



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

DINÁMICA DE QUARKS EN TEORÍAS DE  
NORMA FUERTEMENTE ACOPLADAS A  
PARTIR DE LA CORRESPONDENCIA  
AdS/CFT

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
JUAN FELIPE PEDRAZA AVELLA

DIRECTOR:  
DR. ALBERTO GÜJOSA HIDALGO

COMITÉ TUTORAL:  
DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO  
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER



posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO D.F., JUNIO DE 2010



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DINÁMICA DE QUARKS EN TEORÍAS DE NORMA  
FUERTEMENTE ACOPLADAS A PARTIR DE LA  
CORRESPONDENCIA AdS/CFT

JUAN FELIPE PEDRAZA AVELLA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
2010

DINÁMICA DE QUARKS EN TEORÍAS DE NORMA  
FUERTEMENTE ACOPLADAS A PARTIR DE LA  
CORRESPONDENCIA AdS/CFT

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

JUAN FELIPE PEDRAZA AVELLA

DIRECTOR:  
ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO

COMITÉ TUTORAL:  
JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO  
JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES  
2010

*Este trabajo está dedicado a mis padres*

---

---

# AGRADECIMIENTOS

---

---

Primero que todo quiero agradecer a Alberto Güijosa por introducirme a la investigación en teoría de cuerdas, por tener siempre las puertas abiertas para aclarar mis dudas, por su excelente disposición y entrega a la enseñanza y por los valiosos consejos que me ofreció durante mis dos años de estancia en México. Fue todo un placer haber tenido la posibilidad de trabajar juntos.

Quiero agradecer de manera especial a Elena Cáceres y Mariano Chernicoff por haber contribuido en el desarrollo de este trabajo. A mis sinodales, Jose Antonio García, Myriam Mondragón, Leonardo Patiño y Daniel Sudarsky, por sus valiosos consejos y comentarios sobre la tesis. A los profesores, Juan Carlos d'Olivo, Alfonso Mondragón, Darío Nuñez y Jose David Vergara, por haber aportado a mi formación académica.

Finalmente, quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México, al Posgrado en Ciencias Físicas y al Instituto de Ciencias Nucleares por ser mi casa en estos dos años, y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico recibido.

Juan Felipe Pedraza Avella

---

---

# ÍNDICE GENERAL

---

---

ÍNDICE GENERAL	1
ÍNDICE DE FIGURAS	4
RESUMEN	I
INTRODUCCIÓN	II
<b>1. TEORÍA DE CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA AdS/CFT</b>	<b>1</b>
1.1. Principios básicos de teoría de cuerdas . . . . .	3
1.1.1. Teorías tipo II: espectro y acción efectiva . . . . .	5
1.1.2. Dualidad T y D-branas . . . . .	6
1.2. Holografía en teoría de cuerdas . . . . .	11
1.2.1. D3-branas, cuerdas abiertas y teoría SYM $\mathcal{N} = 4$ . . . . .	12
1.2.2. 3-branas negras en supergravedad tipo IIB y el límite de Maldacena	15
1.2.3. Diccionario de la correspondencia AdS/CFT . . . . .	17
1.2.4. Agujeros negros vs. temperatura finita . . . . .	19
1.2.5. Materia en la representación fundamental . . . . .	22
1.2.6. Quarks en el vacío de SYM $\mathcal{N} = 4$ . . . . .	24

---

1.3. Renormalización Holográfica . . . . .	29
1.3.1. Funciones de correlación en teorías de campo conformes . . . . .	30
1.3.2. Espacios asintóticamente AdS y análisis cerca a la frontera . . . . .	34
1.3.3. Divergencias, regularización y renormalización . . . . .	36
1.3.4. Funciones de un punto e identidades de Ward . . . . .	37
1.3.5. Funciones de correlación de $n$ puntos . . . . .	39
<b>2. EL EFECTO UNRUH EN TEORÍAS DE CAMPO CONFORMES</b>	<b>40</b>
2.1. Introducción . . . . .	40
2.2. Solución dual a un quark uniformemente acelerado . . . . .	43
2.3. Difeomorfismos en el bulto y el efecto Unruh . . . . .	45
2.3.1. Coordenadas de Rindler . . . . .	45
2.3.2. Cambio de marco conforme y eliminación del horizonte de Rindler	48
2.4. El tensor energía momento de Unruh . . . . .	51
<b>3. FLUCTUACIONES CUÁNTICAS DE QUARKS ACELERADOS</b>	<b>55</b>
3.1. Introducción . . . . .	55
3.2. Fluctuaciones térmicas en el medio de Unruh . . . . .	58
3.2.1. Movimiento Browniano y dinámica de Langevin . . . . .	58
3.2.2. Movimiento Browniano en AdS/CFT . . . . .	60
3.2.3. Ecuación de Langevin en el medio de Unruh . . . . .	64
3.3. Fluctuaciones cuánticas para el observador inercial . . . . .	66
<b>4. DINÁMICA DE QUARKS A TEMPERATURA FINITA</b>	<b>71</b>

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>3</b>
4.1. Introducción . . . . .	71
4.2. Ecuaciones de movimiento a temperatura cero . . . . .	76
4.3. Perturbaciones a temperatura finita . . . . .	79
4.4. Solución ultra-relativista . . . . .	81
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>84</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>88</b>

---

---

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

---

1.1. D-branas y cuerdas abiertas . . . . .	13
1.2. Geometría inducida por una pila de D3-branas . . . . .	15
1.3. La correspondencia AdS/CFT a temperatura finita . . . . .	20
1.4. Introducción de quarks desde el punto de vista gravitacional. . . . .	23
4.1. Diagrama de fase de QCD . . . . .	72

---

---

# RESUMEN

---

---

Actualmente, un problema de interés físico es el estudio de sistemas cuánticos fuertemente acoplados. Es muy poca la información que se puede obtener desde la perspectiva de teoría de campos pues en este régimen las técnicas perturbativas no son de utilidad. La correspondencia AdS/CFT nos brinda una nueva perspectiva y una forma novedosa de atacar el problema, pues nos permite obtener información de nuestra teoría fuertemente acoplada, realizando cálculos relativamente sencillos en el marco de la teoría de cuerdas. En este trabajo utilizamos esta herramienta para estudiar diferentes aspectos relacionados con la dinámica de quarks en teorías de norma fuertemente acopladas. En primera instancia, nos concentramos en estudiar la evolución de un quark uniformemente acelerado en el vacío de teorías de campo conformes en varias dimensiones. Desde la perspectiva de un observador inercial, el quark experimenta fluctuaciones cuánticas debidas a la emisión de radiación, mientras que desde el punto de vista de un observador acelerado, el quark está inmerso en un baño térmico como consecuencia del efecto Unruh, y las fluctuaciones asociadas son originadas por la interacción con las demás partículas del medio. Examinamos la relación entre estas dos descripciones en el lado gravitacional de la correspondencia y, en particular, mostramos que al transformar la teoría de campos del espacio de Rindler al universo abierto de Einstein, el horizonte de aceleración desaparece de la teoría de campos, pero se preserva en el bulto. Dicha transformación nos permite estudiar las propiedades del medio térmico de Unruh, mediante el cálculo holográfico del valor esperado del tensor energía momento y, además, nos permite conectar nuestro cálculo de fluctuaciones en el vacío con un estudio previo respecto al movimiento Browniano de un quark inmerso en un medio térmico. Finalmente, nos concentramos en el problema de estudiar la dinámica de quarks a temperatura finita y encontramos soluciones particulares en el régimen ultra-relativista. Este análisis resulta de particular interés fenomenológico pues en este régimen podemos acercarnos a QCD en su fase desconfiada y los resultados podrían ser relevantes para estudiar la física del plasma de quarks y gluones recientemente descubierto en el RHIC.

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

Actualmente, la mejor descripción que existe de la materia, la energía y todos los fenómenos de nuestro universo se da en términos de interacciones entre partículas elementales. La física teórica busca la comprensión de dichos fenómenos a partir de algunos postulados básicos y hasta la fecha ha podido simplificar su descripción basándose en un pequeño conjunto de leyes.

Se sabe que toda la materia que observamos está constituida a nivel microscópico por átomos y que esos átomos a su vez están compuestos de electrones, protones y neutrones. Observando más de cerca, se conoce además que los protones y neutrones están constituidos de partículas denominadas quarks arriba y quarks abajo. Hasta donde sabemos, tanto los quarks como los electrones son partículas *elementales*, en el sentido de que no se pueden descomponer en ingredientes más pequeños. Curiosamente, gracias a un gran esfuerzo tecnológico, en el siglo XX se lograron descubrir otros componentes básicos de la materia, así como agentes portadores de las fuerzas fundamentales, completando la tabla de partículas elementales que conocemos hoy en día. Paralelamente a este descubrimiento, se fue desarrollando un lenguaje teórico para describir los fenómenos observados, que se conoce con el nombre de *Modelo Estándar*.

En términos matemáticos, el Modelo Estándar es un ejemplo particular de una teoría de *campos* cuánticos y son las excitaciones de dichos campos las que dan origen a las partículas que observamos en la naturaleza. Existe entonces un campo por cada tipo de partícula, y según su estadística se pueden clasificar en dos categorías: los *fermiones*, que conforman la materia, y los *bosones*, que figuran como mediadores de las fuerzas fundamentales.

De acuerdo con el Modelo Estándar, las partículas elementales que componen la materia, es decir los fermiones, están divididas en dos grupos: los leptones y los quarks. Al primero pertenecen el electrón  $e$ , el muón  $\mu$  y el tauón  $\tau$ , y además, tres diferentes tipos de partículas ligeras asociadas llamadas neutrinos  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$ . Existen igualmente seis tipos de quarks, llamados arriba  $u$ , abajo  $d$ , encanto  $c$ , extraño  $s$ , cima  $t$  y fondo  $b$ . Además, dentro de los bosones conocidos se encuentran el fotón  $\gamma$ , que se asocia a la conocida interacción electromagnética, los bosones  $W^\pm$  y el  $Z$ , que se asocian a la interacción débil, la cual se presenta en algunos procesos de desintegración radiactiva,

y ocho gluones  $G$  asociados a la interacción fuerte, que es la responsable de mantener los protones y neutrones unidos dentro del núcleo atómico.

El Modelo Estándar posee además ciertas simetrías, las cuales se describen matemáticamente en términos de grupos de Lie. Entre éstas se encuentran las simetrías espaciotemporales habituales para una teoría relativista, en las que se incluyen las translaciones, las rotaciones y los empujones, conformando el grupo de Poincaré  $(3, 1)$ . Por otra parte, el Modelo Estándar tiene como grupo de simetría interno *local* (o *de norma*) al grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Genéricamente, cada uno de estos grupos tiene una interpretación geométrica similar a las rotaciones usuales en el espaciotiempo. Tal como un vector tiene propiedades específicas bajo la rotación de las coordenadas, cada campo de la teoría transforma de una manera específica bajo estas “rotaciones” abstractas. Se sabe además que el grupo de norma está estrechamente relacionado con las fuerzas fundamentales, de manera que el grupo completo se puede descomponer en el sector de interacciones fuertes  $SU(3)$  y en el sector de interacciones electrodébiles  $SU(2) \times U(1)$ .

Ahora bien, la dinámica de toda teoría de campos está determinada por una constante de acoplamiento adimensional (o varias), que controla(n) la intensidad de las interacciones. Denominemos a esa constante de forma genérica como  $g$ . Usualmente, el Lagrangiano o el Hamiltoniano del sistema puede ser separado en un término cinético y un término de interacción. La constante de acoplamiento determina entonces la magnitud o intensidad de la parte de interacción respecto al término cinético. Por ejemplo, en la electrodinámica cuántica (o QED), que es el sector del Modelo Estándar que describe la interacción electromagnética, la constante que rige sus interacciones es la magnitud  $e$  de la carga del electrón o, de manera equivalente, la constante de estructura fina,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \quad (\text{I.1})$$

la cual determina la intensidad con la que un electrón genera o siente la interacción electromagnética, o en un lenguaje microscópico, la tendencia del electrón a emitir o absorber fotones.

En general, para una teoría de campos arbitraria, si  $g \ll 1$  se dice que la teoría está débilmente acoplada. En este caso, es posible realizar consistentemente cálculos en la teoría en términos de una expansión en potencias de  $g$ , llamada expansión perturbativa, que se resume convenientemente utilizando los llamados diagramas de Feynman. Si la constante de acoplamiento es de orden de magnitud igual a uno o mayor, entonces se dice que la teoría está fuertemente acoplada. En este caso se debe hacer uso de métodos no perturbativos para estudiar la teoría.

Pero este no es el final de la historia. Si la teoría de campos que estamos analizando es una teoría *cuántica* de campos, entonces se presenta un fenómeno inusual. En este caso, al estudiar la misma teoría a diferentes escalas energéticas (cambiando la longitud de onda o el momento de las partículas de prueba que se estén utilizando), encontramos

que la constante de acoplamiento  $g$  depende de la escala energética  $\mu$  a la cuál se está observando,  $g = g(\mu)$ , como resultado de lo que en la expansión perturbativa se interpreta como la presencia de partículas virtuales que constantemente aparecen y desaparecen. Dicha información está codificada en la denominada función beta  $\beta(g)$ , la cual se define como

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \ln \mu}. \quad (\text{I.2})$$

En particular, si una teoría es invariante de escala entonces su función beta debe ser igual a cero. Pero, incluso si una teoría clásica es invariante de escala, su versión cuántica puede tener función beta diferente de cero, y en este caso se dice que la invariancia de escala clásica es anómala.

Si la función beta es positiva, la constante de acoplamiento correspondiente se incrementa con la energía. Un ejemplo de esto es QED. A bajas energías, en particular, se obtiene que la constante de acoplamiento es muy pequeña, aproximadamente  $\alpha \sim 1/137$ . Sin embargo, la función beta positiva indica que ésta se incrementa hasta que la teoría se vuelve fuertemente acoplada a ultra-altas energías.

Por otra parte, se sabe que en teorías de norma no abelianas la función beta puede ser negativa, resultado que fue encontrado por primera vez por David Gross, Frank Wilczek y David Politzer. Por ejemplo, en el caso de una teoría de Yang-Mills arbitraria, con grupo de norma  $SU(N)$  y  $N_f$  fermiones de Dirac (sabores de quarks), se obtiene que a un lazo

$$\beta(g) = \mu \frac{dg_{\text{YM}}}{d\mu} = -\frac{g_{\text{YM}}^3}{16\pi^2} \beta_0, \quad (\text{I.3})$$

donde

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f. \quad (\text{I.4})$$

En el caso de la cromodinámica cuántica (o QCD), que es el sector del Modelo Estándar que describe las interacciones fuertes, tenemos que  $N = 3$  y  $N_f = 6$  obteniendo una función beta negativa. Como resultado, la constante de acoplamiento de QCD,

$$\alpha_{\text{QCD}}(\mu) \equiv \frac{g_{\text{YM}}^2}{4\pi} = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda_{\text{QCD}})}, \quad (\text{I.5})$$

decrece al aumentar la energía, fenómeno que se conoce como *libertad asintótica*. Acá,  $\Lambda_{\text{QCD}}$  define una escala característica de la teoría por debajo de la cual las interacciones fuertes se vuelven muy intensas.<sup>1</sup> A bajas energías, es decir a escalas menores a  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , la constante de acoplamiento es grande y por lo tanto no es posible describir la teoría en términos de una expansión perturbativa.

Tras más de treinta años del descubrimiento de la libertad asintótica, la cromodinámica cuántica sigue siendo un misterio, pues hasta la fecha no existe un método analítico

<sup>1</sup>Experimentalmente se ha determinado que  $\Lambda_{\text{QCD}}$  es del orden de 200 MeV.

fiable para explorar sus propiedades no perturbativas a partir de primeros principios. Existen sin embargo, métodos que arrojan resultados parciales, permitiendo capturar parte de la física de interés, pero dejando algunas preguntas sin responder.

La primera opción para acercarse al régimen no perturbativo de la teoría es lo que se conoce como QCD en la red. En este caso, se utiliza una discretización del espaciotiempo (llamada red o *lattice*) con el fin de reducir el número infinito de grados de libertad de la teoría y realizar cálculos numéricos mediante supercomputadoras. Con este recurso, ha sido posible elucidar parte de las propiedades de QCD, entre las cuales se destacan el cálculo del espectro de masas de los hadrones (estados ligados de quarks) y sus propiedades termodinámicas. Sin embargo, este método no es aplicable para estudiar propiedades dinámicas, dada la naturaleza de su formulación euclidiana (es decir, con tiempo imaginario). Incluso si en el futuro la mayoría de propiedades de QCD pudieran ser verificadas numéricamente a través de cálculos en la red, una comprensión teórica de la misma sería más que deseada.

Otra opción es considerar teorías efectivas que puedan arrojar resultados teóricos cualitativamente correctos bajo ciertos límites y que, en el mejor de los casos, se puedan derivar bajo una expansión sistemática de algún parámetro del Lagrangiano. Una de estas teorías es conocida como teoría de perturbaciones quiral, la cual es un modelo efectivo que resulta útil a bajas energías. La simetría quiral es una simetría interna global aproximada de QCD, que tiene grupo  $SU(N_f)$ , y que sería exacta si las masas de los quarks fueran nulas. Por ejemplo, para los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ , los cuales tienen masas muy pequeñas, una simetría  $SU(3)$  de sabor puede predecir correctamente partes importantes del espectro como el octete y el decuplete de bariones asociados a estos tres quarks. La teoría de perturbaciones quiral es entonces una expansión a bajas energías basada en el rompimiento espontáneo de esta simetría. Otras teorías efectivas involucran, por ejemplo, la expansión en términos de masas grandes, la aproximación no relativista, etc. La esperanza es que, mediante una reformulación de QCD en términos de otras variables u otros grados de libertad, podamos entender algunas de sus propiedades más misteriosas.

Por último, cabe la posibilidad de explorar aspectos no perturbativos de QCD estudiando de primeros principios teorías similares a ésta, sobre las cuales sí se tenga un cierto dominio analítico. Un ejemplo de esto es considerar teorías con grupos de simetría mas grandes, y para esto existen dos opciones naturales. La primera consiste en extender las simetrías espaciotemporales. Por ejemplo, se puede considerar al grupo conforme, que aparte de contener al grupo de Poincaré, añade además las dilataciones y las llamadas transformaciones conformes especiales. Otro ejemplo muy conocido en la literatura es el de considerar un sector fermiónico, extendiendo el grupo de Poincaré usual al grupo de Super-Poincaré, y esto recibe el nombre de *supersimetría*. Al añadir más simetría al lagrangiano, ya sea simetría conforme o supersimetría, se imponen ciertas constricciones que van a facilitar muchas de las cuentas, por ejemplo, restringiendo la forma de las funciones de correlación, etc. La segunda opción consiste en extender el grupo de

simetrías internas, por ejemplo, considerando teorías con diferente número de colores  $N$  cuyo grupo de norma pueda contener al grupo de interacciones fuertes  $SU(3) \subset SU(N)$ . En este contexto resulta particularmente útil considerar el límite  $N \rightarrow \infty$  y realizar una expansión en  $1/N$ . En dicho límite, la dinámica de la teoría es dominada por el sector gluónico, y los diagramas de Feynman, controlados ahora por la denominada constante de 't Hooft,  $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N$ , se organizan naturalmente según su topología en el plano (los diagramas no planares son suprimidos en este límite). Matemáticamente, se encuentra que la amplitud de todo proceso se puede escribir como

$$\mathcal{A} = \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{g,n} N^{\chi} \lambda^n, \quad (\text{I.6})$$

donde  $c_{g,n}$  son constantes y  $\chi = 2 - 2g$  es el número de Euler (que depende de la topología). Sorprendentemente, esta expresión resulta estar estrechamente relacionada con amplitudes que provienen de otra teoría totalmente diferente, la *teoría de cuerdas*. La primera suma en (I.6) se reconoce como la expansión en lazos de una teoría de cuerdas cerradas con constante de acoplamiento  $g_s \sim 1/N$ , mientras que la segunda está relacionada con la expansión en el tamaño característico de las cuerdas, que definiremos más adelante. Esta relación inesperada dio origen al estudio de ciertas relaciones de equivalencia que han permitido en los últimos años una comprensión más profunda de diversas teorías de campo a partir de teorías de cuerdas, que en principio lucen muy diferentes.

Una realización concreta de este tipo de conexión es la denominada correspondencia AdS/CFT, la cual estipula la equivalencia entre una teoría de cuerdas definida en un fondo asintóticamente anti de Sitter (AdS) y una teoría de cuántica de campos con invariancia conforme (CFT). Tras doce años de su formulación, la correspondencia AdS/CFT se ha convertido en uno de los avances conceptuales más importantes de la física teórica en los últimos tiempos. El objetivo principal de este trabajo de investigación es estudiar varios aspectos de la dinámica de quarks en teorías de norma fuertemente acopladas utilizando como herramienta de cálculo precisamente a la correspondencia AdS/CFT. Los resultados del presente trabajo de investigación condujeron a la redacción del artículo [1], el cual fue aceptado para la publicación en la revista *Journal of High Energy Physics* (JHEP). Parte de nuestra discusión estará basada en la referencia mencionada, así como en otros resultados que aún no han sido publicados.

# CAPÍTULO 1

---

---

## TEORÍA DE CUERDAS Y LA CORRESPONDENCIA AdS/CFT

---

---

A principios del siglo XX se originaron dos de los pilares fundamentales de la física teórica, los cuales han seguido vigentes hasta nuestros días. La visión que tenemos de nuestro universo se basa en dos teorías diferentes, muy estables cada una en su campo, pero que presentan grandes problemas conceptuales cuando se intentan combinar para resolver los problemas más profundos del universo. Por un lado se encuentra la Teoría de la Relatividad General de Einstein, que nos sirve para estudiar las partes más grandes del universo, como las estrellas y las galaxias. La otra teoría es la Mecánica Cuántica, un conjunto de leyes por las que se rigen las partículas más pequeñas, como los átomos y las partículas subatómicas.

Para describir el universo a gran escala se utilizan una serie de leyes enmarcadas en la Teoría de la Relatividad General, que nos explica el funcionamiento de la gravedad, y nos muestra al espaciotiempo como un enorme tejido elástico. En esta visión, todos los cuerpos deforman el espacio a su alrededor en mayor o menor proporción dependiendo de su energía, y dicha curvatura es percibida como la gravedad. Por ejemplo, la Luna gira alrededor de la Tierra como consecuencia de la curvatura generada por nuestro planeta. Sin embargo, cuando intentamos describir el mundo microscópico la deformación del espaciotiempo producida por los cuerpos es despreciable y el comportamiento de éstos se vuelve incierto. Es entonces cuando se utiliza la Mecánica Cuántica, abandonando el predecible mundo macroscópico. Esperaríamos que a distancias suficientemente pequeñas (del orden de la longitud de Planck,  $\sim 10^{-35}\text{m}$ ), el tejido espacial se vuelva fluctuante y accidentado, y esté gobernado por la incertidumbre.

En el lenguaje cuántico se describen tres de las interacciones fundamentales que se dan en la naturaleza, y la teoría que las contiene es conocida como el Modelo Estándar. Por

---

razones técnicas, la inclusión de la fuerza gravitacional en una descripción unificada que describa a las cuatro interacciones no ha sido posible y, por años, la formulación de una teoría cuántica de la gravedad se ha considerado como uno de los problemas más importantes de la física teórica. La relación entre las cuatro interacciones fundamentales y la materia explica cada uno de los acontecimientos que suceden en el universo, razón por la cual, una descripción unificada resultaría útil para entender aquellos problemas que requieren una descripción conjunta. Uno de los ejemplos donde se da la mala incompatibilidad entre las dos teorías es en el presunto origen del universo, que sucedió hace unos catorce mil millones años a causa de una gran explosión, haciendo que desde entonces el universo se haya expandido constantemente, generándose así las estrellas, cúmulos y galaxias a medida que éste se enfriaba. Para estudiar al universo en sus primeros instantes, resulta pues indispensable acudir tanto a la mecánica cuántica como a la relatividad general.

La teoría de cuerdas, que surgió a finales de la década de los 60 como una posible teoría de hadrones (tema en el cual fue superada contundentemente por QCD), es considerada ahora como un fuerte candidato a una teoría consistente de gravedad cuántica. Además tiene una meta mucho más ambiciosa, pues pretende ser una descripción completa, unificada, y consistente de la estructura fundamental de nuestro universo. La idea esencial detrás de la teoría de cuerdas es que todas las diversas partículas fundamentales del modelo estándar son en realidad manifestaciones diferentes de un solo objeto básico: una cuerda. Las cuerdas pueden vibrar de diferentes maneras, y cada uno de los diferentes modos de excitación se refleja en las diferentes partículas que observamos, cada una con propiedades únicas, como la masa y el espín. De manera que, si la teoría de cuerdas es correcta, el mundo entero estaría hecho de solo cuerdas.

La teoría de cuerdas está aún en etapa de desarrollo. Aunque conocemos algunas de sus partes, todavía no tenemos una descripción completa de su estructura, y es en parte por esto que aún no se pueden hacer predicciones concretas. En años recientes han habido avances muy importantes y alentadores, entre los cuales se encuentra la correspondencia AdS/CFT [2, 3, 4]. Curiosamente, además de mejorar ampliamente nuestra comprensión de la teoría de cuerdas a nivel no perturbativo, a partir de la correspondencia han surgido innumerables aplicaciones a diversos campos de la física teórica y es precisamente esta herramienta la que vamos a emplear en el presente trabajo de investigación.

Ahora, pese a que la meta más ambiciosa de la teoría de cuerdas contempla la visión unificadora que mencionamos anteriormente, nuestros propósitos en el presente trabajo son mucho más modestos. Utilizaremos la correspondencia AdS/CFT simplemente como una herramienta de cálculo para estudiar sistemas no abelianos fuertemente acoplados que son de nuestro interés. Este capítulo tiene como fin presentar una breve introducción a la teoría de cuerdas, y en particular a la correspondencia AdS/CFT. Por completez, se mostrarán los ingredientes más relevantes de la teoría, así como los resultados particulares que serán de utilidad en los capítulos posteriores.

## 1.1 Principios básicos de teoría de cuerdas

La teoría de cuerdas [5, 6, 7, 8, 9, 10] estipula que los objetos fundamentales de la materia no son puntuales. Las partículas son reemplazadas por objetos extendidos unidimensionales a los que se conoce con el nombre de cuerdas. El movimiento de uno de estos objetos en el espaciotiempo describe una superficie bidimensional que llamamos hoja de mundo. Dado que interesa tener una descripción de la trayectoria que sea covariante de Lorentz, resulta conveniente parametrizarla mediante escalares. Si denotamos  $\sigma$  y  $\tau$  a los parámetros de dicha parametrización, entonces la trayectoria que dibuja la cuerda está descrita por el conjunto de funciones  $X^\mu \equiv X^\mu(\sigma, \tau)$ , donde  $\mu = 0, \dots, d-1$  es un índice espaciotemporal. La dinámica de la cuerda está descrita por la acción de Nambu-Goto

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \mathcal{L}_{\text{NG}}, \quad (1.1)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio tiempo y  $g_{\alpha\beta} \equiv G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu$  es la métrica inducida en la hoja de mundo. El coeficiente de la acción es la tensión de la cuerda y  $\alpha'$  se conoce por razones históricas como la pendiente de Regge, la cual está relacionada con la llamada longitud de cuerdas  $l_s$  (que representa el tamaño característico de estos objetos) a través de  $\sqrt{\alpha'} = l_s$ .

Esta acción es invariante bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo de la cuerda y también en el espaciotiempo. La expresión (1.1) es no polinomial, por lo que las ecuaciones de movimiento que se derivan de ella son bastante complicadas. Afortunadamente hay una manera equivalente de describir la dinámica de la cuerda a nivel clásico con un expresión más sencilla, utilizando la acción de Polyakov

$$S_{\text{P}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} G_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu, \quad (1.2)$$

donde  $h_{\alpha\beta}$  es una métrica intrínseca en la hoja de mundo y los demás elementos son los mismos que describimos en la acción de Nambu-Goto. En particular, notemos que  $S_{\text{P}}$  es cuadrática en las derivadas de los campos  $X^\mu$ , razón por la cual resulta conveniente para la cuantización basada en la formulación moderna en términos de integrales de trayectoria. La acción (1.2) también es invariante bajo reparametrizaciones en el espaciotiempo y en la hoja de mundo, pero además bajo transformaciones de Weyl en la hoja de mundo, es decir, bajo reescalamientos locales

$$X'^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma) \quad \text{y} \quad h'_{\alpha\beta}(\sigma) = \Omega(\sigma) h_{\alpha\beta}(\sigma). \quad (1.3)$$

Ahora, el proceso de integración funcional que se aplica para pasar a una teoría cuántica a partir de cierta teoría clásica no siempre es compatible con las simetrías presentes en la acción clásica. En el caso de la teoría de cuerdas es fácil comprobar que la medida de integración puede construirse de manera que preserve la invarianza bajo reparametrizaciones. Sin embargo, éste no es el caso para la simetría de Weyl, pues en general,

las transformaciones (1.3) no dejan invariante dicha medida. Este fenómeno recibe el nombre de anomalía de Weyl, y cuando se produce conduce a una teoría cuántica inconsistente donde se pierde la evolución unitaria o la covarianza. Un cálculo detallado muestra que la anomalía resulta ser proporcional a  $d - 26$ , en el caso de la cuerda bosónica, y esto nos lleva a la conclusión de que dicha teoría de cuerdas sólo sería consistente en un espaciotiempo de dimensión 26. Al incluir fermiones se obtiene que la dimensión crítica es igual a 10.

En el caso puramente bosónico, desde la perspectiva de la hoja de mundo lo que tenemos es una teoría de campos en  $1 + 1$  dimensiones con  $d$  campos escalares. La inclusión de variables fermiónicas modifica esa estructura y lo que se obtiene es una teoría de campo  $1 + 1$  dimensional supersimétrica con  $d$  supercampos, cada uno formado por una coordenada bosónica  $X^\mu$  y dos coordenadas fermiónicas  $\psi^\mu$  y  $\bar{\psi}^\mu$ . La cuantización de estos supercampos con sus respectivas condiciones de frontera nos da como resultado una torre infinita de estados, cada uno de los cuales representa un modo de vibración de la cuerda y corresponde a un tipo específico de partícula. Un número finito de ellos corresponde a estados no masivos. Entre ellos siempre figura un modo con espín dos y con las interacciones apropiadas para describir a un gravitón, la hipotética partícula que actuaría como mediadora de la interacción gravitacional. En efecto, a bajas energías las interacciones de este modo de la cuerda se resumen en una acción efectiva que reproduce la acción de Einstein-Hilbert (ver (1.6)) mas pequeñas correcciones (suprimidas por potencias de  $l_s$ ).

Un resultado importante es que los estados masivos del espectro tienen una masa del orden del inverso de la longitud de cuerdas. En vista de la conexión entre cuerdas y gravedad, esperamos que  $l_s$  sea del orden de la longitud de Planck. La suposición tradicional es que esta longitud sea del orden de  $10^{-35}$ m, pero los modelos de “mundos brana”, propuestos a partir de la década de los 90, permiten un límite superior alrededor de  $10^{-18}$ m. En cualquier caso, los modos masivos de la cuerda estarán entonces fuera del alcance de los aceleradores que tenemos hoy en día, y por tanto, la información más relevante de la teoría la encontraremos en los estados no masivos.

Hasta mediados de los 90, se habían encontrado cinco teorías de cuerdas diferentes, con características muy particulares; sin embargo, en la conferencia anual de teoría de cuerdas del año de 1995, realizada en la Universidad del Sur de California, Edward Witten pronunció un discurso que esencialmente unificó todas las teorías de cuerdas que existían en ese momento, originando así una nueva teoría en once dimensiones llamada teoría M. La teoría M también fue anunciada en el trabajo de Paul Townsend [11] aproximadamente por el mismo tiempo. Para nuestro trabajo nos interesará únicamente el caso de la teorías de cuerdas tipo II (las cuales presentan 2 supersimetrías en diez dimensiones, es decir, 32 supercargas), por lo que resulta conveniente que revisemos algunas de sus características.

### 1.1.1. Teorías tipo II: espectro y acción efectiva

A nivel de la hoja de mundo tenemos diez campos escalares  $X^\mu$  y veinte espinores de Majorana-Weyl, diez con quiralidad derecha  $\psi^\mu$  y diez con quiralidad izquierda  $\bar{\psi}^\mu$ . Al describir cuerdas cerradas en las teorías de cuerdas tipo II, la componente espacial de la hoja de mundo tiene la topología de un círculo (a nivel árbol). Los campos escalares satisfacen condiciones de frontera periódicas en dicha coordenada y los espinores tienen la opción de satisfacer condiciones periódicas o antiperiódicas, es decir,

$$\psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = \psi^\mu(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{o} \quad (1.4)$$

$$\psi^\mu(\sigma + 2\pi, \tau) = -\psi^\mu(\sigma, \tau) \quad \forall \mu. \quad (1.5)$$

El primer caso se conoce como condición de frontera tipo Ramond (R) y el segundo como Neveu-Schwarz (NS). Las mismas dos opciones existen para  $\bar{\psi}^\mu$ . Para tener una teoría de supercuerdas consistente, necesitamos considerar ambas condiciones de frontera al momento de la cuantización. Ésto tiene como consecuencia que obtenemos cuatro sectores (NS-NS, R-R, NS-R, R-NS) que describen los diferentes estados de la cuerda.

Los estados correspondientes a los sectores NS-NS y R-R resultan ser bosónicos en el espaciotiempo, mientras que los correspondientes a los sectores NS-R y R-NS son fermiónicos. El espectro no masivo en el sector NS-NS es el mismo en las dos teorías de cuerdas tipo II (llamadas teoría tipo IIA y teoría tipo IIB), y está formado por el gravitón  $G_{\mu\nu}$ , un escalar conocido como el dilatón  $\phi$  y un tensor antisimétrico de rango dos  $B_{\mu\nu}$  denominado campo de Kalb-Ramond. El sector R-R en la teoría tipo IIA incluye un campo de Maxwell  $C_\mu$  y un tensor antisimétrico de rango tres, mientras que para el caso IIB tenemos un campo escalar  $\chi$  conocido como el axi3n, un segundo tensor antisimétrico de rango dos,  $C_{\mu\nu}$ , y un tensor totalmente antisimétrico de rango cuatro,  $C_{\mu\nu\lambda\rho}$ . Trabajaremos únicamente con la parte bosónica de la teoría, así que no será necesario describir el sector fermiónico.

Ahora, dado que sólo estamos considerando una parte del espectro, es imposible que capturemos toda la dinámica de la teoría. La opción que tenemos es trabajar con una acción efectiva a bajas energías. La idea es construir una acción clásica para los campos no masivos que reproduzca la información de la matriz  $S$  de la teoría completa, incluyendo términos hasta con dos derivadas. Dicha acción, en el llamado marco de Einstein, para la teoría tipo IIB tiene la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int d^{10}x \sqrt{g} \left[ R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}e^{-\phi} H_3^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi} F_1^2 - \frac{1}{2}e^\phi F_3^2 - \frac{1}{4}F_5^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \quad (1.6)$$

donde  $H_3$  y  $F_3$  son las intensidades de campo asociadas a los campos de norma generalizados  $B_{\mu\nu}$  y  $C_{\mu\nu}$ ,  $F_1$  es la “intensidad de campo” asociada al campo escalar  $\chi$  y

$F_5$  es la intensidad de campo asociada a la cuatro forma  $C_{\mu\nu\lambda\rho}$  (que está restringida a ser autodual a nivel de las ecuaciones de movimiento). Además,  $g_s$  es la constante de acoplamiento de cuerdas. Esta constante no es un parámetro libre de la teoría, sino que se relaciona con el valor esperado en el vacío del campo del dilatón de la siguiente manera:

$$g_s = \exp(\langle\phi\rangle). \quad (1.7)$$

Esto significa que, la constante de acoplamiento de cuerdas no es un parámetro libre de la teoría. Ésta puede ser determinada dinámicamente (de manera similar al cálculo del valor esperado en el vacío del Higgs en el Modelo Estándar). La expresión (1.6) define una teoría de campo que se conoce como supergravedad IIB en 10 dimensiones, y corresponde al límite de bajas energías ( $E \ll 1/l_s$ ) de la teoría de cuerdas tipo IIB. La acción efectiva completa de la teoría de cuerdas incluye correcciones con derivadas de orden superior que por análisis dimensional necesariamente aparecen junto con potencias de  $l_s$  y, por lo tanto, se vuelven despreciables siempre y cuando la escala de variación espaciotemporal de los campos sea mucho mayor que la longitud de cuerdas. Para la teoría tipo IIA, la forma de la acción efectiva es muy similar.

Un punto importante a enfatizar acá es que el papel de las cuerdas cerradas en relación a los campos que aparecen en la acción efectiva es completamente análogo a la relación usual entre el fotón y el campo electromagnético. Estos campos se encuentran en primera instancia como los modos de excitación mas bajos de la cuerda, por lo que las cuerdas se pueden entender como objetos auxiliares que describen excitaciones por encima del valor esperado en el vacío de dichos campos. Es decir, pequeñas perturbaciones de los campos de supergravedad se describen a través de cuerdas cerradas en un modo de vibración correspondiente.

### 1.1.2. Dualidad T y D-branas

Los objetos que describen la teoría de cuerdas no son solo cuerdas. Tras el descubrimiento de ciertas dualidades (relaciones de equivalencia no triviales entre dos teorías) se encontraron además otros objetos que deben existir en una descripción no perturbativa, entre los cuales se encuentran objetos extendidos en más dimensiones a los que llamaremos colectivamente *branas*. Una de estas dualidades es la llamada dualidad T, la cual es una transformación de la teoría de cuerdas que relaciona pequeñas y grandes distancias. La dualidad T no está presente en la física de partículas ordinaria, lo cual indica que las cuerdas experimentan al espaciotiempo de una manera fundamentalmente diferente que las partículas. Esta simetría relaciona a diferentes tipos de teorías de cuerdas y, en particular, a la teoría tipo IIA con la tipo IIB. Para entender como trabaja la dualidad T, revisemos algunos conceptos clave.

Vimos ya que la teoría de cuerdas predice la existencia de dimensiones extra, las cuales son requeridas para cancelar la anomalía de Weyl. Ahora, para esconder estas dimen-

siones extra, debemos compactificarlas de algún modo, de manera que diferentes formas y tamaños de estas dimensiones se traducen en diferentes tipos de interacciones desde el punto de vista de la física en cuatro dimensiones efectiva a bajas energías. Sin embargo, muchas de esas geometrías dan lugar a la misma física y esto es debido precisamente a la dualidad T.

Por ejemplo, consideremos el caso en el cual una de las dimensiones extra es un círculo de radio  $R$ . Una partícula o cuerda puede portar momento en esta dirección, y tal estado se conoce como un modo de Kaluza-Klein. El momento en esta dirección está cuantizado, de modo que

$$p = \frac{n}{R}, \quad (1.8)$$

donde  $n$  es un entero. A medida que  $R$  se vuelve pequeño cuesta más energía excitar los modos con  $n \neq 0$ , pero si  $R$  es grande, el espacio entre los estados se vuelve pequeño. En el límite de radio infinito, el momento ya no está cuantizado.

A diferencia de las partículas, una cuerda se puede además enrollar alrededor de una de las dimensiones extra. Tales estados están caracterizados por el número de enrollamiento  $w$ , que no es más que el número de veces que la cuerda envuelve a la dimensión extra. La energía para excitar uno de estos modos también está cuantizada y es proporcional al radio  $R$ . Debido a esto, a medida que el radio crece los estados están más separados, mientras que en el límite de radio cero la discretización se pierde. Esto es exactamente lo opuesto al caso de los modos de Kaluza-Klein y sugiere que el comportamiento de radios pequeños y grandes podría ser el mismo si intercambiamos estos dos tipos de modos, lo cual es precisamente uno de los resultados de la dualidad T.

Las transformaciones de dualidad T actúan en espacios en los cuales por lo menos una dirección tiene la topología de un círculo. Bajo esta transformación, el radio  $R$  de esa dirección cambiará a  $1/R$ , y los estados de enrollamiento serán intercambiados por los estados de Kaluza-Klein en la teoría dual. Por ejemplo, se puede comenzar con una cuerda IIA envuelta una vez alrededor de la dirección en cuestión. Bajo dualidad T, se mapea a una cuerda IIB que tenga una unidad de momento en esa dirección. Una cuerda IIA con un número de enrollamiento igual a dos se mapea a una cuerda IIB con dos unidades de momento, etc. La masa cuadrática total de una cuerda cerrada

$$m^2 = \frac{4N}{l_s^2} + \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{l_s^4} \quad (1.9)$$

es invariante bajo el intercambio  $R \leftrightarrow l_s^2/R$ ,  $n \leftrightarrow w$ . De igual forma, se puede probar que las interacciones son invariantes respecto a esta operación.

Consideremos ahora la situación para cuerdas abiertas. Se sabe que éstas pueden satisfacer dos tipos de condiciones de frontera. Las primeras son las condiciones de Neumann, las cuales nos indican que no hay flujo de momento por los extremos de la cuerda, o en otras palabras, que los extremos son libres. Las segundas condiciones posibles son las de

Dirichlet, que establecen que los extremos de la cuerda están fijos en el espaciotiempo. Estas últimas condiciones rompen la invariancia de Poincaré, y violan la conservación del momento, razón por la cual no fueron consideradas por muchos años.

El hecho de que la dualidad T intercambia las condiciones de frontera de Neumann con las condiciones de Dirichlet fue descubierto independientemente por Petr Horava [12] y por Jin Dai, Robert Leigh y Joseph Polchinski [13]. Esto implica que tales condiciones de frontera deben aparecer necesariamente en regiones del espacio de módulos de cualquier teoría de cuerdas abiertas, lo cual condujo al descubrimiento de las D-branas, objetos extendidos en los cuales cuerdas abiertas con condiciones de frontera de Dirichlet pueden terminar. En 1995, Polchinski [14] demostró que las D-branas son fuentes de los campos Ramond-Ramond requeridos por la consistencia de la teoría, lo cual condujo a un rápido desarrollo en el estudio no perturbativo de la teoría de cuerdas.

Una  $Dp$ -brana es una D-brana con  $p$  dimensiones espaciales, que cubre entonces un “volumen de mundo”  $p+1$  dimensional. Con esto en mente, podemos dividir el conjunto de coordenadas en dos grupos. El primero, formado por las coordenadas tangentes a su volumen de mundo, es decir, el tiempo y  $p$  coordenadas espaciales. El segundo formado por las restantes  $9-p$  coordenadas normales a éste. Las puntas de las cuerdas abiertas terminan en la D-brana, por lo que a lo largo de las coordenadas normales a ésta deben satisfacer condiciones de frontera de Dirichlet. Por otra parte, las puntas se pueden mover libremente sobre la brana, así que a lo largo de las coordenadas tangentes a ésta no hay flujo de momento y se deben satisfacer condiciones de frontera de Neumann.

Es importante mencionar que las cuerdas abiertas las podemos entender como objetos auxiliares que describen la dinámica de la D-brana sobre la cual terminan. Una vez establecido el tipo de condiciones de frontera que satisfacen las coordenadas de la cuerda, se puede realizar la cuantización de la misma. La importancia del análisis de dicha cuantización radica en que a partir del espectro de la cuerda abierta, podemos entender las excitaciones de la D-brana, de igual forma como a partir del espectro de la cuerda cerrada podemos entender las excitaciones de los campos de fondo en el bulto. Realizando dicho análisis, se encuentra que de los modos no masivos del espectro se desprende un resultado fundamental: cada  $Dp$ -brana tiene un campo de norma y, por cada coordenada normal, un campo escalar viviendo en su volumen de mundo. Los campos escalares son interpretados físicamente como desplazamientos de la brana en la dirección normal asociada a dicho campo.

Supongamos ahora que tenemos un sistema con  $N$  D-branas paralelas y coincidentes. Los distintos sectores de cuerdas abiertas pueden ahora etiquetarse mediante dos índices,  $[ij]$ , que nos indican en cuál brana termina cada extremo de la cuerda. En total hay  $N^2$  sectores. Utilizando este lenguaje, el resultado de que cada D-brana tiene un campo de norma viviendo en su volumen de mundo se generaliza y ahora hay un campo de norma por cada sector. Este sistema tiene entonces  $N^2$  campos de norma que interactúan y en el límite de bajas energías definen una teoría de Yang-Mills con grupo de norma

$U(N)$  (geoméricamente este grupo corresponde a la simetría que permite intercambiar el extremo de una cuerda entre una brana y otra. Para nuestros propósitos, resulta conveniente reescribir los  $N^2$  campos de norma como una matriz  $A_{ab}$  de  $N \times N$  con  $a, b = 1 \dots N$ , y separar el grupo  $U(N)$  como  $U(N) = SU(N) \times U(1)$ , donde el factor  $U(1)$  codifica los grados de libertad asociados al centro de masa del conjunto de  $N$  D-branas, mientras que  $SU(N)$  describe sus excitaciones relativas.

Ahora, queremos saber cómo es la dinámica de la D-brana en el espaciotiempo, razón por la cual nos resulta conveniente construir una acción efectiva. En el límite de bajas energías y cuando la variación espaciotemporal de los campos es pequeña, la dinámica de la D-brana resulta estar descrita por la acción de Dirac-Born-Infeld [15]. Esta acción define una teoría de norma  $U(1)$  en  $p + 1$  dimensiones con  $9 - p$  campos escalares que representan las fluctuaciones de la brana en las direcciones transversales. La forma de dicha acción es la siguiente:

$$S = -T_p \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu})}, \quad (1.10)$$

donde  $\xi$  son las coordenadas del volumen de mundo,  $T_p = 1/((2\pi)^p g_s l_s^{p+1})$  es la tensión de la brana,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor electromagnético,  $B_{\mu\nu}$  es el campo de Kalb-Ramond que aparece en el sector NS-NS del espectro de la cuerda cerrada y  $\phi$  es el campo del dilatón. Desarrollando en potencias de  $2\pi\alpha' F_{\mu\nu}$ , uno encuentra que a orden más bajo obtenemos el lagrangiano del electromagnetismo. Así mismo, para  $N$  D-branas paralelas, la acción (1.10) se generaliza a una versión no abeliana, cuyo límite de bajas intensidades de campo da la acción de Yang-Mills que mencionamos anteriormente.

Por último, cabe mencionar que dado que las D-branas tienen masa, se espera que un número considerable de ellas deforme el espaciotiempo de manera apreciable. A bajas energías esto se debería poder entender a partir de la acción de supergravedad y efectivamente, las D-branas tienen esa descripción alternativa como soluciones solitónicas de las ecuaciones de movimiento clásicas en supergravedad. Estas soluciones resultan ser generalizaciones extendidas de agujeros negros, a los que se denominan branas negras [16]. Para ver esto en más detalle, partimos del hecho de que, al igual que las D-branas, las branas negras en cuestión están cargadas bajo el campo Ramond-Ramond con  $p + 1$  índices. La acción de supergravedad tipo IIB (1.6), después de un reescalamiento de Weyl de la métrica para pasar al llamado marco de cuerdas, puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^7 l_s^8} \int d^{10} x \sqrt{-g} \left( e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2) - \frac{2}{(8-p)!} F_{p+2}^2 \right). \quad (1.11)$$

Los demás campos los hemos puesto cero. Para obtener soluciones correspondientes a una fuente R-R  $p$ -dimensional, esféricamente simétrica y localizada en el origen, se

plantea la solución más general con las simetrías correspondientes

$$ds^2 = ds_{10-p}^2 + e^\alpha \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \quad (1.12)$$

donde  $ds_{10-p}^2$  es una métrica en  $10 - p$  dimensiones con signatura lorentziana y  $x^i$  son las  $p$  coordenadas restantes euclidianas. Sustituyendo la (1.12) en las ecuaciones que provienen de la acción (1.11), se encuentra que la familia de soluciones con las condiciones mencionadas están descritas por la métrica

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}} dt^2 + \frac{f_-(\rho)^{-\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} d\rho^2 + r^2 f_-(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i, \quad (1.13)$$

y el dilatón

$$e^{-2\phi} = g_s^{-2} f_-(\rho)^{-\frac{p-3}{2}}, \quad (1.14)$$

donde

$$f_\pm(\rho) = 1 - \left(\frac{r_\pm}{\rho}\right)^{7-p}. \quad (1.15)$$

Los parámetros  $r_+$  y  $r_-$  están relacionados con la masa (ADM)  $M$  y la carga R-R  $N$  de la solución mediante las expresiones

$$M = \frac{1}{(7-p)(2\pi)^7 d_p g_s^2 l_s^8} \left( (8-p) r_+^{7-p} - r_-^{7-p} \right), \quad (1.16)$$

$$N = \frac{1}{d_p g_s l_s^{7-p}} (r_+ r_-)^{\frac{7-p}{2}}, \quad (1.17)$$

donde  $d_p$  es una constante numérica dada por

$$d_p = 2^{5-p} \pi^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right). \quad (1.18)$$

La métrica (1.13) presenta una singularidad en  $\rho = r_-$  y un horizonte en  $\rho = r_+$ . Para  $r_+ \geq r_-$ , la singularidad es cubierta por el horizonte y la solución representa un agujero negro. El caso contrario,  $r_+ < r_-$ , representa una singularidad desnuda y esto hace que el problema de Cauchy no esté bien definido. Entonces, a partir de las ecuaciones (1.16) y (1.17) y utilizando la condición de que  $r_+ \geq r_-$  se puede deducir que

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^3 g_s l_s^{p+1}}, \quad (1.19)$$

lo cual se conoce como la cota BPS (que también se puede deducir a partir del álgebra de supersimetría). En el caso extremal,  $r_+ = r_-$ , se satura la desigualdad y lo que obtenemos es una configuración llamada BPS, que resulta preservar la mitad de las

32 supersimetrías de la teoría IIB. Para analizar este caso más detalladamente, es conveniente definir una nueva coordenada  $r$  que coloca el horizonte en el origen,

$$r^{7-p} \equiv \rho^{7-p} - r_+^{7-p}, \quad (1.20)$$

e introducir una coordenada  $r^a = r\theta^a$  donde  $a = 1, \dots, 9-p$  y  $\sum_a (\theta^a)^2 = 1$ .

Con esta modificación la métrica resulta ser

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left( -dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} \sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a, \quad (1.21)$$

mientras que el dilatón se convierte en

$$e^\phi = g_s H(r)^{\frac{3-p}{4}} \quad (1.22)$$

donde

$$H(r) = 1 + \frac{r_+^{7-p}}{r^{7-p}} \quad \text{y} \quad r_+^{7-p} = d_p g_s N l_s^{7-p}. \quad (1.23)$$

En la siguiente sección exploraremos con cierto detalle el caso particular de las D3-branas ( $p = 3$ ) donde el dilatón (1.22) resulta ser constante y los cálculos se simplifican considerablemente. Veremos cómo a partir de la doble descripción mencionada se llega a la formulación de la correspondencia AdS/CFT.

## 1.2 Holografía en teoría de cuerdas

La posible dimensionalidad de las D-branas depende de la teoría de cuerdas en cuestión, pero acá nos concentraremos en el caso de las D3-branas que aparecen en el espectro de la teoría de cuerdas tipo IIB. Las D3-branas son un caso de especial interés por varias razones, que veremos a continuación, pero la motivación principal de estudiarlas es que su volumen de mundo presenta invariancia de Poincaré en 3+1 dimensiones, y debido a esto sus excitaciones podrían estar descritas en términos de teorías de norma comparables con aquellas del mundo real.

Como se vio en la sección anterior, una colección de  $N$  D-branas admite una doble descripción. La primera es en términos de cuerdas abiertas en cuyo caso tenemos D-branas explícitas que actúan como hipersuperficies en las cuales las cuerdas abiertas pueden terminar. Se puede estudiar la descripción a bajas energías de estas cuerdas abiertas, y en el caso de las D3-branas esta resulta estar dada por la teoría Super Yang-Mills (SYM) con  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías y grupo de norma  $SU(N)$ . Alternativamente, este mismo sistema puede ser descrito como una 3-brana negra, un objeto solitónico que es la solución de la supergravedad tipo IIB. Ésta actúa como una fuente de cuerdas cerradas, cuyo espectro de partículas sin masa incluye el gravitón. Además, la solución de brana

negra correspondiente se caracteriza porque el campo del dilatón es constante y, por lo tanto, su tratamiento analítico resulta ser más simple. A continuación se estudiarán de cerca estas dos descripciones de la física de D3-branas, cuya identificación da lugar al enunciado de la correspondencia AdS/CFT. Se verán también algunas propiedades y resultados útiles que serán de interés en capítulos posteriores. Para una revisión más detallada, ver por ejemplo la referencia [17].

### 1.2.1. D3-branas, cuerdas abiertas y teoría SYM $\mathcal{N} = 4$

Estudiaremos ahora más de cerca las D3-branas y en particular, sus modos de excitación y la teoría de campos emergente a bajas energías en su volumen de mundo. Nuestro punto de partida es la teoría de cuerdas tipo IIB sobre un espacio de Minkowski, en el cual colocamos una pila de  $N$  D3-branas paralelas. Las excitaciones de este sistema pueden describirse a través de cuerdas cerradas que se mueven sobre el fondo plano y cuerdas abiertas que empiezan y terminan en las diferentes D3-branas. Si consideramos el límite de bajas energías, es decir,  $E \ll \frac{1}{l_s}$  (o de manera equivalente,  $l_s \rightarrow 0$ , manteniendo  $E$  fija), únicamente obtenemos los modos no masivos del espectro de las cuerdas y podemos escribir una acción efectiva para ellos. La forma esquemática de dicha acción es la siguiente:

$$S = S_{sugra} + S_{brana} + S_{int}. \quad (1.24)$$

El primer término corresponde a los modos no masivos de las cuerdas cerradas, descritos por la acción de supergravedad tipo IIB (1.6). El segundo término representa las excitaciones de las D-branas, las cuales están descritas por partículas provenientes de los modos más bajos de cuerdas abiertas, mientras que el tercer término describe las interacciones entre cuerdas abiertas y cerradas. Se puede demostrar que, al tomar el límite de bajas energías, el término de las interacciones se vuelve despreciable, razón por la cual el sistema se desacopla naturalmente en dos sectores [17]. Por una parte, obtenemos un sector de supergravedad libre sobre un fondo plano en  $9 + 1$  dimensiones. Adicionalmente, contamos con un sector que describe las excitaciones de las D3-branas, las cuales estudiaremos a continuación.

Primero que todo, notemos que las cuerdas abiertas cuyos extremos terminan en una misma D3-brana pueden tener una longitud arbitrariamente pequeña y por lo tanto sus modos de excitación más bajos están descritos por campos no masivos. En el caso de una sola D3-brana, estos modos inducen una teoría de norma  $U(1)$  en el volumen de mundo, el cual se describe por un espacio plano en  $3 + 1$  dimensiones [18]. La brana preserva la mitad de las 32 supersimetrías de la teoría IIB, por lo cual se dice que es BPS, y la teoría de norma  $U(1)$  resultante tiene  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías. En la aproximación de bajas energías, la teoría de norma es libre.

Si tenemos  $N > 1$  D3-branas paralelas y separadas, las cuerdas abiertas podrían empezar y terminar en una misma brana o en diferentes branas. En el primer caso, la

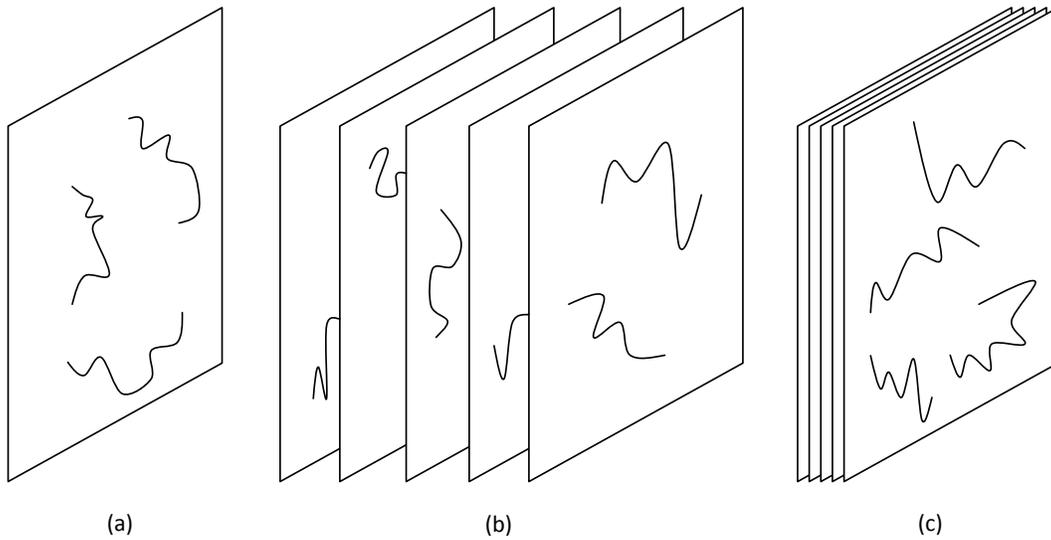


Figura 1.1: D-branas: (a) única, (b) separadas, (c) coincidentes

cuerdas pueden tener longitud arbitrariamente pequeña y por lo tanto son no masivas. Estos modos de excitación inducen una teoría con grupo de norma  $U(1)^N$ , no masiva, y con  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías. Por otra parte, cuerdas que no terminan en la misma brana poseen una longitud mínima dada por la distancia entre branas y por lo tanto describen en general modos de excitación masivos. Existen  $N^2 - N$  posibles configuraciones para estas cuerdas, dependiendo de en cuáles branas tienen sus extremos.

En el límite cuando las  $N$  branas tienden a ser coincidentes, todos los estados serían no masivos y la simetría de norma  $U(1)^N$  se ensancharía al grupo  $U(N)$ . Sin embargo, el factor  $U(1) = U(N)/SU(N)$  corresponde a la posición del centro de masa de las branas y se desacopla de los grados de libertad internos del sistema. Por tanto, este factor puede ser ignorado al considerar la dinámica, dejando solo viva a la simetría  $SU(N)$  [19]. Las configuraciones descritas se muestran de manera esquemática en la figura 1.1.

En el límite de bajas energías, el volumen de mundo de  $N$  D3-branas coincidentes está descrito por la teoría de Super Yang-Mills, con  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías y grupo de norma  $SU(N)$ . La teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  en  $3 + 1$  dimensiones (la dimensión del volumen de mundo de las D3-branas) presenta además un grupo de simetría interna *global*  $SU(4)_R \sim SO(6)_R$ , la cual es conocida como simetría R. Su contenido de campos consiste en un vector  $A_\mu$ , seis escalares  $\Phi^i$  ( $i = 1..,6$ ), y cuatro fermiones de Weyl  $\lambda_\alpha^i$ ,  $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^{\bar{i}}$  ( $i, \bar{i} = 1, 2, 3, 4$ ). Bajo la simetría  $SU(4)_R$ , el vector  $A_\mu$  es un singlete, los escalares  $\Phi^i$  están en la representación **6**, mientras que los fermiones  $\lambda_\alpha^i$  y  $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^{\bar{i}}$  están en las representaciones **4** y  $\bar{\mathbf{4}}$  respectivamente. El lagrangiano de SYM [20] contiene dos

parámetros libres  $g_{YM}$  y  $\theta_{YM}$ ,

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu \Phi^i D^\mu \Phi^i \right. \\ \left. + \sum_{a,b,i} g_{YM} C_i^{ab} \lambda_a [\Phi^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} g_{YM} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [\Phi^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,j} [\Phi^i, \Phi^j]^2 \right\}. \quad (1.25)$$

Las constantes  $C_i^{ab}$  y  $\bar{C}_{iab}$  están relacionadas con las correspondientes matrices de Dirac para  $SU(4)_R \sim SO(6)_R$ .

Clásicamente,  $\mathcal{L}$  es invariante de escala. Esto se puede ver al asignarle las dimensiones de masa estándar a los campos y a los acoplamientos

$$[A_\mu] = [\Phi^i] = 1, \quad [\lambda_a] = \frac{3}{2}, \quad [g_{YM}] = [\theta_{YM}] = 0. \quad (1.26)$$

Todos los términos en el lagrangiano son de dimensión 4, y de ahí proviene la invariancia de escala. Además, debido a que SYM es una teoría de campos relativista, la invariancia de escala y la invariancia de Poincaré se combinan para formar la invariancia conforme que tiene grupo de simetría  $SO(4,2) \sim SU(2,2)$ . La inclusión de las  $\mathcal{N} = 4$  supersimetrías y la simetría R, agranda aún mas el grupo de simetría al supergrupo  $SU(2,2|4)$  y esto se conoce como simetría superconforme.

Sorprendentemente, a nivel cuántico la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  no exhibe divergencias ultravioletas en sus funciones de correlación. Como resultado, la función  $\beta$  correspondiente se anula idénticamente (debido a que no se introduce ninguna dependencia respecto a alguna escala característica en el proceso de renormalización). La teoría es entonces invariante de escala incluso a nivel cuántico y preserva al grupo superconforme completo.

Por otra parte, además de este conjunto de simetrías globales, la teoría presenta una simetría discreta que relaciona los regímenes de acoplamiento fuerte y débil. Esta simetría actúa sobre el parámetro

$$\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g_{YM}^2}, \quad (1.27)$$

el cual combina la constante de acoplamiento  $g_{YM}$  con el ángulo de instantón  $\theta_{YM}$ . Tomando en cuenta tanto translaciones  $\tau \rightarrow \tau + 1$  como inversiones  $\tau \rightarrow -1/\tau$  se obtiene el grupo de simetría de la llamada dualidad S,  $SL(2, \mathbf{Z})$ , que actúa de acuerdo con

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}. \quad (1.28)$$

Todos los campos de la teoría están en la representación adjunta, es decir en la representación que transforma como los elementos del grupo de Lie  $SU(N)$ . En otras palabras, estos campos están descritos por matrices  $N \times N$ .

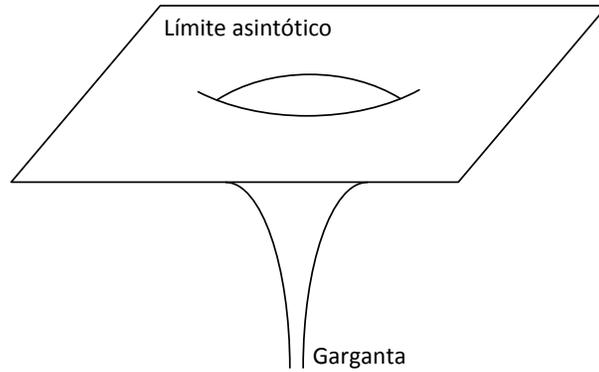


Figura 1.2: Geometría inducida por una pila de D3-branas

### 1.2.2. 3-branas negras en supergravedad tipo IIB y el límite de Maldacena

El mismo sistema que analizamos en el apartado anterior puede ser descrito como una 3-brana negra, un objeto solitónico que es solución de las ecuaciones de movimiento clásicas de supergravedad IIB, y para esto tomamos el caso particular correspondiente a  $d = 3$  del análisis realizado en la sección 1.1.2. Según este análisis, para una pila de  $N$  D3-branas coincidentes, la solución de supergravedad está caracterizada por un dilatón constante  $\phi$ , cuyo valor esperado está relacionado con la constante de acoplamiento de cuerdas  $g_s = e^{\langle\phi\rangle}$ , un axión constante  $\chi$  y  $N$  unidades de flujo  $F_5$ . La métrica resultante se puede leer directamente de (1.21) y para el caso  $d = 3$  se obtiene

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} [dr^2 + r^2 d\Omega_5^2]. \quad (1.29)$$

En esta solución,  $L$  es la única escala de longitud característica y según (1.23) está dada por

$$L^4 = 4\pi g_s N l_s^2. \quad (1.30)$$

Una característica fundamental de la métrica (1.29) es que la componente  $g_{tt}$  no es constante. Ésto implica una relación no trivial entre mediciones hechas por observadores estáticos en distintas regiones del espaciotiempo. En particular, la energía  $E_r$  de un objeto medida por un observador en cierta posición  $r$  y la energía  $E$  de ese mismo objeto pero medida por un observador en infinito se relaciona a través de la siguiente expresión:

$$E = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-\frac{1}{4}} E_r. \quad (1.31)$$

Esto quiere decir que si llevamos un objeto muy cerca de  $r = 0$ , el observador en el infinito medirá energías cada vez más pequeñas, es decir, experimentará un corrimiento al rojo.

Para estudiar esta geometría más de cerca, consideramos sus límites en dos regímenes (ver figura 1.2). Cuando  $r \gg L$ , la métrica se aproxima asintóticamente a Minkowski en diez dimensiones. Cuando  $r < L$ , la geometría es descrita por una “garganta” con radio de curvatura  $L$  y en principio parecería singular en el límite cercano al horizonte  $r \ll L$ . Las excitaciones de la 3-brana negra corresponden solamente a cuerdas cerradas, ubicadas ya sea a distancias radiales grandes, es decir, en la región asintóticamente plana, o en distancias radiales pequeñas cerca a la garganta. Tal y como hicimos en la descripción de este sistema a través de D3-branas sobre un fondo plano, tomemos el límite de bajas energías y analicemos qué sucede desde el punto de vista de un observador en infinito.

El límite de bajas energías, o límite de Maldacena, corresponde a mantener fijos  $g_s$  y  $N$  así como también todas las escalas de longitud físicas, mientras que  $l_s \rightarrow 0$  [2]. En este límite, en la región lejana al horizonte lo que obtenemos son sólo modos de supergravedad que se propagan libremente, mientras que en la región cercana a éste, como consecuencia de la expresión (1.31) podemos tener cuerdas con energías arbitrariamente grandes. Debido a la existencia de una barrera gravitacional, los modos de las dos regiones no pueden interactuar [17], por lo que nuevamente nuestro sistema se desacopla en dos partes, supergravedad libre en el fondo plano ( $r \gg 0$ ) y teoría de cuerdas tipo IIB en la región cercana al horizonte ( $r \ll L$ ). Bajo una redefinición de la coordenada radial

$$z \equiv L^2/r, \quad (1.32)$$

y tomando el límite de  $z$  grande, nos quedamos sólo con la región cuya geometría es descrita por la garganta, obteniendo

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + L^2 d\Omega_5^2, \quad (1.33)$$

que es el producto directo entre un espacio anti de Sitter en cinco dimensiones escrito en coordenadas de Poincaré ( $L^2/z^2$ )( $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2$ ) y una cinco esfera  $L^2 d\Omega_5^2$ . Es decir, la geometría cerca a la pila de branas ( $r \rightarrow 0$  o  $z \rightarrow \infty$ ) se puede resumir como el producto  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ , donde ambas componentes presentan el mismo radio  $L$ .

Hemos presentado dos maneras equivalentes de describir el mismo sistema físico: una pila de  $N$  D3-branas. En ambos casos obtuvimos en el límite de bajas energías, supergravedad sobre un fondo plano más una segunda teoría, y por lo tanto es inevitable identificar las dos teorías que aparecen en ambas descripciones. La evidencia que se ha acumulado a través de los últimos 12 años da un firme soporte a la conjetura propuesta por Maldacena [2]:

La teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  con grupo de norma  $SU(N)$  es dual a la teoría de cuerdas tipo IIB en un fondo  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$  con  $N$  unidades de flujo  $F_5$ .

Para empezar a convencernos de la veracidad de este sorprendente enunciado, miremos

de cerca cómo encajan las simetrías de los dos lados de la conjetura de Maldacena o correspondencia AdS/CFT. Por una parte, tenemos que el grupo de isometrías del espacio  $\text{AdS}_5 \times S^5$  está dado por  $SO(4, 2) \times SO(6)$ . Además, si tenemos en cuenta la parte fermiónica, el grupo completo supersimétrico de isometrías se extiende a  $SU(2, 2|4)$ . Notar que este es exactamente el mismo grupo de simetrías globales del límite de bajas energías del sector de cuerdas abiertas (es decir, la teoría SYM). La simetría  $SL(2, \mathbf{Z})$  que relaciona el régimen de acoplamiento fuerte con el débil en SYM se manifiesta al identificar  $g_{YM}^2 = 4\pi g_s \equiv 4\pi e^{\langle\phi\rangle}$  y  $\theta_{YM} = 2\pi \langle\chi\rangle$ , donde  $\phi$  es el dilatón y  $\chi$  es el escalar R-R, o axión. El sector de cuerdas cerradas presenta precisamente la misma simetría  $SL(2, \mathbf{Z})$  que actúa en particular sobre los grados de libertad del dilatón y del axión.

Ahora, teniendo en cuenta la expresión (1.30) y la relación entre la constante de acoplamiento de cuerdas con la constante de acoplamiento de la teoría de norma, podemos escribir

$$L^4 = g_{YM}^2 N l_s^4 = \lambda l_s^4, \quad (1.34)$$

donde  $\lambda \equiv g_{YM}^2 N$  es la llamada constante de 't Hooft, que mide la intensidad de las interacciones en la teoría de norma. Por lo tanto, para que los modos excitados de cuerdas no sean importantes,  $L \gg l_s$ , lo cual se puede traducir al lenguaje de la teoría de norma como  $\lambda \gg 1$ . Se observa que la región donde el límite de bajas energías de supergravedad es válido es exactamente donde la teoría de norma es no perturbativa. Esta es una de las observaciones más poderosas de la dualidad, pues a partir de esto nos va a permitir estudiar teorías de norma fuertemente acopladas en términos de supergravedad a bajas energías.

### 1.2.3. Diccionario de la correspondencia AdS/CFT

En el apartado anterior se presentó el enunciado básico de la correspondencia o dualidad AdS/CFT conjeturada por Maldacena. Es importante enfatizar que, si bien los regímenes perturbativos son mutuamente excluyentes, las dos teorías existen para cualquier valor de  $\lambda$ , y es precisamente esta la razón por la que podemos hablar de una dualidad, es decir, de una equivalencia total entre ambas teorías. En otras palabras, lo que la dualidad establece es que estas dos teorías son sólo dos lenguajes diferentes para hablar de un mismo sistema físico. Por supuesto, el hecho de que siempre alguna de las dos está fuertemente acoplada hace muy difícil demostrar rigurosamente la dualidad, pero al mismo tiempo la vuelve extremadamente útil.

La posibilidad de obtener información sobre un sistema fuertemente acoplado a partir del estudio de una teoría completamente diferente, nos obliga a pensar en cómo interpretar dicha información. Tras el surgimiento de la correspondencia, mucha gente se ha dedicado a confeccionar un diccionario básico que relacione las dos teorías. En el presente apartado se discutirán algunos de los resultados más importantes.

Primero que todo, tengamos en mente que una teoría de campos conforme no posee ni estados asintóticos ni matriz  $S$ , luego los objetos naturales a considerar son las funciones de correlación de sus operadores invariantes de norma. En la correspondencia se encuentra que para cada campo  $\phi(x, z)$  en el bulto, existe un operador  $\mathcal{O}$  dual en la teoría de norma correspondiente. Por ejemplo, en SYM  $\mathcal{N} = 4$  es posible introducir una deformación mediante cierto operador marginal (básicamente el Lagrangiano de la teoría  $\mathcal{O} \sim \text{Tr } F^2$ ) cuyo efecto es cambiar el valor de la constante de acoplamiento. Pero, cambiar la constante de acoplamiento del lado de la teoría de norma equivale a cambiar la constante de acoplamiento de cuerdas ( $g_{YM}^2 = 4\pi g_s$ ), la cual está relacionada con el valor esperado del dilatón. Este valor esperado está fijado por las condiciones de frontera del dilatón en el infinito, y por tanto, cambiar la constante de acoplamiento de la teoría de norma equivale a cambiar el valor en la frontera del dilatón.

Esquemáticamente,  $\phi_0(x) = \phi(x, z)|_{z=0}$  actúa como una fuente que se acopla al operador correspondiente  $\mathcal{O}$ . Según [3, 4], se tiene que

$$\mathcal{Z}_{\text{cuerdas}}[\phi_0] = \left\langle e^{-\int d^4x \phi_0(x) \mathcal{O}(x)} \right\rangle_{\text{CFT}}, \quad (1.35)$$

donde el lado izquierdo es la función de partición de cuerdas con condición de frontera  $\phi = \phi_0$  en  $z = 0$  y el lado derecho es el funcional generatriz de funciones de correlación del lado de la teoría de campos. Entonces, a partir de (1.35), se puede leer la relación entre el campo dilatónico y el operador marginal en cuestión. Como se mencionó, para cada campo en el bulto se obtiene un operador dual en la teoría de norma, por ejemplo, el tensor de energía momento en la teoría de norma corresponde directamente a la métrica en el espacio curvo, etc.

Trabajaremos exclusivamente a bajas energías y en la aproximación de punto silla para la función de partición de cuerdas, en la cual esta relación se convierte en

$$S_{\text{on-shell}}[\phi_0] = -W_{\text{CFT}}[\phi_0], \quad (1.36)$$

donde  $S_{\text{on-shell}}[\phi_0]$  es la acción de supergravedad en la capa de masa y  $W_{\text{CFT}}[\phi_0]$  es el funcional generatriz de funciones conectadas en SYM. Las funciones de correlación del operador  $\mathcal{O}$  se pueden calcular ahora diferenciando respecto a la fuente,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(x) \rangle &= \left. \frac{\delta S_{\text{on-shell}}}{\delta \phi_0(x)} \right|_{\phi_0=0}, \\ \langle \mathcal{O}(x_1) \mathcal{O}(x_2) \rangle &= - \left. \frac{\delta^2 S_{\text{on-shell}}}{\delta \phi_0(x_1) \delta \phi_0(x_2)} \right|_{\phi_0=0}, \\ \langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_n) \rangle &= (-1)^{n+1} \left. \frac{\delta^3 S_{\text{on-shell}}}{\delta \phi_0(x_1) \cdots \delta \phi_0(x_n)} \right|_{\phi_0=0}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

etc.

Ahora, las funciones de correlación del lado de la teoría de norma divergen y el lado derecho de (1.36) no está bien definido sin renormalización. De manera similar, el lado

izquierdo también es divergente debido al volumen infinito del espaciotiempo, razón por la cual es necesario renormalizar apropiadamente.

Otro fenómeno importante que está presente en la dualidad es la llamada conexión UV-IR [21], la cual establece que la coordenada radial  $z$  del espacio AdS está identificada con una escala energética del lado de la teoría norma, de tal forma que valores grandes de  $z$  corresponden a energías bajas del lado de la teoría de norma y valores pequeños de  $z$ , cercanos a la frontera de AdS, corresponden a energías altas. Esta propiedad va a jugar un papel importante en el análisis de renormalización holográfica, pues nos va a permitir estudiar las divergencias UV de la teoría de norma mediante un análisis de los campos en el bulto en una expansión asintótica, cerca a la frontera. Este tema merece una atención más detallada, razón por la cuál se discutirá más de cerca en la sección 1.3.

#### 1.2.4. Agujeros negros vs. temperatura finita

Confeccionar y mejorar el diccionario de la dualidad solo es una parte del trabajo realizado en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. Otra dirección de gran importancia es encontrar duales geométricos a teorías de norma que cada vez se parezcan más a QCD. Como vimos, la teoría de cuerdas tipo IIB en  $\text{AdS}_5 \times S^5$  y SYM  $\mathcal{N} = 4$  es el ejemplo mejor entendido de la dualidad pero, por desgracia, las características de esta teoría de norma son muy distintas a las de QCD. Otros modelos sobre espaciotiempos de fondo más complicados como [22, 23, 24, 25, 26] presentan duales gravitacionales de teorías de norma que incorporan confinamiento, rompimiento de simetría quiral, menos supersimetría, etc.

Otra alternativa para acercarnos un poco más al mundo real consiste en encender una temperatura del lado de la teoría de norma, lo cual resulta útil para estudiar sistemas análogos al plasma de quarks y gluones, producido recientemente en aceleradores de partículas como el Colisionador de Iones Pesados Relativistas (RHIC) y el Gran Colisionador de Hadrones (LHC). Miraremos esto en más detalle en el capítulo 4. Ahora, introducir una temperatura  $T$  a la teoría de norma significa añadir energía al sistema sin modificar otros números cuánticos, de forma que la teoría en sí no se modifica pero el estado particular es diferente. Para lograr esto utilizando la correspondencia AdS/CFT, necesitamos regresar nuevamente al sistema de  $N$  D3-branas como solución solitónica a las ecuaciones de supergravedad. En la deducción original de la dualidad de Maldacena únicamente se consideró el caso de la 3-brana negra extremal,  $M = N/(2\pi)^3 g_s l_s^4$ , sin embargo, si se pone más energía al sistema dejando fija su carga lo que obtenemos es una 3-brana negra no extremal. Nuevamente podemos tomar el límite de Maldacena de dicho sistema y deducimos así que el dual gravitacional de la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita se puede obtener al considerar el límite cerca al horizonte de la brana

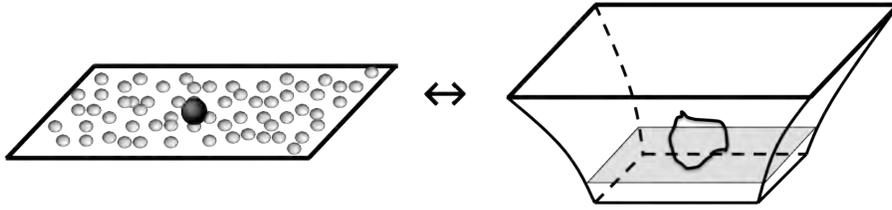


Figura 1.3: La correspondencia AdS/CFT a temperatura finita

negra. La geometría resultante,  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times S^5$ , está dada por la métrica

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left( -h dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{h} \right) + L^2 d\Omega_5^2, \quad (1.38)$$

donde

$$h = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}, \quad \frac{R^4}{l_s^4} = g_{YM}^2 N \equiv \lambda, \quad z_h = \frac{1}{\pi T}. \quad (1.39)$$

En la figura 1.3 vemos una representación esquemática de la correspondencia AdS/CFT en el caso de temperatura finita. El comportamiento asintótico de la métrica revela que la física de la teoría de norma en el UV no se ve afectada por la presencia de la temperatura. Sin embargo, la física en el IR se modifica drásticamente. La métrica (1.38) tiene un horizonte regular con área finita en  $z = z_h$  y temperatura de Hawking  $T$ . Sorprendentemente esta temperatura así como las propiedades termodinámicas del agujero negro van a ser las mismas en el lado de la teoría de norma. Discutiremos ahora la evidencia que da soporte a esta afirmación.

La densidad de entropía de Bekenstein-Hawking [27, 28] del agujero negro es proporcional al área del horizonte de eventos,

$$s_{BH} = \frac{A_h}{4G} = \frac{\pi^2}{2} N^2 T^3. \quad (1.40)$$

De aquí vale la pena resaltar dos cosas. Primero, que la entropía es proporcional a  $N^2$  lo cual es una señal de desconfinamiento. Y segundo, que el valor obtenido es 3/4 del valor predicho por la ley de Stefan-Boltzmann para un *gas libre* de SYM  $\mathcal{N} = 4$ . Este último hecho no es un error de la correspondencia AdS/CFT; por el contrario, se interpreta como una predicción en el límite de acoplamiento fuerte. En efecto, se tiene que

$$s_{SYM} = f(\lambda) s_{SB}, \quad (1.41)$$

donde  $f(\lambda)$  es una función continua tal que  $f(0) = 1$  y  $f(\infty) = 3/4$ . Cálculos perturbativos en SYM débilmente acoplado [29, 30] y correcciones del lado de teoría de cuerdas en acoplamiento fuerte [31] son consistentes con este hecho. Resultados recientes obtenidos mediante QCD en la red estipulan que, a temperaturas que se encuentran en el régimen de desconfinamiento, pero aún cuando el plasma está fuertemente acoplado,

se tiene que  $s_{QCD} \simeq (4/5)s_{SB}$  [32]. Notar que  $4/5$  se acerca más a  $3/4$  que a  $1$ . El resultado obtenido para SYM sugiere que el valor obtenido numéricamente para QCD es una huella de que los plasmas fuertemente acoplados exhiben propiedades similares independientemente de la teoría subyacente.

Por otra parte, para ver de cerca las propiedades termodinámicas de la teoría de norma, necesitamos determinar el tensor energía momento respectivo. El valor esperado del tensor energía momento se puede calcular mediante la correspondencia AdS/CFT siguiendo la receta estándar para funciones de correlación. En el caso de vacío se obtiene  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$  que es lo esperado para el estado base de SYM, dado que este es invariante de Poincaré. A temperatura finita se obtiene

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{\pi^2 N^2 T^4}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Este es precisamente el tensor energía momento para un fluido conforme con densidad de energía  $\varepsilon = (3\pi^2/8)N^2T^4$ . El factor  $T^4$  es el esperado según la ley de Stefan-Boltzmann, mientras que el  $N^2$  refleja el número de grados de libertad en el plasma. Notar además que la ecuación de estado  $\varepsilon = 3p$  refleja el hecho de que la teoría es conforme, razón por la cual la traza del tensor energía momento es cero. Las cantidades térmicas satisfacen la primera ley de la termodinámica,  $d\varepsilon = Tds$ , la cual aplica tanto para la termodinámica del agujero negro como para la termodinámica de la teoría de norma.

Un paso más adelante consiste en perturbar la métrica (1.38) y estudiar fluctuaciones por encima de la misma para determinar propiedades hidrodinámicas de la teoría de norma. Los pioneros en este tipo de trabajos fueron Policastro, Son y Starinets [33, 34], quienes calcularon los coeficientes de transporte de la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura finita, a partir de las funciones de correlación del tensor energía momento y la conocida fórmula de Kubo [35]. Para la viscosidad de corte, por ejemplo, esta fórmula está dada por

$$\eta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[ \int d^4x e^{i\omega t} \theta(t) \langle [T_{\mu\nu}(x)T_{\mu\nu}(0)] \rangle \right]. \quad (1.43)$$

Esto generó una intensa actividad en torno al tema, debido a que se pudieron determinar ciertas propiedades “universales” para un conjunto amplio de teorías de norma fuertemente acopladas. Un resultado de particular importancia fue la razón entre la viscosidad de corte y la densidad de entropía,

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}, \quad (1.44)$$

válido para todas las teorías de norma con un dual gravitacional, en el límite  $\lambda \rightarrow \infty$ . Este cálculo resulta sorprendente, si tenemos en cuenta que es el resultado teórico que más se acerca a los datos experimentales del plasma de quarks y gluones producido en

el RHIC, por encima de cálculos perturbativos, e incluso de QCD en la red (que resulta de poca utilidad para determinar propiedades dinámicas tales como los coeficientes de transporte). En [36] se puede encontrar una revisión de estos resultados así como de los desarrollos subsecuentes.

### 1.2.5. Materia en la representación fundamental

Por ahora hemos estudiado la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  a partir de su dual gravitacional. Sin embargo, SYM  $\mathcal{N} = 4$  posee todos sus campos en la representación adjunta. Esta teoría no tiene quarks dinámicos y por tanto es necesario introducirlos a mano. La pregunta que sigue a continuación es ¿cómo es posible hacer esto utilizando el lenguaje de la correspondencia? Para responder a esta pregunta, resulta conveniente regresar de nuevo algunos pasos atrás y empezar con la pila de  $N$  D3-branas sobre el fondo plano. Los modos más bajos de las cuerdas abiertas que se extienden entre ellas son los que dan lugar a nuestra teoría de Super Yang-Mills con grupo de norma  $SU(N)$ .

Ahora, siguiendo a [37], agregamos a este sistema una pila con  $N_f$  D7-branas, donde  $N_f \ll N$ ; a estas branas las denominaremos como branas de sabor. Siendo más precisos, el sistema D3/D7 con el que vamos a trabajar es el siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 \text{D3:} & \times & \times & \times & \times & & & & & & \\
 \text{D7:} & \times & & 
 \end{array}$$

donde los números denotan las direcciones espaciotemporales y las “ $\times$ ” marcan las direcciones en las que se extienden las D-branas. Así, además del sector que ya se conocía y que contiene modos en la representación adjunta de  $SU(N)$ , ahora tenemos cuerdas con ambos extremos en las D7-branas y cuerdas que se extienden entre las D3 y las D7, y por tanto el espectro de la teoría se modifica. La inclusión de las D7-branas tiene al menos dos consecuencias muy importantes. Primero, los modos más bajos de las cuerdas abiertas con un extremo en las D3-branas y el otro en las D7-branas dan lugar a  $N_f$  hipermultipletes que transforman en la representación *fundamental* del grupo de norma  $SU(N)$ . Estos son los grados de libertad que denominaremos “quarks”, a pesar de que incluyen campos con espín 1/2 y con espín 0. Además, la inclusión de este nuevo sector rompe la supersimetría de la teoría a solo  $\mathcal{N} = 2$ .

Regresemos ahora al escenario de la correspondencia AdS/CFT y veamos qué nos queda en el límite de Maldacena. Debido a que  $N \gg N_f$ , podemos despreciar el efecto gravitacional de las D7-branas; en la teoría de norma esto corresponde a trabajar en la aproximación “apagada”, es decir, a despreciar contribuciones de lazos de los quarks. Entonces, reemplazando las D3-branas por su solución de brana negra correspondiente, nos queda que a bajas energías, con  $g_s N \gg 1$ , se obtienen  $N_f$  D7-branas sobre un fondo  $\text{AdS}_5 \times S^5$  o  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times S^5$  en el caso de temperatura finita. Las D7-branas

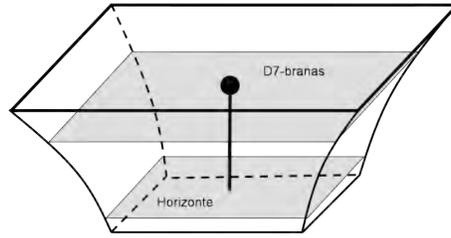


Figura 1.4: Introducción de quarks desde el punto de vista gravitacional.

cubren las cuatro direcciones de la teoría de norma  $(t, \vec{x})$ . Además, están enrolladas en una  $S^3$  a un ángulo polar variable dentro de la  $S^5$ , y se extienden a lo largo de la dirección radial en AdS, desde la frontera en  $z = 0$ , hasta una posición  $z = z_m$ , donde las branas “terminan” o, más precisamente, donde la  $S^3$  colapsa a un punto en el polo de la  $S^5$ . Un punto importante es que, aún después de considerar el límite, las cuerdas abiertas con un extremo en las D7-branas y el otro ahora en el horizonte de AdS, representan quarks, mientras que los modos más bajos de las cuerdas con ambos extremos en las D7-branas corresponden a estados ligados de quarks y antiquarks, es decir, mesones [38].

En los últimos años se ha dedicado un esfuerzo considerable por aplicar la correspondencia AdS/CFT en el estudio de pérdida de energía de quarks en teorías de norma fuertemente acopladas. La motivación principal es entender algunas propiedades e ideas generales que puedan ser aplicadas para entender la física del plasma de quarks y gluones producido en el RHIC y en el LHC, razón por la cual los estudios se han centrado principalmente en el caso de temperatura finita. En este caso, un quark que se mueve en un medio pierde energía como resultado de su interacción con las demás partículas del baño térmico. En el contexto de la correspondencia AdS/CFT, su estudio fue estimulado por los trabajos pioneros [39, 40, 41, 42], los cuales fueron motivados por el éxito de los resultados previos relacionados con el cálculo de coeficientes de transporte en hidrodinámica. De hecho, se ha argumentado que al menos en acoplamiento débil, existe una relación directa entre viscosidad y pérdida de energía [43].

En el caso de vacío se presenta otro fenómeno interesante. Cuando un quark se acelera, este emite radiación cromoelectrónica; es de esperarse que esta radiación amortigüe el movimiento del quark, incluso a nivel clásico, induciendo también una pérdida de energía. Este fenómeno ha sido estudiado recientemente por medio de la dualidad en [44, 45, 46], basándose en el trabajo previo [47]. Por otra parte, si el sistema está cuantizado, se espera además que se presenten fluctuaciones estocásticas en la trayectoria del quark, debido a la emisión de radiación. En el apartado 1.2.6 revisaremos entonces algunos antecedentes que nos permitirán estudiar dichas fluctuaciones más adelante.

### 1.2.6. Quarks en el vacío de SYM $\mathcal{N} = 4$

Como acabamos de ver, un quark aislado en el vacío de SYM  $\mathcal{N} = 4$  es dual a una cuerda abierta que se extiende radialmente desde las D7-branas hasta el horizonte de AdS ubicado en  $z \rightarrow \infty$ . Para mayor precisión, el extremo de la cuerda que termina en las D7-branas es dual al quark en sí, mientras que el resto de la cuerda codifica información sobre el perfil de los campos gluónicos [38]. Cabe mencionar que en este contexto la cuerda está descrita en un lenguaje de primera cuantización y, mientras sea lo suficientemente pesada, podemos tratarla semiclásicamente. En el lenguaje de la teoría de norma estamos entonces acoplando un quark, descrito en términos de primera cuantización, a los campos de la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$ ; la integral de camino sobre los campos fuertemente acoplados se realiza de manera exacta, resultado que está codificado en el fondo AdS, mientras que la integral sobre la trayectoria del quark se realiza en la aproximación de punto silla.

De manera consistente con las ecuaciones de movimiento, podemos asumir que la cuerda se ubica en el polo<sup>1</sup> de la  $S^5$ , de manera que las componentes angulares de la métrica no van a jugar ningún papel. El extremo inferior de la cuerda se ubica entonces necesariamente a la altura  $z = z_m$ . En particular, una cuerda estática y puramente radial corresponde a un quark estático. Al calcular la energía de la cuerda, se encuentra que  $z_m$  está relacionada con la masa  $m$  del quark a través de [39]

$$z_m = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m}. \quad (1.45)$$

De hecho, la relación entre  $m$  y  $z_m$  se modifica en el caso de temperatura finita [39], pero esta modificación solo afecta en términos de orden superior a  $\mathcal{O}((\sqrt{\lambda}T/m)^4)$  y resulta despreciable en el límite  $m \rightarrow \infty$ .

Por otra parte, debemos tener en cuenta que el quark descrito por esta cuerda no es un quark “desnudo” sino “compuesto” o “vestido”. Esto se puede ver más claro a partir del cálculo del valor esperado del campo gluónico alrededor de un quark estático localizado en el origen<sup>2</sup> [48],

$$\frac{1}{4g_{YM}^2} \langle \text{Tr } F^2(x) \rangle = \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi^2 |\vec{x}|^4} \left[ 1 - \frac{1 + \frac{5}{2} \left( \frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^2}{\left( 1 + \left( \frac{2\pi m |\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^2 \right)^{5/2}} \right]. \quad (1.46)$$

Para  $m \rightarrow \infty$ , o  $z_m \rightarrow 0$ , este justamente es el campo Coulombiano esperado por invariancia conforme para una partícula puntual. Para  $m$  finita, el perfil es aún Coulombiano

<sup>1</sup>En este punto la  $S^3 \subset S^5$ , en la cual están enrolladas las D7-branas, colapsa a un punto.

<sup>2</sup>Más precisamente, el operador en el lado izquierdo de (1.46), que es dual al campo del dilatón, incluye no sólo el término estándar de Yang-Mills sino que también contribuciones escalares y fermiónicas [50], los cuales no escribimos por simplicidad.

lejos del origen, pero se vuelve no singular en la ubicación del quark,

$$\frac{1}{4g_{YM}^2} \langle \text{Tr} F^2(x) \rangle = \frac{\sqrt{\lambda}}{128\pi^2} \left[ 15 \left( \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} \right)^4 - \frac{35}{|\vec{x}|^4} \left( \frac{2\pi m|\vec{x}|}{\sqrt{\lambda}} \right)^6 + \dots \right], \quad (1.47)$$

para  $|\vec{x}| < \sqrt{\lambda}/(2\pi m)$ . Como se puede ver en estas ecuaciones, la longitud característica de esta distribución de carga no abeliana está dada precisamente por  $z_m$  definida en (1.45). Esta longitud define entonces el tamaño de la nube gluónica que rodea el quark, o en otras palabras, el análogo a la longitud de onda de Compton para nuestra fuente no abeliana.

Es interesante notar que la cuerda puede ser vista de manera alternativa como una cuerda de Born-Infeld, es decir, como un solitón de los campos en la D7-brana [49]. Se sabe que pequeñas fluctuaciones de estos campos, correspondientes a cuerdas abiertas microscópicas, son duales a mesones; entonces, el quark compuesto que representa nuestra cuerda puede ser pensado como un solitón construido por un número grande de mesones alineados [51]. La nube que rodea al quark se puede entender por tanto como una nube “mesónica”, en lugar de “gluónica”. De hecho, los mesones son los estados más ligeros en el espectro la teoría de norma, con masas del orden  $m_{\text{mes}} \equiv 1/z_m = 2\pi m/\sqrt{\lambda} \ll m$  [52], y factores de forma con tamaño impuesto por  $z_m$  [53].

Entonces, para resumir, podemos llamar a  $z_m$  la longitud de onda de Compton del quark, dado que este es el tamaño de la nube de partículas virtuales que rodean el quark, pero debemos tener en cuenta que está dado por  $1/m_{\text{mes}}$  y no por  $1/m$ , y en este sentido también podemos decir que es la longitud de onda de Compton de los mesones.

Como es usual, la dinámica de la cuerda está descrita por la acción de Nambu-Goto (1.1). Podemos aplicar una fuerza externa  $\vec{F}$  en la punta de la cuerda encendiendo un campo eléctrico  $F_{0i} = F_i$  en las D7-branas. Esto equivale a añadir a la acción de Nambu-Goto el término de acoplamiento mínimo

$$S_F = \int d\tau A_\mu(X(\tau, z_m)) \partial_\tau X^\mu(\tau, z_m),$$

que en términos de la línea de mundo del quark es equivalente a

$$S_F = \int d\tau A_\mu(x(\tau)) \partial_\tau x^\mu(\tau). \quad (1.48)$$

La variación de la acción  $S_{\text{NG}} + S_F$  implica que los puntos en el interior de la cuerda siguen las ecuaciones de movimiento usuales de Nambu-Goto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial X^\mu} - \frac{\partial}{\partial \sigma^a} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial (\partial_a X^\mu)} = 0, \quad (1.49)$$

con suma implícita en las coordenadas de la hoja de mundo. Además, se obtiene una condición de frontera forzada para el extremo de la cuerda [54]

$$\Pi_\mu^z(\tau)|_{z=z_m} = \mathcal{F}_\mu(\tau) \quad \forall \tau, \quad (1.50)$$

donde

$$\Pi_\mu^z \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial(\partial_z X^\mu)} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{(\partial_\tau X)^2 \partial_z X_\mu - (\partial_\tau X \cdot \partial_z X) \partial_\tau X_\mu}{z^2 \sqrt{(\partial_\tau X \cdot \partial_z X)^2 - (\partial_\tau X)^2 (1 + (\partial_z X)^2)}} \right) \quad (1.51)$$

es la corriente de Noether en la hoja de mundo asociada con el momento espaciotemporal y donde hemos reconocido  $\mathcal{F}_\mu = -F_{\nu\mu} \partial_\tau x^\nu = (-\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{F})$  como la fuerza de Lorentz.

La ecuación (1.49) es una ecuación diferencial parcial de segundo orden altamente no lineal. A pesar de esto, Mikhailov [47] logró encontrar una solución exacta, dada una trayectoria arbitraria tipo tiempo para el extremo de la cuerda. Desde luego, especificar la trayectoria del extremo no determina de manera única la forma en que el resto de la cuerda evoluciona, al igual que al especificar la trayectoria del quark no se determina de manera única el perfil de los campos gluónicos. En ambos lados de la correspondencia, dada una línea de mundo que especifique la trayectoria del extremo de la cuerda o del quark, existe un número infinito de configuraciones que difieren en las condiciones de frontera de la cuerda o de las ondas gluónicas en el infinito (o equivalentemente, en las correspondientes condiciones iniciales). La solución de Mikhailov es una solución específica de las ecuaciones de movimiento con condiciones de frontera *retardadas*, en el sentido de que una configuración dada para un tiempo específico sólo depende de la configuración en tiempos anteriores. Afortunadamente, esta solución es la que captura la física de interés, pues en este caso las ondas gluónicas se propagan desde el quark hasta el infinito.

Mikhailov trabajó con un quark infinitamente pesado; su solución, parametrizada por el tiempo retardado  $t_{ret}$ , está dada por

$$t(t_{ret}, z) = \frac{z}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + t_{ret}, \quad (1.52)$$

$$\vec{X}(t_{ret}, z) = \frac{\vec{v}z}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + \vec{x}, \quad (1.53)$$

con  $\vec{x} = \vec{x}(t_{ret})$  y  $\vec{v} = \vec{v}(t_{ret}) \equiv d\vec{x}(t_{ret})/dt_{ret}$ . Como vemos, en  $z = 0$  se obtiene que  $t = t_{ret}$  y  $\vec{X} = \vec{x}(t_{ret})$ , lo cual nos indica que  $\vec{x}(t_{ret})$  define la trayectoria del quark. Esto se puede reescribir de una forma más compacta como se muestra a continuación:

$$X^\mu(\tau, z) = z \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} + x^\mu(\tau), \quad (1.54)$$

donde<sup>3</sup>  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ,  $x^\mu(\tau)$  es la línea de mundo del extremo de la cuerda que se mueve en la frontera de AdS y  $\tau$  es el tiempo propio definido a través de  $\eta_{\mu\nu}\partial_\tau x^\mu\partial_\tau x^\nu = -1$ .

Las implicaciones físicas de la solución de Mikhailov se obtienen al calcular la energía y el momento correspondientes. Para esto, se calculan primero las densidades de momento canónico definidas como

$$\Pi_\mu^a = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{NG}}}{\partial(\partial_a X^\mu)}. \quad (1.55)$$

La energía total del quark se obtiene integrando la densidad de energía  $\Pi_t^t$  a lo largo de la cuerda, la cual se extiende desde  $z_m = 0$  hasta  $z \rightarrow \infty$ , y como resultado se obtiene

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} \frac{1 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial z}\right)^2}}. \quad (1.56)$$

Realizando un cambio de variables, Mikhailov fue capaz de reexpresar esta energía como un funcional local de la trayectoria del quark

$$E(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - \vec{v}^2)^3} + E_q(\vec{v}(t)), \quad (1.57)$$

donde  $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt_{\text{ret}}$ . El segundo término de la ecuación aparece a partir de una derivada total que no fue escrita de manera explícita por Mikhailov. Esta fue calculada más adelante en [44] obteniendo como resultado

$$E_q(\vec{v}) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \frac{1}{z} \right) \Big|_{\infty}^{z_m=0} = \gamma m, \quad (1.58)$$

que corresponde a la relación de dispersión esperada para un quark por invariancia de Lorentz. De esta manera, la separación en la energía mostrada en (1.57) tiene un significado físico muy claro:  $E_q$  es la energía intrínseca del quark a un tiempo  $t$ , y la integral sobre  $t_{\text{ret}}$  codifica la energía perdida por el quark para todo tiempo anterior a  $t$ . Es sorprendente el hecho de que la tasa de pérdida de energía de un quark que se mueve en esta teoría no abeliana y fuertemente acoplada esté en completo acuerdo con la fórmula usual de Lienard que aparece en electrodinámica clásica.

Para el momento de la cuerda, de manera análoga se encuentra que

$$\vec{P}(t) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_{-\infty}^t dt_{\text{ret}} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v} \times \vec{a}]^2}{(1 - \vec{v}^2)^3} \vec{v} + \vec{p}_q(\vec{v}(t)), \quad (1.59)$$

<sup>3</sup>Originalmente Mikhailov trabajó sobre un fondo AdS<sub>5</sub>, pero su solución se puede generalizar a dimensiones arbitrarias.

donde el segundo término está dado por

$$\vec{p}_q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} \frac{1}{z} \right) \Big|_{\infty}^{z_m=0} = \gamma m \vec{v}, \quad (1.60)$$

y codifica el momento intrínseco del quark. Estas dos últimas ecuaciones también se pueden obtener a partir de (1.57) y (1.58) por invariancia de Lorentz.

La generalización para el caso de un quark con masa finita fue encontrada más adelante en [44, 45, 46]. En este caso se considera una cuerda que se extiende desde el infinito hasta las D7-branas, en  $z_m > 0$ . Parametrizando directamente en términos de la línea de mundo del extremo o del quark  $x^\mu(\tau)$  y la fuerza externa  $\mathcal{F}^\mu(\tau)$ , la solución obtenida fue

$$X^\mu(\tau, z) = \left( \frac{z - z_m}{\sqrt{1 - z_m^4 \mathcal{F}^2}} \right) \left( \frac{dx^\mu}{d\tau} - z_m^2 \mathcal{F}^\mu \right) + x^\mu(\tau), \quad (1.61)$$

donde  $\mathcal{F}^\mu = (2\pi/\sqrt{\lambda})\mathcal{F}^\mu$ . Notar que en el caso particular de masa infinita, o  $z_m = 0$ , (1.61) coincide con (1.54). Además, la condición de borde (1.50) implica en este caso que el quark obedece la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{m \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2}} \right) = \frac{\mathcal{F}^\mu - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} \mathcal{F}^2 \frac{dx^\mu}{d\tau}}{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2}. \quad (1.62)$$

Esta ecuación describe el movimiento de un quark “vestido” sujeto a una fuerza externa en el vacío de Super Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  e incorpora los efectos de amortiguamiento producidos por la interacción del quark con su propia nube gluónica. En el límite adecuado, para fuerzas externas que son pequeñas en comparación con la longitud de onda de Compton del quark, la expresión se reduce a la ecuación estándar de Abraham-Lorentz-Dirac para una partícula cargada relativista. Por lo tanto, puede ser considerada como una generalización no lineal de la misma, para nuestro caso no abeliano y fuertemente acoplado.

Su contenido físico se puede leer claramente cuando se reescribe en la forma

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} \equiv \frac{dp_q^\mu}{d\tau} + \frac{dP_{\text{rad}}^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu, \quad (1.63)$$

donde

$$p_q^\mu = \frac{m \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \mathcal{F}^\mu}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{4\pi^2 m^4} \mathcal{F}^2}} \quad (1.64)$$

es el momento intrínseco del quark, que satisface la relación de capa de masa  $p_q^2 = -m^2$ , y

$$\frac{dP_{\text{rad}}^\mu}{d\tau} = \frac{\sqrt{\lambda} \mathcal{F}^2}{2\pi m^2} \left( \frac{dx^\mu}{d\tau} - \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m^2} \mathcal{F}^\mu \right) \quad (1.65)$$

indica la tasa a la cual se pierde energía y momento por radiación, que en el límite de masa infinita se reduce a la fórmula de Lienard de la electrodinámica clásica.

## 1.3 Renormalización Holográfica

Hemos visto que la correspondencia AdS/CFT relaciona a la teoría de cuerdas tipo IIB en  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ , con dilatón constante y  $N$  unidades de flujo Ramond-Ramond, con una teoría de Super Yang-Mills  $\mathcal{N} = 4$  y grupo de norma  $SU(N)$ . En particular, la aproximación de supergravedad en el lado de la teoría de cuerdas corresponde al límite donde el número de colores  $N$  y la constante de 't Hooft  $\lambda$  son grandes del lado de la teoría de campos. Reemplazando la cinco esfera por alguna otra geometría es posible obtener duales de gravedad de teorías de campos con menos supersimetría.

Este es el ejemplo más estudiado y mejor conocido de una dualidad entre una teoría de norma y una teoría de gravedad, sin embargo, existen otros casos donde la teoría de cuerdas (o teoría M) definida en un espaciotiempo asintóticamente  $\text{AdS}_{d+1}$  por una variedad compacta  $X_{9-d}$  ( $X_{10-d}$ ) está relacionada con una teoría de campos en la frontera AdS. Ejemplos conocidos de la dualidad, para  $d = 2, 3, 6$ , involucran las geometrías cerca al horizonte y las teorías a bajas energías asociadas a múltiples D1/D5-, M2- y M5-branas, respectivamente [17].

Ahora, en teoría cuántica de campos, las funciones de correlación sufren de divergencias ultravioleta y uno necesita renormalizar la teoría para darles sentido. Un fenómeno general de la correspondencia AdS/CFT es la conocida conexión UV-IR [21], la cual establece que las divergencias UV en la teoría de campos están relacionadas con las divergencias IR del lado gravitacional, y viceversa. Geométricamente, las divergencias IR del lado de gravedad están asociadas con el comportamiento cercano a la frontera AdS. El propósito de esta sección es ver cómo tratar con estas divergencias, es decir, cómo “renormalizar holográficamente”.

En teoría de campos, la cancelación de divergencias UV no depende de la física en el IR. Esto implica que la renormalización holográfica debería depender únicamente de un análisis cerca de la frontera. Además, gran parte de la renormalización depende fuertemente de las simetrías y las identidades de Ward. Si las sustracciones en el UV respetan cierta simetría, la identidad de Ward correspondiente se mantiene, de lo contrario es anómala. El enunciado dual en el lado de gravedad es que el análisis cercano a la frontera que determina las divergencias IR debería ser suficiente para establecer las identidades de Ward y las anomalías holográficamente. Por otra parte, las funciones de correlación capturan la dinámica de la teoría, entonces un análisis cercano a la frontera no debe bastar para determinarlas. Para calcular las funciones de correlación, es necesario entonces obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo en el bulk. Las sustracciones necesarias para volver finitas las funciones de correlación deben ser consistentes, y esto se logra por medio de la inclusión de contratérminos que sean covariantes.

El método de regularización y renormalización en el contexto de la correspondencia

AdS/CFT fue introducido en [55, 56] y sistematizado en [57, 58]. Algunos aportes adicionales se encuentran en [59, 60, 61, 62, 63], mientras que en [64] se presenta una revisión del tema. Según el programa de renormalización holográfica, dada una acción clásica  $S[\Phi, A_M, G_{MN}, \dots]$  que depende de un número de campos que viven en el bulto  $\Phi, A_M, G_{MN}$ , etc., existe una función de un punto renormalizada para cada campo,

$$\begin{aligned}\Phi &\rightarrow \langle \mathcal{O}(x) \rangle_s = \frac{1}{\sqrt{g_{(0)}(x)}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta \phi_{(0)}(x)}, \\ A_M &\rightarrow \langle J_\mu(x) \rangle_s = \frac{1}{\sqrt{g_{(0)}(x)}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta A_{(0)}^\mu(x)}, \\ G_{MN} &\rightarrow \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_s = \frac{2}{\sqrt{g_{(0)}(x)}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta g_{(0)}^{\mu\nu}(x)},\end{aligned}\tag{1.66}$$

donde  $S_{\text{ren}}$  es la acción renormalizada (que se discutirá mas adelante),  $J_\mu$  es la corriente en la frontera que se acopla al campo  $A_\mu$ ,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor energía momento que se acopla a la métrica  $g_{\mu\nu(0)}$ , etc. El lado derecho, en general, está compuesto por componentes de los campos en el bulto definidos en una expansión asintótica cerca a la frontera.

Las funciones de un punto nos van a permitir establecer las identidades de Ward de manera holográfica, así como las posibles anomalías. El subíndice  $s$  en (1.66) quiere decir que los valores esperados son en presencia de fuentes. Entonces, diferenciando funcionalmente respecto a las fuentes, podemos obtener todas las funciones de correlación de orden superior.

### 1.3.1. Funciones de correlación en teorías de campo conformes

En este apartado se discutirá el tipo de información de la teoría de campos que queremos extraer a partir del lado de gravedad en el contexto de la correspondencia AdS/CFT. Como primer paso, partimos del hecho de que una teoría de campos queda determinada si conocemos todas las funciones de correlación de los operadores invariantes de norma. Desde luego, el conjunto de operadores invariantes de norma depende de la teoría particular que estemos considerando. Algunos ejemplos de estos operadores son el tensor energía momento  $T_{\mu\nu}$ , corrientes  $J^\mu$  asociadas a simetrías globales, y operadores escalares  $\mathcal{O}$ . Como hemos mencionado, cuando la métrica en el bulto es exactamente AdS (por una variedad compacta) la teoría de campos dual es una teoría conforme. Nos centraremos entonces en el estudio de teorías de campo conformes, aunque todas las consideraciones pueden ser fácilmente generalizadas a teorías que pueden ser vistas como deformaciones de teorías conformes debido a la inclusión de operadores relevantes o a teorías conformes con rompimiento espontáneo de invariancia conforme.

Ejemplos de la correspondencia AdS/CFT involucran teorías de campo específicas, siendo el más estudiado el caso de la teoría de norma en cuatro dimensiones con máxima

supersimetría, la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$ . Sin embargo, la discusión a continuación se centrará en propiedades generales que no dependen de la teoría específica. Una discusión más detallada se puede encontrar en [65].

Dada una cierta teoría conforme especificada por un conjunto de campos  $\varphi^A$  y un grupo de simetría, uno puede obtener el conjunto de operadores compuestos invariantes de norma  $\mathcal{O}(\varphi^A)$ . Para dar un ejemplo concreto, consideremos un operador escalar  $\mathcal{O}_\Delta$  de peso conforme  $\Delta$ . En este caso, la forma de la función de dos puntos está determinada por la invariancia conforme,

$$\langle \mathcal{O}_\Delta(x) \mathcal{O}_\Delta(0) \rangle = \frac{c(g, \Delta)}{x^{2\Delta}}, \quad (1.67)$$

donde  $c(g, \Delta)$  es una constante que depende de la constante de acoplamiento de la teoría  $g$  y de la dimensión conforme  $\Delta$  del operador. El objetivo es entonces entender cómo extraer esta función y otras funciones más complicadas, que no están determinadas por las simetrías, a partir de la geometría en el bulto.

En general, las simetrías de la acción clásica implican ciertas relaciones entre las funciones de correlación, las cuales son conocidas como las identidades de Ward. Por ejemplo, si nuestra acción es invariante de Poincaré, a nivel clásico obtendremos que el tensor energía momento se conserva,

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (1.68)$$

A nivel cuántico, esto implica algunas relaciones entre ciertas funciones de correlación. Por ejemplo,

$$\partial_x^\mu \langle T_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(z) \rangle = \partial_\nu \delta(x - y) \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(z) \rangle + \partial_\nu \delta(x - z) \langle \mathcal{O}(y) \mathcal{O}(x) \rangle. \quad (1.69)$$

Sin embargo, algunas simetrías clásicas pueden ser rotas por efectos cuánticos. Por ejemplo, el tensor energía momento de una teoría de campos que es clásicamente invariante conforme tiene traza nula, pero a nivel cuántico esta simetría se puede romper

$$T_\mu^\mu = 0 \quad \text{clásicamente}, \quad \langle T_\mu^\mu \rangle = \mathcal{A} \quad \text{cuánticamente}. \quad (1.70)$$

Como  $T_\mu^\mu$  es el generador de transformaciones de escala, la anomalía conforme captura el hecho de que los correladores no son invariantes de escala, a pesar de que estamos trabajando en una teoría clásicamente conforme. Matemáticamente,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = A \delta(x_1, \dots, x_n) \quad (1.71)$$

donde  $\delta(x_1, \dots, x_n) = \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \cdots \delta(x_{n-1} - x_n)$ , y  $A$  está relacionada con  $\mathcal{A}$  de una manera que se especificará más adelante. Como vemos, la violación a la invariancia conforme es un término de contacto. En una teoría de campos general (no conforme) (1.71) es reemplazada por la ecuación para la función beta.

Para entender cómo surge la anomalía, consideremos la función de dos puntos en (1.67). La forma de este correlador está completamente determinada por la invariancia conforme. Sin embargo, dependiendo de la dimensión conforme, el correlador puede sufrir de divergencias ultravioletas. Veamos el caso  $\Delta \sim d/2 + k$ , donde  $d$  es la dimensión del espaciotiempo y  $k$  es un entero. Cuando  $x^2 \rightarrow 0$  el correlador se comporta como [65]

$$\frac{1}{x^{2\Delta}} \sim \frac{1}{d + 2(k - \Delta)} \frac{\Gamma(d/2)}{2^{2k} k! \Gamma(d/2 + k)} S^{d-1} \square^k \delta^{(d)}(x) \quad (1.72)$$

donde  $S^{d-1}$  es el volumen de una esfera en  $(d - 1)$  dimensiones de radio unitario y  $\square$  es el operador D'Alambertiano. Encontramos entonces que hay un polo en  $\Delta = d/2 + k$ , pero si queremos definir operadores compuestos es necesario eliminar la singularidad en  $x = 0$ . Para producir una distribución bien definida usamos regularización dimensional y sustraemos el polo. Como caso concreto, consideremos  $k = 0$ . Tras la sustracción del polo se obtiene [66, 67]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{d/2}(x) \mathcal{O}_{d/2}(0) \rangle_R &= c(g, d/2) \lim_{\Delta \rightarrow d/2} \left( \frac{1}{x^{2\Delta}} - \frac{\mu^{2\Delta-d}}{d - 2\Delta} S^{d-1} \delta^{(d)}(x) \right) \\ &= -c(g, d/2) \frac{1}{2(d-2)} \square \frac{1}{(x^2)^{\frac{1}{2}d-1}} \left( \log \mu^2 x^2 + \frac{2}{d-2} \right), \end{aligned} \quad (1.73)$$

donde el subíndice  $R$  indica que este es el correlador renormalizado. Hemos introducido aquí una escala  $\mu$ , como es usual en regularización dimensional. El correlador renormalizado coincide con el correlador desnudo en el IR y, además, está bien definido en  $x^2 = 0$ . Centremos nuestra atención en la dependencia de escala del correlador renormalizado,

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \langle \mathcal{O}_{d/2}(x) \mathcal{O}_{d/2}(0) \rangle_R = S^{d-1} c(g, d/2) \delta^{(d)}(x). \quad (1.74)$$

donde hemos usado  $\square(x^2)^{-d/2+1} = -(d-2)S^{d-1}\delta^{(d)}(x)$ . Se observa entonces que la función de correlación renormalizada presenta violación a la invariancia de escala. Veremos pronto la forma en que esto está conectado con el hecho de que la condición de traza nula para el tensor energía momento también se viola.

Recordemos que la función de correlación de operadores compuestos puede ser calculada introduciendo fuentes que se acoplen a ellos. El funcional generatriz de funciones de correlación tiene entonces la siguiente representación en términos de integrales de trayectoria,

$$Z[g_{(0)}, \phi_{(0)}] = \int [\mathcal{D}\varphi^A] \exp \left( - \int d^d x \sqrt{g_{(0)}} [\mathcal{L}_{CFT}(\varphi^A; g_{(0)}) + \phi_{(0)} \mathcal{O}(\varphi^A)] \right) \quad (1.75)$$

donde  $\varphi^A$  representa de manera colectiva a todos los campos de la teoría,  $g_{(0)}$  es la métrica de fondo (que sirve como fuente para el tensor energía momento),  $\mathcal{L}_{CFT}$  es la densidad lagrangiana y  $\phi_{(0)}$  es una fuente para el operador  $\mathcal{O}$ . Las funciones de correlación se pueden calcular entonces diferenciando respecto a las fuentes y después evaluándolas

en cero. Por ejemplo, la función conectada de dos puntos del operador  $\mathcal{O}$ , en un espacio plano, está dada por

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(0) \rangle = \frac{\delta^2 W}{\delta\phi_{(0)}(x)\delta\phi_{(0)}(0)} \Big|_{\phi_{(0)}=0} \quad (1.76)$$

donde  $W = \log Z$  es el funcional generatriz de correladores conectados. Dada una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_{CFT}$ , uno podría entonces calcular las funciones de correlación de  $\mathcal{O}$  obteniendo primero (de forma perturbativa)  $Z[g_{(0)}, \phi_{(0)}]$ . Sin embargo, tal cálculo está plagado de infinitos y, para obtener resultados útiles, es necesario renormalizar la teoría. Para sustraer las divergencias uno puede añadir contratérminos a la acción, pero si estos contratérminos rompen una simetría clásica entonces esta simetría es anómala.

Una ruta un poco diferente consiste en primero determinar las funciones de un punto en presencia de fuentes,

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_s = -\frac{2}{\sqrt{g_{(0)}(x)}} \frac{\delta W[g_{(0)}, \phi_{(0)}]}{\delta g_{(0)}^{\mu\nu}(x)}, \quad \langle \mathcal{O}(x) \rangle_s = -\frac{1}{\sqrt{g_{(0)}(x)}} \frac{\delta W[g_{(0)}, \phi_{(0)}]}{\delta\phi_{(0)}(x)} \quad (1.77)$$

donde el subíndice  $s$  en las funciones de correlación indica que las fuentes no son nulas. Las funciones de correlación se pueden calcular entonces diferenciando con respecto a las fuentes y evaluándolas en cero. Esta formulación es la que nos será útil para calcular holográficamente las funciones de correlación, es decir, por medio de la correspondencia AdS/CFT. Otra ventaja es que uno puede expresar las identidades de Ward de manera compacta. Por ejemplo, la invariancia de  $Z$  bajo difeomorfismos,

$$\delta g_{(0)}^{\mu\nu} = -(\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu), \quad \delta\phi_{(0)} = \xi^\mu \nabla_\mu \phi_{(0)} \quad (1.78)$$

implica

$$\nabla^\mu \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle_s = -\langle \mathcal{O}(x) \rangle_s \nabla_\nu \phi_{(0)}(x) \quad (1.79)$$

Diferenciando ahora dos veces con respecto a  $\phi_{(0)}$  y haciendo  $\phi_{(0)} = 0$ ,  $g_{(0)\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  se obtiene (1.69).

Ahora, usando el hecho de que la traza del tensor energía momento es el generador de las transformaciones conformes se llega a [67]

$$\int d^d x \sqrt{g_{(0)}} g_{(0)}^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int \prod_{i=1}^k (d^d x_i \sqrt{g_{(0)}} J(x_i)) \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \langle \mathcal{O}(x_1) \cdots \mathcal{O}(x_k) \rangle \quad (1.80)$$

donde  $J$  denota a todas las fuentes y  $\mathcal{O}$  los operadores correspondientes. Claramente, el valor esperado de la traza del tensor energía momento es diferente de cero si la derivada respecto a la escala  $\mu$  del correlador no es nula. En particular, vimos en (1.74) que para un operador escalar de dimensión  $d/2$ , la derivada de la función de dos puntos da como resultado una función delta. Usando este resultado en (1.80) se obtiene

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{1}{2} S^{d-1} c(g, d/2) \phi_{(0)}^2 \quad (1.81)$$

Luego, en este caso,  $\mathcal{A} = A\phi_{(0)}^2/2$  y  $A = S^{d-1}c(g, d/2)$ . La generalización para operadores de dimensión  $\Delta = d/2 + k$  da como resultado [67]

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{1}{2}c_k\phi_{(0)}\square^k\phi_{(0)}, \quad c_k = \frac{\pi^{d/2}}{2^{2k-1}\Gamma(k+1)\Gamma(k+d/2)}c(g, \Delta), \quad (1.82)$$

lo cual es válido en el caso de un espaciotiempo de fondo plano. Cuando la geometría es curva, se obtiene que

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = \frac{1}{2}c_k\phi_{(0)}P_k\phi_{(0)} + \left( aE + \sum_i c_i W^i \right) + \nabla_\mu J^\mu. \quad (1.83)$$

$P_k$  es igual a  $\square^k$  cuando el fondo es plano y transforma de manera covariante bajo transformaciones de Weyl  $g_{(0)} \rightarrow g_{(0)}e^{2\sigma}$

$$P_k \rightarrow e^{-(d/2+k)\sigma} P_k e^{(d/2-k)\sigma}. \quad (1.84)$$

Por ejemplo, para  $k = 1$ ,

$$P_1 = \square + \frac{d-2}{4(d-1)}R. \quad (1.85)$$

Los dos términos dentro del paréntesis en (1.83) son puramente gravitacionales y están presentes sólo cuando  $d$  es par.  $E$  es la densidad de Euler,  $W^i$  es una base de los invariantes de Weyl de dimensión  $d$  mientras que  $a$  y  $c_i$  son constantes numéricas llamadas cargas centrales, que dependen del contenido de campos de la teoría. Por ejemplo, en  $d = 4$  dimensiones existe únicamente un invariante de Weyl (el cuadrado del tensor de Weyl), en  $d = 6$  hay tres invariantes, etc. El último término en (1.83) puede ser modificado por contratérminos locales en la acción. En general, podrían haber términos adicionales en (1.83) que dependen de potencias de alto orden respecto a las fuentes  $\phi_{(0)}$ , pero estos estarían relacionados con singularidades en funciones de correlación de orden superior. La estructura de (1.83) queda establecida por el hecho de que la anomalía conforme integrada es por sí misma invariante conforme [68, 69].

La correspondencia AdS/CFT implica que toda esta información está codificada en la geometría. Discutiremos entonces cómo es posible recuperarla a partir de cálculos en el lado gravitacional.

### 1.3.2. Espacios asintóticamente AdS y análisis cerca a la frontera

Cuando un espacio AdS es foliado en coordenadas de Poincaré, como en la métrica (1.33), la teoría de campos dual vive en un espaciotiempo de Minkowski  $ds_{\text{CFT}}^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ , pero escogiendo diferentes foliaciones podemos obtener descripciones gravitacionales de la misma teoría de campos que viven en otras geometrías de fondo.

Ahora, se sabe que cualquier métrica asintóticamente AdS puede ser escrita en la forma de Fefferman-Graham [70]

$$ds_{\text{aAdS}}^2 = \frac{L^2}{z^2} (g_{\mu\nu}(z, x) dx^\mu dx^\nu + dz^2) , \quad (1.86)$$

de donde se puede extraer la métrica en la teoría de campos dual  $g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(0, x)$ , siendo  $ds_{\text{CFT}}^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ . La función completa  $g_{\mu\nu}(z, x)$  está determinada de manera única, por medio de las ecuaciones de Einstein en el bulto, a partir de su valor en la frontera y el valor esperado del tensor energía momento  $T_{\mu\nu}(x)$  en la teoría de norma [57].

Dada la forma de la métrica (1.86),  $g_{\mu\nu}(z, x)$  debe tener un límite suave cuando  $z \rightarrow 0$  tal que se aproxime asintóticamente a la geometría AdS. Entonces, podemos escribir

$$g_{\mu\nu}(z, x) = g_{(0)\mu\nu} + z g_{(1)\mu\nu} + z^2 g_{(2)\mu\nu} + \dots \quad (1.87)$$

El siguiente paso es determinar los coeficientes  $g_{(k)\mu\nu}$ , para  $k > 0$ , a partir de las ecuaciones de Einstein, lo cual se puede hacer orden por orden. En particular, se obtiene que los coeficientes para potencias impares de  $z$  se anulan hasta el orden  $z^d$  donde  $d$  es la dimensión de la teoría de campos [55]. Para simplificar, se introducen unas nuevas coordenadas  $\rho = z^2$ , en las cuales la métrica se puede escribir como<sup>4</sup>

$$ds^2 = G_{MN} dx^M dx^N = \frac{d\rho^2}{4\rho^2} + \frac{1}{\rho} g_{\mu\nu}(x, \rho) dx^\mu dx^\nu, \\ g(x, \rho) = g_{(0)\mu\nu} + \rho g_{(2)\mu\nu} + \dots + \rho^{d/2} g_{(d)\mu\nu} + h_{(d)\mu\nu} \rho^{d/2} \log \rho + \dots \quad (1.88)$$

El caso  $g_{(0)\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $g_{(2k)\mu\nu} = 0$ ,  $k > 0$ , da como resultado AdS puro (y haciendo  $\rho = z^2$  uno regresa a AdS en coordenadas de Poincaré).

Ahora, dada una acción con un número de campos en el bulto, queremos ver la solución más general de las ecuaciones de campo, con condiciones de frontera de Dirichlet arbitrarias. Para simplificar la notación, llamemos de manera colectiva  $\mathcal{F}(x, \rho)$  a los campos en el bulto, suprimiendo los índices internos y del espaciotiempo. Cerca a la frontera, tenemos que

$$\mathcal{F}(x, \rho) = \rho^m \left( f_{(0)}(x) + f_{(2)}(x)\rho + \dots + \rho^n (f_{(2n)}(x) + \log \rho \tilde{f}_{(2n)}(x)) + \dots \right) .. \quad (1.89)$$

Las ecuaciones de campo son ecuaciones diferenciales de segundo orden en  $\rho$ , luego existen dos soluciones independientes. Sus comportamientos asintóticos son  $\rho^m$  y  $\rho^{m+n}$ , respectivamente. El campo en la frontera  $f_{(0)}$  que multiplica al término dominante,  $\rho^m$ , es interpretado como la fuente del operador dual. Cerca de la frontera, uno puede resolver las ecuaciones de campo iterativamente asumiendo que la variable  $\rho$  es un parámetro

<sup>4</sup>Utilizaremos estas coordenadas durante toda esta sección.

pequeño. Esto da como resultado una serie de ecuaciones algebraicas para  $f_{(2k)}$ ,  $k < n$ , que determinan de manera única  $f_{(2k)}$  en términos de  $f_{(0)}(x)$  y sus derivadas. Estas ecuaciones dejan  $f_{(2n)}(x)$  indeterminado, pero en cierta forma esto era lo esperado: el coeficiente  $f_{(2n)}(x)$  es la condición de frontera de Dirichlet de una solución que es linealmente independiente de aquella que comienza como  $\rho^m$  para  $\rho \rightarrow 0$ . La función indeterminada  $f_{(2n)}$  está relacionada a la función de un punto del operador correspondiente, es decir, caracteriza el estado de la teoría en que nos encontramos. El término logarítmico en (1.89) está relacionado con las anomalías conformes de la teoría dual y también está determinado en términos de  $f_{(0)}(x)$ .

En conclusión, mediante el análisis asintótico de las ecuaciones de campo en el bulto se obtiene como resultado:

- $f_{(0)}(x)$  es una fuente en la teoría de norma,
- $f_{(2)}(x), \dots, f_{(2n-2)}$ , y  $\tilde{f}_{(2n)}$  están determinados por el análisis cerca a la frontera y son funciones locales de  $f_{(0)}$ ,
- $\tilde{f}_{(2n)}$  está relacionado con la anomalía de Weyl,
- $f_{(2n)}(x)$  está indeterminado por el análisis cerca a la frontera.

### 1.3.3. Divergencias, regularización y renormalización

Una vez obtenida la solución general de las ecuaciones de campo, el siguiente paso es calcular el valor de la acción en la capa de masa. Como es de esperarse, la integral presenta divergencias IR (por el volumen infinito de AdS cerca de la frontera) y es necesario regularizar. Se restringe el rango de integración respecto a  $\rho$ , introduciendo un corte  $\rho \geq \epsilon$ , y evaluamos los términos de frontera en  $\rho = \epsilon$ . Los términos que divergen cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  se pueden aislar, y la acción toma la forma

$$S_{\text{reg}}[f_{(0)}; \epsilon] = \int_{\rho=\epsilon} d^4x \sqrt{g_{(0)}} [\epsilon^{-\nu} a_{(0)} + \epsilon^{-(\nu+1)} a_{(2)} + \dots - \log \epsilon a_{(2\nu)} + \mathcal{O}(\epsilon^0)]$$

donde  $\nu$  es un número positivo que depende de la dimensión del operador dual y  $a_{(2k)}$  son funciones locales de la fuente  $f_{(0)}$ . La divergencia logarítmica da directamente la anomalía conforme [55, 56]. Las divergencias no dependen de  $\tilde{f}_{(2n)}$ , que son los coeficientes que el análisis cerca a la frontera no determina.

Es necesario cancelar los términos divergentes, y para esto añadimos ciertos contratérminos. La acción de estos contratérminos se define como

$$S_{\text{ct}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon] = - \text{términos divergentes de } S_{\text{reg}}[f_{(0)}; \epsilon] \quad (1.90)$$

donde los términos divergentes están expresados en términos de los campos  $\mathcal{F}(x, \epsilon)$  que viven en la superficie regularizada  $\rho = \epsilon$ . En esta superficie, la métrica inducida es  $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x, \epsilon)/\epsilon$ . Ahora, para determinar  $S_{\text{ct}}$  primero invertimos la serie (1.89) para obtener  $f_{(0)} = f_{(0)}(\mathcal{F}(x, \epsilon), \epsilon)$ , luego se sustituye el resultado en los coeficientes  $a_{(2k)}(f_{(0)}(x)) = a_{(2k)}(\mathcal{F}(x, \epsilon), \epsilon)$ , y finalmente se insertan estos coeficientes en (1.90).

Para obtener la acción renormalizada, primero se define la siguiente acción en  $\rho = \epsilon$

$$S_{\text{sub}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon] = S_{\text{reg}}[f_{(0)}; \epsilon] + S_{\text{ct}}[\mathcal{F}(x, \epsilon); \epsilon], \quad (1.91)$$

la cual es finita en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . La acción renormalizada se define entonces tomando el límite

$$S_{\text{ren}}[f_{(0)}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\text{sub}}[\mathcal{F}; \epsilon]. \quad (1.92)$$

La distinción entre  $S_{\text{sub}}$  y  $S_{\text{ren}}$  es necesaria debido a que las variaciones requeridas para obtener las funciones de correlación se hacen antes de tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### 1.3.4. Funciones de un punto e identidades de Ward

Una vez renormalizada la teoría, las funciones de un punto de los operadores en la teoría de norma se pueden obtener diferenciando con respecto a las fuentes. Para una acción que depende de un número de campos  $S[G_{MN}, A_M, \Phi, \dots]$ , después de evaluarla en la capa de masa y renormalizar apropiadamente, su variación da como resultado [60]

$$\delta S_{\text{ren}}[g_{(0)\mu\nu}, A_{(0)\mu}, \phi_{(0)}] = \int d^d x \sqrt{g_{(0)}} \left[ \frac{1}{2} \langle T_{\mu\nu} \rangle \delta g_{(0)}^{\mu\nu} + \langle J_\mu \rangle \delta A_{(0)}^\mu + \langle \mathcal{O}_\Phi \rangle \delta \phi_{(0)} + \dots \right] \quad (1.93)$$

donde  $g_{(0)}^{\mu\nu}$ ,  $A_{(0)}^\mu$ ,  $\phi_{(0)}$  son fuentes de los operadores en la teoría de norma y aparecen como los términos dominantes en la expansión cerca a la frontera de los campos  $G_{MN}$ ,  $A_M$  y  $\Phi$ , respectivamente.

El valor esperado de los operadores, en presencia de fuentes, se puede calcular explícitamente a partir de la acción  $S_{\text{sub}}$  y tomando el límite cuando  $\epsilon$  tiende a cero<sup>5</sup>:

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \rangle_s = \frac{1}{\sqrt{g_{(0)}}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta f_{(0)}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon^{d/2-m}} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_{\text{sub}}}{\delta \mathcal{F}(x, \epsilon)} \right), \quad (1.94)$$

con  $m$  definido en la expansión asintótica de  $\mathcal{F}(x, \rho)$  (1.89). Por construcción, (1.94) converge cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  una vez que la acción está libre de términos divergentes. Evaluando el límite explícitamente, se obtiene de forma genérica

$$\langle \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \rangle_s \sim f_{(2n)} + C(f_{(0)}), \quad (1.95)$$

<sup>5</sup>En el caso del tensor energía momento, aparece un factor adicional de 2 como consecuencia de su dependencia en la ecuación (1.93)

donde  $C(f_{(0)})$  es una función que depende localmente de las fuentes y contribuye como término de contacto en funciones de correlación de alto orden.

Específicamente, nos interesará calcular el valor esperado del tensor energía momento

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{2}{\sqrt{g_{(0)}}} \frac{\delta S_{\text{ren}}}{\delta g_{(0)}^{\mu\nu}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon^{d/2-1}} \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S_{\text{sub}}}{\delta \gamma^{\mu\nu}(x, \epsilon)} \right), \quad (1.96)$$

para el cual se obtiene [57]:

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{d L^{d-1}}{16\pi G_{\text{N}}^{(d+1)}} \left( g_{\mu\nu}^{(d)}(x) + X_{\mu\nu}^{(d)}(x) \right), \quad (1.97)$$

donde  $X_{\mu\nu}^{(d)} = 0$  en dimensiones impares,

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu}^{(2)} &= -g_{\mu\nu} g_{\alpha}^{(2)\alpha}, \\ X_{\mu\nu}^{(4)} &= -\frac{1}{8} g_{\mu\nu} \left[ (g_{\alpha}^{(2)\alpha})^2 - g_{\alpha}^{(2)\beta} g_{\beta}^{(2)\alpha} \right] - \frac{1}{2} g_{\mu}^{(2)\alpha} g_{\alpha\nu}^{(2)} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(2)} g_{\alpha}^{(2)\alpha}, \end{aligned} \quad (1.98)$$

etc. Para  $d \geq 6$ ,  $X_{\mu\nu}^{(d)}$  está dado por expresiones similares pero más complicadas. En (1.98) se entiende que los índices de los tensores  $g_{\mu\nu}^{(n)}(x)$  se suben con la métrica inversa de la frontera  $g^{\mu\nu}(x)$ . Notar además que si el fondo está dado por AdS puro en coordenadas de Poincaré, lo cual representa el estado base de la teoría de norma sobre el espaciotiempo de Minkowski, se obtiene  $\langle T_{\mu\nu} \rangle = 0$ . Cualquier otro campo que encendamos (incluida la métrica) va a resultar en un estado excitado o en una deformación de la teoría (la distinción entre ambos casos se da por el comportamiento asintótico de la perturbación).

Sorprendentemente, las funciones de un punto calculadas holográficamente satisfacen las identidades de Ward correspondientes, incluyendo las anomalías. Estas identidades van a resultar estar relacionadas con las simetrías de norma de los campos del bulto. Por ejemplo, usando (1.93), la invariancia bajo difeomorfismos,

$$\begin{aligned} \delta\phi_{(0)} &= \xi^{\mu} \nabla_{\mu} \phi_{(0)}, \\ \delta A_{(0)}^{\mu} &= \xi^{\nu} \nabla_{\nu} A_{(0)}^{\mu} + \nabla^{\mu} \xi^{\nu} A_{(0)\nu}, \\ \delta g_{(0)}^{\mu\nu} &= -(\nabla^{\mu} \xi^{\nu} + \nabla^{\nu} \xi^{\mu}), \end{aligned} \quad (1.99)$$

implica la identidad de Ward para la conservación del tensor energía momento

$$\nabla^{\mu} \langle T_{\mu\nu} \rangle = -\nabla_{\nu} \phi_{(0)} \langle \mathcal{O}_{\Phi} \rangle - F_{(0)\mu\nu} \langle J^{\mu} \rangle + A_{(0)\nu} \nabla_{\mu} \langle J^{\mu} \rangle, \quad (1.100)$$

donde  $F_{(0)\mu\nu}$  es la intensidad de campo de  $A_{(0)\mu}$ . Esta identidad es válida en presencia de fuentes aunque, por lo general, en teoría de campos las identidades de Ward se expresan haciendo las fuentes iguales a cero  $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{QFT} = \langle T_{\mu\nu} \rangle|_{\text{fuentes}=0}$ .

La invariancia bajo transformaciones de Weyl,

$$\begin{aligned}\delta\phi_{(0)} &= -(4 - \Delta)\sigma\phi_{(0)} \\ \delta A_{(0)}^\mu &= -\sigma A_{(0)}^\mu \\ \delta g_{(0)}^{\mu\nu} &= -2\sigma g_{(0)}^{\mu\nu},\end{aligned}\tag{1.101}$$

conlleva a la identidad de Ward conforme

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -(4 - \Delta)\phi_{(0)} \langle \mathcal{O}_\Phi \rangle - A_{(0)\mu} \langle J^\mu \rangle + \mathcal{A}.\tag{1.102}$$

donde la anomalía conforme,  $\mathcal{A}$ , se extrae directamente del término logarítmico de la acción en el bulto [55].

### 1.3.5. Funciones de correlación de $n$ puntos

Para calcular funciones de  $n$  puntos es necesario obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo en el bulto con las condiciones de frontera apropiadas. Una vez obtenida dicha solución, es posible extraer todos los coeficientes en la expansión de  $\mathcal{F}(x, \rho)$ . En particular queremos leer  $f_{(2n)}$ , y por lo tanto  $\langle \mathcal{O}_\mathcal{F}(x_1) \rangle_s$ , como función del término de frontera  $f_{(0)}$  para posteriormente poder implementar la derivada funcional. Las funciones de  $n$  puntos se calculan entonces por medio de

$$\langle \mathcal{O}_\mathcal{F}(x_1) \cdots \mathcal{O}_\mathcal{F}(x_n) \rangle = \frac{\delta \langle \mathcal{O}_\mathcal{F}(x_1) \rangle_s}{\delta f_{(0)}(x_2) \cdots \delta f_{(0)}(x_n)} \Big|_{f_{(0)}=0}.\tag{1.103}$$

Dado que las ecuaciones de campo en el bulto son altamente no lineales, es difícil obtener soluciones exactas al problema de Dirichlet con condiciones de frontera especificadas. En este caso, la alternativa es trabajar con las ecuaciones de campo linealizadas con lo cual podemos determinar el término de  $f_{(2n)}$  con dependencia lineal en  $f_{(0)}$ . Esto es suficiente para determinar las funciones de correlación de 2 puntos. Incluso en la ausencia de soluciones exactas, las funciones de alto orden se pueden determinar perturbativamente: primero se obtiene una solución perturbativa de las ecuaciones de campo, determinando los términos de  $f_{(2n)}$  que van hasta cierta potencia en  $f_{(0)}$ ; dependiendo del orden de la solución, es posible ir determinando de manera sistemática funciones de correlación de orden cada vez más alto.

# CAPÍTULO 2

---

---

## EL EFECTO UNRUH EN TEORÍAS DE CAMPO CONFORMES

---

---

### 2.1 Introducción

A nivel clásico, sabemos que si una carga se acelera emite radiación y como consecuencia, siente una fuerza de reacción que tiende a amortiguar su movimiento. En caso de que el sistema esté cuantizado, adicionalmente se espera que la emisión de radiación induzca fluctuaciones estocásticas en la trayectoria de la carga. Estos efectos ya han sido explorados en el contexto de teorías de norma abelianas, el primero en [71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82], y el segundo en [79, 80, 81, 82, 83]. Tras el descubrimiento de la correspondencia AdS/CFT, se abrió la posibilidad de extender tales estudios al contexto de teorías de norma no abelianas *fuertemente acopladas*.

El primer paso en esta dirección fue tomado recientemente en [45, 46], en donde se mostró que la correspondencia permite la obtención de una ecuación de movimiento para un quark “compuesto” o “vestido”, que incorpora correctamente los efectos de amortiguamiento inducidos por la radiación. El resultado condujo a una generalización no lineal de la célebre ecuación de Abraham-Lorentz-Dirac [84] que, a diferencia de ésta, no contiene soluciones autoaceleradas o preaceleradas. El efecto de amortiguamiento viene del hecho de que, en el contexto de la dualidad, el quark está identificado con el extremo de una cuerda, cuyo cuerpo codifica el perfil de los campos cercanos y de radiación producidos por el propio quark, y por tanto puede actuar como un sumidero de energía. Este mecanismo había sido establecido previamente en los cálculos de la fuerza de arrastre que se ejerce sobre un quark inmerso en un plasma térmico, configuración que se puede describir en términos de una cuerda que vive en una geometría de agujero negro [39, 40]. El análisis de [45, 46] dejó en claro que el efecto de amortiguamiento

está presente igualmente en el vacío de la teoría de norma, es decir, independientemente de que exista o no un agujero negro en la geometría del bulto (aunque, por supuesto, la forma detallada de la fuerza de amortiguamiento resulta ser diferente). Por otra parte, la pérdida de energía a través de la cuerda resultó estar estrechamente relacionada con la aparición de un horizonte en la hoja de mundo, como se observó inicialmente en [85, 86] a temperatura finita, y como se enfatizó en [44] para el caso de temperatura cero. Esta relación ha sido estudiada en más detalle en [87, 88, 89].

En el cálculo de [45, 46], como es habitual en la correspondencia, se considera al quark como una partícula pesada que se acopla a los campos cuánticos de la teoría de norma. En el presente trabajo se pretende ir más allá de la descripción clásica de la partícula, estudiando las fluctuaciones cuánticas de la trayectoria del quark inducidas por su acoplamiento con el campo gluónico. Aunque esperamos que la física de interés esté presente en circunstancias generales, por simplicidad, restringiremos nuestra atención a los casos de la correspondencia AdS/CFT que tenemos bajo control. Nuestros objetos de estudio serán entonces, teorías de campo *conformes*, de dimensión arbitraria  $d$ , y definidas en un espaciotiempo de Minkowski.

Ahora, al intentar estudiar dichas fluctuaciones en detalle, el análisis resulta complicado debido a la dependencia temporal explícita en la geometría de la hoja de mundo, lo cual es de esperarse dado que la velocidad y la tasa a la cual el quark radía varían continuamente. Debido a esto, nos especializaremos en el caso de aceleración constante, aún cuando esperamos que nuestros resultados sean aplicables para configuraciones más generales. En la sección 2.2 obtenemos el encaje de la cuerda apropiado (2.5) como un caso particular de la solución general encontrada en [47], y verificamos que la métrica inducida en la hoja de mundo contiene un agujero negro (como se había establecido previamente para el caso de temperatura finita en [88, 90]), un hecho que juega un papel importante en nuestra investigación. De hecho, para cualquier trayectoria acelerada del quark es posible encontrar un agujero negro en la hoja de mundo [44], pero el caso de aceleración constante es de interés particular ya que la geometría inducida es estática, y esto nos facilitará los cálculos posteriores.

En este contexto, es natural esperar que el problema se simplifique si en lugar de trabajar en las coordenadas de un observador inercial nos cambiamos a un sistema de coordenadas de Rindler, el cual está adaptado para un observador ubicado en la posición del quark. Por lo tanto, aplazamos el estudio de las fluctuaciones de la cuerda para el capítulo 3, y en el resto del presente capítulo nos dedicamos a realizar un análisis exhaustivo de las transformaciones de coordenadas pertinentes y de sus consecuencias físicas. Este ejercicio resulta ser interesante en sí mismo, y nos brinda la posibilidad de estudiar la implementación del conocido efecto Unruh [91, 92] en el formalismo de la correspondencia AdS/CFT. Según este efecto, un observador acelerado en el vacío se siente inmerso en un baño térmico, de manera que lo que son fluctuaciones cuánticas inducidas por la radiación en el sistema inercial, son interpretadas como fluctuaciones térmicas en el sistema en el cual el quark está en reposo. El objetivo principal de este

capítulo es entonces estudiar de cerca el medio térmico que siente el observador de Rindler, lo cual vamos a hacer mediante el cálculo del valor esperado del tensor energía momento. Otros análisis de la implementación del efecto Unruh en la correspondencia se pueden encontrar en [88, 90], así como en el artículo reciente [93], que apareció mientras el presente trabajo estaba en preparación.

En la sección 2.3.1 se presentan los difeomorfismos que realizan la transición entre las coordenadas Minkowski y las coordenadas de Rindler, que designaremos con primas (2.13). Esta transformación da lugar a un horizonte de aceleración, tanto en la descripción de la teoría de norma como en el bulto, y como resultado, un estado que es puro desde la perspectiva inercial, se interpreta genéricamente como un estado mezcla desde el punto de vista de un observador de Rindler, porque los grados libertad accesibles a este último van a estar entrelazados con grados de libertad en la región detrás del horizonte. En particular, la geometría de AdS expresada en coordenadas de Rindler (2.14), (que es dual al vacío de Minkowski de la teoría de norma dado que el valor esperado del tensor de energía momento resulta ser cero), es interpretado como un baño térmico con la temperatura de Unruh (2.11). En las coordenadas de Rindler, el encaje de la cuerda toma la forma (2.17) que, como era de esperarse, es estática y se inclina hacia el horizonte de Rindler.

En la sección 2.3.2 se observa que el horizonte de Rindler de la teoría de campos se puede eliminar por medio de una transformación de Weyl apropiada. La geometría resultante (2.21) (que es etiquetada con dobles primas) coincide con la geometría del universo abierto de Einstein. Más adelante, con base en [94], identificamos la transformación en el bulto correspondiente al cambio de marco conforme en la frontera (2.23). A diferencia del difeomorfismo discutido en la sección 2.3.1, este último altera drásticamente la foliación radial de la geometría AdS. En este nuevo marco conforme el horizonte de aceleración ya no es visible del lado de la teoría de norma pero, a pesar de esto, se muestra que el horizonte todavía está presente en el bulto (ahora en una posición radial fija), con temperatura igual a la temperatura de Unruh (2.11). En otras palabras, después de la transformación (2.23), el carácter térmico correspondiente al estado de la teoría de norma no surge a partir del entrelazamiento de los grados de libertad del observador con grados de libertad que se encuentran detrás del horizonte. En este caso, se hace la identificación directa de la escala de energía específica (2.11) como la temperatura de la teoría de campos, en paralelo exacto con la interpretación dual de la geometría Schwarzschild-AdS.

Terminamos la sección 2.3.2 notando que en el sistema de coordenadas doblemente primado, el encaje de la cuerda (2.25) es estático y completamente vertical. Interesantemente, tanto el encaje de la cuerda (2.25) como la geometría de fondo (2.24), en la ubicación de la cuerda, coinciden exactamente con la configuración *térmica* analizada en [95] para el caso  $d = 2$ , lo que nos permitirá simplificar el estudio de fluctuaciones que se realizará en el capítulo 3. La relación estrecha entre las fluctuaciones cuánticas del quark uniformemente acelerado en el vacío y las fluctuaciones térmicas de un quark

estático en un medio es una consecuencia directa del efecto Unruh, y podemos entonces pensar en nuestro quark fluctuante como un detector del medio térmico predicho por este efecto. Por otra parte, debemos advertir que para el caso  $d > 2$ , encontramos que las propiedades termodinámicas de tal medio son diferentes a las del ensamble térmico homogéneo e isotrópico que es dual al fondo Schwarzschild-AdS $_{d+1}$ .

Para ver de cerca este último enunciado, en la sección 2.4 extraemos el valor esperado del tensor energía momento en el vacío de Minkowski conforme en la teoría de campos a partir de la métrica del bulto correspondiente al universo abierto de Einstein (2.24). El resultado, dado en (2.28), está totalmente de acuerdo con [96], donde se realizó el mismo cálculo en un contexto más general, investigando agujeros negros hiperbólicos en el marco de la correspondencia AdS/CFT. Desde hace mucho tiempo había sido establecido que, en dimensiones pares, este valor esperado resulta ser diferente de cero como resultado de la anomalía de Weyl, lo que implica que la transformación que nos lleva del espaciotiempo de Rindler al universo abierto de Einstein no es una simetría verdadera de la teoría de norma [97, 98, 99, 100]. La contraparte de este enunciado en el lado gravitacional fue estudiada en [55, 56], mostrando concordancia con los resultados mencionados. Usando esta información y los resultados obtenidos en [96], traducimos de vuelta al espaciotiempo de Rindler para determinar el tensor energía momento correspondiente al medio térmico de Unruh (2.36).

## 2.2 Solución dual a un quark uniformemente acelerado

En esta sección queremos identificar la configuración de la cuerda que es dual a un quark uniformemente acelerado. Según la correspondencia AdS/CFT, sabemos que dicha solución corresponde a una cuerda cuyo extremo  $x^\mu(\tau) = X^\mu(\tau, z_m)$  describe la trayectoria deseada. Sin embargo, esto no determina de manera única la forma en que el resto de la cuerda evoluciona, de igual forma que especificar la trayectoria del quark no determina de manera única el perfil de los campos gluónicos. Físicamente, la solución que nos interesa es la solución retardada, es decir, aquella en la cual la configuración de la cuerda en cierto tiempo depende únicamente del comportamiento del extremo en tiempos anteriores.

Afortunadamente, la solución retardada de las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto en un fondo AdS es conocida para una trayectoria arbitraria tipo tiempo del extremo de la cuerda, y está dada por (1.61). En nuestro caso particular, asumiremos que el movimiento del quark se da solamente en la dirección  $x \equiv x^1$ , y que es el resultado de aplicarle una fuerza externa constante  $\vec{F} = (F, 0, \dots)$ , con  $F > 0$ . En este caso debemos tener en cuenta que al encender un campo eléctrico constante para acelerar el quark, el encaje de las branas de sabor en el fondo AdS cambia, lo cual

implica que la relación entre la ubicación radial  $z_m$  del extremo de la cuerda y la masa del quark se debe modificar [101]. Como resultado,  $m$  en (1.45) debe ser interpretado como la masa efectiva del quark en presencia del campo eléctrico. En caso de que el quark esté sujeto a una fuerza arbitraria dependiente del tiempo, la relación entre masas sería mucho más complicada, pero la idea general seguiría aplicando.

Debido a la ecuación de movimiento (1.62), una fuerza constante implica que el quark se mueve con aceleración *propia* constante [46]

$$A \equiv \sqrt{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2}} = \frac{d}{dt}(\gamma v) = \frac{F}{\sqrt{m^2 - \frac{\lambda F^2}{4\pi^2 m^2}}}, \quad (2.1)$$

y por lo tanto, sigue la trayectoria hiperbólica

$$x(t) = \sqrt{A^{-2} + t^2}, \quad (2.2)$$

donde, por conveniencia, hemos escogido un origen particular del espaciotiempo. El tiempo propio del quark es entonces

$$\tau = A^{-1} \operatorname{arcsinh}(At). \quad (2.3)$$

Usando esta información, y definiendo  $t_{\text{ret}} \equiv t(\tau, z_m)$ , la solución general (1.61) toma la forma

$$\begin{aligned} t(t_{\text{ret}}, z) &= (z - z_m) \gamma(t_{\text{ret}}) \left[ \sqrt{1 + z_m^2 A^2} - v(t_{\text{ret}}) z_m A \right] + t_{\text{ret}}, \\ X(t_{\text{ret}}, z) &= (z - z_m) \gamma(t_{\text{ret}}) \left[ v(t_{\text{ret}}) \sqrt{1 + z_m^2 A^2} - z_m A \right] + x(t_{\text{ret}}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

la cual, tras eliminar  $t_{\text{ret}}$ , se reduce a

$$X(t, z) = \sqrt{A^{-2} + t^2 - z^2 + z_m^2}. \quad (2.5)$$

Como una prueba de consistencia, notemos que la trayectoria del extremo  $X(t, z_m)$  coincide de hecho con (2.2).

La métrica inducida en la hoja de mundo resulta ser

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{L^2}{z^2} \left( \frac{A^{-2} - z^2 + z_m^2}{A^{-2} + t^2 - z^2 + z_m^2} \right), \\ g_{tz} &= -\frac{L^2}{z^2} \left( \frac{tz}{A^{-2} + t^2 - z^2 + z_m^2} \right), \\ g_{zz} &= \frac{L^2}{z^2} \left( \frac{A^{-2} + t^2 + z_m^2}{A^{-2} + t^2 - z^2 + z_m^2} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vemos que  $g_{tt}$  se anula en  $z = \sqrt{A^{-2} + z_m^2} \equiv z_h$ , indicando que los conos de luz que normalmente apuntarían hacia abajo se vuelven horizontales, y por tanto  $z_h$  señala la

ubicación de un horizonte en la hoja de mundo. El hecho de que la geometría es estática se hará evidente en la siguiente sección.

Es interesante notar que la solución (2.5) sólo llega hasta cierta posición en el bulto  $z = \sqrt{A^{-2} + t^2 + z_m^2} \equiv z_c(t)$ . El encaje *completo* de la cuerda que es de nuestro interés debería extenderse más allá de esta posición radial, hasta  $z \rightarrow \infty$  (con un punto de inflexión en  $z = z_c(t)$ , donde  $\partial_z X(t, z_c(t)) \rightarrow \infty$ ) de manera que la solución total sea dual a un quark aislado.<sup>1</sup> Debería ser posible obtener la forma del encaje para la porción  $z > z_c(t)$ , pero no la necesitaremos acá, dado que ésta se encuentra detrás del horizonte en la hoja de mundo y por lo tanto no puede influenciar al extremo de la cuerda.

## 2.3 Difeomorfismos en el bulto y el efecto Unruh

Habiendo determinado en la sección anterior el encaje de la cuerda dual a un quark que sigue una trayectoria uniformemente acelerada (2.2), queremos estudiar ahora algunos cambios de coordenadas que nos permitan simplificar el cálculo de fluctuaciones cuánticas que realizaremos en el capítulo 3. Dedicaremos entonces esta sección a presentar los difeomorfismos en el bulto apropiados y explicar su interpretación del lado de la teoría de norma. A lo largo del camino, aprenderemos algunas lecciones respecto a la implementación del efecto Unruh en el contexto de la correspondencia AdS/CFT.

### 2.3.1. Coordenadas de Rindler

Para comenzar, es natural esperar que nuestro problema se simplifique si nos cambiamos a un sistema de coordenadas en el cual el quark está en reposo. Para esto, reescribimos la teoría de norma en términos de las coordenadas de Rindler<sup>2</sup> [102, 103]

$$t = A^{-1} \exp(Ax') \sinh(At'), \quad x = A^{-1} \exp(Ax') \cosh(At'), \quad \vec{x}_\perp = \vec{x}'_\perp. \quad (2.7)$$

El rango de las nuevas coordenadas  $(t', x', \vec{x}'_\perp)$  se encuentra en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , y por lo tanto éstas cubren la cuña de Rindler apropiada  $x \geq |t|$  del espacio de Minkowski original en  $d$  dimensiones. El elemento de línea en la teoría de campos toma la forma de Rindler

$$ds_{\text{CFT}}^2 = e^{2Ax'} \left( -dt'^2 + dx'^2 \right) + d\vec{x}'_\perp{}^2. \quad (2.8)$$

Desde el punto de vista de un observador inercial, las líneas de mundo con  $(x', \vec{x}'_\perp)$  constantes describen una familia de observadores uniformemente acelerados con aceleración

<sup>1</sup>Otra posibilidad para completar el encaje de la cuerda (2.5) sería continuarla de vuelta hasta  $z = 0$  a partir de  $z \leq z_c(t)$ , caso en el cual la cuerda sería dual a un par quark-antiquark, con las partículas acelerándose uniformemente en sentidos opuestos. Esta solución fue estudiada en [88, 90].

<sup>2</sup>Para ser precisos,  $x'$  es la llamada coordenada tortuga longitudinal y está relacionada con las coordenadas de Rindler originales a través de  $\tilde{x}' \equiv A^{-1} \exp(Ax')$ .

propia  $A \exp(-Ax')$  y tiempo propio  $t' \exp(Ax')$ , de tal forma que en este nuevo sistema de coordenadas nuestro quark se sitúa en una posición fija  $x' = 0$ ,  $\vec{x}'_{\perp} = 0$  y tiene tiempo propio  $t'$ .

En concordancia con el principio de equivalencia, los objetos en este marco se sienten inmersos en un campo gravitacional análogo al campo producido por un plano infinito situado en  $x' \rightarrow -\infty$  ( $\vec{x}' = 0$ ), y por lo tanto se sienten atraídos hacia la izquierda. Este efecto se manifiesta por sí mismo de varias maneras y, en particular, conlleva a una dependencia respecto a  $x'$  en la temperatura local la cual determinaremos más adelante.

La forma de la relación entre  $t$  y  $t'$  implica que el observador inercial y el observador acelerado no están de acuerdo respecto a la identificación de modos con frecuencias positivas y negativas, y como consecuencia, su definición de vacío también va a diferir. Los operadores de creación y aniquilación (definidos para campos libres) son diferentes aunque están relacionados por la transformación de Bogoliubov apropiada, lo cual explica por qué el número de partículas (que se define a partir de estos operadores) será diferente para los dos observadores.

Denotaremos a los correspondientes estados de vacío como  $|\Omega\rangle$  (Minkowski) y  $|\Omega'\rangle$  (Rindler). Para los observadores acelerados, quienes siguen órbitas del vector de Killing temporal  $\xi = \partial_{t'}$ , existe un horizonte en el borde de la cuña de Rindler,  $x = |t|$ , o equivalentemente,  $x' \rightarrow -\infty$ , con gravedad superficial

$$k_h \equiv -\frac{1}{2} (\nabla_{\mu} \xi_{\nu} \nabla^{\mu} \xi^{\nu})_{\text{horizonte}} = A. \quad (2.9)$$

Como resultado, un estado que es puro desde el punto de vista del observador inercial, en general se va a mezclar desde el punto de vista del observador acelerado, porque los grados de libertad en la cuña de Rindler se van a entrelazar con grados de libertad de la región detrás del horizonte. En particular, los observadores de Rindler van a interpretar el vacío de Minkowski  $|\Omega\rangle$  como un baño térmico [91, 92, 99, 102, 103] con temperatura local

$$T(x') = \frac{k_h}{2\pi \sqrt{-\xi \cdot \xi}} = T_U \exp(-Ax'), \quad (2.10)$$

donde

$$T_U = \frac{A}{2\pi} \quad (2.11)$$

denota la temperatura de Unruh, que no es más que la temperatura del baño térmico en la ubicación (promedio) del quark.

Más específicamente, dado un conjunto de operadores locales  $\mathcal{O}_i(x'^{\mu})$  evaluados en la cuña de Rindler, el efecto Unruh esencialmente establece que

$$\langle \Omega | \mathcal{O}_1(x'_1{}^{\mu}) \cdots \mathcal{O}_n(x'_n{}^{\mu}) | \Omega \rangle = \text{Tr} \left( e^{-H'/T_U} \mathcal{O}_1(x'_1{}^{\mu}) \cdots \mathcal{O}_n(x'_n{}^{\mu}) \right), \quad (2.12)$$

donde  $H' \equiv -P_{t'} = -A(xP_t + tP_x)$  es el Hamiltoniano de Rindler, es decir, el generador de translaciones en  $t'$ , y la traza corre sobre todos los estados de Rindler. Esta equivalencia se discute frecuentemente en términos de campos escalares libres, pero ha sido probada para toda teoría con campos interactuantes arbitrarios, sobre un espaciotiempo plano [104, 105, 106].

Ahora, cuando la métrica AdS es foliada radialmente en coordenadas de Poincaré, en cada posición radial  $z$  el punto  $x^\mu$  se identifica directamente con el punto  $x^\mu$  de la teoría de norma, de forma que la transformación en el bulto que es dual a (2.7) es simplemente

$$\begin{aligned} t &= A^{-1} \exp(Ax') \sinh(At'), \\ x &= A^{-1} \exp(Ax') \cosh(At'), \\ \vec{x}_\perp &= \vec{x}'_\perp, \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bajo esta transformación de coordenadas, la métrica en el bulto queda

$$ds_{\text{AdS}}^2 = \frac{L^2}{z'^2} \left[ e^{2Ax'} \left( -dt'^2 + dx'^2 \right) + d\vec{x}'_\perp{}^2 + dz'^2 \right]. \tag{2.14}$$

A partir de (1.97) se puede ver fácilmente que la métrica (2.14) describe el estado de la teoría de norma donde

$$\langle T'_{\mu\nu}(x') \rangle = 0, \tag{2.15}$$

es decir, el vacío de Minkowski  $|\Omega\rangle$ . Esto al parecer contradice el enunciado (2.12), pero en realidad, el tensor energía momento del medio térmico se manifiesta considerando la *diferencia*

$$\langle T'_{\mu\nu}(x') \rangle_{\text{medio}} \equiv \langle \Omega | T'_{\mu\nu}(x') | \Omega \rangle - \langle \Omega' | T'_{\mu\nu}(x') | \Omega' \rangle = -\langle \Omega' | T'_{\mu\nu}(x') | \Omega' \rangle. \tag{2.16}$$

En otras palabras, el vacío de Rindler  $|\Omega'\rangle$  es asignado naturalmente con una densidad de energía *negativa*, que refleja la *ausencia* de medio [107, 108]. Volveremos a este punto en el siguiente apartado, en donde podremos determinar (2.16) a partir de una transformación apropiada en el bulto.

En (2.14) encontramos un horizonte en  $x' \rightarrow -\infty$ , justo como en (2.8) pero en este caso extendido en la dirección radial, lo cual refleja el hecho de que este horizonte afecta por igual a todos los modos gluónicos, desde el UV en  $z = 0$  hasta el IR en  $z \rightarrow \infty$ . La temperatura de Unruh en el bulto es de nuevo (2.11).

En este sistema de coordenadas, el encaje de la cuerda (2.5) se traduce en

$$X'(t', z') = \frac{1}{2A} \ln \left( 1 - A^2(z'^2 - z_m^2) \right), \tag{2.17}$$

el cual está en reposo, como esperábamos. El hecho de que la cuerda no esté vertical sino que se dobla en dirección  $-x'$  es reflejo de que un encaje puramente radial no

tendría un área mínima: de igual forma que en la teoría de campos las trayectorias con  $x'$  fijo no son geodésicas, los objetos en este marco de referencia tienden a “caer” hacia la izquierda (aparte de ser atraídos hacia arriba, a lo largo de la dirección radial, efecto que ya estaba presente en el sistema no primado).

Como nuestra cuerda vive en el espaciotiempo Rindler-AdS (2.14), esperamos que ésta se encuentre expuesta a un medio térmico. Para ver esto más en detalle, notamos que el punto  $(t, z)$  en el encaje de la cuerda (2.5) sigue una trayectoria hiperbólica  $x^2 - t^2 = A^{-2} - z^2 + z_m^2$ , la cual, desde el punto de vista de la teoría de campos corresponde a la  $d$ -aceleración (definida en (2.1))  $A_{\text{CFT}}(z) = 1/\sqrt{A^{-2} - z^2 + z_m^2}$ , y desde el punto de vista del bulto corresponde a la  $(d+1)$ -aceleración

$$A_{\text{AdS}}(z) \equiv \sqrt{(U^M D_M U^N)(U^P D_P U_N)} = \frac{1}{L} \sqrt{1 + A_{\text{CFT}}^2(z) z^2}, \quad (2.18)$$

donde  $D_M$  es la derivada covariante en el bulto y  $U^M$  la  $(d+1)$ -velocidad. La versión del efecto Unruh para este espacio AdS predice que un observador que sigue esta trayectoria va a sentirse inmerso en un baño térmico con temperatura local [109, 110, 111]

$$T(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{A_{\text{AdS}}^2(z) - L^{-2}} = \frac{z A_{\text{CFT}}(z)}{2\pi L}. \quad (2.19)$$

Es fácil verificar que, aparte del factor  $z/L$  que surge de la diferencia entre los tiempos propios del bulto y de la teoría de norma, ésta es precisamente la temperatura esperada de la teoría de norma (2.10) en el punto  $x'$  donde se encuentra el segmento de cuerda en  $z' = z$ .

La métrica inducida en la hoja de mundo resulta ser

$$\begin{aligned} g_{t't'} &= -\frac{L^2}{z'^2} \left( 1 - A^2(z'^2 - z_m^2) \right), \\ g_{t'z'} &= 0, \\ g_{z'z'} &= \frac{L^2}{z'^2} \left( \frac{1 + A^2 z_m^2}{1 - A^2(z'^2 - z_m^2)} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

la cual corresponde a un agujero negro estático con horizonte en  $z' = z_h$ , y temperatura de Unruh/Hawking asociada dada por (2.11).

### 2.3.2. Cambio de marco conforme y eliminación del horizonte de Rindler

La presencia de un horizonte de Rindler en la teoría de norma surge del factor  $\exp(2Ax')$  en el elemento de línea (2.8), así que el hecho de que estamos trabajando con una teoría conforme nos presenta una posibilidad interesante: podemos remover el factor correspondiente en la métrica realizando un cambio de marco conforme. Para ser más precisos,

entre en número infinito de marcos conformes disponibles para un observador situado en el quark, podemos escoger aquel que está relacionado con (2.8) a partir de una transformación de Weyl tal que  $ds_{\text{CFT}}^2 \rightarrow \exp(-2Ax')ds_{\text{CFT}}^2$ , obteniendo

$$ds_{\text{CFT}}^2 = -dt''^2 + dx''^2 + e^{-2Ax''} d\vec{x}''_{\perp}{}^2. \quad (2.21)$$

Por definición, una transformación de Weyl reescala localmente la métrica dejando las coordenadas invariantes;<sup>3</sup> sin embargo, hemos reetiquetado las coordenadas con dobles primas en lugar de primas por motivos que más adelante serán evidentes. El elemento de línea (2.21) es conocido como el universo abierto de Einstein,  $\mathbf{R} \times \mathbf{H}^{d-1}$ . Nuestra parametrización del espacio hiperbólico está relacionado con las coordenadas de Poincaré usuales a través de  $\tilde{x}'' \equiv A^{-1} \exp(Ax'')$ , y con el caso más familiar de Robertson-Walker estático ( $k = -1$ ), a través de [98]

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' &= \frac{A^{-1}}{\cosh \chi'' - \sinh \chi'' \cos \theta_1''}, \\ x_2'' &= \frac{A^{-1} \sinh \chi'' \sin \theta_1'' \cos \theta_2''}{\cosh \chi'' - \sinh \chi'' \cos \theta_1''}, \\ &\vdots \\ x_{d-1}'' &= \frac{A^{-1} \sinh \chi'' \sin \theta_1'' \cdots \sin \theta_{d-2}''}{\cosh \chi'' - \sinh \chi'' \cos \theta_1''}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ingenuamente pensaríamos que la posibilidad de remover el horizonte podría hacer que la interpretación del vacío de Minkowski como un estado térmico dependiera del marco conforme particular que escojamos, en cuyo caso el efecto Unruh de alguna manera no estaría del todo presente en la teoría conforme. Este problema fue estudiado en el contexto de campos libres hace ya un par de décadas [98, 99]. Veremos a continuación que mediante la correspondencia AdS/CFT es posible atacar este mismo problema, analizando el caso de teorías conformes fuertemente acopladas, a partir de la perspectiva gravitacional.

Ahora, como fue explicado en [94], se sabe que una transformación de Weyl en la teoría de norma es dual a un difeomorfismo en el bulto tal que la métrica preserva la forma

---

<sup>3</sup>Para una mayor claridad observamos que, en la literatura de Relatividad General, estos mapeos son directamente llamados transformaciones conformes, pero es frecuente que en la literatura de teoría de campos conformes y teoría de cuerdas se reserve esta última denominación para mapeos que dejan la métrica invariante mientras que las coordenadas son reescaladas de tal forma que se preservan los ángulos. En cualquiera de estas presentaciones, estas transformaciones inducen reescalamientos locales de las longitudes propias, y por lo tanto son diferentes de los llamados difeomorfismos conformes (o isometrías conformes), los cuales transforman tanto la métrica como las coordenadas dejando las longitudes propias invariantes. Una transformación conforme siempre se puede descomponer en un difeomorfismo conforme y una transformación de Weyl escogida de tal forma que la métrica regrese a su forma original. De esto se deduce entonces que, en cualquier teoría invariante bajo difeomorfismos, la invariancia de Weyl implica invariancia conforme, pero lo contrario sólo es válido en 2 dimensiones, ya que para  $d > 2$  las transformaciones conformes constituyen sólo un grupo de dimensión finita (por ejemplo,  $SO(d, 2)$  para métricas conformalmente planas).

de Fefferman-Graham (1.86). Concretamente,  $g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \exp(2\omega(x))g_{\mu\nu}(x)$  corresponde a una transformación de coordenadas en el bulto que involucra  $z \rightarrow \exp(\omega(x))z$  y un cambio en  $x^\mu$  que prevenga la aparición de términos cruzados tipo  $z\text{-}\mu$  en la métrica del bulto. Entonces, teniendo en cuenta esta familia de difeomorfismos, se entiende que una métrica en el bulto induce no una métrica específica en la frontera, sino una estructura conforme específica [4]. En particular, las transformaciones de Weyl que llevan de (2.8) a (2.21) son duales a un difeomorfismo en el bulto que cambia la foliación radial de acuerdo a<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} t' &= t'', \\ x' &= x'' + A^{-1} \ln \left( \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \sqrt{1 - A^2 z''^2} \right), \\ \vec{x}'_\perp &= \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \vec{x}''_\perp, \\ z' &= \sqrt{1 + A^2 z_m^2} z'' \exp(Ax''). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Esto convierte la métrica (2.14) en

$$ds_{\text{AdS}}^2 = \frac{L^2}{z''^2} \left[ - \left( 1 - A^2 z''^2 \right) dt''^2 + dx''^2 + e^{-2Ax''} d\vec{x}''_\perp{}^2 + \frac{dz''^2}{1 - A^2 z''^2} \right], \tag{2.24}$$

que en efecto da origen a (2.21) en la frontera. Esta métrica puede llevarse de vuelta a la forma Fefferman-Graham a través de la transformación trivial  $z'' = \tilde{z}/(1 + A^2 \tilde{z}^2/4)$ .

De este elemento de línea queda claro que el horizonte inducido por la aceleración aún está presente en el bulto, y que aún tiene una temperatura de Unruh asociada (2.11), pero ahora se ubica en el plano radial  $z'' = A^{-1} = 2\pi/T_U$ , lo cual explica por qué ya no es visible como un horizonte desde la perspectiva de la teoría de campos. En otras palabras, en este nuevo marco conforme, el carácter térmico de la teoría de campo surge no a partir del entrelazamiento con grados de libertad que viven detrás del horizonte en el espaciotiempo, sino de la identificación directa de la escala energética  $T_U$  como la temperatura de la teoría de campos.

Para el caso  $d = 2$  (en donde trabajamos con  $\text{AdS}_3$ ), y bajo una identificación periódica apropiada de la coordenada  $x''$ , la métrica (2.24) se convierte en un agujero negro BTZ [112, 113]. Sin embargo, en nuestro caso  $x''$  es no compacto y por lo tanto lo que nos queda (para todos los valores de  $d$ ) no es un agujero negro sino una porción de  $\text{AdS}_{d+1}$ .

Ahora que entendemos el significado preciso de nuestra transformación de coordenadas, centremos nuestra atención de nuevo en el comportamiento de la cuerda. En el nuevo sistema de coordenadas, el encaje de la cuerda (2.17) es simplemente

$$X''(t'', z'') = 0, \tag{2.25}$$

el cual es estático y vertical. Esto refleja el hecho de que en el nuevo marco conforme ya no existe un potencial gravitacional que atraiga los objetos hacia la izquierda tal

<sup>4</sup>Por conveniencia, también incluimos un reescalamiento rígido de las direcciones transversales.

como sucedía en el sistema de coordenadas primado. Notar además que la geometría del espaciotiempo (2.24) en la ubicación de la cuerda, que es la relevante para el cálculo de pequeñas fluctuaciones, no hace distinción entre las direcciones  $x''$  y  $\vec{x}''_{\perp}$ , de tal forma que el quark está inmerso en un medio térmico que (a primer orden) es isotrópico. El extremo de la cuerda está en  $z'' = z_m/\sqrt{1+A^2z_m^2} \equiv z''_m$ . Como se explicó en la sección 1.2.6, del lado de la teoría de campos la longitud  $z''_m$  indica el tamaño característico de la “nube gluónica” que rodea el quark, o en otras palabras, la longitud de onda de Compton del quark.

La métrica inducida en la hoja de mundo para las nuevas coordenadas coincide ahora con la porción  $(t'', z'')$  de la métrica en el espaciotiempo,

$$\begin{aligned} g_{t''t''} &= -\frac{L^2}{z''^2} \left(1 - A^2 z''^2\right), \\ g_{t''z''} &= 0, \\ g_{z''z''} &= \frac{L^2}{z''^2} \left(1 - A^2 z''^2\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

de forma que preserva el mismo horizonte en  $z'' = A^{-1} \equiv z''_h$ . Sin embargo, debido a que la hoja de mundo es de dimensión dos, la línea  $z'' = A^{-1}$  presente en cualquiera de los tres sistemas coordenados es un horizonte de eventos, y la región detrás de éste contiene un agujero negro verdadero.

Combinando (2.13) y (2.23), la relación entre el sistema original y el sistema doblemente primado resulta ser

$$\begin{aligned} t &= A^{-1} \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \sqrt{1 - A^2 z''^2} \exp(Ax'') \sinh(At''), \\ x &= A^{-1} \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \sqrt{1 - A^2 z''^2} \exp(Ax'') \cosh(At''), \\ \vec{x}_{\perp} &= \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \vec{x}''_{\perp}, \\ z &= \sqrt{1 + A^2 z_m^2} z'' \exp(Ax''). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dicha transformación había sido encontrada en [113], y considerada en el contexto de la correspondencia AdS/CFT por [88, 93], pero su interpretación precisa en términos de la teoría de campos no había sido previamente elucidada.

## 2.4 El tensor energía momento de Unruh

Pasaremos ahora a estudiar el tensor energía momento que siente el quark uniformemente acelerado. Para esto, utilizamos los resultados de la sección 1.3.4, en donde se obtuvieron las funciones de un punto tras la renormalización holográfica apropiada.

Usando (1.97), es posible deducir de la métrica (2.24) el valor esperado del tensor

energía momento de nuestra teoría de campos en el universo abierto de Einstein (2.21),

$$\langle T_{\mu}{}^{\nu} \rangle = \begin{cases} 0 & d \text{ impar,} \\ \frac{LA^2}{16\pi G_N^{(3)}} \text{diag}(-1, 1) & d = 2, \\ \frac{L^3 A^4}{64\pi G_N^{(5)}} \text{diag}(-3, 1, 1, 1) & d = 4, \\ \frac{L^5 A^6}{128\pi G_N^{(7)}} \text{diag}(-5, 1, 1, 1, 1, 1) & d = 6. \end{cases} \quad (2.28)$$

Esto está en completo acuerdo con los resultados de [96], donde estos tensores de energía momento fueron obtenidos en el contexto de una investigación más general de agujeros negros hiperbólicos en AdS/CFT (cuyas conclusiones nos servirán para nuestro análisis a continuación).<sup>5</sup>

A partir de (2.28) nos damos cuenta que, para dimensiones pares, el valor esperado del tensor energía momento es diferente de cero a pesar de que estamos en un estado conformalmente relacionado con el vacío de Minkowski. Esto se debe a que nuestra teoría de campos, que clásicamente es invariante de Weyl, cuánticamente presenta una anomalía que rompe esta simetría [114, 115, 116] (ver las revisiones [99, 117]). Cuando la teoría de norma está definida sobre un fondo curvo con métrica  $g_{\mu\nu}$ , la traza del tensor energía momento es genéricamente diferente de cero,

$$\langle T_{\mu}{}^{\mu} \rangle_g = \begin{cases} \frac{c}{24\pi} R & d = 2, \\ \frac{1}{16\pi^2} \left[ \alpha \left( R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2 \right) \right. \\ \quad \left. + \beta \left( R_{\mu\nu\lambda\rho} R^{\mu\nu\lambda\rho} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2 \right) \right] & d = 4, \end{cases} \quad (2.29)$$

y similarmente para  $d = 6$ , donde  $c$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes numéricas que dependen del contenido de campos.

Una de las pruebas más impresionantes que dan soporte a la correspondencia AdS/CFT es el hecho de que la anomalía de Weyl puede ser reproducida, a nivel clásico, a partir del dual gravitacional. Esto fue mostrado por primera vez en [55, 56], siguiendo una sugerencia de [4]. De hecho, el tensor energía momento (1.97), obtenido derivando funcionalmente la acción gravitacional renormalizada (es decir, Einstein-Hilbert más contratérminos escogidos apropiadamente para eliminar las divergencias IR), tiene una traza que está de acuerdo con (2.29), donde

$$c = \frac{3L}{2G_N^{(3)}}, \quad \alpha = \frac{\pi L^3}{8G_N^{(5)}} = -\beta. \quad (2.30)$$

<sup>5</sup>El caso  $d = 4$  también fue considerado recientemente en [93].

Se puede demostrar que estos coeficientes coinciden con los esperados en acoplamiento débil (y en el límite de  $N$  grande) para el contenido de campos de la teoría, en todos los casos donde ésta se conoce [55, 56]. Por ejemplo, para SYM  $\mathcal{N} = 4$ , se sabe que  $\alpha = -\beta = N^2/4$ , en concordancia con (2.30).

Es fácil verificar que, para la métrica de Rindler (2.8) y para la métrica del universo abierto de Einstein (2.21), la expresión para la anomalía de Weyl da cero (en el primer caso es trivial dado que el espacio es plano). Esto es consistente con el hecho de que los correspondientes tensores de energía momento (2.15) y (2.28) tienen traza nula, lo cual implica que, comenzando con cualquiera de estos fondos, transformaciones de Weyl *infinitesimales* son simetrías verdaderas. Para ir del sistema primado al doblemente primado, sin embargo, lo que se hace es una transformación de Weyl *finita*, lo cual no es una simetría verdadera, dado que la anomalía es diferente de cero para todas las métricas intermedias. Este es el origen de la transformación anómala para el tensor energía momento.

En más detalle, para una teoría que es clásicamente invariante de Weyl, la transformación  $\bar{g} \rightarrow g \equiv \exp(2\omega)\bar{g}$ , siendo  $\bar{g}$  una métrica plana, induce un cambio en el tensor energía momento que es el resultado de integrar la anomalía de Weyl en métricas intermedias. Por ejemplo, para  $d = 4$  [99, 118, 119, 120],

$$\langle T_{\mu}{}^{\nu} \rangle_g = \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} \langle T_{\mu}{}^{\nu} \rangle_{\bar{g}} + \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{9} \alpha H_{\mu}^{(1)\nu} + 2\beta H_{\mu}^{(3)\nu} \right], \quad (2.31)$$

donde

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(1)} &\equiv -2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R - 2g_{\mu\nu}\nabla^2R + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 - 2RR_{\mu\nu}, \\ H_{\mu\nu}^{(3)} &\equiv -R_{\mu}{}^{\rho}R_{\rho\nu} + \frac{2}{3}RR_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho}g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}R^2g_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Como la correspondencia AdS/CFT reproduce correctamente la anomalía de Weyl, el tensor energía momento (1.97) debería transformar automáticamente de esta forma. Esto fue verificado explícitamente en [57] para transformaciones de Weyl infinitesimales dada una métrica arbitraria. En nuestro caso, dado el hecho que  $\langle T'_{\mu\nu} \rangle = 0$  en el vacío de Minkowski, y según las métricas (2.8) y (2.21), es fácil verificar que el tensor en el marco doblemente primado (2.28) de hecho tiene la forma esperada para una transformación de Weyl finita, y en particular satisface (2.31) para  $d = 4$ .

El cambio en el tensor energía momento inducido por la anomalía de Weyl es puramente geométrico, y por lo tanto independiente del estado en el cual es calculado el valor esperado. En particular, (2.31) se mantiene igual para el vacío de Minkowski  $|\Omega\rangle$  y el vacío de Rindler  $|\Omega'\rangle$ . Esto implica que el tensor energía momento del medio térmico de Unruh, definido en (2.16) como la *diferencia* entre los valores esperados de Minkowski y de Rindler, está relacionado con la correspondiente diferencia en el universo abierto

de Einstein simplemente a través de

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{medio}} = \sqrt{\frac{g''}{g'}} \left( \langle \Omega | T_{\mu\nu}'' | \Omega \rangle - \langle \Omega' | T_{\mu\nu}'' | \Omega' \rangle \right). \quad (2.33)$$

El primer término del lado derecho de (2.33) está disponible en (2.28). Cálculos directos en teoría de campos muestran que  $\langle \Omega' | T_{\mu\nu}'' | \Omega' \rangle$  da cero para  $d = 4$  [97]. El resultado correspondiente para  $d$  arbitrario fue deducido por medio de la correspondencia AdS/CFT en [96]. En ese trabajo se consideró una familia infinita de agujeros negros hiperbólicos en  $\text{AdS}_{d+1}$  parametrizados por su temperatura. La traducción de sus resultados a nuestro lenguaje involucra la inversión usual de la coordenada radial,  $r \rightarrow z = L^2/r$ , seguida de un difeomorfismo en el bulto  $x^\mu/R \rightarrow Ax^\mu$ ,  $z/R \rightarrow Az$  (que es dual a una transformación conforme en la teoría de campos), obteniendo

$$ds_{\text{AdS-BH}}^2 = \frac{L^2}{z'^2} \left[ - \left( 1 - A^2 z'^2 - \frac{\mu}{L^{d-2}} A^d z'^d \right) dt'^2 + dx'^2 + e^{-2Ax''} d\vec{x}'_{\perp}{}^2 + \frac{dz'^2}{1 - A^2 z'^2 - \frac{\mu}{L^{d-2}} A^d z'^d} \right], \quad (2.34)$$

donde  $\mu$  es un parámetro que controla la temperatura del agujero negro  $T_{\text{BH}}$ . El caso  $\mu = 0$  coincide claramente con nuestra métrica AdS (2.24), y fue de hecho identificado en [96] como la métrica dual al vacío conforme de Minkowski de la teoría de campos definida en el universo abierto de Einstein. La solución extremal, a temperatura cero, tiene  $\mu/L^{d-2} = -2(d-2)^{d/2-1}/d^{d/2}$ , y según [96] es dual al vacío conforme de Rindler.<sup>6</sup> El tensor energía momento correspondiente es

$$\langle \Omega' | T_{\mu\nu}'' | \Omega' \rangle = \frac{L^{d-1} A^d}{16\pi G_{\text{N}}^{(d+1)}} \left( \frac{2\epsilon_{(d)}^0}{d-1} - \frac{2(d-2)^{d/2-1}}{d^{d/2}} \right) \text{diag}(d-1, 1, \dots, 1), \quad (2.35)$$

con  $\epsilon_{(d)}^0 = 0$  para  $d$  impar, y  $\epsilon_{(d)}^0 = (d-1)!!^2/d!$  para dimensiones pares.

Usando (2.28) y (2.35) en (2.33) podemos deducir finalmente el tensor energía momento del medio térmico de Unruh detectado (en el vacío de Minkowski) por el observador de Rindler,<sup>7</sup>

$$\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle_{\text{medio}} = \frac{(d-2)^{d/2-1} L^{d-1} A^d}{8\pi d^{d/2} G_{\text{N}}^{(d+1)}} e^{-dAx''} \text{diag}(d-1, 1, \dots, 1). \quad (2.36)$$

Podemos observar la divergencia esperada ( $\propto \check{x}''^{-d}$ ) en la densidad de energía local, a medida que nos acercamos al horizonte de Rindler [107, 108].

<sup>6</sup>En general, la geometría (2.34) es dual al estado de la teoría de norma (definida en el universo abierto de Einstein) conforme a un ensamble térmico del observador de Rindler a temperatura  $T_{\text{BH}}$ .

<sup>7</sup>Este resultado estaba implícito en [96], pero el efecto Unruh no era objeto de su investigación.

## CAPÍTULO 3

---

---

# FLUCTUACIONES CUÁNTICAS DE QUARKS ACELERADOS

---

---

### 3.1 Introducción

Como anunciamos en el capítulo 2, uno de los objetivos del presente trabajo es dar un paso más allá de la aproximación clásica del quark y estudiar las fluctuaciones cuánticas  $\delta x^\mu(\tau)$  inducidas en su trayectoria debido al acoplamiento con los campos gluónicos. Del lado gravitacional, cuando vamos más allá de la descripción clásica de la cuerda se encuentran dos efectos nuevos, los cuales están suprimidos por un factor de la longitud de la cuerda dividido por el radio de curvatura AdS, o equivalentemente (a través de (1.34)), por un factor inverso de la constante de acoplamiento de la teoría de campos. El primer efecto proviene de las fluctuaciones cuánticas habituales derivadas del determinante de la integral de trayectoria sobre los diversos encajes de la cuerda. Estos están presentes incluso para una cuerda estática (véase, por ejemplo, [121, 122]), y dan lugar a desviaciones espontáneas de la trayectoria promedio del quark, las cuales han sido estudiadas en [123]. El segundo efecto proviene del hecho de que el agujero negro de la hoja de mundo emite radiación de Hawking, excitando los diferentes modos de oscilación de la cuerda. Nos concentraremos únicamente en este segundo efecto, que está presente sólo para trayectorias aceleradas y, por lo tanto, las fluctuaciones inducidas en este caso se asocian a la radiación emitida por el quark. Sería interesante, en un futuro, poder determinar la forma en que se modifica el comportamiento del quark cuando se combinan ambos efectos.

Como es habitual, pequeñas fluctuaciones sobre el encaje promedio de la cuerda son descritas por campos escalares libres propagándose en la geometría correspondiente de la hoja de mundo. Nuestra tarea es entonces cuantizar estos modos y establecer la

forma en que las excitaciones generadas por la presencia del horizonte en la hoja de mundo hacen fluctuar al extremo de la cuerda. Este análisis va en paralelo con los trabajos [95, 124], en donde se estudió el mismo problema para una cuerda estática en el fondo Schwarzschild-AdS $_{d+1}$ , que es dual a un quark estático en presencia de un baño térmico. En estos trabajos se mostró que la radiación de Hawking en la hoja de mundo da lugar al movimiento Browniano esperado para el quark, cuya forma detallada es capturada por una ecuación de Langevin generalizada. Los autores de [95] llegaron a esta conclusión, para dimensiones arbitrarias, siguiendo los trabajos de [125, 126] y asumiendo que el estado de los campos cuánticos correspondientes es el vacío habitual de Hartle-Hawking (o Kruskal), el cual describe al agujero negro en equilibrio con su propia radiación térmica. Los autores de [124] se centraron en el caso  $d = 4$  y siguieron una ruta diferente pero equivalente, empleando la relación conocida entre la extensión de Kruskal de la geometría Schwarzschild-AdS y el formalismo de Schwinger-Keldysh del lado de la teoría de norma [41, 127, 128], junto con la conexión usual entre dicho formalismo y la ecuación de Langevin generalizada. Estos cálculos fueron detallados y generalizados más adelante en [129, 130, 131, 132].

Ahora, la solución de Mikhailov [47], describe la evolución de una cuerda en un espacio AdS, para una trayectoria arbitraria tipo tiempo del extremo de la cuerda, y con condiciones de frontera retardadas. El encaje de la cuerda encontrado por Mikhailov (1.61) es dual a un quark que se mueve en el vacío de la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$ . Genéricamente, la hoja de mundo descrita por esta solución presenta un agujero negro [44], a pesar de que el espaciotiempo sobre el cual se mueve la cuerda es AdS puro. Las fluctuaciones *cuánticas* que estamos buscando son las inducidas por la radiación de Hawking que emerge del horizonte presente en la hoja de mundo, y el análisis es similar al de las fluctuaciones *térmicas* estudiadas en [95, 124, 129, 130, 131, 132] (de hecho, la posibilidad de estudiar este tipo de fluctuaciones había sido mencionado brevemente en [129]). Sería interesante estudiar el caso de una trayectoria arbitraria para el quark, pero determinar la tasa de radiación de Hawking emitida por un agujero negro dinámico es sumamente complicado. Por simplicidad, estudiaremos únicamente el caso de aceleración constante, en donde el agujero negro inducido en la hoja de mundo resulta ser estático (por esta misma razón, los estudios de fluctuaciones térmicas realizados se han restringido sólo al caso de un quark estático [95, 124, 132] o moviéndose a velocidad constante [129, 131] con respecto al medio térmico).

La solución dual a un quark uniformemente acelerado fue encontrada en la sección 2.2 del capítulo anterior obteniendo el encaje (2.5) y su respectiva geometría en la hoja de mundo (2.6). El siguiente paso es entonces considerar pequeñas fluctuaciones alrededor de dicha solución, las cuales van a estar causalmente conectadas (en la hoja de mundo) solamente con la porción  $z_m \leq z \leq z_h$  de la cuerda. Ahora, según los resultados obtenidos en el análisis del capítulo 2, un quark uniformemente acelerado va a sentirse inmerso en un baño térmico como consecuencia directa del efecto Unruh. Es de esperarse entonces que las fluctuaciones cuánticas que estamos buscando estén relacionadas con las fluctuaciones que experimenta un observador acelerado, interpretadas en este

caso como fluctuaciones térmicas. De hecho, en el capítulo 2 se concluyó que bajo los difeomorfismos apropiados, tanto el encaje obtenido (2.25) (que ahora es estático y completamente vertical), como la geometría de fondo (2.24), en la ubicación de la cuerda, coinciden exactamente con la configuración *térmica* analizada en [95] para el caso  $d = 2$  (recordemos que para el caso  $d > 2$ , las propiedades termodinámicas del medio predicho por Unruh son diferentes a las del ensamble térmico homogéneo e isotrópico que es dual al fondo Schwarzschild-AdS $_{d+1}$ ). Esto simplifica considerablemente nuestro cálculo de fluctuaciones, el cual se reduce ahora a traducir los resultados de vuelta al marco inercial a partir de las fluctuaciones que siente un observador en el universo abierto de Einstein.

En el apartado 3.2, obtenemos de [95] la ecuación de Langevin generalizada (3.41), que describe la forma en que el medio térmico, en el universo abierto de Einstein, hace fluctuar a nuestro quark, y deducimos su aproximación local (3.44), que es válida cuando se examina la dinámica en escalas de tiempo que son grandes en comparación con la longitud de onda de Compton del quark. Más adelante, en el apartado 3.3, traducimos todas las cantidades correspondientes al marco original, con lo que se concluye que la radiación emitida por el quark induce fluctuaciones cuánticas en su trayectoria, que obedecen a las ecuaciones (3.50)-(3.53), que es el principal resultado de este capítulo. Para ciertas escalas temporales, estas ecuaciones se pueden simplificar a su forma local (3.54)-(3.57).

La característica más importante de estas ecuaciones (en cualquiera de las dos versiones) es su dependencia explícita respecto al tiempo, en contraste con sus progenitoras provenientes del medio térmico en el universo abierto de Einstein, pero esto era por supuesto lo esperado, dado que la radiación emitida por el quark uniformemente acelerado varía continuamente. Otra característica destacada es la anisotropía entre las direcciones longitudinal y transversal, que es de nuevo inherente a la definición del sistema en el marco de referencia inercial. Las ecuaciones de movimiento obtenidas para las fluctuaciones de un quark que experimenta aceleración uniforme en el vacío de la teoría de norma son un tanto similares a las de [129, 131], que consideran las fluctuaciones térmicas de un quark con velocidad constante (y posiblemente relativista) a través de un plasma térmico. En nuestro caso, la anisotropía es tan marcada que da lugar a una ecuación de movimiento longitudinal que, a diferencia de la ecuación transversal, contiene un término lineal en la fluctuación y por consiguiente no es tipo Langevin generalizada. Además, encontramos que los coeficientes de fricción (3.57) presentan otra característica curiosa pues los signos de tales términos, en el caso longitudinal, resultan ser contrainintuitivos en un determinado periodo de tiempo. Curiosidad aparte, la conexión directa con la ecuación de Langevin generalizada en el marco del universo abierto de Einstein, por supuesto, asegura que la ecuación de fluctuaciones longitudinales conduce a una evolución física razonable. La obtención de estas ecuaciones, para el caso de sistemas fuertemente acoplados, constituye otro ejemplo de la utilidad de la correspondencia AdS/CFT.

## 3.2 Fluctuaciones térmicas en el medio de Unruh

Estamos listos ya para determinar la forma de las fluctuaciones cuánticas del extremo de la cuerda, examinando cómo las pequeñas fluctuaciones del encaje son excitadas por medio de la radiación de Hawking que surge del agujero negro en la hoja de mundo. Claramente sería más fácil realizar dicho cálculo ya sea en el sistema de coordenadas primado o el sistema doblemente primado (definidos en el capítulo 2) donde la geometría del agujero negro es estática de forma manifiesta. Del análisis de la sección 2.4 sabemos además que la configuración en el sistema doblemente primado es dual a un quark estático inmerso en un baño térmico, que a orden cero en la fluctuación parece isotrópico alrededor de la ubicación del quark. Es natural entonces esperar que el cálculo en dicho sistema vaya en paralelo con los análisis de fluctuaciones térmicas realizados en [95, 124].

Sorprendentemente, para el caso  $d = 2$ , el encaje de la cuerda (2.25) y la métrica en el espaciotiempo (2.24) en la ubicación de la cuerda coinciden *exactamente* con la métrica correspondiente y el encaje considerados en [95]. Debido a esto, conviene hacer una revisión de sus resultados más importantes, para más adelante poder utilizarlos en el contexto de la presente investigación. En primer lugar, comenzaremos presentando los conceptos básicos que describen el movimiento Browniano y la dinámica de Langevin asociada a partículas inmersas en un medio térmico. Después, estudiaremos la implementación de dicho fenómeno bajo la correspondencia AdS/CFT siguiendo el trabajo de [95], concentrándonos principalmente en el caso  $d = 2$  que más adelante será de nuestro interés. Finalmente, traduciremos estos resultados para leer las fluctuaciones asociadas al medio térmico de Unruh en dimensiones arbitrarias.

### 3.2.1. Movimiento Browniano y dinámica de Langevin

Comenzaremos presentando la ecuación de Langevin *local*, que es el modelo más simple para describir la dinámica de una partícula Browniana, de masa  $m$ , no relativista. En una dimensión espacial la ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\dot{p}(t) = -\gamma_0 p(t) + f(t), \quad (3.1)$$

donde  $p = m\dot{x}$  es el momento (no relativista) de la partícula. Los dos términos al lado derecho de (3.1) corresponden a una fuerza de fricción y una fuerza aleatoria, respectivamente, y  $\gamma_0$  es una constante llamada coeficiente de fricción. La partícula pierde energía continuamente debido al término de fricción y, además, recibe pequeños golpes por parte de las partículas que componen el medio, lo cual es modelado mediante la fuerza aleatoria. Asumiendo que esta fuerza es independiente a tiempos diferentes (ruido blanco),  $f$  debe satisfacer los siguientes promedios estadísticos:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = \kappa_0 \delta(t - t'), \quad (3.2)$$

donde  $\kappa_0$  es una constante. La separación de la fuerza en un término de fricción y un término aleatorio del lado derecho de (3.1) es sólo una simplificación fenomenológica. Microscópicamente las dos fuerzas tienen el mismo origen: colisiones con los constituyentes del medio.

Asumiendo la equipartición de la energía,  $\langle m\dot{x}^2 \rangle = T$ , donde  $T$  es la temperatura,<sup>1</sup> es posible derivar la siguiente evolución para el desplazamiento cuadrático:

$$\langle s(t)^2 \rangle \equiv \langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = \frac{2D}{\gamma_0} (\gamma_0 t - 1 + e^{-\gamma_0 t}) \approx \begin{cases} \frac{T}{m} t^2 & (t \ll 1/\gamma_0) \\ 2Dt & (t \gg 1/\gamma_0) \end{cases} \quad (3.3)$$

donde la constante de difusión  $D$  está dada por

$$D = \frac{T}{\gamma_0 m}. \quad (3.4)$$

Podemos ver que en el régimen *balístico*,  $t \ll 1/\gamma_0$ , la partícula se mueve inercialmente ( $s \sim t$ ) con velocidad determinada por la equipartición,  $\dot{x} \sim \sqrt{T/m}$ , mientras que en el régimen *difusivo*,  $t \gg 1/\gamma_0$ , la partícula sigue una caminata aleatoria ( $s \sim \sqrt{t}$ ). Esto se debe a que la partícula Browniana debe ser golpeada un número determinado de veces antes de que su trayectoria se desvíe sustancialmente de su dirección inicial. El tiempo de transición entre los dos regímenes está dado por el tiempo de relajación

$$t_{\text{relax}} \sim \frac{1}{\gamma_0}, \quad (3.5)$$

el cual caracteriza la escala de tiempo en la cual la partícula olvida sus condiciones iniciales y termaliza. Adicionalmente, uno puede obtener una relación entre el coeficiente de fricción  $\gamma_0$  y la magnitud de la fuerza aleatoria  $\kappa_0$

$$\gamma_0 = \frac{\kappa_0}{2mT}, \quad (3.6)$$

y esto constituye el ejemplo más sencillo del llamado teorema fluctuación-disipación que surge como consecuencia de que la fuerza de fricción y la fuerza aleatoria tienen un mismo origen microscópico.

En  $n$  dimensiones espaciales,  $p$  y  $f$  en (3.1) se generalizan a vectores de  $n$  componentes y (3.2) se generaliza a

$$\langle f_i(t) \rangle = 0, \quad \langle f_i(t) f_j(t') \rangle = \kappa_0 \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (3.7)$$

donde  $i, j = 1, \dots, n$ . En el régimen difusivo, el desplazamiento cuadrático se modifica a  $\langle s(t)^2 \rangle \approx 2nDt$ , mientras que las relaciones (3.4) y (3.6) resultan ser independientes de  $n$ .

<sup>1</sup>Se trabaja en unidades donde la constante de Boltzmann  $k_B = 1$ .

Volvamos ahora al caso de una dimensión espacial ( $n = 1$ ). La ecuación de Langevin (3.1), captura las características esenciales de la física que nos interesa, pero es muy simple por dos razones: asume que la fricción es instantánea y que no hay correlación entre la fuerza aleatoria a tiempos diferentes. Si la partícula Browniana no es infinitamente más masiva que las partículas del medio, estas suposiciones dejan de ser válidas; la fricción va a depender de la historia de la partícula y la fuerza aleatoria a tiempos diferente no será totalmente independiente. Podemos incorporar dichos efectos modificando la ecuación (3.1) a la llamada ecuación de Langevin generalizada,

$$\dot{p}(t) = - \int_{-\infty}^t dt' \gamma(t-t') p(t') + f(t) + K(t). \quad (3.8)$$

Ahora la fricción depende de la trayectoria pasada a través del *kernel de memoria*  $\gamma(t)$ . En este caso, la fuerza aleatoria satisface los siguientes promedios estadísticos

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = \kappa(t-t'), \quad (3.9)$$

donde  $\kappa(t)$  es alguna función que depende del tiempo (ruido de color). Además, se ha incluido una fuerza externa  $K(t)$  que puede ser aplicada a la partícula Browniana.

La ecuación de Langevin generalizada hace contacto con su versión local en el límite de bajas frecuencias. En este caso, se puede demostrar que los regímenes balístico y difusivo se conservan (para tiempos tempranos y tardíos, respectivamente), a pesar de que la solución exacta para el desplazamiento cuadrático se modifica. Para la ecuación de Langevin generalizada, lo que corresponde al tiempo de relajación es

$$t_{\text{relax}} = \left[ \int_0^{\infty} dt \gamma(t) \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

Veremos ahora la realización holográfica del movimiento Browniano formulada en [95].

### 3.2.2. Movimiento Browniano en AdS/CFT

La correspondencia AdS/CFT estipula que una teoría de cuerdas en un fondo asintóticamente AdS $_{d+1}$  (por una variedad compacta) es dual a una teoría de campos en  $d$  dimensiones. Con las mismas condiciones de frontera, diferentes configuraciones de los campos que viven en el espaciotiempo (incluyendo a la métrica), representan diferentes estados de la teoría dual. En particular, el agujero negro AdS-Schwarzschild cuya métrica está dada por

$$ds_{d+1}^2 = \frac{r^2}{L^2} [-f(r)dt^2 + (dX^i)^2] + \frac{L^2}{r^2 f(r)} dr^2, \quad f(r) = 1 - \left( \frac{r_H}{r} \right)^d, \quad (3.11)$$

es dual a una teoría de campos cuya temperatura es igual a la temperatura de Hawking del agujero negro,

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{d r_H}{4\pi L^2}. \quad (3.12)$$

En este sistema de coordenadas,  $r = L^2/z$  representa la coordenada radial,  $t$  es el tiempo, y  $X^i = (X^1, \dots, X^{d-1})$  son las coordenadas espaciales transversales. Nos centraremos de aquí en adelante en el caso  $d = 2$ .

Como se explicó en la sección (1.2.5), introducir un quark de prueba de masa  $m$  en la teoría de campos corresponde a introducir una cuerda en el bulto que se extiende desde el lugar donde terminan las branas de sabor,  $r = r_m$ , hasta el horizonte del agujero negro en  $r = r_H$ . Además, si el quark no es forzado externamente, la cuerda debe satisfacer condiciones de frontera de Neumann

$$\partial_r X = 0 \quad \text{en} \quad r = r_m. \quad (3.13)$$

Es de esperarse que un quark inmerso en un baño térmico desarrolle movimiento Browniano como resultado de las colisiones con las demás partículas del medio. En el bulto, este efecto se entiende debido a que la radiación de Hawking asociada al agujero negro en la *hoja de mundo* excita los diferentes modos de vibración de la cuerda, haciendo fluctuar su extremo en  $r = r_m$ .

En la configuración estudiada en [95] se consideró una cuerda estática, con encaje  $X = 0$ , que es dual a un quark que en promedio se encuentra en reposo. La dinámica de la cuerda es descrita por la acción de Nambu-Goto usual. Para estudiar pequeñas fluctuaciones por encima de esta configuración, se aproxima la acción alrededor de  $X = 0$  quedándonos hasta orden cuadrático en  $X$ . En la norma estática

$$S_{\text{NG}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} \approx \frac{1}{4\pi\alpha'} \int dt dr \left[ \frac{(\partial_t X)^2}{f} - r^4 f (\partial_r X)^2 \right], \quad (3.14)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es la métrica inducida en la hoja de mundo. En el caso donde la geometría del espaciotiempo presenta un agujero negro, la métrica inducida en la hoja de mundo desarrolla genéricamente un horizonte independientemente de la configuración de la cuerda pero, desde luego, la forma particular de la métrica inducida va a depender del encaje. Para la cuerda estática se obtiene que

$$g_{tt} = -\frac{r^2 f(r)}{L^2}, \quad g_{zz} = \frac{L^2}{r^2 f(r)}, \quad (3.15)$$

geometría que corresponde a un agujero negro en 2 dimensiones con horizonte en  $r = r_H$ . Desde la perspectiva de la hoja de mundo,  $X(t, r)$  es un campo escalar que vive sobre esta geometría. La idea es analizar cómo la radiación de Hawking asociada al horizonte en la hoja de mundo excita los diferentes modos de dicho campo.

Para ver esto, se parte de la ecuación de movimiento que resulta de la acción (3.14),

$$\left[ -\partial_t^2 + \frac{r^2 - r_H^2}{L^4 r^2} \partial_r \left( r^2 (r^2 - r_H^2) \partial_r \right) \right] X(t, r) = 0. \quad (3.16)$$

Como es usual, descomponemos el campo en modos de frecuencias positivas y negativas,

$$X(t, r) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} [a_\omega u_\omega(t, r) + a_\omega^\dagger u_\omega(t, r)^*], \quad (3.17)$$

donde las funciones  $\{u_\omega(t, r)\}$  son una base normalizada de soluciones a (3.16) con frecuencias positivas, y los operadores  $a$  y  $a^\dagger$  satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[a_\omega, a_{\omega'}] = [a_\omega^\dagger, a_{\omega'}^\dagger] = 0, \quad [a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = 2\pi\delta(\omega - \omega'). \quad (3.18)$$

La solución general, con las condiciones de frontera (3.13), resulta ser [95]

$$X(t, r) = \frac{\sqrt{2\pi\alpha'}}{r_H} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi\sqrt{2\omega}} [f_\omega(r) e^{-i\omega t} a_\omega + f_\omega(r)^* e^{i\omega t} a_\omega^\dagger], \quad (3.19)$$

donde

$$f_\omega(r) = g_\omega(r) + e^{i\theta_\omega} g_{-\omega}(r), \quad (3.20)$$

siendo

$$g_\omega(r) = \frac{1}{1+i\nu} \frac{\rho+i\nu}{\rho} \left( \frac{\rho-1}{\rho+1} \right)^{i\nu/2}, \quad (3.21)$$

$$e^{i\theta_\omega} = \frac{1-i\nu}{1+i\nu} \frac{1+i\rho_m\nu}{1-i\rho_m\nu} \left( \frac{\rho_m-1}{\rho_m+1} \right)^{i\nu}.$$

Por conveniencia se han introducido los parámetros

$$\rho \equiv \frac{r}{r_H}, \quad \rho_m \equiv \frac{r_m}{r_H}, \quad \nu \equiv \frac{\omega}{r_H} = \frac{\beta\omega}{2\pi}. \quad (3.22)$$

De (3.19) podemos extraer la posición  $x(t)$  de la partícula Browniana, evaluando  $X(t, r)$  en  $r = r_m$ :

$$x(t) \equiv X(t, r_m) = \frac{\sqrt{2\pi\alpha'}}{r_H} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi\sqrt{2\omega}} [f_\omega(r_m) e^{-i\omega t} a_\omega + f_\omega(r_m)^* e^{i\omega t} a_\omega^\dagger]. \quad (3.23)$$

Ahora, debido a que el campo  $X(t, r)$  está inmerso en un fondo de agujero negro, la radiación de Hawking que emana del horizonte excita sus diferentes modos de oscilación. A nivel semiclásico, dicha excitación es puramente térmica y, dado que  $X$  es un campo escalar, su espectro sigue una distribución de Bose-Einstein [99]

$$\langle a_\omega^\dagger a_{\omega'} \rangle = \frac{2\pi\delta(\omega - \omega')}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (3.24)$$

Utilizando (3.23) y (3.24), es posible calcular el correlador de dos puntos de  $x(t)$ , con lo cual se puede extraer el desplazamiento cuadrático<sup>2</sup>

$$s^2(t) \equiv \langle : [x(t) - x(0)]^2 : \rangle = \frac{4\alpha'\beta^2}{\pi^2 L^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_m^2 \nu^2} \frac{\sin^2 \frac{\omega t}{2}}{e^{\beta\omega} - 1}. \quad (3.25)$$

En [95] se evalúa analíticamente la integral en (3.25). Para nuestros propósitos basta simplemente con mencionar que el comportamiento a tiempos tempranos y tiempos tardíos coincide con los regímenes balístico y difusivo respectivamente, como es de esperarse para una partícula Browniana:

$$s^2(t) \approx \begin{cases} \frac{\alpha'}{L^2 \rho_m} t^2 \approx \frac{T}{m} t^2 & (t \ll t_{\text{relax}}), \\ \frac{\alpha'}{\pi L^2 T} t & (t \gg t_{\text{relax}}), \end{cases} \quad (3.26)$$

donde el tiempo de relajación está dado por

$$t_{\text{relax}} \sim \beta \rho_m \sim \frac{\alpha' m}{L^2 T^2}. \quad (3.27)$$

Para encontrar la ecuación de Langevin asociada a partir de cálculos en el bulto, conviene escribir (3.8) en el dominio de la frecuencia:

$$p(\omega) = \frac{f(\omega) + K(\omega)}{\gamma[\omega] - i\omega}, \quad (3.28)$$

donde  $p(\omega)$ ,  $f(\omega)$ ,  $K(\omega)$  son transformadas de Fourier,

$$p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt p(t) e^{i\omega t}, \quad (3.29)$$

mientras que  $\gamma[\omega]$  es una transformada de Fourier-Laplace,

$$\gamma[\omega] = \int_0^\infty dt \gamma(t) e^{i\omega t}. \quad (3.30)$$

Tomando el promedio estadístico de (3.28), el término de fuerza aleatoria se cancela debido a (3.9), y se obtiene

$$\langle p(\omega) \rangle = \mu(\omega) K(\omega), \quad \mu(\omega) \equiv \frac{1}{\gamma[\omega] - i\omega}, \quad (3.31)$$

donde  $\mu(\omega)$  es llamada la admitancia. Entonces, podemos determinar  $\mu(\omega)$ , y por lo tanto  $\gamma[\omega]$ , midiendo la respuesta  $\langle p(\omega) \rangle$  a una fuerza externa. En particular, si

$$K(t) = K_0 e^{-i\omega t}, \quad (3.32)$$

---

<sup>2</sup>En este punto se introduce el ordenamiento normal  $:a_\omega a_\omega^\dagger: \equiv :a_\omega^\dagger a_\omega:$  para extraer la divergencia UV que proviene de la energía de punto cero del campo escalar.

se obtiene que  $\langle p(t) \rangle$  es simplemente

$$\langle p(t) \rangle = \mu(\omega) K_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.33)$$

En el contexto de la dualidad, sabemos que es posible aplicar una fuerza externa al quark encendiendo un campo eléctrico en las branas de sabor (1.48). La opción natural es escoger

$$F_t \equiv E = E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.34)$$

En este caso, las condiciones de frontera de Neumann (3.13) son reemplazadas por condiciones de frontera forzadas del tipo (1.50). Mediante un cálculo similar al mostrado anteriormente, se encuentra que [95]

$$\langle x(t) \rangle = \langle X(t, \rho_m) \rangle = \frac{2i\pi\alpha' L^4}{r_H^3} \frac{1 - i\nu/\rho_m}{\nu(1 - i\rho_m\nu)} E_0 e^{-i\omega t} \quad (3.35)$$

lo cual implica que el valor promedio del momento  $p = m\dot{x}$  es

$$\langle p(t) \rangle = \frac{2\pi\alpha' L^4 m\omega}{r_H^3} \frac{1 - i\nu/\rho_m}{\nu(1 - i\rho_m\nu)} E_0 e^{-i\omega t} = \frac{\alpha'\beta^2 m}{2\pi L^2} \frac{1 - i\nu/\rho_m}{1 - i\rho_m\nu} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (3.36)$$

Comparando esto con (3.33), se obtiene que la admitancia es

$$\mu(\omega) = \frac{1}{\gamma[\omega] - i\omega} = \frac{\alpha'\beta^2 m}{2\pi L^2} \frac{1 - i\nu/\rho_m}{1 - i\rho_m\nu}. \quad (3.37)$$

La función de ruido  $\kappa$  se puede calcular de manera similar, con la ayuda del correlador de dos puntos  $\langle p(t)p(0) \rangle$ . Solamente mostraremos el resultado final:

$$\kappa(\omega) = \frac{4\pi L^2}{\alpha'\beta^3} \frac{1 + \nu^2}{1 + \rho_m^2 \nu^2} \frac{\beta|\omega|}{e^{\beta|\omega|} - 1}. \quad (3.38)$$

### 3.2.3. Ecuación de Langevin en el medio de Unruh

Volviendo a nuestro problema de estudio, es interesante notar que, para el caso  $d = 2$ , el encaje de la cuerda (2.25) y la métrica en el espaciotiempo (2.24) en la ubicación de la cuerda coinciden *exactamente* con la métrica correspondiente y el encaje considerados en [95] (y en nuestro apartado anterior), bajo las identificaciones

$$t'' = t_{\text{ellos}}, \quad x'' = X, \quad z'' = \frac{L^2}{r}, \quad A = \frac{r_H}{L^2}, \quad z_m'' = \frac{L^2}{r_m}. \quad (3.39)$$

Por otra parte, el encaje de las branas de sabor es diferente: mientras que en [95] éstas cubren la región del AdS entre la frontera y el plano  $z'' = z_m''$ , en nuestro caso éstas se extienden hasta

$$z'' = z_m'' e^{-Ax''}, \quad (3.40)$$

que es la imagen de  $z = z_m$  en el nuevo sistema coordenado. Esto implica que en la posición media de su extremo,  $x'' = 0$ , nuestra cuerda debe satisfacer una condición de contorno de Neumann a lo largo de la línea  $z'' = z_m''(1 - Ax'')$ , en lugar de simplemente  $z'' = z_m$ . Esta distinción, sin embargo, es de primer orden en la perturbación sobre el encaje de la cuerda (2.25), y por lo tanto se puede despreciar a nuestro nivel de aproximación. Para  $d = 2$ , es posible entonces llevar a cabo nuestro análisis de perturbaciones en la hoja de mundo en completo paralelo con [95] y, por consiguiente, extraer la ecuación de Langevin que describe la evolución de las fluctuaciones térmicas del quark lo largo de la única dirección espacial  $x''$ .

Para  $d > 2$ , nuestra métrica en el marco doblemente primado (2.24) difiere de la métrica correspondiente (3.11) considerada en [95], ya que ésta última involucra potencias que dependen de  $d$ . Pero, la única novedad en nuestro cálculo es la presencia de las fluctuaciones transversales  $\delta\vec{X}''(t'', z'')$ , las cuales, dada la isotropía de la métrica del espaciotiempo (2.24) en la ubicación de la cuerda, deben evolucionar exactamente de la misma manera que las fluctuaciones longitudinales  $\delta X''(t'', z'')$ , cuyo comportamiento ya es conocido por nosotros a través del contacto con el caso  $d = 2$  de [95].

Entonces, como resultado de la isotropía del medio térmico en el sistema doblemente primado, para dimensiones arbitrarias encontramos que la posición del quark fluctúa de tal manera que, tanto las perturbaciones longitudinales como las perturbaciones transversales obedecen a la ecuación de Langevin generalizada

$$m'' \frac{d^2 \delta x_i''}{dt''^2}(t'') + \int_{-\infty}^{t''} ds'' \eta''(t'' - s'') \frac{d\delta x_i''}{ds''}(s'') = f_i''(t''), \quad (3.41)$$

donde  $m'' \equiv \sqrt{\lambda}/2\pi z_m'' = \sqrt{1 + A^2 z_m''^2} m$  y  $f_i''$  es una fuerza estocástica con promedios estadísticos

$$\langle f_i''(t'') \rangle = 0, \quad \langle f_i''(t'') f_j''(s'') \rangle = \delta_{ij} \kappa''(t'' - s''). \quad (3.42)$$

El kernel de fricción  $\eta''(t'')$  y el correlador de la fuerza estocástica  $\kappa''(t'')$  (respectivamente denotados como  $m\gamma(t)$  y  $\kappa(t)$  en [95]) pueden ser especificados a través de sus transformadas de Fourier, que en términos de nuestros parámetros se pueden escribir como<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \eta''(\omega) &\equiv \int_0^\infty dt'' \eta''(t'') e^{i\omega t''} = im''\omega + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \left( \frac{4\pi^2 T_U^2 - i\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} m''\omega}{1 - i\frac{\sqrt{\lambda}\omega}{2\pi m''}} \right), \\ \kappa''(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^\infty dt'' \kappa''(t'') e^{i\omega t''} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left( \frac{4\pi^2 T_U^2 + \omega^2}{1 + \frac{\lambda\omega^2}{4\pi^2 m''^2}} \right) \frac{|\omega|}{\exp(\frac{|\omega|}{T_U}) - 1}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ahora, si estudiamos las fluctuaciones sobre escalas de tiempo mucho mayores que la longitud de onda de Compton del quark,  $\Delta t'' \gg z_m''$ , podemos aproximar (3.43) con

<sup>3</sup>Notar que, por causalidad, se entiende que  $\eta''(t'')$  es igual a cero para argumentos negativos.

su versión de bajas frecuencias ( $\omega \ll 2\pi m''/\sqrt{\lambda}$ ), donde (3.41) se reduce a la ecuación Langevin local con ruido blanco,

$$m''_{\text{th}} \frac{d^2 \delta x''_i}{dt''^2}(t'') + \eta''_0 \frac{d \delta x''_i}{dt''}(t'') = f''_i(t''), \quad \langle f''_i(t'') f''_j(s'') \rangle = \delta_{ij} \kappa''_0 \delta(t'' - s''), \quad (3.44)$$

con  $\eta''_0 \equiv \eta''(\omega = 0) = 2\pi\sqrt{\lambda}T_{\text{U}}^2$ ,  $\kappa''_0 \equiv \kappa''(\omega = 0) = 4\pi\sqrt{\lambda}T_{\text{U}}^3$  y  $m''_{\text{th}} \equiv m''(1 - \lambda T_{\text{U}}^2/m''^2)$ . El término  $\kappa''_0$  obtenido acá coincide con el resultado previo de [88], que se obtuvo en el contexto de un cálculo de ensanchamiento de momento.

### 3.3 Fluctuaciones cuánticas para el observador inercial

Habiendo entendido la manera en que el medio térmico de Unruh, en el sistema doblemente primado, hace fluctuar al quark, pasaremos a la descripción del observador inercial en donde reinterpretaremos dichas fluctuaciones como fluctuaciones cuánticas inducidas por la radiación. Para esto, identificamos la relación entre los encajes de la cuerda correspondientes

$$X_i(t, z) = \sqrt{A^{-2} + t^2 + z_m^2 - z^2} \delta_{i1} + \delta X_i(t, z) \quad \longleftrightarrow \quad X''_i(t'', z'') = 0 + \delta X''_i(t'', z''),$$

lo cual haremos en dos pasos. Primero, usando (2.27) evaluado en la ubicación de la cuerda,  $x'' = 0$ , observamos que las coordenadas en la hoja de mundo transforman de acuerdo a

$$t'' = A^{-1} \operatorname{arcsinh} \left( \frac{At}{\sqrt{1 - A^2(z^2 - z_m^2)}} \right), \quad z'' = \frac{z}{\sqrt{1 + A^2 z_m^2}}. \quad (3.45)$$

Cuando se evalúa en el extremo de la cuerda, la primera relación indica que  $t''$  equivale al tiempo propio del quark (2.3), como debería ser. Las derivadas temporales en (3.41) o (3.44) están entonces relacionadas con sus contrapartes inerciales según  $d/dt'' = \sqrt{1 + A^2 t^2} d/dt$ . Ahora, para un punto dado  $(t, z) \leftrightarrow (t'', z'')$  de la hoja de mundo, podemos perturbar (2.27) para concluir que

$$\delta X = \frac{(1 + A^2 z_m^2) \sqrt{1 + A^2(t^2 + z_m^2 - z^2)}}{1 - A^2(z^2 - z_m^2)} \delta X'', \quad \delta \vec{X}_{\perp} = \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \delta \vec{X}''_{\perp}. \quad (3.46)$$

Evaluando en el extremo de la cuerda, nos dice como relacionar las fluctuaciones del quark  $\delta x_i$  con  $\delta x''_i$ .

El único otro elemento necesario para completar la traducción de (3.41) al marco original es la regla de transformación de las fuerzas, que puede obtenerse de la siguiente manera. Como lo hemos hecho todo en ocasiones anteriores, nombremos a  $\vec{v}$  y  $\gamma$  como la velocidad

y el factor de Lorentz del quark que experimenta el movimiento hiperbólico (2.2), y  $\vec{F}$  la  $(d-1)$ -fuerza externa correspondiente, determinada por (2.1). Nuestro quark está sometido a esta fuerza en combinación con la fuerza estocástica inducida por la radiación  $\vec{f}$  que ahora estamos tratando de determinar, y como resultado adquiere una velocidad  $\vec{v}_{\text{tot}} \equiv \vec{v} + \delta\vec{v}$  y un correspondiente factor de Lorentz  $\gamma_{\text{tot}}$ . Denotaremos a la  $d$ -fuerza asociada como  $\mathcal{F}_\mu^{\text{CFT}} = \gamma_{\text{tot}}(-\vec{F}_{\text{tot}} \cdot \vec{v}_{\text{tot}}, \vec{F}_{\text{tot}})$ . Sabiendo que

$$\mathcal{F}_M^{\text{AdS}} = \left( \frac{d\tau_{\text{CFT}}}{d\tau_{\text{AdS}}} \mathcal{F}_\mu^{\text{CFT}}, 0 \right) \quad (3.47)$$

(donde  $d\tau_{\text{CFT}}$  y  $d\tau_{\text{AdS}} = (L/z)d\tau_{\text{CFT}}$  denotan el tiempo propio en la teoría de norma y el tiempo propio en el bulto, respectivamente) transforma como un  $(d+1)$ -vector, podemos deducir que

$$\mathcal{F}_\mu^{\prime\prime\text{CFT}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\prime\prime\mu}} \mathcal{F}_\nu^{\text{CFT}}. \quad (3.48)$$

Expandiendo en series de Taylor esta relación y quedándonos con el primer término encontramos que

$$f'' = f, \quad \vec{f}_\perp'' = \sqrt{1 + A^2 z_m^2} \sqrt{1 + A^2 t^2} \vec{f}_\perp. \quad (3.49)$$

Poniendo todo esto junto, finalmente concluimos que, en el sistema inercial original, la radiación emitida por el quark induce fluctuaciones cuánticas longitudinales y transversales que obedecen las ecuaciones

$$m \frac{d^2 \delta x}{dt^2}(t) + \int_{-\infty}^t ds \left( \eta(t, s) \frac{d\delta x}{ds}(s) - \zeta(t, s) \delta x(s) \right) = \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} f(t)}{\sqrt{1 + A^2 t^2}} \quad (3.50)$$

y

$$m \frac{d^2 \delta \vec{x}_\perp}{dt^2}(t) + \int_{-\infty}^t ds \eta_\perp(t, s) \frac{d\delta \vec{x}_\perp}{ds}(s) = \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} \vec{f}_\perp(t)}{\sqrt{1 + A^2 t^2}}, \quad (3.51)$$

con

$$\langle f_i(t) \rangle = 0, \quad \langle f_i(t) f_j(s) \rangle = \delta_{ij} \kappa_i(t, s), \quad (3.52)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} \eta(t, s) &\equiv \frac{\eta''(A^{-1} \text{arcsinh}(At) - A^{-1} \text{arcsinh}(As))}{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} \sqrt{1 + A^2 t^2} \sqrt{1 + A^2 s^2}} - \frac{mA^2 t}{(1 + A^2 t^2)} \delta(s - t), \\ \zeta(t, s) &\equiv \frac{A^2 s \eta''(A^{-1} \text{arcsinh}(At) - A^{-1} \text{arcsinh}(As))}{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} \sqrt{1 + A^2 t^2} (1 + A^2 s^2)^{3/2}} + \frac{mA^2 (1 - A^2 t^2)}{(1 + A^2 t^2)^2} \delta(s - t), \\ \eta_\perp(t, s) &\equiv \frac{\eta''(A^{-1} \text{arcsinh}(At) - A^{-1} \text{arcsinh}(As))}{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} (1 + A^2 t^2)} + \frac{mA^2 t}{(1 + A^2 t^2)} \delta(s - t), \\ \kappa(t, s) &\equiv \kappa''(A^{-1} \text{arcsinh}(At) - A^{-1} \text{arcsinh}(As)), \\ \kappa_\perp(t, s) &\equiv \frac{\kappa''(A^{-1} \text{arcsinh}(At) - A^{-1} \text{arcsinh}(As))}{\left(1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}\right) \sqrt{1 + A^2 t^2} \sqrt{1 + A^2 s^2}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Notemos que, en contraste con las fluctuaciones transversales, la fluctuación longitudinal no evoluciona de acuerdo a una ecuación de Langevin generalizada: existe un término adicional en (3.50) que actúa como una fuerza disipativa que depende (no localmente) del mismo  $\delta x(t)$ . Esta diferencia refleja la anisotropía del sistema inherente en el sistema inercial.

Cuando analizamos la trayectoria del quark durante intervalos de tiempo  $\Delta t$  mas grandes que la longitud de onda de Compton,  $\Delta\tau \gg z_m/\sqrt{1+A^2z_m^2}$ , pero en intervalos menores que el tiempo característico  $A^{-1}$  impuesto por la aceleración, la aproximación a bajas frecuencias de las ecuaciones de movimiento resulta apropiada, las cuales se reducen a su forma local,

$$m_{\text{th}} \frac{d^2 \delta x}{dt^2}(t) + \eta_0(t) \frac{d\delta x}{dt}(t) - \zeta_0(t) \delta x(t) = \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} f(t)}{\sqrt{1 + A^2 t^2}}, \quad (3.54)$$

y

$$m_{\text{th}} \frac{d^2 \delta \vec{x}_\perp}{dt^2}(t) + \eta_{\perp 0}(t) \frac{d\delta \vec{x}_\perp}{dt}(t) = \frac{\sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} \vec{f}_\perp(t)}{\sqrt{1 + A^2 t^2}}, \quad (3.55)$$

con  $m_{\text{th}} \equiv m m''_{\text{th}}/m'' = m''_{\text{th}}/\sqrt{1 + \lambda A^2/4\pi^2 m^2}$ ,

$$\langle f_i(t) \rangle = 0, \quad \langle f_i(t) f_j(s) \rangle = \delta_{ij} \kappa_{i0}(t) \delta(t-s), \quad (3.56)$$

donde hemos definido los coeficientes dependientes del tiempo

$$\begin{aligned} \eta_0(t) &\equiv \frac{A^2 \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \sqrt{1 + A^2 t^2} - mt \right)}{(1 + A^2 t^2) \sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}}}, \\ \zeta_0(t) &\equiv \frac{A^2 \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \sqrt{1 + A^2 t^2} A^2 t + m(1 - A^2 t^2) \right)}{(1 + A^2 t^2)^2 \sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}}}, \\ \kappa_0(t) &\equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi^2} A^3 \sqrt{1 + A^2 t^2}, \\ \eta_{\perp 0}(t) &\equiv \frac{A^2 \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} (1 + A^2 t^2) + \sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}} mt \right)}{(1 + A^2 t^2)^{3/2} \sqrt{1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}}}, \\ \kappa_{\perp 0}(t) &\equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi^2} \frac{A^3}{\left(1 + \frac{\lambda A^2}{4\pi^2 m^2}\right) \sqrt{1 + A^2 t^2}}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Estas ecuaciones, así como sus progenitoras no locales, revelan una estructura interesante respecto a la configuración inducida por la radiación gluónica en nuestra teoría de campos fuertemente acoplada. La característica principal es por supuesto la dependencia temporal explícita en el marco no primado, la cual era de esperarse, en contraste

con la situación en el marco doblemente primado, donde el quark está en un medio térmico estático. Para un observador inercial, los efectos producidos por la radiación emitida evolucionan con el tiempo, pero el sistema puede considerarse cuasiestacionario si se examina en el régimen  $\Delta t \ll A^{-1}$ .

En más detalle, la velocidad y la tasa a la cual el quark radía energía y momento longitudinal se pueden leer de (2.2), (1.65) y (2.1) obteniendo

$$v = \frac{At}{\sqrt{1 + A^2 t^2}}, \quad (3.58)$$

$$\frac{dE_{\text{rad}}}{dt} = A^2 \left( 1 - \frac{A^2 t}{\sqrt{\frac{4\pi^2 m^2}{\lambda} + A^2 \sqrt{1 + A^2 t^2}}} \right), \quad (3.59)$$

$$\frac{dp_{\text{rad}}}{dt} = A^2 \left( \frac{At}{\sqrt{1 + A^2 t^2}} - \frac{A}{\sqrt{\frac{4\pi^2 m^2}{\lambda} + A^2}} \right), \quad (3.60)$$

donde se observa que estas cantidades se aproximan a valores constantes solamente para tiempos muy tardíos (o muy tempranos),  $|t| \gg A^{-1}$ . En este límite, todos los coeficientes dinámicos (3.57) son cero, excepto el coeficiente de correlación de la fuerza longitudinal  $\kappa_0(t)$ . Éste último diverge, pero lo hace a una tasa que es muy lenta para dar una contribución finita a la ecuación de movimiento (3.54), la cual se vuelve entonces libre.

Se puede ver de (2.1) que, mientras la fuerza externa del quark se incrementa de cero a su máximo valor  $F_{\text{crit}} = m^2/2\pi\sqrt{\lambda}$  (que sería suficientemente fuerte para crear pares quark-antiquark del vacío [86, 44, 46]), la aceleración propia  $A$  cubre el rango completo  $[0, \infty)$ . Sin embargo, la situación de mayor interés físico es  $\sqrt{\lambda}A/2\pi m < 1$ , correspondiente a un quark pesado (y por lo tanto casi puntual) que no es violentamente acelerado, es decir, un quark que no cambia su velocidad significativamente en un periodo de tiempo menor que su longitud de onda de Compton  $z_m$ . La expresión (3.57) muestra que bajo estas circunstancias  $\zeta_0$  siempre comienza positivo alrededor de  $t = 0$ , se vuelve negativo para un valor de tiempo finito y finalmente se aproxima asintóticamente a cero por abajo cuando  $t \rightarrow \infty$ . Es curioso que el signo en frente del término lineal respecto a  $\delta x(t)$  en (3.54) (y (3.50)) resulta ser negativo, porque, cuando  $\zeta_0 > 0$  ( $\zeta > 0$ ), esto implica que el quark experimenta una fuerza que tiende a alejarlo de su posición de equilibrio, en lugar de restaurarlo hacia el equilibrio. Similarmente, es fácil ver que  $\eta_0$  (así como  $\eta$ ) genéricamente se vuelve negativo luego de un periodo de tiempo, implicando que el efecto de la radiación emitida es el de acelerar las fluctuaciones longitudinales del quark, en lugar de relentizarlas. Por supuesto, dado que las ecuaciones de movimiento (3.50)-(3.57) fueron obtenidas simplemente traduciendo (3.41)-(3.44) al marco inercial, el efecto combinado de todos los términos que aparecen no pueden conllevar a un comportamiento erróneo.

De manera similar, podemos leer directamente de [95] la expresión para el desplaza-

miento cuadrático medio en el universo abierto de Einstein y traducirlo de vuelta al marco inercial. En el proceso uno encuentra una divergencia infraroja que se cancelaba en el resultado de [95], pero se podría regularizar como en [132]. Nos abstenemos de escribir los resultados aquí, ya que no son especialmente reveladores. Es fácil extraer de ellos el comportamiento balístico esperado para tiempos pequeños, pero el régimen de difusión del marco doblemente primado no sería accesible para el observador inercial dentro del régimen cuasiestacionario.

# CAPÍTULO 4

---

---

## DINÁMICA DE QUARKS A TEMPERATURA FINITA

---

---

### 4.1 Introducción

La cromodinámica cuántica es el sector del Modelo Estándar de partículas relacionado con las interacciones fuertes, la cual determina las propiedades físicas de los protones, neutrones, y en general hadrones. Otras partes del Modelo Estándar, como la electrodinámica cuántica, han sido exploradas y verificadas con una increíble precisión. Los aspectos perturbativos de QCD han sido probados a un pocas partes por centena, mientras que, los aspectos no perturbativos de QCD apenas han sido probados.

Esquemáticamente, QCD luce como una versión matricial de QED, reemplazando a los fotones por gluones y a los electrones por quarks. Sin embargo, a diferencia del electromagnetismo, los efectos cuánticos en este caso juegan un papel fundamental y modifican drásticamente el comportamiento de las interacciones a diferentes escalas energéticas. Esto se puede inferir a partir de la función beta (I.3) que, en particular, nos dice que a bajas energías (o distancias grandes), la constante de acoplamiento de QCD (I.5) es grande y la fuerza es “fuerte” (de ahí su nombre). Este es el origen del *confinamiento*, es decir, del hecho de que no veamos quarks o gluones libres en la naturaleza sino objetos neutros bajo QCD, o *sin color*, a los que llamamos hadrones. Por otra parte, a energías lo suficientemente altas (o distancias pequeñas), la constante de acoplamiento de QCD es pequeña y las interacciones son débiles, lo cual se conoce como *libertad asintótica*. Esta propiedad nos permite detectar los componentes de los hadrones y estudiar su estructura básica, por ejemplo, mediante procesos de dispersión a altas energías.

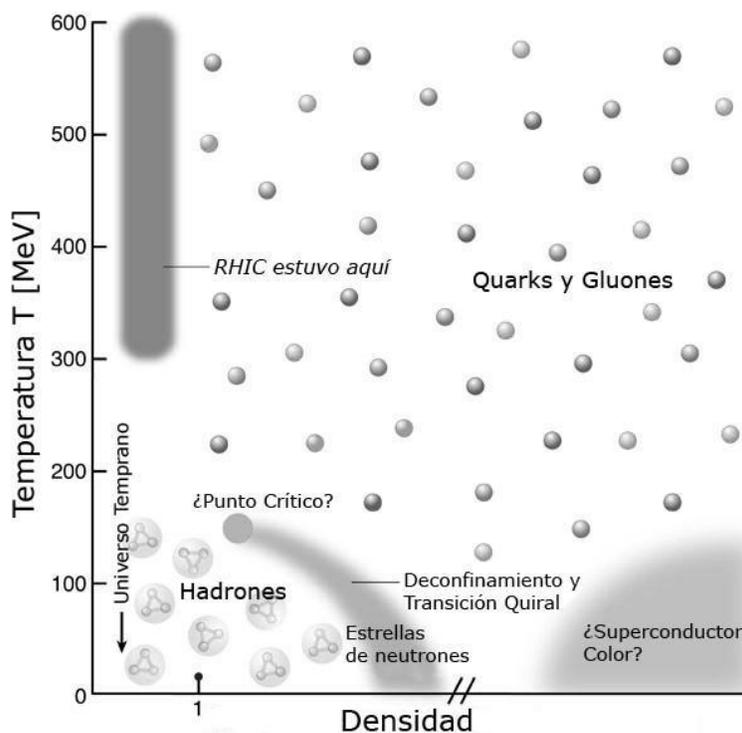


Figura 4.1: Diagrama de fase de QCD

Debido al acoplamiento fuerte, la comprensión de varios aspectos de QCD sigue aún incompleta. Pese a que ha habido un gran progreso en diferentes frentes teóricos tales como QCD en la red, teorías efectivas, etc., fenómenos no perturbativos tales como el confinamiento siguen sin recibir una explicación analítica satisfactoria. La libertad asintótica nos indica que las interacciones son débiles a altas energías, y uno esperaría un comportamiento similar a altas densidades y/o altas temperaturas. En efecto, bajo una combinación de resultados numéricos y analíticos, ha sido posible elucidar parte del diagrama de fase de la cromodinámica cuántica [133], ilustrado en la figura 4.1.

El plasma de quark y gluones es una fase de QCD que existe cuando la temperatura y/o la densidad son muy altas. El QGP contiene quarks y gluones, como la materia hadrónica normal. La diferencia entre estas dos estados de QCD es la siguiente: en la materia normal cada quark o bien se empareja con un anti quark para formar un mesón o se une con otros dos quarks para formar un barión (tal como el protón y el neutrón). En el QGP, en cambio, los quarks se encuentran libres o desconfiados. Se cree que existió durante los primeros 20 a 30 microsegundos después de que el universo naciera en la Gran Explosión. Actualmente, experimentos en el Colisionador de Iones Pesados Relativistas en el Laboratorio Nacional Brookhaven, Estados Unidos, han logrado acceder a esta nueva fase y se espera que sus propiedades puedan ser estudiadas aún mas a fondo en el Gran Colisionador de Hadrones ubicado en el CERN.

Esta nueva fase de QCD ha estimulado gran interés y actividad en años recientes pues nos brinda la posibilidad de estudiar nuevos fenómenos no perturbativos tanto a nivel teórico como experimental. Las temperaturas alcanzadas en las colisiones de iones pesados en el RHIC son alrededor de 350 MeV, es decir, alrededor de una o dos veces la temperatura crítica de QCD. A estas temperaturas QCD es todavía fuertemente acoplado y, por lo tanto, los enfoques perturbativos en teoría de campos que pretenden explicar las propiedades del QGP son poco fiables. QCD en la red, que en principio podría abordar el régimen de acoplamiento fuerte, se enfrenta a graves obstáculos a la hora de describir propiedades dinámicas, tales como el cálculo de los coeficientes de transporte.

La correspondencia AdS/CFT ofrece un nuevo enfoque para atacar este problema. Ya hemos visto que, en el caso mas sencillo, una teoría de cuerdas en el fondo  $AdS_5 \times S^5$  es equivalente a una teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  con grupo de norma  $SU(N)$ . En este caso, el diccionario para traducir de un lenguaje al otro se entiende muy bien y se han establecido una gran variedad de tests que muestran concordancia entre los dos lados de la dualidad [17]. Una pregunta inmediata es ¿podemos pensar en SYM como un modelo de juguete de QCD?. Para responder esto, veamos las diferencias mas importantes entre ambas teorías:

- QCD confina mientras que SYM no confina.
- QCD es no supersimétrica mientras que SYM es máximamente supersimétrica.
- QCD no es conforme a nivel cuántico mientras que SYM si es conforme.
- QCD tiene quarks mientras que SYM sólo tiene materia en la representación adjunta.
- QCD tiene un espectro discreto mientras que en SYM es continuo.
- QCD tiene  $N = 3$  mientras que en SYM  $N \rightarrow \infty$ .

La respuesta es claramente no! SYM y QCD son dos teorías completamente diferentes y tratar de entender QCD a través de SYM no nos va a llevar muy lejos. Pero, ¿que pasaría si analizamos las dos teorías a temperatura finita? Veamos lo que ocurre en este caso:

- Ninguna de ellas confina, para  $T > T_c$ .
- Ninguna de ellas es conforme.
- Ninguna de ellas es supersimétrica.
- QCD es fuertemente acoplada para  $T_c < T < 2T_c$ , al igual que SYM.

Vemos que, a pesar de que las teorías no son idénticas, en este régimen SYM y QCD son mucho más parecidas que en el caso de temperatura cero, y esperaríamos ganar más intuición en este caso respecto al mundo real a través de la correspondencia AdS/CFT. De hecho, por medio de la dualidad ya se han obtenido algunos resultados relevantes en este ámbito, como la estimación de el cociente entre la viscosidad de corte y la densidad de entropía (que resultó tener un valor universal en acoplamiento infinito para cada teoría de norma con un dual de gravedad), el cálculo de la tasa de pérdida de energía para un quark pesado en un medio térmico, y el parámetro de supresión de jets, todos dando una mejor estimación que los cálculos perturbativos realizados directamente en teoría de campos.

Este capítulo tiene como propósito el estudio de la dinámica de quarks inmersos en un medio térmico fuertemente acoplado. En el contexto de la correspondencia AdS/CFT los trabajos pioneros en este contexto fueron los de Herzog et al. [39] y el de Gubser [40] en el 2006 dándole un fuerte impulso a esta área de investigación. En [39, 40] se calculó la fuerza de arrastre que siente un quark infinitamente pesado que se mueve a través de un plasma de SYM  $\mathcal{N} = 4$  utilizando la descripción dual a un quark, es decir, una cuerda que se mueve sobre el fondo de AdS-Schwarzschild, extendiéndose en la dirección radial desde la frontera en  $r \rightarrow \infty$  hasta el horizonte en  $r = r_H$ . Este cálculo fue realizado bajo la suposición de que el quark se mueve todo el tiempo con velocidad constante a lo largo de la dirección  $x$ . El ansatz que propusieron para describir esta situación fue

$$X(r, t) = vt + \xi(r), \quad (4.1)$$

donde el término  $\xi(r)$  corresponde a la forma de la cuerda y desde el punto de vista de la teoría de norma, describe el perfil de los campos gluónicos.

Sustituyendo (4.1) en la acción de Nambu-Goto y utilizando el hecho de que la densidad de momento canónico conjugado  $\Pi_x^r$  es constante es posible, sin tener que integrar las ecuaciones de movimiento, encontrar una relación entre éste último y la velocidad del quark. El punto clave en el cálculo de [39, 40] es el haber notado que existe un cierto valor de la coordenada radial que depende de la velocidad  $v$  con la que se mueve la cuerda,

$$r_v = \frac{r_H}{(1 - v^2)^{1/4}}, \quad (4.2)$$

debajo del cual el encaje de la cuerda (4.1) se vuelve imaginario. La única manera de evitar esto es permitiendo que la cuerda tenga un cierto perfil  $\xi(r)$  no trivial lo cual se traduce en un valor específico para la fuerza de arrastre  $F_x$  que siente el extremo que está en la frontera. El valor de dicha fuerza resultó ser

$$F_x = \frac{dp}{dt} \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} T^2 \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (4.3)$$

De manera similar, pero utilizando  $\Pi_t^r$ , se puede calcular la tasa de pérdida de energía

del quark que atraviesa el medio térmico y el resultado fue

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2} T^2 \frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (4.4)$$

Del lado de la teoría de cuerdas, las ecuaciones (4.3) y (4.3) representan la tasa a la cual fluye momento y energía por la cuerda desde la frontera hasta el horizonte.

Adicionalmente, en [39] se encontró que estas mismas fórmulas se aplican también para el caso de tiempos tardíos, y esto lo hicieron a través del cálculo de perturbaciones por encima de una configuración estática. Si bien este cálculo resultó bastante novedoso y relevante para entender la física de pérdida de energía en el QGP, las configuraciones utilizadas son dinámicamente muy restrictivas respecto al experimento. No queda claro si es posible obtener un régimen estacionario, pues en este caso se tendría que aplicar una fuerza externa o de lo contrario el quark termaliza rápidamente, perdiendo su velocidad. Así mismo, sería difícil llegar a la configuración de tiempos tardíos pues hay que tener en cuenta que el plasma generado experimentalmente tiene un tiempo de vida finito y muy corto.

El objetivo de este capítulo es entonces, obtener una solución mas general que represente una configuración de la cuerda dual a un quark que se mueve con una trayectoria arbitraria en el plasma térmico, concentrándonos en su dinámica a tiempos tempranos. En la sección 4.2 analizamos las ecuaciones de movimiento para una cuerda que vive en un fondo  $\text{AdS}_5$  (en la norma estática, es decir, tomando  $\tau = t$  y  $\sigma = z$ ), para ganar intuición y poder aplicar métodos similares al reemplazar el fondo a  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5$ . En particular, obtenemos la ecuación (4.13) la cual es simplemente una versión simplificada de (1.49) la cual va a resultar útil para su generalización. Mas adelante analizamos de cerca la solución de Mikhailov que, parametrizada por el tiempo en la frontera  $t_{ret}$ , está dada por (4.14) y (4.15). De ésta solución extraemos las relaciones de equivalencia entre las derivadas en  $t$  y  $z$  respecto a las derivadas en  $t_{ret}$ , obteniendo las expresiones (4.17)-(4.21), y como prueba de consistencia verificamos que (4.14)-(4.15) son solución de (4.13).

En la sección 4.3, consideraremos las primeras correcciones causadas por la introducción de un baño térmico. Para esto, obtenemos la ecuación de movimiento para una cuerda que se mueve en el respectivo fondo de agujero negro (4.29), la cual es totalmente análoga a la ecuación obtenida a temperatura cero (4.13). Dado que queremos analizar las primeras correcciones introducidas por la temperatura, hacemos un truncamiento consistente de la misma, y nos quedamos a orden mas bajo (4.30). La ecuación resultante es altamente no lineal. Pensando que su solución debe coincidir con la solución de Mikhailov (4.14)-(4.15) para el caso de temperatura cero, realizamos un análisis de pequeñas fluctuaciones por encima de la misma. Finalmente, introduciendo el ansatz (4.31) en (4.30), obtenemos una ecuación de movimiento para la perturbación (4.32).

En la sección 4.4 analizamos un caso que es de particular relevancia fenomenológica-

mente. El QGP es creado en colisiones de altas energías y gran parte de los partones resultantes se encuentran en régimen ultrarelativista razón por la cual resulta de gran interés poder extraer algún tipo de información física en este régimen. Como veremos, las ecuaciones de movimiento se van a simplificar de una forma considerable. Planteando una solución de la forma (4.37) y realizando las aproximaciones pertinentes obtenemos finalmente como resultado el encaje para la cuerda (4.45). Dejamos el análisis de las implicaciones físicas de dicha solución para trabajo futuro aunque podemos ver dos conclusiones inmediatas. Primero, que la temperatura tiende a frenar el cuerpo de la cuerda, lo cual en principio parece razonable, y se debe poder traducir como algún tipo de fuerza de fricción para el quark. Y segundo que, dado que la primera corrección de la temperatura aparece a orden  $T^4$ , esperamos que la tasa de pérdida de energía a tiempos tempranos aparezca a este mismo orden, resultado que difiere sustancialmente del régimen a tiempos tardíos.

## 4.2 Ecuaciones de movimiento a temperatura cero

Para analizar el movimiento de quarks en SYM  $\mathcal{N} = 4$  a temperatura cero y fuertemente acoplado, se debe seguir la evolución de una cuerda que termina en las  $N_f$  D7-branas que viven en la geometría  $\text{AdS}_5 \times S^5$ . Se considera el caso de una cuerda que se extiende en una posición fija en la  $S^5$ , lo cual nos permite no tomar en cuenta la componente angular de la métrica de manera consistente con las ecuaciones de movimiento.

A nivel clásico, la dinámica de cuerdas está descrita por la acción de Nambu-Goto (1.1). La métrica en el espaciotiempo correspondiente a un espacio  $\text{AdS}_5$  está dada por (1.33). Definimos  $X^\mu(\tau, \sigma)$  como un mapeo entre la hoja de mundo de la cuerda y el espaciotiempo cinco dimensional, y utilizamos la siguiente notación para las derivadas:  $\dot{X}^\mu = \partial_\tau X^\mu$  y  $X'^\mu = \partial_\sigma X^\mu$ .

El determinante de la métrica inducida  $-\det g_{ab} = -g$  está dado por

$$-\det g_{ab} = \left(\dot{X}^\mu X'_\mu\right)^2 - \left(\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu\right) \left(X'^\mu X'_\mu\right). \quad (4.5)$$

Además, es útil definir las densidades de momento canónico

$$\Pi_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{\left(\dot{X}^\nu X'_\nu\right) X'_\mu - \left(X'^\nu X'_\nu\right) \dot{X}_\mu}{\sqrt{-g}}, \quad (4.6)$$

$$\Pi_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu} = \frac{\left(\dot{X}^\nu X'_\nu\right) \dot{X}_\mu - \left(\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu\right) X'_\mu}{\sqrt{-g}}. \quad (4.7)$$

Ahora, considerando una variación arbitraria  $\delta X^\mu$  en la acción y despreciando términos

de superficie, podemos obtener las ecuaciones de movimiento de la cuerda de acuerdo al principio variacional

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\mu} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} - \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = 0. \quad (4.8)$$

En la norma estática  $\sigma^0 = t$ ,  $\sigma^1 = z$ , y asumiendo movimiento y deformaciones de la cuerda únicamente en la dirección  $x \equiv x^1$ , las densidades de momento canónico se reducen a:

$$\begin{aligned} \Pi_t^t &= -\frac{X'^2 + 1}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}, \\ \Pi_x^t &= \frac{\dot{X}}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}, \\ \Pi_t^z &= \frac{\dot{X} X'}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}, \\ \Pi_x^z &= -\frac{X'}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Notar además que debido a la normalización de  $\mathcal{L}_{\text{NG}}$ , los momentos  $\Pi_\mu^a$  deben ser multiplicados por  $R^2/2\pi\alpha' = \sqrt{\lambda}/2\pi$  para obtener las densidades de momento y energía físicas.

La ecuación de movimiento resultante es equivalente a la conservación del momento:

$$0 = \frac{\partial \Pi_x^t}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_x^z}{\partial z}, \quad (4.10)$$

es decir

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{X}}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{X'}{z^2 \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}} \right). \quad (4.11)$$

Haciendo las derivadas explícitamente obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{X} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2} - \dot{X} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2} - X'' \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2} \\ &\quad + X' \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2} + \frac{2X' \sqrt{1 + X'^2 - \dot{X}^2}}{z}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

y mediante un poco de álgebra, es posible llegar a la siguiente ecuación:

$$0 = \ddot{X} - X'' + \ddot{X} X'^2 + X'' \dot{X}^2 - 2\dot{X} X' \dot{X}' + \frac{2X'}{z} + \frac{2X'^3}{z} - \frac{2X' \dot{X}^2}{z}. \quad (4.13)$$

A pesar del carácter no lineal de esta ecuación, Mikhailov logró encontrar una solución exacta dada una trayectoria arbitraria tipo tiempo del extremo de la cuerda. Su solución está parametrizada por el tiempo retardado  $t_{ret}$  y está dada por

$$t = \frac{z}{\sqrt{1-v^2}} + t_{ret}, \quad (4.14)$$

$$X_0 = \frac{vz}{\sqrt{1-v^2}} + x, \quad (4.15)$$

donde  $x = x(t_{ret})$  y  $v = v(t_{ret})$  son la posición y velocidad del extremo de la cuerda en  $z = 0$ . El subíndice 0 es sólo para indicar que es una solución particular a temperatura cero. Como se observa, el comportamiento de un segmento de la cuerda, localizado en una posición radial  $z$  y a un tiempo  $t$ , está completamente determinado por el comportamiento del extremo de la cuerda en la frontera a un tiempo anterior  $t_{ret}(t, z)$ , de aquí su nombre *tiempo retardado*.

Resulta conveniente calcular las derivadas de  $X(t, z)$  en términos de  $t_{ret}$  y  $z$ . Para esto partimos del diferencial total

$$dt = \frac{dz}{\sqrt{1-v^2}} + dt_{ret} \left[ \frac{vaz}{(1-v^2)^{3/2}} + 1 \right], \quad (4.16)$$

y realizando los cambios de variable respectivos, obtenemos:

$$\dot{X} \equiv \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)_z = \left( \frac{\partial t_{ret}}{\partial t} \right)_z \left( \frac{\partial X}{\partial t_{ret}} \right)_z = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{vaz + (1-v^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial X}{\partial t_{ret}} \right)_z, \quad (4.17)$$

$$X' \equiv \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)_t = \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)_{t_{ret}} - \frac{(1-v^2)}{vaz + (1-v^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial X}{\partial t_{ret}} \right)_z, \quad (4.18)$$

$$\ddot{X} \equiv \left( \frac{\partial \dot{X}}{\partial t} \right)_z = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{vaz + (1-v^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial \dot{X}}{\partial t_{ret}} \right)_z, \quad (4.19)$$

$$X'' \equiv \left( \frac{\partial X'}{\partial z} \right)_t = \left( \frac{\partial X'}{\partial z} \right)_{t_{ret}} - \frac{(1-v^2)}{vaz + (1-v^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial X'}{\partial t_{ret}} \right)_z, \quad (4.20)$$

$$\dot{X}' \equiv \left( \frac{\partial X'}{\partial t} \right)_z = \frac{(1-v^2)^{3/2}}{vaz + (1-v^2)^{3/2}} \left( \frac{\partial X'}{\partial t_{ret}} \right)_z. \quad (4.21)$$

Para la solución de Mikhailov, las expresiones de las derivadas se reducen a:

$$\dot{X}_0 = \frac{az + v(1-v^2)^{3/2}}{vaz + (1-v^2)^{3/2}}, \quad (4.22)$$

$$X'_0 = -\frac{a(1-v^2)^{1/2}z}{vaz + (1-v^2)^{3/2}}, \quad (4.23)$$

$$\ddot{X}_0 = \frac{-a^3(1-v^2)^{3/2}z^2 + 3va^2(1-v^2)^3z + j(1-v^2)^4z + a(1-v^2)^{9/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}, \quad (4.24)$$

$$X_0'' = \frac{-a^3(1-v^2)^{1/2}z^2 + va^2(1-v^2)^2z + j(1-v^2)^3z - a(1-v^2)^{7/2}}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}, \quad (4.25)$$

$$\dot{X}'_0 = \frac{a^3(1-v^2)z^2 - 2va^2(1-v^2)^{5/2}z - j(1-v^2)^{7/2}z}{[vaz + (1-v^2)^{3/2}]^3}. \quad (4.26)$$

Reemplazando estas expresiones en (4.13), es fácil verificar que la ecuación de movimiento a temperatura cero se satisface idénticamente.

### 4.3 Perturbaciones a temperatura finita

A temperatura finita, el movimiento de quarks en SYM  $\mathcal{N} = 4$  fuertemente acoplado, se puede estudiar a través del movimiento de una cuerda que termina en las  $N_f$  D7-branas que viven en la geometría  $(\text{AdS-Schwarzschild})_5 \times S_5$ . En este caso consideramos de nuevo la situación en la cual la cuerda se encuentra en una posición fija de la  $S^5$  consistente con las ecuaciones de movimiento, permitiéndonos ignorar esta parte de la métrica.

La dinámica de cuerdas se describe nuevamente por la acción de Nambu-Goto la cual, mediante un procedimiento similar al realizado a temperatura cero, nos arroja los siguientes momentos canónicos:

$$\begin{aligned} \Pi_t^t &= -\frac{hX'^2 + 1}{z^2\sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \\ \Pi_x^t &= \frac{\dot{X}}{z^2h\sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \\ \Pi_t^z &= \frac{h\dot{X}X'}{z^2\sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}, \\ \Pi_x^z &= -\frac{hX'}{z^2\sqrt{1 + hX'^2 - \frac{\dot{X}^2}{h}}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La ecuación de movimiento correspondiente se obtiene de la conservación del momento:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{X}}{z^2h\sqrt{1 + hX'^2 - \dot{X}^2/h}} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{hX'}{z^2\sqrt{1 + hX'^2 - \dot{X}^2/h}} \right), \quad (4.28)$$

la cual se reduce a:

$$0 = \ddot{X} - h^2 X'' + h\ddot{X}X'^2 + hX''\dot{X}^2 - 2h\dot{X}X'\dot{X}' + \frac{2h^2 X'}{z} + \frac{2h^3 X'^3}{z} - \frac{2hX'\dot{X}^2}{z} \quad (4.29)$$

$$- hh'X' - \frac{1}{2}h^2 h'X'^3 + \frac{3}{2}h'X'\dot{X}^2.$$

Ahora, como estamos interesados en ver los primeros efectos causados por la temperatura, realizamos una expansión en términos de  $T$  y quedándonos a orden mas bajo se obtiene

$$0 = \left( \ddot{X} - X'' + \ddot{X}X'^2 + X''\dot{X}^2 - 2\dot{X}X'\dot{X}' + \frac{2X'}{z} + \frac{2X'^3}{z} - \frac{2X'\dot{X}^2}{z} \right)$$

$$+ \pi^4 T^4 z^4 \left( 2X'' - \ddot{X}X'^2 - X''\dot{X}^2 + 2\dot{X}X'\dot{X}' - \frac{4X'\dot{X}^2}{z} - \frac{4X'^3}{z} \right) + \mathcal{O}(T^8), \quad (4.30)$$

de donde reconocemos el primer término equivalente a la ecuación a temperatura cero.

El siguiente paso es partir de una solución conocida a temperatura cero y añadir una pequeña perturbación que nos de información acerca de la temperatura. En este caso utilizaremos la solución de Mikhailov la cuál está parametrizada por el tiempo retardado  $t_{ret}$  y está dada por (4.14)-(4.15).

Ahora bien, si suponemos una solución a las ecuaciones de movimiento de la forma

$$X = X_0 + Y, \quad (4.31)$$

donde  $X_0$  está dada por la solución de Mikhailov, y  $Y$  es una perturbación que contiene los primeros efectos de la temperatura, es posible reescribir la ecuación de movimiento a temperatura finita como

$$A\dot{Y} + BY' + C\ddot{Y} + DY'' + E\dot{Y}' + F = 0, \quad (4.32)$$

donde  $A, B, C, D, E$  y  $F$  dependen de las derivadas de  $X_0$  (4.22-4.26) de la siguiente manera:

$$A = 2X_0''\dot{X}_0 - 2X_0'\dot{X}_0' - \frac{4X_0'\dot{X}_0}{z}, \quad (4.33a)$$

$$B = 2\ddot{X}_0X_0' - 2\dot{X}_0\dot{X}_0' + \frac{2}{z} + \frac{6X_0'^2}{z} - \frac{2\dot{X}_0^2}{z}, \quad (4.33b)$$

$$C = X_0'^2 + 1, \quad (4.33c)$$

$$D = \dot{X}_0^2 - 1, \quad (4.33d)$$

$$E = -2\dot{X}_0X_0', \quad (4.33e)$$

$$F = \pi^4 T^4 z^4 \left( 2X_0'' - \ddot{X}_0X_0'^2 - X_0''\dot{X}_0^2 + 2\dot{X}_0X_0'\dot{X}_0' - \frac{4X_0'\dot{X}_0^2}{z} - \frac{4X_0'^3}{z} \right). \quad (4.33f)$$

## 4.4 Solución ultra-relativista

Como se observa, esta ecuación es áltamente no lineal, pues los coeficientes dependen de una manera no trivial respecto a  $t$  como a  $z$ . No obstante, podemos analizar el problema tomándo el caso que más nos interesa fenomenológicamente. El QGP es creado en colisiones de iones pesados ultra relativistas; así mismo, gran parte de los partones obtenidos así como los jets y chorros de partículas se encuentran en este régimen. Resulta pues de gran interés poder decir algo al respecto así como también se nos simplifica la ecuación de movimiento de una manera considerable.

Bajo una aproximación ultra relativista, consideramos el caso donde

$$(1 - v^2) \equiv \alpha \ll 1 \quad (4.34)$$

y quedándonos a primer orden podemos hacer las aproximaciones  $v = \sqrt{1 - \alpha} \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha$ ,  $v^2 = 1 - \alpha$ ,  $v^3 \simeq 1 - \frac{3}{2}\alpha$ , y así sucesivamente.

Por otra parte, debemos considerar además la aproximación

$$\frac{az}{(1 - v^2)^{3/2}} \ll 1. \quad (4.35)$$

Esta última condición es indispensable para garantizar los siguientes 3 puntos:

- La perturbación/onda no se introduzca mucho en el bulto.
- La solución sea válida para tiempos tempranos.
- La velocidad no varíe mucho y, por lo tanto, permanezcamos siempre en el régimen ultra relativista.

Bajo estas dos aproximaciones, los coeficientes  $A, \dots, F$  a orden  $\alpha$  se reducen a:

$$A = 1 + \alpha, \quad (4.36a)$$

$$B = \alpha, \quad (4.36b)$$

$$C = \frac{2\alpha^{1/2}}{z}, \quad (4.36c)$$

$$D = \frac{2\alpha}{z}, \quad (4.36d)$$

$$E = 2\alpha^{1/2}, \quad (4.36e)$$

$$F = 3\pi^4 T^4 z^3 \alpha^{1/2}. \quad (4.36f)$$

Ahora, planteamos un ansatz en términos de series de potencias:

$$Y(t_{ret}, z) = \sum_k f_k(z) \alpha^{k/2}, \quad (4.37)$$

aunque en general,  $f_k(z)$  también podrían depender de  $t_{ret}$  a través de términos como  $a(t_{ret})$ ,  $j(t_{ret})$ , etc. Al realizar las derivadas respectivas, es fácil ver que los términos con  $k < 1$  conllevan a ecuaciones diferenciales homogéneas para  $f_k(z)$  y, por lo tanto, sus soluciones no contienen ninguna información acerca de la temperatura (en este caso  $f_k(z) = 0$  es físicamente aceptable). Por otra parte, es consistente que el orden mas bajo en  $\alpha$  sea  $\alpha^{-1/2}$  con el hecho de que  $Y$  sea una perturbación, pues éste es precisamente el orden de la solución misma a temperatura cero  $X_0$ ; el hecho de que  $Y$  siempre va acompañado de un  $T^4$ , tal como se puede leer del coeficiente  $F$  que nos da información de la parte no homogénea de la ecuación de movimiento, garantiza que  $Y \ll X_0$  a pesar de que ambos tengan el mismo orden en una expansión respecto a  $\alpha$ .

El caso  $k = -1$  es de particular relevancia a orden mas bajo en  $\alpha$ , ya que va a ser el único término de la serie que se puede igualar a la parte inhomogénea de la ecuación de movimiento y por lo tanto presenta toda la información de la temperatura. La ecuación que se obtiene para  $f_{-1}(z)$  es:

$$2f'_{-1}(z) + \pi^4 T^4 z^4 = 0, \quad (4.38)$$

cuya solución general esta dada por

$$f_{-1}(z) = -\pi^4 T^4 \frac{z^5}{10} + k. \quad (4.39)$$

donde  $k$  es una constante de integración. Ahora, como condición de frontera imponemos que  $Y(t, z = 0) = 0$ , de tal forma que  $x(t_{ret})$  siga representando la posición del extremo de la cuerda ubicado en  $z = 0$ . De esta forma, se tiene que  $k = 0$ , y por lo tanto

$$Y(t_{ret}, z) = -\pi^4 T^4 \frac{z^5}{10} (1 - v^2)^{-1/2}. \quad (4.40)$$

Es fácil verificar que términos con  $k > -1$  no contribuyen a orden mas bajo en la ecuación de movimiento.

Por último, cabe resaltar que este resultado se puede generalizar a órdenes mas altos en una expansión en términos de  $\alpha$ . La idea es ir construyendo la solución término a término, donde cada uno de los cuales implica la solución de una ecuación diferencial. Por ejemplo, si tenemos en cuenta el siguiente orden relevante en  $\alpha$ , se puede deducir de manera similar que la ecuación de movimiento respectiva sería:

$$f'_0(z) = 0 \quad (4.41)$$

cuya solución nos daría

$$f_0(z) = 0, \quad (4.42)$$

con las condiciones de frontera apropiadas.

Al siguiente orden obtenemos la ecuación

$$f'_1(z) + \frac{3}{2} \pi^4 T^4 z^4, \quad (4.43)$$

con su respectiva solución

$$f_1(z) = -3\pi^4 T^4 \frac{z^5}{20}. \quad (4.44)$$

Haciendo lo mismo es posible obtener que  $f_4(z) = 0$ , por lo que hasta este punto podemos escribir

$$X(t_{ret}, z) = x + vz(1 - v^2)^{-1/2} - \pi^4 T^4 \frac{z^5}{10} (1 - v^2)^{-1/2} - 3\pi^4 T^4 \frac{z^5}{20} (1 - v^2)^{1/2} + \dots \quad (4.45)$$

Dejamos el análisis de las implicaciones físicas de (4.45) para trabajo futuro aunque podemos ver dos conclusiones inmediatas. Primero, que la temperatura tiende a frenar el cuerpo de la cuerda. Esto en principio es razonable y se debe poder traducir como algún tipo de fuerza de fricción para el quark. Por otra parte, dado que la primera corrección de la temperatura aparece a orden  $T^4$ , esperamos que la tasa de pérdida de energía a tiempos tempranos aparezca a este mismo orden, resultado que difiere sustancialmente del régimen a tiempos tardíos. Esto ya había sido establecido bajo cálculos numéricos en [44].

---

---

# CONCLUSIONES

---

---

El presente trabajo de investigación tuvo como objeto el estudio de diferentes aspectos relacionados con la dinámica de quarks en teorías de norma fuertemente acopladas. Para esto, se empleó la llamada correspondencia AdS/CFT, la cual es una herramienta que surgió en el marco de la teoría de cuerdas y postula que es posible estudiar cierto tipo de teorías de campo a partir de una teoría gravitacional en una dimensión mayor. Por esta razón, se dice que esta dualidad es una realización concreta del principio holográfico. A falta de otros métodos analíticos fiables, la correspondencia AdS/CFT ha demostrado ser de valiosa utilidad para acceder al régimen de acoplamiento fuerte en diversas teorías de campos, el cual sería inalcanzable desde un punto de vista perturbativo.

Nuestro estudio se dividió en cuatro capítulos. En el primer capítulo se presentó un breve marco teórico que resume los conceptos fundamentales de la teoría de cuerdas y resultados concretos de la correspondencia AdS/CFT que se utilizaron a lo largo de este trabajo. Los capítulos restantes fueron el fruto de nuestra investigación, cada uno de los cuales con resultados y conclusiones independientes que nombraremos a continuación.

En el capítulo 2 se estudió la implementación del efecto Unruh en el formalismo de la correspondencia AdS/CFT. Según el efecto Unruh, un observador uniformemente acelerado en el vacío se siente inmerso en un baño térmico y por esta razón nos concentramos en el caso de un quark que lleva una trayectoria con aceleración constante, encontrando el encaje de la cuerda que es dual a dicha configuración (2.5). El objetivo principal de este capítulo fue entonces analizar de cerca el medio térmico que siente un observador de Rindler, y esto se hizo mediante el cálculo holográfico del valor esperado del tensor energía momento. De este estudio se puede concluir lo siguiente:

1. Los difeomorfismos en el bulto (2.13), que realizan la transición entre las coordenadas Minkowski y las coordenadas de Rindler en la frontera, dan lugar a un horizonte de aceleración, tanto en la descripción de la teoría de norma como en el bulto. Como resultado, un estado que es puro desde la perspectiva inercial, es interpretado como un estado mezcla desde el punto de vista de un observador de Rindler, porque los grados libertad accesibles a este último van a estar entrelazados con grados de libertad en la región detrás del horizonte. En particular, el vacío de Minkowski es interpretado ahora como un baño térmico con la temperatura con

la temperatura de Unruh (2.11). El valor esperado del tensor energía momento da cero pero esto se explica por el hecho de que el vacío de Rindler es asignado naturalmente con una densidad de energía negativa, reflejando la ausencia de medio.

2. El hecho de que las teorías consideradas presentan invariancia conforme nos da la posibilidad de eliminar el horizonte en la frontera a través de una transformación de Weyl apropiada. Dicha transformación equivale al difeomorfismo en el bulto (2.23) que altera drásticamente la foliación radial de la geometría AdS. Por construcción, en este nuevo marco conforme el horizonte de aceleración ya no es visible del lado de la teoría de norma pero, a pesar de esto, el horizonte todavía está presente en el bulto ahora a una posición radial fija. Esto nos permite leer directamente la temperatura de la teoría de campos dual a partir de la identificación de la escala energética en la cual se encuentra el horizonte (como es usual en la dualidad), encontrando de nuevo que ésta se encuentra a la temperatura de Unruh (2.11).
3. Tras este último difeomorfismo, se encontró que la métrica resultante en el espaciotiempo (2.24) difiere, para  $d \neq 2$ , del espacio Schwarzschild-AdS $_{d+1}$ , con lo que se infiere que las propiedades termodinámicas de las respectivas teorías de campo duales son diferentes. Esto es corroborado a partir del cálculo del valor esperado del tensor energía momento en el universo abierto de Einstein (2.28) y el hecho de que el resultado es diferente de cero para dimensiones pares se entiende como una consecuencia de la anomalía de Weyl.
4. Finalmente, con ayuda de los resultados de [96] se calculó el tensor energía momento del medio térmico de Unruh detectado por el observador de Rindler (2.36). Este resultado concuerda con el hecho de que el vacío de Rindler es asignado con una densidad de energía negativa, reflejando la ausencia de medio. Además, presenta la divergencia esperada en la densidad de energía local, a medida que nos acercamos al horizonte de Rindler.

Como trabajo futuro se formula la posibilidad de extender nuestro análisis para analizar el efecto Unruh circular [102, 103]. De hecho, el encaje de la cuerda dual a un quark en movimiento circular uniforme ya fue estudiado en [134], donde encontraron que para este caso el agujero negro inducido en la hoja de mundo exhibe una temperatura de Hawking suprimida por un factor de  $1/\gamma$ . Una carga en movimiento circular radía precisamente a una tasa que es igual a la de una carga uniformemente acelerada suprimida por un factor similar, por lo que es de esperarse que el efecto Unruh y las fluctuaciones asociadas, estén presentes en una menor intensidad.

En el capítulo 3 se estudiaron las fluctuaciones cuánticas de quarks que llevan una trayectoria promedio uniformemente acelerada y son inducidas por la emisión aleatoria de radiación cromoelectrónica. Desde la perspectiva del bulto, este proceso se entiende como resultado de que la radiación de Hawking, que surge en horizonte en la hoja de

mundo, excita los diferentes modos de oscilación de la cuerda, haciendo que su extremo fluctúe. De este capítulo obtuvimos las siguientes conclusiones:

1. La interpretación de las fluctuaciones van en completo paralelo con los resultados del efecto Unruh: dado que una partícula acelerada se siente inmerso en un baño térmico, las fluctuaciones cuánticas que experimenta el quark, según un observador inercial, son interpretadas por un observador acelerado como fluctuaciones térmicas que son resultado de colisiones con las demás partículas del medio.
2. A pesar de que las fluctuaciones en el medio térmico de Unruh se pueden describir por medio de una ecuación de Langevin generalizada de la forma 3.8 y es isotrópica respecto a todas sus direcciones, al traducir estos resultados al marco inercial se encuentra que para la ecuación de las fluctuaciones longitudinales (3.50) (a diferencia de las fluctuaciones transversales (3.51)), aparece un nuevo término proporcional a  $\delta x$ , razón por la cual ya no puede ser interpretada como una ecuación de Langevin. Esto refleja una clara anisotropía, lo cual era esperado debido a que la configuración de aceleración uniforme hace que una de las direcciones sea tratada de una forma diferente a las demás. Matemáticamente esto se refleja en el hecho de que las transformaciones de coordenadas relevantes tratan de forma diferente a la coordenada paralela a la aceleración que a las transversales y por lo tanto, las transformaciones de las fluctuaciones heredan esta anisotropía.
3. Otra característica importante de las ecuaciones (3.50) y (3.51) es por supuesto su dependencia temporal explícita, que se explica debido a que la velocidad y la tasa a la cual el quark radía energía y momento (3.58)-(3.60) varían con el tiempo. Esto fija una escala de tiempo característica  $\sim A^{-1}$  por debajo de la cual el quark puede considerarse en régimen cuasiestacionario. Analizando el sistema en escalas de tiempo mucho menores al tiempo característico  $\Delta t \ll A^{-1}$  pero mayores a la longitud de onda de Compton del quark  $\Delta t \gg z_m / \sqrt{1 + A^2 z_m^2}$ , las ecuaciones para las fluctuaciones se reducen a su forma local (3.54) y (3.55).
4. Es curioso que el signo en frente del término lineal respecto a  $\delta x$  en 3.50 (y (3.54)) resulta ser negativo para un intervalo de tiempo dado, porque si  $\zeta > 0$  (o  $\zeta_0 > 0$ ), esto implica que el quark experimenta una fuerza que tiende a alejarlo de su posición de equilibrio. Similarmente, se observa que  $\eta$  (así como  $\eta_0$ ) genéricamente se vuelve negativo luego de un periodo de tiempo, implicando que el efecto de la radiación es acelerar las fluctuaciones longitudinales del quark. Pero, dado que las ecuaciones de movimiento asociadas fueron obtenidas simplemente traduciendo una ecuación de Langevin al marco inercial, el efecto combinado de todos los términos debe llevar a un comportamiento físico razonable.

Cabe mencionar que para trayectorias arbitrarias del quark, en principio debería aplicar la misma historia, aunque el análisis resulta muy complicado debido a la presencia genérica de agujero negro dinámico en la hoja de mundo de la cuerda.

Por último, en el capítulo 4 analizamos el problema de encontrar una solución general a las ecuaciones de movimiento para una cuerda que se mueve en un fondo AdS-Schwarzschild, que es dual a un quark que se mueve en un plasma térmico. Este análisis resulta de particular interés pues en el caso de temperatura finita SYM es muy similar a QCD en su fase desconfiada y los resultados podrían ser relevantes para estudiar la física del plasma de quarks y gluones. De este estudio concluimos lo siguiente:

1. Para analizar los primeros efectos causados por la temperatura es conveniente truncar la ecuación de movimiento completa (4.29) y al orden más bajo obtenemos (4.30). El parámetro de expansión natural resulta ser  $z^4 T^4$ , razón por la cual, esperamos que las soluciones correspondientes sean válidas únicamente para  $z$  pequeños. Ahora, dado que a temperatura cero conocemos la solución exacta (4.14)-(4.15), un análisis perturbativo resulta útil.
2. La ecuación de movimiento para la perturbación (4.31) resulta altamente no lineal (4.32), pues los coeficientes dependen de una manera no trivial respecto a  $t$  como a  $z$ . No obstante, en el régimen ultra-relativista la ecuación se simplifica considerablemente, además de ser de gran interés fenomenológico. Aparte de la aproximación usual (4.34) propia de dicho régimen, es necesario también imponer la condición (4.35) por varias razones. Primero, para que la perturbación no se introduzca mucho en el bulto, de forma que la aproximación ultrarelativista sea consistente con la aproximación a temperaturas bajas. Segundo, para que la solución sea válida para tiempos tempranos. Por último, para que la velocidad no varíe mucho y, por lo tanto, permanezcamos siempre en el régimen ultra-relativista. Al imponer estas dos condiciones, obtuvimos que bajo un *ansatz* en series de potencias (4.37) es posible resolver las ecuaciones orden por orden. La solución que obtuvimos para el encaje de la cuerda fue (4.45).
3. De la solución encontrada se pueden inferir dos cosas. Primero, que la temperatura tiende a frenar el cuerpo de la cuerda, lo cual se debe poder traducir como un tipo de fricción que el plasma ejerce sobre el quark. Por otra parte, dado que la primera corrección de la temperatura resulta ser de orden  $T^4$ , es de esperarse que la tasa de pérdida de energía a tiempos tempranos aparezca al mismo orden. Esto difiere sustancialmente del resultado correspondiente en el régimen de tiempos tardíos y corrobora los resultados numéricos obtenidos en [44].

Dejamos para trabajo futuro realizar un análisis cuantitativo más profundo de las implicaciones físicas de nuestra solución. En particular, queremos estudiar el fenómeno de pérdida de energía, para generalizar los resultados de [39, 40] a situaciones que se aproximen más al experimento. Otra posible dirección es estudiar las correcciones a la ecuación del movimiento del quark siguiendo una ruta similar a [45, 46]. Así mismo, sería interesante investigar las mismas cuestiones para el caso de quarks con masa finita.

---

---

## REFERENCIAS

---

---

- [1] E. Cáceres, M. Chernicoff, A. Güijosa, J. F. Pedraza, “Quantum Fluctuations and the Unruh Effect in Strongly-Coupled Conformal Field Theories”, arXiv:1003.5332 [hep-th].
- [2] J. M. Maldacena, “The large  $N$  limit of superconformal field theories and supergravity”, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [arXiv:hep-th/9711200].
- [3] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory”, Phys. Lett. B, **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].
- [4] E. Witten, “Anti De Sitter Space And Holography”, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998), hep-th/9802150.
- [5] M. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, “Superstring Theory, Vol. 1: Introduction”, Cambridge University Press (1987).
- [6] M. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, “Superstring Theory, Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Fenomenology”, Cambridge University Press (1987).
- [7] J. Polchinski, “String Theory, Vol. 1: An introduction to the bosonic string”, Cambridge University Press (1998).
- [8] J. Polchinski, “String Theory, Vol. 2: Superstring theory and beyond”, Cambridge University Press (1998).
- [9] B. Zwiebach, “A First Course in String Theory”, Cambridge University Press (2004).
- [10] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, “String Theory and M-Theory: A Modern Introduction”, Cambridge University Press (2007).
- [11] P.K. Townsend, “The 11-dimensional supermembrane revisited”, Phys. Lett., B350, 184 (1995).
- [12] P. Horava, “Background Duality Of Open String Models”, Phys. Lett. B, 231, 251 (1989).

- 
- [13] J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, “New Connections Between String Theories”, *Mod. Phys. Lett. A*, **4**, 2073 (1989).
- [14] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges”, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4724 (1995) [hep-th/9510017].
- [15] R. G. Leigh, “Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model”, *Mod. Phys. Lett.*, **A4**, 2767 (1989).
- [16] G. T. Horowitz, A. Strominger, “Black strings and P-branes”, *Nucl. Phys.*, **B360**, 197 (1991).
- [17] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, “Large  $N$  field theories, string theory and gravity”, *Phys. Rept.*, **323**, 183 (2000) [arXiv:hep-th/9905111].
- [18] E. Verlinde, “Global Aspects of Electric-Magnetic Duality”, *Nucl. Phys.*, **B455**, 211 (1995), hep-th/9506011.
- [19] E. Witten, “Solutions of Four-Dimensional Field Theories via M-theory”, *Nucl. Phys.*, **B500**, 3 (1997).
- [20] R. Grimm, M. Sohnius and J. Wess, “Extended supersymmetry and gauge theories”, *Nucl. Phys.* **B133**, 275 (1978).
- [21] L. Susskind, E. Witten, “The holographic bound in anti-de Sitter space”, arXiv:hep-th/9805114.
- [22] J. Polchinski, M. J. Strassler, “The String dual of a confining four-dimensional gauge theory” [hep-th/0003136].
- [23] I. R. Klebanov, M. J. Strassler, “Supergravity and a confining gauge theory: Duality cascades and chiralSB-resolution of naked singularities”, *JHEP*, 0008, 052 (2000) [arXiv:hep-th/0007191].
- [24] J. Maldacena, C. Nuñez, “Towards the large  $N$  limit of pure  $\mathcal{N} = 1$  super Yang-Mills”, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 588 (2001) [arXiv:hep-th/0008001].
- [25] D. Z. Freedman, S. S. Gubser, K. Pilch, N. P. Warner, “Continuous distributions of D3-branes and gauged supergravity”, *JHEP*, 0007, 038 (2000) [hep-th/9906194].
- [26] T. Sakai, S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD”, *Prog. Theor. Phys.*, **113**, 843 (2005) [hep-th/0412141].
- [27] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Entropy”, *Phys. Rev.*, **D7**, 2333 (1973).
- [28] S. W. Hawking, “Black-Hole Evaporation”, *Nature*, **248**, 30 (1974).

- [29] A. Fotopoulos, T. R. Taylor, “Remarks on Two-Loop Free Energy in  $\mathcal{N} = 4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory at Finite Temperature”, *Phys. Rev.*, D59, 061701 (1999) [hep-th/9811224].
- [30] M. A. Vazquez-Mozo, “A note on supersymmetric Yang-Mills thermodynamics”, *Phys. Rev.*, D60, 106010 (1999) [hep-th/9905030].
- [31] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. A. Tseytlin, “Coupling Constant Dependence in the Thermodynamics of  $\mathcal{N} = 4$  Supersymmetric Yang-Mills Theory”, *Nucl. Phys.*, B534, 202 (1998) [hep-th/9805156].
- [32] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, “The quest for the quark-gluon plasma”, *Nature*, 448, 302 (2007).
- [33] G. Policastro, D. T. Son, A. O. Starinets, “The shear viscosity of strongly coupled  $\mathcal{N} = 4$  supersymmetric Yang-Mills plasma”, *Phys. Rev. Lett.*, 87, 081601 (2001) [arXiv:hep-th/0104066].
- [34] G. Policastro, D. T. Son, A. O. Starinets, “From AdS/CFT correspondence to hydrodynamics”, *JHEP*, 0209, 043 (2002) [arXiv:hep-th/0205052].
- [35] E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii, “Statistical Physics”, Pt. 2, Sec. 90, Pergamon Press, New York, (1980).
- [36] D. T. Son, A. O. Starinets, “Viscosity, Black Holes, and Quantum Field Theory”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 57, 95 (2007) [arXiv:0704.0240].
- [37] A. Karch, E. Katz, “Adding flavor to AdS/CFT”, *JHEP*, **0206**, 043 (2002) [arXiv:hep-th/0205236].
- [38] J. L. Hovdebo, M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, “Holographic mesons: Adding flavor to the AdS/CFT duality”, *Int. J. Mod. Phys. A*, 20, 3428 (2005).
- [39] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz, L. G. Yaffe, “Energy loss of a heavy quark moving through  $\mathcal{N} = 4$  supersymmetric Yang-Mills plasma”, *JHEP*, **0607**, 013 (2006) [arXiv:hep-th/0605158].
- [40] S. S. Gubser, “Drag force in AdS/CFT”, *Phys. Rev. D*, **74**, 126005 (2006) [arXiv:hep-th/0605182].
- [41] J. Casalderrey-Solana, D. Teaney, “Heavy quark diffusion in strongly coupled  $\mathcal{N} = 4$  Yang-Mills”, *Phys. Rev. D*, **74**, 085012 (2006) [arXiv:hep-ph/0605199].
- [42] H. Liu, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, “Calculating the jet quenching parameter from AdS/CFT”, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 182301 (2006) [arXiv:hep-ph/0605178].

- [43] A. Majumder, B. Muller, X.Ñ. Wang, “Small Shear Viscosity of a Quark-Gluon Plasma Implies Strong Jet Quenching”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 192301 (2007) [arXiv:hep-ph/0703082].
- [44] M. Chernicoff, A. Güijosa, “Acceleration, Energy Loss and Screening in Strongly-Coupled Gauge Theories”, *JHEP*, 0806, 005 (2008) [arXiv:0903.0306].
- [45] M. Chernicoff, J. A. García, A. Güijosa, “Generalized Lorentz-Dirac Equation for a Strongly-Coupled Gauge Theory ”, *Phys. Rev. Lett.*, 102, 241601 (2009) [arXiv:0903.2047].
- [46] M. Chernicoff, J. A. García, A. Güijosa, “A Tail of a Quark in N=4 SYM”, *JHEP*, 0909, 080 (2009) [arXiv:0906.1592].
- [47] A. Mikhailov, “Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence” [arXiv:hep-th/0305196].
- [48] J. L. Hovdebo, M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, “Holographic mesons: Adding flavor to the AdS/CFT duality”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **20**, 3428 (2005).
- [49] C. G. Callan, J. M. Maldacena, “Brane dynamics from the Born-Infeld action”, *Nucl. Phys. B*, **513**, 198 (1998) [arXiv:hep-th/9708147];
- [50] I. R. Klebanov, W. Taylor, M. Van Raamsdonk, “Absorption of dilaton partial waves by D3-branes”, *Nucl. Phys. B*, **560**, 207 (1999) [arXiv:hep-th/9905174].
- [51] S. Kobayashi, D. Mateos, S. Matsuura, R. C. Myers, R. M. Thomson, “Holographic phase transitions at finite baryon density”, *JHEP*, **0702**, 016 (2007) [arXiv:hep-th/0611099].
- [52] M. Kruczenski, D. Mateos, R. C. Myers, D. J. Winters, “Meson spectroscopy in AdS/CFT with flavour”, *JHEP*, **0307**, 049 (2003) [arXiv:hep-th/0304032].
- [53] S. Hong, S. Yoon, M. J. Strassler, “Quarkonium from the fifth dimension”, *JHEP*, **0404**, 046 (2004) [arXiv:hep-th/0312071].
- [54] A. Abouelsaood, C. G. Callan, C. R. Nappi, S. A. Yost, “Open Strings In Background Gauge Fields”, *Nucl. Phys. B*, **280**, 599 (1987).
- [55] M. Henningson, K. Skenderis, “The holographic Weyl anomaly”, *JHEP*, **9807** 023 (1998) [arXiv:hep-th/9806087];
- [56] M. Henningson, K. Skenderis, “Holography and the Weyl anomaly,” *Fortsch. Phys.*, **48** 125 (2000) [arXiv:hep-th/9812032].
- [57] S. de Haro, S. N. Solodukhin, K. Skenderis, “Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS/CFT correspondence”, *Commun. Math. Phys.*, **217** 595 (2001) [arXiv:hep-th/0002230].

- [58] K. Skenderis, “Asymptotically anti-de Sitter spacetimes and their stress energy tensor”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **16**, 740 (2001) [arXiv:hep-th/0010138].
- [59] M. Bianchi, D. Z. Freedman, K. Skenderis, “How to go with an RG flow”, *JHEP*, **0108** 041 (2001) [arXiv:hep-th/0105276].
- [60] M. Bianchi, D. Z. Freedman, K. Skenderis, “Holographic renormalization”, *Nucl. Phys. B*, **631** 159 (2002) [arXiv:hep-th/0112119].
- [61] V. Balasubramanian, P. Kraus, “A stress tensor for anti-de Sitter gravity”, *Commun. Math. Phys.*, **208**, 413 (1999) [arXiv:hep-th/9902121].
- [62] R. C. Myers, “Stress Tensors and Casimir Energies in the AdS/CFT Correspondence”, hep-th/9903203.
- [63] R. Emparan, C. V. Johnson and R. C. Myers, “Surface Terms as Counterterms in the AdS/CFT Correspondence”, *Phys. Rev. D* **60** 104001 (1999), hep-th/9903238
- [64] K. Skenderis, “Lecture notes on holographic renormalization”, *Class. Quant. Grav.*, **19** 5849 (2002) [arXiv:hep-th/0209067].
- [65] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, “Conformal Field Theory”, Springer-Verlag, New York (1997).
- [66] H. Osborn, A. C. Petkou, “Implications Of Conformal Invariance In Field Theories For General Dimensions”, *Annals Phys.*, **231**, 311 (1994) [arXiv:hep-th/9307010].
- [67] A. Petkou, K. Skenderis, “A non-renormalization theorem for conformal anomalies”, *Nucl. Phys. B*, **561**, 100 (1999) [arXiv:hep-th/9906030].
- [68] L. Bonora, P. Pasti, M. Bregola, “Weyl Cocycles”, *Class. Quant. Grav.*, **3**, 635 (1986).
- [69] S. Deser, A. Schwimmer, “Geometric Classification Of Conformal Anomalies In Arbitrary Dimensions”, *Phys. Lett. B*, **309**, 279 (1993) [arXiv:hep-th/9302047].
- [70] C. Fefferman, C. R. Graham, “Conformal invariants”, *Élie Cartan et les Mathématiques d’Aujourd’hui*, 95 (1985).
- [71] E. J. Moniz, D. H. Sharp, “Absence of runaways and divergent self-mass in non-relativistic quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **10**, 1133 (1974).
- [72] E. J. Moniz, D. H. Sharp, “Radiation Reaction In Nonrelativistic Quantum Electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **15**, 2850 (1977).
- [73] G. D. R. Martin, “Classical and Quantum Radiation Reaction”, arXiv:0805.0666 [gr-qc].
- [74] A. Higuchi, G. D. R. Martin, “Quantum Radiation Reaction and the Green’s Function Decomposition”, *Phys. Rev. D*, **74**, 125002 (2006) [arXiv:gr-qc/0608028].

- [75] A. Higuchi, G. D. R. Martin, “Radiation reaction on charged particles in three-dimensional motion in classical and quantum electrodynamics”, *Phys. Rev. D*, **73**, 025019 (2006) [arXiv:quant-ph/0510043].
- [76] A. Higuchi, G. D. R. Martin, “The Lorentz-Dirac force from QED for linear acceleration”, *Phys. Rev. D* **70**, 081701 (2004) [arXiv:quant-ph/0407162].
- [77] A. Higuchi, “Radiation reaction in quantum field theory”, *Phys. Rev. D*, **66**, 105004 (2002) [Erratum-ibid. D, **69**, 129903 (2004)] [arXiv:quant-ph/0208017].
- [78] R. Rosenfelder, A. W. Schreiber, “An Abraham-Lorentz-like equation for the electron from the worldline variational approach to QED”, *Eur. Phys. J. C*, **37**, 161 (2004) [arXiv:hep-th/0406062].
- [79] P. R. Johnson, B. L. Hu, “Uniformly accelerated charge in a quantum field: From radiation reaction to Unruh effect”, *Found. Phys.*, **35**, 1117 (2005) [arXiv:gr-qc/0501029].
- [80] P. R. Johnson, B. L. Hu, “Stochastic theory of relativistic particles moving in a quantum field. I: Influence functional and Langevin equation”, arXiv:quant-ph/0012137.
- [81] P. R. Johnson, B. L. Hu, “Stochastic theory of relativistic particles moving in a quantum field. II: Scalar Abraham-Lorentz-Dirac-Langevin equation, radiation reaction and vacuum fluctuations”, *Phys. Rev. D*, **65**, 065015 (2002) [arXiv:quant-ph/0101001].
- [82] P. R. Johnson, B. L. Hu, “Worldline influence functional: Abraham-Lorentz-Dirac-Langevin equation from QED”, arXiv:quant-ph/0012135.
- [83] R. Parentani, “The Recoils of the accelerated detector and the decoherence of its fluxes”, *Nucl. Phys. B*, **454**, 227 (1995) [arXiv:gr-qc/9502030].
- [84] P. A. M. Dirac, “Classical theory of radiating electrons”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **167**, 148 (1938).
- [85] S. S. Gubser, “Momentum fluctuations of heavy quarks in the gauge-string duality”, *Nucl. Phys. B*, **790**, 175 (2008) [arXiv:hep-th/0612143].
- [86] J. Casalderrey-Solana, D. Teaney, “Transverse momentum broadening of a fast quark in a  $\mathcal{N} = 4$  Yang Mills plasma”, *JHEP*, **0704**, 039 (2007) [arXiv:hep-th/0701123].
- [87] F. Domínguez, C. Marquet, A. H. Mueller, B. Wu, B. W. Xiao, “Comparing energy loss and  $p_{\perp}$ -broadening in perturbative QCD with strong coupling  $\mathcal{N} = 4$  SYM theory”, *Nucl. Phys. A*, **811**, 197 (2008) [arXiv:0803.3234 [nucl-th]].
- [88] B. W. Xiao, “On the exact solution of the accelerating string in  $\text{AdS}_5$  space”, *Phys. Lett. B*, **665**, 173 (2008) [arXiv:0804.1343 [hep-th]].

- [89] G. Beuf, C. Marquet, B. W. Xiao, “Heavy-quark energy loss and thermalization in a strongly coupled SYM plasma”, arXiv:0812.1051 [hep-ph].
- [90] A. Paredes, K. Peeters, M. Zamaklar, “Temperature versus acceleration: the Unruh effect for holographic models”, JHEP, **0904**, 015 (2009) [arXiv:0812.0981 [hep-th]].
- [91] W. G. Unruh, “Notes on black hole evaporation”, Phys. Rev. D, **14**, 870 (1976).
- [92] P. C. W. Davies, “Scalar particle production in Schwarzschild and Rindler metrics”, J. Phys. A, **8**, 609 (1975).
- [93] T. Hirayama, P. W. Kao, S. Kawamoto, F. L. Lin, “Unruh effect and Holography”, arXiv:1001.1289 [hep-th].
- [94] C. Imbimbo, A. Schwimmer, S. Theisen, S. Yankielowicz, “Diffeomorphisms and holographic anomalies”, Class. Quant. Grav., **17**, 1129 (2000) [arXiv:hep-th/9910267].
- [95] J. de Boer, V. E. Hubeny, M. Rangamani, M. Shigemori, “Brownian motion in AdS/CFT”, JHEP, **0907**, 094 (2009) [arXiv:0812.5112 [hep-th]].
- [96] R. Emparan, “AdS/CFT duals of topological black holes and the entropy of zero-energy states”, JHEP, **9906**, 036 (1999) [arXiv:hep-th/9906040].
- [97] T. S. Bunch, “Stress Tensor Of Massless Conformal Quantum Fields In Hyperbolic Universes”, Phys. Rev. D, **18**, 1844 (1978).
- [98] P. Candelas, J. S. Dowker, “Field Theories On Conformally Related Space-Times: Some Global Considerations”, Phys. Rev. D, **19**, 2902 (1979).
- [99] N. D. Birrell, P. C. W. Davies, “Quantum Fields In Curved Space”, Cambridge University Press, UK (1982).
- [100] R. M. Wald, “Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics”, Chicago University Press, USA (1994).
- [101] T. Albash, V. G. Filev, C. V. Johnson and A. Kundu, “Quarks in an External Electric Field in Finite Temperature Large  $N$  Gauge Theory”, JHEP, **0808**, 092 (2008) [arXiv:0709.1554 [hep-th]].
- [102] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, G. E. A. Matsas, “The Unruh effect and its applications”, Rev. Mod. Phys., **80**, 787 (2008) [arXiv:0710.5373 [gr-qc]].
- [103] S. Takagi, “Vacuum Noise And Stress Induced By Uniform Acceleration: Hawking-Unruh Effect In Rindler Manifold Of Arbitrary Dimensions”, Prog. Theor. Phys. Suppl., **88**, 1 (1986).
- [104] J. J. Bisognano, E. H. Wichmann, “On The Duality Condition For A Hermitian Scalar Field”, J. Math. Phys., **16**, 985 (1975).

- 
- [105] J. J. Bisognano, E. H. Wichmann, “On The Duality Condition For Quantum Fields”, *J. Math. Phys.*, **17**, 303 (1976).
- [106] G. L. Sewell, “Quantum Fields on Manifolds: PCT and Gravitationally Induced Thermal States”, *Ann. Phys.*, **141**, 201 (1982).
- [107] P. Candelas, D. Deutsch, “On The Vacuum Stress Induced By Uniform Acceleration Or Supporting The Ether”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **354**, 79 (1977).
- [108] P. Candelas, D. Deutsch, “Fermion Fields In Accelerated States”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **362**, 251 (1978).
- [109] S. Deser, O. Levin, “Accelerated detectors and temperature in (anti) de Sitter spaces”, *Class. Quant. Grav.*, **14**, L163 (1997) [arXiv:gr-qc/9706018].
- [110] S. Deser, O. Levin, “Equivalence of Hawking and Unruh temperatures through flat space embeddings”, *Class. Quant. Grav.*, **15**, L85 (1998) [arXiv:hep-th/9806223].
- [111] S. Deser, O. Levin, “Mapping Hawking into Unruh thermal properties”, *Phys. Rev. D*, **59**, 064004 (1999) [arXiv:hep-th/9809159].
- [112] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional space-time”, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1849 (1992) [arXiv:hep-th/9204099].
- [113] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli, “Geometry of the (2 + 1) black hole”, *Phys. Rev. D*, **48**, 1506 (1993) [arXiv:gr-qc/9302012].
- [114] D. M. Capper, M. J. Duff, “Trace anomalies in dimensional regularization”, *Nuovo Cim. A*, **23**, 173 (1974).
- [115] S. Deser, M. J. Duff, C. J. Isham, “Nonlocal Conformal Anomalies”, *Nucl. Phys. B*, **111**, 45 (1976).
- [116] S. Deser, A. Schwimmer, “Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions”, *Phys. Lett. B*, **309**, 279 (1993) [arXiv:hep-th/9302047].
- [117] M. J. Duff, “Twenty years of the Weyl anomaly”, *Class. Quant. Grav.*, **11**, 1387 (1994) [arXiv:hep-th/9308075].
- [118] L. S. Brown, J. P. Cassidy, “Stress Tensors And Their Trace Anomalies In Conformally Flat Space-Times”, *Phys. Rev. D*, **16**, 1712 (1977).
- [119] T. S. Bunch, “On Renormalization Of The Quantum Stress Tensor In Curved Space-Time By Dimensional Regularization”, *J. Phys. A*, **12**, 517 (1979).
- [120] A. Cappelli, A. Coste, “On the stress tensor of conformal field theories in higher dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **314**, 707 (1989).

- [121] H. Dorn, H. J. Otto, “Q anti-Q potential from AdS-CFT relation at  $T \geq 0$ : Dependence on orientation in internal space and higher curvature corrections”, JHEP, **9809**, 021 (1998) [arXiv:hep-th/9807093].
- [122] J. Greensite, P. Olesen, “Worldsheet fluctuations and the heavy quark potential in the AdS/CFT approach”, JHEP, **9904**, 001 (1999) [arXiv:hep-th/9901057].
- [123] P. Johnson, “Relativistic Particle Trajectories from Worldline Path Integral Quantization”, Proceedings of IEEE Particle Accelerator Conference (PAC 2001), Chicago, Illinois, 18-22 Jun 2001, pp 1781.
- [124] D. T. Son, D. Teaney, “Thermal Noise and Stochastic Strings in AdS/CFT”, JHEP, **0907**, 021 (2009) [arXiv:0901.2338 [hep-th]].
- [125] A. E. Lawrence, E. J. Martinec, “Black Hole Evaporation Along Macroscopic Strings”, Phys. Rev. D, **50**, 2680 (1994) [arXiv:hep-th/9312127].
- [126] V. P. Frolov, D. Fursaev, “Mining energy from a black hole by strings”, Phys. Rev. D, **63**, 124010 (2001) [arXiv:hep-th/0012260].
- [127] J. M. Maldacena, “Eternal black holes in Anti-de-Sitter”, JHEP, **0304**, 021 (2003) [arXiv:hep-th/0106112].
- [128] C. P. Herzog, D. T. Son, “Schwinger-Keldysh propagators from AdS/CFT correspondence”, JHEP, **0303**, 046 (2003) [arXiv:hep-th/0212072].
- [129] G. C. Giecold, E. Iancu, A. H. Mueller, “Stochastic trailing string and Langevin dynamics from AdS/CFT”, JHEP, **0907**, 033 (2009) [arXiv:0903.1840 [hep-th]].
- [130] G. C. Giecold, “Heavy quark in an expanding plasma in AdS/CFT”, JHEP, **0906** 002 (2009) [arXiv:0904.1874 [hep-th]].
- [131] J. Casalderrey-Solana, K. Y. Kim, D. Teaney, “Stochastic String Motion Above and Below the World Sheet Horizon”, JHEP, **0912**, 066 (2009) [arXiv:0908.1470 [hep-th]].
- [132] A.Ñ. Atmaja, J. de Boer, M. Shigemori, “Holographic Brownian Motion and Time Scales in Strongly Coupled Plasmas”, arXiv:1002.2429 [hep-th].
- [133] K. Rajagopal, F. Wilczek, “The condensed matter physics of QCD”, Chapter 35 in *At the Frontier of Particle Physics. Handbook of QCD*, M. Shifman ed., World Scientific (2001) [arXiv:hep-ph/0011333].
- [134] C. Athanasiou, P. M. Chesler, H. Liu, D. Nickel, K. Rajagopal, “Synchrotron radiation in strongly coupled conformal field theories”, arXiv:1001.3880 [hep-th] (2010).