresión de la función generadora de momentos evaluada en el vector $(\overline{-1})$ [1].

Para $k > 0$ se tiene que:

$$E[\delta_{h+k}] = \mu + \alpha^k \delta_h - \alpha^k \mu \tag{4.6}$$

Dem.

La demostración se realiza por inducción:

Base inductiva:

$$E[\delta_{h+1}] = E[\mu + \alpha(\delta_h - \mu) + \varepsilon_{h+1}]$$
$$= \mu + \alpha\delta_h - \alpha\mu$$

Hipótesis de inducción:

Se supone que es cierto hasta un cierto natural n

$$E[\delta_{h+n}] = \mu + \alpha^n \delta_h - \alpha^n \mu$$

Paso inductivo:

P.D. para $n+1$

$$E[\delta_{h+n+1}] = E[\mu + \alpha(\delta_{h+n} - \mu) + \varepsilon_{h+n+1}]$$
$$= \mu + \alpha E[\delta_{h+n}] - \alpha\mu$$
$$= \mu + \alpha[\mu + \alpha^n \delta_h - \alpha^n \mu] - \alpha\mu$$
$$= \mu + \alpha^{n+1} \delta_h - \alpha^{n+1} \mu$$

Ahora bien la varianza estaría dada por:

$$Var[\delta_{h+k}] = \sigma^2 \left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2} \right) \qquad (4.7)$$

Dem.

La demostración se realiza por inducción:

Base inductiva:

$$Var[\delta_{h+1}] = E[\mu + \alpha(\delta_h - \mu) + \varepsilon_{h+1}]$$
$$= \sigma^2$$

Hipótesis de inducción:

Se supone que es cierto hasta un natural n

$$Var[\delta_{h+n}] = \sigma^2 \left(\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} \right)$$

Paso inductivo:

P.D. para $n+1$

$$Var\left[\delta_{h+n+1}\right] = Var\left[\mu + \alpha\left(\delta_{h+n} - \mu\right) + \varepsilon_{h+n+1}\right]$$

$$= \alpha^2 Var\left[\delta_{h+n}\right] + \sigma^2$$

$$=\alpha^2\sigma^2\left(\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\right)+\sigma^2$$

$$=\sigma^2\left(\frac{\alpha^2-\alpha^{2(n+1)}+1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)$$

$$=\sigma^2\left(\frac{1-\alpha^{2(n+1)}}{1-\alpha^2}\right)$$

Q.E.D.

Finalmente la función de autocovarianza para $k,n>0$ la cual estaría dada por:

$$Cov[\delta_{h+k+n},\delta_{h+k}]=\sigma^2\alpha^n\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right) \tag{4.8}$$

Dem.

La demostración se realiza por inducción:

Base inductiva:

$$\begin{aligned}Cov[\delta_{h+k+1},\delta_{h+k}]&=Cov[\mu+\alpha(\delta_{h+k}-\mu)+\varepsilon_{h+k+1},\delta_{h+k}]\\&=Cov[\alpha(\delta_{h+k}),\delta_{h+k}]+Cov[\varepsilon_{h+k+1},\delta_{h+k}]\\&=\alpha Var[\delta_{h+k}]\\&=\sigma^2\alpha^1\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right)\end{aligned}$$

Hipótesis de inducción:

Se supone que es cierto hasta un natural n

$$Cov[\delta_{h+k+n},\delta_{h+k}]=\sigma^2\alpha^n\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right)$$

Paso inductivo:

P.D. para $n+1$

$$Cov\left[\delta_{h+k+n+1},\delta_{h+k}\right]=Cov\left[\mu+\alpha\left(\delta_{h+k+n}-\mu\right)+\varepsilon_{h+k+n},\delta_{h+k}\right]$$

$$=Cov\left[\alpha\left(\delta_{h+k+n}\right),\delta_{h+k}\right]+Cov\left[\varepsilon_{h+k+n},\delta_{h+k}\right]$$

$$=\alpha Cov\left[\delta_{h+k+n},\delta_{h+k}\right]$$

$$=\alpha\sigma^2\alpha^n\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right)$$

$$=\sigma^2\alpha^{n+1}\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right)$$

Q.E.D.

Como se determinó bajo este modelo, el último valor observado impacta tanto en la media, como en la función de autocovarianza, sin embargo conforme se calcula estos para valores alejados del último valor observado, se obtiene de manera asintótica los resultados teóricos originales.

Lo único que resta es calcular:

$$M_{\sum_{K=1}^{j+1}\delta_{h+k}}(r)=exp\left\{\bar{\mu}^T r+\frac{1}{2}r^T\Sigma r\right\}$$

Evaluada en $t=[-1,-1,-1,...,-1]^T$

Ahora bien:

$$\bar{\mu}^T t=\left[E[\delta_{h+1}],E[\delta_{h+2}],...,E[\delta_{h+j+1}]\right][-1,-1,-1,...,-1]^T$$

$$=-\sum_{k=1}^{j+1}E[\delta_{h+k}]$$

$$=-\sum_{k=1}^{j+1}\left(\mu+\alpha^k\delta_h-\alpha^k\mu\right)$$

$$=-\mu(j+1)+\frac{\left(\alpha-\alpha^{j+2}\right)\left(\mu-\delta_h\right)}{1-\alpha} \tag{4.9}$$

Finalmente recordando que la matriz de covarianzas esta dada por:

$$\begin{bmatrix}
Var(\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+1},\delta_{h+j+1})\\
Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+1}) & Var(\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+2},\delta_{h+j+1})\\
Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+2}) & Var(\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+3},\delta_{h+j+1})\\
. & . & . & ..... & . & .\\
Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+3}) & ..... & Var(\delta_{h+j}) & Cov(\delta_{h+j},\delta_{h+j+1})\\
Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+1}) & Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+2}) & Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+3}) & ..... & Cov(\delta_{h+j+1},\delta_{h+j}) & Var(\delta_{h+j+1})
\end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & \alpha(1-\alpha^2) & \alpha^2(1-\alpha^2) & ..... & \alpha^{j-1}(1-\alpha^2) & \alpha^{j}(1-\alpha^2) \\ \alpha(1-\alpha^2) & 1-\alpha^4 & \alpha(1-\alpha^4) & ..... & \alpha^{j-2}(1-\alpha^4) & \alpha^{j-1}(1-\alpha^4) \\ \alpha^2(1-\alpha^2) & \alpha(1-\alpha^4) & 1-\alpha^6 & ..... & \alpha^{j-3}(1-\alpha^6) & \alpha^{j-2}(1-\alpha^6) \\ . & . & . & ..... & . & . \\ \alpha^{j-1}(1-\alpha^2) & \alpha^{j-2}(1-\alpha^4) & \alpha^{j-3}(1-\alpha^6) & ..... & 1-\alpha^{2j} & \alpha(1-\alpha^{2j}) \\ \alpha^{j}(1-\alpha^2) & \alpha^{j-1}(1-\alpha^4) & \alpha^{j-2}(1-\alpha^6) & ..... & \alpha(1-\alpha^{2j}) & 1-\alpha^{2(j+1)} \end{bmatrix}$$

Si se denota las entradas de la matriz como $\{a_{x,y}\}$, es claro que cada entrada puede ser escrita como $a_{x,y} = \alpha^{|x-y|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,y\}}\right)$:

Finalmente calculando:

$$\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}[-1,-1,-1,...,-1]\Sigma[-1,-1,-1,...,-1]^T$$

$$= \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left[-\sum_{x=1}^{j+1}\alpha^{|x-1|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,1\}}\right),-\sum_{x=1}^{j+1}\alpha^{|x-2|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,2\}}\right),...,-\sum_{x=1}^{j+1}\alpha^{|x-j+1|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,j+1\}}\right)\right][-1,-1,-1,...,-1]^T$$

$$= \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{x=1}^{j+1}\alpha^{|x-y|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,y\}}\right) \qquad (4.10)$$

Ahora bien simplificando la expresión obtenida:

$$\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{x=1}^{j+1}\alpha^{|x-y|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,y\}}\right)$$

Separando esta suma en dos partes; cuando los índices son iguales y cuando son distintos; se obtiene:

$$\sum_{y=1}^{j+1}\left(1-\alpha^{2y}\right)+\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{x\neq y}\alpha^{|x-y|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,y\}}\right)$$

Haciendo la observación de que la expresión:

$$\alpha^{|x-y|}\left(1-\alpha^{2\min\{x,y\}} = \alpha^{|y-x|}\left(1-\alpha^{2\min\{y,x\}}\right)\right)$$

Puede ser escrita como:

$$\sum_{y=1}^{j+1}\left(1-\alpha^{2y}\right)+2\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{x>y}\alpha^{x-y}\left(1-\alpha^{2y}\right)$$

$$\sum_{y=1}^{j+1}\left(1-\alpha^{2y}\right)+2\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{x=y+1}^{j+1}\alpha^{x-y}\left(1-\alpha^{2y}\right)$$

$$(j+1)-\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2)}}{1-\alpha^2}+2\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{x=y+1}^{j+1}\alpha^{x-y}\left(1-\alpha^{2y}\right)$$

Ahora bien sea $z=x-y$ se obtiene:

$$(j+1)-\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2)}}{1-\alpha^2}+2\sum_{y=1}^{j+1}\sum_{z=1}^{j+1-y}\alpha^{z}\left(1-\alpha^{2y}\right)$$

Finalmente cambiando el orden de las sumas como se realizó en el capítulo tres:

$$(j+1)-\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2)}}{1-\alpha^2}+2\sum_{z=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1-z}\alpha^{z}\left(1-\alpha^{2y}\right)$$

$$=(j+1)-\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2)}}{1-\alpha^2}+2\sum_{z=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1-z}\alpha^{z}\left(1-\alpha^{2y}\right)$$

$$=(j+1)-\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2)}}{1-\alpha^2}+2\sum_{z=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1-z}\alpha^{z}-2\sum_{z=1}^{j+1}\sum_{y=1}^{j+1-z}\alpha^{z}\alpha^{2y}$$

$$=(j+1)-\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2)}}{1-\alpha^2}+2\sum_{z=1}^{j+1}(j+1-z)\alpha^{z}-2\sum_{z=1}^{j+1}\alpha^{z}\,\frac{\alpha^2-\alpha^{2(j+2-z)}}{1-\alpha^2}$$

$$=(j+1)+2\sum_{z=1}^{j+1}(j+1-z)\alpha^{z}-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[1-\alpha^{2(j+1)}-2\sum_{z=1}^{j+1}\alpha^{z}\left(1-\alpha^{2(j+1-z)}\right)\right]$$

Observando que se tiene una expresión similar a la obtenida en el modelo AR (1) sin condicionar dada por los primeros dos sumandos, esto se reduce a:

$$=(j+1)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right)-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[1-\alpha^{2(j+1)}-2\sum_{z=1}^{j+1}\alpha^{z}\left(1-\alpha^{2(j+1-z)}\right)\right]$$

$$=(j+1)\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-2\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right)-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[1-\alpha^{2(j+1)}-2\sum_{z=1}^{j+1}\left(\alpha^{z}-\alpha^{2(j+1)-z}\right)\right]\quad(4.11)$$

Desarrollando el término dado por $\sum_{z=1}^{j+1}\left(\alpha^{z}-\alpha^{2(j+1)-z}\right)$:

$$=\sum_{z=1}^{j+1}\left(\alpha^{z}-\alpha^{2(j+1)}\alpha^{-z}\right)$$

$$=\frac{\alpha-\alpha^{j+2}}{1-\alpha}-\alpha^{2(j+1)}\left[\frac{\alpha^{-1}-\alpha^{-j-2}}{1-\alpha^{-1}}\right]$$

$$=\frac{\alpha-\alpha^{j+2}}{1-\alpha}-\alpha^{2(j+1)}\left[\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^{j+2}}}{1-\frac{1}{\alpha}}\right]$$

$$=\frac{\alpha-\alpha^{j+2}}{1-\alpha}-\alpha^{2(j+1)}\left[\frac{\frac{\alpha^{j+1}-1}{\alpha^{j+2}}}{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]$$

$$=\frac{\alpha-\alpha^{j+2}}{1-\alpha}-\alpha^{2(j+1)}\left[\frac{\alpha^{j+1}-1}{\alpha^{j+1}(\alpha-1)}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{j+1}+\alpha^{2j+1}-\alpha^{j}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[1-\alpha^{j+1}-\alpha^{j}\left(1-\alpha^{j+1}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{j+1}\right)\left(1-\alpha^{j}\right) \tag{4.12}$$

Por lo tanto juntando (4.10), (4.11) y (4.12) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}t^{T}\Sigma t=\frac{\sigma^{2}}{1-\alpha^{2}}&\left\{\frac{(j+1)}{2}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)-\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^{2}}\right)\right.\\&\left.-\frac{\alpha^{2}}{1-\alpha^{2}}\left[\frac{1-\alpha^{2(j+1)}}{2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{j+1}\right)\left(1-\alpha^{j}\right)\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por lo cual:

$$E\left[e^{-\sum_{k=1}^{j+1}\delta_{k+h}}\,|\,\delta_1=\phi_1,\delta_2=\phi_2,\ldots,\delta_h=\phi_h\right]=$$

$$\exp\left\{-\mu(j+1)+\frac{\left(\alpha-\alpha^{j+2}\right)(\mu-\delta_h)}{1-\alpha}+\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\frac{(j+1)}{2}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right.$$
$$\left.\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left(-\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right)-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\frac{1-\alpha^{2(j+1)}}{2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{j+1}\right)\left(1-\alpha^{j}\right)\right]\right\}\right) \tag{4.14}$$

De donde la reserva esta dada por:

$${}_hV=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\exp\left\{-\mu(j+1)+\frac{\left(\alpha-\alpha^{j+2}\right)(\mu-\delta_h)}{1-\alpha}+\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\frac{(j+1)}{2}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right.$$
$$\left.\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left(-\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right)-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\frac{1-\alpha^{2(j+1)}}{2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{j+1}\right)\left(1-\alpha^{j}\right)\right]\right\}\right)\,{}_jp_{x+h}q_{x+h+j}$$
$$-\pi_h-\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{h+j}\exp\left\{-\mu j+\frac{\left(\alpha-\alpha^{j+1}\right)(\mu-\delta_h)}{1-\alpha}+\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\frac{j}{2}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)\right.$$
$$\left.\frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\left(-\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j}}{(1-\alpha)^2}\right)-\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left[\frac{1-\alpha^{2j}}{2}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{j}\right)\left(1-\alpha^{j-1}\right)\right]\right)\right\}\,{}_jp_{x+h} \tag{4.15}$$

En general se puede ver que en un modelo $AR(p)$, éste se ve afectado por los últimos p valores, conforme a lo que sugiere el modelo teórico y recuperándose los valores teóricos de manera asintótica.

4.3 Algunos modelos condicionales de tasas con distribuciones modeladas bajo movimientos Brownianos

4.3.1 Modelos sobre la fuerza de acumulación

De los dos modelos que se han tratado sobre la fuerza de acumulación [2], el primero era el modelado bajo un movimiento browniano, en este caso es posible obtener expresiones con la información obtenida.

Para el caso del modelo dado por:

$$X(0,z,t)=\mu z+\sigma\left(W_{z+t}-W_t\right)$$

Se tiene que:

$$E\left[X(0,z,t)\mid X(0,t,0)=\phi\right]=E\left[\mu z+\sigma\left(W_{z+t}-W_t\right)\mid \mu t+\sigma W_t=\phi\right]$$
$$=E\left[\mu z+\sigma\left(W_{z+t}-W_t\right)\mid W_t=\frac{\phi-\mu t}{\sigma}\right]$$

Finalmente aplicando la propiedad que los incrementos del movimiento browniano son independientes:

$$\begin{aligned} E[X(0,z,t) \mid X(0,t,0)=\phi] &= E[\mu z+\sigma(W_{z+t}-W_t)] \\ &= \mu z \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ahora bien de manera totalmente análoga se puede ver:

$$\begin{aligned} Var[X(0,z,t) \mid X(0,t,0)=\phi] &= Var[\mu z+\sigma(W_{z+t}-W_t)] \\ &= \sigma^2 z \end{aligned} \tag{4.17}$$

Por lo cual el modelo condicional no se ve modificado, es decir la reserva esta dada por:

$$\int_0^{\infty} SA_{r+t}\exp\left\{-\delta r+\frac{r\sigma^2}{2}\right\}{}_r p_{x+t}\mu_x(t+r)dz-\int_0^{\infty}\pi_{r+t}\exp\left\{-\delta r+\frac{r\sigma^2}{2}\right\}{}_r p_{x+t}dr \tag{4.18}$$

4.3.2 Modelos sobre la tasa instantánea de interés

En este caso la información conocida hasta ese momento es $\int_0^t \delta(s)ds=\varphi$ y $\delta(t)=\varepsilon$, por lo que basta determinar como se ve afectada por esta información $\int_t^{z+t}\delta(s)ds$.

Partiendo del primer modelo propuesto dado en (3.34):

$$\delta(t)=\mu+\sigma W_t$$

Recordando que los procesos Brownianos son martingalas[3], con lo cual que la esperanza únicamente depende del último valor observado, es decir si $r\in[0,z)$ se tiene que $E(\delta(t+r)|\delta(t))$ no depende de $\delta(s)$ para $s\in[0,t)$, por lo cual:

$$E\left(\int_t^{z+t}\delta(s)\,ds|\int_0^t\delta(s)\,ds=\varphi,\delta(t)=\varepsilon\right)=E\left(\int_t^{z+t}\delta(s)\,ds|\delta(t)=\varepsilon\right)$$

Entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue[4]:

$$E\left[\int_0^z\delta(t+s)\mid\delta(t)=\varepsilon\right]=\int_0^z E[\delta(t+s)ds\mid\delta(t)=\varepsilon]ds$$

Descomponiendo el valor de $\delta(s)$ se obtiene:

$$\int_0^z E[\mu+\sigma W_{t+s} \mid \mu+\sigma W_t=\varepsilon]ds=\mu z+\sigma\int_0^z E\left[W_{t+s} \mid W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds$$

Escribiendo a $W_{t+s}=W_{t+s}-W_s+W_s$ y utilizando la propiedad de incrementos independientes de los movimientos Brownianos (recordando que el movimiento browniano es una martingala):

$$=\mu z+\sigma\int_0^z E\left[W_{t+s}-W_s|W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds+\sigma\int_0^z E\left[W_s|W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds$$

$$=\mu z+\sigma\int_0^z E[W_{t+s}-W_s]ds+\sigma\int_0^z\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}ds$$

$$=\mu z+\sigma\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}z$$

$$=\varepsilon z \qquad (4.19)$$

Ahora calculando $E\left(\left[\int_0^z \delta(t+s)\mid\delta(t)=\varepsilon\right]ds\right)^2$, se tiene que por la isometría de Itô[5] esto es igual a:

$$\int_0^z E\left[\mu^2+2\mu\sigma W_{t+s}+\sigma^2 W_{t+s}^2 \mid W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds$$

$$=\mu^2 z+2\mu\sigma\int_0^z E\left[W_{t+s}|W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds+\sigma^2\int_0^z E\left[W_{t+s}^2|W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds$$

$$=\mu^2 z+2\mu\sigma\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}z+\sigma^2\int_0^z E\left[W_{t+s}^2-(t+s)+(t+s)|W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds$$

$$=\mu^2 z+2\mu z(\varepsilon-\mu)+\sigma^2\int_0^z E\left[W_{t+s}^2-(t+s)|W_t=\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right]ds+\sigma^2 t+\sigma^2\frac{z^2}{2}$$

Finalmente recordando que W_t^2-t es también una martingala [5] con respecto a la filtración natural de W_t:

$$\mu^2 z+2\mu z(\varepsilon-\mu)+\sigma^2 t+\sigma^2\frac{z^2}{2}+\sigma^2\int_0^z\left(\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right)^2-s\right)ds$$

$$=\mu^2 z+2\mu z(\varepsilon-\mu)+\sigma^2 t+\sigma^2\frac{z^2}{2}+\sigma^2\left(\frac{\varepsilon-\mu}{\sigma}\right)^2 z-\sigma^2\frac{z^2}{2}$$

$$=\mu^2 z+2\mu z(\varepsilon-\mu)+\sigma^2 t+(\varepsilon-\mu)^2 z \tag{4.20}$$

Por lo cual juntando los resultados de la esperanza y la esperanza del cuadrado se concluye que:

$$\mu^2 z+2\mu z(\varepsilon-\mu)+\sigma^2 t+(\varepsilon-\mu)^2 z-\varepsilon^2 z^2$$

$$=\sigma^2 t+\varepsilon^2 z-\varepsilon^2 z^2 \tag{4.21}$$

Por lo cual la reserva bajo esta información condicional estaría dada por:

$$\begin{aligned}{}_tV=&\int_0^\infty SA_{z+t}\exp\left\{-\varepsilon z+\frac{1}{2}\left(\sigma^2 t+\varepsilon^2 z-\varepsilon^2 z^2\right)\right\}{}_z p_{z+t}\mu_x(t+z)dz\\&-\int_0^\infty \pi_{z+t}\exp\left\{-\varepsilon z+\frac{1}{2}\left(\sigma^2 t+\varepsilon^2 z-\varepsilon^2 z^2\right)\right\}{}_z p_{x+t}dz\end{aligned} \tag{4.22}$$

4.4 Ejemplo

Tomando como referencia el modelo $AR(1)$ utilizado en el capítulo de series de tiempo, bajo los mismos parámetros (persona de edad 30 temporal 20 y considerando pago de primas durante los 20 años y durante 10 años, con $\mu=.0344$, $\sigma^2=.4.3957\text{E}-05$, $\alpha=0.918$ utilizando la tabla Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98) se había obtenido que bajo este modelo la prima estaba dada por:

$$\pi=4{,}442.49$$

Ahora bien suponiendo que se obtuvieron las siguientes observaciones:

i	δ_i
1	0.034437
2	0.043000
3	0.043191
4	0.032910
5	0.051379
6	0.035996
7	0.030771
8	0.029803
9	0.041263
10	0.044073
11	0.052408
12	0.048142

i	δ_i
13	0.045252
14	0.044942
15	0.038948
16	0.015939
17	0.034855
18	0.029414
19	0.031783

Es importante hacer ver que el término de la varianza el cual estaba dado por (4.13), únicamente depende de la distancia al último valor observado pero no de éste, por lo cual se puede generar la siguiente tabla para las reservas en todos los años:

j	$\frac{(j+1)}{2}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$	$\alpha\left(\frac{1-\alpha^{j+1}}{(1-\alpha)^2}\right)$	$\frac{1-\alpha^{2(j+1)}}{2}$	$\frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\alpha^{j+1})(1-\alpha^{j})$	$\frac{1}{2}t^T\Sigma t$
0	11.6951	11.1951	0.078638	0.000000	0.000022
1	23.3902	21.4722	0.144908	0.144379	0.000535
2	35.0854	30.9066	0.200756	0.398592	0.001464
3	46.7805	39.5674	0.247820	0.734494	0.002745
4	58.4756	47.5180	0.287481	1.129262	0.004323
5	70.1707	54.8167	0.320906	1.564479	0.006154
6	81.8659	61.5168	0.349073	2.025374	0.008198
7	93.5610	67.6676	0.372810	2.500191	0.010423
8	105.2561	73.3139	0.392814	2.979655	0.012801
9	116.9512	78.4973	0.409672	3.456529	0.015310
10	128.6463	83.2557	0.423878	3.925251	0.017930
11	140.3415	87.6238	0.435850	4.381621	0.020643
12	152.0366	91.6338	0.445940	4.822549	0.023436
13	163.7317	95.3149	0.454442	5.245845	0.026297
14	175.4268	98.6942	0.461607	5.650041	0.029216
15	187.1220	101.7964	0.467645	6.034249	0.032184
16	198.8171	104.6442	0.472734	6.398037	0.035194
17	210.5122	107.2585	0.477022	6.741338	0.038240
18	222.2073	109.6585	0.480636	7.064361	0.041316

Ahora bien en el caso de la media esta si depende del último valor observado, por lo cual es necesario irla calculando cada año, conforme se vaya obteniendo la nueva información. Por ejemplo después del primer año de cobertura, ya se conoce $\delta_1 = 0.034437$, dando las siguientes medias y combinando las varianzas obtenidas se obtienen los siguientes factores de descuento:

j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.034434	0.966174
1	-0.068864	0.933953
2	-0.103293	0.903184
3	-0.137719	0.873739
4	-0.172142	0.845507
5	-0.206564	0.818395

j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
6	-0.240984	0.792323
7	-0.275403	0.767221
8	-0.309820	0.743030
9	-0.344235	0.719697
10	-0.378650	0.697174
11	-0.413063	0.675421
12	-0.447475	0.654399
13	-0.481886	0.634075
14	-0.516296	0.614418
15	-0.550705	0.595400
16	-0.585114	0.576996
17	-0.619522	0.559181
18	-0.653929	0.541933

Los resultados detallados para cada año de valuación, para este ejemplo se encuentran en el segundo anexo.

Con esto lo único que resta es realizar los cálculos que involucran las probabilidades de muerte y de supervivencia. Aplicando este cálculo para todos los años y actualizando como se ve afectada la media, se obtienen los siguientes resultados para el pago de primas durante el periodo de cobertura:

h	${}_hV^{AR(1)}$	${}_hV^{AR(1)cond}$	${}_hV^{AR(1)} - {}_hV^{AR(1)cond}$	Diferencias relativas
0	0	0	0	0
1	2,309.03	2,431.53	122.50	5.31%
2	4,526.60	3,706.59	-820.01	-18.12%
3	6,636.82	5,748.83	-887.99	-13.38%
4	8,621.74	8,917.59	295.85	3.43%
5	10,462.80	8,590.14	-1,872.66	-17.90%
6	12,137.74	12,041.45	-96.29	-0.79%
7	13,624.98	14,170.35	545.37	4.00%
8	14,899.10	15,542.45	643.35	4.32%
9	15,932.16	12,041.45	-3,890.71	-24.42%
10	16,693.58	15,729.15	-964.43	-5.78%
11	17,149.96	15,463.01	-1,686.95	-9.84%
12	17,263.43	16,084.54	-1,178.89	-6.83%
13	16,994.36	16,166.31	-828.05	-4.87%
14	16,298.21	15,604.38	-693.84	-4.26%
15	15,125.25	14,882.58	-242.67	-1.60%
16	13,421.63	14,256.09	834.46	6.22%
17	11,126.10	11,114.09	-12.00	-0.11%
18	8,173.94	7,058.25	-1,115.69	-13.65%
19	4,492.10	3,282.02	-1,210.08	-26.94%
20	0	0	0	0

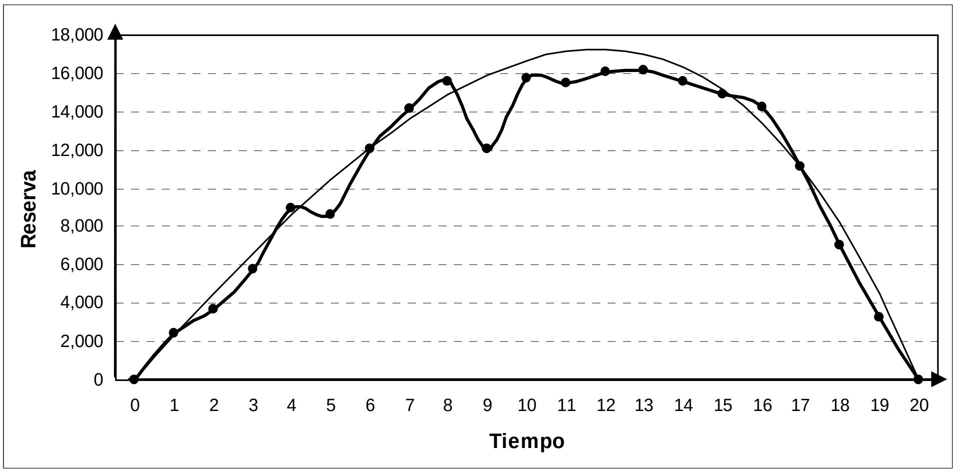


Figura 4.1 Tendencia del modelo AR(1) condicionado para un seguro temporal 20 con pago de pago de primas durante el período de cobertura.

h	${}_hV^{AR(1)}$	${}_hV^{AR(1)cond}$	${}_hV^{AR(1)} - {}_hV^{AR(1)cond}$	Diferencias relativas
0	0	0	0	0
1	5,492.37	5,767.86	275.49	5.02%
2	11,007.00	9,121.05	-1,885.96	-17.13%
3	16,533.59	14,470.97	-2,062.62	-12.48%
4	22,060.26	22,731.86	671.60	3.04%
5	27,574.97	23,180.70	-4,394.26	-15.94%
6	33,062.62	26,319.51	-6,743.12	-20.39%
7	38,509.38	39,738.26	1,228.88	3.19%
8	43,898.31	45,327.07	1,428.76	3.25%
9	49,210.77	47,631.49	-1,579.29	-3.21%
10	54,426.37	52,383.84	-2,042.53	-3.75%
11	51,682.22	48,301.56	-3,380.66	-6.54%
12	48,485.85	46,243.94	-2,241.92	-4.62%
13	44,792.00	43,298.71	-1,493.29	-3.33%
14	40,549.96	39,367.50	-1,182.46	-2.92%
15	35,703.23	35,312.42	-390.81	-1.09%
16	30,190.50	31,423.46	1,232.95	4.08%
17	23,942.29	23,924.71	-17.57	-0.07%
18	16,884.73	15,789.87	-1,094.86	-6.48%
19	8,934.59	7,724.51	-1,210.08	-13.54%
20	0	0	0	0

Como se puede observar en este caso se presentan mayores fluctuaciones, sin embargo se conserva la misma tendencia que en el caso del modelo no condicional, esto es precisamente por la actualización de la información que se tiene en cada año bajo esta aplicación, que en esta alternativa particular de la historia dada, se tiene en la mayoría de los casos que las tasas observadas son mayores a la media, por lo tanto el factor de descuento es menor, obteniendo valores menores (en general) a los estimados bajo el modelo no condicional. Es importante mencionar que en el noveno año se presenta una disminución notoria en la constitución de la reserva; esto se debe a que el valor observado de la tasa de interés en ese año sube mas de un punto porcentual mientras sigue la tendencia creciente causada por las hipótesis demográficas.

Ahora analizando el caso cuando las primas se pagan durante diez años:

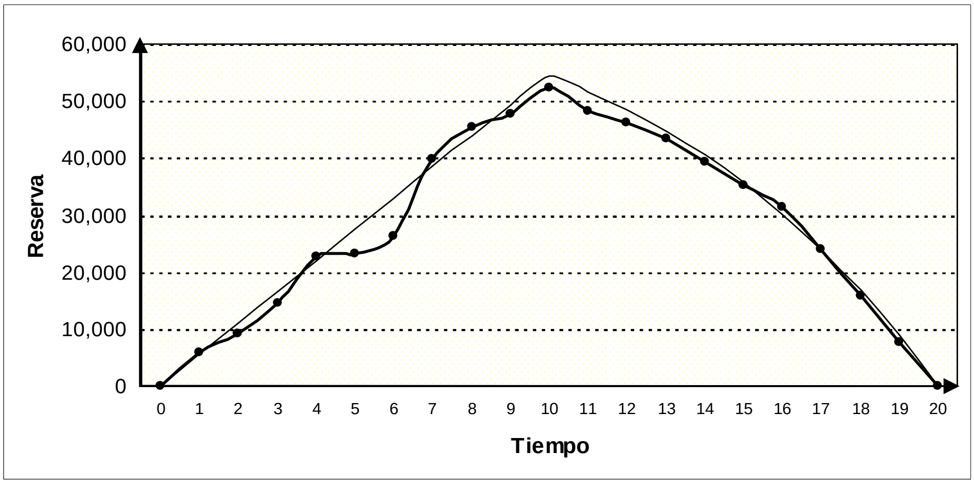


Figura 4.2 Tendencia del modelo AR(1) condicionado para un seguro temporal 20 con pago de pago de primas durante el 10 años.

En este caso se presentan menores fluctuaciones que en cuando las primas se pagaban durante el periodo de cobertura, también se conserva la misma tendencia que en el caso del modelo no condicional; en este caso la fluctuación en el noveno año no es tan grande, debido a que al estar próximo el término de pago de primas no existe gran variabilidad.

Finalmente cabe mencionar que se hubiera obtenido un escenario adverso de tasas de interés (es decir más chicas a la media), se tendría el efecto inverso a los observados en estos dos casos, es decir se tendría una mayor constitución de reserva, aunque no es posible establecer una relación general de que tan grande deber ser la fluctuación con respecto a la media para tener un impacto importante en la reserva (al esta depender también de la tabla de mortalidad, de los parámetros del modelo y las condicionales iniciales bajo las cuales fue calculada la prima). La ventaja de este modelo es precisamente ir ajustando la reserva cada año, según las situaciones financieras del momento.

Referencias y notas del cuarto capítulo

1. Los resultados desarrollados en esta sección pueden ser encontrados en Panjer Harry y Bellhouse David, Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies Part Two, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 48, No. 4, 1981.
2. Los resultados aquí desarrollados se encuentran sintetizados en Parker Gary, Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions, Astin Voulletin Vol.24, 1994.
3. Esto es inmediato de la propiedad de incrementos independientes de este proceso, véase Brzezniak Zdzislaw y Zastawniak Tomasz , Basic Stochastic Process, Springer, Gran Bretaña, 2002 páginas 153-155.
4. Bartle Robert, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiely Interscience Publications, E.U.A., 1995, página 44.
5. Brzezniak Zdzislaw y Zastawniak Tomasz , Basic Stochastic Process, Springer, Gran Bretaña, 2002 página 184, expresión (7.6).
6. Esta es parte de la caracterización de Levy para movimientos Brownianos, véase Brzezniak Zdzislaw y Zastawniak Tomasz , Basic Stochastic Process, Springer, Gran Bretaña, 2002 página 156.

Capítulo V: Extensión de los Resultados

5.1 Extensión a vidas Múltiples

En la práctica existen seguros cuyo pago puede depender de más de una vida, es decir, el pago de los beneficios depende del fallecimiento de una o más personas; por ejemplo un seguro le puede pagar a un hijo un beneficio en caso de que fallezca alguno de sus padres; o bien se puede definir el pago del beneficio cuando ambos fallezcan. A este tipo de seguros se les conoce como seguros de vidas múltiples.

Se define como status al un conjunto finito de personas cuya existencia depende de algúna condición preestablecida como puede ser: que el status se extinga a la muerte del primer miembro, o bien cuando no haya ningun miembro del conjunto de personas vivo.

Por lo cuál es posible que a la muerte de alguna persona del status este se transforme o bien desaparezca; por lo mismo a diferencia del caso una vida, el pago de primas puede depender de algún otro status diferente al que esta cubriendo el seguro.

Por lo cual una pregunta muy natural que puede surgir es: ¿Qué pasa con las reservas en caso que el seguro este definido para vidas múltiples? A continuación se generalizara la definición de reserva para los status más comunes:

5.1.1 Primer Fallecimiento

El caso más sencillo a desarrollar es el status del primer fallecimiento [1], el cuál dado un conjunto de m personas $(x_1, x_2, ..., x_m)$ se define el tiempo de vida del status como:

$$K(x_1, x_2, ...x_m) = \min\left[K(x_1), K(x_2), ...K(x_m)\right] \qquad (5.1)$$

En este caso se denota por ${}_n p_{x_1 x_2 ..x_m} = P\left(K(x_1, x_2, ..x_m) \geq n\right)$ y por ${}_n q_{x_1 x_2 ..x_m} = P\left(K(x_1, x_2, ..x_m) < n\right)$.

Cabe mencionar que cuando las vidas son independientes, hipótesis que generalmente es aplicada, se tiene que:

$${}_n p_{x_1 x_2 ..x_m} = \prod_{i=1}^{m} {}_n p_{x_i}$$

Sin embargo es importante mencionar que:

$$1-{}_{n}p_{x_1x_2..x_m}={}_{n}q_{x_1x_2..x_m}\neq\prod_{i=1}^{m}{}_{n}q_{x_i}$$

En este caso se tiene que la pérdida esperada al tiempo h estaría dada por:

$$_{h}L=\begin{cases} 0 & h>K(x_1,x_2,...,x_m) \\ SA_{K(x_1,x_2,...,x_m)}\displaystyle\prod_{j=h+1}^{K(x_1,x_2,...,x_m)+1}\frac{1}{1+I_j} & \\ -\displaystyle\sum_{j=h}^{K(x_1,x_2,...,x_m)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i} & h\leq K(x_1,x_2,...,x_m) \end{cases} \qquad (5.2)$$

Esta es la única manera de definir la pérdida, pues si el pago de primas se definiera sobre cualquier subconjunto propio de las vidas involucradas, se podría dar el caso que las primas pudieran ser pagadas dado que el status ya se termino, lo cual no es correcto en los seguros.

En este caso es natural definir a la reserva al momento h como:

$$_{h}V=E\left[{}_{h}L|K\left(x_1,x_2,...x_m\right)\geq h\right] \qquad (5.3)$$

Es fácil observar que en este status la extensión es análoga al caso de una vida, pues para constituir la reserva se necesita que todas las personas estén con vida al tiempo h .

Es posible volver a escribir la reserva como la diferencia entre las esperanza de las obligaciones futuras de la compañía aseguradora menos la esperanza de las obligaciones futuras del asegurado, bajo la hipótesis que la distribución condicional de $K(x_i)-h$ dado que $K(x_i)\geq h$ tiene la misma distribución de $K(x_i+h)$ $i=1,2,...,m$.

$$E\left[({}_{h}L|K\left(x_1,x_2,..x_m\right)\geq h)\right]$$

$$=E\left[\left(SA_{K(x_1,x_2,..x_m)}\prod_{j=1}^{K(x_1,x_2,..x_m)+1-h}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(x_1,x_2,..x_m)-h}\pi_j\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right)\right]$$

$$=E\left[\left(SA_{K(x_1,x_2,..x_m)-h+h}\prod_{j=1}^{K(x_1,x_2,..x_m)-h+1}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(x_1,x_2,..x_m)-h}\pi_{j+h}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}|K\left(x_1,x_2,..x_m\right)\geq h\right)\right]$$

Aplicando la hipótesis sobre la distribución condicional de $K(x_i)-h$ dado $K(x_i)\geq h$, recordando que $\min\{a,b\}-h=\min\{a-h,b-h\}$, y la hipótesis de independencia entre las distribuciones de los tiempos de vida y las tasas de interés, se obtiene:

$$E\left[SA_{K(x_1+h,x_2+h,..x_m+h)+h}\prod_{j=1}^{K(x_1+h,x_2+h,..x_m+h)}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(x_1+h,x_2+h,..x_m+h)}\pi_{h+j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$E\left[E\left[SA_{K(x_1+h,x_2+h,..x_m+h)+h}\prod_{j=1}^{K(x_1+h,x_2+h,..x_m+h)}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(x_1+h,x_2+h,..x_m+h)}\pi_{h+j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}|K\left(x_1+h,x_2+h,..x_m+h\right)=j\right]\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left[E\left[SA_{h+j}\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}-\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]\right]{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}q_{(x_1+h+j,x_2+h+j,..x_m+h+j)}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left[SA_{h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]-\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}E\left[\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]\right]{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}q_{(x_1+h+j,x_2+h+j,..x_m+h+j)}$$

Cambiando el orden de las sumas se obtiene:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\;{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}q_{(x_1+h+j,x_2+h+j,..x_m+h+j)}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]\\&-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\;{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}E\left[\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]\end{aligned}\tag{5.4}$$

De nuevo obteniéndose en caso de que las tasas sean independientes e idénticamente distribuidas:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\;{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}q_{(x_1+h+j,x_2+h+j,..x_m+h+j)}E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]\\&-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+k}\;{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}E^{j}\left[\frac{1}{1+I}\right]\end{aligned}\tag{5.5}$$

Y para el caso de tasas constantes:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\;{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}q_{(x_1+h+j,x_2+h+j,..x_m+h+j)}v^{j+1}\\&-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+k}\;{}_{j}p_{(x_1+h,x_2+h..x_m+h)}v^{j}\end{aligned}\tag{5.6}$$

La extensión al caso de que se incluya un pago por supervivencia es análoga, pues únicamente se le suma a la pérdida el término dado por:

$$BI_{(K(x_1,x_2,\ldots,x_m)\geq n)}\prod_{j=1}^{n-h}\frac{1}{1+I_{h+j}}$$

Que al calcular su esperanza para la expresión de la reserva sería:

$$B\ {}_{h-n}p_{(x_1+h,x_2+h\ldots x_m+h)}E\left[\prod_{j=1}^{n-h}\frac{1}{1+I_{h+j}}\right]$$

5.1.2 Último sobreviviente

Ahora otro status común es el del último sobreviviente [2], el cual para un conjunto de m personas $(x_1,x_2,...,x_m)$ se define el tiempo de vida del status como:

$$K\left(\overline{x_1,x_2,...x_m}\right)=\max\left[K(x_1),K\left(x_2\right),...K\left(x_m\right)\right] \qquad (5.7)$$

En este caso se denota por ${}_np_{\overline{x_1x_2..x_m}}=P\left(K\left(\overline{x_1,x_2,..x_m}\right)\geq n\right)$ y por ${}_nq_{\overline{x_1x_2..x_m}}=P\left(K\left(\overline{x_1,x_2,..x_m}\right)<n\right)$.

Cabe mencionar que cuando las vidas son independientes, hipótesis que generalmente es aplicada, se tiene que:

$${}_nq_{\overline{x_1x_2..x_m}}=\prod_{i=1}^{m}{}_nq_{x_i}$$

Por lo tanto la reserva al momento h se define como:

$${}_hV=E\left[{}_hL|K\left(\overline{x_1,x_2,...x_m}\right)\geq h\right] \qquad (5.8)$$

En este caso el cálculo de la reserva como proyección no es evidente, pues el status sigue vigente mientras alguno de las personas siga con vida, además que las modalidades de pago pueden ser definidas de varias maneras: que dependa de todo el status o de algún subconjunto propio de este, es decir que en este caso el pago de primas puede depender de una sola persona, dos o hasta m personas.

Por lo cual no es sencillo dar una expresión para la pérdida al tiempo h, sin embargo es posible de nuevo calcular la reserva utilizando de nuevo probabilidades y esperanzas condicionales.

Para ejemplificar esto primero se desarrollará el caso cuando $m=2$ y suponiendo que las primas se pagan cuando alguna de las dos personas este con vida (al igual que en el caso del primer fallecimiento, se supondrá que las son vidas independientes entre si).

En este caso:

$$P\left(K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)=P\left(K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)\geq h\right)+P\left(K\left(x\right)<h,K\left(y\right)\geq h\right)+P\left(K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)<h\right)$$

$$P\left(K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)\geq h|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)=\frac{{}_hp_x\,{}_hp_y}{1-{}_hq_x\,{}_hq_y}$$

$$P\left(K\left(x\right)<h,K\left(y\right)\geq h|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)=\frac{{}_hq_x\,{}_hp_y}{1-{}_hq_x\,{}_hq_y}$$

$$P\left(K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)<h|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)=\frac{{}_hp_x\,{}_hq_y}{1-{}_hq_x\,{}_hq_y}$$

Por lo tanto, utilizando esperanzas condicionales se tiene que:

$$\begin{aligned}E\left[{}_hL|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right]=&E\left[{}_hL|K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)\geq h\right]P\left(K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)\geq h|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)\\&+E\left[{}_hL|K\left(x\right)<h,K\left(y\right)\geq h\right]P\left(K\left(x\right)<h,K\left(y\right)\geq h|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)\\&+E\left[{}_hL|K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)<h\right]P\left(K\left(x\right)\geq h,K\left(y\right)<h|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right)\end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora el problema se simplifica pues se tiene que:

$$\left({}_hL|K\left(x\right)<h,K\left(y\right)\geq h\right)=SA_{K(y)}\prod_{j=h+1}^{K(y)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(y)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

Es claro esto, pues se tiene que al momento h si (x) está muerto y (y) vivo la pérdida esta dada por la suma asegurada que se de al momento de la muerte de (y) traída a valor presente menos el valor presente de las primas que se alcancen a pagar antes del momento de la muerte (esto es por la hipótesis de que las primas se pagarían mientras alguno de los dos asegurados estuviera con vida, en este caso el pago de primas ya solo depende de (y) al estar (x) muerto).

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}E\left[{}_hL|K\left(x\right)<h,K\left(y\right)\geq h\right]=&\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\,{}_jp_{y+h}q_{y+h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]\\&-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+k}\,{}_jp_{y+h}E\left[\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]\end{aligned}$$

Pues es la expresión que se había obtenido para el caso de una vida (puesto que ya no depende de (x) al estar muerto)

Análogamente se puede hacer este análisis con $\left({}_h L|K(x)\geq h, K(y)<h\right)$

Ahora para el último caso se tiene que:

$$\left({}_h L|K(x)\geq h, K(y)\geq h\right)=SA_{K(\overline{x,y})}\prod_{j=h+1}^{K(\overline{x,y})+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(\overline{x,y})}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

La lógica vuelve a ser la misma: traer a valor presente el beneficio que este vigente al momento de la muerte del último en fallecer menos el valor presente de las primas que se pagan hasta el momento de la muerte del último sobreviviente.

Ahora calculando la esperanza suponiendo de nuevo que la distribución condicional de $K(x)-h$ dado que $K(x)\geq h$ tiene la misma distribución de $K(x+h)$:

$$E\left[\left({}_h L|K(x)\geq h, K(y)\geq h\right)\right]$$

$$=E\left[\left(SA_{K(x_1,x_2,..x_m)}\prod_{j=1}^{K(\overline{x,y})+1-h}\frac{1}{1+I_{j+h}}-\sum_{j=0}^{K(\overline{x,y})-h}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}|K(x)\geq h, K(y)\geq h\right)\right]$$

$$=E\left[\left(SA_{K(\overline{x,y})-h+h}\prod_{j=1}^{K(\overline{x,y})-h+1}\frac{1}{1+I_{j+h}}-\sum_{j=0}^{K(\overline{x,y})-h}\pi_{j+h}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}|K(x)\geq h, K(y)\geq h\right)\right]$$

Recordando que $\max\{a,b\}-h=\max\{a-h,b-h\}$ así como la independencia entre el tiempo de vida y las tasas de interés, se obtiene:

$$E\left[SA_{K(\overline{x+h,y+h})+h}\prod_{j=1}^{K(\overline{x+h,y+h})}\frac{1}{1+I_{h+j}}-\sum_{j=0}^{K(\overline{x+h,y+h})}\pi_{h+j}\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

A diferencia del caso anterior no se puede dejar en términos de las probabilidades de vidas conjuntas, pues en este caso la probabilidad de muerte del status depende de quien esté vivo al momento $h+j$, mientras que en el caso del primer fallecimiento se necesitaba que todos los individuos estuvieran con vida.

En este caso la función de densidad de $K\left(\overline{x+h, y+h}\right)$ está dada por:

$$P\left(K\left(\overline{x+h, y+h}\right)=n\right)={}_n q_{x+h}\,{}_n p_{y+h} q_{y+h+n}+{}_n q_{y+h}\,{}_n p_{x+h} q_{x+h+n}+{}_n p_{x+h}\,{}_n p_{y+h} q_{x+h+n} q_{y+h+n}$$

Por lo tanto la expresión de la esperanza está dada por:

$$\sum_{j=0}^{\infty} E\left[SA_{h+j}\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}-\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}|K(\overline{x+h,y+h})=j\right]*P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} E\left[SA_{h+j}\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}|K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right]P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty} E\left[\sum_{k=0}^{j}\pi_{h+k}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}|K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right]P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} E\left[SA_{h+j}\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}|K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right]P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} E\left[\pi_{h+k}\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}|K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right]P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)$$

Cambiando el orden de las sumas se tiene que:

$$=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\pi_{h+k}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{h+k}\sum_{j=k}^{\infty}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)E\left[\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{j+k}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)\geq j\right)E\left[\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$

Donde $P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)\geq k\right)={}_k q_{x+h}\,{}_k p_{y+h}+{}_k q_{y+h}\,{}_k p_{x+h}+{}_k p_{x+h}\,{}_k p_{y+h}$.

En el caso de cuando las tasas sean independientes e idénticamente distribuidas:

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} P\left(K\left(\overline{x+h, y+h}\right)=j\right) E^{j+1}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j} P\left(K\left(\overline{x+h, y+h}\right)\geq j\right) E^{j}\left[\frac{1}{1+I}\right]$$

Y para el caso de tasas constantes:

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} P\left(K\left(\overline{x+h, y+h}\right)=j\right) v^{j+1}$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j} P\left(K\left(\overline{x+h, y+h}\right)\geq j\right) v^{j}$$

Por lo tanto la reserva está dada por:

$$\begin{aligned} E\left[{}_hL|K\left(\overline{x,y}\right)\geq h\right]=&\frac{{}_hp_x\,{}_hp_y E\left[{}_hL|K\left(x\right)\geq h, K\left(y\right)\geq h\right]}{{}_hp_x\,{}_hp_y+{}_hp_x\,{}_hq_y+{}_hq_x\,{}_hp_y} \\ &+\frac{{}_hq_x\,{}_hp_y E\left[{}_hL|K\left(x\right)< h, K\left(y\right)\geq h\right]}{{}_hp_x\,{}_hp_y+{}_hp_x\,{}_hq_y+{}_hq_x\,{}_hp_y} \\ &+\frac{{}_hp_x\,{}_hq_y E\left[{}_hL|K\left(x\right)\geq h, K\left(y\right)< h\right]}{{}_hp_x\,{}_hp_y+{}_hp_x\,{}_hq_y+{}_hq_x\,{}_hp_y} \end{aligned} \qquad (5.10)$$

Cabe mencionar que esta es la reserva cuando <u>únicamente se sabe que el status sigue vigente,</u> es decir cuando no se tiene información sobre que personas están vivas al tiempo h, de hecho se puede observar que la reserva en este caso es la ponderación de otras tres reservas: la reserva para cuando solo esta (x) con vida, la reserva cuando solo (y) esta con vida, y la reserva cuando ambas personas están con vida.

En caso de que se tuviera información adicional de que personas estuvieran con vida al momento h se tendría que la reserva estaría dada por la esperanza de la pérdida correspondiente, por ejemplo si se sabe al momento h que está (x) con vida pero (y) muerto, en este caso se tendría que:

$${}_hV=E\left[{}_hL|K\left(x\right)\geq h, K\left(y\right)< h\right]$$

Ahora considerando la variación con respecto al pago de primas cuando estos pagos solo dependen de una persona, sin pérdida de generalidad suponiendo que los pagos únicamente dependen de (x) entonces:

$$\left({}_hL|K\left(x\right)\geq h, K\left(y\right)\geq h\right)=SA_{K\left(\overline{x,y}\right)}\prod_{j=h+1}^{K\left(\overline{x,y}\right)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

$$\left({}_hL|K(x)<h,K(y)\geq h\right)=SA_{K(y)}\prod_{j=h+1}^{K(y)+1}\frac{1}{1+I_j}$$

$$\left({}_hL|K(x)\geq h,K(y)<h\right)=SA_{K(x)}\prod_{j=h+1}^{K(x)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(x)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

La modificación es clara pues cuando las dos personas están con vida, se trae a valor presente el beneficio cuando las dos personas fallezcan menos el valor presente de las primas que se pagan hasta que se muera (x), cuando solo esta (y) con vida se trae a valor presente el beneficio al momento de su muerte y ya no hay pago de primas pues los pagos concluyeron al fallecer (x), mientras que cuando solo esta (x) con vida se trae el beneficio al momento de su muerte menos las primas que éste alcance a pagar.

Por lo tanto las expresiones para las esperanzas de estas variables aleatorias son:

$$E\left[{}_hL|K(x)<h,K(y)\geq h\right]=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\;{}_jp_{y+h}q_{y+h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$

$$E\left[{}_hL|K(x)\geq h,K(y)<h\right]=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}\;{}_jp_{x+h}q_{x+h+j}E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+k}\;{}_jp_{x+h}E\left[\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+i}}\right]$$

$$E\left[{}_hL|K(x)\geq h,K(y)\geq h\right]=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}P\left(K\left(\overline{x+h,y+h}\right)=j\right)E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}\left({}_jp_x\right)E\left[\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$

Finalmente, la extensión para el caso de m personas sigue la misma lógica, pero aun así no es sencilla la expresión general.

Se generalizará el caso cuando las primas se paguen cuando por lo menos alguna persona del grupo esté con vida, sin embargo al igual que el caso de dos vidas es posible extenderlo a otras modalidades de pago.

Suponiendo solo que una persona (x_r) esta con vida se tiene que:

$$\left({}_{h}L|K\left(x_r\right)\geq h\bigcap_{q\neq r}K\left(x_q\right)<h\right)=SA_{K(x_r)}\prod_{j=h+1}^{K(x_r)+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(x_r)}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

Ahora si dos personas $\left(x_{r_1}\right),\left(x_{r_2}\right)$ estuvieran, con vida se tiene que:

$$\left({}_{h}L|K\left(x_{r_1}\right)\geq h, K\left(x_{r_2}\right)\geq h\bigcap_{q\neq r_1,r_2}K\left(x_q\right)<h\right)=SA_{K(\overline{x_{r1},x_{r2}})}\prod_{j=h+1}^{K(\overline{x_{r1},x_{r2}})+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(\overline{x_{r1},x_{r2}})}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

En general si $\left(x_{r_1}\right),\left(x_{r_2}\right),..\left(x_{r_p}\right)$ $p\in\{1,2,...m\}$ personas estuvieran con vida, se tendría que:

$$\left({}_{h}L|\bigcap_{j=1}^{p}K\left(x_{r_j}\right)\geq h\bigcap_{q\neq r_1,r_2,..r_p}K\left(x_q\right)<h\right)=SA_{K(\overline{x_{r1},x_{r2},...x_{rp}})}\prod_{j=h+1}^{K(\overline{x_{r1},x_{r2},...x_{rp}})+1}\frac{1}{1+I_j}-\sum_{j=h}^{K(\overline{x_{r1},x_{r2},...x_{rp}})}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

Calculando la esperanza de esta expresión con la hipótesis de que $K(x_i)-h$ dado que $K(x_i)\geq h$ tiene la misma distribución de $K(x_i+h)$ $\forall i=1,2,...,m$ se tiene que:

$$E\left[{}_{h}L|\bigcap_{j=1}^{p}K\left(x_{r_j}\right)\geq h\bigcap_{q\neq r_1,r_2,..r_p}K\left(x_q\right)<h\right]=\sum_{j=0}^{\infty}SA_{h+j}P\left(K\left(\overline{x_{r_1}+h,x_{r_2}+h,...x_{r_p}+h}\right)=k\right)E\left[\prod_{k=1}^{j+1}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]-\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{h+j}P\left(K\left(\overline{x_{r_1}+h,x_{r_2}+h,...x_{r_p}+h}\right)\geq j\right)E\left[\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{1+I_{h+k}}\right]$$

En cada caso se pueden obtener los resultados ya conocidos bajo tasas de interés independientes e idénticamente distribuidas o bajo el modelo determinista.

La extensión al caso de que se incluya un pago por supervivencia, se le suma a la pérdida el término dado por:

$$BI_{\left(K(\overline{x_{r1},x_{r2},...x_{rp}})\geq n\right)}\prod_{j=1}^{n-h}\frac{1}{1+I_{h+j}}$$

Que al calcular su esperanza da origen a la expresión:

$$B_{h-n}\, p_{\overline{\left(x_{r_1}+h, x_{r_2}+h, \ldots x_{r_p}+h\right)}} E\left[\prod_{j=1}^{n-h} \frac{1}{1+I_{h+j}}\right]$$

Finalmente si se tiene con exactitud qué personas están con vida al momento de la evaluación, se tiene que:

$$_hV = E\left[{}_hL \middle| \bigcap_{j=1}^{p} K\left(x_{r_j}\right) \geq h \bigcap_{q \neq r_1, r_2, \ldots r_p} K\left(x_q\right) < h\right]$$

Donde $\left(x_{r_1}\right), \left(x_{r_2}\right), \ldots \left(x_{r_p}\right)$ son las personas que están con vida.

Y en caso que la única información que se tuviera es que el status estuviera vigente, de nuevo se hace la ponderación dada por:

$$_hV = E\left[{}_hL | K\left(\overline{x_1, x_2, \ldots x_m}\right) \geq h\right] =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1-\prod_{i=1}^{m} {}_hq_{x_i}} \Bigg\{ {}_hp_{x_1} \prod_{i=2}^{m} {}_hq_{x_i} E\left[{}_hL | K(x_1) \geq h \bigcap_{i \neq 1} K(x_i) < h\right] + \ldots. \\ &{}_hp_{x_m} \prod_{i=1}^{m-1} {}_hq_{x_i} E\left[{}_hL | K(x_m) \geq h \bigcap_{i \neq m} K(x_i) < h\right] + \\ &{}_hp_{x_1}\, {}_hp_{x_2} \prod_{i=3}^{m} {}_hq_{x_i} E\left[{}_hL | K(x_1, x_2) \geq h \bigcap_{i \neq 1,2} K(x_i) < h\right] + \ldots.. \\ &\prod_{i=1}^{m-1} {}_hp_{x_i} E\left[{}_hL | K(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq h\right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

5.1.3 K-ésimo sobreviviente

El status del k-ésimo sobreviviente [3] de un grupo de m personas, es aquel status que está con vida siempre y cuando existan por lo menos k personas con vida, es decir :

$$K\left(\overline{x_1, x_2, \ldots x_m}^{\,k}\right) = X_m^{(m-k+1)} \tag{5.12}$$

Donde $X_m^{(m-k+1)}$ es el $m-k+1$-ésimo estadístico de orden [4] de la muestra que contiene m elementos.

En este caso es difícil tener una expresión explícita para la función de densidad de $X_m^{(m-k+1)}$.

Sin embargo la extensión es muy similar al caso del último sobreviviente (de hecho cuando $k=m$ se obtiene el status del primer fallecimiento y cuando $k=1$ es el caso del último sobreviviente).

Para esto basta con fijarse que para que el status esté con vida debe haber de k hasta m personas.

De nuevo suponiendo que el pago de primas depende de que por lo menos k personas estén vivas, es decir que al k-ésimo fallecimiento se termina el pago de primas, las modificaciones al tipo de pago se pueden desarrollar de manera análoga.

Suponiendo que se tiene un grupo de k personas vivas $\left(x_{r_1}\right),\left(x_{r_2}\right),..\left(x_{r_k}\right)$ al tiempo h la pérdida estaría dada por:

$$\left({}_hL|\bigcap_{j=1}^{k}K\left(x_{r_j}\right)\geq h\bigcap_{q\neq r_1,r_2,..r_k}K\left(x_q\right)<h\right)=SA_{K(x_{r_1},x_{r2},...x_{r_k})}\prod_{j=h+1}^{K(x_{r_1},x_{r2},...x_{r_k})+1}\frac{1}{1+I_j}$$
$$-\sum_{j=h}^{K(x_{r_1},x_{r2},...x_{r_k})}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

Se hace notar que se tiene la definición de pérdida en el caso del status del primer fallecimiento sobre los sobrevivientes, esto es natural pues si están k personas con vida y se produce un fallecimiento más, extingue el status muertes.

Ahora bien suponiendo que se tiene ahora $k+1$ personas vivas $\left(x_{r_1}\right),\left(x_{r_2}\right),..\left(x_{r_{m-k+2}}\right)$ al tiempo h la pérdida estaría dada por:

$$\left({}_hL|\bigcap_{j=1}^{k+1}K\left(x_{r_j}\right)\geq h\bigcap_{q\neq r_1,r_2,..r_{k+1}}K\left(x_q\right)<h\right)=SA_{K\overline{(x_{r_1},x_{r2},...x_{r_{k+1}})}^{k}}\prod_{j=h+1}^{K\overline{(x_{r_1},x_{r2},...x_{r_{k+1}})}^{k}+1}\frac{1}{1+I_j}$$
$$-\sum_{j=h}^{K\overline{(x_{r_1},x_{r2},...x_{r_{k+1}})}^{k}}\pi_j\prod_{i=h+1}^{j}\frac{1}{1+I_i}$$

Es decir en este caso dado que ya hay $k+1$ personas vivas, se necesitan dos fallecimientos para que el status termine, lo cual es equivalente a definir un status sobre los sobrevivientes al segundo fallecimiento.

Se puede demostrar que:

$$E\left[{}_hL|\bigcap_{j=1}^{k+1}K\left(x_{r_j}\right)\geq h\bigcap_{q\neq r_1,r_2,..r_{k+1}}K\left(x_q\right)<h\right]=$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} P\left(K\left(\overline{x_{r_1}+h, x_{r_2}+h, \ldots x_{r_{k+1}}+h}^{k}\right)=k \right) E\left[\prod_{k=1}^{j+1} \frac{1}{1+I_{h+k}} \right]$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j} P\left(K\left(\overline{x_{r_1}+h, x_{r_2}+h, \ldots x_{r_{k+1}}+h}^{k}\right)\geq k \right) E\left[\prod_{i=1}^{j} \frac{1}{1+I_{h+i}} \right]$$

En general para cualquier $p\in\{0,1,\ldots m-k\}$ si se tiene un grupo de $k+p$ vivas se tiene que:

$$\left({}_h L | \bigcap_{j=1}^{k+p} K\left(x_{r_j}\right)\geq h \bigcap_{q\neq r_1, r_2, \ldots r_{k+p}} K\left(x_q\right)<h \right) = SA_{K\left(\overline{x_{r_1}, x_{r2}, \ldots x_{r_{k+p}}}^{k}\right)} \prod_{j=h+1}^{K\left(\overline{x_{r_1}, x_{r2}, \ldots x_{r_{k+p}}}^{k}\right)+1} \frac{1}{1+I_j}$$
$$- \sum_{j=h}^{K\left(\overline{x_{r_1}, x_{r2}, \ldots x_{r_{m-k+p}}}^{k}\right)} \pi_j \prod_{i=h+1}^{j} \frac{1}{1+I_i} \tag{5.13}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} SA_{h+j} P\left(K\left(\overline{x_{r_1}+h, x_{r_2}+h, \ldots x_{r_{m-k+p}}+h}^{k}\right)=k \right) E\left[\prod_{k=1}^{j+1} \frac{1}{1+I_{h+k}} \right]$$
$$-\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{h+j} P\left(K\left(\overline{x_{r_1}+h, x_{r_2}+h, \ldots x_{r_{m-k+p}}+h}^{k}\right)\geq k \right) E\left[\prod_{i=0}^{j-1} \frac{1}{1+I_{h+i}} \right]$$

En caso del seguro dotal se le suma a la expresión de pérdida:

$$BI_{\left(K\left(\overline{x_{r_1}, x_{r2}, \ldots x_{r_{k+p}}}^{k}\right)\geq n\right)} \prod_{j=1}^{n-h} \frac{1}{1+I_{h+j}}$$

Y al término de la esperanza se le suma la expresión:

$$B\ {}_{h-n}p_{\left(\overline{x_{r_1}+h, x_{r_2}+h, \ldots x_{r_{k+p}}+h}^{k}\right)} E\left[\prod_{j=1}^{n-h} \frac{1}{1+I_{h+j}} \right]$$

Finalmente si se sabe con exactitud que personas están con vida al momento de la evaluación:

$${}_hV = E\left[{}_h L | \bigcap_{j=1}^{k+p} K\left(x_{r_j}\right)\geq h \bigcap_{q\neq r_1, r_2, \ldots r_{k+p}} K\left(x_q\right)<h \right]$$

Donde $\left(x_{r_1}\right), \left(x_{r_2}\right), \ldots \left(x_{r_p}\right)$ son las personas que están con vida $p\in\{1,2,\ldots k\}$ y en caso que la única información que se tuviera es que el status estuviera vigente, de nuevo se hace la ponderación similar al caso del último sobreviviente, solo que en este caso se tendría que sumar sobre todos los subconjuntos de $k+p$ sobrevivientes $p\in\{0,1,\ldots m-k\}$ multiplicados por la probabilidad de tener ese subconjunto vivo al momento h y dividido entre la probabilidad de que por lo menos k personas estén con vida al momento h:

$$\left({}_{h}p_{\overline{(x_1,x_2,\ldots x_m)}}^{\;k} \right)$$

Cabe mencionar que esto último da la pauta para el caso de decrementos múltiples, ya que como se observa en este caso, la única modificación que sufre la definición de reserva es el ajuste de las probabilidades de muerte y supervivencia de una persona a las de un status, mientras que en el caso de decrementos múltiples se sustituye la probabilidad de una salida, por la de varias.

5.2 Extensión a nivel cartera

Hasta ahora se han desarrollado técnicas para la evaluación de reservas matemáticas para una póliza, sin embargo las reservas deben ser valuadas a nivel cartera.

Quizá la generalización a nivel cartera resulte sencilla al haber definido la reserva como una esperanza, sin embargo se deben tener algunas consideraciones importantes.

Empezando por el caso más sencillo suponiendo que se tiene una cartera de m pólizas "independientes" (ya sean seguros individuales o de vidas múltiples) en este caso independientes se refiere a que el tiempo de vida de la persona (o personas) de una póliza es independiente a las de otra póliza y además se supone que todas se emiten al mismo tiempo.

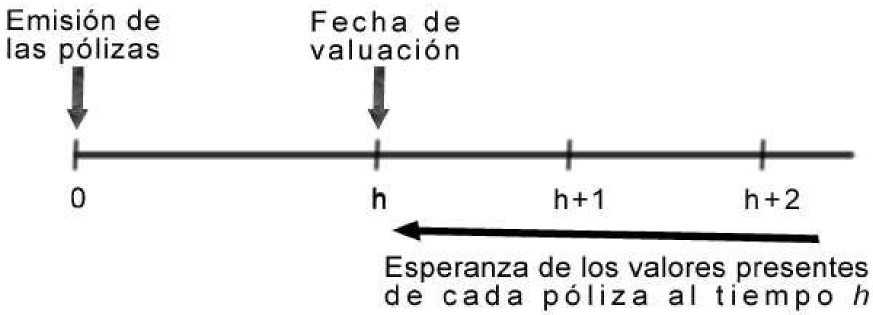


Figura 5.1: Línea de tiempo para la valuación de la cartera con pólizas emitidas el mismo tiempo

Sea ${}_{h}L^{(j)}$ la pérdida esperada para la póliza j al tiempo h, ${}_{h}V^{(j)}$ su reserva y sea $P(K(X_j)\geq h)$ la probabilidad de que la persona o el status según sea el caso de la póliza j esté con vida al momento h.

Es natural definir la reserva a nivel cartera como:

$$ {}_hV^{cartera} = E\left[\sum_{j=1}^{m} {}_hL^{(j)} \Big| \bigcap_{i=1}^{m} K(X_i) \geq h \right] \qquad (5.14) $$

La extensión es muy natural pues se está definiendo la reserva como la suma de las pérdidas dado que las personas y/o status involucrados en la cartera siguen vigentes.

Una pregunta que se puede hacer es: ¿La reserva de la cartera es la suma de las reservas de cada póliza? La respuesta es afirmativa, es fácil de visualizar esto en el caso cuando el interés es determinista, sin embargo cuando el interés conforma un proceso estocástico no lo es tanto, pues se tiene que la función de pérdida depende tanto de las vidas como de las tasas de interés, y resulta ilógico e irreal pensar que cada póliza tiene su propio conjunto de tasas de interés, es decir que la tasa de interés con que se evalúa a nivel cartera deben ser las mismas para todas las pólizas.

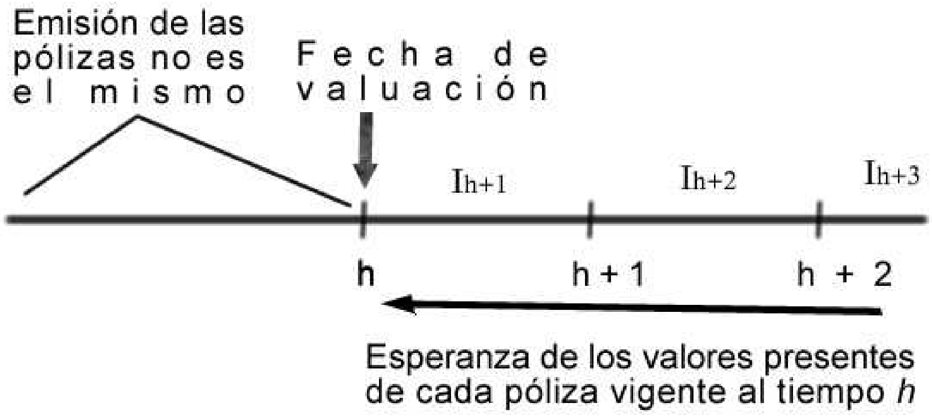


Figura 5.2: Línea de tiempo para la valuación de la cartera con pólizas emitidas en diferentes tiempos

Proposición: La reserva de la cartera es la suma de las reservas si los tiempos de vida de los asegurados involucrados en las pólizas son independientes.

Dem.

$$ \begin{aligned} {}_hV^{cartera} &= E\left[\sum_{j=1}^{m} {}_hL^{(j)} \Big| \bigcap_{i=1}^{m} K(X_i) \geq h \right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} E\left[{}_hL^{(j)} \Big| \bigcap_{i=1}^{m} K(X_i) \geq h \right] \end{aligned} $$

Ahora por el supuesto de independencia entre las vidas/status de las pólizas, se tiene que $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$:

$$ E\left[{}_hL^{(j)} \Big| \bigcap_{i=1}^{m} K(X_i) \geq h \right] = E\left[{}_hL^{(j)} | K(X_j) \geq h \right] $$

Por lo tanto:

$$ {}_{h}V^{cartera} = \sum_{j=1}^{m} E\left[{}_{h}L^{(j)} | \bigcap_{i=1}^{m} K(X_i) \geq h \right] = \sum_{j=1}^{m} E\left[{}_{h}L^{(j)} | K(X_j) \geq h \right] = \sum_{j=1}^{m} {}_{h}V^{(j)} \quad (5.16) $$

Q.E.D.

Puede observarse que se utilizó una suposición fuerte para este hecho: todas las pólizas fueron emitidas al mismo tiempo, esto no sucede así en la realidad ya que generalmente las pólizas son emitidas en distintos momentos.

Sin embargo dada la idea del mismo tiempo es muy fácil generalizar, pues del total de pólizas se quedan las con las m pólizas que pueden estar vigentes al momento de la evaluación, es decir se excluyen aquellas cuyo período de cobertura ya terminó, y se evalúa la reserva al momento h_j el cual representa la valuación relativa de la póliza j. Cabe mencionar que de nuevo se tiene que:

$$ \begin{aligned} {}_{h}V^{cartera} &= E\left[\sum_{j=1}^{m} {}_{h_j}L^{(j)} | \bigcap_{i=1}^{m} K(X_i) \geq h_i \right] \\ &= \sum_{j=1}^{m} {}_{h_j}V^{(j)} \end{aligned} \quad (5.17) $$

Por ejemplo supongamos el siguiente escenario:

La evaluación de la reserva al final del año 2008, si se tienen las siguientes pólizas:

- Seguro Vitalicio emitido al inicio del 2005 (póliza 1).
- Seguro Dotal 10 emitido al inicio del 2000 (póliza 2).
- Seguro Temporal 5 emitido al inicio del 2002 (póliza 3).
- Seguro Temporal 15 emitido al inicio del 2007 (póliza 4).

En este ejemplo se tiene que tomar en cuenta la suma de las reservas que están vigentes en este año, en este caso las pólizas vigentes son la 1, 2, 4 (la cobertura de la tercera póliza ya terminó).

En este caso se tiene que:

$$ h_1 = 4 $$
$$ h_2 = 9 $$
$$ h_4 = 2 $$

Por lo tanto:

$$ {}_{h}V^{cartera} = {}_{4}V^{(1)} + {}_{9}V^{(2)} + {}_{2}V^{(4)} $$

Es importante mencionar que bajo el modelo de tasas constantes, se tenía la garantía de que al haber un número significativo de pólizas en vigor las reservas de estas convergían a la media teórica de las pérdidas, sin embargo en este caso aunque la reserva de la cartera sea la suma de las reservas de cada póliza; estas no son independientes al tener una relación entre las tasas de interés, por lo cual no se garantiza la convergencia a la media por la ley de los grandes números.

5.3 Análisis de la función de pérdida y simulación

Hasta ahora únicamente se ha fijado en las diversas expresiones bajo distintos modelos que tiene la reserva; como la esperanza de la función de pérdida.

Sin embargo hay que recordar que la esperanza es solo una estimación del monto promedio que podría tomar la variable aleatoria, por lo cual podrían surgir cuestionamientos como ¿Cuál es la función de distribución de la pérdida? ¿Qué tan grande es la varianza de esta? ¿Cómo se pueden constituir montos para poder hacer frente a la pérdida con un nivel de confianza?

Es claro que la función de pérdida depende del modelo de tasas de interés, pero aun bajo el modelo de tasas de interés independientes e idénticamente distribuidas e incluso bajo el modelo determinista, resulta complicado obtener expresiones para la función de densidad.

Por ejemplo considerando un modelo determinista para un seguro temporal 5 utilizando la tabla Experiencia Mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual) con suma asegurada de $100,000 para una persona de 25 años suponiendo una tasa de interés del 5% y pago de primas durante el período de cobertura.

En este caso se tiene que:

$$A_{25:5} = 520.53$$

$$\pi = 114.75$$

Analizando la pérdida al final del primer año se tiene que:

$K(x)$	$SAv^{K(x)}$	$\sum_{j=1}^{K(x)} \pi v^{j-1}$	${}_1L$	$P\left(K(x)=h \mid K(x)\geq 1\right)$
1	95,238.10	114.75	95,123.35	0.001121
2	90,702.95	224.03	90,478.92	0.001206
3	86,383.76	328.11	86,055.65	0.001297
4	82,270.25	427.24	81,843.01	0.001395
5+	0	427.24	-427.24	0.994981

La reserva al final del primer año es:

$${}_1V = 16.40$$

Se puede observar que en este caso la función de pérdida dada por ${}_1L$ tiene un soporte en cinco valores, es fácil ver que ${}_2L$ tiene soporte en cuatro valores etc.

En general se puede visualizar que bajo el modelo determinista se tiene que la función ${}_hL$ puede tomar hasta $\omega - x - h + 1$ valores (o menos dependiendo de la temporalidad del seguro).

El problema se empieza a complicar incluso bajo el modelo de tasas aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

Por ejemplo considerando ahora con el ejemplo del temporal 5, que las tasas de interés son aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, y suponiendo que son discretas y tienen soporte en un conjunto de tamaño n entonces se tendría el siguiente escenario:

- Si $K(x)=0$ entonces se tienen n posibilidades para la tasa de interés de dicho año.
- Si $K(x)=1$ entonces se tienen n posibilidades para la tasa de interés del primer año y otras n posibilidades para el segundo año.
- Si $K(x)=2$ entonces se tienen n posibilidades para la tasa de interés del tercer año más las combinaciones de las tasas de interés de años anteriores.
- Si $K(x)=3$ entonces se tienen n posibilidades para la tasa de interés del cuarto año más las combinaciones de las tasas de interés de años anteriores.
- Si $K(x)\geq 4$ se tienen todas las posibles combinaciones de tasas de interés del cuarto año, pues a partir de este tiempo ya no se paga la suma asegurada y las primas se terminaron de pagar.

Es decir se tiene un total de $n+n^2+n^3+2n^4$ posibles combinaciones, que evidentemente resultan ser muchas con n suficientemente grande (Véase el ejemplo del capítulo 3).

Sin embargo, en general se asumen funciones continuas en las tasas de interés, por lo cual es más difícil tener una idea clara de cual es la distribución, pues para cada tasa de interés se le tiene que aplicar la transformación dada por:

$$\frac{1}{1+I}$$

Sin embargo al tener $K(x)$ una distribución discreta e I una distribución continua el resultado es, o bien una distribución mixta, o, una distribución definida en intervalos.

Y aún más, el problema se complica al intentar hallar la distribución a nivel cartera, pues las pólizas no son independientes.

Por lo cual si se desea tener mayor información acerca de la función de densidad de la pérdida (principalmente el cálculo de los cuantiles), es recomendable simular la distribución.

La idea principal para la simulación de la función de pérdida a tiempo discreto, una vez establecido el modelo de las tasas de interés, es la siguiente:

- Simular un valor para $K(x)$, a través de cualquier método por ejemplo Monte Carlo [5].
- Dado el valor de $K(x)=k$, simular la trayectoria de las tasas de interés hasta un tamaño de $k+1$, a partir del final del año h (cómo se ve afectado el modelo por valores anteriores al año h, depende del modelo si se deban generar los valores previos).
- Dado los valores simulados, únicamente resta realizar la operación para el cálculo de la pérdida.

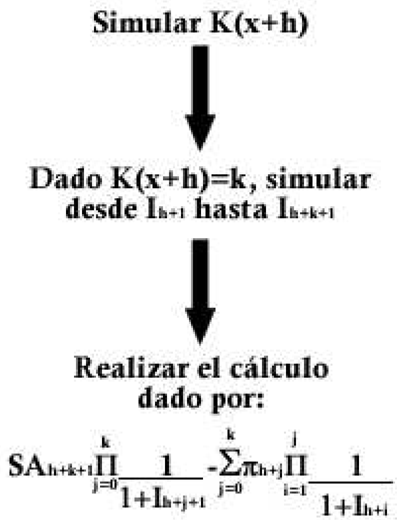


Figura 5.3 Esquema de pasos para simular la pérdida

Ahora bien para el caso de que se simule una cartera (que se considerará de tamaño n), por lo anterior ya mencionado la pérdida de cada póliza vigente, de donde el tamaño de la trayectoria a simular debe ser el máximo entre los mínimos del término del plazo de la cobertura para cada póliza y los tiempos de vida de cada asegurado.

Por ejemplo, si se tuviese el siguiente esquema de pólizas emitidas al mismo tiempo:

- Dos seguros vitalicios
- Un seguro dotal 5
- Dos seguros temporales 10
- Un seguro temporal 5

En este ejemplo se tienen seis pólizas, suponiéndose que se denotan por x_1, x_2, las vidas involucradas en los seguros vitalicios, por x_3 la vida en el caso del seguro dotal y por x_4, x_5, x_6 a las vidas que están cubiertas por los seguros temporales. Sea $h = 3$ y supongamos que el resultado de la simulación de los tiempos de vida es el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ll} K(x_1+3)=10 & K(x_2+3)=3 \\ K(x_3+3)=5 & K(x_4+3)=4 \\ K(x_5+3)=6 & K(x_6+3)=1 \end{array}$$

Por o tanto se debe tomar, para los seguros que no son vitalicios:

$$\begin{array}{ll} \min\{K(x_3+h), 5-3\}=2 & \min\{K(x_4+h), 10-3\}=4 \\ \min\{K(x_5+h), 10-3\}=6 & \min\{K(x_6+h), 5-3\}=1 \end{array}$$

De donde el tamaño de la trayectoria del proceso a simular (aparte de aquellas que dependen de tiempos anteriores) estaría dado por:

$$\max\{10,3,2,4,6,1\}+1=11$$

En los anexos 3 y 4 se presentan los resultados obtenidos a nivel póliza y a nivel cartera bajo un modelo $AR(1)$.

Referencias del quinto capítulo

1. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 capítulo 9, sección 2.
2. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 capítulo 9, sección 4.
3. Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A,1997 capítulo 18, sección 2.
4. Para mayor detalle sobre los estadísticos de orden consulte Ross Sheldon, A First Course in Probability, Prentice Hall, E.U.A, 2002 páginas 273-276.
5. Más detalles sobre técnicas de simulación pueden ser encontrados en Ross Sheldon, A First Course in Probability, Prentice Hall, E.U.A, 2002 capítulo 10.

Conclusiones

En el desarrollo de esta tesis se observo que a partir de la definición de pérdida dada por Bowers, la cuál esta definida de manera muy natural como la diferencia entre el valor presente del pago del beneficio menos el valor presente de las primas que se pagan antes del fallecimiento del asegurado; al calcular la esperanza de esta variable aleatoria que modela la pérdida condicionada a que el asegurada este vivo al momento de la valuación se obtiene una de las expresiones mas utilizadas en la práctica conocida como la fórmula prospectiva, que tiene como interpretación la diferencia entre el valor presente esperado de las obligaciones de la compañía menos el valor presente del asegurado. A partir de esta fórmula prospectiva se demuestra la equivalencia con la fórmula retrospectiva a través de simples cálculos algebraicos cuya interpretación es el valor futuro de la suma de las diferencias que se tiene entre el pago de primas y la suma asegurada. Finalmente se desarrollaron expresiones para la reserva conocida como fórmula de Fackler, aplicable cuando se trabaja con el tiempo de vida entero, la cuál permite calcular de manera recursiva las reservas en cada año; así como la ecuación diferencial de Thiele la cuál corresponde al caso de vida continuo.

Posteriormente se realizaron modificaciones a esta función de pérdida con las cuales se incorpora la aleatoriedad de las tasas de interés, a través de las tasas *spot* efectivas en cada año cuando se trabaja con el tiempo de vida entero, y con la tasa instantánea siendo esta aleatoria en cada momento del tiempo cuando se trabaja con el tiempo de vida continuo. De nuevo esta función de pérdida consiste ser la diferencia entre el valor presente del pago del beneficio menos el valor presente de las primas que se alcanzan a pagar antes del deceso del asegurado. Al calcular la esperanza de esta variable aleatoria condicionada a que el asegurado este vivo al momento de la valuación se obtiene una fórmula similar a la fórmula prospectiva (reproduciéndose está cuando los valores de las tasas de interés son constantes), a este modelo es posible aplicarle una variación: en lugar de trabajar con tasas anuales se puede trabajar con tasas instantáneas equivalentes a un año, con lo cuál se obtiene en la expresión de la reserva la aparición de la generadora de momentos de la suma de las tasas, la cuál puede ser evaluada con mayor facilidad en el caso de tener procesos gaussianos.

Posteriormente se desarrollaron ejemplos utilizando modelos concretos para las tasas de interés. El primero de ellos fue el de modelos de tasas aleatorias con distribuciones independientes e idénticas, cuyo principal propósito fue ejemplificar los escenarios que puede tomar la función de pérdida, los pasos para realizar el cálculo en este caso y ejemplificar que los resultados que se tienen siendo el interés un valor constante como son la fórmula de Fackler y la fórmula retrospectiva ya no son ciertos cuando las tasas son aleatorias.

Otro modelo usado son las series de tiempo lineales, en las cuales se supone que existe un análisis previo que justifique la aplicación del modelo a la serie conformada por las tasas instantáneas de interés equivalentes a las tasas efectivas anuales, con las que se obtuvo una expresión para la generadora de momentos de la suma correspondiente a la esperanza del factor de descuento.

El último modelo presentado corresponde a modelos cuyas a tasas cuya distribución puede ser modelada bajo movimientos Brownianos, en este caso es posible verlo bajo dos enfoques: la tasa instantánea de interés o el factor de acumulación obteniendo expresiones para ambos casos.

También es posible actualizar el modelo teórico conforme a la información obtenida según avanza el tiempo, en lo que se denomina los modelos condicionales en los cuales se condiciona el modelo teórico con los últimos valores observados para así constituir mayor o menor reserva según lo establezcan las condiciones financieras del momento.

Es importante señalar que al realizar los comparativos con el modelo de tasas de interés constante, en ninguno de los modelos desarrollados se puede concluir de manera formal una relación de orden entre ellos, es decir depende del modelo tanto para el tiempo de vida como para la tasa de interés, del periodo de cobertura y de la modalidad del pago de primas cuál reserva constituida resulta mayor.

Finalmente se realizo la extensión a seguros de vidas múltiples, la cual surge de manera muy natural, únicamente teniendo en cuenta las posibilidades en las que un status puede sobrevivir, y a partir de esta conforme a la información que se tenga sobre los tiempos de vida de las personas, se ajusta la definición de la pérdida, es importante señalar que de manera muy similar se puede realizar la extensión a decrementos múltiples.

Anexos

Anexo 1: Resultados de probabilidad

Esperanza Iterada

Sean Y, X variables aleatorias tal que $E[Y]$ existe, entonces $E[Y|X]$ es una variable aleatoria que depende de X, y además $E\left[E[Y|X]\right]=E[Y]$; a este resultado se le conoce como esperanza iterada.

De manera más general, sean X,Y dos variables aleatorias y $g(x,y)$ una función real tal que la esperanza de $g(X,Y)$ existe entonces:

$$E[g(X,Y)]=\int E[g(X,Y)|Y=y]f_Y(y)dy$$

Dem.

Recordando que:

$$E[g(X,Y)|Y=y]=\int g(x,y)\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

Entonces se tiene que:

$$\int E[g(X,Y)|Y=y]f_Y(y)dy=\int\int g(x,y)\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}f_Y(y)dxdy$$

$$=\int\int g(x,y)f_{X,Y}(x,y)dxdy=E[g(X,Y)]$$

De manera análoga se puede demostrar el resultado en el caso discreto.

Proceso de Ornstein Uhlenbeck

Se había establecido que el proceso de Ornstein Uhlenbeck era el proceso que satisfacía ecuación diferencial estocástica dada por:

$$dY_t=-\alpha Y_t d_t+\sigma dW_t$$

Con condición inicial $Y_0=y_0$; cuya solución estaba dada por:

$$Y_t = y_0 e^{-\alpha t} + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}dW_s$$

En este caso la esperanza del proceso está dada por:

$$E\left[y_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right] = y_0 e^{-\alpha t} + \sigma E\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right]$$

Ahora recordando que la integral estocástica es una martingala, por lo cual la esperanza de todas las variables aleatorias para cualquier tiempo es la misma, en particular cuando $t = 0$, de donde se obtiene que la esperanza de la integral es cero y por lo tanto la esperanza de todo el proceso, concluyendo que $E[Y_t] = y_0 e^{-\alpha t}$.

Ahora bien por la función de covarianza con $r \leq t$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_r) &= E(Y_t Y_r) - E(Y_t)E(Y_r) \\
&= E\left[\left(y_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right)\left(y_0 e^{-\alpha r} + \sigma \int_0^r e^{-\alpha(r-s)} dW_s \right)\right] - y_0^2 e^{-\alpha(t+r)} \\
&= y_0^2 e^{-\alpha(t+r)} + y_0 e^{-\alpha t} E\left[\sigma \int_0^r e^{-\alpha(r-s)} dW_s \right] + y_0 e^{-\alpha r} E\left[\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right] \\
&\quad + E\left[\left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right)\left(\sigma \int_0^r e^{-\alpha(r-s)} dW_s \right)\right] - y_0^2 e^{-\alpha(t+r)} \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha(t+r)} E\left[\left(\int_0^t e^{\alpha s} dW_s \right)\left(\int_0^r e^{\alpha s} dW_s \right)\right]
\end{aligned}$$

Separando la integral se obtiene:

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_r) &= \sigma^2 e^{-\alpha(t+r)} E\left[\left(\int_0^r e^{\alpha s} dW_s + \int_r^t e^{\alpha s} dW_s \right)\left(\int_0^r e^{\alpha s} dW_s \right)\right] \\
&= \sigma^2 e^{-\alpha(t+r)} E\left[\left(\int_0^r e^{\alpha s} dW_s \right)^2 + \left(\int_0^r e^{\alpha s} dW_s \right)\left(\int_r^t e^{\alpha s} dW_s \right)\right]
\end{aligned}$$

Observando que el segundo sumando es cero, al ser independientes los incrementos del movimiento Browniano y tener esperanza cero, mientras que para el primer sumando se utiliza la isometría de Itô.

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_r) &= \sigma^2 e^{-\alpha(t+r)} \left[\int_0^r e^{2\alpha s} ds \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-\alpha(t+r)} \left[e^{2\alpha r} - 1 \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left[e^{-\alpha(t-r)} - e^{-\alpha(t+r)} \right]
\end{aligned}
$$

El caso particular $t=s$ es la varianza del proceso:

$$
\begin{aligned}
Var(Y_t) &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left[e^{-\alpha(t-t)} - e^{-\alpha(t+t)} \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left[1 - e^{-2\alpha t} \right]
\end{aligned}
$$

Anexo 2: Tablas de resultados

A continuación se muestran de manera extendida, los resultados del ejemplo presentado en el capítulo 4 con respecto las fluctuaciones que generan los últimos valores observados a la media del modelo y su respectivo factor de descuento:

Edad		31
Ultimo valor observado		0.034437
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.034434	0.966174
1	-0.068864	0.933953
2	-0.103293	0.903184
3	-0.137719	0.873739
4	-0.172142	0.845507
5	-0.206564	0.818395
6	-0.240984	0.792323
7	-0.275403	0.767221
8	-0.309820	0.743030
9	-0.344235	0.719697
10	-0.378650	0.697174
11	-0.413063	0.675421
12	-0.447475	0.654399
13	-0.481886	0.634075
14	-0.516296	0.614418
15	-0.550705	0.595400
16	-0.585114	0.576996
17	-0.619522	0.559181
18	-0.653929	0.541933

Edad		32
Ultimo valor observado		0.043000
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.042295	0.958608
1	-0.083943	0.919976
2	-0.124996	0.883794
3	-0.165504	0.849796
4	-0.205511	0.817759
5	-0.245058	0.787490
6	-0.284183	0.758824
7	-0.322921	0.731617
8	-0.361302	0.705745
9	-0.399358	0.681099
10	-0.437114	0.657583
11	-0.474594	0.635114
12	-0.511822	0.613616
13	-0.548818	0.593024
14	-0.585601	0.573278
15	-0.622189	0.554325
16	-0.658597	0.536117
17	-0.694841	0.518611

Edad		33
Ultimo valor observado		0.043191
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.042470	0.958440
1	-0.084278	0.919667
2	-0.125479	0.883367
3	-0.166122	0.849270
4	-0.206254	0.817152
5	-0.245915	0.786816
6	-0.285145	0.758095
7	-0.323978	0.730844
8	-0.362449	0.704937
9	-0.400585	0.680264
10	-0.438415	0.656728
11	-0.475964	0.634244
12	-0.513255	0.612738
13	-0.550308	0.592141
14	-0.587144	0.572394
15	-0.623780	0.553443
16	-0.660233	0.535240

Edad		34
Ultimo valor observado		0.032910
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.034400	0.966206
1	-0.067433	0.935291
2	-0.100577	0.905640
3	-0.133825	0.877148
4	-0.167167	0.849724
5	-0.200596	0.823294
6	-0.234104	0.797793
7	-0.267686	0.773165
8	-0.301334	0.749362
9	-0.335045	0.726342
10	-0.368812	0.704067
11	-0.402630	0.682504
12	-0.436497	0.661622
13	-0.470407	0.641395
14	-0.504357	0.621797
15	-0.538345	0.602806

Edad		35
Ultimo valor observado		0.051379
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.049986	0.951263
1	-0.098694	0.906505
2	-0.146229	0.865225
3	-0.192687	0.827007
4	-0.238156	0.791494
5	-0.282718	0.758385
6	-0.326446	0.727422
7	-0.369409	0.698384
8	-0.411670	0.671079
9	-0.453287	0.645341
10	-0.494312	0.621026
11	-0.534793	0.598009
12	-0.574776	0.576177
13	-0.614301	0.555435
14	-0.653406	0.535695

Edad		36
Ultimo valor observado		0.035996
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.035865	0.964791
1	-0.071611	0.931392
2	-0.107245	0.899621
3	-0.142779	0.869328
4	-0.178220	0.840384
5	-0.213575	0.812677
6	-0.248852	0.786113
7	-0.284057	0.760610
8	-0.319196	0.736096
9	-0.354275	0.712508
10	-0.389298	0.689790
11	-0.424269	0.667894
12	-0.459194	0.646774
13	-0.494076	0.626392

Edad		37
Ultimo valor observado		0.030771
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.031069	0.969430
1	-0.062411	0.940000
2	-0.094003	0.911614
3	-0.125826	0.884192
4	-0.157860	0.857669
5	-0.190089	0.831990
6	-0.222495	0.807109
7	-0.255065	0.782985
8	-0.287784	0.759585
9	-0.320642	0.736879
10	-0.353626	0.714840
11	-0.386726	0.693445
12	-0.419933	0.672672

Edad		38
Ultimo valor observado		0.029803
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.030180	0.970292
1	-0.060706	0.941604
2	-0.091549	0.913853
3	-0.122685	0.886974
4	-0.154088	0.860911
5	-0.185736	0.835619
6	-0.217611	0.811060
7	-0.249692	0.787203
8	-0.281964	0.764019
9	-0.314410	0.741486
10	-0.347016	0.719581
11	-0.379769	0.698286

Edad		39
Ultimo valor observado		0.041263
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.040700	0.960138
1	-0.080884	0.922794
2	-0.120594	0.887693
3	-0.159868	0.854599
4	-0.198742	0.823313
5	-0.237249	0.793663
6	-0.275420	0.765503
7	-0.313282	0.738703
8	-0.350859	0.713154
9	-0.388176	0.688757
10	-0.425254	0.665428

Edad		40
Ultimo valor observado		0.044073
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.043280	0.957664
1	-0.085832	0.918240
2	-0.127715	0.881394
3	-0.168984	0.846843
4	-0.209691	0.814348
5	-0.249880	0.783702
6	-0.289594	0.754729
7	-0.328873	0.727275
8	-0.367752	0.701208
9	-0.406263	0.676412

Edad		41
Ultimo valor observado		0.052408
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.050931	0.950365
1	-0.100507	0.904863
2	-0.148839	0.862971
3	-0.196028	0.824249
4	-0.242168	0.788325
5	-0.287346	0.754883
6	-0.331639	0.723654
7	-0.375122	0.694406
8	-0.417860	0.666938

Edad		42
Ultimo valor observado		0.048142
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.047015	0.954094
1	-0.092995	0.911686
2	-0.138026	0.872353
3	-0.182185	0.835738
4	-0.225543	0.801540
5	-0.268168	0.769500
6	-0.310117	0.739397
7	-0.351448	0.711041

Edad		43
Ultimo valor observado		0.045252
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.044362	0.956628
1	-0.087908	0.916336
2	-0.130703	0.878764
3	-0.172811	0.843609
4	-0.214286	0.810615
5	-0.255181	0.779559
6	-0.295543	0.750253

Edad		44
Ultimo valor observado		0.044942
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.044078	0.956901
1	-0.087362	0.916836
2	-0.129918	0.879454
3	-0.171805	0.844458
4	-0.213078	0.811594
5	-0.253787	0.780646

Edad		45
Ultimo valor observado		0.038948
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.038575	0.962181
1	-0.076807	0.926564
2	-0.114725	0.892918
3	-0.152355	0.861044
4	-0.189719	0.830775

Edad		46
Ultimo valor observado		0.015939
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.017453	0.982720
1	-0.036296	0.964871
2	-0.056414	0.946532
3	-0.077704	0.927781

Edad		47
Ultimo valor observado		0.034855
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.034817	0.965803
1	-0.069600	0.933266
2	-0.104352	0.902228

Edad		48
Ultimo valor observado		0.029414
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.029823	0.970639
1	-0.060021	0.942249

Edad		49
Ultimo valor observado		0.031783
j	$\overline{\mu}^T t$	*Factor de descuento*
0	-0.031998	0.968530

A continuación se muestran los resultados que son obtenidos al multiplicar las probabilidades de muerte y supervivencia por el factor de descuento correspondiente en cada año y rango.

Edad 31		
j	${}_{j/}q_{31} * E$	${}_{j}p_{31} * E$
0	0.001569	1
1	0.001631	0.964605
2	0.001696	0.930805
3	0.001764	0.898445
4	0.001835	0.867390
5	0.001908	0.837528
6	0.001985	0.808764
7	0.002065	0.781014
8	0.002147	0.754206
9	0.002233	0.728278
10	0.002323	0.703175
11	0.002415	0.678846
12	0.002510	0.655249
13	0.002609	0.632345
14	0.002711	0.610097
15	0.002816	0.588473
16	0.002924	0.567443
17	0.003035	0.546979
18	0.003149	0.527056
Σ	0.043323	14.080696

Edad 32		
j	${}_{j/}q_{32} * E$	${}_{j}p_{32} * E$
0	0.001677	1
1	0.001730	0.956931
2	0.001787	0.916637
3	0.001847	0.878799
4	0.001910	0.843146
5	0.001976	0.809450
6	0.002045	0.777513
7	0.002118	0.747165
8	0.002194	0.718258
9	0.002273	0.690665
10	0.002355	0.664272
11	0.002440	0.638982
12	0.002529	0.614708
13	0.002620	0.591373
14	0.002716	0.568906
15	0.002814	0.547247
16	0.002914	0.526341
17	0.003018	0.506138
Σ	0.040962	12.996533

Edad 33		
j	${}_{j/}q_{33} * E$	${}_{j}p_{33} * E$
0	0.001806	1
1	0.001862	0.956635
2	0.001923	0.916072
3	0.001987	0.877990
4	0.002054	0.842114
5	0.002125	0.808212
6	0.002198	0.776083
7	0.002276	0.745556
8	0.002357	0.716480
9	0.002440	0.688726
10	0.002528	0.662179
11	0.002618	0.636742
12	0.002712	0.612324
13	0.002810	0.588848
14	0.002910	0.566244
15	0.003014	0.544451
16	0.003120	0.523411
Σ	0.040741	12.462067

Edad 34		
j	${}_{j/}q_{34} * E$	${}_{j}p_{34} * E$
0	0.001960	1
1	0.002040	0.964246
2	0.002123	0.931353
3	0.002209	0.899704
4	0.002299	0.869189
5	0.002392	0.839716
6	0.002489	0.811205
7	0.002590	0.783589
8	0.002693	0.756811
9	0.002801	0.730818
10	0.002912	0.705566
11	0.003027	0.681016
12	0.003146	0.657132
13	0.003267	0.633881
14	0.003392	0.611235
15	0.003521	0.589166
Σ	0.042861	12.464629

Edad 35		
j	${}_{j/}q_{35} * E$	${}_{j}p_{35} * E$
0	0.002079	1
1	0.002129	0.949184
2	0.002183	0.902394
3	0.002242	0.859118
4	0.002304	0.818928
5	0.002371	0.781457
6	0.002441	0.746398
7	0.002515	0.713483
8	0.002593	0.682486
9	0.002675	0.653209
10	0.002760	0.625482
11	0.002849	0.599156
12	0.002941	0.574100
13	0.003037	0.550200
14	0.003135	0.527357
Σ	0.038255	10.982952

Edad 36		
j	${}_{j/}q_{36} * E$	${}_{j}p_{36} * E$
0	0.002271	1
1	0.002356	0.962520
2	0.002444	0.926844
3	0.002536	0.892785
4	0.002633	0.860185
5	0.002733	0.828912
6	0.002837	0.798851
7	0.002945	0.769901
8	0.003058	0.741979
9	0.003173	0.715007
10	0.003293	0.688922
11	0.003417	0.663663
12	0.003544	0.639179
13	0.003674	0.615424
Σ	0.040914	11.104171

Edad 37		
j	${}_{j/}q_{37} * E$	${}_{j}p_{37} * E$
0	0.002458	1
1	0.002560	0.966973
2	0.002666	0.935057
3	0.002776	0.904154
4	0.002892	0.874180
5	0.003010	0.845066
6	0.003133	0.816754
7	0.003260	0.789196
8	0.003391	0.762348
9	0.003527	0.736174
10	0.003665	0.710641
11	0.003808	0.685721
12	0.003955	0.661389
Σ	0.041100	10.687654

Edad 38		
j	${}_{j/}q_{38} * E$	${}_{j}p_{38} * E$
0	0.002649	1
1	0.002761	0.967643
2	0.002877	0.936273
3	0.002998	0.905802
4	0.003123	0.876162
5	0.003252	0.847293
6	0.003385	0.819150
7	0.003523	0.791690
8	0.003666	0.764879
9	0.003812	0.738687
10	0.003962	0.713089
11	0.004116	0.688061
Σ	0.040123	10.048723

Edad 39		
j	${}_{j/}q_{39} * E$	${}_{j}p_{39} * E$
0	0.002823	1
1	0.002913	0.957315
2	0.003009	0.917168
3	0.003108	0.879272
4	0.003213	0.843384
5	0.003322	0.809296
6	0.003435	0.776829
7	0.003554	0.745831
8	0.003676	0.716166
9	0.003803	0.687720
10	0.003933	0.660391
Σ	0.036788	8.993372

Edad 40		
j	${}_{j/}q_{40} * E$	${}_{j}p_{40} * E$
0	0.003032	1
1	0.003121	0.954632
2	0.003215	0.912212
3	0.003314	0.872392
4	0.003419	0.834880
5	0.003527	0.799425
6	0.003642	0.765814
7	0.003760	0.733860
8	0.003883	0.703406
9	0.004009	0.674311
Σ	0.034923	8.250933

Edad 41		
j	${}_{j/}q_{41} * E$	${}_{j}p_{41} * E$
0	0.003241	1
1	0.003311	0.947124
2	0.003388	0.898466
3	0.003471	0.853482
4	0.003560	0.811715
5	0.003654	0.772778
6	0.003753	0.736342
7	0.003857	0.702126
8	0.003966	0.669891
Σ	0.032201	7.391923

Edad 42		
j	${}_{j/}q_{42} * E$	${}_{j}p_{42} * E$
0	0.003503	1
1	0.003592	0.950591
2	0.003686	0.904747
3	0.003787	0.862027
4	0.003893	0.822059
5	0.004005	0.784527
6	0.004121	0.749163
7	0.004243	0.715735
Σ	0.030829	6.788848

Edad 43		
j	${}_{j/}q_{43} * E$	${}_{j}p_{43} * E$
0	0.003783	1
1	0.003886	0.952846
2	0.003996	0.908826
3	0.004113	0.867566
4	0.004234	0.828747
5	0.004361	0.792099
6	0.004493	0.757392
Σ	0.028866	6.107476

Edad 44		
j	${}_{j/}q_{44} * E$	${}_{j}p_{44} * E$
0	0.004074	1
1	0.004186	0.952826
2	0.004304	0.908746
3	0.004428	0.867390
4	0.004558	0.828446
5	0.004694	0.791647
Σ	0.026245	5.349055

Edad 45		
j	${}_{j/}q_{45} * E$	${}_{j}p_{45} * E$
0	0.004412	1
1	0.004554	0.957769
2	0.004703	0.917762
3	0.004857	0.879732
4	0.005016	0.843472
Σ	0.023542	4.598736

Edad 46		
j	${}_{j/}q_{46} * E$	${}_{j}p_{46} * E$
0	0.004853	1
1	0.005105	0.977867
2	0.005363	0.955002
3	0.005628	0.931487
Σ	0.020949	3.864356

Edad 47		
j	${}_{j/}q_{47} * E$	${}_{j}p_{47} * E$
0	0.005135	1
1	0.005315	0.960668
2	0.005500	0.922989
Σ	0.015950	2.883657

Edad 48		
j	${}_{j/}q_{48} * E$	${}_{j}p_{48} * E$
0	0.005161	1
1	0.005366	0.965478
Σ	0.010527	1.965478

Edad 49		
j	${}_{j/}q_{49} * E$	${}_{j}p_{49} * E$
0	0.005150	1

Finalmente se muestra un cuadro comparativo entre la reserva bajo el modelo no condicional y condicional, así como la diferencia que existe del último valor observado de la tasa instantánea de interés con respecto a su media.

	Tasas de interés		Pago de Primas a 20 años			Pago de primas a 10 años		
h	δ_h	$\delta_h - \mu$	*Condicional*	*No cond.*	*Diferencias*	*Condicional*	*No cond.*	*Diferencias*
1	0.034437	0.000037	2,431.53	2,309.03	122.50	5,767.86	5,492.37	-275.49
2	0.043000	0.008600	3,706.59	4,526.60	-820.01	9,121.05	11,007.00	1,885.96
3	0.043191	0.008791	5,748.83	6,636.82	-887.99	14,470.97	16,533.59	2,062.62
4	0.032910	-0.001490	8,917.59	8,621.74	295.85	22,731.86	22,060.26	-671.60
5	0.051379	0.016979	8,590.14	10,462.80	-1,872.66	23,180.70	27,574.97	4,394.26
6	0.035996	0.001596	12,041.45	12,137.74	-96.29	26,319.51	33,062.62	6,743.12
7	0.030771	-0.003629	14,170.35	13,624.98	545.37	39,738.26	38,509.38	-1,228.88
8	0.029803	-0.004597	15,542.45	14,899.10	643.35	45,327.07	43,898.31	-1,428.76
9	0.041263	0.006863	12,041.45	15,932.16	-3,890.71	47,631.49	49,210.77	1,579.29
10	0.044073	0.009673	15,729.15	16,693.58	-964.43	52,383.84	54,426.37	2,042.53
11	0.052408	0.018008	15,463.01	17,149.96	-1,686.95	48,301.56	51,682.22	3,380.66
12	0.048142	0.013742	16,084.54	17,263.43	-1,178.89	46,243.94	48,485.85	2,241.92
13	0.045252	0.010852	16,166.31	16,994.36	-828.05	43,298.71	44,792.00	1,493.29
14	0.044942	0.010542	15,604.38	16,298.21	-693.84	39,367.50	40,549.96	1,182.46
15	0.038948	0.004548	14,882.58	15,125.25	-242.67	35,312.42	35,703.23	390.81
16	0.015939	-0.018461	14,256.09	13,421.63	834.46	31,423.46	30,190.50	-1,232.95
17	0.034855	0.000455	11,114.09	11,126.10	-12.00	23,924.71	23,942.29	17.57
18	0.029414	-0.004986	7,058.25	8,173.94	-1,115.69	15,789.87	16,884.73	1,094.86
19	0.031783	-0.002617	3,282.02	4,492.10	-1,210.08	7,724.51	8,934.59	1,210.08

Anexo 3: Resultados de la simulación de una póliza bajo un modelo AR (1)

Bajo el modelo $AR(1)$ con el cual fueron tratados los ejemplos del capítulo 3 y 4, es decir con parámetros $\mu = .0344$, $\sigma^2 = .4.3957\text{E-}05$, $\alpha = 0.918$, se simuló la función de pérdida para el décimo año un total de cien mil veces, utilizando que el último valor observado de la tasa continua de interés fue 0.041263, de donde se obtuvieron los siguientes resultados:

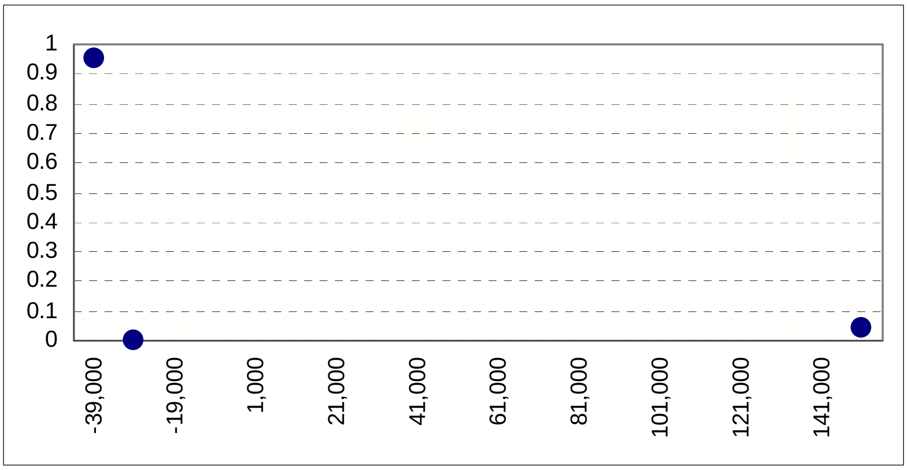
Media muestral	*15,583.91*
Varianza muestral	*62,163,921,645.36*
Desviación estándar	*249,326.94*
Curtosis	*19.24*
Coeficiente de asimetría	*4.57*
Valor Máximo	*1,462,959.81*
Valor Mínimo	*-43,989.12*
Primer cuartil	*-38,296.99*
Mediana	*-37,349.41*
Tercer cuartil	*-36,404.96*

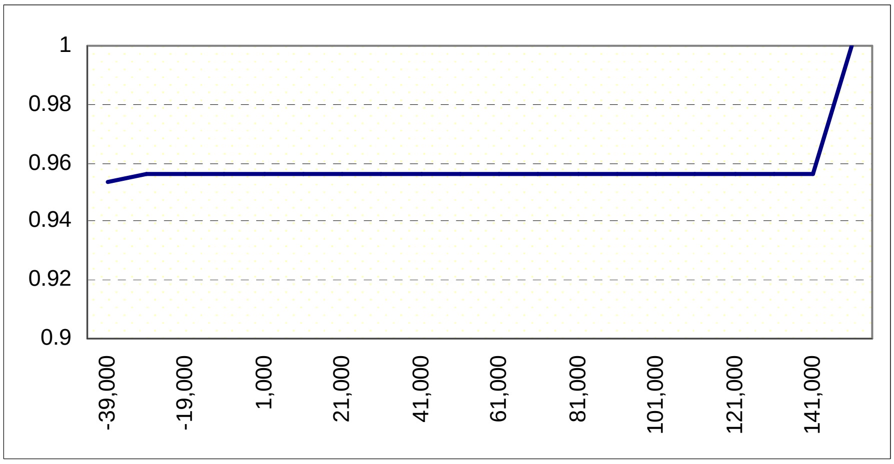
Observamos que el valor de la media muestral se aproxima bastante al resultado teórico el cual era de 15,729.15, sin embargo, como se puede observar este valor es incluso mayor que el tercer cuartil de la muestra. Esto se ve reflejado en el coeficiente de asimetría y el valor de la curtosis, los cuales según se puede notar son bastante grandes. Esto se debe a que la muestra esta concentrada a la izquierda de la media por lo información proporcionada por los cuantiles. Ahora bien la relación de valores positivos (los cuales son pérdidas) con los negativos (interpretados como ganancias) es la siguiente:

Total de valores positivos	*4,403*
Total de valores negativos	*95,597*
${}_{10}q_{40}$	*0.044285*
${}_{10}p_{40}$	*0.955715*

Como puede observarse el rango donde la compañía presenta ganancias es cuando el asegurado sobrevive más de 10 años y esto ocurre con probabilidad ${}_{10}p_{40}$ (debido a que termina el plazo de cobertura del seguro), mientras que las pérdidas ocurren cuando este muere en el plazo de cobertura, de nueva cuenta se puede ver como los valores observados aproximan las probabilidades de muerte y supervivencia.

Finalmente las graficas de frecuencia relativa y frecuencia relativa acumulada son las siguientes:





Anexo 4: Resultados de la simulación de una cartera bajo un modelo AR (1)

Bajo el modelo $AR(1)$ parámetros $\mu = .0344$, $\sigma^2 = .4.3957\mathrm{E}-05$, $\alpha = 0.918$, y suponiendo que el último valor observado coincide con la media se simulo la pérdida al final del octavo año con la siguiente cartera:

Edad	Plan	Temporalidad	Suma asegurada	Beneficio	Prima	Reserva Año 8
30	Temp.	15	1,750,000		4,301	9,248.74
30	Dotal	10	1,500,000	700,000	61,612	519,371.79
32	Vit		2,500,000		29,007	221,132.05
32	Temp.	20	1,750,000		6,003	20,229.62
32	Temp.	30	750,000		3,700	19,233.20
33	Temp.	30	1,250,000		6,624	34,389.82
34	Temp.	10	2,500,000		6,854	4,615.66
35	Temp.	25	2,000,000		10,247	44,715.34
35	Temp.	10	750,000		2,214	1,491.06
36	Dotal	30	1,500,000	400,000	18,145	118,086.87
37	Vit		1,100,000		15,398	112,413.78
38	Temp.	10	2,500,000		9,213	6,210.55
39	Vit		2,500,000		37,771	270,391.67
39	Vit		1,500,000		22,663	162,235.00
39	Dotal	25	750,000	300,000	13,259	88,262.38
40	Vit		750,000		11,775	83,429.03
41	Temp.	25	1,000,000		7,881	34,146.52
41	Temp.	10	750,000		3,449	2,325.74
42	Temp.	30	1,500,000		14,954	76,387.20
42	Temp.	10	1,500,000		7,427	5,008.05
43	Temp.	20	1,250,000		9,559	31,981.51
45	Dotal	10	1,750,000	700,000	70,298	523,084.68
45	Temp.	30	2,500,000		30,581	154,882.24
46	Vit		2,000,000		39,719	262,296.21
46	Dotal	30	1,500,000	300,000	26,252	150,091.03
46	Dotal	15	2,500,000	600,000	51,773	306,741.68
48	Temp.	10	2,500,000		19,247	12,994.99
50	Temp.	15	2,500,000		26,616	56,900.56
50	Temp.	15	2,000,000		21,293	45,520.45
51	Temp.	30	1,250,000		22,724	112,287.72
52	Dotal	30	1,000,000	500,000	31,118	181,361.62
53	Temp.	30	1,000,000		20,652	100,925.46
53	Vit		750,000		19,798	118,003.35
54	Temp.	20	750,000		12,540	41,236.30
55	Temp.	30	1,750,000		40,943	197,453.36
55	Vit		1,250,000		35,873	206,692.41
55	Temp.	10	2,000,000		25,686	17,384.53
56	Temp.	15	2,000,000		32,772	69,729.63
56	Vit		1,100,000		32,929	186,386.71
59	Temp.	30	1,250,000		37,205	173,462.52
59	Temp.	25	1,250,000		33,592	136,943.11
60	Vit		1,000,000		35,542	186,276.43

Edad	Plan	Temporalidad	Suma asegurada	Beneficio	Prima	Reserva Año 8
61	Temp.	10	2,500,000		49,566	33,644.95
61	Vit		750,000		27,846	142,946.00
61	Vit		1,100,000		40,840	209,654.13
62	Temp.	10	1,500,000		31,954	21,701.61
62	Temp.	10	1,750,000		37,279	25,318.55
63	Temp.	15	1,100,000		29,507	62,147.54
63	Temp.	10	1,000,000		22,884	15,551.80
64	Temp.	10	1,100,000		27,037	18,385

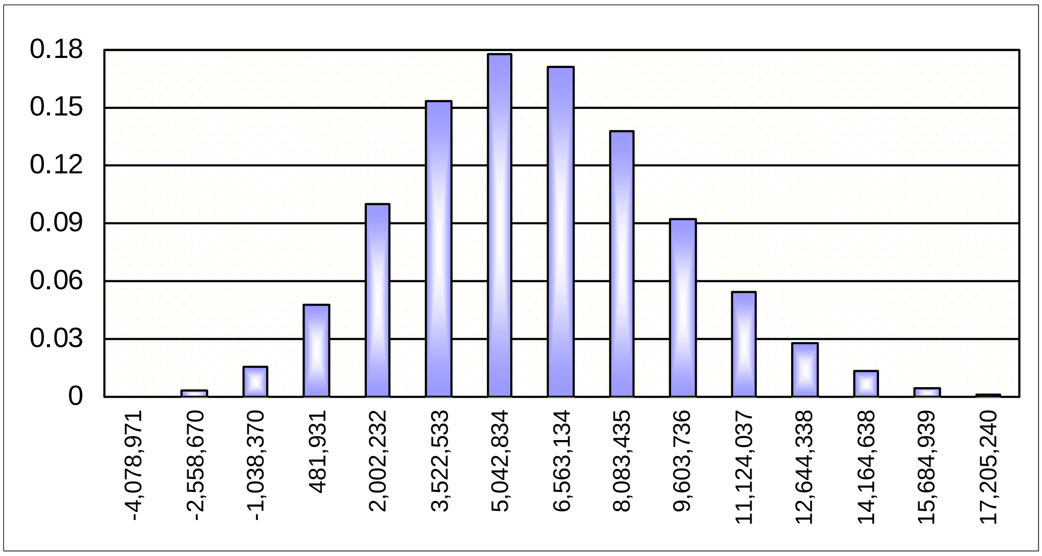
Es importante recalcar que en el caso de los seguros temporales y dotales se está considerando el período de pago de primas igual al período de cobertura, ahora bajo este esquema se tiene que el valor de la reserva teórica es de 5, 635,310.15.

Los resultados obtenidos en la simulación fueron los siguientes:

Media muestral	*5,981,893.26*
Varianza muestral	*10,993,232,226,947.20*
Desviación estándar	*3,315,604.35*
Curtosis	*-0.07*
Coeficiente de asimetría	*0.26*
Valor Máximo	*17,965,390.50*
Valor Mínimo	*-4,839,121.54*
Primer cuartil	*3,634,173.17*
Mediana	*5,818,303.30*
Tercer cuartil	*8,158,036.40*

En este caso se observa una diferencia de 346,583.11 unidades entre el valor teórico y el observado. Los valores de la curtosis y del coeficiente de asimetría se reducen severamente a comparación de los resultados obtenidos a nivel póliza. De hecho los cuartiles se encuentran distribuidos de manera más uniforme que en el caso a nivel póliza. Realizando una partición en 15 clases se obtiene el siguiente histograma:

Rango		*Marca de Clase*	*Frecuencia*	*F. Relativa*
-4,839,122	-3,318,821	-4,078,971	37	0.00037
-3,318,821	-1,798,520	-2,558,670	341	0.00341
-1,798,520	-278,219	-1,038,370	1,583	0.01583
-278,219	1,242,082	481,931	4,796	0.04796
1,242,082	2,762,382	2,002,232	10,002	0.10002
2,762,382	4,282,683	3,522,533	15,325	0.15325
4,282,683	5,802,984	5,042,834	17,732	0.17732
5,802,984	7,323,285	6,563,134	17,113	0.17113
7,323,285	8,843,586	8,083,435	13,826	0.13826
8,843,586	10,363,886	9,603,736	9,227	0.09227
10,363,886	11,884,187	11,124,037	5,393	0.05393
11,884,187	13,404,488	12,644,338	2,727	0.02727
13,404,488	14,924,789	14,164,638	1,283	0.01283
14,924,789	16,445,090	15,684,939	490	0.0049
16,445,090	17,965,391	17,205,240	125	0.00125


0.18
0.15
0.12
0.09
0.06
0.03
0
-4,078,971
-2,558,670
-1,038,370
481,931
2,002,232
3,522,533
5,042,834
6,563,134
8,083,435
9,603,736
11,124,037
12,644,338
14,164,638
15,684,939
17,205,240

Anexo 5: Tabla de mortalidad experiencia mexicana CNSF 2000-I 91-98 (Individual)

x	q_x
12	0.000396
13	0.000427
14	0.000460
15	0.000495
16	0.000533
17	0.000575
18	0.000619
19	0.000667
20	0.000718
21	0.000773
22	0.000833
23	0.000897
24	0.000966
25	0.001041
26	0.001121
27	0.001207
28	0.001300
29	0.001400
30	0.001508
31	0.001624
32	0.001749
33	0.001884
34	0.002029
35	0.002186
36	0.002354
37	0.002535
38	0.002730
39	0.002940
40	0.003166
41	0.003410

x	q_x
42	0.003672
43	0.003954
44	0.004258
45	0.004585
46	0.004938
47	0.005317
48	0.005725
49	0.006164
50	0.006637
51	0.007145
52	0.007693
53	0.008282
54	0.008915
55	0.009597
56	0.010330
57	0.011119
58	0.011967
59	0.012879
60	0.013860
61	0.014914
62	0.016048
63	0.017265
64	0.018574
65	0.019980
66	0.021490
67	0.023111
68	0.024851
69	0.026720
70	0.028724
71	0.030874

x	q_x
72	0.033180
73	0.035651
74	0.038300
75	0.041136
76	0.044174
77	0.047424
78	0.050902
79	0.054619
80	0.058592
81	0.062834
82	0.067632
83	0.072190
84	0.077337
85	0.082817
86	0.088649
87	0.094850
88	0.101436
89	0.108424
90	0.115832
91	0.123677
92	0.131973
93	0.140737
94	0.149983
95	0.159723
96	0.169970
97	0.180733
98	0.192020
99	0.203837
100	1.000000

Bibliografía

- Bartle Robert, The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiely Interscience Publications, E.U.A., 1995.
- Bowers Newton et al, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, E.U.A, 1997.
- Brockwell Peter J. y Davis Richard A., Introduction to Time Series and Forecasting, Springer; E.U.A, 1996.
- Brzezniak Zdzislaw y Zastawniak Tomasz , Basic Stochastic Process, Springer, Gran Bretaña, 2002.
- Carriere Jacques F. ,Long-Term Yield Rates for Actuarial Valuations, Society of Actuaries, E.U.A, 1999.
- Carstens Christian, Valuation of Insurance and Pensions Contracts under Stochastic Mortality: the Guaranteed Annuity Option Case, Universidad de ULM , 2008.
- Chatfield Chris, Time Series Analysis, Chapman & Hall/ CRC, E.U.A., 2004.
- Karatzas Ioannis y Shreve Steven, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, Gran Bretaña, 1999.
- Milgrom Paul, Measuring the Interest Rate Risk, Transactions of the Society of Actuaries XXXVII, 1985.
- Moller Thomas y Steffensen Mogens, Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance, Cambridge University Press, E.U.A. , 2007.
- Panjer Harry y Bellhouse David, Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 48, No. 4,1981.
- Panjer Harry y Bellhouse David, Stochastic Modeling of Interest Rates with Applications to Life Contingencies Part Two, The Journal of Risk and Insurance, Vol. 48, No. 4, 1981.
- Parker Gary , Two Stochastic Approaches for Discounting Actuarial Functions, Astin Voulletin Vol.24, 1994 .
- Ross Sheldon, A First Course in Probability, Prentice Hall, E.U.A, 2002
- Slud Erick V., Actuarial Mathematics and Life-Table Statistics, Mathematics Department University of Maryland, College Park; E.U.A, 2001.
- Tae Park Tae & Lorne Switzer, Forecasting Interest Rates and Yield Spreads, Journal of Forecasting, Vol. 16; 1997.