UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FAULTAD DE CIENCIAS

Sobre eneadas de elementos que son topológicamente invertibles

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTORA EN CIENCIAS

P R E S E N T A

Reyna María Pérez Tiscareño

Director de tesis: **Dr. Hugo Arizmendi Peimbert**

MÉXICO, D.F. **MAYO 2010**

"No se lo que pareceré a los ojos del mundo, pero a los míos es como si hubiese sido un muchacho que juega en la orilla del mar y se divierte de tanto en tanto encontrando un guijarro más pulido o una concha más hermosa, mientras el inmenso océano de la verdad se extendía, inexplorado frente a mi".

Isaac Newton

Sobre eneadas de elementos que son topológicamente invertibles

Reyna María Pérez Tiscareño

Director de tesis: Dr. Hugo Arizmendi Peimbert

Índice General

Prefacio

Uno de los principales objetos de estudio en análisis funcional son los espacios vectoriales topólogicos. Usualmente estos se consideran sobre el campo de los números reales o complejos. Sin embargo, el análisis funcional también estudia espacios vectoriales específicos con estructuras algebraicas adicionales. En esta tesis los espacios vectoriales topológicos con los que se trabaja son llamados álgebras topológicas. Un álgebra topológica es un álgebra que es un espacio vectorial topológico con la multiplicación $(\cdot : A \times A \ \rightarrow \ A)$ dando a $A \times A$ la topología producto, continua. Se dice que un álgebra A tiene identidad si existe un elemento $e \in A$ tal que $ex = xe = x$ para cada $x \in A$.

Si un álgebra tiene identidad, se puede discutir la noción algebraica de inversión. Sin embargo, también es posible considerar álgebras sin identidad, en ese caso, se puede dar un álgebra con identidad que contenga como subálgebra a tal álgebra. A esa álgebra se le llama la unización del álgebra. De hecho, en el caso en que el álgebra topológica no tenga identidad, se puede dar el concepto de casi inversión (Veáse el libro [11] , capítulo 1, sección 1.1).

En esta tesis se consideran álgebras topológicas con identidad y se denota por $G(A)$ al conjunto de elementos invertibles de un álgebra A. Si $G(A)$ es abierto, se dice que A es $Q-$álgebra.

En el capítulo 1, se define el concepto de elemento topológicamente invertible, el cual fue introducido por Thatte y Bhatt [14] en álgebras metrizables localmente convexas. Ellos mostraron que en las $Q-$álgebras y álgebras $m-$convexas completas, todo elemento topológicamente invertible es invertible. Más tarde, Akkar, Beddaa y Oudadess [3] caracterizaron las álgebras localmente convexas metrizables con identidad, en las cuales todo elemento topológicamente invertible es invertible. Ellos también definieron una red advertiblemente convergente (ver definición 1.11).

También en ese capítulo se define el concepto de divisor topológico de cero y de red acotada. Se discuten las relaciones entre divisores topológicos de cero y los conceptos de elementos invertibles y topológicamente invertibles en un álgebra topológica. Estas relaciones ayudan a ver que condiciones le debo pedir a un elemento topológicamente invertible para que sea invertible, esto se estudia en el contexto de álgebras topólogicas completas. Se generaliza uno de los teoremas que aparece en [5]. Además se obtiene una relación entre ideales principales densos y divisores topológicos de cero.

Las álgebras $m-$convexas completas comparten propiedades fundamentales con las álgebras de Banach (álgebras normadas completas). Sin embargo, hay propiedades que no se pueden generalizar en este tipo de álgebras. Para muchas de las propiedades que se han podido generalizar es esencial la completez del álgebra, aunque algunas de ellas se siguen cumpliendo si se le pide al álgebra $m-$convexa ser advertiblemente completa (condición mas débil que la completez).

Las álgebras topólogicas advertiblemente completas fueron introducidas por S. Warner [15]. Él considero esta idea en el contexto de las álgebras $m-$convexas y se dió cuenta que las álgebras $m-$convexas advertiblemente completas tienen propiedades fundamentales de las álgebras de Banach.

En el capítulo 1, se dan algunos resultados relacionados con álgebras advertiblemente completas y en el capítulo 3 se generaliza un teorema de Zelazko a álgebras $m-$convexas, advertiblemente completas con identidad (veáse el teorema 3.19).

En el capítulo 2, se definen espectros de elementos de un álgebra topológica. Se dan algunas propiedades de éstos y se ve qué relación hay entre ellos y cuándo coinciden.

Sea A un álgebra $m-$convexa conmutativa. Se denotará por $\mathfrak{M}(A)$ al espacio de todos los funcionales lineales multiplicativos continuos y no nulos de A, con la topología débil estrella (en el capítulo 2 se prueba que $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$). Se denota por $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ al espacio de funcionales lineales multiplicativos no cero de A, también con la topología débil estrella. Obsérvese que $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ depende unicamente de la estructura algebraica de A y no cambia si se modifica la topología de A. Sin embargo, $\mathfrak{M}(A)$ depende de la topología de A.

Si $x \in A$, entonces su transformada de Gelfand esta dada por:

$$x^{\hat{}}\,(f) = f(x), \qquad f \in \mathfrak{M}(A).$$

La transformada de Gelfand es continua sobre $\mathfrak{M}(A)$. La misma relación también define una función continua en $\mathfrak{M}^{\#}(A)$. Esta es una extensión de la transformada de Gelfand y también se denotará por $x\hat{}$, (veáse el capítulo 2, teorema 2.14)

En las álgebras $m-$convexas completas conmutativas se prueba que $x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A)) = x\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ y este conjunto es igual al espectro algebraico $\sigma(x)$ de un elemento $x \in A$, donde $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ no es invertible en } A\}$.

En el capítulo 3, se define cuándo una eneada de elementos de un álgebra A es regular y cuándo es topológicamente regular (top. regular). Estos conceptos generalizan el concepto de elemento invertible y topológicamente invertible, respectivamente. Toda eneada de elementos que es regular, también es top. regular.

A partir de esta definición se pueden definir los espectros $\sigma(\overline{x})$ y $\sigma_t(\overline{x})$ de una eneada $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ en A^n. Claramente $\sigma_t(\overline{x}) \subset \sigma(\overline{x})$. En el capítulo mencionado se dan condiciones sobre el álgebra para que estos espectros coincidan.

En el capítulo 3, también se definen los espectros de eneadas de elementos $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$ y $\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$. Se denotará por $\overline{x}\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$ a $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$ y por $\overline{x}\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ a $\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x})$. Se hace ver que si A es un álgebra $m-$convexa completa conmutativa, no necesariamente se tiene que $\sigma(\overline{x}) = \overline{x}\hat{}\,(\mathfrak{M}(A)) = \overline{x}\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$. Además se dan condiciones necesarias para que se tenga $\sigma(\overline{x}) = \overline{x}\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$ o al menos $\sigma(\overline{x}) = \overline{x}\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$.

Como se ha mencionado, varios tipos de espectros de eneadas de elementos de un álgebra topológica se introducen en el capítulo 3 y se estudian las relaciones entre ellos. Para ello, se usan varios resultados entre los que está el teorema de Arens.

En las notas de Zelazko [19] se usa el teorema de Arens (este se prueba para álgebras $m-$convexas de Fréchet) para probar la igualdad de espectros de eneadas de elementos de un álgebra ([19], teo. 12.25) y se hacen ver varias consecuencias interesantes de ese resultado. Además Zelazko plantea de manera implicita en el que él llama el problema 12.26 de las notas mencionadas, la siguiente pregunta:

El teorema de Arens, ¿se cumple en álgebras $m-$convexas completas no metrizables?

En el capítulo 3, se responde esta pregunta. En álgebras $m-$convexas no necesariamente se cumple el mencionado teorema, se dan ejemplos de cuándo falla. Además más adelante en este mismo capítulo se da una condición suficiente para que el teorema de Arens no se cumpla.

En el capítulo 4, se estudia $C_b(X)$ el álgebra de funciones complejas continuas y acotadas definidas sobre un espacio topológico X, con la topología estricta β. Esta álgebra es localmente convexa pero no necesariamente $m-$convexa.

Si X es Hausdorff completamente regular, Hugo Arizmendi y Angel Carrillo en el artículo [4] dieron condiciones necesarias y suficientes para que $C_b(X)$ sea $m-$convexa.

En el capítulo 3, la mayoría de los resultados sobre las relaciones entre los espectros de eneadas de elementos del álgebra definidos ahí se dan para álgebras $m-$convexas. Es por eso, que en el caso de $C_b(X)$ no se sabe que relaciones se tienen entre los espectros mencionados. En el capítulo 4, se darán las relaciones entre esos espectros. Además se verán relaciones entre los espectros de eneadas de elementos en el álgebra $C(X)$ de funciones complejas continuas definidas sobre un espacio topológico X, con la topología estricta β.

Capítulo 1

Elementos invertibles en álgebras topológicas

En este capítulo, se estudiarán condiciones para que un elemento de un álgebra topológica sea invertible. En la sección 1.2 se prueba el siguiente resultado:

Si A es un álgebra $m-$convexa con e , son equivalentes:

$i)$ A es advertiblemente completa.

$ii)$ $x \in A$ es invertible, si y sólo si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para toda α.

Las pruebas que se conocen de este hecho, usan filtros. En este trabajo se dará una prueba que usa redes.

En la sección 1.3 se generalizan a álgebras topológicas completas resultados que tienen que ver con la invertibilidad de un elemento y que aparecen en el artículo [5] para álgebras localmente convexas completas.

1.1 Definiciones y Resultados Básicos

En todo el documento cuando se hable de un álgebra su campo correspondiente F, será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y se denotará la unidad de un álgebra por e.

Definición 1.1 *Un* ***álgebra topológica*** *es un álgebra que es un espacio vectorial topológico con la multiplicación* $(\cdot : A \times A \rightarrow A)$ *continua, dando a* $A \times A$ *la topología producto, si ese es el caso se dirá que la multiplicación es* ***conjuntamente continua****.*

Se dice que un álgebra es semitopológica si es un álgebra que es un espacio vectorial topológico y la multiplicación es ***separadamente continua****, es decir, los operadores* $x \mapsto xy$ *para cada* y *fija en el álgebra y* $y \mapsto xy$ *para cada* x *fija en el álgebra son continuos.*

Definición 1.2 *Un álgebra topológica* A *se dice que es un* ***álgebra topológica completa*** *si como espacio vectorial topológico es completo.*

Si A es un álgebra topológica que no es completa, entonces se puede encontrar un álgebra topológica completa $\widetilde{A}$ tal que A es isomorfa a un subespacio denso de $\widetilde{A}$. A esa álgebra se le llama la completación de A. (Veáse el libro [12], Pág. 21)

Definición 1.3 *Un espacio vectorial normado* $(A, \|\cdot\|)$ *se dice que es un* ***álgebra normada*** *si* A *es un álgebra y* $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, $(x, y \in A)$.

Claramente un álgebra normada es un álgebra topológica.

Definición 1.4 *Si* A *es un álgebra normada y completa, entonces se dice que* A *es un* ***álgebra de Banach.***

Observación 1.5 *En algunos libros se define un álgebra de Banach como un álgebra topológica que vista como espacio vectorial topológico es un espacio de Banach. Con esta definición se puede probar que en toda álgebra de Banach existe una norma equivalente a la norma original de* A, *que satisface* $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, $(x, y \in A)$.

Definición 1.6 *Un* ***álgebra localmente convexa*** A *es un álgebra topológica que es un espacio localmente convexo; en este caso su topología es dada por una familia de seminormas* $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ *que satisfacen que para toda* $\alpha \in \Lambda$ *existe* $\beta \in \Lambda$, *tal que*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta \qquad \text{para toda } x, y \in A$$

Para un álgebra localmente convexa metrizable A, existe una sucesión de seminormas $(\|\cdot\|_n)_{n=1}^{\infty}$ que definen su topología y satisfacen:

$$\|xy\|_n \leq \|x\|_{n+1} \|y\|_{n+1} \qquad \text{para toda } x, y \in A$$

Definición 1.7 *Un álgebra A multiplicativa convexa ($m-$**convexa**) es un álgebra localmente convexa tal que su topología esta definida por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ tal que*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \qquad \textit{para toda } x, y \in A \textit{ y } \alpha \in \Lambda$$

Claramente toda álgebra normada es $m-$convexa.

A continuación se presenta una representación de las álgebras $m-$convexas. Para esto se recordará el concepto de límite inverso de espacios vectoriales topológicos.

Sea Λ un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación $\preccurlyeq$ que satisface que para $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\gamma \succcurlyeq \alpha$ y $\gamma \succcurlyeq \beta$. Sea X_α con $\alpha \in \Lambda$, un sistema de espacios vectoriales topológicos (se puede asumir que son espacios de Banach). Supóngase que para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$ tal que $\alpha \preccurlyeq \beta$ existe una función lineal $\pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$, y el sistema de funciones $\pi_\alpha^\beta \pi_\beta^\gamma = \pi_\alpha^\gamma$ si $\alpha \preccurlyeq \beta \preccurlyeq \gamma$. El límite inverso de (X_α), denotado por $\underleftarrow{\lim} X_\alpha$ es el subconjunto del producto cartesiano $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, que consiste de $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ tales que $\pi_\alpha^\beta (x_\beta) = x_\alpha$, con $\alpha \preccurlyeq \beta$.

Si X_α son espacios de Banach, entonces $\underleftarrow{\lim} X_\alpha$ es un espacio localmente convexo (si $|\cdot|_\alpha$ es la norma de X_α, entonces para $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \underleftarrow{\lim} X_\alpha$ se define $\|x\|_\alpha = |x_\alpha|_\alpha$, este sistema de seminormas induce una topología en $\underleftarrow{\lim} X_\alpha$).

Teorema 1.8 *Un álgebra $m-$convexa completa, conmutativa, con unidad e, resulta ser un límite inverso de álgebras de Banach.*

Demostración: Sean Λ un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación $\preccurlyeq$ que satisface que para $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\gamma \succcurlyeq \alpha$ y $\gamma \succcurlyeq \beta$ y $\left(A, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}\right)$ un álgebra $m-$convexa completa conmutativa, con unidad e, tal que si $\alpha \preccurlyeq \beta$ entonces $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta$, se considera $\ker(\|\cdot\|_\alpha) = \{x \in A \mid \|x\|_\alpha = 0\}$ el cual es un ideal de A (si $x \in A, y \in \ker(\|\cdot\|_\alpha), 0 \leq \|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha = 0$, de aquí que $xy \in \ker(\|\cdot\|_\alpha)$) además $\ker(\|\cdot\|_\alpha)$ es un cerrado (considérese $x \in \overline{\ker(\|\cdot\|_\alpha)}$ de ahí que existe $(x_\lambda) \subset \ker(\|\cdot\|_\alpha)$ tal que $x_\lambda \to x$ en la topología de A, entonces $\|x_\lambda - x\|_\beta \to 0$ para cada β, en particular se cumple $\|x_\lambda - x\|_\alpha \to 0$ y como $\|x\|_\alpha \leq \|x_\lambda - x\|_\alpha + \|x_\lambda\|_\alpha$ entonces $x \in \ker(\|\cdot\|_\alpha)$) concluyéndose así que $A \diagup \ker(\|\cdot\|_\alpha)$ es un álgebra normada ($\|x + \ker(\|\cdot\|_\alpha)\|'_\alpha = \inf\limits_{y \in \ker(\|\cdot\|_\alpha)} \|x + y\|_\alpha$).

Sea $\pi_\alpha : A \to A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ tal que $\pi_\alpha(x) = x + \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$, como $0 \in \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ entonces $\|\pi_\alpha(x)\|_\alpha^{,} \leq \|x\|_\alpha$ y como $\|x\|_\alpha \leq \|x+y\|_\alpha$ para toda $y \in \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ (ya que $\|x\|_\alpha = \|x+y-y\|_\alpha \leq \|x+y\|_\alpha + \|-y\|_\alpha$) entonces $\|x\|_\alpha \leq \|\pi_\alpha(x)\|_\alpha^{,}$; por lo tanto $\|\pi_\alpha(x)\|_\alpha^{,} = \|x\|_\alpha$.

Se completa $A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ obteniendo así, un álgebra de Banach la cual se denotará por A_α. Como π_α es sobre, $\pi_\alpha(A) = A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$, si $a \in A_\alpha \diagdown \left(A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)\right)$, entonces a es el límite de alguna sucesión de Cauchy en $A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ por lo tanto:

$$\pi_\alpha(A) \text{ es denso en } A_\alpha$$

Se define $\pi_\alpha^\beta : A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\beta\right) \to A\diagup \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ con $\alpha \preccurlyeq \beta$, como $\pi_\alpha^\beta\left(a + \ker\left(\|\cdot\|_\beta\right)\right) = a + \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$, la cual esta bien definida ya que si $a + \ker\left(\|\cdot\|_\beta\right) = b + \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ entonces $a - b \in \ker\left(\|\cdot\|_\beta\right) \subset \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$ teniendo así que $a + \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right) = b + \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right)$, además como $\pi_\alpha(xy) = \pi_\alpha(x)\pi_\alpha(y)$ entonces $\pi_\alpha^\beta(\pi_\beta(x)\pi_\beta(y)) = \pi_\alpha^\beta(\pi_\beta(xy)) = \pi_\alpha(xy) = \pi_\alpha(x)\pi_\alpha(y) = \pi_\alpha^\beta(\pi_\beta(x))\pi_\alpha^\beta(\pi_\beta(y))$, por lo que π_α^β es un homomorfismo y como $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta$ para toda $x \in A$, implica que $\left\|\pi_\alpha^\beta(\pi_\beta(x))\right\|_\alpha \leq \|\pi_\beta(x)\|_\beta$, entonces la π_α^β es un homomorfismo continuo y por continuidad se puede extender a un homomorfismo continuo de A_β en A_α el cual será denotado por π_α^β.

Se define $\pi : A \to \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha \subset \prod A_\alpha$ como $\pi(a) = (\pi_\alpha(a))_\alpha$ donde $a \in A, (\pi_\alpha(a))_\alpha$ es un elemento de $\underset{\leftarrow}{\lim} A_i$ ya que $\pi_\alpha^\beta(\pi_\beta(a)) = \pi_\alpha^\beta\left(a + \ker\left(\|\cdot\|_\beta\right)\right) = a + \ker\left(\|\cdot\|_\alpha\right) = \pi_\alpha(a)$.

π es inyectiva, ya que si $\pi(x) = (\pi_\alpha(x))_\alpha = 0$, entonces $\pi_\alpha(x) = 0$ para toda α, concluyéndose que $x = 0$.

$\underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$ es cerrado en $\prod A_\alpha$, ya que si $x \in \overline{\underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha}$, existe $(x_\lambda) \subset \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$ tal que $x_\lambda \underset{\lambda}{\to} x$, $\pi_\alpha^\beta(x_\lambda^\gamma) \underset{\lambda}{\to} \pi_\alpha^\beta(x^\gamma)$, donde x_λ^γ es la $\gamma-$ esima entrada de x_λ y x^γ es la $\gamma-$esima entrada de x. Entonces $x_\lambda^\alpha \to \pi_\alpha^\beta(x^\gamma)$ y como $x_\lambda^\alpha \underset{\lambda}{\to} x^\alpha$ y el límite es único, se sigue que $\pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$ por lo que $x \in \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$.

A continuación se demostrará la siguiente observación:

$$\pi(A) \text{ es denso en } \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$$

Sea $(x_\alpha)_\alpha \in \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$, se considera una vecindad de $(x_\alpha)_\alpha$, $(x_\alpha) + V_{\alpha_1}(0) \times \cdots \times V_{\alpha_n}(0) \times \prod A_\alpha$, como existe γ tal que $\|\cdot\|_{\alpha_j}^{,} \leq \|\cdot\|_\gamma^{,}$ para cada α_γ y como $\pi_\alpha(A)$ es denso en A_α, entonces existe $x \in A$ tal que $\|x_\gamma - \pi_\gamma(x)\|'_\gamma < \varepsilon'$, de aquí que $\left\|x_{\alpha_j} - \pi_{\alpha_j}(x)\right\|'_{\alpha_j}$ $= \left\|\pi^\gamma_{\alpha_j}(x_\gamma) - \pi^\gamma_{\alpha_j}(\pi_\gamma(x))\right\|'_{\alpha_j} \leq M\|x_\gamma - \pi_\gamma(x)\|'_\gamma < M\varepsilon'$ obteniendose así lo que se quería probar.

Como $\|\pi_\alpha(x)\|'_\alpha = \|x\|_\alpha$, entonces A y $\pi(A)$ tienen topologías equivalentes de aquí que $\pi(A)$ es completo y por lo tanto cerrado (Si $x \in Fr(\pi(A))$, entonces $x \in \pi(A)$). Por lo tanto $A = \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$. ■

1.2 Elementos invertibles en álgebras $m-$convexas

Definición 1.9 *Sea A un álgebra con e. Se dice que $x \in A$ tiene* ***inverso izquierdo (derecho)*** *si existe $y \in A$ tal que $yx = e$ $(xy = e)$, x es* ***invertible*** *si tiene inverso izquierdo y derecho.*

Si $x \in A$ es invertible con inverso izquierdo y e inverso derecho z, se puede probar que $y = z$. Por lo tanto si x es invertible, entonces existe $y \in A$ tal que $xy = yx = e$, a y se le llamará el inverso de x.

Si A es un álgebra con unidad e, se denota por $G(A)$ al conjunto de elementos invertibles del álgebra A.

Teorema 1.10 *Sean A un álgebra $m-$convexa completa, con unidad e y $x \in A$, entonces $x \in G(A)$, si y sólo si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para toda $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración: Como $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para toda $\alpha \in \Lambda$, se denota por y_α al inverso de $\pi_\alpha(x)$ y por e_α a la unidad de A_α. Se considera $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y como $e_\alpha = \pi^\beta_\alpha(y_\beta\pi_\beta(x)) = \pi^\beta_\alpha(y_\beta)\pi^\beta_\alpha(\pi_\beta(x)) = \pi^\beta_\alpha(y_\beta)\pi_\alpha(x)$, entonces $\pi^\beta_\alpha(y_\beta) = y_\alpha$ concluyéndose que $(y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha = A$, por lo tanto existe $y \in A$ tal que $\pi_\alpha(y) = y_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$.

Claramente y es el inverso de x, ya que x visto como elemento de $\underset{\leftarrow}{\lim} A_\alpha$ es $(\pi_\alpha(x))_\alpha$.

Para la otra implicación, se considera $x \in G(A)$ y como π_α es un homomorfismo $(\alpha \in \Lambda)$, entonces $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para toda $\alpha \in \Lambda$. ■

En la prueba del teorema anterior es esencial la completez del álgebra. A continuación se dará la definición de álgebra advertiblemente completa y se probará que dicho teorema se sigue cumpliendo si se omite la completez y se le pide al álgebra ser advertiblemente completa.

Definición 1.11 *Sean A un álgebra topológica con e y (x_λ) una red en A. Si existe $x \in A$ tal que $x_\lambda x \to e$ y $x x_\lambda \to e$, entonces se dirá que (x_λ) es* ***advertiblemente convergente*** *(advertible con respecto a x).*

Si (x_λ) satisface la primera o la segunda de las condiciones anteriores, se dice que (x_λ) es advertible derecha o izquierda (con respecto a x), respectivamente. Es claro que si (x_λ) es convergente, entonces $x_\lambda \to x^{-1}$.

Definición 1.12 *Un álgebra A con e, se dice que es* ***advertiblemente completa*** *si toda red de Cauchy advertiblemente convergente es convergente.*

Observación 1.13 *De las definiciones de álgebra completa y álgebra advertiblemente completa se tiene que si A es un álgebra completa con e, entonces A es advertiblemente completa.*

Observación 1.14 *Si A es $Q-$álgebra, entonces A es advertiblemente completa. Esto debido a que toda red advertiblemente convergente es convergente, ya que $e \in G(A)$ y $G(A)$ es abierto.*

Teorema 1.15 *Si A es un álgebra $m-$convexa con e , son equivalentes:*
i) A *es advertiblemente completa.*
ii) $x \in A$ *es invertible, si y sólo si* $\pi_\alpha(x)$ *es invertible en* A_α*, para toda* α.

Demostración: *ii)* implica *i)* ya que si $(x_\lambda)_\lambda$ es una red advertiblemente convergente de Cauchy, entonces existe $x \in A$ tal que $x(x_\lambda) \underset{\lambda}{\to} e$, de ahí que $\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(x_\lambda) \underset{\lambda}{\to} e_\alpha$ para cada α, además como A_α es completa y $(\pi_\alpha(x_\lambda))_\lambda$ es de Cauchy (ya que $(x_\lambda)_\lambda$ es de Cauchy y π_α es continua), se concluye que $(\pi_\alpha(x_\lambda))_\lambda$ es convergente y por lo tanto $\pi_\alpha(x)$ es invertible, ahora usando la hipótesis se tiene que x es invertible y entonces $(x_\lambda)_\lambda$ es convergente.

A continuación se probará que *i)* implica *ii)*, claramente se tiene que si x es un elemento invertible de A, entonces $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para cada α, sólo resta probar que si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α para toda α, entonces x es invertible. Sea $(\pi_\alpha(x))^{-1}$ el inverso de $\pi_\alpha(x)$, (claramente $\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha \neq 0)$ y se denota por e_α al elemento unidad de A_α. Como $\operatorname{Im}\pi_\alpha$ es denso en A_α para toda α, se tiene que dado α y $n \in \mathbb{N}$, existe $z_{\alpha,n} \in A$ tal que $\|\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha,n}) - e_\alpha\|'_\alpha < \frac{1}{n}$.

Se dirá que $(\alpha, n) \preceq (\beta, m)$, si y sólo si, $\alpha \leq \beta$ y $n \leq m$. Considérese la red $(z_{\alpha,n})_{(\alpha,n)}$, se probará que esta es Cauchy, es decir, que dado α y $\varepsilon > 0$, existe (α_0, n_0) tal que para toda $(\alpha_1, n_1), (\alpha_2, n_2) \succeq (\alpha_0, n_0)$, se tiene que $\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - \pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2})\|'_\alpha < \varepsilon$.

considérese $\alpha_0 = \alpha$ y $n_0 > \frac{2\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{\varepsilon}$. Se afirma que

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha &< \frac{\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{n_1} \qquad \text{y} \\
\left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha &< \frac{\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{n_2}, \text{ ya que}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha &= \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha \\
&= \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})(\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - e_\alpha)\right\|'_\alpha \\
&\leq \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha \left\|\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - e_\alpha\right\|'_\alpha \\
&= \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha \left\|xz_{\alpha_1,n_1} - e\right\|_\alpha \\
&\leq \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha \left\|xz_{\alpha_1,n_1} - e\right\|_{\alpha_1} < \frac{\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{n_1}
\end{aligned}$$

Haciendo lo análogo para $\left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha$, se tiene que

$$\left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha < \frac{\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{n_2}.$$

Usando la afirmación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - \pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2})\|'_\alpha &\leq \left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha + \left\|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\right\|'_\alpha \\
&< \frac{\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{n_1} + \frac{\left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha}{n_2} \\
&= \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \\
&\leq \left\|(\pi_\alpha(x))^{-1})\right\|'_\alpha \frac{2}{n_0} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Además por como se tomó la red $(z_{\alpha,n})$ se tiene que $(xz_{\alpha,n})$ converge a e.

Como A es advertiblemente completa, $(z_{\alpha,n})$ es Cauchy y $(xz_{\alpha,n})$ converge a e, entonces $(z_{\alpha,n})$ es convergente y converge al inverso de x. ■

Observación 1.16 *El teorema 1.10 es corolario del teorema anterior.*

Corolario 1.17 *Si A es un álgebra $m-$convexa con e, entonces $i)$ implica $ii)$:*

$i)$ A es advertiblemente completa.

$ii)$ $x \in A$ es invertible, si y sólo si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en $A \diagup \ker \|\cdot\|_\alpha$, para toda α.

Demostración: $i)$ implica $ii)$, claramente si $x \in A$ es invertible, entonces $\pi_\alpha(x)$ es invertible en $A \diagup \ker \|\cdot\|_\alpha$, para toda α y si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en $A \diagup \ker \|\cdot\|_\alpha$, entonces $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α y por el teorema anterior se tiene que x es invertible. ■

Corolario 1.18 *Si A es un álgebra $m-$convexa advertiblemente completa con e, entonces son equivalentes:*

$i)$ $x \in A$ es invertible, si y sólo si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en $A \diagup \ker \|\cdot\|_\alpha$, para toda α.

$ii)$ $x \in A$ es invertible, si y sólo si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para toda α.

Demostración: Por el teorema 1.15 se concluye que $i)$ implica $ii)$ y por el corolario anterior se tiene $ii)$ implica $i)$. ■

El siguiente teorema también da una condición necesaria y suficiente para que un elemento sea invertible en un álgebra $m-$convexa, conmutativa con e y advertiblemente completa.

$\mathfrak{M}(A)$ denotará el conjunto de funcionales lineales multiplicativos y continuos de A en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.19 *Si A es un álgebra $m-$convexa, conmutativa con e y advertiblemente completa, entonces x es invertible si y sólo si $f(x) \neq 0$, para toda $f \in \mathfrak{M}(A)$.*

Demostración: Considérese $x \in A$ invertible y $y \in A$ el inverso de x. Como $1 = f(e) = f(xy) = f(yx) = f(y) f(x)$, entonces $f(x) \neq 0$.

A continuación se probará la otra implicación. Supóngase que x no es invertible, entonces por el teorema 1.15, existe α tal que $\pi_\alpha(x)$ no es invertible en A_α. Se considera el ideal $\pi_\alpha(x) A_\alpha$, el cual es propio y esta contenido en un ideal máximo cerrado M, esto implica que existe $f \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ tal que $f(\pi_\alpha(x)) = 0$, lo que es una contradicción, ya que $f \circ \pi_\alpha \in \mathfrak{M}(A)$. ■

1.3 Elementos invertibles en álgebras topológicas completas

A continuación se estudiarán condiciones que se deben pedir para que un elemento en un álgebra topológica completa con unidad sea invertible.

Definición 1.20 *Sea A un álgebra topológica con e, $a \in A$ se dice que es un* ***elemento topológicamente invertible*** *(top. invertible) si existen redes (b_λ) y (c_λ) en A tales que $b_\lambda a \to e$ y $ac_\lambda \to e$. A estas redes se les llaman inversos topológicos derecho e izquierdo de a, respectivamente.*

Definición 1.21 *Sean X un espacio vectorial topológico y (a_λ) una red en X. Se dice que (a_λ) es una* ***red acotada*** *si para toda vecindad de cero, U, existen l_U y $k_U > 0$ tal que $a_\lambda \in k_U U$ si $\lambda > l_U$.*

Proposición 1.22 *Si X es un espacio vectorial topológico y (a_λ) una red en X convergente, entonces (a_λ) es acotada.*

Demostración: Como (a_λ) una red convergente digamos a $a \in X$, dada $U(0)$ existe λ_0 tal que $a_\lambda - a \in U(0)$, para toda $\lambda \geq \lambda_0$, se tiene que $a_\lambda \in a + U(0)$ para toda $\lambda \geq \lambda_0$ y como en un espacio topológico toda vecindad de cero es absorbente, se tiene que existe k tal que $a \in kU(0)$, de aquí que $a + U(0) \subset (k+1) U(0)$ ■

Análogamente se puede mostrar que si (a_λ) es Cauchy, entonces (a_λ) es acotada.

Definición 1.23 *Sea A un álgebra topológica. Un elemento $a \in A$ se dice que es* ***divisor topológico derecho (izquierdo) de cero*** *si existe una red (c_λ) en A tal que (ac_λ) (resp. $(c_\lambda a)$) converge 0 y (c_λ) no converge a 0. Se dirá que $a \in A$ es divisor topológico bilateral de cero si a es divisor topológico izquierdo y derecho de cero.*

Observación 1.24 *Sea A un álgebra topológica con e y $a \in A$ invertible. Entonces a no es divisor topológico de cero.(ya que si a fuera un divisor topológico de cero se tendría que existe una red (c_λ) en A tal que (ac_λ) y $(c_\lambda a)$ convergen a 0 pero (c_λ) no converge a 0, y por hipótesis se tiene que (c_λ) converge a 0, lo que es una contradicción).*

Una pregunta natural que surge es la siguiente:

Dada un álgebra topológica A, ¿existen divisores topológicos derechos (izquierdos) de cero en A?. En el libro [16] , pág. 58, se demuestra que toda álgebra de Banach que no es isomorfa a los complejos, tiene divisores topológicos de cero. Sin embargo, existen álgebras topológicas $m-$convexas completas en las que no hay divisores topológicos de cero, así lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.25 *Sea $\mathcal{E}$ el álgebra de las funciones enteras en $\mathbb{C}$, dotada de la topología compacto abierta. Esta topología está dada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas de la siguiente manera:*

$$\|f\|_n = \max_{|x|=r_n} |f(x)|$$

donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales tales que $r_n \to \infty$.

Claramente $\left(\mathcal{E}, \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ es un álgebra $m-$convexa, conmutativa y completa.

Esta álgebra no tiene divisores topológicos de cero, ya que si para $f \in \mathcal{E}$, $f \neq 0$ existe $(f_n)_n \subset \mathcal{E}$ tal que $ff_n \to 0$. Como los ceros de $f(z)$ son aislados, se puede encontrar una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos $(r_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tales que $r_n \to \infty$ y $0 < m_n = \min_{|x|\leq r_n} |f(x)|$, entonces $m_k \|f_n\|_k \leq \max_{|x|=r_k} |ff_n(x)| < \varepsilon$,

para toda $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande. De ahí que $\|f_n\|_k < \frac{\varepsilon}{m_k}$ para toda $\varepsilon > 0$ y n suficientemente grande, por lo tanto $f_n \to 0$.

En el artículo [5], se tienen los siguientes resultados:

Proposición 1.26 *Sean A un álgebra completa con unidad e y (a_λ) una red advertible derecha con respecto a $a \in A$. Si (a_λ) no es convergente o no acotada, entonces a es un divisor topológico izquierdo de cero.*

Teorema 1.27 *Sea A un álgebra localmente convexa completa ó un álgebra localmente seudoconvexa con unidad e . Supóngase que $a \in A$ es topológicamente invertible derecho e izquierdo con inversas topológicas $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ y $\widetilde{c} = (c_\lambda)_{\lambda \in N}$, respectivamente, donde N es un sistema fundamental de vecindades de cero en A. Si $\widetilde{b}$ ó $\widetilde{c}$ es acotada, entonces a es invertible.*

Se puede preguntar si estos resultados se siguen teniendo para álgebras topológicas no completas.

El siguiente ejemplo muestra que la proposición 1.26 no es válida para álgebras no completas.

Ejemplo 1.28 $\left(P[x], \|p\| = \max\limits_{0 \leq |x| \leq \frac{1}{2}} |p(x)|\right)$ *, donde $P[x]$ es el conjunto de polinomios con coeficientes complejos, esta álgebra no es completa, el polinomio $x - 1$ no es invertible pero si es topológicamente invertible y su red advertible (s_n), donde $s_n = -\sum\limits_{i=0}^{n} x^i$ no es convergente, además $x - 1$ no es divisor topológico de cero, ya que si lo fuera existiría (p_n) tal que $\|(x-1)p_n(x)\| \to 0$ y si pasa esto dada $\varepsilon > 0$ existe $N_0 > 0$, tal que para $n > N_0$ $\|(x-1)p_n(x)\| < \varepsilon$, entonces $|p_n(x)| < \frac{\varepsilon}{|x-1|}$ para cada $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, lo cual implica que $\|p_n(x)\| < 2\varepsilon$ para $n > N_0$ y así $p_n(x) \to 0$.*

A continuación se tratará de dar algún tipo de generalización del teorema para álgebras topólogicas con identidad.

Teorema 1.29 *Sea A un álgebra topológica completa con e y $a \in A$. Si aA no es cerrado, entonces a es un divisor topológico izquierdo de cero.*

Demostración: Sea $x \in \overline{aA} \setminus aA$, entonces existe $(x_\lambda)_\lambda \subset A$ tal que $ax_\lambda \to x$, obsérvese que $(x_\lambda)_\lambda$ no es Cauchy ya que si lo fuera como A es completa, $(x_\lambda)_\lambda$ sería convergente y se tendría que $x \in aA$. Dada V una vecindad de cero, existe otra vecindad de cero, U, tal que $U + U \subset V$. Como $ax_\lambda \to x$, entonces existe λ_0 tal que

$a(x_\lambda - x_\mu) = (ax_\lambda - x) - (ax_\mu - x) \in U + U \subset V$ para $\mu, \lambda > \lambda_0$, de ahí que $a(x_\lambda - x_\mu)$ converge a 0 y como $(x_\lambda)_\lambda$ no es Cauchy, entonces $(x_\lambda - x_\mu)$ no converge a cero. ■

El álgebra del ejemplo 1.25 tiene todos sus ideales principales cerrados.

Observación 1.30 *Sea A un álgebra topológica con e y $a \in A$. Si $a\widetilde{A}$ no es cerrado en $\widetilde{A}$, entonces a es un divisor topológico izquierdo de cero en $\widetilde{A}$.*

Observación 1.31 $a\widetilde{A} \subset \overline{aA}^{\sim}$ *(recordemos el siguiente resultado, sean X es un espacio topológico, g una función de X en X continua y $B \subset X$, entonces $g\left(\overline{B}\right) \subset \overline{g(B)}$. Considerese $a \in A$ y $f : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$, tal que $f(x) = ax$, como el producto en $\widetilde{A}$ es continuo, entonces $\overline{aA}^{\sim} \supset a\overline{A}^{\sim} = a\widetilde{A}$.*

Teorema 1.32 *Sea A un álgebra topológica con e y $a \in A$. Si $\overline{aA}$ con respecto a $\widetilde{A}$ es distinta a $a\widetilde{A}$, entonces a es divisor topológico de cero.*

Demostración: Por hipótesis tenemos que existe $x \in \overline{aA}^{\sim} \setminus a\widetilde{A}$ y por lo tanto existe $(x_\lambda) \subset A$ tal que ax_λ converge a x en $\widetilde{A}$, obsérvese que (x_λ) no es Cauchy en A, ya que si (x_λ) es Cauchy en A, entonces $x \in a\widetilde{A}$. Dada V una vecindad de cero , existe otra vecindad de cero, U, tal que $U + U \subset V$. Como $ax_\lambda \to x$, entonces existe λ_0 tal que $a(x_\lambda - x_\mu) = (ax_\lambda - x) - (ax_\mu - x) \in U + U \subset V$ para $\mu, \lambda > \lambda_0$, de ahí que $a(x_\lambda - x_\mu)$ converge a 0 y como $(x_\lambda)_\lambda$ no es Cauchy, entonces $(x_\lambda - x_\mu)$ no converge a cero. ■

Teorema 1.33 *Sea A un álgebra localmente convexa con e. Supóngase que $a \in A$ es topológicamente invertible derecho e izquierdo con inversas topológicas $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ y $\widetilde{c} = (c_\lambda)_{\lambda \in N}$, respectivamente, donde N es un sistema fundamental de vecindades de cero en A. Si $\widetilde{b}$ ó $\widetilde{c}$ es acotada en A, entonces a es invertible en $\widetilde{A}$.*

Proposición 1.34 *Sean A un álgebra advertiblemente completa conmutativa con unidad e y $(a_\lambda)_\lambda$ una red advertible con respecto a $a \in A$. Si (a_λ) no es convergente o no acotada, entonces a es un divisor topológico de cero.*

Demostración: Supóngase que a_λ no es convergente, como A es advertiblemente completa, entonces a_λ no es Cauchy advertiblemente convergente, pero

como a_λ es advertiblemente convergente podemos concluir que a_λ no es Cauchy. Dada V una vecindad de cero , existe otra vecindad de cero, U, tal que $U+U \subset V$. Como $aa_\lambda \to e$, entonces existe λ_0 tal que $a(a_\lambda - a_\mu) = (aa_\lambda - e) - (aa_\mu - e) \in U + U \subset V$ para $\mu, \lambda > \lambda_0$, de ahí que $a(a_\lambda - a_\mu)$ converge a 0 y como $(a_\lambda)_\lambda$ no es Cauchy, entonces $(a_\lambda - a_\mu)$ no converge a cero. ■

Lema 1.35 *Sean A un álgebra topológica, $l^\infty(A) = \left\{(x_\lambda)_{\lambda \in N} \subset A : (x_\lambda)_{\lambda \in N} \text{ es acotada}\right\}$ y $\widetilde{c_0} = \left\{(x_\lambda)_{\lambda \in N} \in l^\infty(A) : (x_\lambda)_{\lambda \in N} \to 0\right\}$. Entonces existe en $l^\infty(A)$ una topología τ, tal que $(l^\infty(A), \tau)$ es un álgebra topológica (con la suma y producto puntual) y $\widetilde{c_0} = \left\{(x_\lambda)_{\lambda \in N} \in l^\infty(A) : (x_\lambda)_{\lambda \in N} \to 0\right\}$ es cerrado.*

Demostración: Dados $U(0) \in N$ y λ_0. Se define

$$V_{(U,\lambda_0)}(0) = \left\{(a_\lambda)_{\lambda \in N} \in l^\infty(A) : \text{existe } \lambda_1 \geq \lambda_0 \text{ tal que } a_\lambda \in U \text{ para toda } \lambda > \lambda_1\right\}$$

A continuación se probará que estos conjuntos forman una base de vecindades de cero.

Claramente se tiene que $(0)_{\lambda \in N} \in V_{(U,\lambda_0)}(0)$, además si $V_1 = V_{(U_1,\lambda_1)}(0)$ y $V_2 = V_{(U_2,\lambda_2)}(0)$,entonces considerando $U_3 = U_1 \cap U_2$ y λ_3 tal que $\lambda_3 \geq \lambda_1$ y $\lambda_3 \geq \lambda_2$ se tiene que $V_3 = V_{(U_3,\lambda_3)}(0)$ cumple que $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ y si se considera $V_{(U,\lambda_0)}(0)$, existe $W \in N$ tal que $W + W \subset U$, claramente $V_{(W,\lambda_0)}(0) \subset V_{(U,\lambda_0)}(0)$ y si $(a_\lambda) \in V_{(W,\lambda_0)}(0)$, entonces $(a_\lambda) + V_{(W,\lambda_0)}(0) \subset V_{(U,\lambda_0)}$.

Con esa base de vecindades la suma en $l^\infty(A)$ es continua, ya que dada $V_{(U,\lambda_0)}(0)$, como la suma en A es continua dada $U \in N$ existe $W \in N$ tal que $W + W \subset U$. Si se consideran $V_{(W,\lambda_0)}(0)$ y $V_{(W,\lambda_0)}(0)$, se tiene que $V_{(W,\lambda_0)}(0) + V_{(W,\lambda_0)}(0) \subset V_{(U,\lambda_0)}(0)$. El producto en $l^\infty(A)$ es continuo, ya que dada $V_{(U,\lambda_0)}(0)$, como el producto en A es continuo dada $U \in N$ existe $W \in N$ tal que $W \cdot W \subset U$. Si se consideran $V_{(W,\lambda_0)}(0)$ y $V_{(W,\lambda_0)}(0)$, se tiene que $V_{(W,\lambda_0)}(0) \cdot V_{(W,\lambda_0)}(0) \subset V_{(U,\lambda_0)}(0)$.

Además el ideal $\widetilde{c_0}$ es cerrado en $l^\infty(A)$, para la prueba de este hecho se considera $((a_\lambda)_\lambda)_\mu \subset \widetilde{c_0}$ tal que $((a_\lambda)_\lambda)_\mu \to (b_\lambda)$, a continuación se probará que $(b_\lambda) \to 0$.

Se quiere probar que dadas $V \in N$ y λ_0, existe $\lambda_1 \geq \lambda_0$ tal que para toda $\lambda > \lambda_1$, $b_\lambda \in V$. Para V existe $U \in N$, la puedo considerar balanceada tal que $U + U \subset V$, como $((a_\lambda)_\lambda)_\mu \to (b_\lambda)$ entonces dada $(b_\lambda) + V_{(U,\lambda_0)}(0)$ existe μ' tal que para toda $\mu > \mu'$,

$((a_\lambda)_\lambda)_\mu \in (b_\lambda) + V_{(U,\lambda_0)}(0)$, es decir $((a_\lambda)_\lambda)_\mu - (b_\lambda) \in V_{(U,\lambda_0)}(0)$ para toda $\mu > \mu'$ lo cual quiere decir que para toda $\mu > \mu'$ existe $\lambda_0' \geq \lambda_0$ tal que para toda $\lambda > \lambda_0'$, $((a_\lambda))_\mu - (b_\lambda) \in U$ y como $(a_\lambda) \to 0$, existe λ_2 tal que $(a_\lambda) \in U$ para toda $\lambda > \lambda_2$, considérese $\lambda_1 \geq \lambda_0'$ y $\lambda_1 \geq \lambda_2$ entonces se tiene que $(b_\lambda) \in U + U \subset V$ para toda $\lambda > \lambda_1$. ■

El Teorema 1.27 se puede generalizar de la siguiente manera:

Teorema 1.36 *Sea A un álgebra topológica completa con unidad e. Supóngase que $a \in A$ es topológicamente invertible izquierdo y derecho con inversas topológicas $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ y $\widetilde{c} = (c_\lambda)_{\lambda \in N}$, respectivamente, donde N es un sistema fundamental de vecindades de cero en A. Si $\widetilde{b}$ ó $\widetilde{c}$ es acotada, entonces a es invertible.*

Demostración: Supóngase que $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ es acotada y a no es invertible por la derecha, entonces $\widetilde{c} = (c_\lambda)_{\lambda \in N}$ no es convergente y por la proposición 1.26 se tiene que a es un divisor topológico izquierdo de cero. Sea $(d_\mu)_{\mu \in M}$ tal que $a(d_\mu) \to 0$ y $(d_\mu) \nrightarrow 0$.

Se considera $l^\infty(A)$, con una topología tal que $l^\infty(A)$ sea un álgebra topológica y

$$\widetilde{c_0} = \left\{ (x_\lambda)_{\lambda \in N} \in l^\infty(A) : (x_\lambda)_{\lambda \in N} \to 0 \right\}$$

sea cerrado (esta topología existe y fue dada en el lema anterior). Considérese $l^\infty(A) \diagup \widetilde{c_0}$ con la topología cociente. La clase determinada por una red acotada $\widetilde{x}$ en $l^\infty(A) \diagup \widetilde{c_0}$ es denotada por $[\widetilde{x}]$ y la clase de la red constante $(a_\lambda)_{\lambda \in N}$ se denota por $[\widetilde{a}]$. Como la red $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ es acotada, entonces $[\widetilde{a}]$ tiene como inverso izquierdo a $\left[\widetilde{b}\right]$, además $[\widetilde{a}]$ es un divisor topológico izquierdo de cero, ya que $[\widetilde{a}] \left[\widetilde{d_\mu}\right]_{\mu \in M} \to 0$, donde $\widetilde{d_\mu}$ es la red constante $(d_\mu)_{\lambda \in N}$ para cada $\mu \in M$.

Como $\left[\widetilde{b}\right][\widetilde{a}] = [\widetilde{e}]$ y $[\widetilde{a}]\left[\widetilde{d_\mu}\right]_{\mu \in M} \to 0$, entonces se tiene que $\left[\widetilde{d_\mu}\right]_{\mu \in M} \to 0$ y esto implica que $d_\mu \underset{\mu}{\to} 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto a es invertible por la derecha, análogamente se puede probar que a es invertible por la izquierda. ■

Corolario 1.37 *Sea A un álgebra topológica con unidad e. Supóngase que $a \in A$ es topológicamente invertible derecho e izquierdo con inversas topológicas $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ y $\widetilde{c} = (c_\lambda)_{\lambda \in N}$, respectivamente, donde N es un sistema fundamental de vecindades de cero en A . Si $\widetilde{b}$ ó $\widetilde{c}$ es acotada en A, entonces a es invertible en $\widetilde{A}$.*

Si A es un álgebra con e. Se denotará por $G_t(A)$ al conjunto de elementos topológicamente invertibles de A, $G_l^t(A)$ (respectivamente, por $G_r^t(A)$) el conjunto de todos los elementos topológicamente invertibles izquierdos (respectivamente, derecho), $G_l^{tb}(A)$ (respectivamente, por $G_r^{tb}(A)$) denotará el subconjunto de $G_l^t(A)$ (respectivamente, $G_r^t(A)$) , de elementos tales que su inverso topológico izquierdo (respectivamente, derecho) es acotado.

Los siguientes resultados son mencionados en un manuscrito de Mati Abel.

Corolario 1.38 *Sea A un álgebra topológica completa con unidad e . Entonces $G_l^{tb}(A) \cap G_r^t(A) = G_r^{tb}(A) \cap G_l^t(A) = G(A)$.*

Corolario 1.39 *Sea A un álgebra topológica con unidad e . Entonces $G_l^{tb}(A) \cap G_r^t(A) \subset G\left(\widetilde{A}\right)$ y $G_r^{tb}(A) \cap G_l^t(A) \subset G\left(\widetilde{A}\right)$.*

El siguiente corolario da una generalización más del teorema 1.27. Nótese que en las hipótesis no se pide que el álgebra sea completa, pero se pide que el álgebra sea advertiblemente completa y conmutativa.

Corolario 1.40 *Sea A un álgebra topológica, conmutativa, advertiblemente completa con unidad e. Supóngase que $a \in A$ es topológicamente invertible con inversa topológica $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$, donde N es un sistema fundamental de vecindades de cero en A . Si $\widetilde{b}$ es acotada, entonces a es invertible.*

Demostración: Supóngase que a no es invertible, entonces $\widetilde{b} = (b_\lambda)_{\lambda \in N}$ no es convergente y por la proposición 1.34 se tiene que a es un divisor topológico de cero. Continuando la demostración del teorema 1.36 se llega a una contradicción. ■

Capítulo 2

Espectros de elementos de un álgebra topológica

En este capítulo se definen los espectros de un elemento en álgebras topológicas con e y se ven algunas propiedades y relaciones que hay entre ellos. Esto con el propósito de ver más adelante en el capítulo 3, cuáles de estos resultados se conservan en espectros de eneadas de elementos de un álgebra topológica.

Si A es un álgebra con unidad e, se denota por $G_t(A)$ al conjunto de elementos topológicamente invertibles del álgebra A. Claramente $G(A) \subset G_t(A)$. Se dirá que un álgebra A es invertiva si $G(A) = G_t(A)$ y que es Q_t-álgebra si $G_t(A)$ es abierto.

Se denotará por $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ al conjunto de funcionales lineales, multiplicativos, no cero de A y por $\mathfrak{M}(A)$ al conjunto de funcionales lineales multiplicativos, continuos, no cero de A.

Definición 2.1 *Sean A un álgebra topológica con e y $x \in A$. El espectro de x es:*

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(A)\},$$

el espectro topológico de x es:

$$\sigma_t(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G_t(A)\},$$

y el espectro funcional de x es:

$$\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) = \{f(x) : f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

Observación 2.2 *Si A es un álgebra topológica con e y $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) \subset \sigma_{\mathrm{t}}(x) \subset \sigma_A(x)$, ya que si $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x)$, entonces $\lambda = f(x)$ para alguna $f \in \mathfrak{M}(A)$, de ahí que $x - f(x)e \in \ker f$ el cual es ideal maximal cerrado concluyéndose así que $\lambda \in \sigma_{\mathrm{t}}(x)$ y la contención $\sigma_{\mathrm{t}}(x) \subset \sigma_A(x)$ se tiene debido a que $G(A) \subset G_t(A)$. Además se tiene que $G(A) = G_t(A)$, si y sólo si $\sigma_{\mathrm{t}}(x) = \sigma_A(x)$ para toda $x \in A$.*

2.1 Álgebras de Banach

En esta sección se verán las relaciones que se tienen entre los espectros que se definieron, cuando A es un álgebra de Banach.

Teorema 2.3 *Si A es un álgebra de Banach con e, entonces $G(A) = G_t(A)$.*

Demostración: Claramente se tiene que $G(A) \subset G_t(A)$, se demostrará la otra contención. Sea $x \in G_t(A)$, entonces existe $(x_\lambda) \subset A$ y $(y_\mu) \subset A$ tales que $x_\lambda x \to e$ y $xy_\mu \to e$, como $e \in G(A)$, que es abierto, entonces existen λ_0 y μ_0 tales que $x_{\lambda_0}x, xy_{\mu_0}$ son invertibles, concluyéndose así que x es invertible. ∎

Obsérvese que este teorema es válido si A es $Q-$álgebra con e.

Teorema 2.4 *Sea A un álgebra topológica conmutativa con unidad e con todos sus ideales máximos cerrados. Entonces $G(A) = G_t(A)$.*

Demostración: Sea $x \in G_t(A)$, entonces el ideal $\overline{xA} = A$ y xA es un ideal máximo ya que si xA no es ideal máximo, existe M ideal máximo cerrado tal que $xA \subset M$ de ahí que $\overline{xA} \subset M$, entonces $M = A$ (contradicción). Concluyéndose así que $xA = \overline{xA} = A$. ∎

Surge la pregunta: ¿Si A es un álgebra conmutativa con unidad e y $G(A) = G_t(A)$, entonces A tiene todos sus ideales máximos cerrados?

La respuesta a esta pregunta es negativa, el siguiente ejemplo justifica tal afirmación.

Ejemplo 2.5 *Sea $\mathcal{E}$ el álgebra de las funciones enteras en $\mathbb{C}$ con la topología compacto abierta, esta es un álgebra $m-$convexa, conmutativa y completa, que no tiene divisores topológicos de cero (veáse el ejemplo 1.25). Todos sus ideales principales son cerrados* *(por el teorema* 1.29*) y tiene un ideal máximo de codimensión infinita (ya que, como existen elementos en $\mathcal{E}$ con espectro no acotado ($f(z) = z$), por el teorema de W. Zelazko (veáse en el capítulo* 3*, el teorema* 3.14*), $\mathcal{E}$ tiene un ideal máximo de codimensión infinita).*

Por lo tanto, $G(A) = G_t(A)$ y no todos los ideales máximos de $\mathcal{E}$ son cerrados.

Corolario 2.6 *Si A es $Q-$álgebra, entonces $\sigma_{\mathrm{t}}(x) = \sigma_A(x)$.*

Corolario 2.7 *Si A es un álgebra de Banach con e, entonces A es Q_t-álgebra.*

Para hablar del espectro $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}$ es necesario que $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$. Como en un álgebra de Banach conmutativa y con e, $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$, entonces se puede hablar del espectro mencionado.

Teorema 2.8 *Si A es un álgebra de Banach conmutativa y con e, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) = \sigma_{\mathrm{t}}(x) = \sigma_A(x)$.*

Demostración: Por el corolario 2.6 se tiene que $\sigma_{\mathrm{t}}(x) = \sigma_A(x)$, a continuación se probará que $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) = \sigma_{\mathrm{t}}(x)$. Por la observación 2.2 solo resta probar que $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) \supset \sigma_{\mathrm{t}}(x)$, si $\lambda \in \sigma_{\mathrm{t}}(x)$ entonces $x - \lambda e$ no es top. invertible por lo tanto el ideal I generado por $x - \lambda e$ es propio y la cerradura de este es propio. considérese el álgebra $A/\overline{I}$, entonces para el funcional lineal, multiplicativo y continuo $F : A \to A/\overline{I}$ tal que $a \mapsto a + \overline{I}$, se tiene que $x - \lambda e \in \ker F$ y por lo tanto $F(x) = \lambda$. ■

Definición 2.9 *Sean A un álgebra $m-$convexa, conmutativa, con unidad e y $x \in A$. La transformada de Gelfand en una función de $\mathfrak{M}(A)$ a $\mathbb{C}$, dada por $\hat{x}(f) = f(x)$.*

Se le da a $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ la topología de Gelfand Mazur ($\mathfrak{M}^{\#}(A) \subset A'$, A' con la topología débil. La topología de Gelfand Mazur es considerar la topología relativa a $\mathfrak{M}^{\#}(A)$)

Si $f_0 \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$, entonces una base de vecindades de f_0 en $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ esta dada por

$$U(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) = \left\{ f \in \mathfrak{M}^{\#}(A) : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \cdots, n \right\},$$

donde $\varepsilon > 0, x_1, \cdots, x_n \in A$.

La transformada de Gelfand es una función continua sobre $\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}^{\#}(A)$ con la topología relativa.

Teorema 2.10 *Si A es un álgebra de Banach con e, entonces $\sigma_A(x)$ es compacto para cada $x \in A$.*

Demostración: Como $x\hat{}$ es continua, $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) = x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$ y $\mathfrak{M}(A)$ es compacto. Entonces el teorema 2.8 implica que $\sigma_A(x)$ es compacto para cada $x \in A$. ■

Teorema 2.11 *Si A es $Q-$álgebra, entonces $\mathfrak{M}(A)$ es compacto.*

Demostración: Se probará que $\mathfrak{M}(A)$ es cerrado en A' con la topología débil, donde A' es el conjunto de funcionales lineales en A.

Se considera una red $\{f_\alpha\}_\alpha \subset \mathfrak{M}(A)$ tal que $f_\alpha \to f$. A continuación se probará que $f \in \mathfrak{M}(A)$.

Sean $x, y \in A, x \neq 0, y \neq 0$ y $\varepsilon > 0$. Como $f_\alpha \to f$, entonces existe α_0 tal que para toda $\alpha > \alpha_0$, $f_\alpha \in U(f; x, y, xy; \varepsilon)$, donde

$$U(f; x, y, xy; \varepsilon) = \left\{g \in A' : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, |f(y) - g(y)| < \varepsilon, |f(xy) - g(xy)| < \varepsilon\right\}.$$

Como $\{f_\alpha(x)\}_\alpha$ es convergente, entonces es acotada, por lo tanto $f(xy) = f(x)f(y)$. Además como A es $Q-$álgebra, entonces, $f \in \mathfrak{M}(A)$.

Sea V vecindad de cero en A, tal que $e + V \subset G(A)$, se define la polar de V, V^0, de la siguiente manera,

$$V^0 = \left\{f \in A' : |f(x)| \leq 1 \text{ para toda } x \in V\right\}$$

Por un teorema de Banach-Alaoglu (veáse [13], teorema 3.15, pág. 66), V^0 es compacto con la topología débil.

Además se tiene que $\mathfrak{M}(A) \subset V^0$, ya que si existiera $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $|f(x)| > 1$, para alguna $x \in V$, se considera $|f(x)| = \lambda \neq 0$ y como V es balanceada, entonces $-\frac{1}{\lambda}x \in V$. De ahí que $e - \frac{1}{\lambda}x \in G(A)$, pero $f\left(e - \frac{1}{\lambda}x\right) = 0$, lo que es una contradicción.

Ahora como $\mathfrak{M}(A) \subset V^0, V^0$ es compacto y $\mathfrak{M}(A)$ es cerrado, entonces $\mathfrak{M}(A)$ es compacto. ■

Corolario 2.12 *Si A es $Q-$álgebra con e, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x)$ es compacto para cada $x \in A$.*

Demostración: Como $x\hat{}$ es continua, $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) = x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$ y por el teorema anterior $\mathfrak{M}(A)$ es compacto, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x)$ es compacto. ■

2.2 Álgebras $m-$convexas

Algunos resultados que aparecen en la sección anterior se pueden generalizar a álgebras $m-$convexas completas. A continuación se verá que relaciones se tienen entre los espectros en este tipo de álgebras.

Sean $\left(A, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}\right)$ un álgebra $m-$convexa y $\mathfrak{M}_\alpha(A)$ al conjunto de elementos de $\mathfrak{M}(A)$ que son continuos con respecto a $\|\cdot\|_\alpha$. Entonces se tiene que:

$$\mathfrak{M}_\alpha(A) \subset \mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}^{\#}(A)$$

$\mathfrak{M}^{\#}(A)$ tiene la topología de Gelfand Mazur, definida en la sección anterior.

Sea A_α la completación del álgebra $A \diagup \ker \|\cdot\|_\alpha$. El subespacio $\mathfrak{M}_\alpha(A) \subset \mathfrak{M}(A)$ es homeomorfo a $\mathfrak{M}(A_\alpha)$, ya que hay una correspondencia biyectiva entre $\mathfrak{M}_\alpha(A)$ y $\mathfrak{M}(A_\alpha)$ dada por
$\varphi : \mathfrak{M}(A_\alpha) \to \mathfrak{M}_\alpha(A)$, donde $\varphi(f) = f \circ \pi_\alpha$, π_α es el homomorfismo canónico de $A \to A_\alpha$ ($f \circ \pi_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha(A)$, ya que $|f \circ \pi_\alpha(x)| = |f(\pi_\alpha(x))| \leq M \|\pi_\alpha(x)\|_\alpha' = M\|x\|_\alpha'$, con M constante).

Para probar que φ es biyectiva, se probará φ es invertible.

Si $f \in \mathfrak{M}_\alpha(A)$, defino $\widetilde{f} : \pi_\alpha(A) \to \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{f}(\pi_\alpha(x)) = f(x), \qquad x \in A$$

$\widetilde{f}$ esta bien definida, ya que si $x, y \in A$ y $\pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(y)$, entonces como f es continua en $\|\cdot\|_\alpha$ se sigue que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x-y)| \leq M\|x-y\|_\alpha = M\|\pi_\alpha(x) - \pi_\alpha(y)\|_\alpha' = 0.$$

De ahí que $f(x) = f(y)$ y por lo tanto $\widetilde{f}(\pi_\alpha(x)) = \widetilde{f}(\pi_\alpha(y))$.

Además como $\left|\widetilde{f}(\pi_\alpha(x))\right| = |f(x)| \leq M\|x\|_\alpha = M\|\pi_\alpha(x)\|_\alpha'$ (por ser f continua en $\|\cdot\|_\alpha$), entonces $\widetilde{f}$ es continua.

Además $\widetilde{f}$ se puede extender a A_α, ya que $\widetilde{f}$ es continua y $\pi_\alpha(A)$ es densa en A_α. La extensión de $\widetilde{f}$ se denotará de la misma manera, pero se especificará que el dominio ahora es A_α.

A continuación se definirá la inversa de φ, esta se denotará por ψ.

$$\psi : \mathfrak{M}_\alpha(A) \to \mathfrak{M}(A_\alpha) \quad \text{y } \psi(f) = \widetilde{f}.$$

Se tiene que $\psi \circ \varphi = id_{\mathfrak{M}(A_\alpha)}$, ya que $\psi \circ \varphi(f) = \psi(\varphi(f)) = \psi(f \circ \pi_\alpha) = \widetilde{f \circ \pi_\alpha}$ y como $\widetilde{f \circ \pi_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = f \circ \pi_\alpha(x) = f(\pi_\alpha(x))$, entonces $\widetilde{f \circ \pi_\alpha} = f$.

Además por como se definen las topologías de $\mathfrak{M}_\alpha(A)$ y $\mathfrak{M}(A_\alpha)$, φ es un homeomorfismo.

De la definición de $\mathfrak{M}_\alpha(A)$ se tiene que $\mathfrak{M}(A) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{M}_\alpha(A)$ y como A_α es un álgebra de Banach, entonces $\mathfrak{M}(A_\alpha)$ es compacto, por lo tanto $\mathfrak{M}_\alpha(A)$ es compacto.

Teorema 2.13 *Sea A un álgebra $m-$convexa, conmutativa, compleja y con unidad e. Entonces $\mathfrak{M}(A)$ es no vacío.*

Demostración: Como $\mathfrak{M}(A) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{M}_\alpha(A)$ y $\mathfrak{M}_\alpha(A)$ es homeomorfo a $\mathfrak{M}(A_\alpha)$ el cual es no vacío, ya que A_α es un álgebra conmutativa de Banach. ■

Teorema 2.14 (*Propiedad de Wiener para álgebras $m-$ convexas*) *Si A es un álgebra $m-$convexa, conmutativa, completa, con unidad e , entonces $x \in G(A)$ si y sólo si $x\hat{}\,(f) \neq 0$ para toda $f \in \mathfrak{M}(A)$.*

Demostración: Se sigue del teorema 1.19 del capítulo 1. ■

Teorema 2.15 *Si A es un álgebra $m-$convexa (real ó compleja) con unidad, entonces $x \mapsto x^{-1}$ es continua sobre $G(A)$.*

Demostración: Si A no es completa, entonces se obtiene su completación, es por eso que se puede suponer que A es completa. Sea $(x_t) \subset G(A)$ una red tal que $x_t \to x_0$, $x_0 \in G(A)$. Entonces para toda α, $\pi_\alpha(x_t) \to \pi_\alpha(x_0)$ en A_α, y como A_α es álgebra de Banach y en álgebras de Banach la inversión es continua se concluye que $(\pi_\alpha(x_t))^{-1} \to \pi_\alpha\left(x_0^{-1}\right)$ y como $(\pi_\alpha(x_t))^{-1} = \pi_\alpha\left(x_t^{-1}\right)$, entonces para toda α y $\varepsilon > 0$, existe λ tal que $\left\|\pi_\alpha\left(x_t^{-1}\right) - \pi_\alpha\left(x_0^{-1}\right)\right\|_\alpha^{'} < \varepsilon$ para toda $t \geq \lambda$ y como $\left\|\pi_\alpha\left(x_t^{-1}\right) - \pi_\alpha\left(x_0^{-1}\right)\right\|_\alpha^{'} = \left\|x_t^{-1} - x_0^{-1}\right\|_\alpha$se tiene que $x_t^{-1} \to x_0^{-1}$. ■

El siguiente teorema muestra que para álgebras $m-$convexas, conmutativas, completas con e, se tiene la igualdad de los espectros.

Teorema 2.16 *Si A es un álgebra $m-$convexa, conmutativa, completa y con unidad e, entonces* $\sigma_A(x) = x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A)) = x\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right) = \bigcup\limits_\alpha \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$.

Demostración: Se probará:

$$i) \quad \sigma_A(x) = x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$$

Claramente $x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A)) \subset \sigma_A(x)$, ahora solo resta probar que $\sigma_A(x) \subset x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$. Sea $\lambda \in \sigma_A(x)$, entonces $x - \lambda e$ no es invertible y por el teorema 2.14 se tiene que para alguna $f \in \mathfrak{M}(A)$, $f(x - \lambda e) = 0$ y por lo tanto $f(x) = \lambda$.

$$ii) \quad \sigma_A(x) = \bigcup_\alpha \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$$

Como $\lambda \in \sigma_A(x)$ si y sólo si $x - \lambda e$ no es invertible y por el teorema 2.14 se tiene que esto pasa si y sólo si para alguna $F \in \mathfrak{M}(A)$, $F(x - \lambda e) = 0$, pero como $\mathfrak{M}(A) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{M}_\alpha(A)$, entonces se tiene que $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $F(x - \lambda e) = 0$ con $F \in \mathfrak{M}_\alpha(A)$ para alguna $\alpha \in \Sigma$, de ahí que $\lambda \in \sigma_A(x)$ si y sólo si $f(\pi_\alpha(x - \lambda e)) = 0$ con $f \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ para alguna $\alpha \in \Sigma$ y como A_α es álgebra de Banach, entonces por propiedad de Wiener para álgebras de Banach, se tiene que $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si $\pi_\alpha(x) - \lambda e$ no es invertible en A_α. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma_A(x)$ si y sólo si $\lambda \in \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$ para alguna $\alpha \in \Sigma$.

$$iii) \quad x\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right) = \bigcup_\alpha \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$$

Si $\lambda \in x\hat{}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$, entonces $\lambda = f(x)$ para alguna $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$. Se define $F \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ para alguna α, de la siguiente manera $F(\pi_\alpha(x)) = f(x)$, claramente F es lineal, multiplicativa, continua (porque A_α es Banach) y $F : A_\alpha \to \mathbb{C}$, ya que π_α es sobre. Por lo tanto, existe $F \in \mathfrak{M}(A_\alpha)$ tal que $F(\pi_\alpha(x) - f(x)e) = 0$,entonces utilizando la propiedad de Wiener para álgebras de Banach se tiene que $f(x) \in \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$ para alguna α.

Si $\lambda \in \bigcup\limits_\alpha \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$, entonces $\lambda \in \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$ para alguna α, de ahí que $\pi_\alpha(x) - \lambda e$ no es invertible en A_α, por lo tanto, $x - \lambda e$ no es invertible en A. Por el Teorema 2.14, existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(x - \lambda e) = 0$,concluyéndose que $\lambda \in x\hat{}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$.

Por $i)$,$ii)$ y $iii)$ se tiene lo que se quería probar. ■

Corolario 2.17 *Si A es un álgebra $m-$convexa, conmutativa, completa y con unidad e, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(x) = \sigma_{\mathrm{t}}(x) = \sigma_A(x)$.*

A continuación se verán relaciones entre los espectros definidos en este capítulo en el caso en el que el álgebra no necesariamente es $m-$convexa.

Definición 2.18 *Un **álgebra de Fréchet** es un álgebra topológica, metrizable y completa.*

Definición 2.19 *Un álgebra A, se dice que es **neteriana** si y sólo si todos sus ideales son finitamente generados (generados por un conjunto finito de elementos de A).*

Teorema 2.20 *Sea A un álgebra de Fréchet, conmutativa, unitaria, real ó compleja, neteriana. Entonces A es $Q-$álgebra.*

Demostración: Veáse la proposición 2.1 del artículo [8]. ■

Corolario 2.21 *Sea A es un álgebra de Fréchet, conmutativa, unitaria y neteriana. Entonces $\sigma_{\mathrm{t}}(x) = \sigma_A(x)$*

Demostración: Se sigue del teorema anterior y el corolario 2.6. ■

En el siguiente capítulo se generaliza el concepto de espectro de un elemento de un álgebra A, a espectros de eneadas de elementos de A.

Capítulo 3

Espectros de eneadas de elementos de un álgebra topológica

En este capítulo se da una generalización de las definiciones de espectros que se tienen en el capítulo 2. Se hablará de espectros de eneadas de elementos de un álgebra topológica, se verán qué propiedades de las de los espectros definidos en el capítulo 2, se conservan en los espectros de eneadas de elementos y cuándo estos coinciden. Además, se dan generalizaciones de un teorema de Zelazko que aparece en el artículo [18] y se responde a una pregunta relacionada con el teorema de Arens y planteada en las notas de Zelazko [19].

3.1 Eneadas de elementos regulares y topológicamente regulares

Sea A un álgebra topológica, conmutativa con unidad e, se dice que

Definición 3.1 *i)* $(x_{1,}x_2, \cdots, x_n) \in A^n$ *es regular si el ideal* $x_1A + x_2A + \cdots + x_nA$ *es igual a* A.

ii) $(x_{1,}x_2, \cdots, x_n) \in A^n$ *es regular topológico (top. regular) si la cerradura del ideal* $x_1A + x_2A + \cdots + x_nA$ *es igual a* A.

Observación 3.2 *$(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A^n$ es regular topológico si existe una red de eneadas $(y_1^\lambda, y_2^\lambda, \cdots, y_n^\lambda)_\lambda \in A^n$ tal que $x_1y_1^\lambda + x_2y_2^\lambda + \cdots + x_ny_n^\lambda$ converge a e.*

Observación 3.3 *Si $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A^n$ es regular, entonces $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A^n$ es regular topológico.*

A continuación se analizará, para cuáles álgebras A se tiene que si $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A^n$ es top. regular, entonces $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ es regular.

Proposición 3.4 *Sea A un álgebra topológica conmutativa con unidad e con todos sus ideales máximos cerrados. Entonces $(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A^n$ es top. regular implica $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ es regular .*

Demostración: Supóngase que $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ no es regular, entonces $x_1A+x_2A+\cdots+x_nA \neq A$. Sea M un ideal máximo de A tal que $x_1A+x_2A+\cdots+x_nA \subset M$, como M es cerrado se sigue que $\overline{x_1A + x_2A + \cdots + x_nA} \subset M$ y como $\overline{x_1A + x_2A + \cdots + x_nA} = A$, entonces M no es propio, contradiciendose que M es ideal máximo. Por lo tanto, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ es regular . ■

En el artículo [1] , se dan condiciones necesarias y suficientes para que un álgebra topológica tenga todos sus ideales máximos cerrados.

Teorema 3.5 *(Arens) Sean A un álgebra $m-$convexa, conmutativa, Fréchet, con unidad e y $x_1, \cdots, x_N \in A$ tales que $(\pi_n x_1, \cdots, \pi_n x_N)$ es regular para cada n. Entonces $(x_1, \cdots, x_N)$ es regular en A.*

Demostración: Veáse, [19] . ■

Corolario 3.6 *Sea A un álgebra $m-$convexa de Fréchet conmutativa con unidad e. Entonces en A no hay ideales finitamente generados densos.*

Demostración: Supóngase que existe I ideal finitamente generado que es denso en A. Como $\overline{I} = A$, existe $(y_n) \subset I$ tal que $y_n \to e$, sean $(u_1, \cdots, u_n)$ los generadores de I, sea $y_i = x_1^i u_1 + \cdots + x_n^i u_n$, $y_i \to e$, es decir $x_1^i u_1 + \cdots + x_n^i u_n \underset{i\to\infty}{\rightarrow} e$ aplicando el homomorfismo π_i se tiene que $\pi_i(x_1^i)\pi_i(u_1) + \cdots + \pi_i(x_n^i)\pi_i(u_n) \underset{i\to\infty}{\rightarrow} e$. (Aplicando el siguiente resultado: Si A es un álgebra de Banach y $(a_i) \subset A$ tal que $a_i \to e$, entonces existe n tal que a_n es invertible). Se tiene que existen m entero positivo y $v \in A_m$ tal que $v\left(\pi_m\left(x_1^m\right)\pi_m\left(u_1\right)+\cdots+\pi_m\left(x_n^m\right)\pi_m\left(u_n\right)\right)=e$, entonces $v\pi_m\left(x_1^m\right)\pi_m\left(u_1\right)+\cdots+v\pi_m\left(x_n^m\right)\pi_m\left(u_n\right)=e$ y $\left(\pi_m\left(u_1\right),\cdots,\pi_m\left(u_n\right)\right)$ es regular, entonces por teorema de Arens se tiene que $\left(u_1,\cdots,u_n\right)$ es regular en A, de ahí que $u_1w_1+\cdots+u_nw_n=e$ y se tiene que $e \in I$. Por lo tanto $I=A$, lo que contradice que I es propio, concluyéndose así que A no tiene ideales finitamente generados densos. ■

El siguiente ejemplo muestra que el teorema de Arens no es cierto si A no es completa.

Ejemplo 3.7 *Sea $\mathcal{E}$ el álgebra de funciones enteras sobre los complejos, con la norma $\|f\|_N=\max\limits_{|x|\leq N}|f(x)|$ donde $f\in\mathcal{E}$ y N es un entero positivo.*

Se considera $F:\mathcal{E}\to\mathbb{C}$, tal que $F(f)=f(z_1)$ con $|z_1|>N$ y definimos $Z(F)=\{f\in\mathcal{E}:F(f)=0\}$. Entonces:

i) F no es continua.
ii) $Z(F)$ no es un ideal máximo cerrado en $(\mathcal{E},\|\cdot\|_N)$.
iii) $Z(F)$ es un ideal principal.
iv) El generador de $Z(F)$ es topológicamente invertible.
v) $(\mathcal{E},\|\cdot\|_N)$ no es completa.

Se justificarán las observaciones anteriores:

Si f es entera y no constante, entonces f no es acotada (por Liuville), entonces existe c, tal que $|f(z_1)|>c>\max\limits_{|z|\leq N}|f(z)|$ considérese $f_n(z)=\left(\frac{f(z)}{c}\right)^n$, claramente $f_n(z)\to 0$ y $F(f_n)\to\infty$. Se cumple ii) ya que $Z(F)$ es un ideal máximo y no es cerrado debido a que F no es continua.

Además por definición

$$Z(F)=\{f\in\mathcal{E}:f(z_1)=0\}=\{f\in\mathcal{E}:f(z)=(z-z_1)^\alpha h(z),\ \text{con } h\in\mathcal{E}\}$$

, entonces $Z(F)$ es generado por $z-z_1$,es decir $Z(F)$ es principal. Como $Z(F)$ es el ideal generado por $z-z_1$ y es máximo no cerrado, se sigue que $\overline{(z-z_1)\mathcal{E}}=\mathcal{E}$ y por lo tanto $z-z_1$ es topológicamente invertible.$(\mathcal{E},\|\cdot\|_N)$ es un álgebra $m-$convexa, metrizable que no es completa, ya que si fuera completa se tendría que $(\mathcal{E},\|\cdot\|_N)$ no tiene ideales finitamente generados densos pero $Z(F)$ es un ideal finitamente generado denso ahí.

3.2 Espectros de eneadas

A continuación se definirán varios espectros de eneadas de elementos de un álgebra topológica y se estudiarán relaciones entre ellos.

Definición 3.8 *Sean A un álgebra conmutativa con unidad e y $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$. Definimos:*

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) &= \{(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) : f \in \mathfrak{M}(A)\} \\
\sigma_{\mathfrak{M}^\#}(\overline{x}) &= \left\{(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)) : f \in \mathfrak{M}^\#(A)\right\} \\
\sigma_{\mathrm{t}}(\overline{x}) &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : (x_1 - \lambda_1 e, \cdots, x_n - \lambda_n e) \ \textit{no es top.regular}\ \} \\
\sigma(\overline{x}) &= \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : (x_1 - \lambda_1 e, \cdots, x_n - \lambda_n e) \ \textit{no es regular}\} \\
&= \left\{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) : \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_i e)\, y_i \notin G(A)\,,\ \forall (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n\right\}
\end{aligned}$$

Si A es un álgebra tal que $\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}^\#(A)$ (álgebra funcionalmente continua), entonces $\sigma_{\mathfrak{M}^\#}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$. Como ejemplos de álgebras funcionalmente continuas se tienen las álgebras de Banach y las $Q-$álgebras.

A continuación se demostrará que

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset \sigma_{\mathrm{t}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \subset \sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$$

Sea $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_{\mathfrak{M}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Entonces existen $f \in \mathfrak{M}(A)$ y $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$ tal que $\lambda_i = f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, considerese $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n$, se tiene que $f\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_i e)\, y_i\right) = 0$, de ahí que $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_i e)\, y_i \in \ker f$, para todo $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n$ y como $\ker f$ es un ideal propio cerrado (por la continuidad de f) de A, entonces el ideal I generado por $(x_i - \lambda_i e)_{1 \leq i \leq n}$ esta contenido en $\ker f$, de aquí que $(x_i - \lambda_i e)_{1 \leq i \leq n}$ no es regular topológico.

Ahora supóngase que $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \notin \sigma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, entonces $(x_i - \lambda_i e)_{1 \leq i \leq n}$ es regular y como todo elemento regular es regular topológico,entonces $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \notin \sigma_t(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,.$

Se puede preguntar en que álgebras se tiene la igualdad de estos espectros de eneadas de elementos de un álgebra A.

En álgebras de Banach se tiene la igualdad de los espectros.

Teorema 3.9 *Si A es un álgebra de Banach conmutativa y $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$, entonces*

$$\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$$

Demostración: Como en este caso los funcionales lineales multiplicativos sobre A son continuos, entonces $\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$. Además como $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) \subset \sigma(\overline{x})$ sólo basta con probar que $\sigma(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$, para esto se considera $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma(\overline{x})$, por definición del espectro $I = x_1A + x_2A + \cdots + x_nA$ es un ideal propio de A, por lo tanto esta contenido en un ideal máximo cerrado M. Sea $f_M : A \to A/M$ $(a \mapsto [a])$, f_M es funcional lineal multiplicativo y continuo, y como $x_i - \lambda_i e \in I \subset M$ entonces $f_M(x_i) = \lambda_i$. ■

Además si A es $Q-$álgebra conmutativa con unidad e, se tiene la igualdad de los espectros $\sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x})$ y $\sigma(\overline{x})$, ya que todo ideal máximo de A es cerrado (ver proposición 3.4). Nótese que no siempre se tiene que un álgebra con todos sus ideales máximos cerrados es $Q-$álgebra.

Teorema 3.10 *Sea A es un álgebra de Fréchet conmutativa, con unidad e. Entonces A tiene todos sus ideales máximos cerrados, si y sólo si, A es $Q-$álgebra.*

Para la prueba de este teorema veáse [2].

Nótese que en este teorema no se puede eliminar la hipótesis Fréchet. Así lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.11 *(Choukri) Álgebra $m-$convexa metrizable, con todos sus ideales máximos cerrados que no es $Q-$álgebra.*

Sea $A = \left\{ \frac{p(X)}{q(X)} : q(n) \neq 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$ $p(X), q(X)$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$, se considera sobre A la siguiente familia de seminormas

$$\|f\|_n = |f(n)|$$

para toda $f \in A$.

A es un álgebra $m-$convexa, metrizable, conmutativa y con e.

i) A es un dominio de ideales principales.

Ya que si I es un ideal propio de A, entonces $I = \{0\}$ ó $I \neq \{0\}$, basta con probar que si $I \neq \{0\}$, entonces I es principal.

Como $I \neq \{0\}$*, entonces existe* $\frac{p(X)}{q(X)} \in I \subset A$ *y* $\frac{p(X)}{q(X)}$ *no es invertible, como* $q(X) \in A$*, entonces* $p(X) \in I$ *y no es invertible. Entonces el grado de* $p(X)$ *(Denotado por* $gr(p(X))$*) es mayor ó igual a 1. Se puede considerar que el coeficiente del término que le da el grado a* $p(X)$ *es positivo. Sea* n *el menor entero positivo tal que* $1 \leq gr(p(X)) = n$*,* $p(X) \in I$ *y* $p(X) \in \mathbb{C}[X]$*, como* I *es un ideal, entonces el ideal generado por* p (pA) *está contenido en* I*. Ahora se considera* $k \in I$*, entonces por algoritmo de la división se tiene que existen* $q, r \in \mathbb{C}[X]$*, tal que* $k = qp + r \quad y \quad 0 \leq gr(r) < n$*. Como* k*,* $qp \in I$*, entonces* $r \in I$ *y* $gr(r) = 0$*, ya que si* $gr(r) > 0$ *se contradice la elección de* n*. Concluyéndose así que* $r \in I$ *y como* r *tiene grado* 0*, entonces* r *es invertible en* A *de ahí que* $I = A$ *lo que es una contradicción por suponer que* $r \neq 0$*. Por lo tanto* $k = qp$ *y se tiene que* $I \subset pA$*.*

ii) *Los ideales máximos de* A *son* $(X - n)A$*, donde* $n \in \mathbb{N}$*.*

Si M *es un ideal máximo* $(M \neq A)$*, entonces en* M *no hay elementos invertibles, es decir, si* $\frac{p(X)}{q(X)} \in M$ *entonces* $p(X)$ *se anula en álgun* $n \in \mathbb{N}$ *, y como* $p(X) \in M$ *y* M *es un ideal principal, se sigue que* $M = p(X)A \subset (X - n)A \neq A$ *y por definición de* M *se tiene que* $M = (X - n)A$*. Además si* $M = (X - n)A$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* M *es un ideal máximo, ya que* $(X - n)A$ *es el núcleo de la seminorma* $\|\cdot\|_n$*.*

iii) *Las seminormas* $\|\cdot\|_n$ *son continuas, por lo tanto los ideales maximales de* A *son cerrados. (el núcleo de* $\|\cdot\|_n$ *es cerrado).*

iv) A *no es* $Q-$*álgebra, ya que el espectro de* X*, que es* $\mathbb{N}$*, no es acotado.*

v) $\mathfrak{M}(A) = \{\chi_n : A \to \mathbb{C} : \chi_n(f) = f(n), n \in \mathbb{N}\}$

Si F *es un funcional lineal, multiplicativo y continuo en* A*, entonces* $\ker F = (X - n)A$ *para alguna* $n \in \mathbb{N}$*, como* $F((X - n)A) = 0$*, entonces* $F((X - n)) = 0$ *ó* $F(g) = 0$*, para toda* $g \in A$ *. Como* $e \in A$*, y* $F(e) = 1$*, se sigue que* $F((X - n)) = 0$*, de ahí que* $F(X) = n$ *y se concluye que* $F(f) = f(n)$*.*

vi) $\sigma_A(X) = \sigma_{\mathfrak{M}(A)}(X) = \{\chi_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$

Como $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(X) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(A)}(X) \subset \sigma_A(X)$*, entonces se tiene:*

vii) $\sigma_{\mathfrak{M}(A)}(X) = \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(A)}(X)$

Además si se considera la completación de A*,* $\left(\widetilde{A}\right)$ *se tiene que es un álgebra* $m-$*convexa, metrizable, completa que no es* $Q-$ *álgebra, ya que los elementos de* $\mathfrak{M}(A)$ *se extienden continuamente a* $\widetilde{A}$*, y como*

$$\sigma_{\widetilde{A}}(X) = \sigma_{\mathfrak{M}\left(\widetilde{A}\right)}(X) = \{\chi_n(X) : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

entonces $\sigma_{\widetilde{A}}(X)$ no es acotado, de ahí que $\widetilde{A}$ no es $Q-$ álgebra.

El ejemplo anterior además muestra que no toda álgebra A $m-$convexa, completa y con e, cumple que $\sigma_A(x)$ es acotado, para cada $x \in A$ (contrario a lo que pasa en álgebras de Banach).

Proposición 3.12 *Sea A un álgebra $m-$convexa de Fréchet conmutativa con unidad e. Entonces*

$$\sigma_{\mathfrak{M}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sigma_{\mathfrak{t}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

Demostración: Como $\sigma_{\mathfrak{M}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \subset \sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, basta con probar que $\sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n) \subset \sigma_{\mathfrak{M}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

Sean $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \sigma(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ y $u_1 = x_1-\lambda_1 e, u_2 = x_2-\lambda_2 e, \cdots, u_n = x_n-\lambda_n e$. Como $(u_1,\cdots,u_n)$ no es regular, entonces por el teorema de Arens se tiene que existe α_0 tal que $(\pi_{\alpha_0}u_1,\cdots,\pi_{\alpha_0}u_n)$ no es regular en A_{α_0}, es decir, el ideal I generado por $\pi_{\alpha_0}u_1,\cdots,\pi_{\alpha_0}u_n$ es propio en A_{α_0} y como A_{α_0} es álgebra de Banach, entonces $\overline{I}$ es propio. Sea M un ideal maximal tal que $\overline{I} \subset M$. Entonces existe $f \in \mathfrak{M}(A_{\alpha_0})$ tal que $\ker f = M$, esto implica que $(f(\pi_{\alpha_0}u_1),\cdots,f(\pi_{\alpha_0}u_n)) = (0,\cdots,0)$ y por lo tanto existe $F \in \mathfrak{M}(A), F = f\circ\pi_{\alpha_0}$ tal que $F(x_1) = \lambda_1, F(x_2) = \lambda_2, \cdots, F(x_n) = \lambda_n$. ■

Si A no es completa, no necesariamente se tiene la igualdad de los espectros anteriores.

A continuación se estudiarán que relaciones se tienen entre los espectros de eneadas de elementos, en el caso en el que A es un álgebra $m-$convexa, conmutativa, compleja y completa (no metrizable).

Proposición 3.13 *Si A es un álgebra topológica compleja con e tal que todos sus ideales máximos son de codimensión 1, entonces $\sigma(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x})$ donde $\overline{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in A^n$.*

Demostración: Claramente se tiene que $\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x}) \subset \sigma(\overline{x})$, se probará la otra contención, si $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \in \sigma(\overline{x})$, entonces $(x_1-\lambda_1 e)A + (x_2-\lambda_2 e)A + \cdots + (x_n-\lambda_n e)A \subset M$, donde M es un ideal máximo de A. Considérese el homomorfismo canónico de $\pi : A \to A/M$ y como M es de codimensión 1, se tiene que hay un homomorfismo de $\varphi : A/M \to \mathbb{C}$ que envia el elemento generador de A/M al generador de $\mathbb{C}$, concluyendo así que $\varphi\circ\pi$ es un funcional lineal multiplicativo tal que $(x_i-\lambda_i e) \in \ker(\varphi\circ\pi)$ para toda $1 \le i \le n$. ■

3.3 Relaciones entre espectros en álgebras $m-$convexas

Se estudiarán las álgebras que cumplen que todos sus ideales máximos son de codimensión 1.

Teorema 3.14 *(Zelazko) Sea A un álgebra $m-$convexa con e, compleja y completa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
i) Todo ideal máximo de A es de codimensión 1.
ii) Para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es acotado.
iii) Para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es compacto.
iv) A es $Q-$álgebra $m-$convexa completa bajo alguna topología más fuerte que la original.
v) A es $Q-$álgebra $m-$convexa completa bajo alguna topología.
vi) El espacio $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ es compacto en la topología débil estrella.

Para la prueba veáse $[18]$.

Corolario 3.15 *Sea (A,τ) $m-$convexa, conmutativa con $e, \sigma(x)$ acotado para cada $x \in A$. Entonces $\widetilde{A}$ es $Q-$álgebra con una topología τ' más fina que τ y $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}(\tau')}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$.*

Demostración: Por el teorema 3.14, se tiene que $\widetilde{A}$ es $Q-$álgebra con una topología τ' más fina que τ y todos los ideales máximos de A son de codimensión 1. Entonces como se tiene que $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}(\tau')}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) \subset \sigma(\overline{x})$, del teorema 3.13 $\sigma(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x})$ y por lo tanto $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}(\tau')}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$. ■

Más adelante se verá que en álgebras $m-$convexas, conmutativas, completas con unidad e, la contención $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x})$, puede ser propia. (Veáse el ejemplo 3.28)

El teorema 3.14 se puede generalizar a álgebras advertiblemente completas, a continuación se darán algunos resultados que se usarán para probar la generalización mencionada.

Teorema 3.16 *Si A es un álgebra topológica conmutativa con e, son equivalentes:*
1) $G(A) = G_t(A)$
2) *toda red advertiblemente convergente es convergente en A.*

Demostración: Sea $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una red advertiblemente convergente en A. Entonces existe $a \in A$ tal que $(aa_\lambda) \to e$ y $(a_\lambda a) \to e$, de ahí que $a \in G_t(A)$ y por hipótesis $a \in G(A)$, concluyéndose que a_λ converge a a^{-1}. Para la otra implicación basta con probar que $G_t(A) \subset G(A)$, sea $a \in G_t(A)$, entonces existe una red $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $(aa_\lambda) \to e$ y $(a_\lambda a) \to e$, de ahí que $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es advertiblemente convergente y por hipótesis entonces es convergente a $x \in A$ que es el inverso de a, ya que el límite es único. ■

Corolario 3.17 *Si A es un álgebra topológica conmutativa con e, son equivalentes:*
1) $G(A) = G_t(A)$
2) *A es advertiblemente completa.*

Proposición 3.18 *Si A es un álgebra topológica, $m-$convexa conmutativa con e, son equivalentes:*
1) *A es advertiblemente completa*
2) *x es invertible si y sólo si $f(x) \neq 0$, para toda $f \in \mathfrak{M}(A)$*
3) *$\sigma(x) = x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A)) = x\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ para toda $x \in A$.*

Demostración: 1) implica 2) se tiene por el teorema 1.19. Para 2) implica 3) como $x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A)) \subset x\hat{}\,\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right) \subset \sigma(x)$, basta con probar que $\sigma(x) \subset x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$. Si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e$ no es invertible y por 2), existe $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(x - \lambda e) = 0$, concluyéndose de ahí que $\lambda \in x\hat{}\,(\mathfrak{M}(A))$.

Finalmente, 3) implica 1), por el corolario anterior basta con probar que $G(A) = G_t(A)$. Sea $a \in G_t(A)$, entonces existe una red (a_μ) tal que $aa_\mu \to e$, esto implica que para toda $f \in \mathfrak{M}(A)$, $f(a) \neq 0$, de ahí que $0 \notin \sigma(a)$, es decir, a es invertible. ■

Teorema 3.19 *Sea A un álgebra $m-$convexa, conmutativa, compleja, advertiblemente completa con e. Entonces son equivalentes:*
i) *Para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es acotado.*
ii) *Para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es compacto.*

iii) *A es Q−álgebra m−convexa advertiblemente completa bajo alguna topología más fina que la original.*
iv) *A es Q−álgebra m−convexa advertiblemente completa bajo alguna topología.*
v) *El espacio* $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ *es compacto en la topología débil estrella.*

Demostración: $i) \Longrightarrow ii)$ ya que si $\sigma(x)$ no es cerrado, entonces existe $\lambda \in \overline{\sigma(x)} \setminus \sigma(x)$, de ahí que $y = x - \lambda e$ es invertible en A y entonces $0 \notin \sigma(y)$. Como $\lambda \in \overline{\sigma(x)}$, existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma(x)$ que converge a λ, se sigue que $y - (\lambda_n - \lambda)e$ no es invertible, de ahí que, $\lambda_n - \lambda \in \sigma(y)$ para toda n . Ahora como $\sigma(y) = y\hat{\ }\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$, entonces $\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \in \sigma(y^{-1})$ para toda n, concluyéndose así que $\sigma(y^{-1})$ no es acotado.
$ii) \Longrightarrow iii)$ Sean $\{\|\cdot\|_\alpha\}$ la familia de seminormas submultiplicativas que le dan a A su topología (τ) y $|x|_0 = \sup\limits_{f\in\mathfrak{M}(A)} \left|x\hat{\ }(f)\right|$ para cada $x \in A$, claramente esta es un seminorma submultiplicativa en A. Se define una nueva familia de seminormas submultiplicativas dadas por

$$\|x\|_\alpha^* = \max\{|x|_0, \|x\|_\alpha\}$$

La familia de seminormas submultiplicativas $\{\|\cdot\|_\alpha^*\}$ define en A una topología $m-$convexa, que se denotará por τ^*, más fina que τ. Claramente (A, τ^*) es $Q-$álgebra, ya que la vecindad de e dada por $\{x \in A : |x - e|_0 < 1\}$ tiene a todos sus elementos invertibles, ya que si $|x - e|_0 < 1$, entonces por la definición de $|\cdot|_0$ se tiene que $|f(x) - 1| < 1$ para toda $f \in \mathfrak{M}(A)$, de ahí que $f(x) \neq 0$ para toda $f \in \mathfrak{M}(A)$ y por el teorema 1.19 se tiene que x es invertible. Como (A, τ^*) es $Q-$álgebra, entonces A es advertiblemente completa (veáse observación 1.14) .
Claramente $iii) \Longrightarrow iv)$.
$iv) \Longrightarrow v)$ ya que como A es $Q-$álgebra, entonces $\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}^{\#}(A)$ y es compacto.
$v) \Longrightarrow i)$ ya que $\sigma(x) = x\hat{\ }(\mathfrak{M}(A)) \subset x\hat{\ }\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$, donde $x\hat{\ }\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ es acotado debido a que $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ es compacto. ■

Si A es un álgebra $m-$convexa, compleja, advertiblemente completa con e *i')* no es equivalente con las propiedades $i) - v)$

i') Todo ideal máximo de A es de codimensión 1.

ya que, el ejemplo 3.11 muestra un álgebra $m-$ convexa compleja que es advertiblemente completa (por el corolario 3.17), con todos sus ideales máximos de codimensión 1 y no cumple $i)$. Sin embargo, el siguiente teorema muestra que $i)$ implica *i')*.

Teorema 3.20 *Sea A un álgebra m−convexa, compleja, con e que es Q−álgebra bajo alguna topología. Entonces todo ideal máximo de A es de codimensión 1.*

Demostración: Como A es $Q-$álgebra, entonces todo ideal máximo de A es cerrado, considérese $f : A \to A \diagup M$ el homomorfismo canónico, por teorema de Gelfand Mazur $A \diagup M \cong \mathbb{C}$. Entonces $f \in \mathfrak{M}(A)$ y $M = \ker(f)$ que es un ideal máximo de A de codimensión 1. ■

Corolario 3.21 *Sea (A, τ) $m-$convexa, conmutativa, advertiblemente completa con $e, \sigma(x)$ acotado para cada $x \in A$. Entonces, A es $Q-$álgebra con una topología τ' más fina que τ y $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}(\tau')}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$.*

Demostración: Por el teorema 3.19, se tiene que A es $Q-$álgebra con una topología τ' más fina que τ y todos los ideales máximos de A son de codimensión 1, por el teorema anterior. Entonces como se tiene que $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}(\tau')}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) \subset \sigma(\overline{x})$, del teorema 3.13 $\sigma(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x})$ y por lo tanto $\sigma_{\mathfrak{M}(\tau)}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}^{\#}(\tau)}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}(\tau')}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$. ■

Corolario 3.22 *Sea A es un álgebra normada compleja, advertiblemente completa con e. Entonces $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A^n$.*

Demostración: Se sigue del teorema 7 del artículo [15]: Si A es un álgebra normada, son equivalentes:

1) Si $\|x\| < 1$, entonces x es advertible, 2) A es $Q-$álgebra, 3) A es advertiblemente completa. ■

A continuación se dará una variante del teorema 3.19.

Lema 3.23 *Sea A un álgebra topológica con e, tal que $\sigma(x) = x\hat{}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$i)$ $x \in A$ es invertible,

$ii)$ $f(x) \neq 0$ para toda $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$.

Demostración: *Claramente $i)$ implica $ii)$. Para la otra implicación supóngase que $x \in A$ no es invertible, entonces $0 \in \sigma(x) = x\hat{}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$. Por lo tanto, existe $f \in \mathfrak{M}^{\#}(A)$ tal que $f(x) = 0$.* ■

Teorema 3.24 *Sea A un álgebra $m-$convexa, compleja con e, tal que $\sigma(x) = x\hat{\ }\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ para toda $x \in A$. Entonces son equivalentes:*

i) Para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es acotado.

ii) Para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es compacto.

iii) A es $Q-$álgebra $m-$convexa bajo alguna topología más fina que la original.

iv) A es $Q-$álgebra $m-$convexa bajo alguna topología.

v) El espacio $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ es compacto en la topología débil estrella.

Demostración: Análoga a la prueba del teorema 3.19. ■

Teorema 3.25 *Sea A un álgebra $m-$convexa, compleja con e que es $Q-$álgebra bajo alguna topología más fina que la original. Entonces $\sigma(x) = x\hat{\ }\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ para toda $x \in A$.*

Demostración: Como A es $Q-$álgebra bajo alguna topología más fina que la original, entonces por la observación 1.14 A con la mencionada topología es advertiblemente completa y por la proposición 3.18 se tiene lo que se quería probar. ■

El siguiente ejemplo nos muestra un álgebra A, $m-$convexa, compleja con e, tal que $\sigma(x) = x\hat{\ }\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$ para toda $x \in A$. En esta álgebra se cumple que para cada elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$ es acotado. Sin embargo, en la completación de A, existen una infinidad de elementos para los cuales su espectro no es acotado.

Ejemplo 3.26 *Sea A el álgebra conmutativa $H\left(\overline{D}\right)$ de todas las funciones holomorfas en la cerradura del disco unitario complejo, D, con la topología k, compacto abierta en D. Esta topología es $m-$convexa y esta dada por la sucesión de seminormas submultiplicativas $\left(\|\cdot\|_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, definidas de la siguiente manera, $\|f\|_n = \sup\limits_{|z|\leq r_n} |f(z)|$, para $n = 1, 2, \cdots$, donde (r_n) es una sucesión de números positivos que convergen a uno.*

$H\left(\overline{D}\right)$ no es completo, ya que la sucesión de Cauchy $(f_n)_n$ en $H\left(\overline{D}\right)$, dada por $f_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$, no converge en $H\left(\overline{D}\right)$. Sin embargo $H(D)$ es completo, ya que $H(D)$ es un subconjunto cerrado del espacio métrico completo $C(D, \mathbb{C})$, las funciones continuas de D en $\mathbb{C}$ (veáse cap. VII, proposición 1.7 y teorema 2.1 del libro [9]*), lo que implica que $H(D)$ es completo con la métrica de $C(D, \mathbb{C})$. Pero por como se define tal métrica,*

también se tiene que $H(D)$ es completo con la topología compacto abierta (veáse cap. VII, lema 1.7 del libro [9]*).*

Sea X la completación de A, como $H(D)$ es completo, se tiene que $X \subset H(D)$. También se tiene la otra contención, ya que si $f \in H(D)$, entonces $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ y la sucesión (f_n) en $H(\overline{D})$, donde $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ es de Cauchy y converge a f, concluyéndose así que $f \in X$. Por lo tanto la completación de A es $H(D)$.

En el artículo [6]*, se prueba que todo ideal I de A tiene la forma $I = p(z)A$, donde $p(z)$ es un polinomio que tiene sus ceros en $\overline{D}$. Además todo ideal máximo M de A es de la forma $M = (z-w)A$ con $|w| \leq 1$ y estos son cerrados, si y sólo si, $|w| < 1$, esto debido a que $(z-w)$ es topológicamente invertible en A, para todo complejo w de norma uno (su inverso topológico es $\left(-\sum_{i=0}^{n} \frac{z^i}{w^{i+1}}\right)_n$).*

Se tiene que $\mathfrak{M}(A) = D$, ya que si $F \in \mathfrak{M}(A)$, entonces $\ker(F)$ es un ideal máximo cerrado en A, es decir, $\ker(F) = (z-w)A$ con $|w| < 1$. De la definición de $\ker(F)$ se tiene que $F((z-w)A) = 0$, de ahí que, $F(z-w) = 0$ ó $F(g) = 0$ para toda $g \in A$ y como $e \in A$ y $F(e) = 1$, entonces $F(z-w) = 0$, es decir, $F(z) = w$. Por lo tanto, $F(f) = w$.

Además siguiendo un razonamiento análogo al anterior y sabiendo que todo ideal máximo M de A es de la forma $M = (z-w)A$ con $|w| \leq 1$, se tiene que $\mathfrak{M}^{\#}(A) = \overline{D}$.

A continuación se probará que $\sigma(f)$ es acotado para cada $f \in A$.Como $\mathfrak{M}^{\#}(A) = \overline{D}$, basta con probar que $\sigma(f) = \widehat{f}\left(\mathfrak{M}^{\#}(A)\right)$, considérese $\lambda \in \sigma(f)$, entonces $f - \lambda e$ no es invertible en A, de ahí que, $f - \lambda e$ se anula en algún elemento de $\overline{D}$, es decir, existe $w \in \overline{D} = \mathfrak{M}^{\#}(A)$ tal que $f(w) = \lambda$, la otra contención es clara.

Sin embargo, se tiene que si $|w| = 1$, entonces $\frac{1}{z-w} \in H(D)$ y $\sigma\left(\frac{1}{z-w}\right)$ no es acotado, esto debido a que si $\lambda \in \sigma\left(\frac{1}{z-w}\right)$, entonces $\frac{1}{z-w} - \lambda e$ no es invertible, es decir $\frac{1-\lambda e(z-w)}{z-w}$ no es invertible de ahí que existe $|z| < 1$ tal que $\lambda e(z-w) = 1$, $z = \frac{1}{\lambda e} + w$ de ahí que hay una infinidad de elementos en $H(D)$ con espectro no acotado.

La topología más fina a la original que hace $Q-$álgebra a $H(\overline{D})$ y que esta dada en la prueba de ii) implica iii) del teorema anterior es la topología dada por la norma $\|\cdot\|_{\infty}$, que se define de la siguiente manera $\|f\|_{\infty} = \max_{|z| \leq 1} |f(z)|$.

Considérese un álgebra compleja, $m-$convexa, conmutativa con e, se puede preguntar en qué casos se tiene que $\sigma(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$. Para este tipo de álgebras que satisfacen $\mathfrak{M}(A)$ es compacto la siguiente proposición da condiciones suficientes para que $\sigma(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$.

Proposición 3.27 *Sea A un álgebra unitaria, $m-$convexa, compleja y conmutativa, tal que $\mathfrak{M}(A)$ es compacto. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*
$i)$ A no tiene ideales propios finitamente generados densos.
$ii)$ Si $x_1, \cdots, x_n \in A$ y $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| > 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces existen elementos $y_1, \cdots, y_n \in A$ tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e$
$iii)$ Todo ideal máximo de A es cerrado.

Demostración: $i)$ implica $ii)$, ya que si se considera $x_1, \cdots, x_n \in A$ tal que $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| > 0$ para cada $f \in \mathfrak{M}(A)$, entonces $x_1, \cdots, x_n$ no pertenecen a ningún ideal máximo cerrado. Además el ideal generado por $x_1, \cdots, x_n$ que se denotará por I es un ideal denso, ya que si no lo fuera $\overline{I} \neq A$ y entonces $A \diagup \overline{I}$ es un álgebra $m-$convexa, conmutativa, $\mathfrak{M}\left(A \diagup \overline{I}\right) \neq \emptyset$ y como $\pi : A \to A \diagup \overline{I}$ el homomorfismo canónico es continuo se tiene que existe $f \in \mathfrak{M}(A)$, $(f = F \circ \pi$ donde $F \in \mathfrak{M}\left(A \diagup \overline{I}\right))$ tal que $|f(x_i)| = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, lo que es una contradicción. Como I es denso y finitamente generado, entonces por $i)$ $I = A$.

$ii)$ implica $iii)$ ya que como se tiene $ii)$ si los elementos $x_1, \cdots, x_n$ pertenecen a un ideal propio I, entonces existe un funcional $f \in \mathfrak{M}(A)$ tal que $f(x_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$. Por lo tanto, la familia de conjuntos cerrados $\{Z(x) : x \in I\}$, donde $Z(x) = \{f \in \mathfrak{M}(A) : f(x) = 0\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y como $\mathfrak{M}(A)$ es compacto, entonces existe $f \in \bigcap_{x \in I} Z(x)$, por lo tanto $I \subset M = f^{-1}(0)$. En particular, todo ideal máximo es cerrado.

$iii)$ implica $i)$, ya que todo ideal propio de A está contenido en un ideal máximo. ■

Además observamos que $ii)$ es equivalente con $iv)$

$$iv) \quad \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x}), \qquad \text{donde } \overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$$

iv) implica *ii*) se tiene del hecho que si $(0,\cdots,0)\notin\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$, entonces $(0,\cdots,0)\notin\sigma(\overline{x})$ y *ii*) implica *iv*) es obvio usando la contrapositiva de *ii*).

A partir de la proposición 3.27 y del siguiente ejemplo que aparece en el artículo [18], se puede probar que el teorema de Arens no necesariamente se cumple para álgebras $m-$convexas con e, no metrizables.

Ejemplo 3.28 *Sean* $D=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\frac{1}{2}\leq|z_1|^2+|z_2|^2\leq 1\right\}$ *y* $D_0=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:\frac{1}{2}\leq|z_1|^2+|z_2|^2<1\right\}$. *Considérese* A *el álgebra de todas las funciones continuas en* D *y holomorfas en* D_0. *Para toda sucesión convergente* $a=\left\{\left(z_1^{(n)},z_2^{(n)}\right)\right\}\subset D,\lim\left(z_1^{(n)},z_2^{(n)}\right)=(z_1,z_2)\,,z_1^{(n)}\neq z_i,i=1,2$ *se define,*

$$\|f\|_\alpha=\begin{cases}\sup\limits_n\left|f\left(z_1^{(n)},z_2^{(n)}\right)\right| & si \quad (z_1,z_2)\in D\diagdown D_0,\\ \max\left(\begin{array}{c}\sup\limits_n\left|f\left(z_1^{(n)},z_2^{(n)}\right)\right|,\sup\limits_n\left|\frac{f\left(z_1,z_2^n\right)-f(z_1,z_2)}{z_2^n-z_2}\right|,\\ \sup\limits_n\left|\frac{f\left(z_1^n,z_2\right)-f(z_1,z_2)}{z_1^n-z_1}\right|\end{array}\right), & en\ otro\ caso\end{cases}$$

A es un álgebra $m-$*convexa completa con la topología inducida por la familia de seminormas* $\{\|f\|_\alpha\}_\alpha$. *Como toda función holomorfa en* $D_{0,}$ *se extiende únicamente a una función holomorfa en* $D_1=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|^2+|z_2|^2<1\right\}$, *entonces* $\mathfrak{M}^{\#}(A)=\overline{D_1}$ *y* $\mathfrak{M}(A)=D$.

Como $\mathfrak{M}^{\#}(A)$ *es compacto se tiene por el teorema 3.14 que todo ideal máximo de* A *es de codimensión 1, y por el teorema 3.13 se concluye que* $\sigma(\overline{x})=\sigma_{\mathfrak{M}^{\#}}(\overline{x})$.

Además como $\mathfrak{M}(A)$ *es compacto, entonces se cumple la proposición 3.27, pero no todo ideal máximo de* A *es cerrado (ya que existe* $f\in\mathfrak{M}^{\#}(A)\diagdown\mathfrak{M}(A)$*), lo que implica que* A *tiene ideales finitamente generados densos. Por lo tanto, el teorema de Arens no se cumple para* A. *Además, en este ejemplo* $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})\neq\sigma(\overline{x})$ *(contrario a lo que pasaba para el espectro de un elemento en este tipo de álgebras).*

Los siguientes resultados claramente se siguen a partir de la proposición 3.27.

Corolario 3.29 *Sea* A *un álgebra unitaria,* $m-$*convexa, compleja y conmutativa, tal que* $\mathfrak{M}(A)$ *es compacto. Supóngase que sucede alguno de los siguientes enunciados:*

i) *No todo ideal máximo de A es cerrado*
ii) $\mathfrak{M}(A) \neq \mathfrak{M}^{\#}(A)$
Entonces no se cumple en A el teorema de Arens.

Corolario 3.30 *Sea A un álgebra unitaria, $m-$convexa, Fréchet. Si $\mathfrak{M}(A)$ es compacto, entonces $\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}^{\#}(A)$.*

Corolario 3.31 *Sea A un álgebra unitaria, $m-$convexa, compleja y conmutativa, tal que $\mathfrak{M}(A)$ es compacto y A no tiene ideales propios finitamente generados densos. Entonces $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.*

Corolario 3.32 *Sea A un álgebra unitaria, $m-$convexa, compleja y conmutativa, tal que $\mathfrak{M}(A)$ es compacto y todo ideal máximo de A es cerrado. Entonces $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.*

Corolario 3.33 *Sea A una $Q-$álgebra unitaria, $m-$convexa, compleja y conmutativa. Entonces $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, donde $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.*

Demostración: Como A es $Q-$álgebra, tiene todos sus ideales máximos cerrados y $\mathfrak{M}(A)$ es compacto. Entonces, por el corolario anterior se concluye la prueba. ■

3.4 Relaciones entre espectros en álgebras topológicas con unidad

Teorema 3.34 *Sea A es un álgebra topológica con e. Entonces son equivalentes:*
i) *A no tiene ideales propios finitamente generados densos*
ii) $\sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, *donde* $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.

Demostración: Claramente *i)* implica *ii)*, para probar la otra implicación considérese I ideal denso generado por $x_1, x_2, \cdots, x_n \in A$, entonces se tiene que $(0, 0, \cdots, 0) \notin \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x})$ y como $\sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$ se concluye que $(0, 0, \cdots, 0) \notin \sigma(\overline{x})$. Por lo tanto $I = A$. ■

Observación 3.35 *Entre las álgebras que cumplen la propiedad* $i)$ *del teorema anterior están las álgebras con todos sus ideales máximos cerrados, en particular las* $Q-$*álgebras tienen esa propiedad.*

Teorema 3.36 *Si* A *es un álgebra topológica con* e *tal que todos los ideales máximos de* A *son cerrados y la inversión en* A/M *, con* M *ideal máximo es continua, entonces* $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, *donde* $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.

Demostración: Como $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) \subset \sigma(\overline{x})$, basta con probar que $\sigma(\overline{x}) \subset \sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x})$. Sea $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \sigma(\overline{x})$, entonces $(x_1 - \lambda_1 e, \cdots, x_n - \lambda_n e)$ no es regular, es decir, $(x_1 - \lambda_1 e) A + \cdots + (x_n - \lambda_n e) A \neq A$ y por lo tanto el ideal $(x_1 - \lambda_1 e) A + \cdots + (x_n - \lambda_n e) A$ esta contenido en un ideal máximo M. Considérese el homomorfismo canónico $\pi : A \to A/M$, como la inversión en A/M es continua, entonces por el teorema de Gelfand-Mazur $A/M \cong \mathbb{C}$, además $\pi(x_i - \lambda_i e) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n$, concluyéndose que $\pi(x_i) = \lambda_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ y $\pi \in \mathfrak{M}(A)$. ■

Observación 3.37 *Si* A *es un álgebra topológica con* e *y la inversión en* A *es continua, no necesariamente la inversión es continua en* A/M *con* M *ideal máximo cerrado. (Veáse el ejemplo de W. Zelazko en el artículo* [17]*).*

Definición 3.38 *Un álgebra de Waelbroeck es un álgebra topológica con* e *tal que es* $Q-$*álgebra y tiene la inversión* $x \mapsto x^{-1}$ *continua* $(x \in A)$.

Teorema 3.39 *Si* A *es un álgebra de Waelbroeck e* I *es un ideal cerrado de* A, *entonces* A/I *es álgebra de Waelbroeck.*

Demostración: Como el mapeo canónico $\pi : A \to A/I$ es abierto y $G(A)$ es abierto, entonces $\pi(G(A))$ es abierto. Además como $\pi(G(A)) \subset G(A/I)$, se sigue que $G(A/I)$ es abierto. Para probar que la inversión en A/I es continua, primero se probará que es continua en $[e]$. Sea $\widetilde{V}$, una vecindad de $[e]$ en A/I y como π es continuo, entonces $V = \pi^{-1}\left(\widetilde{V}\right)$ es una vecindad de e. Por la continuidad de la inversión en A y como $G(A)$ es abierto, existe una vecindad U de e tal que $x^{-1} \in V$, para toda $x \in U$. Ahora, si $x \in U, (\pi(x))^{-1} = [x]^{-1} = [x^{-1}] \in \pi(V) = \widetilde{V}$.

Sea $[x] \in G(A/I)$. Entonces $[x]^{-1} \widetilde{V}$, con $\widetilde{V}$ una vecindad de $[e]$ en A/I , es una vecindad de $[x]^{-1}$. Si U es la vecindad que se eligió antes, entonces para toda $w \in U$, $[wx]$ es invertible y $(\pi(U)[x])^{-1} = [x]^{-1}(\pi(U))^{-1} \subset [x]^{-1}\widetilde{V}$. ■

Corolario 3.40 *Si A es álgebra de Waelbroeck, entonces* $\sigma_{\mathfrak{M}}(\overline{x}) = \sigma_{\mathfrak{t}}(\overline{x}) = \sigma(\overline{x})$, *donde* $\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in A^n$.

Demostración: Se sigue del teorema 3.36 y el teorema anterior. ■

Capítulo 4

$(C_b(X), \beta)$

Sea X un espacio topológico. Se denotará por $C(X)$ al álgebra de todas las funciones complejas continuas sobre X, por $B(X)$ al álgebra de todas las funciones complejas acotadas sobre X y por $C_b(X)$ a la subálgebra de $B(X)$ que tiene como elementos las funciones acotadas continuas. El ideal de $B(X)$ de todas las funciones que se anulan en infinito es denotado por $B_0(X)$ ($\varphi \in B_0(X)$ si para toda $\varepsilon > 0$, existe K, un subconjunto compacto de X, tal que para todo $x \notin K$, $|\varphi(x)| < \varepsilon$), $B_{00}(X)$ es el conjunto de todos los elementos en $B(X)$ con soporte compacto.

Un álgebra $A-$convexa es un álgebra A con una topología dada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ tales que para toda $x \in A$ y $\|\cdot\|_\alpha$, existe $M(x,\alpha) > 0$ tal que $\|xy\|_\alpha \leq M(x,\alpha)\|y\|_\alpha$ para toda $y \in A$.

Se considera $C(X)$ y $C_b(X)$ con la topología estricta β, la topología estricta sobre el álgebra $C_b(X)$ la introdujo C. Buck, para el caso en el que X es un espacio de Hausdorff localmente compacto. Para un espacio topológico arbitrario X esa topología fue definida por R. Giles como la topología localmente convexa sobre $C_b(X)$ dada por las seminormas

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x \in X} |f(x)\varphi(x)|, \text{ con } \varphi \in B_0(X)$$

El álgebra $(C_b(X), \beta)$ es $A-$convexa, ya que $\|fg\|_\varphi \leq \|f\|_\infty \|g\|_\varphi$ para toda $\varphi \in B_0(X)$ y $f, g \in C_b(X)$. Además es completa si X es un $k-$espacio ($F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$).

En este capítulo, se definen los espectros $\sigma_{C(X)}$ y σ_X de eneadas de elementos de $C(X)$ y $C_b(X)$ respectivamente. Se estudia la relación de éstos, con los espectros de eneadas definidos en el capítulo anterior.

4.1 $(C(X), \beta)$

Sea $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C(X))^n$. Se define $\sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n))$ de la siguiente manera,

$$\sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \{(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p)) : p \in X\}$$

Teorema 4.1 *Sea $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C(X))^n$. Entonces son equivalentes $i)$ y $ii)$:*
$i)$ $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ no es regular,
$ii)$ existe $x_0 \in X$, tal que $f_i(x_0) = 0$ para toda i, $(1 \leq i \leq n)$.

Demostración: Se probará $i)$ implica $ii)$, supóngase que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i) = \emptyset$, se considera la función

$$f(x) = f_1\overline{f_1}(x) + f_2\overline{f_2}(x) + \cdots + f_n\overline{f_n}(x) = |f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2 + \cdots + |f_n(x)|^2,$$

claramente $f(x) \neq 0$ para toda $x \in X$, de aquí que f es invertible.

Sea g la inversa de f. Entonces $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es regular, ya que $1 = fg(x) = f_1\overline{f_1}g(x) + f_2\overline{f_2}g(x) + \cdots + f_n\overline{f_n}g(x)$ para toda $x \in X$.

Para probar $ii)$ implica $i)$, supóngase que $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es regular, entonces existe $(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in (C(X))^n$ tal que $f_1g_1(x) + f_2g_2(x) + \cdots + f_ng_n(x) = 1$, para toda $x \in X$ y como por hipótesis existe $x_0 \in X$, tal que $f_i(x_0) = 0$ para toda i, $(1 \leq i \leq n)$, se concluye que

$$0 = f_1g_1(x_0) + f_2g_2(x_0) + \cdots + f_ng_n(x_0) = 1,$$

que es una contradicción. Por lo tanto, $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ no es regular. ■

Corolario 4.2 *Sea $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C(X))^n$. Entonces son equivalentes $i)$ y $ii)$:*
$i)$ $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$,
$ii)$ Existe $p \in X$, tal que $f_i(p) = \lambda_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Como consecuencia inmediata del corolario anterior, se tiene que

$$\sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n)).$$

Teorema 4.3 *Si* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C(X))^n$, *entonces* $\sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$.

Demostración: Como $(C(X), \beta)$ es un álgebra topológica, entonces $\sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n)) \subset \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, de ahí que solo basta con probar que $\sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n)) \subset \sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n))$.

Sean $(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p)) \in \sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n))$ y $\varphi_0 \in B_0(X)$ tal que $\varphi_0(p) \neq 0$. Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_i(p)) g_i - 1 \right\|_{\varphi_0} = \sup_{x \in X} \left| \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(p)) g_i(x) - 1 \right) \varphi_0(x) \right| \geq |\varphi_0(p)|,$$

con $g_i \in C(X), (1 \leq i \leq n)$. Por lo tanto, $(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p)) \in \sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n))$.

■

Se verán ahora las relaciones entre los espectros en $(C(\beta X), \beta)$, donde βX es la compactación de Stone Cech de X. (Veáse [10], capítulo 6)

X es denso en βX y toda función continua f de X a un conjunto compacto K de X, se extiende continuamente a una función $f^\star$ de βX a K.

Teorema 4.4 *Sea X un espacio topológico. Entonces* $0 \in \overline{f(X)}$, *si y sólo si,* $\ker f^\star \neq \emptyset$

Demostración: Basta con probar que $f^\star(\beta X) = \overline{f(X)}$. Considérese $y \in f^\star(\beta X)$, entonces existe $x \in \beta X$ tal que $f^\star(x) = y$, sea $(x_\alpha) \subset X$ tal que

$(x_\alpha) \to x$ por la continuidad de $f^\star$ se sigue que $f^\star(x_\alpha) \to f^\star(x) = y$. La otra contención se tiene porque $f(X) = f^\star(X) \subset f^\star(\beta X)$

y como $f^\star(\beta X)$ es cerrado, entonces $\overline{f(X)} \subset f^\star(\beta X)$. ■

Teorema 4.5 *Sea* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C(X))^n$. *Entonces son equivalentes i) y ii):*
i) $(f_1^\star, f_2^\star, \cdots, f_n^\star)$ *no es regular,*
ii) *existe* $x_0 \in \beta X$, *tal que* $f_i^\star(x_0) = 0$ *para toda* i, $(1 \leq i \leq n)$.

Demostración: Análoga a la del teorema 4.1. ■

Corolario 4.6 *Si* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C(X))^n$, *entonces* $\sigma_{C(\beta X)}((f_1^\star, f_2^\star, \cdots, f_n^\star)) = \sigma_t((f_1^\star, f_2^\star, \cdots, f_n^\star)) = \sigma((f_1^\star, f_2^\star, \cdots, f_n^\star)) \subset \overline{\sigma_{C(X)}((f_1, f_2, \cdots, f_n))}$.

Demostración: Se sigue del teorema anterior y del hecho que

$$\{(f_1^\star(p), f_2^\star(p), \cdots, f_n^\star(p)) : p \in \beta X\} \subset \overline{\{(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p)) : p \in X\}}.$$

■

4.2 Relaciones entre los espectros de eneadas de elementos de $(C_b(X), \beta)$

Para $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$, se define el conjunto

$$\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \{(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p)) : p \in X\}.$$

Surge la pregunta: Si ahora se considera $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$, ¿que relaciones hay entre $\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n)), \sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n))$ y $\sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$?. Esta se responderá a continuación.

A partir de ahora se considera, X Hausdorff completamente regular.

Observación 4.7 *Si* X *es Hausdorff completamente regular , entonces* $\mathfrak{M}(C_b(X), \beta) = X$. *Esto implica que* $\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma_{\mathfrak{M}}((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, *donde* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$.

Teorema 4.8 *Sea* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(\ X))^n$ *. Entonces se tienen los siguientes enunciados:*

i) *Si* $(0, 0, \cdots, 0) \in \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$*, entonces* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *no es regular.*

ii) *Si* $(0, 0, \cdots, 0) \in \overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))} \diagdown \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$*, entonces* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *es top. regular pero no regular.*

iii) *Si* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *es regular, entonces* $(0, 0, \cdots, 0) \notin \overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))}$.

Demostración: Para probar *i)*, supóngase que $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es regular, entonces existe $(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in (C_b(\ X))^n$ tal que $f_1g_1(x) + f_2g_2(x) + \cdots + f_ng_n(x) = 1$, para toda $x \in X$ y como por hipótesis existe $x_0 \in X$, tal que $f_i(x_0) = 0$ para toda i, $(1 \leq i \leq n)$, se concluye que $0 = f_1g_1(x_0) + f_2g_2(x_0) + \cdots + f_ng_n(x_0) = 1$, que es una contradicción. Por lo tanto, $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ no es regular.

ii) Sea $(0, 0, \cdots, 0) \in \overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))} \diagdown \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$. Como $(0, 0, \cdots, 0) \notin \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i) = \emptyset$.

Se define, f, $f(x) = f_1\overline{f_1}(x) + f_2\overline{f_2}(x) + \cdots + f_n\overline{f_n}(x)$, claramente $f(x) \neq 0$, para toda $x \in X$. De ahí que $fC_b(\ X)$ es denso en $(C_b(\ X), \beta)$, (veáse [4], corolario 2.2) y por lo tanto f es top. invertible, es decir, existe una red (g_λ) en $C_b(\ X)$ tal que $g_\lambda f \to e$. Considerando la definición de f, se tiene que $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es top. regular, ya que $g_\lambda f_1\overline{f_1} + g_\lambda f_2\overline{f_2} + \cdots + g_\lambda f_n\overline{f_n} \to e$.

Si se supone que $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es regular, entonces existe $(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in (C_b(\ X))^n$ tal que $f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_ng_n = e$ y como $(0, 0, \cdots, 0) \in \overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))}$, entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $x = x(\varepsilon) \in X$ tal que $|f_i(x)| < \varepsilon$, para toda i $(1 \leq i \leq n)$. De ahí que, $1 = f_1g_1(x) + f_2g_2(x) + \cdots + f_ng_n(x) < \varepsilon(g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)) < \varepsilon M$, ya que $g_1, g_2, \cdots, g_n \in C_b(\ X)$, concluyéndose que $1 < \varepsilon M$ para toda ε, que es una contradicción, por lo tanto, $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ no es regular.

iii) Si se supone que $(0, 0, \cdots, 0) \in \overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))}$, entonces para toda $\frac{1}{k} > 0$, existe $x_k = x\left(\frac{1}{k}\right) \in X$ tal que $|f_i(x_k)| < \frac{1}{k}$, para toda i $(1 \leq i \leq n)$ y como $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es regular, existe $(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in (C_b(\ X))^n$ tal que $f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_ng_n = e$, concluyéndose que $|f_1g_1(x_k)| + |f_2g_2(x_k)| + \cdots + |f_ng_n(x_k)| \geq 1$, por lo que para alguna i $(1 \leq i \leq n)$, $|f_ig_i(x_k)| \geq \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ y como $|f_i(x_k)| < \frac{1}{k}$, entonces $|g_i(x_k)| \geq \frac{k}{n}$ con n fija, por lo tanto g_i no es acotada (contradicción). ■

Teorema 4.9 *Sea* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$ *. Entonces* $(0, 0, \cdots, 0) \notin \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$ *, si y sólo si* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *es top. regular.*

Demostración: Por la demostración de $ii)$ en el teorema anterior se tiene que si $(0, 0, \cdots, 0) \notin \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, entonces $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ es top. regular. Para la otra implicación, supóngase que $(0, 0, \cdots, 0) \in \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, de ahí que existe $p \in X$ tal que $f_i(x) = 0$, para toda i, $(1 \le i \le n)$.

Sea

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

claramente $\varphi \in B_0(X)$.

Entonces $\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i g_i - e \right\|_\varphi = \sup_{x \in X} \left| \left(\sum_{i=1}^{n} f_i g_i(x) - 1 \right) \varphi(x) \right| \ge |\varphi(p)| > 0$, con $g_1, g_2, \cdots, g_n \in C_b(X)$, concluyéndose que $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ no es top. regular. ∎

Observación 4.10 *Sea* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$ *. Entonces* $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$*, si y sólo si,* $(0, 0, \cdots, 0) \in \sigma_X((f_1 - \lambda_1 e, f_2 - \lambda_2 e, \cdots, f_n - \lambda_n e))$.

Corolario 4.11 *Sea* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$ *. Entonces* $\sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n)) \subset \overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))} \subset \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$

Demostración: Se comenzará probando que $\sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$. Sea $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, entonces $(f_1 - \lambda_1 e, f_2 - \lambda_2 e, \cdots, f_n - \lambda_n e)$ no es top. regular y por el teorema 4.9 se sigue que

$$(0, 0, \cdots, 0) \in \sigma_X((f_1 - \lambda_1 e, f_2 - \lambda_2 e, \cdots, f_n - \lambda_n e)),$$

de ahí que $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$.

Para la otra contención considérese $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, entonces $(0, 0, \cdots, 0) \in \sigma_X((f_1 - \lambda_1 e, f_2 - \lambda_2 e, \cdots, f_n - \lambda_n e))$, por el teorema 4.9 se tiene que $(f_1 - \lambda_1 e, f_2 - \lambda_2 e, \cdots, f_n - \lambda_n e)$ no es top. regular, por lo tanto $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n))$.

$\overline{\sigma_X((f_1, f_2, \cdots, f_n))} \subset \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, se cumple por la observación anterior y $iii)$ del teorema 4.8. ∎

Observación 4.12 *En esta álgebra no se cumple que para* $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in (C_b(X))^n$, $\sigma_t((f_1, f_2, \cdots, f_n)) = \sigma((f_1, f_2, \cdots, f_n))$, *ya que si esto sucediera por el teorema* 3.34 *se tendría que* $(C_b(X), \beta)$ *no tiene ideales propios finitamente generados densos, pero en el corolario* 2.2 *del artículo* [4] *se tiene que en* $(C_b(X), \beta)$ *hay ideales principales densos.*

Bibliografía

[1] M. Abel and K. Jarosz, Topological algebras in which all maximal two-sided ideals are closed, their Applications and Related Topics, Banach Center Publications, $67(2005), 35-43$.

[2] M. Akkar et C. Nacir, Continuité automatique dans les limites inductives localement convexes et $Q-$ algebres de Fréchet, Ann. Sci. Math. Québec **19**$(1995), 115-130$.

[3] M. Akkar, A. Beddaa and M. Oudadess, Topologically invertible elements in metrisable algebras, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics $27(1996), 123-7$.

[4] H. Arizmendi-Peimbert and A. Carrillo-Hoyo, On the $m-$convexity of $C_b(X)$, Publ. Math. Debrecen 63, no. 3 $(2003), 379-388$.

[5] H. Arizmendi-Peimbert and A. Carrillo-Hoyo, On the topologically invertible elements of a topological algebra, Math. Proc. R. Ir. Acad. 107, no. 1 $(2007), 73-80$.

[6] H. Arizmendi-Peimbert, A. Carrillo-Hoyo and L. Palacios-Fabila, On some topological algebras of holomorphic functions, (1991)

[7] R. Choukri, Sur certaines questions concernant les $Q-$algebres, Extracta Math. $16, (2001), 79-82$.

[8] R. Choukri and A. El Kinani, Topological álgebras with ascending or descending chain condition. Arch. Math. 72 (1999), $438-443$.

[9] J. Conway, Functions of one complex variable (second edition), Springer-Verlag,1995.

[10] L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions, Springer-Verlag, 1960.

[11] R. Larsen, Banach algebras, Marcel Dekker,1973.

[12] A. Mallios, Topological algebras. Selected Topics, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.

[13] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1973.

[14] A.D. Thatte and Bhatt Sublash. On topolizing (topologizing) invertibility, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics $15(1984), 1308-1312$.

[15] S. Warner, Polynomial completeness in locally multiplicatively convex algebras, Duke Math. $23(1956), 1-11$.

[16] W. Zelazko, Banach algebras, Elsevier Publishing Company, 1973.

[17] W. Zelazko, Concerning continuity of inverse in quotients of topological algebras, (2004)

[18] W. Zelazko,On maximal ideals in commutative $m-$convex algebras, Studia Math. **48** $(1976), 291-298$.

[19] W. Zelazko, Selected topics in Topological algebras, Lectures 1969/1970. Lectures Notes Series, No. 31. Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1971.