



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS**

VARIETADES MANSAS Y GRUPOS

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A
LUIS GUILLERMO RUIZ VELÁZQUEZ**

DIRECTOR DE TESIS: DR. DANIEL JUAN PINEDA

MORELIA, MICHOACÁN.

ABRIL, 2010



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Variedades Mansas y Grupos

Luis Guillermo Ruiz Velázquez

Asesor Dr. Daniel Juan Pineda

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesor de tesis, el Dr. Daniel Juan Pineda, a mi jurado, el Dr. José Luis Cisneros Molina, el Dr. Rolando Jiménez Benítez, el Dr. Abel Castorena Martínez y el Dr. Fernando Hernández Hernández. También les doy las gracias a todos los profesores, compañeros, amigos y familiares que hicieron esto posible.

Índice general

1. Conceptos básicos	7
1.1. Plano hiperbólico	7
1.2. Esfera de Riemann	8
1.3. Grupos de Möbius	9
1.4. Puntos fijos de una transformación de Möbius	9
1.5. Clasificación de las transformaciones de Möbius	10
1.6. Representación matricial	11
1.7. Reflexiones	13
1.8. Geometría	14
1.9. Acciones discontinuas	15
1.10. El conjunto límite	15
1.11. Superficies de Riemann	16
1.11.1. Polígonos Fundamentales	17
2. El espacio hiperbólico	19
2.1. Distancias en \mathbb{H}	19
2.2. 3 variedades y descomposición de Heegaard	22
2.3. Transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n	23
2.4. Teoremas de combinación	26
2.4.1. Teorema de Klein	26
2.4.2. Teorema de combinación de Maskit	28
2.5. Teorema de Armstrong	37
2.6. Fibraciones	38
2.7. Variedades mansas	40

Introducción

Este es un trabajo que da continuidad a la tesis de licenciatura “Grupos Geométricamente Infinitos” que apareció en el 2006 y que a su vez se basa en el trabajo “On The Absence Of Ahlfors’ Finiteness Theorem For Kleinian Groups In Dimension Three” de M. Kapovich y L. Potyagailo y cuenta la forma de cómo conjurar un grupo geoméricamente finito F tal que $\pi_1(\Omega/F)$ no es geoméricamente finito. Además de llenar los espacios dejados en dicha tesis, se le da un uso al grupo creado en ella. El uso dado es inspirado por el estudio “Algebraic Limits Of Geometrically Finite Manifolds Are Tame” de J. Brock y J. Souto en el año 2006.

Toda 3-variedad hiperbólica completa M con grupo fundamental finitamente generado es mansa, es decir, es homeomorfa al interior de una variedad compacta. Esta es la **conjetura de Marden** que se prueba en [5].

El principal propósito de este trabajo es probar la ausencia del teorema anterior para 4 dimensiones. Concretamente se probará que: Existe una 4-variedad hiperbólica completa M con grupo fundamental finitamente generado tal que M no es mansa.

Para esto empezamos con algunas propiedades de las transformaciones de Möbius y del plano hiperbólico para luego pasar a trabajar con el espacio hiperbólico, tres variedades, teoremas de combinación y otros temas necesarios para sostener la parte medular que da origen a este trabajo.

La mayor parte de los recursos expuestos en este trabajo son un requisito en la prueba de que existe un grupo finitamente generado F tal que $\pi_1(\Omega/F)$ no es finitamente generado. Una vez transitado el arduo camino para llegar hasta este teorema, me refiero a la complejidad (por eso del plano complejo) de las transformaciones de Möbius; el sorprendente plano hiperbólico; el terreno salvaje de las 3 variedades; los peligrosos abismos de los teoremas de combinación; una vez pasado todo esto ya se puede ver relativamente cerca la meta principal: Existe una 4-variedad completa M con grupo fundamental finitamente generado tal que M no es mansa.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Para iniciar este estudio se requieren conocimientos básicos de topología, álgebra moderna y topología algebraica. Para las partes técnicas de algunos de los teoremas se necesita saber algunos resultados de álgebra homológica, teoría de variedades y cálculo complejo. Para mayor información consultar la bibliografía.

1.1. Plano hiperbólico

Trabajaremos con el modelo de plano hiperbólico siguiente

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

Las líneas en \mathbb{H} se definen como:

- (I) La intersección de \mathbb{H} con líneas euclidianas en \mathbb{C} perpendiculares al eje real \mathbb{R} .
- (II) Los círculos euclidianos con centro en \mathbb{R} intersección \mathbb{H} .

De la definición de líneas hiperbólicas y de las propiedades del plano euclidiano tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.1 *Dados dos puntos distintos en \mathbb{H} existe una única línea en \mathbb{H} que pasa por ellos.*

Definición 1.1.2 *Dos líneas hiperbólicas son **paralelas** en \mathbb{H} si son disjuntas.*

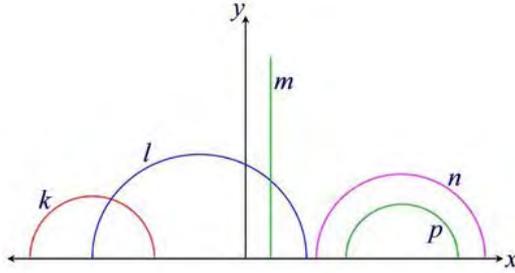


Figura 1.1: Líneas hiperbólicas

Con esta definición obtenemos una diferencia con respecto a la geometría euclidiana.

Proposición 1.1.3 *Sea l una línea hiperbólica en \mathbb{H} y $p \in \mathbb{H}$ con p que no esté en l , entonces existen una infinidad de líneas hiperbólicas distintas que pasan por p y son paralelas a l .*

1.2. Esfera de Riemann

Definición 1.2.1 *Sea $\bar{\mathbb{C}}$ la unión de \mathbb{C} con un punto que no esté en \mathbb{C} al que llamaremos ∞ .*

Las vecindades básicas de un punto en $\bar{\mathbb{C}}$ son de la siguiente manera: si $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{B}_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$; si $z = \infty$, $\mathbf{B}_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$.

Definición 1.2.2 *Un círculo en $\bar{\mathbb{C}}$ es o un círculo euclidiano en \mathbb{C} o la unión de una línea euclidiana en \mathbb{C} con ∞ .*

Definición 1.2.3 *Un disco en $\bar{\mathbb{C}}$ es una componente del complemento de un círculo en $\bar{\mathbb{C}}$.*

Con esta definición observamos que \mathbb{H} es un disco de $\bar{\mathbb{C}}$ determinado por $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1.3. Grupos de Möbius

Definición 1.3.1 Sea $\text{Homeo}^C(\bar{\mathbb{C}})$ el grupo de homeomorfismos de $\bar{\mathbb{C}}$ en sí mismo que mandan círculos en círculos.

Dos elementos de $\text{Homeo}^C(\bar{\mathbb{C}})$ son $f(z) = az + b$ donde $z \in \mathbb{C}$, $f(\infty) = \infty$ y $J(z) = \frac{1}{z}$ con $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$.

Todas las posibles composiciones de estos dos homeomorfismos son de la forma $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Por continuidad hacemos $m(\infty) = \frac{a}{c}$. Con esto daremos la siguiente definición.

Definición 1.3.2 Una transformación de Möbius es una función $m: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de la forma $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Haciendo las operaciones necesarias podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3 Si $m(z)$ es una transformación de Möbius y $c = 0$ entonces $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Si $c \neq 0$ entonces $m(z) = f \circ J \circ g(z)$ donde $g(z) = c^2z + cd$ y $f(z) = \frac{a}{c} - (ad - bc)z$ con $f(\infty) = g(\infty) = \infty$.

Corolario 1.3.4 Toda transformación de Möbius es un homeomorfismo de $\bar{\mathbb{C}}$ y manda círculos en círculos.

1.4. Puntos fijos de una transformación de Möbius

Definición 1.4.1 Un punto fijo de una transformación de Möbius m es un punto $z \in \bar{\mathbb{C}}$ tal que $m(z) = z$.

En una transformación de Möbius $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tenemos que $m(\infty) = \frac{a}{c}$ y así $m(\infty) = \infty$ si y sólo si $c = 0$.

Si $c = 0$ entonces $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, si $\frac{a}{d} = 1$ entonces $b \neq 0$ y así, m tiene a ∞ como único punto fijo. Si $\frac{a}{d} \neq 1$ entonces m tiene otro punto fijo en $z = \frac{b}{d-a}$.

Si $c \neq 0$ entonces $m(\infty) \neq \infty$ por lo que los puntos fijos satisfacen $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ con lo que concluimos que tiene uno o dos puntos fijos.

Con este análisis obtenemos el siguiente

Teorema 1.4.2 *Si $m(z)$ es una transformación de Möbius con tres puntos fijos distintos en $\bar{\mathbb{C}}$, entonces m es la identidad.*

Definición 1.4.3 *Un grupo G actúa de forma **n-transitiva** sobre un conjunto X si dadas dos n -adas de puntos (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_n) en X , existe un elemento $g \in G$ tal que $g(x_i) = y_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Teorema 1.4.4 *El grupo de las transformaciones de Möbius es 3-transitivo. Además el elemento que manda una tercia a otra es único.*

Demostración. Unicidad: Supongamos que $m(z)$ y $n(z)$ satisfacen los anterior, entonces $n^{-1}m(z)$ fija tres puntos por lo que es la identidad y tenemos $n = m$.

Existencia: Sea (z_1, z_2, z_3) una tercia de puntos distintos de $\bar{\mathbb{C}}$. Si ninguno de estos puntos es ∞ entonces tomamos la transformación $m(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$. Si $z_1 = \infty$ tomamos $m(z) = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}$. Si $z_2 = \infty$ tomamos $m(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}$. Si $z_3 = \infty$ tomamos $m(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Todas estas transformaciones mandan z_1, z_2 y z_3 en $0, 1$ e ∞ respectivamente.

Ahora, si (w_1, w_2, w_3) es otra tercia de puntos distintos, tomamos $n(z)$ tal que mande esta tercia en $(0, 1, \infty)$. Entonces $n^{-1} \circ m$ es la transformación que buscamos. \square

Del hecho de que tres puntos distintos en $\bar{\mathbb{C}}$ determinan un único círculo en $\bar{\mathbb{C}}$ obtenemos los siguientes teoremas.

Teorema 1.4.5 *Las transformaciones de Möbius actúan transitivamente en los círculos de $\bar{\mathbb{C}}$.*

Teorema 1.4.6 *Las transformaciones de Möbius actúan transitivamente en el conjunto \mathcal{D} de discos en $\bar{\mathbb{C}}$.*

1.5. Clasificación de las transformaciones de Möbius

Definición 1.5.1 *Dos transformaciones de Möbius m_1 y m_2 son **conjugadas** si existe una transformación de Möbius p tal que $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$.*

De esta definición podemos ver que dos transformaciones conjugadas tienen el mismo número de puntos fijos (demostración en [15]).

Sea $m(z)$ una transformación de Möbius distinta de la identidad. Supongamos que m tiene sólo un punto fijo x . Sea $y \in \mathbb{C} \setminus \{x\}$ entonces $x, y, m(y)$ son distintos, por lo que existe una transformación p que manda $(x, y, m(y))$ a $(\infty, 0, 1)$. Consideremos $p \circ m \circ p^{-1}$. Como esta transformación tiene como único punto fijo a ∞ , entonces es de la forma $p \circ m \circ p^{-1} = z + b$. Del hecho de que $p \circ m \circ p^{-1}(0) = 1$ tenemos que $b = 1$. Con todo esto tenemos que m es conjugada a $n(z) = z + 1$. A este tipo de transformaciones las llamaremos **parabólicas**.

Si $m(z)$ tiene dos puntos fijos x y y . Sea q una transformación de Möbius tal que $q(x) = 0$ y $q(y) = \infty$. Entonces $q \circ m \circ q^{-1}$ deja fijos a cero y a ∞ por lo que $q \circ m \circ q^{-1}(z) = az$ con $a \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0, 1$.

Si $|a| = 1$ entonces $a = e^{2i\theta}$ y así $q \circ m \circ q^{-1}(z) = e^{2i\theta}z$ con $0 < \theta < \pi$. A este tipo de transformaciones les llamaremos **elípticas**.

Si $|a| \neq 1$ entonces $a = \rho^2 e^{i2\theta}$ con lo que obtenemos $q \circ m \circ q^{-1}(z) = \rho^2 e^{i2\theta}z$ con $\rho \neq 1$ y $0 \leq \theta < \pi$. A esta clase de transformaciones las llamaremos **loxodrómicas**.

1.6. Representación matricial

Existe una fuerte relación entre transformaciones de Möbius y matrices. Sean $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $n(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ transformaciones de Möbius. Veremos a los coeficientes de m y n como las matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y

$$N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

de dos por dos. Así, $m \circ n$ coincide con el producto matricial MN .

Definición 1.6.1 Definiremos el **determinante** de una transformación de Möbius $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ como $\det(m) := \det(M) = ad - bc$.

El determinante de m no está bien definido ya que, si $\alpha \neq 0$,

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d}$$

y la parte izquierda tiene determinante $ad - bc$ y la parte derecha tiene determinante $\alpha^2(ad - bc)$.

Sin embargo siempre podemos escoger α tal que $\det(m) = 1$. A este proceso lo llamaremos **normalización** de m .

Definición 1.6.2 Definimos la **traza** de una transformación de Möbius $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ como $\mathbf{tr}(m) = (a+d)^2$ donde m está normalizada.

La traza tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{tr}(m \circ n) = \mathbf{tr}(n \circ m)$
2. $\mathbf{tr}(p \circ m \circ p^{-1}) = \mathbf{tr}(m)$

Con esto, podemos saber el tipo de las transformaciones de Möbius mediante las trazas de las formas normalizadas.

Sea m una transformación de Möbius distinta de la identidad. Si m es parabólica entonces existe una transformación p tal que $p \circ m \circ p^{-1}(z) = z + 1$ y así $\mathbf{tr}(p \circ m \circ p^{-1}) = (1 + 1)^2 = 4$.

Si m es elíptica o loxodrómica entonces existe p tal que $n(z) = p \circ m \circ p^{-1}(z) = \alpha^2 z$. Normalizando tenemos $n(z) = \frac{\alpha z}{\alpha^{-1}}$ entonces $\mathbf{tr}(n) = (\alpha + \alpha^{-1})^2$.

Si m es elíptica $|\alpha| = 1$ y así $\alpha = e^{i\theta}$ con $\theta \in (0, \pi)$. Con esto $\mathbf{tr}(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 = (2 \cos \theta)^2 = 4 \cos^2 \theta$.

Si m es loxodrómica $|\alpha| \neq 1$ y tenemos $\alpha = \rho e^{i\theta}$ con $\rho > 0$, $\rho \neq 1$ y $\theta \in [0, \pi)$. Entonces $\mathbf{tr}(m) = (\alpha + \alpha^{-1})^2 = \cos 2\theta(\rho^2 + \rho^{-2}) + 2 + i \sin 2\theta(\rho^2 - \rho^{-2})$ como $\rho \neq 1$ tenemos $\mathbf{Im}(\mathbf{tr}(m)) \neq 0$ si $\theta \neq 0$ y $\theta \neq \pi/2$. Si $\theta = 0 \Rightarrow \mathbf{tr}(m) > 4$ y si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{tr}(m) < 0$.

Ahora podemos concluir con lo siguiente.

Teorema 1.6.3 Si m es una transformación de Möbius distinta de la identidad entonces

- (I) m es parabólica si y sólo si $\mathbf{tr}(m) = 4$.
- (II) m es elíptica si y sólo si $\mathbf{tr}(m)$ es real y está en $[0, 4)$.
- (III) m es loxodrómica si y sólo si $\mathbf{tr}(m)$ tiene parte imaginaria distinta de cero o $\mathbf{tr}(m) \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

1.7. Reflexiones

Sea $c(z) = \bar{z}$. Entonces c es un homeomorfismo de $\bar{\mathbb{C}}$ que manda círculos en círculos. Como c deja fijo a todo $\bar{\mathbb{R}}$, c no es una transformación de Möbius.

Definición 1.7.1 *El grupo general de Möbius, \mathbf{Mob} , es el grupo generado por las transformaciones de Möbius y c .*

Teorema 1.7.2 $\mathbf{Mob} = \mathbf{Homeo}^C(\bar{\mathbb{C}})$.

Demostración. Sabemos que $\mathbf{Mob} \subset \mathbf{Homeo}^C(\bar{\mathbb{C}})$. Sea $f \in \mathbf{Homeo}^C(\bar{\mathbb{C}})$. Sea p transformación de Möbius tal que manda $(f(0), f(1), f(\infty))$ a $(0, 1, \infty)$. Entonces $p \circ f$ fija los puntos $0, 1$ e ∞ y manda círculos en círculos. Con esto vemos que $p \circ f(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$ y tenemos dos posibilidades: $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ o $p \circ f(\mathbb{H})$ es la parte de abajo del eje real de $\bar{\mathbb{C}}$.

Si $p \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ definimos $m = p$, en el otro caso $m = c \circ p$. Ahora tenemos que $m \circ f$ deja fijos a $0, 1$ y a ∞ , además de que $m \circ f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

Veremos que $m \circ f$ es la identidad. Sea $Z = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid m \circ f(z) = z\}$. Como $m \circ f$ fija a ∞ y manda círculos en círculos entonces manda líneas y círculos euclidianos en líneas y círculos euclidianos.

Si X y Y son líneas euclidianas que se intersecan en x_0 y $m \circ f(X) = X$ y $m \circ f(Y) = Y$ entonces $x_0 \in Z$.

Para $s \in \mathbb{R}$ sea $V(s)$ la línea vertical que pasa por s y sea $H(s)$ la línea horizontal que pasa por is .

Sea H cualquier línea horizontal en \mathbb{C} . Como $m \circ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ y \mathbb{R} y H son disjuntos, entonces $m \circ f(H)$ es una línea horizontal en \mathbb{H} .

Sea A el círculo con centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$, $V(0)$ es tangente a A en cero, entonces $m \circ f(V(0))$ es tangente a $m \circ f(A)$ en cero y $m \circ f(V(1))$ es tangente a $m \circ f(A)$ en 1. Entonces $m \circ f(A) = A$.

Hacemos lo mismo con $H(\frac{1}{2})$ y $H(-\frac{1}{2})$, $m \circ f(H(\frac{1}{2})) = H(\frac{1}{2})$ y $m \circ f(H(-\frac{1}{2})) = H(-\frac{1}{2})$.

Con esto tenemos los puntos fijos $0, 1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 1 + \frac{i}{2}$ y $1 - \frac{i}{2}$. Cada par de puntos en Z definen una línea que queda invariante bajo $m \circ f$.

La recta que pasa por los puntos $\frac{i}{2}$ y $1 - \frac{i}{2}$ interseca a \mathbb{R} en $\frac{1}{2}$ que resulta ser otro punto fijo. Con esto tenemos nueve puntos fijos en un cuadrado de lado 1 centrado en $\frac{1}{2}$. Los puntos fijos de este cuadrado lo dividen en cuatro cuadrados más pequeños. Lo que haremos es encontrar, en cada uno de estos cuatro cuadrados, nueve puntos fijos distribuidos de la misma manera que en

el cuadrado grande. Con esto podremos repetir este procedimiento para que los puntos fijos sean densos en cada cuadrado.

Con los puntos $-\frac{i}{2}$ y $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ obtenemos el punto fijo $\frac{1}{4}$. De la misma manera podemos sacar los $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{i}{4}$ y $\frac{1}{2} - \frac{i}{4}$. Con estos cuatro puntos tenemos los puntos fijos $\frac{i}{4}$, $\frac{1}{4} + \frac{i}{2}$. Y con las líneas $V(\frac{1}{4})$ y $H(\frac{1}{2})$ encontramos el centro de este pequeño cuadrado que tiene la distribución de puntos fijos que estábamos buscando.

Ahora veremos que lo que pasa en este cuadrado pasa en todo el plano complejo.

De los puntos 0 y $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ sacamos el punto fijo $1 + i$. De los puntos 1 y $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ obtenemos a i . De las rectas $H(1)$ y $V(\frac{1}{2})$ tenemos el punto fijo $\frac{1}{2} + i$.

Con esto tenemos la misma distribución de puntos fijos pero ahora en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Con este procedimiento podemos concluir que $\bar{Z} = \bar{C}$. Como m y f son continuas entonces $m \circ f$ es la identidad. \square

1.8. Geometría

En una transformación de Möbius $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, tal que $ad - bc = 1$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si hacemos $m(z) = z$ tenemos la ecuación $P(z) = cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Si $c = 0$ entonces ∞ es un punto fijo. Si $a \neq d$ otro punto fijo es $\frac{b}{d-a} \in \mathbb{R}$.

Si $c \neq 0$ los puntos fijos son $\frac{1}{2}(a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4ac})$. Por lo que los puntos fijos son reales o son conjugados.

Entonces tenemos

1. $P(z)$ tiene una raíz si y sólo si $(d - a)^2 - 4ac = (d - a)^2 - 4 = 0$ (caso parabólico).
2. $P(z)$ tiene raíces reales si y sólo si $(d - a)^2 - 4ac = (d + a)^2 - 4 > 0$ (caso loxodrómico).
3. $P(z)$ tiene raíces conjugadas si y sólo si $(d - a)^2 - 4ac = (d + a)^2 - 4 < 0$ (caso elíptico).

1.9. Acciones discontinuas

Definición 1.9.1 Sea X un espacio topológico y sea G un grupo de homeomorfismos de X en sí mismo. Decimos que la acción de G en un punto $x \in X$ es **libremente discontinua**, si existe una vecindad U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, para todos los $g \in G$ distintos de la identidad. La vecindad U se llama una **buena vecindad** de x .

Ejemplo 1.9.2 Un ejemplo sería el grupo \mathbb{Z} de los enteros actuando sobre \mathbb{R} con acción $g(x) = g + x$ con $g \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$.

Otra forma de decir lo mismo es que los traslados de U por distintos elementos de G son disjuntos.

El conjunto de puntos en el que la acción de G es libremente discontinua se llama el **conjunto regular libre**, y se denota por $\Omega^\circ = \Omega^\circ(G)$

Definición 1.9.3 Un subgrupo $G \subset \mathbf{Mob}$ cuya acción es libremente discontinua en algún punto $z \in \mathbb{C}$ es un **grupo Kleiniano**.

Proposición 1.9.4 Ω°/G es Hausdorff con la topología cociente.

Demostración. Sean x y y dos puntos no equivalentes de Ω° . Necesitamos encontrar vecindades U de x y V de y tal que $g(U) \cap V = \emptyset$ para todas las $g \in G$. Empezamos tomando U y V dos buenas vecindades disjuntas de x y y respectivamente. Si es necesario hacemos V pequeña tal que ningún traslado de x quede en \bar{V} , la cerradura de V .

Como los traslados de U bajo G son discos circulares disjuntos, la suma de sus áreas esféricas es menor o igual al área de la esfera, entonces el diámetro esférico de cualquier sucesión de ellos tiende a cero. Como los traslados de x no se acumulan en Ω° , sólo una cantidad finita de traslados de U se intersecan con V . Para cada $g \in G$ con $g(U) \cap V \neq \emptyset$ existe una buena vecindad más chica U' de x con $g(U') \cap V = \emptyset$. Después de un número finito de pasos, encontramos las vecindades requeridas. \square

1.10. El conjunto límite

Definición 1.10.1 Un punto x es un punto límite de un grupo Kleiniano G si existe un punto $z \in \Omega^\circ$, y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G , con $g_m(z) \rightarrow x$. El conjunto de puntos límites se llama el **conjunto límite** y se denota por $\Lambda = \Lambda(G)$.

Como cada vecindad de un punto de Λ contiene una infinidad de traslados de un punto, $\Lambda \cap \Omega^\circ = \emptyset$.

En general, si un grupo actúa en un espacio X y $Y \subset X$, entonces el **estabilizador** de Y en G , que se denota $\mathbf{Stab}_G(Y)$, o sólo $\mathbf{Stab}(Y)$ si no hay confusión, se define como

$$\mathbf{Stab}(Y) = \{g \in G \mid g(Y) = Y\}.$$

$\mathbf{Stab}(Y)$ siempre es un subgrupo de G .

Definición 1.10.2 Decimos que G actúa de forma **discontinua** en un punto $x \in X$ si existe una vecindad U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todas las $g \in G$ excepto una cantidad finita.

Ejemplo 1.10.3 El grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ actuando en \mathbb{R}^2 actúa de forma discontinua en el eje imaginario y la acción no es libremente discontinua.

El conjunto de puntos en los que G actúa de forma discontinua se llama el **conjunto de discontinuidad** o **conjunto regular** y se denota por $\Omega = \Omega(G)$.

Teorema 1.10.4 Para cualquier grupo Kleiniano G , $\bar{\mathbb{C}}$ es la unión disjunta de Λ y Ω .

Demostración. Vea [15] ó [10].

Proposición 1.10.5 Si existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de un grupo Kleiniano G y existe un punto y en $\Omega(G)$ con $g_m(y) \rightarrow x \in \bar{\mathbb{C}}$, entonces $g_m(z) \rightarrow x$ para todas las $z \in \Omega(G)$.

Demostración. Vea [15] ó [10].

1.11. Superficies de Riemann

Una **superficie de Riemann** S es una variedad conexa compleja de una dimensión, esto es, S es un espacio Hausdorff conexo donde cualquier $s \in S$ tiene una vecindad U y un homeomorfismo asociado $\psi: U \rightarrow \mathbb{C}$ donde, cuando esté definida, la composición de uno de estos homeomorfismos con el inverso de otro es holomorfo. El homeomorfismo ψ es llamado una **coordenada local** en s .

Teorema 1.11.1 *Sea G un grupo Kleiniano. Entonces $S = \Omega/G$ es una superficie de Riemann.*

Demostración. Vea [15] ó [10].

1.11.1. Polígonos Fundamentales

A lo largo de esta sección usaremos la siguiente notación: \mathbb{X} es uno de los espacios \mathbb{H}^n , \mathbb{S}^n o \mathbb{E}^n y \mathbb{G} su grupo de isometrías.

Definición 1.11.2 *Un poliedro (convexo) D en \mathbb{X} es la intersección de una cantidad numerable de semiespacios, donde sólo una cantidad finita de los hiperplanos que definen estos semiespacios intersecan a cualquier compacto de \mathbb{X} .*

Definición 1.11.3 *Sea G un subgrupo discreto de \mathbb{G} . Un poliedro D es un poliedro fundamental para G si se cumple lo siguiente:*

- (i) *Para cada $g \in G$ distinto de la identidad, $g(D) \cap D = \emptyset$.*
- (ii) *Para cada $x \in \mathbb{X}$ existe una $g \in G$ con $g(x) \in \overline{D}$.*
- (iii) *Los lados de D están identificados por elementos de G ; esto es, para cada lado s existe un lado s' y un elemento $g_s \in G$ tales que $g_s(s) = s'$. Además debe cumplirse que $g_{s'} = g_s^{-1}$ y $(s')' = s$. El elemento g_s se llama una identificación de lados.*
- (iv) *Cualquier compacto interseca una cantidad finita de trasladados de D por elementos de G .*

Teorema 1.11.4 *Las identificaciones de lados generan a G .*

Demostración. Vea [15] ó [10].

Un poliedro de dimensión dos se llama **polígono**, en este caso las caras de codimensión dos se llaman *vértices*.

Definición 1.11.5 *Un grupo Kleiniano G es geoméricamente finito si existe un polígono fundamental para G con un número finito de lados.*

Capítulo 2

El espacio hiperbólico

En este capítulo vamos a estudiar el espacio hiperbólico y algunas de sus propiedades que nos serán útiles para trabajar con transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n . Luego, veremos una de las herramientas más usadas al final de este trabajo, los teoremas de combinación. Concluimos con un repaso del resultado principal de la tesis de licenciatura y el objetivo de este estudio.

2.1. Distancias en \mathbb{H} .

Definición 2.1.1 Una **trayectoria** en \mathbb{H} es una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) con derivada continua.

Definición 2.1.2 La **longitud** de una trayectoria f se define como

$$\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f) = \int \frac{1}{\mathbf{Im}(z)} |d(z)| = \int_a^b \frac{1}{\mathbf{Im}(f(t))} |f'(t)| dt.$$

Definición 2.1.3 Si \mathbb{G} es un grupo que contiene a los subgrupos A, B, \dots , y a los elementos a, b, \dots , entonces denotamos al subgrupo de \mathbb{G} generado por A, B, \dots, a, b, \dots , por $\langle A, B, \dots, a, b, \dots \rangle$.

Definición 2.1.4 El grupo $\mathbf{Mob}(\mathbb{H}) \subset \mathbf{Homeo}^C(\bar{\mathbb{C}})$ es el grupo $\langle z+b, -\frac{1}{z}, -\bar{z} \rangle$ donde $z \in \mathbb{H}$ y $b \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.5 Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ es una trayectoria en \mathbb{H} entonces

$$\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f) = \mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f)$$

para toda $\gamma \in \mathbf{Mob}(\mathbb{H})$.

Demostración. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ una trayectoria en \mathbb{H} . Probaremos el resultado para los generadores.

Sea $\gamma(z) = z + b$ con $b \in \mathbb{R}$ entonces $\gamma \circ f(t) = f(t) + b$ y $(\gamma \circ f(t))' = f'(t)$. Con esto

$$\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = \int_a^b \frac{1}{\mathbf{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = \mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f).$$

Sea $\gamma(z) = -\frac{1}{z}$ entonces $\gamma \circ f(t) = \frac{\mathbf{Im}(f(t))}{|f(t)|^2}$ y $(\gamma \circ f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)^2}$. Con esto

$$\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = \int_a^b \frac{|f(t)|^2}{\mathbf{Im}(f(t))} \left| \frac{f'(t)}{f(t)^2} \right| dt = \int_a^b \frac{1}{\mathbf{Im}(f(t))} |f'(t)| dt = \mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f).$$

Sea $\gamma(z) = -\bar{z}$ entonces $\gamma \circ f(t) = -\overline{f(t)}$ de donde $\mathbf{Im}(-\overline{f(t)}) = \mathbf{Im}(f(t))$. Vemos a f como $f(t) = U(t) + iV(t)$ y tenemos $(\gamma \circ f(t))' = -U'(t) + iV'(t)$. Con esto

$$\begin{aligned} \mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) &= \int_a^b \frac{1}{V(t)} |-U'(t) + iV'(t)| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{V(t)} |U'(t) + iV'(t)| dt = \mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.6 Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ es una trayectoria en \mathbb{H} entonces $\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f)$ es finita.

Demostración. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ una trayectoria en \mathbb{H} . Como f es continua $f([a, b])$ es compacto, entonces existe $B > 0$ tal que $f([a, b]) \subset K_B = \{z \in \mathbb{H} | \mathbf{Im}(z) \geq B\}$. Sea A máximo de $|f'|$.

$$\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f) = \int_a^b \frac{1}{\mathbf{Im}(f(t))} |f'(t)| dt \leq \int_a^b \frac{A}{B} dt = \frac{A}{B}(b - a).$$

□

Sea $\Gamma[x, y] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H} | f \text{ es trayectoria, } f(a) = x \text{ y } f(b) = y\}$

Definición 2.1.7 Definimos la distancia en \mathbb{H} como $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, y) = \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f) | f \in \Gamma[x, y]\}$.

Esto hace a $(\mathbb{H}, \mathbf{d}_{\mathbb{H}})$ un espacio métrico.

Teorema 2.1.8 Para toda $\gamma \in \mathbf{Mob}(\mathbb{H})$ y para todo par $x, y \in \mathbb{H}$ tenemos que $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, y) = \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$.

Demostración. Observemos que $\{\gamma \circ f \mid f \in \Gamma[x, y]\} \subset \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$.
Como $\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f) = \mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) &= \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma \circ f \mid f \in \Gamma[x, y])\} \\ &\leq \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f \mid f \in \Gamma[x, y])\}. \end{aligned}$$

Como γ es invertible y $\gamma^{-1} \in \mathbf{Mob}$ entonces $\{\gamma^{-1} \circ g \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \subset \Gamma[x, y]$ con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, y) &= \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[x, y]\} \\ &\leq \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1} \circ g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &\leq \inf \{\mathbf{long}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \\ &= \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.9 $\mathbf{Isom}(\mathbb{H}, \mathbf{d}_{\mathbb{H}}) = \mathbf{Mob}(\mathbb{H})$.

Para la demostración de este teorema usaremos el siguiente lema.

Lema 2.1.10 Sean x, y, z puntos distintos de \mathbb{H} . Entonces $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, y) + \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(y, z) = \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, z)$ si y sólo si y está en el segmento hiperbólico que une a x con z .

Demostración. (Del teorema anterior). Sea $f \in \mathbf{Isom}(\mathbb{H}, \mathbf{d}_{\mathbb{H}})$. Sea l una línea hiperbólica. Sean x, y, z en l puntos distintos. Entonces $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, y) + \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(y, z) = \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, z)$ por lo que $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(f(x), f(y)) + \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(f(y), f(z)) = \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(f(x), f(z))$ y así $f(x), f(y), f(z)$ están en la misma línea hiperbólica. Como esto fue para todo x, y y z , f manda líneas hiperbólicas en líneas hiperbólicas.

Si $p, q \in \mathbb{H}$, sea l_{pq} el segmento de línea hiperbólica que va de p a q . Con lo anterior vemos que $l_{f(p)f(q)} = f(l_{pq})$.

Sea l el bisector perpendicular del segmento hiperbólico l_{pq} . Es decir, $l = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(p, z) = \mathbf{d}_{\mathbb{H}}(q, z)\}$. l es una línea hiperbólica. Después de esto tenemos que $f(l)$ es bisector perpendicular a $f(l_{pq}) = l_{f(p)f(q)}$.

Sean x, y puntos distintos en el eje imaginario y H el primer cuadrante. Existe $\gamma \in \mathbf{Mob}(\mathbb{H})$ tal que $\gamma(f(x)) = x$ y $\gamma(f(y)) = y$ y esto implica que $\gamma \circ f$ fija a x y a y por lo que manda el eje imaginario sobre sí mismo. Sin pérdida de generalidad $\gamma \circ f(H) = H$.

Sea I el eje imaginario positivo y sea $z \in I$. Con esto, z está totalmente determinado por las distancias $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(x, z)$ y $\mathbf{d}_{\mathbb{H}}(y, z)$. Como $\gamma \circ f$ es isometría, $\gamma \circ f$ fija a z .

Sea $w \in \mathbb{H} \setminus I$. Sea l el círculo euclidiano centrado en cero que pasa por w . Como $i|w|$ queda fijo por $\gamma \circ f$, l queda fijo por $\gamma \circ f$. Ya que $\gamma \circ f$ fija a H , tenemos que $\gamma \circ f$ fija a w . Por todo esto $\gamma \circ f$ es la identidad. \square

2.2. 3 variedades y descomposición de Heegaard

Sean M_1 y M_2 3-variedades compactas con fronteras homeomorfas y $f: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ un homeomorfismo.

Al pegar M_1 a M_2 obtenemos una nueva 3-variedad compacta $M = M_1 \cup_f M_2$ sin frontera.

Ejemplo 2.2.1 *Dos bolas 3-dimensionales pegadas por un homeomorfismo en sus fronteras producen una esfera 3-dimensional.*

Ejemplo 2.2.2 *Al pegar dos copias del toro sólido $S^1 \times D^2$ producen $S^1 \times S^2$ si f es la identidad. Sin embargo, si $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ es el homeomorfismo de las fronteras de los toros que cambia las dos copias de S^1 la variedad resultante es S^3 .*

Definición 2.2.3 *Un cubo con g asas es una 3-variedad orientable que se obtiene de la 3-bola D^3 al pegarle g copias de $D^2 \times [-1, 1]$. El homeomorfismo de pegado identifica los $2g$ discos $D^2 \times \{\pm 1\}$ con $2g$ 2-discos disjuntos de $\partial D^3 = S^2$ tal que la variedad resultante es orientable.*

Resulta que toda 3-variedad M se obtiene de pegar dos cubos con g asas, es decir, $M = H \cup H'$ donde H y H' son dos cubos con asas tales que $H \cap H' = \partial H = \partial H'$. El género de H debe ser igual al género de H' . A esta descomposición se le llama **descomposición de Heegaard** de M de género g .

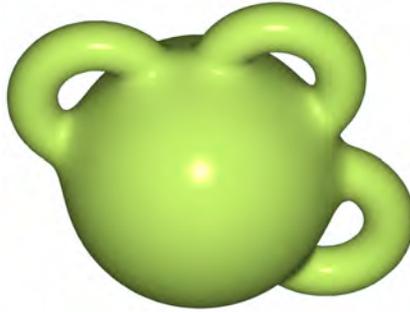


Figura 2.1: Cubo con asas.

Analicemos el ejemplo 2.2.1. Sea M una variedad que se obtiene de pegar dos copias de D^3 mediante su frontera con un homeomorfismo $f: S^2 \rightarrow S^2$. Entonces $M = D_1 \cup D_2$ con $D_1 = D_2 = D^3$. Existe un homeomorfismo que lleva D_1 a la parte de arriba de S^3 y un homeomorfismo que lleva D_2 a la parte de abajo de S^3 y así podemos obtener que M es S^3 .

Teorema 2.2.4 *Cualquier 3-variedad orientable cerrada M admite una descomposición de Heegaard.*

Demostración. Usamos el teorema de Moise (vea ([12])): Toda 3-variedad se puede triangular. Sea T una triangulación de M . Reemplazamos los vértices de T por bolas, las orillas de T por cilindros, los lados de T por “platos” y cada tetraedro por una bola. Ver figura 2.2.

La unión $H(T)$ de las bolas de vértices y cilindros son un cubo con asas y también lo es la unión $H'(T)$ de las bolas de tetraedros y platos. Entonces $M = H(T) \cup H'(T)$ es una descomposición de Heegaard. \square

2.3. Transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n

Definición 2.3.1 *La esfera $S(a, r)$ en \mathbb{R}^n esta dada por*

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\}$$

*donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La **reflexión** en $S(a, r)$ es la función*

$$\phi = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a).$$

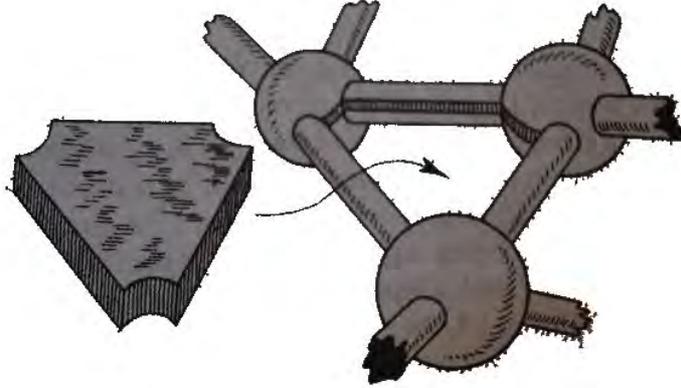


Figura 2.2:

Hacemos $\phi(a) = \infty$ y $\phi(\infty) = a$.

Definición 2.3.2 Un plano $P(a, t)$ está dado por

$$P(a, t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = t\} \cup \{\infty\}$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}$. La **reflexión** en $P(a, t)$ es la función

$$\phi(x) = x - 2[(x \cdot a) - t] \frac{a}{\|a\|^2}.$$

Hacemos $\phi(\infty) = \infty$.

Definición 2.3.3 Las transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n son composiciones de un número finito de reflexiones.

Definición 2.3.4 El grupo $\text{Möb}(\mathbb{R}^n)$ son las transformaciones de Möbius que preservan la orientación.

Con esta definición podemos ver que las transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^n tienen como generadores a

1. $t(x) = x + a$ donde $a \in \mathbb{R}^n$

2. $d(x) = \lambda x$ donde $\lambda \in (0, +\infty)$
3. $r(x) = Rx$ donde $R \in \mathbf{O}_n$
4. $j(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$

Una transformación de Möbius en \mathbb{R}^n se puede extender a una en \mathbb{R}^{n+1} como sigue.

Si M , una transformación de Möbius en \mathbb{R}^n , es una reflexión en la esfera $S(a, r)$ o en el plano $P(a, r)$, entonces \tilde{M} , la extensión de M , es una reflexión en la esfera $S(\tilde{a}, r)$ o en el plano $P(\tilde{a}, r)$ donde, si $a = (a_1, \dots, a_n)$, $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n, 0)$.

Teorema 2.3.5 *Sea T transformación de Möbius en \mathbb{R}^n . Entonces \tilde{T} es una isometría de \mathbb{H}^{n+1} con la métrica ρ dada por $ds = \frac{|dx|}{x_{n+1}}$.*

Demostración. Lo probaremos para los generadores. Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ una trayectoria. Recordemos que $\mathbf{long}(f) = \int_a^b \frac{1}{f_{n+1}(t)} |f'(t)| dt$. Vamos a ver que $\mathbf{long}(\tilde{T} \circ f) = \mathbf{long}(f)$ para todos los generadores.

Para $\tilde{t}(y) = y + a$ con $a \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{t} \circ f(t) = f(t) + a$ y $(\tilde{t} \circ f(t))' = f'(t)$ entonces $\mathbf{long}(\tilde{t} \circ f) = \int_a^b \frac{1}{f_{n+1}(t)} |f'(t)| dt = \mathbf{long}(f)$.

Para $\tilde{d}(y) = \lambda y$, $\tilde{d} \circ f(t) = \lambda f(t)$ y $(\tilde{d} \circ f(t))' = \lambda f'(t)$. Entonces $\mathbf{long}(\tilde{d} \circ f) = \int_a^b \frac{\lambda}{\lambda f_{n+1}(t)} |f'(t)| dt = \mathbf{long}(f)$.

Para $\tilde{r}(y) = \tilde{R}y$ con $\tilde{R} \in \mathbf{O}_{n+1}$ donde \tilde{R} es la matriz R pero con un último renglón aumentado y una última fila agregada llenos de ceros y un uno en la última entrada. $\tilde{r} \circ f(t) = \tilde{R}f(t)$ y $(\tilde{r} \circ f(t))' = \tilde{R}f'(t)$ con esto $\mathbf{long}(\tilde{r} \circ f) = \int_a^b \frac{1}{f_{n+1}(t)} \left| \tilde{R}f'(t) \right| dt = \int_a^b \frac{1}{f_{n+1}(t)} |f'(t)| dt = \mathbf{long}(f)$.

Para $\tilde{j}(y) = \frac{y}{|y|^2}$, $\tilde{j} \circ f(t) = \frac{f(t)}{|f(t)|^2}$ y

$$\begin{aligned} (\tilde{j} \circ f(t))' &= \left| \frac{\langle f, f \rangle f' - 2f \langle f, f' \rangle}{\langle f, f \rangle} \right| \\ &= \frac{\sqrt{\sum_i (\langle f, f \rangle f'_i - 2f_i \langle f, f' \rangle)^2}}{\langle f, f \rangle^2} \\ &= \frac{\sqrt{\sum_i (\langle f, f \rangle^2 f_i'^2 - 4f_i f'_i \langle f, f \rangle \langle f, f' \rangle + 4f_i^2 \langle f, f' \rangle^2)}}{\langle f, f \rangle^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\langle f, f \rangle^2 \langle f', f' \rangle - 4 \langle f, f' \rangle \langle f, f \rangle \langle f, f' \rangle + 4 \langle f, f' \rangle^2 \langle f, f \rangle}}{\langle f, f \rangle^2} \\
&= \frac{\sqrt{\langle f, f \rangle^2 \langle f', f' \rangle}}{\langle f, f \rangle^2} \\
&= \frac{|f'|}{\langle f, f \rangle}.
\end{aligned}$$

Así

$$\mathbf{long}(\tilde{j} \circ f) = \int_a^b \frac{\langle f, f \rangle}{f_{n+1}(t)} \frac{|f'|}{\langle f, f \rangle} dt = \mathbf{long}(f).$$

□

2.4. Teoremas de combinación

En esta y en las secciones siguientes se presentarán las herramientas necesarias para construir el grupo del teorema (2.7.3).

Los teoremas de combinación de Klein y Maskit se usan para construir grupos nuevos que surgen de grupos dados. El grupo obtenido hereda ciertas propiedades de los antiguos y los teoremas dan una idea de la geometría que tiene.

Los teoremas de Armstrong y Stallings y el estudio de fibraciones son usados de forma más técnica para probar que el grupo que se quiere construir tenga las propiedades deseadas.

2.4.1. Teorema de Klein

Definición 2.4.1 *Un subgrupo G de \mathcal{M} es elemental si tiene una órbita finita. En otro caso diremos que es no elemental.*

Teorema 2.4.2 *Sea G un subgrupo discreto no elemental de las transformaciones de Möbius.*

- (I) *Si D es un conjunto G -invariante, abierto, no vacío y que no es todo $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces G actúa de forma discontinua en D .*
- (II) *Si D es un conjunto abierto, no vacío y tal que $g(D) \cap D = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{I\}$ entonces G actúa de forma discontinua en $\bigcup g(D)$ donde la unión se toma sobre todos los $g \in G$.*

Demostración.

- (I) El conjunto $E = \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ es no vacío, cerrado y G -invariante. Pero como Λ es el conjunto cerrado, no vacío y G -invariante más chico, $\Lambda \subset E$ por lo que $D \subset \Omega$.
- (II) El conjunto $F = \bigcup g(D)$ donde la unión se toma sobre todos los $g \in G$ es disconexo por lo que no es todo $\widehat{\mathbb{C}}$. Aplicamos el inciso anterior a F y concluimos la demostración. \square

Teorema 2.4.3 (De combinación de Klein) Sean G_1, G_2, \dots, G_n grupos de transformaciones de Möbius y sea G lo generado por su unión. Sea D_j una buena vecindad de G_j y supongamos que $D_i \cup D_j = \widehat{\mathbb{C}}$ cuando $i \neq j$. Supongamos también que $D^* = \bigcap D_j$ es no vacío. Entonces G es el producto libre de los G_j , D^* es una buena vecindad de G y G actúa de forma discontinua en $\bigcup g(D^*)$ donde la unión se toma sobre todos los elementos $g \in G$.

Demostración. Tomemos un elemento $g_n \cdots g_1$ de G donde $g_k \in G_{i_k}$, $g_k \neq I$ y $i_k \neq i_{k+1}$ para todo k . Como D_{i_1} es una buena vecindad en G_{i_1} tenemos $g_1(D^*) \subset g_1(D_{i_1}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_1}$. Ahora procederemos por inducción. Supongamos que $g_m \cdots g_1(D^*) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_m}$ entonces $g_{m+1}(g_m \cdots g_1(D^*)) \subset g_{m+1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_m}) \subset g_{m+1}(D_{i_{m+1}}) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_{m+1}}$. Con esto $g_m \cdots g_1(D^*) \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D_{i_m} \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus D^*$. Por lo que D^* es una buena vecindad de G . Como $D^* \neq \emptyset$ y $g_m \cdots g_1(D^*) \cap D^* = \emptyset$ entonces $g_m \cdots g_1 \neq I$ por lo que G es el producto libre de los G_j . Aplicando el segundo inciso del teorema anterior a D^* terminamos la demostración. \square

Ejemplo 2.4.4 Sean $g(z) = \frac{z}{z-1}$, $h(z) = \frac{-z}{z+1}$, $G_1 = \langle g \rangle$, $G_2 = \langle h \rangle$, $D_1 = \{z \mid |z-1| > 1\}$ y $D_2 = \{z \mid |z+1| > 1\}$.

D_i es una buena vecindad de G_i $i = 1, 2$ y $D_1 \cup D_2 = \widehat{\mathbb{C}}$. El teorema de Klein dice que $D^* = D_1 \cap D_2$ es una buena vecindad para $G = G_1 * G_2$ y G actúa de forma discontinua en $\bigcup g(D^*)$.

Ejemplo 2.4.5 Sean $g(z) = z + 6$, $h(z) = \frac{z}{z+1}$, $G_1 = \langle g \rangle$, $G_2 = \langle h \rangle$, $D_1 = \{x + iy \mid |x| < 3\}$ y $D_2 = \{z \mid |z+1| > 1\} \cap \{z \mid |z-1| > 1\}$.

Es claro que D_1 es una buena vecindad de G_1 . La transformación h manda el exterior del círculo unitario con centro en -1 al interior del círculo unitario con centro en 1 . Notando esto podemos ver que D_2 es una buena vecindad de G_2 . Ahora podemos aplicar el teorema de Klein para concluir que $D^* = D_1 \cap D_2$ es una buena vecindad para $G = \langle G_1, G_2 \rangle$ y G actúa de forma discontinua en $\bigcup g(D^*)$.

2.4.2. Teorema de combinación de Maskit

En lo que resta de esta sección tendremos la hipótesis de que los grupos G_1 y G_2 tienen un subgrupo común J y $[G_m : J] > 1$.

Definición 2.4.6 Una forma normal es una palabra de la forma $g_n \cdots g_1$ donde cada g_k con k par está en $G_1 \setminus J$, cada g_k con k impar está en $G_2 \setminus J$ o viceversa.

Definición 2.4.7 Una forma normal $g_n \cdots g_1$ es una **(m,k)-forma** si $g_n \in G_m$ y $g_1 \in G_k$.

Si $j \in J$ entonces decimos que $g_n \cdots g_k \cdots g_1$ y $g_n \cdots (g_k j)(j^{-1} g_{k-1}) \cdots g_1$ son términos equivalentes. Existe una multiplicación de formas normales al hacer su yuxtaposición y luego la contracción de acuerdo a la equivalencia anterior. El conjunto de equivalencias de formas normales y la multiplicación junto con los elementos de J se llama el **producto libre amalgamado** y se escribe $G_1 *_J G_2$.

Existe un homomorfismo natural $\phi: G_1 *_J G_2 \rightarrow G = \langle G_1, G_2 \rangle$ que manda $g_n \cdots g_1$ a $g_n \circ \cdots \circ g_1$. Notemos que ϕ es sobre.

Definición 2.4.8 Decimos que un conjunto Y es **precisamente invariante** bajo el subgrupo H de G , si

1. $H = \text{Stab}_G(Y)$ y
2. $g(Y) \cap Y = \emptyset$ para todas las $g \in G \setminus H$.

Definición 2.4.9 Un par interactivo de conjuntos (X_1, X_2) consiste de dos conjuntos no vacíos disjuntos X_1 y X_2 donde X_m es invariante bajo J , cada elemento de $G_1 \setminus J$ manda X_1 en X_2 y cada elemento de $G_2 \setminus J$ manda X_2 en X_1 .

Ejemplo 2.4.10 Sean $X_1 = \{z | \text{Im}(z) > 0\}$ y $X_2 = \{z | \text{Im}(z) < 0\}$. Sea $J = \langle z + 1 \rangle$ y $G_1 = G_2 = \langle z + 1, -z \rangle$. X_1 y X_2 son precisamente invariantes bajo J y los elementos de $G_1 \setminus J$ mandan X_1 en X_2 y los elementos de $G_2 \setminus J$ mandan X_2 en X_1 .

Definición 2.4.11 Un par interactivo (X_1, X_2) es **propio** si existe un punto en X_1 que no es G_2 -equivalente a ningún punto de X_2 o existe un punto en X_2 que no es G_1 -equivalente a ningún punto de X_1 .

Definición 2.4.12 Para un elemento parabólico γ de un grupo kleiniano G , o para su punto fijo x , una **región cuspidal** es un disco abierto B en $\Omega(G)$ que es precisamente invariante bajo $\langle \gamma \rangle$ y que tiene a x en su frontera.

Ejemplo 2.4.13 Sea $\gamma(z) = z + 1$ y $G = \langle \gamma \rangle$, entonces $\Omega(G) = \mathbb{C}$. Una región cuspidal para γ es $C = \{z | \text{Im}(z) > 1\}$.

Definición 2.4.14 Sea x punto fijo de un elemento parabólico de G . x es de **rango 2** si $\text{Stab}_G(x)$ contiene un grupo abeliano parabólico de rango 2 y en otro caso es de **rango 1**.

Definición 2.4.15 Sea x un punto fijo de un elemento parabólico de rango 1. Si x tiene dos regiones cuspidales disjuntas tangentes en x diremos que es **doblemente cuspidal**.

Ejemplo 2.4.16 En el ejemplo anterior tenemos una region doblemente cuspidal si agregamos al conjunto C el conjunto $C' = \{z | \text{Im}(z) < 1\}$.

Ejemplo 2.4.17 Sea $G = \langle z + 1, -z \rangle$, una región doblemente cuspidal para $\gamma(z) = z + 1$ es $C = \{z | \text{Im}(z) > 1\} \cup \{z | \text{Im}(z) < 1\}$.

Definición 2.4.18 Sea G un subgrupo discreto de las isometrías de \mathbb{H}^n . Un punto x en S^{n-1} es un **punto de aproximación** para G si existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $|g_m(x) - g_m(z)| \geq \delta > 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de $S^{n-1} \setminus \{x\}$.

Definición 2.4.19 Sea B una componente de la frontera de una superficie de Riemann S . Si existe una vecindad de B conformemente equivalente a un disco agujereado, decimos que S tiene un **pinchazo** en B .

Definición 2.4.20 Sea $G \subset \mathcal{M}$. Un conjunto cerrado J -invariante B , con J geoméricamente finito, es un **(J,G)-bloque** si satisface

- (i) $B \cap \Omega(G) = B \cap \Omega(J)$ y $B \cap \Omega(J)$ es precisamente invariante bajo J en G .
- (ii) Existe un conjunto fundamental restringido E para J que contiene un conjunto fundamental D para G , existen una cantidad finita de cúspides C_1, \dots, C_n disjuntos en puntos fijos de elementos parabólicos de J donde cada $C_j \subset E$ y $C_j \cap B = \emptyset$ y existe una vecindad U de B tal que $(E \setminus D) \cap U \subset C_1, \dots, C_n$.

(III) Para cada pinchazo en $\Omega(J)/J$ existe una vecindad U del punto tal que U está contenida en la proyección de B o U es disjunto de la proyección de B .

Definición 2.4.21 Un bloque es **fuerte** si para cada punto fijo x de un elemento parabólico de rango 1 de J , $\text{Stab}_G(x)$ tiene rango 2 o x es doblemente cuspidal en G .

Definición 2.4.22 Dado el conjunto precisamente invariante X_m , un conjunto fundamental D_m para G_m es **máximo** con respecto a X_m si $D_m \cap X_m$ es un conjunto fundamental para la acción de J en X_m .

Definición 2.4.23 Supongamos que B es un bloque y E es un conjunto fundamental restringido para J como en la definición de bloque. Las cúspides de E cerca de B que no están en D se llaman **cúspides excluidas**.

Definición 2.4.24 Una cúspide excluida con vértice x es una **cúspide excepcional de rango 2** si $\text{Stab}_G(x)$ tiene rango 2. Una cúspide excluida con vértice x es una **cúspide excepcional de rango 1** si existe $g \in G \setminus J$ y existe una cúspide no excluida $C' \subset D$, tal que cada punto de C cerca de x es J -equivalente a un punto de $g(C')$.

Lema 2.4.25 Si existe un par interactivo (X_1, X_2) y $g = g_n \cdots g_1$ es una (m, k) -forma entonces $\phi(g)(X_k) \subset X_{3-m}$. Esta inclusión es propia si (X_1, X_2) es propio y $n > 1$.

Demostración. Procederemos por inducción. Si $n = 1$ entonces $k = m$ y $g_1(X_k) \subset X_{3-k}$. Sea $g_n \cdots g_1$ una (m, k) -forma. Supongamos que

$$\phi(g_n \cdots g_1)(X_k) = g_n \circ \cdots \circ g_1(X_k) \subset X_{3-m}.$$

Ahora sea $g_{n+1} \in G_{3-m} \setminus J$. Entonces

$$g_{n+1}(X_{3-m}) \subset X_m$$

$$\Rightarrow g_{n+1} \circ g_n \circ \cdots \circ g_1(X_k) \subset g_{n+1}(X_{3-m}) \subset X_m.$$

Ahora probaremos la segunda parte de la afirmación. Sin pérdida de generalidad los G_1 trasladados de X_1 no cubren a todo X_2 .

Si $g_1 \in G_1 \setminus J$ entonces $g_1(X_1) \subsetneq X_2$ por lo que $g_n \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1(X_1) \subsetneq g_n \circ \cdots \circ g_2(X_2) \subset X_{3-m}$.

Si $g_1 \in G_2 \setminus J$ entonces podría suceder que $g_1(X_2) = X_1$ pero $g_2 \circ g_1(X_2) \subsetneq X_2$ por lo que $g_n \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1(X_2) \subsetneq g_n \circ \cdots \circ g_3(X_2) \subset X_{3-m}$. \square

Teorema 2.4.26 *Sea J subgrupo de los grupos discontinuos G_1 y G_2 . Sea (X_1, X_2) un par interactivo. Supongamos que existe un conjunto fundamental máximo D_m para G_m tal que para todo g en G_m , $g(D_m \cap X_{3-m}) \subset X_{3-m}$. Sea $D = (D_1 \cap X_2) \cup (D_2 \cap X_1)$. Entonces D es precisamente invariante bajo la identidad en G .*

Demostración. Usaremos inducción. Si $D = \emptyset$ terminamos. Sea $x \in D_1 \cap X_2$ (el otro caso es similar). Si $g \in J \setminus I$ entonces $g(x) \in X_2$ (ya que X_2 es J -invariante) y $g(x)$ no está en D_1 por lo que $g(x)$ no está en D .

Si $g \in G_1 \setminus J$ entonces $g(x) \in X_2$ ($g(D_1 \cap X_2) \subset X_2$) y $g(x)$ no está en D_1 por lo que $g(x)$ no está en D .

Si $g \in G_2 \setminus J$ entonces $g(x) \in X_1$. Supongamos que $g(x) \in D_2$. x es J -equivalente a un punto de $D_2 \cap X_2$, sea j este elemento. $g \circ j(D_2)$ interseca a D_2 lo cual es imposible, por lo que $g(x)$ no está en D_2 .

Sea $g = g_n \circ \dots \circ g_1$. Si h es una 1-forma entonces $h(x) \in X_2 \setminus D_1$ y como $g(X_2) \subset X_1$, entonces $g(x) \in X_1$. Como $g(D_2 \cap X_1) \subset X_1$ ningún punto de X_2 es G_2 -equivalente a ningún punto de $D_2 \cap X_1$ y como $x \in X_2$, $g(x)$ no está en $D_2 \cap X_1$. Si h es una dos forma el procedimiento es análogo. \square

Teorema 2.4.27 (Teorema de combinación de Maskit) *Sea J un grupo geoméricamente finito, $J \subset G_1, G_2$ y $G_1 \neq J \neq G_2$. Supongamos que existe W una curva cerrada simple que divide a $\hat{\mathbb{C}}$ en dos discos cerrados B_1, B_2 donde B_m es un (J, G_m) -Bloque y (B_1°, B_2°) es un par interactivo propio. Sea $G = \langle G_1, G_2 \rangle$. Sea D_m un conjunto fundamental de G_m donde D_m es máximo con respecto a B_m , $D_m \cap B_{3-m}$ es vacío o tiene intersección distinta del vacío y $D_1 \cap W = D_2 \cap W$. Sea $D = (D_1 \cap B_2) \cup (D_2 \cap B_1)$. Entonces*

1. $G = G_1 *_J G_2$.
2. G es discreto.
3. W es un (J, G) -bloque y si B_1 y B_2 son fuertes entonces W es fuerte.
4. D es un conjunto fundamental para G . Si D_1 y D_2 son restringidos, W interseca ∂D_m en un número finito de puntos y existe un conjunto fundamental restringido de J conteniendo D_1 y D_2 tal que excepto por algunas cúspides $E \setminus D_m$ está acotado fuera de W , entonces D es restringido.

5. Si B_1 y B_2 son fuertes entonces excepto por trasladados de puntos límites de G_1 o G_2 , cada punto límite de G es un punto de aproximación.
6. Si G_1 y G_2 son geoméricamente finitos entonces G también lo es.

Demostración.

1. Ninguna forma normal de longitud uno es mandada bajo ϕ a la identidad. Si $g = g_n \circ \cdots \circ g_1$ es una forma normal con $n > 1$, por el lema (2.4.25), $\phi(g)(X)$ está propiamente contenido en X_1 o en X_2 donde X es X_1 o X_2 . En cualquier caso $\phi(g) \neq I$ por lo que ϕ es un isomorfismo.
2. Supongamos que G no es discreto. Entonces existe sucesión (g_k) de elementos distintos de G tal que $g_k(x)$ converge a x uniformemente en subconjuntos compactos. Podemos suponer que cada g_k tiene longitud par (si es impar, $g_k(B_1) \subset B_2$ o $g_k(B_2) \subset B_1$). Sin pérdida de generalidad los trasladados de B_1 por elementos de G_1 no cubren todo G_2 . Si $g = g_n \circ \cdots \circ g_1$ es una $(1, 2)$ -forma entonces $g(B_2) \subset g_n(B_1) \subsetneq B_2$ entonces $B_2 \setminus g(B_2)$ tiene interior no vacío, por lo que existe un compacto en donde g dista mucho de la identidad. Si $g = g_n \circ \cdots \circ g_1$ es una $(2, 1)$ -forma, entonces $g(B_1) \subset g_n \circ g_{n-1}(B_1) \subsetneq g_n(B_2) \subset B_1$ por lo que $B_1 \setminus g(B_1)$ tiene interior no vacío y con esto existe un compacto donde g dista mucho de la identidad.
3. Veamos que W es un (J, G) -bloque. Cada punto de $W \cap \Omega^\circ(J)$ es J -equivalente a algún punto de $W \cap D_1 = W \cap D_2 = W \cap D \subset \Omega^\circ(G)$ entonces $W \cap \Omega^\circ(J) = W \cap \Omega^\circ(G)$ ($W \cap \Omega^\circ(J) \supset W \cap \Omega^\circ(G)$ siempre se da). Como $D \cap W$ es un conjunto fundamental de la acción de J en W y D es precisamente invariante bajo J en G tenemos que $W \cap \Omega^\circ(G)$ es precisamente invariante bajo J en G . Como J deja invariantes a B_1 y a B_2 no puede haber ningún punto fijo en W de un elemento elíptico de J . Con esto se tiene que $W \cap (J) = W \cap \Omega^\circ(J) = W \cap \Omega^\circ(G) \subset W \cap \Omega(G)$ y así $W \cap \Omega(G) = W \cap \Omega(J)$. Sea b un pinchazo en $\Omega(J)/J$ entonces $b = p(x)$ con x punto fijo de un elemento elíptico. Como x no está en W existe V_x vecindad de x tal que $V_x \cap W = \emptyset$ por lo que $p(V_x)$ es disjunto de $p(W) = (\Omega(J) \cap W)/J$. Por lo que W es un (J, G) -bloque. Ahora veamos que W es fuerte. Sea x un punto fijo de un elemento parabólico de rango 1 de J . Como B_m es fuerte $\mathbf{stab}(x)$ tiene rango 2

o x es doblemente cuspidal en G_m . Si $\mathbf{stab}(x)$ tiene rango 2 en G_1 o G_2 entonces tiene rango 2 en G y habremos terminado.

Escogemos una región doblemente cuspidal $C = C_1 \cup C_2$ cerca de x donde $C_m \subset B_m$ y C es precisamente invariante bajo $\mathbf{stab}(x)$ en G_1 y G_2 . Supongamos que no existe un elemento elíptico en $\mathbf{stab}_{G_1}(x)$ ni en $\mathbf{stab}_{G_2}(x)$, entonces, como estos grupos son euclidianos, todos sus elementos son parabólicos y así $\mathbf{stab}_G(x)$ es cíclico parabólico y x es doblemente cuspidal en G . Si hay un elemento elíptico $g_1 \in \mathbf{stab}_{G_1}(x)$ y otro $g_2 \in \mathbf{stab}_{G_2}(x)$ entonces g_i no está en J porque J no contiene elementos elípticos con puntos fijos en W . También cada g_i es un medio giro ya que B_i° es precisamente invariante bajo J en G_i . El producto $h = g_1 \circ g_2$ es parabólico con punto fijo x por lo que h no está en J y así $\mathbf{stab}_G(x)$ tiene rango 2.

Si sólo existe un $g \in \mathbf{stab}_{G_m}(x)$ elíptico para un solo valor de m , entonces g no está en J y es un medio giro por lo que $\mathbf{stab}_G(x)$ no es cíclico pero tiene rango 1.

Si $|g| = 0$, entonces $g(W) = W$. Si $|g| = 1$, hay dos posibilidades, si $g \in G_1$ entonces $g(W) = g(\partial B_1) \subset B_2$; si $g \in G_2$, $g(w) \subset B_1$. Sean

$$T_{1,m} = \bigcup_{g \in G_m \setminus J} g(B_m)$$

y $T_1 = T_{1,1} \cup T_{1,2}$. Sea también $S_1 = T_1^c$.

Continuando de forma inductiva, sea

$$T_{n,m} = \bigcup_{g \in G_m \setminus J} g(T_{n-1,3-m}).$$

Sean $T_n = T_{n,1} \cup T_{n,2}$ y $S_n = T_n^c$.

Para m fijo $\{T_{n,m}\}$ es decreciente y tenemos $\cdots \subset T_{n,m} \subset T_{n+1,m} \subset \cdots \subset T_{1,m} \subset B_{3-m}$. Con esto obtenemos que $\{T_n\}$ es decreciente y $\{S_n\}$ es creciente.

Los trasladados de B_m por elementos de G_m tienen interiores disjuntos.

Lema 2.4.28 $D \subset \Omega^\circ(G)$.

Demostración. $D \subset \Omega(G)$: Supongamos que no, entonces existe $z \in \Lambda \cap D$. Supongamos que $z \in D_1 \cap B_2$ (el caso en que $z \in D_2 \cap B_1$ es similar)

entonces $D_1 \cap B_2$ tiene interior no vacío y es precisamente invariante bajo la identidad en G por lo que G es kleiniano. Como $z \in \Lambda(G)$, existe sucesión $\{g_k\} \in G$ de elementos distintos tales que $g_k(y) \rightarrow z$ para todo y menos un punto. Supongamos que z no está en W . Observemos que g_k no puede ser una 2-forma ($g_k(B) \subset B_1$ para $B = B_1$ o B_2) por lo que g_k es una 1-forma. Entonces para $B = B_1$ o B_2 , tenemos que $g_k(B) \subset T_1$ y $z \in \partial T_1$. Como los puntos de $\partial T_1 \cap B_2$ son G_1 -trasladados de W o puntos en $\Lambda(G_1) \cap W$, entonces $z \in W$ o es un trasladado de un punto de W . Como $z \in D_1 \cap B_2$, $z \in W$. $D_1 \cap W \subset \Omega(G_1)$ y como $z \in \Omega(G_1)$, los G_1 -trasladados de B_1 no se acumulan en z por lo que los G_1 -trasladados de W no se acumulan en z con esto los G trasladados de W no se acumulan en z y $z \in \Omega(G)$.

Como $D \subset \Omega(G)$ y D es precisamente invariante bajo la identidad, $D \subset \Omega^\circ(G)$. \square

Proposición 2.4.29 *Cada punto de S es un G trasladado de D , $\tilde{\Lambda}(G_1)$ o $\tilde{\Lambda}(G_2)$.*

Demostración. Los conjuntos S_n son crecientes por lo que si $x \in S$ entonces existe n tal que $x \in S_n$ y x no está en S_{n-1} . Por lo que existe g de longitud $n - 1$ tal que $g(x) \in S_1$. Entonces podemos considerar sólo puntos de S_1 .

Si $x \in B_1$ (si está en B_2 es análogo) entonces $x \in \tilde{\Lambda}(G_2)$ o $x \in \Omega^\circ(G_2)$. Si $x \in \Omega^\circ(G_2)$ entonces existe $g \in G_2$ tal que $g(x) \in D_2$, como $x \in S_1$ entonces $g(x)$ no está en B_2 por lo que $g(x) \in B_1 \cap D_2 \subset D$. \square

Sea $z \in T$. Supongamos que $z \in B_2$, como $z \in T_1$ existe $h_1 = g_1 \in G_1 \setminus J$ tal que $z \in g_1(B_1)$, como $z \in T_2$ existe $g_2 \in G_2 \setminus J$ tal que $z \in g_1 \circ g_2(B_2) = h_2(B_2) \subset h_1(B_1)$, como $z \in T_3$ existe $g_3 \in G_1 \setminus J$ tal que $z \in g_1 \circ g_2 \circ g_3(B_1) = h_3(B_1) \subset h_2(B_2) \subset h_1(B_1)$, y así podemos seguir.

Los elementos $\{h_k\}$ son de longitud creciente por lo que $\{h_k(w)\}$ son distintos. Con esto, si $z \in T$ existe $\{h_k\}$ de elementos de G con $|h_k| \rightarrow \infty$ y $z \in \cdots \subset h_k(\hat{B}_k) \subset \cdots \subset h_2(\hat{B}_2) \subset h_1(\hat{B}_1)$ donde \hat{B}_j se alterna entre B_1 y B_2 .

Entonces hay dos posibilidades: z está en el interior de una infinidad de $h_k(\hat{B}_j)$ o a partir de un k , z está en la cerradura de $h_k(\hat{B}_j)$. En el primer caso existe una subsucesión $\{h_k\}$ tal que $h_k(W)$ se anida alrededor de z . En el segundo caso z es un trasladado de un punto $w \in W$. Hay muchos trasladados de W que intersecan W en w por lo que w es un punto límite de J (W es un bloque).

Proposición 2.4.30 $T \subset \Lambda(G)$.

Demostración. Si $h_k(W)$ se anida alrededor de x entonces $h(x) \rightarrow x$ para todo $w \in W$. \square

4. D es un conjunto fundamental: $D \subset \Omega^\circ(G)$ y D es precisamente invariante bajo la identidad. Ahora $T \subset \Lambda(G)$ y los puntos de S son trasladados de $D \cup \tilde{\Lambda}(G_1) \cup \tilde{\Lambda}(G_2)$.

Los lados de D en B_1 son los lados de D_2 en B_1 . También los lados de D en B_2 son los lados de D_1 en B_2 . Estos lados están apareados y se acumulan sólo en puntos límites.

Veamos que los trasladados de D son localmente finitos. Supongamos que existe una sucesión $\{h_k\}$ de elementos de G con $h_k(D)$ acumulándose en $x \in \bar{D} \cup \Omega(G)$. Como D_1 es restringido x no es punto interior de $D_1 \cap B_2$. Como D_2 es restringido x no es punto interior de $D_2 \cap B_1$. Como $D \subset E$, E es restringido y $E \setminus D_m$ está acotado fuera de W , x no está en W .

5. Supongamos que x es un punto límite de G que no es un trasladado de un punto límite de G_1 ni de G_2 . Si $x \in S$ entonces $x \in D$ o es un trasladado de un punto límite de G_1 o G_2 por lo que $x \in T$ y así existe una sucesión $\{h_k\}$ de elementos distintos de G tal que $x \in \cdots h_k(\widehat{B}_k) \subset \cdots \subset h_1(\widehat{B}_1)$ donde los \widehat{B}_j son B_1 o B_2 . Asumiremos que $\widehat{B}_1 = B_1$ y $h_1 = 1$.

Entonces W separa a $h_k^{-1}(W)$ de $h_k^{-1}(x)$: Para $h_1 = 1$ se cumple. $x \in h_2(B_2)$ por lo que $h_2^{-1}(x) \in B_2$ y $h_2^{-1}(W)$ esta dentro de W . Y así, cada h_k va intercambiando B_1 y B_2 .

Para cada k existe un elemento $j_k \in J$ tal que $f_k(x) = j_k \circ h_k^{-1}(x) \in E$. Como W es fuerte existe vecindad U de W con $D \cap U = E \cap U$ excepto quizás por algunas cúspides excepcionales.

Tenemos dos casos:

Primero. Los $f_k(x)$ están acotados fuera de W . Como W separa $f_k(x)$ de $f_k(W)$, existe $\delta > 0$ tal que $|f_k(x) - f_k(z)| \geq \delta$ para cualquier z en un disco que extienda a W . Por lo que x es un punto de aproximación.

Segundo caso. Los $f_k(x)$ tienden a un punto $w \in W$. Entonces w es punto fijo de un elemento parabólico. Como W es fuerte y x es punto límite de G , ningún trasladado de x está en una cúspide excepcional

de rango 1 ya que x sería un trasladado de un punto interior de D . Entonces los $f_k(x)$ se acumulan en una cúspide excepcional de rango 2.

Sea \hat{j} un elemento primitivo parabólico con punto fijo w donde \hat{j} no está en J . Las potencias $\hat{j}^\alpha(W)$ dividen a \mathbb{C} en regiones y la sucesión de puntos de $f_k(x)$ pasa por una infinidad de estas regiones. Por lo que existe una subsucesión creciente de potencias $\{\alpha_k\}$ tales que $\hat{j}^{\alpha_k} \circ f_k(W)$ tiende a w mientras que $\hat{j}^{\alpha_k} \circ f_k(x)$ está acotado fuera de W . Entonces para todo z en un disco que expanda a W $\left| \hat{j}^{\alpha_k} \circ f_k(x) - \hat{j}^{\alpha_k} \circ f_k(z) \right| \geq \delta > 0$ con lo que se concluye el resultado.

6. Como G_1 y G_2 son geoméricamente finitos, B_1 y B_2 son fuertes por lo que W es fuerte. Usaremos el siguiente

Teorema 2.4.31 *Sea G grupo discreto de Möbius. Entonces G es geoméricamente finito si y sólo si cada punto límite de G es un punto fijo de un elemento parabólico de rango 2, es un punto fijo de un elemento parabólico de rango 1 que tiene una región doblemente cuspidal o es un punto de aproximación.*

Para ver la demostración vea [10] página 128.

Sea x punto límite de G . Supongamos que x es punto fijo de un elemento parabólico y que $H = \mathbf{stab}_G(x)$ tiene rango 1. El grupo parabólico $H_0 \subset H$ es un trasladado de un subgrupo de G_1 o G_2 . Sin pérdida de generalidad es un trasladado de un grupo de G_1 . Si $x \in W$ o es un trasladado de W , como W es fuerte, x es doblemente cuspidal. Si x no es un trasladado de W entonces podemos encontrar una región doblemente cuspidal C para H_0 donde C no intersecta ningún G_1 -trasladado de W . Con esto tenemos que $C \subset B_2 \cap \Omega^\circ(G_1)$ y así cada punto de C es G_1 equivalente a algún punto de $D_1 \cap B_2 \subset D \subset \Omega^\circ(G)$ por lo que x es doblemente cuspidal en G . Supongamos que x es punto límite de G que no es punto fijo de un elemento parabólico. Si x es un trasladado de un punto límite de G_1 , como G_1 es geoméricamente finito, x es un punto de aproximación para G_1 y por lo tanto para G . Igual si x es un trasladado de un punto límite de G_2 . Si x no es un punto límite de G_1 o G_2 entonces, por el inciso anterior, x es un punto de aproximación. \square

2.5. Teorema de Armstrong

Sea X conexo, localmente conexo por trayectorias, localmente compacto y métrico. Sea G un subgrupo de $\mathbf{Homeo}(X)$. Sea \overline{G} la cerradura de G en $\mathbf{Homeo}(X)$ con la topología compacto-abierta. El teorema de Armstrong necesita de las siguientes condiciones.

- (a) La proyección $X \rightarrow X/G$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos.
- (b) Para todos los puntos $x, x' \in X$ y para toda vecindad V de x en X , si $x' \in \overline{G}x$ entonces $x' \in GV$.
- (c) El grupo \overline{G}/N actúa discontinuamente en X/N .

Proposición 2.5.1 *Si se cumple (b) entonces X/G y X/\overline{G} tienen el mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Sean $\pi: X \rightarrow X/G$ y $\phi: X/G \rightarrow X/\overline{G}$ las proyecciones naturales.

Sea $\psi: X/\overline{G} \rightarrow X/G$ definido como sigue: si $z \in X/\overline{G}$ escogemos $y \in X/G$ tal que $\phi(y) = z$; la función ψ manda z en y . Así tenemos que $\phi\psi$ es la identidad en X/\overline{G} .

Sea $F: X/G \times I \rightarrow X/G$ definida como sigue

$$F(y, t) = \begin{cases} \psi\phi(y) & 0 \leq t < 1 \\ y & t = 1 \end{cases} .$$

Si F es continua ya terminamos. Sea U abierto de X/G entonces $F^{-1}(U) = [\phi^{-1}\psi^{-1}(U) \times [0, 1]] \cup [U \times \{1\}]$ que es abierto si $U \subset \phi^{-1}\psi^{-1}(U)$ es decir, si $\phi(U) \subset \psi^{-1}(U)$. Supongamos que $z \in \phi(U)$ es decir, existe $y \in U$ con $\phi(y) = z$. Veremos que $\psi(z) \in U$. Sea $\psi(z) = y'$, entonces $\phi(y') = \phi(y) = z$. Escogemos $x, x' \in X$ con imágenes y, y' en X/G respectivamente. El conjunto $V = \pi^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de x en X y $x' \in \overline{G}x$ y por hipótesis $x' \in GV$ por lo que $\psi(z) = y' = \pi(x') \in \pi(GV) = U$. \square

Teorema 2.5.2 (Teorema de Armstrong) *Si X es simplemente conexo y si se cumplen (a), (b) y (c) entonces $\pi_1(X/G) \simeq \overline{G}/N$. Donde N es el subgrupo normal más pequeño de \overline{G} tal que contiene la componente por trayectorias de la identidad en \overline{G} y todos los elementos de \overline{G} con puntos fijos.*

Demostración. Primero probaremos que X/N es simplemente conexo. Si tenemos esto entonces, como \overline{G}/N actúa de forma discontinua y libre en X/N , la función $p: X/N \rightarrow X/N/\overline{G}/N$ es un cubriente y así $\pi_1(X/N/\overline{G}/N) \simeq \overline{G}/N$ y el resultado se sigue de la proposición anterior.

Sea $p \in X$ punto base y sea $q = \pi(p)$ donde $\pi: X \rightarrow X/N$ es la proyección natural. Definimos $\phi: N \rightarrow \pi_1(X/N, q)$ como sigue: si $g \in N$ unimos p con $g(p)$ en X con una trayectoria γ , ϕ manda g en $[\pi \circ \gamma]$. La elección de γ es irrelevante porque X es simplemente conexo. Con esto ϕ es un morfismo.

Veamos que $\ker \phi = N$. Si g está en la componente por trayectorias de la identidad entonces unimos a la identidad con g mediante $\{g_t | 0 \leq t \leq 1\}$ en \overline{G} por lo que $\{g_t(p) | 0 \leq t \leq 1\}$ une a p y a $g(p)$ en X y su proyección con π es q . Con esto $g \in \ker \phi$. Si g fija un punto $x \in X$ entonces unimos p a x con una trayectoria γ y usamos $\gamma(g\gamma)^{-1}$ para unir p con $g(p)$. Al mandar $\gamma g \gamma^{-1}$ con π nos da una trayectoria de q que regresa a q por el mismo camino por lo que $g \in \ker \phi$.

Ahora probaremos que ϕ es sobre. Sea $[\alpha] \in \pi_1(X/N, q)$. Como $X \rightarrow X/\overline{G}$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos, $X/N \rightarrow X/\overline{G}$ es un cubriente entonces $X \rightarrow X/N$ tiene la propiedad de levantamiento de caminos. Entonces existe β tal que $\beta(0) = p$, $\pi\beta(1) = q$ y $\pi\beta \simeq \alpha$. Como $\beta(1) \in \pi^{-1}(q)$ existe un elemento $g \in N$ tal que $g(p) = \beta(1)$ y así $\phi(g) = [\pi \circ \beta] = [\alpha]$. \square

2.6. Fibraciones

Definición 2.6.1 Una sucesión de homomorfismos de grupos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es una **sucesión exacta en B** si $\text{Im}(f) = \ker(g)$. Si es exacta en cada grupo, se dice que es una **sucesión exacta**.

Definición 2.6.2 Sea $p: E \rightarrow B$ continua y \mathcal{C} una clase de espacios topológicos. Decimos que p tiene la **propiedad de levantamiento de homotopía respecto a \mathcal{C}** , si dado $X \in \mathcal{C}$, una aplicación $f: X \rightarrow E$ y una homotopía $H: X \times I \rightarrow B$ tal que empieza con $p \circ f$, entonces puede levantarse H a una homotopía $\tilde{H}: X \times I \rightarrow E$ que empieza con f , es decir, tal que $p \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$. Si $p: E \rightarrow B$ tiene esta propiedad diremos que es una **\mathcal{C} -fibración**.

Definición 2.6.3 Sea $p: E \rightarrow B$ una \mathcal{C} -fibración. Si \mathcal{C} es la clase de los cubos I^n , entonces se dice que $p: E \rightarrow B$ es una **fibración de Serre**. Y si \mathcal{C} es la clase de todos los espacios, entonces decimos que p es una **fibración de Hurewicz** o, si no se presta a confusión, una **fibración**.

Ejemplo 2.6.4 Sea $E = B \times F$ y $p: E \rightarrow B$ la proyección en la primera coordenada. Entonces E es una fibración sobre B .

Ejemplo 2.6.5 Todo espacio cubriente es una fibración con fibra un conjunto discreto.

Ejemplo 2.6.6 Otro ejemplo es la banda de Möbius que tiene como base a el círculo y fibra el intervalo $[0, 1]$.

Teorema 2.6.7 Si $p: E \rightarrow B$ es una fibración de Serre, entonces se tiene, para $b \in B$ y $F = p^{-1}(b)$ una sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow \pi_q(F) \rightarrow \pi_q(E) \rightarrow \pi_q(B) \rightarrow \pi_{q-1}(F) \rightarrow \cdots$$

Demostración. Vea [1].

Sea M una 3-variedad compacta para la que existe la sucesión exacta

$$1 \rightarrow N \rightarrow \pi_1(M) \xrightarrow{\eta} Q \rightarrow 1$$

donde N es un subgrupo normal de $\pi_1(M)$ finitamente generado con cociente infinito Q .

Teorema 2.6.8 (Teorema de Stallings) Sea M una 3-variedad compacta con una sucesión como la anterior. Además supongamos que Q es libre.

1. Si $Q = \mathbb{Z}$ entonces M fibra sobre el círculo con fibra una 2-variedad conexa F o M es homotópicamente equivalente a $P^2 \times S^1$.
2. Si el rango de Q es mayor que uno, entonces M fibra sobre una 2-variedad V con fibra el círculo.

Demostración. Vea [7].

2.7. Variedades mansas

En esta sección se construirá una 4-variedad hiperbólica con grupo fundamental finitamente generado pero que no es mansa. Para ello necesitaremos el grupo del teorema (2.7.3).

Definición 2.7.1 *Una n -variedad irreducible M es **mansa** si es homeomorfa al interior de una n -variedad compacta.*

Ahora vamos a mencionar la **conjetura de Marden** que habla de variedades mansas.

Conjetura 2.7.2 (Conjetura de Marden) *Si M es una 3-variedad hiperbólica completa con grupo fundamental finitamente generado entonces M es mansa.*

Para una prueba de esta conjetura vea [5].

Teorema 2.7.3 *Existe un grupo finitamente generado libre de torsión $F \subset \mathbf{Möb}(\mathbb{R}^3)$ con una componente invariante $\Omega \subset \Omega(F)$ tal que el grupo $\pi_1(\Omega/F)$ no es finitamente generado.*

La demostración de este teorema es el tema principal de la tesis de licenciatura [15]. Aquí se produce una recopilación comprimida de la construcción de este grupo.

Sea M el complemento en \mathbb{H}^3 de los anillos borromeos (ver figura 2.3).



Figura 2.3: Anillos borromeos

M es una variedad abierta que admite una estructura hiperbólica de volumen finito, es decir, $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$, $\Gamma \subset \mathbf{Isom}(\mathbb{H}^3)$ (ver [17]). Una representación

de Γ está dada por las matrices generadoras

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad g_4 = \begin{pmatrix} 2+i & 2i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

con presentación $\langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_1g_2 = g_2g_1, g_4g_3^{-1}g_4 = g_3g_1, g_4(g_2^{-1}g_3g_2)g_4^{-1} = g_2^{-1}g_3g_1g_2 \rangle$.

Consideraremos ahora a \mathbb{H}^3 como el exterior de la 3-esfera unitaria centrada en el origen. Sea Σ_1 la esfera unitaria centrada en el origen. Sean H_1 y H_2 subgrupos parabólicos máximos no conjugados de Γ con $\Lambda(H_i) = \{p_i\}$ y normalizamos para que $p_1 = (0, 1, 0)$ y $p_2 = (0, 0, 1)$. Sean Π_i planos euclidianos tangentes a Σ_1 en los puntos p_i y sean Π_i^- las componentes de $\mathbb{R}^3 \setminus \Pi_i$ tales que $\Pi_i^- \cap \Sigma_1 = \emptyset$. Denotamos por τ_j la reflexión en el plano Π_j .

Existe un subgrupo de índice finito $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ tal que: El grupo $\tilde{\Gamma}$ tiene un subgrupo finitamente generado \tilde{F} tal que $\tilde{\Gamma} = \langle \tilde{F}, t \rangle$, para algún $t \in H_2 \cap \tilde{\Gamma}$.

Ahora denotamos $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}$, $\Gamma_2 = \tau_1\Gamma_1\tau_1$ y $\tilde{H}_i = H_i \cap \tilde{\Gamma}$. El grupo \tilde{H}_1 deja fijo el plano Π_1 . El dominio $\mathbf{cl}(\Pi_1^-)$ es precisamente invariante bajo \tilde{H}_1 en el grupo Γ_1 . De forma análoga, el dominio $\tau_1\mathbf{cl}(\Pi_1^-)$ es precisamente invariante bajo el subgrupo \tilde{H}_1 de Γ_2 . Por el teorema de combinación de Maskit, el grupo $G_1 = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ es discontinuo e isomorfo a $\Gamma_1 *_{\tilde{H}_1} \Gamma_2$. G_1 actúa en la componente invariante Ω_1 .

El teorema de Maskit nos dice que podemos descomponer la variedad $M(G_1) = \Omega_1/G_1$ como el pegado de M_1 y M_2 donde $M_1 = M(\Gamma_1) \setminus (\Pi_1^-/\tilde{H}_1)$ y $M_2 = M(\Gamma_2) \setminus (\tau_1\Pi_1^-/\tilde{H}_1)$. Pero $\Pi_1^-/\tilde{H}_1 = \tau_1\Pi_1^-/\tilde{H}_1 = S^1 \times S^1 \times (0, 1)$ ya que H_1 es parabólico. Como cada parte es homeomorfa a una superficie que fibra sobre el círculo, la variedad $M(G_1) = \Omega_1/G_1$ es homeomorfa al interior de una superficie que fibra sobre el círculo y también cumple que $\pi_1(\Omega_1) = 1$. Por esto, el grupo F_1 de G_1 que corresponde a una fibra de $M(G_1)$ es un subgrupo normal y $G_1/F_1 = \mathbb{Z}$. $M(G_1)$ admite una compactificación agregando un toro en cada cúspide por lo que F_1 es finitamente generado.

Hacemos $G_2 = \tau_2G_1\tau_2$, $G = \langle G_1, G_2 \rangle$, $F_2 = \tau_2F_1\tau_2$, $F = \langle F_1, F_2 \rangle$. También $\tilde{H}_3 = \tau_1\tilde{H}_2\tau_1$ y $J = \langle \tilde{H}_2, \tilde{H}_3 \rangle$.

Aplicando una vez más el teorema de combinación de Maskit obtenemos que $G = G_1 *_J G_2$ por lo que es discontinuo y actúa en una componente invariante Ω . El grupo F es normal en G . Como $M(G_1)$ y $M(G_2)$ se pueden compactificar y $M(G) = \Omega/G$ es el pegado de las dos variedades $M(G_1)^- = M(G_1) \setminus \Pi_2^-/J$ y $M(G_2)^- = M(G_2) \setminus \tau_2\Pi_2^-/J$ a lo largo de $\tilde{S} = (\Pi_2 \setminus \Delta(J))/J$, entonces $M(G)$ también se puede compactificar y $G = \langle F, t \rangle$.

Sean $M(F) = \Omega/F$ y $p: \Omega \rightarrow \Omega/G$ la función de paso al cociente. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{q} & M(F) & \xrightarrow{r} & M(G) \\ \downarrow \tau_2 & & \downarrow \hat{\tau}_2 & & \downarrow \bar{\tau}_2 \\ \Omega & \xrightarrow{q} & M(F) & \xrightarrow{r} & M(G) \end{array}$$

donde $p = r \circ q$ y $\hat{\tau}_2$ y $\bar{\tau}_2$ son proyecciones de τ .

Sean

$$\begin{aligned} M(G)^- &= M(G_1) \setminus (\Pi_2^-/J) \\ M(F)^- &= M(F_1) \setminus (\Pi_2^-/J \cap F) \end{aligned}$$

La variedad $M(G)^-$ se puede compactificar, llamaremos a esta compactificación $N(G)^-$. La frontera de $M(G)^-$ es la superficie $\bar{S} = (\Pi_2^- \setminus \Lambda(J))/J$ y no puede ser un toro ya que J no es abeliano por lo que es una superficie compacta de género 2. Con todo esto tenemos que $N(G)^-$ no fibra sobre el círculo.

Del hecho de que

$$\begin{array}{c} M(F)^- \\ r \downarrow \\ M(G)^- \end{array}$$

es una fibración, tenemos la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \pi_1(M(F)^-) \rightarrow \pi_1(M(G)^-) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1.$$

Por construcción, $F = \langle F_1, F_2 \rangle$ es finitamente generado. Supongamos que $\pi_1(M(F)^-)$ es finitamente generado. Entonces podemos aplicar el teorema de Stallings para concluir que $N(G)^-$ fibra sobre el círculo, lo que es una contradicción. Por lo que $\pi_1(M(F)^-)$ no es finitamente generado.

Probaremos que el grupo $\pi_1(M(F))$ tampoco es finitamente generado. Sea $u: \tilde{M} \rightarrow M(F)$ el cubriente universal con grupo de transformaciones de cubierta $\pi \simeq \pi_1(M(F))$. La variedad $M(F)^-$ es homeomorfa a $M(F)/\hat{\tau}_2$. Consideremos un levantamiento $\tilde{\tau}_2: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ de la involución $\hat{\tau}_2$. $\pi = \tilde{\tau}_2 \pi \tilde{\tau}_2$ y el grupo $\mathcal{B} = \langle \pi_1(M(F)), \tilde{\tau}_2 \rangle$ actúa de forma discontinua en \tilde{M} . Sea **TORS** el subgrupo normal de \mathcal{B} generado por los elementos de orden finito. Usando el teorema de Armstrong, $\pi_1(M(F)^-)$ es isomorfo a $\mathcal{B}/\mathbf{TORS}$ por lo que el grupo \mathcal{B} no es finitamente generado lo que nos da que el grupo $\pi_1(M(F))$ tampoco es finitamente generado. Para ver más detalles vea [9] y [15].

Ahora veamos que el teorema de Marden no es cierto en dimensiones mayores a tres.

Teorema 2.7.4 *Existe una 4-variedad hiperbólica completa M con grupo fundamental finitamente generado tal que M no es mansa.*

Demostración. Sea F el grupo del teorema (2.7.3). Extendemos la acción de F en $\overline{\mathbb{H}}^4$ como se vio en (2.3). Sea $M = \overline{\mathbb{H}}^4/F$. Como $\overline{\mathbb{H}}^4$ es simplemente conexo, $\pi_1(M) = F$.

Supongamos que M es mansa. La frontera de M es una 3-variedad N compacta por lo que sus componentes tienen una descomposición de Heegaard. Sea \mathcal{N} una de estas componentes y \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 su descomposición de Heegaard. Entonces, por el teorema de Van Kampen aplicado a \mathcal{N} , su grupo fundamental es el producto amalgamado de $\pi_1(\mathcal{N}_1)$ y $\pi_1(\mathcal{N}_2)$. Como M es mansa, $\pi_1(\mathcal{N}_i)$ son finitamente generados con $i = 1, 2$. Como el grupo fundamental de \mathcal{N} es el producto de dos grupos finitamente generados, éste es finitamente generado.

La variedad Ω/F es una componente de la frontera de M y, por el teorema (2.7.3) tiene grupo fundamental no finitamente generado. Esto contradice el hecho de que toda componente tenga grupo fundamental finitamente generado. Por lo que M no es mansa. \square

Bibliografía

- [1] Aguilar, Guitler y Prieto: *Topología Algebraica: un enfoque homotópico*, McGraw Hill, 1998.
- [2] B. N. Apanasov: *Discrete Groups In Space And Uniformization Problems*, Kluwer Academic Publisher, 1991.
- [3] M. A. Armstrong: *The Fundamental Group of the orbit space of a discontinuous group*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 64, 299-301, 1968.
- [4] A. F. Beardon y B. Maskit: *Limit Points Of Kleinian Groups And Finite Sided Fundamental Polyhedra*, Acta Math 132, 1-12, 1990.
- [5] J. Brock y J. Souto: *Algebraic Limits of Geometrically Finite Manifolds Are Tame*, GAFA Vol. 16, 1-39, 2006.
- [6] D. L. Goldsmith: *Knots, Groups And 3-Manifold* Ann. of Math. Studies 84, 3-23, 1975.
- [7] J. Hempel: *3-Manifolds*, Princeton Univ. Press, 1976.
- [8] G. A. Jones: *Complex Functions*, Cambridge University Press, 1987.
- [9] M. Kapovich y L. Potyagailo: *On The Absence Of Ahlfors' Finiteness Theorem For Kleinian Groups In Dimension Three*, Topology and its Applications 40, 1991, 83-91.
- [10] B. Maskit: *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [11] K. Matsuzaki y M. Taniguchi: *Hyperbolic Manifolds And Kleinian Groups*, Clarendon Press, 1998.

- [12] E. E. Moise: *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Annals of Mathematics, Second Series 56: 96-114, 1952.
- [13] J. R. Munkres: *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- [14] R. D. Porter: *Introduction To Fibre Bundles*, Marcel Dekker, 1977.
- [15] L.G. Ruiz: *Grupos Geométricamente Infinitos*, Tesis de licenciatura Fac. Cs. Fis. Mat. UMSNH, 2006.
- [16] W. R. Scott: *Group Theory*, Courier Cover Publications, 1987.
- [17] W. Thurston: *The Geometry And Topology Of 3-Manifolds*, Princeton Univ. Lecture Notes, 1978.